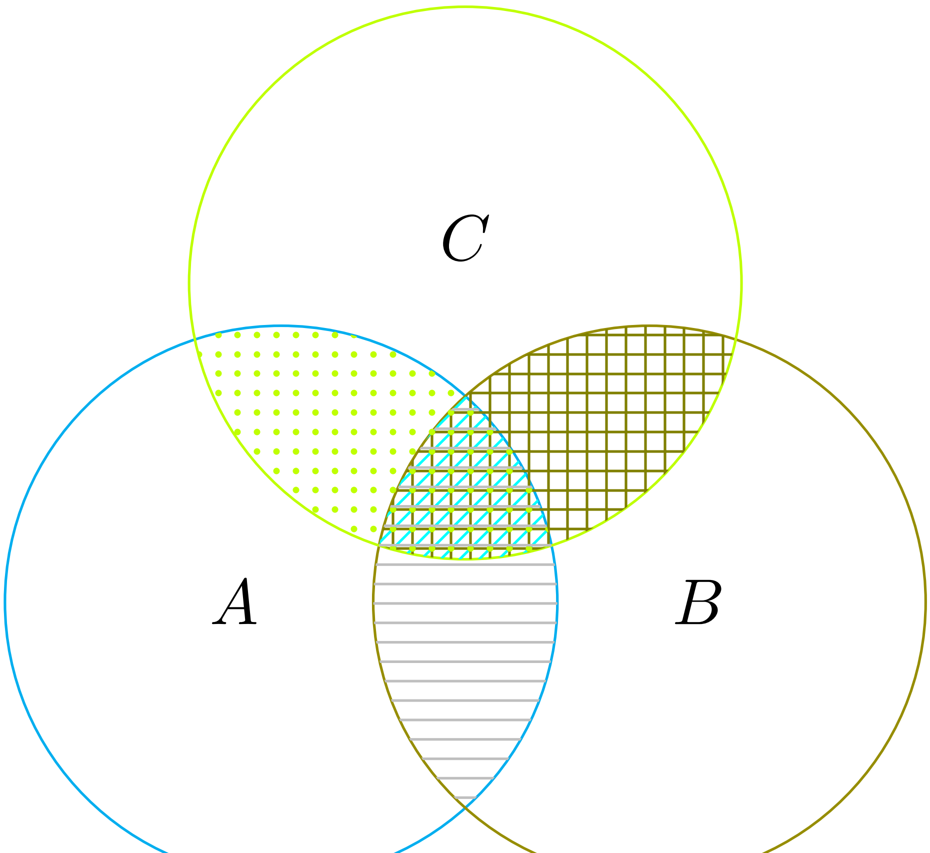
Teorie množin

Tomáš Turek



10. prosince 2023

Information

Následující text jsou moje osobní zápisky z Teorie množin z roku 2021-2022. V textu se můžou vyskytovat jak gramatické chyby, tak i technicé chyby (jako ne zcela správný důkaz apod.), tím pádem berte text jako doplňek přednášky.

Also there may be some mistakes. If you find some and want to update them, you may find all the sources on the GitHub.

Obsah

1. Úvod

1.1 Jazyk teorie množin

Jazyk teorie $x \in Y$. Také se bude používat *metajazyk* jako například: “definovat”, “formule” a “třída”.

1.1.1 Symboly

- Proměnné pro množiny X,Y,Z,x_1,$x_2, \dots$.
- Binární predikátový (relační) symbol $=$ a taky $\in$ (náležení).
- Dále také logické spojky: $\neg, \wedge\,, \vee\,, \rightarrow, \leftarrow$ $(\Leftarrow, \Rightarrow)$.
- Také kvantifikátory: $\forall$ a $\exists$.
- Samozřejmě i závorky $(), []$.

1.1.2 Formule

Atomické formule $x = y$ a $x \in y$.

1. Jsou-li φ, ψ formule, pak $\neg\varphi, \varphi{\vee}\psi, \varphi{\wedge}\psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ jsou také formule (popřípadě i uzávorkované).
2. Je-li φ formule, pak $(\forall x)\varphi$ a $(\exists x)\varphi$ jsou také formule.

Každá formule pak lze dostat z atomických formulí konečně mnoha pravidly 1 a 2.

1.1.3 Rozšíření jazyka (zkratky)

- $x \neq y$ je pro $\neg(x = y)$.
- $x \notin y$ je pro $\neg(x \in y)$.
- $x \subseteq y$ je pro "x je podmnožina y"$(\forall u)(u \in x \rightarrow u \in y)$.
- $x \subset y$ je pro "x je vlastní podmnožina"$(x \subseteq y \wedge x \neq y)$.

Cvičeni: Napište formulí “množina x je prázdná”.

1.2 Axiomy logiky (“jak se chovají logické symboly”)

Axiomy výrokové logiky např.: schéma axiomů: Jsou-li φ, ψ formule, pak

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

je **axiom**.

Axiomy predikátové logiky např.: Schéma axiomů: Jsou-li φ, ψ formule, x proměnná, která není volná ve φ, pak

$$(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$$

je axiom.
Axiomy pro rovnost:

- x je proměnná, pak $x = x$ je axiom.
- x,y,z jsou proměnné, R je relační symbol, pak

$$(x = y) \to (\forall z)(R(x,z) \leftrightarrow R(y,z))$$

$$(x = y) \to (\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z)$$

$$(x = y) \to (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

Odvozovací pravidla:

- Z $\varphi, \varphi \to \psi$ odvoď ψ.
- Z φ' odvoď $(\forall x)\varphi$.

2. Axiomy teorie množin

“Jak se chová $\in$.” “Jaké množiny existují.”

Zermelo-Fraenkelova teorie, zkráceně **ZF** má celkem 9 axiomů (resp. 7 axiomů a 2 schémata). Pak je ještě 10.axiom výběru (**AC**) to pak je **ZF+AC=ZFC**.

2.1 1.Axiom existence množin

“Existuje množina.”

$$(\forall x)(x = x)$$

2.2 2.Axiom extenzionality

Udává souvislost mezi $\in$ a $=$. “Množina je určena svými prvky.”

$$(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$$

Cvičeni: Dokažte $((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z)) \rightarrow x \subset z$.

2.3 3.Schéma axiomu vydělení

Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volnou proměnnou z. Pak:

$$(\forall a)(\forall x)(\exists z)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x))$$

je axiom.

“Z množiny a vybereme prvky s vlastností $\varphi(x)$ a ty vytvoří novou množinu z.” Díky axiomu extenzionality je taková z právě jedna.

2.3.1 Značení:

- $\{x; x \in a \wedge \varphi(x)\}$ je zkrácení.
- $\{x \in a; \varphi(x)\}$ "Množina všech prvků a splňující $\varphi(x)$."

Definice 1.

- *Průnik:* $a \cap b$ *je* $\{x, x \in a \wedge x \in b\}$.
- *Rozdíl:* $a \setminus b$ *je* $\{x, x \in a \wedge x \notin b\}$

Cvičení:

- *Napište formulí “množina a je jednoprvková”.*
- *Dokažte, že množina všech množin neexistuje.*

2.4 4.Axiom dvojice

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

"(Ne)každým dvěma množinám a,b existuje množina z, která má za prvky právě a,b."

Definice 2.
- *$\{a,b\}$ je **neuspořádaná dvojice** množin a,b, jakožto dvouprvková množina s prvky a,b (pokud $a \neq b$).*
- *$\{a\}$ znamená $\{a,a\}$, nebo-li jednoprvková množina s prvkem a.*

Příklad. Můžeme vytvořit $\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\dots$.

Cvičení: Dokažte $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$.

Definice 3. *(a,b) je **uspořádaná dvojice** množin a,b. To je pak množina $\{\{a\},\{a,b\}\}$*

Poznámka. Pro $a = b$ je $(a,b) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Lemma 1.

$$(x,y) = (u,v) \leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$$

Důkaz.
- $\leftarrow$
- $\{x\} = \{u\}$ plyne z axiomu extenzionality.
- $\{x,y\} = \{u,v\}$; $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$
- $\rightarrow$
- $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$ to pak znamená, že $\{x\} = \{u\} \vee \{x\} = \{u,v\}$ kde v obou případech $x = u$.
- $\{u,v\} = \{x\} \vee \{u,v\} = \{x,y\}$ tedy $v = x \vee v = y$
- Pokud $v = x$ pak z $x = u$ plyne, že $v = u = x$.

$\square$

Definice 4. *Jsou-li $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ množiny, definujeme **uspořádanou n-tici** $(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)$. Následně (a_1) znamená a_1 a je-li definována $(a_1,\dots,a_k)$ pak $(a_1,\dots,a_k,a_{k+1})$ je $((a_1,\dots,a_k),a_{k+1})$.*

Lemma 2.

$$(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n) = (b_1,b_2,b_3,\dots,b_n) \leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge \dots a_n = b_n)$$

Důkaz. Jako cvičení. $\square$

2.5 5.Axiom sumy (axiom of the union)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$$

Definice 5. *$\bigcup a$ je **suma** množiny a. Tzn "$\{x,(\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\}$".*

Pozorování: Pokud $a = \{b,c\}$, pak $\bigcup\{b,c\} = \{x, x \in b \vee x \in c\}$.

Definice 6. *$b \cup c$ je $\bigcup\{b,c\}$ sjednocení množin b,c.*

Definice 7. *Jsou-li $a_1,\dots a_n$ množiny, definujeme **neuspořádanou n-tici** $\{a_1,\dots a_n\}$ (n-prvkovou množinu, pokud každé a_i je různé) rekurzivně. Je-li definovaná $\{a_1,\dots a_k\}$ pro $k \geq 2$, pak $\{a_1,\dots a_k,a_{k+1}\}$ je $\{a_1,\dots a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$.*

2.6 6.Axiom potence (power set, potenční množina)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \subseteq a)$$

"Existuje množina z jejichž prvky jsou právě podmnožiny množiny a."

Definice 8. *$\mathcal{P}(a)$ je "$\{x; x \subseteq a\}$" potenční množina $[2^a]$ množiny a (potence a).*

Příklad. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Cvičení: Co je $\mathcal{P}(\bigcup a)$ a jestli $\bigcup(\mathcal{P}(a)) = a$?

2.7 7.Schéma axiomu nahrazení

"Obraz množiny funkcí je množina."

Je-li $\psi(u,v)$ formule, která neobsahuje volné proměnné w,z, pak

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \wedge \psi(u,w)) \rightarrow v = w) \rightarrow (\forall a)(\forall z)(\forall v)(v \in z \leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u,v)))$$

je axiom.

- "Je-li ψ funkce (částečná) určená formulí: $\psi(u,v)$ je $f(u) = v$, pak obrazem a touto funkcí je opět množina (z)."
- Také implikuje schéma vydělení: $\varphi(u) \wedge u = v$.
- Poznámka: *transfinitní rekurze, konstrukce $\omega + \omega$, Zornovo lemma, věta o dobrém uspořádání.*

2.8 8.Axiom fundovanosti (foundation, regularity)

$$(\forall a)(a \neq \emptyset \rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$$

"Každá množina má prvek, který je s ní disjunktní."

Cvičení: Ukažte, že Axiom fundovanosti zakazuje existenci konečných cyklů relace $\in$. Tedy množiny y takové, že $y \in y$, ale i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takové, že $y_1 \in y_2 \in \cdots \in y_n \in y_1$.

Díky axiomu fundovanosti lze všechny množiny vygenerovat z prázdné množiny operacemi $\mathcal{P}, \bigcup$.

3. Třídy

Definice 9. *$\varphi(x)$ je formule a $\{x; \varphi(x)\}$ označuje "seskupení" množin, pro které platí $\varphi(x)$.*

- Pokud $\varphi(x)$ je tvaru $x \in a \wedge \psi(x)$, pak je to množina (axiom vydělení).
- $\{x; \varphi(x)\}$ je třídový term, soubor které označuje je **třída** určená formulí $\varphi(x)$.
- "Definovatelný soubor množin."
- Je-li y množina, pak $y = \{x; x \in y \wedge x = x\}$ je třída.
- Tedy každá množina je i třída.
- **Vlastní třída** je třída, která není množinou.

3.1 Rozšíření jazyka:

- Ve formulích na místě volných proměnných připustíme třídové termy.
- Navíc proměnné pro třídy jsou X,Y, ... (nebude možné je kvantifikovat).

3.2 Atomické proměnné

- $x = y, x \in y, x = X, x \in X, X \in x, X = Y, X \in Y$
- Plus ještě výrazy vzniklé nahrazením $\{x, \varphi(x)\}$ za x a $\{y, \varphi(y)\}$ za y.
- Ostatní formule rozšířeného jazyka vznikají pomocí logických spojek ($\neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow$) a kvantifikací množinových proměnných $((\forall x) \ldots (\exists y) \ldots)$.
- Formule s třídovými termy bez třídových proměnných označován jako "zkrácený zápis" formule základního jazyka.
- Formule s třídovými proměnnými označované jako "schéma formulí" základního (popř. rozšířeného) jazyka.

3.3 Eliminace třídových termů

x,y,z,X,Y jsou proměnné a $\varphi(x), \psi(x)$ formule základního jazyka. X zastupuje $\{x, \varphi(x)\}$ a Y zastupuje $\{y, \varphi(y)\}$.

1. $z \in X$ zastupuje $z \in \{x, \varphi(x)\}$.
   - "z je prvkem třídy všech množin, splňující $\varphi(x)$."
   - Nahradíme: $\varphi(z)$.
2. $z = X$ zastupuje $z = \{x, \varphi(x)\}$.

- “Množina z se rovná třídě X.”
- Nahradíme: $(\forall u)(u \in z \leftrightarrow \varphi(u))$.

3. $X \in Y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} \in \{y, \psi(y)\}$.
   - Nahradíme: $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge \psi(u))$.
4. $X \in y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} \in y$.
   - Nahradíme: $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge u \in y)$.
5. $X = Y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} = \{y, \psi(y)\}$.
   - Nahradíme: $(\forall u)(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(v))$

Meta pozorování: Formule rozšířeného jazyka určují stejné třídy jako formule základního jazyka. Příklad $\{x; x \notin \{z, \psi(z)\}\} \to \{x; \neg\psi(x)\}$.

3.4 Třídové operace

Definice 10. • *$A \cap B$ je $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$.*

- *$A \cup B$ je $\{x, x \in A \vee x \in B\}$.*
- *$A \setminus B$ je $\{x, x \in A \wedge x \notin B\}$.*
- *Pokud $A = \{x, \varphi(x)\}$ a $B = \{y, \psi(y)\}$, pak $A \cap B = \{z, \varphi(z) \wedge \psi(z)\}$.*

Definice 11. *$\{x; x = x\}$ je **univerzální třída**, která se značí jako V.*

- A je třída, (absolutní) doplněk A je $V \setminus A$, který se značí jako $-A$.
- $A \subseteq B, A \subset B$ značí, že A je podtřídou B (popř. vlastní podtřídou).

Cvičení: Rozepište v základním jazyce teorie množin.

1. *$\bigcup A$ nebo-li suma třídy A je $\{x, (\exists a)(a \in A \wedge x = a)\}$*
2. *$\bigcap A$ nebo-li průnik třídy A je $\{x, (\forall a)(a \in A \to x = a)\}$*
3. *$\mathcal{P}(A)$ nebo-li potenciál třídy A je $\{a, a \subseteq A\}$.*

$\bigcap \emptyset = V$, protože $\{x, (\forall a)(a \in \emptyset \to x \in a)\}$.
Cvičení: $a \neq \emptyset$, je $\bigcap a$ množina?
Cvičení: Je $\mathcal{P}(V) = V^2$?

Lemma 3. *Univerzální třída V není množina.*

Důkaz. *Cvičení.* □

Lemma 4. *Je-li A třída a množina, průnik $A \cap a$ je množina.*

Důkaz. Schéma axiomu vydělení $A = \{x, \varphi(x)\}, a \cap A = \{x, x \in a \wedge \varphi(x)\}$. □

Definice 12. ***Kartézský součin tříd*** *A,B značen $A \times B$ je $\{(a,b), a \in A \wedge b \in B\}$ což je zkrácený zápis pro $\{x, (\exists a)(\exists b)(x = (a,b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}$.*

Lemma 5. *Jsou-li a,b množiny pak i $a \times b$ je množina.*

Důkaz.

- Platí $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$.
- Vpravo je množina axiomu dvojice , sumy, dvakrát potence.
- Pak podle lemma (axiomu vydělení) $A = a \times b, a = \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ tedy $a \times b$ je množina.
- Pokud $u \in a, v \in b$, pak $\{u\}$,$\{u,v\} \subseteq a \cup b$ tedy $\{u\}$,$\{u,v\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$, stejně pak $\{\{u\}, \{u,v\}\} \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$ a $\{\{u\}, \{u,v\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$.

□

Definice 13. *X je třída, pak $X^1 = X$, induktivně pak $X^n = X^{n-1} \times X$.*

X^n je třída všech uspořádaných n-tic prvků X.
Pozorování: $V^n \subseteq V^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq V^1 = V$
Cvičení: Ukažte, že obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$. Například pro $X = \{\emptyset\}$.

4. Relace

Definice 14.

- *Třída* R *je (binární)* ***relace****, pokud* $R \subseteq V \times V$.
- xRy *zkratka za* $(x,y) \in R$.
- n*-ární relace je* $R \subseteq V^n$.

Příklad.

- *Relace náležení* E *je* $\{(x,y), x \in y\}$.
- *Relace identity* Id *je* $\{(x,y), x = y\}$.

Definice 15. *Je-li* X *relace (libovolná třída), pak:*

- $Dom(X)$ *je* $\{u,(\exists v)(u,v) \in X\}$
- $Rng(X)$ *je* $\{v,(\exists u)(u,v) \in X\}$
- *Je-li* Y *třída, pak* $X''Y(X[Y])$ *je* $\{z,(\exists y)(y \in Y \wedge (y,z) \in X\}$.
- *Nebo-li obraz třídy* Y *třídou* X.
- $X \restriction Y$ *je* $\{(y,z), y \in Y \wedge (y,z) \in X\}$.
- *Zúžení třídy* X *na třídu* Y*. (restrikce, parcelizace)*

Lemma 6. *Je-li* x *množina,* Y *třída, pak* $Dom(x), Rng(x), x \restriction Y, x''Y$ *jsou množiny.*

Důkaz.

- Vnoříme do větší množiny.
- Platí $Dom(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$.
- Když $u \in Dom(x)$ pak $(\exists v)(u,v) \in x$ a $u \in \{u\} \in (u,v) \in x$. Tedy $\{u\} \in \bigcup(x)$, tedy $u \in \bigcup(\bigcup(x))$.
- Podobně i pro $Rng(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$.
- $v \in Rng(x) : (\exists u)(u,v) \in x$
- $v \in \{u,v\} \in (u,v) \in x$ tedy $v \in \bigcup(\bigcup(x))$.
- Pak už jenom $x \restriction Y \subseteq x; x''Y \subseteq Rng(x)$

$\square$

Definice 16.

- R,S *jsou relace. Pak* R^{-1} *je* $\{(u,v),(v,u) \in R\}$.
- *Nebo-li relace* ***inverzní*** *k* R.
- $R \circ S$ *je* $\{(u,v);(\exists w)((u,w) \in R \wedge (w,v) \in S)\}$.
- *Nebo-li složení relací* R *a* S.

Poznámka. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

Cvičení

- *Ověřte, že pro libovolnou relaci R je $Id \circ R = R = R \circ Id$.*
- $(x,y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y$

Definice 17. *Relace F je **zobrazení (funkce)** pokud:*

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(((u,v) \in F \wedge (u,w) \in F) \rightarrow v = w)$$

"Pro každé $v \in Dom(F)$ existuje právě jedna množina v taková, že $(u,v) \in F$." Píšeme $F(u) = v$.

Definice 18.
- *F je zobrazení třídy X **do** třídy Y; $F : X \rightarrow Y$, pokud $Dom(F) = X$ a $Rng(F) \subseteq Y$.*
- *F je zobrazení třídy X **na** třídu Y; pokud navíc platí $Rng(F) = Y$.*
- *F je **prosté** zobrazení pokud F^{-1} je zobrazení.*
- *Pokud $(\forall v)(\forall u)(\forall w)((F(u) = w \wedge F(v) = w) \rightarrow u = v)$.*
- *"Každý prvek $Rng(F)$ má právě jeden vzor."*

Pozorování: Pokud F je prosté zobrazení, pak F^{-1} je také prosté zobrazení.

Definice 19. *A je třída, φ je formule pak:*

- *$(\exists x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\exists x)(x \in A \wedge \varphi)$.*
- *$(\forall x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\forall x)(x \in A \rightarrow \varphi)$.*

4.1 Značení:

Obraz / vzor třídy X zobrazením F.

- $F[X]$ místo $F \text{''} X$: $F[X] = \{y, (\exists x \in X) y = F(x)\}$
- $F^{-1}[X]$ místo $F^{-1} \text{''} X$: $F^{-1}[X] = \{y, (\exists x \in X) x = F(y)\}$

Definice 20. *A je třída, a je množina, pak ${}^{a}A$ je $\{f; f : a \rightarrow A\}$, třída všech zobrazení z a do A.*

Poznámka.
- Z axiomu nahrazení $Rng(f)$ je množina, $f \subseteq a \times Rng(f)$, tedy f je množina.
- Nelze definovat ${}^{B}A$ pokud B je vlastní třída a $A \neq \emptyset$, protože je-li $Dom(f)$ vlastní třída, pak je i f.
- ${}^{\emptyset}A = \{\emptyset\}$
- ${}^{x}\emptyset = \emptyset$

Lemma 7.
1. *Pro libovolné množiny x,y je ${}^{x}y$ množina.*
2. *Je-li $x \neq \emptyset, Y$ je vlastní třída, pak ${}^{x}Y$ je vlastní třída.*

Důkaz. 1. Pokud $f : x \to y$. pak $f \subseteq x \times y$, tedy $f \in \mathcal{P}(x \times y)$. Tedy ${}^x y \subseteq \mathcal{P}(x \times y)$.

2. Pro $y \in Y$ definujeme konstantní zobrazení $K_y : x \to Y$ tak, že $(\forall u \in x)(K_y(u) = y)$. $K_y = x \times y$, protože $x \neq \emptyset$, pro $y \neq y'$ platí $K_y \neq K_{y'}$. $K = \{K_y, y \in Y\}$ máme $K \subseteq^x Y$.

   - Teď sporem: Pokud ${}^x Y$ je množina, pak K je množina. Definujeme $F : K \to Y$ jako $F(K_y) = y$. Z axiomu nahrazení Y je množina a to je spor.

□

4.2 Uspořádání

Definice 21. *Relace $R(\subseteq V \times V)$ je na třídě A:*
Reflexivní:

$$(\forall x \in A)((x,x) \in R)$$

Antireflexivní:

$$(\forall x \in A)((x,x) \notin R)$$

Symetrická:

$$(\forall x, y \in A)((x,y) \in R \leftrightarrow (y,x) \in R)$$

Slabě antisymetrická:

$$(\forall x, y \in A)(((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \to y = x)$$

Antisymetrická

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \to \neg(yRx))$$

Trichotomická:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx \vee x = y)$$

Tranzitivní:

$$(\forall x,y,z \in A)((xRy \wedge yRz) \to xRz)$$

Pozorování: Tyto vlastnosti jsou **dědičné**, to znamená, že platí na každé podtřídě $B \subseteq A$.

Definice 22.
- *Relace R je **uspořádání na třídě** A, pokud R je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.*

- *$x,y \in A$ jsou **porovnatelné (srovnatelné)** relací R pokud $xRy \vee yRx$.*

4.2.1 Značení:

$x \leq_R y$ znamená xRy, neboli "x je menší nebo rovno y vzhledem k R."

Definice 23.

- *Uspořádání R je* ***lineární*** *pokud R je trichotomické.*
- *R' je* ***ostré*** *uspořádání pokud je tvaru $R \setminus Id$ (je antireflexivní, antisymetricá a tranzitivní).*
- *$x <_R y$ značí $xR'y$*

Cvičení: Doplňte tabulku ANO/NE.

Relace	Uspořádání?	Ostré?
E		
Id		

Definice 24. *Nechť R je uspořádání na třídě A a nechť $X \subseteq A$. Řekněme, že $a \in A$ je (vzhledem k R a A):*

- ***Majorita (horní mez)*** *třídy X, pokud $(\forall x \in X)(x \leq_R a)$.*
- *Minoranta (dolní mez) třídy X, pokud $(\forall x \in X)(a \leq_R x)$.*
- ***Maximální prvek*** *třídy X, pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(a <_R x))$.*
- *Minimální prvek třídy X, pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(x <_R a))$.*
- ***Největší prvek*** *třídy X, pokud $a \in X$ a a je majoranta X.*
- *Největší prvek třídy X, pokud $a \in X$ a a je minoranta X.*
- ***Supremum*** *třídy X, pokud a je nejmenší prvek třídy všech majorant X.*
- *Infimum třídy X, pokud a je největší prvek třídy všech minorant X.*

Pozorování: Největší implikuje maximální, pokud R je lineární, tak platí i opačná implikace. Také největší a supremum je vždy nejvýše 1. Lze značit jako $a = \max_R(X)$ a $a = \sup_R(X)$.

Definice 25.

- *X je* ***shora omezená****, pokud existuje majoranta X v A.*
- *X je zdola omezená, pokud existuje minoranta X v A.*
- *X je* ***dolní množina****, pokud $(\forall x \in X)(\forall y \in A)(y \leq_R x \rightarrow y \in X)$.*
- *Analogicky i horní množina.*
- *$x \in A$, pak $| \leftarrow, x]$ je $\{y, y \in A \wedge y \leq_R x\}$. Nebo-li horní ideál omezená x.*

Pozorování: R uspořádání na A, pak pro libovolné x,$y \in A$ platí $x \leq_R y \leftrightarrow | \leftarrow ,x] \subseteq | \leftarrow ,y]$.

Poznámka.

- Konstrukce $\mathbb{R}$ z $\mathbb{Q}$: **Dedekindovy řezy**.

- $X \subseteq \mathbb{Q}, X$ je dolní množina (vzhledem k $\subseteq$) a navíc existuje-li $\sup X$, pak $\sup X \subseteq X$.

Definice 26. *Uspořádání R na třídě A je* ***dobré****, pokud každá neprázdná podmnožina $A : (u \subseteq A)$ má nejmenší prvek vzhledem k R.*

Cvičení: Napsat definice pomocí logických formulí.
Pozorování: "Dobré" je dědičná vlastnost. Dobré implikuje lineární.
Cvičení: Najděte nějaké množiny, na nichž je E dobré ostré uspořádání.

Definice 27. ***Ekvivalence*** *je pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

5. Srovnávání mohutností

Definice 28.
- *Množiny x,y mají* ***stejnou mohutnost*** *(psáno $x \approx y$) pokud existuje prosté zobrazení x na y (nebo-li bijekce). Někdy označováno jako x je ekvivalentní y.*
- *Množina x má* ***mohutnost menší nebo rovnou*** *mohutnosti y (psáno $x \preceq y$) pokud existuje prosté zobrazení x do y. Někdy označováno jako x je subvalentní y.*
- *x má* ***menší mohutnost*** *než y (psáno $x \prec y$) pokud platí $x \preceq y \wedge \neg(x \approx y)$).*

Pozorování: $x \subseteq y \to x \preceq y$ (identita), $x \subset y \to x \preceq y$ (ne $x \prec y$, například $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{1\}$).

Poznámka. To jestli $\preceq$ je trichotomická v **ZF** nelze rozhodnout. Přidáím axiomu výběru už ale ano.

Lemma 8. *Jsou-li x,y,z množiny, potom:*

1. $x \approx x$
2. $x \approx y \to y \approx x$
3. $((x \approx y) \wedge (y \approx z)) \to x \approx z$, *tedy $\approx$ je ekvivalence.*
4. $x \preceq x$
5. $x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z$

Důkaz. Prakticky jen triviální, stačí najít dané zobrazení.

- Id
- $F \to F^{-1}$
- $F \wedge G \to F \circ G$
- Id
- $F \wedge G \to F \circ G$

□

Pozorování: $x \approx y \to (x \preceq y \wedge y \preceq x)$

Theorem 1 (Cantor-Bernstein)**.**

$$(x \preceq y \wedge y \preceq x) \to x \approx y$$

Důkaz. Důkaz se provede pomocí grafů. Také bude potřeba dodatečné lemma, které bude později. Jako graf si představíme bipartitní, kde jedna partita je x a druhá y. Následně přidáme orientované hrany jakožto funkce f a g, kde $f : x \to y, g : y \to x$ jsou prosté zobrazení. Teď se podíváme na komponenty grafu.

1. Buď může být kružnice sudé délky.

2. Nebo cesta s počátkem.

3. Anebo cesty obousměrné.

Nyní uvažme “indukovaná” zobrazení: $(\hat{f}) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(y)$. Tahle funkce je monotónní vzhledem k inkluzi. Definujeme $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ takto: Pro $u \subseteq x$ nechť $H(u) = x - g[y - f[u]]$. H je monotónní vzhledem k inkluzi. $u_1 \subseteq u_2 \Rightarrow f[u_1] \subseteq f[u_2] \Rightarrow y - f[u_1] \supseteq y - f[u_2] \Rightarrow, \Rightarrow g[y - f[u_1] \supseteq g[y - f[u_2] \Rightarrow H(u_1) \subseteq H(u_2)$. Podle lemma o pevném bodě $(\exists c)(H(c) = c)$, tedy $x - g[y - f[c]] = c \Rightarrow x - c = g[y - f[c]]$. Tedy g^{-1} je prosté zobrazení $x \setminus c$ na $y \setminus f[c]$. Stačí definovat $h : x \to y$ jako:

$$h(u) = \begin{cases} f(u) & \text{pokud } u = c \\ g^{-1}(u) & \text{jinak} \end{cases}$$

h je prosté zobrazení x na y. □

Definice 29. *Zobrazení $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ je* ***monotónní*** *(vzhledem k inkluzi) pokud pro každé dvě množiny $u,v \subseteq x$ platí $u \subseteq v \to H(u) \subseteq H(v)$.*

Lemma 9. *Je-li $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ zobrazení monotónní vzhledem k inkluzi, pak existuje podmnožina $c \subseteq x$ taková, že $H(c) = c$. Též označován jako* ***pevný bod****.*

Důkaz. $A = \{u, u \subseteq x \wedge u \subseteq H(u)\}$, $c = \bigcup A$ neboli supremum. $u \in A$ pak dostanu dvě možnosti:

1. $u \subseteq c$

2. $u \subseteq H(u) \subseteq H(c)$ (díky tomu, že H je monotónní)

Z toho pak plyne, že $H(c)$ je majoranta a tedy $c \subseteq H(c)$. Pak z monotonie platí $H(c) \subseteq H(H(c))$, tedy $H(c) \in A$, takže $H(c) \subseteq c$, nebo-li c je majoranta. Z obou inkluzí pak plyne, že $c = H(c)$. □

Cvičení: Ilustrace monotńní funkce $h : [0,1] \to [0,1]$.
Cvičení: $A \subseteq \mathcal{P}(x)$ a uspořádání $\subseteq$, pak $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$ *a* $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$.

Příklad.

- $\omega = \mathbb{N}_0$ pak $\omega \approx \omega \times \omega$

- $f : \omega \to \omega \times \omega$ jako $f(n) = (0,n)$

- $g : \omega \times \omega \to \omega$ jako $g((m,n)) = 2^m 3^n$

- Podle Věty platí $\omega \approx \omega \times \omega$. item $h : \omega \to \omega \times \omega$ jako $h((m,n)) = 2^m(2n + 1) - 1$

Cvičení: Ověřte, že g je prosté a h je bijekce.
Cvičení: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$
Cvičení: $[0,1] \approx [0,1] \times [0,1]$

Lemma 10. *Nechť x,y,z,x_1,y_1 jsou množiny, pak:*

1. $x \times y \approx y \times x$

2. $x \times (y \times z) \approx (x \times y) \times z$

3. $(x \approx x_1 \wedge y \approx y_1) \to (x \times y \approx x_1 \times y_1)$

4. $x \approx y \to \mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$

5. $\mathcal{P}(X) \approx^x 2$, *kde* $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Důkaz. Vždy jde o to najít vhodné funkce.

1. $(u,v) \to (v,u)$
2. $(u,(b,c)) \to ((u,b),c)$
3. $f : x \to x_1, g : y \to y_1 : (a,b) \to (f(a),g(b))$
4. $f : x \to y, u \to f[u]$ (izomorfismus vzhledem k inkluzi)
5. Pro $u \subseteq x$ definujeme charakteristickou funkci $\chi_a : x \to 2$, kde;

$$\chi_a(v) = \begin{cases} 1 & v \in a \\ 0 & v \notin a \end{cases}$$

Zobrazení $\{(a, \chi_a); a \subseteq x\}$ je prosté a zobrazuje $\mathcal{P}(x)$ na ${}^x2$. □

5.1 Konečné množiny

Definice 30 (Tarski)**.** *Množina x je* ***konečná****, označíme $Fin(x)$, pokud každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má* ***maximální*** *prvek vzhledem k inkluzi.*

Cvičení: Napište definici pomocí formule.

Pozorování: x je konečná právě tehdy, když každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má minimální prvek vzhledem k inkluzi.

Důkaz. Uvažme $d : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ jako $d(u) = x \setminus u$. $u \subseteq v \Leftrightarrow d(u) \supseteq d(v)$ □

Definice 31. *Množina a je* ***Dedekindovsky konečná*** *pokud má větší mohutnost než každá vlastní podmnožina $b \subset a$. (Nebo-li neexistuje prosté zobrazení a na b.)*

Lemma 11. *Je-li množina a konečná tak je i Dedekindovsky konečná.*

Důkaz. Nutno dokázat, že pokud $b \subset a$ pak $b \preceq a$. Sporem: $b \approx a$. Nechť $y = \{b, b \subset a \wedge b \approx a\}, y \neq \emptyset, y \in \mathcal{P}(a)$. Nechť $c \in y$ je minimální prvek y vzhledem k $\subseteq$. Nechť $f : a \to a$ je prosté zobrazení a na c. $d = f[c]$. $f \upharpoonright c$ je prosté zobrazení c na d. Tedy $c \approx d$, tedy $d \in y$. $d \subseteq c : (\exists x)(x \in a \setminus c)$ pak $f(x) \in c \setminus d$. Spor s minimalitou volby c. □

Poznámka. Opačná implikace v **ZF** není dokazatelná.

- Existuje lineární uspořádání $\leq$, které je dobré, pak i $\geq$ je dobré.
- Existuje lineární uspořádání a každá 2 lineární uspořádání jsou izomorfní.
- x je konečná $\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ je dedekindovsky konečná.

Theorem 2. *1. Je-li a konečná uspořádaná množina (relací $\leq$) pak každá její neprázdná podmnožina $b \subseteq a$ má maximální prvek.*

2. *Každé lineární uspořádání na konečné množině je dobré.*

Důkaz. 1. Pro každé $x \in a$ uvažme $| \leftarrow, x] = \{y, y \in a \wedge y \leq x\}$.

- $u = \{| \leftarrow, x], x \in b\}, u \subseteq \mathcal{P}(a), u \neq \emptyset$
- Z konečnosti a existuje $m \in b$ takové, že $| \leftarrow ,m]$ je maximální prvek vzhledem k $\subseteq$.
- $x \leq y \Leftrightarrow | \leftarrow, x] < | \leftarrow, y]$
- Tedy m je maximální prvek b vzhledem k $\subseteq$.
- Minimální prvek se najde podobně, akorát to bude horní množina a minimální prvek.

2. Minimální prvek v lineárním uspořádání je už nejmenší.

□

Definice 32. *F je zobrazení A_1 do A_2, R_1,R_2 jsou relace. F je **izomorfismus** tříd A_1,A_2 vzhledem k R_1,R_2 pokud F je prosté zobrazení A_1 na A_2 a $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_2)(x,y) \in R_1 \leftrightarrow (F(x),F(y)) \in R_2$.*

Definice 33. *A je mmožina uspořádaná relací R. B je mmožina uspořádaná relací S. Zobrazení F je **počátkové vnoření** A do B, pokud $A_1 = Dom(F)$ je dolní podmnožina A a $B_1 = Rng(F)$ je dolní podmnožina B. A F je izomorfismus A_1 a B_1 vzhledem k R,S.*

Lemma 12. *Nechť F,G jsou počátkové vnoření dobře uspořádané množiny A do dobře uspořádané množiny B. Potom $F \subseteq G$ nebo $G \subseteq F$.*

Důkaz. Nechť R je dobré uspořádání množiny A. Nechť S je dobré uspořádání množiny B. $Dom(F), Dom(G)$ jsou dolní podmnožiny A. R je lineární, tedy $Dom(F) \leq Dom(G) \vee Dom(G) \leq Dom(F)$. (BÚNO: $Dom(F) \leq Dom(G)$, jinak přejmenuji množiny). Dokážeme $(\forall x \in Dom(F))F(x) = G(x)$. Sporem Nechť x je nejmenší (vzhledem k R) prvek množiny $\{z, z \in A \wedge G(z) \neq F(z)\}$. Tedy $\forall y <_R x : F(y) = G(y)$. Z linearity S je $F(x) <_S G(x) \vee G(x) <_S F(x)$ (BÚNO: $F(x) <_S G(x)$). Nechť $b = F(x)$. Je-li $z \in Dom(G)$ pak buď: $z <_R x$ $G(z) = F(z)$, $z \geq_R x$ $F(x) = b$. Pak $G(z) \geq_S G(x) >_S F(x) = b$. V obou případech $b \notin Rng(G)$ a tedy $Rng(G)$ není dolní množina a to je spor. □

Cvičení: Lineární uspořádání jsou každé dvě dolní množiny porovnatelné inkluzí.
Cvičení: Co když místo dobrého uspořádání bude jen lineární uspořádání.

Theorem 3 (O porovnávání dobrých uspořádání.)**.** *A je množina dobře uspořádaná relací R. B je množina dobře uspořádaná relací S. Pak existuje právě jedno zobrazení F, které je izomorfismus A a dolní množiny B, nebo B a dolní množiny A.*

Důkaz. P je množina všech počátečních vnoření A do B. Nechť $F = \bigcup P$. F je zobrazení: Když $(x,y_1)(x,y_2) \in F$ existuje počáteční vnoření F_1, F_2, že $(x,y_1) \in F_1, (x,y_2) \in F_2$. Podle lemma $F_1 \subseteq F_2$ nebo naopak. Předpokládejme, že nastala tato situace. Tedy $(x,y_1) \in F_2; F_2$ je zobrazení, tedy $y_1 = y_2$. F je počáteční vnoření: Když $x_1 <_R x_2 \in Dom(F)$ tak existuje počáteční vnoření F' že $x_2 \in Dom(F')$. Tedy $x_1 \in Dom(F') \subseteq Dom(F)$. Podobně pro $Rng(F) = \bigcup Rng(F')$ je dolní. $F(x_1) = F'(x_1) <_S F'(x_2) = F(x_2)$, $Dom(F) = A \vee Rng(F) = B$. Sporem: $A \setminus Dom(F), B \setminus Rng(F)$ jsou neprázdné, mající nejmenší prvky a,b. Definujeme $F' = F \cup \{(a,b)\}$ je počáteční vnoření $F' \in P, F' \subseteq F$ a to je spor. □

Cvičení: Jednoznačnost F.
Cvičení: Sjednocení dolních množin je dolní množina.

Theorem 4. *a je konečná množina, pak každé lineární uspořádání na a jsou izomorfní.*

Důkaz. R,S jsou dvě lineární uspořádání a také dobrá uspořádání. (a,R) je izomorfní dolní množině (a,S) nebo dolní množina (a,R) je izomorfní (a,S). Dolní množina $b, b \approx a$, z Dedekindovy konečnosti platí, že $a = b$. □

Lemma 13 (Zachovávání konečnosti.)**.** *1. $(Fin(x) \wedge y \subseteq x) \rightarrow Fin(y)$*

2. $(Fin(x) \wedge y \approx x) \rightarrow Fin(y)$

3. $(Fin(x) \wedge y \preceq x) \rightarrow Fin(y)$

Důkaz. 1. $w \subseteq \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x)$

2. $\mathcal{P}(y)$ je izomorfní $\mathcal{P}(x)$

3. Plyne z 1 a 2.

□

Lemma 14 (sjednocení konečných množin)**.** *1. $Fin(x) \wedge Fin(y) \rightarrow Fin(x \cup y)$*

2. $Fin(x) \rightarrow (\forall y) Fin(x \cup \{y\})$

Důkaz. $w \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$ neprázdná. $w_1 = \{u, (\exists t \in w)(u = t \cap x)\} \subseteq \mathcal{P}(x)$. Má maximální prvek v_1. $w_2 = \{u, (\exists t \in w)(t \cap x = v_1 \wedge t \cap y = u)\} \subseteq \mathcal{P}(y)$. Má maximální prvek v_2. $v_1 \cup v_2$ je maximální prvek w. □

Definice 34. *Třída všech konečných množin $Fin = \{x, Fin(x)\}$.*

Theorem 5 (Princip indukce pro konečné množiny)**.** *Je-li X třída, pro kterou platí:*

1. $\emptyset \in X$,

2. $x \in X \rightarrow (\forall y)(x \cup \{y\} \in X)$, pak $Fin \subseteq X$.

Důkaz. Sporem: Pokud $x \in Fin \setminus X$. nechť $w = \{v, v \subseteq x \wedge v \in X\}$. Podle 1: $\emptyset \in w$. $w \subseteq \mathcal{P}(x)$, neprázdná. w má maximální prvek v_0. $v_0 \subseteq x$. $v_0 \in X$, tedy $v_0 \neq x$ a $v_0 \subset X$. Tedy existuje $y \in x \setminus v_0$. Nechť $v_1 = v_0 \cup \{y\}$. Podle 2: $v_1 \in X$. Tedy $v_1 \in w$, spor s maximalitou v_0. □

Lemma 15. *$Fin(x) \rightarrow Fin(\mathcal{P}(x))$*

Důkaz. Indukcí: Nechť $X = \{x, Fin(\mathcal{P}(x))\}$. $\emptyset \in X$, protože $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ je konečná. Nechť $x \in X, y$ je množina. Chceme aby $x \cup \{y\} \in X$. BÚNO: $y \notin x$ (jinak triviální). Rozdělíme $\mathcal{P}(x \cup \{y\})$ na dvě části: $\mathcal{P}(x \cup \{y\}) = \mathcal{P}(x) \cup (\mathcal{P}(x \cup \{y\}) \setminus \mathcal{P}(x))$. Platí $\mathcal{P}(x) \approx z$, kde z se rovná předchozímu druhému prvku v sjednocení. Pro $u \in \mathcal{P}(x)$ definujeme $f(u) = u \cup \{y\}$. f je prosté zobrazení $\mathcal{P}(x)$ na z. Podle předpokladu $Fin(\mathcal{P}(x))$. Podle lemma $Fin(z)$. Podle lemma o sjednocení $Fin(\mathcal{P}(x) \cup z)$. Podle principu indukce $Fin \subseteq X$. □

Důsledek. $Fin(x) \cap Fin(y) \rightarrow Fin(x \times y)$

Důkaz. Nechť $z = x \cup y$, víme $Fin(z)$. $x \times y \subseteq z \times z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(z))$. □

Lemma 16 (sjednocení konečně mnoha konečných množin je konečná množina)**.** *Je-li $Fin(a)$ a $(\forall b \in a)Fin(b)$, pak $Fin(\bigcup a)$.*

Důkaz. Indukcí: $X = \{x, x \subseteq Fin \to Fin(\bigcup x)\}$.

1. $\emptyset \in X$, protože $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

2. Nechť $x \in X, y$ množina. Chceme aby $x \cup \{y\} \in X$.

Předpokládejme, že $x \cup \{y\} \subseteq Fin$. Speciálně $x \subseteq Fin$. $\bigcup(x \cup \{y\}) = \bigcup x \cup y$. Obě dvě jsou konečné a sjednocení tím pádem je také konečné. Tedy $x \cup \{y\} \in X$. Podle principu indukce $Fin \subseteq X$. □

Důsledek (Dirichletův princip pro konečné množiny.)*.* Je-li nekonečná množina sjednocení konečně mnoha množin, pak jedna z nich musí být nekonečná.

Lemma 17 (Každá konečná množina je srovnatelná se všemi množinami.)**.** $Fin(x) \to (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)$

Důkaz. Indukcí: $x = \{x, (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)\}$.

1. $\emptyset \in X$, protože $(\forall y)\emptyset \subseteq y$ tedy $\emptyset \preceq y$.

2. Nechť $x \in X, u$ je množina. BÚNO: $u \notin X$. Chceme $x \cup \{u\} \in X$, nechť X je množina.

Když $y \preceq x$, pak $x \preceq x \cup \{u\}$ z tranzitivity $y \preceq x \cup \{u\}$. Nechť $x \prec y$. g je prosté zobrazení x do y. Nechť $v \in X \setminus Rng(g)$. Definujeme $h = g \cup \{(u,v)\}, h$ je prosté zobrazení $x \cup \{u\}$ do y. Tedy $x \cup \{u\} \preceq y$. Z principu indukce $Fin \subseteq X$. □

Cvičení: $Fin(x)$ a $f : x \to y$, pak $Rng(f) \preceq x$ (pomocí indukce).
Cvičení: $(\forall x)Fin(x)$ lze dobře uspořádat (indukcí).

6. Přirozená čísla

Definice 35 (von Neumann)**.** $0 = \emptyset; 1 = \{0\} = \{\emptyset\}; 2 = \{0{,}1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; 3 = \{0{,}1{,}2\} = \ldots$, *Myšlenka: "Přirozené číslo je množina všech menších přirozených čísel."*

Definice 36. *w je **induktivní množina**, pokud $\emptyset \in w \wedge (\forall v \in w)(v \cup \{v\} \in w)$.*

6.1 9.Axiom nekonečna ("Existuje induktivní množina.")

$$(\exists z)(0 \in z \wedge (\forall x)(x \in z \to x \cup \{x\} \in z))$$

Definice 37. ***Množina všech přirozených čísel** ω je $\bigcap\{w, w$ je induktivní množina$\}$.*

Lemma 18. *ω je nejmenší induktivní množina.*

Důkaz. $0 \in \omega$, $x \in \omega, x$ patří do každé induktivní množiny. $x \cup \{x\}$ patří do každé induktivní množiny. $x \cup \{x\} \in \omega$. □

Prvky ω jsou **přirozená čísla** v teorii množin.

Definice 38. *Funkce následník $S : \omega \to \omega$. Pro $v \in \omega : S(v) = v \cup \{v\}$. "Následník čísla v."*

Theorem 6 (Princip (slabé) indukce pro přirozená čísla.)**.** *Je-li $X \subseteq \omega$ taková, že platí:*

1. *$0 \in X$,*
2. *$x \in X \to S(x) \in X$. Pak $X = \omega$.*

Důkaz. 1 a 2 dohromady říká, že X je induktivní, tedy $\omega \subseteq X$. □

Příklad. Důkaz indukcí: Chceme dokázat: $(\forall n \in \omega)(\varphi(n))$. Dokazujeme: 1. $\varphi(0)$ a 2. $(\forall n \in \omega)(\varphi(n) \to \varphi(S(n)))$.
Poznámka. Princip silné indukce: 2: $((\forall m \in \omega)m \in X) \to n \in X$.

Lemma 19 ($\in$ je ostré uspořádání)**.** *Pro libovolné $m{,}n \in \omega$ platí:*

1. *$n \in \omega \to n \subseteq \omega$*
   - *"Prvky přirozených čísel jsou přirozená čísla."*
2. *$m \in n \to m \subseteq n$*
   - *"Náležení je tranzitivní na ω."*
3. *$n \notin n$*
   - *"$\in$ je antireflexivní na ω."*

Z toho všeho plyne, že se jedná o ostré uspořádání.

Důkaz. Indukcí:

1. $0 \subseteq \omega$, a indukční krok $n \in \omega$, předpokládáme, že $n \subseteq \omega$. Pak $\{n\} \subseteq \omega$ tedy $n \cup \{n\} \subseteq \omega$.
2. Indukcí podle n:
   - 1. Krok: $m \notin 0$ tím pádem implikace splněna.
   - 2. Krok $X = \{n, n \in \omega \wedge (\forall m)(m \in n \to m \subseteq n)\}$.
   - Víme $0 \in X$.
   - Nechť $n \in X$, víme $S(n) \in \omega$.
   - Nechť $m \in S(n) = n \cup \{n\}$. Pak buď $m \in n$ a z IP pak $m \subseteq n$ anebo $m = n$ tím pádem také $m \subseteq n \subseteq S(n)$.
3. $0 \nsubseteq 0$ platí, nechť $n \in \omega$ a $n \nsubseteq n$.
   - Sporem $S(n) \subseteq S(n) = n \cup \{n\}$. Z toho pak plyne, že buď $S(n) \subseteq \{n\}$ anebo $S(n) \subseteq n$. V obou případech je $S(n) \subseteq n$, ale to pak znamená, že $n \in S(n) \subseteq n$ což je spor s předpokladem.

□

Lemma 20. *Každé přirozené číslo je konečná množina.*

Důkaz. Indukcí: $Fin(\emptyset)$ víme. Podle lemma $Fin(x) \to (\forall y)Fin(x \cup \{y\})$, speciálně pro $Fin(x \cup \{x\})$ a to je následník. □

Theorem 7. *Množina x je konečná právě tehdy, když $(\exists n \in \omega)x \approx n$.*

Důkaz. $\Leftarrow$ $Fin(n)$ tedy $Fin(x)$. $\Rightarrow$ indukcí: $X = \{x; (\exists n \in \omega)x \approx n\}$. Víme, že $0 \in X$ protože $0 \approx 0$. Nechť $x \in X, y$ množina. Víme, že $(\exists n \in \omega)n \approx x$. $y \in x$ pak $x \cup \{y\} = x \approx n$, $y \notin x$ pak $x \cup \{y\} \approx S(n) = n \cup \{n\}$. K bijekci x a n přidáme (y,n). Tedy $Fin \subseteq X$. □

Lemma 21. *Množina ω i každá induktivní množina je nekonečná.*

Důkaz. Podle lemma: 1 $n \in \omega \to n \subseteq \omega$, tedy $n \in \mathcal{P}(n)$ tedy $\omega \subseteq \mathcal{P}(n), \omega$ je neprázdná ale nemá maximální prvek vzhledem k inkluzi. Když $n \subseteq \omega$ pak podle lemma 3. $n \nsubseteq n$ a tedy $n \subset n \cup \{n\} = S(n)$. $\omega \subseteq W$ tedy i induktivní množiny. □

Cvičení: ω je Dedekindovsky nekonečná.

Lemma 22 (Linearita $\in$ na ω.)**.** *$m,n \in \omega$, platí:*

1. $m \in n \leftrightarrow m \subset n$
2. $m \in n \vee m = n \vee n \in m$ *(trichotomie)*

Důkaz. 1. $\to$ plyne z lemma 2 $m \in n \to m \subset n \wedge n \nsubseteq n$

- $\leftarrow$ indukcí podle n; $n = 0$ nelze splnit.
- Indukční krok. Nechť platí pro nějaké n a $\forall m$.

- Nechť $m \subset S(n) = n \cup \{n\}$ a $m \subseteq n$, kdyby ne pak $n \in m$ tedy $n \subseteq m$ tedy $S(n) = n \cup \{n\} \subseteq m$ a to je spor.
- $m \subset n$ z IP $m \in n \subseteq S(n)$ tedy $m \in S(n)$
- $m = n$ pak $n \in S(n)$

2. Pro $n \in \omega$ nechť $A(n) = \{m \in \omega, m \in n \vee m = n \vee n \in m\}$.

   - Dokážeme, že $A(n)$ je induktivní, indukcí podle m.
   - $n = 0 : 0 \in A(0)$, protože $0 = 0$
   - Je-li $m \in A(0)$, pak: $m = 0 : 0 \in \{m\}$ anebo $0 \in m$ a z obou plyne $0 \in m \cup \{m\} = S(n)$.
   - Tedy $S(n) \in A(0)$.
   - Tedy $A(0) = \omega$.
   - Tedy také $(\forall n \in \omega) 0 \in A(n)$.
   - $n \in \omega, m \in \omega$, předpokládejme, že $m \in A(n)$. Ukážeme, že $S(m) \in A(n)$.
   - $m \in n \to m \subset n; \{m\} \subseteq n$ tedy $S(m) \subseteq n$ z toho plyne, že $S(m) = n \vee S(m) \in n$.
   - $m = n \vee n \in m$ potom $n \in m \cup \{m\} = S(m)$
   - Ve všech případech ke $S(m) \in A(n)$.

□

Theorem 8. *Množina ω je dobře (ostře) uspořádaná relací $\in$.*

Důkaz. Nechť $a \subseteq \omega, a \neq \emptyset$. Zvolme $n \in a$. Není-li n nejmenší (minimální), tak definuji $b = n \cap a$. n je konečná, tak i b je konečná a neprázdná. $b \subseteq \omega$ tedy b má minimální prvek m vzhledem k náležení. m je minimální i v množině a: kdyby $(\exists x \in a) x \in m$, tak víme, že $m \in n$, tedy $m \subseteq n$, tedy $x \in n$, tedy $x \in b$. To je spor s minimalitou m v b. $\in$ je lineární na ω, tedy m je nejmenší prvek v a. Tedy $\in$ je dobré uspořádání. □

Poznámka. Nekonečná množina A s lineárním (ostrým) uspořádáním $<$ pro každé $a \in A : |\leftarrow, a]$ je konečná. Pak $<$ je dobré a $(A, <)$ je izomorfní $(\omega, \in)$.

Theorem 9 (Charakterizace uspořádání $\in$ na ω)**.** *Nechť A je nekonečná množina, lineárně uspořádaná (ostře) relací $<$ tak, že pro každé $a \in A$ je dolní množina $|\leftarrow, a]$ konečná. Pak $<$ je dobré a množiny A, ω jsou izomorfní vzhledem k $<, \in$.*

Důkaz. $<$ je dobré: $\emptyset \neq c \in A$. Nechť $a \in c$, předpokládejme, že a není minimální v c, pak definujeme $b = c \cap |\leftarrow, a]$. b je konečná. Tedy má minimální prvek m, m je minimální i v c. Protože $m \leq a$, pak $x \leq a$ tedy $x \in |\leftarrow, a]$ tedy $x \in b$ a to je spor. Izomorfismus: podle věty o porovnávání dobrých uspořádání jsou 2 možnosti:

1. A je izomorfní s dolní podmnožinou $B \subseteq \omega$, pak B není shora omezená. Neexistuje $n \in \omega (\forall b \in B) b \in n$. Sporem $B \subseteq S(n)$ tedy B by byla konečná a to je spor.

   - To znamená, že $(\forall n \in \omega)$ je menší než nějaký prvek $b \in B$. B je dolní množina, tedy $n \in B \to \omega \subseteq B \to \omega = B$.

2. ω je izomorfní dolní podmnožině $C \subseteq A$. C není shora omezená, kdyby ano, tak $\exists a \in A : C \subseteq |\leftarrow, a], C$ by byla konečná, spor. $(\forall a \in A, \exists c \in C : a \subseteq c, C$ je dolní, tedy $C = A$.

□

6.2 Spočetné množiny

Definice 39. *Množina x je **spočetná**, pokud $x \approx \omega$. Množina x je **nejvýše spočetná**, pokud je konečná nebo spočetná. Jinak je množina **nespočetná**.*

Theorem 10.

1. *Každá shora omezená množina $A \subseteq \omega$ je konečná, každá shora neomezená $A \subseteq \omega$ je spočetná.*
2. *Každá podmnožina spočetné množiny je nejvýše spočetná.*

Důkaz.

1. A omezená, to znamená, že $\exists n : A \subseteq S(n)$. Takže $Fin(S(n)) \rightarrow Fin(A)$.
   - Pokud je A neomezená, pak je nekonečná. To lze dokázat sporem, že kdyby byla konečná, pak má A maximální prvek m, tedy je shora omezená m, to je spor.
   - A je lineárně uspořádaná $\in$. Pro každé $n \in A$ je $| \leftarrow ,n] \subseteq S(n)$, tedy $| \leftarrow ,n]$ je konečná. Podle charakterizační věty A je izomorfní ω. Takže $A \approx \omega$.
2. A je spočetná $f : A \rightarrow \omega$ (bijekce). $B \subseteq A$, pak $B \approx f[B] \subseteq \omega$. Podle 1) je $f[B]$ spočetná anebo konečná.

□

Příklad. **Lexikografické uspořádání** na $\omega \times \omega$.

$$(m_1,n_1) <_L (m_2,n_2) \leftrightarrow (m_1 \in m_2 \vee ((m_1 = m_2) \wedge (n_1 \in n_2)))$$

Cvičení: Ověřte, že $<_L$ je dobré uspořádání na $\omega \times \omega$.
Cvičení: Ověřte, že $<_L$ na $\omega \times 2$ je izomorfní s $(\omega, \in)$.
Cvičení: Ověřte, že $<_L$ na $2 \times \omega$ není izomorfní s $(\omega, \in)$.

Definice 40. ***Maximo-lexikografické uspořádání*** *na $\omega \times \omega$ je:*

$$\max(m,n) = \begin{cases} m & n \in m \\ n & jinak \end{cases}$$

$$\begin{gathered}(m_1,n_1) <_{ML} (m_2,n_2) \\ \updownarrow \\ ((\max(m_1,n_1) \in \max(m_2,n_2)) \vee ((\max(m_1,n_1) = \\ = \max(m_2,n_2)) \wedge ((m_1,n_1) <_L (m_2,n_2))))\end{gathered}$$

Cvičení: Ověřte, že $\omega \times \omega <_{ML}$ je izomorfní $(\omega, \in)$.

Theorem 11. *Jsou-li A,B spočetné množiny, pak $A \cup B$ a $A \times B$ jsou spočetné.*

Důkaz. $f : A \rightarrow \omega$ a $g : B \rightarrow \omega$ jsou bijekce. Definujeme $h : A \cup B \rightarrow \omega \times 2 \approx \omega$ jako:

$$h(x) = \begin{cases} (f(x),0) & x \in A \\ (g(x),1) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

h je prosté. Tedy $A \cup B \subseteq \omega \times 2 \approx \omega \wedge \omega \preceq A \preceq A \cup B$ a z Cantor-Bernsteinovy věty implikuje, že $\omega \approx A \cup B$. $A \times B$ definujeme $k : A \times B \rightarrow \omega \times \omega$ jako $k((a,b)) = (f(a),g(b))$, k je bijekce. Opět mám $A \times B \approx \omega \times \omega \approx \omega$. □

Důsledek. $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ jsou spočetné. Kde $\mathbb{Z}$ lze modelovat jako množinu dvojic, kde první je číslo a druhé bool jestli je kladné nebo ne. A $\mathbb{Q}$ jako množinu dvojic (m,n) kde je číslo nejmenší společný dělitel $(m,n) = 1$ a číslo je $\frac{m}{n}$.

Důsledek. Konečná sjednocení, konečné součiny jsou spočetné. **Dirichletův princip**: je-li A nespočetná, $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, potom aspoň jedna množina A_i je nespočetná. Konečná podmnožina $[A]^{<\omega}$ konečné posloupnosti jsou spočetné.

Cvičení: Je-li A nespočetné, B spočetná, C konečná, potom $A \cup C, A \setminus C$ jsou nespočetné a $B \cup C, B \setminus C$ jsou spočetné, $A \cup B, A \setminus B$ jsou nespočetné.

Poznámka. Spočetné sjednocení spočetně mnoha množin $\bigcup A$, kde A je spočetná a $(\forall a \in A)$ jsou spočetné.

Theorem 12 (Cantor)**.**

$$x \prec \mathcal{P}(x)$$

Důkaz. Pomocí diagonální metody. $\preceq$: $f(y) = \{y\}, f : x \to \mathcal{P}(x)$ je prosté. Definujme $y = \{t, t \in x \wedge t \notin f(t)\}$. Potom $y \subseteq \mathcal{P}(x)$ nemá vzor při f. Kdyby

$$f(v) = y : \begin{cases} v \in y & \text{pak } v \notin f(v) = y \quad \text{SPOR} \\ v \notin y = f(v) & \text{tedy } v \in y \quad \text{SPOR} \end{cases}$$

□

Důsledek. $\mathcal{P}(\omega)$ je nespočetná.

Důsledek. V není množina: $\mathcal{P}(V) \subseteq V$, kdyby byla množina, pak by musela platit Cantorova věta.

Theorem 13.

$$\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R} \approx [0,1]$$

Důkaz. Víme $\mathcal{P}(\omega) \approx^{\omega} 2$ podmnožiny $\leftrightarrow$ charakteristická funkce $\leftrightarrow$ posloupnosti $(a_0,a_1,a_2,\dots)$, kde $a_i \in \{0,1\}$. $[0,1] \approx^{\omega} 2 : a \in [0,1]$ zapíšu v binární soustavě tak, že pokud je to nula, tak je to nekonečně nul a jinak vždy tak, aby obsahovalo nekonečno jedniček. $\leftarrow$ použijeme trojkovou soustavu. $(a_0,a_1,a_2,\dots) \to a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n+1}}$. Cantor-Bernstein $\to [0,1] \approx^{\omega} 2$. (pozn.: Cantorovo diskontinuum). $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{E} \to [0,1]$ nějakou vhodnou funkci např. $\frac{\pi/2-\arctan(x)}{\pi}$. □

Poznámka. Množina algebraických čísel (tj. kořeny polynomů s racionálními koeficienty) je spočetná.

Cvičení: Pokrytí N intervaly.

1. *Konečně.*
   - $A \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ pak $\sum(b_i - a_i \geq 1$
2. *Nekonečně.*
   - $\forall \epsilon > 0 : \exists I_1,I_2,\dots, A \subseteq \bigcup I_i; \sum(b_i - a_i) < \epsilon$

Poznámka. **Hypotéza kontinua** je, že každá nekonečná podmnožina $\mathbb{R}$ je buď spočetná anebo ekvivalentní s $\mathbb{R}$.

6.3 Axiom výběru

6.3.1 Princip výběru

Pro každý rozklad r množiny x existuje **výběrová množina**. To jest $v \subseteq x$, pro kterou platí $(\forall u \in r)(\exists x)(v \cap u = \{x\})$.

Definice 41. *Je-li X množina, pak funkce f definovaná na X splňující $(y \in X \wedge y \neq \emptyset) \rightarrow f(y) \in y$ se nazývá **selektor** na množině X.*

6.3.2 10.Axiom výběru (AC - axiom of choice)

Na každé množině existuje selektor.

Ekvivalentně

Každou množinu lze dobře uspořádat. $\leq$ je trichotomická. Zornovo lemma.

Důsledek.

- Každý vektorový prostor má bázi.
- Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.
- Hahn-Banachova věta.
- Princip kompaktnosti.
- Banach Tarski (rozdělení koule na malé části a vytvoření dvou stejně velkých koulí).

Definice 42. *(Indexový) soubor množin $< F_j; j \in J >$. Kde F je zobrazení s definovaným obrazem J. Pro $j \in J : F_j = F(j)$. J je **indexová třída** a jeho prvky jsou **indexy**.*

Lze definovat:

$$\begin{cases} \bigcup_{j \in J} F_j \text{ jako } \{x, (\exists j \in J) x \in F_j)\} \\ \bigcup_{j \in J} F_j = \bigcup Rng(F) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bigcap_{j \in J} F_j \text{ jako } \{x, (\forall j \in J) x \in F_j)\} \\ \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap Rng(F) \end{cases}$$

Kartézský součin souboru množin indexovaného množinou J je $X_{j \in J} F_j : \{f, f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} F_j \wedge (\forall j \in J) f(j) \in F_j\}$.

Lemma 23. *Je-li J množina, pak XF_j je množina. Je-li $(\forall j \in J)F_j = Y$, pak $X_{j \in J} F_j =^J Y$.*

Důkaz. Axiom nahrazení. $Rng(F)$ je množina, $\bigcup Rng(F)$ je množina. $^J \bigcup_{j \in J} F_j$ je množina. $XF_j \subseteq^J \bigcup_{j \in J} F_j$. □

Lemma 24. *NTJE: (Následující tvrzení jsou si ekvivalentní.)*

1. *Axiom výběru.*
2. *Princip výběru.*
3. *Pro každou množinovou relaci s existuje funkce $f \subseteq s$ taková, že $Dom(f) = Dom(s)$.*

4. Kartézský součin $X_{i\in x} a_i$ neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný.

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$: r rozklad X, podle 1 existuje selektor f na r. Pak $Rng(f)$ je výběrová množina. $2 \Rightarrow 3$: BÚNO: $s \neq \emptyset$. Vytvoříme rozklad s. $n = \{\{i\} \times s \shortparallel \{i\}; i \in Dom(s)\} = \{\{(i,x),(i,x) \in s\}, i \in Dom(s)\}$. Výběrová množina n je funkce, která je podmnožina s a má stejný definiční obor. $3 \Rightarrow 4$: Máme soubor množin $< a_i, i \in x >$. Vytvoříme relaci $s = \{(i,y), i \in x \wedge y \in a_i\}$. Funkce $f \subseteq s : Dom(f) = Dom(s) = x$ je prvkem $X_{i\in x} a_i$. $4 \Rightarrow 1$: x množina. BÚNO: $x \neq \emptyset, \emptyset \in X$. $ID \restriction x$ určuje soubor $< y; y \in x >$. Každý prvek $X_{y\in x} y$ je selektor na x. ☐

Lemma 25. *Sjednocení spočetného souboru spočetných množin je spočetné. (Popřípadě je všude místo spočetné nejvýše spočetné.)*

Důkaz. Soubor $< B_j; j \in J >$. BŮNO: $I = \omega$. Najděme prosté zobrazení $\bigcup_{j\in\omega} B_j$ do $\omega \times \omega$. Uvažujme soubor $< E_j; j \in \omega >$ kde E_j je množina všech prostých zobrazení B_j do ω. Podle lemma 4) je $X_{j\in\omega} E_j$ neprázdný, tedy existuje soubor $< f_j; j \in \omega >$, kde $f_j \in F_j$. Definujme $h; \bigcup_{j\in\omega} B_j \to \omega \times \omega$ jako $h(x) = (j, f_j(x))$. Kde j je nejmenší prvek ω pro který $x \in B_j$. ☐

Poznámka. Bez AC je bezesporné ZF a to, že "$\mathbb{R}$ jsou spočetným sjednocením spočetných množin".

6.4 Princip maximality (PM)

- AC $\leftrightarrow$ PM
- Je-li A množina uspořádaná relací $\leq$ tak, že každý řetězec má horní mez.
- Pak pro každé $a \in A$ existuje maximální prvek $b \in A$ takový, že $a \leq b$.

Definice 43. *$B \subseteq A$ je* ***řetězec*** *pokud B je lineárně uspořádaná $\leq$.*

Poznámka. V aplikacích často pro $(A, \subseteq); A \subseteq \mathcal{P}(x)$ stačí ověřit, že $\bigcup B \in A$.

Cvičení: Ukažte pomocí PM: Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, pak pro každý řetězec $B \subseteq A$ existuje maximální řetězec C splňující $B \subseteq C \subseteq A$.

6.4.1 Princip maximality II (PMS)

Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, kde každý řetězec má suprémum, pak pro každé $a \in A$ existuje $b \in A$ maximální prvek splňující $a \leq b$.
Cvičení: Dokažte: PM$\leftrightarrow$PMS.

6.5 Princip trichotomie $\preceq$ (PT)

Pro každé dvě množiny x,y platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Lemma 26. *PM $\to$ PT.*

Důkaz. Definuji množinu $D = \{f, f \text{ prosté zobrazení } \wedge Dom(f) \subseteq x \wedge Rng(f) \subseteq y\}$. $(D, \subseteq)$ splňuje předpoklady PM. Tedy má maximální prvek g. Kdyby $x \setminus Dom(f) \neq \emptyset$ a $y \setminus Rng(f) \neq \emptyset$, pak lze g rozšířit o novou dvojici (u,v), spor s maximalitou g. Pokud $Dom(f) = x$, pak $x \preceq y$. Pokud $Rng(f) = y$, pak g^{-1} je prosté zobrazení y do x, tedy $y \preceq y$. □

Cvičení: Sjednocení řetězce prostých zobrazení je prosté zobrazení.

6.6 Princip dobrého uspořádání (VVO)

- Každou množinu lze dobře uspořádat.
- Známo jako Zermelova věta.
- AC $\leftrightarrow$ VVO

Lemma 27. *VVO → AC*

Důkaz. $x \neq \emptyset, \emptyset \notin x$ podle VVO máme dobré uspořádání na $\bigcup x$. Každý $y \in x$ je neprázdná podmnožina $\bigcup x$, tedy má nejmenší prvek $\min_{\leq} y$. Definujeme $f : x \to \bigcup x$ jako $f(y) = \min_{\leq}(y)$. Tato f je selektorem na množině x. □

Cvičení: PM → VVO

7. Ordinální čísla

7.1 "Typy dobře uspořádaných množin."

- Kardinální čísla $\subseteq$ ordinální čísla. Mohutnosti dobře uspořádaných množin. S (AC) mohutnosti všech množin.
- Ordinální čísla jsou dobře uspořádaná $\in$, platí pro ně princip transfinitní indukce.

Definice 44. *Třída X je **tranzitivní** pokud $x \in X \to x \subseteq X$.*

Příklad. ω i každé $n \in \omega$ jsou tranzitivní i V.

Cvičení: X tranzitivní $\leftrightarrow \bigcup X \subseteq X$

Lemma 28. *1. Jsou-li X,Y tranzitivní pak $X \cap Y, X \cup Y$ jsou tranzitivní.*

2. X třída, pro kterou každé $x \in X$ je tranzitivní množina, pak $\bigcap X$ a $\bigcup X$ jsou tranzitivní.

3. Je-li X tranzitivní třída, pak $\in$ je tranzitivní na $X \leftrightarrow$ každý $x \in X$ je tranzitivní množina.

Důkaz. 1. Je pozorování.

2. Plyne analogicky z 1.

3. Jako *Cvičení.*

□

Definice 45. *Množina x je **ordinální číslo (ordinála)** pokud x je tranzitivní množina a $\in$ je dobré uspořádání na x. Třídu všech ordinálních čísel značíme On.*

Příklad. ω a každé $n \in \omega$ je ordinální číslo.

Důsledek. Pro každou nekonečnou množinu x platí $\omega \preceq x$.

Lemma 29. *On je tranzitivní třída.*

Důkaz. $y \in x \in On$. Máme $y \leq x, \in$ je dobré ostré uspořádání na y. $\in$ je dobré ostré na x. Z lemma 3) je y tranzitivní množina. y je ordinála. □

Lemma 30. *$\in$ je tranzitivní na On.*

Lemma 31. *x,$y \in On$, pak:*

1. $x \notin x$

2. $x \cap y \in On$

3. $x \in y \leftrightarrow x \subset y$

Důkaz. 1. Sporem z antireflexivity $\in$ na x.

2. Přímo z definice.

3. $\rightarrow$ z tranzitivity y a 1)
$\leftarrow y \setminus x \neq \emptyset \subseteq y, y \setminus x$ má nejmenší prvek z. Platí $z = x$ (*Cvičení*). □

Theorem 14. *$\in$ je dobré ostré uspořádání třídy On.*

Důkaz. Antireflexivita z lemma 1), tranzitivita pak dohromady dává ostré uspořádání. Trichotomie: $x \neq y \in On$ podle lemma 2) $x \cap y \in On$. Sporem kdyby $x \cap y \subset x \wedge x \subset y$ pak $x \cap y \in y \wedge x \cap y \in x$, tedy $x \cap y \in x \cap y$ a to je spor s lemma 1). Když tedy $x \cap y = x$ pak $x \subset y$ tedy $x \in y$. Z toho plyne, že se jedná o lineární uspořádání. Pro dobrost stačí existence minimálního prvku (*Cvičení*). □

Důsledek. On je vlastní třída. Je-li X vlastní třída, tranzitivní, dobře uspořádaná $\in$, pak $X = On$.

7.1.1 Značení:

- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jsou ordinální čísla.
- $\alpha < \beta$ místo $\alpha \in \beta$.
- $\alpha \leq \beta$ místo $\alpha \in beta \vee \alpha = \beta$.

Lemma 32. *1. Množina $x \subseteq On$ je ordinální číslo $\leftrightarrow x$ je tranzitivní.*

2. $A \subseteq On, A \neq \emptyset$, pak $\bigcap A$ je nejmenší prvek A vzhledem k $\leq$.

3. $a \subseteq On$ množina, pak $\bigcup a \in On$ a $\bigcup a = \sup_{\leq} a$.

Důkaz. 1. $\rightarrow$ z definice, $\leftarrow$ z věty.

2. Z věty a $\bigcap A = \inf A$.

3. $\bigcup a$ je tranzitivní, $\bigcup a \subseteq On$ podle 1) je ordinální číslo.

□

Důsledek. ω je supremum množiny všech přirozených čísel v On. Konečné ordinály jsou právě přirozená čísla.

Cvičení: Důkaz: $\bigcup \omega \in On \wedge \bigcup \omega = \sup_{\leq} \omega$. Zbývá ověřit $\omega = \bigcup \omega$.

Lemma 33. *$\alpha \in On$, pak $\alpha \cup \{\alpha\}$ je nejmenší ordinální číslo větší než α.*

Důkaz. $\alpha \subseteq On$ protože On je tranzitivní. $\alpha \cup \{\alpha\}$ je tranzitivní množina ordinálních čísel. Podle lemma 1) $\alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinální číslo. Je-li $\beta \in On, \beta \in \alpha\{\alpha\}$, pak $\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$ tedy $\beta \subseteq \alpha$. □

Definice 46. *$\alpha \cup \{\alpha\}$ je **následník** α. α je **předchůdce** $\alpha \cup \{\alpha\}$. α je **izolované** pokud $\alpha = 0$ nebo pokud α má předchůdce, jinak je **limitní**.*

Theorem 15 (O typu dobrého uspořádání.)**.** *Je-li a množina dobře uspořádaná relací r, pak existuje právě jedno ordinální číslo α a právě jeden izomorfismus (a,r) a $(\alpha, \leq)$. (Bez důkazu.)*

Definice 47. *α je **typ** dobrého uspořádání r.*

Poznámka. Na $On^2 = On \times On$ lze definovat lexikografické uspořádání i maximo-lexikografické uspořádání.

7.2 Princip transfinitní indukce

Je-li $A \subseteq On$ třída splňující $(\forall \alpha \in On)(\alpha \subseteq A \to \alpha \in A)$, potom $A = On$.

Důkaz. Sporem: $On \setminus A \neq \emptyset$ díky dobrému uspořádání $\in$ existuje nejmenší prvek $\alpha \in On \setminus A$. Potom každé $\beta \in \alpha$ už je prvkem A, tedy $\alpha \subseteq A$, z předpokladu věty $\alpha \in A$ a to je spor. □

Theorem 16 (Druhá verze principu transfinitní indukce.)**.** *Je-li $A \subseteq On$ třída splňující:*

1. $0 \in A$
2. *Pro každý $\alpha \in On$ platí $\alpha \in A \to \alpha \cup \{\alpha\} \in A$.*
3. *Je-li α lineární pak $\alpha \subseteq A \to \alpha \in A$.*

Pak $A = On$.

Theorem 17 (O konstrukci transfinitních rekurzí.)**.** *Je-li $G : V \to V$ třídové zobrazení, pak existuje právě jedno zobrazení $F : On \to V$ splňující $(\forall \alpha \in On)F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$.*

Varianty:

- $F(\alpha = G(F[\alpha])$
- $F(\alpha) = G(\alpha, F \restriction \alpha)$
- $G_1(F(\beta))$ *je-li α následník β, jinak $G_2(F[\alpha])$ je-li α limitní.*

Důkaz. Je pomocí transfinitní indukce a axiomu nahrazení. □

Příklad. $m + n : F(m) = n + m$ se dá nadefinovat jako $F(0) = n, F(S(m)) = S(F(m))$. AC $\to$ VVO: A množina g selektor na $\mathcal{P}(A)$ tak $f(0) = g(A)$ a $f(\beta) = g(A - f[\beta])$.