Algebra lineare e geometria - Francesco Bottacin

1. Spazi Vettoriali

1.1 Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari a coefficienti in un campo K é un insieme S del tipo:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in K$ coefficienti, $x_1, \dots, x_n$ incognite, $b_1, \dots, b_n$ termini noti

Risolvere il sistema significa trovare i valori di $x_1, \dots, x_n$ che soddisfino contemporaneamente tutte le incognite di S

Se $b_1, \dots, b_n = 0$ il sistema si dice omogeneo

ES 1

$$S: \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 1 \\ x_1 + 8x_1 - 4 = -2 \Rightarrow 9x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{9} \\ 3x_1 - 4x_1 + 2 = 3 \Rightarrow -x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \end{cases}$$

il sistema non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$

ES 2

$$S: \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3x_1 - 2 \Rightarrow x_2 = \frac{21}{17} - \frac{34}{17} = -\frac{13}{17} \\ 2x_1 + 5x_2 = -3 \Rightarrow 2x_1 + 15x_1 - 10 = -3 \Rightarrow 17x_1 = 7 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{17} \end{cases}$$

ES 3

$$S: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3x_1 + 2x_2 + x_4 - 2 \\ 2x_1 + 6x_1 + 4x_2 + 2x_4 - 4 - 3x_4 = 0 \Rightarrow 8x_1 + 4x_2 - 4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3x_1 + 2x_2 + 8x_1 + 4x_2 - 4 - 2 = 11x_1 + 6x_2 - 6 \\ x_4 = 8x_1 + 4x_2 - 4 \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = 11a + 6b - 6 \\ x_4 = 8a + 4b - 4 \end{cases}$$

S ha ∞^2 soluzioni

ES 1.1.4

$$S: \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m+1 & m+2 \\ m & m+4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-m)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m+1 & m+2 \\ 0 & 4-m^2 & -m^2-2m+3 \end{array}\right)$$

se $m^2 \neq 4$ $rg A = rg A|B = 2$

se $m^2 = 4$ $rg A \neq rg A|B$

$\Rightarrow$ se $m \neq \pm 2$ S ha una sol

se $m = \pm 2$ S ha 0 sol

$$S: \begin{cases} x + my + y = m+2 \\ (4-m^2)y = -m^2-2m+3 \Rightarrow y = \frac{-m^2-2m+3}{4-m^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x = \frac{-m^3-2m^2+3m}{4-m^2} + \frac{-m^2-2m+3}{4-m^2} - m - 2 \Rightarrow -x = \frac{\cancel{-m^3} \cancel{-2m^2} + 3m - m^2 - 2m + 3 - 4m \cancel{+m^3} - 8 \cancel{+2m^2}}{4-m^2} \Rightarrow x = \frac{-m^2-3m-5}{4-m^2}$$

ES 1.1.5

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \Rightarrow mx + my - y = m+2 \Rightarrow 5m^2 + \cancel{3m} + 2m^2y + \cancel{my} - \cancel{my} - y = m^2 + \cancel{3m} + 2 \Rightarrow 4m^2 + 2m^2y - y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4m^2-2}{2m^2-1} \\ (m+1)x - my = 5m+3 \Rightarrow mx + x - my = 5m+3 \Rightarrow x = \frac{5m+3+my}{m+1} \end{cases}$$

Se $m = -1$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

se $m^2 = \frac{1}{2}$ $\left(m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$x = \frac{1-m}{m}y + \frac{m+2}{m}$$

ES 1.1.6

$$\begin{cases} x+(a-1)y+(2-a)z=a+5 \\ x+ay+2z=4 \\ x+(a-2)y+(2-2a^2)z=6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 1 & a & 2 & 4 \\ 1 & a-2 & 2-2a^2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 0 & 1 & a & -a-1 \\ 0 & -1 & a-2a^2 & 1-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 0 & -1 & a-2a^2 & 1-a \\ 0 & 1 & a & -a-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 0 & -1 & a-2a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & 2a-2a^2 & -2a \end{array}\right)$$

Se $2a-2a^2=0$ — $a=0$ $rg\,A = rg(A|B)$
— $a=1$ $rg\,A \neq rg(A|B)$

S si può risolvere $\forall a \neq 1$, se $a=0$ il sistema ammette infinite soluzioni, altrimenti ne ammette una

$$\begin{cases} x+(a-1)y+(2-a)z=a+5 \Rightarrow x=a^2+2a+4-\frac{2-a}{a-1}=\frac{a^3-a^2+2a^2-2a+4a-4-2+a}{a-1}=\frac{a^3+a^2+3a-6}{a-1} \\ -y+(a+2a^2)z=1-a \Rightarrow y=1-a-\frac{a+2a^2}{a-1}=\frac{\cancel{a}-1-a^2+a\cancel{-a}+2a^2}{a-1}=-\frac{a^2+a-1}{a-1} \\ (2a-2a^2)z=-2a \Rightarrow z=\frac{1}{a-1} \end{cases}$$

ES 1.1.7

$$\begin{cases} (\lambda-1)x_1+2x_2+3x_4=0 \\ \lambda x_2+(\lambda+1)x_4=1 \\ x_1+\lambda x_3+x_4=0 \\ (\lambda-1)x_1+x_4=0 \end{cases}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda-1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda-1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda+2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda+4 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda+2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^3}{2}-\frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda^2}{2}-\lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda+2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda^2+\lambda & -\lambda+4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^3}{2}-\frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda^2}{2}-\lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda} & \frac{2}{\lambda} \end{array}\right)$$

se $\lambda=0$ $\begin{cases} (\lambda-1)x_1+2x_2+3x_4=0 \\ \lambda x_2+(\lambda+1)x_4=1 \\ x_1+\lambda x_3+x_4=0 \\ (\lambda-1)x_1+x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1+2x_2+3x_4=0 \\ x_4=1 \quad \times \\ x_1+x_4=0 \\ -x_1+x_4=0 \end{cases}$ $\Big\} \Rightarrow x_1, x_4=0$ $\quad \nexists$ sol

se $\lambda=1$ $\quad rg\,A=3 \quad rg\,A|B=4 \quad \nexists$ sol

se $\lambda\neq 0,1$ $\begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda^2-2\lambda+2=0 \Rightarrow 1=0 \end{cases}$ $\times$ $\qquad$ se $\lambda\neq 0$ $\quad rg\,A=rg(A|B) \Rightarrow 1$ sol.

1.2 Vettori Geometrici

Un vettore ci permette di descrivere una traslazione in un piano

Per fare ciò è necessario definire una retta (la direzione) il verso e l'entità della traslazione

La lunghezza di un vettore è detta norma e si indica con $\|v\|$

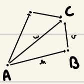
- operazione di moltiplicazione λv

  se $\lambda=0$ ottengo il vettore nullo

  se $\lambda<0$ inverto il verso

  se $v=(v_x, v_y)$ $\lambda v=(\lambda v_x, \lambda v_y)$

- operazione di somma



$w=v+u=u+v$ (commutativa)

se $v=(v_x, v_y)$ e $u=(u_x, u_y)$ Allora $w=(v_x+u_x, v_y+u_y)$

Quindi l'insieme dei vettori è un gruppo.

Ma si possono aggiungere altre proprietà:

(i) $(a\cdot b)v = a(bv)$ (iii) $(a+b)v = av+bv$ $a,b\in K$
(ii) $a(u+v)=au+av$ (iv) $1\cdot v=v$

L'insieme dei vettori è quindi più ricco di un semplice gruppo. Lo chiamiamo quindi uno Spazio Vettoriale

La definizione è per vettori in $\mathbb{R}^2$, ma lo stesso ragionamento può essere applicato su vettori del tipo $v=(a_1, \dots, a_n)\in\mathbb{R}^n$

dove $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$ e $\lambda(a_1,\dots,a_n)=(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$

1.3 Spazi vettoriali

DEFINIZIONE 1.3.1

Uno spazio vettoriale su K è un insieme non vuoto V dotato di:

- un'operazione (+) detta somma:

  $(+)\ V\times V\to V \quad (v_1,v_2)\to v_1+v_2$

- un'operazione $(\cdot)$ detta prodotto per uno scalare:

  $(\cdot)\ K\times V\to V \quad (\lambda,v)\to\lambda v$

Che soddisfano le seguenti proprietà:

- associativa, commutativa per la somma

- elemento neutro per la somma

- opposto ($\forall v \in V\ \exists v'$ t.c. $v+v'=0$)
- distributiva, associativa per il prodotto per uno scalare
- $1 \cdot v = v$

Gli elementi dello spazio vettoriale sono detti vettori, gli elementi del campo sono detti scalari

OSSERVAZIONE 1.3.2

In ogni spazio vettoriale si ha $0 \cdot v = \vec{0}$

ESEMPIO 1.3.3

$V = K^n$ è uno spazio vettoriale su K ($\forall K$ campo)

ESEMPIO 1.3.4

$K[X]$ è uno spazio vettoriale su K ($K[X]$ è l'insieme dei polinomi a coordinate in K)

ESEMPIO 1.3.5

Sia K campo e S un insieme allora K^S, insieme formato da tutte le funzioni $f: S \to K$ è uno spazio vettoriale

DEFINIZIONE 1.3.8

Sia V spazio vettoriale su K.

Una combinazione lineare di elementi di V è una somma finita del tipo:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ e $v_1, \dots, v_n \in V$

ES 1.1.1E

(a) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ no, se sono ≥ 0 $\forall x \in [0,1]$ il loro opposto è ≤ 0

(b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ sì

(c) sì

(d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(1) = 0 \wedge f(4) = 0$ no

(e) no

(f) sì

derivate e integrale sono lineari

(g) sì

1.3.1 Sottospazi vettoriali

Sia V spazio vettoriale su K

DEFINIZIONE 1.3.9

Un sottospazio vettoriale W di V è un sottoinsieme non vuoto di V t.c. la restrizione a W delle operazioni di somma e prodotto definite in V rendono W spazio vettoriale

Quindi W deve essere:

- $\vec{0} \in W$
- chiuso per la somma
- chiuso per il prodotto

Quindi $W \leq V$ su K se e solo se

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K \quad \forall w_1, w_2 \in W$$

OSSERVAZIONE 1.3.11

Ogni spazio vettoriale è sottospazio vettoriale di sé stesso

$\{\vec{0}\}$ è sottospazio vettoriale di ogni spazio vettoriale

PROPOSIZIONE 1.3.13

L'intersezione di una famiglia di sottospazi vettoriali di V è sottospazio vettoriale di V

Questo non vale, in generale, per l'unione

DEFINIZIONE 1.3.15

Sia $S \subseteq V$, il sottospazio vettoriale generato da S è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente S e si indica con $L(S)$ o $\langle S \rangle$

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v_i \in S \right\}$$

L'operazione di unione non ha buone proprietà, si preferisce quindi usare la somma tra sottospazi vettoriali

DEFINIZIONE 1.3.18

Siano $W_1, W_2 \leq V$, la loro somma $W_1 + W_2$ è il sottospazio vettoriale $\langle W_1, W_2 \rangle$

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}$$

DEFINIZIONE 1.3.21

Se $W_1 \cap W_2 = \vec{0}$ Allora W_1 e W_2 si dicono in somma diretta e si scrive $W_1 \oplus W_2$

PROPOSIZIONE 1.3.22

Ogni vettore $v \in W_1 \oplus W_2$ si scrive in modo unico come $v = w_1 + w_2$

ES 1.1.2E

(a) $2x_1 - 3x_2 = 0$

el. neutro $(0,0)$ ✓

chiuso per la somma

$(2x_1 - 3x_2) + (2y_1 - 3y_2) = 2(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) = 0$

chiuso per prodotto

$\lambda(2x_1 - 3x_2) = 2\lambda x_1 - 3\lambda x_2 = 0$

(b) $(0,0)$ non appartiene $(0=3)$

(c) $2x_1 + x_2^2 = 0$

$(0,0)$ appartiene

$(2x_1 + x_2^2) + (2y_1 + y_2^2) = 0 \iff 2(x_1 + y_1) + (x_2^2 + y_2^2) \neq 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)^2$ ✗

ES 1.1.3E

(a) $\vec{0} \in S_1$ $(x_1, x_2, x_3) \in S_1$ e $(y_1, y_2, y_3) \in S_1$

$(z_1, z_2, z_3) = \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3) + \lambda_2(y_1, y_2, y_3)$ $z_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1$ $z_2 = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2$ $z_3 = \lambda_1 x_3 + \lambda_2 y_3$

$z_1 - 2z_2 + z_3 = 0 \iff \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 - 2\lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 y_2 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 y_3 = \lambda_1(x_1 - 2x_2 + x_3) + \lambda_2(y_1 - 2y_2 + y_3) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$ ✓

$2z_1 - z_3 = 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 y_1 - \lambda_1 x_3 - \lambda_2 y_3 = \lambda_1(2x_1 - x_3) + \lambda_2(2y_1 - y_3) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

(b) $\vec{0} \notin S_2$

(c) $3z_1 - z_2 z_3 = 3\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 y_1 - (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2)(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 y_3) = 3\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 y_1 - \lambda_1^2 x_2 x_3 + \lambda_1\lambda_2 x_2 y_3 + \lambda_2 \lambda_1 y_2 x_3 + \lambda_2^2 y_2 y_3 \neq 0$ in generale

ES 1.1.6E

$\lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_2(1,2,3,4) = \mu_1(0,1,1,1) + \mu_2(0,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \\ 4\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \\ \mu_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 4\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \\ \mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \\ 2\lambda_2 = \mu_1 \\ 2\lambda_2 = \mu_1 \\ 4\lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 \Rightarrow 2\lambda_2 = \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -c \\ \lambda_2 = c \\ \mu_1 = 2c \\ \mu_2 = 2c \end{cases}$$

Infinite sol. in $V \cap W \Rightarrow$ non sono in somma diretta

1.3.2 Insiemi di generatori e basi

DEFINIZIONE 1.3.25

Un sottoinsieme $S \subseteq V$ è detto un insieme di generatori di V se $\langle S \rangle = V$

In tal caso si dice che S genera V

Se S genera V allora ogni $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare finita di elementi di S

$$v = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ e $s_1, \dots, s_n \in S$

DEFINIZIONE 1.3.26

Un sottoinsieme $S \subseteq V$ è detto insieme libero di vettori se una combinazione lineare di elementi di S è il vettore nullo se e solo se tutti i coefficienti di sono nulli

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \ , \ v_1, \dots, v_n \in S \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

In questo caso i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti

DEFINIZIONE 1.3.28

I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono linearmente dipendenti se non sono linearmente indipendenti

PROPOSIZIONE 1.3.29

I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti $\iff$ almeno uno di essi può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti

PROPOSIZIONE 1.3.30

Se $v \in V$ e $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori lin. indipendenti

Se $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ allora $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono determinati in modo unico

DEFINIZIONE 1.3.31

Una base di V è un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano V

COROLLARIO 1.3.33

Sia $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ base di V allora $\forall v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono definiti in modo unico

1.3.3 Spazi vettoriali finitamente generati

DEFINIZIONE 1.3.35

Uno spazio vettoriale V si dice finitamente generato se esiste un insieme finito di generatori di V

PROPOSIZIONE 1.3.36

Sia $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ insieme di generatori di V

Allora S contiene i vettori $v_1,\dots,v_r$, per qualche $r\leq n$ che formano una base di V

TEOREMA 1.3.37 (Teorema dello scambio)

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $\{v_1,\dots,v_n\}$ un insieme di generatori di V

Se $w_1,\dots,w_r$ sono lin. indipendenti allora $r\leq n$

COROLLARIO 1.3.38

Sia V spazio vettoriale finitamente generato

$\{v_1,\dots,v_n\}$ base di V

$\{w_1,\dots,w_r\}$ vettori lin. indipendenti

$\{u_1,\dots,u_s\}$ generatori di V

Allora $r\leq n$ e $s\geq n$

COROLLARIO 1.3.39

Due basi qualunque di V hanno lo stesso numero di elementi

DEFINIZIONE 1.3.40

La dimensione di V, indicata con $\dim V$, è il numero di elementi di una base di V

COROLLARIO 1.3.43

Sia V spazio vettoriale finitamente generato e $W\leq V$

Allora W è finitamente generato e $\dim W\leq \dim V$

COROLLARIO 1.3.44

Sia V spazio vettoriale finitamente generato

Allora ogni insieme di vettori lin. indipendenti può essere completato ad una base di V

PROPOSIZIONE 1.3.45

Sia V spazio vettoriale t.c. $\dim V = n$ e siano $v_1,\dots,v_n$ vettori di V

$v_1,\dots,v_n$ lin. indipendenti $\Rightarrow$ $v_1,\dots,v_n$ base $\Leftarrow$ $v_1,\dots,v_n$ generatori di V

PROPOSIZIONE 1.3.48 (Formula di Grassmann)

Siano W_1 e W_2 sottospazi vettoriali finitamente generati di V spazio vettoriale finitamente generato

Allora $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$

OSSERVAZIONE 1.3.4.9

Sia V spazio vettoriale finitamente generato

Per ogni sottospazio $W \subseteq V$ è possibile trovare W' t.c. $V = W \oplus W'$

Un tale W' è detto spazio complementare di W

Per fare ciò è sufficiente considerare una base di W $\{w_1, \dots, w_r\}$ e completarla a base di V $\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_{r+n}\}$

Il sottospazio W' è generato dai vettori $\{w_{r+1}, \dots, w_n\}$

Notiamo che W' non è unico dato che la base di V non è unica

ES 1.3.2

$V = \mathbb{R}[x] \quad \dim V = 4$

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$ base canonica

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} -\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Sì, è base

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$

Sì è base

ES 1.3.3

$p_1(x) = \cancel{x^2}\cancel{+x}\cancel{-x^2} + x^2 - \cancel{2}x + 1 = x^2 - x + 1 \qquad \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}$

$p_2(x) = x^2 + 1 + x^2 - 2x = 2x^2 - 2x + 1$

$p_3(x) = x^2 + 1 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 2$

$p_4(x) = x - x^2$

$\dim \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = 3$

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \lambda_1(x^2 - x + 1) + \lambda_2(2x^2 - 2x + 1) + \lambda_3(2x^2 - 2x + 2)$$

$$= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3)x^2 + (-\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3)x + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = 0$$

$$\xrightarrow{PIP} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases}$$

non sono lin. indipendenti

$\{p_1, p_2, p_4\}$ o $\{p_2, p_3, p_4\}$ basi di V

ES 1.3.4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

$f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$, $f_3(x) = \sin 3x$

$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x + \lambda_3 \sin 3x = 0$

L'unica sol. $\forall x$ è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

ES 1.3.5

(1) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \Rightarrow 2\lambda_1 = -3\lambda_2 \Rightarrow 2\lambda_1 = -6\lambda_1 & \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3 & \Rightarrow \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \Rightarrow 2\lambda_1 = \lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

è base

(2) $$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \Rightarrow -4\lambda_3 + 3\lambda_3 + \lambda_3 = 0 & \Rightarrow 0 = 0 \\ 2\lambda_1 + 8\lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -4\lambda_3 & \Rightarrow \lambda_1 = -4c \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 13\lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 & \Rightarrow \lambda_2 = c \\ & & \lambda_3 = c \end{cases}$$

non generano $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + 8\lambda_3 = y \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 13\lambda_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = x \\ -6\lambda_2 + 6\lambda_3 = y - 2x \\ -10\lambda_2 + 10\lambda_3 = z - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 - \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}x \\ -\cancel{10\lambda_3} + \frac{5}{3}y - \frac{10}{3}x + \cancel{10\lambda_3} = z - 3x \end{cases}$$

$-\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}x \qquad -\frac{10}{3} + \frac{9}{3}$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\8\\13\end{pmatrix} \right\rangle = \{(x, y, z) \mid -x + 5y - 3z = 0\}$

(3) $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \Rightarrow -5\lambda_3 + 4\lambda_3 + \lambda_3 = 0 & \Rightarrow 0 = 0 \\ 2\lambda_1 + 10\lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -5\lambda_3 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 - 11\lambda_3 = 0 & \Rightarrow 4\lambda_3 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + 10\lambda_3 = y \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 - 11\lambda_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ -2\lambda_2 + 8\lambda_3 = y - 2x \\ 2\lambda_2 - 8\lambda_3 = z - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ -2\lambda_2 + 8\lambda_3 = y - 2x \\ 0 = y - 2x + z - 3x \end{cases}$$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\10\\-11\end{pmatrix} \right\rangle = \{(x, y, z) \mid -5x + y + z = 0\}$

ES 1.3.6

(1) $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + 3\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} -1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ -2 \ \ -4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 \cancel{+\lambda_3} + 2\lambda_4 + 4\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 \cancel{-\lambda_3} - 2\lambda_4 - \lambda_5 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \\ \cancel{+3\lambda_3} - 2\lambda_4 - 2\lambda_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_4 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_4 = \lambda_5 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2c \\ \lambda_2 = c \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = c \\ \lambda_5 = -c \end{cases}$$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ +\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ +2\lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 - 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

(2)
$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = a & \Rightarrow \lambda_1 = a - 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = b & \Rightarrow -2a + 2\lambda_3 + b = \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = c & \Rightarrow 3a - \cancel{9\lambda_3} - 4a + \cancel{4\lambda_3} + 2b + \cancel{5\lambda_3} = c \Rightarrow -a + 2b - c = 0 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 + 16\lambda_3 = d & \Rightarrow 4a - 12\lambda_3 + 2a - 2\lambda_3 - b + 16\lambda_3 = d \Rightarrow \end{cases}$$

$-a + 2b - c = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\left\{ v_1, v_2, v_3, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base di V

ES 1.3.7

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_2 + 3x_3 - x_5 = 0 \Rightarrow 6x_4 - 14x_2 - x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 14x_2 - 6x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_4 - 5x_2 \end{cases}$$

$\dim V = 2$

Sia $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = v_1$

Sia $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = v_2$

v_1 e v_2 sono lin. indipendenti perché non sono uno multiplo dell'altro $\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ base di V

ES 1.3.8

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = a \\ 2a_1 - 2a_2 = b \\ 3a_1 + 3a_2 = c \\ 4a_1 - 4a_2 = d \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & y \\ 3 & 3 & z \\ 4 & -4 & \gamma \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & y - 2x \\ 0 & 0 & z - 3x \\ 0 & -8 & \gamma - 4x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & y - 2x \\ 0 & 0 & z - 3x \\ 0 & 0 & \gamma - 2y \end{array}\right)$$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \{ (x, y, z, \gamma) \mid z - 3x = 0 \text{ e } \gamma - 2y = 0 \}$

$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, v_2 \rangle$

ES 1.3.9

(1) Falso, in generale

(2) vero

Es 1.3.10

(1) $\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = x & \Rightarrow \lambda_2 = x - 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = y & \Rightarrow \lambda_1 = y - 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = z & \Rightarrow -2y + \cancel{4\lambda_3} + 2x - \cancel{6\lambda_3} + \cancel{2\lambda_3} = z \Rightarrow -2y + 2x - z = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = \gamma & \Rightarrow y - \cancel{2\lambda_3} - x + \cancel{3\lambda_3} - \cancel{\lambda_3} = \gamma \Rightarrow y - x - \gamma = 0 \end{cases}$

$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \{ (x,y,z,\gamma) \mid -2x + 2y + z = x - y + \gamma = 0 \}$

$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x & \Rightarrow \lambda_1 = x + \frac{\gamma}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y & \Rightarrow x + \gamma - y = 0 \\ -4\lambda_2 = z & \Rightarrow -2\gamma - z = 0 \\ +2\lambda_2 = \gamma & \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\gamma}{2} \end{cases}$

$\langle u_1, u_2 \rangle = \{ (x,y,z,\gamma) \mid x + \gamma - y = -2\gamma - z = 0 \}$

$v_1 \in \langle u_1, u_2 \rangle \quad v_2 \in \langle u_1, u_2 \rangle \quad v_3 \in \langle u_1, u_2 \rangle \quad \Rightarrow \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \langle u_1, u_2 \rangle$

$u_1 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad u_2 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad \Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

quindi $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$

(2) $\begin{cases} \lambda_2 = x \\ \lambda_1 = y \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = z \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y + 2x - z = 0 \\ y - x - \gamma = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x & \Rightarrow \lambda_1 = x - \frac{3}{2}y \\ +2\lambda_2 = y & \Rightarrow \lambda_2 = \frac{y}{2} \\ +2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = z \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = \gamma & \Rightarrow x - y - \gamma = 0 \end{cases}$

$\langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle v_2, v_3, v_4 \rangle = \{ (x,y,z,\gamma) \mid -2y + 2x - z = y - x - \gamma = x - y - \gamma = 0 \} \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{cases} -2y + 2x - z = 0 \\ y - x - \gamma = 0 \\ x - y - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2y + 2x \\ \gamma = y - x \\ x - y - y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4y \\ \gamma = 0 \\ x = y \end{cases}$

$\dim(\langle v_1, v_2 \rangle \cap \langle v_2, v_3, v_4 \rangle) = 1$ ✓

(4) $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ generano $\mathbb{R}^4 \iff$ sono base di $\mathbb{R}^4 \iff$ sono lin. indipendenti

$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \cancel{4\lambda_3} - \cancel{6\lambda_3} + \cancel{2\lambda_3} + \lambda_4 = 0 \\ \cancel{-2\lambda_3} + \cancel{3\lambda_3} - \cancel{\lambda_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2c \\ \lambda_2 = -3c \\ \lambda_3 = c \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$

Sia $c = 1$

$0 = -2v_1 - 3v_2 + v_3 \Rightarrow v_3 = 2v_1 + 3v_2$

(5) $\begin{cases} \lambda_2 + \cancel{3\lambda_3} = x \\ \lambda_1 + \cancel{2\lambda_3} = y \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cancel{2\lambda_3} + \lambda_4 = z \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \cancel{\lambda_3} + \lambda_5 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_5 = 0 \end{cases}$

v_1, v_2, v_4, v_5 base di $\mathbb{R}^4$

ES 1.3.11

(1) $\begin{cases} \alpha_1 \quad\quad + 3\alpha_3 = 0 \\ \quad +2\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\frac{7}{2}\alpha_3 \\ -3\alpha_3 - 7\alpha_3 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Sono lin. indipendenti, sono base di $\mathbb{R}^3$

(2) $\begin{cases} \alpha_1 \quad + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$

v_1, v_2 sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ generano V di dim 2 e ne sono base

(3) $\begin{array}{c} -2\ -4\ -2\ 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{3}\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3}\alpha_3 \\ \alpha_4 = \alpha_3 \end{cases}$

$<v_1, v_2, v_3>$ lin. indipendenti $\Rightarrow$ generano V di dim 3 e ne sono base

$\frac{1}{6}$

ES 1.3.13

(1) $\begin{cases} \alpha_1 + t\alpha_2 + (t-2)\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ t\alpha_1 + t\alpha_2 - t\alpha_3 + t\alpha_4 = 0 \\ 2t\alpha_1 + t\alpha_2 - 3t\alpha_3 + 2t\alpha_4 = 0 \\ t\alpha_2 + t\alpha_3 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow t\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{t}{2}\alpha_1 + \alpha_4 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{t}{6}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_1$
$\Rightarrow t\alpha_1 + 2t\alpha_2 + t\alpha_4 = 0 \Rightarrow t\alpha_1 + t^2\alpha_1 + 3t\alpha_4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
$\Rightarrow 2t\alpha_1 + 4t\alpha_2 + 2t\alpha_4 = 0 \Rightarrow 2t\alpha_1 + 2t^2\alpha_1 + 6t\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{t}{3}\alpha_1$
$\Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$

No, non generano $\mathbb{R}^4$ per alcun $t \in \mathbb{R}$

(2)

$\dim U_t = 2$ e $\dim V_t = 2$ e $\dim U_t + V_t = 3$

quindi $\dim U_t \cap V_t = 1$

$\begin{cases} \alpha_1 + t\alpha_2 = 0 \\ t\alpha_1 + t\alpha_2 = 0 \\ 2t\alpha_1 + t\alpha_2 = 0 & \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ 0 + t\alpha_2 = 0 & \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è base di $U_1 \cap V_1$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ base di $\mathbb{R}^4$

ES 1.3.14

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ \cancel{-6\alpha_2} + \cancel{2\alpha_2} + \cancel{4\alpha_3} = 0 \\ -8\alpha_2 + 6\alpha_2 + 4\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\dim U = 3$ base $\{v_1, v_2, v_3\}$

$\dim V = 2$ base $\{v_4, v_5\}$

$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 - \lambda_4 u_4 - \lambda_5 u_5$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 - 2\lambda_5 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_5 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 4\lambda_3 - 2\lambda_4 - \lambda_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_4 - 2\lambda_5 = 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + 7\lambda_5 = 0 \\ +8\lambda_5 = 0 \\ +2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -c \\ \lambda_2 = c \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = c \\ \lambda_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim U \cap V = 1$ e $w = -v_1 + v_2 = v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\dim U+V = 4$ e base canonica

ES 1.3.17

$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \Rightarrow -\lambda_2 + 3\lambda_2 - 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 4\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 & \Rightarrow 2\lambda_2 = \lambda_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -c \\ \lambda_2 = c \\ \lambda_3 = 2c \\ \lambda_4 = 2c \end{cases}$$

$w = -v_1 + v_2 = 2v_3 + 2v_4 = (0, 2, 2, 4) \in U \cap V$

Non sono in somma diretta

ES 1.3.18

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base di U

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, non è unico

ES 1.3.19

devo trovare 2 vettori lin. indipendenti rispetto a v_1, v_2 e v_3, v_4

$$\begin{cases} \lambda_1 = x \\ = y \\ \lambda_1 = z \\ \lambda_2 = \gamma \end{cases} \Rightarrow z - x = 0,\ y = 0,\ \gamma \text{ qualsiasi}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = x \\ = y \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = z \\ \lambda_2 = \gamma \end{cases} \Rightarrow 2x + \gamma - z = 0,\ y = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U, V$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ sono lin. indipendenti

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ sono lin. indipendenti

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ soddisfa le richieste e non è unico

2. Funzioni lineari e Matrici

2.1 Funzioni lineari

In questo capitolo ci occuperemo delle funzioni tra spazi vettoriali che hanno proprietà simili agli spazi vettoriali

DEFINIZIONE 2.1.1

Siano V e W spazi vettoriali su K

$f: V \to W$ si dice lineare se è

- additiva: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- $f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$

$\forall v_1, v_2 \in V$, una funzione lineare tra due spazi vettoriali è detta omomorfismo

DEFINIZIONE 2.1.2

$f: V \to W$ si dice isomorfismo se è biettiva

Se $\exists f$ isomorfismo tra V e W, V e W si dicono isomorfi $(V \cong W)$

PROPOSIZIONE 2.1.3

Sia V spazio vettoriale t.c. $\dim V = n$ su K

Allora V è isomorfo allo spazio vettoriale K^n

2.1.1 Nucleo e immagine

DEFINIZIONE 2.1.7

Sia $f: V \to W$ funzione lineare tra due spazi vettoriali

Il nucleo è $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \leq V$

L'immagine è $\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid w = f(v) \text{ per qualche } v \in V\} \leq W$

PROPOSIZIONE 2.1.9

f è iniettiva $\iff \operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$

PROPOSIZIONE 2.1.11

$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

OSSERVAZIONE 2.1.12

rango $f = rg\, f = rk\, f = \dim \operatorname{Im} f$

nullità $f = null\, f = \dim \operatorname{Ker} f$

OSSERVAZIONE 2.1.13

Siano V, W spazi vettoriali, allora $Hom(V,W)$ è l'insieme delle funzioni lineari

Per le proprietà delle funzioni lineari $Hom(V,W)$ è spazio vettoriale

OSSERVAZIONE 2.1.14

Un omomorfismo $f: V \to V$ è anche detto endomorfismo

Se è invertibile allora è un automorfismo

2.1.3 Funzioni lineari e basi

Siano V e W spazi vettoriali su K e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V

(1) Un omomorfismo $f: V \to W$ è determinato in modo unico da $f(v_1), \dots, f(v_n)$

(2) Scelti arbitrariamente dei vettori $\{w_i\} \in W$ esiste un unico omomorfismo $f: V \to W$ t.c. $f(v_i) = w_i \ \forall i \in I$

COROLLARIO 2.1.20

Siano V e W spazi vettoriali su K, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $f: V \to W$ lineare

(1) f è iniettiva $\iff$ $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono lin. indipendenti

(2) f è suriettiva $\iff$ $\langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle = W$

(3) f è isomorfismo $\iff$ $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ base di W

ES 2.1.1

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y) \to (x - y, x + y + 1, 0)$

$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$

$(x_1 + x_2 - y_1 - y_2, \ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + 1, \ 0) \neq (x_1 - y_1, x_1 + y_1 + 1, 0) + (x_2 - y_2, x_2 + y_2 + 1, 0) = (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + 2, 0)$

non è lineare

(2) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (2x,\ x+y)$
$f(x_1+x_2,\ y_1+y_2) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$(2x_1+2x_2,\ x_1+x_2+y_1+y_2) = (2x_1+2x_2,\ x_1+y_1+x_2+y_2)$ ✓

$\lambda f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)$

$\lambda(2x, x+y) = (\lambda 2x,\ \lambda x+\lambda y)$ ✓

è lineare

(3) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to \sin(x-y)$
$f(x_1+x_2,\ y_1+y_2) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$\sin(x_1+x_2-y_1-y_2) \neq \sin(x_1-y_1) + \sin(x_2-y_2$

ES 2.1.2

$F(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) = f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$

$(x_1+ty_1,\ ty_1z_1) + (x_2+ty_2,\ ty_2z_2) = (x_1+x_2+t(y_1+y_2),\ t(y_1+y_2)(z_1+z_2)) \iff ty_1z_1+ty_2z_2 = t(y_1+y_2)(z_1+z_2) \iff t=0$

ES 2.1.3

$f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
$(x,y) \to (x+\bar{y})$

$f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) = f(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

$x_1+\bar{y}_1 + x_2+\bar{y}_2 = x_1+x_2+\overline{y_1+y_2}$ ✓ $\quad \left(\overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = x_1+x_2-i(y_1+y_2) = x_1-iy_1+x_2-iy_2 = \overline{x_1+iy_1} + \overline{x_2+iy_2}\right)$

$\lambda(x_1+\bar{y}_1) = \lambda x_1 + \overline{\lambda y_1} = \lambda x_1 + \bar{\lambda}\bar{y}_1 \neq \lambda x_1 + \lambda \bar{y}_1$ $\quad \lambda \in K$

2.2 Matrici

Le matrici nascono per rappresentare le funzioni lineari

infatti sia $f:V \to W$, $\{v_j\}_{j=1\dots n}$ base di V e $\{w_i\}_{i=1\dots m}$ base di W

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$

DEFINIZIONE 2.2.1

Una matrice con m righe e n colonne $(m\times n)$ a elementi in K

è il dato di $m\cdot n$ elementi scritti in tabella

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

La matrice di f dipende anche dalla scelta delle basi, scriveremo $A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$ dom, codominio

DEFINIZIONE 2.2.4

Siano $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ t.c. $A,B \in M_{m\times n}(K)$

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

$M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)+M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(g)=M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f+g)$

In modo simile $M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\lambda f)=\lambda M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$

PROPOSIZIONE 2.2.6

Tra $Hom(V,W)\to M_{m\times n}(K)$ vi è un isomorfismo, quindi $Hom(V,W)\cong M_{m\times n}(K)$

DEFINIZIONE 2.2.7

Date due matrici $A\in M_{m\times n}(K)$ e $B\in M_{n\times r}(K)$ il loro prodotto è $C\in M_{m\times r}(K)$ t.c.

$c_{ij}=\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}$ (prodotto righe per colonne)

In modo simile $M^{\underline{w}}_{\underline{c}}(f\circ g)=M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)\cdot M^{\underline{v}}_{\underline{c}}(g)$

DEFINIZIONE 2.2.9

Sia $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ la trasposta di A è la matrice ${}^tA=(a_{ji})\in M_{n\times m}(K)$

ES $v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ ${}^tv=(x_1,\dots,x_n)$

DEFINIZIONE 2.2.10

Siano $v,w\in K^n$, il loro prodotto scalare è definito da $v\cdot w=({}^tv)w$

PROPOSIZIONE 2.2.11

Siano $A,B\in M_{m\times n}(K)$ e $\lambda\in K$

(1) ${}^t({}^tA)=A$

(2) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$

(3) ${}^t(\lambda A)=\lambda\,{}^tA$

(4) ${}^t(A\cdot B)={}^tB\cdot{}^tA$ (Se $A\in M_{m\times n}(K)$ e $B\in M_{n\times r}(K)$)

PROPOSIZIONE 2.2.12

(1) $(A\cdot B)C=A\cdot(BC)$

(2) $(A+B)C=AC+BC$

(3) $\lambda(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$

(4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(5) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

PROPOSIZIONE 2.2.13

Sia $F: V \to W$ dove $\underline{v}$ e $\underline{w}$ basi di V e W

Sappiamo che esiste un isomorfismo $\phi_{\underline{v}}: V_{\underline{v}} \to V_{e_n}$ che riporta le coordinate dei vettori a quelle canoniche

Quindi data $M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(F)$ posso determinare una funzione lineare $F: K^n \to K^m$

Il diagramma:

$$\begin{tikzcd} v \in V \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[d, "\wr"'] & W \ni w \arrow[d, "\wr"] \arrow[d] \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n \arrow[r, "A"] & K^m \ni \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

è commutativo

Per calcolare $F(v)$ trovo $A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(F)$ e $w = A \cdot v$ (v è espresso in base $\underline{v}$ e w in base $\underline{w}$)

più precisamente:
$$\boxed{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}^{\underline{w}} = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(F) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}}$$

La matrice $A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(F)$ forma una funzione lineare $F: K^n \to K^m$

DEFINIZIONE 2.2.15

Definiamo rango e nullità di A

$rg\,A = rg\,F = \dim \operatorname{Im} F$

$null\,A = null\,F = \dim \operatorname{Ker} F$

PROPOSIZIONE 2.2.16

Noto che $\operatorname{Im}(F)$ è generato dalle colonne di A quindi $rk\,A$ è il massimo numero di colonne lin. indipendenti

OSSERVAZIONE 2.2.17

Il rango per righe e il rango per colonne di A hanno lo stesso valore

2.2.1 Matrici quadrate

DEFINIZIONE 2.2.19

Una matrice in K si dice quadrata di ordine n se essa ha n righe e n colonne

L'insieme di matrici quadrate di ordine n si indica con $M_n(K)$

Nell'insieme di matrici quadrate il prodotto è sempre definito e il suo elemento neutro è la matrice identica

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

è detta matrice scalare la matrice $I_n \cdot \lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

è detta matrice diagonale la matrice del tipo: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

è detta matrice triangolare superiore una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{12} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

è detta matrice triangolare inferiore una matrice del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ \vdots & a_{12} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE 2.2.20

Esistono matrici $A, B \neq \vec{0}$ il cui prodotto $A \cdot B = \vec{0}$, si dicono divisori di zero

Esistono matrici $C \neq \vec{0}$, ma si ha $C^k = \vec{0}$ per qualche k, si dicono nilpotenti

2.2.2 Cambiamenti di base

Siano V e W spazi vettoriali t.c. $\dim V = n$ e $\dim W = m$, siano $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\underline{v}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ basi di V e $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$, $\underline{w}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$ basi di W

$f: V \to W$ funzione lineare e $A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$, $A' = M^{\underline{w}'}_{\underline{v}'}(f)$

Sia $\alpha_{\underline{v}}: V \xrightarrow{\sim} K^n$ la funzione che associa $v \in V$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\underline{v}}$

Sia $\beta_{\underline{w}}: W \xrightarrow{\sim} K^m$ la funzione che associa $w \in W$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\underline{w}}$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\alpha_{\underline{v}'}"'] \arrow[dr, "\alpha_{\underline{v}}"] & \\ K^n_{\underline{v}'} \arrow[rr, "F_P"'] & & K^n_{\underline{v}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\beta_{\underline{w}'}"'] \arrow[dr, "\beta_{\underline{w}}"] & \\ K^m_{\underline{w}'} \arrow[rr, "F_Q"'] & & K^m_{\underline{w}} \end{tikzcd}$$

Le funzioni F_P e F_Q corrispondono alle matrici $P \in M_n(K)$ e $Q \in M_m(K)$ che chiameremo matrici del cambiamento di base

Le matrici di cambiamento di base sono invertibili

Possiamo anche dire che $P = M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id_V)$ e $Q = M^{\underline{w}}_{\underline{w}'}(id_W)$

Quindi per passare da A ad A'

$$\boxed{\begin{aligned} M^{\underline{w}'}_{\underline{v}'}(f) &= M^{\underline{w}'}_{\underline{w}}(id_W) \cdot M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \cdot M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id_V) \\ M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) &= M^{\underline{w}}_{\underline{w}'}(id_W) \cdot M^{\underline{w}'}_{\underline{v}'}(f) \cdot M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id_V) \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A' &= Q^{-1}AP \\ A &= QA'P^{-1} \end{aligned}}$$

Se $f: V \to V$ Allora

$$M^{\underline{v}'}_{\underline{v}'}(f) = M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id_V)\, M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f)\, M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id_V) \qquad A' = P^{-1}AP$$

$$M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f) = M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id_V)\, M^{\underline{v}'}_{\underline{v}'}(f)\, M^{\underline{v}'}_{\underline{v}}(id_V) \qquad A = PA'P^{-1}$$

DEFINIZIONE 2.2.21

$A, B \in M_n(K)$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $S \in M_n(K)$ t.c.

$$A = SBS^{-1} \quad o \quad B = S^{-1}AS$$

A e B rappresentano lo stesso endomorfismo ($f: V \to V$) rispetto a basi diverse $\iff$ sono simili

ES 2.2.1

$$f: V \to W \qquad M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ES 2.2.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = 2w_1 + 3w_2 \qquad f(v_2) = -w_1 + 2w_2 \qquad f(v_3) = w_1 - 3w_2$$

(1) $f(v_1') = -w_1 + 2w_2 + w_1 - 3w_2 = -w_2$

$f(v_2') = 2w_1 + 3w_2 + w_1 - 3w_2 = 3w_1$

$f(v_3') = 2w_1 + 3w_2 - w_1 + 2w_2 = w_1 + 5w_2$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{cases} w_1' = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \\ w_2' = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2w_1' - w_2 \\ 2w_2' + w_2 = w_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_1' + w_2' \\ w_2 = w_1' - w_2' \end{cases}$$

$f(v_1') = -w_2 = -w_1' + w_2'$

$f(v_2') = 3w_1 = 3w_1' + 3w_2'$

$f(v_3') = w_1 + 5w_2 = w_1' + w_2' + 5w_1' - 5w_2' = 6w_1' - 4w_2'$

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

ES 2.2.3

$$\lambda_1(e^{2x} + \cos x) + \lambda_2(\cos x + \sin x) + \lambda_3(\sin x) = 0$$

$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \sin x = 0 \iff \lambda_2 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \sin x = 0 \iff \lambda_2 \cos x + (\lambda_2 + \lambda_3)\sin x = 0 \iff \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = 0$ perché $\lambda_1 e^{2x} = 0 \iff \lambda_1 = 0$

$f_1'(x) = 2e^{2x} - \sin x = 2f_1(x) - 2f_2(x) + f_3(x)$

$f_2'(x) = \cos x - \sin x = f_2(x) - 2f_3(x)$

$f_3'(x) = \cos x = f_2(x) - f_3(x)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ES 2.2.4

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$f(1,2,-1) = (0,1,0,1)$

$f(3,-1,2) = (1,2,0,-1)$

$f(-1,5,-4) = (2,0,3,2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 - 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 & \Rightarrow -7\lambda_2 + 7\lambda_3 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & \Rightarrow -\lambda_2 + 3\lambda_2 + 2\lambda_2 - 4\lambda_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

sono lin. dip., se $\lambda_2 = 1$

$$-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{quindi} \quad -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Non esiste $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

ES 2.2.5

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(0,-2,1) = (3,-1)$

$f(1,1,-2) = (1,2)$

$f(2,-4,-1) = (11,1)$

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \Rightarrow -3\lambda_3 + 4\lambda_3 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

lin. dipendenti

se $\lambda_3 = 1$

$$-3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

quindi completo v_1, v_2 a base di $\mathbb{R}^3$ con $e_3 = (0,0,3)$

$f(e_3) = (2,b)$

$$\begin{cases} v_1 = -2e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2 = \frac{1}{2}(e_3 - v_1) \\ e_1 = v_2 + \frac{3}{2}e_3 + \frac{1}{2}v_1 \end{cases}$$

$$f(e_2) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2/2 - 3/2 \\ b/2 + 1/2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + \frac{3}{2}2 \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 + \frac{3}{2}2 & 2/2 - 3/2 & 2 \\ 3/2 + \frac{3}{2}b & b/2 + 1/2 & b \end{pmatrix}$$

ES 2.2.6

$V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ t.c $p(0)=0$ e $p(1)=0$ $\forall p(x) \in V$

$W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ t.c. $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$ $\forall p(x) \in W$

Sia $p_1(x)$ e $p_2(x) \in V$

$q(x) = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) \overset{?}{\in} V$ si perché in $x=0$ $q(0) = 0+0$ e in $q(1) = 0+0$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$h(x) = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) \overset{?}{\in} W$ si perché $\int_0^1 \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = \lambda_1 \int_0^1 p_1(x) + \lambda_2 \int_0^1 p_2(x) = 0$ ✓

V e W sono spazi vettoriali

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = 0$

$a_0 = 0$ e $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

$V = \{ a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \mid -(a_2 + a_3 + a_4)x + a_2 x^2 + a x^3 + a x^4 = 0 \}$

$\dim V = 3$ e $\{ x^2 - x, x^3 - x, x^4 - x \}$ base di V

$\int_0^1 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \, dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{4} a_3 x^4 = 0 \iff a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{4} a_3 = 0$

$W = \{ a_1, a_2, a_3 \in K \mid -\left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{4} a_3\right) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0 \}$

$\dim W = 3$ e $\{ x - \frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{1}{4} \}$ base di W

$F(x^2 - x) = 2x - 1$ $\quad F(x^3 - x) = 3x^2 - 1$ $\quad F(x^4 - x) = 4x^3 - 1$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ES 2.2.7

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\phi(v) = 0$ $v \in V$

$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \operatorname{null} A + \operatorname{rg} A$

$\operatorname{rg} A = 2$

$\left(\begin{cases} \quad -2a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 1a_3 = 0 \Rightarrow -a_3 + 1a_3 = 0 \\ -6a_1 \quad -3a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -2a_1 \end{cases} \right.$ lin. dipendenti , $\begin{cases} -2a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ -6a_1 = 0 \end{cases}$ lin. indipendenti $\Bigg)$

quindi $\dim \operatorname{Ker} \phi = 2$ e $\dim \operatorname{Im} \phi = 2$

base di $\operatorname{Im} \phi$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

base di $\operatorname{Ker} \phi$ è $\{ 2v_1 + v_2, v_2 - 2v_4 \}$

$$\begin{cases} -2\alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ -6\alpha_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} - 2 = 1 \quad \times \\ \alpha_1 = -\frac{1}{6} \end{cases} \qquad w_1 + w_2 + w_3 \notin \operatorname{Im}\phi$$

ES 2.2.8

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Se $\lambda = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

ma $rg A = \operatorname{Im} h \leq 2$ quindi falso

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ -1 & z & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \lambda x & 0 \\ 0 & \lambda y & 0 \\ 0 & -\lambda + \lambda z & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda + \lambda x = 0 \Rightarrow 1 + x = -1 + z \Rightarrow z = 2 + x \\ \lambda y = 1 \Rightarrow \lambda \neq 0 \\ -\lambda + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda \neq 0$ $BA_\lambda = I_3$

ES 2.2.9

$$F(x,y,z) = (x + 2y, y + z, 2z - x)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow 2\alpha_3 - 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ +\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_3 \end{cases}$$

$rg A = \dim \operatorname{Im} F = 2$

base di $\operatorname{Im} F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow F$ non è suriettiva

$\dim \operatorname{Ker} F = 1 \Rightarrow F$ non è iniettiva

$$2e_1 - e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

base di $\operatorname{Ker} F$ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_3 + \alpha_3 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

lin. indip. $\Rightarrow$ sono in somma diretta

ES 2.2.10

$$f(e_3) = -f(0,1,-1) + f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow -\alpha_2 + 3\alpha_2 = 0 \\ \quad + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$ lin. indipendenti

$\dim \operatorname{Im} f = 3$ $\quad \dim \operatorname{Ker} f = 0$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\operatorname{Im} f$

ES 2.2.12

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \end{cases}$$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$ $\quad$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Ker} f = 1$

$f(v_1) - 2f(v_2) + f(v_3) = 0$

$v_1 - 2v_2 + v_3$

base $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ES 2.2.13

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 3$

ES 2.2.14

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2a & a^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & a & 2a & a^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 2$ se $a = 0$ $\quad \operatorname{rg} A = 3$ se $a = 1$ $\quad \operatorname{rg} A = 4$ altrimenti

2.3 Sistemi lineari

Sia S un sistema di equazioni lineari a m equazioni e n incognite

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si può indicare il sistema anche con la seguente equazione

$$S: AX = B \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{coefficienti}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{incognite}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{termini noti}}$$

Un sistema lineare si dice omogeneo se $B = \vec{0}$

OSSERVAZIONE 2.3.1

Sia $f: V \to W$ omomorfismo, $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ e infine sia $A = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$

$v \in V = \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ e $f(v) \in W = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m v_m$

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE 2.3.2

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare <u>omogeneo</u> di m equazioni a n incognite a coefficienti in K è sottospazio di K^n

PROPOSIZIONE 2.3.3

Sia $S: AX = B$ e sia Σ_S l'insieme delle soluzioni di S e Σ_0 l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato a S

quindi si ha:

- $\Sigma_S = \emptyset$ (S non ammette soluzioni)
- $\Sigma_S = \{\bar{x} + y \mid y \in \Sigma_0\}$, $\bar{x}$ sol. di S

PROPOSIZIONE 2.3.4

Sia $S: AX = B$ e $F_A(X) = AX \quad \forall X \in K^n$

le seguenti condizioni sono equivalenti

(1) S ammette soluzioni

(2) $B \in \operatorname{Im}(F_A)$

(3) B è combinazione lineare delle colonne di A

(4) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$

TEOREMA 2.3.5 (ROUCHÉ - CAPELLI)

Sia $S: AX=B$ a m equazioni e n incognite

S ammette soluzioni $\iff rg\,A = rg(A|B) \overset{!}{=} r$

(1) se $r=n$ S ammette un'unica soluzione

(2) se $r<n$ S ammette infinite soluzioni (∞^{n-r}, $n-r$ parametri variabili)

2.3.2 Calcolo del rango di una matrice

PROPOSIZIONE 2.3.6

Se una matrice A è in forma a scala, il suo rango coincide con il numero di righe non nulle

OSSERVAZIONE 2.3.8

Il rango per le righe e quello per le colonne é uguale (TEOREMA 3.3.1)

per convincerci è sufficiente applicare il metodo di Gauss sulla trasposta di A oppure applicare il metodo sulle righe

2.3.3 Calcolo dell'inversa di una matrice

Proprio come posso applicare delle operazioni elementari sulle righe su A per ottenere A' a scala

Posso anche applicare le stesse operazioni su $(A|B)$ per ottenere $(A'|B')$

Così facendo ottengo B' t.c. $A \cdot B' = A'$

OSSERVAZIONE 2.3.9

Se riesco ad ottenere la matrice identica al posto di A' quindi $B(A|I) = (BA|B) = (I|B)$

Allora $B = A^{-1}$, l'inversa di A

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-1)]{E_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{13}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE 2.3.10

Se la matrice $A \in M_n(K)$ non fosse invertibile il suo rango è $<n$ quindi nella sua forma a scala si trova almeno una riga nulla.

Es 2.3.1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{21}(-\frac{3}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -\frac{19}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(\frac{10}{19})} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & \frac{6}{19} \\ 0 & -\frac{19}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$x = \frac{3}{19}$

$y = -\frac{5}{19}$

Es 2.3.2

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{31}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{31}(-2)]{E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_{32}(-3) \\ E_{12}(3)}]{E_2(1/5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8/5 & 0 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{23}(1/5) \\ E_{13}(8/5)}]{E_3(5/8)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 1/8 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/8 & 1/8 & -1/2 \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Es 2.3.3

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_{21}(1) \\ E_{31}(-2)}]{E_{31}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{42}(-3)]{E_{32}(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3(1/5)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{43}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 & -\frac{2}{3} & -\frac{17}{5} & \frac{13}{5} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_4(-5)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & 13 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & 13 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(3)]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 3/5 & -2/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & 13 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_{24}(-1) \\ E_{34}(-3/5)}]{E_{14}(1/5)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -16 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & 13 & -5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -16 & -12 & 5 \\ -1 & -10 & -8 & 3 \\ 2 & 17 & 13 & -5 \end{pmatrix}$$

Es 2.3.4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{31}(3) \\ E_{41}(-2)}]{E_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_{32}(2) \\ E_{42}(3)}]{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 18 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Determinanti

3.1 Permutazioni

Sia $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un insieme.

Si dice permutazione una funzione biettiva $\sigma: A \to A$

Che si può rappresentare con una tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 \dots & j_n \end{pmatrix}$$

da cui si conviene che $\sigma(a_1) = a_{j_1}, \dots, \sigma(a_n) = a_{j_n}$

Si definisce S_n l'insieme di tutte le permutazioni di n oggetti

PROPOSIZIONE 3.1.2

La cardinalità di S_n è $n!$

DEFINIZIONE 3.1.3

Sia $\sigma \in S_n$. Si dice che è presente un'inversione ogni qual volta $i < j$ ma $\sigma(i) > \sigma(j)$

ES

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$1 < 2$ ma $3 > 2$
$1 < 4$ ma $3 > 1$
$2 < 4$ ma $2 > 1$ 5 inversioni
$3 < 4$ ma $5 > 1$
$3 < 5$ ma $5 > 4$

DEFINIZIONE 3.1.4

Sia $\sigma \in S_n$. σ è detta pari se il numero di inversioni è pari

σ è detta dispari se il numero di inversioni è dispari

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ dispari} \end{cases}$$

3.2 Il determinante di una matrice quadrata

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Il determinante di A è definito come

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Il determinante di una matrice 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} = 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} - 1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{12} \cdot a_{21}$$

PROPOSIZIONE 3.2.6

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrice triangolare superiore

Allora $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

PROPOSIZIONE 3.2.7

Sia $A \in M_n(K)$ e ${}^tA$ la sua trasposta

Allora $\det(A) = \det({}^tA)$

PROPOSIZIONE 3.2.9

Sia A' la matrice ottenuta scambiando due righe/colonne

Allora $\det A' = -\det A$

PROPOSIZIONE 3.2.14

Il determinante non cambia sommando ad una riga/colonna di A una combinazione lineare delle righe/colonne rimanenti

PROPOSIZIONE

Sia A' la matrice ottenuta moltiplicando per λ una riga/colonna di A

Allora $\det A' = \lambda \det A$

Teorema 3.2.16 (Teo. di Binet)

Siano $A, B \in M_n(K)$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

COROLLARIO

$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \xrightarrow[\text{corollario}]{} A$ invertibile $\iff \det A \neq 0$

DEFINIZIONE A_{ij} è la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j

PROPOSIZIONE

Sia A^* la matrice trasposta aggiunta

$A^* = {}^t(a_{ij}^*)$ dove $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Allora $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

PROPOSIZIONE 3.2.23 (FORMULA DI LAPLACE)

Sia $A \in M_n(K)$ e i indice di riga/colonna

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

TEOREMA 3.2.29 (REGOLA DI CRAMER)

Sia $S: AX=B$ un sistema di n equazioni lineari in n incognite e $\det A \neq 0$

Allora $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ dove $A_i = (C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)$ dove $C_1, \dots, C_n$ colonne di A

PROPOSIZIONE 3.2.39

Matrici simili hanno lo stesso determinante

quindi il determinante di f (endomorfismo di V) è uguale al determinante di una qualsiasi matrice di f

4. Diagonalizzazione degli endomorfismi

4.1 Autovalori e autovettori

DEFINIZIONE 4.1.1

Un endomorfismo $f: V \to V$ è diagonalizzabile se esiste una base $\underline{v}$ di V t.c. $A = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f)$ è diagonale

DEFINIZIONE 4.1.3

Un autovalore di $f: V \to V$ è un elemento $\lambda \in K$ non nullo t.c.

$f(v) = \lambda v$ oppure data $A = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f)$ $Av = \lambda v$

quindi $(A - \lambda I)v = 0$

PROPOSIZIONE 4.1.4

Per ogni autovalore λ di f esiste $E_A(\lambda)$ autospazio relativo all'autovalore

$$E_A(\lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$$

DEFINIZIONE 4.1.5

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

DEFINIZIONE 4.1.14

La molteplicità algebrica di λ è il più grande intero r t.c. $(\lambda - a)^r$ divide $p_A(\lambda)$

La molteplicità geometrica di λ è la dimensione dell'autospazio relativo a λ

PROPOSIZIONE 4.1.16

Sia λ autovalore di $f: V \to V$

Allora $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

TEOREMA 4.1.17

Sia $f: V \to V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalori di f

Allora f è diagonalizzabile se e solo se

1. $m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_r) = n$
2. $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1), \dots, m_a(\lambda_r) = m_g(\lambda_r)$

La matrice diagonale è quindi del tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot I_{m_a(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \cdot I_{m_a(\lambda_n)} \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE 4.2.3

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalori distinti di A $(\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j)$

Siano $v_1, \dots, v_r$ autovettori corrispondenti $(Av_i = \lambda_i v_i)$

Allora $v_1, \dots, v_r$ sono lin. indipendenti

4.3 Matrici simmetriche e antisimmetriche

DEFINIZIONE 4.3.1

Sia $A \in M_n(K)$.

A è detta simmetrica se ${}^tA = A$

A è detta antisimmetrica se ${}^tA = -A$

TEOREMA 4.3.4

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice simmetrica

Allora A possiede n autovalori reali (non necessariamente distinti)

TEOREMA 4.3.6

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice antisimmetrica

Allora A possiede n autovalori puramente immaginari (non necessariamente distinti)

OSS

Tutte le matrici simmetriche sono diagonalizzabili

5. Spazi Vettoriali Euclidei

DEFINIZIONE 5.3.1

Sia V spazio vettoriale su K, $g: \begin{matrix} V \times V \to K \\ (v,w) \to g(v,w) \end{matrix}$ una funzione

g si dice essere bilineare se essa è lineare rispetto a ciascuno dei suoi elementi

i. $g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 g(v_1, w) + \lambda_2 g(v_2, w)$ $\quad \forall \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 \in K \quad \forall v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$

ii. $g(v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \mu_1 g(v, w_1) + \mu_2 g(v, w_2)$

DEFINIZIONE 5.3.2

Una forma bilineare $g: V \times V \to K$ è detta simmetrica se $g(v,w) = g(w,v) \quad \forall v,w \in V$

g è detta antisimmetrica se $g(v,w) = -g(w,v)$

DEFINIZIONE 5.3.4

Sia g forma bilineare simmetrica.

Allora $Ker(g) = \{ v \in V \mid g(v,w) = 0 \ \forall w \in V \} = \{ w \in V \mid g(v,w) = 0 \ \forall v \in V \}$

DEFINIZIONE 5.3.6

$g: V \times V \to K$ bilineare simmetrica è detta non degenere se $Ker\, g = \{ \vec{0} \}$, è detta degenere altrimenti

PROPOSIZIONE 5.3.7

Sia $g: V \times V \to K$ bilineare simmetrica.

Allora esiste $U \leq V$ tale che:

i. $V = U \oplus Ker\, g$

ii. $g_U : U \times U \to K$, la restrizione di g su U, è una forma bilineare simmetrica non degenere

iii. $g = g_U \oplus g_0$ $\quad (g_0 : Ker\, g \times Ker\, g \to K$ t.c. $g(v,w) = 0 \quad \forall v,w \in Ker\, g)$

DEFINIZIONE 5.3.9

Sia V spazio vettoriale dotato di una forma bilineare simmetrica non degenere g

Due vettori $v, w \in V$ si dicono ortogonali $(v \perp w)$ se $g(v,w) = 0$.

Due sottospazi vettoriali $U_1, U_2 \leq V$, si dicono ortogonali se $g(u_1, u_2) = 0 \quad \forall u_1 \in U_1 \ \forall u_2 \in U_2$

DEFINIZIONE 5.3.11

Sia V spazio vettoriale dotato di una forma bilineare simmetrica g

Un vettore $v \in V$ è detto isotropo se $g(v,v) = 0$

Un sottospazio $U \leq V$ è detto totalmente isotropo se $g(u_1, u_2) = 0 \quad \forall u_1, u_2 \in U$

DEFINIZIONE 5.3.13

Sia V spazio vettoriale dotato di una forma bilineare simmetrica g

Sia $S \subseteq V$ allora definiamo il suo ortogonale come $S^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0 \ \forall w \in S\}$

i. $S^{\perp} \leq V$

iii. $S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$

DEFINIZIONE 5.3.16

Sia $g: V \times V \to K$ bilineare simmetrica

Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V è detta base ortogonale di V se è costituita da vettori a due a due ortogonali

$g(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

DEFINIZIONE 5.3.17

Un vettore $v \in V$ si dice normalizzato se $g(v,v) = 1$

DEFINIZIONE 5.3.19

Una base di V si dice ortonormale se essa è una base ortogonale e se tutti i vettori sono normalizzati

DEFINIZIONE 5.3.20

Una forma bilineare simmetrica $g: V \times V \to K$ e la sua matrice $G = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)$ si dicono:

i. definita positiva se $g(v,v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{\vec{0}\}$

ii. definita negativa se $g(v,v) < 0 \quad \forall v \in V \setminus \{\vec{0}\}$

iii. semidefinita positiva se $g(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$

iv. semidefinita negativa se $g(v,v) \leq 0 \quad \forall v \in V$

v. indefinita se esistono $v, w \in V$ t.c. $g(v,v) > 0$ e $g(w,w) < 0$

DEFINIZIONE 5.3.21

Sia V sp. vettoriale dotato di una forma bilineare simmetrica definita positiva g.

La norma di un vettore $v \in V$ è $\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$

i. $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 0 \iff v = \vec{0}$

ii. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

PROPOSIZIONE 5.3.22 (DISEGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ)

Sia $g: V \times V \to k$ forma bilineare simmetrica definita positiva

$|g(v,w)| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v,w \in V$

se v,w lin. dipendenti allora vale "="

PROPOSIZIONE 5.3.23 (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v,w \in V$

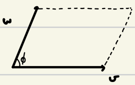
DEFINIZIONE 5.3.24

L'angolo ϕ tra due vettori $v,w \in V$ non nulli è definito come:

$$\cos\phi = \frac{g(v,w)}{\|v\|\|w\|}$$

5.2 Aree e volumi

L'area del parallelogramma di base v e altezza $h = \|w\| \cdot \sin\phi$ è



$$A_p(v,w) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot v & w\cdot w \end{pmatrix}}$$

Il parallelepipedo determinato dai vettori v,w,u ha volume

$$V_p(v,w,u) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} v\cdot v & v\cdot w & v\cdot u \\ w\cdot v & w\cdot w & w\cdot u \\ u\cdot v & u\cdot w & u\cdot u \end{pmatrix}}$$

5.4 Forme bilineari e matrici

Sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$, $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, e $g_{ij} = g(v_i, v_j)$

$G = M_{\underline{v}\underline{v}}(g) = (g_{ij})$

La conoscenza di G permette di calcolare $g(v,w)$ per qualsiasi coppia di vettori $v,w \in V$

considerando $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\underline{v}}$ $\quad w = (\mu_1, \dots, \mu_n)^{\underline{v}}$

Allora $g(v,w) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\underline{v}} M_{\underline{v}\underline{v}}(g) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$

PROPOSIZIONE 5.4.3

$\ker g$ è l'insieme di vettori soluzione del sistema $M_{\underline{v}\underline{v}}(g)X = 0$

PROPOSIZIONE 5.4.5

Sia V spazio vettoriale t.c. $\dim V = n$, $U \leq V$. Allora $\dim U^\perp = n - \dim U$

COROLLARIO 5.4.6

$(U^\perp)^\perp = U$

COROLLARIO 5.4.8

$V = U \oplus U^\perp$

PROPOSIZIONE 5.4.10

Sia g forma bilineare simmetrica non degenere su V.
$W_1, W_2 \leq V$ allora:

i. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$

ii. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

LEMMA 5.4.12

Sia $U \leq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$, $v \in \mathbb{R}^n = \underset{\in U}{v'} + \underset{\in U^\perp}{v''}$

Cerco $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \to v' \in U$ (la proiezione ortogonale di v su U)

Si dimostra che $M^{\varepsilon}_{\varepsilon}(f) = P = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ dove $A = (u_1, \dots, u_r)$ dove $\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U

Si dimostra che f è lineare

quindi $Pv = v'$

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

Sia il sistema $S: AX = B$ un sistema privo di soluzioni

Allora per ottenere la miglior soluzione (ai minimi quadrati) è sufficiente risolvere $({}^tAA)X = ({}^tAB)$

CAMBIAMENTO DI BASE

Sia $g: V \times V \to K$, $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\underline{v}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ basi di V

$G = M_{\underline{v}\underline{v}}(g)$ e $G' = M_{\underline{v}'\underline{v}'}(g)$

E sia $P = M^{\underline{v}}_{\underline{v}'}(id)$ $id: V_{\underline{v}'} \to V_{\underline{v}}$

Allora $G' = {}^tPGP$

DEFINIZIONE 5.4.17

Due matrici quadrate G e G' si dicono congruenti se $G' = {}^tPGP$

DEFINIZIONE 5.4.20

Una matrice $P \in M_n(K)$ è detta ortogonale se ${}^tPP = I$

5.4.3 Basi ortogonali e ortonormali

Sia $U \leq \mathbb{R}^n$ e $g: U \times U \to \mathbb{R}$ forma bilineare

Una base ortogonale di U è una base $\{u_1, \dots, u_r\}$ di U t.c. $g(u_i, u_j) = 0$ $\forall i \neq j$ ($u_1, \dots, u_r$ a 2 a 2 ortogonali)

Una base ortogonale si dice ortonormale se è formata da versori

TEOREMA 5.4.24

Ogni spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$ con n finito dotato di una forma bilineare simmetrica definita positiva

Allora possiede una base ortonormale

PROCEDIMENTO DI GRAM-SCHMIDT

Procedimento utile a trovare basi ortogonali e ortonormali

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim U = r$, $\{u_1, \dots, u_r\}$ base di U e $g: U \times U \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica definita positiva

$u_i' = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{g(u_i, u_j')}{g(u_j', u_j')} u_j'$ $\quad \{u_1', \dots, u_r'\}$ base ortogonale di U

$u_i'' = \frac{u_i'}{\|u_i'\|}$ $\quad \{u_1'', \dots, u_r''\}$ base ortonormale di U

OSS

Se ottengo $g(u_j', u_j') = 0$ (divisione per zero)

1. Inverto l'ordine $(v_1' = v_2)$
2. pongo $v_1' = v_1 + v_2$ e $v_2' = v_1 - v_2$

e procedo normalmente

5.6 Classificazione delle forme bilineari simmetriche

Sia $g: V \times V \to K$, $\underline{v}'$ base ortogonale di V e $G' = M_{\underline{v}'\underline{v}'}(g) = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

1. g è definita positiva $\iff d_i > 0 \ \forall i$
2. g è definita negativa $\iff d_i < 0 \ \forall i$
3. g è indefinita $\iff \exists i, j \mid d_i > 0, d_j < 0$
4. g è degenere $\iff \exists i \mid d_i = 0$

METODO DEI MINORI PRINCIPALI

Utile per trovare il carattere di g senza trovare $\underline{v}'$

Sia $\underline{v}$ base di V e $G = M_{\underline{v}\underline{v}}(g)$ t.c. $\det G \neq 0$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & & A_n \end{array} \\ G = & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \bullet & \cdots & & \bullet \end{pmatrix} \end{array}$$

siano $k_i = \det A_i$ (i minori principali di G)

Allora $k_i > 0 \ \forall i \Rightarrow g$ è definita positiva

$k_1 < 0, k_2 > 0, k_3 < 0, \dots \Rightarrow g$ è definita negativa

in tutti gli altri casi è indefinita

TEOREMA 5.6.1 (Teorema di Sylvester)

Sia $g: V \times V \to K$ forma bilineare simmetrica non degenere

Allora esiste $\underline{v}$ base di V t.c. $M_{\underline{v}\,\underline{v}}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array}\right)$

OSS

· Se $r=n$: g è definita positiva

· Se $r=0$: g è definita negativa

negli altri casi è indefinita

PROPOSIZIONE

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. Siano λ_i, λ_j autovalori di A e v_i, v_j autovettori relativi

Allora $v_i \cdot v_j = 0$ e $E_A(\lambda_i) \perp E_A(\lambda_j)$

5.5 Funzioni lineari simmetriche

Una funzione lineare $F: V \to V$ è detta simmetrica se

$F(v) \cdot w = w \cdot F(v) \quad \forall v, w \in V$

OSS Basta verificarlo per i vettori di una base di V

TEOREMA 5.5.4 (Teorema Spettrale)

Sia $V \leq \mathbb{R}^n$ e $F: V \to V$ funzione lineare

Allora F è ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ F è simmetrica

ovvero esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di F

FORME QUADRATICHE

Una forma quadratica su $\mathbb{R}$ in $x_1, \dots, x_n$ è un polinomio omogeneo di grado 2

$F = F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$

Posso associare a $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $F = \sum g_{ij} x_i x_j$

Ad una forma quadratica F esiste una sola g t.c. F è la sua forma quadratica

OSS

I vettori isotropi di g sono le soluzioni di $F=0$

OSS

Il cambio di base di g cambia anche la forma quadratica associata

7. Geometria affine

DEFINIZIONE 7.1.1

Uno spazio affine $\mathbb{A}$ su K è dato da

1. un insieme non vuoto S (i punti di $\mathbb{A}$)
2. uno spazio vettoriale V su K
3. Un'operazione "+": $S \times V \to S$, $(P, v) \to Q$ (traslazione lungo un vettore) che deve soddisfare:
    1. $(P+v)+w = P+(v \underbrace{+}_{\text{somma vettoriale}} w)$
    2. $P+\vec{o} = P \quad \forall P \in S$
    3. $\forall P, Q \in S$ esiste un'unico vettore $v \in V \mid Q = P+v$ $(v = Q-P)$

OSS $\dim \mathbb{A} \overset{\text{def}}{=} \dim V$

DEFINIZIONE 7.2.1

Sia $\mathbb{A} = (S, V, +)$ spazio affine, $P \in S$ e $W \subseteq V$

Allora definiamo un sottospazio affine per P di sottospazio direttore W come l'insieme dei punti

$L = P+W = \{P+w \mid w \in W\}$

OSS $\dim L \overset{\text{def}}{=} \dim W$

OSS se $\dim L = 0 \longrightarrow$ punto

se $\dim L = 1 \longrightarrow$ retta

se $\dim L = 2 \longrightarrow$ piano

OSSERVAZIONE 7.2.5

Sia $L \subseteq \mathbb{A}^n$ se $\dim L = n-1$ allora L si dice essere un iperpiano

Allora L è descritto da una sola equazione cartesiana: $L = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + d$ con $(a_1, \dots, a_n) \neq \vec{o}$

OSS il vettore $(a_1, \dots, a_n)$ è non nullo ed ortogonale ad L

PROPOSIZIONE 7.2.2

Sia $P' \in L \Rightarrow L = P+W = P'+W$

ORTOGONALITÀ

Sia $v \in \mathbb{A}^n$, $L \subseteq \mathbb{A}^n = P+W$

$v \perp L \Leftrightarrow v \perp W \; (v \in W^{\perp})$

Distanza punto-punto

Siano $P, Q \in \mathbb{A}^n$

$\mathrm{dist}(P,Q) = \|Q-P\| = \sqrt{(Q-P)\cdot(Q-P)}$

7.4 Equazioni dei sottospazi affini

Sia $L = P + W$ sottospazio di $\mathbb{A}^n$, $\dim L = r$

equazioni parametriche di L:

$X = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\{w_1, \dots, w_r\}$ base di W e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$

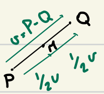
equazioni cartesiane di L:

$AX = B$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, a_{ij}, b_i opportuni coefficienti

parametriche $\longrightarrow$ cartesiane: elimino i parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

cartesiane $\longrightarrow$ parametriche: P è una sol di $AX = B$
W è sol di $AX = \vec{0}$

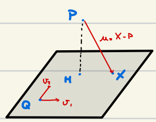
Punto medio



Siano $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

$M = P + \frac{1}{2}v = P + \frac{1}{2}(Q-P) = P + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}(P+Q)$

Distanza punto-sottospazio



Sia $Q \in \mathbb{A}^n$, $L \subseteq \mathbb{A}^n = P + W$, $\{w_1, \dots, w_r\}$ base di W

1. Calcolo H, proiezione ortogonale di P su L

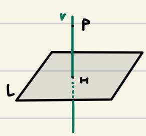
   cerco $X \in L$ t.c. $u = X - P$ sia $u \perp W$

   $u = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$ e impongo $\begin{cases} u \cdot w_1 = 0 \\ \vdots \\ u \cdot w_r = 0 \end{cases}$ trovo così $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r)$

   $H = P + \bar{\lambda} w_1 + \dots + \bar{\lambda}_r w_r$

2. Calcolo $\|P - H\|$

Distanza punto-iperpiano



Sia $L: a_1x_1 + \dots + a_nx_n + d = 0$, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \perp L$

allora $r = P + \lambda n$, H è $r \cap L$

Infine $d(P,H) = \|\cancel{P} + \bar{\lambda} n - \cancel{P}\| = |\bar{\lambda}|\,\|n\| = \dfrac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + d|}{\|n\|}$

Posizione reciproca di due spazi affini

Dati $L = P + W \longrightarrow AX = B$

$L' = Q + W' \longrightarrow A'X = B'$

- Se $L \cap L' \neq \emptyset$ allora L e L' sono incidenti

per verificarlo: $\boxed{rg\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}}$

oss Se $L \cap L' = \emptyset \Rightarrow \dim L \cap L' \overset{def}{=} -1$

- Se $W \subseteq W'$ o $W' \subseteq W$ allora $L \parallel L'$

per verificarlo ricordo che $W' \subseteq W \iff W' \cap W = W' \iff \boxed{rg\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = rg(A)}$

oss

Se $L \parallel L'$ e $L \cap L' \neq \emptyset$ Allora $L \subseteq L'$

se in forma parametrica

$L = P + W = P + \langle w_1, \dots, w_n \rangle$

$L = P + W' = P + \langle w_1', \dots, w_m' \rangle$ con $n \leq m$

- $L \parallel L'$ se

$rg(w_1 \dots w_n\ w_1' \dots w_m') = rg(w_1' \dots w_m') = m$

- L ed L' sono incidenti se

$rg(Q-P\ w_1 \dots w_n\ w_1' \dots w_m') = rg(w_1 \dots w_n\ w_1' \dots w_m')$

DEFINIZIONE 7.2.11

Siano $L = P + W$ $L' = Q + W'$ di $\mathbb{A}^n$ con $\dim W \leq \dim W'$

L ed L' si dicono sghembi se $W \cap W' = \{\vec{0}\}$ e $L \cap L' = \emptyset$

Distanza tra sottospazi affini

Siano $L, L' \subseteq \mathbb{A}^n$ $L = P + W$ $L' = Q + W'$

cerco $X \in L$ e $H \in L'$ t.c. $X - H \perp W, W'$

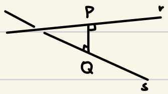
$X = P + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r$

$H = Q + \mu_1 w_1' + \dots + \mu_r w_r'$

cerco $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ e $\mu_1, \dots, \mu_r$ t.c. $\begin{cases} (X-H) w_1 = 0 \\ \vdots \\ (X-H) w_r = 0 \\ (X-H) w_1' = 0 \\ \vdots \\ (X-H) w_r' = 0 \end{cases}$

Per tali X e H $d(X,H) = d(L, L')$

Distanza tra due rette sghembe



La distanza tra r ed s è pari alla distanza tra un punto di r ed il piano π contenente s e parallelo ad r

Prodotto vettoriale

Dati due vettori u, v lin. indipendenti

esiste un unico vettore $u \times v$ t.c.

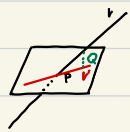
1. $u \times v \perp u, v$ ← direzione

2. $\|u \times v\| =$ Area del parallelogramma di lati u e v ← modulo

3. la matrice di cambiamento di base da $\{e_1, e_2, e_3\}$ a $\{u, v, u \times v\}$ ha det positivo ← verso

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = e_1(u_2v_3 - v_2u_3) - e_2(u_1v_3 - v_1u_3) + e_3(u_1v_2 - v_1u_2) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_1v_3 - v_1u_3 \\ u_1v_2 - v_1u_3 \end{pmatrix}$$

Angoli tra sottospazi affini

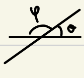


Sia $r = P + \lambda v$ ed $L = P + W$ sottospazio incidente ad r di $\dim L \geq 1$

Per trovare l'angolo tra r ed L trovo $r' = P + \mu u$ proiezione ortogonale di r su L

E poi calcolo l'angolo tra r ed r' ovvero $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right)$

oss

Ci sono due angoli tra le rette , scelgo sempre θ

oss

C'è un caso degenere: se la proiezione $r' = \{P\}$ allora $r \perp L \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

Angolo tra iperpiani incidenti

L'angolo è uguale all'angolo tra i due vettori ortogonali di L ed L'

Fascio di piani

Dati due piani $L: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d = 0$
$L': a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 + d' = 0$

Allora qualsiasi combinazione lineare tra i piani genera un piano

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d) + \mu(a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 + d') = 0 \quad \text{se } (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Circonferenze e sfere

Sia $C \in \mathbb{A}^3$, $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$

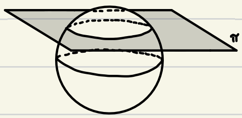
La sfera di centro C e raggio R è il luogo dei punti di distanza R da C

$S = \{ X \in \mathbb{A}^n \mid \| X - C \| = R \} \subseteq \mathbb{A}^3$

quindi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in S \iff \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2} = R$

Se $R = 0$ allora $S = C$

Intersecando la sfera con un piano ottengo una circonferenza



centro: C_0 proiezione ortogonale di C su π

raggio: Pitagora $R_0 = \sqrt{R^2 - (C - C_0)^2}$