

Fisica 1



0. Introduzione

0.1 Vettori

Un vettore \vec{v} è definito da lunghezza ($\|\vec{v}\|$), direzione e verso (\hat{v}).

Def \vec{v} è detto versore di \vec{v} ed è definito come $\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

È un vettore che ha stessa direzione e verso di \vec{v} , ma lunghezza pari ad 1.

0.1.1 Prodotto Vettore-Scalare

Se \vec{s} è un vettore, $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\vec{b} = \lambda \vec{s}$ è un vettore

1. Se $\lambda > 0$: \vec{b} ha stessa direzione e verso di \vec{s} e la lunghezza è scalata di λ
2. Se $\lambda < 0$: \vec{b} ha stessa direzione di \vec{s} , verso opposto e la lunghezza è scalata di $|\lambda|$
3. Se $\lambda = 0$: $\vec{b} = \vec{0}$

0.1.2 Somma vettoriale

Siano \vec{v}, \vec{u} vettori allora $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ è un vettore

$$\text{In } \mathbb{R}^3: \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) + (u_x, u_y, u_z) = (v_x + u_x, v_y + u_y, v_z + u_z)$$



PROP

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$

$$\lambda(\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$

0.1.3 Prodotto scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos \theta$$

$$\text{In } \mathbb{R}^3: \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z$$



$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v \cdot v}$$

PROP

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

$$(\lambda\vec{v}) \cdot \vec{u} = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{u})$$

$$(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

0.1.4 Prodotto vettoriale

$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \sin \theta \vec{u}_\perp$ (\vec{u}_\perp tratta con le regole della mano destra)

$$\begin{aligned} \vec{w} \times \vec{b} &= (\vec{u}_x \vec{u}_x + \vec{u}_y \vec{u}_y + \vec{u}_z \vec{u}_z) \times (\vec{b}_x \vec{u}_x + \vec{b}_y \vec{u}_y + \vec{b}_z \vec{u}_z) = \vec{u}_x b_y \vec{u}_z - \vec{u}_x b_z \vec{u}_y - \vec{u}_y b_z \vec{u}_x + \vec{u}_y b_x \vec{u}_z - \vec{u}_z b_x \vec{u}_y - \vec{u}_z b_y \vec{u}_x \\ &= (\vec{u}_y b_z - \vec{u}_z b_y) \vec{u}_x + (-\vec{u}_x b_z - \vec{u}_z b_x) \vec{u}_y + (\vec{u}_x b_y - \vec{u}_y b_x) \vec{u}_z \\ &= \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{b}_x & \vec{b}_y & \vec{b}_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$



PROP

$$-(\lambda \vec{v}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{v} \times \vec{b})$$

$$-(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{c} = \vec{v} \times \vec{c} + \vec{w} \times \vec{c}$$

0.1.5 Derivata di un Versore

Sia $\vec{u}(t)$ un versore dipendente dal tempo

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \vec{w}(t) \times \vec{u}(t) = \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_1(t)$$



questa è detta relazione di Poisson.

0.2 Le interazioni fondamentali

1. Interazione gravitazionale

una forza debole rispetto alle altre, ma presente anche su lunghe distanze

2. Interazione elettromagnetica

interazione tra particelle caricate $\rightarrow \bullet \circlearrowleft \circlearrowright \rightarrow \circlearrowleft \circlearrowright$

3. Interazione debole

si verifica tra leptoni (elettroni, neutrini,...) ed è alla base del decadimento β (neutrino \rightarrow protone)

4. Interazione forte

unisce tra loro le particelle subatomiche per formare protoni, neutroni, ...

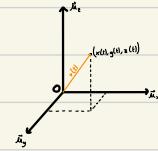
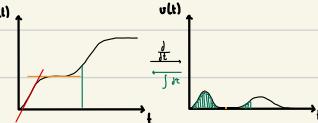
1. Cinematica

1.1 Il punto materiale

Un'approssimazione matematica assegna ad un punto una massa ed una posizione ad un dato istante.

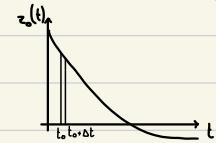
$$[\text{massa}] = \text{kg} \quad [\text{x}(t), \text{y}(t), \text{z}(t)] = \text{m} \quad [\text{tempo}] = \text{s} \quad [\text{Temperatura}] = \text{K}$$

$$\vec{r}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \ddot{\vec{s}}(t)$$



1.2 Velocità

$$v(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \left(\frac{d}{dt} x_0(t), \frac{d}{dt} y_0(t), \frac{d}{dt} z_0(t) \right) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \quad [v_x, v_y, v_z] = v_s$$



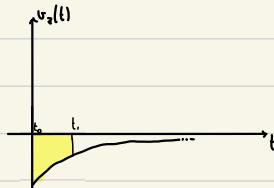
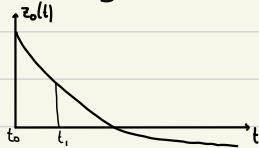
$$v_z(t_0) \approx \frac{z_0(t_0 + \Delta t) - z_0(t_0)}{\Delta t}$$

l'approssimazione migliora per $\Delta t \rightarrow 0$: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z_0(t_0 + \Delta t) - z_0(t_0)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} z_0(t)$

È possibile trovare la posizione in t_1 ($z_0(t_1)$) conoscendo la posizione iniziale ($z_0(t_0)$) e la funzione delle velocità

$$z_0(t_1) = z_0(t_0) + \Delta t \cdot v_z(t_0) + \Delta t \cdot v_z(t_0 + \Delta t) + \dots = z_0(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v_z(\tau) d\tau$$

Interpretazione geometrica:



oss Lo stesso vale per l'accelerazione in quanto derivata della velocità

1.3 Moti

1.3.1 Moto uniformemente accelerato

pongo $\ddot{s}(t) = \text{costante} = \ddot{s}$

quindi

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t \ddot{s} d\tau \\ &= v_0 + \ddot{s}(t-t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t v_0 d\tau + \int_{t_0}^t \ddot{s} d\tau - \int_{t_0}^t \dot{v}_0 d\tau = v_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{s}(t-t_0)^2 - \dot{v}_0(t-t_0)t_0 = v_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{s} \left(t^2 - t_0^2 - 2t_0 t + t_0^2 \right) \\ &= v_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{s} (t-t_0)^2 \end{aligned}$$

ES-caduta di un grane

Un grane è un oggetto soggetto ad un'accelerazione costante $\ddot{s} = (0, 0, -g)$ dove $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ (si, siamo ad ingegneria)

Questa legge è valida con buona approssimazione sulla superficie terrestre

$$\text{Quindi } \ddot{r}(t) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0} - g(t-t_0))$$

$$\ddot{r}(t) = \left(v_{x_0} + v_{x_0}(t-t_0), v_{y_0} + v_{y_0}(t-t_0), v_{z_0} + v_{z_0}(t-t_0) - \frac{1}{2} g(t-t_0)^2 \right)$$

1.3.2 Moto armonico semplice

Un moto si definisce armonico se si può descrivere con una formula del tipo:

$$\ddot{r}(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{o} \quad \ddot{r}(t) = A \sin(\omega(t - t_0)) \quad \text{dove}$$

A = ampiezza
 ω = velocità angolare $[\omega] = \text{rad/s}$
 ϕ = fase o angolo iniziale
 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ = periodo



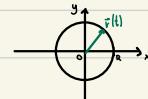
$$\dot{r}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{r}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 r(t)$$

1.3.3 Moto circolare uniforme

Sia un corpo nel piano (x, y) che si muove con legge oraria:

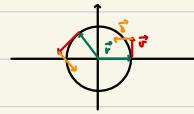
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t + \phi) \\ R \sin(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$



La distanza di $\vec{r}(t)$ da 0 è

$$\sqrt{R^2 \cos^2(\omega t + \phi) + R^2 \sin^2(\omega t + \phi)} = \sqrt{R^2 (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))} = R$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(\omega t + \phi) \\ R \cos(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ -R\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

OSS

In generale per un moto generico la velocità è sempre tangente al moto.

tuttavia l'accelerazione può avere, in generale, qualsiasi forma.



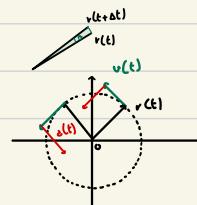
1.3.4 Moto circolare

$$\vec{r}(t) = R \cdot \vec{u}_R(t)$$

$$\ddot{r}(t) = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = R \frac{d}{dt} \vec{u}_R(t) \quad \text{e} \quad \omega = \text{velocità angolare} = \frac{d\phi}{dt} \quad [\omega] = \text{rad/s}$$

$$\ddot{r}(t) = R \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_R(t) - R \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \vec{u}_R$$

$= 0$ se uniforme



2. Dinamica

La dinamica studia i motivi per cui un punto materiale si muove.

(la cinematica, al contrario, studia come il punto si muove)

PRINCIPI DELLA DINAMICA

1. Principio d'inerzia: "In essenza di forze agenti su un corpo, questo si muove a velocità costante"

2. Legge di Newton: "La somma delle forze agenti su un corpo è uguale alla differenza di quantità di moto"

$$\vec{F}_{\text{tot}}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = \frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \frac{d}{dt} m \vec{v}(t) = m \ddot{\vec{r}}(t)$$

3. Principio azione-reazione: "Se un corpo A esercita \vec{F}_{AB} su B, allora B esercita $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ su A"

2.1 Sistema di riferimento

La seconda legge di Newton enuncia che $F = m \cdot \ddot{\vec{r}}$ dove $\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$, ma notiamo che $\ddot{\vec{r}}$ è misurato rispetto ad un sistema di riferimento.

Quindi la misura di $\ddot{\vec{r}}$ è costante solo se si usano sistemi di riferimento inerti l'uno rispetto all'altro.

Def Un sistema di riferimento si dice inerziale rispetto ad un altro se i loro assi sono paralleli.

2.2 Forze

2.2.1 Forza elastica

$$\vec{F}_e = -k \vec{r}(t) \quad \text{dove } k \text{ è la costante elastica } [k] = \text{N.m}$$



La forza elastica descrive una qualsiasi forza di richiamo

2.2.2 Forza di gravitazione universale

tra un corpo di massa m_A e uno di massa m_B c'è una forza attrattiva

$$\vec{F}_{AB} = -G_N \frac{m_A \cdot m_B}{\|\vec{r}_{AB}\|^2} \cdot \vec{r}_{AB}, \quad G_N = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Leygi del moto per A e B

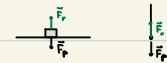
$$\vec{F}_{AB} = m_A \cdot \ddot{\vec{r}}_A \Rightarrow G_N \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{\|\vec{r}_{AB}\|^2} = \cancel{m_A} \cdot \ddot{\vec{r}}_A$$

$$\vec{F}_{BA} = m_B \cdot \ddot{\vec{r}}_B \Rightarrow G_N \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{\|\vec{r}_{BA}\|^2} = \cancel{m_B} \cdot \ddot{\vec{r}}_B$$

oss l'accelerazione non dipende dalle masse

2.2.3 La Reazione Vincolare

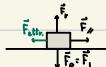
Le forze esercitate da un piano, una parete, ... su un corpo



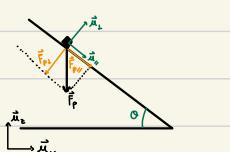
2.2.4 Forza di attrito radente

$$\vec{F}_{\text{attr}} = \begin{cases} -\vec{F}_p & \text{se } \mu_s \|\vec{F}_p\| > \|\vec{F}_N\| \\ -\mu_d \|\vec{F}_N\| \hat{u}_y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Attrito statico Attrito dinamico



ES - piano inclinato senza attrito



Il piano è inclinato di un angolo θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

Il piano è liscio (attrito trascurabile)

$$\vec{F}_p = F_{p\parallel} \hat{u}_{\parallel} + F_{p\perp} \hat{u}_{\perp}$$

$$F_p \cdot \sin \theta = F_p \cdot \cos \theta$$

Moto lungo \hat{u}_{\parallel} : $F_{\text{tot}\parallel} = 0$ (il moto è su \hat{u}_{\parallel})

Moto lungo \hat{u}_{\perp} : $F_{\text{tot}\perp} = F_{p\perp} = m \cdot a_{\perp} \Rightarrow a_{\perp} = \frac{1}{m} \cdot F_{p\perp} = \frac{1}{m} \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta = g \cdot \sin \theta$ (moto uniformemente accelerato)

ES - piano inclinato con attrito

Le condizioni sull'attrito statico è $\|F_p\| \leq \mu_s \|F_N\| \Rightarrow g \cdot \sin \theta \leq \mu_s \cdot g \cdot \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s$

In caso in cui il corpo si muove:

Lungo \hat{u}_{\parallel} nulla cambia $F_{\text{tot}\parallel} = 0$

Lungo \hat{u}_{\perp} $F_{\text{tot}\perp} = F_{p\perp} + F_{d\perp} = m \cdot g \cdot \sin \theta + (-\mu_d \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta) = m \cdot g \cdot \sin \theta (1 - \mu_d \cdot \cot \theta) \quad \cot \theta = \tan^{-1} \theta$

2.2.5 Forza di attrito viscoso

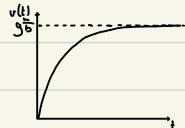
$$\vec{F}_{\text{visc}} = -b \vec{v} \quad [b] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$m \ddot{x} = -b \vec{v} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -b \vec{v} \Rightarrow v(t) = -\frac{b}{m} v_0 e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$\text{Sic. } v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t} \quad [\lambda] = \frac{1}{s} \quad v_0 = v(t=0)$$

$$m v_0 \lambda e^{-\frac{b}{m} t} = -b v_0 e^{-\frac{b}{m} t} \Rightarrow \lambda = -\frac{b}{m} \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m} t}$$

$$r(t) = r_0 + \int_0^t v_0 e^{-\frac{b}{m} t} dt \Rightarrow r(t) = r_0 - v_0 \frac{b}{m} e^{-\frac{b}{m} t} + v_0 \frac{b}{m}$$



2.2.6 Tensione nei fili

Consideriamo il filo ideale (mass trascurabile e resistibile)

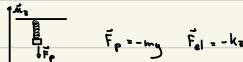
Le forze lungo il filo si chiama Tensione (si indica con T)



2.3 Equazioni Differenziali Applicate

2.3.1 Forza elastica e Forza peso

$$F_{\text{tot}} = F_p + F_{el} \Rightarrow -k\ddot{z} = -mg - kz \Rightarrow \frac{d}{dt} \ddot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) + g = 0$$



Una soluzione è quella costante $z(t) = \Delta l$

$$-\frac{k}{m} \Delta l = -g \Rightarrow \Delta l = \frac{g}{k}$$

- Trova l'altra soluzione:

$$\text{pongo } \ddot{z}(t) = z(t) - \Delta l \Rightarrow \frac{d}{dt} \ddot{z}(t) + \frac{k}{m} (\ddot{z}(t) + \Delta l) + g = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \ddot{z}(t) + \frac{k}{m} \ddot{z}(t) + \frac{k}{m} \Delta l + g = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \ddot{z}(t) + \frac{k}{m} \ddot{z}(t) - g = 0$$

$$\text{pongo } \ddot{z}(t) = z_0 e^{\lambda t} \Rightarrow z_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} z_0 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow z_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + \frac{k}{m}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{quindi la soluzione è } \ddot{z}(t) = z_0 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_0 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \Rightarrow \text{se } z_0 = \frac{A}{2} + j\frac{B}{2} \Rightarrow \ddot{z}(t) = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

$$\Rightarrow \text{se } z_0 = \frac{B}{2j} \text{ e } z_0 = -\frac{B}{2j} \quad \ddot{z}(t) = B \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

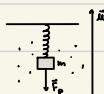
OSS

Le leggi orarie di una molla in presenza o meno di forza peso differiscono solamente di un valore costante

$\ddot{z}(t) + z(t)$ descrivono entrambi un moto armonico conato in punti diversi

2.3.2 Forza peso, Forza elastica e Attrito Viscoso

$$\ddot{F}_{\text{tot}} = \ddot{F}_p + \ddot{F}_{el} + \ddot{F}_{diss}$$



$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = -mg - kz \Rightarrow \frac{d}{dt} \ddot{z}(t) + \frac{b}{m} \frac{d}{dt} z(t) + \frac{k}{m} z(t) + g = 0$$

$$\text{pongo } \ddot{z}(t) = z(t) - \Delta l \Rightarrow \frac{d}{dt} \ddot{z}(t) + \frac{b}{m} \frac{d}{dt} z(t) + \frac{k}{m} z(t) + \frac{k}{m} \Delta l + g = 0$$

$$\text{pongo } \ddot{z}(t) = z_0 e^{\lambda t} \Rightarrow z_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m}) = 0$$

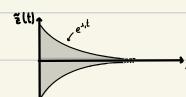
- $z_0 e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow z_0 = 0$ soluzione costante

$$-\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \text{ coeff. di smorzamento} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$-\gamma^2 > \omega^2 \text{ soluzioni reali } \lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0 \quad \lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < \lambda_1 \text{ complesso}$$

$$\ddot{z}(t) = e^{\gamma t} (C_1 e^{i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t})$$

Dato che le soluzioni sono 0 per $t \rightarrow +\infty$

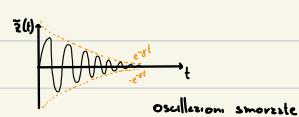


$$-\gamma^2 < \omega^2 \text{ soluzioni immaginarie } \lambda_1 = -\gamma + i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \quad \lambda_2 = -\gamma - i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

$$\ddot{z}(t) = v_1 e^{\gamma t} + v_2 e^{-\gamma t} \quad \text{se } v_1 = v_2 = \frac{A}{2} \quad \ddot{z}(t) = \frac{A}{2} e^{\gamma t} e^{i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + \frac{A}{2} e^{\gamma t} e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} = A e^{\gamma t} \cos(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t)$$

$$\text{se } v_1 = v_2 = \frac{B}{2j} \quad \ddot{z}(t) = B e^{\gamma t} \sin(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t)$$

$$\text{La soluzione più generale (somma sin e cos): } \ddot{z}(t) = e^{-\gamma t} A_0 \cos(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t) + \varphi$$



oscillazioni smorzate

2.3.3 Risonanza

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_0 + \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{diss}} \Rightarrow \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} - F_0 \sin(\omega t) \quad \text{dove } \omega \text{ frequenza forza est}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ddot{x}(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \quad \text{dove } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ coeff. di smorzamento } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

È sufficiente trovare una soluzione $\tilde{x}(t)$, tutte le altre sono $\tilde{x}(t) + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$
 → per $t \rightarrow +\infty$

$$\text{Uso } \tilde{x}(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + 2\gamma A\omega \cos(\omega t + \phi) + A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow (-A\omega^2 + A\omega^2) [\sin(\omega t) \cos \phi + \cos(\omega t) \sin \phi] + 2\gamma A\omega \cos(\omega t) \cos \phi + 2\gamma A\omega \sin(\omega t) \sin \phi = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t) [\cos \phi (-A\omega^2 + A\omega^2) - 2\gamma A\omega \sin \phi - \frac{F_0}{m}] + \cos(\omega t) [\sin \phi (-A\omega^2 + A\omega^2) + 2\gamma A\omega \cos \phi] = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \textcircled{1} = \textcircled{2} = 0$$

quindi, se $\textcircled{1} = 0$, $\textcircled{2} = 0$ $\sin \phi \cdot \textcircled{1} - \cos \phi \cdot \textcircled{2} = 0$ e $\cos \phi \cdot \textcircled{1} + \sin \phi \cdot \textcircled{2} = 0$

$$\begin{cases} (-A\omega^2 + A\omega^2) \cos \phi - 2\gamma A\omega \sin \phi - \frac{F_0}{m} \sin \phi - (-A\omega^2 + A\omega^2) \sin \phi \cos \phi - 2\gamma A\omega \cos \phi = 0 \Rightarrow -2\gamma A\omega (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{F_0}{m} \sin \phi \\ (-A\omega^2 + A\omega^2) \cos \phi - 2\gamma A\omega \sin \phi - \frac{F_0}{m} \cos \phi + (-A\omega^2 + A\omega^2) \sin \phi + 2\gamma A\omega \cos \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\gamma A\omega = \frac{F_0}{m} \sin \phi \\ -A\omega^2 + A\omega^2 = \frac{F_0}{m} \cos \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{divido la eq. } \frac{\frac{F_0}{m} \sin \phi}{\frac{F_0}{m} \cos \phi} = \frac{-2\gamma \omega}{(\omega^2 - \omega_r^2)} \Rightarrow \tan \phi = -\frac{2\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_r^2}$$

$$\Rightarrow \text{sommo i quadrati } A^2(\omega^2 - \omega_r^2)^2 \cdot 4\gamma^2 A^2 \omega^2 = \frac{F_0^2}{m^2} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \Rightarrow A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

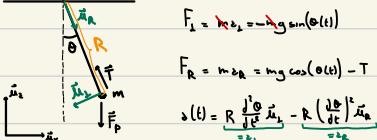
In conclusione

$$v(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{con } \omega_r \text{ e } A \text{ definiti sopra}$$

La frequenza di risonanza è ω_r l.c. A è massima

$$\frac{d}{dt} A \Big|_{\omega_r} = 0 \Leftrightarrow \omega_r = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \Rightarrow A(\omega_r) = \frac{F_0}{2m\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

2.3.4 Pendolo semplice



$$F_t = m\omega_s = -mg \sin(\theta(t))$$

$$F_R = m\omega_s = mg \cos(\theta(t)) - T$$

$$\ddot{\theta}(t) = R \frac{d}{dt} \dot{\theta}(t) - R \frac{(d\theta/dt)^2}{R^2} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

$$-R \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta(t) \approx -R \frac{d\theta}{dt} = g \theta(t) \Rightarrow \theta(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \omega^2 = \frac{g}{R}$$

$$\dot{\theta}(t) = R \cdot \theta(t) \quad \ddot{\theta}(t) = R \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad e \quad \ddot{\theta}(t) = -R \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

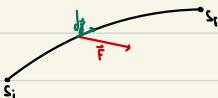
$$-mR \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T \Rightarrow T = mg \cos \theta + mR \omega^2$$

2.4 Il lavoro

Sia \vec{y} una curva in \mathbb{R}^3 e $\vec{F}(\vec{y}, \frac{d\vec{y}}{dt}, t)$ una funzione

$$W_F(\vec{y}) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(\vec{y}, \frac{d\vec{y}}{dt}, t) \frac{d\vec{y}}{dt} dt$$

oss (e.1)



$$\text{Se } \vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_A + \vec{F}_B \text{ allora } W_F = W_{F_A} + W_{F_B}$$

TEO - dell'energia cinetica

Se $\vec{y}(t) = \vec{r}(t)$ Allora il lavoro di una forza lungo la curva dalla legge oraria è uguale alla variazione dell'energia cinetica

DIM

$$W_F(\vec{r}) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \dot{\vec{r}} dt = m \int_{t_i}^{t_f} m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt = m \left[\int_{t_i}^{t_f} z_1 v_x dt + \int_{t_i}^{t_f} z_2 v_y dt + \int_{t_i}^{t_f} z_3 v_z dt \right] = \frac{m}{2} \left[v_{x_i}^2 - v_{x_f}^2 + v_{y_i}^2 - v_{y_f}^2 + v_{z_i}^2 - v_{z_f}^2 \right] = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_i\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_f\|^2 \stackrel{!}{=} E_{k_f} - E_{k_i} = \Delta E_k$$

$$[E_k] = k_3 \Rightarrow s_i = 3$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dv_x}{dt} v_x dt = \int_{v_{x_i}}^{v_{x_f}} v_x dv_x = \frac{1}{2} v_x^2 \Big|_{v_{x_i}}$$

OSS

Il calcolo del lavoro per le forze "centrali" risulta essere più semplice

$$W_{F_c}(\vec{y}) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(\|\vec{y}\|) \vec{y}_r \cdot \left[\frac{d\vec{y}^R}{dt} \vec{y}_r + \|\vec{y}\|^2 \frac{d\vec{y}^T}{dt} \vec{y}_r \right] dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(\|\vec{y}\|) \|\vec{y}\| \vec{y}_r \cdot \int_{y_{R,i}}^{y_{R,f}} \vec{F}(s) ds = V(s) \Big|_{y_{R,i}}^{y_{R,f}} = V(y_{R,f}) - V(y_{R,i})$$

OSS

Calcolo del lavoro di alcune forze

$$W_{F_p}(\vec{r}(t)) = \int_{s_i}^{s_f} -mg ds = -mg(s_f - s_i)$$

$$W_{F_{\text{att. statico}}} = 0 \quad W_{F_{\text{rest.}}} = 0 \quad (\text{le curve sono } = 0)$$

$$W_{F_{\text{el}}}(\vec{y}) = \int_{y_{R,i}}^{y_{R,f}} -k y_R ds = -k \left(\frac{1}{2} y_{R,f}^2 - \frac{1}{2} y_{R,i}^2 \right) = \frac{k}{2} \|y_f\|^2 - \frac{k}{2} \|y_i\|^2$$

$$W_{F_{\text{grav}}}(\vec{y}) : \vec{F}(x) = -G \frac{m_1 m_2}{x^2} \hat{x} \quad V(x) = G m_1 m_2 \frac{1}{x} + C \quad W_{F_{\text{grav}}}(\vec{y}) = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{y_{R,f}} - \frac{1}{y_{R,i}} \right)$$

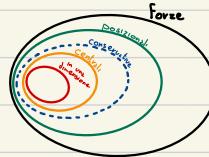
2.4.1 Forze posizionali

Def Una forza si dice posizionale se il suo lavoro dipende da $\vec{y}(t)$, ma non da $\frac{d\vec{y}}{dt}$ o t

Def Una forza si dice conservativa se il suo lavoro dipende solo da $\vec{y}(t_i)$ e $\vec{y}(t_f)$

TEO - dell'energie potenziali

Una forza è conservativa $\Leftrightarrow W_F(\vec{y}_c) = 0$ (\vec{y}_c curva chiusa)



dire

$$(\Rightarrow) F \text{ conservativa} \Rightarrow W_F(\vec{\gamma}_c) = W_F(\vec{\gamma}_0) \quad \text{dove } \vec{\gamma}_0 \text{ è la curva costante con gli stessi estremi}$$



$$\therefore W_F(\vec{\gamma}_0) = 0 \quad \text{per def. di lavoro}$$

(\Leftarrow) Sia $\vec{\gamma}_c$ la curva in senso opposto a $\vec{\gamma}_0$ e sia $\vec{\gamma}_l$ la curva composta da $\vec{\gamma}_l$ e $\vec{\gamma}_c$



$$\text{Se } W_F(\vec{\gamma}_c) = W_F(\vec{\gamma}_l) - W_F(\vec{\gamma}_c) = 0 \Rightarrow W_F(\vec{\gamma}_l) = W_F(\vec{\gamma}_c) \Rightarrow F \text{ conservativo}$$

2.4.2 Energia potenziale

Per una forza conservativa posso definire:

$$E_p(\vec{r}) = -W_F(\vec{\gamma}(t)) \quad \text{dove } \vec{\gamma}(t_i) = \vec{r}_i \quad \text{e } \vec{\gamma}(t_f) = \vec{r}_f$$

Oss (4.5)

E_p è definito al netto di una costante legata a $\vec{\gamma}(t_i)$

$$E'_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) - E_p(\vec{r}_i)$$

Oss (4.6)

A livello infinitesimale:

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

$$\Rightarrow dE_p = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow F_x = \frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial E_p}{\partial z} \quad \text{quindi } F = -\nabla E_p$$

2.4.3 Energia meccanica

Sia $\vec{r}(t) = \vec{r}(t)$ e siano tutte le forze agenti conservative

$$\text{Allora } W_F(\vec{r}(t)) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_p\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{e } W_F(\vec{r}(t)) = -\Delta E_p = -(E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f))$$

$$\text{quindi } \frac{1}{2} m \|\vec{v}_p\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = E_p(\vec{r}_f) - E_p(\vec{r}_i) \Rightarrow E_{p_i} + E_{k_i} = E_{p_f} + E_{k_f}$$

definisco l'energia meccanica come $E_{TOT}(\vec{r}, \vec{v}) = E_p(\vec{r}) + \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$ (costante lungo il moto)

2.4.4 Potenza

È il lavoro espresso dalla forza per unità di tempo

$$P = \frac{dW}{dt} \quad [P] = \text{W (watt)}$$

Oss (4.7)

Il kWh è una misura di energia. Now di potenza: $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$

2.4.5 Impulso

Se il lavoro è la forza su un determinato spazio, l'impulso è la forza su un determinato tempo

$$\vec{I}_F(\vec{r}) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} m \cdot \vec{a} dt = m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{v_i}^{v_f} d\vec{v} = m v_f - m v_i = \Delta p = \text{quantità di moto} \quad [P] = \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$$

2.4.6 Momento di una forza

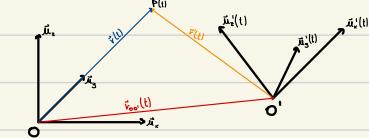
 definisce il momento \vec{M} di una forza rispetto al polo O come $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

2.4.7 Momento angolare

$$\Delta L = L_f - L_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{M} dt , \text{ il momento angolare si conserva}$$

$$L = \vec{r} \times \vec{p}_m$$

2.5 Sistemi di riferimento non inerziali



$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{\infty}(t) + \vec{v}'(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \vec{v}'(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}_{\infty}(t) = \vec{v}_{\infty}(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt} v_x'(t) \hat{x}'(t) + \frac{d}{dt} v_y'(t) \hat{y}'(t) + \frac{d}{dt} v_z'(t) \hat{z}'(t)$$

$$= v_x'(t) \hat{x}'_x(t) + v_x'(t) (\hat{x}'_y(t) \times \hat{x}'_z(t)) + v_y'(t) \hat{x}'_y(t) + v_y'(t) (\hat{x}'_z(t) \times \hat{x}'_x(t)) + v_z'(t) \hat{x}'_z(t) + v_z'(t) (\hat{x}'_x(t) \times \hat{x}'_y(t)) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)$$

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}_{\infty}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}'(t) = \vec{a}'(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}_{\infty}(t) = \vec{a}_{\infty}(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}'(t) = \vec{a}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{v}'(t) = \vec{a}'(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{v}'(t)]$$

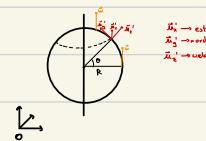
$$\vec{a}'(t) = \vec{a}_{\infty}(t) + \vec{a}'(t) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{v}'(t)]$$

coriolis centripete

Oss

$$\text{Nel sistema rotante della terra} \quad \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \quad \vec{\omega} = \omega \cos \theta \hat{x}'_y + \omega \sin \theta \hat{x}'_z$$

$$\vec{F}_{app} = -m \left(\sum_{\substack{\text{g in centro} \\ \text{della terra}}} \vec{a}_{\infty} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{\vec{a}'(t)}{R^2} + 2\omega \times \vec{v} \right)$$



2.5.1 Esperimento di Guglielmini

Dalla cima di un filo a piombo lascio cadere un piombo

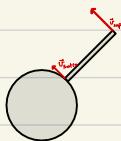
$$z_g'(t) = g_{\text{eff}} \cdot t \quad z'(t) = z_0 + \frac{1}{2} g_{\text{eff}} \cdot t^2 \quad t_c = \sqrt{\frac{2 z_0}{g_{\text{eff}}}}$$

$$\Delta_{\text{corris.}} = 2 \tilde{\omega} \times \tilde{\tau}'(t) = 2 \left(w \cos \theta \tilde{\omega}_x + w \sin \theta \tilde{\omega}_y \right) \times \left(g_{\text{eff}} \cdot t \tilde{\omega}_z \right) = 2 w \cos \theta g_{\text{eff}} \cdot t \tilde{\omega}_z$$

$$v_x(t) = w \cos \theta g_{\text{eff}} t^2 \quad x(t) = \frac{1}{3} w \cos \theta g_{\text{eff}} t^3$$

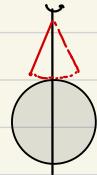
$$x(t_c) = \frac{1}{3} w \cos \theta g_{\text{eff}} \left(\frac{2 z_0}{g_{\text{eff}}} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 5.69 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

per Guglielmini



2.5.2 Pendolo di Foucault

Costroisco un pendolo e lo faccio oscillare, noto il piano nel quale oscilla ruota con il passare del tempo



$$\text{Per un pendolo che oscilla sul piano } (x', z') \quad F_{\text{rich}} = -m \frac{d}{dt} (x' \tilde{\omega}_x + z' \tilde{\omega}_z)$$

$$\tilde{F}_{\text{coriolis}} = -2m (\tilde{\omega} \times \tilde{v}) = -2mw (\cos \theta \tilde{\omega}_x + \sin \theta \tilde{\omega}_y) \times (v_{x'} \tilde{\omega}_x + v_{z'} \tilde{\omega}_z + \frac{d}{dt} v_{x'} \tilde{\omega}_z) = -2mw \cos \theta [v_{x'} \tilde{\omega}_x + 0] - 2mw \sin \theta [v_{z'} \tilde{\omega}_x - \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_x]$$

oscillante
moto in (x', z')

oscillante
moto in (x', z')

$$\text{lungo } \tilde{\omega}_x: F_{\text{coriolis}} = F_{\text{coriolis}} + F_{\text{centr.}} \Rightarrow -m \frac{d}{dt} v_{x'} = -m \frac{g}{l} x' + 2mw \sin \theta \tilde{\omega}_y$$

$$\text{lungo } \tilde{\omega}_y: F_{\text{coriolis}} = F_{\text{coriolis}} + F_{\text{centr.}} \Rightarrow -m \frac{d}{dt} v_{z'} = -m \frac{g}{l} z' - 2mw \sin \theta \tilde{\omega}_x$$

Uso i numeri complessi per rappresentare le posizioni $x \rightarrow$ parte reale $y \rightarrow$ parte immaginaria, $\lambda = x' + iy'$

$$x' + iy' = -\frac{g}{l}(\lambda + \frac{2i}{l}w \sin \theta \lambda) - 2i w \sin \theta (v_x + \frac{i}{l}v_z) \Rightarrow \frac{d}{dt} \lambda + \frac{2i}{l}w \sin \theta \frac{d}{dt} \lambda + \frac{g}{l} \lambda$$

Risolvo l'equazione differenziale per λ

$$\lambda(t) = e^{-i w \sin \theta t} A \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi)$$

$$x'(t) = \cos(-w \sin \theta \cdot t) A \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi)$$

$$y'(t) = -\sin(-w \sin \theta \cdot t) A \cos(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi)$$

3. Teoria degli errori

L'approccio usato per rimuovere gli errori che vengono commessi nel fare le misurazioni è quello statistico.

Scarto

$$\epsilon_i(x) = \begin{array}{c} \text{misurazione} \\ x_i - \bar{x} \\ \downarrow \\ \text{valore "vero"} \end{array}$$

Ci indica quanto "lontano" è la nostra misurazione rispetto alla realtà.

Varianza

$$S_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Misura la correlazione tra x_i e y_i . $\left(\text{se } S_{xy} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ allora } x_i \text{ e } y_i \text{ non sono correlati.} \right)$

$$S_1 \text{ può definire } S_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\epsilon_i(\bar{x})]^2$$

Scarto quadratico medio

$$\mu = \sqrt{S}$$

Potrei esprimere i dati come $\bar{x} \pm \mu_x$.

Correlazione

$$\rho = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} \quad -1 < \rho < 1$$

$\rho = -1 \rightarrow$ anticoncorrente
 $\rho = 0 \rightarrow$ non correlate
 $\rho = 1 \rightarrow$ correlate

Media

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$



Prop.

$$1. \sum_{i=1}^N \epsilon_i(\bar{x}) = 0$$

$$2. \sum_{i=1}^N [\epsilon_i(\bar{x})]^2 \text{ è minimo}$$

$$3. \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \quad (\text{dove } \mu = \mu_1 = \dots = \mu_N)$$

Media Pesata

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{dove } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

$$\mu = \sqrt{\alpha_1^2 \mu_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \mu_n^2} \quad \text{cerco gli } \alpha_i \text{ t.c. } \mu \text{ sia minimo} \quad \alpha_i = \frac{\mu_i}{\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2} \quad \left(\text{da } \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mu_{\text{pesato}} = 0 \right)$$

Propagazione degli errori

Siano $\bar{x} \pm \mu_x$, $\bar{y} \pm \mu_y$ misurazioni delle misure x e y e $\bar{z} = f(x, y)$

- Caso lineare: $\bar{z} = \alpha x + \beta y + \gamma \rightarrow \bar{z} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma$

$$\mu_z = \sqrt{\alpha^2 \mu_x^2 + \beta^2 \mu_y^2}$$

- Caso non lineare: Uso Taylor $\rightarrow \bar{z} \approx \underbrace{f(\bar{x}, \bar{y})}_{y} + \underbrace{(x - \bar{x}) \frac{\partial f}{\partial x}}_{\alpha} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} + \underbrace{(y - \bar{y}) \frac{\partial f}{\partial y}}_{\beta} \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})}$

Interpolazione lineare

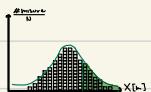
Voglio trovare α, β t.c. $y = \alpha x + \beta$

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta + v_1 \\ \vdots \\ y_N = \alpha x_N + \beta + v_N \end{cases}$$



voglio trovare α, β t.c. $\sum_{i=1}^N v_i^2$ sia minimo $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \\ \beta = \bar{y} - \alpha \bar{x} \end{cases}$

L'errore



$$\text{L'area è sempre } \frac{1}{2} =$$

L'probabilità che un evento sia tra x_1 e x_2 = Area sotto la curva fra x_1 e x_2

Se le misure non sono correlate e sono identicamente distribuite (seguono la stessa legge)

Allora la curva è $P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ (σ, μ)

PROP

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x) dx = 1$$

$$2. \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_G(x) x dx = \mu$$

$$3. S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P_G(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x P_G(x) dx = \sigma^2$$

4. L'percentuale che un valore sia tra $\bar{x}-\mu$ e $\bar{x}+\mu$ è

$$P(\bar{x}-\mu, \bar{x}+\mu) = 68,3\% \quad P(\bar{x}-2\mu, \bar{x}+2\mu) = 95,4\% \quad P(\bar{x}-3\mu, \bar{x}+3\mu) = 99,7\%$$



4. Sistemi di punti materiali

Ciascuno dei punti ha massa, posizione, velocità e accelerazione

$$m_i \ddot{x}_i = \vec{F}_{\text{tot},i} = \vec{F}_{1,i} + \vec{F}_{2,i} + \dots + \vec{F}_{N,i} + \vec{F}_{\text{ext},i} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{j,i} + \vec{F}_{\text{ext},i}$$



$$E_{\text{tot,tot}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2$$

$$L_{\text{tot,tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

4.0.1 Il centro di massa

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{v}_i \quad (\text{la media pesata delle posizioni})$$

$$\vec{U}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{U}_i \quad \text{Prat: } M \vec{U}_{\text{cm}}$$

$$\vec{s}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{s}_i \quad M \vec{s}_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{ext,cm}}$$

Il sistema di riferimento del cm è particolarmente utile se $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$

In questo caso $\text{Prat}' = 0$

4.0.2 Teoremi di König

momento angolare
del c.m. rispetto a 0

$$1. L_{O, \text{tot}} = L_{CM, \text{tot}} + \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$$

$$2. \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_{i,C}\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_{i,CM}\|^2 + \frac{1}{2} M \|\vec{v}_{CM}\|^2$$

$E_K \text{ in } 0$ $E_K \text{ in CM}$ $E_K \text{ del CM}$

4.1 Urти elasticici

L'energia cinetica e le quantità di moto si conservano

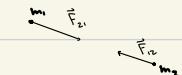
$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} = p_{tot} \\ \cancel{\frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2} = \cancel{\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{1,f} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{2 E_{K,i}}{m_2 + m_1} \\ v_{2,f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{2 E_{K,i}}{m_2 + m_1} \end{array} \right.$$

4.2 Urti perfettamente anaelastici

E_K non si conserva, m_2 prot si conserva

$$v_{1,f} + v_{2,f} = v_{CM} \Rightarrow m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1 + m_2) v_{CM,f}$$

5. Gravitazione



$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \vec{r}_{12} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \vec{r}_{12} \end{array} \right. \quad (1) \quad 6 \text{ incognite, 2 equazioni}$$

Mi porto nel sistema di riferimento del c.m. dato che $F_{ext} = 0$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_1' \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_2' \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 - \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 - \frac{m_2}{M} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \vec{v}_1' = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2 \\ M \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_2 + m_2 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1' = \frac{m_2}{M} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \\ \vec{v}_2' = \frac{m_1}{M} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$F_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{v}_{CM}}{dt^2} = 0 \quad \text{quindi} \quad \ddot{\vec{v}}_1 = \cancel{\ddot{\vec{v}}_1} + \ddot{\vec{v}}_1' = \ddot{\vec{v}}_1'$$

$$\text{Pongo } \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\text{per (2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \vec{v}_1}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 \vec{v}_1'}{dt^2} = M \frac{d^2}{dt^2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{v} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{v}_2}{dt^2} = -m_1 \frac{d^2 \vec{v}_1}{dt^2} \end{array} \right.$$

$$\text{Pongo } k = G m_1 m_2 / \| \vec{v} \|^3 = r$$

$$\text{quindi (1)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\| \vec{v} \|^3} \vec{J}_{CM} \\ -\mu \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{\| \vec{v} \|^3} \vec{J}_{CM} \end{array} \right. \Rightarrow \mu \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = -\frac{K}{r^3} \vec{J}_{CM} \quad (3) \quad 3 \text{ incognite}$$

So che $\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ si conserva, il moto si svolge su un piano (\vec{u}_r, \vec{u}_\perp , $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_\perp}{dt} = 0$)

$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \vec{v} = \vec{r} \times \mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \mu \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp \right) = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp \Rightarrow \vec{L} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp \quad (4) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\vec{L}}{\mu r^2}$$

$$\frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\perp + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\perp - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r \Rightarrow \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r + \left[r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\perp \quad (5)$$

$$(3) \Rightarrow \text{lungo } \vec{u}_r: \mu \frac{d^2 r}{dt^2} - \mu r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{k}{r} \quad (6)$$

2 incognite, 2 equazioni

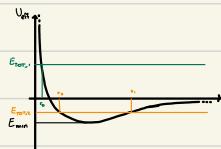
$$\text{lungo } \vec{u}_\perp: \mu r^2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \mu r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

5.1 Interpretazione

$$(4) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\vec{L}}{\mu r^2}$$

$$\text{quindi } (6): \ddot{r}_{\text{eff}} = \mu \frac{d^2 r}{dt^2} - \mu r \frac{\vec{L}^2}{\mu^2 r^3} = -\frac{k}{r} \Rightarrow \ddot{r}_{\text{eff}}(r) = \mu \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\vec{L}^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \quad (7)$$

$$\text{quindi } U_{\text{eff}}(r) = -\int \ddot{r}_{\text{eff}}(r) dr = \frac{\vec{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \Rightarrow U_{\text{eff}}(r) = \frac{\vec{L}^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (8)$$



$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

$$\frac{dr}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{\mu} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{\mu} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{L^2}{\mu^2} \mu^2 \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$(7) \Rightarrow -\frac{L^2}{\mu^2} \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu^2} \mu^2 - k \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\mu + \frac{K \mu}{L^2} \Rightarrow r(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{K \mu}{L^2} \Rightarrow v(\theta) = \frac{1}{A \cos(\theta) + \frac{K \mu}{L^2}} \Rightarrow v(\theta) = -\frac{v_0}{e \cos(\theta) + 1} \quad (9)$$

dove $e = \frac{AL^2}{K\mu}$ (numero pura)

$$r_0 = \frac{L^2}{K\mu} \quad (\text{lunghezza})$$

$$\text{Posso ricavare } E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu^2} (e^2 - 1)$$

- Se $e > 1$, $E_{\text{tot}} > 0$

Allora ci sono delle condizioni di esistenza su $v(\theta)$

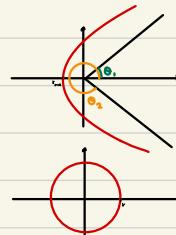
c'sono due punti dove $v(\theta) = +\infty$ e $r_{\min} = \frac{v_0}{e+1}$

- Se $e=0$, $E_{\text{tot}} = E_{\min}$

$$v(\theta) = \text{const.} = r_0$$

- Se $e < 1$, $E_{\text{tot}} < 0$

allora $r_{\max}(\theta) < r_0$ dove $r_0 = v(\theta) \Big|_{\theta=0} = \frac{v_0}{e+1}$ e $r_1 = v(\theta) \Big|_{\theta=\pi} = \frac{v_0}{-e+1}$



Per convincersi che (9) descrive un'ellisse:

nel piano (x, y) : $x = v \cos \theta$ $y = v \sin \theta$

$$r(\theta) = \frac{v_0}{e \cos \theta + 1} \Rightarrow v(\cos \theta + 1) = v_0 \Rightarrow v \cos \theta + v = v_0 \Rightarrow (ex - v_0)^2 = (-v)^2 = e^2 x^2 - 2exv_0 + v_0^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2(1 - e^2) + 2evv_0 + v_0^2 \cdot \frac{e^2 v^2}{1-e^2} = v_0^2 \cdot \frac{e^2 v^2}{1-e^2}$$
 $\Rightarrow (1 - e^2) \left(x + \frac{e}{1 - e^2} v_0 \right)^2 + y^2 = \frac{v_0^2}{1 - e^2} \Rightarrow \frac{\left(x + \frac{e}{1 - e^2} v_0 \right)^2}{\left(\frac{v_0}{1 - e^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{1 - e^2} \right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x + x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{dove } x_c = \frac{e}{1 - e^2} v_0, a = \frac{v_0}{1 - e^2}, b = \frac{v_0}{\sqrt{1 - e^2}}$

6. Il corpo rigido

Un oggetto tridimensionale costituito da volumetti dV di massa dm le cui posizioni sono statistiche

$$M = \int dm = \int \rho(\vec{r}) dV \quad \rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV} \quad \text{densità} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Se un corpo è omogeneo ($\rho(\vec{r})$ costante) $M = \rho V$

In alcuni casi è utile approssimare i corpi rigidi a 2 o 1 dimensioni

$$\rho_s \text{ densità superficiale} \quad M = \rho_s \cdot S \quad [\rho_s] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\rho_l \text{ densità lineare} \quad M = \rho_l \cdot L \quad [\rho_l] = \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

6.0.1 Centro di massa del corpo rigido

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \quad \text{se } \rho \text{ costante} \quad \vec{r}_{cm} = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV$$

6.0.2 Forza peso sul corpo rigido

Su ciascun dV agisce una forza $\vec{F}_p = -g dm \hat{z}$

$$\vec{F}_p = \int_V (-g dm \hat{z}) = -g M \hat{z}$$

$\vec{M}_p = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_p$ è come se tutte le forze peso agissero sul cm

6.0.3 Rotazione attorno ad un asse

Ciascun volumetto ruota e descrive una circonferenza di raggio $R = ||\vec{r}|| \sin \phi$

Ciascun volumetto ha velocità tangente al cerchio $||\vec{v}|| = R\omega$

e momento angolare $d\vec{L} = \vec{r} \wedge dm \vec{v} = \vec{r} \wedge dm R \omega \hat{z}$

\vec{v} è perpendicolare a \vec{r}

\vec{L} ha una componente lungo \hat{z} e una lungo \hat{z}_1 , ma lungo \hat{z}_2 , le componenti si sommano dopo una risalutazione

$$dL_z = d\vec{L} \cdot \hat{z} = (R \sin \phi \times (r \cos \phi) \sin \phi) \sin \phi = r m (r \sin \phi \cdot \omega) \sin \phi = m r^2 \sin^2 \phi = m r^2 \omega^2$$

$$L_z = \int_V dL_z = \int_V R^2 w dm = w \int_V R^2 dm$$

L_z : momento d'inerzia

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \ddot{\omega} \quad (\text{se } \vec{L} = I_z \vec{\omega}, \vec{\omega} = \omega \vec{z}_z)$$



$$\vec{M} = I_z \ddot{\omega} : \vec{F} = m \vec{a}$$

6.0.4 Energia cinetica

$$E_k = \int_v \Delta E_k = \int_v \frac{1}{2} \|v\|^2 dm = \frac{1}{2} \int_v w^2 R^2 dm = \frac{1}{2} w^2 I_z$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_z w^2 : E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

6.0.5 Lavoro

$$\int_{t_0}^t \Delta E_k(t) - \Delta E_k(t_0) \Rightarrow W_{(0,t)} = \frac{1}{2} I_z w(t)^2 - \frac{1}{2} I_z w(t_0)^2$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} I_z \frac{d(w^2)}{dt} = \frac{1}{2} I_z 2w \cdot \underline{\underline{w}} = I_z \underline{\underline{w}} \frac{dw}{dt}$$

Devono essere uguali.

$$\int_{t_0}^t \Delta W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \|\underline{\underline{H}}\| d\theta \Rightarrow W_{(0,t)} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \|\underline{\underline{H}}\| d\theta$$

6.0.6 Teorema di Huygens-Steiner

Dato un corpo rigido omogeneo, il cui momento d'inerzia rispetto al cm è $I_{z,cm}$

Allora il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo al precedente, a distanza Δ è $I_z = I_{z,cm} + \Delta^2 M$

DIM

Possiamo scegliere l'asse O' così che \hat{x}'_x e \hat{x}'_y siano paralleli e che Δ sia la distanza tra \hat{x}'_x e \hat{x}'_y .

$$\text{quindi: } I_z = \int_v (x'^2 + y'^2) \rho dV = \int_v [(x'+\Delta)^2 + (y')^2] \rho dV = \int_v [(x'^2 + y'^2) + 2x'\Delta + \Delta^2] \rho dV + \int_v \Delta^2 \rho dV = I_{z,cm} + \Delta^2 M$$

RIASSUNTO

$$M = \int_v p(\vec{r}) dm \longrightarrow M = \rho V \quad \text{se } \rho \text{ cost}$$

$$\bar{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_v \vec{r} p(\vec{r}) dV \longrightarrow \bar{r}_{cm} = \frac{1}{V} \int_v \vec{r} dV \quad \text{se } \rho \text{ cost}$$

$\vec{F}_p = -g M \bar{r}_{cm}$ è come se le masse fossero concentrate nel cm

$$\hat{M}_p = \bar{r}_{cm} \vec{F}_p$$

$$I_z = \int_v R^2 dm \quad (R = \text{dist. dell'asse di rotazione})$$

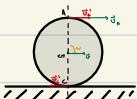
$$\underline{\underline{L}}_z = w \underline{\underline{I}}_z$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \|w\|^2$$

$$W = \Delta E_k \text{ oppure } W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \|\underline{\underline{H}}\| d\theta$$

$$I_z = I_{z,cm} + \Delta^2 M \quad (\Delta = \text{dist. tra } z \text{ e } z_{cm})$$

6.1 Moto di puro rotolamento

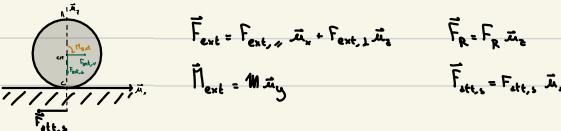


$$\vec{\omega}_{cn} + \vec{v}_r = \vec{0} \quad \vec{\omega}_n = (\vec{\omega}r + \vec{v}_{cn}) = 2\vec{\omega}r = 2\vec{v}_r \quad \vec{\omega}_c = (-\vec{\omega}r + \vec{v}_{cn}) = 0$$

nel S.R. del car:

$$\vec{v}_{cn} = 0 \quad \vec{\omega}_c = -\vec{\omega}r \quad \vec{\omega}_n = \vec{\omega}r$$

DINAMICA DEL ROTOLAMENTO



$$F_{tot} = m\ddot{v} = m\ddot{v}_r = (F_{ext,x} + F_{att,s})\ddot{x}_x + (F_{ext,z} + F_R)\ddot{x}_z \Rightarrow \begin{cases} F_{ext,x} + F_{att,s} = m\ddot{v}_r \\ F_{ext,z} + F_R = 0 \end{cases}$$

quindi $F_{att,s} = F_{ext} - m\ddot{v}_r$

$$M_{tor} = I\cdot\ddot{\alpha} = \cancel{r \times F_{ext}} + \vec{v}_c \times \vec{F}_{att,s} + \cancel{\vec{v}_c \times F_R} + M_{ext}\vec{u}_y = (-rF_{att,s} + M_{ext})\vec{u}_y$$

$$\Rightarrow -r(m\ddot{v}_r - F_{ext}) + M_{ext} = I\cdot\ddot{\alpha} \Rightarrow rF_{ext} - m\ddot{v}_r^2 + M_{ext} = I\cdot\ddot{\alpha} \Rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{M_{ext} + rF_{ext}}{I + mr^2}$$

ES - pendolo fisico



$$\vec{M}_p = \vec{r} \times \vec{F}_p = (r \sin \alpha \vec{i}_x + r \cos \alpha \vec{i}_y) \times (-mg \vec{i}_z) = r \sin \alpha mg \vec{i}_y$$

$$I\cdot\ddot{\alpha} = M_p \Rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{-r \sin \alpha}{I} \Rightarrow \frac{d}{dt} \sin \alpha = 0 \Rightarrow \text{per piccole oscillazioni } \alpha(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{m}{I}} t + \phi \right) = A \sin \left(\sqrt{\frac{3g}{l}} t + \phi \right)$$

ES - urto con un corpo rigido



1) E_{TOT} NON si conserva

2) P_{TOT} SI conserva

3) SI conserva $\vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

$$\vec{L}_1 = m\vec{v}_p \times \vec{i}_z + \vec{L}_{s1} = m((\vec{v}_p \times \vec{i}_z) \times (\vec{v}_p \times \vec{i}_z)) = m\vec{v}_p^2 \vec{i}_z$$

distanza proattile-origine

$$\vec{L}_2 = I_{1,tor} \vec{\omega} = (I_{beam} + I_{proattile}) \vec{\omega} = \underbrace{\left(\frac{1}{3}Ml^2 + \frac{l^2}{4}M + l^2m \right)}_{\text{teorema } I_{beam} = \frac{1}{3}Ml^2} \vec{\omega} = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + l^2m \right) \vec{\omega}$$

$$\text{quindi } \vec{\omega} = \left(\frac{m}{\frac{1}{3}Ml^2 + l^2m} \right) \vec{i}_z = \left(\frac{m}{\frac{1}{3}M + m} l \right) \vec{i}_z$$

7. Fluidodinamica

Ci sono due tipi di forze che si possono applicare ad un fluido

1. Forze di volume

Forze che agiscono su ogni dV

$$\text{es. Forza peso } F_p = \int g \rho dV \hat{n}_z$$

Completa analogie con i corpi rigidi

2. Forze di pressione

Prese dV un volumetto, il liquido attorno esercita una forza ortogonale



La forza è costante, se il fluido è in equilibrio quindi si può esprimere come una proprietà del fluido

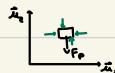
$$F_p = p \cdot S \quad [p] = \frac{N}{m^2} = P_0$$

coeff. di proporzionalità

$$dW = dF_p \cdot dx = p dS dx = p dV \Rightarrow W = \int p dV$$

7.1 Pressione in presenza della Forza-peso

Sia dV su cui agisce \hat{F}_p



$$\text{lungo } \hat{x}_x: dF_{p,z}(x_0) + dF_{p,z}(x_0+dx) + dF_{p,z}(x_0+2dx) = 0 \Leftrightarrow p(x_0)dS_x \hat{x}_x + p(x_0+dx)dS_x(-\hat{x}_x) = 0 \Leftrightarrow \left[p(x_0) - p(x_0) + \frac{\partial p(x)}{\partial x} dx + \dots \right] dS_x \hat{x}_x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p(x_0)}{\partial x} = 0$$

quindi p_x è costante al variare di x , y

$$\text{lungo } \hat{x}_z: dF_{p,z}(z_0) + dF_{p,z}(z_0+dz) + dF_{p,z}(z_0+2dz) = 0 \Leftrightarrow \left(p(z_0)dS_z - p(z_0+dz)dS_z - g\rho dV \right) \hat{x}_z = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p(z_0)}{\partial z} dz = -g\rho dV \Leftrightarrow \frac{\partial p(z_0)}{\partial z} = -g\rho$$

quindi $p(z) = -g\rho z + p_0$ pressione sopra al fluido

Un fluido si dice in "regime stazionario" quando le linee di flusso non si intersecano

7.2 Portata

Per i fluidi in regime stazionario definisca la portata come $dq = dS \cdot v \Leftrightarrow q = \int_s dS v = S \bar{v}$

queste quantità è costante nel flusso

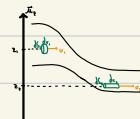
7.3 Teorema di Bernoulli

$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$ è costante lungo il flusso

DIM

$$\begin{aligned} dE_{k,z} - dE_{k,z} = dW_{\text{forz}} &= dW_{p,z} + dW_{\text{peso}} \Rightarrow dW_{p,z} + dW_{\text{peso}} = dE_{k,z} - dE_{k,z} = \frac{1}{2} dm_z v_z^2 - \frac{1}{2} dm_z v_z^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_z^2 - v_z^2) \\ &- \Delta E_p = -g \rho dV z_2 + g \rho dV z_1 \end{aligned}$$

quindi $(p_z - p_0) dV + \rho g dV (z_z - z_0) = \frac{1}{2} \rho dV (v_z^2 - v_0^2) \Rightarrow p_z + \rho g z_z + \frac{1}{2} \rho v_z^2 = p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$



8. Termodinamica

Temperatura (T): Una quantità che ogni corpo possiede

Calore (Q): Una quantità che viene scambiata da un corpo per varcare le temperature

$$dQ = c(T_0)mdT \Rightarrow Q = \int_{T_0}^{T_f} c(T_0)mdT = cm\Delta T$$

Q_{so} se il calore è assorbito

Q_{co} se il calore è ceduto



$$Q_{12} > 0 \quad Q_{21} < 0 \quad Q_{12} + Q_{21} = 0$$

calore specifico (c): $c(T_0) = \frac{1}{m} \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{T_0}$ → calore specifico per unità di massa

$$c_n(T_0) = \frac{1}{n} \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{T_0}$$
 → calore specifico molar

calore latente: I processi di fusione, ebollizione, ... avvengono a T cost. e richiedono un conto calore, Jetto latente

$$Q = m\lambda \quad [\lambda] = J/kg$$

8.0.1 Trasmissione del calore

Per contatto: $dQ = -K \frac{dT}{dx}$ area
cont. tempo

Per irraggiamento: $\frac{dQ}{dT} = \sigma T^4$ cost. J. Stefan-Boltzmann

8.0.2 Sistemi termodinamici

mantene calore lavoro

- aperto	✓	✓	✓
- chiuso	✗	✓	✓
- adiabatico	✗	✗	✓
- isolato	✗	✗	✗

8.0.3 Energia interna

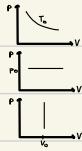
$$\Delta U = U_B - U_A = Q_{AB} - W_{AB} \quad [U] = J$$

U è una funzione di stato $(dU = c_V dT)$

In un ciclo chiuso $\Delta U = U_A - U_A = 0$

8.0.4 Equazione di stato dei gas ideali

se $T = \text{cost.}$ allora $p \cdot V = \text{cost.}$



se $p = \text{cost.}$ allora $V_0 \propto T_{\text{calore}}$
 $\frac{V_f}{V_0} = \frac{T_f}{T_0} \quad T_0 = 273,15^\circ\text{C}$

se $V = \text{cost.}$ allora $p = p_0 \propto T_{\text{calore}}$

Se p, V, T fissati, n il numero di molecole è fissato.

Siano n molli e $p_0 = 1 \text{ bar}$, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, V_0 fissata da n, p, T :

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{l} V_i = nV_0 \\ T_i = T_0 \\ p_i = p_0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{isocoro}} \left| \begin{array}{l} V_f \\ T_f = T_A \\ p_f = p_i = T_A \end{array} \right. \xrightarrow{\text{isoterma}} \left| \begin{array}{l} V_f = V_B \\ T_f \\ p_A V_B = p_A V_A = p_0 V_0 \end{array} \right. \Rightarrow p_f = p_0 \frac{V_0}{V_f} \cdot \frac{T_f}{T_0} \Rightarrow pV = nRT \\ R = 8,3145 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \end{array}$$

8.0.5 Calore specifico

$$C_p = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_{p \text{ cost.}} = \frac{1}{n} \frac{\partial H}{\partial T} \quad (H = U + pV \text{ entalpia})$$

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_{V \text{ cost.}} = \frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial T}$$

$$\text{Legge di Mayer} \quad C_V = C_p - R, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \begin{cases} 5/3 & \text{gas monatomico} \\ 7/5 & \text{gas bimolecolare} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_V = \frac{3}{2} R \\ C_p = \frac{5}{2} R \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_V = \frac{5}{2} R \\ C_p = \frac{7}{2} R \end{cases}$$

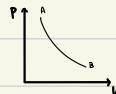
8.1 Trasformazioni termodinamiche

8.1.1 Isoterma ($T = \text{cost.}$)

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$$

$$Q = W = \int_A^B p dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

oss



Se $V_A < V_B \rightarrow Q = W > 0$ (completa lavoro)

se $V_A > V_B \rightarrow Q = W < 0$ (subisce lavoro)

8.1.2 Isobara ($p = \text{cost.}$)

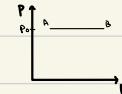
$$W = \int_A^B p dV = p_0 \Delta V$$

$$\Delta U = \int_A^B dU = \int_A^B n c_V dT = n c_V \Delta T$$

$$Q = n c_V \Delta T + p_0 \Delta V$$

$$\Delta U = \int_A^B n c_V dT = \int_A^B c_V \frac{p_0}{R} dV = \frac{c_V}{R} p_0 \Delta V$$

$$Q = \frac{c_V}{R} p_0 \Delta V + p_0 \Delta V = \left(\frac{c_V}{R} + 1 \right) p_0 \Delta V = \frac{c_p}{R} p_0 \Delta V$$

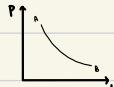


8.1.3 Adiabatica ($Q=0$)

$$\Delta U = -W$$

$$\begin{aligned} dU &= nC_V dT \\ -dW - p dV &= -\frac{nRT}{V} dV \Rightarrow nC_V dT = -\frac{nRT}{V} dV \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-\frac{R}{C_V}} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{1-\frac{R}{C_V}} \end{aligned}$$

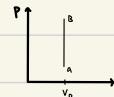
$$\Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{R}{C_V}} = \frac{P_B}{P_A}$$



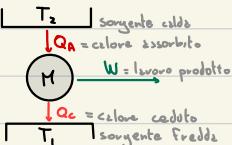
8.1.4 Isocora (V cost.)

$$W = \int p dV = 0 \quad \Delta U = Q = nC_V \Delta T$$

$$\Delta U = \frac{C_V}{R} V_0 \Delta P$$



8.2 Cicli termici

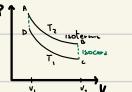


$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Sono utili per produrre lavoro in quanto si possono ripetere.

8.2.1 Il ciclo di Stirling



$$\text{In AB: } Q = W = \int \frac{nRT}{V} dT = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0 \quad (\text{calore assorbito})$$

$$\text{In BC: } W = 0 \quad Q = \Delta U = nC_V \Delta T < 0 \quad (\text{calore ceduto})$$

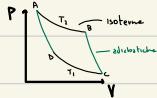
$$\text{In CD: } Q = W = nRT \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) < 0$$

$$\text{In DA: } W = 0 \quad Q = nC_V \Delta T > 0$$

$$\eta = \frac{nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nC_V(T_2 - T_1)} = \frac{(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{C_V}{R}(T_2 - T_1)}$$

$$\eta = \frac{T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

8.2.2 Il ciclo di Carnot



$$\ln AB: Q = W = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

$$\ln BC: Q = 0 \quad W = \Delta U = nc_V(T_1 - T_2)$$

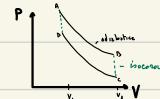
$$\ln CD: Q = W = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0$$

$$\ln DA: Q = 0 \quad W = \Delta U = nc_V(T_2 - T_1)$$

$$\eta = \frac{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) + nc_V(T_1 - T_2) + nc_V(T_2 - T_1)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 + \frac{T_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$\left| \begin{array}{l} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\gamma-1} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{V_D}{V_A} = \frac{V_C}{V_B}$

8.2.3 Il ciclo di Otto



$$\ln AB: Q = 0 \quad W = -\Delta U = nc_V(T_A - T_B)$$

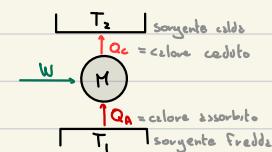
$$\ln BC: W = 0 \quad Q = \Delta U = nc_V(T_C - T_B) < 0$$

$$\eta = 1 - \frac{nc_V(T_C - T_B)}{nc_V(T_A - T_D)} = 1 - \frac{T_C - T_B}{T_A - T_D} \Leftrightarrow \eta = 1 - \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1}$$

$$\ln CD: Q = 0 \quad W = -\Delta U = nc_V(T_i - T_D)$$

$$\ln DA: W = 0 \quad Q = \Delta U = nc_V(T_A - T_D) > 0$$

8.3 I cicli frigoriferi



Per ottenere un ciclo frigorifero è sufficiente percorrerne in senso opposto un ciclo reversibile.

$$W = Q_h \quad \eta = \frac{Q_h}{W} \quad \eta = \frac{1}{\lambda} - 1$$

8.4 Leggi della termodinamica

0. esiste l'equilibrio termodinamico

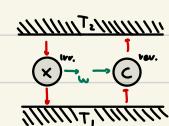
1. Esiste una funzione di stato U t.c. $U_B - U_A = \Delta U = Q_{AB} - W_{AB}$

2.1 È impossibile realizzare un ciclo termodinamico il cui solo scopo sia il trasferimento di calore da un corpo freddo ad uno caldo

2.2 " " " " il cui risultato sia la produzione di lavoro da uno solo sorgente a T costante

2.1 e 2.2 sono enunciati equivalenti

TEO - di Carnot



C una macchina frigorifera di Carnot

X un'altra macchina (anche non reversibile)

$$\eta_C = \frac{W_C}{Q_{AC}}, \quad \eta_X = \frac{W_X}{Q_{AX}} \quad W_X = W_C \quad e \quad Q_{AX} = -Q_{AC}$$

Le macchine M scambiano calore con una sola sorgente, quindi $W_X \leq 0$ per z.z.

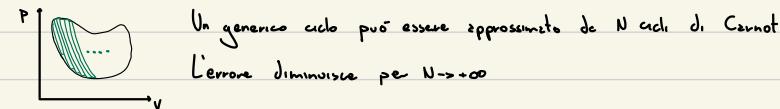
$$\frac{W_X}{Q_A} = \frac{W_X}{Q_{AX}} - \frac{W_C}{Q_{AC}} \leq 0 \Rightarrow \eta_X - \eta_C \leq 0 \Rightarrow \eta_X \leq \eta_C \Rightarrow \eta_X \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Se X è reversibile allora $\eta_X = \eta_C$

OSS

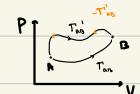
$$\frac{\eta_C}{T_1} + \frac{\eta_C}{T_2} \leq 0$$

TEO - di Clausius



$$\text{Per ciascun ciclo vale } \frac{Q_{1,i}}{T_{1,i}} + \frac{Q_{2,i}}{T_{2,i}} \leq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{Q_{i,i}}{T_i} \leq 0 \Rightarrow \int \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (=0 \text{ se rev.})$$

8.5 L'entropia

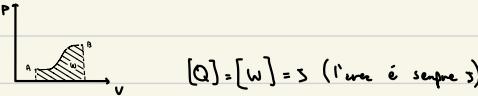
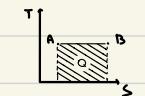


$$\int_{T_{A,0}}^{T_{B,0}} \frac{dQ}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{dQ}{T} \Rightarrow \int_{T_A}^{T_B} \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{quindi posso definire } \Delta S = S(B) - S(A) = \int \frac{dQ}{T}$$

In generale $\Delta S = 0$ se la trasformazione è reversibile $\Delta S > 0$ se irreversibile

quindi, in generale, $\Delta S > 0$ in un sistema isolato

8.5.1 Il piano T-S



$$\int_A^B T dS = \int_A^B T \frac{ds}{T} = Q_{AB}$$

8.5.2 Entropia di un gas ideale

Calcolo dell'entropia di un gas che ha la legge $p_A V_A T_A = p_B V_B T_B$

$$\Delta S_{AB} = \int_{T_{rev,AB}}^{\text{final}} \frac{dQ}{T} = \int_{T_{rev,AB}}^{\text{final}} \frac{1}{T} (nC_V dT + nR dV) = nC_V \int_{T_{rev,AB}}^{\text{final}} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_{rev,AB}}^{\text{final}} \frac{dV}{V} = nC_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$