

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Modellazione e controllo laterale e longitudinale di un Boeing 747

Relatore

Prof. Zampieri Sandro

Laureando

Cuzzolin Matteo

ANNO ACCADEMICO 2024-2025

Data di laurea 21/07/2025

Sommario

Il Boeing 747, come molti velivoli moderni, è dotato di sistemi di controllo automatico progettati per mitigare gli effetti degli agenti atmosferici e per assistere il pilota nelle operazioni di volo. Nella presente tesi viene sviluppato un modello matematico dell'aeromobile in grado di descriverne la dinamica e la cinematica, basato sulle equazioni del moto di un corpo rigido e sui dati del report tecnico NASA CR-2144. Successivamente, vengono descritti due controllori: un autopilota, utilizzabile per assistere il pilota nel mantenimento di una determinata altitudine, e un controllore progettato per mitigare un fenomeno noto come "Dutch Roll", al quale sono particolarmente soggetti i velivoli di grandi dimensioni con ali a freccia positiva, come il Boeing 747.

Indice

1	Descrizione del Sistema Boeing 747	1
1.1	Sistemi di Riferimento	2
1.1.1	Sistema di Riferimento NED	2
1.1.2	Sistema Assi Corpo FRD	2
1.1.3	Sistema Assi di Stabilità	3
1.1.4	Sistema Assi Vento	3
1.2	Trasformazioni tra Sistemi di Riferimento	4
1.3	Superfici di Controllo	7
2	Modellizzazione	8
2.1	Variabili del sistema	8
2.1.1	Forze	8
2.1.2	Velocità Angolare	9
2.1.3	Velocità	10
2.1.4	Accelerazione	11
2.1.5	Momento Angolare	12
2.2	Equazioni del Moto	15
2.2.1	Prima Equazione Cardinale	15
2.2.2	Seconda Equazione Cardinale	15
2.2.3	Segnali e Costanti del Sistema	16
2.3	Linearizzazione	17
2.3.1	Punto di Equilibrio	17
2.3.2	Linearizzazione delle Equazioni	19
2.4	Derivate di Stabilità	20
2.4.1	Semplificazioni Sperimentali	21
2.4.2	Forma Concisa delle Equazioni Cardinali	22
2.4.3	Modello Lineare	24
2.4.4	Equazioni dei Moti Longitudinali e Lateralì	25

2.5	Risultati Numerici per il Boeing 747	26
2.5.1	Moti Longitudinali	26
2.5.2	Moti Laterali	27
3	Analisi	28
3.1	Moti Longitudinali	28
3.1.1	Ingressi e Uscite	28
3.1.2	Funzione di Trasferimento	29
3.1.3	Stabilità	30
3.1.4	Modi Naturali	31
3.2	Moti Laterali	33
3.2.1	Ingressi e Uscite	34
3.2.2	Funzione di Trasferimento	34
3.2.3	Stabilità	35
3.2.4	Modi Naturali	35
4	Controllo	39
4.1	Moti Longitudinali	39
4.1.1	Architettura	39
4.1.2	Analisi dei Parametri	40
4.1.3	Prestazioni	42
4.2	Moti Laterali	43
4.2.1	Controllore Proporzionale	43
4.2.2	Controllore a Singolo Polo	46
4.2.3	Effetti Negativi della Retroazione	47
4.2.4	Sintesi con Strategia di Controllo Ottimo	50
A	Report Tecnico NASA CR-2144	51
Bibliografia		55

Capitolo 1

Descrizione del Sistema Boeing 747

Dopo l'introduzione del Boeing 707, uno dei primi jet commerciali ad entrare in servizio, Pan Am richiese un aereo circa due volte e mezzo più grande. Questa esigenza portò allo sviluppo del Boeing 747, che entrò in servizio nel 1970.

Per rispondere a questa esigenza, Boeing progettò un aereo a fusoliera larga con un'apertura alare di 65 metri ed una lunghezza di 70 metri, caratteristiche che gli valsero l'appellativo di "Jumbo Jet". Il velivolo è spinto da quattro motori turboventola, che gli consentono di raggiungere una velocità massima di crociera di circa 1.040 km/h (Mach 0.85) ed un'autonomia di più di 13.000 km.

Grazie alla sua versatilità, il 747 ebbe un grande successo commerciale: nei 55 anni di produzione, Boeing ne costruì 1.574 esemplari. La maggior parte fu destinata al trasporto passeggeri, ma ne furono prodotte anche versioni cargo e militari.



Figura 1.1: Un Boeing 747 di Pan Am [1]

1.1 Sistemi di Riferimento

Nella descrizione delle forze e delle quantità del velivolo è utile adottare diversi sistemi di riferimento standard utilizzati in aviazione. Di seguito sono descritti i sistemi di riferimento utilizzati nel corso di questa tesi.

1.1.1 Sistema di Riferimento NED

La Terra sarà considerata un sistema di riferimento inerziale, trascurandone il suo movimento nello spazio in quanto esso è trascurabile rispetto a quello del velivolo. Inoltre, la curvatura terrestre non verrà considerata: la superficie terrestre sarà approssimata ad un piano infinito.

Il sistema di riferimento *NED* è un sistema di assi solidale con la Terra e, quindi, anch'esso approssimato come inerziale, con origine posta sulla superficie terrestre. Gli assi sono definiti come segue:

- Asse Down (\hat{z}_{NED}) è diretto verso il centro della Terra. Il verso positivo è concorde al verso del vettore di gravità.
- Asse North (\hat{x}_{NED}) definito dall'intersezione tra il piano orizzontale locale e il piano contenente l'asse di rotazione terrestre. Il verso positivo è orientato verso il nord geografico.
- Asse East (\hat{y}_{NED}) perpendicolare ai due assi già definiti con il verso positivo nella direzione di rotazione terrestre, in modo da ottenere una terna destrorsa.

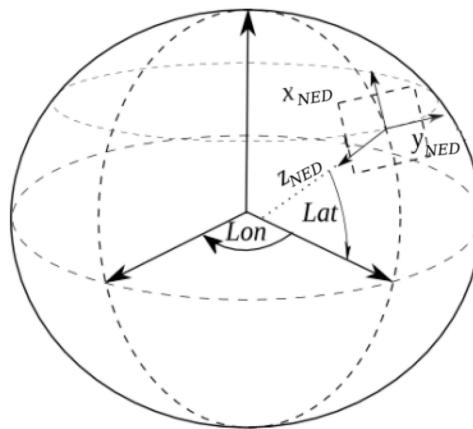


Figura 1.2: Sistema di riferimento *NED* [2]

1.1.2 Sistema Assi Corpo FRD

Il sistema assi corpo, o Front-Right-Down (*FRD*) ha origine nel centro di massa del velivolo. Gli assi sono definiti nel seguente modo:

- Asse (\hat{x}_{FRD}) è parallelo alla linea di riferimento della fusoliera ed è diretto nella direzione in cui è rivolto il pilota
- Asse (\hat{y}_{FRD}) passa attraverso le punte delle ali, con verso positivo verso la destra del velivolo.
- Asse (\hat{z}_{FRD}) è diretto verso il basso, perpendicolare agli altri due assi.

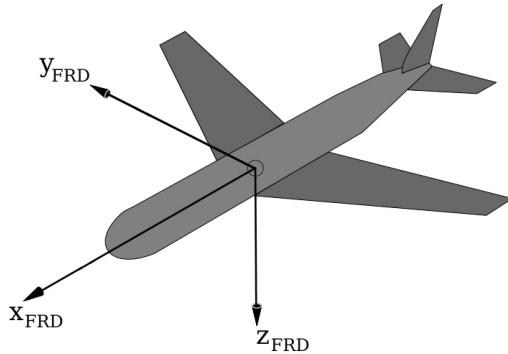


Figura 1.3: Sistema di riferimento *FRD* [3]

1.1.3 Sistema Assi di Stabilità

Solitamente il velivolo presenta un certo angolo di incidenza α rispetto al flusso d'aria durante il volo. Viene definito quindi il sistema assi di stabilità, i cui versori sono detti \hat{x}_S , \hat{y}_S , \hat{z}_S , ottenuto effettuando una rotazione del sistema di riferimento *FRD* di un angolo α attorno all'asse \hat{y}_{FRD} .

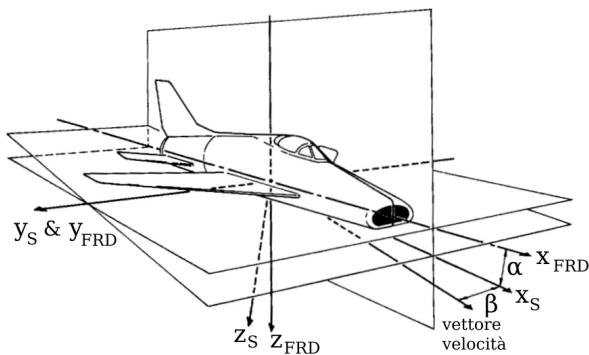


Figura 1.4: Sistema di riferimento Assi di Stabilità [4]

1.1.4 Sistema Assi Vento

Un aereo può volare anche con un certo angolo di derapata β rispetto al flusso d'aria. Viene definito quindi il sistema assi vento, i cui versori sono detti \hat{x}_W , \hat{y}_W , \hat{z}_W , ottenuto effettuando una rotazione del sistema assi di stabilità di un angolo β attorno all'asse \hat{z}_S .

Si nota che non è necessaria alcuna rotazione attorno all'asse \hat{x}_W per allinearlo al vettore velocità, quindi nella trasformazione al sistema assi vento quell'angolo di rotazione rimane 0.

1.2 Trasformazioni tra Sistemi di Riferimento

Poiché le forze e quantità del velivolo saranno descritte in diversi sistemi di riferimento, è necessario convertirle in un unico sistema coerente per poterle utilizzare nelle equazioni del moto. Di seguito sono descritte le matrici di trasformazione utilizzate nel corso di questa tesi.

Trasformazione da Sistema NED a FRD

La trasformazione tra due i sistemi di riferimento avviene attraverso tre rotazioni successive. I tre angoli, detti angoli di Eulero, si definiscono come segue:

Sia N un insieme di punti dato dall'intersezione tra i piani generati dalle coppie di vettori \hat{x}_{NED} \hat{y}_{NED} e \hat{x}_{FRD} \hat{y}_{FRD} ,

- ψ è l'angolo di imbardata, ovvero l'angolo tra l'insieme di punti N e l'asse \hat{x}_{FRD} .
- θ è l'angolo di beccheggio, ovvero l'angolo tra l'asse \hat{z}_{NED} e l'asse \hat{z}_{FRD} .
- ϕ è l'angolo di rollio, ovvero l'angolo tra l'asse \hat{x}_{NED} e l'insieme di punti N .

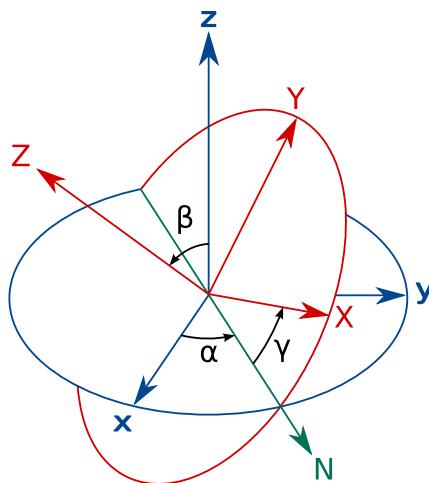


Figura 1.5: Trasformazione tra sistemi di riferimento con angoli di Eulero [5]

La matrice di trasformazione tra i due sistemi di riferimento può essere definita effettuando 3 rotazioni separate:

1. Rotazione di ψ attorno all'asse \hat{z}_{FRD} descritta dalla matrice di rotazione $R_z(\psi)$

Dato un generico punto $(x_{NED} \ y_{NED})$ è possibile scomporre le componenti in vettori lungo \hat{x}_{FRD} e \hat{y}_{FRD} .

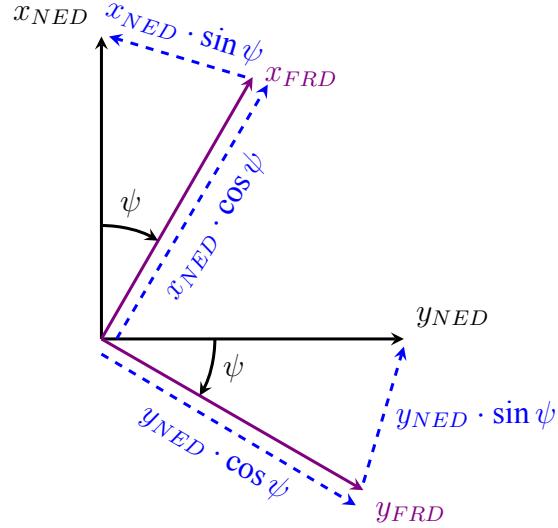


Figura 1.6: Scomposizione delle componenti

Sommando poi le componenti proiettate sugli assi \hat{x}_{FRD} e \hat{y}_{FRD} si ottiene:

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Rotazione di θ attorno all'asse \hat{y}_{FRD} descritta dalla matrice di rotazione $R_y(\theta)$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3. Rotazione di ϕ attorno all'asse \hat{x}_{FRD} descritta dalla matrice di rotazione $R_x(\phi)$

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione completa è quindi data da:

$$C_{NED \rightarrow FRD} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Trasformazione da Sistema FRD a NED

Come riportato in [6] la matrice di trasformazione $C_{NED \rightarrow FRD}$ è ortogonale, ovvero soddisfa la relazione $C_{NED \rightarrow FRD} \cdot C_{NED \rightarrow FRD}^T = I$. Di conseguenza, la matrice inversa coincide con la trasposta:

$$\begin{aligned} C_{FRD \rightarrow NED} &= C_{NED \rightarrow FRD}^T = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.2) \end{aligned}$$

Trasformazione da Sistema Assi di Stabilità a FRD

I due sistemi differiscono per una sola rotazione di un angolo α attorno all'asse \hat{y}_S . La matrice di trasformazione è definita similmente a quanto fatto per la rotazione di θ in (1.1):

$$C_{S \rightarrow FRD} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Trasformazione da Sistema Assi Vento a FRD

I due sistemi differiscono per due rotazioni: una di β attorno all'asse \hat{z}_S e una di α attorno all'asse \hat{y}_{FRD} . La matrice di rotazione è definita nel seguente modo, similmente a quanto fatto per la rotazione di ψ in (1.1):

$$\begin{aligned} C_{W \rightarrow FRD} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.4) \end{aligned}$$

1.3 Superfici di Controllo

Le superfici di controllo sono dei dispositivi in grado di modificare l'assetto del velivolo. Sono controllate dal pilota o dall'autopilota.

- **Alettoni:** sono posizionate all'estremità delle ali. Operano in modalità differenziale: quando uno si alza, l'altro si abbassa. Il loro movimento influenza l'angolo di rollio ϕ dell'aeromobile. Sono controllati ruotando la cloche e la loro deflessione è indicata con $\delta_a(t)$;
- **Equilibratore:** è la parte mobile del piano orizzontale di coda di un aeromobile. I due lati si muovono all'unisono. Il suo movimento influenza l'angolo di beccheggio θ dell'aeromobile. È controllato mediante la traslazione avanti e indietro della cloche e la sua deflessione è indicata con $\delta_e(t)$;
- **Timone:** è una superficie di controllo montata al piano verticale di coda. Il suo movimento influenza l'angolo di imbardata ψ dell'aeromobile. È controllato attraverso i pedali e la sua deflessione è indicata con $\delta_r(t)$;

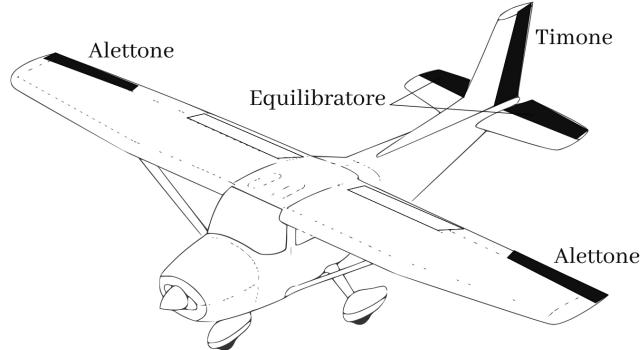


Figura 1.7: Superfici di Controllo [6]

Capitolo 2

Modellizzazione

2.1 Variabili del sistema

2.1.1 Forze

Forza Peso

La forza peso è ben definita nel sistema di riferimento NED , in quanto è allineata con l'asse \hat{z}_{NED} . Può essere trasformata nel sistema di riferimento FRD tramite la matrice di rotazione definita in (1.1):

$$\left(\vec{F}_P(t)\right)_{FRD} = C_{NED \rightarrow FRD} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_{NED} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta(t) \\ mg \sin \phi(t) \cos \theta(t) \\ mg \cos \phi(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix}_{FRD} \quad (2.1)$$

Nella formula m e g sono delle costanti che rappresentano rispettivamente la massa del velivolo e l'accelerazione di gravità.

Forza Propulsiva

La forza propulsiva è definita nel sistema di riferimento FRD , in generale non è allineata all'asse \hat{x}_{FRD} , ma può essere scomposta in due componenti:

$$\left(\vec{F}_T(t)\right)_{FRD} = \begin{bmatrix} T(t) \cos \epsilon \\ 0 \\ -T(t) \sin \epsilon \end{bmatrix}_{FRD} \quad (2.2)$$

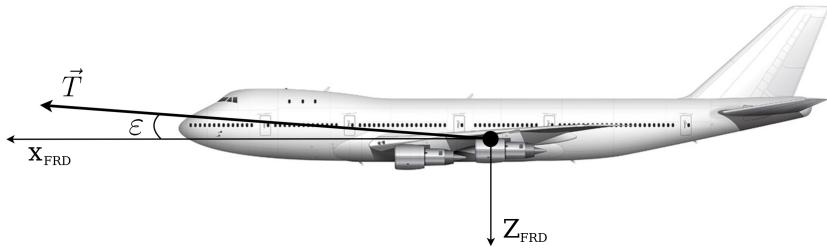


Figura 2.1: Vettore $\vec{T}(t)$ e il suo angolo ϵ

Nella formula ϵ è una costante determinata dalla struttura del velivolo che rappresenta l'angolo tra il vettore \vec{T} e l'asse \hat{x}_{FRD}

Forze Aerodinamiche

Le forze aerodinamiche sono ben definite nel sistema di riferimento assi di stabilità.

$$\left(\vec{F}_A(t)\right)_S = \begin{bmatrix} -F_{A_x}(t) \\ F_{A_y}(t) \\ -F_{A_z}(t) \end{bmatrix}_S$$

In questo caso $F_{A_z}(t)$ rappresenta la portanza, normale al flusso d'aria, mentre $F_{A_x}(t)$ la resistenza aerodinamica, opposta al flusso d'aria.

$F_{A_y}(t)$ è la componente laterale della forza, dovuta all'angolo di derapata $\beta(t)$.

Si possono esprimere le forze aerodinamiche nel sistema di riferimento *FRD* tramite la matrice di rotazione definita in (1.3):

$$\left(\vec{F}_A(t)\right)_{FRD} = C_{S \rightarrow FRD} \left(\vec{F}_A(t)\right)_S = \begin{bmatrix} -F_{A_x}(t) \cos \alpha(t) + F_{A_z}(t) \sin \alpha(t) \\ F_{A_y}(t) \\ -F_{A_x}(t) \sin \alpha(t) - F_{A_z}(t) \cos \alpha(t) \end{bmatrix}_{FRD} \quad (2.3)$$

$F_{A_x}(t), F_{A_y}(t), F_{A_z}(t)$ sono funzioni non lineari di altre variabili del sistema. Questa dipendenza verrà analizzata in maggior dettaglio nella sezione 2.4.

2.1.2 Velocità Angolare

Diremo $\vec{\omega}_{FRD}$ la velocità angolare del sistema di riferimento *FRD* rispetto al sistema inerziale *NED*.

Il sistema FRD è stato definito a partire dal sistema NED come una serie di tre rotazioni i cui angoli sono detti angoli di Eulero 1.2. Tuttavia la loro derivata non fornisce \vec{w}_{FRD} in quanto i tre angoli non sono descritti nello stesso sistema di riferimento è quindi necessario applicare delle rotazioni:

$$\begin{aligned}\vec{w}_{FRD}(t) &= \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = R_x(\phi)R_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} + R_x(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{bmatrix} + I_3 \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta(t) \\ 0 & \cos \phi(t) & \sin \phi(t) \cos \theta(t) \\ 0 & -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.4)$$

2.1.3 Velocità

La velocità del velivolo è la velocità del sistema di riferimento FRD rispetto al sistema inerziale NED .

$$\vec{V}_{FRD}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}_{FRD} \quad (2.5)$$

Velocità nel Sistema Assi Vento

Una rappresentazione più naturale del vettore velocità è nel sistema di riferimento assi vento, in quanto è parallelo a \hat{x}_W . È poi possibile cambiare il sistema di riferimento ottenendo così una rappresentazione polare della velocità nel sistema FRD :

$$\vec{V}_{FRD}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}_{FRD} = C_{W \rightarrow FRD} \begin{bmatrix} |\vec{V}_{FRD}(t)| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_W = |\vec{V}_{FRD}(t)| \begin{bmatrix} \cos \alpha(t) \cos \beta(t) \\ \sin \beta(t) \\ \sin \alpha(t) \cos \beta(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

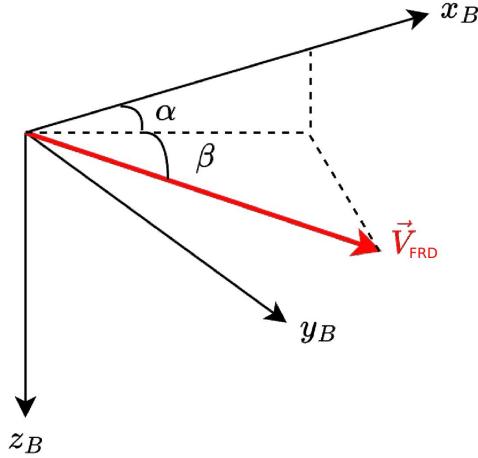


Figura 2.2: Vettore \vec{V}_{FRD} e i suoi angoli $\alpha(t)$ e $\beta(t)$

Velocità nel Sistema NED

Un'altra rappresentazione utile della velocità è nel sistema di riferimento *NED*, dove può essere espressa come:

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{NED}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}_{NED} = C_{FRD \rightarrow NED} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}_{FRD} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) v + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) w \\ \cos \theta \sin \psi u + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \phi \cos \psi) v + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi) w \\ -\sin \theta u + \sin \phi \cos \theta v + \cos \phi \cos \theta w \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nota: Per semplicità di lettura è omessa la dipendenza dal tempo di θ , ϕ , ψ , u , v , w

2.1.4 Accelerazione

Affinché siano valide le equazioni cardinali è necessario applicarle su un sistema di riferimento inerziale, per questo motivo è necessario calcolare \vec{a}_{NED} . Per farlo si sfrutta la relazione di Poisson, $\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \vec{w}_{FRD}(t) \times \vec{u}(t)$, la cui dimostrazione è illustrata in [7]

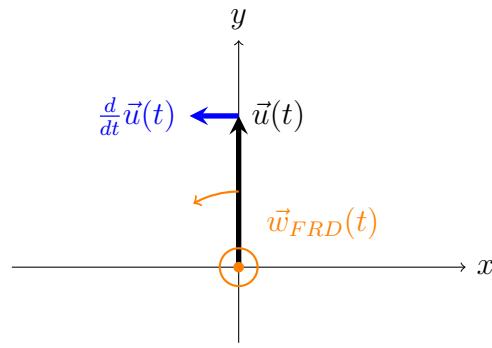


Figura 2.3: Intuizione grafica alla relazione di Poisson

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{NED}(t) &= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{FRD}(t) \right)_{NED} = \sum_{i=x,y,z} \frac{d}{dt} (V_i(t) \vec{u}_i(t)) = \\
&= \sum_{i=x,y,z} a_i(t) \vec{u}_i(t) + V_i(t) (\vec{w}_{FRD}(t) \times \vec{u}_i(t)) = \\
&= \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{FRD}(t) \right)_{FRD} + \vec{w}_{FRD}(t) \times \vec{V}_{FRD}(t) = \\
&= \begin{bmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} + (qw - rv) \\ \dot{v} + (ru - pw) \\ \dot{w} + (pv - qu) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nota: Per semplicità di lettura è omessa la dipendenza dal tempo di u, v, w, p, q, r (e derivate).

2.1.5 Momento Angolare

Il momento angolare di una massa infinitesimale dm appartenente al velivolo è definito come:

$$d\vec{H}_{dm}(t) = \vec{r}_{dm} \times \left(\vec{V}_{dm}(t) \right)_{NED} dm$$

Dove \vec{r}_{dm} è la posizione della massa dm rispetto al centro di massa dell'aeromobile.

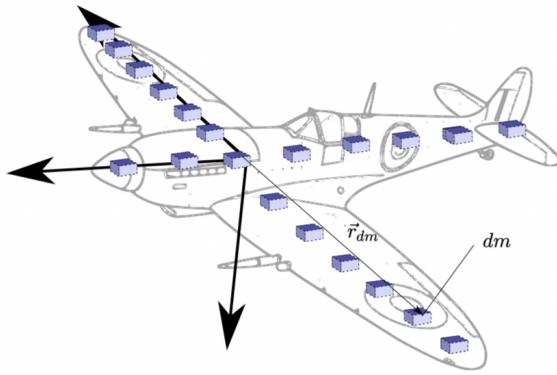


Figura 2.4: Aeromobile descritto da masse infinitesimali [6]

Velocità Assoluta

La velocità assoluta, nel sistema di riferimento inerziale viene calcolata in modo simile a quanto fatto per l'accelerazione:

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{dm}(t))_{NED} &= \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_{dm} \right)_{NED} = \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_{dm} \right)_{FRD} + \vec{w}_{FRD}(t) \times \vec{r}_{dm} = \\ &= \vec{w}_{FRD}(t) \times \vec{r}_{dm} = \begin{bmatrix} q(t)z_{dm} - r(t)y_{dm} \\ r(t)x_{dm} - p(t)z_{dm} \\ p(t)y_{dm} - q(t)x_{dm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Qui si assume che \vec{r}_{dm} sia costante nel tempo, si sta quindi assumendo che il velivolo sia un corpo rigido, ovvero con flessioni della struttura trascurabili.

Momento Angolare Infinitesimo

Il momento angolare di una massa infinitesimale dm è quindi:

$$d\vec{H}_{dm}(t) = \vec{r}_{dm} \times \left(\vec{V}_{dm}(t) \right)_{NED} dm = \begin{bmatrix} p(t)(y_{dm}^2 + z_{dm}^2) - q(t)x_{dm}y_{dm} - r(t)x_{dm}z_{dm} \\ q(t)(x_{dm}^2 + z_{dm}^2) - r(t)y_{dm}z_{dm} - p(t)x_{dm}y_{dm} \\ r(t)(x_{dm}^2 + y_{dm}^2) - p(t)x_{dm}z_{dm} - q(t)y_{dm}z_{dm} \end{bmatrix} dm$$

Momento Angolare Totale

Il momento angolare totale è l'integrale del momento angolare infinitesimo sul volume dell'aeromobile:

$$\begin{aligned}
\vec{H}(t) &= \int_V d\vec{H}_{dm}(t) dm = \\
&= \left[\begin{array}{l} p(t) \int_V (y_{dm}^2 + z_{dm}^2) dm - q(t) \int_V x_{dm} y_{dm} dm - r(t) \int_V x_{dm} z_{dm} dm \\ q(t) \int_V (x_{dm}^2 + z_{dm}^2) dm - r(t) \int_V y_{dm} z_{dm} dm - p(t) \int_V x_{dm} y_{dm} dm \\ r(t) \int_V (x_{dm}^2 + y_{dm}^2) dm - p(t) \int_V x_{dm} z_{dm} dm - q(t) \int_V y_{dm} z_{dm} dm \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Gli integrali così ottenuti sono definiti come i momenti e i prodotti di inerzia del velivolo [6]:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_V (y_{dm}^2 + z_{dm}^2) dm \\
I_{yy} &= \int_V (x_{dm}^2 + z_{dm}^2) dm \\
I_{zz} &= \int_V (x_{dm}^2 + y_{dm}^2) dm \\
I_{xy} = I_{yx} &= \int_V x_{dm} y_{dm} dm \\
I_{xz} = I_{zx} &= \int_V x_{dm} z_{dm} dm \\
I_{yz} = I_{zy} &= \int_V y_{dm} z_{dm} dm
\end{aligned}$$

Sostituendo questi integrali nella definizione di \vec{H} si ottiene:

$$\vec{H}(t) = \begin{bmatrix} I_{xx}p(t) - I_{xy}q(t) - I_{xz}r(t) \\ I_{yy}q(t) - I_{yz}r(t) - I_{xy}p(t) \\ I_{zz}r(t) - I_{xz}p(t) - I_{yz}q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \vec{w}_{FRD}(t) = I \vec{w}_{FRD}(t)$$

I è definito come il **tensore di inerzia**.

Nel caso del Boeing 747 il velivolo è simmetrico lungo il suo asse longitudinale, quindi $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Momento Angolare

Il momento angolare è quindi definito come:

$$\vec{H}(t) = I\vec{w}_{FRD}(t) = \begin{bmatrix} I_{xx}p(t) - I_{xz}r(t) \\ I_{yy}q(t) \\ -I_{xz}p(t) + I_{zz}r(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.2 Equazioni del Moto

2.2.1 Prima Equazione Cardinale

La prima equazione cardinale del moto è definita come:

$$\vec{F}_P(t) + \vec{F}_T(t) + \vec{F}_A = m \left(\frac{d}{dt} \vec{V}_{FRD}(t) \right)_{NED} = m \cdot \vec{a}_{NED}(t)$$

Sostituendo quanto trovato in (2.1), (2.2), (2.3) e (2.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} & m \begin{bmatrix} \dot{u}(t) + (q(t)w(t) - r(t)v(t)) \\ \dot{v}(t) + (r(t)u(t) - p(t)w(t)) \\ \dot{w}(t) + (p(t)v(t) - q(t)u(t)) \end{bmatrix} = \\ & = mg \begin{bmatrix} -\sin \theta(t) \\ \sin \phi(t) \cos \theta(t) \\ \cos \phi(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T(t) \cos \epsilon \\ 0 \\ -T(t) \sin \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{Ax}(t) \cos \alpha(t) + F_{Az}(t) \sin \alpha(t) \\ F_{Ay}(t) \\ -F_{Ax}(t) \sin \alpha(t) - F_{Az}(t) \cos \alpha(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.2 Seconda Equazione Cardinale

La seconda equazione cardinale del moto è definita come:

$$\vec{M}(t) = \left(\frac{d}{dt} \vec{H}(t) \right)_{NED}$$

Sostituendo quanto trovato in (2.10) e (2.4), e applicando la relazione di Poisson si ottiene:

$$\begin{aligned}
\vec{M}(t) &= \begin{bmatrix} L(t) \\ M(t) \\ N(t) \end{bmatrix} = \left(\frac{d}{dt} \vec{H}(t) \right)_{NED} = \left(\frac{d}{dt} \vec{H}(t) \right)_{FRD} + \vec{w}_{FRD}(t) \times \vec{H}(t) \\
&= I \left(\frac{d}{dt} \vec{w}_{FRD}(t) \right)_{FRD} + \vec{w}_{FRD}(t) \times (I \vec{w}_{FRD}(t)) \\
&= \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} \\ I_{yy}\dot{q} \\ -I_{xz}\dot{p} + I_{zz}\dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(-I_{xz}p + I_{zz}r) - r(I_{yy}q) \\ r(I_{xx}p - I_{xz}r) - p(-I_{xz}p + I_{zz}r) \\ p(I_{yy}q) - q(I_{xx}p - I_{xz}r) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Complessivamente si ottiene:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}I_{xx} + qr(I_{zz} - I_{yy}) - (\dot{r} + pq)I_{xz} \\ \dot{q}I_{yy} + pr(I_{xx} - I_{zz}) + (p^2 - r^2)I_{xz} \\ \dot{r}I_{zz} + pq(I_{yy} - I_{xx}) + (qr - \dot{p})I_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Nota: Per semplicità di lettura, sono omesse le dipendenze da altre variabili di L, M, N, p, q, r (e derivate).

2.2.3 Segnali e Costanti del Sistema

Costanti	
m	Massa del velivolo
g	Accelerazione di gravità
ϵ	Angolo tra il vettore \vec{T} e l'asse \hat{x}_{FRD}
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}$	Componenti del tensore di inerzia
Segnali	
u, v, w	Componenti del vettore \vec{V}_{FRD} che rappresenta la velocità del sistema FRD rispetto al sistema inerziale NED
p, q, r	Componenti del vettore \vec{w}_{FRD} che rappresenta la velocità angolare del sistema FRD rispetto al sistema inerziale NED
ϕ	Angolo di rollio
ψ	Angolo di imbardata
θ	Angolo di beccheggio
L, M, N	Componenti del momento meccanico
T	Modulo della forza propulsiva
$F_{A_x}, F_{A_y}, F_{A_z}$	Componenti delle forze aerodinamiche

I 16 segnali e le 7 costanti sono legati da 9 equazioni (descritte in (2.12), (2.11), (2.4)), che descrivono posizione e assetto del velivolo nello spazio.

2.3 Linearizzazione

Le equazioni ottenute in (2.11) e (2.12) non sono lineari e non possono essere risolte analiticamente. Per questo motivo è utile determinare un modello lineare che approssimi il comportamento del sistema attorno ad un certo punto, nel nostro caso il volo rettilineo simmetrico uniforme.

Per fare questo vengono risolte le equazioni del moto in un punto di equilibrio (indicheremo tali soluzioni con \bar{x}), così da poter riscrivere le variabili di stato come piccole perturbazioni rispetto a tale punto (che indicheremo con $\tilde{x}(t)$), come descritto in [8].

$$x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$$

2.3.1 Punto di Equilibrio

Il punto di equilibrio scelto è quello di volo rettilineo simmetrico uniforme, le cui ipotesi per un aeromobile sono:

- Velocità costante: $\dot{u}(t) = \dot{v}(t) = \dot{w}(t) = 0$.
- Velocità angolare nulla, quindi accelerazione angolare nulla: $\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = \dot{p}(t) = \dot{q}(t) = \dot{r}(t) = 0$.
- Ali livellate: $\bar{\phi} = 0$.
- Angolo di derapata nullo: $\beta(t) = 0$.

Nel caso in cui l'angolo di derapata sia nullo, l'equazione (2.6) diventa:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = |\bar{V}_{FRD}| \begin{bmatrix} \cos(\bar{\alpha}) \\ 0 \\ \sin(\bar{\alpha}) \end{bmatrix}$$

- quindi: $\bar{v} = 0$.

Inoltre, come descritto in [9], le forze aerodinamiche possono essere riassunte nei tre termini

X, Y, Z :

$$\begin{aligned} X(t) &= -F_{A_x}(t) \cos \alpha(t) \\ Y(t) &= F_{A_y}(t) \\ Z(t) &= -F_{A_x}(t) \sin \alpha(t) - F_{A_z}(t) \cos \alpha(t) \end{aligned}$$

Al fine di raggiungere un sistema di equazioni in cui $\delta_t(t)$ sia mantenuta come variabile di controllo, si è deciso di non incorporare la forza di propulsione $\vec{T}(t)$ nei termini $(X(t) \ Y(t) \ Z(t))$, anche se questa è un'alternativa valida che viene mostrata nel dettaglio in [6].

Variabili del Sistema

È quindi possibile riscrivere le variabili del sistema come:

$$\begin{array}{lll} u(t) = \bar{u} + \tilde{u}(t) & p(t) = \tilde{p}(t) & \phi(t) = \tilde{\phi}(t) \\ v(t) = \tilde{v}(t) & q(t) = \tilde{q}(t) & \theta(t) = \bar{\theta} + \tilde{\theta}(t) \\ w(t) = \bar{w} + \tilde{w}(t) & r(t) = \tilde{r}(t) & \psi(t) = \bar{\psi} + \tilde{\psi}(t) \\ \\ X(t) = \bar{X} + \tilde{X}(t) & L(t) = \bar{L} + \tilde{L}(t) & \\ Y(t) = \bar{Y} + \tilde{Y}(t) & M(t) = \bar{M} + \tilde{M}(t) & T(t) = \bar{T} + \tilde{T}(t) \\ Z(t) = \bar{Z} + \tilde{Z}(t) & N(t) = \bar{N} + \tilde{N}(t) & \end{array}$$

Ricordando il teorema di Taylor-McLaurin è possibile ricavare le seguenti approssimazioni per sin e cos per gli angoli di Eulero, tali espressioni saranno utili successivamente:

$$\begin{aligned} \sin(\bar{\theta} + \tilde{\theta}(t)) &\approx \sin(\bar{\theta}) + \tilde{\theta}(t) \cos(\bar{\theta}) \\ \cos(\bar{\theta} + \tilde{\theta}(t)) &\approx \cos(\bar{\theta}) - \tilde{\theta}(t) \sin(\bar{\theta}) \\ \sin(\tilde{\phi}(t)) &\approx \tilde{\phi}(t) \\ \cos(\tilde{\phi}(t)) &\approx 1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Equazioni Cardinali del Moto all'Equilibrio

Sotto le ipotesi di volo rettilineo simmetrico le equazioni cardinali del moto all'equilibrio sono:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = mg \begin{bmatrix} -\sin\bar{\theta} \\ 0 \\ \cos\bar{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{T} \cos \epsilon \\ 0 \\ -\bar{T} \sin \epsilon \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg \sin \bar{\theta} + \bar{T} \cos \epsilon \\ 0 \\ -mg \cos \bar{\theta} - \bar{T} \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{L} \\ \bar{M} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Linearizzazione delle Equazioni

A questo punto è possibile sostituire nelle equazioni del moto le variabili di stato come piccole perturbazioni rispetto al punto di equilibrio, come descritto in [8].

Per semplificare le equazioni, vengono utilizzate le relazioni trovate in (2.13) e si trascurano i termini di ordine superiore al primo in quanto le perturbazioni sono piccole ($\tilde{x} \rightarrow 0$).

Linearizzazione della Velocità Angolare

Dall'equazione (2.4) che lega la velocità angolare con le derivate degli angoli di Eulero si ottiene la seguente relazione lineare:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}(t) \\ \tilde{q}(t) \\ \tilde{r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\bar{\theta} + \tilde{\theta}(t)) \\ 0 & \cos(\tilde{\phi}(t)) & \sin(\tilde{\phi}(t)) \cos(\bar{\theta} + \tilde{\theta}(t)) \\ 0 & -\sin(\tilde{\phi}(t)) & \cos(\tilde{\phi}(t)) \cos(\bar{\theta} + \tilde{\theta}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\phi}}(t) \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ \dot{\tilde{\psi}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \bar{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \bar{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\phi}}(t) \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ \dot{\tilde{\psi}}(t) \end{bmatrix}$$

Linearizzazione delle Equazioni Cardinali

Dalle equazioni cardinali si ottengono le seguenti relazioni lineari:

$$\begin{aligned}
m \left(\dot{\tilde{u}}(t) + \tilde{q}(t)\bar{w} \right) &= -mg\tilde{\theta}(t) \cos \bar{\theta} + \tilde{X}(t) + \tilde{T}(t) \cos \epsilon \\
m \left(\dot{\tilde{v}}(t) + \tilde{r}(t)\bar{u} - \tilde{p}(t)\bar{w} \right) &= mg \cos(\bar{\theta})\tilde{\phi}(t) + \tilde{Y}(t) \\
m \left(\dot{\tilde{w}}(t) - \tilde{q}(t)\bar{u} \right) &= -mg\tilde{\theta}(t) \sin \bar{\theta} + \tilde{Z}(t) - \tilde{T}(t) \sin \epsilon
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(t) &= \dot{\tilde{p}}(t)I_{xx} - \dot{\tilde{r}}(t)I_{xz} \\
\tilde{M}(t) &= \dot{\tilde{q}}(t)I_{yy} \\
\tilde{N}(t) &= \dot{\tilde{r}}(t)I_{zz} - \dot{\tilde{p}}(t)I_{xz}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Linearizzazione Angolo di Derapata

Dall'equazione (2.6) e ipotizzando $v^2, w^2 \ll u^2$, come descritto in [9], si ottiene la relazione:

$$\beta(t) = \arcsin \frac{v(t)}{\left| \vec{V}_{FRD}(t) \right|} = \arcsin \frac{\tilde{v}(t)}{\sqrt{u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)}} \approx \frac{\tilde{v}(t)}{\bar{u}} \tag{2.18}$$

Linearizzazione della Velocità Assoluta

Dall'equazione (2.7) si ottiene la seguente equazione per la componente della velocità lungo l'asse \hat{z}_{NED} :

$$\dot{\tilde{z}}(t) = -\sin \bar{\theta}(\bar{u} + \tilde{u}(t)) - \tilde{\theta}(t)\bar{u} + \cos \bar{\theta}(\bar{w} + \tilde{w}(t)) - \tilde{\theta}(t)\bar{u} \sin \bar{\theta} \tag{2.19}$$

2.4 Derivate di Stabilità

Le equazioni ottenute in precedenza non sono ancora lineari a causa della presenza dei termini X, Y, Z, L, M, N e T . Infatti, essi dipendono in modo non lineare da $u, v, w, p, q, r, \delta_a, \delta_e, \delta_r$, δ_t e derivate.

Le derivate di stabilità, proposte per la prima volta da Bryan nel 1911 [10], permettono di linearizzare anche questi termini e si sono dimostrate un metodo efficace per analizzare la meccanica del volo degli aeromobili in quanto forniscono risultati verificabili nei test di volo.

Si applica il teorema di Taylor-McLaurin nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
X(t) &= f(u, \dot{u}, v, \dot{v}, w, \dot{w}, p, \dot{p}, q, \dot{q}, r, \dot{r}, \delta_a, \dot{\delta}_a, \delta_e, \dot{\delta}_e, \delta_r, \dot{\delta}_r, \delta_t, \dot{\delta}_t) \\
&= \bar{X} + \tilde{X}(t) = \bar{X} + \frac{\partial X}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(t) &= \frac{\partial X}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t) \\
\tilde{Y}(t) &= \frac{\partial Y}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial Y}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial Y}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t) \\
\tilde{Z}(t) &= \frac{\partial Z}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial Z}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial Z}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t) \\
\tilde{L}(t) &= \frac{\partial L}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t) \\
\tilde{M}(t) &= \frac{\partial M}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial M}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial M}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t) \\
\tilde{N}(t) &= \frac{\partial N}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial N}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial N}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t) \\
\tilde{T}(t) &= \frac{\partial T}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \Big|_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_t} \Big|_0 \dot{\tilde{\delta}}_t(t)
\end{aligned}$$

2.4.1 Semplificazioni Sperimentali

Come specificato in [9], è possibile semplificare notevolmente queste equazioni:

- La simmetria del velivolo lungo l'asse longitudinale garantisce che:
 Y, L, N sono funzioni di $(v, p, r, \delta_a, \delta_r)$
 X, Z, M sono funzioni di (u, w, q, δ_e)
 T è una funzione di (u, w, δ_t)
- Le derivate rispetto a $\dot{\delta}_a, \dot{\delta}_e, \dot{\delta}_r, \dot{\delta}_t$ sono trascurabili.
- Per via sperimentale si è osservato che tutte le derivate rispetto ad un'accelerazione $(\dot{u}, \dot{w}, \dot{q}, \dot{v}, \dot{p}, \dot{r})$ sono trascurabili, tranne $\frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \Big|_0$.
- Sono trascurabili anche le seguenti derivate, esse non sono riportate nel report tecnico [11] da cui successivamente saranno ottenuti i dati e sono quindi da assumere pari a zero:

$$\frac{\partial X}{\partial q} \Big|_0 = \frac{\partial T}{\partial w} \Big|_0 = \frac{\partial Y}{\partial p} \Big|_0 = \frac{\partial Y}{\partial r} \Big|_0 = \frac{\partial Y}{\partial \delta_a} \Big|_0 = 0$$

Applicando le semplificazioni si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(t) &= \frac{\partial X}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial X}{\partial w} \Big|_0 \tilde{w}(t) + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \Big|_0 \tilde{\delta}_e(t) \\
\tilde{Y}(t) &= \frac{\partial Y}{\partial v} \Big|_0 \tilde{v}(t) + \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \Big|_0 \tilde{\delta}_r(t) \\
\tilde{Z}(t) &= \frac{\partial Z}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial Z}{\partial w} \Big|_0 \tilde{w}(t) + \frac{\partial Z}{\partial q} \Big|_0 \tilde{q}(t) + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Big|_0 \tilde{\delta}_e(t) \\
\tilde{L}(t) &= \frac{\partial L}{\partial v} \Big|_0 \tilde{v}(t) + \frac{\partial L}{\partial p} \Big|_0 \tilde{p}(t) + \frac{\partial L}{\partial r} \Big|_0 \tilde{r}(t) + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \Big|_0 \tilde{\delta}_a(t) + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \Big|_0 \tilde{\delta}_r(t) \\
\tilde{M}(t) &= \frac{\partial M}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial M}{\partial w} \Big|_0 \tilde{w}(t) + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \Big|_0 \dot{\tilde{w}}(t) + \frac{\partial M}{\partial q} \Big|_0 \tilde{q}(t) + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Big|_0 \tilde{\delta}_e(t) \\
\tilde{N}(t) &= \frac{\partial N}{\partial v} \Big|_0 \tilde{v}(t) + \frac{\partial N}{\partial p} \Big|_0 \tilde{p}(t) + \frac{\partial N}{\partial r} \Big|_0 \tilde{r}(t) + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \Big|_0 \tilde{\delta}_a(t) + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \Big|_0 \tilde{\delta}_r(t) \\
\tilde{T}(t) &= \frac{\partial T}{\partial u} \Big|_0 \tilde{u}(t) + \frac{\partial T}{\partial \delta_t} \Big|_0 \tilde{\delta}_t(t)
\end{aligned}$$

Per rendere la notazione più compatta vengono definite le seguenti quantità:

$$\begin{aligned}
X_{(\cdot)} &\triangleq \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial (\cdot)} \Big|_0 & L_{(\cdot)} &\triangleq \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial L}{\partial (\cdot)} \Big|_0 \\
Y_{(\cdot)} &\triangleq \frac{1}{m} \frac{\partial Y}{\partial (\cdot)} \Big|_0 & M_{(\cdot)} &\triangleq \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M}{\partial (\cdot)} \Big|_0 & T_{(\cdot)} &\triangleq \frac{1}{m} \frac{\partial T}{\partial (\cdot)} \Big|_0 \\
Z_{(\cdot)} &\triangleq \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial (\cdot)} \Big|_0 & N_{(\cdot)} &\triangleq \frac{1}{I_{zz}} \frac{\partial N}{\partial (\cdot)} \Big|_0
\end{aligned}$$

Dove con (\cdot) si indica la generica variabile rispetto alla quale si calcola la derivata.

2.4.2 Forma Concisa delle Equazioni Cardinali

Sostituendo le derivate di stabilità nelle equazioni cardinali linearizzate (2.16) e (2.17) si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{u}} &= (X_u + T_u \cos \epsilon) \tilde{u} + X_w \tilde{w} - \bar{w} \tilde{q} - g \cos \bar{\theta} \tilde{\theta} + X_{\delta_e} \tilde{\delta}_e + T_{\delta_t} \cos \epsilon \tilde{\delta}_t \\
\dot{\tilde{v}} &= Y_v \tilde{v} - \bar{u} \tilde{r} + \bar{w} \tilde{p} + g \cos \bar{\theta} \tilde{\phi} + Y_{\delta_r} \tilde{\delta}_r \\
\dot{\tilde{w}} &= (Z_u - T_u \sin \epsilon) \tilde{u} + Z_w \tilde{w} + (\bar{u} + Z_q) \tilde{q} - g \sin \bar{\theta} \tilde{\theta} + Z_{\delta_e} \tilde{\delta}_e - T_{\delta_t} \sin \epsilon \tilde{\delta}_t \\
\dot{\tilde{p}} &= \dot{\tilde{r}} \frac{I_{xz}}{I_{xx}} + L_v \tilde{v} + L_r \tilde{r} + L_p \tilde{p} + L_{\delta_r} \tilde{\delta}_r + L_{\delta_a} \tilde{\delta}_a \\
\dot{\tilde{q}} &= M_u \tilde{u} + M_w \tilde{w} + M_{\dot{w}} \dot{\tilde{w}} + M_q \tilde{q} + M_{\delta_e} \tilde{\delta}_e \\
\dot{\tilde{r}} &= \dot{\tilde{p}} \frac{I_{xz}}{I_{zz}} + N_v \tilde{v} + N_r \tilde{r} + N_p \tilde{p} + N_{\delta_r} \tilde{\delta}_r + N_{\delta_a} \tilde{\delta}_a
\end{aligned}$$

Semplificazioni

- Viene introdotta la notazione:

$$X_u^* \triangleq X_u + T_u \cos \epsilon \quad Z_u^* \triangleq Z_u - T_u \sin \epsilon$$

- Sostituendo $\dot{\tilde{w}}$ nell'equazione per $\dot{\tilde{q}}$ si ottiene:

$$\dot{\tilde{q}} \triangleq M_u^* \tilde{u} + M_w^* \tilde{w} + M_q^* \tilde{q} + M_{\theta}^* \tilde{\theta} + M_{\delta_t}^* \tilde{\delta}_t + M_{\delta_e}^* \tilde{\delta}_e$$

Dove viene introdotta la notazione:

$$\begin{aligned}
M_u^* &\triangleq M_u + M_{\dot{w}} Z_u^* & M_w^* &\triangleq M_w + M_{\dot{w}} Z_w & M_q^* &\triangleq M_q + M_{\dot{w}} (\bar{u} + Z_q) \\
M_{\theta}^* &\triangleq -M_{\dot{w}} g \sin \bar{\theta} & M_{\delta_e}^* &\triangleq M_{\delta_e} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_e} & M_{\delta_t}^* &\triangleq -M_{\dot{w}} T_{\delta_t} \sin \epsilon
\end{aligned} \tag{2.20}$$

- Sostituendo $\dot{\tilde{r}}$ nell'equazione per $\dot{\tilde{p}}$ si ottiene:

$$\dot{\tilde{p}} \triangleq L_v^* \tilde{v} + L_r^* \tilde{r} + L_p^* \tilde{p} + L_{\delta_r}^* \tilde{\delta}_r + L_{\delta_a}^* \tilde{\delta}_a$$

Dove viene introdotta la notazione:

$$L_{(.)}^* \triangleq \left(L_{(.)} + N_{(.)} \frac{I_{xz}}{I_{xx}} \right) \frac{I_{xx} I_{zz}}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}$$

- Similmente, sostituendo $\dot{\tilde{p}}$ nell'equazione per $\dot{\tilde{r}}$ si ottiene:

$$\dot{\tilde{r}} \triangleq N_v^* \tilde{v} + N_r^* \tilde{r} + N_p^* \tilde{p} + N_{\delta_r}^* \tilde{\delta}_r + N_{\delta_a}^* \tilde{\delta}_a$$

Dove viene introdotta la notazione:

$$L_{(.)}^* \triangleq \left(L_{(.)} + N_{(.)} \frac{I_{xz}}{I_{zz}} \right) \frac{I_{xx} I_{zz}}{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}$$

2.4.3 Modello Lineare

Con le semplificazioni prima descritte si ottiene il modello lineare del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}} &= X_u^* \tilde{u} + X_w \tilde{w} - \bar{w} \tilde{q} - g \cos \bar{\theta} \tilde{\theta} + X_{\delta_e} \tilde{\delta}_e + T_{\delta_t} \cos \epsilon \tilde{\delta}_t \\ \dot{\tilde{v}} &= Y_v \tilde{v} - \bar{u} \tilde{r} + \bar{w} \tilde{p} + g \cos \bar{\theta} \tilde{\phi} + Y_{\delta_r} \tilde{\delta}_r \\ \dot{\tilde{w}} &= Z_u^* \tilde{u} + Z_w \tilde{w} + (\bar{u} + Z_q) \tilde{q} - g \sin \bar{\theta} \tilde{\theta} + Z_{\delta_e} \tilde{\delta}_e - T_{\delta_t} \sin \epsilon \tilde{\delta}_t \\ \dot{\tilde{p}} &= L_v^* \tilde{v} + L_r^* \tilde{r} + L_p^* \tilde{p} + L_{\delta_r}^* \tilde{\delta}_r + L_{\delta_a}^* \tilde{\delta}_a \\ \dot{\tilde{q}} &= M_u^* \tilde{u} + M_w^* \tilde{w} + M_q^* \tilde{q} + M_\theta^* \tilde{\theta} + M_{\delta_e}^* \tilde{\delta}_e + M_{\delta_t}^* \tilde{\delta}_t \\ \dot{\tilde{r}} &= N_v^* \tilde{v} + N_r^* \tilde{r} + N_p^* \tilde{p} + N_{\delta_r}^* \tilde{\delta}_r + N_{\delta_a}^* \tilde{\delta}_a \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nota: Per semplicità di lettura in questa sezione è omessa la dipendenza dal tempo di $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{\delta}_a, \tilde{\delta}_e, \tilde{\delta}_t, \tilde{\delta}_r$ (e derivate).

Segnali e Costanti del Sistema

Costanti	
m	massa del velivolo
g	accelerazione di gravità
ϵ	angolo tra il vettore \vec{T} e l'asse \hat{x}_{FRD}
Segnali	
u, v, w	componenti del vettore \vec{V}_{FRD} che rappresenta la velocità del sistema FRD rispetto al sistema inerziale NED
p, q, r	componenti del vettore \vec{w}_{FRD} che rappresenta la velocità angolare del sistema FRD rispetto al sistema inerziale NED
ϕ	angolo di rollio
θ	angolo di beccheggio
Ingressi	
δ_a	angolo di deflessione degli alettoni
δ_r	angolo di deflessione dell'equilibratore
δ_e	angolo di deflessione del timone
δ_t	variazione del modulo della forza propulsiva rispetto all'equilibrio

Il modello linearizzato è composto da 6 equazioni che coinvolgono 12 variabili, di cui 4 rappresentano gli ingressi di controllo. Il sistema ha dunque 6 gradi di libertà, come ci si aspetta per le equazioni del moto di un corpo rigido che si muove nello spazio tridimensionale.

2.4.4 Equazioni dei Moti Longitudinali e Lateralì

È possibile dividere le equazioni ottenute in due gruppi:

- **Simmetriche o longitudinali:** descrivono il moto nel piano x_{FRD} - z_{FRD} . Le variabili coinvolte sono $u, w, q, \theta, \delta_e, \delta_t$.
- **Asimmetriche o laterali:** descrivono il moto nel piano y_{FRD} - z_{FRD} . Le variabili coinvolte sono $v, r, p, \phi, \psi, \delta_a, \delta_r$.

Questa proprietà non è una conseguenza diretta delle leggi della fisica, è possibile perché è stato imposto che l'accoppiamento incrociato sia nullo. È tuttavia una buona approssimazione della realtà.

Nota: Per semplicità di lettura d'ora in poi non verrà più utilizzata la notazione \tilde{x} , ma i sistemi di equazioni ottenuti rimangono validi solo per piccole variazioni dal punto di equilibrio.

Moti Longitudinali

Partendo dalle equazioni (2.21) per \dot{u}, \dot{w} e \dot{q} e sfruttando le seguenti relazioni:

- $\dot{\theta}(t) = q(t)$ ottenuta in (2.15)
- $\bar{w} = |\bar{V}_{FRD}| \sin \bar{\alpha}$ ottenuta in (2.6)

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u^* & X_w & -|\bar{V}_{FRD}| \sin \bar{\alpha} & -g \cos \bar{\theta} \\ Z_u^* & Z_w & \bar{u} + Z_q & -g \sin \bar{\theta} \\ M_u^* & M_w^* & M_q^* & M_\theta^* \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & T_{\delta_t} \cos \epsilon \\ Z_{\delta_e} & -T_{\delta_t} \sin \epsilon \\ M_{\delta_e}^* & M_{\delta_t}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_t \end{bmatrix}$$

Moti Lateralì

Partendo dalle equazioni (2.21) per \dot{v}, \dot{r} e $\dot{\phi}$ e sfruttando le seguenti relazioni:

- $\dot{\phi}(t) = p(t) + \tan \bar{\theta} r(t)$ ottenuta in (2.15)
- $\bar{w} = |\bar{V}_{FRD}| \sin \bar{\alpha}$ ottenuta in (2.6)

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & -\bar{u} & |\bar{V}_{FRD}| \sin \bar{\alpha} & g \cos \bar{\theta} \\ N_v^* & N_r^* & N_p^* & 0 \\ L_v^* & L_r^* & L_p^* & 0 \\ 0 & \tan \bar{\theta} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_r} & 0 \\ N_{\delta_r}^* & N_{\delta_a}^* \\ L_{\delta_r}^* & L_{\delta_a}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \end{bmatrix}$$

2.5 Risultati Numerici per il Boeing 747

2.5.1 Moti Longitudinali

Sostituendo i valori presenti nel report tecnico [11] e nell'articolo [12] per un Boeing 747 in volo rettilineo ad un'altitudine di 20.000 ft (6.1 km) e velocità di Mach 0.8 ($\bar{u} = 830 \frac{ft}{s}$).

Assumendo inoltre $\bar{\theta} = 0$ e ricordando l'equazione (2.19) che può ora essere semplificata e invertita in $\dot{z}(t) = \bar{u}\theta(t) - w(t)$ si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0253 & 0 & -32.174 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 820.02 & 0 & 0 \\ -0.0002021 & -0.001398 & -0.8418 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 9.652 \\ -32.7 & 0 \\ -2.073 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.5.2 Moti Laterali

Sostituendo i valori presenti nel report tecnico [11] per un Boeing 747 in volo rettilineo ad un'altitudine di 40.000 ft (12.2 km) e velocità di Mach 0.8 ($\bar{u} = 774 \frac{ft}{s}$) si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43.2 & -774 & 62.074 & 32.174 \\ 0.598 & -0.115 & -0.0318 & 0 \\ -3.05 & 0.388 & -0.465 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00729 & 0 \\ -0.475 & 0.00775 \\ 0.153 & 0.143 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \end{bmatrix}$$

È pratica comune sostituire v con β seguendo la relazione $\beta(t) = \frac{v(t)}{\bar{u}}$ ottenuta in (2.18)

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0558 & -1 & 0.0802 & 0.0416 \\ 0.598 & -0.115 & -0.0318 & 0 \\ -3.05 & 0.388 & -0.465 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00729 & 0 \\ -0.475 & 0.00775 \\ 0.153 & 0.143 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Maggiori informazioni su come sono stati estratti i dati dal report tecnico [11] si possono trovare nell'appendice A.

Capitolo 3

Analisi

3.1 Moti Longitudinali

Vengono ora analizzati i moti longitudinali del sistema, analisi che sarà successivamente impiegata per stabilizzare il sistema e per sviluppare un autopilota in grado di mantenere una determinata altitudine di volo.

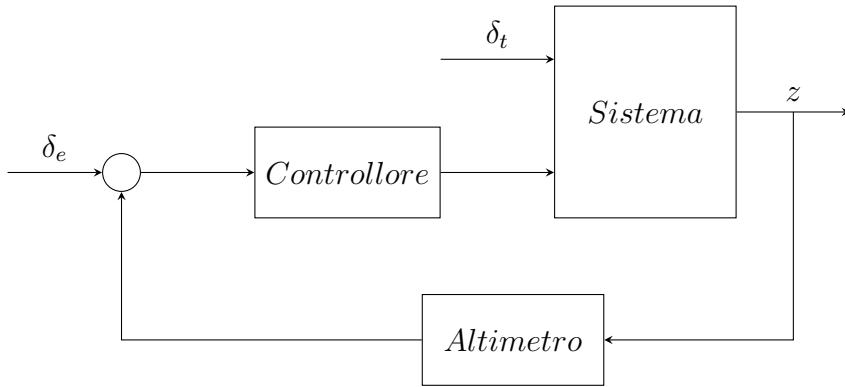
Uno dei compiti del pilota di un velivolo è quello di mantenere una determinata quota, al fine di evitare potenziali collisioni con altri aeromobili. Un pilota ben addestrato e attento è in grado di svolgere questo compito manualmente con una precisione di ± 50 ft; per tale motivo i controllori del traffico aereo si aspettano che tale tolleranza venga rispettata.

Poiché questo compito richiede un elevato livello di attenzione e diligenza, gli aeromobili più sofisticati sono spesso dotati di un autopilota per il mantenimento della quota, così da ridurre il carico di lavoro del pilota.

3.1.1 Ingressi e Uscite

Il controllo dell'altitudine verrà effettuato agendo esclusivamente sugli equilibratori; la forza propulsiva non viene modificata dal controllore.

A tal fine, viene utilizzato un altimetro barometrico per la misura dell'altitudine del velivolo, strumento comunemente impiegato nei sistemi avionici per stimare la quota in base alla pressione atmosferica.



Ingressi	
δ_e	angolo di deflessione degli equilibratori
Uscite	
z	Variazione dell'altitudine rispetto al valore iniziale di 20.000 ft
Variabili di Stato	
u, w	componenti lungo x_{FRD} e z_{FRD} del vettore \vec{V}_{FRD}
q	componente lungo y_{FRD} del vettore \vec{w}_{FRD}
θ	angolo di beccheggio
z	Variazione dell'altitudine rispetto al valore iniziale di 20.000 ft

3.1.2 Funzione di Trasferimento

Utilizzando la funzione `ss2tf` di MATLAB sul modello di stato (2.22) si ottiene la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
 W_{\delta_e \rightarrow z}(s) &= \frac{32.7s^3 + 7.0486s^2 - 1035.7s - 4.5535}{s^5 + 1.4722s^4 + 1.6835s^3 + 0.010443s^2 + 0.00017507s} \\
 &= 32.7 \frac{(s + 0.0043964)(s - 5.5234)(s + 5.7345)}{s(s + 0.73303 \pm j1.0663)(s + 0.0030727 \pm j0.0097528)}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dalla forma di Evans [8], riportata nella seconda riga, è possibile individuare i poli e gli zeri. In particolare sono presenti tre zeri, $s = -0.0043964$, $s = 5.5234$, $s = -5.7345$, e cinque poli, $s = 0$, $s = -0.73303 \pm j1.0663$, $s = -0.0030727 \pm j0.0097528$

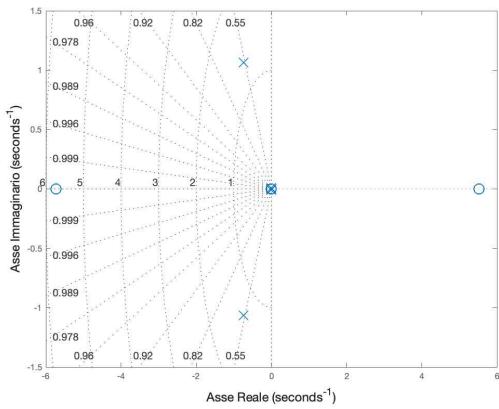


Figura 3.1: pzplot dei poli e degli zeri della funzione di trasferimento $W_{\delta_e \rightarrow z}(s)$

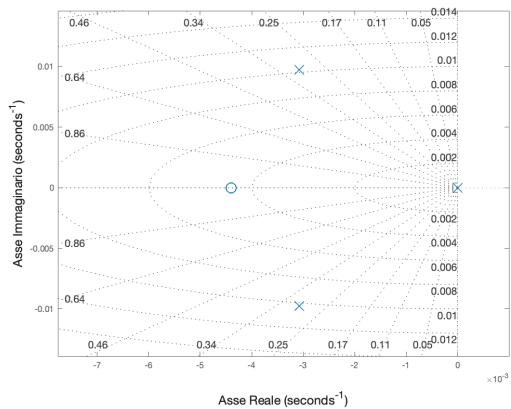


Figura 3.2: Dettaglio del grafico vicino all'origine

3.1.3 Stabilità

Stabilità Rispetto alle Condizioni iniziali

Come definito in [8]:

- un sistema si dice **asintoticamente stabile** rispetto alle condizioni iniziali quando la sua risposta libera tende a 0: $\lim_{t \rightarrow \infty} y_l(t) = 0$.
- un sistema si dice **semplicemente stabile** rispetto alle condizioni iniziali quando la sua risposta libera è limitata: $|y_l(t)| < M \quad \forall t \geq 0$.

Si può inoltre enunciare il seguente teorema:

- un sistema è **asintoticamente stabile** rispetto alle condizioni iniziali se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico del sistema (p_1, p_2, \dots, p_n) hanno parte reale negativa $Re[p_i] < 0$.
- un sistema è **semplicemente stabile** rispetto alle condizioni iniziali se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico del sistema (p_1, p_2, \dots, p_n) hanno parte reale negativa o uguale a 0 $Re[p_i] \leq 0$.

Il polinomio caratteristico del sistema si può trovare nel denominatore della funzione di trasferimento (3.1):

$$s(s + 0.73303 \pm j1.0663)(s + 0.0030727 \pm j0.0097528)$$

Le sue radici hanno tutte parte reale minore o uguale a zero, è quindi possibile concludere che il sistema è semplicemente stabile rispetto alle condizioni iniziali.

BIBO Stabilità

Come definito in [8]:

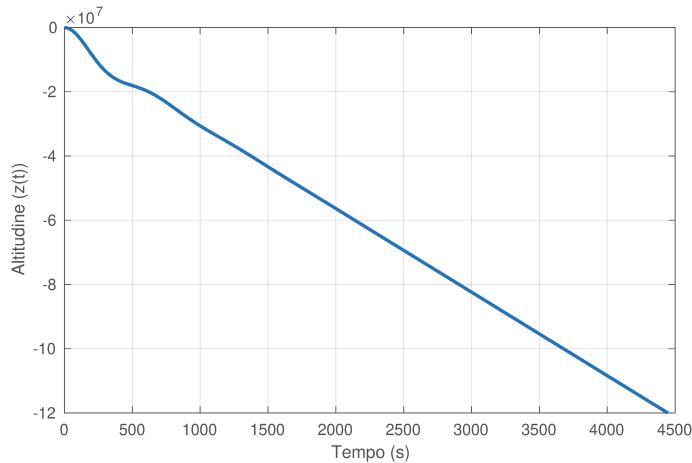
- un sistema si dice **BIBO (Bounded Input-Bounded Output) stabile** se ad ogni ingresso limitato, il sistema genera una risposta forzata limitata.

Viene inoltre enunciato il seguente teorema:

- un sistema è **BIBO stabile** se e solo se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa.

Come per la stabilità rispetto alle condizioni iniziali, a causa della presenza di un polo in $s = 0$ a parte reale non negativa il sistema non è BIBO stabile.

L'instabilità del sistema è evidente osservando la risposta al gradino $\delta_e(t) = \delta^{-1}(t)$:



3.1.4 Modi Naturali

La funzione di trasferimento evidenzia, oltre al polo in $s = 0$ che ha dominato la precedente analisi della stabilità, anche due altri poli complessi coniugati.

Un parametro che caratterizza la risposta dinamica di questi poli è il loro coefficiente di smorzamento. Come si può notare dal grafico, a seconda del valore del coefficiente di smorzamento ζ si distinguono tre casi:

- quando $\zeta < 1$ il sistema è sottosmorzato, segue quindi un moto oscillatorio.
- quando $\zeta = 1$ il sistema è criticamente smorzato, il tempo per ritornare all'equilibrio è in questo caso minimo.
- quando $\zeta > 1$ il sistema è sovrasmorzato, ritorna all'equilibrio senza oscillazioni, ma impiega un tempo maggiore del caso precedente.

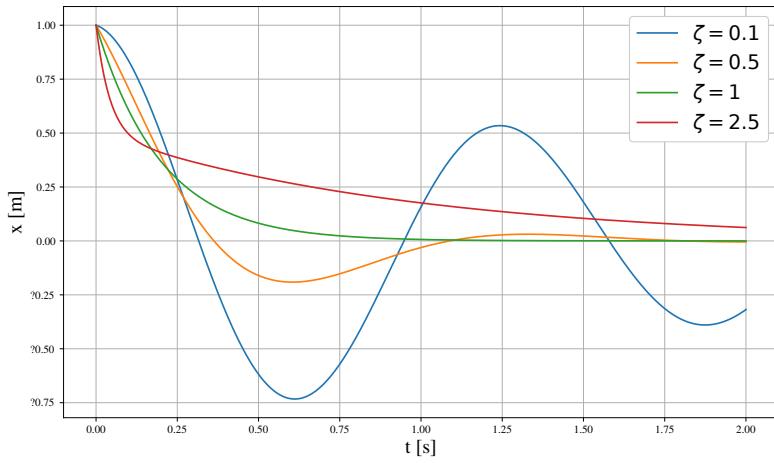


Figura 3.3: Vibrazione di un sistema massa-molla-smorzatore per diversi valori di ζ

Short-Period

Il modo associato ai poli in $-0.73303 \pm j1.0663$ è detto *short-period* per la sua breve durata, esso avviene quando il velivolo in volo rettilineo simmetrico uniforme è soggetto ad una raffica di vento verticale o ad un impulso di $\delta_e(t)$.

Il coefficiente di smorzamento e la pulsazione naturale per i poli si calcolano come segue [8]:

$$\zeta = -\frac{Re[p]}{|p|} = 0.5665 \quad \omega_n = |p| = 1.2939 \text{ rad/s}$$

Il moto oscillatorio causato da questi poli è fortemente smorzato e quindi di breve durata.

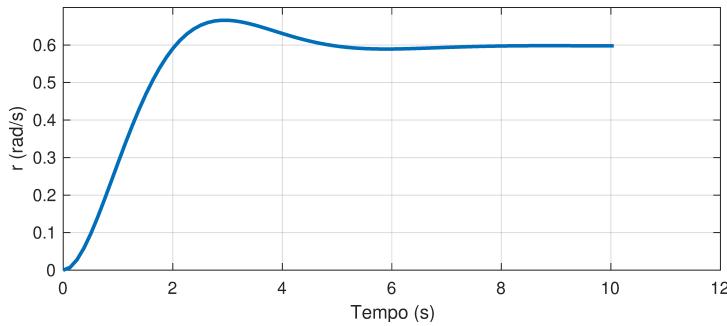
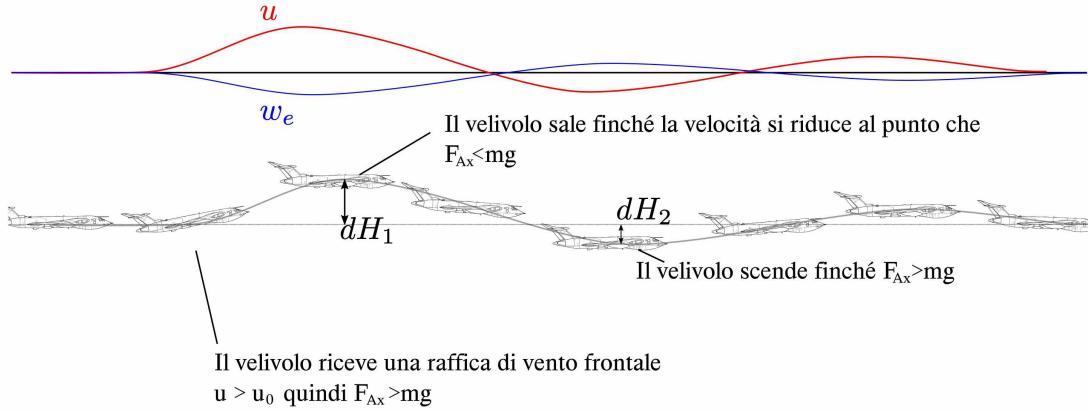


Figura 3.4: Risposta impulsiva dei poli associati al modo *short-period* assieme al polo nell'origine del Boeing 747 in esame

Phugoid

Il modo associato ai poli in $-0.0030727 \pm j0.0097528$ è detto *phugoid*, esso avviene quando il velivolo in volo rettilineo simmetrico uniforme è soggetto ad una raffica di vento frontale. Dopo

la raffica di vento si innesta uno scambio tra energia potenziale e cinetica che si protrae per un lungo periodo di tempo.



In questo caso il coefficiente di smorzamento e la pulsazione naturale per i poli sono:

$$\zeta = -\frac{Re[p]}{|p|} = 0.3005 \quad \omega_n = |p| = 0.01022 \text{ rad/s}$$

Si può notare che sia il coefficiente di smorzamento che la pulsazione naturale sono inferiori che nel modo precedente. Il tempo di assestamento è quindi molto maggiore, arrivando fino a 24 minuti per il Boeing 747 in esame.

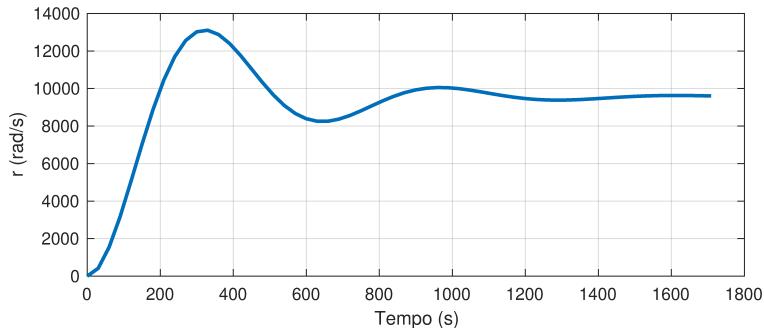


Figura 3.5: Risposta impulsiva dei poli associati al modo *phugoid* assieme al polo nell'origine del Boeing 747 in esame

3.2 Moti Laterali

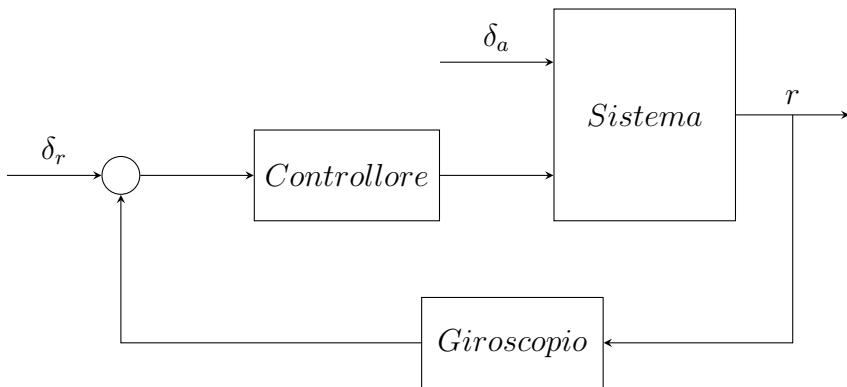
I velivoli dotati di ali a freccia positiva, come il Boeing 747, presentano tipicamente un basso smorzamento nei modi laterali. Tali dinamiche risultano particolarmente difficili da gestire per

il pilota, motivo per cui questa tipologia di aeromobili è solitamente equipaggiata con sistemi di controllo automatico volti a supportare e facilitare il lavoro del pilota.

3.2.1 Ingressi e Uscite

I moti laterali oggetto di studio sono influenzati sia dal timone che dagli alettoni. Nel controllo verrà impiegato solamente il timone in quanto ha una maggiore autorità sui moti che si desidera ridurre.

Verrà inoltre utilizzato un giroscopio per misurare l'angolo di imbardata, in quanto particolarmente influenzato dai moti laterali.



Ingressi	
δ_r	angolo di deflessione del timone
Uscite	
r	componente lungo z_{FRD} del vettore \vec{w}_{FRD}
Variabili di Stato	
p, r	componenti lungo x_{FRD} e z_{FRD} del vettore \vec{w}_{FRD}
β	angolo di derapata
ϕ	angolo di rollio

3.2.2 Funzione di Trasferimento

Utilizzando la funzione `ss2tf` di MATLAB sul modello di stato (2.23) si ottiene la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
 W_{\delta_r \rightarrow r}(s) &= \frac{-0.475s^3 - 0.24789s^2 - 0.11871s - 0.056462}{s^4 + 0.6358s^3 + 0.94078s^2 + 0.51313s + 0.003683} \\
 &= -0.475 \frac{(s + 0.4987)(s + 0.0116 \pm j0.4881)}{(s + 0.5630)(s + 0.0073)(s + 0.0328 \pm j0.9478)}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dalla forma di Evans [8], riportata nella seconda riga, è possibile individuare i poli e gli zeri. In particolare sono presenti tre zeri, $s = -0.4987$, $s = -0.0116 \pm j0.4881$, e quattro poli, $s = -0.5630$, $s = -0.0073$, $s = -0.0328 \pm j0.9478$

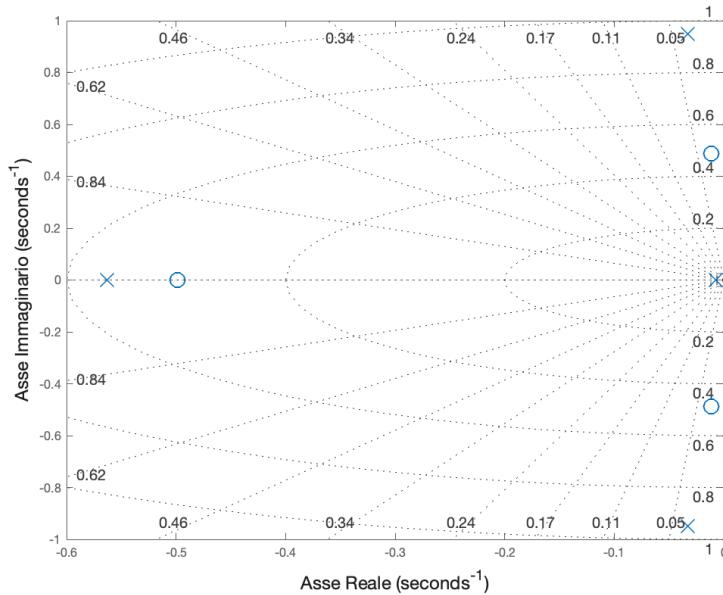


Figura 3.6: pzplot dei poli e degli zeri della funzione di trasferimento $W_{\delta_r \rightarrow r}(s)$

3.2.3 Stabilità

Stabilità Rispetto alle Condizioni iniziali

Il polinomio caratteristico del sistema è:

$$(s + 0.5630)(s + 0.0073)(s + 0.0328 \pm j0.9478)$$

Le sue radici hanno tutte parte reale < 0 , è quindi possibile concludere che il sistema è asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali.

BIBO Stabilità

La funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa, si conclude che il sistema è BIBO stabile.

3.2.4 Modi Naturali

In questo caso la funzione di trasferimento è costituita da quattro poli: due reali e due complessi coniugati.

I poli reali danno origine a modi criticamente smorzati ($\zeta = 1$), mentre i poli complessi coniugati generano un moto oscillatorio denominato *dutch roll*.

Spiral

Il modo associato al polo in -0.0073 è detto *spiral*. Esso si manifesta quando, a seguito di una perturbazione, il velivolo acquisisce un angolo di rollio $\phi > 0$. A seguito della perturbazione la coda del velivolo inizia a generare una componente di portanza, che tende ad aumentare ulteriormente l'angolo ϕ .

In base all'entità della forza generata, il velivolo può ritornare lentamente alla sua posizione iniziale, come nel caso del Boeing 747, oppure può entrare in una virata di raggio decrescente che può condurre a una pericolosa situazione nota come *graveyard spiral*.

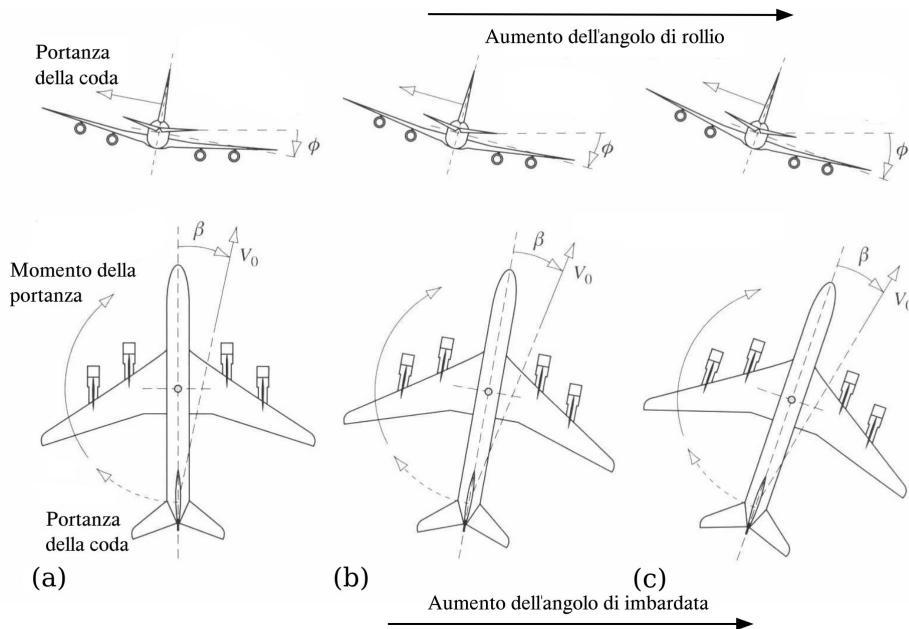


Figura 3.7: Influenza della portanza della coda sull'angolo di rollio e di imbardata [13]

Dal calcolo del coefficiente di smorzamento e della pulsazione naturale si può osservare come questo modo sia di lungo periodo:

$$\zeta = -\frac{Re[p]}{|p|} = 1 \quad \omega_n = |p| = 0.0073 \text{ rad/s}$$

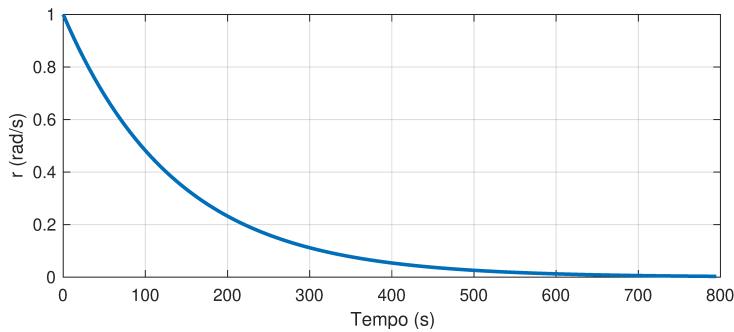


Figura 3.8: Risposta impulsiva per il polo associato al modo *spiral* del Boeing 747 in esame

Roll

Il modo associato al polo in -0.5630 è detto *roll*. Esso si verifica quando il velivolo ruota attorno all'asse \hat{x}_{FRD} , ovvero quando la velocità angolare p subisce una variazione.

In questo caso il modo è ben smorzato, quindi il velivolo ritorna rapidamente alla sua condizione di equilibrio dopo una perturbazione.

Ciò è confermato anche dal valore del coefficiente di smorzamento e della pulsazione naturale:

$$\zeta = -\frac{Re[p]}{|p|} = 1 \quad \omega_n = |p| = 0.5630 \text{ rad/s}$$

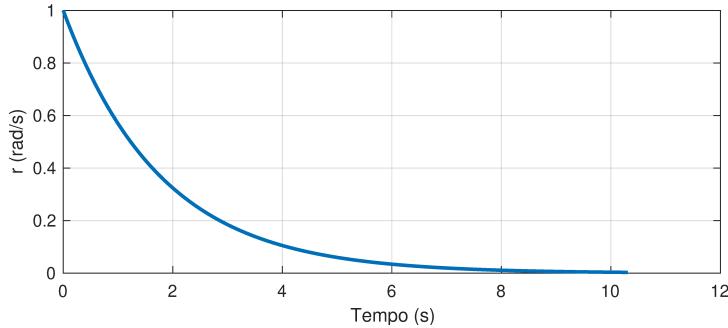


Figura 3.9: Risposta impulsiva per il polo associato al modo *roll* del Boeing 747 in esame

Dutch Roll

Il modo associato ai poli in $-0.0328 \pm j0.9478$ è detto *dutch roll* ed è caratterizzato da un moto oscillatorio che coinvolge simultaneamente rollio, imbardata e derapata.

In particolare, può iniziare con un incremento dell'angolo di imbardata ψ , che provoca una variazione dell'incidenza relativa sulle due ali: l'ala avanzata genera una maggiore portanza rispetto all'altra. Questo squilibrio induce un aumento dell'angolo di rollio ϕ , che a sua volta

altera la direzione del moto e innesca un'imbardata in senso opposto. Il ciclo si ripete, dando luogo a un'oscillazione di lungo periodo.

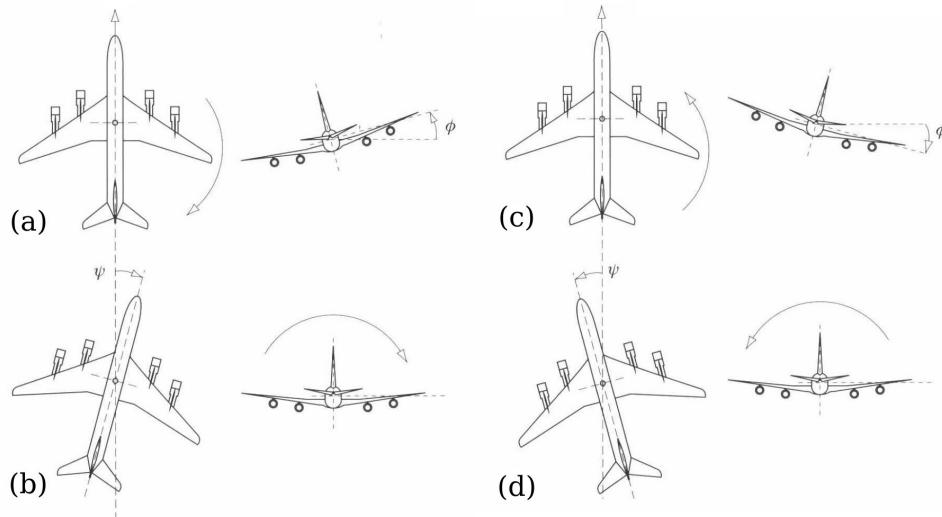


Figura 3.10: Interazione tra gli angoli di rollio e di imbardata [13]

I parametri del coefficiente di smorzamento e della pulsazione naturale sono:

$$\zeta = -\frac{Re[p]}{|p|} = 0.034585 \quad \omega_n = |p| = 0.94836$$

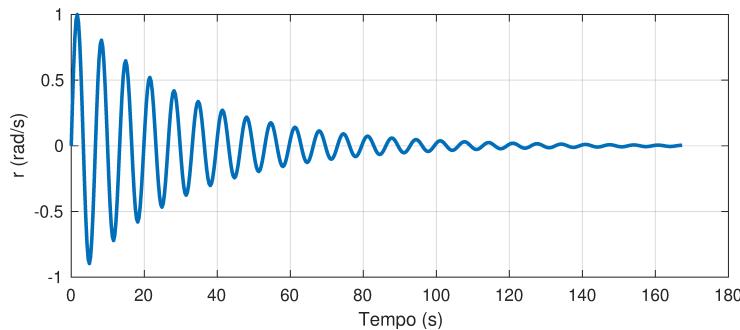


Figura 3.11: Risposta impulsiva per i poli associati al modo *dutch roll* del Boeing 747 in esame

Capitolo 4

Controllo

4.1 Moti Longitudinali

Il controllo dei moti longitudinali ha quindi un duplice obiettivo: stabilizzare il sistema, che in catena aperta non risulta essere BIBO stabile, e implementare un autopilota per il mantenimento dell'altitudine.

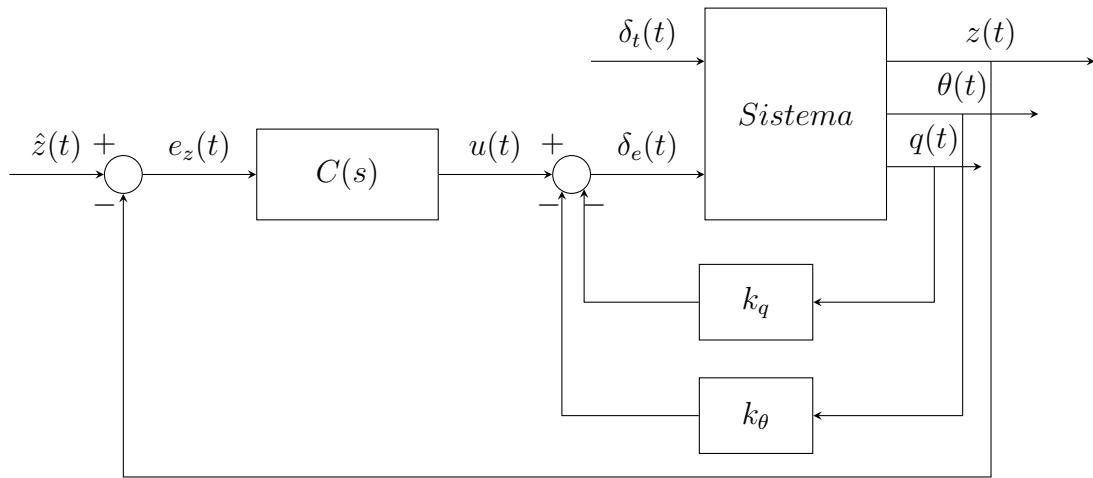
Poiché non si tratta di un sistema SAS (*Stability Augmentation System*), non è necessario progettare il controllore tenendo conto la risposta del velivolo ai comandi del pilota. È invece sufficiente garantire una dinamica stabile e confortevole per piloti e passeggeri. A tale scopo, si ricerca un controllore che assicuri uno smorzamento $\zeta \approx 0.5$ e una pulsazione naturale $\omega_n \gg 1$ rad/s.

4.1.1 Architettura

L'analisi del luogo delle radici della funzione di trasferimento $W_{\delta_e \rightarrow z}$ mostra chiaramente che un semplice controllore proporzionale non è in grado di garantire le prestazioni richieste, in quanto presenta sempre poli a parte reale positiva per qualunque valore di guadagno k .

Come è prassi comune in ambito aeronautico, il controllo dei moti longitudinali viene affrontato in due fasi distinte:

- **Stabilizzazione del sistema:** in particolare si interviene sul modo *short-period* (3.1.4) mediante un controllo retroazionato della velocità angolare q e dell'angolo di beccheggio θ ;
- **Navigazione:** una volta stabilizzato il sistema, si implementa un controllo dell'altitudine, utilizzando un controllore sulla quota z .



4.1.2 Analisi dei Parametri

Loop Interno

Al fine di stabilizzare il sistema, è necessario impiegare entrambi i segnali q e θ come variabili di retroazione, come risulterà evidente dall'analisi dei rispettivi luoghi delle radici.

Il luogo delle radici rispetto alla funzione di trasferimento $W_{\delta_e \rightarrow q}$ mostra che il guadagno minimo necessario per stabilizzare i poli associati al modo *phugoid* è circa $k \approx -5.02$. Tuttavia, per questo valore, i due poli associati al modo *short-period* risultano reali, hanno quindi coefficiente di smorzamento $\zeta = 1$, che non soddisfa i requisiti richiesti dal problema.

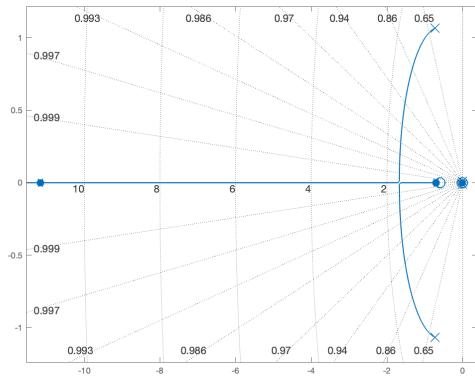


Figura 4.1: rlocus di $W_{\delta_e \rightarrow q}$ con evidenziati i risultati per $k = -5.02$

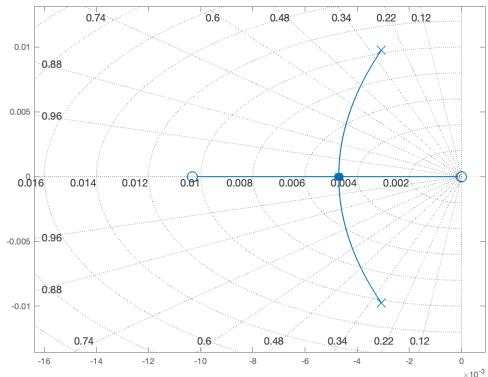


Figura 4.2: Dettaglio che mostra i poli associati al modo *phugoid*

Analogamente, anche nel caso della sola retroazione su θ , non è possibile soddisfare le specifiche del progetto. Il guadagno minimo per stabilizzare i poli associati al modo *phugoid* è circa $k \approx$

-0.05337 , ma i poli del modo *short-period* in questo caso hanno una frequenza naturale pari a $\omega_n = 1.33 \text{ rad/s}$, superiore al valore desiderabile.

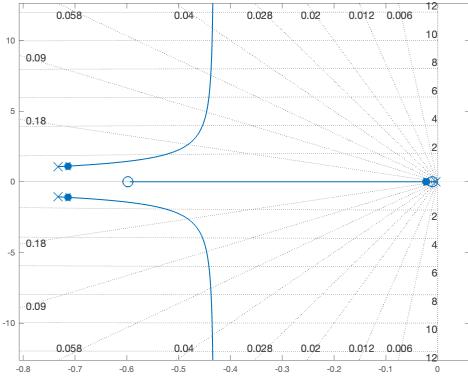


Figura 4.3: rlocus di $W_{\delta_e \rightarrow \theta}$ con evidenziati i risultati per $k = -0.05337$

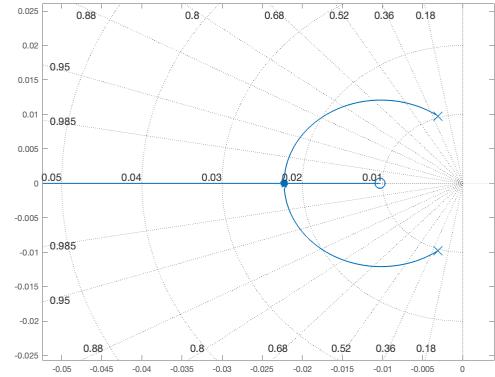


Figura 4.4: Dettaglio che mostra i poli associati al modo *phugoid*

È possibile ottenere una soluzione con caratteristiche migliori utilizzando entrambi i guadagni, in particolare vengono scelti $k_q = -1.73$ e $k_\theta = -6.10$.

Con tali valori, i poli del sistema si trovano in $s = 0, -0.0104, -0.539, -2.25 \pm j2.99$. I due poli complessi associati al modo *short-period* hanno coefficiente di smorzamento $\zeta = 0.602$ e pulsazione naturale $\omega_n = 3.75 \text{ rad/s}$, valori che rispettano le specifiche del problema.

Loop Esterno

Il loop esterno ha il compito di spostare il polo in $s = 0$, fornendo al contempo le prestazioni desiderate. A tal fine, viene adottato un controllore PD:

$$C(s) = -0.0082844(0.1 + s)$$

I parametri del controllore (guadagno e posizione del polo reale) sono stati determinati mediante la funzionalità di *optimization-based tuning* fornita dal tool Control System Designer.

Si nota che i valori trovati dal modello di ottimizzazione sono tali perché rappresentano un compromesso tra i tempi di risposta e smorzamento: un incremento di $|k|$ farebbe scendere il coefficiente di smorzamento dei poli associati al modo *short-period* al di sotto di 0.5, mentre una riduzione $|k|$ porterebbe ad una dinamica più lenta, poiché due poli si avvicinerebbero all'origine.

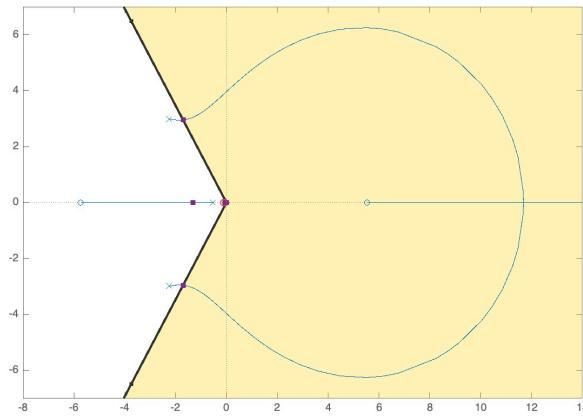


Figura 4.5: Luogo delle radici per $C(s) = k(z_0 + s)$, $k < 0$

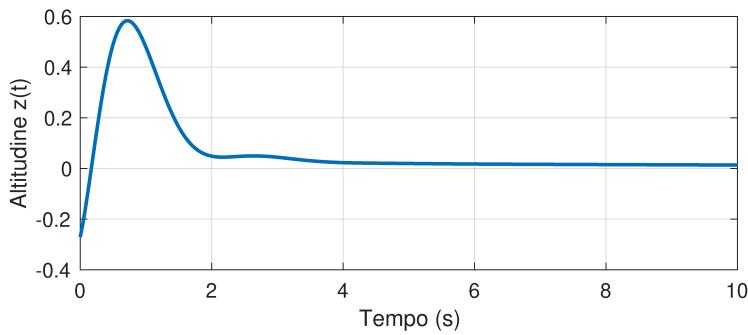


Figura 4.6: Risposta impulsiva del sistema

4.1.3 Prestazioni

Per il sistema controllato dai controllori ottenuti precedentemente, si ricavano i seguenti parametri:

- coefficiente di smorzamento associato al modo *short-period*: $\zeta = 0.5$
- frequenza naturale associata al modo *short-period*: $\omega_n = 3.41 \text{ rad/s}$
- tempo di salita, ovvero tempo necessario per arrivare al 90% del valore di regime ($y(\infty)$):
 $T_s = 34.11 \text{ s}$
- sovraelongazione percentuale: $S\% = \frac{y_{max}}{y(\infty)} - 1 = 0\%$
- sottoelongazione percentuale: $U\% = \frac{y_{min}}{y(\infty)} - 1 = 2.42\%$
- tempo di assestamento, ovvero il tempo necessario perché la risposta entri nella fascia di valori compresi tra $\pm 2\% \cdot y(\infty)$ senza più uscirne: $T_a = 238.28 \text{ s}$

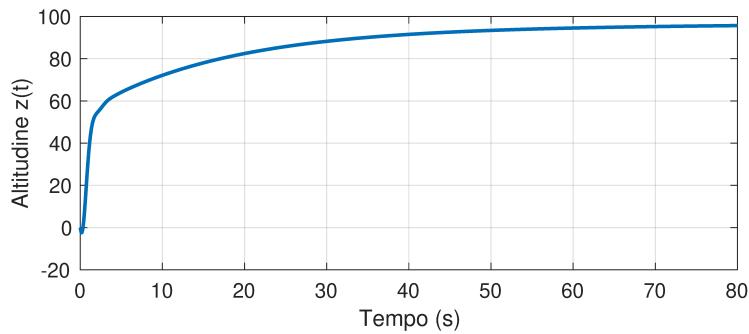


Figura 4.7: Risposta del sistema al gradino di 100 ft

Il sistema di controllo sviluppato consente di soddisfare i requisiti specificati dal problema, stabilizzando la dinamica del velivolo e mantenendo correttamente una determinata altitudine.

4.2 Moti Laterali

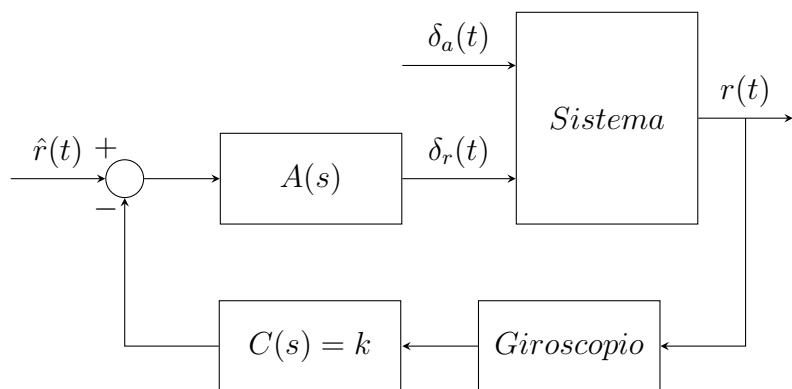
L’obiettivo del controllo dei moti laterali è quello di regolare il coefficiente di smorzamento e la frequenza naturale del sistema, così da garantire una risposta dinamica più desiderabile.

Studi condotti in ambito aeronautico [14] hanno mostrato che i piloti tendono a preferire velivoli con coefficiente di smorzamento $\zeta > 0.5$ e frequenza naturale $\omega_n \approx 0.5$.

Poiché i requisiti sono espressi in termini di ζ e ω_n , si preferisce utilizzare il luogo delle radici, in quanto consente di posizionare direttamente i poli del sistema in modo da soddisfare tali specifiche, risultando più appropriato rispetto alla sintesi di Bode.

4.2.1 Controllore Proporzionale

Architettura



Dove il blocco $A(s) = \frac{10}{s+10}$ è un modello dell'attuatore che è un componente a risposta più veloce rispetto al resto del sistema. Presenta un unico polo in -10 , il che implica tempi di salita e assestamento molto ridotti.

Analisi del Parametro K

Utilizzando il tool Control System Designer, si osserva che valori di $k > 0$ non sono adatti al controllo del sistema. All'aumentare di k , infatti, i poli complessi coniugati associati al modo *dutch roll* si spostano verso destra nel piano complesso. In una fase iniziale ciò comporta una diminuzione del coefficiente di smorzamento ζ ; tuttavia, per valori di $k \gtrsim 0.1946$, i poli assumono parte reale positiva, portando all'instabilità del sistema.

Anche per valori di $k < 0$ si osserva come il controllore considerato non sia in grado di soddisfare i requisiti specificati dal problema. Impostando tali vincoli all'interno del tool Control System Designer, si osserva che, per qualunque valore di k , i poli associati al moto di *dutch roll* non rientrano mai nell'area bianca, indicativa delle posizioni nel piano compatibili con le specifiche di progetto.

Viene comunque determinato un valore del parametro k che avvicina il più possibile al coefficiente di smorzamento richiesto, per fare ciò è stata utilizzata la funzionalità di *optimization based tuning* fornita dal tool Control System Designer.

$$C_1(s) = -2.6981$$

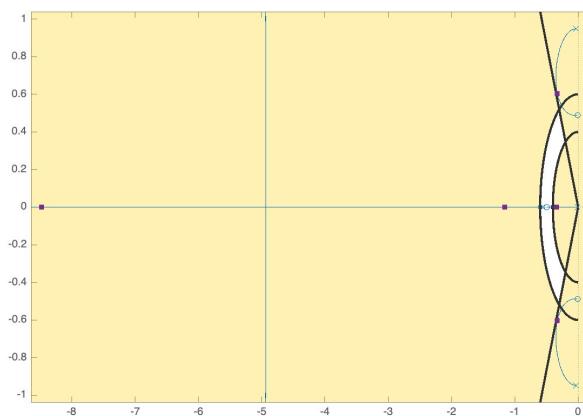


Figura 4.8: Luogo delle radici per $K < 0$ con segnate le radici per $K_1 = -2.6981$

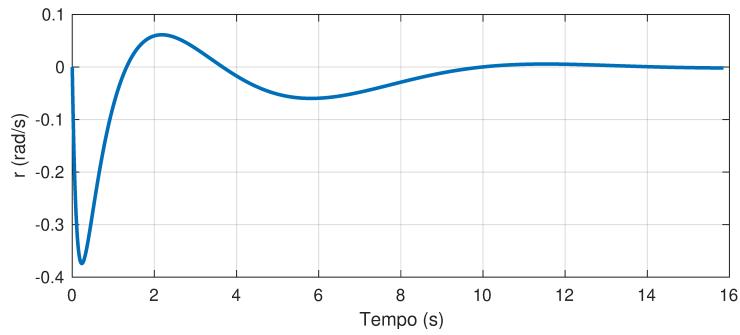


Figura 4.9: Risposta impulsiva del sistema con controllore proporzionale per $K_1 = -2.6981$

Prestazioni

Per il valore di K_1 ottenuto mediante ottimizzazione, si ricavano i seguenti parametri del sistema:

- coefficiente di smorzamento associato al modo *dutch roll*: $\zeta_1 = 0.479$
- frequenza naturale associata al modo *dutch roll*: $\omega_{n,1} = 0.686 \text{ rad/s}$
- tempo di salita: $T_{s,1} = 7.26 \text{ s}$
- sovraelongazione percentuale: $S_{\%,1} = 2.43\%$
- tempo di assestamento: $T_{a,1} = 10.7 \text{ s}$

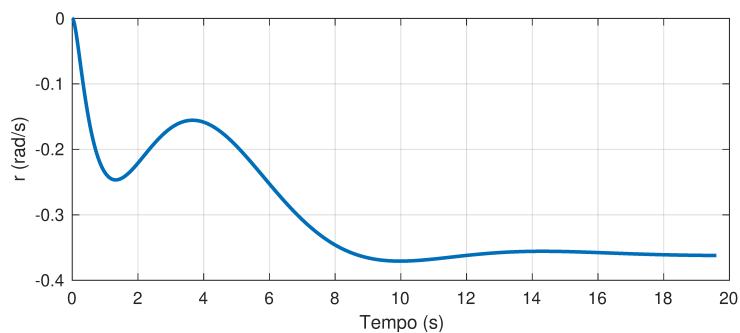


Figura 4.10: Risposta al gradino del sistema con controllore proporzionale per $K_1 = -2.6981$

Sebbene i requisiti specificati non risultino pienamente soddisfatti, i valori ottenuti si avvicinano sensibilmente alle specifiche, soprattutto se si considera la semplicità dell'architettura di controllo adottata.

4.2.2 Controllore a Singolo Polo

Architettura

L'architettura del sistema di controllo rimane sostanzialmente invariata; viene tuttavia sostituito il controllore proporzionale con un controllore a singolo polo, descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$C(s) = \frac{K}{s + p_0}$$

Analisi dei Parametri p_0 e K

La scelta della posizione del polo reale viene eseguita sperimentalmente:

- Per valori di p_0 nell'intervallo $[-3.045, 0]$, la presenza del polo fa sì che i poli associati al modo *dutch roll* seguano un percorso che li allontana dall'asse reale e li avvicina a quello immaginario, peggiorando così le prestazioni del sistema.
- Per valori di $p_0 < -3.045$, l'effetto si inverte: il percorso dei poli del modo *dutch roll* si avvicina all'asse reale e si allontana da quello immaginario, migliorando così le prestazioni del sistema. Il massimo effetto positivo si ottiene proprio per $p_0 = -3.045$.

La scelta del parametro K avviene similmente a quanto fatto precedentemente per il controllore proporzionale determinando così il valore di $K_2 = -9.202$

$$C_2(s) = -\frac{9.202}{s + 3.045} = -\frac{3.022}{1 + 0.3268s}$$



Figura 4.11: Luogo delle radici per $K < 0$ con segnate le radici per $K_2 = -9.202$ e $p_0 = -3.045$

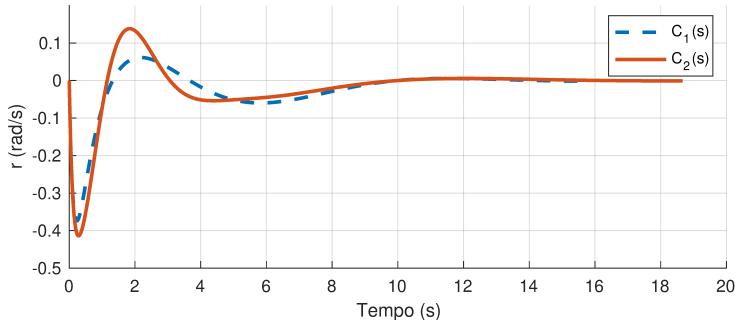


Figura 4.12: Risposta impulsiva del sistema con controllore a singolo polo per $K_2 = -9.202$ e $p_0 = -3.045$

Prestazioni

Per i valori di p_0 e K_2 si ricavano i seguenti parametri del sistema:

- coefficiente di smorzamento associato al modo *dutch roll*: $\zeta_2 = 0.527$
- frequenza naturale associata al modo *dutch roll*: $\omega_{n,2} = 0.559 \text{ rad/s}$
- tempo di salita: $T_{s,2} = 6.71 \text{ s}$
- sovraelongazione percentuale: $S_{\%,2} = 5.52\%$
- tempo di assestamento: $T_{a,2} = 12.7 \text{ s}$

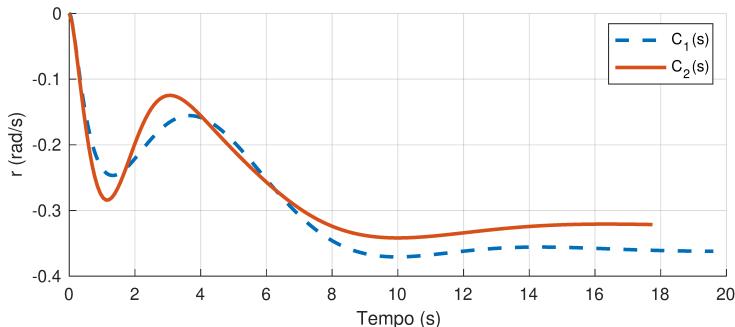


Figura 4.13: Risposta dell'angolo di rollio al gradino del sistema con controllore a singolo polo per $K_2 = -9.202$ e $p_0 = -3.045$

In questo caso, il controllore a singolo polo consente di soddisfare i requisiti specificati dal problema.

4.2.3 Effetti Negativi della Retroazione

Come descritto in [15], i controllori precedentemente descritti si rivelano problematici nel momento in cui il pilota cerca di imporre un angolo di rollio costante al velivolo. In tali condizioni,

infatti, il controllore genera dei comandi che tendono ad annullare l'azione del pilota.

La funzione di trasferimento è stata quindi sovrastabilizzata, attenuando eccessivamente il modo *spiral*, al quale i piloti sono abituati e che si aspettano.

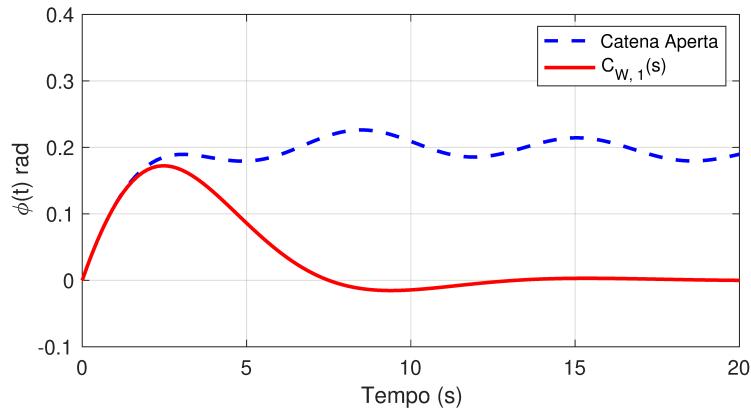
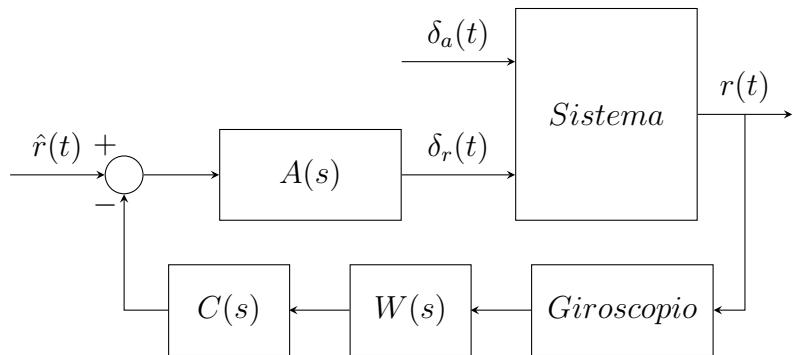


Figura 4.14: Risposta del sistema ad un impulso agli alettoni

I piloti sono abituati a questo comportamento del velivolo. Per reintrodurlo nel sistema controllato, si introduce nella retroazione un filtro passa-alto, noto come *washout filter*, il cui scopo è attenuare la risposta del controllore a segnali costanti o a bassa frequenza.

Architettura



Dove il controllore è a singolo polo e il filtro passa-alto $W(s)$ è definito come:

$$W(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Il parametro τ determina la frequenza di taglio del filtro e può essere regolato in base ai requisiti del sistema.

Analisi del Parametro τ

Vengono ora analizzate le prestazioni del sistema al variare del parametro τ , i controllori utilizzati per questa analisi sono stati progettati seguendo il metodo precedentemente descritto nella sezione 4.2.2.

Controllore	τ	ζ	ω_n [rad/s]	t_r [s]	t_a [s]
$C_{W,1}(s) = -\frac{1.635}{1 + 0.59s}$	3	0.5	0.839	470	835
$C_{W,2}(s) = -\frac{2.106}{1 + 0.47s}$	5	0.503	0.689	663	1180
$C_{W,3}(s) = -\frac{2.614}{1 + 0.39s}$	10	0.5	0.608	1249	2128

Si osserva che valori più bassi di τ tendono a favorire la risposta del sistema agli ingressi costanti, mentre valori più elevati migliorano la stabilità del sistema.

Questo accade perché, all'aumentare di τ il polo associato al filtro di *washout* si avvicina all'origine del piano complesso, consentendo di ottenere valori più favorevoli per ζ e ω_n , a discapito però dei tempi di risposta, che risultano peggiorati.

Dal punto di vista fisico, un incremento di τ comporta una riduzione della frequenza di taglio del filtro passa-alto, estendendo così l'intervallo di frequenze su cui il controllore esercita un'influenza significativa.

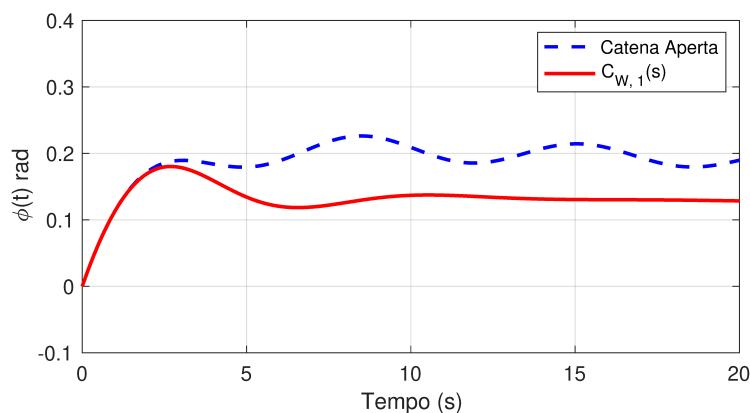


Figura 4.15: Risposta del sistema ad un impulso agli alettoni con filtro di *washout* nel caso $\tau = 3$

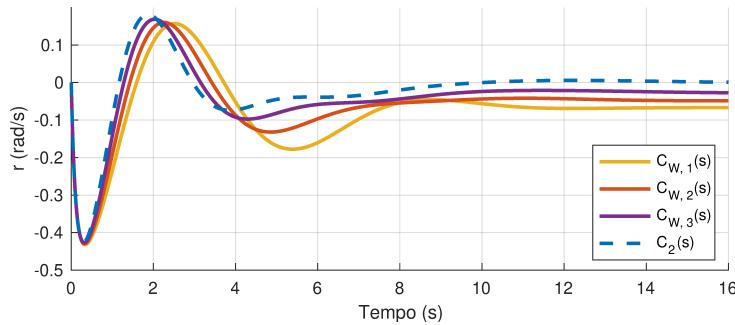


Figura 4.16: Risposta impulsiva dei controllori con filtro di *washout*

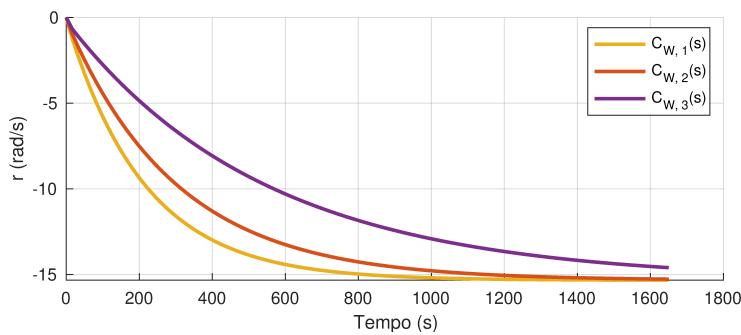


Figura 4.17: Risposta al gradino dei controllori con filtro di *washout*

Si nota che il filtro di *washout* può essere integrato nel controllore, per ottenere tale controllore è sufficiente moltiplicare le funzioni di trasferimento del controllore e del filtro passa-alto.

4.2.4 Sintesi con Strategia di Controllo Ottimo

Si osserva che le prestazioni del sistema di controllo possono essere migliorate utilizzando un controllore *full-state feedback*, questa strategia viene descritta in dettaglio in [14].

Tuttavia, come sottolineato nel testo, tale strategia comporta un aumento della complessità del sistema non giustificato dal miglioramento marginale delle prestazioni. Per questa ragione, il suo impiego risulta poco diffuso nella pratica.

Appendice A

Report Tecnico NASA CR-2144

Il report tecnico NASA CR-2144 [11] contiene i valori delle derivate di stabilità per dieci velivoli. In particolare, nella sezione IX sono riportati i dati relativi al Boeing 747.

Selezione delle colonne

A pagina 229 sono presenti informazioni che permettono di individuare le colonne da utilizzare:

TABLE IX-3

B-747 DIMENSIONAL, MASS AND FLIGHT CONDITION PARAMETERS

$s = 5500 \text{ sq ft}$, $b = 195.68 \text{ ft}$, $\bar{c} = 27.31 \text{ ft}$

F/C #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
height=H(FT)	SL	SL	SL	SL	20 K	20 K	20 K	40 K	40 K	40 K
mach=M(-)	.198	.249	.450	.650	.500	.650	.800	.700	.800	.900
$U_0 = VTO(FPS)$	221.	278.	502.	726.	518.	674.	830.	678.	774.	871.
VTO(KTAS)	131.	165.	298.	430.	307.	399.	492.	402.	452.	516.
VTO(KCAS)	131.	165.	298.	430.	228.	299.	373.	210.	243.	278.
W(LBS)	564032.	564032.	636636.	636636.	636636.	636636.	636636.	636636.	636636.	636636.
C.G.(MGC)	.250	.250	.250	.250	.250	.250	.250	.250	.250	.250
I _X (SLUG-FT SQ)	.142E+8	.142E+8	.182E+8							
I _Y (SLUG-FT SQ)	.323E+8	.323E+8	.331E+8							
I _Z (SLUG-FT SQ)	.454E+8	.454E+8	.497E+8							
I _{XZ} (SLUG-FT SQ)	870050.	870050.	970056.	970056.	970056.	970056.	970056.	970056.	970056.	970056.
EPSILC(DEG)	-1.60	-1.60	-1.76	-1.76	-1.76	-1.76	-1.76	-1.76	-1.76	-1.76
Q(PSF)	58.1	92.2	300.	626.	170.	288.	436.	135.	177.	224.
QC(PSF)	58.7	93.6	315.	695.	181.	320.	510.	153.	207.	273.
$\bar{\alpha} = \text{ALPHA (DEG)}$	8.50	5.70	3.10	0.	6.80	2.50	0.	7.30	4.60	2.40
GAMMA(DEG)	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
LXP(FT)	86.0	86.0	86.0	86.0	86.0	86.0	86.0	86.0	86.0	86.0
LZP(FT)	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0	-10.0
I _{TH} (DEG)	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
XI(DEG)	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
L _{TH} (FT)	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0

Osservando i valori evidenziati in verde, in particolare l'altitudine e la velocità u_0 , è possibile selezionare la colonna 7 per le equazioni dei moti longitudinali e la colonna 9 per quelle dei moti laterali.

In questa pagina si può inoltre ricavare il valore di $\bar{\alpha}$, utilizzato in entrambi i set di equazioni.

Moti Lateralni

TABLE IX-4
B-747 LONGITUDINAL DIMENSIONAL DERIVATIVES
(BODY AXIS SYSTEM)

F/C #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	SL	SL	SL	SL	20 K	20 K	20 K	40 K	40 K	40 K
M	.198	.249	.450	.650	.500	.650	.800	.700	.800	.900
$X_u^* = Xu *$	-.0209	-.0108	-.00499	-.00777	-.00247	-.00280	-.00643	.00187	-.00276	-.0200
$Z_u^* = Zu *$	-.202	-.150	-.0807	-.126	-.0679	-.0832	-.0941	-.0696	-.0650	-.0424
$M_u^* = Mu *$.000117	.000181	.000146	-.000199	.000247	.885E-4	-.000222	.000259	.000193	-.523E-4
$X_w = Xw$.122	.106	.0743	.0345	.0782	.0482	.0253	.0263	.0249	.0159
$Z_w = Zw$	-.512	-.613	-.736	-.963	-.433	-.539	-.624	-.292	-.317	-.401
$M_w = Mw$	-.00177	-.00193	-.00262	-.00239	-.00170	-.00190	-.00153	-.00101	-.00105	-.00140
ZWD	.0334	.0338	.0257	.0253	.0157	.0156	.0144	.00704	.00556	.00614
$Z_q = ZQ$	-.6.22	-.7.58	-.10.4	-.12.8	-.6.39	-.8.09	-.9.99	-.4.32	-.5.16	-.6.71
$M_{\dot{q}} = MWD$	-.000246	-.000240	-.000221	-.000228	-.000125	-.000155	-.000212	-.905E-4	-.000116	-.000160
$M_q = MQ$	-.357	-.437	-.699	-.925	-.421	-.535	-.669	-.284	-.330	-.401
$X_{\delta_e} = XDE$.959	.971	1.18	0.	2.02	1.15	0.	1.93	1.44	.781
$Z_{\delta_e} = ZDE$	-.6.42	-.9.73	-.21.8	-.32.4	-.16.9	-.26.4	-.32.7	-.15.1	-.17.0	-.18.6
$M_{\delta_e} = MDE$	-.378	-.574	-.1.40	-.2.07	-.1.09	-.1.69	-.2.09	-.070	-.1.16	-.1.22
XDTH	.570E-4	.570E-4	.505E-4	.505E-4	.505E-4	.505E-4	.505E-4	.505E-4	.505E-4	.505E-4
ZDTH	-.249E-5	-.249E-5	-.220E-5	-.220E-5	-.220E-5	-.220E-5	-.220E-5	-.220E-5	-.220E-5	-.220E-5
MDTH	.310E-6	.310E-6	.302E-6	.302E-6	.302E-6	.302E-6	.302E-6	.302E-6	.302E-6	.302E-6

Quasi tutti i valori necessari sono riportati direttamente nella tabella. La traduzione dei simboli è stata possibile grazie alla corrispondenza tra i simboli generati dal computer e la notazione standard, riportata da pagina A-8 a A-10 dell'appendice.

I valori per $M_{(\cdot)}^*$ non sono esplicitamente riportati, ma possono essere ricavati a partire dalle equazioni che li definiscono (vedi (2.20)), utilizzando i dati presenti nel report.

I termini $T_{\delta_t} \cos \epsilon$, $-T_{\delta_t} \sin \epsilon$ e $M_{\delta_t}^*$ non compaiono in questa tabella, ma possono essere trovati per il Boeing 747 a pagina 40 di [12].

Moti Longitudinali

234

TABLE IX-8
B-747 LATERAL-DIRECTIONAL DIMENSIONAL DERIVATIVES
(BODY AXIS SYSTEM)

F/C *	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	SL	SL	SL	SL	20 K	20 K	20 K	40 K	40 K	40 K
M	.198	.249	.450	.650	.500	.650	.800	.700	.800	.900
YY	-.0890	-.0997	-.143	-.197	-.0822	-.104	-.120	-.0488	-.0558	-.0606
$Y_v = Y_B$	-19.7	-27.8	-71.7	-143.	-42.6	-70.4	-99.4	-33.1	-43.2	-52.8
$L_v = L_B^t$	-1.33	-1.63	-3.19	-5.45	-2.05	-2.96	-4.12	-1.45	-3.05	-1.32
$N_v = N_B^t$.168	.247	.810	1.82	.419	.923	1.62	.404	.598	.971
$L_p = L_P^t$	-.975	-1.10	-1.12	-1.47	-.652	-.804	-.974	-.404	-.465	-.459
$N_p = N_P^t$	-.166	-.125	-.0706	-.0214	-.0701	-.0531	-.0157	-.0366	-.0316	.00284
$L_r = L_R^t$.327	.198	.379	.256	.376	.317	.292	.312	.388	.280
$N_r = N_R^t$	-.217	-.229	-.246	-.344	-.140	-.193	-.232	-.0963	-.115	-.141
$Y_{\delta_a} = Y^* CA$	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
$L_{\delta_a} = L^* CA$.227	.318	.229	.372	.128	.210	.310	.0964	.143	.186
$N_{\delta_a} = N^* CA$.0264	.0300	.0285	.0371	.0177	.0199	.0127	.00875	.00775	-.00611
$Y_{\delta_r} = Y^* CR$.0148	.0182	.0226	.0213	.0131	.0142	.0124	.00777	.00729	.00464
$L_{\delta_r} = L^* CR$.0636	.110	.254	.318	.148	.211	.183	.115	.153	.100
$N_{\delta_r} = N^* CR$	-.151	-.233	-.614	-.970	-.391	-.616	-.922	-.331	-.475	-.442

In questo caso la tabella fornisce direttamente tutti i valori necessari per le equazioni dei moti longitudinali, senza bisogno di ulteriori trasformazioni o integrazioni.

Bibliografia

- [1] Kambui. «Pan American World Airways - Pan Am Boeing 747-121(A/SF) N747PA 'Clipper Juan T. Trippe'. »indirizzo: <https://www.flickr.com/photos/kambui/21493349240/>.
- [2] C. Mazza, «Analisi delle caratteristiche aero-mecaniche di un aeromobile a pilotaggio remoto,» tesi di laurea mag., Politecnico di Torino, 2022. indirizzo: <https://webthesis.biblio.polito.it/25151/1/tesi.pdf>.
- [3] Wikipedia, *Aircraft principal axes — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2025. indirizzo: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Aircraft\%20principal\%20axes&oldid=1268147601>.
- [4] D. Cotterle, «Modellizzazione e Controllo di un Jet-Fighter in Fase di Rifornimento in Volo,» tesi di laurea mag., Università degli Studi di Padova, 2014. indirizzo: <https://thesis.unipd.it/retrieve/7128779e-4d6f-4301-becf-063e765d7494/Tesi.pdf>.
- [5] Wikipedia, *Euler angles — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2025. indirizzo: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler\%20angles&oldid=1265587467>.
- [6] H. Smith, *Aircraft Flight Mechanics*, 2023. indirizzo: <https://aircraftflightmechanics.com/>.
- [7] P. Zotto, S. Lo Russo e P. Sartori, *Problemi di Fisica Generale. Meccanica, Termodinamica*. Esculapio, 2022.
- [8] S. Zampieri, *Dispensa di Controlli Automatici*. Progetto, 2011.
- [9] A. Bryson, *Control of Spacecraft and Aircraft*. Princeton University Press, 1994.
- [10] G. H. Bryan, *Stability in Aviation*. Macmillan, 1911.
- [11] R. Heffley e W. Jewell, «Aircraft Handling Qualities,» NASA Contractor Reports, rapp. tecn., 1973.
- [12] L. Sanches, «Study and Simulation of Dynamic Longitudinal Stability of a Passenger Aircraft - Boeing 747-100 - on Adverse Atmosphere Conditions,» giu. 2007.

- [13] M. Cook, *Flight Dynamics Principles* M.V. Cook. Arnold, 1997. indirizzo: <https://books.google.it/books?id=gUESyAEACAAJ>.
- [14] G. Franklin, J. Powell e A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, 2018.
- [15] MathWorks, *Yaw Damper Design for a 747 Jet Aircraft*. indirizzo: <https://it.mathworks.com/help/control/ug/yaw-damper-design-for-a-747-jet-aircraft.html>.