Probabilità

0. Fondamenti matematici

0.1 Il fattoriale

Sia $n \geq 0$, il fattoriale di n é $n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$

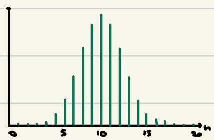
PROP

La formula di Stirling ci permette di approssimare $n!$, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ per $n \to +\infty$

0.2 Il binomiale

Si $n, k \geq 0$, il binomiale di n su k é

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



PROP

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$
3. $\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$
4. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

1. Combinatoria

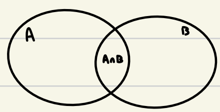
Tecniche e principi per contare il numero di elementi di un insieme finito.

Def La cardinalità di un insieme X ($|X|$) è il numero dei suoi elementi distinti

PROP

Siano A,B due sottoinsiemi finiti di un insieme X. Allora:

1. se A e B sono disgiunti, $A \cap B = \emptyset$, allora $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
3. $\underset{(a,b)}{|A \times B|} = |A| \times |B|$
4. Se X è finito $|A^c| = |X| - |A|$

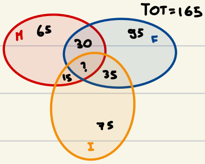


PROP

Più in generale, su un numero n di sottoinsiemi, $A_1, \dots, A_n \subset X$

$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| + (-1)^1 \Sigma_2 + \dots + (-1)^{n-2} \Sigma_{n-1} + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$ dove $\Sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$

ES



$165 = 65+95+75-30-35-15+M\cap F\cap I$

$\Rightarrow M\cap F\cap I = 10$

PROP

Due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca (esiste una funzione biunivoca che li lega)

ES "Multipli di 4 da 1 a 40" sono $4n$, $n\in\{1,\dots,10\}$ (corrispondenza biunivoca tra $\{4,\dots,40\}$ e $\{1,\dots,10\}$) quindi sono 10

Def Indichiamo con I_n l'insieme $\{1,\dots,n\}$. Se $n=0$, poniamo $I_0=\emptyset$

1.1 Sequenze

Utili a contare eventi il cui ordine conta.

Def Siano $n,k\in\mathbb{N}$. Diciamo k-sequenza di I_n una k-upla ordinata di elementi di I_n. $\left((a_1,\dots,a_k)\in\underbrace{I_n\times\dots\times I_n}_{k}\right)$

La sequenza è detta senza ripetizione se i suoi termini sono distinti.

Def Data una k-sequenza $(a_1,\dots,a_k)$, diciamo permutazione di $(a_1,\dots,a_k)$ una qualunque k-sequenza $(b_1,\dots,b_k)$ ottenuta riordinando gli elementi di $(a_1,\dots,a_k)$

Def $S((n,k))$ il numero di k-sequenze di I_n, con eventuali ripetizioni. | $S((n,k)) = n^k$

$S(n,k)$ il numero di k-sequenze di I_n senza ripetizioni. | $S(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

ES L'estrazione, con reimmissione, di 5 palline da un'urna di 90

è descritta da una 5-sequenza di I_{90} e $S((n,k)) = 90^5$

se non avvenisse la reimmissione allora $S(n,k) = \frac{90!}{85!} = 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86$

1.2 Spartizioni

Diciamo n-spartizione di I_k una n-upla ordinata $(C_1,\dots,C_n)$ di sottoinsiemi di I_k a due a due disgiunti (anche vuoti).

Tali che $C_1\cup\dots\cup C_n = I_k$.

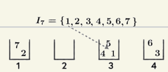
Le spartizioni distribuiscono gli insiemi con ordine

PROP

Le n-spartizioni di I_k sono tante quante le k-sequenze di I_n, $S((n,k))$.

Infatti la funzione che associa l'elemento all'indice del contenitore è biunivoca

ES Sia $(\{7,2\},\emptyset,\{1,4,5\},\{3,6\})$ 4-spartizione di I_7



Si può descrivere con una 7-sequenza

$$\begin{array}{ll} \text{\#indice contenitore} & (3,1,4,3,3,4,1) \\ \text{\#indice elemento} & \;\;1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;5\;\;6\;\;7 \end{array}$$

1.3 Sottoinsiemi

Diciamo **k-sottoinsieme** di I_n un sottoinsieme formato da k elementi distinti di I_n

Indichiamo $C(n,k)$ il numero di k-sottoinsiemi di I_n. $C(n,k) = \frac{S(n,k)}{k!} = \binom{n}{k}$

> Utili per contare eventi quando l'ordine non conta

ES

Distribuire una mano di 5 carte da un mazzo di 52, l'ordine non conta. L'esito dell'esperimento si può descrivere da un 5-sottoinsieme di I_{52} e le possibili mani sono $\binom{52}{5}$

1.4 Anagrammi

Un anagramma di una k-sequenza è una qualunque k-sequenza che ha gli termini con le stesse ripetizioni della sequenza iniziale.

PROP

Il numero di anagrammi di una k-sequenza di I_n che ha k_1 ripetizioni di 1, k_2 ripetizioni di 2, ..., k_n ripetizioni di n è $\frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}$

1.5 Principio di moltiplicazione

Nel caso in cui gli elementi di un insieme X si possono individuare tramite una procedura di n fasi.

Dove la prima fase ha m_1 esiti possibili, la seconda m_2, ...

E se l'elemento costruito determina univocamente gli esiti delle n fasi

Allora $|X| = m_1 \times \dots \times m_n$

OSS Devo essere in grado di riconoscere quale elemento è stato scelto al primo, secondo, ..., n-esimo step.

ES Quanti comitati si possono costruire da 6 donne e 5 uomini se devono essere composti da un uomo e una donna

$6 \cdot 5 = 30$ comitati

ES Conta il numero di full (un tris e una coppia) nel poker a 52 carte

$4 \cdot \binom{13}{3} \cdot 3 \binom{13}{2}$

ES Conta gli anagrammi di "MISSISSIPPI" senza ripetizioni di S

Conto gli anagrammi di "MIIIPPI" $\rightarrow \frac{7!}{4!\,2!} = 105$

Piazzo le S _M_I_I_I_P_P_I_ $\rightarrow$ 8 slot, 4 S $\rightarrow \binom{8}{4} \cdot 105 = 7350$.

2. Probabilità

2.1 Probabilità uniforme

Def Si dice insieme delle parti di Ω $(\mathcal{P}(\Omega))$ l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di Ω

Def Sia Ω un insieme finito. Diciamo probabilità uniforme sullo spazio campionario Ω la funzione

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Def Gli elementi di Ω si dicono eventi elementari o esiti dell'esperimento

Def I sottoinsiemi di Ω sono detti eventi dell'esperimento

PROP Se $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ è uniforme su Ω allora si ha $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$

PROP Siano A e B due eventi di uno spazio campionario finito Ω con probabilità uniforme P.

- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Se $E \subseteq F$, $P(F \setminus E) = P(F) - P(E)$

2.2 Definizione di probabilità

Def Sia Ω un insieme arbitrario.

Diciamo funzione di probabilità su Ω una funzione $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ tale che

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1, \ldots \subseteq \Omega$ a due a due disgiunti, allora $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) := \lim_{n \to +\infty} (P(A_1) + \ldots + P(A_n))$
- Se $E \subseteq F \subseteq \Omega$ allora $P(E) \leq P(F)$

PROP $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + (-1)^1 \Sigma_2 + \ldots + (-1)^{n-2} \Sigma_{n-1} + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ dove $\Sigma_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$

PROP

Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità se possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

Se un insieme si può mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ si dice numerabile

PROP $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$

$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c$

3. Probabilità condizionata

Sia Ω uno spazio campionario, P funzione di probabilità su Ω.

Siano $E, F \subseteq \Omega$ con $P(F) \neq 0$. Diciamo probabilità di E ad F il numero $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(EF)}{P(F)}$

PROP Se $P: F \subset \Omega \to P(F)$ funzione di probabilità su Ω. La funzione $P(\cdot|F): E \subset F \subset \Omega \to P(E|F)$ funzione di probabilità su F

PROP Se P è uniforme su Ω allora $P(\cdot|F)$ è uniforme su F

PROP $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \Rightarrow P(E \cap F) = P(E|F)P(F)$

PROP - Formula del prodotto

Siano $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ e P funzione di probabilità su Ω.

Allora $P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$

ES

Un esame si supera con 3 compitini $P(I) = 0.7$, $P(II|I) = 0.8$, $P(III|II \cdot I) = 0.9$

La probabilità di superare l'esame è $P(I \cdot II \cdot III) = 0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.9 = 0.504$

PROP - Formula di inversione

Sia $F \subseteq \Omega$ e P funzione di probabilità su Ω con $P(F) > 0$.

Per ogni $A \subseteq \Omega$ con $P(A) > 0$ si ha $P(F|A) = \frac{P(A|F)\,P(F)}{P(A)}$

TEO - Formula della partizione

Sia $\{F_1, \dots, F_n\}$ una n-partizione di Ω con $P(F_1) > 0, \dots, P(F_n) > 0$

Per ogni $E \subseteq \Omega$ si ha $P(E) = P(E \cap F_1) + \dots + P(E \cap F_n) = P(E|F_1)P(F_1) + \dots + P(E|F_n)P(F_n)$

TEO - Formula di Bayes

Sia $\{F_1, \dots, F_n\}$ una n-partizione di Ω con $P(F_1) > 0, \dots, P(F_n) > 0$

Per ogni $A \subseteq \Omega$ con $P(A) \neq 0$ si ha $P(F_i|A) = \frac{P(A|F_i)\,P(F_i)}{P(A|F_1)P(F_1) + \dots + P(A|F_n)P(F_n)}$

3.1 Indipendenza di eventi

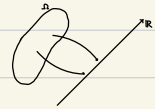
Def Due eventi $A, B \subseteq \Omega$ sono indipendenti per (Ω, P) se $P(AB) = P(A)P(B)$

Def Tre eventi $A, B, C \subseteq \Omega$ sono indipendenti se: 1. sono indipendenti a due a due

2. $P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

Def Due eventi A, B sono indipendenti condizionatamente a $F \subseteq \Omega$ se $P(AB|F) = P(A|F) \cdot P(B|F)$

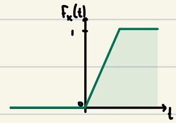
4. Variabili aleatorie



Def Sia Ω spazio campionario. Una variabile aleatoria su Ω è una funzione $X:\Omega\to\mathbb{R}$

Scriveremo $\{X=x\}=X^{-1}(\{x\}):=\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x\}$ dove $x\in\mathbb{R}$

$\{X\in A\}=X^{-1}(A):=\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}$ dove $A\subset\mathbb{R}$



Def Diciamo distribuzione, o ripartizione, di X la funzione $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$, $x\to P(X\leq x)$

PROP

La funzione F_X di X ha le seguenti proprietà:

1. F_X è crescente
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x)=1$
3. F_X è continua a destra
4. Per ogni $a\in\mathbb{R}$ si ha $P(X<a)=F_X(a^-):=\lim_{x\to a^-} F_X(x)$
5. Per ogni $a\in\mathbb{R}$ si ha $P(X=a)=F_X(a)-F_X(a^-)$

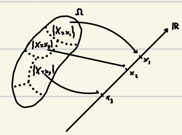
COROLLARIO Variabili aleatorie X,Y con stesse distribuzioni $(F_X=F_Y)$ assumono i valori con uguali probabilità $P(X\in A)=P(Y\in A)$ $\forall A\subset\mathbb{R}$

Def Siano $\{X_i, i\in I\subset\mathbb{N}\}$ famiglia di variabili aleatorie.

Esse si dicono indipendenti se gli eventi da esse descritte sono indipendenti

Ovvero se per ogni scelta di $\{A_i\subseteq\mathbb{R}, i\in I\}$ gli eventi $\{X_i\in A_i\}$ $i\in I$ sono indipendenti.

4.1 Variabili aleatorie discrete



Def Una variabile aleatoria $X:\Omega\to\mathbb{R}$ si dice discreta se

l'immagine $Im(X)$ di X è un insieme finito o numerabile $\{x_0,x_1,\dots\}$

Def Siano (Ω,P) spazio campionario e sua funzione di probabilità, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ variabile aleatoria discreta

Diciamo densità discreta di X la funzione $p_X:\mathbb{R}\to[0,1]$, $x\to P(X=x)$

4.2 La variabile di Bernoulli

Rappresenta esperimenti con due esiti: Successo/Insuccesso. (es. Lancio una moneta: Successo se esce testa)

Def Sia Ω spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω.

Una variabile aleatoria $X:\Omega\to\mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p se

1. $Im\,X=\{0,1\}$ 2. $p_X(1)=p$, $p_X(0)=1-p$

Scriveremo $X\sim Be(p)$. Il valore atteso è $E[X]=p$ e la varianza $Var[X]=p(1-p)$

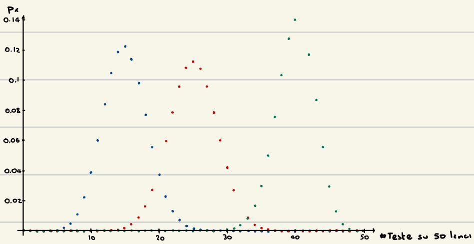
4.3 La variabile binomiale

Def Sia Ω spazio campionario e P funzione di probabilità su Ω.

Una variabile aleatoria $X: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria binomiale di parametri (n,p) se:

1. $\mathrm{Im}(X) = \{0, \dots, n\}$
2. $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$

Scriveremo $X \sim B(n,p)$, di valore atteso $E[X] = np$ e $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$



Una moneta che dà teste nel 30% dei casi $B(50, 0.3)$

Una moneta equilibrata $B(50, 0.5)$

Una moneta che dà teste nel 80% dei casi $B(50, 0.8)$

PROP Siano $X_1, \dots, X_n \sim Be(p)$. Allora $X := X_1 + \dots + X_n \sim B(n,p)$

4.4 La variabile geometrica

Def Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω.

Una variabile aleatoria $X: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria geometrica di parametro $p \in]0,1[$ se

1. $\mathrm{Im}\, X = \mathbb{N}_{\geq 1}$
2. $p_X(k) = p(1-p)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Si scrive $X \sim Ge(p)$, il valore atteso è $E[X] = \frac{1}{p}$ e $\mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$

PROP Sia $X \sim Ge(p)$. Allora $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $P(X > k) = (1-p)^k$

PROP - ottenere una variabile geometrica

Siano $X_1, \dots, X_n, \dots \sim B(p)$, $p \in]0,1[$ indipendenti su (Ω, P)

Poniamo $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) := \min\{k \geq 1 \mid X_k(\omega) = 1\}$

Allora $X \sim Ge(p)$

PROP - assenza di memoria della variabile geometrica

Sia $X \sim Ge(p)$, $p \in]0,1[$. $\forall k, m \in \mathbb{N}$ si ha $P(X > k+m \mid X > k) = P(X > m)$

4.5 La variabile di Poisson

Avendo $B(500'000, 0.024)$ e volendo calcolare $p_X(X=11900)$ dovremmo calcolare $\binom{500'000}{11900} = \frac{500'000!}{488100! \times 11900!}$ - un calcolo non banale

La variabile di Poisson pone $n(=500'000) \to +\infty$ e sfrutta ciò per semplificare il calcolo.

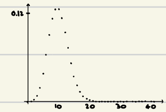
Sia $n \to +\infty$ e $p_n := \frac{\lambda}{n}$ e $X \sim Be(n, \frac{\lambda}{n})$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

Def Una v.a. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se

1. $\mathrm{Im}\,X = \mathbb{N}$
2. $p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$



Si scrive $X \sim Po(\lambda)$, il valore atteso è $E[X] = \lambda$ e $Var[X] = \lambda$

OSS

L'approssimazione di $B(n,p)$ con $Po(np)$ si può fare solo se p o $1-p$ sono piccoli e n è grande.

PROP Siano $X \sim Po(\lambda)$ e $Y \sim Po(\mu)$ due v.a. indipendenti. Allora $X+Y \sim Po(\lambda+\mu)$

Def - Il processo di Poisson

Un processo di Poisson (di intensità λ) è una famiglia di v.a. $\{X_t \mid t \geq 0\}$ t.c.:

1. $\forall t \geq 0 \quad X_t \sim Po(\lambda t)$
2. $\forall t < 0, \tau < 0 \quad X_{t+\tau} - X_t \sim Po(\lambda\tau)$
3. $\forall t_0 < \dots < t_n$ le v.a. $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sono indipendenti.

ES Centralino con $\lambda = 30$ telefonate$/h$. Trovo la probabilità che nei prossimi 30 min il centralino non riceva chiamate.

$X_{t+3} - X_t \sim Po(\lambda \cdot 30/60) \qquad P(X_{t+3} - X_t = 0) = e^{-3/2}$

5. Valore atteso e Varianza

5.1 Valore atteso

Def Sia X una v.a. discreta con valori $\{x_i \mid i \in I\}$ con $I = \{1, \dots, n\}$. Diciamo valore atteso o media di X il numero:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i p_X(x_i) = \sum_{x \in Im(X)} x P(X = x)$$

PROP Siano $X : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora:

1. $g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ è una v.a. discreta.
2. $E[g(X)] = \sum_{x \in Im(X)} g(x) p_X(x)$

COROLLARIO $E[aX + b] = a E[X] + b$

PROP Siano X, Y v.a. e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ allora: $E[g(X,Y)] = \sum_{x \in Im(X), y \in Im(Y)} g(x,y) P(X=x) P(Y=y)$

COROLLARIO $E[XY] = \sum_{x \in Im(X), y \in Im(Y)} xy P(X=x) P(Y=y)$

se X, Y indipendenti $E[XY] = E[X]E[Y]$

COROLLARIO $E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n]$

PROP Se $X \leq Y$ Allora $E[X] \leq E[Y]$

5.2 Varianza e deviazione standard

Def La varianza di X è $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$

Def La deviazione standard di X è $\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$

PROP $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

Def La variabile normalizzata di X è $Y := \dfrac{X - E[X]}{\sigma_X}$. Tale che $E[Y] = 0$, $Var[Y] = 1$

Def Diciamo covarianza di X e Y il numero $Cov[X,Y] := E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

Se $Cov[X,Y] > 0$ allora X e Y si dicono positivamente correlate

Se $Cov[X,Y] < 0$ allora X e Y si dicono negativamente correlate

Se $Cov[X,Y] = 0$ allora X e Y sono indipendenti sullo spazio campionario

PROP $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2 Cov[X,Y]$, se X, Y indipendenti $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

$Var[X_1 + \dots + X_m] = Var[X_1] + \dots + Var[X_m] + 2 \sum_{i<j} Cov[X_i, X_j]$

6. Variabili aleatorie continue

Def Una variabile aleatoria X si dice continua se esiste una funzione f_X, detta densità di X

$f_X : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ integrabile e (a,b) intervallo (aperto, chiuso, limitato, illimitato) t.c.

$$P(X \in (a,b)) = \int_a^b f_X(t)\,dt$$

PROP Se F_X funzione di distribuzione di X

$$\int_a^b f_X(t)\,dt = P(X \in (a,b)) \overset{\text{già visto}}{=} F_X(b) - F_X(a)$$

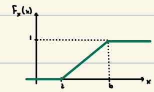
Def Una funzione $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è C^1 a tratti se esistono $t_1 < \dots < t_n$ t.c. F è C^1 su $]-\infty, t_1[,]t_1, t_2[, \dots]t_n, +\infty[$.

In tal caso F' esiste ovunque tranne che al più nei punti $\{t_1, \dots, t_n\}$

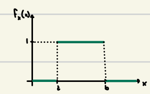
PROP Se X è v.a. con F_X continua e C^1 a tratti, allora X è una v.a. continua di densità $f_X = F_X'$ e $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6.1 La variabile aleatoria uniforme

Def Siano $a < b$ e X t.c. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b[\\ 1 & x \geq b \end{cases}$



Allora F_X è continua e C^1 a tratti, quindi X è v.a. continua. E $f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in]a,b[\\ 0 & x < a \wedge x > b \end{cases}$

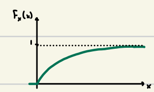


Si dice che X è uniforme su (a,b) e si scrive $X \sim U(a,b)$ e $E[X] = \frac{a+b}{2}$

6.2 La variabile aleatoria esponenziale

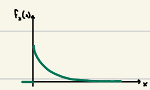
Def La funzione di distribuzione di X è

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$



e la sua densità

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$



Si dice che X segue la legge esponenziale di parametro λ e si scrive $X \sim Exp(\lambda)$ e $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

PROP Sia $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Allora $\forall s, t > 0$ $\quad P(X > t+s \mid X > s) = P(X > t)$

6.3 Valore atteso e varianza di una v.a. continua

Def Sia X v.a. di densità f_X. Definiamo il valore atteso di X il numero: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

PROP 1. Se $X \leq Y$, allora $E[X] \leq E[Y]$

2. Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $E[aX + b] = aE[X] + b$

3. Se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

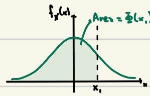
4. Se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$

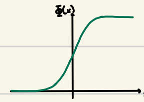
Def $Var[X] := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$ (uguale alle v.a. discrete)

7. Variabili normali e Teorema centrale del limite

7.1 Variabile normale standard

Ricordo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = 1$





Def Una v.a. X continua si dice normale standard (e si scrive $X \sim N(0,1)$)

se la sua densità $f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

La funzione di distribuzione (solitamente $F_X(x)$) è indicata con $\Phi(x)$

PROP Se $X \sim N(0,1)$ Allora $E[X]=0$ e $Var[X]=1$

PROP 1. $\Phi(0)=0.5$ 2. $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9031	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

tabella dei valori di Φ

7.2 Variabile normale

Siano $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Una variabile X si dice normale (o Gaussiana) di parametri (μ, σ^2) se

$X = \mu + \sigma Z$, dove $Z \sim N(0,1)$

Si scrive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$

PROP La v.a. $X \sim N(0, \sigma^2)$ è simmetrica $\forall \sigma > 0$, X e $-X$ hanno stessa distribuzione

PROP La densità f_X di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ è $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

7.3 Approssimazioni mediante la variabile normale

PROP Per $n \gg 0$, $p \in]0,1[\Rightarrow B(n,p) \approx N(np, np(1-p))$

PROP Per $\lambda \gg 0$ $\Rightarrow Po(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$

7.4 Il Teorema Centrale del Limite

Def Due v.a. X Y sono identicamente distribuite se $F_X = F_Y$

PROP Siano $X_1, \dots, X_n$ una famiglia numerabile di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$

Allora $E[X_1 + \dots + X_n] = n\mu$ e $Var[X_1 + \dots + X_n] = n\sigma^2$

La normalizzata di $X_1 + \dots + X_n$ è $\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

TEO - centrale del limite

Siano $X_1, \dots$ v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$

Allora $\forall z \in \mathbb{R}$ $P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le z\right) \to \Phi(z)$, $n \to +\infty$

COROLLARIO

Siano $X_1, \dots, X_n$ una famiglia di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$

Allora $\forall z \in \mathbb{R}$ $P(X_1 + \dots + X_n \le z) \approx P(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}\, Z \le z)$ $n \to +\infty$, $Z \sim N(0,1)$

8. Variabili aleatorie congiunte

Def Una variabile congiunta discreta su uno spazio campionario (Ω, P) è una coppia (X,Y) di v.a. discrete

$\omega \in \Omega \to (X(\omega), Y(\omega))$

ES Per scegliere a caso un punto del piano tra un insieme finito di elementi posso usare (X,Y)

Def Siano X e Y due v.a. discrete.

Diciamo densità congiunta di X e Y la funzione $p_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, $(a,b) \mapsto P(X=a, Y=b)$

Le densità di p_x e p_y sono dette densità marginali di $p_{x,y}$

PROP Sia (X,Y) v.a. congiunta discreta e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione.

Allora $E[g(X,Y)] = \sum g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)$

PROP Siano X, Y v.a. discrete.

Allora X ed Y sono indipendenti $\iff$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $p_{X,Y}(a,b) = p_X(a) \cdot p_Y(b)$

8.1 Variabili congiunte continue

Def Una variabile congiunta continua su uno spazio campionario (Ω, P) è una coppia di v.a. $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$

tale che esiste $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ (detta densità congiunta continua)

tale che $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$ $P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$

e $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = P((X,Y) \in \mathbb{R}^2) = 1$

Def La funzione di distribuzione di (X,Y) è $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

PROP Sia $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ distribuzione di una v.a. congiunta continua.

Se $f_{X,Y}$ è la densità di (X,Y), su ogni aperto dove $F_{X,Y}$ è C^2 si ha $f_{XY}(x,y) = \partial^2_{xy} F_{XY}(x,y)$

Def - Variabile uniforme su un insieme del piano

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ con area finita.

La variabile uniforme su C si scrive $(X,Y) \sim U(C)$ è la variabile congiunta continua con densità $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area } C} & \text{se } (x,y) \in C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Se $A \subseteq C \quad P((X,Y) \in A) = \int_A \frac{1}{\text{Area } C} \, dx dy = \frac{\text{Area } A}{\text{Area } C}$

PROP Sia (X,Y) variabile congiunta continua con densità f_{XY}.

Allora X e Y sono continue. Le densità f_X e f_Y, dette densità marginali di f_{XY}, sono date da:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) \, dy \qquad f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) \, dx$$

Def Sia (X,Y) congiunta continua con densità f_{XY} e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora $E[X] = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g(x,y) f_{XY}(x,y) \, dx dy$

Def $Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$

PROP $Var[X_1 + \dots + X_n] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n] + 2 \sum_{i<j} Cov[X_i, X_j]$

PROP X e Y sono indipendenti $\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

9. Legge dei grandi numeri

Siano $X_1, X_2, \dots$ famiglia numerabile di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$ e $Var[X_i]$ finita.

Allora $P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mu \right) = 1$