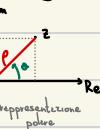
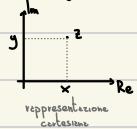


# Segnali e Sistemi

# 0. Prerequisiti

## 0.1 Numeri Complessi

$z \in \mathbb{C} = x + jy$  dove  $x = \operatorname{Re}[z]$ ,  $y = \operatorname{Im}[z]$ ,  $j^2 = -1$



$$z = x + j\beta = \rho \cos \theta + j \rho \sin \theta = \rho e^{j\theta}$$

oss  $|z|^2 = z \bar{z}$

### 0.1.1 Formule di Eulero

$$e^{j\theta} = \text{series di Taylor}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

## 0.2 Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta^n = \frac{1-\delta^N}{1-\delta}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1-\delta} \quad \text{se } |\delta| < 1$$

# 1. Segnali

Def Un segnale a tempo continuo è una funzione del tempo a valori complessi.

$$s: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Def Un segnale a tempo discreto è una successione a valori complessi.

$$s: I \subseteq \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

oss In Analisi viene usata la notazione  $s_n$ , in Segnali e Sistemi si preferisce utilizzare  $s(n)$

oss È sempre possibile estendere il dominio di un segnale  $s(t)$  ad  $\mathbb{R}$ , e quello di  $s(n)$  a  $\mathbb{Z}$ .

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} s(t) & \text{se } t \in I \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus I \quad (t \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

D'ora in poi considereremo tutti i segnali come definiti su  $\mathbb{R} \cup \mathbb{Z}$ .

oss I segnali possono avere domini e codomini multidimensionali, tuttavia non saranno trattati nel corso.

## CONVERSIONI CONTINUO-DISCRETO

**oss** Dato un segnale  $s(t)$  dominio continuo, l'operazione di campionamento ritorna un segnale a dominio discreto.



**oss** L'interpolazione è l'operazione inversa del campionamento, ritorna un segnale a dominio continuo a partire da un segnale a dominio discreto.



## SEGNALI DIGITALI

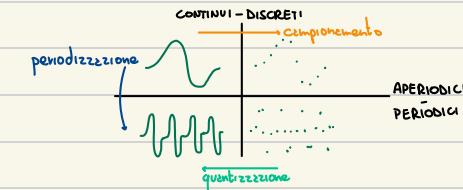
**Def** Un segnale si dice ad ampiezze discrete se il codominio ha cardinalità finita

$$C = \{c_0, c_1, \dots\}$$

**oss** La quantizzazione è un'operazione istantanea che fornisce un segnale a valori discreti a partire da un segnale a valori continui.



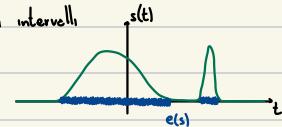
**oss** Campionamento e quantizzazione permettono la conversione di un segnale da analogico a digitale.



## ESTENSIONE E DURATA

**Def** Dato un segnale  $s(t)$  diciamo estensione  $e(s)$  il più piccolo intervallo  $[t_s, T_s]$  o unione di intervelli dove il segnale è attivo, ovvero  $\neq 0$

$$e(s) = \bigcup [t_i, t_{i+1}]$$



**Def** Diciamo durata la lunghezza dell'estensione.  $D(s) = T_s - t_s$  se  $e(s)$  è un unico intervallo.

**oss**  $D(s)$  può essere finito o infinito

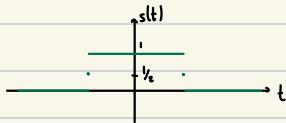
**Def** Un segnale con estensione  $e(s) \subseteq [0, +\infty)$  si dice causale.

## REGOLA DELL'EQUIVALENTE

Nei punti di discontinuità utilizzeremo le regole dell'equivalente:

- se in  $t_i$ ,  $s(t)$  ha un punto di discontinuità il valore in quel punto sarà uguale alla media tra il limite destro e sinistro.

$$s(t_i) = \frac{1}{2} [s(t_i^+) + s(t_i^-)]$$

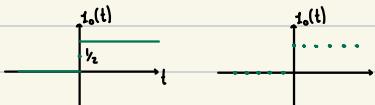


**oss** Definire così le discontinuità è utile per assicurare l'invertibilità delle trasformate.

## 1.1 Segnali Notevoli

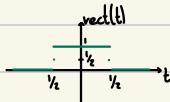
### GRADINO UNITARIO

$$u_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > x \\ 0 & \text{se } t \leq x \end{cases}$$



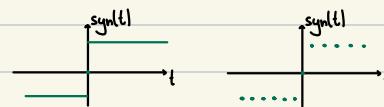
### RECT

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



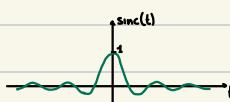
### SIGN

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



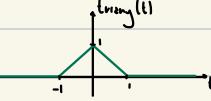
### SINC

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



### TRIANG

$$\text{triang}(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$$



## 1.2 Parametri Riassuntivi di un Segnale

### 1.2.1 Area e Media

Forniscono un'informazione su come è distribuita la funzione rispetto all'asse del tempo.

$$A_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt \quad m_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \quad = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^N s(n)$$

### PROP

Sia un segnale  $s(t)$

- se  $A_s < +\infty \Rightarrow m_s = 0$

- se  $m_s < +\infty$  e  $m_s \neq 0 \Rightarrow A_s = +\infty$

### 1.2.2 Energia e Potenza

Sono definizioni che derivano dall'elettronica, specificano potenza ed energia dissipata da un resistore.

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad P_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)|^2 \quad = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^N |s(n)|^2$$

## PROP

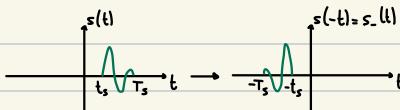
Sia un segnale  $s(t)$

- se  $E_s < +\infty \Rightarrow P_s = 0$

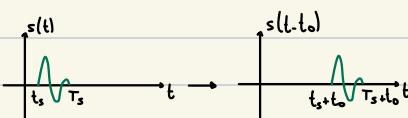
- se  $P_s < +\infty$  e  $m_s \neq 0 \Rightarrow E_s = +\infty$

## 1.3 Trasformazioni

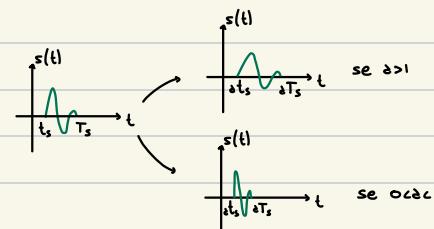
### 1.3.1 Ribaltamento



### 1.3.2 Traslazione



### 1.3.3 Scala



### 1.3.4 Traslazione e Scala



$$y(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right), \quad s(t) = y(t-t_0) = x\left(\frac{t-t_0}{\alpha}\right)$$

Oss Si preferisce questo  $\Rightarrow$  shift  $\rightarrow$  scale perché così lo è la traslazione reale.

### 1.3.5 Segnali Discreti

Il ribaltamento e la traslazione sono ben definite nel discreto.

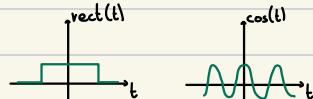
Non è però possibile definire lo scorrimento.

## 1.4 Simmetrie

### 1.4.1 Simmetrie Pari e Dispari

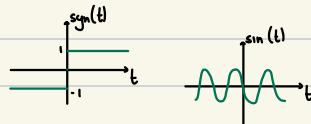
**Def** Un segnale si dice simmetrico pari se  $s(t) = s(-t)$

Oss Un segnale pari è invariante al ribaltamento



**Def** Un segnale si dice simmetrico disperi se  $s(t) = s(-t)$

**Prop**  $s(t)$  è disperi  $\Rightarrow s(0) = 0, A_s = m_s = 0$



**Prop** È possibile scomporre ogni segnale in una componente pari e una disperi in modo univoco.

$$s(t) = s_p(t) + s_o(t)$$

$$\text{dove } s_p(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t)$$

$$s_o(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s(-t)$$

$$\text{Dim } s_p(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t) = s_p(t) \quad \checkmark$$

$$-s_o(t) = -\frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t) = s_o(t) \quad \checkmark$$

**Oss** L'osservazione deriva dall'intuizione di Fourier, se posso rappresentare i segnali come somme di sin/cos

Allora le somme di cos si raggruppano in  $s_p(t)$  e la parte sin in  $s_o(t)$ .

#### 1.4.2 Parte Reale e Immaginaria

**Def** Un segnale è puramente reale se  $s(t) = \bar{s}(t)$

**Def** Un segnale è puramente immaginario se  $s(t) = -\bar{s}(t)$

$$s_{re}(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}\bar{s}(t)$$

$$s_{im}(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}\bar{s}(t)$$

#### 1.4.3 Simmetria Hermitiana e Anti-Hermitiana

**Def** Un segnale si dice simmetrico hermitiano se

$$s(t) = \bar{s}(-t) \Rightarrow s_{re}(t) + s_{im}(t) = s_{re}(-t) - s_{im}(-t) \quad (\text{parte reale pari, parte immaginaria disperi})$$

**Def** Un segnale si dice simmetrico anti-hermitiano se

$$s(t) = -\bar{s}(-t) \Rightarrow s_{re}(t) + s_{im}(t) = -s_{re}(-t) + s_{im}(-t) \quad (\text{parte reale disperi, parte immaginaria pari})$$

$$s_h(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}\bar{s}(-t)$$

$$s_d(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}\bar{s}(-t)$$

**Oss** Se un segnale è hermitiano ha parte reale pari e parte immaginaria disperi

**Oss** Se un segnale è anti-hermitiano ha parte reale disperi e parte immaginaria pari

#### 1.3 Segnali Periodici Continui

**Def** Un segnale si dice periodico se  $s(t+T_p) = s(t)$  per qualche valore  $T_p$  detto il periodo del segnale.

**Prop** Un segnale periodico è univocamente definito dal suo valore nell'intervallo  $(0, T_p]$

**Oss** Se un segnale ha estensione limitata nel tempo è possibile ripeterlo e ottenere un segnale periodico.



**Def** Il minimo periodo è il più piccolo valore di  $T_p$  tale che  $s(t+T_p) = s(t)$

**ES** - periodo di segnali composti:

$$s(t) = \underbrace{2\cos(18\pi t + \phi)}_{T_1=1} - \underbrace{\sin(12\pi t + \phi)}_{T_2=1/6}$$

cerchiamo  $m, k$  t.c.  $T_p = mT_1 = kT_2$

$$\frac{m}{k} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{1} = 3$$

quindi  $m=3$   $k=1$ .

**oss** Il valore  $T_p$  ottenuto non è necessariamente il periodo minimo.

**oss** Se  $\frac{m}{k}$  è irrazionale allora il segnale  $s(t)$  non è periodico

### 1.3.1 Area, Media, Energia e Potenza

Osserviamo che l'area e l'energia di un segnale periodico non sono significative, infatti,

$$A_s = \lim_{N \rightarrow \infty} 2NA_s(T_p) = +\infty \quad \text{e lo stesso vale per l'energia.}$$

Invece media e potenza mantengono il loro significato e possono essere calcolati su un solo periodo.

$$m_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2NA_s(T_p)}{2NT_p} = \frac{A_s(T_p)}{T_p} \quad \text{e lo stesso vale per la potenza.}$$

$$A_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) dt \quad m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p}$$

$$E_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2 dt \quad P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p}$$

**oss** media e potenza sono corrette anche se  $T_p$  non è il periodo minimo.

### 1.4 Segnali Periodici Discreti

Sono segnali tali che  $s(n+N) = s(n)$

Sono segnali univocamente definiti da un insieme finito di campioni.

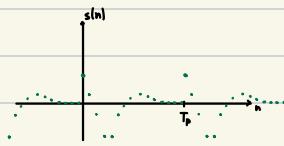
Si possono scrivere in un vettore in memoria.

#### 1.4.1 Area, Media, Energia e Potenza

Similmente ai segnali periodici continui:

$$A_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} s(n) \quad m_s = \frac{A_s(N)}{N}$$

$$E_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |s(n)|^2 \quad P_s = \frac{E_s(N)}{N}$$



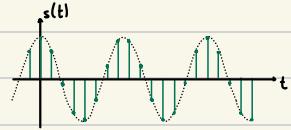
### 1.4.2 Sinusoidi Campionate

Una sinusode discreta  $s(n) = \cos(2\pi f_0 n T)$  per essere periodica deve valere:

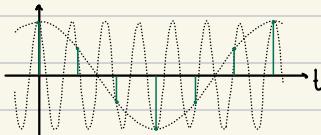
$$s(n+N) = s(n) \Rightarrow \cos(2\pi f_0 n T + 2\pi f_0 N T) = \cos(2\pi f_0 n T) \Rightarrow 2\pi f_0 N T = k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f_0 T = \frac{k}{N} \in \mathbb{Q} \Rightarrow s(n) \text{ è periodica di periodo } N.$$

$$\text{se } \frac{k}{N} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow s(n) \text{ non è periodico.}$$



### AMBIGUITÀ DI FREQUENZA



Le due sinusoidi continue hanno gli stessi valori quando campionate, in particolare avviene se:

$$\cos(2\pi(f_0 + f_p)nT) = \cos(2\pi f_0 nT + 2\pi f_p nT) = \cos(2\pi f_0 nT)$$

se  $f_p = \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots, \frac{3}{T}, \dots$   $\Rightarrow 2\pi f_p nT = 2\pi n$

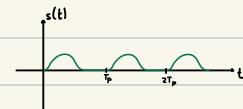
### ES

$$\cos\left(\frac{16}{3}\pi n\right) = \cos\left(\frac{16}{3}\pi n - 2\pi n\right) = \cos\left(\frac{10}{3}\pi n\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi n\right) \quad (\text{quando campionato})$$

### 1.6 Ripetizione Periodica

Sia  $s(t)$  un qualunque segnale, si può rendere periodico di periodo  $T_p$  ripetendolo ogni tempo  $T_p$

$$\text{rep}_{T_p}(s(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t-kT_p)$$



### DIM

$$\text{rep}_{T_p}(s(t+T_p)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t-kT_p+T_p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t-(k-1)T_p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(t-mT_p) = \text{rep}_{T_p}(s(t))$$

pongo  $m=k-1$

### PROP

- Linearietà:  $\text{rep}_{T_p}(s(t)+b(t)) = \text{rep}_{T_p}(s(t)) + \text{rep}_{T_p}(b(t))$

- Sia  $u(t) = \text{rep}_{T_p}(s(t))$

- Ribaltamento:  $\text{rep}_{T_p}(s(-t)) = u(-t)$

- Traslazione:  $\text{rep}_{T_p}(s(t-t_0)) = u(t-t_0)$

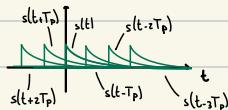
- Scale:  $\text{rep}_{T_p}(s(\frac{t}{s})) = u(\frac{t}{s})$

### ES

Sia  $s(t) = f_0(t) e^{-at}$ ,  $a > 0$ . Trovare  $u(t) = \text{rep}_{T_p}(s(t))$



$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t-kT_p)$$



$u(t)$  è periodico di periodo  $T_p$ , studio la funzione in  $(0, T_p)$   
 se  $t \in (0, T_p) \rightarrow u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k t / T_p} = e^{j2\pi t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkT_p} = e^{j2\pi t} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-jmT_p} = \frac{e^{j2\pi t}}{1 - e^{-j2\pi T_p}}$   
 pongo  $m = -k$

$$\text{se } t \in (T_p, 2T_p) \rightarrow u(t) = \frac{e^{-j2\pi(t-T_p)}}{1 - e^{-j2\pi T_p}}$$



## 1.7 Impulsi Ideali

### 1.7.1 Delta di Kronecker

$$\text{estensione: } \delta(\zeta) = |\alpha|$$

$$\text{area: } A_\delta = 1$$

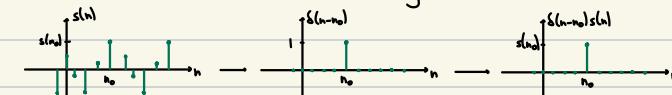
$\delta$  è simmetrica pari

$$\delta_0(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m)$$



### PROPRIETÀ RIVELATRICE

Il delta fa da maschera e ci rivela un singolo valore di  $s(n)$

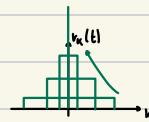


$$\text{quindi } \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \delta(n-n_0) = s(n_0)$$

### 1.7.2 Delta di Dirac

Sia il rettangolo di altezza  $K$  e area 1:  $r_K(t) = K \text{rect}(kt)$

$$\delta(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} r_K(t)$$



### PROP

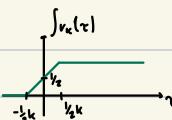
$$\text{estensione: } \delta(\zeta) = |\alpha|$$

$$\text{area: } \int_{-\infty}^{\infty} r_K(t) dt = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_K(t) dt = 1$$

qui si studiano  
al corso di matematica

$s(t)$  è simmetrica pari

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^t s_K(\tau) d\tau$$



quindi, all'inverso:  $s(t) = \frac{d s_0(t)}{dt}$

### PROPRIETÀ RIVELATRICE

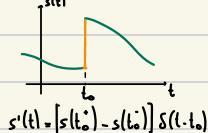
Il delta di Kronecker fa da maschera e ci rivela un singolo valore di  $s(t)$



quindi  $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s(t-t_0) dt = s(t_0)$

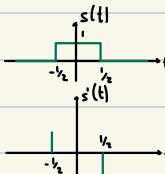
### DERIVATE GENERALIZZATE

È possibile utilizzare il delta di Kronecker per definire la derivata di un segnale nel punto di discontinuità.



ES

$s(t) = \text{rect}(t)$ .



$$s'(t) = (1-0)\delta(t+1/2) + (0-1)\delta(t-1/2) = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2)$$

PROP

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta^{(k)}(t-t_0) dt = (-1)^k s^{(k)}(t_0)$$

DIM

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta^{(k)}(t-t_0) dt \stackrel{=?}{=} s(t) \delta^{(k)}(t-t_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} s'(t) \delta^{(k-1)}(t-t_0) dt \stackrel{=?}{=} [\dots] \stackrel{k\text{-volte}}{=} (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} s^{(k)}(t) \delta(t-t_0) dt = (-1)^k s^{(k)}(t_0)$$

## 2. Sistemi

I sistemi trasformano segnali in altri segnali. In particolare un sistema  $S$  è una funzione che ha per dominio e codominio un insieme di segnali.

$$S: s_m \rightarrow s_{out}$$

Def Se  $s_m$  e  $s_{out}$  sono insiemi di segnali continui allora  $S$  è detto continuo, se sono insiemi di segnali discreti si dice discreto, se un insieme contiene segnali continui e uno discreti si dice ibrido.

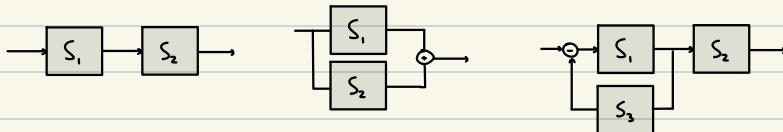
**Def** Un sistema  $S$  si dice invertibile se esiste un sistema  $S^{-1}$  tale che

$$\text{dato } y(t) = S(x(t)) \text{ allora } x(t) = S^{-1}(y(t))$$

**Def** Un sistema  $S$  si dice reale se per ogni ingresso reale ritorna un'uscita reale

**Def** Una funzione  $x$  si dice autofunzione se  $S(x(t)) = \lambda x(t)$ , dove  $\lambda$  è il suo autovettore

È possibile connettere i sistemi in vari modi, serie, parallelo e retroazione.



## 2.1 Memoria del Sistema

**Def** Un sistema si dice statico o istantaneo se l'uscita al tempo  $t$  dipende solamente dal valore d'ingresso all'istante  $t$

**Def** Un sistema si dice causale se l'uscita al tempo  $t$  dipende da almeno un valore  $x(\tau)$  con  $\tau < t$  e non dipende da alcun  $x(t)$  con  $t > t$ .

**Def** Un sistema si dice anti-causale se l'uscita al tempo  $t$  dipende da almeno un valore  $x(t)$  con  $t < t$  e non dipende da alcun  $x(\tau)$  con  $\tau < t$ .

**Def** Un sistema si dice a memoria finita se l'uscita al tempo  $t$  dipende da  $x(\tau)$  con  $t_0 < \tau < t$ ,  $t_0, t_0 < \infty$

## 2.2 BIBO Stabilità

Un sistema si dice BIBO (Bounded Input-Bounded Output) stabile se  $\forall x(t) \text{ t.c. } \|x(t)\| < L_x \text{ allora } \|S(x(t))\| < L_y$

ES

$$y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(u) du$$

$$\|y(t)\| \leq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \|x(u)\| du \leq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} L_x du = L_x$$

É BIBO STABILE

ES

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

$$\text{se } x(u) = u \text{ allora } y(t) = \int_{-\infty}^t u du = \frac{1}{2} t^2 \quad \text{NON È BIBO STABILE}$$

## 2.3 Sistemi LTI

**Def** Un sistema si dice lineare se  $a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{S} a y_1(t) + b y_2(t)$

**Def** Un sistema si dice a tempo invariante se  $x(t) \xrightarrow{S} y(t) \xrightarrow{\tau} y(t-\tau)$   
 $x(t) \xrightarrow{S} x(t-t_0) \xrightarrow{S} y(t-t_0)$

ES

$$\text{Se } y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(u) du$$

$$\text{se applico } S \text{ e poi traslo di } t_0 \quad z(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-t_0-T}^{t-t_0+T} x(u) du$$

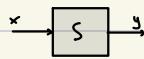
$$\text{se traslo di } t_0 \text{ e poi applico } S \quad S(x(t-t_0)) = \frac{1}{2T} \int_{t-t_0-T}^{t-t_0+T} x(u-t_0) du = \frac{1}{2T} \int_{t-t_0-T}^{t-t_0+T} x(v) dv$$

pongo  $v = u - t_0$

I risultati sono uguali  $\Rightarrow S$  è tempo-invariante.

### 3. Convoluzione

Lo studio delle risposte dei sistemi LTI ci suggerisce una nuova operazione.



$$y(n) = S(x(n)) = S\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) S(\delta(n-k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) g(n-k)$$

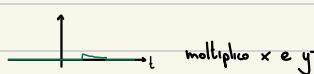
proprietà rivoluzionica  
intervalli  
g risposta impulsiva di S

$$y(t) = S(x(t)) = S\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) \delta(t-u) du\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) S(\delta(t-u)) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) g(t-u) du$$

**oss** La risposta impulsiva identifica univocamente un sistema LTI.

**Def** Vista l'importanza definiamo questa operazione con il nome di **convoluzione** e il simbolo  $*$ .

**ES**  $z = x * y$



$z$  al tempo  $t$  è l'integrale dell'ultimo grafico

#### 3.1 Proprietà

- $x * y = y * x$  commutatività  $\Rightarrow$  posso scegliere quale segnale voglio tenere fermo.
- $x * y * z = (x * y) * z = x * (y * z)$
- $(x+y) * z = x * z + y * z$
- $x * \delta = x$
- $\text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \text{triang}(t)$
- $A_{xy} = A_x A_y$  utile per verificare i calcoli

#### DIM

Si dimostrano le proprietà nel continuo, le dimostrazioni sono uguali per il discreto.

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u) y(u) du = y * x(t)$$

pongo  $u = b - u$       proprietà rivoluzionica

$$x * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \delta(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \delta(u-t) du = x(t)$$

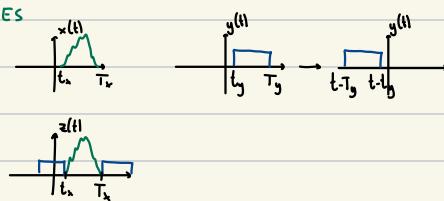
$\delta$  è simmetrica pari

$$A_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) du \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) dt \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(t-u) dt \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) A_y du = A_x A_y$$

scambio gli integrali

### 3.1.1 Estensione della Convoluzione

$$e(x * y) = [t_x + t_y, T_x + T_y] \quad \text{dove} \quad e(x) = [t_x, T_x], \quad e(y) = [t_y, T_y]$$



$$z(t) \neq 0 \quad \text{di} \quad t - t_0 = t_x + T_x \quad \& \quad T_x = t - T_y \Rightarrow t = t_x + t_y \quad \& \quad t = T_x + T_y$$

### 3.1.2 Proprietà di Traslazione Temporale

$$s(t-t_0) = s * \delta_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u-t_0) s(t-u) du$$

$$s(n-n_0) = s * \delta_{n_0}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k-n_0) s(n-k)$$

PROP

$$x(t-t_0) * y(t-t_1) = x * \delta_{t_0} * y * \delta_{t_1}(t) = x * y * \delta_{t_0+t_1}(t) = x * y * \delta_{t_0+t_1}(t)$$

### 3.2 Convoluzione di Segnali Periodici

Se solamente uno dei due segnali nella convoluzione è periodico allora anche il risultato sarà periodico.

Se entrambi i segnali sono periodici (di periodi uguali o diversi) allora la loro convoluzione diverge.

Def La convoluzione circolare di due segnali di periodo  $T_p$  è definito come:

$$x *_{\text{circ}} y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(u) y(t-u) du$$

per segnali discreti periodici di periodo N:

$$x *_{\text{circ}} y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n-k)$$

OSS  $x *_{\text{circ}} y$  è periodico di periodo  $T_p$ .

PROP

Stesse proprietà della convoluzione, ma:

$$\begin{aligned} - x *_{\text{circ}} \text{comb} &= x \\ - x *_{\text{circ}} \text{comb}_{t_0} &= x(t-t_0) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{comb di periodo } T_p \end{array} \right.$$

### INTERPRETAZIONE

$$\text{Sia } x(t) = \text{rept}_{T_p} x_0(t) \quad \text{e} \quad y(t) = \text{rept}_{T_p} y_0(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } z(t) &= x *_{\text{circ}} y(t) \\ &= \text{rept}_{T_p} x_0 * y_0(t) \\ &= x * y_0(t) = y * x_0(t) \end{aligned}$$

DIM

$$\begin{aligned}
 x_{\text{circ}} y(t) &= \int_0^{T_p} y(t-u) x(u) du = \int_0^{T_p} y(t-u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_o(u-kT_p) du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_p} x_o(u-kT_p) y(t-u) du = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-(k-1)T_p}^{-kT_p} x_o(u) y(t-u-T_p) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(u) y(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_o(t-u-kT_p) du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(u) y_o(t-u-kT_p) du = \\
 &\stackrel{\text{pongo } u=u-kT_p}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(u) y_o(u) du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(u) y_o(u) du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{\text{rep}} T_p y_o = \\
 &= x_{\text{rep}} T_p x_o * y_o(t)
 \end{aligned}$$

x = rep<sub>T<sub>p</sub></sub> x<sub>o</sub>  
 (K-1)T<sub>p</sub>  
 -K<sub>T<sub>p</sub></sub>  
 Integrale sul periodo k  
 Somma  
 Integrale su tutti i periodi

### 3.3 Convoluzione nei Sistemi LTI

Come visto in precedenza, diciamo risposta impulsiva  $y(t)$  l'uscita corrispondente al delta di Dirac o Kroneck.



PROP

$$g(t) \text{ aperiodico} \Rightarrow \begin{cases} x(t) \text{ aperiodico} \Rightarrow y(t) \text{ aperiodico} \\ x(t) \text{ periodico} \Rightarrow y(t) \text{ periodico} \end{cases}$$

- Il sistema è reale  $\Leftrightarrow g$  è a valori reali.
- Il sistema è causale  $\Leftrightarrow g$  è causale.
- Il sistema è BIBO stabile  $\Leftrightarrow y$  è assolutamente sommabile o integrabile.

OSS proprietà valide solo per i sistemi LTI.

DIM

- se  $g(t)$  è causale



$$\text{Allora } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) g(t-u) du \quad \text{graph: } \begin{array}{c} g(t-u) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x(u) \quad \quad \quad x(u)g(t-u) \end{array} \quad \forall t$$

-  $L_g < \infty \Rightarrow$  il filtro è BIBO stabile

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) g(t-u) du \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(u)| |g(t-u)| du \leq L_x \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-u)| du = L_x \int_{-\infty}^{+\infty} |g(v)| dv = L_x L_g$$

disegnando la funzione  
 |x(-)| ≤ L<sub>x</sub>

il filtro è BIBO stabile  $\Rightarrow L_g = \infty$

Sia per esempio  $L_g = \infty$  e un input bounded  $|x(t)| = 1 \quad \forall t$ , ad esempio si ha:

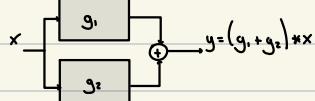
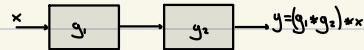
$$x(t) = e^{j\varphi(t)} \quad g(t) = g(t)e^{j\psi(t)}$$

per  $t=0$  allora:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) g(0-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} g(-\omega) \cdot |g(\omega)| e^{-j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)| d\omega = \|g\|_2 = \infty$$

sistema non è BIBO è un assurdo rispetto alle ipotesi.

### 3.3.1 Serie e Parallello



**OSS** Per lo studio delle retroazioni serve necessario utilizzare le trasformate di Fourier.

### 3.3.2 Autofunzioni e Autovalori

Esiste una classe di segnali,  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$  che sono autofunzioni per i filtri BIBO stabili:



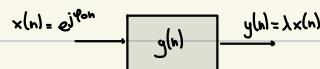
DIM

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) x(t-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega_0(t-\omega)} d\omega = e^{j\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-j\omega_0 \omega} d\omega}_{\lambda = G(j\omega_0)}$$

Se il filtro è BIBO stabile allora  $G(j\omega_0)$  converge, perché  $|G(j\omega_0)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)| d\omega = \|g\|_2$

$$\begin{aligned} &\text{disegno: lunghezza triangolare} \\ &+ |e^{j\omega_0 \omega}| = 1 \end{aligned}$$

similmente nel discreto:



$$y(n) = \underbrace{e^{j\omega_0 n}}_{x(n)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) e^{-j\omega_0 k} \quad \lambda = G(e^{j\omega_0})$$

## 3. Serie di Fourier

Vogliamo estendere ad un insieme più grande i segnali che, come  $e^{j\omega_0 t}$ , sono semplici da realizzare perché autofunzioni.

Per fare questo vogliamo scrivere  $x(t)$  come una combinazione lineare di esponenziali complessi a fase lineare (sinusoidi).

Ovvero, dato un segnale  $x(t)$  periodico di periodo  $T_p$ , vogliamo trovare  $X_k$  t.c.  $x(t) = \sum_k X_k e^{jk\omega_0 t}$  con  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ ?

Per fare questo ci serve una base ortogonale per lo spazio contenente tutti i segnali periodici.

### PRODOTTO INTERNO - RICHIAMO ALGEBRA LINEARE

$\langle x, y \rangle : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$  dove  $S$  è uno spazio di Hilbert, un insieme di segnali

PROP -  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \bar{\beta} \langle y, z \rangle$$

$$\|\langle x, y \rangle\| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \text{disegno: lunghezza triangolare}$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \text{disegno: lunghezza Cauchy-Swartz}$$

$$\|x\|^2 = 0 \iff x = 0$$

## PRODOTTO INTERNO VETTORI COMPLESSI

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i$$

proiezione di  $x$  su  $y$



$$x_y = \frac{y}{\|y\|} \langle x, \frac{y}{\|y\|} \rangle = y \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$$

scomposizione rispetto ad una base ortogonale  $b_i$ : ( $\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$ )

$$x = \sum_i b_i \frac{\langle x, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}$$

## PRODOTTO INTERNO DEI SEGNAI PERIODICI

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^{T_p} x(t) y(t) dt$$

proiezione di  $x$  su  $y$

$$x_y(t) = y(t) \frac{\langle x(t), y(t) \rangle}{\|y(t)\|^2}$$

scomposizione rispetto ad una base ortogonale  $b_i$ :

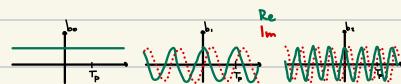
$$x(t) = \sum_k b_k(t) \frac{\langle x(t), b_k(t) \rangle}{\|b_k(t)\|^2}$$

Definendo prodotto interno e norma abbiamo costruito uno spazio di Hilbert dei segnali periodici.

## BASE ORTOGONALE DELLO SPAZIO DEI SEGNAI PERIODICI

Possiamo usare come base dello spazio l'insieme di segnali:

$$b_n(t) = e^{j\omega_0 t} \quad \text{dove } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} \quad (\text{oss } b_n(t) \text{ ha periodo } T_p(n) = \frac{T_p}{|n|})$$



DIM

$$\langle b_i(t), b_l(t) \rangle = \int_0^{T_p} e^{j\omega_0 i t} e^{-j\omega_0 l t} dt = \int_0^{T_p} e^{j\omega_0 i(l-i) t} dt = \begin{cases} T_p & \text{se } i=l \\ 0 & \text{se } i \neq l \end{cases} \quad \text{oss questo è l'energia di } b_i$$

oss La dimostrazione che l'insieme  $b_k(t)$  genera lo spazio dei segnali non è banale. Per gli scopi dell'ingegneria è sufficiente averne un'idea intuitiva.

Siamo quindi riusciti a scomporre il generico segnale periodico  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega_0 n t}$

Ricordando che per sistema LTI:  $x(t) = e^{j\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \lambda x(t)$  con  $\lambda = G(j\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{j\omega_0 \omega} d\omega$

Per linearità del filtro abbiamo che:  $x(t) = \sum_k A_k e^{j\omega_0 k t} \rightarrow y(t) = \sum_k [A_k G(j\omega_0)] e^{j\omega_0 k t}$

oss Il risultato di un filtro applicato al segnale è una moltiplicazione.

### 3.1 Coefficienti di Fourier

Sia  $s(t)$  un segnale periodico di periodo  $T_p$

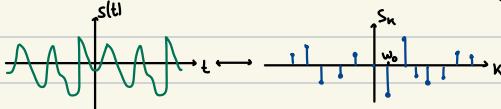
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j\omega_0 k t}$$

dove:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$S_k = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-j\omega_0 k t} dt}{\int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2 dt}$$

Siamo così passati dal dominio del tempo (continuo, periodico) a quello delle frequenze (discreto, aperiodico):



#### 3.1.1 Condizioni di Invertibilità

Quali sono le condizioni per cui  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j\omega_0 k t}$  converge a  $s(t)$ ?

Un segnale ha serie di Fourier che converge se soddisfa una di queste proprietà:

- Assolutamente integrabile
  - Ha valore finito di discontinuità, di valore finito
  - Ha un numero finito di max e min (in un periodo)
  - Ha energia finita (in un periodo)
  - Ha un numero finito di zeri (in un periodo)
  - Tutte le combinazioni lineari delle classi sopra citate
- condizioni di Dirichlet
- condizioni di Riesz-Fisher
- condizioni di Dirac

oss Dal nostro punto di vista si potrà sempre trovare la serie di Fourier di un segnale perché utilizzeremo solo segnali che soddisfano le proprietà.

oss La serie di Fourier non è detto che converga  $\forall t$  al segnale.

Tuttavia converge sempre in media quadratica.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| s(t) - \sum_{k=-N}^{N} S_k e^{j\omega_0 k t} \right\|_2 = 0$$

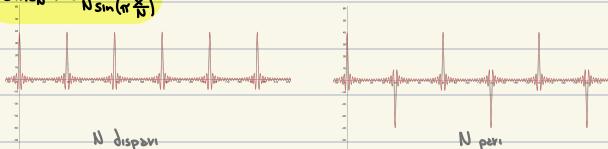
oss Il fenomeno di Gibbs avviene ogni qualvolta si incontri una discontinuità



### 3.1.2 Risultati Utili

dominio del tempo	dominio di Fourier
costante 1	$\delta(k)$ delta
comb $\text{rep}_{T_p} \delta(t)$	$\frac{1}{T_p}$ costante
$\exp e^{j\omega_m t}$	$\delta(k-m)$ delta
comb $\text{rep}_{T_p} \delta(t-t_0)$	$\frac{1}{T_p} e^{jk\omega_0 t_0}$ exp
rect $\text{rep}_{T_p} \text{rect}(\frac{t}{T_p})$	$\text{sinc}(k)$ sinc
sinc $N \text{sinc}_N(\frac{nt}{T_p})$	$\text{rect}(\frac{k}{N})$ rect
$\cos(n\omega_0 t + \phi_0)$	$\frac{1}{2} e^{j\phi_0} \delta(k-n) + \frac{1}{2} e^{-j\phi_0} \delta(k+n)$

dove  $\text{sinc}_N(t) = \frac{\sin(\pi t)}{N \sin(\pi t/N)}$



### 3.1.3 Simmetrie

dominio del tempo	dominio di Fourier
ribaltamento $s(-t)$	$S_{-k}$
conjugato $\bar{s(t)}$	$\bar{S}_k$
simmetrico pari $s(t) = s(-t)$	$S_k = S_{-k}$ pari
dispari $s(t) = -s(-t)$	$S_k = -S_{-k}$ dispari
reale $s(t) = \bar{s(t)}$	$S_k = \bar{S}_{-k}$ Hermitiana
reale+pari $s(t) = \bar{s(t)} = s(-t)$	$S_k = \bar{S}_{-k} = S_{-k}$ reale+pari
reale+dispari $s(t) = \bar{s(t)} = -s(-t)$	$S_k = \bar{S}_{-k} = -S_{-k}$ immagine reale+dispari

DIM

- ribaltamento  $\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(-t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-t_0}^{-t_0-T_p} s(u) e^{j\omega_0 u} du = S_{-k}$

pongo  $u = -t$

- conjugato  $\frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) \bar{e}^{-j\omega_0 t} dt = \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{j\omega_0 t} dt \right)^* = \bar{S}_k$

### 3.1.4 Proprietà

dominio del tempo	dominio di Fourier
linearità $a x(t) + b y(t)$	$a X_k + b Y_k$
traslazione $x(t-t_0)$	$X_k e^{-j k \omega_0 t_0}$
moltiplicazione $x(t) e^{j m \omega_0 t}$	$X_{k-m}$
convoluzione $x *_{\text{tempo}} g(t)$	$T_p X_k Y_k$
prodotto $x(t) g(t)$	$X_k * Y_k$
derivate $\frac{dx(t)}{dt}$	$X_{k-1} j \omega_0$
valore medio	$m_x = X_0$
potenza	$P_x = E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  X_k ^2$

oss Fourier rende semplice la convoluzione

DIM

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-t_0) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(\omega) e^{-j k \omega_0 (\omega+t_0)} d\omega = \frac{1}{T_p} e^{-j k \omega_0 t_0} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(\omega) e^{-j k \omega_0 \omega} d\omega = X_k e^{-j k \omega_0 t_0}, \\ & \text{con } \omega = \omega - \omega_0 \\ & \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{j m \omega_0 t} e^{-j k \omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j \omega_0 (k-m)t} dt = X_{k-m} \\ & \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left( \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-\omega) y(\omega) d\omega \right) e^{-j k \omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_p} y(\omega) \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-\omega) e^{-j k \omega_0 t} dt \right) d\omega = \int_{t_0}^{t_0+T_p} y(\omega) \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_0-\omega}^{t_0+T_p} x(z) e^{-j k \omega_0 (z-\omega)} dz \right) d\omega = \int_{t_0}^{t_0+T_p} y(\omega) X_k e^{-j k \omega_0 \omega} d\omega = T_p X_k Y_k \\ & \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) y(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j n \omega_0 t} \right) y(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \left( \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j n \omega_0 (k-n)t} y(t) dt \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n Y_{k-n} \end{aligned}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j k \omega_0 t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k j \omega_0 e^{j k \omega_0 t} \quad \text{quindi i coefficienti di Fourier sono } Y_k = X_k j \omega_0 k$$

oss il valore  $Y_0 = 0$  è prescindibile da  $X_0$ , il valore è quindi perso e non è possibile invertire  $Y_k$  in  $X_k$ .

$$X_k = \begin{cases} \frac{Y_k}{j k \omega_0} & k \neq 0 \\ m_x & k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & X_0 = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) dt = m_x \quad \text{per definizione} \\ & P_x = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k e^{j k \omega_0 t}|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \cdot \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} |e^{j k \omega_0 t}|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \cdot \frac{1}{T_p} \end{aligned}$$

### ES IMPORTANTE

Trovare la serie di Fourier di  $s(t) = \frac{3}{5} \frac{\sin(\pi t)}{\sin(\frac{\pi}{5} t)}$

$$s(t) = \frac{3}{5} \frac{e^{j \pi t} - e^{-j \pi t}}{e^{j \frac{\pi}{5} t} - e^{-j \frac{\pi}{5} t}} = \frac{3}{5} \frac{e^{j \pi t}}{e^{j \frac{\pi}{5} t}} \frac{1 - e^{-j 2 \pi t}}{1 - e^{-j \frac{2 \pi}{5} t}} = \frac{3}{5} \pi^2 \frac{1 - \delta^5}{1 - \delta} = \frac{3}{5} \pi^2 \sum_{k=0}^4 \delta^k = \frac{3}{5} \pi^2 (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4) = \frac{3}{5} (\delta^2 + \delta^{-1} + 1 + \delta + \delta^2) = \frac{3}{5} \sum_{k=2}^3 e^{j \frac{2 \pi}{5} k t}$$

pongo  $\delta = e^{j \frac{2 \pi}{5} t}$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{T_p} \Rightarrow T_p = 5$$

$$S_K = \begin{cases} \frac{3}{5} & K = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\text{posso anche scegliere } \omega_0 = \frac{\pi}{T_p} \text{ allora } S_k = \begin{cases} \frac{3}{5} & k = -4, -2, 0, 2, 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\Rightarrow T_p = 10$$

Le serie di Fourier e il periodo  $T_p$  sono diversi, ma  $s(t)$  si ricostruisce ugualmente.

## 4. Trasformata di Fourier

Dalla definizione di serie di Fourier spostando  $\frac{1}{T_p}$  si può arrivare a:

$$s(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{S}(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad \tilde{S}(jk\omega_0) = \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} s(t) e^{-jkt} dt$$



Se ingrandisco il periodo  $T_p \rightarrow \infty$  (includendo così i segnali aperiodici) allora  $\omega_0 \rightarrow 0$  e  $k\omega_0 = \omega$  per ogni valore di  $k$ .

Allora:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$



Siamo così passati dal dominio del tempo (continuo, aperiodico) a quello delle frequenze (continuo, aperiodico).

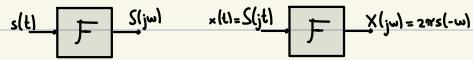
**oss** Le condizioni di invertibilità e la convergenza in valore assoluto è uguale alle serie di Fourier.

### 4.0.1 Risultati Utili

dominio del tempo		dominio di Fourier	
cost	1	$2\pi\delta(\omega)$	deltat
della	$s(t)$	*	cost
exp	$e^{j\omega t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	deltat
delta	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	exp
rect(t)		$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$	
sinc(t)		$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$	
$\cos(\omega_0 t + \phi)$		$\text{rect}^2(\omega - \omega_0) + \text{rect}^2(\omega + \omega_0)$	
triang(t)		$\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$	
$\sin^2(t)$		$\text{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$	
sgn(t)		$\frac{-2j}{\omega}$	
$\frac{1}{\pi t}$		$\text{sgn}(\omega)$	
$\frac{1}{t}$		$\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$	
$\frac{1}{2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t)$		$\text{s}(t)$	

## 4.1 Proprietà

### 4.1.1 Regola di Simmetria

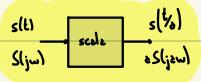


Applicare due volte la trasformata di Fourier ritorna una forma del segnale originale

ES

$$s(t) = \text{rect}(t) \xrightarrow{F} X(jt) = \sin(\frac{\pi t}{T}) \xrightarrow{F} X(jw) = 2\pi \text{rect}(w)$$

### 4.1.2 Regola di Scala



DIM

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\frac{t}{s}) e^{jw t} dt = s \int_{-\infty}^{\infty} s(u) e^{jwu} du = s S(jw)$$

pongo  $u = \frac{t}{s}$

### 4.1.3 Simmetrie

dominio del tempo	dominio di Fourier
ribaltamento	$s(-t)$
conjugato	$\overline{s(t)}$
simmetria pari	$s(t) = s(-t)$
dispari	$s(t) = -s(-t)$
reale	$s(t) = \overline{s(t)}$
reale+pari	$s(t) = \overline{s(t)} = s(-t)$
reale+dispari	$s(t) = \overline{s(t)} = -s(-t)$
	$S(jw) = S(-jw)$ pari
	$S(jw) = -S(-jw)$ dispari
	$S(jw) = \overline{S(-jw)} = S(-jw)$ Hermitiana
	$S(jw) = \overline{S(-jw)} = -S(-jw)$ immaginaria+dispari

DIM

- ribaltamento

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(-t) e^{jw t} dt = \int_{\infty}^{-\infty} s(u) e^{jw u} du = S(-jw)$$

pongo  $u = -t$

- conjugato

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)^* e^{jw t} dt = \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{jw t} dt \right)^* = \overline{S(-jw)}$$

$\overline{-(-jw)}$

#### 4.1.4 Proprietà

dominio del tempo	dominio di Fourier
linearità $a x(t) + b y(t)$	$a X(j\omega) + b Y(j\omega)$
traslazione $x(t-t_0)$	$X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$
modulazione $x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(j\omega - j\omega_0)$
convoluzione $x * y(t)$	$X(j\omega) Y(j\omega)$
prodotto $x(t) y(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int x(\omega) Y(\omega) d\omega$
derivate $\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
prodotto per t $t x(t)$	$j X'(j\omega)$
integrazione $\int_{-\infty}^t x(u) du$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi r A_x S(\omega)$
area $A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	
energia $E_x = \frac{1}{2\pi} \int  X(\omega) ^2 d\omega$	

oss Simmetrie e proprietà sono totalmente simili alle serie di Fourier

DIM - convoluzione ~~×~~ prodotto

$$x * y(t) \xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t-u) du \right) e^{-j\omega u} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u) e^{-j\omega u} dt du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \int_{-\infty}^{+\infty} y(z) e^{j\omega z} dz e^{-j\omega u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) Y(j\omega) e^{-j\omega u} du = X(j\omega) Y(j\omega)$$

pongo  $z = t-u$

$$x(t) y(t) \xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) e^{-j\omega t} dt}_{e^{-j\omega t}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j(\omega-\omega)t} dt du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) X(j(\omega-\omega)) d\omega = \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$$

DIM - area, energia

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = A_s$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} E_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega$$

$$S_{12}, z(t) = x(t) \overline{y(t)} \xrightarrow{F} Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * \overline{Y}(j\omega)$$

vista sopra

$$\text{Allora } A_z = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt = Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \overline{Y(-j(\omega-\omega))} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \overline{Y(j\omega)} d\omega$$

$$\text{Quindi } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \overline{Y(j\omega)} d\omega$$

$$\text{se } x(t) = y(t) = s(t) \text{ e quindi } X(j\omega) = Y(j\omega) = S(j\omega)$$

$$\text{Allora } \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad \checkmark$$

DIM - derivata

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

trasformata di  $x'$

$$X'(j\omega) = \frac{d}{d\omega} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{de^{j\omega t}}{d\omega} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -t x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow j X'(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} t x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow t x(t) \xrightarrow{\text{F}} j X'(j\omega)$$

OSS

$$x(t) \rightarrow X(j\omega) \quad x(t) = g(t) \rightarrow Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

Il valore per  $\omega=0$  è perso,  $Y(j0)=0$  per ogni valore di  $X(j0)$

$$\text{Per ottenere } X(j\omega) \text{ da } Y(j\omega): X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} + m_x 2\pi \delta(\omega)$$

DIM. Integrazione

$$S_{xz} x(t) = \int_{-\infty}^t y(t) dt = \int_{-\infty}^t y(\omega) z(-\omega-t) d\omega = y * z(t)$$

$$\text{Allora } X(j\omega) = Y(j\omega) \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} + \pi Y(j\omega) \delta(\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} + \frac{A_y}{2} \pi \delta(\omega)$$

OSS

Si noti che le due formule sono molto simili e che  $\frac{A_y}{2} = m_x$  se  $y = x'$ .

## 5. Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

La trasformata di Fourier discreta tratta segnali periodici e discreti nel dominio del tempo.

Per poterla analizzare riprendiamo la trattazione fatta in (3. Serie di Fourier) e la addizione di segnali discreti.

### PRODOTTO INTERNO DEI SEGNALI PERIODICI DISCRETI

$$c(x(n), y(n)) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(n) y(n)$$

proiezione di  $x$  su  $y$

$$x_y(n) = y(n) \frac{\sum x(n) y(n)}{\|y(n)\|^2}$$

scomposizione rispetto ad una base ortogonale  $b_i$ :

$$x(n) = \sum_k b_k(n) \frac{c(x(n), b_k(n))}{\|b_k(n)\|^2}$$

### BASE ORTOGONALE DELLO SPAZIO DEI SEGNALI DISCRETI PERIODICI

Possiamo usare, come base dello spazio l'insieme di segnali:

$$b_k(n) = e^{j2\pi \frac{k}{N} n} = e^{j\varphi_k n} \text{ dove } \varphi_k = 2\pi \frac{k}{N} \text{ (oss } b_k(n) \text{ ha periodo } N(k) = 2\pi k \text{)}$$

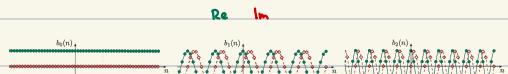
per  $k=0, \dots, N-1$  (oss è un numero finito di segnali)

Il generico segnale periodico discreto si può scomporre in  $x(n) = \sum_k A_k e^{j\varphi_k n}$

Ricordando che per sistemi LTI:  $x(n) = e^{j\varphi n} \rightarrow y(n) = \lambda x(n)$  con  $\lambda = G(j\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) e^{jk\varphi}$

Per linearità del filtro abbiamo che:  $x(n) = \sum_k A_k e^{j\varphi_k n} \rightarrow y(n) = \sum_k [A_k G(j\varphi_k)] e^{j\varphi_k n}$

OSS Il risultato di un filtro applicato al segnale è una moltiplicazione.



## 5.1 Coefficienti di Fourier

Sia  $s(n)$  un segnale periodico di periodo  $N$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$$

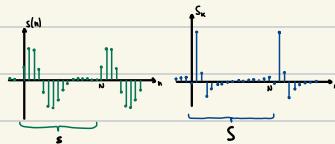
dove:

$$S_k = \frac{\langle s(n), b_k(n) \rangle}{\|b_k(n)\|^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$$

Siamo così passati dal dominio del tempo (discreto, periodico) a quello delle frequenze (discreto, periodico)

oss I due segnali (nel tempo e nelle frequenze) hanno lo stesso periodo  $N$ .

### 5.1.1 Computazione della Trasformata



È possibile descrivere i due segnali con 2 vettori finiti di  $N$  valori.

Esiste una matrice  $N \times N$  che mette in relazione i due vettori.  $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} & 1 \end{pmatrix} = \left( e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right)_{k,n=0,1,\dots,N-1}$

$$S = \frac{1}{N} F s \quad s = \overline{F} S$$

oss La moltiplicazione matriciale richiede normalmente  $N^2$  operazioni.

Tuttavia in questo caso esiste un algoritmo, detto Fast Fourier Transform (FFT), che sfrutta delle simmetrie nelle operazioni per ridurre il costo computazionale a  $N \log N$ .

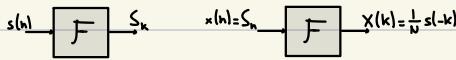
### 5.1.2 Risultati Utili

dominio del tempo		dominio di Fourier	
cost delle rep <sub>n</sub> δ(n)	1	rep <sub>n</sub> S(k) $\frac{1}{N}$	delta cost
exp delta rep <sub>n</sub> δ(n-m)	$e^{j\frac{2\pi}{N} n}$	rep <sub>n</sub> S(k-m) $\frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N} m}$	delta exp
rep <sub>n</sub> rect <sub>N</sub> ( $\frac{n}{N}$ ) $M \sin_{Nn}(\frac{M}{N})$	$\star$	$\frac{M}{N} \sin_{Nk}(\frac{M}{N} k)$ rep <sub>n</sub> rect <sub>N</sub> ( $\frac{k}{N}$ )	
$\cos(m \frac{2\pi}{N} n + \phi)$		$\frac{1}{2} e^{j\phi} \text{comb}_N(k-m) + \frac{1}{2} e^{j\phi} \text{comb}_N(k+m)$	

ricorda:  $\text{sinc}_N(t) = \frac{\sin(\pi t)}{N \sin(\pi \frac{t}{N})}$

## 5.2 Proprietà

### 5.2.1 Regola di Simmetria



Applicare due volte la DFT ritorna una forma del segnale originale

ES

$$s(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_k = \text{rep}_N s(k) \xrightarrow{n \in K} x(n) = S_n = \text{rep}_N s(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_k = \frac{1}{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right)$$

### 5.2.2 Simmetrie

dominio del tempo	dominio di Fourier
ribaltamento	$s(-n)$
coniugato	$\overline{s(n)}$
simmetria pari	$s(n) = s(-n)$
dispari	$s(n) = -s(-n)$
reale	$s(n) = \overline{s(-n)}$
reale+pari	$s(n) = \overline{s(n)} = s(-n)$
reale+dispari	$s(n) = \overline{s(n)} = -s(-n)$
	$S_k = S_{-k}$ per
	$S_k = -S_{-k}$ dispari
	$S_k = \overline{S_{-k}} = S_{-k}$ reale+pari
	$S_k = \overline{S_{-k}} = -S_{-k}$ immagine+dispari

DIM

$$\begin{aligned} \text{- ribaltamento: } & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(-n) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} s(m) e^{-j \frac{2\pi}{N} km} = S_{-k} \\ \text{- coniugato: } & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)^* e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right)^* = \overline{S_k} \end{aligned}$$

### 5.2.3 Proprietà

dominio del tempo	dominio di Fourier
linearità	$\alpha X_k + \beta Y_k$
traslazione	$X_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$
modulazione	$X_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$
convoluzione	$N X_k Y_k$
prodotto	$X_k *_{\text{conv}} Y_k$
incremento	$X_k (1 - e^{j \frac{2\pi}{N} n})$
valore medio	$m_x = X_0$
potenza	$P_x = E_x(N) = \sum_{k=0}^N  X_k ^2$

OSS

$$\text{- increment } y(n) = x(n) - x(n-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_k = X_k (1 - e^{j\frac{2\pi}{N}})$$

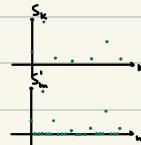
Il valore a  $k=0$  è perso,  $Y_0=0 \forall n$

$$\text{quindi: } X_k = \begin{cases} \frac{Y_k}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}}} & \text{se } k \neq 0 \\ m_x & \text{se } k=0 \end{cases}$$

### 5.2.4 Periodo Errato

Sia  $s(n)$  di periodo  $N$  e  $S_k = F[s(n)]_k$

Se scelgo periodo  $N' = MN$  allora  $S'_m = \begin{cases} S_k & \text{se } m = kN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



$$\text{E quindi } s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{NM-1} S_k e^{j\frac{2\pi}{MN}kn}$$

### 6. Discrete time Fourier Transform (DTFT)

La trasformata di fourier a tempo discreto prende segnali discreti aperiodici nel tempo e li trasforma in segnali continui e periodici nelle frequenze. È quindi l'opposto delle serie di Fourier.

Ricordo che la serie di Fourier è definita come:

$$x(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}, \quad X_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(-t) e^{-jnt} dt$$

$$\text{dominio tempo (-t)} \quad \text{dominio frequenza (n)}$$

$$\text{ponendo } \theta = -t$$

$$s(n) = X_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\theta) e^{jn\theta} d\theta \quad S(e^{j\theta}) = x(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\theta}$$

$$\text{dominio tempo (n)} \quad \text{dominio frequenza (\theta)}$$

Sostituendo i termini:

$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta$$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-jn\theta}$$

Siamo così passati dal dominio del tempo (discreto, aperiodico) a quello delle frequenze (continuo, periodico)

#### 6.0.1 Risultati Utili

dominio del tempo		dominio di Fourier	
cost	$\delta(n)$	$\times$	$2\pi \operatorname{comb}_{\frac{2\pi}{N}}(\theta)$ deltic cost
exp	$e^{j\theta_0 n}$	$\times$	$2\pi \operatorname{comb}_{\frac{2\pi}{N}}(\theta - \theta_0)$ $e^{j\theta_0 \theta}$
delta	$\delta(n-m)$		deltic exp
$\operatorname{rect}\left(\frac{n}{N}\right)$	$j \operatorname{sinc}(n\theta)$	$\times$	$N \operatorname{sinc}_N\left(\frac{\theta N}{2\pi}\right)$ $\operatorname{rep}_N \operatorname{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$
$\cos(n\theta_0 + \phi_0)$			$\pi e^{j\theta_0} \operatorname{comb}_{\frac{2\pi}{N}}(\theta - \theta_0) + \pi e^{j\phi_0} \operatorname{comb}_{\frac{2\pi}{N}}(\theta, 0)$

## 6.1 Proprietà

### 6.1.1 Simmetrie

dominio del tempo	dominio di Fourier
vibrazamento	$s(-n)$
coniugato	$\overline{s(n)}$
simmetria pari	$s(n) = s(-n)$
dispari	$s(n) = -s(-n)$
reale	$s(n) = \overline{s(n)}$
reale + pari	$s(n) = \overline{s(n)} = s(-n)$
reale + dispari	$s(n) = \overline{s(n)} = -s(-n)$
	$S(e^{j\theta})$
	$\overline{S(e^{j\theta})}$
	$S(e^{j\theta}) = S(e^{-j\theta})$ pari
	$S(e^{j\theta}) = -S(e^{-j\theta})$ dispari
	$S(e^{j\theta}) = \overline{S(e^{j\theta})} = S(e^{-j\theta})$ Hermitiana
	$S(e^{j\theta}) = \overline{S(e^{j\theta})} = S(e^{-j\theta})$ reale + pari
	$S(e^{j\theta}) = \overline{S(e^{j\theta})} = -S(e^{-j\theta})$ immaginaria + dispari

### 6.1.2 Proprietà

dominio del tempo	dominio di Fourier
linearità	$\alpha x(n) + \beta y(n) \rightarrow X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$
traslazione	$x(n-n_0) \rightarrow X(e^{j\theta}) e^{-jn_0\omega}$
modulazione	$x(n)e^{jn\frac{2\pi}{N}n} \times \cancel{\star} X(e^{j(\theta-\omega_0)})$
convoluzione	$x * y(n) \times \cancel{\star} X(e^{j\theta}) Y(e^{j\theta})$
prodotto	$x(n)y(n) \rightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\theta}) *_{circ} Y(e^{j\theta})$
incremento	$x(n)-x(n-1) \times \cancel{\star} X(e^{j\theta})(1-e^{-j\omega})$
prodotto per n	$n x(n) \times \cancel{\star} j X'(e^{j\theta})$
somma convergente	$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \frac{X(e^{j\theta})}{1-e^{-j\omega}} + \pi A_x \text{comb}_{\infty}(\omega)$
ez	$A_x = X(e^{j0})$
energia	$E_x = P_X$

## 7. Relazioni tra le Trasformate

### 7.1 Dalla Serie di Fourier alla Trasformata di Fourier

$s_{12}$   $s(t) = s(t + T_p)$  un segnale periodico di periodo  $T_p$ .

Posso trovare le serie di Fourier del segnale  $S_k$  b.c.  $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j k \omega_0 t}$  dove  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$

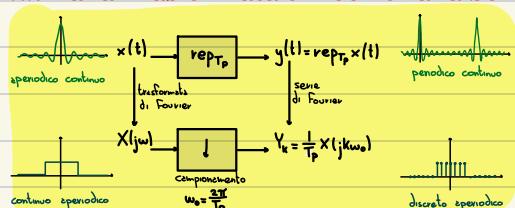
Le trasformate di Fourier dello stesso segnale  $s(t)$  è

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j k \omega_0 t} \right) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(k - \omega) \omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_p} S_k \delta(\omega - k\omega_0)$$



### 7.2 Dalla Trasformata di Fourier alla Serie di Fourier



DIM

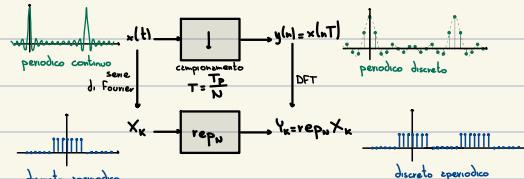
$$Y_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} y(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT_p) \right) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{T_p} x(t-mT_p) e^{-j k \omega_0 t} dt \right) = \frac{1}{T_p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_p) e^{-j k \omega_0 (m+1)T_p} dt =$$

pongo  $m = l - mT_p$

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\ &= \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j k \omega_0 u - j k \omega_0 mT_p} du = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) \end{aligned}$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

### 7.3 Dalla Serie di Fourier alla DFT



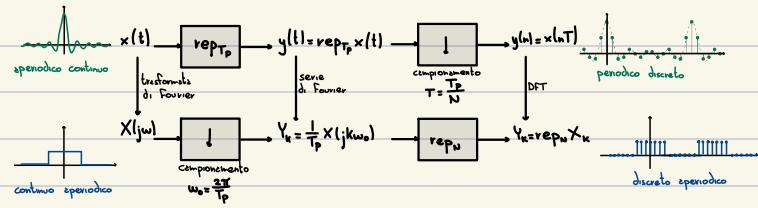
DIM

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j \frac{2\pi}{T_p} k t} \Big|_{t=nT_p} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j \frac{2\pi}{N} k n} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_{l-mN} e^{j(l-mN)\frac{2\pi}{N} n} = \sum_{l=0}^{N-1} \text{rep}_N X_l e^{j \frac{2\pi}{N} l n}$$

pongo  $k = l - mN$

$$= e^{j \frac{2\pi}{N} l n}$$

## 7.4 Dalla Trasformata di Fourier alla DFT



## 7.5 Dalla DFT alla DTFT

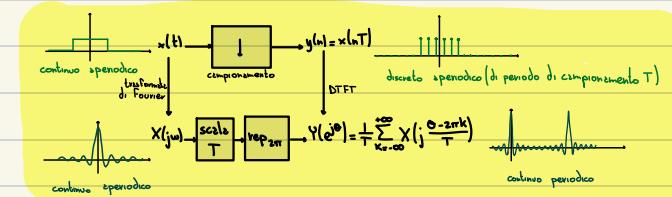
Se applico la DFT ad un segnale a tempo discreto periodico anziché uno spazioso  
ottenendo un segnale molto simile a quello ottenuto con la DTFT, ma con i delta di Dirac invece che quelli di Kronecker.

$$s(n) = s(n, N) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j k \frac{2\pi}{N} n} \quad (S_k \text{ ottenuto tramite DFT})$$

$$\tilde{S}(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi S_k \text{comb}_{2\pi}(\theta - k \frac{2\pi}{N}) \quad (\tilde{S} \text{ ottenuto dalla DTFT})$$

The top plot shows the magnitude of the DFT coefficients  $S_k$  as discrete spikes at integer values of  $k$ . The bottom plot shows the DTFT magnitude  $\tilde{S}(\theta)$  as a series of Dirac delta functions located at  $\theta = k \frac{2\pi}{N}$  for  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

## 7.6 Dalla Trasformata di Fourier alla DTFT

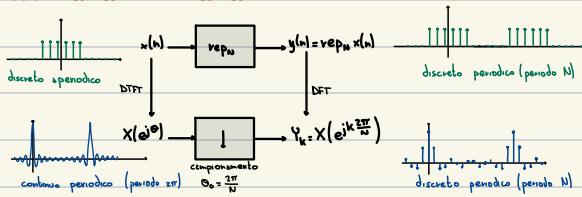


DIM

$$Y(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\theta n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nT) e^{-j\theta n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega nT} d\omega \right) e^{-j\theta n} = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega T)n} e^{-j\theta n} \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \text{comb}_{2\pi}(\theta - \omega T) d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\theta - \omega T - 2\pi k) d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{1}{T} S\left(\frac{\theta - 2\pi k}{T} - \omega\right) d\omega = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j \frac{\theta - 2\pi k}{T}\right)$$

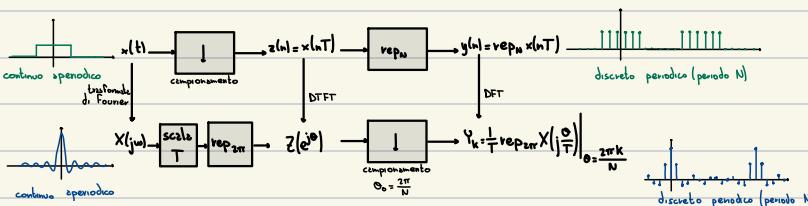
## 7.7 Dalla DTFT alla DFT



$$Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N} n m} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N} (n-k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n} = X(e^{-j\frac{2\pi}{N} k})$$

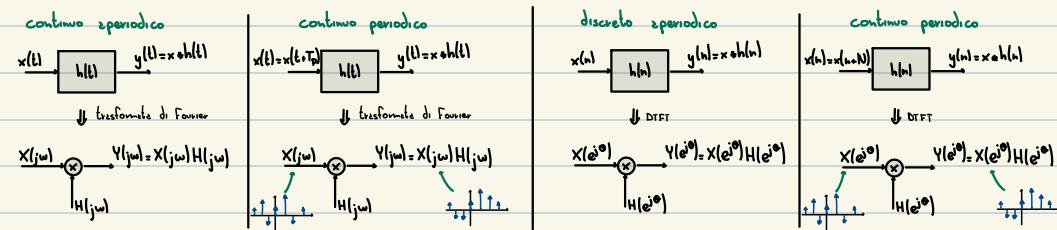
definizione DFT

## 7.8 Dalla Trasformata di Fourier alla DFT



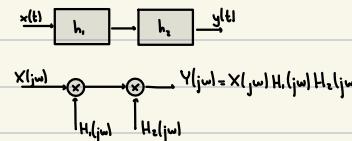
## 8. Dominio di Fourier

### 8.1 Filtri nel Dominio di Fourier

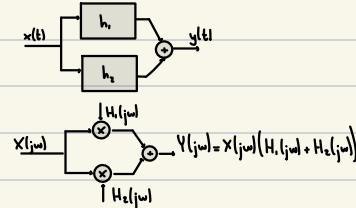


#### 8.1.1 Connessioni dei Filtri

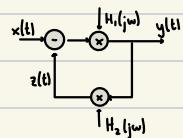
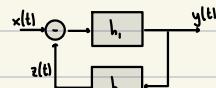
##### SERIE



##### PARALLELO



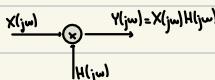
## RETROAZIONE



$$\begin{cases} Z(j\omega) = H_1(j\omega)Y(j\omega) \\ Y(j\omega) = H_1(j\omega)(X(j\omega) - Z(j\omega)) \end{cases} \Rightarrow Y = H_1(X - H_1H_2Y) \Rightarrow Y = H_1X - H_1H_2Y \Rightarrow Y(1 + H_1H_2) = H_1X \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)} X(j\omega)$$

## 8.2 Funzioni Attraverso i Filtri

### 8.2.1 Esponenziale Complesso

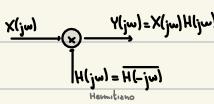
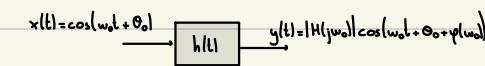


DIM

$$x(t) = A e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0) \xrightarrow{H(j\omega)} Y(j\omega) = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0) H(j\omega) = 2\pi A H(j\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} A H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$



### 8.2.2 Sinusoidi



Hemisferio

DIM

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \pi e^{j\phi_0} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\phi_0} \delta(\omega + \omega_0) \Rightarrow Y(j\omega) = \pi e^{j\phi_0} H(j\omega) \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\phi_0} H(-j\omega) \delta(\omega + \omega_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \pi e^{j\phi_0} |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\phi_0} |H(-j\omega)| e^{j\phi(\omega_0)} \delta(\omega + \omega_0) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi_0 - \phi(\omega_0))$$

Forma polare di H

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

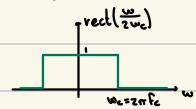
$$H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

$\downarrow$  il filo è reale  
quindi Hemisferio in frequenza

## 8.3 Filtri Selettori Ideali

### 8.3.1 Passa Basso

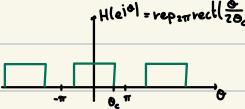
continuo



nel tempo è  $z(t) \sin(\omega_0 t)$

$\omega_c$  è la frequenza di cutoff

discreto



nel tempo è  $\frac{\omega_c}{\pi} \sin(\frac{\omega_c}{\pi} n)$

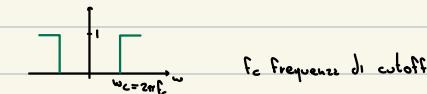
### 8.3.2 Passa Banda

$$\text{rect}\left(\frac{w-w_0}{w_0}\right) + \text{rect}\left(\frac{w+w_0}{w_0}\right)$$



nel tempo è  $z(t) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$

### 8.3.3 Passa Alto



$\omega_c$  frequenza di cutoff

oss tutti i filtri sopre descritti non sono BIBO stabili.

## 8.4 Filtri Selettori Reali

Ovvero filtri BIBO stabili e realizzabili.

$$H(jw) = r \cos\left(\frac{w}{2w_c}\right) \quad \text{dove } r \cos(|t|) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(|t| - \frac{1}{2})\right), & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq |t| \leq \frac{1+\alpha}{2}, & \frac{1+\alpha}{2} > |t| \end{cases}$$

$$h(t) = z \int_{-\infty}^t r \cos(z \omega_c t) dt \quad \text{dove } r \cos(|t|) = \frac{\sin(\pi|t|)}{1 - (2\pi|t|)^2}$$



$$H(e^{jw}) = \text{rect}\left(\frac{w}{2w_c}\right)$$

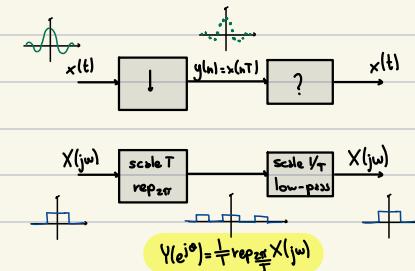
$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{rect}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

## 9. Teorema di Shannon

### 9.1 Interpolazione

Mentre il campionamento nel tempo è un'operazione semplice non si può dire altrettanto per l'interpolazione.

Lo è però nel dominio delle frequenze, dove basta applicare un filtro passe basso.

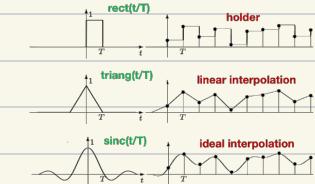


Per poter applicare queste tecniche i segnali devono avere estensione spettrale finita. Nel caso reale un filtro passo basso si applica prima della ripetizione periodica.

Nel dominio del tempo quest'operazione è:

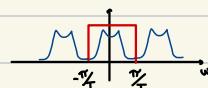
$$x(n) \xrightarrow{h(t)} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(t-kT)$$

$h(t)$  può essere una qualsiasi funzione t.c.  $\begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t=kT \\ \dots & \text{altrimenti} \end{cases}$



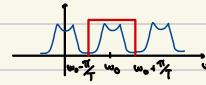
## 9.2 Il Teorema di Shannon

Il segnale può essere perfettamente ricostruito dai suoi campioni presi ad intervalli  $T$  se la sua trasformata di Fourier  $S(j\omega)$  ha estensione contenuta in  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  con la condizione che l'interpolatore utilizzato abbia  $h(t) = \text{sinc}(t)$



### GENERALIZZAZIONE

Il segnale può essere perfettamente ricostruito dai suoi campioni presi ad intervalli  $T$  se la sua trasformata di Fourier  $S(j\omega)$  ha estensione contenuta in  $[w_0 - \frac{\pi}{T}, w_0 + \frac{\pi}{T}]$



## 10. La Trasformata di Laplace

Una generalizzazione delle trasformate di Fourier, permette di mappare un insieme più grande di segnali nel dominio delle frequenze.

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{st} ds$$

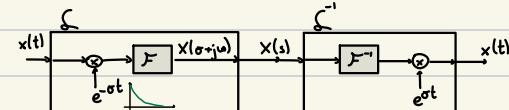
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt + \text{ROC}$$

In Laplace è necessario fornire anche la regione di convergenza di  $s$  (sarà una parte di piano complesso)  
oss In Fourier la ROC è sempre l'asse immaginario



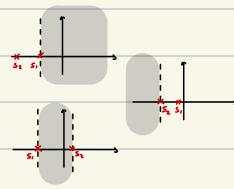
OSS

Si può applicare a più segnali perché introduce dello smorzamento



OSS

Per segnali causali la ROC è allo destro del polo più a destra.



Per segnali anticausali la ROC è allo sinistro del polo più a sinistra.

In generale la ROC è limitata a destra e sinistra da poli.

### 10.0.1 Risultati Utili

dominio del tempo	dominio di Laplace	ROC
cost	1	NON ESISTE
step	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}[s] > 0$
ramp	$\frac{t^k}{k!} u(t)$	$\frac{1}{s^k}$
delta	$\delta(t)$	1
	$\delta^{(n)}(t)$	$s^k$
exp	$e^{i\omega t}$ $e^{pt} u(t)$ $\frac{t^k}{k!} e^{pt} u(t)$	NON ESISTE $\frac{1}{s-p_i}$ $\frac{1}{(s-p_i)^{k+1}}$
		$\text{Re}[s] > \text{Re}[p_i]$
	$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
	$\sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

### 10.1 Proprietà

dominio del tempo	dominio di Laplace
linearità	$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow \alpha X(s) + \beta Y(s)$
ribaltamento	$x(-t) \rightarrow X(-s)$
coniugato	$\overline{x(t)} \rightarrow \overline{X(s)}$
scala	$x(\frac{t}{\alpha}) \rightarrow \alpha X(s)$
traslazione	$x(t-t_0) \rightarrow X(s)e^{-s t_0}$
modulazione	$x(t)e^{s_0 t} \times \cancel{*} \rightarrow X(s-s_0)$
convoluzione	$x * y(t) \rightarrow X(s)Y(s)$
increment	$x'(t) \rightarrow s X(s)$
prodotto per t	$t x(t) \times \cancel{*} \rightarrow -X'(s)$
integrale	$x * 1(t) \rightarrow \frac{X(s)}{s}$

## 10.2 Trasformata di Laplace Unilatera

$$x_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} X_+(s) e^{st} ds$$

$$X_+(s) = \int_0^\infty x_+(t) e^{-st} dt$$

include lo 0

oss Specificare il ROC non è più necessario, è sempre alla destra del polo più a destra

oss Le proprietà rimangono invariate, tranne per:

$$x'(t) \xrightarrow{s} sX(s) - x(0^-)$$

$$x''(t) \xrightarrow{s} s(sX(s) - x(0^-)) - x'(0^-) = s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$x'''(t) \xrightarrow{s} s^3 X(s) - s^2 x(0^-) - s x'(0^-) - x''(0^-)$$

$$x^{(n)}(t) \xrightarrow{s} s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(0^-) s^{n-k-1}$$

### 10.2.1 Trasformata Inversa

Al fine di tornare nel dominio del tempo dal dominio delle frequenze vogliamo portare la funzione di s in forme proprie.

Ovvero:  $H(s) = \frac{b(s)}{z(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{z_0 + z_1 s + \dots + z_n s^n}$  con  $n < m$

Se invece  $H$  è in forma impropria ( $m > n$ ) è possibile effettuare la divisione polinomiale e riportarsi in forme proprie:

$$H(s) = q(s) + \frac{r(s)}{z(s)} = q_0 + q_1 s + \dots + q_{m-n} s^{m-n} + \frac{r_0 + r_1 s + \dots + r_{n-m} s^{n-m}}{z_0 + z_1 s + \dots + z_n s^n}$$

si anti-trasforma in  
dei poli di direz

Ottenuta la funzione propria è possibile semplificare in:

$$H(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \dots + \frac{R_n}{s-p_n} \quad \text{dove } R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} H(s)(s-p_i)$$

Oppure, nel caso più generale dove i poli hanno molteplicità  $\neq 1$ :

$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s-z_j)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)^{m_i}} = \sum_j \sum_{i=1}^{m_j} \frac{R_{ij}}{(s-p_i)^i} \quad \text{dove } R_{mj-k, j} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p_j} \frac{d^k [H(s)(s-p_j)^{m_j}]}{ds^k}$$

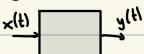
molteplicità  
del polo

$$R_{mj-k, j} = \lim_{s \rightarrow p_j} H(s)(s-p_j)^{m_j}$$

Infine si applica la trasformata inversa:  $h(t) = \sum_j \sum_{i=1}^{m_j} R_{ij} \frac{t^{i-1} e^{p_j t} z_j}{(i-1)!}$

### 10.2.2 Equazioni Differenziali

Vogliamo studiare sistemi descritti da equazioni differenziali.



$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \dots + b_m x^{(m)}(t)$$

conosciamo  $x(t)$  per  $t < 0^-$  e  $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$

Sì, può scrivere l'equazione del sistema come:

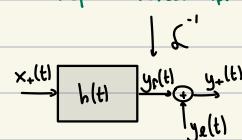
$$\sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t)$$

$$b_m(s) X(s) - \sum_{k=1}^m b_k \sum_{l=0}^{k-1} x^{(l)}(0^-) s^{k-l} = \sum_{k=0}^n a_k s^k Y(s) - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{l=0}^{k-1} y^{(l)}(0^-) s^{k-l}$$

$$Y(s) = \frac{b_m(s)}{a_n(s)} X(s) + \frac{Y_{n-1}(s) - x_{m-1}(s)}{a_n(s)}$$

fusione di trascrizioni

risposta forzata  $Y_p(s)$



oss se  $y_e(t)=0$  allora  $y_z(t)=0$ . Inoltre, se  $x(t)=\cos(\omega_0 t + \theta_0)$  allora  $y(t)=|H(j\omega)| \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \phi(\omega_0))$

## STABILITÀ BIBO

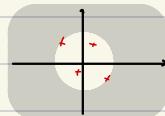
- $m < n$ , ovvero  $H(s)$  propria o  $m=n$  (altrimenti appaiono dei delta non BIBO)
- $\text{Re}[p_i] < 0$  altrimenti  $h(t)$  non è assolutamente integrabile (✓)

oss vale lo stesso per  $Y_e(s)$

## 11. La Trasformata Zeta

L'operazione di discretizzazione delle trasformate di Laplace unilaterale

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \text{dove } z=re^{j\theta}$$



In questo caso la ROC è la parte esterna al cerchio con origine O:0 e bordo nel polo più remoto dell'origine.

### 11.0.1 Risultati Utili

dominio del tempo	dominio di z	ROC
step $\delta(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z >1$
imp $\frac{1}{k!}(n+k)...(n+1)\delta(n)\delta(n)$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^{k+1}}$	
delta $\delta(n)$ $\delta(n-h_0)$	$1$ $z^{-h_0}$	$ z >0$
exp $p_0^{n_0} \delta(n)$	$\frac{1}{p_0^{-1}-z^{-1}}$	$ z > p_0 $
$\frac{1}{k!}(n+k)...(n+2)(n+1)p_0^{n_0+k+1}\delta(n)$	$\frac{1}{(p_0^{-1}-z^{-1})^{k+1}}$	

## 11.1 Proprietà

dominio del tempo	dominio di $Z$
linearità $\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$
modulazione $p_o^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{p_o}\right)$
convoluzione $x * y(n)$	$X(z)Y(z)$
prodotto per $n$ $n x(n)$	$-z X'(z)$
traslazione $x(n-n_0)$	$X(z) z^{n_0} + \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) z^{-(m+n_0)}$

## 11.2 Equazioni Differenziali



$$\sum_{k=0}^m a_k y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

dove conosciamo  $x(k)$  e  $y(-n), \dots, y(-2), y(-1)$

$$\sum_{k=0}^m a_k x(k-l) = \sum_{k=0}^n a_k y(k-l)$$

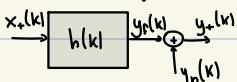
$$\sum_{k=0}^m b_k z^{-k} X(z) + \sum_{k=0}^m \sum_{j=-k}^{-1} b_j x(j) z^{-(j+k)} = \sum_{k=0}^n a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=-k}^{-1} a_j y(j) z^{-(j+k)}$$

$$Y(z) = \frac{b_m(z)}{a_m(z)} X(z) + \frac{y_{m-1}(z) - x_{m-1}(z)}{a_m(z)}$$

risposta libera  $Y_L(z)$

funzione d'input  
trasferimento

risposta forzata  $Y_F(z)$



## STABILITÀ BIBO

1.  $|p| < 1$  altrimenti  $h(k)$  non è assolutamente integrabile (

oss vele lo stesso per  $Y_L(z)$

# Appendice A - MATLAB

## A.1 Convoluzione

```
% convoluzione tra due rect
T = 0.01;
t = -5:T:5;
s_1 = rect(t/2);
s_2 = rect(t/4);
t_conv = t(1) + t(1):t:t(end) + t(end); estensione della convoluzione
s_conv = T*conv(s_1, s_2); convoluzione
figure;
subplot(3, 1, 1);
plot(t, s_1);
subplot(3, 1, 2);
plot(t, s_2);
subplot(3, 1, 3);
plot(t_conv, s_conv); VISUALIZZAZIONE
```

## A.2 FFT

```
T = 0.01;
t = -1000:T:1000;
s = 0.8 + 2*exp(1i*pi*t);
N = length(s);
w = (0:N-1)*((2*pi)/(T*N));
S = T*fft(s);
figure
subplot(2, 1, 1)
plot(t, abs(s));
subplot(2, 1, 2)
semilogy(w, abs(S)); VISUALIZZAZIONE
```

OSS

se si vuole centrare l'fft si può usare lo shift

$$w = -\text{round}(N/2) : \text{round}(N/2) - 1$$

$$S = T * \text{fftfshift}(\text{fft}(s))$$

OSS

ifft e ifftshift sono totalmente simili, ma per la trasformata inversa