

# Controlli Automatici

## O. Cheat Sheet

### ESERCIZI EQ. MOTO

$$I\ddot{\theta} = \bar{M} \rightarrow I = \int R^2 dm$$

valuto la  
situazione  
 punto che  
l'altro punto  
sto valutando  
di stacco

$$F_{el} = -k(x_1 - x_2 - L)$$

punto che  
l'altro punto  
sto valutando  
di stacco

$$\text{Taylor: } f(\vec{y} + \vec{y}) = f(\vec{y}) + f'(\vec{y}) \cdot \vec{y}$$

$$\text{Laplace: } \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = \frac{1}{s^n}, \quad \mathcal{L}[t^n e^{pt} \delta^{(n)}(t)] = \frac{n!}{(s-p)^{n+1}}$$

BIBO stabilità: cerco poli con  $\operatorname{Re}[s] \geq 0$  ( $\circ$  zero al denominatore)

conversione a modello di stato:  $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \dots \\ y = z_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ \dots \\ y = z_i \end{cases}$

### ESERCIZI RISPOSTE

esistenziali: guardino:  $W(s) \rightarrow (b)$

$$\cos(wt + \varphi): |W(jw)| \cos(wt + \varphi + \angle W(jw)) \quad \arg(z + jb) = \arctan(\frac{b}{z})$$

$$\text{tempo: } W(s) \cdot R(s) = \frac{A}{s} + (\rightarrow 0) \quad \text{calcolo diretto}$$

transitorio: guardino se polo più vicino a  $(0,0)$  è reale

$\curvearrowleft$  se polo più vicino a  $(0,0)$  è complesso coniugato

$$S_d^W = \frac{1}{W(s)} \frac{\partial W(s)}{\partial s}$$

### LUOGO DELLE RADICI

$$\text{Asintoti: } \alpha_n = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}; \quad \varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m} \quad h=0, 1, \dots, n-m-1$$

$$\text{Angolo uscita: } \beta_n = \sum_{i=1}^m \angle(p_i - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z_i - p_i) + \pi$$

$$\text{Angolo ingresso: } \alpha_h = \sum_{i=1}^n \angle(z_i - z_h) - \sum_{i=1}^m \angle(z_h - p_i) + \pi$$

Solo modi non oscillatori: lo deduco dal grafico, dove ci sono solo radici reali

Solo modi oscillatori: tabella di routh  $\rightarrow$  righe nulle

### NYQUIST

$$Z = P - N; \quad P \text{ poli in cintura spaziate} \\ N \text{ giri attorno a } -\frac{1}{\omega} \text{ (positivi se entroven)}$$

### BODE

$$1. \text{ punto in forma: } (sT+1) \left( \frac{s^2}{\omega^2} + 2 \frac{\xi}{\omega} s + 1 \right)$$

$$2. \text{ plot di } \frac{K_B}{s^2} \quad 20 \log \left| \frac{K_B}{jw^2} \right| = 20 \log |K_B| - 20 \log w \\ \angle \frac{K_B}{jw^2} = \angle K_B - \angle jw^2 = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } K_B > 0 \\ -\pi - \frac{\pi}{2} & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

$$3. \text{ punti di spezzamento } \log \frac{1}{\omega} \text{ e } \log \omega \quad \begin{matrix} \text{zero} & \rightarrow \text{reale} = 20 \\ \text{polo} & \rightarrow \text{complex} = 40 \end{matrix}$$

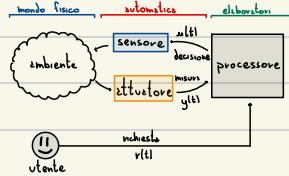
$$\begin{matrix} \text{zero} & \uparrow \text{se instabile } (T < 0 \text{ o } \xi < 0) \text{ invertito} \\ \text{polo} & \downarrow \text{se instabile } (T < 0 \text{ o } \xi < 0) \text{ invertito} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{reale} = \frac{\pi}{2} \\ \text{complex} = \pi \end{matrix}$$

# 1. Introduzione

Un fenomeno, tipicamente fisico, può essere controllato; ovvero si cerca di farlo evolvere nel tempo secondo un criterio.  
L'automatistica è una delle discipline classiche dell'ingegneria, in quanto nasce agli elbori della rivoluzione industriale, con lo scopo di controllare le potenze delle macchine e vapore con un limitato intervento umano.

Lo sviluppo dei moderni calcolatori ha portato a grandi sviluppi di queste materie, ora è possibile implementare i controllori in software e simularne le prestazioni.

Ad oggi l'automatistica ha l'importante compito di far interagire il mondo dei fenomeni fisici con quello dei calcolatori.



Il controllo automatico è talvolta necessario quando gli input richiesti sono estremi:

- └ Richiedono potenze o velocità non gestibili dall'uomo
- └ Devono essere compiute in ambienti ostili e pericolosi.
- └ Richiedono precisioni impossibili.

## 1.1 Definizione del Problema del Controllo

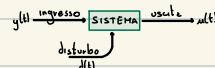
Il controllo può avvenire avendo:  
1. un apparato da controllare  
2. delle specifiche di controllo

Vogliamo inoltre descrivere l'apparato da controllare con un modello matematico, ovvero scegliendo delle grandezze significative, variabili del modello, e definendo delle equazioni che le legano.

oss La conoscenza del modello matematico permette di svolgere delle simulazioni.

Le variabili del modello sono funzioni del tempo (segnali) e si possono suddividere in:

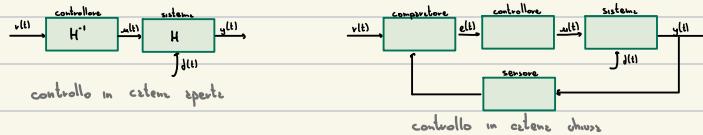
1. Ingressi: variabili del modello che possiamo manipolare
2. Disturbi: non possono essere manipolate, ma possono essere misurate
3. Uscite: sono generate dal modello e vengono usate dagli attuatori per modificare l'ambiente.



Il problema del controllo è far assumere all'uscita  $y(t)$  un andamento desiderato,  $v(t)$ , limitando l'effetto dei disturbi  $d(t)$  agendo sugli ingressi  $u(t)$ .

## 1.2 Strategie di Controllo

Nel corso vedremo i due principali modi per effettuare il controllo: in circuito aperto e in retroazione.

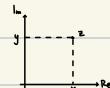


## 1.3 Numeri Complessi

Gli elementi nel campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  sono formati da una coppia di numeri reali.

$$z \in \mathbb{C} = (x, y) = x + jy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

PROP  $j = \sqrt{-1} \Rightarrow j^2 = -1$



Definiamo le operazioni di somma e prodotto per mostrare che  $\mathbb{C}$  è un campo commutativo.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$$

(0,0) elemento neutro

$$z \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

(1,0) elemento neutro

Definiamo il complesso coniugato come:  $z = x + jy \rightarrow \bar{z} = x - jy$

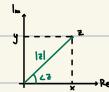
PROP 1.  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$       3.  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}[z]$

2.  $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$       4.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Un numero complesso può essere rappresentato in coordinate polari

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \frac{z}{|z|} = e^{j\varphi}$$

$$z = |z| e^{j\varphi} = p e^{j\theta} = p(\cos \theta + j \sin \theta) \text{ con } p \in \mathbb{R}, \theta \in [0, \pi]$$



Def Sia la funzione razionale  $F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$  e  $p \in \mathbb{C}$

- p si dice polo di F se  $\lim_{s \rightarrow p} F(s) = +\infty$

- p si dice zero di F se  $\lim_{s \rightarrow p} F(s) = 0$

Def La funzione  $W(s) = \frac{b(s)}{z(s)}$  si dice:

- propria se  $\operatorname{grado}(z) > \operatorname{grado}(b)$

- strettamente propria se  $\operatorname{grado}(z) > \operatorname{grado}(b)$

## 2. I segnali

I segnali sono funzioni del tempo, discrete o continue, a valori in  $\mathbb{C}$ .

$x: I \rightarrow \mathbb{C}$  dove  $I$  un intervallo di tempo finito o infinito

PROP valor medio:  $m(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$

energia (RHS):  $E_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

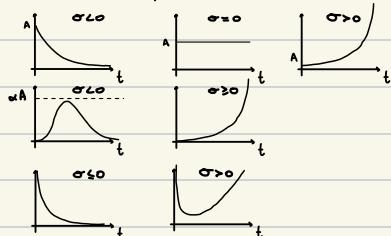
potenza media:  $P(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

### 2.1 Segnali Esponenziali Sinusoidali

#### 2.1.1 Segnali Esponenziali

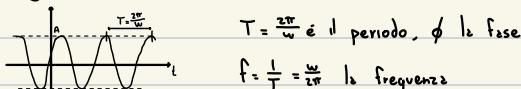
I segnali esponenziali sono del tipo  $A t^n e^{j\omega t}$  con  $t \geq 0$

- Se  $n=0$



#### 2.1.2 Segnali Sinusoidali

I segnali sinusoidali sono del tipo  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  con  $t \geq 0, \phi \in ]-\pi, \pi]$



Sono dei tipi di segnali periodici, infatti:  $x(t) = x(t+T)$

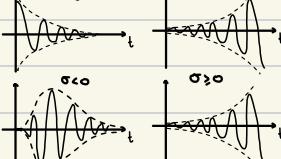
Moltiplicando i due segnali precedenti si ottengono i segnali esponenziali sinusoidali, ovvero segnali della forma:

$$x(t) = A t^n e^{j\omega t} \cos(\omega t + \phi) \text{ con } t \geq 0$$

- Se  $n=0$

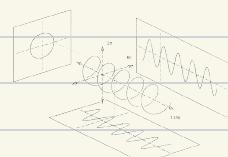


- Se  $n \neq 0$



Il segnale  $A t^n e^{j\omega t} \cos(\omega t + \phi)$  è la parte reale di  $A e^{j\omega t} e^{(0+j\phi)t}$

$$\text{Dif } A t^n e^{j\omega t} \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[A t^n e^{(0+j\omega t)+j\phi}] = \operatorname{Re}[A e^{j\omega t} e^{(0+j\phi)t}]$$



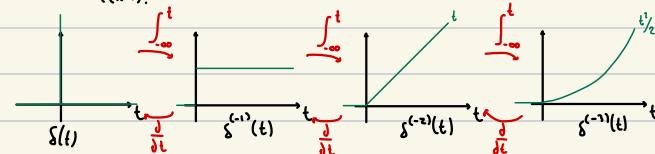
## 2.2 Delta di Dirac

La funzione  $\delta(t)$ , detta delta di Dirac, è quella funzione tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)x(\tau)d\tau = x(0) \quad \forall x$$

Useremo la funzione definita come:

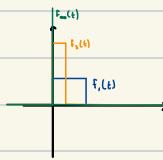
$$\delta^{(k)}(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{(k-1)!} & t=0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$



DIM Si consideri  $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ n & \text{se } 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } t > \frac{1}{n} \end{cases}$



quindi, l'integrale  $\int_{-\infty}^t f_n(\tau)d\tau$  è

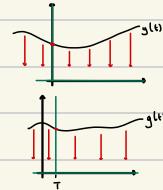


e quindi  $\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$

PROP del delta di Dirac ( $k=0$ )

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau = 1, \quad \text{più in generale} \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Moltiplicando  $\delta(t)$  per una funzione continua nell'origine  $g(t)$  si ottiene:  $\delta(t) \cdot g(t) = \delta(t) \cdot g(0)$



Possiamo fare lo stesso tralasciando la funzione  $\delta(t-T)g(t) = \delta(t-T)g(T)$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau-T)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau-T)g(T)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < T \\ g(T) & \text{se } t > T \end{cases}$$

## 2.3 Prodotto di Convoluzione

Uno dei modi per costruire un segnale partendo da altri due. (come la somma e il prodotto)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad \text{e scriviamo } y = w * u$$

PROP

$$w * \delta = w \quad (\delta \text{ è l'elemento neutro})$$

$$w * u = u * w$$

$$w * (u_1 + u_2) = w * u_1 + w * u_2$$

Se  $w$  e  $u$  segnali causali, ovvero con supporto in  $[0, +\infty)$ , la loro convoluzione ha supporto in  $[0, +\infty)$  ed è quindi causale.

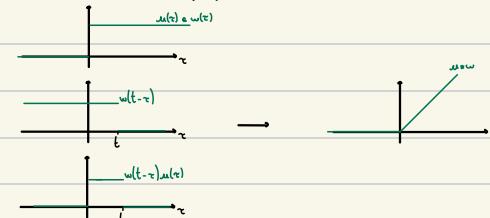
## ES - convoluzione discreta

$$(1, 2, 3) * (4, 5, 6) = (4, 13, 28, 23, 18)$$



## ES - convoluzione continua

Siano  $w(t) = w(t)$ ,  $\delta^{(n)}(t)$ , cerco  $w * w(t)$



## 2.4 La Trasformata di Laplace

È un operatore che trasforma funzioni del tempo e valori complessi in una funzione a variabile complessa e valori complessi

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\int_0^{\infty}} F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c. } F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{scrivremo } F(s) = \mathcal{L}[f](s)$$

**OSS** La trasformata di Laplace non è iniettiva: segnali che divergono solo nei valori per  $t < 0$  hanno le stesse trasformate. Dobbiamo quindi imporre che i segnali siano  $= 0$  per  $t < 0$ .

Così facendo la trasformata è biettiva e possiamo definirne l'anti-trasformata  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t)$

### TRASFORMATE NOTEVOLI

$$1. \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = \frac{1}{s^n} \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[\delta^{(-1)}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$2. \mathcal{L}[e^{pt}\delta^{(n)}(t)] = \frac{1}{s-p} \quad \text{dove } p \in \mathbb{C}$$

$$3. \mathcal{L}[t^n e^{pt}\delta^{(n)}(t)] = \frac{n!}{(s-p)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{aligned}$$

### DIM

$$1. \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot 0} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Punto del δ      δ inclusa la mortalità

$$2. \int_0^{+\infty} \delta^{(n)}(t) e^{pt} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(p-s)t} dt = \left[ \frac{e^{(p-s)t}}{p-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-p}$$

### PROP

$$- \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \quad \left. \right\} \text{linearità}$$

$$- \mathcal{L}''[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}''[f(t)] + b\mathcal{L}''[g(t)]$$

$$- \mathcal{L}[(f \circ g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT} \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(i)}(0^-) \quad \text{dove } f^{(k)}(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f^{(k)}(t)$$

$$\text{ES } \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f'(0^-) - s^{n-2} f''(0^-) - \dots - f^{(n)}(0^-)$$

**OSS:** La trasformata di Laplace rende semplici le convoluzioni e le equazioni differenziali.

## 2.5 Equazioni Differenziali

Studiamo tramite trasformata di Laplace equazioni differenziali del tipo:

$$\sum_{n=0}^m a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u \Rightarrow \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k a_n y^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(s)$$

dove  $a_n, b_n, u(t)$  sono dati e  $y(t)$  incognita,  $u(t)$  e  $y(t)$  segnali con  $u(t)=0$  per  $t < 0$ .

Queste sono equazioni notoriamente di difficile risoluzione, la trasformata di Laplace fornisce un modo più semplice.

1. Applico la trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k a_n y^{(n)}(s)\right] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(s)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k a_n \mathcal{L}[y^{(n)}(s)] = \sum_{k=0}^m b_k \mathcal{L}[u^{(k)}(s)] \Rightarrow \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k a_n [s^n Y(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i} y^{(i)}(0^-)] = \sum_{k=0}^m b_k [s^k U(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i} u^{(i)}(0^-)] \Rightarrow \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k a_n s^n Y(s) - \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k a_n \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i} y^{(i)}(0^-) = \sum_{k=0}^m b_k s^k U(s) - \sum_{k=0}^m b_k \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i} u^{(i)}(0^-)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k a_n s^n} U(s) \quad \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_0(s)] - \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^{-1}[Y_k(s)]$$

funzione di trasferimento  $W(s)$

risposta libera  $Y_0(s)$       risposta forzata  $Y_k(s)$

2. Antitrasformata della risposta libera  $\mathcal{L}^{-1}[Y_0(s)]$

$Y_0(s)$  è una funzione razionale strettamente propria (grado numeratore < grado denominatore), si può quindi esprimere come somma di fratti semplici:

• Scomposizione classica

$$\text{Se } (x-a)^n \rightarrow \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$$\text{Se } (ax^2+bx+c)^n \rightarrow \frac{A_1}{(ax^2+bx+c)} + \dots + \frac{A_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

• Si utilizza la formula

$$Y_0(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(s-p_i)^k}$$

$$\text{dove } p_i \text{ sono i poli di } Y_0 \text{ e } m_i \text{ le loro molteplicità, } a_{ik} \in \mathbb{C} = \frac{1}{(m_i-k)!} \frac{d^{(m_i-k)}}{ds^{(m_i-k)}} \left[ (s-p_i)^{m_i} Y_0(s) \right]_{s=p_i}$$

quando  $m_i=1$  (caso più comune) allora  $a_{11} = (s-p_1) Y_0(s) \Big|_{s=p_1}$

Alla scomposizione è semplice applicare l'antitrasformata di Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_0(s)] = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(s-p_i)^k} e^{p_i t} \right) \delta^{(m_i-1)}(t)$$

### 3. Antitrasformata delle risposte forzate $\mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)]$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s) * \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] * u(t)$$

$W(s)$  è una funzione propria (non strattamente) all'interno del cerchio.

$$si \ scomponete \ in \ fattori \ primi \ come \ W(s) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\beta_{ik}}{(s-p_i)^k} \quad dove \ \beta_0 = W(s)|_{s=\infty}$$

dove  $p_i$  poli di  $W(s)$ ,  $m_i$  le loro molteplicità e  $\beta_{ik}$  da calcolare con la formula già vista.

$$Applicando \ l'antitrasformata \ \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = w(t) = \beta_0 \delta(t) + \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \beta_{ik} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(k-1)}(t)$$

$$y(t) = y_e(t) + w(t) * u(t)$$

ES - equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y = u(t) \ con \ y(0^-) = 0 \quad y'(0^-) = 1$$

$$1. \ RICORDO: \mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i)}(0^-)$$

$$[s^2 Y(s) - y(0^-) - y'(0^-)] + [s Y(s) - y(0^-)] + 2 Y(s) = [s] U(s) - u(0^-) + U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2 + 3s + 2) = y'(0^-) + s y(0^-) + 2y(0^-) + U(s)(s+1) \Rightarrow Y(s) = \frac{y'(0^-) + s y(0^-) + 2y(0^-)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} U(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} + \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} U(s)$$

$$2. \ RICORDO: Y_E(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(s-p_i)^k} \quad a_{11} = (s-p_1) Y_E(s)|_{s=p_1}$$

$$Y_E(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad p_1 = -1, \ p_2 = -2, \ m_1 = 1, \ a_{11} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{-1+2} = 1 \quad a_{21} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{-2+1} = -1$$

$$RICORDO: \mathcal{L}[e^{pt} \delta^{(k-1)}(t)] = \frac{1}{s-p}$$

$$Y_E(t) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow y_E(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$3. \ Y_p(t) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2} U(s) = \frac{3+1}{(s+1)(s+2)} U(s) = \frac{1}{s+2} U(s) \Rightarrow y_p(t) = e^{-\frac{t}{2}} * u(t)$$

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + e^{-\frac{t}{2}} * u(t)$$

### 2.5.1 Sistemi con Ritardo

Esistono sistemi con importanti applicazioni descritti da un'equazione del tipo:  $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t-T)$

Descrivono una situazione in cui il comando usato per agire sul sistema è applicato dopo un ritardo  $T$

$$In \ questo \ caso \ W(s) = e^{-sT} \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

### 2.5.2 Rappresentazioni della Funzione di Trasferimento

$$- rapporto di polinomi: W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

- forme di Evans

$$fattorizzando  $a(s)$  e  $b(s)$ :  $W(s) = k e^{\frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}}$  dove  $z_n$  zeri di  $b(s)$  (zeri di  $W(s)$ ) e  $p_n$  zeri di  $a(s)$  (poli di  $W(s)$ )$$

- forme di Bode

$$raccolgo z_n e p_n - se \ z \in \mathbb{R} \quad (s-z) = -z(1-sT) \ con \ T = -\frac{1}{z}$$

$$se \ z \in \mathbb{C} \quad (s-z)(s-\bar{z}) = (s-\sigma-iw)(s-\sigma+iw) = s^2 - 2s\sigma + (\sigma^2 + w^2) = s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = \omega_n^2 \left( 1 + 2\frac{\sigma}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right) \quad dove \ \omega_n = \sqrt{\sigma^2 + w^2}$$

$$quindi \ W(s) = \frac{k_B}{s^2} \frac{\prod_{i=1}^m (1-sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1+s\frac{\sigma_i}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

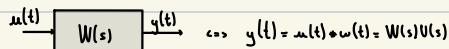
ES - Forme di Bode

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{Y_2}{s} \cdot \frac{1}{(1+\frac{s}{2})} \quad K_B = \frac{1}{2} \quad L=2$$

## Appendice 1: Schema a Blocchi

Nell'analisi dei sistemi di controllo è conveniente individuare dei blocchi dotati di un solo ingresso e una sola uscita.

Il sistema completo è poi una composizione di tali blocchi.

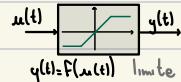
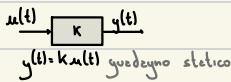


$y(\sigma), y^{(1)}(\sigma), \dots = 0$  nel resto del corso useremo queste supposizioni  
quindi  $q_k(s) = 0$

### A.1.1 Blocchi con e senza Memoria

I blocchi privi di memoria rappresentano una relazione istantanea tra ingresso e uscita

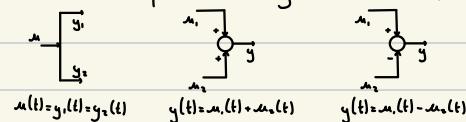
ES



I blocchi con memoria, o dinamici,  $y(t)$  è definito non solo da tutti all'istante  $t$ , ma anche del suo andamento precedente

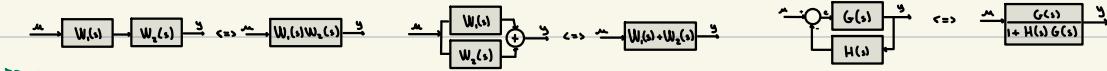
### A.1.2 Interconnessioni tra Blocchi

I blocchi si possono collegare direttamente oppure ci possono essere delle direzioni o giunzioni

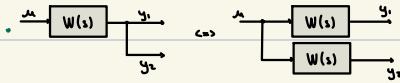


### A.1.3 Riduzione di Schemi a Blocchi

Una connessione di più blocchi può essere ridotta ad un unico blocco



PROP



### 3. Modelli di Stato

I fenomeni fisici possono essere descritti in modo soddisfacente da equazioni differenziali.

Il modello di stato introduce delle variabili auxiliarie (dette variabili di stato  $x_1, \dots, x_n$ ), che sono dei segnali, per riscrivere le equazioni differenziali come un sistema di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = z_{11}x_1(t) + z_{12}x_2(t) + \dots + z_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = z_{21}x_1(t) + z_{22}x_2(t) + \dots + z_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = z_{n1}x_1(t) + z_{n2}x_2(t) + \dots + z_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + d_u(t) \end{cases}$$

dove  
 u(t) ingresso, y(t) uscita  
 $x_1(t), \dots, x_n(t)$  variabili di stato  
 $z_{ij}, b_i, c_j, d$  parametri del modello

questo ci permette di lavorare con equazioni differenziali del primo ordine.

Il sistema può essere riscritto in forma vettoriale:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad C = (c_1, \dots, c_n)$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + du(t) \end{cases}$$

**ES - conversione a modello di stato**

$$\begin{aligned} & \dot{y} + by' + cy = u \\ & \begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \dot{x}_2 + bx_2 + cx_1 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\frac{b}{2}x_2 - cx_1 + u \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C = (1, 0) \\ d = 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

#### 3.1 Modelli di Stato Lineari

Vediamo la soluzione del caso lineare

1. Applico la trasformata di Laplace

$$\text{Se } X(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[x_1] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n] \end{pmatrix} \quad U(s) = \mathcal{L}[u] \quad Y(s) = \mathcal{L}[y]$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

2. Risolvo algebricamente il sistema

$$\begin{cases} X(s)(sI_d - A) = x(0^-) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = (sI_d - A)^{-1}x(0^-) + (sI_d - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \underbrace{C(sI_d - A)^{-1}x(0^-)}_{\text{risposta libera } Y_L(s)} + \underbrace{[C(sI_d - A)^{-1}B + D]U(s)}_{\text{risposta forzata } Y_F(s)}$$

### 3. Antitrasformazione di Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_s] + \mathcal{L}^{-1}[Y_f]$$

#### RICHIAMO ALGEBRA LINEARE

Sia  $A$  una matrice non e sia  $A^*$  la sua matrice trasposta aggiunta ovvero la matrice t.c.  $A^* = {}^t(s_{ij}^*)$  dove  $s_{ij}^* = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$$\text{Allora } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

ES-modello di stato lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = 0$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s+1)^2 - 1 = s^2 + 2s$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s} & \frac{1}{s^2+2s} \\ \frac{1}{s^2+2s} & \frac{s+1}{s^2+2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s} & \frac{1}{s^2+2s} \\ \frac{1}{s^2+2s} & \frac{s+1}{s^2+2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+2s}$$

### 3.2 Modelli di Stato non Lineari

Nel caso più generale le equazioni del modello di stato sono non lineari

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t))$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t))$$

Per risolvere questi sistemi vogliamo ricordarci il caso lineare utilizzando le formule di Taylor

1. Trovo una soluzione all'equilibrio, ovvero  $y(t) = \bar{y}$  ponendo  $x_1(t) = \bar{x}_1, \dots, x_n(t) = \bar{x}_n, u(t) = \bar{u}$

$$0 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u})$$

$$0 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u})$$

$$\vdots$$

$$0 = f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u})$$

$$\bar{y} = h(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{u})$$

2. Vanno ora linearizzate le funzioni (otterremo un'approssimazione del risultato)

$$\text{pongo } x_1(t) = \bar{x}_1 + \tilde{x}_1(t), \dots, x_n(t) = \bar{x}_n + \tilde{x}_n(t), u(t) = \bar{u} + \tilde{u}(t), y(t) = \bar{y} + \tilde{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} + \frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} &= f_i(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n + \tilde{x}_n(t), \bar{u} + \tilde{u}(t)) \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \tilde{x}_j(t) + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \tilde{x}_n(t) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \tilde{u}(t) \\ \Rightarrow \frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j(t) + b_i \tilde{u}(t) \quad \text{dove } b_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}, \quad b_i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{aligned}$$

Formula di Taylor caso base  $F(\bar{y} + \tilde{y}) = f(\bar{y}) + f'(\bar{y}) \cdot \tilde{y}$

$$y(t) = \tilde{g}(t) + \tilde{x}_j = h(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_j(t), \dots, \tilde{x}_n + \tilde{x}_j(t), \tilde{u} + \tilde{u}(t)) \approx h(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{u}) + \frac{\partial h}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} (\tilde{x}_j(t) + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} \tilde{x}_n(t) + \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} \tilde{u}(t))$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(t) = c_1 \tilde{x}_1(t) + \dots + c_n \tilde{x}_n(t) + d \tilde{u}(t) \quad \text{dove } c_j = \frac{\partial h}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}}, \quad d = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}}$$

### 3. Risolvo il sistema lineare

ES - modello di stato non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t)u(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_2(t) - x_2(t)u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \text{per } u(t) = \tilde{u} = 1$$

1. soluzione all'equilibrio

$$\begin{cases} -\tilde{x}_1 + 1 = 0 \\ -\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 = 0 \\ -\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 = 0 \\ \tilde{y} = \tilde{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = 1 \\ \tilde{x}_2 = 1 \\ \tilde{x}_3 = -1 \\ \tilde{y} = 1 \end{cases}$$

2. linearizzo

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{\tilde{x}, \tilde{u}}, \quad B = \frac{\partial f_i}{\partial u} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\tilde{x}, \tilde{u}}$$

$$C = \frac{\partial h}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u}} = (1, 0, 0) \quad d = 0$$

### 3. Risolvo il modello di stato lineare

## 3.3 Modellizzazione di Sistemi Fisici

Vediamo dei sistemi che possono essere descritti da equazioni differenziali.

E quindi possono essere risolti grazie alle trasformate di Laplace.

### 3.3.1 Sistemi Meccanici Traslatori

Le variabili significative sono posizioni e forze, vincolate del modello fisico. Le componenti elementari sono:

1. Masse: L'inerzia di un corpo con massa è una forza che si oppone alle

$$\text{variazioni di accelerazione } F_a = m \ddot{x} = -m \frac{d^2x}{dt^2}$$

2. Molla: Modello le forze elastiche, una molla ideale esercita ai suoi estremi

due forze di direzione ed intensità uguali e verso opposto, l'intensità è proporzionale all'allungamento

$$\bar{F}_0 = \bar{F}_1, \quad \bar{F}_1 = -k(y_j - y_0 - L) \quad k \text{ costante elastica e } L \text{ lunghezza della molla}$$

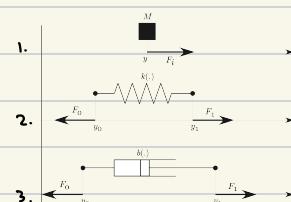
3. Smorzatore: Modello le forze di attrito, genera una forza che si oppone a quelli applicati, proporzionale alla velocità

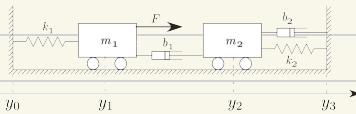
$$\bar{F}_0 = \bar{F}_1, \quad \bar{F}_1 = -b \left( \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_0}{dt} \right)$$

### 4. Esterne

Come definire i segni:  
 $F_{el} = -k(x_1 - x_2 \pm L)$   
 punto che  $\frac{v_1}{v_2}$  è l'ultimo punto  
 sto valutando  $\frac{v_1}{v_2}$  di slittacco

$F_{att} = -b(x'_1 - x'_2)$   
 punto che  $\frac{v_1}{v_2}$  è l'ultimo punto  
 sto valutando  $\frac{v_1}{v_2}$  di slittacco





$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1'' = F - k_1(y_1 - y_0 - L) - b_1(y_1' - y_1') \\ m_2 \ddot{y}_2'' = k_2(y_2 - y_3 - L) - b_2(y_2' - y_2') + b_1(y_1' - y_1') \end{cases}$$

1. Cerco la soluzione all'equilibrio  $y_1(t) = \bar{y}_1$ ,  $y_2(t) = \bar{y}_2$ ,  $F(t) = u(t) = 0$

$$\begin{cases} 0 = -k_1(\bar{y}_1 - y_0 - L) \\ 0 = k_2(\bar{y}_2 - \bar{y}_3 - L) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 = y_0 + L \\ \bar{y}_2 = y_3 - L \end{cases}$$

2. Linearizzo  $\tilde{y}_1(t) = y_1(t) - \bar{y}_1$  e  $\tilde{y}_2(t) = y_2(t) - \bar{y}_2$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\tilde{y}}_1'' = F - k_1(\tilde{y}_1 + \bar{y}_1 - y_0 - L) - b_1(\tilde{y}_1' - \bar{y}_1') \\ m_2 \ddot{\tilde{y}}_2'' = k_2(\tilde{y}_2 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - L) - b_2(\tilde{y}_2' - \bar{y}_2') + b_1(\tilde{y}_1' - \bar{y}_1') \end{cases}$$

3. Trasformata di Laplace

$$\begin{cases} m_1 s^2 \tilde{Y}_1(s) + b_1 s \tilde{Y}_1(s) + b_1 \tilde{Y}_1(s) - b_1 s \tilde{Y}_1(s) = U(s) \\ m_2 s^2 \tilde{Y}_2(s) + b_2 s \tilde{Y}_2(s) - b_2 \tilde{Y}_2(s) + b_1 s \tilde{Y}_1(s) + k_2 \tilde{Y}_2(s) = 0 \end{cases}$$

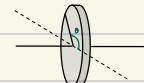
quindi  $U(s) = \frac{\tilde{Y}_1(s)}{V(s)} = \frac{m_1 s^2 + b_1 s + b_1 s + k_2}{(m_1 s^2 + b_1 s + k_1)(m_2 s^2 + b_2 s + k_2) - b_1 b_2 s^2}$

### 3.3.2 Sistemi Meccanici Rotatori

In questi sistemi le variabili significative sono le posizioni angolari e le coppe. I componenti elementari sono:

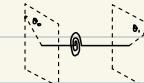
1. Rotore ideale: Modello il momento d'inerzia, si oppone all'accelerazione angolare.

È regolato da  $\dot{M} = I \ddot{\theta} \Rightarrow M = I \frac{d\theta}{dt^2}$



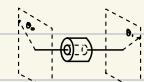
2. Molla torsionale: È un oggetto che tende a mantenere lo stesso angolo tra i suoi terminali.

se così non è esercita un momento  $M_t = -k(\theta_t - \theta_0)$  e  $M_0 = -M_t$



3. Smorzatore viscoso: È un oggetto che tende a mantenere le velocità angolari tra i suoi terminali uguali a 0

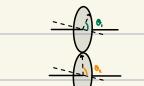
$$M_t = -b \left( \frac{d\theta_t}{dt} - \frac{d\theta_0}{dt} \right) \quad M_0 = -M_t$$



4. Trasmissione ideale: Consiste in due ruote dentate ingaggiate tra loro.

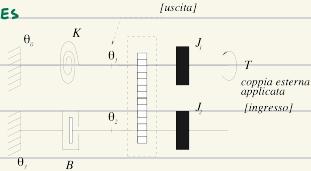
Se  $n_1$  e  $n_2$  i denti delle ruote. Allora sono proporzionali ai raggi  $\frac{n_1}{r_1} = \frac{n_2}{r_2}$

$$\text{So che } \frac{d\theta_1}{dt} \cdot r_1 = - \frac{d\theta_2}{dt} \cdot r_2 \Rightarrow n_1 \frac{d\theta_1}{dt} = -n_2 \frac{d\theta_2}{dt}$$



Inoltre il momento angolare si conserva,  $M_1 \frac{d\theta_1}{dt} + M_2 \frac{d\theta_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{M_1}{n_1} = - \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow M_1 n_2 = M_2 n_1$

**ES**



$$\{ J_1 \ddot{\theta}_1 = T - K(\theta_1 - \theta_0) + M_1$$

$$\{ J_2 \ddot{\theta}_2 = -B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + M_2$$

So che  $M_1 n_1 = M_2 n_2$ ,  $\dot{\theta}_1 n_1 = -\dot{\theta}_2 n_2$

$$\left| \begin{array}{l} J_1 \ddot{\theta}_1 = T - K(\theta_1 - \theta_0) - M_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = -B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + M_2 \end{array} \right. \quad \text{2 equazioni, 3 incognite } (\theta_1, T, M_1)$$

$$\left| \begin{array}{l} J_1 \ddot{\theta}_1 = T - K(\theta_1 - \theta_0) - M_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = -B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + M_2 \\ \frac{n_1}{n_2} J_1 \ddot{\theta}_1 + B \dot{\theta}_1 + M_1 \frac{n_2}{n_1} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} J_1 \ddot{\theta}_1 - T + K \theta_1 - M_1 = J_2 \ddot{\theta}_2 + B \dot{\theta}_1 + M_1 \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow + \theta_1 \left( J_1 \frac{n_2}{n_1} + J_2 \frac{n_1}{n_2} \right) + B \dot{\theta}_1 \frac{n_1}{n_2} + K \theta_1 \frac{n_2}{n_1} = + T \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \theta_1'' \left( J_1 + J_2 \frac{n_1^2}{n_2^2} \right) + B \theta_1' \frac{n_1^2}{n_2^2} + K \theta_1 = T$$

**ES**

$$J = ml^2 \quad M_g = mgs \sin \theta$$



$$J \ddot{\theta} = l m l s \sin \theta \cdot T \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} - gl m s \sin \theta \cdot T = 0 \Rightarrow l \ddot{\theta} - g \sin \theta - \frac{1}{ml} T = 0$$

$\mu = T$  ingresso e  $y = \theta$  uscita

Cerco soluzione all'equilibrio  $y(t) = \bar{y}$  e  $\dot{w}(t) = 0$

$$g \sin \bar{y} = 0 \Leftrightarrow \sin \bar{y} = 0 \Leftrightarrow \bar{y} \in \{0, \pi\}$$

Linearizzo per  $\bar{y}=0$ ,  $\bar{w}=0$   $y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}$   $w(t) = \tilde{w}(t) + \bar{w}$

$$-l \tilde{y}'' + g \tilde{y} + \frac{\tilde{m}}{l^2} = 0 \Rightarrow -l s^2 \tilde{Y}(s) + g \tilde{Y}(s) = -\frac{\tilde{m}}{l^2} \Rightarrow \tilde{Y}(s) = \frac{1}{l^2(m l^2 - g)} \tilde{U}(s)$$

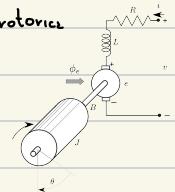
$$\text{quindi, } w(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$$

### 3.3.3 Sistemi Elettromeccanici

L'attuatore più comunemente utilizzato per il controllo dei sistemi è il motore elettrico.

Venne sfruttato il fenomeno fisico secondo il quale un filo elettrico percorso da corrente in un campo magnetico risente di una forza.

Il motore elettrico è formato da una parte stazionaria (che genera il campo magnetico) e una rotante



parte elettrica:  $\begin{cases} v(t) = R_i i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K \phi_e w(t) \\ \int \frac{dw(t)}{dt} = -B w(t) + M(t) + K \phi_e i(t) \end{cases}, H = k \phi_e$

parte meccanica:  $\Rightarrow \begin{cases} RI(s) + Ls I(s) = V(s) - Hs \Omega(s) \\ Js \Omega(s) + B \Omega(s) = M(s) + H I(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(s) = \frac{V(s)}{R+Ls} - \frac{H}{R+Ls} \Omega(s) \\ \Omega(s) = \frac{H}{(R+Ls)(Js+B)+H^2} V(s) + \frac{R+Ls}{(R+Ls)(Js+B)+H^2} M(s) \end{cases}$

$W_{o,e} = W_{o,w}(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{H}{(R+Ls)(Js+B)+H^2} \cdot \frac{1}{s}$

### 3.3.4 Dinamica dei Flussi di Liquidi

I sistemi matematici di equazioni differenziali vengono modellati per modellare lo spostamento dei fluidi tra serbatoi.

Se numeriamo ogni serbatoio:  $x_i(t)$  è il volume nel serbatoio  $i$ -esimo

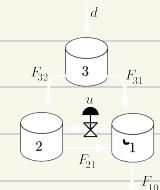
$F_{ij}(t)$  è il flusso da serbatoio  $i$  a  $j$

$F_{oi}(t), F_{eo}(t)$  sono i flussi da e verso l'esterno

$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\sum_{h \neq i} F_{ih}(t) + \sum_{h \neq i} F_{hi}(t) - F_{io}(t) + F_{eo}(t)$

oss.  $F_{ij}(t)$  è una funzione del volume del recipiente da cui il fluido fluisce  $F_{ij}(t) = f_{ij}(x_i(t))$  se lineare

Es



$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -F_{12}(t) - F_{14}(t) + u \\ \dot{x}_2(t) = F_{21}(t) - F_{12}(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = F_{32}(t) - u(t) - F_{13}(t) + F_{31}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -z_{10} x_1(t) + z_{21} x_2(t) + z_{31} x_3(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -z_{21} x_2(t) + z_{32} x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -z_{32} x_2(t) - z_{13} x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t) = u - z_{10} x_1(t) \end{cases}$

Cerco le funzioni di trasferimento  $W_{yj}(s)$   $W_{dy}(s)$

$\begin{cases} sX_1(s) = -z_{10} X_1(s) + z_{21} X_2(s) + z_{31} X_3(s) - U(s) \\ sX_2(s) = -z_{21} X_2(s) + z_{32} X_3(s) + U(s) \\ sX_3(s) = -z_{32} X_2(s) - z_{13} X_3(s) + D(s) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \frac{z_{21} - z_{21} + z_{10} \cdot s + z_{31} \cdot z_{21}}{(s+z_{10})(s-z_{21})(s+z_{32}+z_{21})} D(s) - \frac{s}{(s+z_{10})(s+z_{21})} U(s) \\ X_2(s) = \frac{z_{32}}{(s+z_{21})(s+z_{12}+z_{21})} D(s) + \frac{1}{s+z_{21}} U(s) \\ X_3(s) = \frac{1}{s+z_{32}+z_{21}} D(s) \end{cases}$

### 3.3.5 Modellizzazione della Dinamica delle Popolazioni

Una popolazione può essere modellizzata da serbatoi e flussi.

$x(t)$  descrive il numero di individui di una popolazione.

$F_n(t)$  flusso di individui che nascono,  $F_m(t)$  flusso di individui che muoiono,  $u(t)$  migrazioni

### ES - Singola popolazione

$$\frac{dx(t)}{dt} = F_n(t) - F_m(t) + u(t) = nx(t) - mx(t) + u(t) = (n-m)x(t) + u(t)$$

Dove  $\varepsilon = n-m$  è il tasso di nascita pro-capita.

Quando  $u(t)=0$  la soluzione è  $x(t) = x(0)e^{\varepsilon t}$

$\varepsilon > 0 \rightarrow$  estinzione  
 $\varepsilon = 0 \rightarrow$  costante  
 $\varepsilon < 0 \rightarrow$  aumento

### ES - più popolazioni

Il flusso  $F_{ij}$  dalla regione i alla regione j dipende dalla popolazione nella regione di partenza e di arrivo.

$$F_{ij} = f_{ij}(x_i(t), x_j(t))$$

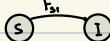
$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \varepsilon_i x_i(t) - \sum_{h \neq i} F_{ih}(t) + \sum_{h \neq i} F_{hi}(t) + u_i(t)$$

Genera un modello di stato non lineare.

### 3.3.6 Modellizzazione delle Epidemie

Anche in questo caso possiamo modellizzare il problema usando flussi e servizi.

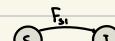
#### Modello SI (Susceptible-Infected)



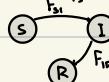
$$\frac{ds(t)}{dt} = -F_{SI}(t) = -\varepsilon s(t)i(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = F_{SI}(t) = \varepsilon s(t)i(t)$$

#### Modello SIS (Susceptible-Infected-Susceptible)



#### Modello SIR (Susceptible-Infected-Recovered)



## 4. Stabilità

Un sistema, descritto dall'equazione  $y(t) = y_s(t) + y_f(t)$ , può avere due proprietà di stabilità:

- Stabilità rispetto alle condizioni iniziali (o rispetto alle risposte libere)

Stabilità esponentiale: quando la  $y_f(t)$  converge a 0,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_f(t) = 0$

Stabilità semplice: la  $y_f(t)$  è limitata  $|y_f(t)| < M \forall t \geq 0$

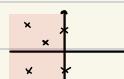
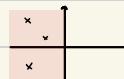
### TEOREMA

Il modello è esponentialmente stabile rispetto alle condizioni iniziali

$\Leftrightarrow$  gli zeri  $p_i, i=1,\dots,t$  di  $y_f(t)$  hanno  $\operatorname{Re}[p_i] < 0$

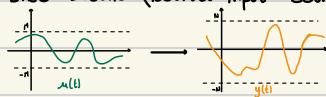
Il modello è semplicemente stabile rispetto alle condizioni iniziali

$\Leftrightarrow$  gli zeri  $p_i, i=1,\dots,t$  di  $y_f(t)$  hanno  $\operatorname{Re}[p_i] \leq 0$



• Stabilità ingresso/uscita BIBO (o rispetto alle risposte forzate)

Dato un qualsiasi operatore che mappa un segnale di ingresso  $w(t)$  ad uno di uscita  $y(t)$ , esso viene detto BIBO stabile (Bounded Input - Bounded output) se ad ogni ingresso  $w(t)$  limitato il sistema associa un'uscita  $y(t)$  limitata.



Formalizzando, si ha  $S_{\infty} = \{y(t) | \sup_{t \geq 0} |y(t)| < \infty\}$  l'insieme dei segnali limitati.

**TEO** Un operatore è BIBO stabile  $\Leftrightarrow S_{\infty} \rightarrow S_{\infty}$

Studiamo ora il caso particolarmente importante dove  $y(t) = (w * u)(t)$

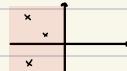
**TEO** Se  $w(t)$  non ha componenti impulsive.

Allora l'operatore è BIBO stabile  $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)| dt < \infty$

Se  $w(t)$  è del tipo  $w(t) = \delta(t) + \tilde{w}(t)$  dove  $\tilde{w}(t)$  non ha componenti impulsive.

**TEO** Allora l'operatore è BIBO stabile  $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{w}(t)| dt < \infty$

**TEO** Un operatore è BIBO stabile  $\Leftrightarrow W(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa



#### 4.1 Criteri di Stabilità

Abbiamo visto come il calcolo della stabilità (sia delle condizioni iniziali, sia BIBO) richiede verificare che un polinomio abbia zeri con parte reale negativa. Un tale polinomio è detto stabile o di Hurwitz. Questo calcolo può essere complicato, è stato quindi sviluppato un algoritmo, il criterio di Routh, per trovare le soluzioni in modo efficiente.

Prima di svolgere l'algoritmo è utile verificare le regole di Cartesio, per rimuovere subito alcuni polinomi.

##### 4.1.1 Regola di Cartesio

Se un polinomio  $s(s)$  è stabile, allora deve avere tutti i coefficienti non nulli e con lo stesso segno.

**ES**  $s^2 - 2s + 5, s^3 + s + 3$  sono non stabili

**OSS** Le regole di cartesio fornisce una condizione necessaria, ma non sufficiente.

##### 4.1.2 Regola di Routh

Questo criterio si basa sulla creazione di una tabella (di Routh)

Dato  $s(s)$  polinomio di grado  $n$ , allora la tabella avrà  $n+1$  righe.

## 1. Costruzione delle prime due righe

## 2. Costruzione Jellz negli i-esimi

$i+2$	$P_{i+2}$	$P_i$	$P_{i-2}$
$i+1$	$q_{i+1}$	$q_{i-1}$	$q_{i-3}$
$i$	$v_i$	$v_{i-2}$	$v_{i-4}$

$$V_j = -\frac{1}{q_{j+1}} \det \begin{pmatrix} p_{j+2} & p_j \\ q_{j+1} & q_{j-1} \end{pmatrix}$$

prop - delle tabella di Routh

- La tabella è triangolare
  - I valori sulla diagonale sono tutti uguali

TEO

1. Le tabelle di Routh è completebile

$\lambda(s)$  è stabile  $\Leftrightarrow$  2. Gli elementi delle prime colonne sono non nulli e hanno tutti lo stesso segno.

ES

$$z(s) = 2s^3 + s^2 + s + 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -3 & \end{vmatrix} - \frac{1}{1} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

NON STABILE

## Def-permesso e versioni

TEO

1. Lz tabella di Routh è completabile nessun zero con  $\text{Re}[s] = 0$   
 2. Lz prima colonna ha np pernienze  $\Rightarrow z(s) \text{ ha:}$ 
  - $n_p$  zeri con  $\text{Re}[s] < 0$
  - $n_r$  zeri con  $\text{Re}[s] > 0$

e nr venzioni

OSS

In alcuni casi la tabella non è completa, ma è comunque possibile ottenere informazioni.

Se una riga è composta di soli 0 possiamo dire che  $\alpha(s) = q(s)f(s)$  e possiamo definire i due polinomi  $q(s)$ ,  $f(s)$ .

ES

$$\alpha(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s^1 + 4s - 8$$

$$\begin{array}{c|cccc} \text{ip} & 6 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ \hline 5 & 1 & 5 & 4 & & \\ 4 & -2 & -10 & -8 & & \\ \hline 3 & \boxed{0} & 0 & 0 & \text{riga i t.c. } 0 \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Definisco  $q(s)$  a partire dalla riga  $i+1$ :  $-2s^{i+1} - 10s^{i+1} - 8s^{i+3}$  ovvero  $q(s) = -2s^4 - 10s^2 - 8$

Inoltre posso dire che  $f(s)$  ha 1 radice con  $\text{Re}[s] > 0$  e 1 radice con  $\text{Re}[s] < 0$ .

$f(s)$  si può ottenere dividendo  $\alpha(s)$  per  $q(s)$ :  $f(s) = -\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s + 1$

## 5. Risposta ai Segnali Canonici

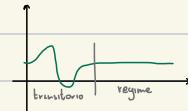
Analizziamo ora le risposte forzate di un sistema descritte da funzione di trasferimento quando stimolato da segnali canonici, come il segnale sinusoidale, il gradino, la rampa e la rampa parabolica.



Questi segnali sono importanti perché la maggior parte dei segnali di riferimento coincidono con questi segnali o una loro sovrapposizione.

Dividiamo l'analisi in due fasi:

- A regime, per tempi grandi (più semplice)
- Nel transitorio, per tempi più piccoli (più complessa, useremo un'approssimazione)



### 5.1 Risposta a Regime

Analizziamo le risposte in regime per il sistema

$$u(t) \rightarrow [W(s)] \rightarrow y(t)$$

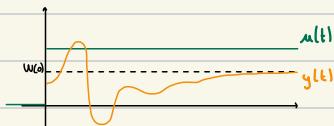
#### 5.1.1 Risposta in Regime al Gradino

Sia  $W(s) = \frac{b(s)}{s(s)}$  proprio e BIBO stabile.

Applica come ingresso il gradino  $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ,  $U(s) = \frac{1}{s}$

Quindi  $y(s) = W(s) \frac{1}{s}$  strettamente proprio ( $W(s)$  proprio e  $\frac{1}{s}$  strettamente proprio)

$y(s) = \frac{A}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k}$  dove  $p_i$  poli di  $W(s)$ ,  $W(s)$ , hanno  $\text{Re}[p_i] < 0$ . Mentre  $A = s y(s) \Big|_{s=0} = W(0)$   
quindi ottengo  $y(t) = W(0) + (\text{termini} \rightarrow 0)$  per  $t \rightarrow +\infty$

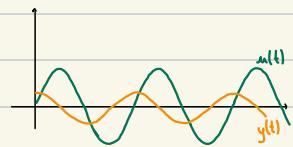


### 5.1.2 Risposta in Regime al Segnale Sinusoide

Sia  $W(s) = \frac{b(s)}{s(s)}$  proprio e BIBO stabile

Applico come ingresso  $u(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $t \geq 0$

$$U(s) = \int \left[ \frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} \right] (s) = \int \left[ \frac{e^{i\varphi}}{2} e^{i\omega t} + \frac{e^{-i\varphi}}{2} e^{-i\omega t} \right] (s) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i\varphi}}{s - i\omega} + \frac{e^{-i\varphi}}{s + i\omega} \right)$$



$Y(s) = W(s)U(s)$  strettamente proprio ( $W(s)$  proprio e  $\frac{1}{s}$  strettamente proprio), è quindi del tipo

$$Y(s) = \frac{A}{s - i\omega} + \frac{B}{s + i\omega} + \sum_{\text{poli } U(s)} \frac{C_{ij}}{(s - p_i)^k}$$

dove  $p_i$  poli di  $W(s)$ , hanno  $\operatorname{Re}[p_i] < 0$ ,

$$A = (s - i\omega) Y(s) \Big|_{s=i\omega} = (s - i\omega) \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i\varphi}}{s - i\omega} + \frac{e^{-i\varphi}}{s + i\omega} \right) W(s) \Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{2} e^{i\varphi} W(s) \Big|_{s=i\omega} + \frac{1}{2} e^{-i\varphi} \frac{s - i\omega}{s + i\omega} W(s) \Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{2} e^{i\varphi} W(j\omega)$$

$$B = \bar{A} = \frac{1}{2} e^{-i\varphi} W(-j\omega)$$

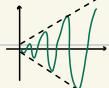
Sono  $|W(i\omega)|$  e  $\angle W(j\omega)$  modulo e fase di  $W(j\omega)$

quindi  $y(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} + (\text{termini} \rightarrow 0)$  per  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &= A e^{i\omega t} + \bar{A} e^{-i\omega t} + (\rightarrow 0) \\ &= 2 \operatorname{Re}[A e^{i\omega t}] + (\rightarrow 0) \quad (2 + \bar{2} = x + y + x - y = 2x) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ e^{i\varphi} |W(j\omega)| e^{i\angle W(j\omega)} e^{i\omega t} \right] + (\rightarrow 0) \quad (|W(j\omega)| = |W(j\omega)| e^{i\angle W(j\omega)}) \\ &= |W(j\omega)| \operatorname{Re} \left[ e^{i(\varphi + \angle W(j\omega) + \omega t)} \right] + (\rightarrow 0) \\ &= |W(j\omega)| \cos(\varphi + \angle W(j\omega) + \omega t) + (\rightarrow 0) \quad (p e^{i\theta} = p(\cos \theta + i \sin \theta)) \end{aligned}$$

Quindi la risposta ha la stessa frequenza, ma l'ampiezza e la fase sono modificate da  $W(i\omega)$

**OSS:** Se il sistema non è BIBO stabile,  $(\text{termini} \rightarrow 0)$  non tenderà più a 0, si ottiene quindi una risonanza.



### 5.1.3 Risposta in Regime a Gradino, Rampa, Rampa parabolica

Sia  $W(s)$  proprio con poli in  $\operatorname{Re}[s] < 0$  e un eventuale polo all'origine di molteplicità  $k$  (se  $k=0$  allora è il numero di zeri all'origine)

Mettiamo  $W(s)$  in forma di Bode.  $W(s) = \frac{k_0}{s^k} \tilde{W}(s)$  dove  $\tilde{W}(s)$  razionale con poli in  $\operatorname{Re}[s] < 0$  e  $\tilde{W}(0) = 1$

Applico come ingresso  $u(t) = s^{\frac{k-1}{k}} (t - t_0)^{\frac{1}{k}}$ ,  $U(s) = \int [u](s) = \frac{1}{s^k}$

$$\text{Quindi } Y(s) = W(s)U(s) = W(s) \frac{1}{s^k} = \frac{k_0}{s^{k+1}} \tilde{W}(s)$$

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{s_j} + \sum_{i=1}^k \frac{C_{ij}}{(s - p_i)^{j+1}}$$

dove  $p_i$  sono i poli di  $\tilde{W}(s)$   $\operatorname{Re}[p_i] < 0$  quindi  $y(t) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{a_j}{j!} t^{j-1} + (\rightarrow 0)$

L'ultimo termine della serie è il più significativo, gli altri sono trascurabili

$$y(t) \approx \frac{\frac{d^k w}{(s-p_k)^k}}{(s-p_{k+1})!} t^{k+1} + (\rightarrow 0) \text{ dove } \frac{d^k w}{(s-p_k)^k} \Big|_{s=0} = K_B \bar{W}(0) = K_B$$

$$= \frac{K_B}{(k+1)!} t^{k+1} + (\rightarrow 0) = K_B \delta^{(-k-1)}(t) + (\rightarrow 0)$$

La risposta è quindi dello stesso tipo dell'ingresso, con ordine aumentato di 1 e amplificata di  $K_B$

**OSS** Se  $k+l \leq 0 \Rightarrow -k-l \geq 0$  allora  $y(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$

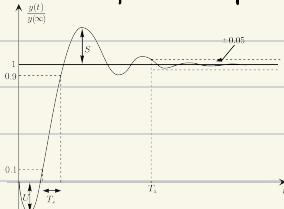
## 5.2 Analisi Transitorio

Per l'analisi a tempi piccoli il calcolo è più complesso, ci baseremo sempre su una approssimazione.

Viste le complessità, faremo questo tipo di analisi solo nel caso di ingresso a gradino.

### 5.2.1 Risposta Transitoria al Gradino

L'andamento tipico della risposta è:



dove  $S$  sovrelungazione  $S := \frac{y_{\max}}{y(\infty)} - 1$  (in percentuale)

$U$  sottoelungazione  $U := \frac{y_{\min}}{y(\infty)}$  (in percentuale)

$T_s$  tempo di assettamento il tempo che  $y(t)$  impiega ad entrare in  $[y(\infty)(1-0.05), y(\infty)(1+0.05)]$

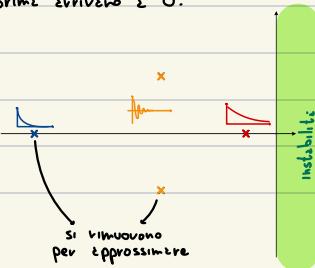
$T_s$  tempo di salita il tempo che  $y(t)$  impiega per passare da  $y(\infty) \cdot 0.1$  a  $y(\infty) \cdot 0.9$

L'obiettivo è ottenere  $S=U=0$   $T_s$  e  $T_s$  minimi

Abbiamo già risolto  $\bar{Y}(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{W(0)}{s} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s-p_i)^k} \Rightarrow y(t) = W(0) + (\rightarrow 0)$ ,  $t \geq 0$

Per determinare  $S, U, T_s$  vogliamo trovare il valore dei termini  $(\rightarrow 0)$ .

Questo è in generale difficile, ma possiamo approssimare. Tanto più i poli sono a sinistra dell'asse immaginario tanto prima arrivano a 0.



Dividiamo ora in due casi:

- Il polo più vicino all'asse immaginario è semplice e reale

Allora approssimo  $W(s)$  con  $\tilde{W}(s) = \frac{k}{s-p}$   $p$  polo dominante

$k$  scelto in modo che  $W(0) = \tilde{W}(0)$  (preserva il comportamento a regime)



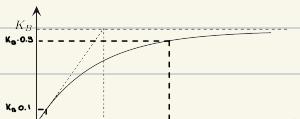
$$\tilde{W}(s) = \frac{k}{(s-p)} = \frac{k}{s - p(-\frac{1}{\tau} + i)} = \frac{k_B}{1 + \tau s} \quad \text{con } k_B = -\frac{k}{p} \quad \tau = -\frac{1}{p} > 0$$

$$u(t) = \delta^{(-1)}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{quindi } Y(s) = \tilde{W}(s) \frac{1}{s} = \frac{k_B}{1 + \tau s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + \tau s} \quad A = s Y(s) \Big|_{s=0} = k_B \quad B = (1 + \tau s) Y(s) \Big|_{s=\frac{1}{\tau}} = -k_B \approx 0$$

$$= \frac{k_B}{s} - \frac{k_B \tau}{1 + \tau s} = k_B \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right)$$

$$\text{quindi } y(t) = k_B \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), t \geq 0$$



$$\text{quindi: } S = U = 0$$

$$T_s = \tau \ln(2) \approx 2\tau = -\frac{2}{p}$$

$$T_2 = \tau \ln(10) \approx 3\tau = -\frac{3}{p}$$

- I poli più vicini all'asse immaginario sono semplici e complessi coniugati

Allora approssimo  $W(s) \approx \tilde{W}(s) = \frac{k}{(s-p_1)(s-p_2)}$  dove  $p_1, p_2$  poli dominanti  $K$  t.c.  $W(0) = \tilde{W}(0)$



$$\tilde{W}(s) = \frac{k}{(s-p)(s-\bar{p})} = \frac{k}{s^2 - s(p+\bar{p}) + p\bar{p}} = \frac{k}{s^2 - 2\operatorname{Re}[p]s + |\operatorname{p}|^2} = \frac{k}{|\operatorname{p}|^2 \left( 1 - 2\frac{\operatorname{Re}[p]}{|\operatorname{p}|^2}s + \frac{s^2}{|\operatorname{p}|^2} \right)} = \frac{k_0}{1 + 2\frac{\epsilon}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad \text{con } k_0 = \frac{k}{|\operatorname{p}|^2}, \omega_n = |\operatorname{p}| \quad \text{pulsazione naturale}$$

$$\frac{-\operatorname{Re}[p]}{|\operatorname{p}|} \quad \text{coefficiente di smorzimento}$$

Riscrivo  $p_{1,2}$  in funzione di  $\epsilon(0)$  e  $\omega_n$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm i\omega, \sigma, \omega > 0 \quad \sigma = -\operatorname{Re}[p], \omega = \operatorname{Im}[p]$$

$$\text{Allora } \omega_n^2 = |\operatorname{p}|^2 = \sigma^2 + \omega^2$$

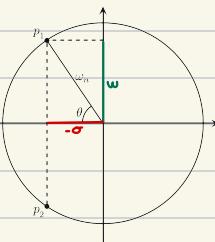
$$\sigma = -\operatorname{Re}[p] = -\frac{\operatorname{Re}[p]}{|\operatorname{p}|} \cdot |\operatorname{p}| = \epsilon \omega_n = \cos \theta \omega_n$$

$$\omega = \sqrt{1 - \epsilon^2} \omega_n = \sin \theta \omega_n$$

$$\text{DIM: } \sqrt{1 - \epsilon^2} \omega_n = \frac{|\operatorname{p}|^2 - \operatorname{Re}[\operatorname{p}]^2}{|\operatorname{p}|^2} \cancel{|\operatorname{p}|} = \sqrt{\operatorname{Im}[\operatorname{p}]^2 + \operatorname{Im}[\operatorname{p}]^2 - \operatorname{Re}[\operatorname{p}]^2} = \operatorname{Im}[\operatorname{p}]$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta} = \sin \theta$$

$$\text{quindi: } p = -\omega_n e^{i\theta}, \bar{p} = \omega_n e^{i\theta}$$



$$\gamma(s) = \frac{\omega_n^2 K_B}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-p} + \frac{C}{s-\bar{p}}$$

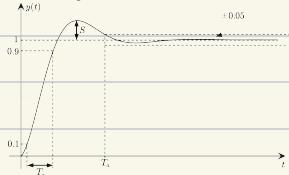
$$A = K_B, B = (s-p)\gamma(s) \Big|_{s=p} = \frac{1}{s} \Big|_{s=p} = \frac{K}{p(p-\bar{p})} = \frac{K_B \bar{p}}{(p-\bar{p})R} = -k_B \frac{\omega_n e^{i\phi}}{2i\sin\theta} = -k_B \frac{e^{i\phi}}{2i\sin\theta}$$

$$C = (s-\bar{p})\gamma(s) \Big|_{s=\bar{p}} = \frac{K}{s-\bar{p}} = \frac{K}{(\bar{p}-p)\bar{p}} = k_B \frac{P}{(\bar{p}-p)} = -k_B \frac{P}{2i\sin\theta} = k_B \frac{e^{-i\phi}}{2i\sin\theta} = k_B \frac{e^{-i\phi}}{2i\sin\theta}$$

$$\gamma(s) = \frac{K_B}{s} - \frac{k_B \frac{e^{i\phi}}{2i\sin\theta}}{s-p} + \frac{k_B \frac{e^{-i\phi}}{2i\sin\theta}}{s-\bar{p}}$$

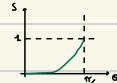
$$y(t) = K_B \left( 1 - \frac{e^{i\phi}}{2i\sin\theta} e^{pt} + \frac{e^{-i\phi}}{2i\sin\theta} e^{\bar{p}t} \right) = K_B \left( 1 - \frac{1}{2i\sin\theta} e^{i\omega t - \omega t + i\omega t} + \frac{1}{2i\sin\theta} e^{-i\omega t - \omega t - i\omega t} \right) = K_B \left( 1 - \frac{e^{-\omega t}}{\sin\theta} \cdot \frac{e^{i(\omega+wt)} + e^{-i(\omega+wt)}}{2} \right)$$

$$= K_B \left( 1 - \frac{e^{-\omega t}}{\sin\theta} \sin(\omega t + \phi) \right)$$

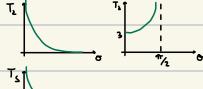


quindi  $U=0$

$S = e^{-\frac{\pi}{\sin\theta}}$  (calcolando le derivate per trovare il max)

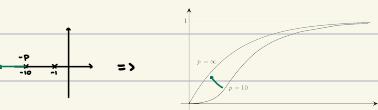


$$T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{\sigma}$$

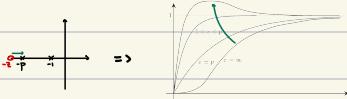


$$T_s = \frac{g(E)}{\omega_n} \approx \frac{2}{\omega_n}$$

oss-effetto dei poli non dominanti



oss-effetto degli zeri



## 6. Controllo di Sistemi

Possiamo ora ad esempio utilizzare il problema del controllo, esistono due architetture per controllare un sistema.

- Il controllo in catena aperta
- Il controllo in retroazione

Controllare significa costruire un controllore o regolatore che dato un riferimento  $r(t)$  applichi un ingresso di controllo  $u(t)$  al sistema con andamento tale da ottenere  $y(t) \approx r(t)$ .



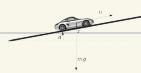
## 6.1 Controllo in Catena Aperta

Vediamo le limitazioni di un controllo in catena aperta con un esempio:

$y(t)$  = uscita = velocità auto

$u(t)$  = ingresso = forza generata dal motore

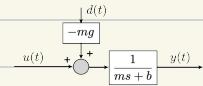
$d(t)$  = disturbo delle pendenze delle strade



Modellizzazione:

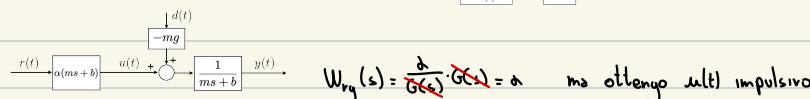
$$my'(t) = -by(t) + bu(t) - my\sin(d(t)) \Rightarrow my'(t) + by(t) = u(t) - mgd(t)$$

$$Y(s) \left( \frac{sm+b}{sm+b} \right) = U(s) - mgD(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{ms+b}U(s) - mgD(s)$$

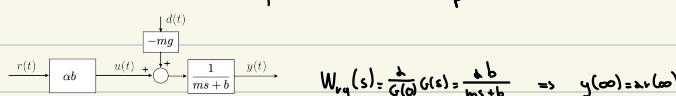


Costruisco ora un controllore in catena aperta ignorando  $d(t)$

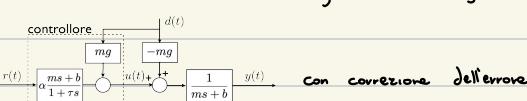
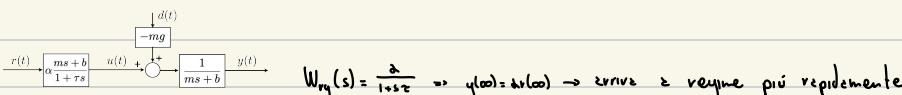
- usando l'inversione del modello del sistema



- usando un controllore statico posso rimuovere l'impulsività, mantenendo il risultato a regime



- soluzione intermedia

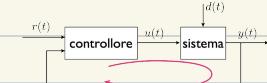


Questo controllo ha diverse criticità: - necessiti di conoscere il modello  
- necessita di misurare i disturbi

## 6.2 Controllo in Retroazione

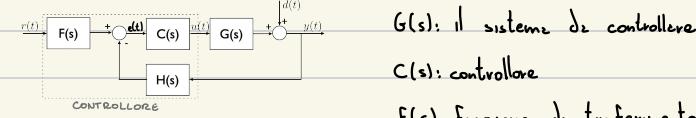
Per risolvere questi problemi introduciamo la retroazione

L'uscita  $y(t)$  viene reintrodotta nel controllore per gestire eventuali scostamenti da  $r(t)$



Questo però introduce una maggiore complessità, il controllore deve gestire due input.

Nel caso più generale il controllore in retroazione è:



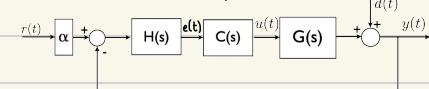
$G(s)$ : il sistema da controllare

$C(s)$ : controllore

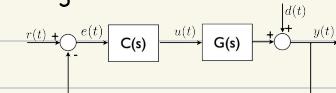
$F(s)$ : funzione di trasferimento del filtro segnalatore

$H(s)$ : funzione di trasferimento del sensore

Diremo  $F(s)=\alpha H(s)$ , permettendoci di semplificare:



Ricollogo  $H(s)$  e  $G(s)$  in un'unica blocco che chiamo  $G(s)$



$$W_{ry}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \approx 1 \Rightarrow y(t) \approx r(t)$$

$$W_{dy}(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \approx 0 \Rightarrow \text{effetto disturbo} \approx 0$$

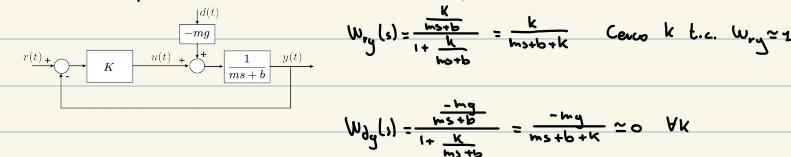
Per ottenere questi risultati ( $W_{ry} \approx 1$ ,  $W_{dy} \approx 0$ ) uso uno dei controllori standard PID (Proporzionale Integrale Derivativo)

$$C(s) = K_p \text{ (proporzionale)}, \quad C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \text{ (proporzionale-integrale)}, \quad C(s) = K_p + K_d s \text{ (proporzionale-derivativo)}$$

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad \text{controllore PID}$$

ES-controllo veicolo in catena chiusa

Dall'esercizio precedente, utilizzo un controllore proporzionale



$$W_{ry}(s) = \frac{\frac{-mg}{ms+b}}{1 + \frac{K}{ms+b}} = \frac{k}{ms+b+k} \quad \text{Cerco } k \text{ t.c. } W_{ry} \approx 1$$

$$W_{dy}(s) = \frac{\frac{-mg}{ms+b}}{1 + \frac{K}{ms+b}} = \frac{-mg}{ms+b+k} \approx 0 \quad \forall K$$

### 6.3 Effetti della Retroazione

Il controllo in retroazione modifica le proprietà dei sistemi (ad es. stabili  $\rightarrow$  instabili)

Vedremo gli effetti della retroazione su: stabilità, effetto dei disturbi, comportamento a regime e nel transitorio.

#### 6.3.1 Effetti sulla Stabilità

La retroazione può stabilizzare sistemi instabili, ma può anche destabilizzare sistemi stabili.

Per verificare la stabilità, al venire di uno o più parametri, è utile la tabella di Routh.

**ES - controllo veicolo: criterio di Routh**

Abbiamo visto che  $W_{ry}(s) = \frac{k}{ms+b+k} \rightarrow$  verifica la stabilità del denominatore.

$$\begin{array}{c|c} 1 & m \\ 0 & b+k \end{array}$$

stabile per  $k \geq 0$

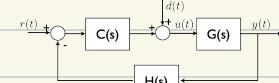
**Def** Sia  $\alpha$  un parametro da cui dipende  $W(s)$ , si definisce la sensibilità di  $W(s)$  rispetto ad  $\alpha$

$$S_\alpha = \frac{\frac{d}{ds} W(s)}{W(s)}$$

### 6.3.2 Effetti sulla Reiezione dei Disturbi

Ovvvero la capacità di un sistema di attenuare eventuali disturbi.

Il controllo in retroazione migliora sempre queste proprietà



$$Y(s) = Y_r(s) + Y_d(s) = W_{ry}(s)R(s) + W_{dy}(s)D(s), \text{ con } W_{dy}(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

Vogliamo  $Y_d(s)$  "piccolo"  $\Rightarrow W_{dy}(s)$  "piccolo"

Se  $d(t) = \cos(\omega t)$  allora il regime  $y(t) = |W_{dy}(j\omega)| \cos(\omega t + \angle W_{dy}(j\omega))$

Per avere  $|W_{dy}(j\omega)|$  piccolo ( $1/j\omega$ ) deve essere grande.

**ES - controllo veicolo**

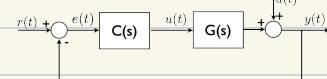
$$W_{dy} = \frac{-mg}{ms+b+k}$$

$$|W_{dy}(j\omega)| = \frac{mg}{\sqrt{(b+k)^2 + (\omega m)^2}} \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty$$

quindi sceglieremo  $k$  grande.

### 6.3.3 Effetti sul Comportamento a Regime

Una proprietà importante di un sistema è il suo errore a regime nelle risposte a ingressi di segnali cronici.



Vogliamo che  $e(t) \approx 0$ , sapendo  $E(s) = W_{re}(s)R(s)$

ovvero  $W_{re} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)} \approx 0$  (assumiamo  $W_{re}$  BIBO stabile) e  $W(s) = C(s)G(s)$  guadagno d'anello

Inoltre:  $r(t) = \delta^{(k)}(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^k}$

Allora  $e(t) \approx \bar{K}_B \delta^{(k-\bar{B})}(t)$  dove  $\bar{K}_B$  guadagno di Bode e  $\bar{B}$  tipo di  $W_{re}(s)$

$$\text{Se } -k - \bar{l} \geq 0 \Rightarrow e(\infty) = 0 \quad \perp$$

$$-k - \bar{l} = -1 \Rightarrow e(\infty) = \frac{k_b}{k_b} \quad \square$$

$$-k - \bar{l} = -2 \Rightarrow e(\infty) = \infty \quad \diagdown$$

Vogliamo impostare un  $\bar{l}$  grande e negativo così da ottenere  $e(\infty) = 0$

Influenze di  $W(s)$  su  $W_{re}(s)$

$$W(s) = \frac{k_b}{s^2} \bar{W}(s) \Rightarrow W_{re}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_b}{s^2} \bar{W}(s)} = \frac{s^2}{s^2 + k_b \bar{W}(s)} = \frac{\bar{k}_b}{s^2} \bar{W}_{re}(s)$$

$$\text{se } l \leq -1 \Rightarrow \bar{W}_{re}(l) = \left. \frac{s^{-1}}{s^{-2} + \frac{k_b}{s^2} \bar{W}(s)} \right|_{s=0} = 1 \quad (\text{nessun polo/zero nell'origine}) \Rightarrow \bar{l} = 0 \quad \bar{k}_b = 1$$

$$l = 0 \Rightarrow \bar{W}_{re}(l) = \left. \frac{1}{1 + k_b \bar{W}(0)} \right|_{s=0} = \frac{1}{1 + k_b} \quad (\text{nessun polo/zero nell'origine}) \Rightarrow \bar{l} = 0 \quad \bar{k}_b = \frac{1}{1 + k_b}$$

$$l \geq 1 \Rightarrow \bar{W}_{re}(l) = \left. \frac{s^2}{s^2 + k_b \bar{W}(s)} \right|_{s=0} = 0 \quad (\text{il polo diventa uno zero}) \Rightarrow \bar{l} = -l \quad \bar{k}_b = \frac{1}{k_b}$$

Per ottenere  $\bar{l}$  grande e negativo voglio  $l$  grande e positivo

1.  $v(t) \approx \text{gradino}$

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad (k=1) \Rightarrow e(t) \approx \bar{k}_b \delta^{(-1-\bar{l})}(t)$$

$$\text{quindi } e(\infty) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{k}_b} & \text{se } \bar{l} \leq -1 \\ \frac{1}{1+\bar{k}_b} & \text{se } \bar{l} = 0 \\ 0 & \text{se } \bar{l} \geq 1 \end{cases}$$

2.  $v(t) \approx \text{ramps}$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad (k=2) \Rightarrow e(t) \approx \bar{k}_b \delta^{(-2-\bar{l})}(t)$$

$$\text{quindi } e(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{se } \bar{l} \leq 0 \\ \frac{1}{\bar{k}_b} & \text{se } \bar{l} = 1 \\ 0 & \text{se } \bar{l} \geq 2 \end{cases}$$

3.  $v(t) \approx \text{ramps parabolico}$

$$R(s) = \frac{1}{s^3} \quad (k=3) \Rightarrow e(t) \approx \bar{k}_b \delta^{(-3-\bar{l})}(t)$$

$$\text{quindi } e(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{se } \bar{l} \leq 1 \\ \frac{1}{\bar{k}_b} & \text{se } \bar{l} = 2 \\ 0 & \text{se } \bar{l} \geq 3 \end{cases}$$

**ES - controllo veicolo**

con  $C(s) = k$

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{k}{ms+b} = \frac{k_b}{\frac{m}{b}s+1} \quad k_b = \frac{k}{b} \quad e \quad l = 0$$

$$v(t) \text{ gradino} \Rightarrow e(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{k}{b}}$$

$$v(t) \text{ ramps e ramps parabolico} \Rightarrow e(\infty) = 0$$

con  $C(s) = \frac{k}{s}$

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{k}{s(ms+b)} = \frac{k_b}{s(1 + \frac{b}{k_b})} \quad k_b = \frac{k}{b} \quad e \quad l = 1$$

$$v(t) \text{ gradino} \Rightarrow e(\infty) = 0$$

$$v(t) \text{ ramps} \Rightarrow e(\infty) = \frac{1}{\frac{k}{b}} = \frac{b}{k}$$

$$v(t) \text{ ramps parabolico} \Rightarrow e(\infty) = \infty$$

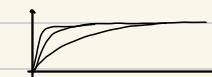
### 6.3.4 Effetti sul Comportamento nel Transitorio

Il controllo in retroazione modifica la posizione dei poli della funzione di trasferimento, cioè modifica il comportamento nel transitorio.

**ES - controllo veicolo**

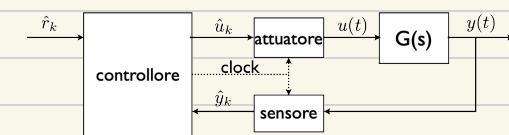
$$W_{re}(s) = \frac{k}{ms+b+k} \text{ ha polo dominante } p = -\frac{b+k}{m}$$

Il transitorio è più breve all'aumentare di  $k$ .



### 6.4 Cenni di Controllo Digitale

Il controllore viene realizzato mediante un calcolatore.



Le principali differenze tra un sistema digitale ed uno analogico si trovano nel fatto che quello digitale lavora su valori discreti e non continui.

$$y \leftrightarrow \hat{y}_k$$

$u \leftrightarrow u_k$  passiamo da segnali continui a segnali discreti

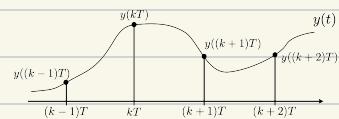
$$r \leftrightarrow \hat{r}_k$$

**OSS:** Il clock deve essere sincronizzato.

#### 6.4.1 Il Campionatore

Misuro il valore del sistema solo nell'istante dettato dal clock.

Questo comporta sicuramente una perdita di informazione.

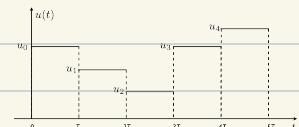


Infine il valore deve essere convertito in binario, deve essere quantizzato, l'operazione comporta un'ulteriore perdita di informazione. (0 1 2 3 4 5 6 7 →, valore reale e valore quantizzato differiscono, in media, di 0.5)

#### 6.4.2 L'Attuatore

Il problema opposto, tornare da tempo discreto a tempo continuo,

dove deve essere risolto dall'attuatore. Questo viene risolto con un interpolatore zero holder, ovvero a tratti costanti.



#### 6.4.3 Il Calcolatore

Deve usare un sistema operativo real-time, una risposta ottenuta in ritardo  
è da considerarsi errata.

Il calcolatore ha poi il compito di eseguire un determinato algoritmo

##### 1. Controllore proporzionale

$$C(s) = K_p \quad \hat{u}_k = K_p \hat{e}_k = K_p (\hat{e}_k - \hat{g}_k)$$

##### 2. Controllore proporzionale-integrale

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

$$u(t) = K_i e(t) + K_p e^i(t)$$

$$\frac{u(t) - u(t-T)}{T} = K_i e(t) + K_p \frac{e(t) - e(t-T)}{T}$$

$$u(t) - u(t-T) = T K_i e(t) + K_p e(t) - K_p e(t-T)$$

$$\hat{u}_k = \hat{u}_{k-1} + (T K_i + K_p) \hat{e}_k - K_p \hat{e}_{k-1}$$

## 7. Luogo delle Radici

La retroazione modifica i poli del sistema, il metodo del luogo delle radici ci permette di studiare in modo grafico lo spostamento al variazione di un parametro  $K \in \mathbb{R}$

Siano  $a(s)$  e  $b(s)$  polinomi, il luogo delle radici è definito come

$$L_r = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} \text{radici}[a(s) + K b(s)] = \{s \in \mathbb{C}, K \in \mathbb{R} \mid a(s) + K b(s) = 0\}$$

Ipotesi su i polinomi  $a, b$ :

1. Sono monici, ovvero hanno il coefficiente del termine di grado massimo unitario ( $1x^2+3x-1x^{10}+x$ )
2. Sono coprimi, ovvero non hanno fattori comuni
3.  $\deg[a(s)] \geq \deg[b(s)]$
4.  $K > 0$

Diciamo  $n = \deg(a)$ ,  $m = \deg(b)$ . Quindi  $a(s)$  e  $b(s)$  sono dello stesso:

$$a(s) = s^n + z_{n-1}s^{n-1} + \dots + z_1s + z_0 \quad \Rightarrow \quad a(s) = (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)$$

$$b(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0 \quad b(s) = (s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)$$

dove  $p_i$  e  $z_i$  sono le radici rispettivamente di  $a(s)$  e  $b(s)$   $\begin{cases} p_i \text{ sono detti poli del luogo} \\ z_i \text{ sono detti zeri del luogo} \end{cases}$

L'equazione  $\zeta(s) + kb(s) = 0$  ha una variabile reale ed una immaginaria (3 variabili reali)  
e corrisponde a 2 equazioni reali ( $\operatorname{Re} s = 0, \operatorname{Im} s = 0$ )

L'è quindi un insieme di dimensione 1

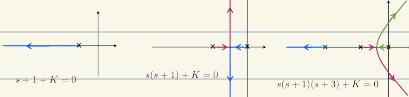
$$\begin{aligned}\zeta(s) + kb(s) = 0 &\Rightarrow \frac{b(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{k} \\ \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{b(s)}{\zeta(s)} \right| = \frac{1}{|k|} \\ \arg \left( \frac{b(s)}{\zeta(s)} \right) = \arg \left( -\frac{1}{k} \right) = \begin{cases} (2h+1)\pi & k > 0 \\ 2h\pi & k < 0 \end{cases}, h \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Rightarrow \arg \left( \frac{b(s)}{\zeta(s)} \right) = (2h+1)\pi \Rightarrow \sum_{i=1}^n \arg(s-z_i) - \sum_{i=1}^m \arg(s-p_i) = (2h+1)\pi, h \in \mathbb{Z} \\ \text{hp: } K > 0 \end{aligned}$$

## 7.1 Regole per il Tracciamento

### 1. Numero dei zeri e simmetrie

Per ogni valore di  $K$  il polinomio  $\zeta(s) + kb(s)$  ha  $n$  radici, le quali variano con continuità al variare di  $K$  generando  $n$  zeri.  
I zeri si intersecano solo per i valori di  $K$  dove  $\zeta(s) + kb(s)$  ha zeri multipli.

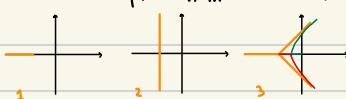
Gli zeri sono a coppie congiuate quindi il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale.



### 2. Comportamento limite e asintoti

- Per  $K=0$  i punti del luogo coincidono con gli zeri di  $\zeta(s)$

- Per  $K \rightarrow \infty$   $m$  punti tendono agli zeri di  $b(s)$  e  $n-m$  punti tendono all'oo lungo  $n-m$  semirette che formano una stella.  
La stella ha centro sull'asse reale nel punto  $x_0 = \frac{\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{i=1}^n z_i}{n-m}$   
e inclinazione  $\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m}$   $h=0, 1, \dots, n-m-1$



### 3. Posizione dell'asse reale appartenente al luogo

Un punto dell'asse reale se appartiene al luogo delle radici

$\Leftrightarrow$  il numero totale di zeri o poli a destra di  $s$  è dispari (contendo anche le molteplicità).



Derive delle formule viste in precedenza:

$$\sum_{i=1}^n c(s-z_i) - \sum_{i=1}^n c(s-p_i) = (2h+1)\pi \quad h \in \mathbb{Z}$$

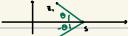
- Se  $z_i \in \mathbb{R}$  e  $z_i < s \Rightarrow c(s-z_i) = 0$



- Se  $z_i \in \mathbb{R}$  e  $z_i > s \Rightarrow c(s-z_i) = \pi$



- Se  $z_i \in \mathbb{C}$   $\Rightarrow c(s-z_i) = 0$



Quindi i poli/zeri danno contributo  $\pi$  se reali ed a destra di  $s$ .

$$\sum_{\substack{\text{zeri } \mathbb{R} \\ \text{a destra}}}^1 - \sum_{\substack{\text{poli } \mathbb{R} \\ \text{a destra}}}^1 = (2h+1)\pi \Rightarrow \sum_{\substack{\text{zeri } \mathbb{R} \\ \text{a destra}}}^1 + \sum_{\substack{\text{poli } \mathbb{R} \\ \text{a destra}}}^1 = j\pi \text{ per } m$$

#### 4. Zeri doppi e multipli

Lemme Un polinomio  $f(s)$  ha uno zero di molteplicità  $k$  in  $s \in \mathbb{C}$  se e solo se

$$f(\bar{s}) = f^{(1)}(\bar{s}) = \dots = f^{(k-1)}(\bar{s}) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(k)}(\bar{s}) \neq 0$$

I punti doppi del luogo sono le soluzioni  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$  cui corrispondono  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$  di

$$\begin{cases} \bar{s}(s) + k_1 b(s) = 0 \\ \frac{d\bar{s}(s)}{ds} + k_1 \frac{db(s)}{ds} = 0 \end{cases}$$



Se un intervallo tra due poli (o tra due zeri) appartiene al luogo, allora c'è un numero dispari  $\geq 1$  di punti doppi.

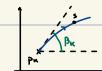
Se un intervallo tra un polo ed uno zero appartiene al luogo, allora c'è un numero pari  $\geq 0$  di punti doppi.



#### 5. Angoli di entrata/uscita

Vogliamo determinare l'andamento del luogo nell'intorno del polo  $p_k$

$$\text{angolo uscita } p_k: \sum_{i=1}^n c(s-z_i) - \sum_{i=1}^n c(s-p_i) = (2h+1)\pi \quad \text{con } h \in \mathbb{Z} \quad c(s-p_k) = p_k \cdot \sum_{i \neq k} c(p_k - z_i) - \sum_{i \neq k} c(p_k - p_i) + \pi$$



$$\text{angolo ingresso } p_k: \lambda_k = \sum_{i=1}^n c(z_k - p_i) - \sum_{i \neq k} c(z_k - z_i) + \pi$$

#### 6. Attraversamento esse immagine

È spesso utile determinare i punti del luogo che attraversano l'esse immagine

Le tabelle di Routh può essere utile in questo caso, l'attraversamento corrisponde al valore di  $K$  per cui cambia il numero di variazioni e permanenze cambia.

Questo è suo volte corrisponde ai valori di  $K$  dove si annulla una riga.

## 8. Criterio di Nyquist

Abbiamo visto come la stabilità possa essere studiata attraverso la tabella di Routh.

Vediamo ora un metodo alternativo per i sistemi retroazionati, il criterio di Nyquist.

Il criterio di Nyquist si basa sul diagramma di Nyquist.

Dato una funzione di trasferimento  $W(s)$ , il suo diagramma è il sottoinsieme del piano complesso comprendente i punti  $|W(j\omega)|_{\omega \geq 0}$ .

### MOTIVAZIONI

Il criterio di Nyquist si può applicare anche su funzioni di trasferimento non razionali.

Si può applicare anche senza conoscere l'espressione analitica della funzione di trasferimento.

è possibile determinare sperimentalmente i valori di  $W(j\omega)$ .

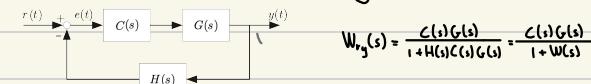
La stabilità dipende solamente da  $\omega_A$  e  $\omega_B$ . Che sono definite  $|W(j\omega_A)|=1$ ,  $|W(j\omega_B)|=\infty$ .

La "lontananza" del sistema dall'instabilità può essere determinata, è quindi possibile quantificare l'errore accettabile sull'implementazione di  $W(s)$ . Questa proprietà è detta robustezza della stabilità del sistema.

Del diagramma di Nyquist è possibile determinare il comportamento di  $W(s)$  nel transitorio.

### 8.1 Criterio di Nyquist per Funzioni Razionali

I sistemi in retroazione che vogliamo studiare sono del tipo:



poli( $W_{ry}$ ) = zeri( $1 + W(s)$ ), dobbiamo quindi mostrare che  $1 + W(s)$  ha solo zeri con parte reale negativa.

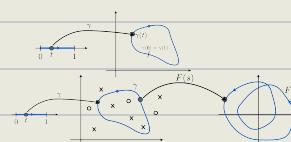
Possiamo verificarlo tramite il diagramma di Nyquist.

Per capire questo è utile introdurre il seguente teorema dell'analisi complessa

#### TEO - principio dell'argomento

Sia  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva chiusa semplice percorsa in senso orario.

Sia  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funzione razionale priva di poli o zeri su  $\gamma$  definita come  $F(\gamma): [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$



Diciamo  $N$  il numero di giri (giri) svolti da  $F(\gamma)$  attorno all'origine (positivi se antiorario, negativi se orario).

$P$  e  $Z$  sono rispettivamente il numero di poli e zeri di  $F$  dentro  $\gamma$ , contati con molteplicità.

Allora  $N = P - Z$



Definiamo le curve  $\gamma$  in modo che esse comprenda gli zeri instabili, scegliamo un semicerchio rivolto verso  $\text{Re}[s] > 0$  con  $R \rightarrow +\infty$ ,  $\gamma_R$ .

Definiamo ora la funzione  $F(s) = 1 + W(s)$ . Affinché valgano le proprietà del teorema dell'argomento devono essere verificate le seguenti ipotesi:

1.  $F(s)$  non ha poli sull'asse immaginario

1.  $W(s)$  non ha poli sull'asse immaginario ( $\approx$  trascurabile)

2.  $F(s)$  non ha zeri sull'asse immaginario

$\leftrightarrow$

2.  $F(jw) \neq 0 \Leftrightarrow W(jw) + 1 \neq 0 \Leftrightarrow W(jw) \neq -1$

3.  $F(s)$  non ha né poli né zeri all' $\infty$ .

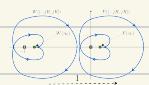
3.  $W(s)$  propria e  $W(\infty) \neq -1$

Ovvero  $F(s)$  propria e  $F(\infty) \neq 0$

So che  $F(jw) = 1 + W(jw)$ , quindi le curve  $F$  è  $W$  spostate a destra di  $j$ , e

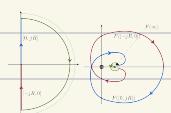
quindi posso semplicemente contare i giri che  $W$  fa attorno a  $-1$

Inoltre noto che dividendo  $\gamma_R$  in 3 parti



Così facendo la parte verde si approssima ad un punto ell'umentare di  $R$

Potrei così restringere le ricerche a  $F([-jR, jR])$



Consideriamo ora  $P$  e  $Z$

$P = \text{n}^{\circ}$  poli di  $F(s)$  in  $\gamma_R = \text{n}^{\circ}$  poli instabili di  $1 + W(s) = \text{n}^{\circ}$  poli instabili di  $W(s) = \text{poli}[C] \cup \text{poli}[G] \cup \text{poli}[H] = 0$   
~~def.~~ ~~1 poli/zeri in  $\gamma_R$  sono tutti quelli instabili + trascurabile~~ ~~zero~~  
 $Z = \text{n}^{\circ}$  zeri di  $F(s)$  in  $\gamma_R = \text{n}^{\circ}$  zeri instabili di  $1 + W(s) = \text{n}^{\circ}$  zeri instabili di  $W(s) = \text{n}^{\circ}$  poli instabili e catene chiuse

Io creiamo BIBO il sensore è BIBO

quindi  $Z = P - N$

$Z = \text{n}^{\circ}$  di poli instabili di  $W(s)$  e catene chiuse

$P = \text{n}^{\circ}$  di poli instabili di  $W(s) = 0$  (spesso)

$N = \text{n}^{\circ}$  di giri attorno a  $-1$  del diagramma di Nyquist di  $W([-jR, jR])$

### 8.1.1 Generalizzazione

$$W_{Ny} = \frac{KCC(s)G(s)}{1 + KCC(s)H(s)G(s)} \quad \text{e} \quad W(s) = H(s)K(s)C(s)G(s)$$

dobbiamo mostrare che  $1 + KW(s) = \frac{1}{K} + W(s)$  non ha zeri instabili

hp: 1.  $W(s)$  non ha poli sull'asse immaginario

2.  $W(jw) + \frac{1}{K} \neq 0 \forall w \in \mathbb{R}$

3.  $W(s)$  è propria e  $W(\infty) \neq -\frac{1}{K}$

Z = P - N

Z = n° poli instabili in ciascuna chiusura

P = n° poli instabili di  $W(s)$

N = il numero di giri attorno al punto critico  $-\frac{1}{K}$  del diagramma di Nyquist di  $W(s)$

### 8.1.2 Analisi dei Casi Critici

Vedremo che l'ipotesi  $\zeta$  (essenza di poli sull'asse immaginario) è difficile da soddisfare.

Vogliamo permettere un polo nell'origine, modificiamolo quindi  $\zeta$  per evitare l'origine.

Chiamiamo queste curve  $y_\zeta$  dove  $\zeta$  è la dimensione del raggio interno.

Per  $\zeta$  piccolo e  $R$  grande  $W(y_\zeta, s)$  tende a  $W(y_R)$ .



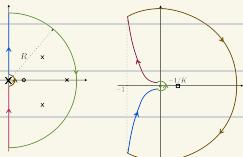
La decomposizione in fratti semplici di  $W(s)$  è  $W(s) = \frac{A}{s^v} + \sum \frac{C_{ij}}{(s-p_{ij})^j} \approx \frac{A}{s^v}$  per  $s \approx 0$

dove  $v$  è la molteplicità del polo nell'origine.

Percorrendo la circonferenza di raggio  $\zeta$ :  $s = \zeta e^{j\varphi}, \varphi \in [-\pi, \pi]$   $\Rightarrow W(\zeta e^{j\varphi}) = \frac{A}{\zeta^v} e^{-jv\varphi}$

Otteniamo quindi una circonferenza di centro l'origine, raggio  $\frac{|A|}{\zeta^v} (-\infty)$

essendo percorso un angolo di  $v\pi$  in senso orario (inversione).



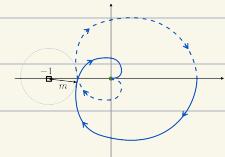
### 8.2 Margine di stabilità

Vogliamo determinare quanto un sistema stabile sia prossimo all'instabilità, così da comprendere l'entità delle perturbazioni accettabili, nel nostro studio facciamo inoltre delle approssimazioni che non devono eccedere questi limiti.

Queste proprietà sono chiamate robustezza delle stabilità del sistema.

La distanza del diagramma del punto critico  $-1$  è detto margine di stabilità ( $m$ )

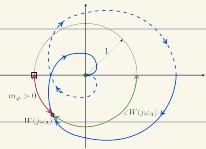
ed è una buona stima della robustezza del sistema.  $m := \min_{\omega \in \mathbb{R}} [1 + |W(j\omega)|]$



Il margine di stabilità è però difficile da manipolare attraverso  $C(s)$ , per questo motivo si introducono il margine di fase ed il margine di guadagno.

### 8.2.1 Margine di Fase

Definiamo il margine di fase come  $m_p = \pi - \angle W(jw_0)$ . Dove  $w_0 > 0$  t.c.  $|W(jw)| = 1$ .



Spesso un aumento di  $m_p$  è correlato ad un aumento di  $m_r$ ,  $m_s$  non sempre.

- Se  $m_p > 0$  il sistema è stabile —  $m_p$  grande  $\Rightarrow$  robusto
- Se  $m_p < 0$  il sistema è instabile —  $m_p$  piccolo  $\Rightarrow$  poco robusto

### 8.2.1 Margine di Guadagno

Definiamo il margine di guadagno come  $m_g = -20 \log_{10} |W(jw_0)|$ . Dove  $w_0$  t.c.  $\angle W(jw_0) = -\pi$

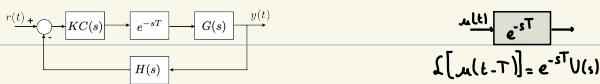


Spesso un aumento di  $m_g$  è correlato ad un aumento di  $m_r$ ,  $m_s$  non sempre.

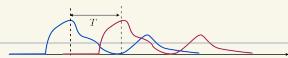
- Se  $m_g > 0$  il sistema è stabile —  $m_g$  grande  $\Rightarrow$  robusto
- Se  $m_g < 0$  il sistema è instabile —  $m_g$  piccolo  $\Rightarrow$  poco robusto

### 8.3 Analisi dei Sistemi con Ritardo

Per rendere più generale l'analisi della stabilità di un sistema, aggiungo un ritardo dell'attuatore



$$\begin{matrix} u(t) \\ \xrightarrow{e^{-sT}} \end{matrix} \quad \begin{matrix} U(s) \\ [U(t-T)] = e^{-sT} U(s) \end{matrix}$$



Il criterio di Nyquist vale anche per questi sistemi:  $Z = P - N$

- $Z$ : n° poli instabili di  $W_g(s)$
- $P$ : n° poli instabili di  $W(s) - H(s)C(s)G(s)$
- $N$ : n° di giri del diagramma di Nyquist di  $e^{-sT}W(s)$  attorno a  $-\frac{1}{K}$

Utilizziamo margini di fase per verificare la massima perturbazione che mantiene la stabilità.

1. Trovo  $w_0$  ( $|W(jw_0)| = 1$ )

$$|e^{jwT} H(jw) C(jw) G(jw)| = |e^{jwT}| |H(jw) C(jw) G(jw)| \text{ quindi, } |W(jw)| \text{ non è influenzato dal ritardo } T$$

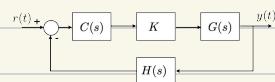
2. Calcolo  $\angle W(jw_0)$

$$\angle e^{jwT} H(jw) C(jw) G(jw) = \angle H(jw) C(jw) G(jw) - wT$$

$$3. m_p(T) = \pi + \angle e^{jwT} H(jw) C(jw) G(jw) = \pi + \angle H(jw) C(jw) G(jw) - wT = m_{po} - wT$$

$$\text{Stabilità} \Leftrightarrow m_p(T) > 0 \Leftrightarrow T < \frac{m_{po}}{w_0}$$

## 8.4 Analisi dei Sistemi con Guadagno



Valutiamo la stabilità al varire di  $K$

1. cerco  $w_B$  ( $\angle W(jw_B) = -\pi$ )

$$\angle K H(s) C(s) G(s) = \angle H(s) C(s) G(s) \quad \text{quindi } w_B \text{ non dipende da } K$$

2. calcolo  $m_s$

$$m_s(K) = -20 \log_{10} |K H(jw_B) C(jw_B) G(jw_B)| = -20 \log_{10} K |H(jw_B) C(jw_B) G(jw_B)| = -20 \log_{10} K - 20 \log_{10} |H(jw_B) C(jw_B) G(jw_B)|$$

stabilità  $\Leftrightarrow m_s(K) > 0 \Leftrightarrow 20 \log_{10} K < m_s(y)$

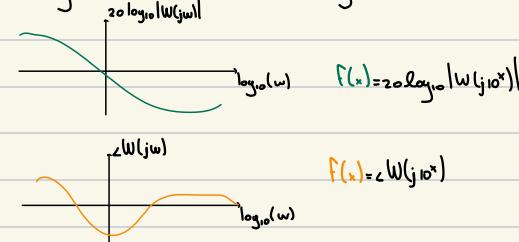
## 9. Diagramma di Bode

Il diagramma di Bode è uno strumento più flessibile per verificare la stabilità di un sistema.

Nel caso con l'esplicito obiettivo di essere semplice da tracciare rispetto a Nyquist.

Inoltre rende più semplice comprendere come una modifica su  $W(s)$  si rifletta sul diagramma.

Il diagramma consiste di due diagrammi:



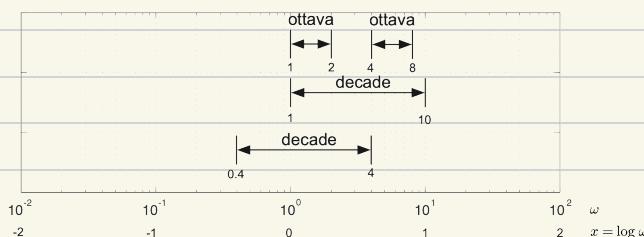
Oss - l'asse delle ascisse ( $x$ ) è logaritmico

Spostarsi a destra di 1 equivale a moltiplicare  $w$  per 10. Questo intervallo è detto decade

$$\frac{w}{\log w + 1} \xrightarrow{\cdot 10} \frac{10w}{\log 10w + 1}$$

Si può definire l'ottava la traslazione equivalente a moltiplicare  $w$  per 2.

$$\frac{w}{\log w + 1} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{2w}{\log 2w + 1}$$



**OSS** Il diagramma di Bode di  $\tilde{W}(s) := W(s)$  coincide con la traslazione di  $\log_2$  di  $W(s)$

$$\text{Dim } \tilde{F}(x) = 20 \log |\tilde{W}(j\omega x)| = 20 \log |W(j\omega x)| = 20 \log |W(j\omega x + \log x)| = f(x + \log x)$$

simile per il diagramma delle fasi.

## 9.1 Forma di Bode

Per tracciare il diagramma di Bode è conveniente esprimere la funzione di trasferimento  $W(s)$  nella forma di Bode ottenendo così  $W(s) = \frac{K_B \prod_k (1+sT_k)^{n_k} \prod_k (1+j2\zeta_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2})^{m_k}}{\prod_k (1+sT_k)^{n_k} \prod_k (1+j2\zeta_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2})^{m_k}}$

per trovare  $K_B$  inizio fattorizzando numeratore e denominatore  $W(s) = K \frac{(s-z_1)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)\dots(s-p_n)}$

$$\text{L se } z_k \in \mathbb{R} \text{ f.t.: } s - z_k = -z_k (1+sT_k) \text{ con } T_k = -\frac{1}{z_k}$$

$$\text{L se } z_k \in \mathbb{C} \text{ f.t.: } (s-z_k)(s-\bar{z}_k) = s^2 - (z_k + \bar{z}_k)s + z_k \bar{z}_k = s^2 - 2\operatorname{Re}[z_k]s + |z_k|^2 = |z_k|^2 \left(1 - 2\frac{\zeta_k}{\omega_{nk}}s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}\right) \text{ con } \omega_{nk} = |z_k|, \zeta_k = -\frac{\operatorname{Re}[z_k]}{|z_k|}$$

$K_B$  è il prodotto di  $K$  con tutti i fattori raccolti da numeratore e denominatore

$$\text{ES } W(s) = 300 \frac{s^2 + 2s + 4}{s^2 + 30s + 200s}$$

$$s^2 + 2s + 4 = 0, \quad z = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} \iff 4 \left(1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}s^2\right)$$

$$s^2 + 30s + 200s, \quad z_1 = 0, \quad z_{2,3} = \frac{-30 \pm 10}{2} = \begin{cases} -10 \\ -20 \end{cases} \quad T_2 = \frac{1}{20}, \quad T_3 = \frac{1}{20} \iff s(10(1+\frac{\zeta}{10})) \left(20(1+\frac{\zeta}{20})\right)$$

$$\text{quindi } K_B = \frac{300 \cdot 4}{10 \cdot 20} = 6$$

## 9.2 Calcolo del Diagramma

Useremo la notazione  $|z|_{dB} = 20 \log_{10} |z|$  per brevità

$$\text{PROP } |z|_{dB} = |z|_{dB} + |b|_{dB} \quad \text{e} \quad |\frac{z}{b}|_{dB} = |z|_{dB} - |b|_{dB}$$

$$|W(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{K_B}{(j\omega)^k} \right|_{dB} + \sum_k v_{nk} |1+j\omega T_k|_{dB} - \sum_k \bar{v}_{nk} |1+j\omega \bar{T}_k|_{dB} + \sum_k \mu_{nk} |1+j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2}|_{dB} - \sum_k \bar{\mu}_{nk} |1+j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2}|_{dB}$$

$$\angle W(j\omega) = \angle \frac{K_B}{(j\omega)^k} + \sum_k v_{nk} \angle (1+j\omega T_k) - \sum_k \bar{v}_{nk} \angle (1+j\omega \bar{T}_k) + \sum_k \mu_{nk} \angle (1+j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2}) - \sum_k \bar{\mu}_{nk} \angle (1+j2\zeta_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2})$$

Modulo e fase di  $W(j\omega)$  sono somme dei moduli/fasi dei fattori di  $W(s)$

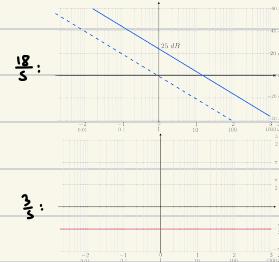
Questo rende più semplice il tracciamento del diagramma (come somma di diagrammi semplici)

Questo rende più semplice il tracciamento del diagramma (somma di diagrammi semplici)

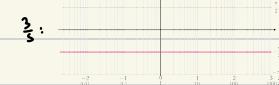
## 9.3 Funzioni elementari

### 9.3.1 Funzione elementare $\frac{K_0}{s}$

modulo:  $y = 20 \log | \frac{K_0}{s} | = 20 \log |K_0| - 20 \log |s| = 20 \log |K_0| - 20 \log \omega$



fase:  $y = \angle \left( \frac{K_0}{s} \right) = \angle K_0 - \angle s = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } K_0 > 0 \\ -\pi - \frac{\pi}{2} & \text{se } K_0 < 0 \end{cases}$



### 9.3.2 Funzione elementare $1+sT$

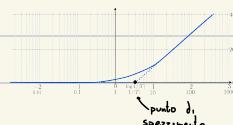
modulo:  $y = 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 10 \log (1 + T^2 \omega^2) = f_T(x)$

oss:  $f_T(x) = 10 \log (1 + 10^{2x} + \log T^2) = 10 \log (1 + 10^{2x} + \log T) = f_1(x + \log T) = f_1(x - \log \frac{1}{T})$

$\Rightarrow$  i diagrammi coincidono tutti a meno di una traslazione.

Asintoti:  $y = 0$  per  $x \rightarrow -\infty$  ( $\omega \rightarrow 0$ )

$y = 20(x - \log \frac{1}{T})$  per  $x \rightarrow +\infty$  ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

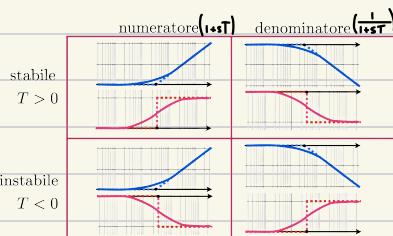
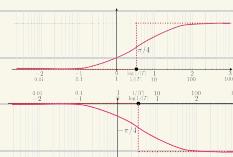


fase: con  $T > 0$ :  $\angle(1 + j\omega T) = \arctan(\omega T) = \arctan(10^x T)$

Asintoti:  $0$  se  $x \rightarrow -\infty$  ( $\omega \rightarrow 0$ )

$\frac{\pi}{2}$  se  $x \rightarrow +\infty$  ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

con  $T < 0$ :  $\angle(1 + j\omega T) = -\angle(1 + j\omega |T|)$

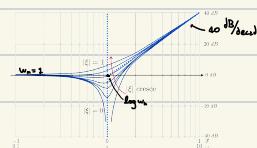


### 9.3.3 Funzione elementare $1+2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

modulo:  $f_{\xi \omega_n}(x) = 20 \log \left| 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| = 20 \log \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} \right| = 20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = -10 \log \left[ \left( \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] = -10 \log \left[ \left( 1 - \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} \right) + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]$

oss:  $f_{\xi \omega_n}(x) = f_{\xi}(x - \log \omega_n)$

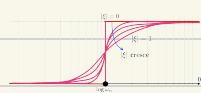
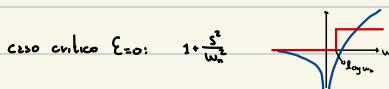
Asintoti:  $\begin{cases} 20 \log |1| = 0 & \text{se } x \rightarrow -\infty \text{ } (\omega \rightarrow 0^+) \\ 20 \log \left| \frac{\omega}{\omega_n} \right| = 40x - 40 \log \omega_n & \text{se } \omega \rightarrow +\infty \end{cases}$



fisse:  $g_{EW_n}(s) = \angle \left( 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right) = \angle \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} = \arctan \left| \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right|$

caso stabile  $\zeta > 0$ :  $g_{EW_n}(s) \approx \begin{cases} 0 & \omega \rightarrow 0^+ (\omega \rightarrow -\infty) \\ \pi & \omega = \omega_n (\omega = \log \omega_n) \\ \pi & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$

caso instabile  $\zeta < 0$ :  $g_{EW_n}(s) \approx \begin{cases} 0 & \omega \rightarrow 0^+ (\omega \rightarrow -\infty) \\ -\pi & \omega = \omega_n (\omega = \log \omega_n) \\ \pi & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$



## 9.4 Tracciamento dei Diagrammi di Bode

Dato un funzione  $W(s)$ , i diagrammi di Bode si ottengono sovrapponendo i diagrammi assintotici delle funzioni elementari che compongono  $W(s)$ .

Si sfrutta il fatto che i diagrammi assintotici sono nulli prima del punto di spezzamento.

1. Si mette  $W(s)$  in forme di Bode

2. Si determinano i punti di spezzamento  $\bar{\omega}$ :  $(\log |\frac{1}{T_0}|, \log |\frac{1}{T_0}|, \log \omega_n, \log \bar{\omega}_{n,n})$

3. Si ordinano i punti di spezzamento in ordine crescente  $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots)$

4. Sul diagramma dei moduli

si traccia per primo il diagramma di  $\frac{K_B}{s^2}$

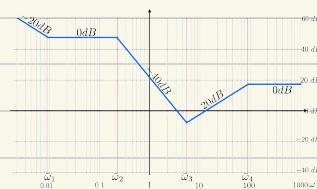
poi, partendo dal punto di spezzamento più piccolo, si varia le pendenze di:

$v_n \cdot (20 \text{ dB/decade})$  se zero reale dove  $v_n$  è la sua molteplicità

$\bar{v}_n \cdot (-20 \text{ dB/decade})$  se polo reale dove  $\bar{v}_n$  è la sua molteplicità

$\mu_n \cdot (40 \text{ dB/decade})$  se zeri complessi coniugati dove  $\mu_n$  è la molteplicità

$\bar{\mu}_n \cdot (-40 \text{ dB/decade})$  se poli complessi coniugati dove  $\bar{\mu}_n$  è la molteplicità



5. Sul diagramma delle fasi

si traccia per primo il diagramma di  $\frac{K_B}{s^2}$

poi, partendo dal punto di spezzamento più piccolo, si varia le pendenze di:

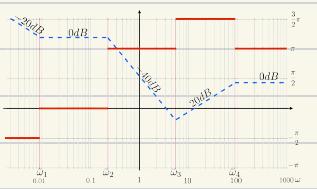
$v_n \cdot (\frac{\pi}{2})$  se zero reale stabile  $T_0$  dove  $v_n$  è la sua molteplicità

$\bar{v}_n \cdot (-\frac{\pi}{2})$  se zero reale instabile  $T_0$  dove  $\bar{v}_n$  è la sua molteplicità

$\bar{v}_n \cdot (\frac{\pi}{2})$  se polo reale stabile  $T_0$  dove  $\bar{v}_n$  è la sua molteplicità

$\bar{v}_n \cdot (-\frac{\pi}{2})$  se polo reale instabile  $T_0$  dove  $\bar{v}_n$  è la sua molteplicità

$\mu_n \cdot (\pi)$  se zeri complessi coniugati stabili  $E_0$  dove  $\mu_n$  è la molteplicità



$\mu_n(-\pi)$  se zeri complessi coniugati instabili E' co dove  $\mu_n$  è la molteplicità

$\bar{\mu}_n(-\pi)$  se poli complessi coniugati stabili E' co dove  $\bar{\mu}_n$  è la molteplicità

$\bar{\mu}_n(\pi)$  se poli complessi coniugati instabili E' co dove  $\bar{\mu}_n$  è la molteplicità

## 9.5 Margine di Guadagno e di Fase

I margini di guadagno ( $m_g$ ) e di fase ( $m_\phi$ ) sono facilmente determinabili a partire dal diagramma di Bode.

Definizione  $w_A$  t.c.  $|W(j\omega)|=1 \Leftrightarrow 20 \log |W(j\omega)| = 0$

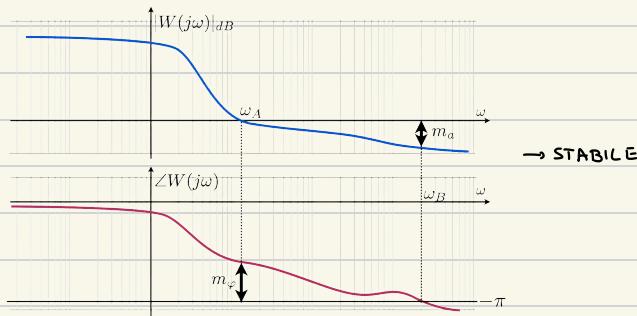
ovvero la pulsazione in cui il diagramma dei moduli incontri l'asse delle ascisse.

Definizione  $w_B$  t.c.  $\angle W(j\omega) = -\pi$

ovvero la pulsazione in cui il diagramma delle fasi incontri la retta orizzontale corrispondente a  $-\pi$ .

Da  $w_A$  si può determinare  $m_g = -\pi + \angle W(j\omega_A)$ , se  $m_g < 0$  il sistema è stabile. (se  $\angle W(j\omega_A)$  è sopra a  $-\pi$ )

Da  $w_B$  si può determinare  $m_\phi = |W(j\omega_B)|$ , se  $m_\phi < 0$  il sistema è stabile (se  $|W(j\omega_B)| < 0$ )



OSS

Se  $W(s)$  ha  $K_B > 0$  e solamente poli/zeri stabili allora esiste una relazione tra la pendenza del modulo e la fase

pendenza	fase	$m_\phi = f_{\text{fase}} + 180^\circ$
+40 dB/dec	$180^\circ$	$360^\circ$
+20 dB/dec	$90^\circ$	$270^\circ$
0	0	$-180^\circ$
-20 dB/dec	$-90^\circ$	$90^\circ$

## 10. Sintesi in Frequenza

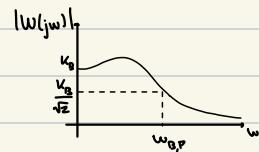
In questo capitolo viene illustrato un metodo per sintetizzare controllori a partire del diagramma di Bode. Per questo motivo è anche detta sintesi di Bode, essa permette di progettare controllori per applicazioni specifiche, le quali richiedono il controllore delle proprietà che chiameremo specifiche di progetto.

Considereremo in particolare le seguenti specifiche:

1. **Errore a regime:** In risposta a regime ai segnali costanti
2. **Prontezza del sistema:** descritta dal tempo  $T_s$  nella risposta al gradino
3. **Capacità smorzante:** descritta dalla sovrelungazione  $S$  in risposta al gradino.

Queste caratteristiche descrivono comportamenti nel dominio del tempo, ma hanno tutte una corrispondenza nel dominio delle frequenze:

1. L'errore a regime dipende principalmente da  $|W_{ry}(s)| \Big|_{s=0}$
2.  $w_{B,P}$  è la frequenza che corrisponde alle bande presenti, definita nel seguente modo:  
 $|W_{ry}(jw_{B,P})| = \frac{K_B}{\sqrt{2}}$

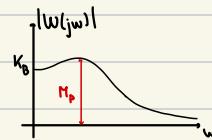


Esiste una relazione tra il tempo di salita  $T_s$  e  $w_{B,P}$ .

Ovvero  $T_s \approx \frac{\pi}{w_{B,P}}$ . È una approssimazione utile per costruire un prototipo.

In generale è vero che ( $T_s$  decresce  $\Leftrightarrow w_{B,P}$  cresce)

3.  $M_p$  è il valore di picco della risposta in frequenza. Ovvero il massimo di  $|W_{ry}(jw)|$



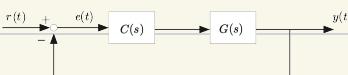
Esiste una relazione tra la sovrelungazione  $S$  e  $M_p$ .

Ovvero  $\frac{M_p}{K_B} - 1 \approx S$ . È una approssimazione utile per costruire un prototipo.

In generale è vero che ( $S$  decresce  $\Leftrightarrow M_p$  decresce)

### 10.1 Sintesi del Controllore

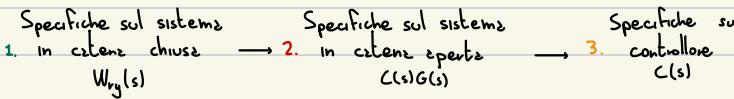
La sintesi di Bode fa riferimento allo schema di controllo in retroazione:



- $G(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema da controllore (che ingloba anche  $H(s)$  del sensore)
- $C(s)$  è la funzione di trasferimento del controllore

L'obiettivo è determinare  $C(s)$  conoscendo  $G(s)$  e le specifiche richieste.

La strategia della sintesi di Bode è tradurre le specifiche fino ad arrivare a descrivere il controllore:



1.

1.1 L'errore è regime in risposta ai segnali dinamici.

1.2 La sovrelentezza  $S$  nella risposta al gradino. (indica la capacità smorzante)

1.3 Il tempo di salita  $T_s$  nella risposta al gradino. (indica la prontezza)

2.

2.1 Tipo ( $n$  poli nell'origine) e guidogno di Bode di  $W(s) = C(s)G(s)$

Vogliamo che:  
•  $\delta^{(-1)}(t), \delta^{(-2)}(t), \dots, \delta^{(-h)}(t)$  errore è regime nullo  
•  $\delta^{(-h+1)}(t)$  errore è regime  $\epsilon > 0$

Allora  $W(s) = C(s)G(s) = \frac{k_w}{s^{h_w}} \bar{W}(s)$   
 $h_w = h$  e  $k_w = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} - 1 & \text{se } h=0 \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{se } h \geq 1 \end{cases} \approx \frac{1}{\epsilon}$

2.2 Una stima grossolana è  $m_p \approx 1 - 0.85$

2.3 Una stima grossolana è  $w_A \approx \frac{2}{T_s}$

3.

3.1 Se  $C(s) = \frac{k_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s)$  e  $G(s) = \frac{k_o}{s^{h_o}} \bar{G}(s)$  e vogliamo ottenere  $W(s) = \frac{k_w}{s^{h_w}} \bar{W}(s) = C(s)G(s)$

$$h_w = h_c + h_o \quad \text{e} \quad k_w = k_c \cdot k_o$$

$$\Rightarrow h_c = h_w - h_o \quad \text{e} \quad k_c = \frac{k_w}{k_o} = \frac{\epsilon}{k_o}$$

3.2 Le caratteristiche su  $m_p$  e  $w_A$  vengono soddisfatte usando i gradi di libertà di  $\bar{C}(s)$

Possiamo usare il metodo algebrico:

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{k_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s) \cdot \frac{k_o}{s^{h_o}} \bar{G}(s) = \bar{C}(s) \bar{W}(s)$$

Voglio imporre:  $\begin{cases} |W(jw_A)| = 1 \\ \angle W(jw_A) + \pi \geq m_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\bar{C}(jw_A)| |\bar{W}(jw_A)| = 1 \\ \angle \bar{C}(jw_A) + \angle \bar{W}(jw_A) + \pi \geq m_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\bar{C}(jw_A)| = \frac{1}{|\bar{W}(jw_A)|} \\ \angle \bar{C}(jw_A) \geq m_p - \angle \bar{W}(jw_A) - \pi \end{cases}$

Se  $\bar{C}(s)$  ha 2 gradi di libertà possiamo risolvere il sistema di equazioni

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + \epsilon T_1}{1 + \epsilon T_2} \quad \text{oppure} \quad \bar{C}(s) = 1 + \alpha s + \beta s^2$$

Ottiene il metodo grafico con i diagrammi di Bode