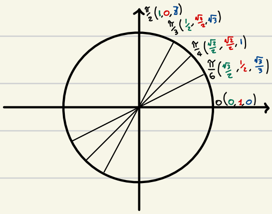
Analisi Matematica 1

Notazioni e proprietà



$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$

$\neg P$ negazione

$P \wedge Q$ e

$P \vee Q$ o

$\exists!$ esiste uno solo

$\subsetneq$ contenuto e diverso

$\subseteq$ contenuto o uguale

$\overline{\mathbb{R}}$ retta estesa $(\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$

$:=$ definita come

$\ln(x) = \log(x) = \log_e(x)$

proprietà dei logaritmi

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

$\log(a^b) = b \log a$

Formule di addizione:

$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(x)$

$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

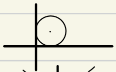
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

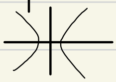
Cheat Sheet

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = \sqrt{r}$



$(x-x_c)^2 - (y-y_c)^2 = \sqrt{r}$



Sviluppi "notevoli"

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + o(x^3)$

Serie "notevoli"

- $\sum_{k=0}^{\infty} q^k < +\infty \iff -1 < q < 1 \quad \left(\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} < +\infty \iff (\alpha > 1) \vee (\alpha = 1 \wedge \beta > 1)$

integrali "notevoli"

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \text{settsinh} x + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{f(x)} + c$

Sostituzioni integrali "notevoli"

pongo $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \frac{2}{1+t^2}dt$

pongo $t = \tan x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \frac{1}{1+t^2}dt$

teoremi

Teo Weierstrass f continua $\Rightarrow \exists x_m, x_M \mid x_m = \inf f,\ x_M = \sup f$

DIM Creo succ. "massimizzante" + $\exists$ una sottosucc. $x_{n_k} \to \bar{x} \mid f(\bar{x}) \to \sup f$

Teo Fermat f MIN/MAX $\Rightarrow f'(x) = 0$

DIM $0 \le \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le 0 \iff f'(x_0) = 0$

Teo Rolle $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \mid f'(c) = 0$

DIM teo. Weierstrass $\Rightarrow \exists x_m, x_M$ < agli estremi $\Rightarrow$ f costante; se all'interno applico Fermat

Teo Lagrange $\exists c \mid f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIM $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ + Rolle

Teo ponte $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$

DIM "$\Rightarrow$" teo. cambio variabile "$\Leftarrow$" per assurdo $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e costruisco successione

Proprietà sommatorie

$$\sum_{i=a}^{b}(i^2+i) = \sum_{i=a}^{b} i^2 + \sum_{i=a}^{b} i$$

$$\sum_{i=a}^{b} k i = k\sum_{i=a}^{b} i$$

Principio di induzione

Utile per dimostrare a $n=+\infty$ una proprietà che sappiamo essere vera ad un determinato n

Formalizzando: dato $n_0 \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ proposizioni, $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$

Supponiamo ① $P(n_0)$ vera

② $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \geq n_0$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

ES (Formula di Gauss)

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}, \quad N \in \mathbb{N}$$

① $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

② $\frac{(N+1)(N+2)}{2} = \sum_{k=1}^{N+1} k = N+1+\sum_{k=1}^{N} k \overset{\text{principio induzione}}{=} \frac{N(N+1)}{2} + N+1 = \frac{N(N+1)+2(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ ✓

ES Dimostro la proprietà

$n^2 > 2n+1 \quad \forall n \geq 3$

$n=3 \quad 9>7$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$

abbiamo dimostrato che questa disuguaglianza è vera, quindi se $2(n+1)+1 < 2n+1+2n+1$ sarà vera anche la tesi

$(n+1)^2 > 2(n+1)+1 \iff n^2+2n+1 > 2(n+1)+1 \xrightarrow{\text{princ. di induzione}} \underbrace{n^2}_{}\underbrace{+2n+1}_{} > \underbrace{2n+1}_{\text{hp}}\underbrace{+2n+1}_{\text{uguali}} \iff (n+1)^2 > \overbrace{2n+1+2n+1} = 4n+2$

$2n+3 < 4n+2 \iff 2n > 1 \iff n > \frac{1}{2}$ ✓ $(n > 3)$

Progressione geometrica

Sia $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

DIM

$n=0 \quad \sum_{k=0}^{0} q^k = \frac{1-q}{1-q} \iff 1=1$ ✓

$n \longrightarrow n+1$

$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \xrightarrow[\text{di induzione}]{\text{principio}} \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ ✓

$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1}+\sum_{k=0}^{n} q^k$

□

Progressione telescopica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} - b_k = b_{n+1} - b_1$$

DIM $\left(\sum_{k=1}^{n} (b_{n+1} - b_n) = (\cancel{b_2} - b_1) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_4} - \cancel{b_3}) + \dots + (b_{n+1} - \cancel{b_n}) = b_{n+1} - b_1 \right)$

Def (fattoriale)

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad 0! = 1$$

Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$$

DIM

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!(\cancel{k}+1+n-\cancel{k})}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$\square$

DIM

$n=0$ $\quad 1 = (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!(-k)!} a^k b^{-k} = 1 \cdot a^0 \cdot b^0 = 1$ ✓

$n \longrightarrow n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}(a+b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k + b^{n-k+1}}_{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k + b^{n-k+1} + b^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right](a^{k+1} + b^{n-k}) + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

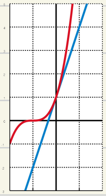
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{k+1} + b^{n-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1}(a^{k+1} + b^{n-k}) + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k} a^k + b^{n-k+1}\right) + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(a^k + b^{n-k+1}) + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}(a^k + b^{n-k+1})$$

Disuguaglianza di Bernoulli

Sia $n \in \mathbb{N} \mid n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1$ Allora:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$



DIM

$n=0$ $\quad (1+x)^0 \geq 1 + 0x \iff 1 \geq 1$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$ $\quad (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x = 1 + nx + x$

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + x + nx \quad ✓$$

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ naturali

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ interi

$\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ z \in \mathbb{Z}\}$ razionali

$\mathbb{R} = \{$allineamenti decimali "propri"$\}$ reali

$\mathbb{N} \underset{1}{\subsetneq} \mathbb{Z} \underset{2}{\subsetneq} \mathbb{Q} \underset{3}{\subsetneq} \mathbb{R}$

DIM ($\sqrt{2}$ non appartiene a Q)

1. ovvio (-2)
2. ovvio $(\frac{1}{2})$
3. ipotizziamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \frac{z}{n} = x \wedge x^2 = 2$

   posso supporre che z e n non abbiano fattori comuni (altrimenti potrei semplificare $\frac{2}{6} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$)

   $\frac{z^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow z^2 = 2n^2 \Rightarrow z$ è un numero pari

   Se scelgo $z = 2q,\ q \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4q^2 = 2n^2 \Rightarrow n$ è un numero pari

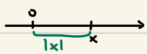
   $\Big\}$ sia q che n sono pari, ma questo è impossibile, due numeri pari hanno sempre 2 come fattore comune

Teo (completezza del reali)

Ogni sottoinsieme non vuoto e limitato in $\mathbb{R}$ ammette estremo superiore e inferiore

Il valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dobbiamo vedere il valore assoluto come una distanza, dall'origine 

PROP $|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M \Leftrightarrow x \in [-M, M]$

DIM $|x| \leq M \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \leq M) \vee (x < 0 \wedge \overset{x \geq -M}{-x \leq M}) \Leftrightarrow (0 \leq x \leq M) \vee (-M \leq x < 0) \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$

Teo $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1. $|x+y| \leq |x| + |y|$
2. $|x-y| \geq ||x| - |y||$

DIM

1. $|x| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

   $|y| \leq |y| \Rightarrow -|y| \leq y \leq |y|$

   $\Rightarrow -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| = |x+y| \leq |x| + |y|$

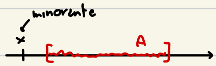
② $|x| = |x+y-y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$

$|y| = |y+x-x| \leq |y-x| + |x| \Rightarrow -(|x|-|y|) \leq |x-y|$

$\Rightarrow -(|x|-|y|) \leq |x-y| \leq (|x|-|y|) \Rightarrow |x-y| \leq \big||x|-|y|\big|$

Maggiorante/Minorante

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$



x è maggiorante (minorante) di A se $\forall a \in A$ $x \geq a$ ($x \leq a$)

Insieme limitato

Se A ammette un maggiorante (minorante) si dice superiormente (inferiormente) limitato

Se A è superiormente ed inferiormente limitato si dice limitato

Minimo/Massimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

Se x è maggiorante (minorante) di A e $x \in A$, x si dice massimo (minimo) di A

Teo (unicità del massimo e minimo)

Il massimo (minimo), se esiste per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, è unico

DIM

Supponiamo per assurdo M_1, M_2 due massimi per A

$$\left.\begin{array}{l} M_1 \geq a \ \forall a \in A \text{ e } M_1 \in A \Rightarrow M_1 \geq M_2 \quad (M_2 \in A) \\ M_2 \geq a \ \forall a \in A \text{ e } M_2 \in A \Rightarrow M_2 \geq M_1 \quad (M_1 \in A) \end{array}\right\} \Leftrightarrow M_1 = M_2 \quad \text{assurdo!}$$

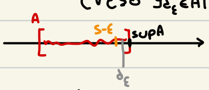
Estremo superiore/inferiore

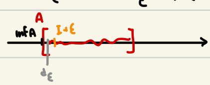
Si definisce estremo superiore (inferiore) e si indica con sup A (inf A), massimo (minimo) dei maggioranti (minoranti)

Teo (caratterizzazione sup/inf)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e limitato

Allora: $S = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A \mid a_\varepsilon > S - \varepsilon \end{cases}$ $\qquad I = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} S \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A \mid a_\varepsilon < I + \varepsilon \end{cases}$





DIM

"⇒" $\begin{cases} a \leq S \ \forall a \in A \text{ (def. maggiorante e supA è per definizione maggiorante di A)} \\ S \text{ è minimo tra i maggioranti per def. sup.} \Rightarrow S - \varepsilon \text{ non è maggiorante} \Rightarrow \exists a_\varepsilon \in A \mid a_\varepsilon > S - \varepsilon \end{cases}$

"⇐" Dato che $a \leq S$ $\forall a \in A \Rightarrow S$ è maggiorante $\qquad$ S è il più piccolo maggiorante

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists a_\varepsilon \in A$ t.c. $a_\varepsilon > S - \varepsilon \Rightarrow S - \varepsilon$ non è maggiorante

Radici n-esime e potenze ad esponente reale

Teo (esistenza della radice n-esima)

Sia $y \in \mathbb{R}, y > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Allora $\exists! \, r \in \mathbb{R}, r > 0 \mid r^n = y$

Si pone $r = \sqrt[n]{y}$ e si ha $r = \sup\{x \in \mathbb{R} : x^n \leq y\}$

Definita la radice n-esima è possibile definire la potenza con esponente qualunque

Se $a > 0$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}$ $\quad q > 0$ $\quad r = \frac{p}{q}$

Si pone $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ e $a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Def

$a^r = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq r\}$ la più vicina approssimazione in $\mathbb{Q}$ di $r \in \mathbb{R}$

Logaritmi

$\forall y > 0, \ \exists! \, x \in \mathbb{R} \mid a^x = y$ che indichiamo con $x = \log_a y$

Si ha:

$$\begin{cases} \log_a y = \sup\{r \in \mathbb{R} : a^r \leq y\} & a > 1 \\ \log_a y = \sup\{r \in \mathbb{R} : a^r \geq y\} & a < 1 \end{cases}$$

Numeri complessi

Si lavora nell'insieme $\mathbb{R}^2$ (un piano)

$\mathbb{C} \to z = \underbrace{x}_{\text{parte reale}} + i\overbrace{y}^{\text{parte immaginaria}}$

Def (coniugato)

Dato $z = x+iy \in \mathbb{C}$ si definisce coniugato: $\bar{z} = x-iy$

Proprietà del coniugato

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ DIM $\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = (x_1+x_2) - i(y_1+y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ DIM $\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{x_1x_2 + x_1iy_2 + x_2iy_1 + i^2y_1y_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$
   $(x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - x_1iy_2 - x_2iy_1 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$
4. $z \cdot \bar{z} = x^2+y^2$ DIM $(x+iy)(x-iy) = x^2 \cancel{-ixy} \cancel{+ixy} + y^2$

Polinomi a coefficienti complessi

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ con $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

Se $a_n \neq 0$, $P(z)$ ha grado n

Teo (Ruffini)

$z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $P(z)$ se e solo se esiste un polinomio $Q(z)$ t.c. $P(z) = Q(z)(z-z_0)$

Def (molteplicità)

Si dice che $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di molteplicità $m \geq 1$ di $P(z)$ se $\exists$ polinomio $Q(z)$ t.c.

$P(z) = Q(z)(z-z_0)^m$ e $Q(z) \neq 0$

ES

$P(z) = (z-1)^3(z+1)(z-2)^4$

$P(1) = 0$ perché $(z-1)^3 = 0$ quindi $z_0 = 1$ è radice di molteplicità 3

Teo (decomposizione in fattori irriducibili di un polinomio a coefficienti reali)

Sia $P(z)$ polinomio a coefficienti reali, $z \in \mathbb{C}$. Allora z_0 è radice di $P(z)$ se e solo se $\bar{z}_0$ è radice di $P(z)$.

Di conseguenza, le radici NON reali sono in numero pari

DIM

$P(z_0) = 0 \iff P(\bar{z}_0) = 0$

$P(z_0) = 0 = \overline{P(z_0)} = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0} = \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_0} = \underbrace{\bar{a}_n}_{a_n} \cdot \bar{z}_0^n + \underbrace{\bar{a}_{n-1}}_{a_{n-1}} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \underbrace{\bar{a}_0}_{a_0} = P(\bar{z}_0)$

$a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ per hp

Teo (fondamentale dell'algebra)

Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti complessi e n il suo grado $(n \geq 1)$

Allora P ha esattamente n radici, tenuto conto della loro molteplicità

COROLLARIO (di Marco)

Un polinomio di grado dispari a coefficienti reali ha almeno una radice reale

Def (modulo complesso)

Sia $z \in \mathbb{C}$

$\mathbb{R} \in |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ = "distanza di z dall'origine"

Proprietà del modulo

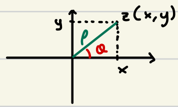
① $|z| = 0 \iff z = 0$

② $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ DIM $|z_1 \cdot z_2| = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_1| \cdot |z_2|$

③ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Coordinate polari in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \qquad (\rho, \theta) \longmapsto (x, y)$$



$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ si dice modulo di z

θ si dice argomento di z $(\arg z = \theta)$

$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta}$

Formula di Eulero

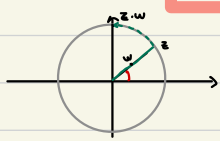
$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Significato geometrico del prodotto in $\mathbb{C}$

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$

$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{\rho_1\rho_2}_{\text{prodotto dei moduli}} \left(\cos(\underbrace{\theta_1 + \theta_2}_{\text{Somma degli argomenti}}) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right)$



Formula di De Moivre

$z \in \mathbb{C}$, $z = \rho e^{i\theta}$, $n \in \mathbb{N}$

Allora $z^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}$

DIM

$n=0$ $\quad z^0 = \rho^0 \cdot e^0 \Rightarrow 1 = 1$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$

$z \cdot z^n = z^{n+1} = \rho^{n+1} e^{i\theta(n+1)}$ $\xrightarrow[\text{induzione}]{\text{per}}$ $z^{n+1} = \rho^n \cdot e^{in\theta} \cdot \underset{z = \rho e^{i\theta}}{z} = \rho^{n+1} \cdot e^{i\theta(n+1)}$ ✓

Proprietà degli esponenziali complessi

① $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ DIM

② $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ DIM

proprietà potenze

③ $|e^z| = e^x$

④ $e^z = e^x$ se $z \in \mathbb{R}$

⑤ $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ DIM $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \overline{e^{i\theta}}$

⑥ $e^{i\theta} \cdot \overline{e^{i\theta}} = 1$ DIM $e^{i\theta} \cdot \overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^0 = 1$

⑦ $e^{i\pi} = -1$ DIM vedi formule di Eulero

⑧ e^z è $2\pi i$-periodica DIM $e^z = e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$ □

Radici n-esime di un complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ allora esistono n complessi $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ t.c. $w_k^n = z$, per $k = 0, \dots, n-1$ dette radici n-esime di z

Tali numeri, se rappresentati sul piano cartesiano si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e si scrivono: $w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\arg z + k2\pi}{n}}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

DIM

$z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$. cerchiamo $w = re^{i\lambda}$ t.c. $w^n = z$ $\left(r^n e^{in\lambda} = w^n = z = \rho e^{i\theta}\right)$

$r^n = \rho \iff r = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|z|}$

$n\lambda = \theta + 2k\pi \iff \lambda = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$

$w_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ sono distinte se $k = 0, 1, \dots, n-1$ □

Equazioni di secondo grado a coefficienti complessi.

equazioni del tipo $az^2 + bz + c = 0$ $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

$$z_1, z_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$$

radice quadrata in $\mathbb{C}$

Funzioni

Dati due insiemi A e B (non $\emptyset$) si dice funzione di dominio A e codominio B, e si scrive $f:A \to B$, una regola che associa ad ogni elemento di A uno ed uno solo elemento di B

Immagine

Sia $f: A \to B$ funzione, si definisce immagine di f: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$

Grafico

$graf(f) = \{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$

Composizione di funzioni

Siano $A, B, C \neq \emptyset$, $f: A \to B$, $g: B \to C$.

Si definisce composizione di f e g, $g \circ f: A \to C$ t.c. $\forall x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$

Inettività suriettività e biettività

f si dice iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in A \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ — Ogni y ha una sola x

f si dice suriettiva se $\forall y \in B \; \exists x \in A$ t.c. $y = f(x)$ — B = Immagine di f

f si dice biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva

Funzione inversa

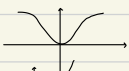
Se f è biunivoca da A a B, si definisce funzione inversa

$f^{-1}: B \to A \mid x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$

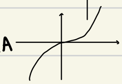
Parità e disparità

Sia $f: A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$

Si dice che f è pari se $f(x) = f(-x) \; \forall x \in A$



Si dice che f è dispari se $f(x) = -f(-x) \; \forall x \in A$



Periodicità

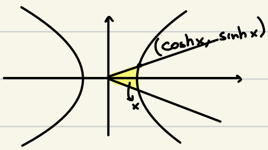
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(x+T)$

Monotonia

$f: A \to \mathbb{R}$ si dice (strett.) crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{<}{\leq} f(x_2)$

e decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{>}{\geq} f(x_2)$

Funzioni iperboliche



$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

PROP.

- $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ DIM $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac14\left(\cancel{e^{2x}}+\cancel{e^{-2x}}+2\cancel{e^x}\cancel{e^{-x}}-\cancel{e^{2x}}-\cancel{e^{-2x}}+2\cancel{e^x}\cancel{e^{-x}}\right)=\frac44=1$
- $\cosh 0=1 \quad \sinh 0=0$
- cosh è pari DIM $\cosh(x)=\cosh(-x)\iff\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^{-x}+e^x}{2}$ ✓
- sinh è dispari DIM $\sinh(x)=-\sinh(-x)\iff\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{-(e^{-x}-e^x)}{2}$ ✓
- $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x$ DIM $\frac14(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+\frac14(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})=$
$=\frac14\left(e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{y-x}}-e^{-x-y}\right)+\frac14\left(e^{y+x}+\cancel{e^{y-x}}-\cancel{e^{-y+x}}-e^{-y-x}\right)=\frac{2(e^{y+x}-e^{-y-x})}{4}=\sinh(x+y)$
- $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$ DIM $\frac14(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+\frac14(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})=$
$=\frac14\left(e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{y-x}}+e^{-x-y}\right)+\frac14\left(e^{x+y}-\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{y-x}}+e^{-x-y}\right)=\frac{2(e^{x+y}+e^{-x-y})}{4}=\cosh(x+y)$

Settsinh e settcosh

$y=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\iff 2y=e^x-e^{-x}\iff e^x(e^{-x}-e^x+2y)=e^x(0)\iff e^{2x}-2ye^x-1=0 \underset{\text{pongo } t=e^x}{\iff} t^2-2ty-1=0$

$t=y\pm\sqrt{y^2+1}\iff x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\text{settsinh}\,y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

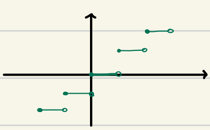
↳ scelgo "+" perché $y-\sqrt{y^2+1}<0\ \forall y$ ed $e^x>0\ \forall x$

$y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\iff e^x+e^{-x}-2y=0\iff e^{2x}-2ye^x+1=0\underset{\text{pongo } t=e^x}{\iff} t^2-2ty+1=0$

$t=y\pm\sqrt{y^2-1}\iff x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$

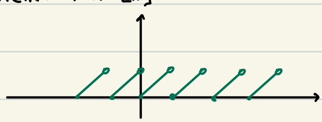
Funzione parte intera

$[x]$ è il più grande intero $\le x$



Funzione parte frazionaria o mantissa

$x\in\mathbb{R}\longmapsto x-[x]$



Funzione caratteristica di A

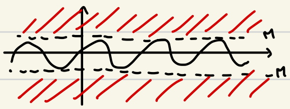
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$ funzione di Dirichlet

Funzioni limitate

$f: A \to \mathbb{R}$ si dice limitata se $f(A)$ è un insieme limitato:

$\exists M > 0$ t.c. $|f(x)| \le M$



Massimo e minimo

Sia $f: D \to \mathbb{R}$, $A \subseteq D$, $x_0 \subseteq D$

Si dice che x_0 è massimo (minimo) locale di f se $f(x_0) \overset{\le}{\ge} f(x)$ $\forall x \in A$

Si dice che x_0 è massimo (minimo) globale di f se $f(x_0) \overset{\le}{\ge} f(x)$ $\forall x \in D$

Estremo superiore e inferiore

Sia $f: A \to B$ limitata superiormente

M è estremo superiore (inferiore) di f se è l'estremo superiore (inferiore) di $f(A)$

Estremanti

I punti di massimo e minimo si dicono collettivamente punti estremanti

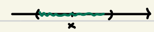
Regole calcolo dominio

$\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt[n]{f(x)}$	$f(x) \ge 0$ se n pari
$\log_a f(x)$	$f(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\tan f(x)$	$f(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Intorni sferici

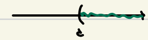
$x \in \mathbb{R}$, $r > 0$

Si definisce intorno sferico di x (e raggio r) l'intervallo $(x-r, x+r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < r\}$



Si definisce intorno sferico di $+\infty$ / $-\infty$ una qualsiasi semiretta $(a, +\infty) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > a\}$ $a \in \mathbb{R}$

$(-\infty, a) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < a\}$ $a \in \mathbb{R}$



Proprietà di separazione degli intorni

$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$ $\exists U_1$ intorno di x e $\exists U_2$ intorno di y t.c. $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

DIM

- Se $x, y \in \mathbb{R}$ basta scegliere $r < \frac{|x-y|}{2}$ $\Rightarrow$ $(x-r, x+r) \cap (y-r, y+r) \neq \emptyset$
- Se $x \in \mathbb{R}$, $y = +\infty$, $r > 0$ fissato

  $(x-r, x+r) \cap (x+r+1, +\infty)$
- Se $x = +\infty$, $y \in \mathbb{R}$

  $(y-r, y+r) \cap (y+r+1, +\infty)$
- Se $x = -\infty$, $y = +\infty$

  $(-\infty, a) \cap (a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$

Punti di accumulazione

Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

Si dice che $y \in \overline{\mathbb{R}}$ è punto di accumulazione per A se $\forall$ intorno U di y $\exists z \mid z \in U \cap A$, $z \neq y$

Se y NON è di accumulazione si dice isolato

Proprietà verificate definitivamente

Sia $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A

Consideriamo le proposizioni $P(x)$, $x \in A$

Si dice che $P(x)$ vale definitivamente per $x \to x_0$ se $\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$P(x)$ è vera $\forall x \in A \cap U$, $x \neq x_0$

Limite

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A, $f: A \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se $\forall$ intorno $\mathcal{U}$ di l, $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $x \in V \cap A, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}$

oppure $\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{"piccolo"}}$ $\exists \delta > 0 \mid \underbrace{0 < |x - x_0| < \delta}_{\text{intorno in } x} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{\text{intorno in } y}$

Si dice che il limite per x che tende ad x_0 di f é l, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \mid x > M \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ $\quad \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \right)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \mid x < -M = f(x) > \varepsilon$ $\quad \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \right)$

$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \in (M, +\infty) \; (\Rightarrow f(x) > M)$ $\quad \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \right)$

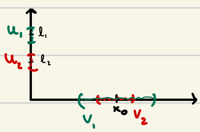
Teo (unicità del limite)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, allora tale limite é unico

DIM

Poniamo, per assurdo, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ e $l_1 \neq l_2$



Per le proprietà di separazione degli intorni: $\exists \mathcal{U}_1$ di l_1, $\exists \mathcal{U}_2$ di l_2 t.c. $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$

Per def di $\lim f = l_1$ $\exists V_1$ intorno di x_0 t.c. $x \in V_1 \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_1$

Per def. di $\lim f = l_2$ $\exists V_2$ intorno di x_0 t.c. $x \in V_2 \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_2$

Quindi, per $x \in V_1 \cap V_2 \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \in \underbrace{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2}_{\text{che é però } = \emptyset}$ $\quad ↯$

Teo (locale limitatezza di f con limite finito)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A

Supponiamo che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ é definitivamente limitata per $x \to x_0$ $\left(\exists M > 0 \mid |f(x)| < M \text{ in un intorno di } x_0 \right)$

DIM

$\forall \varepsilon>0 \ \exists V$ di x_0 t.c. $x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$ (poniamo $\varepsilon=1$)

$|f(x)| = |f(x)-\ell+\ell| \leq \underbrace{|f(x)-\ell|}_{<1} + |\ell| < 1+|\ell|$ quindi $|f(x)|<1+|\ell|$ che possiamo chiamare M finito □

Limite dx/sx

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, ovvero, se $\forall$ intorno U di ℓ, $\exists \delta>0 \left| \begin{array}{l} x\in(x_0-\delta, x_0) \\ -\delta<x-x_0<0 \\ 0<x-x_0<\delta \Rightarrow f(x)\in U \\ x\in(x_0, \delta+x_0) \end{array} \right.$

PROP

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

DIM

Idea: Se "$\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$" nell'intorno di destra e di sinistra di x_0 allora è vera in un intorno di x_0

Modulo del limite

$A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 di acc. per A, $f: A\to\mathbb{R}$

① $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)-\ell|=0$

② $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)|=|\ell|$

DIM

① $\forall\varepsilon>0 \ \exists V$ di $x_0 \mid x\in V\cap A\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow ||f(x)-\ell|-0|<\varepsilon$

② $\forall\varepsilon>0 \ \exists V$ di $x_0 \mid x\in V\cap A\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \quad ||f(x)|-|\ell|| \leq |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Teo (permanenza del segno)

Sia $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ punto di acc. per A, $f: A\to\mathbb{R}$.

Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\neq 0$

Allora $\operatorname{sgn} f(x)=\operatorname{sgn}\ell$ definitivamente per $x\to x_0$

DIM

$\forall\varepsilon>0 \ \exists V$ di $x_0 \mid x\in V\cap A\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow \ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$

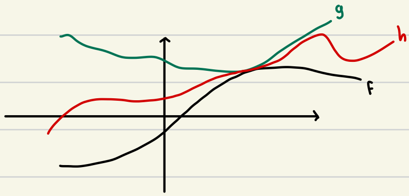
se $\ell>0$ scegliamo $\varepsilon=\frac{\ell}{2}>0$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists V$ di $x_0 \mid x\in V\cap A\setminus\{x_0\} \Rightarrow \begin{cases} f(x)>\ell-\varepsilon=\ell-\frac{\ell}{2}=\frac{\ell}{2}>0 \\ f(x)<\ell+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow f(x)>0$ def. per $x\to x_0$

se $\ell<0$ scegliamo $\varepsilon=-\frac{\ell}{2}>0$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists V$ di $x_0 \mid x\in V\cap A\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} f(x)>\ell-\varepsilon \\ f(x)<\ell+\varepsilon=\ell-\frac{\ell}{2}=\frac{\ell}{2}<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)<0$ def. per $x\to x_0$ □

Teo (dei 2 carabinieri)



Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A

Se ① $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ def. per $x \to x_0$

② $\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

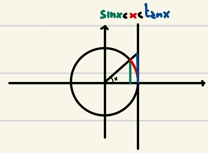
DIM

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_1$ di $x_0 \mid x \in V_1 \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_2$ di $x_0 \mid x \in V_2 \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$

$x \in V_1 \cap V_2 \cap A \setminus \{x_0\} \cap V \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Limite notevole sinx/x



Si prova con argomenti geometrici che $\sin x < x < \tan x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ $\quad \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1\right)$

Per il teorema dei carabinieri $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Limiti notevoli derivati

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ DIM $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos^2 x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\to 1} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ DIM $\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ DIM $\lim_{y \to 0} \frac{y}{\tan y}$ $\quad y = \arctan x$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\tan y}{y}} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ DIM $\lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y}$ $\quad y = \arcsin x$ $\quad \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1$

Limite notevole di Nepero

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

DIM

Dimostrazione (non banale) a p. 25

Limiti notevoli derivati

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$
- $\lim_{x \to 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (x+1)}{x} = \log_a e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$
- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

Forme indeterminate

"$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$" "$\infty - \infty$" "∞^0" "1^∞"

Proprietà di infiniti e infinitesimi

① "$\frac{1}{\infty} = 0$" $\quad \frac{f(x) \text{ limitata}}{|g(x)| = +\infty} = 0$

② "$\frac{1}{0} = \infty$" $\quad \frac{f(x) \text{ def. lontana da } 0}{\lim_{x \to x_0} g(x) = 0} = +\infty$

③ "$\frac{\infty}{0} = \infty$" $\quad \frac{|f| \to +\infty}{|g| \to 0} \longrightarrow +\infty$

④ "$\frac{0}{\infty} = 0$" $\quad \frac{|f| \to 0}{|g| \to +\infty} \to 0$

⑤ "$\infty \cdot 1 = \infty$" $(f \text{ lontana da } 0) \cdot (|g| \to +\infty) \longrightarrow +\infty$

⑥ "$1 \cdot 0 = 0$" $\quad (f \text{ limitata}) \cdot (g \to 0) \to 0$

Teo (limite della somma)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di acc. per A, $f, g: A \to \mathbb{R}$

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \qquad l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$

DIM

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_1 \text{ di } x_0 \mid x \in V_1 \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_2 \text{ di } x_0 \mid x \in V_2 \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Se $x \in V_2 \cap V_1 \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow l_1 + l_2 - \varepsilon < f(x) + g(x) < l_1 + l_2 + \varepsilon \Rightarrow |f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| < \varepsilon$

Teo

$f, g: A \to \mathbb{R}$, x_0 di acc. per A

① $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

② $g(x)$ è limitata inferiormente (superiormente) per $x \to x_0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \pm\infty$

Teo (prodotto dei limiti)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 di acc. per A, $f, g: A \to \mathbb{R}$

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = l_1 \cdot l_2$

DIM

Va mostrato:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V \text{ di } x_0 \mid x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2| < \varepsilon$

$|f(x) g(x) - l_1 \cdot l_2| = |f(x) g(x) + f(x) l_2 - f(x) l_2 - l_1 \cdot l_2| = |f(x)(g(x) - l_2) + l_2 (f(x) - l_1)| \leq |f(x)| \, |g(x) - l_2| + |l_2| \, |f(x) - l_1|$

teorema locale limitatezza di f con limite finito

① $f(x) \to l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M>0$ t.c. $|f(x)|<M \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$

② $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists V_1$ t.c. $x \in V_1 \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - l_2| < \varepsilon_1$

③ $\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists V_2$ t.c. $x \in V_2 \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon_2$

$1+2+3 \Rightarrow |f(x)g(x) - l_1 l_2| \le M \cdot \varepsilon_1 + |l_2| \cdot \varepsilon_2 = \cancel{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{M}} + \cancel{|l_2|} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{|l_2|}} = \varepsilon$

Teo (limite del quoziente)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A, $f, g: A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

DIM

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = l_1 \cdot \frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$\hookrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists V$ di $x_0 \mid x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|l_2 - g(x)|}{|g(x)| \cdot |l_2|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|g(x) - l_2|}{|g(x)|\,|l_2|} < \varepsilon$

teorema locale limitatezza di f con limite finito

① $g(x) \to l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M>0$ t.c. $|g(x)|<M \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$

② $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists V_1$ t.c. $x \in V_1 \setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - l_2| < \varepsilon_1$

$1+2 \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2}\right| < \frac{\varepsilon_1}{M\,|l_2|} < \varepsilon$

□

Teo (del confronto)

Siano $f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di acc per A e
① $f(x) \overset{\le}{\ge} g(x)$ def. per $x \to x_0$
② $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$

Allora $l_1 \overset{\le}{\ge} l_2$

DIM

Caso $\ge$ Per assurdo $l_1 < l_2$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 - l_2 < 0$$

per teo permanenza del segno (dato che $l_1 - l_2 < 0$) $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$ che contraddice l'ipotesi ①

Teo (cambio di variabile)

Supponiamo:

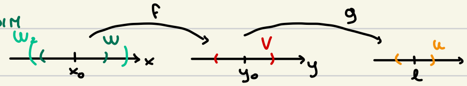
① $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

② $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

③ $f(x) \neq y_0$ def. per $x \to x_0$

$$\left.\begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$$

DIM



② $\forall\, u$ di ℓ $\exists\, V$ di $y_0 \mid y \in V \setminus \{y_0\} \Rightarrow g(y) \in u$

① $\exists\, W$ di $x_0 \mid x \in W \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

③ $\exists\, W_2$ di $x_0 \mid x \in W_2 \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \neq y_0$

$\Rightarrow x \in (W \cap W_2 \cap A) \setminus \{x_0\} \overset{1+3}{\Rightarrow} f(x) \in V \setminus \{y_0\} \overset{②}{\Rightarrow} g(f(x)) \in u \quad \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$ $\square$

Teo (esistenza limite di funzioni monotone)

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f è crescente (decrescente) su $(a,b) \Rightarrow \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f$ ($\inf f$), $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f$ ($\sup f$)

DIM

Se $\sup f(x) = S \in \mathbb{R}$

$\forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \leq S$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x_\varepsilon \in (a,b) \mid f(x_\varepsilon) > S - \varepsilon$

caratterizzazione del sup

$\forall x \geq x_\varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x_\varepsilon)$ crescenza di f

$\Rightarrow S - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq S < S + \varepsilon \Rightarrow S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - S| < \varepsilon$ $\forall x \in (x_\varepsilon, b)$

Se $\sup f(x) = +\infty$

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists\, x_M \in (a,b) \mid f(x_M) > M$ caratterizzazione del sup

$\forall x \geq x_M \Rightarrow f(x) \geq f(x_M)$ crescenza di f

$M < f(x_M) \leq f(x) \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R} \ \exists\, x_M \mid x_M \in (a,b) \Rightarrow f(x) > M \Leftrightarrow \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

Simbolo di Landau "o piccolo"

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di acc. per A, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $g \neq 0$ def. per $x \to x_0$

Si dice $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

F è quindi trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$

Algebra degli "o piccolo"

- $o(g) \pm o(g) = o(g)$
- $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
- $f \cdot o(g) = o(fg)$
- $a \cdot o(g) = o(g)$ [vale anche per $f(x)$ se è limitata per $x \to x_0$]
- $(o(g))^{\lambda} = o(|g|^{\lambda})$
- $o(g + o(g)) = o(g)$, $g \neq 0$ def.

Asintoticità

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Si dice che f e g sono asintotiche e si scrive $f \sim g$ per $x \to x_0$

Relazione asintoticità e "o piccoli"

$$f \sim g \iff f = g + o(g)$$

DIM

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right) = 0 \iff f(x) - g(x) = o(g(x)) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$

Teo (principio di sostituzione)

Siano $f, f_1, g, g_1 : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A. $g(x) \neq 0$ def. per $x \to x_0$

Se $f = f_1 + o(f_1)$
$g = g_1 + o(g_1)$ per $x \to x_0$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1}$

per def. di o piccolo

DIM

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1 + o(f_1)}{g_1 + o(g_1)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1\left(1 + \overbrace{\frac{o(f_1)}{f_1}}^{\to 0}\right)}{g_1\left(1 + \underbrace{\frac{o(g_1)}{g_1}}_{\to 0}\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$$

Simbolo di Landau "O grande"

Siano $f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di acc. per A.

Si dice che f è O grande di g per $x \to x_0$ (si scrive $f(x) = O(g(x))$)

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$

In particolare, se f è limitata in un intorno di x_0 si scrive $f = O(1)$

Ordine di infinito e infinitesimo di f rispetto a g

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di acc. per A. f, g infinitesime (infinite)

- f, g si dicono infinitesime (infinite) dello stesso ordine se:

  $$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = l > 0$$

- f si dice infinitesima (infinita) di ordine superiore a g se:

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (f = o(g) \text{ per } x \to x_0)$$

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad (g = o(f) \text{ per } x \to x_0)$$

- f si dice infinitesima (infinita) di ordine inferiore a g se:

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad (g = o(f) \text{ per } x \to x_0)$$

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty \quad (f = o(g) \text{ per } x \to x_0)$$

- f e g non sono confrontabili se:

  $$\nexists \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

Ordine di infinito e infinitesimo

- Si dice che f è infinitesima di ordine $\alpha > 0$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ se:

  $$f(x) \sim |x - x_0|^\alpha$$

- Si dice che f è infinita di ordine $\alpha > 0$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ se:

  $$f(x) \sim \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}$$

- Si dice che f è infinita (infinitesima) di ordine $\alpha > 0$ per $x \to +\infty$ se:

  $$f(x) \sim x^\alpha \quad \left(f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \right)$$

Gerarchia degli infiniti

$$\log x < \sqrt{x} < x < x^2 < e^x < x^x$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

Teo (formula di Taylor con resto di Peano)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 interno a I. Supponiamo f derivabile $n-1$ volte in I e n volte in x_0 $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$

Allora $\forall x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

DIM

La dim segue da def. di "o piccolo" $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{\cancel{k}(k-1)!} \cdot \cancel{k}(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} \underset{n-1 \text{ volte}}{\overset{(H)}{=}} \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0$$

Teo (formula di Taylor con resto di Lagrange)

I intervallo, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in I.

Allora $\forall x \in I \ \exists c_x \in (x_0, x)$ t.c.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Nomenclatura

$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ polinomio di Taylor

Se $x_0 = 0$ prende il nome di polinomio di McLaurin

Teo (condizione sufficiente per la "sviluppabilitá" In serie di Taylor)

"La successione delle derivate cresce al più esponenzialmente"

Supponiamo che $\forall x \in I \ \exists M, L > 0$ t.c. $|f^{(n)}(x)| \leq M L^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Allora $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

DIM

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \text{resto della formula di Taylor} = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M L^{n+1} |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

Sviluppi funzioni elementari in $x_0=0$

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^k)$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$
- $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$
- $\sinh x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cosh x = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	per $x \to 0$
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$	per $x \to 0$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	per $x \to 0$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	per $x \to 0$
$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$	per $x \to 0$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$	per $x \to 0$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$	per $x \to 0$
$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	per $x \to 0$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	per $x \to 0$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$	per $x \to 0$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$	per $x \to 0$

$a^x = 1 + x\ln(a) + o(x)$

Successioni

Una successione di numeri reali è una funzione definita su $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{R}$ ovvero $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

L'immagine del numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si indica con a_n (termine n-esimo della successione)

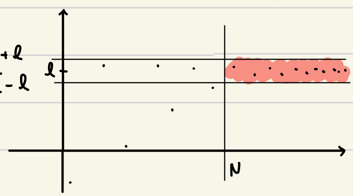
Una generica successione si indica con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Solitamente si rappresentando a_n come y e n come x

Proprietà verificate definitivamente

Si dice che una successione verifica definitivamente una certa proprietà se questa è verificata da tutti i termini della successione eccetto al più un numero finito di termini

Limite di una successione



Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri reali, $\ell \in \mathbb{R}$

Si dice che $\{a_n\}$ ha limite ℓ per $n \to \infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \ell\right)$ se:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \mid \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n \to \pm\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \mid \forall n > N \Rightarrow a_n > M$ ($a_n < M$)

Convergenza/Divergenza

Una successione che ammette limite finito $\ell \in \mathbb{R}$ si dice CONVERGENTE

mentre se $\ell = \pm\infty$ si dice DIVERGENTE (a $+\infty$ o $-\infty$)

Una successione che ammette limite si dice REGOLARE altrimenti si dice IRREGOLARE o INDETERMINATA

Se una successione ammette limite $= 0$ si dice INFINITESIMA

Monotonia

Una successione $\{a_n\}$ si dice crescente (strett. crescente) se $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) $\forall n$

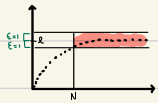
Una successione $\{a_n\}$ si dice decrescente (strett. decrescente) se $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) $\forall n$

Teo (limitatezza di una successione convergente)

Una successione convergente è limitata

DIM

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ (per hp) $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists N \mid \forall n>N \Rightarrow |a_n-\ell|<\varepsilon$



Fissiamo $\varepsilon=1>0 \Rightarrow \exists N \mid \forall n>N \Rightarrow |a_n-\ell|<1$

$\hookrightarrow$ Possiamo quindi dire che $|a_n| = |a_n+\ell-\ell| \le |a_n-\ell|+|\ell| < 1+|\ell| \in \mathbb{R} \quad \forall n>N$

Va verificato che a_n è limitata anche per $n<N$, questo è vero perché $\{a_0, a_1, \dots a_N\}$ è un insieme limitato.

Quindi in totale, preso $M=\max\{|a_0|, |a_1|, \dots |a_N|, 1+|\ell|\}$ possiamo dire che $|a_n|\le M \quad \forall n$

Teo (caratterizzazione del limite di successioni monotone)

Se $\{a_n\}$ crescente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$

Se $\{a_n\}$ decrescente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$

COROLLARIO

Ogni successione definitivamente monotona e limitata $\Rightarrow$ converge

Teo (Sul numero di Nepero)

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ esiste finito $2<e<4$ e $e\notin\mathbb{Q}$

DIM

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$2 = a_1 \underset{①}{\le} a_n \underset{③}{<} b_n \underset{②}{\le} b_1 = 4$

① a_n crescente $\iff a_n \le a_{n+1} \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \iff \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1 \iff \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0 \iff \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right) \overset{\text{Bernoulli}}{\ge} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$

② b_n decrescente $\iff b_n \ge b_{n+1} \iff \frac{b_n}{b_{n+1}} \ge 1$

$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{\overset{n^2+2n+1}{(n+1)^2}}{\underset{n^2+2n}{n(n+2)}}\right)^{n+2}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\left(\frac{n}{n+1}\right) \overset{\text{Bernoulli}}{\ge} \left(1+\frac{\cancel{n+2}}{n\cancel{(n+2)}}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n}}\right)\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}}\right) = 1$

③ $a_n < b_n \ \forall n \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$

a_n è quindi monotona crescente e limitata $\Rightarrow$ esiste il limite di a_n

$2 < \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} < 4$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 0} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Sottosuccessioni

In alcuni casi è utile considerare una restrizione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ad un certo sottoinsieme infinito K di $\mathbb{N}$

$\{a_{k_n}\}$ si dice sottosuccessione o successione estratta di a_n

Teo (limite sottosuccessione)

Una successione ha limite ℓ $\Leftrightarrow$ tutte le sottosuccessioni hanno limite ℓ

Teo (di Weierstrass)

Ogni sottosuccessione limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente

Teo (di Bolzano-Weierstrass)

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di $\mathbb{R}$ ha almeno un punto di acc.

Teo (ponte o collegamento)

$f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per A. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
2. Per ogni successione $\{x_n\}$ t.c.
   - $x_n \in A \ \forall n$
   - $x_n \neq x_0$ definitivamente per $n \to +\infty$
   - $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$

   Si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$

DIM

① $\Rightarrow$ ② segue dal teorema di cambio variabile / composizione

② $\Rightarrow$ ① Per assurdo $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell \Leftrightarrow \neg(\forall U$ di ℓ, $\exists\delta \mid 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\in U) \Leftrightarrow \exists U_0$ di $\ell \mid \forall\delta>0\ \exists x: 0<|x-x_0|<\delta$ e $f(x)\notin U_0$

- $x_0 \in \mathbb{R}$ Fissato U_0, per $\delta = 1$ troviamo $x_1 \in A \mid 0<|x_1-x_0|<1$ e $f(x_1)\notin U_0$

  $\delta = \frac{1}{n}$ troviamo $x_n \in A \mid 0<|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e $f(x_n)\notin U_0$

  $\Rightarrow V = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$, $x_n \in V \cap A \setminus \{x_0\} \mid f(x_n)\notin U_0$

  Siamo riusciti a costruire x_n t.c. $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x_0$ $x_n \neq x_0$ def. e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \ell$ (contraddice hp 2)

- $x_0 = \pm\infty$

  $V = (n, +\infty) \rightsquigarrow$ come sopra, $\exists x_n \in V \mid f(x_n)\notin U_0$ Quindi $x_n \to +\infty$, ma $f(x_n) \not\to \ell$

NOTA

Valgono per le successioni tutti i teoremi dimostrati per i limiti di funzione

Serie

La somma degli elementi di una successione

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots$ definiamo la successione delle somme parziali come $S_K = \sum_{n=0}^{K} a_n$

S_K ci può dare ora informazioni sulla serie:

	CONVERGENTE	DIVERGENTE	IRREGOLARE
$\lim_{K \to +\infty} S_K =$	$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\nexists$

Se convergente si scrive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$

Se divergente si scrive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$

Serie geometrica

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \,,\ q \in \mathbb{R}$

$S_K = \sum_{n=0}^{K} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^K = \frac{1-q^{K+1}}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{K \to \infty} S_K = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Serie telescopiche

Sia $\sum a_n = \sum (b_n - b_{n+1})$ si ha che $\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\{b_n\}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim_{n \to \infty} b_{n+1}$

Serie di Mengoli

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge ad 1

DIM

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$

$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $S_2 = S_1 + a_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$ $\quad n \to +\infty \quad S_n = 1 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = 1$

Quindi la $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Proprietà di linearità

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ $\sum_{n=0}^{\infty} = B$ due serie convergenti. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Allora: $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B \Rightarrow$ converge

Resto n-esimo

Si dice resto n-esimo della serie "l'errore" che si commette nell'approssimare la serie alla somma parziale

$S - \sum_{K=0}^{n} a_K = \sum_{K=n+1}^{+\infty} a_K$

Condizione necessaria di convergenza

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ è convergente allora:

- il resto n-esimo tende a 0 per $n \to +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (questa è quindi condizione necessaria, MA NON SUFFICIENTE, alla convergenza della serie.)

DIM

- $R = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S - S_n \xrightarrow{n\to+\infty} S - S = 0$ vero solo perché $\sum a_n$ converge
- $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

Serie a segno costante

$\{a_n\}$ con $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, possiamo dire le serie a termini positivi non sono irregolari

DIM

$S_n = S_{n-1} + \underbrace{a_n}_{\geq 0} \geq S_{n-1} \quad \forall n$

$\Rightarrow S_n$ è monotona crescente

$\Rightarrow S_n$ ammette limite finito o infinito

Convergenza assoluta

Sia $\sum a_n$ una serie

Diciamo che $\sum a_n$ è assolutamente convergente se $\sum |a_n|$ converge

Se la serie non è assolutamente convergente si dice semplicemente convergente

① convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza semplice

② divergenza assoluta $\not\Rightarrow$ divergenza semplice

DIM

① Per def. di modulo $\left.\begin{array}{l} a_n \leq |a_n| \\ |a_n| \geq -a_n \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq \underbrace{|a_n| - a_n}_{= b_n} \leq |a_n| + |a_n| = 2|a_n|$

$b_n \leq 2|a_n| \Rightarrow$ per crit. del confronto b_n è convergente

ma $b_n = |a_n| - a_n \Leftrightarrow a_n = |a_n| - b_n$ quindi a_n converge perché differenza di successioni convergenti

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

DIM

resto n-esimo $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} (1) = \frac{n}{2n} \not\to 0$, manca una condizione necessaria di convergenza

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{(2^n)^\alpha}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$$

converge $\iff 2^{1-\alpha} < 1 \iff 1-\alpha < 0 \iff \alpha > 1$

diverge negli altri casi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Serie armonica generalizzata con il logaritmo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \vee \alpha = 1 \wedge \beta > 1 \\ \text{diverge} & \alpha < 1 \vee \alpha = 1 \wedge \beta \leq 1 \end{cases}$$

Criterio di condensazione o Cauchy

Data $\sum a_n$ con a_n positivo e decrescente

Allora: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi t.c. $(0 \leq) a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Allora: 1. Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

2. Se $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$

DIM

Siano $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ due successioni monotone crescenti $\Rightarrow$ ammettono limite $\lim_{n\to\infty} A_n = \sup A_n = A$

$\lim_{n\to\infty} B_n = \sup B_n = B$

1. $B \in \mathbb{R}$ per hp, dato che $B > A$, anche $A \in \mathbb{R}$

2. Se $A = +\infty$ e $A < B$, $B = +\infty$

Criterio del confronto asintotico

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ a termini positivi $\forall n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora: ① Se $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \Rightarrow \left(\sum a_n \overset{\text{diverge}}{\text{converge}} \Leftrightarrow \sum b_n \overset{\text{diverge}}{\text{converge}}\right)$

② Se $\ell = 0$ $\left(a_n = o(b_n) \text{ per } n\to\infty\right) \Rightarrow \left(\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}\right)$

③ Se $\ell = \pm\infty$ $\left(b_n = o(a_n) \text{ per } n\to\infty\right) \Rightarrow \left(\sum b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge}\right)$

DIM

① $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell > 0$

Dalla def. di limite: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \mid \forall n > N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$

preso $\varepsilon = \frac{\ell}{2} \to \frac{\ell}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2}\ell b_n$

Quindi per il crit. del confronto $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ converge

② $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \mid \forall n > N\ \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon b_n$

Per il crit. del confronto $\sum a_n < +\infty$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \Rightarrow \forall M > 0\ \exists N \mid \forall n > N \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} > M \Rightarrow a_n > M b_n$

Per il crit. del confronto $\sum a_n$ diverge

Criterio della radice

Sia $\{a_n\}$ a termini positivi. Supponiamo che esiste $k \in (0,1)$ e N t.c.

① $\sqrt[n]{a_n} < 1\ \forall n > N \Rightarrow \sum a_n$ converge

② $\sqrt[n]{a_n} > 1\ \forall n \geq N \Rightarrow \sum a_n$ diverge

DIM

① $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1\ \forall n > N \Rightarrow a_n \leq k^n < 1$

$\sum k^n$ è una serie convergente $\Rightarrow \sum a_n < +\infty$

② $a_n \geq 1\ \forall n > N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge (termine generale $\not\to 0$)

Criterio della radice asintotica

Sia a_n successione con $a_n \geq 0$. Allora

① Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

② Se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

DIM

① $\sqrt[n]{a_n} \to l < 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid l + \varepsilon < 1$

Per def. di limite $\exists N \mid \forall n \geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} - l < \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow a_n < (l+\varepsilon)^n$

a_n è minorante di una serie geometrica di ragione $0 < l + \varepsilon < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$

② $\sqrt[n]{a_n} \to l > 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid l - \varepsilon > 1$

Per def. di limite $\exists N \mid \forall n \geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} - l > -\varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon > 1 \Leftrightarrow a_n > (l-\varepsilon)^n > 1$

a_n è maggiorante di una serie geometrica di ragione $l - \varepsilon > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Criterio di Leibniz

Sia $\{a_n\}$, $a_n \geq 0 \mid a_{n+1} \leq a_n$ def. per $n \to +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n < +\infty$

DIM

$S_{2k} = \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n a_n$ é decrescente ① infatti: $S_{2(k+1)} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \underset{a_n \text{ decrescente}}{\leq} S_{2k}$

$S_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n a_n$ é crescente ② infatti: $S_{2(k+1)+1} = S_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq S_{2k+1}$

$S_1 \overset{②}{\leq} S_{2k+1} \leq S_{2k} = S_{2k-1} + a_{2k} \overset{①}{\leq} S_2 \Rightarrow \{S_{2k}\}, \{S_{2k+1}\}$ convergenti perché monotone e limitate

$|S_{2k+1} - S_{2k}| = |a_{2k+1}| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (il termine generale è infinitesimo per hp)

Le successioni (a indici pari e dispari) convergono $\Rightarrow$ converge $S_k \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1) a_n$ converge

Criterio del rapporto

① $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$

② $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

Funzioni continue

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ punto di acc. per A

f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f si dice continua in x_0 se x_0 è un punto isolato

Se f è continua $\forall x \in A$ si dice che f è continua in A e si scrive $f \in C^0(A)$

PROP

Somma, prodotto, quoziente di funzioni continue sono funzioni continue

Punti di discontinuità

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di in cui $f: A \to \mathbb{R}$ non è continua si dice che:

① x_0 è un punto di discontinuità eliminabile se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

② x_0 è un punto di discontinuità di salto se: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

③ x_0 è un punto di discontinuità di II specie quando il limite destro e/o quello sinistro è infinito o $\nexists$

Teo (di Weierstrass)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato e $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Allora f ammette massimo e minimo su $[a,b]$, ovvero esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ t.c. $f(x_m) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$

$f(x_M) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

DIM

.costruisco una successione "massimizzante"

ⓐ $\sup_{[a,b]} f = l \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in [a,b] \mid f(x_n) > l - \frac{1}{n}$

ⓑ $\sup_{[a,b]} f = l = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in [a,b] \mid f(x_n) > n$

la successione x_n così costruita $<$ $x_n \in [a,b]$ $\forall n$; $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

-esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente in $[a,b]$, $x_{n_k} \to \bar{x} \in [a,b]$

ⓐ $f(\bar{x}) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = l = \sup_{[a,b]} f$

ⓑ si esclude a posteriori, in $\bar{x}$ la f deve assumere un valore finito affinché x_{n_k} converga

Teo (degli zeri)

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato e $f \in C^0([a,b])$

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ (segni discordi)

Allora $\exists \bar{x} \in [a,b]$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$

DIM

$a \quad c \quad b$

Utilizzo il metodo di bisezione: preso $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $c = \frac{a+b}{2}$

- $f(c) = 0$ FINE
- $f(c) > 0$ $\quad a_1 = a \quad b_1 = c$
- $f(c) < 0$ $\quad a_1 = c \quad b_1 = b$

itero con $[a_1, b_1]$

Si ottiene così una successione di intervalli

① $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \ldots \subset [a,b] \Rightarrow a \leq a_n \leq b_n \leq b$

② $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$

③ $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \leq \ldots \leq \dfrac{b-a}{2^n}$

④ a_n è monotona crescente b_n è decrescente

$b_n - a_n \to 0 \Rightarrow \lim b_n = \lim a_n = \bar{x} \Rightarrow a_n \to b_n = \bar{x}$

$0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n) = f(\bar{x}) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

Teo (dei valori intermedi)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C^0(I) \Rightarrow f(I)$ è un intervallo (f assume tutti i valori tra $\inf\limits_I f$ e $\sup\limits_I f$)

Invertibilità

Sia $f: A \to \mathbb{R}$

Se $\forall y \in f(A)\ \exists! x \in A$ t.c. $f(x) = y$ f si dice invertibile

In particolare la funzione che associa ad ogni uscita $y \in f(A)$ l'unico $x \in A$ t.c. $f(x) = y$ si chiama funzione inversa e si indica con f^{-1}

Teo (invertibilità funzione inversa)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. f continua in $[a,b]$

Allora f è invertibile $\iff$ f è strettamente monotona

Teo (continuità della funzione inversa)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Sia f continua in $[a,b]$ e strettamente monotona (cresc. o decresc.).

Allora f è invertibile e la sua inversa è continua e strettamente monotono

Derivate

$I\subseteq\mathbb{R}$ aperto, $f:I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$.

f è derivabile in x_0 $\iff$ $\exists m\in\mathbb{R} \mid f(x)-(m(x-x_0)+f(x_0))=o(x-x_0)$

In tal caso $m=f'(x)$ (oppure $\frac{d}{dx}f(x_0)$ $Df(x_0)$)

Se f è derivabile in x_0 vale la formula di Taylor di primo ordine:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

Dal punto di vista geometrico $f'(x)$ è il coefficiente angolare della retta tangente ad $f(x)$

Prop (Continuità di una funzione derivabile)

f derivabile $\Rightarrow$ f continua

DIM

Se f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$ $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ per $x\to x_0$

Passo al limite $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x_0)+\lim_{x\to x_0}f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}=f(x_0)$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ $\Rightarrow$ f continua

Derivata destra e sinistra

Se $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ esistono finite, ma NON coincidono, x_0 si dice punto angoloso per f.

Derivate funzioni elementari

- $f(x)=\sin x$ $\quad f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin x\underbrace{\cos h}_{\to1}+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\cos x\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to1}+h\sin x\underbrace{\frac{\cos h-1}{hh}}_{\to-\frac{1}{2}}=\cos x$
- $f(x)=e^x$ $\quad f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=e^x$
- $f(x)=\log x$ $\quad f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(\cancel{\log(x)}+\boxed{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}-\cancel{\log(x)}\right)}{\underbrace{\frac{h}{x}}_{\to1}\cdot x}=\frac{1}{x}$
- $f(x)=c\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\overbrace{f(x+h)}^{c}-\overbrace{f(x)}^{c}}{h}=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Regole di derivazione

① $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$

② $D(f \cdot g) = Df \cdot g + f Dg$

③ $D\frac{f}{g},\ g \neq 0 = \frac{Df \cdot g - f Dg}{g^2}$

④ Regola della catena

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

DIM

① $\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(x_0) - \beta g(x_0)}{x - x_0} = \alpha \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

② $(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)f(x) + g(x_0)f(x) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\left(g(x) - g(x_0)\right) + g(x_0)\left(f(x) - f(x_0)\right)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$

continuità di f

③ $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-g(x_0) + g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \overset{\text{continuità di } g}{=} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x)}$

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

④ $(g(f))'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \, \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \underset{\substack{\text{pongo} \\ y = f(x)}}{=} \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x)) f'(x_0)$

passo al limite $x \to x_0$

$g'(f(x_0)) f'(x_0)$

Derivata della funzione inversa

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e strett. monotona (quindi invertibile). Sia $x_0 \in (a,b)$ e supponiamo f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 := f(x_0)$ e $Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

definita come

DIM

$x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(x)$

$$Df^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\neq 0$ per hp

Classificazioni dei punti di non derivabilità

- Se f è continua in x_0, e $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ f non è derivabile in x_0 e x_0 si dice a tangente verticale
- Se f è continua in x_0, ma $f'_+(x_0) = \pm\infty$ e $f'_-(x_0) = \mp\infty$ x_0 si dice cuspide
- Se tra $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ uno è finito e l'altro infinito x_0 si dice punto angoloso

Def (massimo e minimo)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ si dice massimo locale di f se $\exists V$ intorno di x_0 t.c.

1. $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V \cap A$

x_0 si dice minimo locale se vale:

2. $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V \cap A$

x_0 si dice minimo/massimo assoluto se, rispettivamente, 1 o 2 sono verificate $\forall x \in A$

x_0 min/max assoluto $\Rightarrow$ x_0 min/max locale

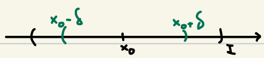
Teo (di Fermart)

Sia I intervallo aperto, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$

Se x_0 è un punto di estremo di f, allora $f'(x_0) = 0$

DIM

$\exists \delta > 0 \mid (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$



prendiamo x_0 punto di massimo $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \text{Sia } h > 0 \text{ e } h < \delta \Rightarrow f(x_0+h) \leq f(x_0) \\ \text{Sia } h < 0 \text{ e } h > -\delta \Rightarrow f(x_0+h) \leq f(x_0) \end{cases}$$

Quindi

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{h \geq 0} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{h \leq 0} \geq 0$$

f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ $\Rightarrow$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$

Teo (di Rolle)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

1. f continua in $[a,b]$
2. f derivabile in (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

Allora $\exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f'(\bar{x}) = 0$

DIM

f è continua in $[a,b]$ => per il teo di Weierstrass $\exists M, m \in [a,b]$ (MAX e min)

- Se M e m sono assunti agli estremi di $[a,b]$ => $m = M$ (per ③ $f(a)=f(b)$) => f costante => $f'(\bar{x})=0 \quad \forall \bar{x} \in [a,b]$
- M e m nell'intervallo $[a,b]$ => c'è punto di Max (o min) nell'intervallo e f derivabile => per Fermat $f'(\bar{x})=0$ dove $\bar{x} \mid f(\bar{x}) = M$

Teo (di Lagrange)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

① f continua in $[a,b]$

② f derivabile in (a,b)

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIM

Sia $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$$g(a) = f(a) - \cancel{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)} = f(a)$$

$$g(b) = \cancel{f(b)} - \frac{\cancel{f(b)} - f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = f(a)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(b) = g(a) \\ g \text{ continua in } [a,b] \\ g \text{ derivabile in } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{per teo. di Rolle} \Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b) \text{ t.c. } g'(\bar{x})=0$$

$$0 = g'(\bar{x}) = \left(f(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\bar{x}-a)\right)' = f'(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teo (caratterizzazione delle funzioni costanti)

Sia I intervallo. $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I.

Allora I è costante $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

DIM

($\Rightarrow$) ovvio

($\Leftarrow$) $\forall x_1 \neq x_2 \in I$ applico il teo. di Lagrange su F in $[x_1, x_2]$, $\exists \bar{x} \in [x_1, x_2]$ t.c. $f'(\bar{x}) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \underset{\text{per hp}}{=} 0$ =>

=> $f(x_1) = f(x_2)$ => f costante

Teo (di Cauchy)

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

- f, g continue in $[a,b]$
- f, g derivabili in (a,b)

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(\bar{x}) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(\bar{x})$

Teo (caratterizzazione delle funzioni monotone mediante derivata prima)

Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora:

- f crescente (decrescente) in $I \iff f'(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \in I$
- f strett. crescente (decrescente) in $I \iff f'(x) > 0$ ($<$) $\forall x \in I$

DIM

Studiamo il caso crescente (simile decrescente) in $x_0 \in I$

"$\Rightarrow$" $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ per crescenza di f $\big(f(x_0+h) > f(x_0)\big)$

"$\Leftarrow$" $\forall x_1 < x_2 \in I$ per teo. di Lagrange su f in $[x_1, x_2]$

$\exists \bar{x} \in (x_1, x_2)$ t.c. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{\geq 0}} = f'(\bar{x}) \geq 0$ per hp $\iff f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \iff f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f$ monotona crescente

Teo (di De l'Hôpital)

Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$ derivabili e t.c.

① $\lim_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} g(x) = 0$ $\quad (0 + \infty \quad 0 - \infty)$

② $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

③ Se $\exists \lim_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \, (\in \overline{\mathbb{R}})$

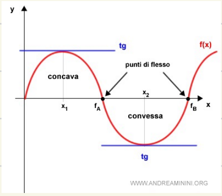
$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to a^+ \\ x \to b^-}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

DIM

$\forall \{x_n\} \subseteq (a,b) \setminus \{x_0\}$ t.c. $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{teo. ponte}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}{\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}} \overset{\text{teo. Cauchy}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} \overset{\text{teo. ponte}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

Funzioni convesse e concave



Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. f è concava/convessa in $I \iff \forall x, x_0 \in I \quad f(x) \underset{\geq}{\leq} \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}_{\text{retta tangente a } f \text{ in } x_0}$

Def. alternativa: $\forall x_1, x_2 \in I \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \overset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \lambda \in [0,1]$

https://www.geogebra.org/calculator/m3bc7ug8

$c \geq d$

blu rosso

PROP

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile

Allora f concava/convessa su $I \iff f'$ è decrescente/crescente su I

PROP

Se f derivabile due volte in I

Allora f è concava/convessa $\iff f''(x) \underset{\geq}{\leq} 0 \quad \forall x \in I$

DIM

f concava/convessa $\iff f'$ decrescente/crescente $\iff f'' \underset{\geq}{\leq} 0$

↑ prop. precedente ↑ caratterizzazione della derivata di funzioni monotone

Punti di flesso

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$

Se f è concava in un intorno sinistro di x_0 e convessa in un intorno destro (o viceversa)

Allora si dice che f ha un punto di flesso in x_0

Se $\exists f'(x_0) = 0 \quad x_0$ si dice flesso a tangente orizzontale

$\quad\quad\quad\quad\;\; = \pm\infty \quad x_0$ si dice flesso a tangente verticale

PROP

f derivabile 2 volte e f ha un flesso in $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

f' crescente f' decrescente

x_0

Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui

- f ha asintoto verticale se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
- f ha asintoto orizzontale se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- f ha asintoto obliquo se $\exists m, q \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$

Teo (caratterizzazione degli asintoti obliqui)

① $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

② $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$

③ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$

NOTA

f concava $+ f(0) \geq 0 \Rightarrow f(a+b) \leq f(a) + f(b) \quad a, b \in \mathbb{R}$

Integrali

Partizione

Sia $[a,b]$ insieme chiuso e limitato.

Si dice partizione P di $[a,b]$ una famiglia (finita) di punti $x_0 \dots x_n$ t.c. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

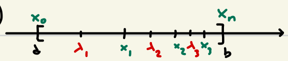
L'ampiezza di P si denota con $|P|$ e si indica $|P| = \max_{i=1,2,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$ (distanza massima tra due punti della partizione)

Partizione puntata

Una partizione puntata è una coppia (P, λ) dove λ è una n-pla di reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ t.c. $\lambda_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\dots,n$

Una partizione puntata è t.c. $a = x_0 \le \lambda_1 \le x_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le x_n = b$

(P, λ)

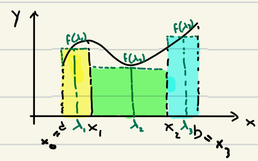


Def integrale secondo Cauchy-Riemann

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **LIMITATA** e sia (P, λ) partizione puntata

Si definisce come somma di Cauchy di f su (P, λ) la quantità

$$S(f, P, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)(x_i - x_{i-1}) = \text{somma dell'area dei rettangoli}$$



Secondo Cauchy-Riemann f è integrabile se l'approssimazione con i rettangoli migliore per $|P| \to 0$

Più formale: f è integrabile su $[a,b]$ secondo Cauchy-Riemann, con integrale di valore $I \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |P| < \delta \Rightarrow |S(f,P,\lambda) - I| < \varepsilon \quad \text{ovvero se} \quad I = \lim_{|P| \to 0} \int_a^b f(x)\,dx$$

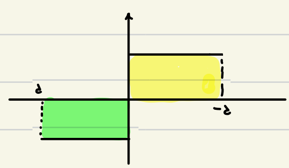
Significato geometrico di integrale

ⓐ $f(x) \ge 0$ allora il valore $\int_a^b f(x)\,dx$ definisce l'area della seguente regione di piano

ⓑ Se f non ha segno costante, l'integrale ha il significato geometrico di "area con segno"

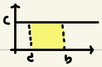
$\int_a^b f$ = area gialla - area verde

ES



$$\int_a^{-a} \mathrm{sgn}(x) = 0$$

Sia $f(x)=c>0 \quad \forall x\in[a,b]$



$$\forall(P,\lambda),\ S(f,P,\lambda)=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)(x_i-x_{i-1}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c(x_i-x_{i-1}) = c(x_n-x_0)}_{(\cancel{x_1}-x_0)+(\cancel{x_2}-\cancel{x_1})+(\cancel{x_3}-\cancel{x_2})+\dots+(x_n-\cancel{x_{n-1}})\,=\,x_n-x_0} = c(b-a)$$

Funzione di Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{se } \mathbb{R}\setminus(\mathbb{Q}\cap[0,1])\end{cases}
\quad
\begin{aligned} S(f,P,\lambda)&=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i-x_{i-1})=1 \\ S(f,P,\lambda)&=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot(x_i-x_{i-1})=0\end{aligned}
\Bigg\} \Rightarrow \nexists \lim_{|P|\to 0} S(f,P,\lambda) \Rightarrow f \text{ non derivabile}$$

Proprietà

Siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabili

① linearità: $\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x) = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

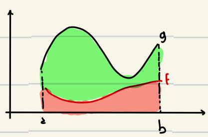
② additività rispetto all'intervallo di integrazione

Se $c\in[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

④ monotonia dell'integrale

Se $f(x)\le g(x)\ \forall x\in[a,b]$. Allora $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$



Disuguaglianza sull'integrale del modulo di una funzione integrabile

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile. Allora $|f|$ è integrabile e vale

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

DIM

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \quad \forall x\in[a,b]$

Per la monotonia di $\int_a^b$ si ha $-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx \iff \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Teo (condizione sufficiente per l'integrabilità)

① Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ MONOTONA. Allora f è integrabile su $[a,b]$

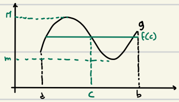
② Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA. Allora f è integrabile su $[a,b]$

③ Se f è monotona a tratti o continua a tratti allora f è integrabile

Teo (della media integrale)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile e siano $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ e $M = \sup\limits_{[a,b]} f$

Allora:



① $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

② Se f è continua in $[a,b]$ $\exists c\in[a,b]$ t.c. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

DIM

① $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x\in[a,b] \overset{\text{per monotonia}}{\Longrightarrow} m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$ $\qquad \left(\int_a^b m\,dx = mx\Big|_a^b = mb - ma = m(b-a)\right)$

② Da ① $\quad m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M \Rightarrow \exists c\in[a,b]$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

f continua, quindi assume tutti i valori tra inf e sup

Primitiva di una funzione

Sia $I\subseteq\mathbb{R}$ e $f:I\to\mathbb{R}$

Una funzione $F:I\to\mathbb{R}$ (derivabile) si dice primitiva di f se: $F'(x) = f(x) \quad \forall x\in I$

Integrale indefinito

Sia $f:I\to\mathbb{R}$, il simbolo $\int f(x)\,dx$ indica l'insieme delle primitive di f in I.

Teo (fondamentale del calcolo integrale v1)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA (e quindi integrabile) e $c\in[a,b]$.

Allora F_c è continua in $[a,b]$ e derivabile e vale $F_c'(x) = f(x)$ dove $F_c(x) = \int_c^x f(y)\,dy$ (NOTA: si applica la regola della catena)

DIM

$\forall x\in[a,b]$ fissato considero il rapporto incrementale

$$\frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} \underset{\text{per def } F_c}{=} \frac{1}{h}\left[\int_c^{x+h} f(y)\,dy - \int_c^x f(y)\,dy\right] = \frac{1}{h}\left[\int_x^c f(y)\,dy + \int_c^{x+h} f(y)\,dy\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy \underset{\substack{\text{teo. media integrale}\\ \exists c_h\in[x,x+h]}}{=} \frac{1}{h}\cdot h f(c_h) = f(c_h)$$

Quindi

$$F_c'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) \underset{\substack{c_h\to x \text{ per } h\to 0\\ + \\ f \text{ continua}}}{=} f(x)$$

Teo (fondamentale del calcolo integrale v2)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e F primitiva di f in $[a,b]$. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$$

DIM

Sia $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

Dal TFCI v1 sappiamo che G è derivabile in $[a,b]$ e $G'=f$ su $[a,b]$

$\Rightarrow F, G$ sono primitive di $f \overset{\text{oss }(F-G=c)}{\Rightarrow} \exists k\in\mathbb{R}$ t.c. $F-G=k$ su $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) = G(b) = G(b) - \overset{0}{\overline{G(a)}} = F(b)-\cancel{k}-(F(a)-\cancel{k}) = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

$G(b)=F(b)-k$
$G(a)=F(a)-k$

Integrali immediati

- $\int k\,dx = kx+c$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\quad \alpha\neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|+c$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x+c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x+c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x+c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x+c$
- $\int \sinh x\,dx = \cosh x+c$
- $\int \cosh x\,dx = \sinh x+c$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x+c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x+c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x+c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \text{settsinh}\,x+c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{settcosh}\,x+c$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \text{sett}\tanh x+c,\quad x\in(-1,1)$
- $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{f(x)}+c$

Integrazione per sostituzione

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua (quindi integrabile) e $g:[c,d]\to[a,b]$ derivabile con derivata continua e t.c. $\begin{matrix} g(c)=a \\ g(d)=b\end{matrix}$

Sia F primitiva di f in $[a,b]$ $(F'=f$ in $[a,b])$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(g(d))-F(g(c)) = F(g(t))\Big|_c^d = \int_c^d (F\circ g)'(t)\,dt \underset{\text{regola della catena}}{=} \int_c^d F'(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

Integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

DIM

$$(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)f(x) \iff \int (f(x)g(x))' - \int f(x)\cdot g'(x) = \int g(x)f'(x) \iff f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) = \int g(x)f'(x)$$

Integrazione delle funzioni razionali

Del tipo: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ P,Q polinomi

① Ci si riconduce al caso in cui $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ tramite la divisione polinomiale
② Usiamo il metodo della decomposizione in prodotti semplici
(i) Il polinomio $Q(x)$ si fattorizza nel prodotto di fattori di primo grado
(ii) Il polinomio $Q(x)$ presenta fattori irriducibili ⇒ ha radici complesse

Se (i) $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = I$ $a \neq 0, n \in \mathbb{N}$

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{a}{(ax+b)^n} = \begin{cases} \frac{1}{a} \log|ax+b| + c & \text{se } n=1 \\ -\frac{1}{a} \frac{1}{n-1} (ax+b)^{1-n} & \text{se } n>1 \end{cases}$$

Se (ii) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

Integrali riconducibili a integrali di funzioni razionali

R = funzione razionale

- $\int R(e^x)\, dx \rightsquigarrow e^x = t \quad dt = \frac{1}{t} dx$

$$\int R(e^x)\, dx = \int \frac{R(t)}{t} dt$$

- $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

$t = \tan \frac{x}{2}$ $\quad dx = \frac{2}{1+t^2} dx$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

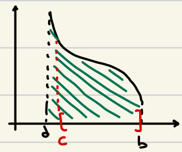
- $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\, dx$

$t = \tan x$ $\quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ $\quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$

Integrali generalizzati

Del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$; $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$; $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\,dx$ ($\frac{1}{x}$ non definita in $x=0$)



Vogliamo quindi estendere il concetto di integrale nel caso in cui $f:(a,b]\to\mathbb{R}$

usando che f è limitata in un intorno $[c,b]$ con $c>a$

Possiamo approssimare l'area del sottografico in $(a,b]$ con l'area in $[c,b]$ passando al limite $c\to a^+$

Formalizzato:

DEF

Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile su ogni sottoinsieme $[c,b]\subset(a,b]$

Si dice che f è integrabile in senso generalizzato (o improprio) su $(a,b]$ se:

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx \text{ esiste finito e vale } \int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

Si definisce similmente l'integrale generalizzato per $f:[a,b)\to\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

Sempre similmente si definisce per $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx\overset{def}{=}\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx$$

Integrali "notevoli"

$$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \begin{cases}\text{converge per } \alpha<1\\ \text{diverge per } \alpha\geq 1\end{cases}$$

$$\int_0^a\frac{1}{x^\alpha|\log x|^\beta}\,dx \text{ converge} \iff \alpha<1 \lor \alpha=1\land\beta>1$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha} \begin{cases}\text{converge per } \alpha>1\\ \text{diverge per } \alpha\leq 1\end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{e^{\gamma x}x^\alpha|\log x|^\beta}\,dx \text{ converge} \iff \gamma>0 \lor \gamma=1\land\alpha>1 \lor \gamma=1\land\alpha=1\land\beta>1$$

Assoluta integrabilità

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile. Si dice che $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ converge assolutamente se $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty$

Se $|f(x)|$ è integrabile in $[a,+\infty)$ Allora lo è anche $f(x)$ in $[a,+\infty)$ e vale $\left|\int_a^{+\infty}f(x)\,dx\right|\leq\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$

Criterio del confronto

Siano f,g definite in $[a,+\infty)$ e sia $x_0>a$ t.c. $0\leq f(x)\leq g(x)$ $\forall x\geq x_0$

① Se g è integrabile in $[a,+\infty)$, lo è anche f

② Se f non è integrabile in $[a,+\infty)$, non lo è neanche g

Criterio del confronto asintotico

$f, g \geq 0$ in $[a, +\infty)$

① Se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e g è integrabile in $[a, +\infty) \Rightarrow f$ è integrabile in $[a, +\infty)$

② Se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ $\quad f$ è integrabile $\Leftrightarrow g$ è integrabile

③ Se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e g non è integrabile in $[a, +\infty) \Rightarrow$ non lo è neanche f

Test della serie

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ decrescente e $f \geq 0$ allora:

$\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ converge $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Sia $G(x) \mid G'(x) = f(x)$

Allora $F(x) = G(x) \underbrace{- G(a)}_{c}$

Dominio della funzione integrale

Il $\operatorname{dom} F = \{x \in \mathbb{R} \mid$ l'integrale che definisce F converge$\}$

① Se f è continua in $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt < +\infty$

② criteri di convergenza

Forme possibili di funzioni integrali:

① $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ ② $F(x) = \int_{x_0}^{b(x)} f(t)\,dt$ ③ $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ e ④ $F(x) = \int_{-\infty}^{b(x)} f(t)\,dt$, $F(x) = \int_{b(x)}^{+\infty} f(t)\,dt$

① Se $x_0 \in \operatorname{dom} f \to$ determino il più grande intervallo in cui f è integrabile

Se $x_0 \notin \operatorname{dom} f \to$ Verificare che f sia integrabile in $x \to x_0^{\pm}$, poi $\uparrow$

② Imporre che $b(x) \in$ intervallo di integrabilità di f

③ come 2, ma anche per $a(x)$

④ - Valutare integrabilità in un intorno di $\pm\infty$
- determinare più grande intervallo $(-\infty, c)$ o $(c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$ in cui f è integrabile
- punto 3