Fisica 1

Le interazioni fondamentali

1. Interazione gravitazionale

   una forza debole rispetto alle altre, ma presente anche su lunghe distanze

2. Interazione elettromagnetica

   attrazione tra particelle cariche

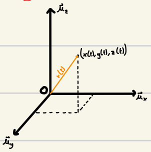
3. Interazione debole

   si verifica tra leptoni (elettroni, neutrini, ...) ed è alla base del decadimento β (neutrone $\longrightarrow$ protone)

4. Interazione forte

   unisce tra loro le particelle subatomiche per formare protoni, neutroni, ...

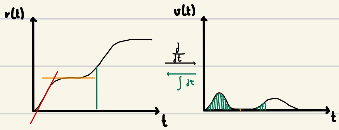
Il punto materiale



Un approssimazione matematica, assegno ad un punto una massa ed una posizione ad un dato istante

[massa] = kg   [x(t), y(t), z(t)] = m   [tempo] = s   [Temperatura] = K

$$\vec{r}(t) \underset{\frac{d}{dt}}{\overset{\int d\tau}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\frac{d}{dt}}{\overset{\int d\tau}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$



Moto uniformemente accelerato

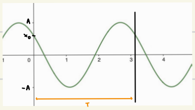
$\vec{a}(t) = \text{costante} = \vec{a}$

$$\vec{v}(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\, d\tau = v_0 + \vec{a}\cdot(t-t_0)$$

$$\vec{r}(t) = r_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\, d\tau + \int_{t_0}^{t} a\tau\, d\tau - \int_{t_0}^{t} a t_0\, d\tau = r_0 + v_0(t-t_0) + \tfrac{1}{2}a(t^2-t_0^2) - a(t-t_0)t_0 = r_0 + v_0(t-t_0) + \tfrac{1}{2}a\left(t^2 - \cancel{t_0^2} - 2tt_0 + \cancel{2}t_0^2\right) = r_0 + v_0(t-t_0) + \tfrac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

Moto armonico semplice

Un moto si definisce armonico se si può descrivere con una formula del tipo:



$\vec{r}(t) = A\sin(wt+\phi)$ o $\vec{r}(t) = A\sin(w(t-t_0))$ dove   A = ampiezza
w = velocità angolare $[w] = {}^{rad}/_{s}$
ϕ = fase o angolo iniziale

$\vec{v}(t) = Aw\cos(wt+\phi)$

$\vec{a}(t) = -Aw^2\sin(wt+\phi) = -w^2\vec{r}(t)$

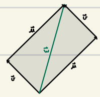
$T = \frac{2\pi}{w}$

Vettori

Un vettore è definito da lunghezza, direzione e verso

Somma vettoriale

Siano $\vec{v}, \vec{u}$ vettori allora $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ è un vettore



PROP

$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$

$(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$

$\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$

$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

Prodotto scalare

$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta$

In $\mathbb{R}^3$ $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$

$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

PROP

$(\lambda\vec{v}) \cdot \vec{u} = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{u})$ $\quad$ $(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Prodotto vettoriale

$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \sin\theta \, \vec{u}_c$ ($\vec{u}_c$ trovato con la regola della mano destra)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z) \times (b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) = a_x b_y \vec{u}_z - a_x b_z \vec{u}_y - a_y b_x \vec{u}_z + a_y b_z \vec{u}_x - a_z b_x \vec{u}_y - a_z b_y \vec{u}_x$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{u}_x + (-a_x b_z - a_z b_x)\vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{u}_z$$

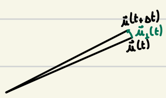
PROP

$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Derivata di un vettore

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}r_x(t)\,\vec{u}_x + \frac{d}{dt}r_y(t)\,\vec{u}_y + \frac{d}{dt}r_z(t)\,\vec{u}_z$$

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\perp(t)$$



Principi della dinamica

1. Principio d'inerzia: "in assenza di forze agenti su un corpo, questo si muove a velocità costante"

2. Legge di Newton

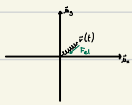
La somma delle forze agenti su un corpo è uguale alla differenza di quantità di moto

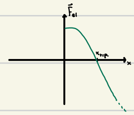
$$\vec F_{TOT}(\vec r(t), \vec v(t), t) = \frac{d}{dt}\vec p(t) = \frac{d}{dt} m\vec v(t) = m\vec a(t)$$

3. Principio di azione-reazione: Se un corpo A esercita $\vec F_{AB}$ su B, allora B esercita $\vec F_{BA} = -\vec F_{AB}$ su A

Forza elastica

$\vec F_{el} = -k\vec r(t)$ dove k è la costante elastica $[k] = N \cdot m$

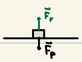




La forza elastica descrive una qualsiasi forza di richiamo

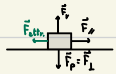
La Reazione Vincolare

La forza esercitata da un piano, una fune, ... su un corpo



Forza di attrito radente

$$\vec F_{attr.} = \begin{cases} -\vec F_{\parallel} & \text{se } \mu_s \|\vec F_{\perp}\| > \|\vec F_{\parallel}\| \quad \text{Attrito statico} \\ -\mu_d \|\vec F_{\perp}\| \vec u_v & \text{altrimenti} \quad \text{Attrito dinamico} \end{cases}$$



Forza di attrito viscoso

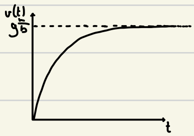
$\vec F_{visc} = -b\vec v \qquad [b] = \frac{kg}{s}$

$m\vec a = -b\vec v \Rightarrow m\frac{d\vec v}{dt} = -b\vec v \Rightarrow \boxed{a(t) = -\frac{b}{m} v_0 e^{-\frac{b}{m}t}}$

Sia $v(t) = v_0 e^{\lambda t} \quad [\lambda] = \frac{1}{s}$ e $v_0 = v(t=0)$

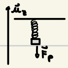
$m\cancel{v_0}\lambda\cancel{e^{\lambda t}} = -b\cancel{v_0}\cancel{e^{\lambda t}} \Rightarrow \lambda = -\frac{b}{m} \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}}$

$r(t) = r_0 + \int_0^t v_0 e^{-\frac{b}{m}\tau} d\tau \Rightarrow \boxed{r(t) = r_0 - v_0\frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t} + v_0\frac{m}{b}}$



Forza elastica e Forza peso

$F_{TOT} = F_p + F_{el} \Rightarrow \cancel{m}\ddot{z} = -\cancel{m}g - \frac{k}{m}z \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}z(t) + \frac{k}{m}z(t) + g = 0$



$\vec{F}_p = -mg \quad \vec{F}_{el} = -kz$

- Una soluzione è quella costante $z(t) = \Delta l$

  $-\frac{k}{m}\Delta l = -g \Rightarrow \Delta l = \frac{gm}{k}$

- Trovo l'altra soluzione:

  pongo $\tilde{z}(t) = z(t) - \Delta l \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\tilde{z}(t) + \frac{k}{m}(\tilde{z}(t) + \Delta l) + g = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\tilde{z}(t) + \frac{k}{m}\tilde{z}(t) + \frac{k}{m}\Delta l + g = 0 \underset{\Delta l = -\frac{gm}{k}}{\Rightarrow} \frac{d^2}{dt^2}\tilde{z}(t) + \frac{k}{m}\tilde{z}(t) \cancel{-g+g} = 0$

  pongo $\tilde{z}(t) = z_0 e^{\lambda t} \Rightarrow z_0\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m}z_0 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow z_0 e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right) = 0 \iff \lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

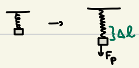
  quindi la soluzione è $\tilde{z}(t) = z_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \Rightarrow$ se $z_1 = \frac{A}{2}$ e $z_2 = \frac{A}{2}$ $\quad \tilde{z}(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) \iff \tilde{z}(t) = A_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi\right)$

  $\Rightarrow$ se $z_1 = \frac{B}{2i}$ e $z_2 = -\frac{B}{2i}$ $\quad \tilde{z}(t) = B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$

Oss

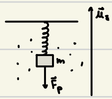
Le leggi orarie di una molla in presenza o meno di forza peso differiscono solamente di un valore costante

$\tilde{z}(t)$ e $z(t)$ descrivono entrambe un moto armonico centrato in punti diversi



Forza peso, Forza elastica e Attrito Viscoso

$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_p + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{att.}$



$\cancel{m}\cdot a_z = -\cancel{m}g - \frac{k}{m}z - \frac{b}{m}v_z \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}z(t) + \frac{b}{m}\frac{d}{dt}z(t) + \frac{k}{m}z + g = 0$

pongo $\tilde{z}(t) = z(t) - \Delta l \Rightarrow \frac{d^2}{dt}\tilde{z}(t) + \frac{b}{m}\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) + \frac{k}{m}\tilde{z}(t) + \cancel{\frac{k}{m}\Delta l + g} = 0 \quad \Delta l = -\frac{mg}{k}$

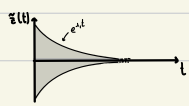
pongo $\tilde{z}(t) = z_0 e^{\lambda t} \Rightarrow z_0 e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right) = 0$

- $z_0 e^{\lambda t} = 0 \iff z_0 = 0$ soluzione costante
- $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - w^2} \quad \gamma = \frac{b}{2m}$ coeff. di smorzamento $\quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

  - $\gamma^2 > w^2$ soluzioni reali $\quad \lambda_1 = -\gamma + \sqrt{|\gamma^2 - w^2|} < 0$
    $\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{|\gamma^2 - w^2|} < \lambda_1 < 0$

    $\tilde{z}(t) = e^{\lambda_1 t} + \underbrace{e^{\lambda_2 t}}_{\text{trascurabile } (\lambda_1 > \lambda_2)}$

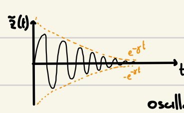
    dato che le soluzioni sono < 0 per $t \to +\infty$



  - $\gamma^2 < w^2$ soluzioni imaginarie $\quad \lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{|\gamma^2 - w^2|}$
    $\lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{|\gamma^2 - w^2|}$

$\tilde{z}(t) = r_1 e^{\lambda_1 t} + r_2 e^{\lambda_2 t}$ se $r_1 = r_2 = \frac{A}{2}$ $\quad \tilde{z}(t) = \frac{A}{2}e^{-\gamma t}e^{i\sqrt{|\gamma^2 - w^2|}t} + \frac{A}{2}e^{-\gamma t}e^{-i\sqrt{|\gamma^2 - w^2|}t} = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{|\gamma^2 - w^2|}\cdot t\right)$

se $r_1 = r_2 = \frac{B}{2i}$ $\quad \tilde{z}(t) = Be^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{|\gamma^2 - w^2|}\cdot t\right)$



oscillazioni smorzate

La soluzione più generale (sommando sin e cos): $\tilde{z}(t) = e^{-\gamma t}A_0\cos\left(\sqrt{|\gamma^2 - w^2|}\,t + \varphi\right)$

Risonanza

$\vec{F}_{Tot} = \vec{F}_p + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{att.} + \vec{F}_{ext} \iff \cancel{m}\vec{a} = -\cancel{m}\vec{g} - \underline{k}\vec{z} - \underline{\frac{b}{m}}\vec{v}_z + F_0 \sin(\Omega t)$ dove Ω frequenza forza est

$\iff \frac{d^2}{dt^2}\tilde{z}(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) + \omega^2\tilde{z}(t) = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$ dove $\gamma = \frac{b}{2m}$ coeff. di smorzamento $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

È sufficiente trovare una soluzione $\tilde{z}(t)$, tutte le altre sono $\tilde{z}(t) + \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}_{\to 0 \text{ per } t \to +\infty}$

Uso $\tilde{z}(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$

$\hookrightarrow -A\Omega^2\sin(\Omega t + \phi) + 2\gamma A\Omega\cos(\Omega t + \phi) + A\omega^2\sin(\Omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$

$\Rightarrow (-A\Omega^2 + A\omega^2)\left[\sin(\Omega t)\cos\phi + \cos(\Omega t)\sin\phi\right] + 2\gamma A\Omega\cos(\Omega t)\cos\phi + 2\gamma A\Omega\sin(\Omega t)\sin\phi = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$

$\Rightarrow \sin(\Omega t)\underbrace{\left[\cos\phi(-A\Omega^2 + A\omega^2) - 2\gamma A\Omega\sin\phi - \frac{F_0}{m}\right]}_{①} + \cos(\Omega t)\underbrace{\left[\sin\phi(-A\Omega^2 + A\omega^2) + 2\gamma A\Omega\cos\phi\right]}_{②} = 0 \quad \forall t \iff ① = ② = 0$

quindi, se $① = 0$, $② = 0$ $\quad \sin\phi \cdot ① - \cos\phi ② \overset{!}{=} 0$ e $\cos\phi ① + \sin\phi ② \overset{!}{=} 0$

$$\begin{cases} \cancel{(-A\Omega^2 + A\omega^2)\cos\phi\sin\phi} - 2\gamma A\Omega\sin^2\phi - \frac{F_0}{m}\sin\phi - \cancel{(-A\Omega^2 + A\omega^2)\sin\phi\cos\phi} - 2\gamma A\Omega\cos^2\phi = 0 \Rightarrow -2\gamma A\Omega(\underbrace{\sin^2\phi + \cos^2\phi}_{=1}) = \frac{F_0}{m}\sin\phi \\ (-A\Omega^2 + A\omega^2)\cos^2\phi - \cancel{2\gamma A\Omega\sin\phi\cos\phi} - \frac{F_0}{m}\cos\phi + (-A\Omega^2 + A\omega^2)\sin^2\phi + \cancel{2\gamma A\Omega\cos\phi\sin\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\gamma A\Omega = \frac{F_0}{m}\sin\phi \\ -A\Omega^2 + A\omega^2 = \frac{F_0}{m}\cos\phi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ divido le eq. $\frac{\cancel{\frac{F_0}{m}}\sin\phi}{\cancel{\frac{F_0}{m}}\cos\phi} = \frac{-2\gamma\Omega\cancel{A}}{(\omega^2 - \Omega^2)\cancel{A}} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}$

$\Rightarrow$ sommo i quadrati $A^2(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 A^2\Omega^2 = \frac{F_0^2}{m^2}(\underbrace{\cos^2\phi + \sin^2\phi}_{=1}) \Rightarrow \boxed{A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}}$

In conclusione

$\boxed{v(t) = A\sin(\Omega t + \phi)}$ con $\tan\phi$ e A definiti sopra

La frequenza di risonanza è Ω_r t.c. A è massima

$\left.\frac{d}{d\Omega}A\right|_{\Omega_r} = 0 \iff \Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \Rightarrow A(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\gamma}\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$

Tensione nei fili

Consideriamo il filo ideale (massa trascurabile e inestendibile)

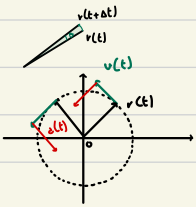
La forza lungo il filo si chiama Tensione (si indica con $\vec{T}$)

Moto circolare

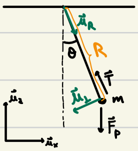
$\vec{r}(t) = R \cdot \vec{u}_R(t)$

$\vec{v}(t) = R\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp(t)$ e ω = velocità angolare $= \frac{d\theta}{dt}$ $[\omega] = rad/s$

$\vec{a}(t) = \underbrace{R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\perp(t)}_{=0 \text{ se uniforme}} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_R$



Pendolo semplice



$$F_\perp = \cancel{m} a_\perp = -\cancel{m} g \sin(\theta(t))$$

$$F_R = m a_R = mg\cos(\theta(t)) - T$$

$$a(t) = \underbrace{R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\perp}_{=a_\perp} - \underbrace{R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_R}_{=a_R}$$

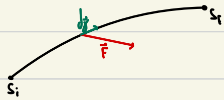
$$- \quad R\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta(t) \overset{\text{piccole oscillazioni}}{\approx} R\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\,\theta(t) \Rightarrow \theta(t) = A\sin(\omega t + \phi) \ , \quad \omega^2 = \frac{g}{R}$$

$$\vec{r}(t) = R\cdot\theta(t) \qquad \vec{v}(t) = RA\omega\cos(\omega t + \phi) \quad e \quad \vec{a}(t) = -RA\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

$$- \quad -mR\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T \Rightarrow T = mg\cos\theta + mR\omega^2$$

Il lavoro

Sia $\vec{\gamma}$ una curva in $\mathbb{R}^3$ e $\vec{F}(\vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}, t)$ una funzione



$$W_F(\vec{\gamma}) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\left(\vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{dt}\right)\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}\,d\tau$$

oss (4.1)

Sia $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ allora $W_F = W_{F_A} + W_{F_B}$

Teorema dell'energia cinetica

Se $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(t)$ Allora il lavoro di una forza lungo la curva della legge oraria è uguale alla variazione dell'energia cinetica

DIM

$$W_F(\vec{r}) = \int_{t_i}^{t_f} F(\vec{r},\vec{v},t)\,\vec{v}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} m\cdot\vec{a}\cdot\vec{v}\cdot dt = m\left[\underbrace{\int_{t_i}^{t_f} a_x v_x\,dt}_{} + \int_{t_i}^{t_f} a_y v_y\,dt + \int_{t_i}^{t_f} a_z v_z\,dt\right] = \frac{m}{2}\left[v_{xf}^2 - v_{xi}^2 + v_{yf}^2 - v_{yi}^2 + v_{zf}^2 - v_{zi}^2\right] = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_f\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}_i\|^2 \overset{!}{=} E_{Kf} - E_{Ki} = \Delta E_K$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dv_x}{dt} v_x\,dt = \int_{v_{xi}}^{v_{xf}} v_x\,dv_x = \frac{1}{2}v_x^2\Big|_{v_{xi}}^{v_{xf}}$$

$$[E_K] = kg\,{}^{m^2}\!/_{s^2} = J$$

OSS

Il calcolo del lavoro per le forze "centrali" risulta essere più semplice

$$W_{F_c}(\vec{\gamma}) = \int_{t_i}^{t_f} F(\|\vec{\gamma}\|)\vec{u}_\gamma\cdot\left[\frac{d\|\vec{\gamma}\|}{dt}\vec{u}_\gamma + \cancel{\|\vec{\gamma}\|\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp}\right]dt = \int_{t_i}^{t_f} F(\|\vec{\gamma}\|)\,d\|\vec{\gamma}\| = \int_{\|\gamma\|_i}^{\|\gamma\|_f} F(x)\,dx = V(x)\Big|_{\|\gamma\|_i}^{\|\gamma\|_f} = V(\|\gamma\|_f) - V(\|\gamma\|_i)$$

$\vec{u}_\gamma\cdot\vec{u}_\perp = 0$

sia $\frac{dV}{dx} = F(x)$

OSS

Calcolo del lavoro di alcune forza

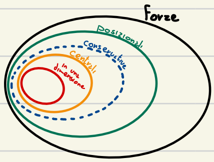
$$W_{F_p}(\vec{r}(t)) = \int_{s_i}^{s_f} -mg\,ds = -mg(s_f - s_i)$$

$$W_{F_{att.\ statico}} = 0 \qquad W_{F_{reaz.}} = 0 \qquad (\text{le curve sono} \perp 0)$$

$$W_{F_{el}}(\vec{\gamma}) = \int_{\|\gamma\|_i}^{\|\gamma\|_f} -k\|\gamma\|\,d\|\gamma\| = -k\left(\frac{1}{2}\|\gamma\|_f^2 - \frac{1}{2}\|\gamma\|_i^2\right) = \frac{k}{2}\|\gamma\|_i^2 - \frac{k}{2}\|\gamma_f\|^2$$

$$W_{F_{grav}}(\vec{\gamma}): \quad F(x) = -G\frac{m_1 m_2}{x^2} \qquad V(x) = Gm_1m_2\frac{1}{x} + c \qquad W_{F_{grav}}(\vec{\gamma}) = Gm_1m_2\left(\frac{1}{\|\gamma_f\|} - \frac{1}{\|\gamma_i\|}\right)$$

Forze posizionali



Una Forza si dice posizionale se il suo lavoro dipende da $\vec{\gamma}(t)$, ma non $\frac{d\vec{\gamma}}{dt}$ o t

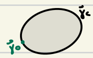
Forze conservative

Una forza si dice conservativa se il suo lavoro dipende solo da $\gamma(t_i)$ e $\gamma(t_f)$

Teorema dell'energia potenziale

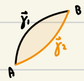
Una Forza è conservativa $\iff$ $W_F(\vec{\gamma}_c)=0$ ($\vec{\gamma}_c$ curva chiusa)

DIM



($\Rightarrow$) F conservativa $\Rightarrow$ $W_F(\vec{\gamma}_c) = W_F(\vec{\gamma}_0)$ dove $\vec{\gamma}_0$ è la curva costante con gli stessi estremi

e $W_F(\vec{\gamma}_0)=0$ per def. di lavoro



($\Leftarrow$) Sia $\vec{\gamma}_{\bar{2}}$ la curva in senso opposto a $\vec{\gamma}_2$ e sia $\vec{\gamma}_c$ la curva composta da $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_{\bar{2}}$

Se $W_F(\vec{\gamma}_c) = W_F(\vec{\gamma}_1) - W_F(\vec{\gamma}_{\bar{2}}) = 0 \Rightarrow W_F(\vec{\gamma}_1) = W_F(\vec{\gamma}_{\bar{2}}) \Rightarrow F$ conservativa

Energia potenziale

Per una forza conservativa posso definire:

$E_p(\vec{r}) = -W_F(\vec{\gamma}_1(t))$ dove $\gamma_1(t_i)=0$ e $\gamma_1(t_f)=\vec{r}$

oss (4.5)

E_p è definita al netto di una costante legata a $\vec{\gamma}(t_i)$

$E_p'(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) - E_p(\vec{r}_0)$

oss (4.6)

A livello infinitesimale:

$dW = F\cdot ds = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$

$\Rightarrow dE_p = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow F_x = \frac{\partial E_p}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial E_p}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial E_p}{\partial z}$ quindi $F = -\nabla E_p$

Energia meccanica

Sia $\vec{\gamma}(t) \equiv \vec{r}(t)$ e siano tutte le forze agenti conservative

Allora $W_F(\vec{r}(t)) = \frac{1}{2}m\|v_f\|^2 - \frac{1}{2}m\|v_i\|^2$

e $W_F(\vec{r}(t)) = -\Delta E_p = -(E_p(\vec{r}_f) - E_p(\vec{r}_i))$

quindi $\frac{1}{2}m\|v_f\|^2 - \frac{1}{2}m\|v_i\|^2 = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) \Rightarrow E_{pi} + E_{Ki} = E_{pf} + E_{Kf}$

definisco l'energia meccanica come $E_{TOT}(\vec{r},\vec{v}) = E_p(\vec{r}) + \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2$ (costante lungo il moto)

Potenza

É il lavoro espresso dalla forza per unità di tempo

$P = \frac{dW}{dt}$ $[P] = W$ (watt)

oss(4.7)

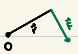
Il kWh è una misura di energia, NON di potenza: $1kWh = 1000W \cdot 3600s = 3.6\cdot 10^6 J$

Impulso

Se il lavoro è la forza su un determinato spazio, l'impulso è la forza su un detetermin ato tempo

$\vec I_F(\vec r) = \int_{t_i}^{t_f} \vec F(\vec r)\,dt = \int_{t_i}^{t_f} m\cdot\vec a\,dt = m\int_{t_i}^{t_f}\frac{d\vec v}{dt}\,dt = m\int_{v_i}^{v_f} dv = mv_f - mv_i = \Delta p$ = quantità di moto $[p] = kg\cdot m/s$

Momento di una forza



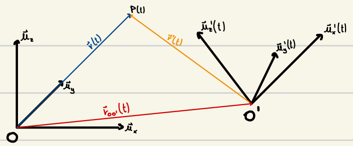
definisco il momento di una forza rispetto al polo O come $\vec M = \vec r \times \vec F$

Momento angolare

$\Delta L = L_f - L_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec M\,dt$, il momento angolare si conserva

$L = \vec r \times m\vec v$

Sistemi di riferimento non inerziali



$r(t) = \vec r_{OO'}(t) + \vec r'(t)$

└ $\frac{d}{dt}r(t) = v(t)$

└ $\frac{d}{dt}\vec r_{OO'}(t) = \vec v_{OO'}(t)$

└ $\frac{d}{dt}\vec r'(t) = \frac{d}{dt}r'_x(t)\vec u'_x(t) + \frac{d}{dt}r'_y(t)\vec u'_y(t) + \frac{d}{dt}r'_z(t)\vec u'_z(t)$

$= v'_x(t)\vec u'_x(t) + r'_x(t)\left(\vec\omega(t)\times\vec u'_x(t)\right) + v'_y(t)\vec u'_y(t) + r'_y(t)\left(\vec\omega(t)\times\vec u'_y(t)\right) + v'_z(t)\vec u'_z(t) + r'_z(t)\left(\vec\omega(t)\times\vec u'_z(t)\right) = v'(t) + \vec\omega(t)\times\vec r'(t)$

$\vec v(t) = \vec v_{OO'}(t) + v'(t) + \vec\omega(t)\times\vec r'(t)$

└ $\frac{d}{dt}\vec v(t) = \vec a(t)$

└ $\frac{d}{dt}\vec v_{OO'}(t) = \vec a_{OO'}(t)$

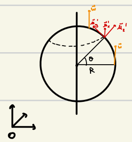
└ $\frac{d}{dt}v'(t) = \vec a'(t) + \vec\omega(t)\times v'(t)$

└ $\frac{d}{dt}\vec\omega\times r'(t) = \vec\alpha\times r'(t) + \vec\omega\times\left[v'(t) + \vec\omega\times\vec r'(t)\right]$

$a(t) = a_{OO'}(t) + a'(t) + \underbrace{2\vec\omega\times\vec v'(t)}_{\text{coriolis}} + \underbrace{\vec\omega\times\left[\vec\omega\times\vec r'(t)\right]}_{\text{centripeta}}$

Oss

Nel sistema rotante della terra $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7.27 \cdot 10^{-6}\ rd/s$ $\vec{\omega} = \omega\cos\theta\,\vec{u}_y' + \omega\sin\theta\,\vec{u}_z'$

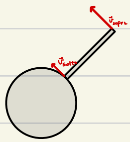


$\vec{u}_x' \rightarrow$ est
$\vec{u}_y' \rightarrow$ nord
$\vec{u}_z' \rightarrow$ cielo

$$\vec{F}_{app} = -m\Big(\underbrace{\cancel{\vec{a}_{O O'}}}_{O' \text{ al centro della terra}} + \vec{\omega}\times\big(\vec{\omega}\times\underbrace{\vec{r}'}_{\vec{r}'=R_T}\big) + \underbrace{\cancel{\vec{\alpha}\times r'}}_{\alpha=0} + 2\omega\times v'\Big)$$

Esperimento di Guglielmini

Dalla cima di un filo a piombo lascio cadere un piombino



$a_z'(t) = g_{eff}$ $\quad v_z'(t) = g_{eff}\cdot t$ $\quad z'(t) = z_0 + \frac{1}{2} g_{eff}\cdot t^2$ $\quad t_c = \sqrt{\frac{2z_0}{g_{eff}}}$

$$a_{coriolis} = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}'(t) = 2\left(\omega\cos\theta\,\vec{u}_y' + \omega\sin\theta\,\vec{u}_z'\right)\times\left(g_{eff}\cdot t\,\vec{u}_z'\right) = 2\omega\cos\theta\, g_{eff}\cdot t\,\vec{u}_x'$$

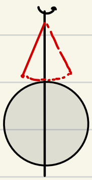
$v_x(t) = \omega\cos\theta\, g_{eff}\, t^2$ $\quad x(t) = \frac{1}{3}\omega\cos\theta\, g_{eff}\, t^3$

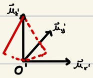
$$x(t_c) = \frac{1}{3}\omega\cos\theta\, g_{eff}\left(\frac{2z_0}{g_{eff}}\right)^{3/2} \approx 5.69\cdot 10^{-3}\, m$$

per Guglielmini

Pendolo di Focault

Costruisco un pendolo e lo faccio oscillare, noto il piano nel quale oscilla ruota con il passare del tempo





Per un pendolo che oscilla sul piano (x', y') $\quad F_{rich} = -m\frac{g}{\ell}\left(x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y\right)$

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m\left(\vec{\omega}\times\vec{v}\right) = -2m\omega\left(\cos\theta\,\vec{u}_y' + \sin\theta\,\vec{u}_z'\right)\times\Big(v_x'\vec{u}_x' + v_y'\vec{u}_y + \underbrace{\cancel{v_z'\vec{u}_z'}}_{\text{trascurabile moto in }(x',y')}\Big) = \underbrace{\cancel{-2m\omega\cos\theta\left[-v_x'\vec{u}_z' + 0\right]}}_{\text{trascurabile moto in }(x',y')} - 2m\omega\sin\theta\left[v_x'\vec{u}_y - v_y'\vec{u}_x'\right]$$

lungo $\vec{u}_x'$ $\quad F_{TOT,x} = F_{c,x} + F_{rich.,x} \Rightarrow \cancel{m}a_x' = -\cancel{m}\frac{g}{\ell}x' + 2\cancel{m}\omega\sin\theta\, v_y'$

lungo $\vec{u}_y$ $\quad F_{TOT,y} = F_{c,y} + F_{rich.,y} \Rightarrow \cancel{m}a_y' = -\cancel{m}\frac{g}{\ell}y' - 2\cancel{m}\omega\sin\theta\, v_x'$

Uso i numeri complessi per rappresentare la posizione $\begin{array}{l} x \rightarrow \text{asse reale} \\ y \rightarrow \text{asse immaginario} \end{array}$, $\lambda = x' + iy'$

$$a_x' + ia_y' = -\frac{g}{\ell}(x' + iy') - 2i\omega\sin\theta(v_x' + iv_y') \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\lambda + 2i\omega\sin\theta\frac{d}{dt}\lambda + \frac{g}{\ell}\lambda$$

Risolvo l'equazione differenziale per λ

$\lambda(t) = e^{-i\omega\sin\theta t} A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cdot t + \phi\right)$

$x'(t) = \cos(-\omega\sin\theta\cdot t)\, A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cdot t + \phi\right)$

$y'(t) = -\sin(-\omega\sin\theta\cdot t)\, A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cdot t + \phi\right)$

Teoria degli errori

L'approccio usato per rimuovere gli errori che vengono commessi nel fare le misurazioni è quello statistico

Scarto

$$\underbrace{\varepsilon_i(x)}_{} = \overset{\text{misurazione}}{x_i} - \underset{\text{valore "vero"}}{x}$$

Ci indica quanto "lontana" è la nostra misurazione rispetto alla realtà

Varianza

$$S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

Misura la correlazione tra x_i e y_i (se $S_{xy} \xrightarrow{N\to+\infty} 0$ x_i e y_i non sono correlati)

Si può definire $S_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\varepsilon_i(\bar{x})]^2$

Scarto quadratico medio

$$\mu = \sqrt{S}$$

Posso esprimere i dati come $\bar{x} \pm \mu_x$

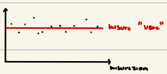
Correlazione

$$\rho = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \qquad -1<\rho<1$$

$\rho \approx -1 \rightarrow$ anticorrelate
$\rho \approx 0 \rightarrow$ non correlate
$\rho \approx 1 \rightarrow$ correlate

Media

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$



PROP

1. $\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(\bar{x}) = 0$
2. $\sum_{i=1}^{N}[\varepsilon_i(\bar{x})]^2$ è minima
3. $\mu_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{N}}$ (dove $\mu = \mu_1 = \ldots = \mu_N$)

Media Pesata

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \quad \text{dove} \quad \sum_{i=1}^{N} a_i = 1$$

$\mu = \sqrt{a_1^2\mu_1^2 + \ldots + a_N^2\mu_N^2}$ cerco gli a_i t.c. μ sia minimo $a_i = \dfrac{1/\mu_i}{1/\mu_1^2 + \ldots + 1/\mu_N^2}$ $\left(\text{da } \frac{\partial}{\partial a_i}\mu_{pes} = 0\right)$

Propagazione degli errori

Siano $\bar{x}\pm\mu_x$ $\bar{y}\pm\mu_y$ misurazioni delle misure X e Y e $Z = f(X,Y)$

- Caso lineare: $Z = \alpha X + \beta Y + \gamma \rightarrow \bar{z} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma$ $\qquad \mu_z = \sqrt{\alpha^2\mu_x^2 + \beta^2\mu_y^2}$

- Caso non lineare: Uso Taylor $\rightarrow \bar{z} \approx \underbrace{f(\bar{x},\bar{y})}_{\gamma} + (x-\bar{x})\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})}}_{\alpha} + (y-\bar{y})\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(\bar{x},\bar{y})}}_{\beta}$

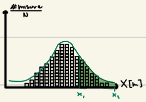
Interpolazione lineare

Voglio trovare α, β t.c. $Y = \alpha X + \beta$

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta + r_1 \\ \vdots \\ y_N = \alpha x_N + \beta + r_N \end{cases}$$

voglio trovare α, β t.c. $\sum_{i=1}^{N} r_i^2$ sia minimo $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \\ \beta = \bar{y} - \alpha\bar{x} \end{cases}$

La varianza



L'area è sempre $\frac{N}{N} = 1$

La probabilità che un evento sia tra x_1 e x_2 = Area sotto la curva tra x_1 e x_2

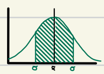
Se le misure non sono correlate e sono identicamente distribuite (seguono la stessa legge)

Allora la curva è $P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}$, $x^* \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ $(\sigma = \mu)$

PROP

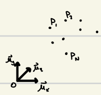
1. $\int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x)\,dx = 1$
2. $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x)\,x\,dx = x^*$
3. $S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_G(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x\,P_G(x)\,dx = \sigma^2$
4. La percentuale che un valore sia tra $\bar{x} - \mu$ e $\bar{x} + \mu$ è

   $P(\bar{x}-\mu, \bar{x}+\mu) = 68{,}3\%$ $\quad P(\bar{x}-2\mu, \bar{x}+2\mu) = 95{,}4\%$ $\quad P(\bar{x}-3\mu, \bar{x}+3\mu) = 99{,}7\%$



Sistemi di punti materiali

Ciascuno dei punti ha massa, posizione, velocità e accelerazione



$m_i a_i = F_{TOT,i} = \vec{F}_{1,i} + \vec{F}_{2,i} + \dots + \vec{F}_{N,i} + \vec{F}_{ext,i} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{j,i} + \vec{F}_{ext,i}$

$E_{K,TOT} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|$

$L_{O,TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{OP}_i \times m_i \vec{v}_i$

Il centro di massa

$\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$ (la media pesata delle posizioni)

$\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{v}_i$ $\qquad p_{TOT} = M\vec{v}_{CM}$

$\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{a}_i$ $\qquad M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{ext,TOT}$

Il sistema di riferimento del CM è particolarmente utile se $\vec{F}_{ext} = 0$

↳ In questo caso $p_{TOT}' = 0$

Teoremi di König

momento angolare del cm rispetto ad O

1. $L_{O,TOT} = L_{CM,TOT} + \vec r_{CM} \times M \vec v_{CM}$

2. $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \|\vec v_{i,O}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \|\vec v_{i,cm}\|^2 + \frac{1}{2} M \|\vec v_{cm}\|^2$

E_K in O $\qquad$ E_K in cm $\qquad$ E_K del cm

Urti elastici

L'energia cinetica e la quantità di moto si conservano

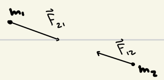
$$\begin{cases} m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} = p_{TOT} = 0 \\ \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_{1,f}^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 v_{2,f}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_{1,i}^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 v_{2,i}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1,f}^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{2E_{K,i}}{m_2+m_1} \\ v_{2,f}^2 = \frac{m_1}{m_2} \frac{2E_{K,i}}{m_1+m_2} \end{cases}$$

Urti perfettamente anaelastici

E_K non si conserva, ma p_{TOT} si conserva

$v_{1,f} = v_{2,f} = v_{cm} \Rightarrow m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1+m_2) v_{cm,f}$

Gravitazione



$$\boxed{\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec r_1}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec r_1 - \vec r_2\|^2} \vec u_{12} \\ m_2 \frac{d^2 \vec r_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec r_1 - \vec r_2\|^2} \vec u_{21} \end{cases} \quad (1)}$$

6 incognite, 2 equazioni

Mi porto nel sistema di riferimento del c.m. dato che $F_{ext} = 0$

$\vec r_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec r_1 + \frac{m_2}{M} \vec r_2$

$$\begin{cases} \vec r_1 = \vec r_{cm} + \vec r_1' \\ \vec r_2 = \vec r_{cm} + \vec r_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec r_1' = \vec r_1 - \vec r_{cm} \Rightarrow \vec r_1' = \vec r_1 - \frac{m_1}{M}\vec r_1 - \frac{m_2}{M}\vec r_2 \\ \vec r_2' = \vec r_2 - \vec r_{cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\vec r_1' = \cancel{m_1 \vec r_1} + m_2 \vec r_1 - \cancel{m_1 \vec r_1} - m_2 \vec r_2 \\ M\vec r_2' = m_1 \vec r_2 + \cancel{m_2 \vec r_2} - m_1 \vec r_1 - \cancel{m_2 \vec r_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec r_1' = \frac{m_2}{M}(\vec r_1 - \vec r_2) \\ \vec r_2' = \frac{m_1}{M}(\vec r_2 - \vec r_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} m_1 \vec r_1' = \mu(\vec r_1 - \vec r_2) \\ m_2 \vec r_2' = -\mu(\vec r_1 - \vec r_2) \end{cases} \quad (2)}$$

$F_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v_{CM}}{dt^2} = 0$ quindi $\vec a_1 = \cancel{\vec a_{cm}} + \vec a_1' = \vec a_1'$

Pongo $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$

per (2) $\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec r_1}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 \vec r_1'}{dt^2} = \mu \frac{d^2}{dt^2}(\vec r_1 - \vec r_2) = \mu \frac{d^2}{dt^2} \vec r \\ m_2 \frac{d^2 \vec r_2}{dt^2} = -\mu \frac{d^2}{dt^2} \vec r \end{cases}$

Pongo $k = G m_1 m_2$

$\|\vec r\| = r$

quindi (1) $\Rightarrow \begin{cases} \mu \frac{d^2 \vec r}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec r\|^2} \vec u_r \\ -\mu \frac{d^2 \vec r}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec r\|^2} \vec u_r \end{cases} \Rightarrow \mu \frac{d^2 \vec r}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{\|\vec r\|^2} \vec u_r \Rightarrow \boxed{\mu \frac{d^2 \vec r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \vec u_r \quad (3)}$

3 incognite

So che $\vec{M}=0 \Rightarrow \vec{L}$ si conserva, il moto si svolge su un piano $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\perp, \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp\right)$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\mu\vec{v} = \vec{v}\times\mu\overset{\vec{r}=r\vec{u}_r}{\frac{d\vec{r}}{dt}} = \vec{v}\times\mu\left(\underbrace{\cancel{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}}_{\vec{r}\times\vec{u}_r=0} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp\right) = \mu r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \mu r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_z \quad (4)} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\vec{L}}{\mu r^2}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr\vec{u}_r}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\perp - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\perp \quad (5)}$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \text{lungo } \vec{u}_r: & \mu\frac{d^2r}{dt^2} - \mu r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{r} \\ \text{lungo } \vec{u}_\perp: & \mu 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \mu r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad (6)}$$

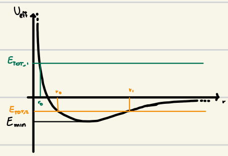
2 incognite, 2 equazioni

Interpretazione

$(4) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\vec{L}}{\mu r^2}$

quindi $(6): \vec{u}_r \Rightarrow \mu\frac{d^2r}{dt^2} - \cancel{\mu}\frac{\vec{L}^2}{\mu\cancel{{}^2} r\cancel{{}^4}\, r^3} = -\frac{k}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{eff}(r) = \mu\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \quad (7)}$

quindi $U_{eff}(r) = -\int F_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \Rightarrow \boxed{U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (8)}$



$$E_{TOT} = \overset{E_K}{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} + \overset{E_p}{U_{eff}(r)}$$

pongo $u = \frac{1}{r}$ quindi $\frac{du}{dt} = \frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr(\theta(t))}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\frac{dr(\theta(t))}{d\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{\mu}\frac{du}{dt}\right) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{\mu}\frac{du}{dt}\right) = -\frac{L^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{dt^2}$$

$$(7) \Rightarrow \cancel{\mu}\left(-\frac{L^2}{\mu^2}\cancel{u^2}\frac{d^2u}{dt^2}\right) = \frac{L^2}{\mu}u^3 - k\cancel{u^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = -u + \frac{k\mu}{L^2} \Rightarrow u(\theta) = A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{k\mu}{L^2} \Rightarrow r(\theta) = \frac{1}{A\cos(\theta) + \frac{k\mu}{L^2}} \Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{r_0}{e\cos\theta + 1} \quad (9)}$$

dove $e = \frac{AL^2}{k\mu}$ (numero puro)

$r_0 = \frac{L^2}{k\mu}$ (lunghezza)

Posso riscrivere $E_{TOT} = \frac{\mu k^2}{2L^2}(e^2-1)$

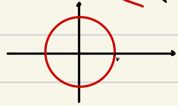
- Se $e>1$, $E_{TOT}>0$

  Allora ci sono delle condizioni di esistenza su $r(\theta)$

  ci sono due angoli dove $r(\theta) = +\infty$ e $r_{min} = \frac{r_0}{e+1}$

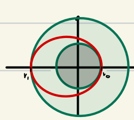
- Se $e=0$, $E_{TOT} = E_{min}$

  $r(\theta) = \text{const.} = r_0$



- Se $0<e<1$, $E_{TOT}<0$

  allora $r_0<r(\theta)<r_1$ dove $r_0 = r(\theta)\big|_{\theta=0} = \frac{r_0}{e+1}$ e $r_1 = r(\theta)\big|_{\theta=\pi} = \frac{r_0}{-e+1}$



Per convincerci che (g) descrive un'ellisse:

nel piano (x,y): $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$r(\theta) = \frac{r_0}{e\cos\theta + 1} \Rightarrow r(e\cos\theta + 1) = r_0 \Rightarrow re\cos\theta + r = r_0 \Rightarrow ex + r = r_0 \Rightarrow (ex - r_0)^2 = (-r)^2 \Rightarrow e^2x^2 - 2exr_0 + r_0^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2(1-e^2) + 2exr_0 + y^2 + \frac{e^2r_0^2}{1-e^2} = r_0^2 + \frac{e^2r_0^2}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow (1-e^2)\left(x + \frac{e}{1-e^2}r_0\right)^2 + y^2 = \frac{r_0^2}{1-e^2} \Rightarrow \frac{\left(x + \frac{e}{1-e^2}r_0\right)^2}{\left(\frac{r_0}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{(x+x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

dove $x_c = \frac{e}{1-e^2}r_0$, $a = \frac{r_0}{1-e^2}$, $b = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}$

Il corpo rigido

Un oggetto tridimensionale costituito da volumetti dV di massa dm le cui posizioni sono statiche

$M = \int_V \rho(\vec{r})\,dm \longrightarrow M = \rho V$ se ρ cost

$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})\,dV \longrightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV$ se ρ cost

$\vec{F}_p = -gM\vec{u}_z$

è come se la massa fosse concentrata nel cm

$\vec{M}_p = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_p$

$I_z = \int_V R^2\,dm$ (R = dist. dall'asse di rotazione)

$\vec{L}_z = \omega I_z$

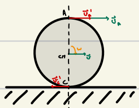
$\vec{M} = I_z\vec{\alpha}$

$E_K = \frac{1}{2}I_z\|\omega\|^2$

$W = \Delta E_K$ oppure $W = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\|\vec{M}\|\,d\theta$

$I_z = I_{z,CM} + \Delta^2 M$ (Δ = dist. tra z e z,CM)

Moto di puro rotolamento

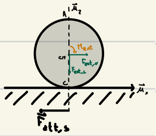


$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega}r = \vec{v}$ $\quad \vec{v}_A = (\vec{\omega}r + v_{CM}) = 2\vec{\omega}r = 2\vec{v}$ $\quad \vec{v}_c = (-\vec{\omega}r + v_{CM}) = 0$

nel s.R. del cm:

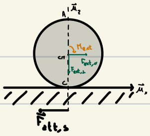
$\vec{v}'_{CM} = 0 \quad \vec{v}'_c = -\vec{\omega}r \quad \vec{v}'_A = \vec{\omega}r$

DINAMICA DEL ROTOLAMENTO



$\vec{F}_{ext} = F_{ext,\parallel}\vec{u}_x + F_{ext,\perp}\vec{u}_z$ $\quad \vec{F}_R = F_R\vec{u}_z$

$\vec{M}_{ext} = M\vec{u}_y$ $\quad \vec{F}_{att,s} = F_{att,s}\vec{u}_x$



$\vec{F}_{ext} = F_{ext,\parallel}\,\vec{u}_x + F_{ext,\perp}\,\vec{u}_z$ $\qquad$ $\vec{F}_R = F_R\,\vec{u}_z$

$\vec{M}_{ext} = M\,\vec{u}_y$ $\qquad$ $\vec{F}_{att,s} = F_{att,s}\,\vec{u}_x$

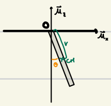
$$F_{TOT} = ma = m\alpha r = \left(F_{ext,\parallel} + F_{att,s}\right)\vec{u}_x + \left(F_{ext,\perp} + F_R\right)\vec{u}_z \Rightarrow \begin{cases} F_{ext,\parallel} + F_{att,s} = m\alpha r \\ F_{ext,\perp} + F_R = 0 \end{cases}$$

quindi $F_{att,s} = F_{ext} - m\alpha r$

$$M_{TOT} = I\cdot\alpha = \cancelto{r=0}{\vec{r}\times\vec{F}_{ext}} + \vec{r}_c \times F_{att,s} + \cancelto{\vec{r}_c \parallel \vec{F}_R}{\vec{r}_c \times \vec{F}_R} + M_{ext}\vec{u}_y = \left(-rF_{att,s} + M_{ext}\right)\vec{u}_y$$

$$\Rightarrow -r\left(m\alpha r - F_{ext}\right) + M_{ext} = I\cdot\alpha \Rightarrow rF_{ext} - m\alpha r^2 + M_{ext} = I\,\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M_{ext} + rF_{ext}}{I + mr^2}$$

APPLICAZIONE (PENDOLO FISICO)



Una sbarra di momento d'inerzia I è impernata in O ed è soggetta alla sola forza peso

$$\vec{M}_p = \vec{r}\times\vec{F}_p = \left(r\sin\theta\,\vec{u}_x + \cancelto{\vec{u}_z\times\vec{u}_z}{r\cos\theta\,\vec{u}_z}\right)\times\left(-mg\,\vec{u}_z\right) = r\sin\theta\, mg\,\vec{u}_y$$

$$I\cdot\alpha = M_p \Rightarrow \alpha = \frac{-rmg}{I}\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{rmg}{I}\sin\theta = 0 \Rightarrow \text{per piccole oscillazioni } \theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{mrg}{I}}\cdot t + \phi\right) = A\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}\cdot t + \phi\right)$$

Fluidodinamica

Ci sono due tipi di forze che si possono applicare ad un fluido

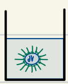
1. Forze di volume

   Forze che agiscono su ogni dV

   es. Forza peso $F_p = \int_V -g\rho\, dV\,\vec{u}_z$

   Completa analogia con i corpi rigidi

2. Forze di pressione



   Preso dV un volumetto, il liquido attorno esercita una forza ortogonale

   La forza è costante, se il fluido è in equilibrio quindi si può esprimere come una proprietà del fluido

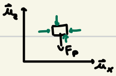
   $F_{pz} = p\cdot \overset{\text{Superficie}}{S}$ $\quad [p] = \frac{N}{m^2} = Pa$

   (p: coeff. di proporzionalità)

   $dW = dF_{pz}\cdot dx = p\,dS\,dx = p\,dV \Rightarrow W = \int_V p\,dV$

Pressione in presenza della Forza-peso

Sia dV su cui agisce $d\vec{F}_p$



lungo $\vec{u}_x$: $dF_{pz,x}(x_0)+dF_{pz,x}(x_0+dx)+\cancel{dF_{p,x}(x_0)}=\vec{0} \iff p(x_0)dS_x\vec{u}_x+p(x_0+dx)dS_x(-\vec{u}_x)=0 \iff \left[\cancel{p(x_0)}-\cancel{p(x_0)}+\frac{\partial p(x_0)}{\partial x}dx+\dots\right]dS_x\vec{u}_x=0 \iff \frac{\partial p(x_0)}{\partial x}=0$

quindi $p_{,x}$ e $p_{,y}$ sono costanti al variare di x, y

lungo $\vec{u}_z$: $dF_{pz,z}(z_0)+dF_{pz,z}(z_0+dz)+dF_{p,z}(z_0+\frac{dz}{2})=\vec{0} \iff \left(p(z_0)dS_z-p(z_0+dz)dS_z-g\rho dV\right)\vec{u}_z=\vec{0} \iff \frac{\partial p(z_0)}{\partial z}\overbrace{\cancel{dz\,dS_z}}^{dV}-g\rho\cancel{dV}=\vec{0} \iff \frac{\partial p(z_0)}{\partial z}=g\rho$

quindi $p(z)=-g\rho z+\overbrace{p_0}^{\text{pressione sopra al fluido}}$

Un fluido si dice in "regime stazionario" quando le linee di flusso non si intersecano

Portata

Per i fluidi in regime stazionario definisco la portata come $dq=dS\cdot v \iff q=\int_S dS\,v=S\cdot\bar{v}$

questa quantità è costante nel flusso

Teorema di Bernoulli

$p+\rho gz+\frac{1}{2}\rho v^2$ è costante lungo il flusso

DIM

$$dE_{k,2}-dE_{k,1}=dW_{TOT}=dW_{pz}+dW_{peso} \Rightarrow dW_{pz}+dW_{peso}=dE_{k,2}-dE_{k,1}=\frac{1}{2}dm_2v_2^2-\frac{1}{2}dm_1v_1^2=\frac{1}{2}\rho dV(v_2^2-v_1^2)$$

$dW_{pz} = p_1dV-p_2dV=(p_1-p_2)dV$

$dW_{peso} = -\Delta E_p=-g\rho dV z_2+g\rho dV z_1$

quindi $(p_1-p_2)\cancel{dV}+\rho g\cancel{dV}(z_1-z_2)=\frac{1}{2}\rho\cancel{dV}(v_2^2-v_1^2) \Rightarrow p_1+\rho gz_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\rho gz_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$

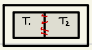
Termodinamica

Temperatura (T): Una quantità che ogni corpo possiede

Calore (Q): Una quantità che viene scambiata da un corpo per variare la temperatura

$$dQ=c(T_0)m\,dT \Rightarrow Q=\int_{t_i}^{t_f}c(T_0)m\,dT=cm\Delta T$$

$Q>0$ se il calore è assorbito
$Q<0$ se il calore è ceduto



$Q_{12}>0 \quad Q_{21}<0 \quad Q_{12}+Q_{21}=0$

calore specifico (c): $c(T_0)=\frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}\Big|_{T_0}$ ⟶ calore specifico per unità di massa

$c_n(T_0)=\frac{1}{n}\frac{dQ}{dT}\Big|_{T_0}$ ⟶ calore specifico molare

calore latente: I processi di fusione, ebollizione, ... avvengono a T cost. e richiedono un certo calore, detto latente

$Q=m\lambda \quad [\lambda]=J/kg$

Trasmissione del calore

Per contatto: $dQ = -\underbrace{K}_{\text{cost.}} \underbrace{\frac{dT}{dn}}_{\text{spessore}} \overbrace{dS}^{\text{area}} \underbrace{dt}_{\text{tempo}}$

Per irraggiamento: $\frac{dQ}{dT} = \underbrace{\sigma}_{\text{cost. di Stefan-Boltzman}} T^4$

Sistemi termodinamici

	materia	calore	lavoro
- aperto	✓	✓	✓
- chiuso	×	✓	✓
- adiabatico	×	×	✓
- isolato	×	×	×

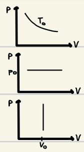
Energia interna

$\Delta U = U_B - U_A = Q_{AB} - W_{AB}$ $\quad [U] = J$

U è una funzione di stato $\left(dU = c_v n \, dT \right)$

In un ciclo chiuso $\Delta U = U_A - U_A = 0$

Equazione di stato dei gas ideali



- se $T = \text{cost.}$ allora $p \cdot V = \text{cost.}$
- se $p = \text{cost.}$ allora $V = V_0 \underbrace{\alpha}_{\frac{1}{273{,}15}\,°C} \cdot T_{kelvin}$
- se $V = \text{cost.}$ allora $p = p_0 \alpha T_{kelvin}$
- Se p, V, T fissati $\Rightarrow$ il numero di molecole é fissato

Siano n moli a $p_0 = 1\,atm$, $T_0 = 0°C$, V_0 fissata da n, p_i, T_i:

$$\begin{cases} V_i = nV_0 \\ T_i = T_0 \\ p_i = p_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{isocora}} \begin{cases} V_i \\ T_f = T_A \\ p_A = p_i \alpha T_A \end{cases} \xrightarrow{\text{isoterma}} \begin{cases} V_f = V_B \\ T_f \\ p_B V_B = p_A V_A = p_0 \alpha T_f n V_0 \end{cases} \Rightarrow p_f = \underbrace{\boxed{p_0 \alpha V_0}}_{R = 8{,}3145\, J/mol \cdot K} n \frac{T_f}{V_f} \Rightarrow pV = nRT$$

Calore specifico

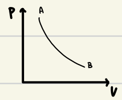
$c_p = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}\Big|_{p\ cost.} = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT}$ $\quad (H = U + pV$ entalpia$)$

$c_v = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}\Big|_{V\ cost.} = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$

Legge di Mayer $c_v = c_p - R$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \begin{cases} 5/3 \text{ gas monoatomico } \begin{cases} c_v = \frac{3}{2}R \\ c_p = \frac{5}{2}R \end{cases} \\ 7/5 \text{ gas biatomico } \begin{cases} c_v = \frac{5}{2}R \\ c_p = \frac{7}{2}R \end{cases} \end{cases}$

Trasformazioni termodinamiche

Isoterma (T cost.)



$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$

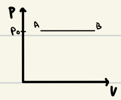
$$Q = W = \int_A^B p\,dV = \int_A^B \frac{nRT}{V}\,dV = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

oss

Se $V_A < V_B \rightarrow Q = W > 0$ (compie lavoro)

se $V_A > V_B \rightarrow Q = W < 0$ (subisce lavoro)

Isobara (p cost.)



$$W = \int_A^B p_0\,dV = p_0 \Delta V$$

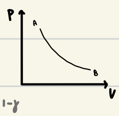
$$\Delta U = \int_A^B dU = \int_A^B n c_v\,dT = n c_v \Delta T$$

$$Q = n c_v \Delta T + p_0 \Delta V$$

$$\Delta U = \int_A^B n c_v\,dT = \int_A^B \cancel{n} c_v \frac{p_0}{\cancel{n} R}\,dV = \frac{c_v}{R} p_0 \Delta V$$

$$Q = \frac{c_v}{R} p_0 \Delta V + p_0 \Delta V = \left(\frac{c_v}{R} + 1\right) p_0 \Delta V = \frac{c_p}{R} p_0 \Delta V$$

Adiabatica (Q=0)



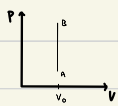
$\Delta U = -W$

$$\begin{cases} dU = n c_v\,dT \\ -dW = -p\,dV = -\frac{nRT}{V}\,dV \end{cases} \Rightarrow \cancel{n} c_v\,dT = -\frac{\cancel{n}RT}{V}\,dV \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v}\frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-\frac{R}{c_v}} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{1-\gamma}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-\gamma} = \frac{p_B}{p_A}$$

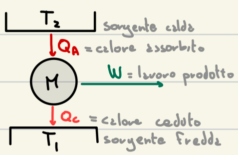
Isocora (V cost.)



$W = \int p\,dV = 0 \qquad \Delta U = Q = n c_v \Delta T$

$$\Delta U = \frac{c_v}{R} V_0 \Delta p$$

Cicli termici

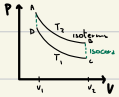


$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Sono utili per produrre lavoro in quanto si possono ripetere

Il ciclo di Stirling



In AB: $Q = W = \int \frac{nRT}{V}\,dT = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$ (calore assorbito)

In BC: $W = 0 \quad Q = \Delta U = nC_v\Delta T < 0$ (calore ceduto)

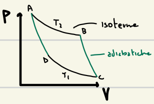
In CD: $Q = W = nRT\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0$

In DA: $W = 0 \quad Q = nC_v\Delta T > 0$

$$\eta = \frac{\cancel{nR}T_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \cancel{nR}T_1\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{\cancel{nR}T_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \cancel{n}\frac{C_v}{R}(T_2 - T_1)} = \frac{(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{T_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{C_v}{R}(T_2 - T_1)}$$

$$\eta = \frac{T_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + T_1\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{T_2\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{(T_2 - T_1)\cancel{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}}{T_2\cancel{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Il ciclo di Carnot



In AB: $Q = W = nRT_2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$

In BC: $Q = 0 \quad W = \Delta U = nc_v(T_1 - T_2)$

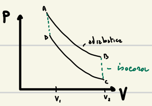
In CD: $Q = W = nRT_1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0$

In DA: $Q = 0 \quad W = \Delta U = nc_v(T_2 - T_1)$

$$\begin{cases} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma - 1} \\ \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma - 1} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_D}{V_A} = \frac{V_C}{V_B}$$

$$\eta = \frac{\cancel{nR}T_2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + \cancel{nR}T_1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) + \cancel{nc_v(T_1 - T_2)} + \cancel{nc_v(T_2 - T_1)}}{\cancel{nR}T_2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 + \frac{T_1\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{T_2\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Il ciclo di Otto



In AB: $Q = 0 \quad W = -\Delta U = nc_v(T_A - T_B)$

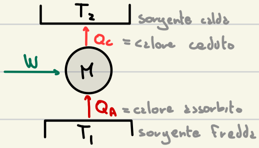
In BC: $W = 0 \quad Q = \Delta U = nc_v(T_C - T_B) < 0$

In CD: $Q = 0 \quad W = -\Delta U = nc_v(T_C - T_D)$

In DA: $W = 0 \quad Q = \Delta U = nc_v(T_A - T_D) > 0$

$$\eta = 1 - \frac{\cancel{nc_v}(T_C - T_B)}{\cancel{nc_v}(T_A - T_D)} = 1 - \frac{T_C - T_B}{T_A - T_D} \iff \eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}$$

I cicli frigoriferi



Per ottenere un ciclo frigorifero è sufficiente percorrere in senso opposto un ciclo reversibile

$W_{ciclo} < 0$ e $\xi = \frac{Q_A}{|W|}$, $\xi = \frac{1}{\eta} - 1$

Leggi della termodinamica

0. esiste l'equilibrio termodinamico

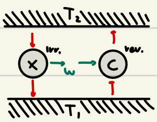
1. Esiste una funzione di stato U t.c. $U_B - U_A = \Delta U = Q_{AB} - W_{AB}$

2.1 É impossibile realizzare un ciclo termodinamico il cui solo scopo sia il trasferimento di calore da un corpo freddo ad uno caldo

2.2 " " " " il cui risultato sia la produzione di lavoro da una sola sorgente a T costante

2.1 e 2.2 sono enunciati equivalenti

Il teorema di Carnot



C una macchina frigorifera di Carnot

X un'altra macchina (anche non reversibile)

$\eta_c = \frac{W_c}{Q_{AC}}$, $\eta_x = \frac{W_x}{Q_{AX}}$ $W_x = W_c$ e $Q_{Ax} = -Q_{cc}$

La macchina M scambia calore con una sola sorgente, quindi $W_M \leq 0$ per 2.2

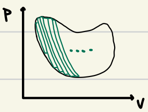
$\frac{W_M}{Q_A} = \frac{W_x}{\underbrace{Q_{AX}}_{= Q_A}} - \frac{W_c}{Q_{AC}} \leq 0 \Rightarrow \eta_x - \eta_c \leq 0 \Rightarrow \eta_x \leq \eta_c \Rightarrow \eta_x \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$

Se X è reversibile allora $\eta_x = \eta_c$

oss

$\frac{Q_c}{T_1} + \frac{Q_A}{T_2} \leq 0$

Il teorema di Clausius

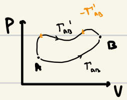


Un generico ciclo può essere approssimato da N cicli di Carnot

L'errore diminuisce per $N \to +\infty$

Per ciascun ciclo vale $\frac{Q_{1,i}}{T_{1,i}} + \frac{Q_{2,i}}{T_{2,i}} \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \Rightarrow \oint \frac{\partial Q}{T} \leq 0$ (= 0 se rev.)

L'entropia



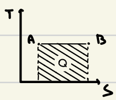
$$\int_{\Gamma_{AB}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma'_{AB}} \frac{dQ}{T} \Rightarrow \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

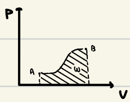
quindi posso definire $\Delta S = S(B) - S(A) = \oint \frac{dQ}{T}$

In generale $\Delta S = 0$ se la trasformazione è reversibile $\Delta S > 0$ se irreversibile

quindi, in generale, $\Delta S > 0$ in un sistema isolato

Il piano T-S





$[Q] = [W] = J$ (l'area è sempre J)

$$\int_A^B T\,dS = \int_A^B T \frac{dS}{T} = Q_{AB}$$

Entropia di un gas ideale

Calcolo dell'entropia di un gas che va da $p_A V_A T_A$ a $p_B V_B T_B$

$$\Delta S_{AB} = \int_{\Gamma_{rev,AB}} \frac{dQ}{T} \overset{\text{I legge}}{=} \int_{\Gamma_{rev,AB}} \frac{dU + p\,dV}{T} = \int_{\Gamma_{rev,AB}} \left(\frac{nc_v\,dT}{T} + \frac{nR\cancel{T}}{V\cancel{T}}\,dV\right) = nc_v \int_{\Gamma_{rev,AB}} \frac{dT}{T} + nR \int_{\Gamma_{rev,AB}} \frac{dV}{V} = nc_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$