

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(\frac{4i^2}{n^2} \right) \frac{2}{n} &= \sum_{i=1}^n \frac{8i^2}{n^3} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{8}{n^3} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) \\
&= \frac{16n^3 + 24n^2 + n}{6n^3} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6n^2} \right) = \frac{8}{3} + 0 + 0 = \frac{8}{3}$$

Burada oluşturulan alt aralıklar bu aralıklardaki x^* noktaları nasıl seçilirse seçilsin, alt aralıkların sayısı sonsuza ve genişlikleri sıfıra yaklaşırken elde edilen sonuç bir sayıya yakınsayacaktır. Bu durumda, limit işlemi $[a, b]$ aralığında tanımlı belirli integral ifadesine götürecektir.

Tanım 3.2. (Belirli İntegral)

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun belirli integrali, limitin var olması şartıyla,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

şeklinde verilir. Eğer limit var ise $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir denir [8].

Integral simbolü, ‘toplam’ anlamına gelen ‘sum’ kelimesinin baş harfi olan S harfinin stilize edilmiş şeklidir. Burada aslında yükseklikleri $f(x)$, genişlikleri dx (sıfırdan büyük ama sonsuz küçük) olan temsili dikdörtgenlerin alanları toplanmaktadır [6].

Tanım 3.3 (Üst Darboux İntegrali ve Alt Darboux İntegrali)

f , $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \inf_{s \geq f} \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \in M[a, b] \right\} \\
\int_a^b f(x) dx &= \inf_{t \leq f} \left\{ \int_a^b t(x) dx : t \in M[a, b] \right\}
\end{aligned}$$

sayılarına sırası ile, Üst Darboux İntegrali ve Alt Darboux İntegrali denir [7].

Tanım 3.4 (Riemann Anlamında İntegrallenebilme)