

Teoria dei Circuiti

1. Introduzione

Nel corso vengono utilizzate due grandezze scalari introdotte nel corso di Fisica 2: Corrente (1.1) e Tensione (1.2)

1.1 Correnti Elettriche

Def Una proprietà di un corpo è la sua carica elettrica. Le cariche possono essere positive o negative.

La carica totale di un corpo è pari alla somma algebrica delle cariche $q = \sum q^+ + \sum q^-$

L'unità di misura della carica è il Coulomb (C)

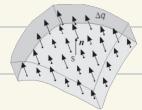
La carica si può modellizzare come puntiforme oppure come una densità volumetrica o superficiale

$$\rho = \frac{dq}{dt} \quad [\rho] = \frac{C}{m^3} \quad \text{oppure} \quad \sigma = \frac{dq}{dS} \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

1.1.1 Intensità di Corrente Elettrica

Definiamo l'intensità di corrente elettrica come il rapporto tra la carica dq che transita attraverso una superficie S nel suo verso normale ed il tempo dt

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad [i] = \text{Ampere (A)}$$

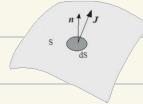


Def Le correnti di conduzione si manifestano quando le cariche libere possono muoversi nel reticolo cristallino

Def Le correnti di convezione sono causate da corpi o particelle cariche in movimento

1.1.2 Densità di Corrente Elettrica

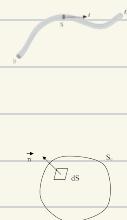
Def La densità di corrente elettrica è il vettore che rappresenta la direzione delle cariche positive. $j = \rho^+ \vec{v}^+ + \rho^- \vec{v}^- \quad [j] = \frac{A}{m^2}$



Corrente e densità di corrente hanno come relazione: $i(t) = \int_S j \cdot dS = \Phi(j)$

Oss Se il conduttore è filiforme (una dimensione è molto maggiore delle altre due).

$$\text{Allora: } i = j \cdot S$$



1.1.3 Legge di Continuità

S1 Se una superficie chiusa, orientata secondo il vettore \hat{n} , normale e uscente

Allora sappiamo $i_{\text{usc}} = \frac{dq_{\text{usc}}}{dt}$ e, per conservazione della carica, $dq_{\text{usc}} = -dq_{\text{ent}}$



$$\text{Quindi } i_{\text{usc}} = -\frac{dq_{\text{ent}}}{dt}$$

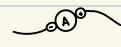
Def Se la superficie è in quiete (o a regime stazionario) allora $i_{\text{usc}} = 0 \Rightarrow \oint_S j = 0$

Sì dice allora che il campo di corrente è solenoidale

1.1.4 Amperometro

L'amperometro è uno strumento che permette di misurare la corrente elettrica attraverso un filo

Un amperometro si dice ideale se non modifica l'intensità di corrente nella sezione in cui è inserito.



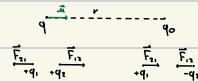
1.2 Tensione Elettrica

1.2.1 Legge di Coulomb

Due cariche puntiformi risentono di una forza detta di Coulomb

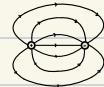
$$\vec{F}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}$$

Le forze attrarre cariche opposte e respinge cariche simili



1.2.2 Campo Elettrico

Il campo elettrico è un campo di forze $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$, descrive direzione e intensità che verrebbe esercitato su una carica di prova dalle forze elettromagnetiche $[\vec{E}] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$



1.2.3 Tensione Elettrica

Dato una curva l orientata da un versore \hat{t} si dice tensione elettrica l'integrale di linea

$$v_{AB}(l) = \int_l \vec{E}(P, t) \cdot \hat{t} dt$$



Oss: \vec{E} non è conservativo, $v(l)$ dipende quindi degli estremi del percorso di l ($v_{AB} = -v_{BA}$)

1.2.4 Campo Elettrostatico

Se il campo elettrico è generato da una carica in quiete allora

il campo elettrico è detto campo elettrostatico.

Def Il campo elettrostatico è conservativo, è possibile definire una funzione scalare, il potenziale elettrostatico V

$$\int_A^B \vec{E} ds = V(A) - V(B) = -\Delta V \quad [V] = \text{Volt (V)}$$

$$\text{Oss } W = \int_A^B \vec{F} ds = q_0 \int_A^B \vec{E} ds = q_0 \Delta V$$

PROP - del campo elettrostatico

• Si può calcolare così: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}$ oppure $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k^2} \hat{u}_k$, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{f}{r^2} \hat{u} dV$

• Il campo elettrostatico è conservativo $\oint \vec{E} ds = 0$

• La tensione non è una differenza di potenziale, tuttavia in regime stazionario vale $v_{AB} = V(A) - V(B)$

1.2.5 Equilibrio Elettrostatico

Un materiale si dice in equilibrio elettrostatico se le cariche sono

in quiete nello spazio e costanti nel tempo.

Un conduttore in equilibrio elettrostatico ha campo elettrico interno nullo ($\vec{E}_{int} = 0$)

- Def** Un materiale è detto:
- omogeneo se le sue proprietà non variano nello spazio
 - lineare se le sue proprietà non dipendono dell'intensità del campo
 - isotropo se le sue proprietà non dipendono dalla direzione del campo

Def Un materiale è detto uniforme se è omogeneo, lineare e isotropo.

Oss Il campo elettrostatico di una cernice q inserita in un materiale dielettrico (isolante) uniforme si esprime nel modo già visto per una cernice nel vuoto, sostituendo ϵ_0 con ϵ del dielettrico.

Oss Il regime stazionario è da considerarsi una situazione elettrostatica.

In condizioni verificabili invece il campo elettrico non è, in generale, conservativo.

1.2.6 Campo Elettromagnetico

Una cernice di prova q_0 in moto a velocità v_0 quando immersa in un campo elettromagnetico subisce una forza $\frac{\vec{F}}{q_0} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

Def Definiamo la forza elettromotrice indotta come l'integrale su una curva chiusa del campo elettrico:
fem indotti = $\oint \vec{E} ds$

1.2.4 Voltmetro

Strumento per misurare le tensioni elettriche. Ha due capi, uno positivo ed uno negativo.

Una volta inserito nel circuito misura la differenza di potenziale ai suoi capi.



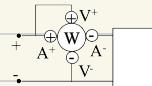
Il voltmetro si dice ideale se non perturba le condizioni presenti.

1.2.5 Wattmetro

La misura della potenza può essere effettuata da uno strumento detto wattmetro.

Lo strumento è dotato di due morsetti voltmetrici e due amperometrici.

Oss Il wattmetro ideale non perturba le condizioni esistenti prima dell'inserimento.



2. Modello a Reti Elettriche

In molte applicazioni, è solo richieste un'analisi di ogni componente "nel suo complesso" e delle sue interazioni con gli altri.

Non si cerca quindi una soluzione orunque, ma si studia il modello di un insieme di componenti collegate tra loro.

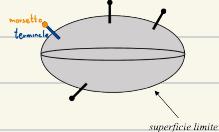
A regime stazionario, o semi-stazionario (quando la variazione è abbastanza lento) possiamo dire che, al di fuori dei componenti:

- \vec{j} è solenoidale (il totale delle correnti uscenti da una superficie chiusa è nullo)
- \vec{E} è conservativo (la tensione elettrica non dipende dalla curva, quindi tensione = d.p.)

2.1 I Componenti

Un componente è un oggetto limitato da una superficie chiusa, detta superficie limite.

Dalle superficie emergono non trotti (detti terminali), la cui terminazione è detta morsetto.



A ciascun terminale è associata una corrente e a ciascuna coppia di morselli una tensione.

Def Un componente a 2 poli si dice bipolo, 3 poli tripolo, ..., un componente a n poli si dice n-polo.

PROPR

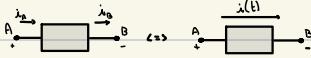
- $i_1(t) + \dots + i_n(t) = 0 \quad \forall t$

- La tensione tra due morselli è una differenza di potenziale $v_{ij} = V_i(t) - V_j(t)$ V_{ij} terminali

Def Sia un n-polo e i_{ij} due suoi terminali. Se $i_{ij}(t) = i_{ji}(t)$ allora i due terminali si dicono porte elettriche.

Ad una porta si attribuisce una corrente (corrente di porta) ed una tensione (tensione di porta).

2.1.1 Bipolo



$$i_A(t) = i_B(t) = i(t)$$

$$v_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t)$$

Per scegliere l'orientamento delle correnti rispetto al riferimento + della tensione

- convenzione dell'utilizzatore



- convenzione del generatore



$$\text{La potenza scambiata dal bipolo è } p(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = v(t)i(t) \quad [p(t)] = W \cdot \frac{A}{s}$$

oss La potenza calcolata con la convenzione dell'utilizzatore (potenza entrante) ha verso opposto rispetto a quella calcolata con la convenzione del generatore (potenza uscente)

$$\text{Il lavoro di un bipolo è quindi } L(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t v(\tau)i(\tau) d\tau$$

Def Un bipolo si dice passivo se, nella convenzione dell'utilizzatore, $L(t) \geq 0$

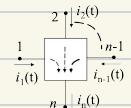
Se un bipolo non è passivo si dice attivo.

2.1.2 M-polo

Un M-polo è un n-polo costituito da sole porte elettriche. M è il numero di porte elettriche ed è caratterizzato dalle m correnti e tensioni di porta.

Oss Un n -polo può essere trattato come un m -polo con $m=n-1$.

Scogliendo un terminale generico n t.c. $i_1(t) + \dots + i_{n-1}(t) = i_n(t)$. Si ottengono così $n-1$ porte elettriche, ognuna con ad un capo uno dei $n-1$ terminali e all'altro il terminale comune.



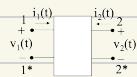
La potenza scambiata da un m -bipolo è $p(t) = \sum_{h=1}^m v_h(t) i_h(t)$

Il lavoro scambiato da un m -bipolo in Δt è $\Delta L = \sum_{h=1}^m \int_{-\infty}^t v_h(\tau) i_h(\tau) d\tau$

L' m -polo è passivo se $L(t) \geq 0 \forall t$, è attivo altrimenti

2.1.3 Doppii Bipoli

Un doppio bipolo è un componente a due porte, ciascuna caratterizzata da una corrente ed una tensione. (correnti e tensioni tra porte diverse non vengono considerate)



Le porte si dicono primaria ($1, 1'$) e secondaria ($2, 2'$) e sono conveniente da utilizzarsi.

$$\begin{cases} v_1 = f_{11}(i_1, i_{1'}) \\ v_1 = f_{12}(i_1, i_2) \\ v_1 = f_{21}(i_1, i_{1'}) \\ v_1 = f_{22}(i_1, i_2) \end{cases}$$

La potenza entrante è $p_1 = v_1 i_1 + v_{1'} i_{1'}$

Def Un doppio bipolo si dice ideale inerte di ordine zero

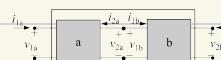
	noti	incognite	matrice
controllate in corrente	$i_1, i_{1'}$	$v_1, v_{1'}$	$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_{1'} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} i_1 \\ i_{1'} \end{pmatrix}$
controllate in tensione	$v_1, v_{1'}$	$i_1, i_{1'}$	$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_{1'} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} v_1 \\ v_{1'} \end{pmatrix}$
ibrido	i_1, v_2	$v_1, i_{1'}$	$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_{1'} \end{pmatrix} = h(v_2)$
ibrido inverso	$v_1, i_{1'}$	i_1, v_2	$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = g(v_1)$
trasmissione	$v_2 - i_2$	$v_1, i_{1'}$	$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_{1'} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$
trasmissione inversa	$v_1, i_{1'}$	$v_2 - i_2$	$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = T'(v_1, i_{1'})$

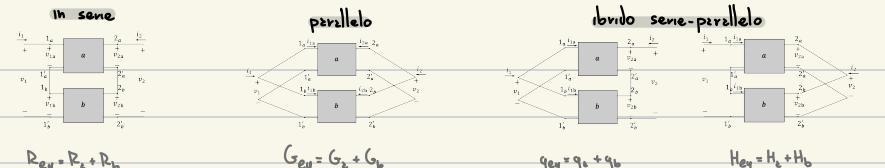
COLLEGAMENTI

• In cascata

$$\text{dato } \begin{pmatrix} v_{1a} \\ i_{1a} \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{1}}{=} T_1^{-1} \begin{pmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{2b} \\ i_{2b} \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{2}}{=} T_2^{-1} \begin{pmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} v_{1a} \\ i_{1a} \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{3}}{=} \begin{pmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{pmatrix}$$

$$\text{allora } \begin{pmatrix} v_{2b} \\ i_{2b} \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{2}}{=} T_2^{-1} \begin{pmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{3}}{=} T_2^{-1} \begin{pmatrix} v_{1a} \\ i_{1a} \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{2}}{=} T_2^{-1} T_1^{-1} \begin{pmatrix} v_{1a} \\ i_{1a} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_{2b} \\ i_{2b} \end{pmatrix} = T_{eq}^{-1} \begin{pmatrix} v_{1a} \\ i_{1a} \end{pmatrix} \quad T_{eq}^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$$



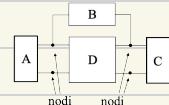


2.2 Connessione di Componenti

I componenti elettrici sono collegati. I punti di collegamento sono detti nodi.

PROP

- I morsetti in comune in un nodo hanno tutti lo stesso potenziale.
- Per il nodo vale la legge di Kirchhoff di j



2.3 Rete Elettrica

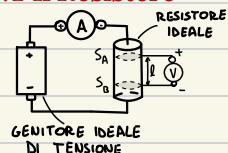
La rete elettrica è detta da componenti elettrici collegati tra loro.

Due aspetti caratterizzano la rete elettrica:

- le tipologie, i tipi di componenti che costituiscono la rete elettrica.
- le topologie, il modo in cui le componenti sono connesse.

3. Componenti

3.1 Il Resistore



Si definisce sperimentalmente la legge di Ohm $R = \frac{V}{i}$. Dove R è la resistenza elettrica. $[R] = \Omega \text{m}^2 (\Omega)$

In modo equivalente $i = \frac{V}{R} = GV$ dove G è la conduttorità elettrica. $[G] = \text{siemens} (S)$

R e G sono caratteristiche del conduttore e sono positivi se si utilizza la convenzione dell'utilizzatore.

3.1.1 Effetto Joule

La resistenza R quando percorso da una corrente i dissipà un lavoro sotto forma di calore una potenza $P_j = R \cdot i^2$

In un tempo Δt : $\Delta Q_j = R \cdot i^2 \Delta t$

3.1.2 Resistività e Conduttilità

Si trova sperimentalmente che $R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\gamma S}$ dove l è la lunghezza ed S la sezione dell'oggetto.

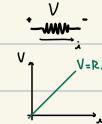
ρ è la resistività del materiale $[\rho] = \Omega \text{m}$ ed $\gamma = \frac{1}{\rho}$ la conduttilità $[\gamma] = \frac{S}{\Omega \text{m}} = \frac{S}{\rho}$

Si noti inoltre che ρ dipende dalla temperatura, nel caso di variazioni limitate di temperatura (senza cambiamenti di stato), vale la dipendenza lineare: $\rho = \rho_0 (1 + \alpha(\theta - \theta_0))$ dove ρ_0 resistività a temperatura θ_0 . Possiamo classificare i materiali in base alla resistività:

conduttori	$\rho < 10^{-6} \Omega \cdot m$
semiconduttori	$10^{-6} \Omega \cdot m < \rho < 10^6 \Omega \cdot m$
isolanti	$\rho > 10^6 \Omega \cdot m$

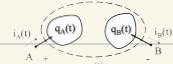
3.1.3 Resistore Ideale

Si chiama resistore ideale un componente per cui vale, in regime stazionario e con la convenzione degli utilizzatori, la relazione fra tensione e corrente: $V = RI$ con $R \geq 0$ costante.



3.2 Condensatore

Si dice condensatore un dispositivo formato da una coppia di conduttori di forma generica dette armature, separate da uno o più mezzi isolanti.



Sulle armature sono presenti cariche uguali ed opposte: $q_A(t) = -q_B(t)$

$$v_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t) \quad (\text{tensione ai morsetti}) \quad i_A = \frac{dq_A(t)}{dt} = -\frac{dq_B(t)}{dt} = i_B(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{C} \frac{dv(t)}{dt} = v(t)$$

$$\text{Definiamo la capacità } C = \frac{q_A(t)}{v_{AB}(t)} = \frac{q_A(t)}{V_{AB}(t)} \quad [C] = \text{Farec} \quad (F)$$

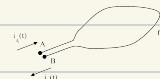
$$\text{e quindi ottengo } i_A(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{e} \quad v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx$$

$$\text{Il lavoro elettrico di carica (o energia immagazzinata) è } L(t) = \int_0^t p_{ed}(x) dx = \int_0^t v(x) i(x) dx = \int_0^t C v(x) dx = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

$$W_c(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ è l'energia capacitiva.}$$

3.3 Induttore

Si dice induttore un dispositivo formato da un conduttore filiforme che forma una curva quasi chiusa.



Si assume che $i_A(t) = i_B(t)$, $v_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t)$

$$\text{La sua relazione fondamentale è } v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{dove } L \text{ è l'induttanza } [L] = \text{Henry (H)}$$

$$\text{e } i(t) = i_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx$$

$$\text{Il lavoro elettrico di carica (o energia immagazzinata) è } L(t) = \int_0^t p_{ed}(x) dx = \int_0^t v(x) i(x) dx = \int_0^t L i(x) dx = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \text{ è l'energia induttiva.}$$

3.4 Generatore Elettrico

I generatori elettrici sono sede di interazione tra fenomeni elettrici e di altre nature.

I fenomeni di altra natura utili alla costruzione di un generatore sono molti:

- elettrochimici (pile)
- fotovoltaici
- termoelettrici (giunzioni bimetalliche + temperature diverse formano una fem)
- piezoelettrici (crystalli che generano una fem se sottoposti a stress)
- elettromecanici (dinamo)

3.4.1 Comportamento

Un generatore si dice "a vuoto" in essenza di corrente ai poli. In questo caso le cariche si accumulano ai poli per azione delle forze elettriche specifiche generate (F_g)



L'accumulo avviene finché la forza totale su q è zero, $F_g + F_e = 0 \Leftrightarrow E_1 + E_2 = 0$

Definiamo la forza elettromotrice (fem) come l'integrale curvilineo $e_{AB}(t) = \int_A^B \vec{E}_g(t) \cdot \vec{dl}$

Se il generatore è a vuoto ($E_g - E_c$) $e_{AB}(t) = \int_B^A \vec{E}_g(t) \cdot \vec{dl} = - \int_A^B \vec{E}_c(t) \cdot \vec{dl} = -V_{BA} = V_{AB}$ (con generatore a vuoto fem=dopp tra A e B)

Se il generatore di tensione è "a carico", ovvero sede di corrente.

Ora $E_g + E_c$ fto e quindi $V_{AB} + \text{fem}$. In particolare $V_{AB} = e_{AB} - R_i i$, dove R_i è la resistenza interna.

3.4.2 Generatore Ideale di Tensione

Il generatore ideale di tensione (GIT) è un bipolo che presenta tensione costante ai morsetti.

Per il GIT vale $V = E$ A symbol for a voltage source, consisting of a circle with a plus sign (+) above it and a minus sign (-) below it, connected by a horizontal line to a vertical line representing the terminals.



3.4.3 Generatore Ideale di Corrente

Il generatore ideale di corrente (GIC) è un bipolo che presenta corrente costante ai morsetti.

Vale la relazione $I = J$ A symbol for a current source, consisting of a circle with a plus sign (+) to its left and a minus sign (-) to its right, connected by a vertical line to a horizontal line representing the terminals.



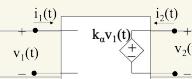
3.5 Generatori Pilotati

Un generatore pilotato impone un valore di corrente o tensione su un lato. In modo dipendente dalla tensione o corrente sull'altro lato detta grandezza di controllo.

3.5.1 GTPT Ideale

Generatore ideale di tensione pilotato in tensione

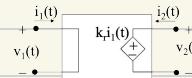
$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = k_a v_1 \end{cases}$$



3.5.2 GTPC Ideale

Generatore ideale di tensione pilotato in corrente

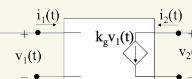
$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = k_v i_1 \end{cases}$$



3.5.3 GCPT Ideale

Generatore ideale di corrente pilotato in tensione

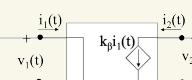
$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = k_g v_1 \end{cases}$$



3.5.4 GCPC Ideale

Generatore ideale di corrente pilotato in corrente

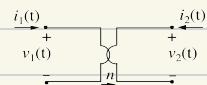
$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = k_p i_1 \end{cases}$$



3.6 Trasformatori

Un trasformatore è un doppio bipolo inerte di ordine zero che presenta le relazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = n v_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) \end{cases} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \text{ dove } n \text{ è il rapporto di trasformazione}$$



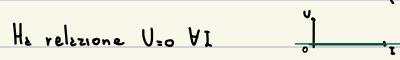
Prop. trasformatore ideale

- Conserva la potenza (è quindi passivo)
- Non è simmetrico (tranne per $n=1$)
- Amplifica tensioni ($n>1$) o correnti ($n<1$)

3.7 Bipoli Ideali a Regime Stazionario

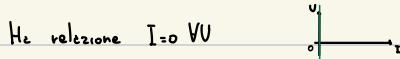
3.7.1 Cortocircuito

Un resistore ideale di resistenza nulla ($R=0$) (un superconduttore) oppure un GIT con $f_{am}=0$



3.7.2 Circuito Aperto

Un resistore ideale con conduttoranza nulla oppure un GIC con $\beta=0$



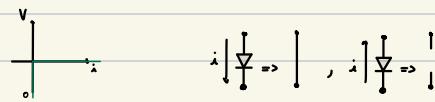
3.7.3 Interruttore Ideale

L'interruttore ideale che apre in $t=t^*$ è t.c. $\begin{cases} \text{cortocircuito} & \text{se } t < t^* \\ \text{aperto} & \text{se } t > t^* \end{cases}$

L'interruttore ideale che chiude in $t=t^*$ è t.c. $\begin{cases} \text{aperto} & \text{se } t < t^* \\ \text{cortocircuito} & \text{se } t > t^* \end{cases}$

3.7.4 Diodo Ideale

Il diodo ideale ha il seguente funzionamento $\begin{cases} \text{cortocircuito} & \text{se } i > 0 \\ \text{aperto} & \text{se } i < 0 \end{cases}$



3.7.5 Induttore Ideale

L'induttore ideale è un bipolo che presenta $v(t)=L \frac{di}{dt}$. A regime stazionario forma un cortocircuito.

L è l'induttanza $[L] = \text{Henry (H)}$

$$L \cdot \frac{d}{dt}$$

3.7.6 Condensatore Ideale

Il condensatore ideale presenta $i(t) = C \frac{dv}{dt}$. A regime stazionario è un circuito aperto.

C è la capacità $[C] = \text{Farad (F)}$

$$C \cdot \frac{1}{t}$$

4. Studio delle Reti Elettriche

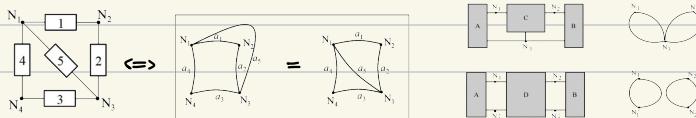
Studiamo ora il comportamento delle reti elettriche in regime stazionario.

4.1 Topologia delle Reti Elettriche

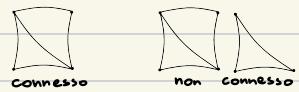
La topologia studia il modo in cui gli N -poli sono interconnessi fra loro, e presiede delle tipologie.

Tradizionalmente una rete viene schematizzata tramite un grafo.

Ogni punto di interconnessione viene eseguito ad un nodo ed ogni bipolo ad un lato.

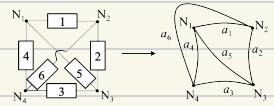


Def Un grafo si dice connesso se, dati due nodi qualsiasi a, b , si può sempre passare da a verso b muovendosi lungo i lati di G .

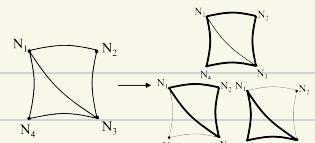


Oss Nel caso di grafo non connesso è possibile studiare le parti separatamente, in quanto non si influenzano.

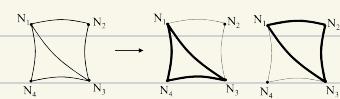
Def Un grafo è detto piano se può essere disegnato su un piano senza che i lati si intersechino.



Def Una maglie è una parte del grafo che costruisce un percorso chiuso che, per i nodi che tocca, li tocca una sola volta.

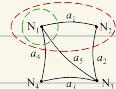


Def Un anello ora una superficie non contenente elementi del grafo

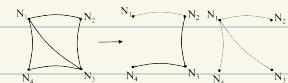


Def Un insieme di taglio è l'insieme dei lati tutti tagliati da una superficie chiusa.

La superficie verde taglia δ_1, δ_2 e δ_3 , mentre la superficie rossa taglia δ_2, δ_4 e δ_5



Def Un albero del grafo è costituito da tutti i suoi nodi e da un sottoinsieme dei lati che collegano tutti i nodi senza formare una maglie.



Def Dato un albero di un grafo, il coalbero è l'insieme di lati ad esso complementari.

Prop Per una rete di M -bipoli con parte convenzionale tutte allo stesso modo allora: $\sum_{h=1}^M a_h(t) i_h(t) = 0$

4.2 Leggi di Kirchhoff

4.2.1 Legge di Kirchhoff delle Correnti - LKC

Dato una rete di n -poli è nulla in ogni istante la somma algebrica delle correnti dei lati di un qualsiasi insieme di taglio

$$\sum_{h \in T} a_h i_h(t) = 0$$

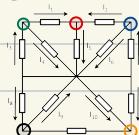
dove $a_h \in \{-1, 1\}$, +1 se concorde alla superficie, -1 altrimenti.



Il numero massimo di equazioni linearmente indipendenti sono $n-1$.

Scegli quindi $n-1$ insiem di taglio tutti contenenti un solo nodo.

ES



$$I_1 = 1A \quad I_4 = 3A \quad I_5 = 2A$$

$$I_6 = -2A \quad I_8 = -4A \quad I_{11} = 1A \quad I_{12} = 5A$$

$$\cdot I_3 - I_4 - I_1 = 0 \Rightarrow I_3 = 4A$$

$$\cdot I_1 + I_2 - I_5 = 0 \Rightarrow I_2 = 0A$$

$$\cdot I_7 - I_6 - I_2 = 0 \Rightarrow I_7 = -2A$$

$$\cdot I_{12} + I_{10} + I_{11} = 0 \Rightarrow I_{10} = -6A$$

$$\cdot I_8 - I_{12} - I_9 = 0 \Rightarrow I_9 = -9A$$

4.2.2 Legge di Kirchhoff delle Tensioni - LKT

Dato un rete di n -poli è nulla in ogni istante la somma algebrica delle tensioni dei lati appartenenti ad un qualsiasi maglie.

$$\sum_{h \in T} \beta_{h,n} u_h(t) = 0$$

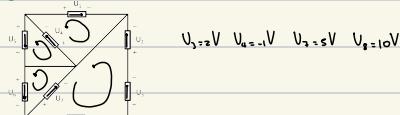
dove $\beta_{h,n} \in \{-1, +1\}$, +1 se concorde il verso delle maglie, -1 altrimenti.



Il numero massimo di equazioni linearmente indipendenti sono $l-n+1$.

Del grafo piano del sistema costruisco un'equazione per ogni anello del grafo.

ES



$$\begin{cases} -U_1 - U_4 = 0 \\ U_4 + U_5 = 0 \\ U_5 + U_2 = 0 \\ U_2 + U_3 + U_6 - U_7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 2V \\ U_5 = -1V \\ U_6 = -5V \\ U_2 = -7V \end{cases}$$

4.2.3 Analisi delle Reti di Bipoli con Kirchhoff

Una rete di l bipoli in regime stazionario ha $2l$ incognite, corrente e tensione di ogni lato o bipolo.

Utilizzando LKC e LKT posso scrivere un sistema di l equazioni linearmente indipendenti:

$$- LKC: n-1 \quad \sum_{h \in T_k} \beta_{h,n} i_h(t) = 0 \quad \text{dove } T_k \text{ insieme di leggio "fondamentale"}$$

$$- LKT: l-n+1 \quad \sum_{h \in M_k} \beta_{h,n} u_h(t) = 0 \quad \text{dove } M_k \text{ maglie "fondamentale"}$$

Posso scrivere le equazioni costitutive, una per ogni bipolo

$$- I \quad \begin{matrix} u(t) = E & \text{GCF} \\ i(t) = J & \text{GIC} \\ u(t) - R \cdot i(t) = 0 & \text{resistore} \end{matrix}$$

Ottengo così un sistema con una soluzione unica (il l equazioni e $2l$ incognite)

$$A[I] = B \quad \text{dove } A \text{ matrice dei coefficienti } (1, 0, -1, -R) \text{ e } B \text{ contiene } (0, E, J)$$

risolviamo con $[I] = A^{-1}B$, ma questo è di difficile calcolo.

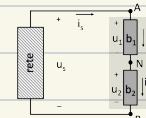
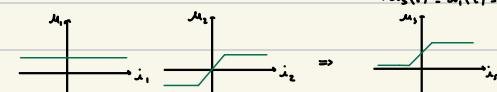
4.3 Semplificazione di Bipoli

4.3.1 Bipoli in Serie

Due bipoli si dicono in serie quando condividono un solo morsetto.

Sono caratterizzati dalle equazioni

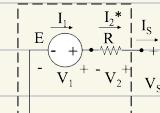
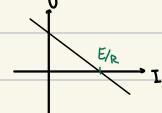
$$\begin{cases} u_s(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ i_s(t) = i_1(t) = i_2(t) \end{cases}$$



GENERATORE REALE DI TENSIONE

Un generatore reale di tensione può essere schematizzato come una serie di un generatore ideale di tensione e un resistore.

$$I_s = I_1 = I_2^* \quad \text{e} \quad V_s = V_1 + V_2 = E - R I_s$$



SERIE DI RESISTORI



$$i_s(t) = i_1(t) = i_2(t) = \dots = i_n(t)$$

$$u_s(t) = u_1(t) + \dots + u_n(t) = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i_s(t) = R_{\text{tot}} i_s(t) \Rightarrow i_s(t) = G_s u_s(t) \Rightarrow i_s(t) = \frac{1}{R_{\text{tot}}} u_s(t)$$

$$R_{\text{tot}} = R_1 + \dots + R_n$$

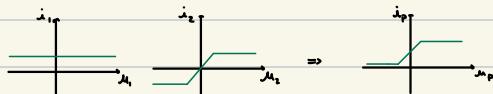
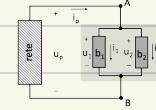
$$U_k \text{ tensione del } k\text{-esimo resistore è } u_k(t) = R_k i_s(t) = \frac{R_k}{\sum_{n=1}^N R_n} u_s(t)$$

4.3.2 Bipoli in Parallello

Due bipoli sono connessi in parallelo se hanno entrambi i morsetti in comune.

Sono caratterizzati dalle equazioni:

$$\begin{cases} u_p(t) = u_1(t) = u_2(t) \\ i_p(t) = i_1(t) + i_2(t) \end{cases}$$

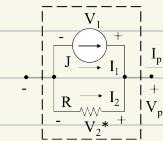
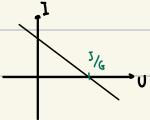


GENERATORE REALE DI CORRENTE

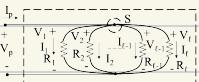
Il parallelo tra un generatore ideale di corrente e un resistore ideale è detto generatore reale di corrente.

$$u_p = u_1 = u_2 \quad i_p = i_1 + i_2$$

$$i_p(t) = j - G u_p(t)$$



PARALLELO DI RESISTORI



$$i_p = i_1 + \dots + i_n = \frac{V_p}{R_1} + \frac{V_p}{R_2} + \dots + \frac{V_p}{R_n} = \frac{V_p}{R_{\text{TOT}}} = \frac{V_p}{R_p}$$

$$i_p = i_1 + \dots + i_n = (G_1 + \dots + G_n) i_p(t) = G_p i_p(t) \Rightarrow i_p(t) = G_p i_p(t) \Rightarrow i_p(t) = \frac{i_p(t)}{G_p}$$

$$G_{\text{TOT}} = G_1 + \dots + G_n \Rightarrow \frac{1}{R_{\text{TOT}}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

La corrente al k-esimo resistore è $i_k(t) = G_k \frac{i_p(t)}{\sum_{h=1}^n G_h}$

4.3.3 Trasformazioni di Generatori

GLT \rightarrow GLC

$$\begin{array}{ccc} \text{GLT: } & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ E \\ | \\ \text{---} \end{array} & \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \text{quindi } R_{\text{GLT}} = R_{\text{GLC}} \quad J = \frac{E}{R} \\ \text{GLC: } & U = E - RI & I = \frac{E}{R} - \frac{U}{R} \end{array}$$

GLC \rightarrow GLT

$$\begin{array}{ccc} \text{GLC: } & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ G \\ | \\ \text{---} \end{array} & \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad \text{quindi } R_{\text{GLC}} = R_{\text{GLT}} \quad E = R J \\ \text{GLT: } & I = J - GU & U = \frac{J}{G} - \frac{I}{G} \end{array}$$

4.4 Sovrapposizione degli effetti

Sia un circuito lineare in regime stazionario con v GIT (E_1, \dots, E_s) ed s GIC (J_1, \dots, J_s)

Se il circuito ha soluzione unica allora le corrente e tensione del bipolo h sono:

$$i_{h,t}(t) = \sum_r i_{h,r,E_r}(t) + \sum_s i_{h,s,J_s}(t)$$

$$i_{h,t}(t) = \sum_r i_{h,r,E_r}(t) + \sum_s i_{h,s,J_s}(t)$$

Si può quindi studiare il circuito un generatore per volta, ricordando che il GIT spento è un contournato, mentre il GIC un circuito aperto.

Oss. Il metodo della sovrapposizione degli effetti non può essere utilizzato per il calcolo delle potenze.

Va prima calcolata la tensione, poi la corrente ed infine si ottiene la corrente.

4.5 Teorema di Sostituzione

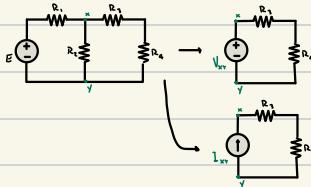
In un circuito che permette soluzione unica e si sostituisce un bipolo qualsiasi della rete.

Se il bipolo ha tensione $u_{sh}(t)$ va sostituito da un GIT con $e(t) = u_{sh}(t)$

Se il bipolo ha corrente $i_{sh}(t)$ va sostituito da un GLC con $j(t) = i_{sh}(t)$

Se il circuito ottenuto ha soluzione unica allora quest'è la stessa della rete originale.

Oss: Il teorema vale anche sostituendo una parte di circuito

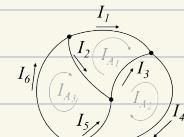


4.6 Correnti di Anello

Corrisponde ad un cambio di variabile nelle equazioni LKC.

Ad ogni anello associa una corrente d'anello I_{Ak} , tutte le correnti della rete si possono scrivere come somma di una o due correnti d'anello.

Esempio: Nel caso dell'immagine a destra: $I_1 = I_{A_1}$, $I_3 = I_{A_2} - I_{A_1}$, $I_5 = I_{A_1} - I_{A_3}$, $I_2 = I_{A_3} - I_{A_1}$, $I_4 = I_{A_2}$, $I_6 = I_{A_3}$.



Sia una rete di GLT (e quindi sono inclusi GIT e resistori ideali) avente grafo pieno connesso. Se nella rete sono presenti GLC per ciascuno di essi si calca l'equivalente GLT.

$$\begin{cases} \sum V = 0 \\ \sum I = 0 \\ V = E - RI \end{cases}$$

Usando le correnti di anello le LKC sono automaticamente soddisfatte.

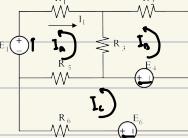
Il sistema si semplifica: $\begin{cases} \sum V = 0 \\ V = E - RI_k(I_{Ak} - I_{Ah}) \end{cases} \Rightarrow \sum E = \sum R_k(z(I_{Ak} - I_{Ah})) \Rightarrow E_{Ak} = R_{Ak} I_{Ak} - \sum R_{Ak,h} I_{Ah}$
dove: $R_{Ak,h}$ somma delle resistenze dei lati dell'anello K

$R_{Ak,h}$ resistenza del lato comune tra gli anelli K e h

E_{Ak} somma algebrica delle tensioni impresse dai GIT presenti sull'anello K

Oss: Per i lati anomali, costituiti da GLC, va aggiunta un'equazione $J_h = z(I_{Ak} - I_{Ah})$ e un'incognita, la tensione del generatore (V_h)

ES



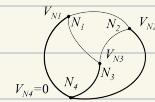
$$\begin{aligned} R_{AA} &= R_1 + R_2 + R_3 & E_A &= -E_1 \\ R_{BB} &= R_2 + R_3 & E_B &= -E_2 \\ R_{CC} &= R_3 + R_4 & E_C &= E_3 - E_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_A &= R_{AA} I_A - R_{AB} I_B - R_{AC} I_C \\ E_B &= R_{BB} I_B - R_{BA} I_A - R_{BC} I_C \\ E_C &= R_{CC} I_C - R_{CA} I_A - R_{CB} I_B \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} -20V = 3\Omega I_A - 3\Omega I_B - 15\Omega I_C \\ 10\Omega V = 2\Omega I_B - 5\Omega I_A - 0I_C \\ -15\Omega V = 2\Omega I_C - 15\Omega I_A - 0I_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4V = 6\Omega I_A - 4V - \frac{1}{3}I_A + 18V - \frac{9}{5}I_A \\ I_B = 4V + \frac{1}{5}I_A \\ I_C = -6V + \frac{3}{5}I_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_A = -4.5A \\ I_B = \frac{31}{10}A = 3.1A \\ I_C = \frac{87}{10}A = -8.7A \end{cases}$$

4.7 Potenziali ai Nodi

Si sceglie un nodo (nodo di massa) del grafo e gli si assegna potenziale zero.

Ai restanti nodi viene assegnato un potenziale relativo al riferimento del nodo di massa.



$$U_{N1} = V_{N1} - V_{N4}$$

Sia una rete di GLC (e quindi sono inclusi GIC e resistori ideali) eventuale grafo pieno connesso. Se nella rete sono presenti GLT per ciascuno di essi si calcola l'equivalente GLC.

Possiamo scrivere le equazioni associate

$$\begin{cases} \sum \pm V = 0 \\ \sum \pm I = 0 \\ I = J - GU \end{cases}$$

Le LKT sono automaticamente soddisfatte.

Il sistema si semplifica:

$$\begin{cases} \sum \pm I = 0 \\ I = J - G(V_{Np} - V_{Ns}) \end{cases} \Rightarrow \sum \pm I = \sum \pm G(V_{Np} - V_{Ns}) \Rightarrow J_{Nk} = G_{N_{kk}} V_{Nk} - \sum G_{N_{kh}} V_{Nh}$$

dove: $G_{N_{kk}}$ somma delle conduttoranze dei lati che hanno morsetto collegato al nodo k

$G_{N_{kh}}$ conduttoranze fra i nodi k e h

J_{Nk} somma algebrica delle correnti impresse dai GIC collegati al nodo k

OSS Per i lati chiamati, costituiti da GIC, va aggiunta un'equazione $E_h = \pm (V_{Nh} - V_{Ns})$ e un'incognita, la corrente del generatore. (I_h)

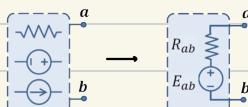
4.8 Teorema di Thévenin

Si consideri una rete lineare come un bipolo con morsetti A e B.

Se la rete è in grado di funzionare a vuoto essa equivale ad un generatore lineare di tensione di perimetro E_{ab} e R_{ab}

Per calcolare R_{ab} raccorda i generatori e calcolo serie/parallelo di resistori

Per calcolare E_{ab} cerco la tensione tra i morsetti



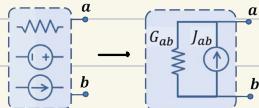
4.9 Teorema di Norton

Si consideri una rete lineare come un bipolo con morsetti A e B.

Se la rete è in grado di funzionare a vuoto essa è equivalente ad un generatore lineare di corrente di parametri J_{ab} e G_{ab} .

Per calcolare G_{ab} tizzerò i generatori e calcolo serie/parallelo di resistori.

Per calcolare J_{ab} cerco la corrente tra i morsetti.



5. Reti in Regime Sinusoidale

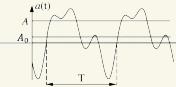
Una rete si dice in regime sinusoidale (AC) quando correnti e tensioni sono sinusoidi isofrequenziali.

Tali reti hanno notevole importanza applicativa.

5.1 Funzioni Periodiche

Una funzione si dice periodica se esiste un intervallo temporale, detto periodo T , t.c. $\alpha(t) = \alpha(t+T)$

La frequenza è il reciproco del periodo $f = T^{-1}$ [$f = s^{-1} = Hz$]



PROP

• L'integrale di un periodo T di una funzione periodica non dipende dal punto iniziale

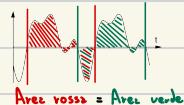
Per questo si indica con $\int_t^\infty \alpha(t) dt$

• Il valore medio è $A_0 = \frac{1}{T} \int_t^\infty \alpha(t) dt$

e il valore medio modulo $A_m = \frac{1}{T} \int_t^\infty |\alpha(t)| dt$

e il valore efficace (RMS) $A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^\infty \alpha^2(t) dt}$

• Il Fattore di forma è $K_F = \frac{A}{A_m}$



5.1.1 Funzioni Sinusoidali

Un sottoinsieme delle funzioni periodiche sono le sinusoidali, ovvero funzioni del tipo:

$$\alpha(t) = A_m \sin(\omega t + \phi)$$

PROP

• A_m è il valore di picco o ampiezza ($A_m = \frac{A_F}{\sqrt{2}}$)

• $\omega = 2\pi f$ [$\omega = \text{rad/s}$] è la pulsazione angolare

• ϕ è la fase iniziale mentre $\omega t + \phi$ è la fase istantanea

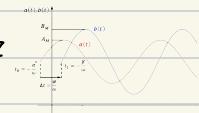
Oss È possibile esprimere la funzione sinusoidale usando il coseno: $\cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$

Def S_w è l'insieme delle sinusoidi isofrequenziali con pulsazione w fissata.

Tale insieme è uno spazio vettoriale (è un insieme chiuso rispetto a somma e prodotto)

Def Definiamo sfasamento delle sinusoidi $a(t) \in S_w$ rispetto a $b(t) \in S_w$ l'angolo $\varphi \in [-\pi, \pi] = \alpha - \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Questo significa che traslando $b(t)$ di $\Delta t = \frac{\varphi}{w}$ è in fase con a , ovvero $a(t) = \frac{A_n}{B_n} b(t + \frac{\varphi}{w})$



5.2 Trasformata di Steinmetz

In S_w ogni sinusode può essere identificata da due numeri reali (A_n, ϕ) oppure un numero complesso, il fasore.

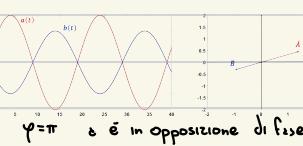
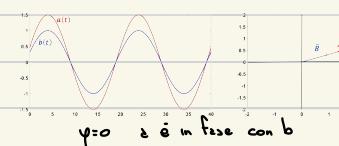
Definiamo la trasformata di Steinmetz (S) una funzione $S: S_w \rightarrow \mathbb{C}$ e la sua antitrasformata $S': \mathbb{C} \rightarrow S_w$

$$a(t) = A_n \sin(wt + \phi) \Rightarrow S[a(t)] = \bar{A} = \frac{A_n}{\sqrt{2}} e^{j\phi} = A e^{j\phi}$$

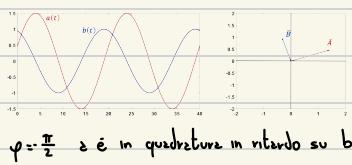
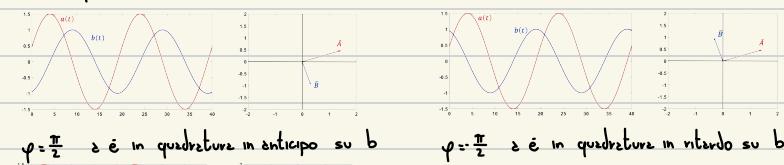
Prop Se S ed S' sono funzioni lineari $S[\lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t)] = \lambda_1 S[a(t)] + \lambda_2 S[b(t)]$

Def Diremo fasore l'immagine di una sinusode $a(t)$ tramite la trasformata di Steinmetz

I fasori si possono esprimere in forme polare ($\bar{A} = A e^{j\phi}$) o cartesiane ($\bar{A} = A \cos \phi + j A \sin \phi$)



$\varphi = \frac{\pi}{2}$ a è in quadratura in anticipo su b



$\varphi = \frac{\pi}{4}$ a è in anticipo su b



5.2.1 Operazioni tra Fasori

• Somma:

$$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = (A_n + B_n) + j(A_c + B_c) = C_n + jC_c \Rightarrow c(t) = C \sin(wt + \gamma)$$

$$\text{quindi: } C = \sqrt{2}(A + B), \gamma = (\alpha + \beta)$$



• prodotto per reale

$$\bar{C} = k\bar{A} = k|A|e^{j(\lambda\omega t)} \text{ dove } \begin{cases} n=0 & \text{se } k>0 \\ n=1 & \text{se } k<0 \end{cases}$$



quindi $C = k|A| \quad y = \begin{cases} \lambda & \text{se } k>0 \\ \lambda + \pi & \text{se } k<0 \end{cases}$

• prodotto per jw

$$\bar{C} = j\omega\bar{A} = wAe^{j\lambda}e^{j\frac{\pi}{2}} = wAe^{j(\lambda+\frac{\pi}{2})}$$



$$C = wA \quad y = \lambda + \frac{\pi}{2}$$

• prodotto tra fasi

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} = A \cdot B e^{j(\lambda+B)}$$

$$C = A \cdot B \quad y = \lambda + \beta$$

• operatore complesso

$$\hat{O} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A}{B} e^{j(\lambda-\beta)} \Rightarrow \bar{A} = \hat{O} \bar{B}$$

\hat{O} opera su \bar{B} producendo \bar{A}

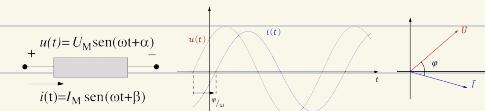
5.3 Misure in Regime Sinusoidale

Una rete lineare in regime sinusoidale AC presenta solo R, L, C, GIT, GIC.

Se gli ingressi GIT, GIC sono isofrequenziali di S_w , allora tutte le tensioni/correnti sono in S_w .

È quindi possibile applicare la trasformata di Steinmetz ottenendo una rete simbolica.

A questo punto è possibile utilizzare gli stessi strumenti usati nella risoluzione di reti in regime stazionario. Andranno applicati però su fasi nel campo complesso.

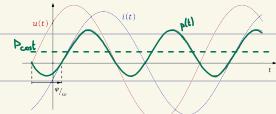


5.3.1 Potenza in Regime Sinusoidale

La potenza istantanea del bipolo è $p(t) = u(t)i(t) = V_n I_n \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta)$

utilizzo la formula di Werner $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$$p(t) = \frac{V_n I_n}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{V_n I_n}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \Rightarrow p(t) = VI \cos(\varphi) - VI \cos(2\omega t + \alpha + \beta) = P_{const} + p_i(t)$$



Def Si definisce potenza attiva o reale il valore medio in un periodo della potenza.

$$P = \frac{1}{T} \int p(t) dt = \frac{1}{T} \int P_{const} dt = VI \cos \varphi$$

Questo è la potenza effettivamente sfruttata del circuito, è la componente che genera lavoro utile (scaldare resistenze).

Def Si definisce potenza reattiva $Q=VI \sin \varphi$ [Q]=VAR (Volt Ampere Reattivo)

È associata ai campi elettrici e magnetici nel componente (energia immagazzinata da un condensatore)

Def Si definisce potenza apparente $S=VI$ [S]=VA (Volt Ampere)

È associata al massimo stress imposto sul componente (da cui dipende l'isolamento da applicare)

Def Si definisce potenza complessa $\dot{S}=VI = P+iQ = VI(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

PROPRIETÀ

- $S=\sqrt{P^2+Q^2}$

- $\cos \varphi = \frac{P}{S}$

- $P=R\Re[\dot{S}]$, $Q=\Im[\dot{S}]$, $S=|S|$, $\varphi=\angle S$

5.3.2 Lavoro Elettrico in Regime Sinusoidale

Dato la potenza elettrica $p(t)$, il lavoro elettrico nel tempo $[t_1, t_2]$ è:

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} P_{\text{const}} + p(t) dt$$

Oss Quando $\Delta t=t_2-t_1 \gg T$ allora $p(t)$ può essere trascurato $L=P_{\text{const}} \Delta t$

5.3.3 Calore Dissipato e Valore Efficace

Il calore prodotto nel periodo T da un resistore R attraversato da una corrente $i(t)$ è pari al lavoro entrante:

$$L_{\text{ent}} = \int_T p(t) dt = \int_T R i^2(t) dt = R I^2 T$$

dove $I = \sqrt{T} \int_T i^2(t) dt$ è il valore efficace di $i(t)$ visto in precedenza.

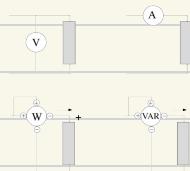
5.3.4 Strumenti di misura

Voltmetro e Amperometro

Misurano le quantità RMS, i riferimenti non sono necessari

Wattmetro e Varmetro

Misurano la potenza attiva e reattiva. I riferimenti sono necessari



5.4 Bipoli in Regime Sinusoidale

5.4.1 Generatori Ideali AC

Generatore di tensione

$$v(t)=e(t)=E_m \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow \bar{E}=E_m e^{j\alpha} \text{ definito}$$



mentre $i(t)=I_m \sin(\omega t + \beta) \Rightarrow \bar{I}=I_m e^{j\beta}$ è incognita (I_m, β)

Generatore di corrente

$$i(t)=j(t)=J_m \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow \bar{j}=J_m e^{j\alpha} \text{ definito}$$



mentre $v(t)=V_m \sin(\omega t + \beta) \Rightarrow \bar{V}=V_m e^{j\beta}$ è incognita (V_m, β)

5.4.2 Bipoli Passivi

Un bipolo si dice passivo se ha potenza entrante non negativa $P=VI \cos\varphi \geq 0$

I bipoli passivi hanno come caratteristica esterna una retta del tipo $a_h \bar{V} + b_h \bar{I} = c_h$

Definiamo inoltre l'impedenza $\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V e^{i\omega t}}{I e^{i\varphi}} = \frac{V}{I} e^{i(\omega t - \varphi)}$ e l'ammittanza $\bar{Y} = \bar{Z}^{-1} = \frac{I}{V} e^{-i(\omega t - \varphi)}$

quindi $\dot{S} = \bar{V}\bar{I} = \bar{Z}\bar{I}^2$ quindi $S = Z I^2$, $P = Z I^2 \cos\varphi$, $Q = Z I^2 \sin\varphi$

• Resistore ideale

$$u_a(t) = R i_R(t) \Rightarrow U_H \sin(\omega t + \alpha) = R I_H \sin(\omega t + \beta) \quad \varphi = \alpha - \beta = 0 \text{ e } \cos\varphi = 1$$

$$P_R(t) = R i_R^2(t) \geq 0 \quad \forall t$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{R}{1} = R \quad \bar{Y} = \frac{1}{R} = G$$

• Induttore ideale

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow U_H \sin(\omega t + \alpha) = \omega L I_H \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha - \beta = R + \frac{\pi}{2} - R = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V e^{i\omega t}}{I e^{i\varphi}} = \frac{V}{I} e^{i\frac{\pi}{2}} = j \frac{V}{R} = j\omega L \quad \bar{Y} = j \frac{1}{\omega L}$$

quindi $X_L = \omega L$ reettanze induttive e $B_L = -\frac{1}{\omega L}$ suscettanze induttive.

$$\text{energia immagazzinata} \quad w_L(t) = \frac{1}{2} i_L^2(t) \geq 0 \quad \forall t$$

$P = VI \cos\varphi = 0$, $Q = VI \sin\varphi = VI = X_L I^2 \rightarrow$ non assorbe potenza attiva, solo reattiva

$$S = VI = |V| |I|^2$$

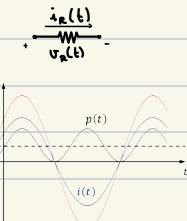
• Condensatore ideale

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow I_H \sin(\omega t + \beta) = \omega C (U_H \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})) \Rightarrow \varphi = \alpha - \beta = R - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

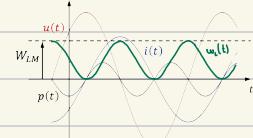
$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} = -j \frac{1}{\omega C} \quad \bar{Y} = j \omega C = j B_C \quad \text{quindi} \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad B_C = \omega C$$

$$\text{energia immagazzinata} \quad w_C(t) = \frac{1}{2} u_C^2(t) \geq 0 \quad \forall t$$

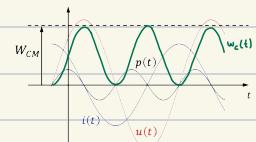
$$P = VI \cos\varphi = 0 \quad Q = VI \sin\varphi = X_C I^2 \quad S = |X_C| I^2$$



$$\frac{i_L(t)}{u_L(t)}$$



$$\frac{i_C(t)}{u_C(t)}$$



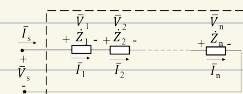
5.4.3 Serie di Impedenze

Similmente a quanto succede per le resistenze, per n impedenze connesse in serie si definisce l'impedenza equivalente \bar{Z}_s

$$\bar{I}_s = \bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \dots = \bar{I}_n$$

$$\bar{V}_s = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n$$

$$\bar{V}_s = (\bar{z}_1 + \dots + \bar{z}_n) \bar{I}_s = \bar{z}_s \bar{I}_s$$



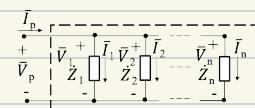
5.4.4 Parallelo di Impedenze

Similmente a quanto succede per le resistenze, per n impedenze connesse in parallelo si definisce l'impedenza equivalente \bar{z} .

$$\bar{V}_p = \bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \dots = \bar{V}_n$$

$$\bar{I}_p = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n$$

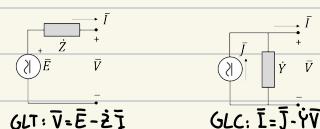
$$\bar{I}_p = (\bar{y}_1 + \dots + \bar{y}_n) \bar{V}_p = \bar{Y}_p \bar{V}_p$$



5.5 Rete Simbolica

Ogni rete lineare AC nel tempo può essere descritta da una rete simbolica.

Ovvero una rete che ammette solo fasi ed è costituita di soli generatori reali di tensione e corrente simbolici.

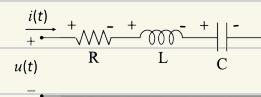


La rete simbolica ottenuta è lineare in C, come le reti in regime stazionario sono lineari in IR

Le leggi di Kirchhoff, il teorema di sostituzione, la sovrapposizione degli effetti, il metodo delle correnti d'anello e quello del potenziale ai nodi, i teoremi di Thévenin/Norton sono tutti validi sulla rete simbolica.

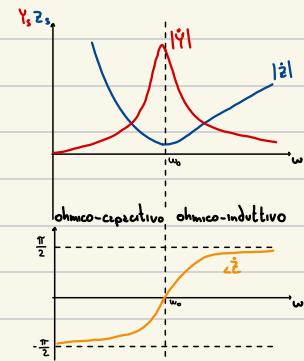
5.5.1 Serie RLC

Si consideri, in regime sinusoidale, la serie delle resistenze R, dell'induttore L e del condensatore C.



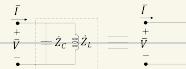
$$\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + j(X_L + X_C) \Rightarrow \bar{Z}(w) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + j(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C})$$

$$|\bar{Z}(w)| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad \angle \bar{Z}(w) = \arctan \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR} \right)$$



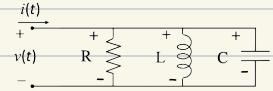
OSS

Nel punto $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ le due reazanze si compensano $X_L + X_C = 0$, quindi il circuito può essere semplificato ad una sola resistenza.



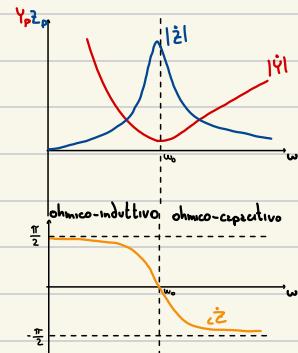
5.5.2 Parallelo RLC

Si consideri, in regime sinusoidale, il parallelo delle resistenze R , dell'induttore L e del condensatore C .



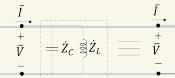
$$\dot{Y}_p = \frac{1}{R} + j \left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right) = \frac{1}{R} + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{1}{R} + j \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \right), \quad Z_p = \frac{1}{Y_p}$$

$$|\dot{Y}_p(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \right)^2} \quad \angle \dot{Y}_p(\omega) = \arctan \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \right)$$



OSS

Nel punto $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ le due suscettanze si compensano $B_L + B_C = 0$, quindi il circuito può essere semplificato ad una sola resistenza.



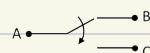
6. Reti in Regime Variabile

Rappresente il caso più generale di una rete, quando le tensioni e le correnti sono generiche funzioni del tempo.

Il regime variabile è causato principalmente da:

- Un interruttore che apre o chiude in un istante critico
- Presenza di almeno un generatore che imprime corrente/tensione con andamento qualsiasi.
- Un commutatore, ovvero un tripolo passivo che al tempo t^* scambia la connessione AB per AC

$t=t^*$



Per determinare il comportamento di una rete in regime variabile si assume che:

- si trovino condizioni note fino ad un certo istante ($t_{>0}$)
- sono note le condizioni iniziali (limiti per 0^-)
- l'evoluzione della rete ($t_{>0}$) può essere determinata a partire dalle variabili di stato (limiti per 0^+ di condensatori/induttori)

Alcuni componenti ammettono discontinuità, come l'interruttore, il resistore e i generatori ideali.

Condensatori ed induttori invece non ammettono discontinuità.

DIM

si oppone il campo elettrico

$$\text{condensatore: } v(0^-) + v(0^+) \Rightarrow |\Delta v_c| > 0 \Rightarrow p(t=0) = \infty$$

si oppone il campo magnetico

$$\text{induttore: } i(0^-) + i(0^+) \Rightarrow |\Delta i_L| > 0 \Rightarrow p(t=0) = \infty$$

$$\text{quindi: } u_c(0^-) = u_c(0^+) = u_c(0) \quad i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0)$$

Per l'analisi a $t > 0$ si scrivono LKC, LKT ed equazioni dei bipoli.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \end{array} \right. \quad \text{INDUTTORI}$$

CONDENSATORI

$$\left\{ \begin{array}{l} u_R(t) = R i_R(t) \\ i(t) = j(t) \end{array} \right. \quad \text{RESISTORI}$$

le equazioni in le incognite

$$u(t) = e(t) \quad \text{GIC}$$

\Rightarrow si sceglie una $u_c(t)$ oppure $i_L(t)$ e lo si pone come uscita

$$v(t) = e(t) \quad \text{GIT}$$

\Rightarrow si costruisce 1 equazione nell'incognita scelta

$$\sum_h u_h(t) = 0 \quad \text{LKT}$$

\Rightarrow si svolge il procedimento per tutte le $u_c(t)$ e $i_L(t)$

$$\sum_k i_{kL}(t) = 0 \quad \text{LKC}$$

L'uscita scelta $y(t)$ è la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria lineare e non omogenea di ordine p

$$\sum_{i=0}^p a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^q b_j x^{(j)}(t)$$

In particolare $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

dove: $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'EDO

$y_0(t)$ soluzione con $x(t) = 0$ (ovvero generatori spenti), la soluzione di $\sum_{i=0}^p a_i y^{(i)}(t) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^p a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^p a_i Y(s) e^{st} = Y(s) \sum_{i=0}^p a_i s^i = 0$$

\Rightarrow le radici del polinomio sono le soluzioni di $a_p s^p + a_{p-1} s^{p-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$, per il teorema fondamentale dell'algebra

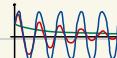
c'è p soluzioni (s_1, \dots, s_p). Le quali possono essere reali distinte o complesse coniugate.

$$\Rightarrow y_0(t) = Y_1 e^{s_1 t} + \dots + Y_p e^{s_p t}$$

se s_i reale \rightarrow modo unidirezionale

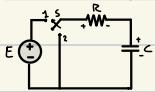


se s_i, s_{i+1} complesse coniugate \rightarrow modo oscillatorio



6.1 Esempi di Analisi in Regime Variabile

- Circuito del condensatore



Per $t < 0$ S è in 2 quindi $i_C(t)=0$ e $v_C(t)=0$

In $t=0$ S commuta in 1 $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$

Per $t > 0$ il condensatore si scarica ed una certa tensione

$$\begin{cases} v_a(t) = R i_R(t) \\ i_C(t) = C v_C'(t) \\ i_R(t) = i_C(t) \quad \text{LKC} \\ v_a(t) + v_C(t) = E \quad \text{LKT} \end{cases} \Rightarrow R i_R(t) + v_C(t) = E \Rightarrow R i_C(t) + v_C(t) = E \Rightarrow R C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = E$$

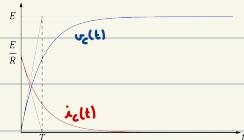
Risolve l'equazione differenziale con Laplace

$$R C [V_c(s) - v_c(0^+)] + V_c(s) = \frac{E}{s} \Rightarrow V_c(s)(RCs + 1) = \frac{E}{s} \Rightarrow V_c(s) = \frac{E}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{E}{RC} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{\frac{1}{RC}}{s} \right) = -E \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{E}{s}$$

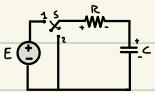
$$\frac{A}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{B}{s} \quad \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-RC \\ \frac{B}{RC}=1 \Rightarrow B=RC \end{cases}$$

$$v_C(t) = -E e^{-\frac{t}{RC}} + E = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$i_C(t), C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



- Circuito del condensatore



Per $t < 0$ S è in 2 quindi $i_C(t)=0$ e $v_C(t)=E$, mentre $v_R(t)=0$

In $t=0$ S commuta in 1 $v_c(0^+) = v_c(0^-) = E$

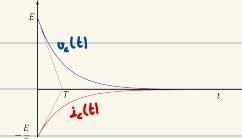
Per $t > 0$ il condensatore si scarica fino a tensione zero

$$\begin{cases} v_a(t) = R i_R(t) \\ i_C(t) = C v_C'(t) \\ v_a(t) + v_C(t) = 0 \quad \text{LKT} \\ i_R(t) = i_C(t) \quad \text{LKC} \end{cases} \Rightarrow R i_R(t) + v_C(t) = 0 \Rightarrow R i_C(t) + v_C(t) = 0 \Rightarrow R C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

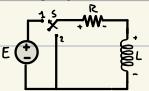
$$R C (V_c(s) - v_c(0^+)) + V_c(s) = 0 \Rightarrow R C (s V_c(s) - E) + V_c(s) = 0 \Rightarrow R C s V_c(s) - R C E + V_c(s) = 0 \Rightarrow V_c(s)(R C s + 1) = R C E$$

$$V_c(s) = \frac{R C E}{R C s + 1} \Rightarrow v_c(t) = E e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



- Circuito dell'induttore



Per $t < 0$ S è in 2 quindi $i_L(t) = 0$ e $v_R(t) = 0$

In $t=0$ S commuta in 1 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

Per $t > 0$ il condensatore si scarica ed una c.c. tensione

$$\begin{cases} v_R(t) = R i_R(t) \\ v_L(t) = L \dot{i}_L(t) \\ i_R(t) = i_L(t) \quad \text{LKT} \\ v_R(t) + v_L(t) = E \quad \text{LKT} \end{cases} \Rightarrow R i_R(t) + v_L(t) = E \Rightarrow R i_L(t) + v_L(t) = E \Rightarrow L \dot{i}_L(t) + R i_L(t) = E$$

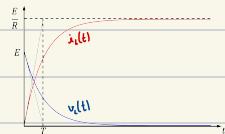
Risolvendo l'equazione differenziale con Laplace

$$L[sI_L(s) - i_L(0^+)] + R I_L(s) = \frac{E}{s} \Rightarrow I_L(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \Rightarrow I_L(s) = \frac{E}{L} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right)$$

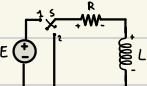
$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R}{L}} \quad | \begin{array}{l} A+B=0 \\ A\frac{R}{L}=1 \end{array} \Rightarrow A = \frac{L}{R}$$

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t}$$



Scarica dell'induttore



Per $t < 0$ S è in 1 quindi $v_L(t) = 0$, $v_R = E$ e $i_R = \frac{E}{R}$

In $t=0$ S commuta in 2 $i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R}$

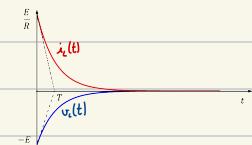
Per $t > 0$ il condensatore si scarica fino a tensione zero

$$\begin{cases} v_R(t) = R i_R(t) \\ v_L(t) = L \dot{i}_L(t) \\ v_R(t) + v_L(t) = 0 \quad \text{LKT} \\ i_R(t) = i_L(t) \quad \text{LKT} \end{cases} \Rightarrow R i_R(t) + v_L(t) = 0 \Rightarrow R i_L(t) + v_L(t) = 0 \Rightarrow R i_L(t) + L \dot{i}_L(t) = 0$$

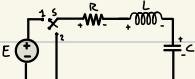
$$R I_L(s) + L(sI_L(s) - i_L(0^+)) = 0 \Rightarrow I_L(s) \left(R + Ls \right) = \frac{EL}{R} \Rightarrow$$

$$I_L(s) = \frac{E}{R} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \Rightarrow i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -E e^{-\frac{R}{L}t}$$



Circuito RLC



Per $t < 0$ S è in 2 quindi $v_L(t) = 0$, $i_C(t) = 0 \Rightarrow i_L(t) = i_R(t) = 0$ e $v_R(t) = v_R(t) = v_L(t) = 0$

Per $t=0$ S va in 1 $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ e $v_L(0^-) = v_L(0^+) = 0$

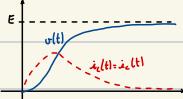
Per $t > 0$:

$$\begin{cases}
 v_R(t) = R i_R(t) \\
 v_C(t) = L i_C'(t) \\
 i_C(t) = C v_C'(t) \\
 v_C(t) + u_R(t) + u_L(t) = E
 \end{cases} \Rightarrow L i_C'(t) + R i_R(t) + v_C(t) = E \Rightarrow L C v_C''(t) + R C v_C'(t) + v_C(t) = E \Rightarrow v_C''(t) + \frac{R}{L} v_C'(t) + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} E$$

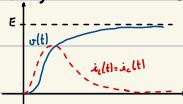
$$\Rightarrow v_C''(t) + \frac{2}{T} v_C'(t) + \omega_0^2 v_C(t) = \omega_0^2 E \quad \text{dove } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Le soluzioni si dividono in 3 casi in base al valore di $E = \frac{1}{\omega_0 T} = \frac{R}{2\omega_0 L}$

- Se $E > 1$, caso sovrasmorzato



- Se $E = 1$, caso criticamente smorzato



- Se $E < 1$, caso sottosmorzato

