

Programma del corso

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Richiami sulle strutture algebriche: insiemi, operazioni e loro proprietà. Gruppi, anelli, campi. Il campo dei numeri razionali, il campo dei numeri reali, il campo dei numeri complessi. Esempi di campi finiti.

Spazi vettoriali: definizione ed esempi. Lo spazio vettoriale \mathbf{K}^n , sul campo \mathbf{K} . Combinazioni lineari di vettori. Vettori linearmente indipendenti, vettori linearmente dipendenti. Sistemi di generatori. Basi. La base canonica di \mathbf{K}^n . Componenti di un vettore rispetto a una base fissata. Spazi vettoriali finitamente generati. La dimensione di uno spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali. Intersezione di sottospazi vettoriali, somma di sottospazi vettoriali. Sottospazi vettoriali generati da un insieme qualunque di vettori. La formula di Grassmann (dimensione dello spazio somma di due sottospazi vettoriali).

Funzioni lineari e matrici: definizione ed esempi. Il nucleo e l'immagine di una funzione lineare. Nullità e rango di una funzione lineare. Isomorfismi di spazi vettoriali. Matrici, somma di matrici, prodotto tra un numero reale e una matrice. Lo spazio vettoriale delle matrici con n righe e m colonne. Funzioni lineari e basi: la matrice associata a una funzione lineare. Prodotto (righe per colonne) di una matrice per un vettore. La composizione di due funzioni lineari. Il prodotto (righe per colonne) di due matrici. L'inversa di una funzione lineare e l'inversa di una matrice. Condizioni necessarie e sufficienti per l'invertibilità di una matrice. Il determinante di una matrice quadrata. Le principali proprietà del determinante. Il determinante del prodotto di due matrici (Teorema di Binet), il determinante dell'inversa di una matrice. La formula di Laplace (sviluppo di un determinante per righe o per colonne). Formula esplicita per l'inversa di una matrice. Operazioni elementari sulle righe (o sulle colonne) di una matrice, riduzione di una matrice a forma triangolare (superiore o inferiore). Riduzione di una matrice nella forma a scala. Applicazione al calcolo del rango.

Sistemi di equazioni lineari: il Teorema di Cramer, il Teorema di Rouché-Capelli. Risoluzione di un sistema di equazioni lineari mediante il metodo di eliminazione di Gauss. Sistemi lineari omogenei e non omogenei, relazioni tra l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare e lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

Autovalori e autovettori: autovalori e autovettori di un endomorfismo di uno spazio vettoriale, autovalori e autovettori di una matrice quadrata. Autospazi. Polinomio caratteristico e equazione caratteristica. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Criterio di diagonalizzabilità. Matrici simili, matrici diagonalizzabili.

Prodotti scalari: la norma di un vettore di \mathbf{R}^n , il prodotto scalare di due vettori di \mathbf{R}^n , l'angolo tra due vettori (la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Ortogonalità tra vettori e tra sottospazi vettoriali. Decomposizione di un vettore come somma di vettori ortogonali. Proiezioni ortogonali. Basi ortogonali e basi ortonormali. Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Forme bilineari simmetriche e loro principali proprietà. Autovalori e autovettori di matrici simmetriche: matrici ortogonalmente diagonalizzabili.

Spazi affini e spazi affini euclidei: definizione ed esempi. Sottospazi affini: equazioni parametriche ed equazioni cartesiane. Sottospazi incidenti, paralleli, sghembi. Sottospazi ortogonali. Distanze tra sottospazi affini. Rette e piani nello spazio affine reale tridimensionale. Vettore normale a un piano. Distanza di un punto da una retta e di un punto da un piano. Distanza tra due rette sghembe. Fasci di piani. Alcuni cenni su circonferenze, sfere, coni e cilindri.