Kombinatorika a grafy 2

Tomáš Turek

Přednáška 1

Párování v grafech

Definice:

Párování v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $M \subseteq E$ taková, že každý vrchol z G je obsažen v nejvýš jedné hraně v M.

Definice:

Vrcholové pokrytí v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů $T \subseteq V$ t.ž. každá hrana obsahuje aspoň jeden vrchol z T.

- $\mu(G) :=$ velikost největšího párování v grafu G
- $\tau(G) :=$ velikost nejmenšího vrcholového pokrytí v grafu G

Pozorování

- $\mu(G) \leq \tau(G)$ v libovolném grafu G

Definice:

- **volný vrchol:** vrchol nesousedící s žádnou hranou z M
- **volná střídavá cesta:** cesta spojující dva volné vrcholy na níž se střídají párovácí($\in M$) a nepárovácí($\notin M$) hrany

Lemma

Nechť M je párování v G. Potom M je největší párování v $G \Leftrightarrow$ v G neexistuje volná střídající se cesta pro M.

Důkaz:

- $\Rightarrow$ Pokud v G existuje VSC pak lze tyto hrany přehodit. Potom je to spor s tím, že je největší.

- $\Leftarrow$ Nechť M není největší potom existuje N větší párování než M. Uvažme graf s hranami $M \cup N$. Každá komponenta grafu je buď:
    1. izolovaná hrana v $M \cap N$
    2. kružnice sudé délky, kde se střídají M a N
    3. cesta na níž se střídají M a N
- Protože $|N| > |M|$ v $M \cup N$ musí být komponenta K, která má víc hran z N než z M. K je cesta liché délky, která začíná a končí hranou z N, tedy K je VSC pro M.

$\square$

Definice:

Kytka v grafu G a párování M je podgraf tvořený **stonkem** S a **květem** K, kde S je cesta sudé délky mezi dvěma vrcholy x a y, kde x je volný a $y \in K$, navíc na S se střídají párovací a nepárovací hrany. K je lichá kružnice, která neobsahuje žádný vrchol z S a střídají se na ni párovací a nepárovací hrany (u y má dvě nepárovací hrany).

- Může nastat ze $x = y$ a $S = \{x\}$.

Pozorováni

- Hrany z květu jsou nepárovací. Jinak by se nejednalo o párování.

Definice:

Kontrakce květu K nahradí K jedním vrcholem y, smaže všechny hrany indukované K a každou hranu $\{u, v\}$, kde $u \in K$ a $v \notin K$ nahradí hranou $\{y, v\}$. Označme $G.K$ graf vzniklý z G kontrakcí květu K, $M.K$ pak párování vznikle z M odstraněním všech hran K.

Lemma:

Nechť M je párování v grafu G obsahující kytku se stonkem S a květem K. Potom M je největší párování v $G \Leftrightarrow M.K$ je největší párování v $G.K$.

- Nebo-li: *M má VSC v $G \Leftrightarrow M.K$ má VSC v $G.K$.*
- Navíc z VSC v $M.K$ v $G.K$ lze v polynomiálním čase najít VSC v M a G.

Důkaz:

- $\Rightarrow$ (v alternativním znění) Nechť P je VSC v $M.K$. Potom:
    1. $y \in P \Rightarrow P$ je i VSC v M
    2. y je vnitřní vrchol v P, potom lze nahradit obloukem z K (jsou dva oblouky, protože je tam celkově lichý počet hran, tak jedna cesta musí být lichá a druhá sudá, tudíž to lze spojit)
    3. y je koncový vrchol v P, potom y musí být volný, tudíž $x = y$, poté prakticky stejný postup jako u 2.

- $\Leftarrow$ G má VSC $\Rightarrow$ $G.K$ má VSC, pokud S má délku 0, to jest y je volný vrchol. Následně to pak už není cesta ale sled. Začnu tedy z konce cesty a poprvé co se dostanu do y tak skončím.
- $M \triangle S$: Párování v G vznikne tak, že se na S prohodí párovací a nepárovací hrany.
- Pozorování: V $M \triangle S$ je květ K kytka se stonkem délky 0.
- Pozorování: $|M \triangle S| = |M|$.
- G má VSC $\Rightarrow$ $G.K$ má VSC, navíc S má délku 0.
- (G, M) má VSC $\Leftrightarrow$ $(G, M \triangle S)$ má VSC $\Rightarrow$ $(G.K, (M \triangle S).K)$ má VSC $\Leftrightarrow$ $(G.K, M.K)$ má VSC.

$\square$

Přednáška 2

Procedura `NajdiVSCneboKytku`

- Vstup: graf $G = (V, E)$ párování M
- Výstup: buď VSC P pro (G, M), nebo kytka $S \cup K$ v (G, M), nebo "M je největší párování v G".
- Používáme frontu vrcholů `F`, pro každý vrchol $x \in V$ máme hladinu $h(x) \in \mathbb{N}_0$ a rodiče $r(x) \in V$.
- Na začátku `F` $= \emptyset, h(x)$ a $r(x)$ jsou nedefinované.
- Pro každý volný vrchol x proveď:
  - Zařaď x do `F`, $h(x) = 0$.
- Dokud `F` $\neq \emptyset$: odebereme x z `F`
  1. Pokud $h(x)$ je lichá. Nechť y je vrchol spojený s x hranou M.
     1. Pokud $h(y)$ není definovaná: $h(y) = h(x) + 1$, $r(y) = x$, zařaď y do `F`.
     2. Pokud $h(y)$ je sudá: *to nemůže nastat*
     3. Pokud $h(y)$ je lichá: $Px =$ cesta $x, r(x), r(r(x)), \ldots$, Py je cesta $y, r(y), r(r(y)), \ldots$ obě cesty vedou až do volného vrcholu.
        1. Pokud $Px \cap Py = \emptyset$ tak potom $Px \cup Py \cup \{x, y\}$ je **VSC**, konec.
        2. Pokud $Px \cap Py \neq \emptyset$ našli jsme **kytku** $Px \cap Py \cap \{x, y\}$, konec.
  2. Pokud $h(x)$ je sudá. Pro každý y t.z. $\{xy\} \notin M$:
     1. Pokud $h(y)$ není definovaná: $h(y) = h(x) + 1$, $r(y) = x$, vlož y do `F`.
     2. Pokud $h(y)$ je lichá, tak nedělej nic.
     3. Pokud $h(y)$ je sudá: najdi VSC nebo kytku jako v 1.3,konec.
- Pokud dojdeme do stavu, že $F = \emptyset$, napiš "M je největší", konec.

Lemma

Pokud `NajdiVSCneboKytku` napíše "M je největší", tak M je největší.

Důkaz:

- Pokud M není největší, tak obsahuje VSC $v_0 v_1 \dots v_k \in V$, dokážeme indukci podle i, že každý z vrcholů $v_0 \dots v_k$ dostal přidělenou hladinu $h(v_i)$ splňující $h(v_i) \equiv i \mod 2$.
- Pro $i = 0$ v_0 je volný, tedy $h(v_0) = 0$. Hotovo.
- Pro $i > 0$, i liché, indukční předpoklad je $h(v_{i-1})$ je sudá: tak z algoritmu buď už v_i měla lichou $h(v_i)$ nebo ji dostala. (Kdyby sudá, tak vyhodí VSC nebo Kytku.)
- Pro $i > 0$ i je sudé, indukční předpoklad, že $h(v_{i-1})$ je lichá: tak obdobně bude $h(v_i)$ sudé. Jistě k je liché, tedy $h(v_k)$ je lichá, ale v_k je volný vrchol, tedy $h(v_k) = 0$ a to je spor.

$\square$

Procedura `ZvětšiPárování`

- vstup: G, M
- výstup: párování M' v G, $|M'| > |M|$ nebo "M je největší"

1. Procedura `NajdiVSCneboKytku(G,M)`
2. M je největší, tak konec
3. VSC, invertuji a zvětši M, konec
4. Kytka, `ZvětšiPárování(G.K,M.K)`
    1. $M.K$ je největší, potom i M je největší
    2. M' je větší párování v $G.K$ než $M.K$: $M^* := M' \cup (\frac{|k|-1}{2}$ hran květu $)$ tak aby to šlo.

Algoritmus pro hledání největšího párování

- vstup: G
- výstup: největší párování v G

1. $M :=$ libovolné párování (buď prázdné, nebo hladově nějaké)
2. Opakuj `ZvětšiPárování(G,M)` dokud to jde.
3. Vypiš nalezéné párování.

Definice:

Perfektní párování v grafu G je párování v němž každý vrchol sousedí s právě jednou párovací hranou.

Pozorování

- Perfektní párování je největší párování.

Pozorování

- Ne každý graf má perfektní párování (trojúhelník).

Definice:

- **Lichá komponenta** grafu G je komponenta s lichým počtem vrcholů.
- **odd**(G) := počet lichých komponent v G
- Pro graf $G = (V, E)$ a množinu $S \subseteq V : G - S = (V \setminus S, E \cap \binom{V \setminus S}{2})$.

Věta Tutte

Pro každý $G = (V, E)$ platí G má perfektní párování $\Leftrightarrow \forall S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$.

- Druhá část se nazývá *Tutteova podmínka.*

Důkaz:

- $\Rightarrow$ Nechť G má perfektní párování M. Pro spor, nechť $\exists S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) > |S|$. Potom ale z každé liché komponenty $G - S$ vede aspoň jedna hrana z M do S, tudíž $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$ a to je spor.
- $\Leftarrow$ Nechť G splňuje Tutteovu podmínku.
- Pozorování: $\mathrm{odd}(G) = 0$, jinak spor $S = \emptyset$.
- Chci dokázat, že G má perfektní párování a to pomocí indukce podle $|\binom{V}{2} \setminus E|$.
  - Pro $|\binom{V}{2} \setminus E| = 0$: G je úplný graf, navíc $\mathrm{odd}(G) = 0$. Tudíž zjevně má perfektní párování.
  - Pro $|\binom{V}{2} \setminus E| > 0 : S := \{x \in V : \deg(x) = |V| - 1\}$.
  - Rozliším dva případy:
  1. Každá komponenta $G - S$ je úplný graf: G snadno najdu perfektní párování, díky tomu, že $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$.
  2. Existuje komponenta Q grafu $G - S$, která není úplná. V Q lze najít dva nesousední vrcholy x, y, které mají společného souseda z Q. Protože $z \notin S, \exists w : w$ nesousedí se z. Označme $G_1 = (V, E \cup \{xy\}), G_2 = (V, E \cup \{zw\})$.
  - Pozorování G_1, G_2 splňují Tutteovu podmínku.
  - Pak z indukčního předpokladu G_1 má perfektní párování M_1 a G_2 má M_2. Pokud M_1 neobsahuje hranu $\{xy\}$, tak M_1 je perfektní párování v G. Tak je to hotové.
  - Pokud ale $\{xy\} \in M_1$ tak podobně předpokládám, že $\{zw\} \in M_2$. Uvažme graf $H = (V, M_1 \cup M_2)$: každá komponenta H je buď hrana patřící $M_1 \cap M_2$, nebo sudá kružnice na níž se střídají hrany z M_1 a M_2.
  - V každé komponentě H neobsahující hranu $\{xy\}$ můžu vrcholy spárovat pomocí hran M_1. Nechť C je komponenta H obsahující $\{xy\}$. Pokud C neobsahuje $\{zw\}$, vrcholy spáruji pomocí M_2, hotovo.
  - Ve zbylém případu v C použijeme jednu z hran $\{xy\}, \{zw\}$ a zbytek lze spárovat pomocí $M_1 \setminus \{xy\}$ a $M_2 \setminus \{zw\}$.

- Tedy G má perfektní párování.

$\square$

Přednáška 3

Definice:

- Graf je **d-regulární**, pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň d.
- Graf je (vrcholově) **k-souvislý**, pokud má aspoň $k+1$ vrcholů a nemá vrcholový řez velikosti $< k$.

Lemma

Nechť $G = (V, E)$ je graf, jehož každý vrchol má lichý stupeň, nechť $A \subseteq V$ je množina liché velikosti. Potom G obsahuje lichý počet hran z A do $V \setminus A$.

Důkaz:

- $S = 2k + \text{ ven}$ je součet stupňů v A. Ten musí být lichý.
- $2k$ je pro každou hranu, která má oba vrcholy v A.
- Tudíž `ven` musí být liché.

$\square$

Věta (Petersen)

Každý 3-regulární a 2-souvislý graf má perfektní párování.

Důkaz:

- Nechť $G = (V, E)$ je 3-regulární a 2-souvislý graf. Tvrdíme: $\forall S \subseteq V : \text{ odd}(G - S) \leq |S|$.
- Pro $S = \emptyset$ Tutteova podmínka platí: $|V|$ je sudá (z principu sudosti grafů) a taky souvislý $\Rightarrow \text{ odd}(G) = 0$.
- $S \neq \emptyset, l := \text{ odd}(G - S)$ nechť $Q_1, \dots, Q_l$ jsou liché komponenty $G - S$. Nechť p je počet hran mezi S a $Q_1 \cap \dots \cap Q_l$.
- Pozorování: $p \leq 3|S|$ - plyne z toho, že je 3-regulární.
- Pozorování: z každé Q_i vedou aspoň 2 hrany do S to plyne z toho, že je G 2-souvislý, jinak by existovala artikulace.
- Pozorování: z každé Q_i vedou aspoň 3 hrany do S. To plyne z lemma.
- $\Rightarrow p \geq 3l \Rightarrow l \leq |S|$. A ještš použít Tutteovu větu.

$\square$

Kontrakce a minory

Definice:

Nechť $G = (V, E)$ je graf, $e = \{x, y\} \in E$ pak **kontrakce** hrany e je operace, která vrcholy x, y nahradí jedním vrcholem v_e a pro každý vrchol $z \in V \setminus \{x, y\}$ sousedící s x nebo y se hrany $\{xz\}, \{yz\}$ nahradí $\{v_e z\}$. Výsledek se značí $G.e$.

Lemma (*"o kontrahovatelné hraně"*)

V každém 3-souvislém grafu $G = (V, E)$, který není izomorfní K_4 existuje hrana $e \in E$ taková, že $G.e$ je opět 3-souvislý graf.

Důkaz:

- Pro spor nechť $G = (V, E)$ je protipříklad.

Pomocné tvrzení

- Pro každou hranu $e = \{xy\} \in E$ existuje vrchol $z \in V \setminus \{x, y\}$ takový, že $G - \{x, y, z\}$ je nesouvislý, navíc každý z vrcholů $\{x, y, z\}$ má aspoň jednoho souseda v každé komponentě $G - \{x, y, z\}$.

Důkaz tvrzení:

- Víme, že $G.e$ není 3-souvislý, navíc $|V(G.e)| \geq 4$ jinak je to K_4, tedy existuje v $G.e$ vrcholový řez R velikosti nejvýše 2.
- Jistě $v_e \in R$ jinak by R byl řez v G> $R \neq \{v_e\}$ jinak by $\{x, y\}$ byl řez v G.
- Tedy $R = \{v_e, z\}$ a $\{x, y, z\}$ je řez v G. Kdyby např. x neměl žádného souseda v nějaké komponentě C grafu $G - \{x, y, z\}$, tak $G - \{y, z\}$ je nesouvislý, spor s tím, že G má být 3-souvislý.

$\square$

- Volme $e = \{x, y\} \in E$ a vrchol $z \in V$, komponentu C grafu $G - \{x, y, z\}$ tak, aby C mělo co nejméně vrcholů. Nechť w je vrchol C sousedící se z.
- Pro hranu $f = \{z, w\}$ použiji pomocné tvrzení: $\exists v \in V \setminus \{z, w\} : G - \{z, w, v\}$ je nesouvislý a každá jeho komponenta obsahuje vrchol sousedící s w.
- Nechť D je komponenta $G - \{z, v, w\}$ neobsahující x ani y. Tedy $D \subseteq C \setminus \{w\} : D$ obsahuje souseda w, ten musí být uvnitř C, žádná cesta uvnitř D neobsahuje x, y, z, w tedy D je uvnitř jediné komponenty $G - \{x, y, z\}$, tedy D je uvnitř C, tedy i uvnitř $C \setminus \{w\}$.
- To je spor s minimalitou C.

$\square$

Věta (Tutteova charakterizace 3-souvislých grafů)

Graf $G = (V, E)$ je 3-souvislý $\Leftrightarrow \exists$ posloupnost grafů $G_0, G_1, \dots, G_k$, kde:

1. $G_0 \cong K_4, G_k \cong G$.
2. $\forall i = 1, \dots, k : G_i$ obsahuje hranu $e = \{x, y\}$ spojující dva vrcholy x, y stupně ≥ 3, $\deg(x) = \deg(y) = 3$ a $G_{i-1} \cong G_i.e$.

Přednáška 4

Důkaz:

- $\Rightarrow$ Opakovaná aplikace lemma o kontrahovatelné hraně.
- $\Leftarrow$ Nechť $G_0, \dots, G_k$ splňuje podmínky na pravé straně. Dokážeme, že všechny grafy $G_0, \dots, G_k$ jsou 3-souvislé. Indukcí pdole i dokážeme, že G_i je 3-souvislý.
  - $i = 0 : K_4$ je 3-souvislý.
  - $i > 0$ předpokládáme, že G_{i-1} je 3-souvislý, pro spor nechť G_i není 3-souvislý, $\exists u, v \in V(G_i) : G_i - \{u, v\}$ je nesouvislý, navíc $\exists e = \{x, y\} \in E(G_i) = G_i.e = G_{i-1}$.
  - Případy:
  1. $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$ G_{i-1} pak není 3-souvislý. Spor.
  2. $\{u, v\} = \{x, y\}$ pak G_{i-1} je 1-souvislý. Spor.
  3. $|\{u, v\} \cap \{x, y\}| = 1$ BŮNO: $x = u$: nelze, protože $\deg(y) \geq 3$, tedy komponenta $G_i - \{u, v\}$ obsahující y má aspoň 2 vrcholy, tedy $G_i.e = G_{i-1}$ má řez $\{v, v_e\}$. Spor.

□

Definice:

Graf H je **minor** rafu G pokud H lze vyrobit z G posloupností mazání hrany, kontrakce hrany, mazání vrcholu. Značení: $H \leq_m G$.

Definice:

Graf F je **dělení** grafu H, pokud F vznikne z H tak, že se každá hrana $\{x, y\} \in E(H)$ nahradí cestou délky ≥ 1.

Definice:

Graf H je **topologický minor** grafu G, pokud G obsahuje nějaké dělení grafu H jako podgraf. Značení $H \leq_t G$.

Definice:

Graf H je **indukovaný podgraf** grafu G, pokud je H podgraf grafu G a zároveň má všechny hrany původního grafu indukované vrcholům grafu H. Značení $H \leq_i G$.

- H je **podgraf** grafu G. Značení $H \subseteq G$.

Pozorování

- Platí implikace $H \leq_i G \Rightarrow H \subseteq G \Rightarrow H \leq_t G \Rightarrow H \leq_m G$. Ale neplatí žádná opačná implikace.

Lemma

$H = (V_H, E_H)$ je graf, $V_H = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, G = (V_G, E_G)$ je graf. Potom $H \leq_m G$ iff G obsahuje k disjunktních souvislých neprázdných podgrafů $B_1, B_2, \dots, B_k$ takových, že pokud $\{x_i, x_j\} \in E_H$, tak G obsahuje aspoň jednu hranu spojující vrchol B_I s vrcholem B_j.

Důkaz:

- *Danou vlastnost si označíme jako vlastnost p.*
- $\Leftarrow$ Zkontrahuji všechny hrany v B_i. Nadbytečné hrany a vrcholy odstraním.
- $\Rightarrow$ Nechť $H \leq_M G$, tj. existuje posloupnost grafů $G_0, G_1, \dots, G_p$, kde $H \cong G_0, G_p \cong G$ a pro $\forall i = 1, \dots, p : G_{i-1}$ vznikne z G_i smazáním hrany nebo vrcholu anebo kontrakcí hrany.
- Dokážeme indukcí podle $i = 0, \dots, p$, že G_i má vlastnost p.
  - $i = 0 : \forall j = 1, \dots, k : \{x_j\} = B_j$
  - $i > 0$ předpokládejme G_{i-1} splňuje vlastnost p.
  - Pak přidáním vrcholu nebo hrany - nic neděláme, zůstávají stejné.
  - Dekontrakce hrany. Pokud není v B_j tak hotovo (zůstane stejné). Pokud ale je v B_j tak oba nové vrcholy přidáme do B_j a ostatní stejné.

$\square$

Přednáška 5

Značení:

Pro uspořádání $\leq$ a množinu grafů $F = \{F_1, F_2, \dots\}$ označím $\mathcal{F}\text{orb}_{\leq}(F) := \{G \text{ graf}; \forall H \in F : H \nleq G\}$.

- Plyne ze slova Forbidden, nebo-li zakázané.

Definice:

Třída grafů $\mathcal{G}$ je **uzavřená** vůči uspořádání $\leq$ pokud $\forall G \in \mathcal{G}\ \forall H \leq G : H \in \mathcal{G}$.

Pozorování

Třída $\mathcal{G}$ se dá přepsat jako $\mathcal{F}\text{orb}_{\leq}(F)$ pro nějakou množinu F iff $\mathcal{G}$ je uzavřená vůči $\leq$.

Fakt

- Rovinné grafy jsou uzavřené vůči $\subseteq, \leq_i, \leq_t, \leq_m$.

Připomenutí:

- $G = (V, E)$ rovinný, souvislý, má nakreslení mající f stěn, potom $|V| - |E| + f = 2$.
- Pokud $|V| \geq 3$ tak $|E| \leq 3|V| - 6$.
- Pokud $|V| \geq 4$ a G neobsahuje trojůhelník jako podgraf, tak $|E| \leq 2|V| - 4$.

Věta (Kuratowski, Wagner)

Pro graf $G = (V, E)$ je ekvivalentní:

1. G je rovinný,
2. $G \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_t}(K_5, K_{3,3})$,
3. $G \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$.

Důkaz:

- $1 \Rightarrow 2$: G je rovinný $\Rightarrow$ každý topologický minor je rovinný $\Rightarrow K_5 \not\leq_t G \wedge K_{3,3} \not\leq_t G \Rightarrow G \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_t}(K_5, K_{3,3})$.
- $1 \Rightarrow 3$: Obdobně jako předchozí.
- $3 \Rightarrow 2$: $H \leq_t J \Rightarrow H \leq_m J$ a taky $H \not\leq_m J \Rightarrow H \not\leq_t J$.
  - $J \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_m}(H) \Rightarrow J \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_t}(H)$ nebo-li $\mathcal{F}\text{orb}_{\leq_m}(H) \subseteq \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_t}(H)$.
- $2 \Rightarrow 3$: Připomenutí: Pro graf H s maximálním stupněm ≤ 3. $H \leq_t G \Leftrightarrow H \leq_m G$. A taky $K_5 \leq_m H \Rightarrow ((K_5 \leq_t H) \vee (K_{3,3} \leq_t H))$.
  - Pak dokážeme obměnu $(\neg 3 \Rightarrow \neg 2)$ $K_5 \leq_m G \vee K_{3,3} \leq_m G \Rightarrow K_5 \leq_t G \vee K_{3,3} \leq_m G \Rightarrow G \notin \mathcal{F}\text{orb}(K_5, K_{3,3}$.
- $3 \Rightarrow 1$ Indukcí podle $|V|$.
  - $|V| \leq 4$: Jistě G ke rovinný.
  - Předpoklad, že $|V| \geq 5$ a $G \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$. Nechť k je vrcholová souvislost.
  - Rozlišíme případy:
  1. $k = 0$: každá komponenta je dle indukčního předpokladu rovinná $\Rightarrow G$ je rovinný.
  2. $k = 1$: Lze rozdělit graf G na dva grafy G_1, G_2 podle dané artikulace x. S tím, že oba grafy mají i daný vrchol x. Podle IP jsou oba grafy rovinné, navíc jdou nakreslit tak, že x bude vždy na vnější stěně (pomocí projekce na sféru), potom je můžeme "slepit" dohromady a máme stále rovinný graf.

3. $k = 2$ Obdobně rozdělím graf na G_1, G_2 a z nich vytvořím $G_1^+ := G_1 \cup \{xy\}$ a $G_2^+ := G_2 \cup \{xy\}$. Následně tvrdím: $G_1^+, G_2^+ \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$. G_1 i G_2 obsahuje cestu P_1 a P_2 z x do y (jinak by x nebo y obsahovalo řez).

- $G_1^+ \leq_m G$ (dokonce $G_1^+ \leq_m G1 \cup P_2 \subseteq G$).
- $G_1^+ \in \mathcal{F}\text{orb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$ kdyby např. $K_5 \leq_m G_1^+ \leq_m G$, tak $K_5 \leq_m G$ a to je spor. Dle IP G_1^+ i G_2^+ jsou rovinné, oba se dají nakreslit tak, že hrana $\{xy\}$ je na vnější stěně. Následně pak slepím G_1^+ a G_2^+ a popřípadě smažu hranu $\{xy\}$ a získám rovinný graf.

4. $k \geq 3 : G$ je 3-souvislý: Fakt: v rovinném nakreslení 2-souvislého grafu je každá stěna ohraničená kružnicí. A taky lemma o kontrahovatenlné hraně: $\exists e = \{xy\} \in E$ taková, že $G.e$ je 3-souvislý, tedy $G.e - v_e$ je 2-souvislý.

- Pozorování: $G.e - v_e = G - \{x, y\}$. Dle IP $G.e$ je rovinný. Zvolme rovinné nakreslení $G.e$. V $G.e - v_e$ je stěna, z níž byl smazán v_e ohraničená kružnicí C. Do stěny ohraničné C nakreslíme vrchol x. Každý soused v_e v grafu $G.e$ leží na C, tedy každý soused x v grafu G různý od y leží na C. Označme $N_C(x)$: sousedé x na C a podobně $N_C(y)$.
- Teď rozdělme případy.
  1. $|N_C(x) \cap N_C(y)| \geq 3$: to nelze, $C \cup \{x, y\}$ indukují dělení K_5.
  2. $\exists a_1, a_2 \in N_C(x), b_1, b_2 \in N_C(y) : |\{a_1, a_2, b_1, b_2\}| = 4$ leží na C v pořadí a_1, b_1, a_2, b_2: to taky nelze, pak je tam $K_{3,3}$.
  3. Nenastane ani jedna z předchozích možností. Vrcholy $N_c(x)$ rozdělí C na cesty $P_1, P_2, \ldots, P_k, \exists j : N_C(y) \subseteq P_j$.

$\square$

Kreslení grafů na plochy

Definice:

- Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Zobrazení $f : X \to Y$ je **homeomorfismus** pokud f je pojitá bijekce X na Y a f^{-1} je spojitá bijekce Y na X.
- X, Y jsou **homeomorfní**, pokud existuje homeomorfismus X na Y. Značím $X \cong Y$.

Fakt

Homeomorfismus zachovává kompaktnost, uzavřenost a otevřenost. Ne však omezenst.

Definice:

Plocha je souvislá kompaktní 2-rozměrná varieta bez hranic.

- Příklady: sféra, torus.

- Nepříklady: $\mathbb{R}^2$, otevřený kruh, dvě separátní sféry.

Definice operací s plochami:

1. Přidání ucha:
   - “Odebrání dvou kruhů a přidáním válce mezi ně.”
   - Na diagramu se kreslí, že mají orientaci opačným směrem.
2. Přidání křižítka:
   - “Odebrání jednoho kruhu a přidání křižítka, tj. že se jeden bod propojí s přesně opačným bodem na druhé straně, ale nikdy se nepřekříží.”

Přednáška 6

Definice:

- **Orientovatelná plocha** rodu g, značená $\Sigma_g (g \geq 0)$, je plocha vzniklá ze sféry přidáním g uší.
- **Neorientovatelná plocha** rodu g, značená $\Pi_g (g \geq 1)$, je plocha vzniklá ze sféry přídáním g křižítek.

Fakt

Plocha vzniklá ze sféry přidáním $k \geq 1$ křižítek a $l \geq 0$ uší je Π_{k+2l}.

Fakt

Každá plocha je homeomorfní právě jedné ploše z posloupnosti $\Sigma_0, \Pi_1, \Sigma_1, \Pi_2, \ldots$.

Defince:

- Σ_0 je **sféra**.
- Σ_1 je **torus**.
- Σ_2 je **dvojitý torus**.
- Π_1 je **projektivní rovina**.
- Π_2 je **kleinova láhev**.

Definice:

Nakreslení grafu $G = (V, E)$ na plochu Γ je zobrazení $\mathcal{G}$, které:

1. vrcholům $x \in V$ přiřadí bod $\bar{x} \in \Gamma$,
2. hraně $e = \{xy\} \in E$ přiřadí křivku $\bar{e} \subseteq \Gamma$ spojující $\bar{x}$ a $\bar{y}$. (“Křivka” je homeomorfní kopie intervalu $[0, 1]$.)

Navíc platí:

1. $x, y \in V, x \neq y \Rightarrow \bar{x} \neq \bar{y}$,

2. pro $x \in V, e \in E : \bar{x} \in \bar{e} \Rightarrow x \in e$,
3. pro $e, f \in E, e \neq f : \bar{e} \cap \bar{f} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{e} \cap \bar{f} = \{\bar{x}\}$, kde $e \cap f = \{x\}$.

Definice:

Stěna je souvislá komponenta $\Gamma \setminus (\bigcup_{x \in V} \bar{x} \cup \bigcup_{e \in E} \bar{e})$.

Definice:

Nakreslení je **buňkové** (*2-cell*), pokud každá jeho stěna je homeomorfní otevřenému kruhu.

Fakt

Nakreslení $\mathcal{G}$ na Σ_0 je buňkové iff nakreslený graf je souvislý.

Definice:

Eulerova chrakteristika plochy Γ značená $\chi(\Gamma)$, je:

$$\chi(\Gamma) = \begin{cases} 2 - 2g & \text{pro } \Gamma \cong \Sigma_g \\ 2 - g & \text{pro } \Gamma \cong \Pi_g \end{cases}$$

Věta (*Zobecněná Eulerova formule*)

Nechť $\mathcal{G}$ je buňkové nakreslení grafu $G = (V, E)$ na ploše Γ a označme $h(\mathcal{G}) = |V|, e(\mathcal{G}) = |E|, f(\mathcal{G}) = \#$ stěn $\mathcal{G}$. Potom $h(\mathcal{G}) - e(\mathcal{G}) + f(\mathcal{G}) = \chi(\Gamma)$.

Důkaz:

- Předpokládáme, že $\Gamma \cong \Sigma_g$ (případně $\Gamma \cong \Pi_g$ je podobný). Indukcí podle g.
- $g = 0$: Eulerova formule pro rovinné grafy. Hotovo.
- $g > 0$: Zafixujeme si ucho reprezentované kružnicemi u, u'. Nechť $e_1, e_2, \ldots, e_k$ jsou hrany křížící u, u' v pořadí daným orientací u, u' ($e_1, e_2, \ldots, e_k$ nejsou nutně různé).
- Jistě $k \geq 1$, jinak by nakreslení nebylo buňkové. Označme $\mathrm{LS}(\mathcal{G}) = n(\mathcal{G}) - e(\mathcal{G}) + f(\mathcal{G})$. Nechť $\mathcal{G}_1$ vznikne z $\mathcal{G}$ tak, že se na každou e_i přidají dělící vrcholy x_i a y_i, těsně k u a u'. $\mathrm{LS}(\mathcal{G}_1) = \mathrm{LS}(\mathcal{G})$.
- Nechť $\mathcal{G}_2$ vznikne z $\mathcal{G}_1$ tak, že pro $\forall i = 1, \ldots, k$ přidám cestu délky 3 z x_i do x_{i+1} a z y_i do y_{i+1} a x_k do x_i a y_k do y_i, cesty jsou těsně u u a u'.
- $\mathrm{LS}(\mathcal{G}_2) = \mathrm{LS}(\mathcal{G}_1)$
- $\mathcal{G}_3$ nakreslení na Σ_{g-1} vzniklé z $\mathcal{G}_2$ odstraněním u, u' a všech hran, které ho kříží.
- $n(\mathcal{G}_2) = n(\mathcal{G}_3), e(\mathcal{G}_2) - k = e(\mathcal{G}_3), f(\mathcal{G}_2) = f(\mathcal{G}_3) - 2 + k$
- $\mathrm{LS}(\mathcal{G}_2) = \mathrm{LS}(\mathcal{G}_3) - 2 =^{IP} \chi(\Sigma_{g-1}) - 2 = \chi(\Sigma_g)$

$\square$

Fakt

Pro nebuňkové nakreslení $\mathcal{G}$ platí: $h(\mathcal{G}) - e(\mathcal{G}) + f(\mathcal{G}) > \chi(\Gamma)$.

Důsledek:

Nechť $G + (V, E)$ je graf, který má nakreslení $\mathcal{G}$ na Γ, nechť $|V| \geq 3$. Potom:

1. $|E| \leq 3|V| - 3\chi(\Gamma)$,
2. (průměrný stupeň $G = \frac{2|E|}{|V|}$)$\leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|}$.

Důkaz:

1. BŮNO $\mathcal{G}$ je buňkové, každá stěna je incidentní s aspoň 3mi hranami, každá hrana je incidentní s nejvýš dvěma stěnami. Tedy $3f(\mathcal{G}) \leq$ počet incidencí "hrana-stěna": $\leq 2e(\mathcal{G}) \Rightarrow f(\mathcal{G}) \leq \frac{2}{3}e(\mathcal{G})$. Tedy: $\chi(\Gamma) \leq |V| - \frac{1}{3}|E|$.

$\square$

Pro plochu Γ označme:

$$H_\Gamma := \left\lfloor \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$$

Věta

Nechť Γ je plocha, $\Gamma \ncong \Sigma_0$. Potom každý graf, který má nakreslení na Γ obsahuje vrchol stupně $\leq H_\Gamma$.

Důkaz:

- $\Gamma \cong \Pi_1$: průměrný stupeň nakreslení $\mathcal{G}$ na Γ je $\leq 6 - \frac{6}{n(\mathcal{G})} < 6 \Rightarrow \exists$ vrchol stupně $\leq 5 = H_{\Pi_1}$.
- $\Gamma \cong \Pi_2$ nebo $\Gamma \cong \Sigma_1$: průměrný stupeň ≤ 6. Hotovo.
- $\chi(\Gamma) < 0$: Mějme nakreslení $\mathcal{G}$ na Γ, uvažme pro minimální stupeň δ nakreslení $\mathcal{G}$ dva odhady.

1. $\delta \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n(\mathcal{G})}$
2. $\delta \leq n(\mathcal{G}) - 1$

- tedy $\delta \leq \min\{6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n(\mathcal{G})}, n(\mathcal{G}) - 1\}$.
- Budeme zkoumat $\max_{n\in\mathbb{N}}(\min\{6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n(\mathcal{G})}, n(\mathcal{G}) - 1\} \leq \lfloor \delta_0 \rfloor)$.
- Hledáme $n_0 : 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n_0} = n_0 - 1 \Leftrightarrow 6n_0 - 6\chi(\Gamma) = n_0^2 - n_0 \Leftrightarrow n_0^2 - 7n_0 + 6\chi(\Gamma) = 0$.
- $n_0 = \frac{7+\sqrt{49-24\chi(\Gamma)}}{2}$
- $\delta_0 = n_0 - 1 = \frac{5+\sqrt{49-24\chi(\Gamma)}}{2}$

$\square$

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je **d-degenerovaný**, pokud každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně $\leq d$.

Důsledek:

Každý graf nakreslitelný na plochu $\Gamma \ncong \Sigma_0$ je H_Γ-degenerovaný.

Pozorování

Každý d-degenerovaný graf má barevnost $\leq d + 1$.

Důsledek: (*Heawood*)

Každý graf nakreslitelný na $\Gamma \ncong \Sigma_0$ má barevnost $\leq H_\Gamma + 1$.

Fakt (*Ringel-Youngs*)

Na každou plochu $\Gamma \ncong \Pi_2$ se dá nakreslit $K_{H_\Gamma+1}$.

Přednáška 7

Barvení grafů

Značení:

- $\Delta(G)$ - největší stupeň v G
- $\delta(G)$ - nejmenší stupeň v G
- $\chi(G)$ - barevnost G
- $d(G)$ - degenerovanost G
  - nebo-li nejmenší $d \in \mathbb{N}_0$ takové, že G je d-degenerovaný.
  - G je d-degenerovaný: každý jeho neprázdný podgraf má vrchol stupně $\leq d$.

Pozorování

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$$

Pozorování

$$\chi(G) \leq d(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1$$

Lemma

Nechť G je souvislý graf, který má aspoň jeden vrchol stupně menšího než $\Delta(G)$. Potom $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Důkaz:

- Nechť $x \in V(G)$ je vrchol stupně $< \Delta(G)$. Tvrdím: $\delta(G) \leq \Delta(G) - 1$. Zvolme libovolný podgraf H. Dva případy:

1. $x \in H$ tak hotovo, protože $\deg_H(x) \leq \deg_G(x) \leq \Delta(G) - 1$.
2. $x \notin H$ Protože G je souvislý, tak existuje $y \in V(H)$, který má v G souseda, který nepatří do H $\deg_H(y) \leq \deg_G(y) - 1 \leq \Delta(G) - 1 \Rightarrow \chi(G) \leq d(G) + 1\ leq\Delta(G)$.

□

Věta (*Brooks*)

Pro každý souvislý graf G, který není ani úplný graf ani lichá kružnice, platí $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Důkaz:

- Nechť k je vrcholová souvislost G. Potom zavedeme $\Delta := \Delta(G)$.

1. Pokud $k = 1$, tak existuje artikulace x. Graf G rozdělíme na G_1 a G_2 podle dané artikulace s tím, že x je v oubou grafech.

- Z toho pak plyne, že $\deg_{G_1}(x) < \Delta$ a $\deg_{G_2}(x) < \Delta$.
- Pak po použití lemma máme $\chi(G_1) \leq \Delta \wedge \chi(G_2) \leq \Delta$: obarvím G_1 obarvením f_1 pomocí Δ barev, stejně i pro G_2 s f_2. BŮNO: $f_1(x) = f_2(x)$, jinak udělám permutaci barev. Pak mám obarvení celého G.

2. Pro $k = 2$ udělám to stejné, akorát rozdělím grafy podle x, y, které jsou právě vrcholovým řezem grafu G. BŮNO: $\deg_{G_1}(x) \geq \deg_{G_2}(x)$.

- *Poznámka:* podgrafy G s $\Delta(G) \leq 2$ věta platí, předp. $\Delta(G) = \Delta \geq 3$.
- Nyní mám možnosti:
  1. $\{xy\}$ patří do $E(G)$ (i $E(G_1) \wedge E(G_2)$) pomocí lemma obarvíme G_1 i G_2 pomocí Δ barev, x má jinou barvu než y a dostanu i obarvení G.
  2. $\deg_{G_1}(x) \leq \Delta - 2$ nebo $\deg_{G_1}(y) \leq \Delta - 2$, přidám $\{xy\}$ a pořád platí obarvení pomocí lemma.
  3. $\deg_{G_1}(x) = \deg_{G_1}(y) = \Delta - 1 \Rightarrow \deg_{G_2}(x) = \deg_{G_2}(y) = 1$, tak místo xy použiji $\{vy\}$, kde v je soused x z G_2. dále viz 2).

3. $k \geq 3 : G$ souvislý, není úplný $\Rightarrow G$ obsahuje 2 nesousedící vrcholy x a y, které mají společného souseda z.

- $G - x - y$ je souvislý, tedy jeho vrcholy lze uspořádat do posloupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$ tak, že $v_{n-2} = z$ a každý $v_i \in \{v_1, \ldots, v_{n-3}\}$ má aspoň jednoho souseda mezi $v_{i+1}, \ldots, v_{n-2}$.
- Vrcholy tedy uspořádám $x, y, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$ a obarvím G hladově zleva doprava pomocí Δ barev.

□

Definice:

Hranové obarvení grafu $G = (V, E)$ je funkce $f : E \to \mathbb{Z}$ taková, že pro 2 různé hrany $e, e' \in E$ sdílející vrchol platí $f(e) \neq f(e')$. **Hranová barevnost** grafu G značená $\chi_e(G)$ je nejmenší k takové, že G má hranové obarvení používající k barev.

Definice:

Line graph značen jako $L(G)$ vznikne z grafu G.

$$L(G) = (E, \{ef\} \in \binom{E}{2}; e \cap f \neq \emptyset)$$

Pozorování

$$\chi_e(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1$$

Věta (*Vizing*)

$$\forall G : \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Důkaz:

- Mějme $G = (V, E), \Delta = \Delta(G)$. Nechť $H = (V, E_H)$ je co největší podgraf G, který lze hranově obarvit pomocí $\Delta + 1$ barev, nechť f_H je takové hranové obarvení.
- Pokud $H = G$ jsme hotovi. Pro spor nechť existuje $e_0 = \{xy_0\} \in E \setminus E_H$.
- Řeknu, že barva $\beta \in \{1, 2, \ldots, \Delta + 1\}$ je *volná* u vrcholu w, pokud žádná hrana H incidentí s w nemá barvu β.
- *Pozorování:* Každý vrchol má ≥ 1 volnou barvu.
- Nechť $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_k$ je co nejdelší posloupnost různých hran, kde $e_i = \{xy_i\}$, pro každé $i = 1, \ldots, k : f_H(e_1)$ je barva, která je volná u y_{i-1}. Nechť β je volná barva u y_k. Pak jsou případy:

1. β je volná u x
   - e_k obarvím β a pro $j = 0, \ldots, k-1$ hranu e_j obarvím $f_H(e_{j+1})$. To je ale spor s maximalitou H.
2. β je použitá na nějaké hraně $\tilde{e}$ incidentní s x, nepatřící do $\{e_0, e_1, \ldots, e_k\}$
   - $e_{k+1} := \tilde{e}$ Opět spor s maximalitou $e_0, e_1, \ldots, e_k$.
3. β je použitá na nějaké hraně $e_j \in \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$
   - Nechť α je volná barva u x. Dle předpokladu $\alpha \neq \beta$. Nechť P je co největší souvislý podgraf H na jehož hranách jsou jen barvy α a β a který obsahuje hranu e_j. P má maximální stupeň ≤ 2, $\deg_P(x) = 1 \Rightarrow P$ je cesta, která má začátek v x.
   - Nechť z je druhý konec P. Uvažujeme obarvení $\tilde{f_H} : E_H \to \{1, \ldots, \Delta + 1\}$ vznikne z f_H tak, že na P prohodíme barvy α a β. 2 podpříklady:

1. $z = y_{j-1}$: v $\tilde{f_H}$ je β volná u x i u y_k. α je volná u y_{j-1} a použitá na e_j $\Rightarrow$ nastává případ 1) pro $e_0, \ldots, e_k$.
2. $z \neq y_{j-1}$: v $\tilde{f_H}$ je β volná u x i u y_{j-1} $\Rightarrow$ nastává případ 1 pro $e_0, \ldots, e_{j-1}$.

$\square$

Přednáška 8

Perfektní grafy

Značení:

- $\omega(G)$ - klikovost G, nebo-li velikost největší kliky v G.
- $\alpha(G)$ - nezávislost G, nebo-li velikost největší nezávislé množiny v G
- Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Pozorování

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}) \quad \omega(\bar{G}) = \alpha(G)$$

Pozorování

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Pozorování

$$\omega(C_{2k+1}) > 2$$

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je **perfektní**, pokud pro každý indukovaný podgraf H grafu G platí $\omega(H) = \chi(H)$.

Pozorování

G perfektní graf, $G' \leq_i G \Rightarrow G'$ je perfektní.

Důsledek:

G obsahuje C_{2k+1} nebo $\overline{C_{2k+1}}$ jako indukovaný podgraf $\Rightarrow G$ není perfektní.

Silná věta o perfektníc grafech

G je perfektní iff G neobsahuje C_{2k+1} ani $\overline{C_{2k+1}}$ (pro $k \geq 2$) jako indukovaný podgraf.

Bez důkazu.

Definice:

Nezávislá množina N v grafu $G = (V, E)$ je **rozlehlá**, pokud každá klika G velikosti $\omega(G)$ obsahuje vrchol z N.

- Ekvivalentně: $\omega(G - N) = \omega(G) - 1$.

Lemma 1

Pro graf $G = (V, E)$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. G je perfektní,
2. $\forall H \leq_i G : H$ má rozlehlou nezávislou množinu,
3. $\forall H \leq_i G, \forall x \in V(H) : H$ má rolehlou nezávislou množinu obsahující x.

Důkaz:

- $3 \Rightarrow 2$ triviálně.
- $2 \Rightarrow 1$ Nechť $G' \leq_i G$ a chceme $\omega(G') = \chi(G')$.
  - Obarvení G' pomocí $\omega(G')$ barev najdeme takto: N_1 je rozlehlá NzMna v G_1 a té dáme barvu 1. Následně $N_2 :=$ NzMna v $G' - N_1$ barvu 2 a tak dále opakujeme dokud nemáme obarvené celé G'.
  - $\omega(G' - N_1) = \omega(G') - 1$,
  - $\omega(G' - (N_1 \cup N_2)) = \omega(G') - 2$ a tak dále.
  - Proto použijeme právě $\omega(G')$ barev. Hotovo.
- $1 \Rightarrow 3$ Nechť G je perfektní graf, mějme $H \leq_i G, \forall x \in V(H)$. Víme $\omega(H) = \chi(H)$.
  - Vrcholy H barvy $f(x)$ jsou rozlehlá nezávislá množina.
  - Každá největší klika musí mít právě jeden vrchol s danou barvou.

$\square$

Definice:

Nechť $G = (V, E)$ je graf s vrcholem x. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom k**-násobné nafouknutí** vrcholu x, která vytvoří G^+ takto:

1. Vrchol x se nahradí k-ticí nových vrcholů $x_1, \ldots x_k$ tvořící kliku.
2. Každý soused vrcholu x v G se spojí se všemi $x_1, \ldots, x_k$.

Lemma 2

Pokud G je perfektní a G^+ je jeho nafouknutí, tak i G^+ je perfektní.

Důkaz:

- Dokážeme, že $\forall H \leq_i G^+$ má rozlehlou nezávislou množinu. Pak ještě použijeme Lemma 1 a máme hotovo.

- Volme $H \leq_i G^+$: Pokud H obsahuje nejvýš jeden z $x_1, \dots, x_k$ tak $H \leq_i G$, takže H má rozlehlou NzMnu dle Lemma 1. Předpokládejme, že H obsahuje aspoň dva vrcholy z $x_1, \dots, x_k$.
- Potom H je nfouknutí nějakého $H^- \leq_i G, x \in V(H^-)$.
- Dle Lemma 1, H^- obsahuje rozlehlou NzMnu N^- obsahující x. BÚNO: $x_1 \in V(H)$.
- Tvrdím: $N := (N^- \setminus \{x\}) \cup \{x_1\}$ je rozlehlá NzMna v H. Jistě N je nezávislá. Nechť K je klika H velikosti $\omega(H)$. Pak jsou dvě možnosti:

1. $K \cap \{x_1, \dots, x_k\} = \emptyset$ v tom případě je K i největší v H^-, tedy $N^- \cap K \neq \emptyset$, dokonce $(N^- \setminus \{x\}) \cap K \neq \emptyset, N \cap K \neq \emptyset$.
2. $K \cap \{x_1, \dots, x_k\} \neq \emptyset$ nutně K obsahuje všechny vrcholy z $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ patřící do H, tedy i $x_1 \in K$, tedy $K \cap N = \{x_1\} \neq \emptyset$.
    - Tedy N he rozlehlá NzMna H.

$\square$

Značení:

$H <_i G := H \leq_i G$ & $H \ncong G$ - H je vlastní indukovaný podgraf G.

Věta (*Slabá věta o perfektních grafech.*)

G je perfektní iff $\bar{G}$ je perfektní.

Důkaz:

- Sporem: $\exists$ perfektní graf $G = (V, E)$. ale $\bar{G}$ není perfektní. Volme G tak, že $|V|$ je co nejmenší. Tedy $\forall H <_i G$ platí, že H i $\bar{H}$ jsou perfektní. Jinak to je menší graf co do velikosti $|V|$.
- Protože $\bar{G}$ není perfektní, tak dle Lemma 1 $\exists G' \leq_i \bar{G} : G'$ nemá rozlehlou NzMnu.
- Tvrdím, že $G' \cong \bar{G}$, kdyby $G' <_i \bar{G}$ tak G' není perfektní, ale $\bar{G'} <_i G$ tedy $\bar{G'}$ je perfektní, spor s minimalitou G.
- Tedy $\bar{G}$ nemá rozlehlou NzMnu. Tj. pro každou NzMnu $\bar{N}$ v $\bar{G}$ existuje v $\bar{G}$ klika velikosti $\omega(G)$ disjunktní s $\bar{N}$. Tedy pro každou kliku K v G existuje v G NzMna velikosti $\alpha(G)$ disjunktní s K.
- Nechť $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ je seznam všech klik v G. Nechť N_i je NzMna G velikosti $\alpha(G)$ disjunktní s Q_i, pro $i = 1, \dots, t$.
- Pro každý vrcholy $x \in V$ nechť $f(x)$ je počet indexů $i \in \{1, \dots, t\}$ takových, že $x \in N_i$.
- G^+ vznikne z G tak, že se každý vrchol x nafoukne $f(x)$-krát.
- Vrcholy $x \in V$ s $f(x) = 0$ se smažou.
- Dle Lemma 2 G^+ je stále perfektní.
- $|V(G^+| = t\alpha(G) = t\alpha(G^+)$
- Víme: $\chi(G^+)\alpha(G^+) \geq |V(G^+)| = t\alpha(G^+)$
- Tedy $\chi(G^+) \geq t$. **(1)**

- Ale $\chi(G^+) = \omega(G^+)$. **(2)**
- Nechť Q^+ je největší klika v G^+, ta musela vzniknout nafouknutím nějaké kliky Q_j v G.
- **(3)** $|Q^+| = \sum_{x \in Q_j} f(x) = \sum_{x \in Q_j} \sum_{i=1}^{t} |N_i \cap \{x\}| = \sum_{i=1}^{t} \sum_{x \in Q_j} |N_i \cap \{x\}| = \sum_{i=1}^{t} |Q_j \cap N_i \leq t - 1$
- Protože $Q_j \cap N_j = \emptyset$ dle definice N_j a dohromady (1), (2) a (3) je spor.

$\square$

Přednáška 9

Připomenutí

- *Částečné uspořádaná množina $(X, \leq)$, kde $\leq$ je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.*
- ***Řetězec:*** *podmnožina X, v níž každé dva prvky jsou porovnatelné.*
- ***Antiřetězec:*** *podmnožina X, v níž žádné dva prvky nejsou porovnatelné.*
- *Také je dobré znát **Hasseho diagram**.*

Cvičení

Dokažte: Pokud každý řetězec v $(X, \leq)$ má velikost $\leq k$, tak $(X, \leq)$ se dá rodělit na $\leq k$, antiřetězců.

- *Indukcí dle k (postupně se mažou maximální prvky).*

Definice:

Pro částečně uspořádanou množinu $(X, \leq)$ definuji graf **porovnatelnosti** $G_{\leq} = (X, E)$, kde $E = \{\{xy\} \in \binom{X}{2} : x \leq y \vee y \leq x\}$.

Cvičení

Dokažte: $G_{\leq}$ je perfektní.

- *Klikovost = nejdelší řětězec.*
- *Barevnost = počet antiřetězců.*
- *Použití předchozího cvičení.*

Věta (*Dilworth*)

Pokud v částečně uspořádané množině $(X, \leq)$ má každý antiřetězec velikost l, tak $(X, \leq)$ se dá rozdělit na $\leq l$ řetězců.

Důkaz:

- Každý $G_{\leq}$ je perfektní $\Rightarrow \bar{G_{\leq}}$ je perfektní.
- $\omega(\bar{G_{\leq}}) \leq l$ & $\chi(\bar{G_{\leq}}) \leq l \Rightarrow l$ Nzmna $\rightarrow l$ klik $\Rightarrow$ řetězce v $(X, \leq)$.

$\square$

Pozorování

Bipartitní grafy jsou perfektní.

Značení:

- $\mathrm{m}(G) :=$ velikost největšího párování v grafu G
- $\mathrm{vp}(G) :=$ veliksot nejmenšího vrcholového pokrytí v grafu G.

Pozorování

$$\mathrm{m}(G) \leq \mathrm{vp}(G)$$

Připomenutí

Konig-Egerváryho věta: G bipartitní: $m(G) = vp(G)$.

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je **chordální**, pokud neobsahuje kružnici délky ≥ 4 jako indukovaný podgraf.

Pozorování

Graf G je chordální a $H \leq_i G \Rightarrow H$ je chordální.

Definice:

Nechť $G = (V, E)$ je graf, nechť x a y jsou dva nesousední vrcholy v G. xy**-řez** je množina $R \subseteq V$, t.ž. x a y jsou v různých komponentách $G - R$.

Lemma

Graf $G = (V, E)$ je chordální iff pro každé dva nesousední vrcholy x, y existuje xy-řez, který je klika v G.

Důkaz:

- $\Leftarrow$ Nechť G není chordální. Chceme dva nesousední vrcholy x, y, t.ž. žádný xy-řez není klika. Nechť G obsahuje indukovanou kružnici C délky ≥ 4, nechť x, y jsou nesousedící vrcholy na C.

    - Vždy musím odebrat aspoň 2 vrcholy z cyklu. Ale mezi nimi není hrana a tudíž nemůže se jednat o kliku. S tím, že odstraněné vrcholy musí přerušit dvě cesty P_1, P_2. Kde P_1 a P_2 je rozdělení C dle x, y.
- $\Rightarrow$ Nechť G je chordální, nechť x, y jsou dva nesousedící vrcholy. Nechť R je xy-řez minimální vzhledem k inkluzi. Ukážeme, že R je klika v G.
    - Sporem: nechť existují nesousedící vrcholy $u, v \in R$. Nechť G_x, G_y jsou komponenty $G - R$ obsahující x respektive y.
    - *Pozorování:* u i v má aspoň jednoho souseda v G_x i v G_y z minimality řezu.
    - Nechť P_x je co nejkratší csta z u do v jejichž vnitřní vrcholy patří do G_x. Podobně P_y. $P_x \cup P_y$ je indukovaná kružnice délky ≥ 4, spor.

$\square$

Definice:

Vrchol x grafu G je **simpliciální**, pokud sousedi x tvoří kliku v G.

Pozorování

Vrchol stupně ≤ 1 je simpliciální.

Lemma

Každý chordální graf (s aspoň jedním vrcholem) má simpliciální vrchol.

Důkaz:

- Dokážeme: $\forall$ chordální graf $G = (V, E)$ je buď úplný nebo má dva nesousední simpliciální vrcholy. Indukcí dle $|V|$.
- $|V| = 1$ G je úplný.
- $|V| > 1$ Pokud G není úplný (jinak triviálně platí). Volme x, y nesousedící vrcholy v G. Nechť R je xy-řez tvořící kliky v G (Lemma).
    - G_x, G_y jsou komponenty $G - R$ obsahující x popř. y.
    - G_x^+, G_y^+ jsou podgrafy G indukované $G_x \cup R$ respektive $G_y \cup R$.
    - IP: G_x^+ je buď úplný, nebo obsahuje dva nesousedící simpliciální vrcholy.
    - V obou případech to znamená, že G_x^+ obsahuje simpliciální vrchol s_x nepatřící do R. Obdobně s_y je simpliciální vrchol v G_y^+ nepatřící do R.
    - V G mají s_x i s_y stejné sousedy jako v G_x^+ resp. G_y^+, tedy s_x a s_y jsou dva nesousedící simpliciální vrcholy v G.

$\square$

Definice:

Perfektní eliminační schéma (*PES*) grafu G je uspořádání vrcholů G do posloupnosti $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ takové, že $\forall i = 1, \ldots, n$ sousedi v_i mezi $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ tvoří kliky v G. (*Ekvivalentně: v_i je simpliciální v indukovaném podgrafu G $\{v_1, \ldots, v_i\}$.*)

Věta

Následující vlastnosti grafu $G = (V, E)$ jsou ekvivalentní:

1. G je chordální,
2. $\forall H \leq_i G : H$ má simplic. vrchol,
3. G má PES.

Důkaz:

- $1 \Rightarrow 2 : \forall H \leq_i G$ je chordální $\Rightarrow$ z Lemma H má simpliciální vrchol.
- $2 \Rightarrow 3 :$ Vezmu simpliciální vrchol v G dám ho doprava v PES. Odeberu z G a takhle pořád opakuji.
- $3 \Rightarrow 1 : G$ s PES, pak každá C s $|V| \geq 4$ musí mít chordu. Podívám se na poslední vrchol v PES. Pak z vlastnosti PES musí mít předchozí vrcholy chordu.

$\square$

Důsledek:

- Důkaz $2 \Rightarrow 3$ říká, že v polynomiálním čase lze pro dané G najít PES nebo zjistit, že neexistuje.

Věta

1. Každý chordální graf je perfektní.
2. Pro chordální graf G lze v polynomiálním čase zjistit $\omega(G) = \chi(G)$, spolu s nevětší klikou a optimálním obarvením.

Přednáška 10

Důkaz:

- Už víme, že lze vytvořit PES.
- Pro každý vrchol v PES platí, že jeho předchozí sousedi tvoří kliku a s daným vrcholem tvoří kliku o jedna větší.
- Pak již stačí najít vrchol s největším počtem předchozích vrcholů (značeno k) a potom $\omega(G) = k + 1$.
- Pro spor vezmu největší kliku z algoritmu. Kdyby nebyl největší, tak lze přidat další, ale ten musí být sousedem a tudíž ho algoritmus musel najít.

- Pro obarvení budu postupovat zleva a danému vrcholu dám nejmenší možnou barvu. Zaznačím si největší barvu a novou barvu přidám jakmile vrchol bude mít v předchozích vrcholech právě tolik sousedů. Tím pádem nikdy nepřekročím velikost maximální kliky a tedy $\chi(G) = \omega(G)$.
- Najdu tedy obarvení, které je rovno klice a tedy je i perfektní.

$\square$

Extremální kombinatorika

Definice:

Pro $n \in \mathbb{N}$ a graf F definujeme $\text{ex}(n, F) :=$ největší počet hran v grafu na n vrcholech, který neobsahuje F jako podgraf. Nebo-li:

$$\text{ex}(n, F) = \max\{|E|; G = (V, E) : |V| = n, F \subseteq G\}$$

Definice:

Turanův graf $T(n, r)$ je úplný r-partitní graf na n vrcholech, jehož všechny partity mají velikost $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ anebo $\lceil \frac{n}{r} \rceil$.

- Potom $t(n, r) :=$ počet hran $T(n, r)$.

Věta (*Turán*)

$$\forall n, r \in \mathbb{N} : \text{ex}(n, K_{r+1}) = t(n, r)$$

Důkaz:

- *Pozorování:* $T(n, r)$ neobsahuje K_{r+1}, tedy $\text{ex}(n, K_{r+1}) \geq t(n, r)$.
- Stačí dokázat: $\text{ex}(n, K_{r+1}) \leq t(n, r)$. Nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech, $K_{r+1} \nsubseteq G$ a $|E| = \text{ex}(n, K_{r+1})$.
- Tvrzení 1: Každé 2 nesousedící vrcholy x, y mají v G stejný stupeň. Sporem kdyby $\deg(x) > \deg(y)$ tak y odstraním sousedy a přidám mu sousedy x. Ten má ale více hran a protože $\{x, y\} \notin E$ a s x nebyla klika, tak teď také žádná klika nevznikla s y. "Nebo-li y nahradím kopií x."
- Tvrzení 2: Definujeme relaci $R := \{(x, y) \in V \times V : \{x, y\} \notin E\}$. Potom R je ekvivalence.
  - Jistě je R reflexivní, také symetrické.
  - Pro spor předpokládejme, že R není tranzitivní: $\exists x, y, z : (x, y) \in R, (y, z) \in R \wedge (x, z) \notin R$. Dle Tvrzení 1: $\deg_G(x) = \deg_G(y) = \deg_G(z)$.
  - Potom "nahradím x a z kopiemi y". A platí $|E(G')| > |E|$. A G' neobsahuje K_{r+1} obdobným argumentem jako u Tvrzení 1.
  - Nyní nechť $P_1, P_2, \ldots, P_k$ jsou třídy ekvivalence R.

- Tvrzení 3: $k = r$ (pokud $n \geq r$).
  - $k > r$: tak $K_{r+1} \subseteq G$ a to je spor.
  - $k < r$: tak lze partitu s ≥ 2 vrcholy rozdělit na dvě menší partity a přidáme hrany mezi nimi a dostaneme G', který $K_{r+1} \nsubseteq G'$ & $|E(G')| > |E|$ opět spor.
- Tvrzení 4: BÚNO: $|P_1| \leq |P_2| \leq \cdots \leq |P_r|$. Tvrdíme, že $|P_1| \leq |P_r| + 1$.
  - Kdyby nějaké dvě partity byly odlišné ≥ 2. Potom vezmeme půlku přebytečných vrcholů a přehodíme je do předchozí partity. Následně spojíme hranami. Dostanu G' kde $K_{r+1} \nsubseteq G$ a $|E(G')| > |E|$. *Poznámka:* $(l+2)l < (l+1)(l+1)$.
- Shrnutí: G je úplný r-partitní graf, kde všechny partity jsou skoro stejné $\Rightarrow G \cong T(n, r)$.

$\square$

Ddefinice:

Hypergraf je dvojice (V, E), kde prvky E *("hyperhrany")* jsou podmnožiny V.

Definice:

Hypergraf je k**-uniformní**, pokud všechny jeho hyperhrany mají k vrcholů.

Definice:

$f(n, k) :=$ největší počet hyperhran v k-uniformním hypergrafu na n vrcholech, v němž žádné dvě hyperhrany nejsou disjunktní.

Pozorování

Pro $n < k : f(n, k) = 0$.

Pozorování

Pro $k \leq n < 2k : f(n, k) = \binom{n}{k}$.

Pozorování

Pro $n \geq 2k : f(n, k) \geq \binom{n-1}{k-1}$. (Vybereme předem jeden vrchol.)

Definice:

Označme $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, na V uvažujme sčítání modulo n. **Interval** je podmnožina V tvaru $\{i, i+1, i+2, \ldots, i+k\}$.

Pozorování

Pro $n \geq 2k$ máme na V přesně n intervalů.

Lemma

Nechť $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}, n \geq 2k$ a $G = (V, E)$ je k-uniformní hypergraf jehož každá hyperhrana je interval a každé dvě hyperhrany se protínají. Potom $|E| \leq k$.

Důkaz:

- BÚNO: $I = \{1, 2, 3, \ldots, k\} \in E$.
- Označme $I_j^- := \{j, j-1, j-2, \ldots, j-k+1\}$ a $I_j^+ := \{j+1, j+2, \ldots, j+k\}$.
- I je protnutí $I_1^-, I_2^-, \ldots, I_{k-1}^-$ & $I_1^+, I_2^+, \ldots, I_{k-1}^+$. Navíc z každé dvojice I_j^-, I_j^+ nejvýše jeden patří do E, protože $I_j^- \cap I_j^+ = \emptyset$. Tudíž $|E| \leq k$.

□

Věta (*Erdös-Ko-Rado*)

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $n \geq 2k$ platí $f(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$.

Důkaz:

- **Myšlenka:** $G = (V, E)$ je k-uniformní hypergraf na n vrcholech, každé dvě hyperhrany se protínají $\rightarrow |E| \leq \binom{n-1}{k-1}$.
  - Ekvivalentně: **(1)** $\frac{|E|}{\binom{n}{k}} \leq \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$.
  - Lemma: Když každá hyperhrana je interval $\frac{|E|}{n} \leq \frac{k}{n}$**(2)**.
  - Tyto dva zlomky jsou vlastně pravděpodobnosti. Takže náhodně očíslujeme vrcholy a mám stejnou pravděpodobnost v obou případech.
- **Důkaz:** Mějme $n \geq 2k$. Nechť $G = (V, E)$ je k-uniformní hypergraf v němž aždé 2 hyperhrany se protínají a $|E|$ je co největší. Chceme dokázat $|E| \leq \binom{n-1}{k-1}$. Nechť X je počet dvojic (e, π) t.ž. $e \in E$ a $\pi : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že π zobrazí e na intervalu. Potom pomocí počítání dvěma způsoby:

1. $X \leq n! \cdot k$ (dle lemma)
2. $X = |E| \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)!$

- $|E| \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)! \leq n! \cdot k$
- $|E| \leq \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$

□

Přednáška 11

Definice:

Slunečnice (nebo Δ-systém) se středem S a l lístky je l-tice množin $L_1, L_2, \ldots, L_l$ taková, že $\forall i \neq j : L_i \cap L_j = S$.

- $s(k,l) := \sup\{|E|; G = (V,E)$ je k-uniformní hypergraf neobsahující žádnou slunečnici s l lístky$\}$.

Věta (*"lemma o slunečnici", Erdös-Rado*)

$$\forall k, l \in \mathbb{R} : s(k,l) < +\infty$$

Důkaz:

- Indukcí dle k.
- $k = 1 : s(k,l) = l - 1$
- $k > 1 :$ Nechť $G = (V,E)$ je k-uniformní hypergraf neobsahující slunečnici s l lístky.
- Nechť $D \subseteq E$ je co největší množina po dvou disjunktních hyperhran v G.
- Jistě $|D| \leq l - 1$, jinak máme slunečnici s $|D| \geq l$ lístky.
- Označme $W := \bigcup_{d \in D} d \subseteq V, |W| = k \cdot |D| \leq k \cdot (l-1)$.
- Jistě každá $e \in E$ obsahuje aspoň jeden vrchol W. Tedy existuje $x \in W$, který je obsažen v aspoň $\frac{|E|}{|W|} = \frac{|E|}{k \cdot (l-1)}$ hyperhranách z E.
- Označme $E_x := \{e \in E, x \in e\}$ pak $E_x^- := \{e \setminus \{x\}, e \in E_x\}$ a $G_x^- := (V, E_x^-)$.
- G_x^- je $(k-1)$-uniformní hypergraf, který neobsahuje slunečnici s l lístky: kdyby $e_1, e_2, \ldots, e_l$ byla slunečnice v G_x^-, tak $e_1 \cup \{x\}, e_2 \cup \{x\}, \ldots, e_l \cup \{x\}$ je slunečnice v G.
- Tedy dle IP: $|E_x^-| = s(k-1, l) < +\infty$.
- Navíc $|E_x^-| = |E_x| \geq \frac{|E|}{k \cdot (l-1)}$, tedy $|E| \leq k \cdot (l-1) \cdot s(k-1, l)$.
- Tedy $s(k,l) \leq k \cdot (l-1) \cdot s(k-1,l)$.

$\square$

Poznámka:

Důkaz nám dává odhad $s(k,l) \leq k!(l-1)^k$.

Hypotéza

$$(\forall l)(\exists c_l) : s(k,l) \leq c_l^k$$

Definice:

Hamiltonovská kružnice v grafu $G = (V,E)$ je kružnice v G obsahující všechny vrcholy G.

Definice:

Pro $n \geq 3$ označme $h(n) := \max\{d \in \mathbb{N}_0, \exists$ graf na n vrcholech s min stupněm $\geq d$, který neobsahuje hamiltonovskou kružnici.$\}$.

Věta (*Bondy-Chvátal*)

Nechť $G = (V, E)$ je graf s $n \geq 3$ vrcholy, nechť $x, y \in V$ jsou nesousedící vrcholy G takové, že $\deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$. Nechť $G^+ := (V, E \cup \{xy\})$. Potom G je hamiltonovský iff G^+ je hamiltonovský.

Důkaz:

- $\Rightarrow$ je triviální
- $\Leftarrow$ Označme $e_0 = \{xy\}$. Nechť G^+ obsahuje hamiltonovskou kružnici C. Pokud $e_0 \notin C$, tak C je hamiltonovská kružnice v G.
- Předpoklad $e_0 \in C$ jinak triviálně.
- Očíslujeme vrcholy a hrany C takto:
  - $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$
  - $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, e_0$
- Cíl je najít $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ tak, že x sousedí s x_{i+1} a y sousedí s x_i v grafu G.
- Označme $S_x := \{i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}, \{xx_{i+1}\} \in E\}$ z toho plyne, že $|S_x| = \deg_G(x)$ a taky $S_y := \{i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}, \{yx_i\} \in E\}$ pak $|S_y| = \deg_G(y)$.
- Tedy $|S_x| + |S_y| \geq n, |S_x \cup S_y| \leq |\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}| \leq n-1$, tudíž $\exists i \in S_x \cap S_y$.
- $(C \setminus \{e_0, e_i\}) \cup \{\{xx_{i+1}\}, \{yx_i\}\}$ je hamiltonovská kružnice v G.

$\square$

Důsledek: (*Dirac*)

Každý graf na $n \geq 3$ vrcholech s minimální stupněm $\geq \frac{n}{2}$ je hamiltonovský. (Nebo $h(n) < \frac{n}{2}$.)

Důkaz:

- $\forall x \neq y \in V : \deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$
- Pokud G je úplný, tak hotovo. Jinak můžeme postupně přidávat hrany a vytvořit úplný graf. Pak pomocí Bondy-Chvátalovy věty jsou všechny tyto grafy v posloupnosti hamiltonovské.

$\square$

Definice:

- **Multigraf** je jako graf, ale můžu mít více hran mezi stejnou dvojicí vrcholů a můžu mít i smyčky.
- *Formálně:* Multigraf je dvojice množin (V, E) spolu s incidenční funkcí $f : E \to \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$, kde V jsou vrcholy a E hrany.

Definice:

Incidenční matice multigrafu $G = (V, E)$ je matice $I_G \in \{0, 1, 2\}^{|V| \times |E|}$, kde v řádku odpovídajícímu vrcholu $x \in V$ a sloupci odpovídající hraně $e \in E$ je hodnota 2, pokud e je smyčka u x, 1 pokud x je jedna ze dvou konců e, 0 jinak.

Definice:

Mějme multigraf $G = (V, E)$ s maticí incidence I_G.

- Označme: $k(G) = k(V, E)$ počet komponent souvislosti G.
- Označme: $r(G) = r(VE)$ hodnost I_G. (nad $\mathbb{Z}_2$)
- Označme: $n(G) = n(V, E)$ dimenze jádra $\mathrm{Ker}(I_G)$ matice I_G, kde $\mathrm{Ker}(I_G) = \{x \in (\mathbb{Z}_2)^{|E|} : I_g x = 0\}$. Také se $n(G)$ nazývá nulita G.

Pozorování

$$r(V, E) = |V| - k(V, E)$$

Pozorování

$$n(V, E) = |E| - r(V, E)$$

Definice:

$\mathrm{Ker}(I_G)$ **prostor cyklů** $G = (V, E)$.

Definice:

$G = (V, E)$ multigraf $e \in E$. Pak:

- $G - e := (V, E \setminus \{e\})$
- G/e (kontrakce hrany y) $:= G - e$, pokud e je smyčka, jinak nový vrchol v_e všechny hrany se projeví na novém vrcholu (protože máme multigraf).

Pozorování

$G - e$ i G/e má vždy o jednu hranu méně než G.

Přednáška 12

- $r(G) = |V| - k(G) = |F|$, kde $F \subseteq E$ je největší podmnožina E neobsahující kružnici.
- $n(G) = |E| - r(G) = |F|$, kde $F \subseteq E$ je největší podmnožina E taková, že $k(G - F) = k(G)$

$$r(G-e) = \begin{cases} r(G) - 1 & e \text{ je most v } G \\ r(G) & \text{jinak} \end{cases}$$

$$n(G-e) = \begin{cases} n(G) & e \text{ je most v } G \\ n(G) - 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r(G/e) = \begin{cases} r(G) & e \text{ je smyčka v } G \\ r(G) - 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$n(G/e) = \begin{cases} r(G) - 1 & e \text{ je smyčka v } G \\ r(G) & \text{jinak} \end{cases}$$

Definice:

Tutteův polynom multigrafu $G = (V, E)$, značený $T_G(x, y)$ je definován:

$$T_G = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(V,E) - r(V,F)} \cdot (y-1)^{n(V,F)}$$

Poznámka:

x^0 je konstantní funkce $\equiv 1$

Pozorování

$T_G(1, 1) = \#$ počet koster v souvislém grafu G.

Tvrzení

Nechť $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou multigrafy, kde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ a $|V_1 \cap V_2| \leq 1$. Nechť $G = (V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2)$. Potom $T_G(x, y) = T_{G_1}(x, y) T_{G_2}(x, y)$.

Důkaz:

- Nechť $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (situace $|V_1 \cap V_2| = 1$ je obdobná).
- $T_G(x, y) = \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(V,E) - r(V, F_1 \cup F_2} \cdot (y-1)^{n(V, F_1 \cup F_2} =$ **(1)**
- $r(V, F_1 \cup F_2) = r(V, F_1) + r(V, F_2)$ stejně tak i pro $n(G)$

$$(1) = \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2} (x-1)^{r(E_1)+r(E_2)-(r(F_1)+r(F_2))} \cdot (y-1)^{n(F_1)+n(F_2)} =$$

$$\left(\sum_{F_1 \subseteq E_1} (x-1)^{r(E_1)-r(F_1)} \cdot (y-1)^{n(F_1)} \right) \left(\sum_{F_2 \subseteq E_2} (x-1)^{r(E_2)-r(F_2)} \cdot (y-1)^{n(F_2)} \right) =$$

$$= T_{G_1}(x,y) T_{G_2}(x,y)$$

□

Důsledek: e je most v $G + (V, E)$, tak $T_{G-e}(x,y) = T_{G/e}(x,y)$.

Pozorování

e je smyčka v G, potom $T_{G-e}(x,y) = T_{G/e}(x,y)$, protože $G - e = G/e$.

Věta

Nechť $G = (V, E)$ je multigraf. Potom:

1. pokud $E = \emptyset$, tak $T_G(x,y) = 1$
2. pokud $e \in E$, tak
    1. pokud e je smyčka, tak $T_G(x,y) = y \cdot T_{G-e}(x,y) = y \cdot T_{G/e}(x,y)$
    2. pokud e je most, tak $T_G(x,y) = x \cdot T_{G-e}(x,y) = x \cdot T_{G/e}(x,y)$

    3. jinak $T_G(x,y) = T_{G-e}(x,y) + T_{G/e}(x,y)$.

Důkaz:

1. Plyne z definice.
2. Volme $e \in E$ potom:

$$T_G(x,y) = \sum_{F \subseteq E; e \notin F} \cdots + \sum_{F \subseteq E; e \in F} \cdots = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \sum_{F \subseteq E; e \notin F} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

$$S_2 = \sum_{F \subseteq E; e \in F} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

$$T_{G-e}(x,y) = \sum_{F \subseteq E \setminus \{e\}} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

$$T_{G/e}(x,y) = \sum_{F \subseteq E \setminus \{e\}} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

- Pokud e není most v G tak $r(E) = r(E \setminus \{e\})$, tedy $S_1 = T_{G-e}(x,y)$.
- Pokud e je most v G, tak $r(E) = r(E \setminus \{e\}) + 1$ a tedy $S_1 = (x-1) \cdot T_{G-e}(x,y)$.
- Pokud e je smyčka, tak $S_2 = (y-1) \cdot T_{G/e}(x,y)$.
- Pokud e není smyčka, tak $S_2 = T_{G/e}(x,y)$.
- Takže pak celkově podle toho co je e:

$$T_G(x,y) = S_1 + S_2 = \begin{cases} \text{most} & (x-1)T_{G-e} + T_{G/e} = x \cdot T_{G/e} = x \cdot T_{G-e} \\ \text{smyčka} & (y-1)T_{G/e} + T_{G-e} = y \cdot T_{G-e} = y \cdot T_{G/e} \\ \text{jinak} & T_{G-e} + T_{G/e} \end{cases}$$

□

Definice:

Obarvení multigrafu $G = (V, E)$ pomocí b barev je funkce $f : V \to \{1, 2, 3, \dots, b\}$ taková, že žádná hrana $e \in E$ nemá oba konce zbarvené na stejnou barvu. Pokud G obsahuje smyčku, tak G nemá žádné obarvení.

Definice:

Chromatický polynom $G = (V, E)$ je funkce $\chi_G(z) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, kde $\chi_G(z)$ je počet obarvení G pomocí z barev.

Cvičení:

- $G = K_n$ *tak* $\chi_G(z) = \binom{z}{n} n! = z \cdot (z-1) \cdot \dots \cdot (z-n+1)$
- $H = \bar{K_n}$ *tak* $\chi_H(z) = z^n$

Tvrzení

Nechť $G = (V, E)$ je multigraf, $z \in \mathbb{N}_0$. Potom:

1. pokud $E = \emptyset$, tak $\chi_G(z) = z^{|V|}$
2. pokud $e \in E$, tak:
    1. pokud e je smyčka tak $\chi_G(z) = 0$
    2. jinak $\chi_G(z) = \chi_{G-e}(z) - \chi_{G/e}(z)$.

Důkaz:

1. Triviálně.
2. 1. Plyne z definice.

- 2. jsou dvě možnosti:
  - Více hran: pak musí být stejné obarvení a to také platí, protože $\chi_{G/e}(z) = 0$ kvůli smyčce.
  - Jen jedna hrana, tak musíme odebrat obarvení, které dají oboum vrcholům stejnou barvu a to je přesně $\chi_{G/e}(z)$.

□

Tvrzení

$\forall$ multigraf G:

$$\chi_G(z) = (-1)^{|V|-k(G)} \cdot z^{k(G)} \cdot T_G(1-z, 0)$$

Důkaz:

- *Druhou stranu výrazu si označíme jako $PS_G(z)$. Pak jsou dva možné postupy.*

1. Opraví se $PS_G(z)$ a zjistí se, že $PS_G(z) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} \cdot z^{k(V,F)}$. Pak pomocí **principu inkluze a exkluze** (*PIE*) ze zdůvodnní, že ten výraz je roven $\chi_G(z)$.
2. Zkontroluje se, že $\chi_G(z)$ splní stejné podmínky rekurze jako $PS_G(z)$.

- *V tomto případě volíme první možnost.*
- Označme $\bar{\chi_G}(z) := \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} \cdot z^{k(V,F)}$ **(1)**.
- *Pozorování:* Pokud G obsahuje smyčku e, tak $\bar{\chi_G}(z) = 0$, protože:

$$\bar{\chi_G}(z) = \sum_{F \subseteq E \setminus \{e\}} ((-1)^{|F|} \cdot z^{k(V,F)} + (-1)^{|F \cup \{e\}} \cdot z^{k(V,F)})$$

- **(1)** Předpokládejme, že G neobsahuje smyčku. Označme si $\mathcal{F} :=$ množina všech funkcí $|V| \to \{1, 2, \dots, z\}$ $|\mathcal{F}| = z^{|V|}$. Pro hranu $e = \{xy\} \in E$ označím $\hat{S}_e := \{f \in \mathcal{F}; f(x) = f(y)\}$.

$$\chi_G(z) = |\mathcal{F} \setminus \bigcup_{e \in E} \hat{S}_e| = |\mathcal{F}| - |\bigcup_{e \in E} \hat{S}_e| =^{\text{PIE}}$$

$$=^{\text{PIE}} |\mathcal{F}| - (\sum_{\emptyset \neq F \subseteq E} (-1)^{|F|} + 1| \bigcap_{e \in E} \hat{S}_e|) = z^{|V|} + \sum_{\emptyset \neq F \subseteq E} (-1)^{|F|} | \bigcap_{e \in F} \hat{S}_e| = (1)$$

- Obecně $|\bigcup_{e\in E}\hat{S}_e| = z^{k(V,E)}$, protože v komponentě musí být jedna barva.

$$(1) = \sum_{F\subseteq E}(-1)^F z^{k(V,F)} = \bar{\chi_G}(z)$$

$\square$

Vytvořující funkce

Připomenutí:

$$(a_0, a_1, \dots) \subseteq \mathbb{R} \to A(x) = a_0 + xa_1 + x^2a_2 + \dots$$

Definice:

Formální mocninná řada reprezentující posloupnost reálných čísel $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je výraz tvaru $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

Značení:

$[|\mathbb{R}|]$ je množina formálních mocninných řad (v proměnné x nad $\mathbb{R}$).

- Pro $A(x) \in \mathbb{R}[|x|], A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ je $[x^n]A(x)$ koeficient u x^n v $A(x)$, tj. a_n.

Operace s formálními mocninnými řadami

- násobení

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha A(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \dots$$

- sčítání

$$A(x), B(x) \in \mathbb{R}[|x|], A(x) = a_0 + a_1x + \dots, B(x) = b_0 + b_1x + \dots$$

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots \text{ má vlastnost:}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}[|x|] : A + 0 = 0 + A = A$$

- násobení

$$A(x) \cdot B(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots, \text{ kde}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots, \text{ má vlastnost:}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}[|x|] : A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$$

Fakt

- $(A + B)C = AC + BC$
- $\mathbb{R}[|x|]$ je *okruh* (tj. komutativní okruh s jednotkou).

Definice:

Pro $A \in \mathbb{R}[|x|]$ označme A^{-1} (nebo $\frac{1}{A}$) mocninnou řadu $B \in \mathbb{R}[|x|]$ splňující $AB = 1 \in \mathbb{R}[|x|]$. A^{-1} je **multiplikativní inverze (převrácená hodnota)** A.

Přednáška 13

Poznámka:

- *Ne všechny FMŘ mají inverzní prvky, například* 0.

Tvrzení

Pokud $\mathbb{R}[|x|] \ni A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ má $A^{-1}(x)$ v tom případě je $A^{-1}(x)$ jednoznačná.

Důkaz:

- $a_0 = 0 \Rightarrow A^{-1}(x)$ neexistuje.
- Předpoklad $a_0 \neq 0$ hledejme $b_0, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$
\begin{gathered}
(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = 1 \\
\Updownarrow \\
a_0b_0 = 1 \\
a_1b_0 + a_0b_1 = 0 \\
a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0 \\
\vdots \\
\Updownarrow \\
b_0 = \frac{1}{a_0} \\
b_1 = -\frac{1}{a_0} \cdot a_1b_0 \\
b_2 = -\frac{1}{a_0}(a_2b_0 + a_1b_1) \\
\vdots \\
\square
\end{gathered}
$$

Definice:

Nechť $A_1(x), A_2(x), A_3(x), \dots$ je posloupnost FMŘ řeknu, že součet $A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) + \dots$ je **konvergentní**, pokud $\forall n \in \mathbb{N}_0$ existuje jen konečně mnoho indexů $j \in \mathbb{N}_0$ takových, že $[x^n]A_j(x) \neq 0$. V takovém případě pak definuji $A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) + \dots$ jako FMŘ $S(x) \in \mathbb{R}[|x|]$ splňující (jen konečně mnoho nenul):

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : [x^n]S(x) := [x^n]A_1(x) + [x^n]A_2(x) + [x^n]A_3(x) + \dots$$

Definice:

Mějme $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots \in \mathbb{R}[|x|]$, nechť $b_0 = 0$. Potom

$$A(B(x)) = a_0 + a_1B(x) + a_2B^2(x) + a_3B^3(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nB^n(x)$$

Poznámka:

Pokud $b_0 = 0$, tak $B(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots)$ a tedy $B^n(x) = x^n(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots)$ má nulové koeficienty stupňů $0, 1, 2, 3, 4, \dots, n-1$.

- Součet $A(B(x)) = a_0 + a_1B(x) + a_2B^2(x) + \dots$, protože $\forall n \in \mathbb{N}_0$ pouze sčítance $a_0, a_1B(x, a_2B^2(x), \dots, a_nB^n(x)$ mohou mít nenulový koeficient u x^n.

Definice:

Kombinatorická třída je množina $\mathcal{A}$ taková, že každý prvek $\alpha \in \mathcal{A}$ má definovanou velikost $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}_0, \mathcal{A}$ má jen konečně mnoho prvků velikosti n. Značení: $\mathcal{A}_n := \{\alpha \in \mathcal{A}; |\alpha| = n\}$.

Definice:

Obyčejná vytvořující funkce kombinační třídy $\mathcal{A}$, značená OVF($\mathcal{A}$) je FMŘ $\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n| x^n$.

Pozorování

$$\mathrm{OVF}(\mathcal{A}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{|\alpha|}$$

Pozorování

Pokud $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ disjunktní kombinační třídy, tak $\mathrm{OVF}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathrm{OVF}(\mathcal{A}) + \mathrm{OVF}(\mathcal{B})$.

Definice:

Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ jsou kombinační třídy. Potom $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{(\alpha, \beta); \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}$, kde $|(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$.

Pozorování

$$\mathrm{OVF}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathrm{OVF}(\mathcal{A}) \cdot \mathrm{OVF}(\mathcal{B})$$

Důkaz:

$$\mathrm{OVF}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} |(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_n| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |\mathcal{A}_k| \cdot |\mathcal{B}_{n-k}| \right) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{A}_k| x^k \cdot |\mathcal{B}_{n-k}| x^{n-k} = \mathrm{OVF}(\mathcal{A}) \cdot \mathrm{OVF}(\mathcal{B})$$

□

Pozorování

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}, \mathrm{OVF}(\mathcal{A}^k) = \mathrm{OVF}(\mathcal{A})^k$$

Definice:

Nechť $\mathcal{A}$ je kombinační třída taková, že $\mathcal{A}_0 = \emptyset$, potom:

$$\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) = \{\emptyset\} \cup \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \dots$$

tj. množina všech konečných posloupností prvků $\mathcal{A}$.

Pozorování

$$\mathrm{OVF}(\mathrm{Seq}(\mathcal{A})) = 1 + \mathrm{OVF}(\mathcal{A}) + \mathrm{OVF}(\mathcal{A})^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \mathrm{OVF}(\mathcal{A})}$$

Definice:

Labelovaná kombinatorická třída je množina $\mathcal{A}$, jejíž každý prvek α má danou množinu vrcholů $V(\alpha)$, což je konečná množina $\mathbb{N}$, kde platí následující:

1. Označíme-li $\mathcal{A}_V := \{\alpha \in \mathcal{A} : V(\alpha) = V\}$, pak pro každé $V \subseteq \mathbb{N}$ konečné platí $|\mathcal{A}_V| < +\infty$.
2. Pro dvě konečné množiny vrcholů $V, W \subseteq \mathbb{N}$ takové, že $|V| = |W|$, platí $|\mathcal{A}_V| = |\mathcal{A}_W|$

- Značení: $\mathcal{A}_n := \mathcal{A}_{\{1,2,3,\ldots,n\}}$ a $\mathcal{A}_* := \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots$ pro $\alpha \in \mathcal{A} : |\alpha| := |V(\alpha)|$.

Definice:

Exponenciální vytvořující funkce labelované kombinatorické třídy $\mathcal{A}$, značená $\mathrm{EVF}(\mathcal{A})$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n| \frac{x^n}{n!} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_*} \frac{x^{|\alpha|}}{|\alpha|!}$$

Pozorování

Pro labelované kombinatorické třídy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, které jsou disjunktní, platí $\mathrm{EVF}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathrm{EVF}(\mathcal{A}) + \mathrm{EVF}(\mathcal{B})$.

Definice:

Labelovaný součin $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ labelovaných kombinačních tříd $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ je labelovaná kombinační třída $\{(\alpha, \beta); \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}, V(\alpha) \cap V(\beta) = \emptyset\}$, kde $V((\alpha, \beta)) := V(\alpha) \cup V(\beta)$.

Tvzrení

$$\mathrm{EVF}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mathrm{EVF}(\mathcal{A}) \cdot \mathrm{EVF}(\mathcal{B})$$

Důkaz:

- *Levou stranu si označím jako $LS(x)$ a pravou jako $PS(x)$.*
- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : [x^n]LS$ jestli se rovná $[x^n]PS$

$$[x^n]LS = \frac{1}{n!} |(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_n| = \frac{1}{n!} \sum_{V \subseteq \{1,2,3,\ldots,n\}} |\mathcal{A}_V||\mathcal{B}_{\{1,\ldots,n\} \setminus V}| =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|\mathcal{A}_k||\mathcal{B}_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n}\frac{|\mathcal{A}_k|}{k!}\frac{|\mathcal{B}_{n-k}|}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}[x^k]\mathrm{EV}(\mathcal{A})[x^{n-k}]\mathrm{EVF}(\mathcal{B}) = PS(x)$$

$\square$

Přednáška 14

Akce grup a počítání orbit

Připomenutí

Grupa Γ je multiplikativní: $\alpha, \beta \in \Gamma$ tak i $\alpha\beta \in \Gamma$ součin je v Γ.

- 1_Γ neutrální prvek v Γ ($\forall \alpha \in \Gamma : 1_\Gamma \alpha = \alpha 1_\Gamma = \alpha$)
- α^{-1} inverzní prvek k $\alpha \in \Gamma$ ($\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1_\Gamma$)

Definice:

Akce grupy Γ na množině $\mathcal{M}$ je binární operace $(\_\bullet\_) : \Gamma \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Splňující:

1. $\forall p \in \mathcal{M} : 1_\Gamma \bullet p = p$
2. $\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \forall p \in \mathcal{M} : \alpha \bullet (\beta \bullet p) = (\alpha\beta) \bullet p$.

Pozorování

$\bullet$ je akce Γ na $\mathcal{M}$:

1. pokud pro $\alpha \in \Gamma, p \in \mathcal{M} : \alpha \bullet p = q \in \mathcal{M}$, pak $(\alpha^{-1}) \bullet q = p$. Protože $(\alpha^{-1}) \bullet q = (\alpha^{-1}\alpha) \bullet p 1_\Gamma p = p$
2. pro pevné $\alpha \in \Gamma$, funkce $p \to \alpha p$ je bijekce $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$

Definice:

Mějme akci Γ na $\mathcal{M}$. Prvky $p, q \in \mathcal{M}$ jsou **ekvivalentní** (vůči $\bullet$) pokud $\exists \alpha \in \Gamma : \alpha \bullet p = q$. Značení $p \simeq q$.

Pozorování

$\simeq$ je ekvivalence na množině $\mathcal{M}$.

- $p \simeq p : 1_\Gamma \bullet p = p$
- $p \simeq q \Rightarrow q \simeq p : \alpha \bullet p = q \Rightarrow (\alpha^{-1}) \bullet q = p$

- $(p \simeq q \wedge q \simeq r) \Rightarrow p \simeq r : (\alpha \bullet p = q \wedge \beta \bullet q = r) \Rightarrow (\beta\alpha) \bullet p = r$

Definice:

Třídy $\simeq$ se nazývají **orbity**, orbitu obsahující $p \in \mathcal{M}$ značím $[p]$ (nebo $[p]_{\mathcal{M},\bullet}$). Množinu orbit značím $\mathcal{M}/\Gamma$.

Definice:

Stabilizátor prvku $p \in \mathcal{M}$, značený $\mathrm{Stab}(p)$, je $\{\alpha \in \Gamma : \alpha \bullet p = p\}$.

Pozorování

$\mathrm{Stab}(p)$ je podgrupa Γ.

Definice:

Množina pevných bodů pro $\alpha \in \Gamma$, značená $\mathrm{Fix}(\alpha)$, je $\{p \in \mathcal{M}, \alpha \bullet p = p\}$.

Lemma (*o orbitě a stabilizátoru*)

Nechť Γ je konečná grupa s akcí na $\mathcal{M}$. Potom

$$\forall p \in \mathcal{M} : |[p]| \cdot |\mathrm{Stab}(p)| = |\Gamma|$$

Důkaz:

- Volme $p \in \mathcal{M}$, nechť $k := |[p]|, [p] = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$, kde $q_1 := p$.
- Označme $\Gamma_i := \{\alpha \in \Gamma : \alpha \bullet p = q_i\}, i = 1, 2, \dots, k$.
- Tedy $\Gamma_1 = \mathrm{Stab}(p)$. Zjevně $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ jsou disjunktní a jejich sjednocení je Γ.
- Tvrdím, že $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = \dots = |\Gamma_k|$.
- Volme $i \geq 2$ a dokážeme $|\Gamma_1| = |\Gamma_i|$.
- Jistě Γ_i je neprázdná, protože jinak by $p \not\simeq q_i$ a $q_i \notin [p]$.
- Volme libovolné $\alpha_0 \in \Gamma_i$.
- Uvážím zobrazení $\Phi : \Gamma_1 \to \Gamma_i$ definované pro $\beta \in \Gamma_1 : \Phi(\beta) = \alpha_0\beta$.
- Tvrdím, že Φ je bijekce $\Gamma_1 \to \Gamma_i$.
- Ověřme:

1. $\forall \beta \in \Gamma_1 : \Phi(\beta) \in \Gamma_i$

$$\Phi(\beta) \bullet p = (\alpha_0\beta) \bullet p = \alpha_0 \bullet (\beta \bullet p) = q_i$$

2. Φ je prosté
    - Předpokládejme, že $\exists \beta_1, \beta_2 \in \Gamma_1 : \Phi(\beta_1) = \Phi(\beta_2)$, tj. $\alpha_0\beta_1 = \alpha_0\beta_2$, tj. $\beta_1 = \beta_2$.
3. Φ je na
    - Volme $\gamma \in \Gamma_i$ hledejme $\beta \in \Gamma_1$ t.ž.

$$\Phi(\beta) = \gamma \Leftrightarrow \alpha_0\beta = \gamma \Leftrightarrow \beta = \alpha_0^{-1}\gamma \in \Gamma_1$$

$\square$

Věta (*"Burnsideovo lemma", "Cauchy-Froheriova fromule"*)

Nechť Γ je koneřná grupa s akcí na množině $\mathcal{M}$. Potom:

1. (*jednoduchá verze*) pokud $\mathcal{M}$ je konečná, tak $|\mathcal{M}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\alpha\in\Gamma}|\mathrm{Fix}(\alpha)|$. Nebo-li "počet orbit je průměrný počet bodů".
2. (*obecná verze*) Nechť má každá orbita $o \in \mathcal{M}/\Gamma$ přiřazenou váhu $||o|| \in \mathbb{N}_0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje jen konečně mnoho orbit váhy n. Potom:

$$\sum_{o\in\mathcal{M}/\Gamma} x^{||o||} = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{p\in\mathrm{Fix}(\alpha)} x^{||[p]||}$$

Důkaz:

- *Levou stranu si označím $LS(x)$ a pravou $PS(x)$.*
- $2 \Rightarrow 1$ Zvolme $||o|| = 0$ pro každé $o \in \mathcal{M}/\Gamma$.
- Definujeme $\mathcal{D} := \{(\alpha, p) \in \Gamma \times \mathcal{M}; \alpha \bullet p = p\}$ a $S = \sum_{(\alpha,p)\in\mathcal{D}} x^{||[p]||}$. Pak počítáme dvěma způsoby.

$$(1) S = \sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{p\in\mathcal{M};(\alpha,p)\in\mathcal{D}} x^{||[p]||} = \sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{p\in\mathrm{Fix}(\alpha)} x^{||[p]||} = |\Gamma| \cdot PS(x)$$

$$(2) S = \sum_{p\in\mathcal{M}}\sum_{\alpha\in\Gamma;(\alpha,p)\in\mathcal{D}} x^{||[p]||} = \sum_{p\in\mathcal{M}} |\mathrm{Stab}(p)| \cdot x^{||[p]||} =$$

$$= \sum_{p\in\mathcal{M}} \frac{|\Gamma|}{||[p]||} x^{||[p]||} = \sum_{o\in\mathcal{M}/\Gamma}\sum_{p\in o}\frac{|\Gamma|}{|o|} x^{||o||} = |\Gamma| \sum_{o\in\mathcal{M}/\Gamma} x^{||o||} = |\Gamma| \cdot LS(x)$$

$\square$