

# Fisica 2

## Formulario

### Costanti

$$\begin{aligned} m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} & q_e &= -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ m_p &= m_n = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} & q_p &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \epsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \\ \mu_0 &\approx 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{T m}^2}{\text{A}} & \frac{\mu_0}{4\pi} &= 10^{-7} \frac{\text{T m}^2}{\text{A}} \\ 1 \text{ eV} &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

### Elettrostatica

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{m}_r & \vec{F} &= q \vec{E} \quad (\text{legge di Coulomb}) \\ V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} & \vec{E} &= -\vec{\nabla} V \Rightarrow V = \int E \quad W = -qV \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{\text{p,1o}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \hat{m}_r \quad \vec{E}_{\text{sup}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{p} \cdot q \vec{J} \quad \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad U = -p \cdot E$$

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cos\theta}{r^2} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{m}_r + \sin\theta \hat{m}_\theta)$$

$$U = qV \quad \text{oppure} \quad U = \sum_{k>j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k q_m}{r_{jk}}$$

$$E_k + U = \frac{1}{2} mv^2 + qV = \text{cost.}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{m}_n d\Sigma = \frac{\Sigma q_m}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss})$$

$$U_{e,\text{sfere}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{\Omega^2}{2}$$

### Condensatori

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \approx \epsilon_0 \sum_i \frac{1}{2} \quad U_e = \frac{\Omega^2}{2C}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \sigma_p = \frac{k-1}{k} \sigma \quad e \quad q_p = \frac{k-1}{k} q$$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \frac{1}{C_{\text{tot}}} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad Q \in \text{cost.} \quad \Delta V = \Delta V_1 + \dots + \Delta V_N$$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = C_1 + \dots + C_N \quad \Delta V \in \text{cost.} \quad Q_{\text{tot}} = Q_1 + \dots + Q_N$$

### Corrente

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow Q = i \cdot t$$

$$i = \Phi_z(j)$$

$$\Delta V = R \cdot i \quad P = R i^2$$

$$R = \int_a^b \sum \frac{P}{S} ds$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad i \text{ è cost.} \quad \Delta V = \Delta V_1 + \dots + \Delta V_N$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad \Delta V \text{ è cost.} \quad i = i_1 + \dots + i_N$$

### Magnetismo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \hat{m}_r}{r^2} \quad (\text{I legge di Laplace})$$

$$\vec{B}_{\text{p,1o}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \vec{z}}{r} \quad (\text{Biot-Savart})$$

$$\vec{F}_{\text{p,1o}} = i d\vec{s} \times \vec{B} \quad (\text{II legge di Laplace})$$

$$\vec{B} = \mu_0 n i \quad (\text{solenoide})$$

$$\vec{m} = i \cdot \vec{m}_n \sum$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} (2 \cos\theta \hat{m}_r + \sin\theta \hat{m}_\theta)$$

$$C_y(B) = \mu_0 \sum_{k=1}^N i_k^{(conc)} \quad (\text{Legge di Ampere})$$

### Induzione

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\vec{Q} = \frac{\vec{\Phi}(B) - \vec{\Phi}_t(B)}{R} \quad (\text{Legge di Faraday})$$

$$cP_s = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{R} i^2$$

$$\vec{\Phi}_t(B_t) = M_i, \quad e \quad \vec{\Phi}_t(B_s) = \eta \lambda_s$$

$$L = \frac{\vec{\Phi}(B)}{i}$$

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2$$

### Circuiti

$$RC: \quad \epsilon = \Delta V_R + \Delta V_C = R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot q$$

$$RL: \quad \epsilon = \epsilon_{ind} + \Delta V_R = R \cdot i + L \frac{di}{dt}$$

# 1. Elettrostatica

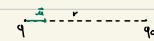
Studia le cariche stazionarie nel tempo, generatrici di forze elettriche e di campo elettostatico

Proprio come l'energia, anche la somma algebrica delle cariche si conserva in un sistema isolato elettricamente

## 1.1 Legge di Coulomb

Due cariche puntiformi,  $q_1$  e  $q_2$ , poste a distanza  $r$ , interagiscono con forza  $F$

$$\vec{F}_{12} \quad \vec{F}_{21}$$



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u} \quad [q] = \text{Coulomb} = C$$

$$\vec{F}_{12} \quad \vec{F}_{21}$$

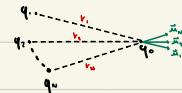
Cariche opposte si attraggono, cariche simili si respingono

## 1.2 Campo Elettrostatico

Le forze elettriche agenti su un punto si sommano come vettori

Quindi, avendo  $q_1, \dots, q_n$  cariche, allora  $\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k q_0}{r_k^2} \hat{u}_k = q_0 \sum_{k=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_k^2} \hat{u}_k$

campo elettrostatico  $\vec{E}$



Diremo  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^2} \hat{u}_k \quad [\vec{E}] = N \cdot V^{-1}$

quindi  $\vec{F}_{q_0} = q_0 \vec{E} \Rightarrow q_0 \vec{E} = m \cdot \vec{a}$

Il campo elettrostatico è un campo vettoriale che associa ad ogni posizione in  $\mathbb{R}^3$  un vettore che se moltiplicato per una carica ritorna la forza elettrica sul corpo

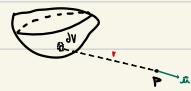
### 1.2.1 Campo elettrostatico di distribuzione continua di carica

Non è spesso possibile analizzare le cariche separatamente, quindi la distribuzione di carica deve essere vista come continua.

Diciamo le singole cariche come  $dq$  e le loro densità  $\rho = \frac{dq}{dv}$

Allora  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \hat{u}$

quindi, integrando  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r^2} \hat{u} dv$



ES - anello circolare

$$\lambda = \frac{dq}{dr} = \text{const} = \frac{Q}{2\pi R} \quad (\text{densità lineare}) \quad [\lambda] = C/m$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2 + x^2} \frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi R} \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot dl$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi R} \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{u}_x \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

ES - disco conico

$$\sigma = \frac{dq}{d\Omega} = \text{cost.} = \frac{Q}{\pi R^2} \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

$$d\sum^{(\text{anello})} = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2rdr + dr^2) \approx 2\pi r dr$$

$$dE^{(\text{anello})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma d\sum}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \times$$

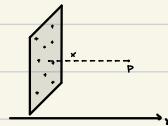
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \times \int_0^R \frac{2\pi r}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \times \int_{x^2}^{R^2+x^2} t^{-3/2} dt = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \times \left( \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{R^2+x^2}} \right)$$

pongo  $t = r^2 + x^2$   
 $dt = 2r dr$

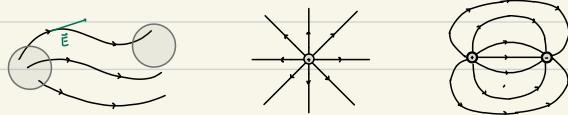
ES - piano indefinito

Si modella come un disco con  $\sigma$  cost. e  $R \rightarrow +\infty$

quindi  $E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma$



## 1.2.2 Linee di campo



- 1)  $\vec{E}$  è tangente
- 2) il verso di  $\vec{E}$  è dato dal verso delle linee di campo
- 3) il campo è più intenso dove la densità di linea è più alta
- 4) NON si intersecano
- 5) per convenzione vanno da cariche positive a cariche negative

## 1.2.3 Lavoro di un campo elettrico

Il lavoro per far percorrere ad una carica il percorso  $y$  da  $A \rightarrow B$

$$W_{AB} = \int_y \vec{F}_{q_0} ds = q_0 \int_y \vec{E} ds = q_0 \int_A^B \vec{E} ds$$

tensione



OSS Il campo elettrostatico è conservativo quindi  $\oint \vec{E} ds = 0$



### 1.3 Potenziale Coulombiano

Dato che il campo elettrico è conservativo possiamo definire il potenziale elettrico  $V$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = -(V_B - V_A) = -\Delta V \quad [V] = \frac{N}{C} m = V \text{ (volt)}$$

Il lavoro quindi risulta opposto alla variazione dell'energia potenziale  $U$

$$L_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_0 \Delta V = -\Delta U \quad [U] = Nm = J \text{ (joule)}$$

quindi  $V = \frac{U}{q_0}$

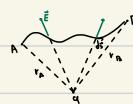
#### 1.3.1 Potenziale generato da una singola carica

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{A}_r \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_A^B = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = -(V_B - V_A) = -\Delta V$$

$\vec{A}_r \cdot d\vec{s} = r \cdot ds \cdot \cos\theta \cdot dr$

Istantaneo:  $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C \Rightarrow V(+\infty) = 0$

OSS:  $q$  mantiene il segno, non  $v_r$  fatto il modulo



#### 1.3.2 Potenziale generato da un insieme discreto di cariche

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \sum_{k=1}^N \int_A^B \vec{E}_k \cdot d\vec{s} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_k \left( \frac{1}{r_{B,k}} - \frac{1}{r_{A,k}} \right) = \sum_{k=1}^N (V_{B,k} - V_{A,k})$$

Istantaneo:  $V = \sum_{k=1}^N V_{A,k} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_k}$



#### 1.3.4 Potenziale generato da un insieme continuo di cariche

Sostituendo  $q_k$  con  $dq$  e  $\rho = \frac{dq}{dr}$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} dr$$

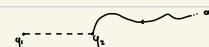


#### 1.4 Energia potenziale Elettrostatica

Definiamo l'energia potenziale come il lavoro svolto da un'ipotetica forza esterna

per portare la carica da  $+\infty$  alla sua posizione finale

$$W_{ext} = W_{el} = \Delta U = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$



$$\text{Su } N \text{ cariche } U_{el} = \frac{1}{2} \sum_{j < k} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} = \sum_{k > j} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

OSS:

Dato che le forze elettrostatiche sono conservative

$$L_{el} = -\Delta U = \Delta E_k \Rightarrow -qV_B - qV_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \Rightarrow -qV_B - \frac{1}{2} m v_B^2 = -qV_A - \frac{1}{2} m v_A^2$$

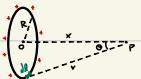
quindi  $qV + \frac{1}{2} mv^2 = \text{cost.}$

## 1.5 Relazione tra campo e potenziale

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow dV = - \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - E_x dx - E_y dy - E_z dz \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = - E_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} = - E_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} = - E_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = - \nabla V$$

forma differenziale

ES - anello cavo



$$\lambda = \frac{dq}{dz} = \text{const} = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L^\infty \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\vec{E}_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2+x^2)^{3/2}} \hat{x} \quad \checkmark$$

ES - disco cavo

$$\sigma \text{ (densità di carica)} \quad \sigma = \frac{dq}{d\Omega} = \text{const.} = \frac{Q}{\pi R^2}, \quad d\Omega = 2\pi r dr$$

$$dV_p^{(\text{anello})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma d\Omega}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \int_0^R \frac{2\pi r}{\sqrt{R^2+x^2}} dr = \frac{1}{4\epsilon_0} \sigma \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2+x^2} - |x| \right)$$

pongo  
 $u = r^2 + x^2$

$$\vec{E}_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{x} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{|x|} \right)$$

ES - piano indefinito

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x|$$

### 1.5.1 Superficie equipotenziali

Per rappresentare un campo elettrostatico possiamo usare, oltre alle linee di campo, le superficie equipotenziali.

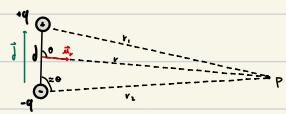
Le linee di forza sono sempre ortogonali alle superficie equipotenziali.



## 1.6 Dipolo elettrico

Due cariche puntiformi  $-q$  e  $+q$  a distanza  $\vec{J}$  costituiscono un dipolo elettrico

Si, due monenti di dipolo il vettore  $\vec{p} = q\vec{J}$



Più in generale, nel caso di  $K$  dipoli si ha  $\vec{p} = \sum_k q_k \vec{r}_k$

$$V(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{J} \cos\theta}{r^2} \Rightarrow V(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

pongo  $r_1 > r_2$   
quindi  $r_1 r_2 = r_1 r_2 \cos^2\theta$   
 $r_2 - r_1 = \vec{J} \cos\theta$

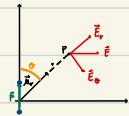
Ricordando che  $\vec{E} = \nabla V$

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\vec{p} \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\vec{p} \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

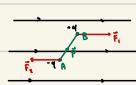
quindi  $\vec{E} = E_r \hat{u}_r + E_\theta \hat{u}_\theta \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{u}_r + \sin\theta \hat{u}_\theta)$

Le linee di campo per un dipolo sono quindi:



### 1.6.1 La forza su un dipolo elettrico

Considero il dipolo  $\vec{p}$  immerso in un campo elettrostatico  $\vec{E}$  uniforme



Alle due cariche vengono applicate due forze opposte di modulo uguale,  $F_r = -qE$ ,  $F_\theta = qE$

$$\vec{M} = \frac{\vec{J}}{2} \times \vec{F}_1 + \frac{\vec{J}}{2} \times \vec{F}_2 = \vec{J} \times \vec{F}_1 = q\vec{J} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

L'energia potenziale del dipolo è minima quando esso è allineato col campo elettrostatico (es. bussola in campo magnetico)

Il lavoro del campo per portare il dipolo sull'equilibrio:

$$W = \int_{\theta_0}^0 \vec{M} d\theta = -pE \int_{\theta_0}^0 \sin\theta d\theta = pE \cos\theta_0 - pE \cos 0$$

quindi  $U(\theta) = -pE \cos\theta = -p \cdot E$

## 1.7 Il teorema di Gauss

### 1.7.1 Il flusso di un campo elettrostatico

Si dice flusso del campo  $\vec{E}$  attraverso la superficie  $\partial\Sigma$  la quantità scalare:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot \partial\Sigma = E \cos\theta \partial\Sigma = E_n \partial\Sigma$$



Il flusso attraverso una superficie finita  $\Sigma$  è quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} \cdot d\Sigma = \iint_{\Sigma} \nabla \cdot E \, d\Sigma$$

teo divergenza



### 1.7.2 La legge di Gauss

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

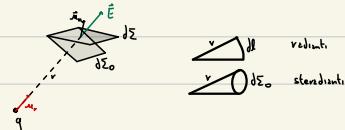
Se la distribuzione di carica è continua allora  $\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq = \frac{q}{\epsilon_0}$

DIH

Considero un'unica carica puntiforme  $q$

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot d\vec{\mu}_n d\Sigma = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}_r \right) \cdot \hat{r}_{\mu_n} d\Sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\Sigma_0$$

dr = angolo solido



1. Se  $q$  è interno

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Sigma} d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$= 4\pi$  per superfici sottili

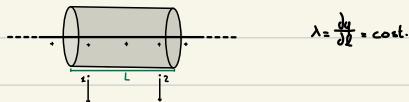
2. Se  $q$  è esterno

Il flusso su  $\Sigma_1$  si semplifica con quello in  $\Sigma_2$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0$$



ES - filo infinitamente sottile



In questo il campo è cost. ( $\lambda$  è cost.). Per simmetria il campo è radiale, quindi  $\vec{E} = E(r) \hat{r}_r$ .

Calcoliamo il flusso sul cilindro intorno al cilindro

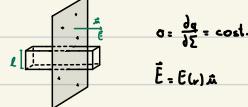
$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\text{sup. bassi}} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} + \int_{\text{sup. laterali}} \vec{E}(r) d\Sigma = E(r) \cdot 2\pi r \cdot L \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = - \int_A^B E(r) dr = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln(r) \right]_A^B = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_A}\right)$$

quindi  $V(r) = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ ,  $V(r_0) = 0$  arbitrario

ES - piano infinito



$$\alpha = \frac{dq}{d\Sigma} = \text{cost.}$$

$$\vec{E} = E(r) \hat{n}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 0 + z \vec{E}(r) \vec{l}^2$$

$$\Rightarrow 2\vec{E}(r) \cdot \vec{l}^2 = \frac{\sigma l^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## 1.8 Equazioni fondamentali dell'elettrostatica

**Oss:**  $\vec{\nabla}V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$  gradient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}$$
 divergenza

$$\nabla^2 \cdot V = \Delta \cdot V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
 laplaciana

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{det} \begin{pmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{i}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{i}_z$$
 valore

**TEO - della divergenza**

$$\oint_{\Sigma=20} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV$$


**TEO - di Stokes**

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}$$


### 1.8.1 Rotore del campo elettrostatico

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

teo stokes

Il campo elettrostatico è quindi conservativo e irrotazionale.

### 1.8.2 Forma differenziale della legge di Gauss

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} E_n d\vec{s} = \int_{V \text{ divergenza}} \nabla \cdot \vec{E} dV$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

quanto

### 1.8.3 Equazione di Poisson

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}V \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{\nabla}V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Quindi sono le equazioni fondamentali dell'elettrostatica

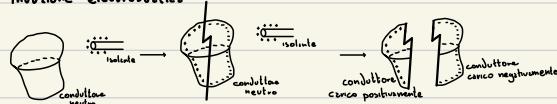
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{F} = q \vec{E} \end{cases}$$

## 2. Conduttori

Un materiale all'interno del quale le cariche si possono muovere liberamente

L'esempio più tipico di conduttori solidi sono i metalli.

**ES - Induzione elettrostatica:**



**PROP**

Nei fenomeni elettrostatici:

$$1) \vec{E}_{int} = 0$$



DIM per essendo  $\vec{E}_{int} \neq 0 \Rightarrow$  le cariche si muovono  $\Rightarrow$  si arriva ad una condizione di equilibrio

1.a) Di conseguenza  $V$  è costante all'interno del conduttore

$$\Delta V = V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad V_{A,B}$$



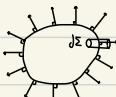
2) Le cariche in eccesso si dispongono sempre sulla superficie esterna



$$\text{quando } \Sigma \text{ è interno} \quad \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow q_{int} = 0 \quad V_{\Sigma} \text{ interno}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q_{ext}}{\epsilon_0}$$

3) Il campo sulla superficie vale  $\vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \hat{n}$



DIM

$-\vec{E}$  è  $\perp$  alla superficie equipotenziale, che in questo caso coincide con la superficie dell'oggetto

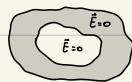
$$-\frac{dy}{\epsilon_0} = \Phi_{ext}(\vec{E}) = 0 + 0 + E d\Sigma \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{\epsilon_0 d\Sigma} = \frac{q}{\epsilon_0 R}$$

4) L'energia potenziale per un sfere vale  $U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{R}$

Immagino di portare  $dq$  da  $\infty$  alla superficie  $dU_e = V dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} dq$

$$\text{Integro} \quad U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{q}{R} dq = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{R}$$

## 2.1 Conduttore cavo

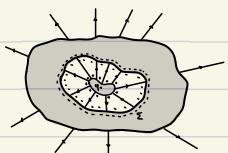


Il campo elettrico all'interno di un conduttore è pari a 0 e il potenziale è costante.

**DIM**

Per assurdo ipotizziamo che le cariche all'interno non si dispongono in modo uniforme

$$\oint \vec{E} ds = \int_{S_0} \vec{E} ds + \int_{S'_{\infty}} \vec{E} ds \neq 0, \text{ il che è assurdo perché } \vec{E} \text{ conservativo}$$



$$\Phi_E(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

Il conduttore esterno schermisce le cariche interne da quelle esterne (gabbia di Faraday)

## 2.2 Condensatori

### 2.2.1 Condensatori in serie e in parallelo

Due conduttori (armature) in induzione completa ( $q_i^+ - q_i^-$ ) si dicono condensatore. Simbolo

Definiamo la capacità del condensatore come  $C = \frac{Q}{\Delta V}$  [C] = Farad (F)

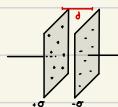
$$C = \frac{1}{C_1 + C_2 + \dots + C_n}$$

$$C_{tot} = C_1 + \dots + C_n \quad \Delta V \text{ è cost.} \quad Q_{tot} = Q_1 + \dots + Q_n$$

**ES** - condensatore piano

$$\text{Le armature sono piani con } \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma}$$

Fuori dalle armature  $E_0$ , i campi si annullano



$$\text{Tra le armature } E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} ds = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_0 \Sigma$$

**ES** - condensatore sfesco

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \text{ campo all'interno del condensatore}$$

$$\Delta V = \int_{R_i}^{R_o} \vec{E} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_i}^{R_o} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_i}^{R_o} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_o - R_i}{R_o R_i}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_o R_i}{R_o + R_i} = \frac{\epsilon_0 \frac{4\pi R^2}{d}}{d} = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d}$$

$\begin{matrix} R_o \\ R_o = R_o + R_i \\ d = R_o - R_i \end{matrix}$



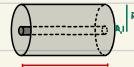
### ES - condensatore cilindrico

Densità lineare  $\lambda = \frac{Q}{L}$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\lambda}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{1}{r}$$

$$\Delta V = \int_{R_i}^{R_o} E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_i}^{R_o} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[ \ln(r) \right]_{R_i}^{R_o} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right)$$

$$C = \frac{\epsilon_0}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ln(R_o/R_i)}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_o/R_i)} \approx \epsilon_0 \frac{\pi}{d}$$



### 2.2.1 Condensatori in serie e in parallelo

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad Q \text{ è cost.}$$

$$\frac{1}{C_{\text{tot}}} = C_1 + \dots + C_N \quad \Delta V \text{ è cost.} \quad Q_{\text{tot}} = Q_1 + \dots + Q_N$$

### 2.3 Energia potenziale di un condensatore

Quanto lavoro devo compiere per aggiungere ad un condensatore una carica  $dq$

$$dW_{\text{ext}} = dU = dq \cdot \Delta V = dq \cdot \frac{Q}{C}$$

$$\text{Integrando nel caso di } q_i = 0 \text{ e } q_f = Q: W_{\text{ext}} = \Delta U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\text{quindi } U_e = W_{\text{ext}} = \frac{Q^2}{2C} \text{ oppure } \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V$$



### ES - condensatore piano

Ricordo che  $\Delta V = E \cdot d$ ,  $C = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d}$

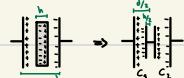
$$\Delta U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\Sigma}{d} \Delta V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma \text{ volume tra le svarature}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{\Delta U}{\Sigma} = u_e = \frac{\Delta U}{d\Sigma} \quad (\text{densità } d \text{ di energia elettrostatica})$$

$$\Rightarrow U_e = \int dU_e = \int u_e d\Sigma = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\Sigma$$

### 2.4 Materiali nel condensatore

#### 2.4.1 Condensatore con lastra metallica



Inserire un conduttore nel condensatore con  $d < h$  (altrimenti crea un filo) è equivalente a mettere un condensatore in serie

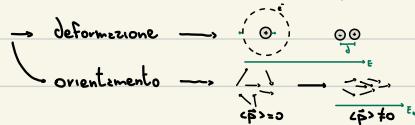
$$\text{Quindi } C_{\text{eq}} = \frac{1}{C_1 + \frac{1}{C_2}}, \text{ ma } C_1 = C_2 \text{ quindi } C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{2}{C_1}} = \frac{C_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 \Sigma}{(d_2 - h)/t} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d - h} \Rightarrow C_k = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d - h} > C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \text{ quindi } \Delta V_k < \Delta V_0$$

## 2.4.2 Condensatore con dielettrico

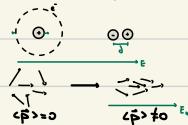


Si dice dielettrico un materiale non conduttore che se immerso in un campo elettrico genera dei fenomeni di polarizzazione.

Le polarizzazioni può avvenire in due modi → deformazione →



orientamento →



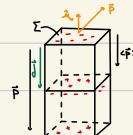
Per tornare al caso macroscopico: divido il dielettrico in cubi di volume  $\tau$

Nel cubo ci sono  $JN$  dipoli, diciamo inoltre  $n = \frac{JN}{\tau}$  densità di dipoli su volume

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = N \cdot c\vec{p} = n c\vec{p} d\tau$$

Diciamo  $\vec{P}$  vettore di polarizzazione  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = n c\vec{p}$

Poi  $\vec{P} \cdot \vec{n}_N = \sigma_p$  densità di carica di polarizzazione



Quindi le cariche sulle superfici interne si annullano e rimane solo la carica sulle superfici esterne



Sia  $\epsilon = k\epsilon_0$  la costante dielettrica nel materiale e  $K > 1$  costante dielettrica relativa

Allora  $\Delta V_K = \frac{\Delta V_0}{K}$

$$E_K = \frac{1}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0}{K}$$

$$C_K = \frac{Q}{\Delta V_K} = K C_0 > C_0$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad E_K = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = E_0 - E_p$$

$$E_p = E_0 - E_K = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{K-1}{K} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{quindi} \quad \sigma_p = \frac{K-1}{K} \sigma$$

Usare il dielettrico è meno efficace di un conduttore, ma in ogni caso  $\Delta V$  si riduce

## 3. Elettrodinamica

I materiali conduttori solidi sono formati da un reticolo solido al cui interno si muovono gli elettroni liberi.

Questi movimenti hanno velocità media nulla, non modificano quindi le proprietà macroscopiche del materiale.



Siano  $C_0$  e  $C_1$  due conduttori in contatto, le cariche si muovono con velocità media  $v_0$  finché i due conduttori raggiungono un equilibrio.

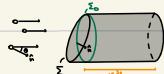
Si può immaginare la corrente come un flusso d'acqua da potenziale maggiore a potenziale minore.

### 3.1 Generatore di forza elettromotrice

$$\epsilon = V_o - V_i = \mathcal{E}_g(E) = \int \vec{E} ds$$

Un qualsiasi dispositivo capace di mantenere una differenza di potenziale tra due punti si dice generatore di forza elettromotrice (una pile)

### 3.2 Intensità di corrente



Diremo intensità di corrente:  $i = \frac{dq(t)}{dt} = q'(t)$   $[i] = \frac{C}{s} = A$  (Ampere)

L'intensità di corrente misura il numero di cariche che passano in un conduttore per unità di tempo

Diremo densità dei portatori:  $n_e = \frac{dN_e}{dv}$   $[n_e] = \frac{1}{m^3}$

Questo numero rappresenta il numero di elettroni liberi in un volume dv di un materiale  
è elevato per i conduttori e basso per gli isolanti.

Diremo densità di corrente:  $j = q_e n_e v_e - n_e l q_e / v_e$   $[j] = \frac{A}{m^2}$

Il vettore rappresenta la direzione delle cariche positive, va da punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore  
questo per convenzione, sarebbe possibile definirlo con verso opposto

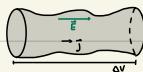
OSS

In un tempo dt passano dq cariche attraverso il materiale

$$dq = q_e n_e v_e \sum \cos \theta dl = j \sum \cos \theta dl = j \cdot \bar{n}_e \sum dl$$

$$\text{quindi } i = \frac{dq}{dt} = j \cdot \bar{n}_e \sum = I_\Sigma(j) = \int_\Sigma j \cdot \bar{n}_e d\Sigma \Rightarrow i = \Phi_\Sigma(j) = \int_\Sigma j \cdot \bar{n}_e d\Sigma$$

### 3.3 Legge di Ohm



La legge di Ohm mette in relazione la corrente con la tensione.

In elettrodinamica il campo elettrico nel conduttore è ≠ 0  $j = \sigma \cdot \vec{E}$

$\sigma$  = conducibilità (specificità del materiale)

$$\frac{1}{\rho} = \sigma = \text{resistività} \quad [\rho] = \Omega \cdot m$$

$$\text{quindi } \Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{1}{\sigma} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \rho \cdot \frac{j}{\sigma} \cdot d\vec{s} = j \int_A^B \frac{\rho}{\sigma} \cdot d\vec{s} \quad R = \int_A^B \frac{\rho}{\sigma} \cdot d\vec{s}$$

$R = \text{resistenza}$

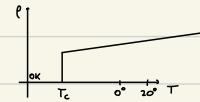
$$\Delta V = R \cdot i \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (Ohm)}$$

OSS

Le resistività varia al variare della temperatura.

$$\rho(T) = \rho_{20^\circ} (1 + \alpha \Delta T) \quad \text{dove } \Delta T = T - 20^\circ C$$

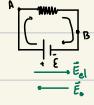
$$\alpha \text{ è detto coefficiente termico} \quad [\alpha] = \frac{1}{C^\circ}$$



Questa diminuzione delle resistività avviene perché i portatori di carica si scontrano con un numero minore di particelle all'abbassarsi della temperatura.

Per molti materiali esiste una  $T_c$  al di sotto della quale  $\rho=0$ , sono detti superconduttori.

#### 3.3.1 Legge di Ohm generalizzata



$$\text{Per la legge di Ohm sappiamo} \quad I_1 = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = R \cdot i + 0$$

Ma questo significa che sta agendo un altro campo,  $\vec{E}_o$  è conservativo ed ha circolazione nulla. Chiamiamo questo campo  $E_o$ .

$$I_1 = \oint \vec{E}_o \cdot d\vec{s} + \oint \vec{E}_o \cdot d\vec{s} = 0 + R \cdot i$$

### 3.4 Potenza e Effetto Joule

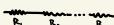


$$dL = dq \cdot \Delta V = dq \cdot R \cdot i = R \cdot i^2 dt \Rightarrow L = \int_0^t R \cdot i^2 dt$$

$$\text{La potenza dissipata è } P = \frac{dL}{dt} = R \cdot i \cdot \frac{dq}{dt} = R \cdot i^2 \Rightarrow P_{\text{diss}} = R \cdot i^2$$

L'energia viene dissipata sotto forma di calore dalla resistenza (per effetto Joule)

### 3.5 Resistori in serie e parallelo



$$R_{\text{eq}} = R_1 + \dots + R_N$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_N = R_1 i + R_2 i + \dots + R_N i = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) i = R_{\text{tot}} i \Rightarrow \Delta V = R_{\text{tot}} i$$

$i$  è cost.



$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_N = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \dots + \frac{\Delta V}{R_N} = \Delta V \underbrace{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)}_{1/R_{\text{tot}}} \Rightarrow i_{\text{tot}} = \frac{\Delta V}{R_{\text{tot}}}$$

$\Delta V$  è cost.

### 3.6 Carica e scarica di un condensatore



Circuito RC

Al tempo  $t=0$ ,  $q=0$  e  $i=0$  e chiudiamo l'interruttore del circuito

$$E = \Delta V_R(t) + \Delta V_C(t) = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} \text{ dove ricordo } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Risolvendo l'equazione differenziale di  $R \frac{dq(t)}{dt} + q(t) \cdot \frac{1}{C} - E = 0$

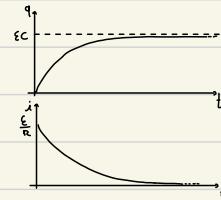
$$\Rightarrow (EC - q(t))dt = RC dq(t) \Rightarrow \int \frac{1}{EC - q(t)} dq = \int \frac{1}{RC} dt \Rightarrow [-\ln(EC - q)]_0^{q(t)} = [\frac{t}{RC}]_0^{t_f}$$

$$\Rightarrow -\ln\left(\frac{EC - q_f}{EC}\right) = \frac{t_f}{RC} \Rightarrow 1 - \frac{q_f}{EC} = e^{-t_f/RC} \Rightarrow q(t) = EC(1 - e^{-t/RC})$$

Definiamo  $\tau = RC$  come il tempo caratteristico del circuito.  $[\tau] = s$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{EC}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

Al tempo  $t \approx 5\tau$   $q = EC$  e  $i = 0$



Calcoliamo il lavoro compiuto dalla fem

$$\delta W_{\text{fem}} = \varepsilon dq = R i dq + \frac{q}{C} dq = R i^2 dt + \frac{q}{C} dq$$

$$W_{\text{fem}} = \int_0^t R i^2 dt + \int_0^t \frac{q}{C} dq = W_{\text{scalo}} + \frac{Q^2}{2C} = W_J + U_e$$

dissipato condensatore

Mostriamo che metà dell'energia viene dissipata e l'altra metà si trova sul condensatore

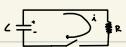
$$W_{\text{fem}} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon dq = \int_0^{\infty} \varepsilon i(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \left[ -\varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\infty} = \frac{\varepsilon^2}{R} \tau = \varepsilon^2 C$$

$$W_J = \int_0^{\infty} R i^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \left[ -\frac{\varepsilon}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{\infty} = \frac{\varepsilon^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 C$$

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\varepsilon^2 C}{2\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 C$$

□

### 3.6.1 Scarica del condensatore



$$V_c = \frac{q}{C} = V_R = R i \Rightarrow \frac{q}{C} = R i \Rightarrow i = \frac{q}{RC}, \quad i = \frac{dq}{dt}$$

quindi  $\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$ , risolvo l'equazione differenziale

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dq}{q} = - \int_0^t \frac{1}{RC} dt \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad V_0 = \frac{q_0}{C}$$
$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R}$$

## 4. Magnetismo

Si noti che alcuni materiali, come la magnetite, hanno le proprietà di altri materiali.

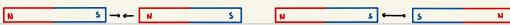
Possiamo anche notare che il fenomeno non è di natura elettrostatica, non ci sono differenze nel fenomeno anche se il materiale è scetico

Nel campo magnetico, a differenza di quello elettrico, i magneti presentano sempre due poli opposti.

Non esiste il monopolo magnetico, solo il doppio



Similmente alle cariche elettriche poli uguali si respingono e poli opposti si attraggono.



Useremo NORD e SUD al posto di + e -

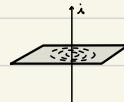
Possiamo decidere quale dei due poli indicare come nord in base alla direzione che il magnete assume quando è lasciato libero di girare. Similmente ad un dipolo elettrico quello magnetico si allinea ad un campo esterno, in questo caso quello terrestre.

Come i dipoli elettrici anche i dipoli magnetici si orientano secondo le linee di campo

#### 4.1 Prima legge di Laplace

Si nota che una corrente elettrica genera un campo magnetico.

In particolare un filo percorso da corrente genera attorno a sé un campo magnetico



Mentre il campo è costituito da circonference, quello magnetico è generato da circonference in movimento.

La prima legge di Laplace esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo  $ds$  di filo, percorso da una corrente  $i$ , in un punto  $P$  distante  $r$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \quad \mu_0 \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Tm/A} \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Tm}^2/\text{A}$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} \quad [\vec{B}] = \text{Tesla (T)}$$

Oss. Vista la relazione tra corrente e velocità dei portatori si può riscrivere la formula

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}, \quad i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i d\vec{s} = \frac{dq}{dt} d\vec{s} = dq d\vec{v}$$

$$\text{quindi } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{u}_r}{r^2}, \text{ se } \vec{v} \ll c$$

##### 4.1.1 Legge di Biot-Savart

Un'applicazione della legge di Laplace su un filo infinito



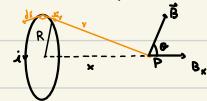
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \cdot \sin\theta}{(r \sin\theta)^2}, \quad \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{u}_r \sin\theta}{r \sin\theta} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\sin\theta}{r} d\theta \vec{u}_\theta$$

$$r = \frac{d}{\sin\theta}, \quad s = -\frac{d}{\tan\theta}, \quad ds = \frac{d}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left( \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sin\theta}{d} d\theta \right) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left( -\cos\theta_1 + \cos\theta_0 \right) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left( \frac{b}{\sqrt{d^2+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{d^2+c^2}} \right) \vec{u}_\theta$$

OSS Se  $a, b \rightarrow \infty$  allora  $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{u}_0$

ES - anello percorso da corrente



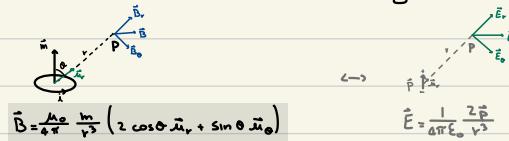
$$dB_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i \cdot d\theta \cdot \sin(90^\circ)}{R^2 + x^2} \cdot \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$B_x = \int_0^{2\pi} dB_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \int_0^{2\pi} R d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i \pi R^2}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$\sum = \pi R^2 \quad \text{quindi} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

## 4.2 Momento di dipolo magnetico

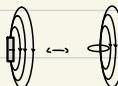
Diciamo  $\vec{m}$  il momento di dipolo magnetico  $\vec{m} = i \cdot \vec{u}_n \sum$



Il momento meccanico subito da un dipolo in un campo magnetico è  $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

L'energia potenziale è  $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

OSS Una spira percorso da corrente è un dipolo magnetico



## 4.3 Forza di Lorentz

Una carica  $q$  immersa in un campo magnetico che si muove con una velocità  $v$  subisce una forza detta "di Lorentz"

$$\vec{F} = q_v \vec{u} \times \vec{B}$$

In modo più generale è possibile scrivere  $\vec{F} = q_0 (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

### 4.3.1 Lavoro di un campo magnetico

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} ds = \int_A^B q (\vec{u} \times \vec{B}) \vec{u} dt = 0$$

$$\Delta E_k = 0 \Rightarrow E_k = \text{cost} \quad |V_A| = |V_B| \quad (\text{può cambiare la direzione})$$

La forza di Lorentz è sempre ortogonale alla velocità, non compie quindi lavoro.



B cost. e uniforme

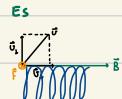
$$\vec{B} \perp \vec{v} \quad \omega = R\omega^2 \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$F_x = m \frac{v^2}{R} = qv\vec{B} \cdot (\vec{v}_1 \vec{B})$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \text{(periodo)} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{qB} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{qB}{m}$$

non dipende dalle velocità



B cost. e uniforme,  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$$\vec{v} \times \vec{B} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{B} = \vec{v}_2 \times \vec{B}$$

lungo  $\vec{v}_1$ : moto a velocità costante

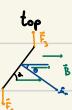
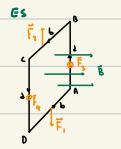
lungo  $\vec{v}_2$ : moto circolare

#### 4.4 Seconda legge di Laplace

La seconda legge di Laplace descrive le forze che subisce un filo immerso in un campo magnetico quando percorso da una corrente



$$d\vec{F} = i d\vec{s} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \int_A^B i d\vec{s} \times \vec{B} \quad \text{cost} \quad \vec{F} = i \vec{A} \vec{B} \times \vec{B}$$



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = i b B \sin(\alpha) \quad (\alpha \text{ angolo tra filo e } B)$$

$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = i s B \sin(\gamma_0) = i s B$$

$$\vec{H} = \frac{b}{2} \vec{F}_3 - \frac{b}{2} \vec{F}_4 = b \times (i s B) = B \times \underbrace{i s b}_{m} \Rightarrow \vec{H} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{B}_{\text{filo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i}{r} \quad \vec{F}_{\text{filo}} = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$\vec{m} = i d\vec{s} \sum$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} (2 \cos \bar{\alpha}_r + \sin \theta \bar{\alpha}_\theta)$$

$$\vec{H} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Summary - un confronto tra campo elettrico e magnetico

$$\text{Generazione del campo:} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \bar{\alpha}_r$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \bar{\alpha}_r}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\vec{v} \times \bar{\alpha}_r}{r^2}$$

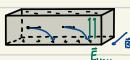
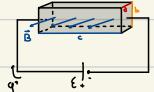
$$\text{Effetti del campo:} \quad \vec{F}_E = q \vec{E}$$

$$d\vec{F}_E = i d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_E = q \vec{v} \times \vec{B}$$

## 4.5 Applicazioni del campo magnetico

### ES - effetto Hall



$$\vec{F}_{\text{Lorenz}} = qv_B \vec{B} \text{ arriva ad essere in equilibrio con } \vec{F}_{\text{HALL}} = q\vec{E}_{\text{HALL}}$$

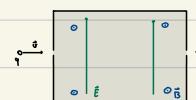
quindi  $E_H = v_B B$ ,  $\Delta V_H = E_H b = b v_B B = \frac{b^2 B}{n q}$

Se q+ allora:



L'effetto Hall permette di distinguere il segno dei portatori (basta guardare il fondo del conduttore)

### ES - selettore di velocità

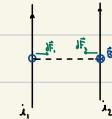


$\vec{E}$  e  $\vec{B}$  campi esterni uniformi nella scatola

$$\vec{F}_{\text{Lorenz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_L = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \Leftrightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

### ES - interazioni tra fili percorso da corrente



Il filo 2 subisce una forza dal campo magnetico del filo 1 (uguale e contraria a quella subita dal filo 1)

$$d\vec{F}_2 = i_2 d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1 = i_2 d\vec{s}_2 \cdot \vec{B}_1 = i_2 d\vec{s}_2 \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

ortogonali

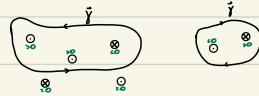
$$\frac{d\vec{F}_2}{ds_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d}$$

## 4.6 Legge di Ampere

La legge di Ampere permette di calcolare la circuitazione del campo magnetico lungo un percorso  $\gamma$

In particolare vogliamo trovare  $C_\gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$

La legge di Ampere troviamo  $C_\gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{k=1}^N i_k (\text{corri})$



OSS

Questa legge è assimilabile alla legge di Gauss. Per calcolare  $\Phi_E(\vec{E})$  si tiene conto delle sole cariche interne  $\approx \Sigma$

DIM

Consideriamo  $\vec{B} = \sum_{k=1}^N \vec{B}_k$  dove  $B_k$  è il campo generato da un filo

Quindi la circuitazione del campo è  $C_\gamma(\vec{B}) = \oint \sum_{k=1}^N \vec{B}_k \cdot d\vec{s} = \sum_{k=1}^N \oint \vec{B}_k \cdot d\vec{s}$

Studiamo un solo filo, nel caso più generale

$$\int_A^B \vec{B}_k \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{\mu_0 i_k}{2\pi r} \vec{n}_k \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{\mu_0 i_k}{2\pi r} d\theta = \frac{\mu_0 i_k}{2\pi} \Delta\theta$$



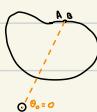
Se il filo è concatenato

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i_k}{2\pi} d\theta = \mu_0 i_k \frac{2\pi}{2\pi}$$



Se il filo non è concatenato

$$\int_0^0 \frac{\mu_0 i_k}{2\pi} d\theta = 0$$



## 4.7 Teorema di Gauss Magnetico

Il flusso di un campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.

$$\Phi_E(\vec{B}) = 0$$



Questo perché le linee di campo magnetico sono sempre linee chiuse, non ce ne sono che entro senza uscire.

E questo è a sua volta dovuto all'essenza di monopoli magnetici

Considerando invece una superficie aperta possiamo avere un flusso  $\neq 0$

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \quad \text{Se } \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2, \text{ so che } \Phi_E(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) + \Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}) = -\Phi_{\Sigma_2}(\vec{B})$$

Quindi il flusso sulle superfici aperte dipende dal bordo su cui poggiava, non dalla loro forma

**Summary - Leggi J, Gaus e Ampere in forme differenziali**

$$\oint_{\Sigma} (\vec{B}) \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{B} \, d\Sigma = 0 \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{B} = 0$$

teo divergenza

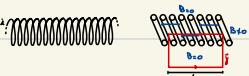
$$\oint_{\gamma} (\vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \mu_0 i_c = \mu_0 \int_{\Sigma} j \cdot \vec{n} \, d\Sigma \Rightarrow \vec{V} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

teo voto Ampere

## 4.8 Solenoide infinito

Il solenoide è un avvolgimento di filo a forma di solenoide.

Nel caso di un solenoide è infinito  $\vec{B}$  è costante all'interno ed è nullo all'esterno



$$\oint_{\gamma} (\vec{B}) \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} (\vec{B} \cdot \vec{n}) \, d\Sigma = \int_{\gamma} B_o \cdot \vec{n} \, d\Sigma = \mu_0 N_i \cdot L \Rightarrow B_o = \mu_0 N_i \quad (n = \frac{N}{L}, \text{ spire per unità di lunghezza})$$

esterno  $B=0$  verticali Ampere

## 4.9 Campo magnetico nei materiali

Consideriamo un solenoide con un materiale al suo interno



Sia  $B_o$  il campo nel vuoto del solenoide  $B_o = \mu_0 n_i$

Il campo nel solenoide con all'interno un materiale è  $B = K_m B_o \Rightarrow \frac{B}{B_o} = K_m$

dove  $K_m$  è la costante di permeabilità relativa ( $\chi_m = K_m / \mu_0$ )

$\chi_m = K_m - 1$  è la suscettività magnetica

Definiamo un nuovo campo, detto magnetizzante  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_o}{\mu_0} = n_i$

E definiamo  $\vec{M} = \chi_m \vec{B}$  come il vettore di magnetizzazione

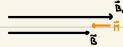
$$\vec{B} = \mu_0 K_m n_i = \mu_0 (\chi_m + 1) \vec{H} = \mu_0 \vec{H} (\chi_m + 1) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Quindi in presenza di un campo magnetico si creano dei piccoli dipoli magnetici nei materiali che si allineano parallelamente a  $\vec{B}$ , con verso che varia in base al materiale.

### 4.9.1 Materiali diamagnetici

I dipoli magnetici indotti dal campo si orientano in direzione opposta

Hanno  $K_m < 1$ ,  $\chi_m < 0$  quindi  $|\vec{B}| < |\vec{B}_o|$



#### 4.9.2 Materiali paramagnetici

Sono materiali che presentano naturalmente dei dipoli magnetici orientati casualmente

Il campo magnetico si somma a quello orientante esterno

Hanno  $K_m > 1$ ,  $\chi_m > 0$  quindi  $|\vec{B}| > |\vec{B}_0|$

$$\vec{H} \rightarrow \vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}$$

#### 4.9.3 Materiali ferromagnetici

Sono simili ai paramagnetici, ma presentano dei domini che si orientano in modo più rigoroso

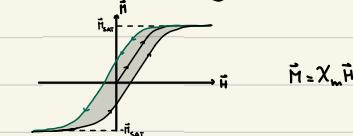
Hanno  $K_m \gg 1$ ,  $\chi_m \gg 0$  quindi  $|\vec{B}| \gg |\vec{B}_0|$

$$\rightarrow \vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}$$

Questi materiali hanno inoltre le proprietà di magnetizzarsi

Infatti è possibile partire da un materiale ferromagnetico vergine, quindi che produce  $\vec{B}=0$ , e modificare questo sue proprietà.

È sufficiente immergere il materiale in un campo magnetizzante  $H$



Il punto massimo di magnetizzazione, detto punto di saturazione, è dato dal fatto che tutti i domini sono perfettamente allineati

oss. Tutti i punti interni del grafico sono raggiungibili.

#### Leggi di Gauss e Ampere in forma differenziale

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

leg. di Gauss

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} d\Sigma = \mu_0 i_c = \mu_0 \int_{\Sigma} j d\Sigma \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

leg. di Ampere

#### 4.10 Equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

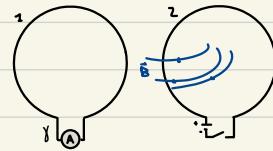
## 5. Campi elettromagnetici variabili

### 5.1 Legge di Faraday-Lenz

In presenza di fenomeni variabili nel tempo vi è una relazione diretta tra campo elettrico e magnetico.

Una delle principali leggi che descrive l'interazione è quella di Faraday-Lenz.

Si noti che chiudendo il circuito 2, nel circuito 1 l'ammetero rileva delle correnti. Ma dopo un certo tempo torna a 0 (quando  $i_1$  in 2 è cost).



In modo simile si può muovere un magnete per ottenere una corrente nel circuito 1.

Quindi viene indotta una corrente in un circuito quando si ha una variazione del campo magnetico.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_i(\vec{B})}{dt} \quad \text{e ricordando che } \mathcal{E}_i = L_i(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow i_{ind} = \frac{\mathcal{E}_i(\vec{E})}{R} \quad (f_{em} = R \cdot i)$$

Una variazione nel tempo di  $\Phi_i(\vec{B})$  può essere causata da:

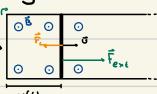
1. Variazione di  $\vec{B}$ :
2. Variazione di  $\Sigma$ :
3. Variazione di  $\mu_0$ :

Il verso della corrente indotta è tale da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione del campo magnetico esterno.

È evidente il motivo per cui deve essere così, altrimenti una piccola variazione di campo magnetico porterebbe ad una corrente sempre maggiore (In violazione del primo principio della termodinamica).

Questo fenomeno è detto "effetto elettromagnetico".

ES-generatore di fem costante



Pongo  $\vec{B} = \text{cost}$

$$\Phi_i(\vec{B}) = B \cdot \Sigma = B \cdot z \cdot x(t)$$

$$\text{quindi } \mathcal{E}_{ind} = \frac{d\Phi_i(\vec{B})}{dt} = B \cdot z \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot z \cdot v \Rightarrow |i_{ind}| = \frac{B \cdot z \cdot v}{R}$$

$$\vec{F}_L = \text{II legge di Laplace} = i \cdot \vec{L} \times \vec{B} = i_{\text{ind}} \cdot 2 \cdot B \vec{a}_L = \frac{B^2 i^2 u}{R} \vec{a}_L \quad \text{"attrito elettromagnetico"}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_L$$

Il generatore converte energia meccanica in energia elettrica

$$P_{\text{elet}} = \frac{dL_{\text{ext}}}{dt} = \vec{F} \frac{du}{dt} = F_{\text{ext}} \cdot u = \frac{B^2 i^2 u^2}{R}$$

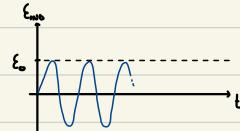
$$P_d = \text{dissipato per effetto Joule} = R \cdot i_{\text{ind}}^2 = R \cdot \left( \frac{B_i u}{R} \right)^2 = \frac{B_i^2 i^2 u^2}{R} = P_{\text{ext}}$$

**ES**-generatore di f.m. alternata



$$\Phi(B) = NB \sum \cos(\theta(t)) = NB \sum \cos(\omega t)$$

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = NB \sum \omega \sin(\omega t) \Rightarrow i_{\text{ind}} = \frac{E_{\text{ind}}}{R} = \frac{E_0}{R} \sin(\omega t)$$



$$P_d = R \cdot i_{\text{ind}}^2 = \frac{E_0^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

$$\Delta P_d = \frac{1}{T} \int_0^T P_d dt = \frac{1}{T} \frac{E_0^2}{R} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{R} = \frac{E_{\text{eff}}^2}{R} = i_{\text{eff}}^2 R$$

$$\text{quindi, } E_{\text{eff}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}, \quad i_{\text{eff}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

### 5.1.1 Legge di Faraday

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow Q = \int_{t_i}^{t_f} i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{t_i}^{t_f} \Phi(B) dt = -\frac{1}{R} \int_{t_i}^{t_f} d\Phi = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R}$$

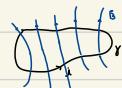
### 5.2 Autoinduzione

Dato un circuito percorso da corrente, la corrente che circola genera un campo magnetico che passa attraverso il circuito.

Si parla di autoinduzione perché si tratta di un effetto che avviene sul circuito stesso

L = coefficiente di autoinduzione

$$\Phi_i(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{a}_n d\Sigma = \int_S \frac{M_0}{4\pi} \left( \frac{\partial \vec{a} \times \vec{a}_n}{r^2} \right) d\Sigma \quad [L] = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = \text{Henry (H)} \quad \text{e quindi, } [\Phi] = Wb = Tm^2$$



OSS

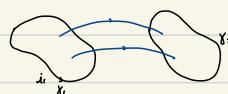
L è puramente determinato da materiale e geometria

$$\Phi_i(\vec{B}) = iL \quad (\text{autoflusso})$$

$$\text{e quindi, si ottiene } F_{\text{em}} = -\frac{d\Phi_i(\vec{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

### 5.2.1 Coefficiente di mutua induzione

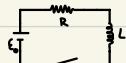
La mutua induzione riguarda il flusso di un campo magnetico generato da un circuito attraverso un altro circuito



$\Phi_{y_2}(\vec{B}_1) = \text{flusso sul secondo circuito del campo generato dal primo} = M_{12} i_1$ ,  
e al contrario  $\Phi_{y_1}(\vec{B}_2) = M_{21} i_2$

M è detto coefficiente di mutua induzione e si dimostra che  $M_{12} = M_{21}$ .

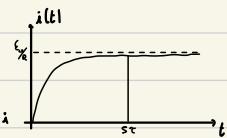
### 5.3 Circuito RL



$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad E_o + E_{no} = R i$$

$$E_o - L \frac{di}{dt} + R i \Rightarrow \int \frac{dt}{L} = \int \frac{di}{E_o - R i} \Rightarrow \frac{t}{L} = \left[ -\frac{1}{R} \ln(E_o - R i) \right]_0^i \Rightarrow \frac{t}{L} = -\frac{1}{R} \ln \left( \frac{E_o - R i}{E_o} \right) \Rightarrow e^{-\frac{t}{R}} = \frac{E_o - R i}{E_o} \Rightarrow E_o \left[ e^{-\frac{t}{R}} - 1 \right] = -R i$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E_o}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{R}} \right) \quad \text{dove } \gamma = \frac{1}{R} = \text{cost}$$



### 5.4 Energia Magnetica

Così come fatto per i condensatori utilizziamo il circuito RL per trovare l'energia accumulata nell'induttore.



$$P_g = \text{potenza del generatore} = E i = L i \frac{di}{dt} + R i^2$$

$$W_g = \text{lavoro del generatore} = \int P_g dt = \int L i \frac{di}{dt} dt + \underbrace{\int R i^2 dt}_{\text{effetto Joule}} = \frac{1}{2} L i^2 + W_J$$

energia accumulata nell'induttore

Quindi l'energia accumulata nel condensatore, anche detta energia magnetica vale:  $U_m = \frac{1}{2} L i^2$

Se utilizziamo un solenoide come induttore, quindi  $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \Sigma = \mu_0 n^2 l \Sigma$ , otteniamo:

$$\text{otteniamo } U_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left( \mu_0 n \cdot l \right)^2 \Sigma l = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{B^2}{l} \Sigma \quad \text{volume del solenoide}$$

$$\text{e naturalmente definiamo } u_m = \text{densità di energia magnetica} = \frac{dU_m}{dl} = \frac{1}{2} \mu_0 B^2$$

### 5.5 Legge di Ampere-Maxwell

Maxwell trova un problema nella legge di Ampere, ovvero

$$P_g(\vec{B}) = \mu_0 i(t) \text{ su } \Sigma_1 \quad \text{nel periodo di transitorio}$$

$$\downarrow_0 \text{ su } \Sigma_2$$

Maxwell risolve queste incogniture aggiungendo  $i_s$ , la corrente di spostamento, che è una corrente fittizia che indica lo spostamento di carica tra le due armature del condensatore

$$i_s = \frac{d\epsilon_c}{dt} = \frac{d}{dt} (C \Delta V) = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \frac{\Sigma}{\Delta} \Delta V) = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \Sigma E) = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

Quindi  $\epsilon_0(\vec{B}) = \epsilon_0 \left( i_s + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$

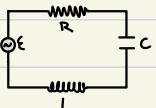
Summary - Equazioni di Maxwell in forma differenziale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{p}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$$

## 5.6 Circuiti RLC

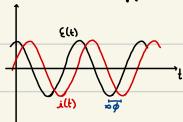


$$\text{Se } E(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

$$E(t) = R i(t) + \frac{q(t)}{C} + L \frac{di(t)}{dt} \quad \rightarrow \text{eq. diff. di secondo ordine}$$

$$\text{La corrente nel circuito vale } i(t) = i_0 \cos(\omega t - \phi), \quad \tan(\phi) = \frac{\omega t - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (\text{a regime})$$

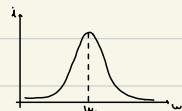
•  $\phi$  è la fase, rappresenta lo sfasamento tra  $E$  e  $i$



$$\cdot i_0 = \frac{E_0}{Z} \quad \text{dove } Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad Z \text{ è l'impedenza}$$

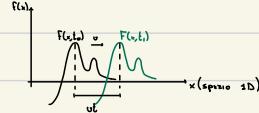
$$Z(\omega) \text{ è minima per } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z(\omega_0) = R \quad \phi(\omega_0) = 0 \quad \text{minima impedenza, zero sfasamento}$$

In particolare  $\omega_0$  è la frequenza di risonanza



ES Sintonizzando uno radio si varia  $C$ , venendo quindi  $\omega_0$ . Se  $\omega_0$  = frequenza di una stazione radio escuteremo quella stazione.

## 6. Le Onde



In generale l'onda è  $f(x,y,z,t)$

Se  $F(x,t,0) = f(x) \Rightarrow F(x,t) = f(x-vt)$

### 6.1.1 Equazione delle onde (di D'Alembert)

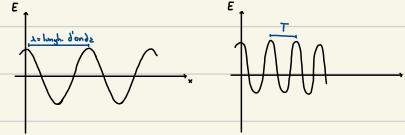
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \Rightarrow F(x,t) = f(x-vt)$$

### 6.1 Onde armoniche unidimensionali

Sono una particolare soluzione dell'equazione differenziale d'onda

Utile studiarle in quanto ogni onda è composizione di sin/cos (Fourier)

$$E(x,t) = E_0 \cos[k(x+vt) + \phi], [k] = \frac{1}{m}$$



$$\cos(kx + \phi) = \cos(k(x+\lambda) + \phi) = \dots \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ il numero d'onda}$$

$$kvT = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} v \frac{1}{T} = 2\pi \Rightarrow \lambda v = c$$

$$\text{T, periodo } v = \frac{1}{T}, \text{ frequenza } w = \frac{2\pi}{T} \quad (kv = w)$$

$$\text{quindi } E(x,t) = E_0 \cos[k(x+vt) + \phi] = E_0 \cos(kx + vt + \phi)$$

### 6.2 Onde elettromagnetiche

Studiamo le equazioni di Maxwell nel vuoto  $\rho=0, j=0$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

hp:  $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$   $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$  onde pure che non dipendono da  $y, z$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_x \text{ è cost, sceglio } E_x = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow B_x \text{ cost, sceglio } B_x = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{k} = -\frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{j} + \frac{\partial B_x}{\partial x} \hat{k} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{k} \right)$$

Allo stesso modo per  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$

otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \text{ con velocità } \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad (\text{l'equazione delle equazioni di Maxwell nel vuoto è l'onda elettromagnetica})$$

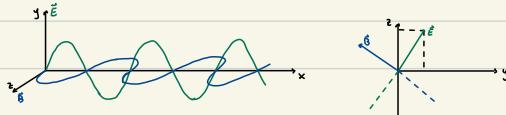
quindi  $\vec{E} = E_{0x} \cos(kx - \omega t) \hat{j} + E_{0z} \cos(kx - \omega t) \hat{k}$   
 $= (E_{0x} \hat{j} + E_{0z} \hat{k}) \cos(kx - \omega t)$

$$\vec{B} = (B_{0y} \hat{j} + B_{0z} \hat{k}) \cos(kx - \omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow -E_x \cos(kx - \omega t) = B_{0y} \sin(kx - \omega t) \Rightarrow B_{0y} = -\frac{k}{\omega} E_{0x} = -\frac{E_{0x}}{c} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow B_{0z} = \frac{E_{0y}}{c} \end{array} \right.$$

$$\vec{B} \cdot \vec{E} = (E_{0x} B_{0y} + E_{0z} B_{0z}) \cos(kx - \omega t) = 0$$

$$\vec{B} \perp \vec{E} \text{ sempre e } |\vec{B}| = \frac{|E|}{c}$$



## 6.3 Vettore di Poynting

ENERGIA POTENZIALE ONDA EN

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad U_m = \frac{1}{2} \mu_0 B^2$$

$$\text{Per onde elettromagnetiche: } U_{el} = U_E + U_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B^2$$

$$\text{ma } B = \frac{E}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} \mu_0 B^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{E^2}{c^2} \quad \text{quindi, } U_{el} = \epsilon_0 E^2$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

POTENZA ONDA EN



$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{el}}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \Sigma$$

$$\text{Diciamo } S = \text{vettore di Poynting} = \epsilon_0 c E^2 = \epsilon_0 c^2 E B = \frac{1}{\mu_0} c E B \quad \text{in forma vettoriale} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad [\vec{S}] = \frac{W}{m^2}$$

$$\vec{S} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \hat{k}, \quad \vec{P} = \vec{S}_x (\vec{S})$$

$$I = \text{intensità} = c |\vec{S}| \approx \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_0 E^2 \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

## 6.5 Spettro onde Elettromagnetiche

$$N = \text{cost.} \quad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

	onde terziane	$\lambda \geq 0,3 \text{ m}, \nu \leq 10^9 \text{ Hz}$	onde radio
	micronde	$3 \text{ mm} \leq \lambda \leq 0,3 \text{ m}, 10^9 \leq \nu \leq 10^6 \text{ Hz}$	bluetooth, wifi, ...
	infrarossi	$0,78 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 3 \text{ mm}, 10^4 \leq \nu \leq 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	
	visibile	$0,38 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,78 \mu\text{m}$	
	UV	$6 \cdot 10^{-10} \text{ m} \leq \lambda \leq 0,38 \mu\text{m}$	
	raggi X	$6 \cdot 10^{-12} \text{ m} \leq \lambda \leq 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	
	raggi g	$\lambda \leq 6 \cdot 10^{-12} \text{ m}$	