Programma del corso di Analisi Matematica 1
Canale A
Ingegneria Informatica, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Docenti: Marco Cirant[1] e Alessandro Goffi[2]
a.a. 2022-2023

Testi di riferimento:

- M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 1. Bologna: Zanichelli, 2008.
- M. Bramanti, Esercitazioni di Analisi Matematica 1. Bologna: Esculapio, 2011.

Altri testi consigliati per consultazione:

- A. Marson, P. Baiti, F. Ancona e C. Rubino, Analisi Matematica 1, Teoria e Applicazioni, ed. Carocci.
- M. Bertsch, R. Dal Passo e L. Giacomelli, Analisi Matematica, McGraw-Hill (2a edizione);
- S. Salsa e A. Squellati, Esercizi di Analisi Matematica 1, ed. Zanichelli.

Nota: Di norma le lezioni verranno svolte con l'ausilio di un tablet e il pdf delle singole lezioni caricato online nella piattaforma moodle giornalmente.

Programma dettagliato:

1 Elementi introduttivi

1.1 Logica elementare, sommatorie e principio di induzione

- Quantificatori. Negazione di proposizioni con quantificatori.
- Sommatorie e loro proprietà.
- Principio di induzione. Formule della progressione geometrica e della progressione telescopica (entrambe con dim.).
- Definizione di fattoriale. Coefficienti binomiali e loro proprietà. Formula del binomio di Newton (con dim.).

[1]Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", E-mail: marco.cirant@unipd.it
[2]Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", E-mail: alessandro.goffi@unipd.it

1.2 Elementi di teoria degli insiemi, insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

- Simboli e operazioni con gli insiemi. Prodotto cartesiano di insiemi. Insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato. $\mathbb{Q}$ non contiene $\sqrt{2}$ (con dim.).

- L'insieme $\mathbb{R}$. Teorema di completezza. Retta reale estesa.

- Definizione di modulo o valore assoluto. Proprietà fondamentali.

- Insiemi limitati, superiormente o inferiormente limitati. Definizione di: maggiorante, minorante, massimo minimo, estremo superiore ed estremo inferiore. Unicità del massimo e del minimo. Caratterizzazione dell'estremo superiore e inferiore (con dim.). Radicali ed esponenti a potenza reale. Logaritmi.

1.3 Insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi

- I numeri complessi e loro operazioni. Forma algebrica dei complessi. Coniugato di un complesso e sue proprietà (con dim.). Teorema di decomposizione di un polinomio a coefficienti reali (con dim.). Teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze. Piano di Gauss. Modulo e sue proprietà (con dim.). Argomento e sue proprietà (con dim.). Forma trigonometrica dei complessi. Formula di De Moivre (con dim.). Formula di Eulero. Proprietà degli esponenziali complessi (con dim.). Radici n-esime di un complesso (con dim.). Equazioni di secondo grado a coefficienti complessi.

2 Funzioni

- Definizione di funzione. Dominio, codominio, immagine e grafico di una funzione. Funzioni reali di variabile reale. Funzioni elementari. Immagine e controimmagine di insiemi tramite una funzione. Composizione di funzioni. Funzioni iniettive e suriettive. Funzione inversa. Funzione invertibile su un insieme. Funzioni pari e dispari. Funzioni periodiche. Funzioni monotone.

- Funzioni iperboliche e loro proprietà (con dim.). Funzioni iperboliche inverse e loro formula (con dim.). Funzioni trigonometriche e loro inverse. Funzione "parte intera", mantissa e di Dirichlet.

- Funzioni limitate ed illimitate. Massimo, minimo, estremo superiore e inferiore di una funzione. Punti di estremo di una funzione. Estremi ed estremanti.

3 Limiti di funzioni

- Intorni sferici. Intersezioni di intorni è un intorno. Proprietà di separazione (con dim.). Punti di accumulazione e punti isolati di un insieme. Proprietà verificate definitivamente.
- Definizione di limite di una funzione nelle sue varie formulazioni. Teorema di unicità del limite (con dim.). Limite finito implica limitatezza locale (con dim.).
- Punto di accumulazione destro e sinistro di un insieme. Limite destro e limite sinistro di una funzione. Relazione tra limite ed i limiti destro e sinistro (con dim.).
- Relazione tra limite di una funzione e limite del suo modulo (con dim.). Teorema della permanenza del segno (con dim.) e conseguenze (con dim.). Teorema dei carabinieri (con dim.). Limite al finito della funzione $\cos x$. Limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (con dim.). Forme indeterminate. Teoremi sull'algebra dei limiti (con dim.). Teorema del confronto (con dim.). Teorema del cambio di variabile (con dim.). Teorema sul limite di funzioni monotone (con dim.). Limiti al finito delle principali funzioni elementari. Limiti notevoli derivanti da $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (con dim.).
- Definizione del numero di Nepero e limiti notevoli conseguenti (inzialmente senza dim.)
- Asintoticità di due funzioni. Il simbolo "o-piccolo" e la sua algebra. Relazione tra asintoticità ed "o-piccolo" (con dim.). Cambio di variabile negli sviluppi. Teorema di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti (con dim.). Il simbolo "O-grande". Ordine di infinito e infinitesimo. Ordine di infinito e infinitesimo rispetto ad una funzione-campione.
- Gerarchia degli infiniti tra funzioni elementari

4 Successioni

- Definizione di successioni. Proprietà verificate definitivamente da una successione. Definizione di limite di una successione. Successioni convergenti, divergenti, infinitesime, indeterminate e monotone. Una successione convergente è limitata (con dim.).
- Teorema dell'unicità del limite, relazione tra limite e modulo, teorema sull'algebra dei limiti, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto, teorema dei carabinieri, caratterizzazione del limite per le successioni monotone (senza dim.).
- Gerarchia degli infiniti per le successioni.
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è una successione convergente.

- Definizione del numero di Nepero e limiti notevoli conseguenti (con dim.).
- Sottosuccessioni. Una successione ha limite l se e solo se tutte le sue sottosuccessioni hanno limite l. Teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni. Teorema ponte (con dim.).

5 Serie

- Somme parziali. Definizione di serie convergente, divergente, regolare e indeterminata.
- Serie geometrica e suo carattere (con dim.). Serie di Mengoli e suo carattere (con dim.). Carattere della somma di serie convergenti e del prodotto di una serie regolare per una costante.
- Limite del termine generale di una serie convergente (con dim.). Possibili caratteri di una serie con termine di segno definitivamente costante (con dim.). Serie assolutamente convergenti. Convergenza assoluta implica convergenza semplice (con dim.). Criterio di condensazione. Carattere della serie armonica (con dim.). Carattere della serie armonica generalizzata (con dim.). Carattere della serie con termine generale $a_n = [n^\alpha \log^\beta n]^{-1}$ (con dim.). Criterio del confronto (con dim.) e corrispondente criterio asintotico (con dim.). Criterio della radice e corrispondente criterio asintotico (con dim.). Criterio di Leibniz (con dim.)
- Il problema dell'impilaggio dei blocchi.

6 Funzioni continue di una variabile reale

- Definizione di funzione continua e principali proprietà.
- Punti di discontinuità eliminabile, prima e seconda specie. Prolungamento per continuità.
- Teorema di Weierstrass (con dim.). Teorema degli zeri (con dim.). Teorema dei valori intermedi. Teorema: Sia data una funzione continua, allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Teorema di continuità della funzione inversa.
- Continuità delle funzioni elementari e delle principali funzioni inverse.

7 Calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale

- Definizione di derivata prima di una funzione e di funzione derivabile. Interpretazione geometrica. Rapporto incrementale di una funzione in un punto. Migliore approssimazione lineare di una funzione. Retta tangente al grafico di una funzione. Continuità di una funzione derivabile (con dim.). Calcolo della derivata di alcune funzioni elementari (con dim.). Derivata destra e sinistra. Legame tra derivabilità e derivabilità destra e sinistra.

- Teoremi sull'algebra delle derivate (derivata della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni derivabili) (con dim.). Derivata della funzione composta (con dim.). Derivata della funzione inversa di una funzione invertibile e derivabile (con dim.). Calcolo delle derivate delle principali funzioni elementari (con dim.). Classificazioni dei punti di non derivabilità: punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale.
- Derivate successive e funzioni di classe C^n.
- Teorema di Fermat (con dim.). Teorema di Rolle (con dim.). Teorema di Lagrange (con dim.). Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (con dim.). Teorema di Cauchy. Legame tra monotonia e derivata prima (con dim.). Teorema di de l'Hôpital (con dim., solo per la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ in un punto di $\mathbb{R}$). Teorema sulla relazione tra derivata destra/sinistra e limite destro/sinistro della derivata.
- Funzioni convesse e concave. Monotonia della derivata prima di una funzione convessa o concava. Legame tra il segno della derivata seconda e convessità/concavità (con dim.). Punti di flesso. Legame tra zeri della derivata seconda e punti di flesso. Studio della natura dei punti critici con la derivata seconda.
- Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui di una funzione. Teorema sulla caratterizzazione degli asintoti obliqui (con dim.).
- Studi di funzione.
- Polinomi di Taylor e di Mc Laurin. Principali proprietà dei polinomi di Taylor. Teorema di Peano (con dim.). Sviluppo delle principali funzioni elementari. Calcolo dei limiti mediante gli sviluppi.
- Teorema sulla formula di Taylor con resto in forma di Lagrange.
- Serie di Taylor. Funzioni sviluppabili in serie di Taylor. Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor (con dim.).

8 Calcolo integrale per funzioni reali di una variabile reale

- Partizioni di un intervallo. Norma di una partizione e partizione puntata.

- Definizione di funzione integrabile secondo Cauchy-Riemann su un intervallo e proprietà equivalenti. Integrale definito di una funzione e sua interpretazione geometrica. Esempi di funzioni integrabili (con dim.). Non integrabilità della funzione di Dirichlet (con dim.).

- Linearità dell'integrale. Additività rispetto all'intervallo di integrazione. Monotonia. Disuguaglianza sull'integrale del modulo di una funzione integrabile.

- Integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue a tratti. Integrabilità delle principali funzioni elementari (con dim.).

- Teorema della media integrale (con dim.) e relativa interpretazione geometrica.

- Primitiva di una funzione. Integrale indefinito di una funzione. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.). Integrali immediati. Derivata di una funzione integrale (con dim.).

- Integrazione per sostituzione (con dim.). Integrazione per parti (con dim.). Integrazione per sostituzione.

- Integrazione di funzioni razionali fratte e integrali a esse riconducibili.

- Funzioni integrabili in senso improprio o generalizzato. Integrale in senso improprio o generalizzato. Assoluta integrabilità. Assoluta integrabilità implica integrabilità in senso semplice. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Test della serie. Integrabilità di $\frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}$ in un intorno di $x = 0$ e all'infinito (con dim.). Funzione integrale e sue proprietà. Derivata della funzione integrale (con dim.).