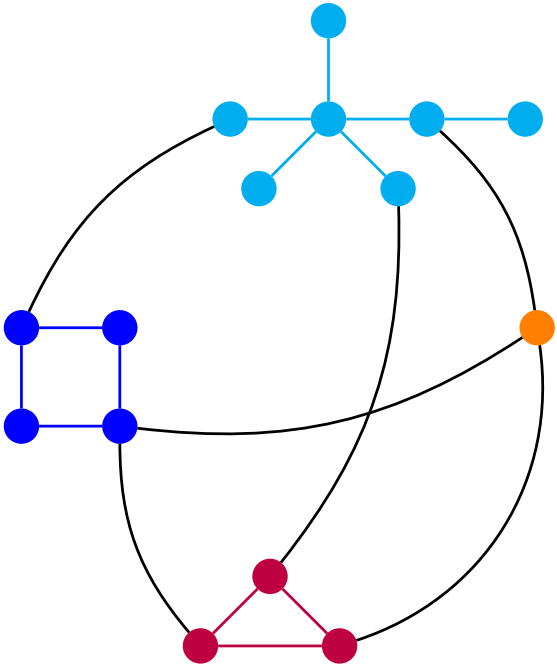


# Kombinatorika a grafy

Tomáš Turek



January 18, 2024

## Information

*There are my notes from three courses on combinatorics and graph theory. First two are in czech and the last one is in english. The first part is missing almost all of its proofs.*

Also there may be some mistakes. If you find some and want to update them, you may find all the sources on the GitHub.

# Contents

<b>I</b>	<b>Kombinatorika a grafy I</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Odhady</b>	<b>6</b>
1.1	Odhady faktoriálu . . . . .	6
1.2	Binomický koeficient . . . . .	7
1.2.1	Binomická věta . . . . .	7
1.2.2	Aplikace (náhodné procházky) . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Vytvořující funkce</b>	<b>8</b>
2.1	Řešení rekurentních rovnic . . . . .	8
2.2	Aplikace vytvořujících funkcí . . . . .	9
2.3	Aplikace - Catalanova čísla . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Konečně projektivní roviny (KPR)</b>	<b>10</b>
3.1	Eukleidovy axiomy . . . . .	10
3.2	Dualita KPR . . . . .	11
3.3	Existence KPR . . . . .	11
3.4	Latinský čtverec . . . . .	11
3.4.1	Ortogonalita . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Toky v sítích</b>	<b>13</b>
4.1	Fordův-Fulkersonův algoritmus . . . . .	14
4.2	Königova-Egerváryho věta . . . . .	14
4.3	Hallova věta . . . . .	15
4.4	Rozšiřování latinských obdélníků . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Míra souvislosti grafu</b>	<b>16</b>
5.1	2-souvislost podrobněji . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Počítání dvěma způsoby</b>	<b>18</b>
6.1	Cayleyho vzorec . . . . .	18
6.2	Spernerova věta . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Úvod do Ramseyovy teorie</b>	<b>19</b>
7.1	Aplikace - Erdősova-Szekeresova věta . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Samoopravné kódy</b>	<b>21</b>
8.1	Lineární kódy . . . . .	23
8.1.1	Kódování lineární kódy . . . . .	23
8.1.2	Dekódování lineárních kódů . . . . .	23
8.1.3	Jak dekodovat . . . . .	24
8.2	Hammingovy kódy . . . . .	24
<b>II</b>	<b>Kombinatorika a grafy II</b>	<b>26</b>
<b>9</b>	<b>Párování v grafech</b>	<b>27</b>

<b>10 Kontrakce a minory</b>	<b>32</b>
<b>11 Kreslení grafů na plochy</b>	<b>35</b>
<b>12 Barvení grafů</b>	<b>38</b>
12.1 Perfektní grafy . . . . .	40
<b>13 Extremální kombinatorika</b>	<b>44</b>
<b>14 Vytvořující funkce</b>	<b>50</b>
14.1 Operace s formálními mocninnými řadami . . . . .	50
<b>15 Akce grup a počítání orbit</b>	<b>54</b>
 <b>III Kombinatorika a grafy III</b>	 <b>56</b>
<b>16 Structural graph theory</b>	<b>57</b>
16.1 Minors and subgraphs . . . . .	57
16.2 Clique sums . . . . .	58
16.3 Hadwiger's conjecture . . . . .	60
16.4 Chordal decomposition . . . . .	60
16.5 Hájos conjecture . . . . .	61
16.6 $k$ -linked, model, separation . . . . .	62
<b>17 Tree decomposition</b>	<b>66</b>
17.1 Basics . . . . .	66
17.2 Torso . . . . .	66
17.3 Tree width . . . . .	67
17.4 Bramble . . . . .	68
17.4.1 $n \times n$ grid . . . . .	69
17.4.2 $n$ -ladder . . . . .	70
<b>18 Polynomials for graph theory</b>	<b>73</b>
18.1 Basics . . . . .	73
18.2 List coloring polynomial . . . . .	73
<b>19 VC - dimension</b>	<b>77</b>
19.1 Set systems . . . . .	77
19.2 Subsystems . . . . .	77
<b>20 Edge disjoint spanning trees</b>	<b>79</b>
20.1 Necessary condition . . . . .	79
20.2 Jungle and forests . . . . .	80
<b>21 Regularity of graphs</b>	<b>82</b>
21.1 Regular pairs . . . . .	82
21.2 Regular partition . . . . .	84
21.3 Applications . . . . .	85
21.3.1 Arithmetic Ramsey theory . . . . .	87

21.4 Proof of regularity lemma . . . . .	88
--	----

# Part I

## Kombinatorika a grafy I

# 1. Odhady

## 1.1 Odhady faktoriálu

Faktoriál:  $n \in \mathbb{N} : n!$ . Poskládání  $n$  prvků.

**Tvrzení 1.**  $\forall n \in \mathbb{N} : n^{n/2} \leq n! \leq n^n$

*Důkaz.* Horní odhad se dá napsat jako:  $n! = \prod_{i=1}^n i \leq \prod_{i=1}^n n = n^n$ . Dolní odhad použijeme, že  $i(n+1-i) \geq n$  (to platí pro  $i = 1$  a  $i = n$ ). Potom pro  $2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  máme  $i(n+1-i) \geq 2 \frac{n}{2} = n$ . Obdobný odhad je i pro  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq i \leq n$ . Následně  $(n!)^2 = n! \cdot n! \geq n! \cdot n! \geq n^n$ . Potom platí, že  $n! \geq n^{n/2}$ . □

**Věta 2.**  $\forall n \in \mathbb{N} : e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$

*Důkaz.* Horní odhad: Pro  $n = 1$  platí  $(1 = 1! \leq e1(\frac{1}{e})^1 = 1)$ . Necht  $n \geq 2$ .

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \leq ne(n-1) \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = en \left(\frac{n}{e}\right)^n e \left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \\ &= e \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq e \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n = 1 \end{aligned}$$

Dolní odhad: Pro  $n = 1$  platí  $(1 = (\frac{1}{e})^1 \leq 1! = 1)$ . Necht  $n \geq 2$ .

$$n! = n(n-1)! \geq ne \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = e \left(\frac{n}{e}\right)^n e \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \geq 1$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} &\leq 1 \\ \frac{1}{e} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{e} \left(e^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.**  $1 + x \leq e^x$

*Důkaz.*  $f(x) := e^x - (x+1)$  chceme ukázat, že  $f(x) \geq 0$  pro  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow (f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ .  $f''(x) = e^x$ .  $f''(x) = 1 > 0 \Rightarrow$  v bodě  $x = 0$  je globální minimum pro  $f \Rightarrow f(x) \geq 0$  pro  $\forall x \in \mathbb{R}$ . □

**Věta 4** (Stirlingův vzorec).  $n! \approx n\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$

## 1.2 Binomický koeficient

Počet  $k$ -prvkových podmnožin  $n$ -prvkových množin:

$$n, k \in \mathbb{N} : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Pozorování.** 1.  $\forall n, k \in \mathbb{N} : \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$

2. největší prvek  $\binom{\frac{n}{2}}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \binom{\frac{n}{2}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

*Důkaz.* Empty. □

### 1.2.1 Binomická věta

$$\frac{2^{2m}}{2m+1} \leq \binom{2m}{m} \leq 2^{2m}$$

**Věta 5.**  $\forall m \in \mathbb{N} : \frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$

Užití Stirlingova vzorce:  $\binom{2m}{m} \approx \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$ .  $\forall k, n \in \mathbb{N} : n > k, \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ .

*Důkaz.* Empty. □

### 1.2.2 Aplikace (náhodné procházky)

$n$  kroků a v každém bodě mám 50% že půjdu doprava anebo doleva. Střední hodnota počtu návratů do 0.  $X$  - počet návratů do 0.  $A_{2n}$  = jev po  $2n$  krocích se dostanu do 0.  $X = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_{2n}}$ .  $\Pr[A_{2n}] = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{A_{2n}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_{A_{2n}}] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[I_{A_{2n}}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \infty \end{aligned}$$



## 2. Vytvořující funkce

Počtní metoda, kde spojitými funkcemi vyjadřujeme posloupnosti.

**Definice 1.** Pro posloupnost  $(a_i)_{i=0}^{\infty}$  je mocninnou řadou  $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ .

Posloupnost lze převést na funkci, ale při převodu nazpátek je třeba aby posloupnost nerostal moc rychle.

*Příklad.* 1.  $a_i = 1$  pokud  $0 \leq i \leq n$  jinak  $a_i = 0$ . Tedy  $(a_i)_{i=0}^{\infty} = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ .  
Potom funkce je  $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  z geometrické řady.

2.  $\forall i : a_i = 1$  to je potom nekonečná geometrická řada, takže je to  $\frac{1}{1-x}$ .

3.  $a_i = \binom{n}{i}$  potom funkce vychází z binomické věty, takže je  $(1+x)^n$ .

**Tvrzení 6.** Pokud pro  $(a_i)_{i=0}^{\infty} \exists k \in (R)$  takové, že  $\forall i : |a_i| \leq k^i$ , pak pro všechna  $x \in (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$  řada  $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  konverguje absolutně a na libovolném  $\epsilon$  okolí 0 určuje i koeficienty  $a$ , protože  $i_a = \frac{a^{(i)}(0)}{i!}$ .

Obscný postup:

1. kombinatorický objekt s neznámým počtem
2. vytvořující funkce
3. rozklad na vytvořující funkce se známými koeficienty
4. určení hodnoty

Operace	Posloupnosti	Funkce
Součet	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$	$(a + b)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$
$\alpha$ -násobek	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \dots)$	$\alpha a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha a_i) x^i$
Posun vpravo o $n$ pozic	$(0, 0, \dots, a_0, a_1, \dots)$	$x^n a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+n}$
Posun vlevo o $n$ pozic	$(a_n, a_{n+1}, \dots)$	$\sum_{i=0}^{\infty} (a_{i+n}) x^i = \frac{a(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i}{x^n}$
Dosazení $\alpha x$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$	$a(\alpha x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \alpha^i x^i$
Dosazení $x^n$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$	$a(x^n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{ni}$
Derivace	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$	$a'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}$
Integrál	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots)$	$\int_0^x a(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$
Součin	$(c_0, c_1, c_2, \dots)$	$a(x)b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (c_i) x^i$

### 2.1 Řešení rekurentních rovnic

Ukázka na Fibonacciho čísla. Určíme  $F_n$  jako koeficient funkce  $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i$ . Máme  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 0$ . **Vynásobíme rovnici  $x^n$ :**  $F_{n+2} x^n = F_{n+1} x^n + F_n x^n$ . **Sčítáme přes  $n \geq 0$ :**  $\sum_{n \geq 0} F_{n+2} x^n = \sum_{n \geq 0} F_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 0} F_n x^n$  to se rovná:

$$\frac{F(x) - F_0 - F_1 x}{x^2} = \frac{F(x) - F_0}{x} + F(x)$$

ted' určíme

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

to už lze převést

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

to je tzv. **Binetův vzorec**. Tento postup funguje pro všechny **Homogenní lineární rekurence  $k$ -tého stupně s konstantními koeficienty**, tedy typu:

$$a_{n+k} = \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + \alpha_0a_n, k \in \mathbb{N}, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{R}$$

## 2.2 Aplikace vytvářících funkcí

Nadefinuujeme zobecněnou **binomickou větu** pro

$$n \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Z}_0^+ : \binom{n}{r} := \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!},$$

speciálně  $\binom{n}{0} = 1$ .

**Věta 7** (Zobecněná binomická věta).  $\forall r \in \mathbb{R}$  je  $(1+x)^r$  vytvářící funkcí posloupnosti  $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right)$  a řada  $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} x^i$  konverguje pro  $\forall x \in (-1, 1)$ .

*Důkaz.* Empty.

□

*Důsledek.*  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in (-1, 1)$  platí  $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i$ .

*Důkaz.* Empty.

□

## 2.3 Aplikace - Catalanova čísla

**Zakořeněný binární strom** - buď je prázdný, nebo obsahuje speciální vrchol zvaný **kořen** a pár zakořeněných stromů, které tvoří **levý** a **pravý podstrom**.

$b_n$  = počet bin. zak. stromů na  $n \in \mathbb{N}_0$  vrcholech, potom  $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  je příslušná vytvářící funkce.

**Věta 8.** Pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  platí  $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Kde se  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  značí jako  $C_n$  a říká se mu  $n$ -té **Catalanovo číslo**.

*Důkaz.* Empty.

□

Catalanova čísla mají mnoho interpretací, například počet triviálních uzavírek s  $n$  páry závorek anebo počet triangulací.

# 3. Konečně projektivní roviny (KPR)

Jistá nová struktura, která je velice symetrická a vzácná. Jedná se o množinový systém (**hypergraf** - zobecnění grafu, kde hrany mohou být k-tice. Využívá se v samoopravných kódech a přichází z geometrie.

## 3.1 Eukleidovy axiomy

1. každé 2 body určují přímku
2. každou úsečku lze prodloužit na přímku
3. ze zadaného bodu lze opsat kružnici procházejícím druhým zadaným bodem
4. všechny pravé úhly jsou stejné
5. bodem lze k přímce vést právě 1 rovnoběžku

**Definice 2** (KPR). Konečná množina  $\mathcal{X}$  a systém  $\mathcal{P}$  podmnožin  $\mathcal{X}$  tvoří KPR  $(\mathcal{X}, \mathcal{P}) = (\text{body}, \text{přímky})$  pokud splňuje tyto tři axiomy:

1.  $\forall x, y \in \mathcal{X}, x \neq y, \exists! P \in \mathcal{P} : \{x, y\} \subseteq P$ 
  - každé 2 body určují právě jednu přímku
2.  $\forall P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$ 
  - každé 2 přímky se protínají právě v 1 bodě
3.  $\exists C \subseteq \mathcal{X}, |C| = 4, \forall P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$ 
  - existují 4 body v obecné poloze

Jako příklad je **Fanova rovina**, která má 7 přímek a 7 bodů. Jak lze vidět na obrázku 3.1.

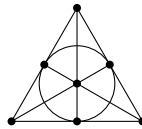


Figure 3.1: Fanova rovina

**Tvrzení 9.** V KPR obsahuje každá přímka stejný počet bodů.  $\forall P, Q \in \mathcal{P} |P| = |Q|$ .

*Důkaz.* Empty.

□

**Definice 3.** Řád projektivní roviny:  $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$  je  $|P| - 1$  pro  $P \in \mathcal{P}$ .

**Tvrzení 10.** Je-li  $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$  KPR řádu  $n$ , pak platí:

1. každým bodem prochází právě  $n + 1$  přímek
2.  $|\mathcal{X}| = n^2 + n + 1$
3.  $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$

*Důkaz.* Empty.

□

## 3.2 Dualita KPR

"Přechod z přímek na body a z bodů na přímky."

**Definice 4.** *Duální množinový systém*  $k$  množinovému systému  $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$  je  $(\mathcal{P}, \{\{P \in \mathcal{P} : x \in P\} : x \in \mathcal{X}\})$ , zkráceně **duál**

**Tvrzení 11.** Duálem KPR řádu  $n$  je KPR řádu  $n$ .

*Důkaz.* Empty.

□

## 3.3 Existence KPR

Kromě Fanovy roviny zatím neznáme žádné další příklady konečných projektivních rovin. Ale samozřejmě se ví o dalších které existují jmenovitě pro  $(2,3,4,5,7,8,9,11)$  a 12 už se neví. Domněnka je, že KPR řádu  $n$  existuje  $\Leftrightarrow n$  je mocnina prvočísla. Nicméně je to pořád otevřené.

**Věta 12.** Pokud existuje algebraické těleso o  $n$  prvcích, potom existuje KPR řádu  $n$ .

*Důkaz.* Empty.

□

Konstrukce funguje nad každým tělesem a například nad  $\mathbb{R}$  dává **reálnou projektivní rovinu**.

## 3.4 Latinský čtverec

**Definice 5.** Latinský čtverec řádu  $n \in \mathbb{N}$  je tabulka  $n \times n$  čísel z  $\{1, \dots, n\}$ , ve které se žádné číslo neopakuje v žádném řádku ani sloupci.

### 3.4.1 Ortogonalita

**Definice 6.** Latinský čtverce  $L, L'$  stejného řádu jsou **ortogonální**, pokud pro každé  $l, l' \in \{1, \dots, n\}$  existují  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , takové že  $L_{ij} = l, L'_{ij} = l'$ . Zapisuje se jako  $L \perp L'$ .

**Pozorování.** Pro ortogonální latinské čtverce  $L, L'$  řádu  $n$  a pár  $(l, l') \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  je pozice  $(i, j)$  s  $L_{ij} = l, L'_{ij} = l'$  určena jednoznačně.

*Důkaz.* Počet párů  $(l, l')$  je  $n^2$ , stejně jako počet párů  $(i, j)$ . □

**Pozorování.** Je-li  $L = (L_{ij})_{i,j=1}^n$  latinský čtverec a  $\Pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  perm, tak potom  $\Pi(L) := (\Pi(L_{ij}))_{i,j=1}^n$  je latinský čtverec stejného řádu.

*Důkaz.*  $\Rightarrow$  BŮNO první řádek je vždy vzestupná řada.  $\Rightarrow$  Je-li  $L \perp L'$ , pak  $\Pi(L) \perp L'$ . □

*Důsledek.* Počet **navzájem ortogonálních** nanejvýš čtverců řádu  $n \in \mathbb{N}$  je  $n - 1$ .

*Důkaz.* Empty. □

**Věta 13.** Konečná projektivní rovina řádu  $n \geq 2$  existuje  $\Leftrightarrow$  existuje  $n - 1$  navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu  $n$ .

*Důkaz.* Empty. □

## 4. Toky v sítích

**Definice 7.** *Síť je čtveřice  $(G, z, s, c)$ , kde  $G = (V, E)$  je orientovaný graf (tedy  $V \subseteq V \times V$ ),  $z \in V$  je **zdroj**,  $s \in V$  je **stok** ( $z \neq s$ ) a  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Hodnotu  $c(e)$  nazýváme **kapacitou** hrany  $e \in E$ .*

**Definice 8.** *Tok v síti  $(G = (V, E), z, s, c)$  je  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  splňující následující podmínky:*

1.  $\forall e \in E : 0 \leq f(e) \leq c(e)$  (velikost toku je omezená kapacitou)
2. **Kirchhoffův zákon** co přitéká do vrcholu, musí odtéct, neboli:

$$\forall u \in V \setminus \{z, s\} : \sum_{v:(u,v) \in E} f(u,v) - \sum_{v:(v,u) \in E} f(v,u) = 0$$

**Definice 9.** *Velikost toku  $f$  je  $w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v,z)$ .*

**Tvrzení 14.** *Pro každou síť existuje maximální tok.*

*Důkaz.* [Náčrt] Z analýzy víme, že spojitá funkce na kompaktní množině nabývá maxima. Množina  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$  všech toků je kompaktní funkce  $w : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. □

**Definice 10.** *Řez v síti  $(G, z, s, c)$  je  $R \subseteq E$  taková, že každá orientovaná cesta ze zdroje  $z$  do stoku  $s$  používá aspoň jednu hranu z  $R$ .*

Speciálně hrany vycházející ze  $z$  či hrany vycházející do  $s$  tvoří řez.

**Definice 11.** *Kapacita řezu  $R$  je  $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$ .*

Řezu je jen konečně mnoho  $\Rightarrow$  jistě existuje řez minimální kapacity.

**Věta 15** (hlavní věta o tocích). *Velikost maximálního toku = kapacita minimálního řezu, nebo-li, pro každou síť platí:  $\max w(f) = \min c(R)$ , kde  $f$  je tok a  $R$  řez.*

**Definice 12** (Elementární řez). *Pro  $A \subseteq V$ , kde  $z \in A$  a  $s \notin A$ , nazveme množinu  $R_A = \{e = (u,v) \in E : u \in A, v \notin A\}$  **elementárním řezem**. Opravdu se jedná o řez, protože pokaždé su musí nějak opustit  $A$ .*

**Pozorování.** *Každý řez  $R$  obsahuje elementární řez.*

*Důkaz.* Zvolme  $A$  jako množinu vrcholů dosažitelných po orientované cestě ze zdroje v grafu  $(V, E \setminus R)$ . Potom  $z \in A, s \notin A$ , protože  $R$  je řez  $\Rightarrow R_A$  existuje  $(u,v) \in R_A \Leftrightarrow u \in A, v \notin A \Rightarrow (u,v) \in R$ , tedy  $R_A \subseteq R$ . □

**Pozorování.** *Každý v inkluzi minimální řez  $R$  je elementární. Nebo-li  $R \setminus \{e\}$  není řezem pro  $\forall e \in R$ .*

*Důkaz.* Z předchozího pozorování musí  $R$  obsahovat elementární řez  $R_A \subseteq R$  a z minimality platí  $R_A = R$ . □

**Lemma 16.** *Je-li  $f$  tok a  $R_A$  elementární řez, pak platí:*

$$w(f) = \sum_{u \in A, v \notin A, (u,v) \in E} f(u,v) - \sum_{u \in A, v \notin A, (v,u) \in E} f(v,u)$$

*Důkaz.* Empty. □

*Důkaz.* (Věty) Empty. □

## 4.1 Fordův-Fulkersonův algoritmus

- 1: Nastav  $f(e) = 0$  pro  $\forall e \in E$
- 2: **while**  $\exists$  zlepšující cesta  $P$  **do**
- 3:     vylepšuj po ní tok o  $\epsilon_P$
- 4: **end while**
- 5: **return** Stávající tok  $f$

**Věta 17** (o celočíselnosti). *Jsou-li kapacity celočíselné, pak F.F. najde max. tok po konečně mnoha krocích a navíc má takový tok celočíselnou velikost.*

*Důkaz.* Tok se vždy zlepší o celé číslo  $\epsilon_P > 0$  a  $w(f) < \infty$ . □

Existují sítě s iracionálními kapacitami, kde F.F. nenajde maximální tok a nekonverguje k výsledku. V síti s celočíselnými kapacitami má F.F. alg. časovou složitost  $O(w(f)(|V| + |E|))$ , kde  $f$  je tok. Takže je to v čase  $O(|V| + |E|)$ . Pokud bychom specifikovali výběr zlepšujících cest na nejkratší dostaneme **Edmondsův-Karpův algoritmus**, který má časovou složitost  $O(|V| + |E|^2)$ .

## 4.2 Königova-Egerváryho věta

**Definice 13.** V grafu  $G = (V, E)$  nazveme množinu  $C \subseteq V$  **vrcholovým pokrytím**, pokud  $C \cap e \neq \emptyset$  pro  $\forall e \in E$ .

Zjistit minimální velikost vrcholové pokrytí je NP-těžká úloha.

**Definice 14.** **Párováním** v  $G$  je podgraf tvořený disjunktními hranami.

**Věta 18.** (Königova-Egerváryho věta) *V bipartitním grafu je velikost min. vrcholového pokrytí rovna velikosti maximálního párování (do počtu hran).*

*Důkaz.* Empty. □

## 4.3 Hallova věta

**Definice 15.** Mějme konečné množiny  $X$  a  $I$ . **Množinový systém**  $\mathcal{M}$  je  $(M_i : i \in I)$ , kde  $M_i \subseteq X$ . **Systém různých reprezentantů (SRR)** pro  $\mathcal{M}$  je prosté zobrazení  $f : I \rightarrow X$  takové, že  $\forall i \in I : f(i) \in M_i$ . Tedy  $f$  je výběr jednoho prvku z každé  $M_i$  takový, že žádný prvek nevybereme víckrát. **Incidenční graf** systému  $\mathcal{M}$  je bipartitní graf  $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, E)$ , kde  $E = \{\{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\}$ . Pokud  $\mathcal{M}$  má SSR  $\Leftrightarrow S_{\mathcal{M}}$  obsahuje párování velikosti  $|I|$ .

**Věta 19** (Hallova věta).  $\mathcal{M}$  má SSR  $\Leftrightarrow \forall J \subseteq I : |\cup_{j \in J} M_j| \geq |J|$ . Pravé části se říká **Hallova podmínka**, také se věta označuje jako **Hall's marriage theorem**.

**Definice 16.** Empty.

S axiomem výběru by šlo dokázat variantu s konečnými  $M_i$  a nekonečnými  $I, X$ . S nekonečnými  $I, X$  to platit nemusí.

## 4.4 Rozšiřování latinských obdélníků

*Důsledek.* V každém bipartitním grafu  $G = (A \cup B, E)$  s  $E \neq \emptyset$  a  $\deg_G(x) \geq \deg_G(y)$  pro každé  $x \in A, y \in B$  existuje párování velikosti  $|A|$ .

*Důkaz.* Empty.

□

Latinský obdélník typu  $k \times n$  pro  $k \leq n$  je tabulka s řádky s  $n$  sloupci vyplněnými symboly  $1, \dots, n$  tak, že se v žádném řádku ani sloupci žádný symbol neopakuje.

**Věta 20.** Každý latinský obdélník typu  $k \times n$  lze doplnit na latinský čtverec řádu  $n$ .

*Důkaz.* Empty.

□



## 5. Míra souvislosti grafu

**Definice 17.** Graf je **souvislý** pokud jsou každé dva vrcholy spojené cestou, jinak je graf **nesouvislý** a je rozložen na aspoň dvě **komponenty souvislosti**.

Nyní budeme zkoumat jak moc je graf odolný proti rozpadnutí po odebrání hrany nebo vrcholu.

**Definice 18. Hranový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je množina hran  $F \subseteq E$  taková, že graf  $G - F = (V, E \setminus F)$  je nesouvislý. (Také se někdy nazývá jako **separátor**.)

**Definice 19. Vrcholový řez** v grafu  $G = (V, E)$  je množina vrcholů  $A \subseteq V$  taková, že graf  $G - A = (V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$  je nesouvislý.

**Definice 20. Hranová souvislost** grafu  $G = (V, E)$  je

$$k_e(G) = \begin{cases} \min\{|F| : F \text{ je hranový řez v } G\} \\ k_e(G) = 1 \text{ pokud } G \equiv K_1 \end{cases}$$

**Definice 21. Vrcholová souvislost** grafu  $G = (V, E)$  je

$$k_v(G) = \begin{cases} \min\{|A| : A \text{ je vrcholový řez v } G\} \\ k_v(G) = 1 \text{ pokud } G \equiv K_1 \\ k_v(G) = n - 1 \text{ pokud } G \equiv K_n, n \geq 2 \end{cases}$$

Nesouvislé grafy mají vrcholovou i hranobvou souvislost 0.

**Definice 22.** Pro  $r \in \mathbb{N}_0$  je graf **hranově  $r$ -souvislý**, pokud  $k_e(G) \geq r$ .

**Definice 23.** Pro  $r \in \mathbb{N}_0$  je graf **vrcholově  $r$ -souvislý**, pokud  $k_v(G) \geq r$ .

**Pozorování.**  $\forall G = (V, E), G \neq K_1 : k_e(G), k_v(G) \leq \min\{\deg_G(v), v \in V\}$

**Lemma 21.**  $\forall G = (V, E) \forall e \in E : k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$  Po odebrání hrany klesne hranová souvislost maximálně o 1.

*Důkaz.* Empty. □

**Lemma 22.**  $\forall G = (V, E) \forall e \in E : k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$  Po odebrání hrany klesne vrcholová souvislost maximálně o 1.

*Důkaz.* Empty. □

**Důsledek.**  $\forall G = (V, E) : k_v(G) \leq k_e(G)$  Vrcholová souvislost je maximálně stejná jako hranová souvislost.

*Důkaz.* Empty. □

Nerovnost může být ostrá. To lze vidět na příkladu "motýlka". Lze vidět na obrázku ??.

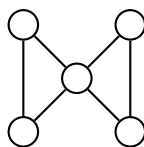


Figure 5.1: Graf "motýlek".

**Věta 23** (Ford-Fulkersonova věta).  $\forall G \forall t \in \mathbb{N} : k_e \geq t \Leftrightarrow$  mezi každými 2 vrcholy grafu  $G \exists \geq t$  hranově disjunktních cest.

*Důkaz.* Empty.

□

Varianty Fordovy-Fulkersonovy věty platí i pro vrcholovou souvislost. Tyto věty jsou známé také jako Mengerovy věty.

**Věta 24** (Mengerova věta).  $\forall G \forall t \in \mathbb{N} : k_v(G) \geq t \Leftrightarrow$  mezi každými 2 vrcholy grafu  $G \exists \geq t$  vrcholově disjunktních cest (mimo  $u, v$ ).

*Důkaz.* Empty.

□

Jelikož lze zjistit tok maximální velikosti v polynomiálním čase, tak máme algoritmus na zjištění  $k_e(G)$ ,  $k_v(G)$  také v polynomiálním čase.

## 5.1 2-souvislost podrobněji

**Definice 24.** Hranový řez velikosti 1 se nazývá **most** a vrcholový řez velikosti 1 se nazývá **artikulace**.

Pro graf  $G = (V, E)$  s  $e \in E$  označme  $G \div e$  graf vzniklý z  $G$  operací **podrozdělení hrany**  $e$  na cestu délky 2.

**Lemma 25.** Pro každý graf  $G = (V, E)$  a pro každou hranu  $e \in E$  platí:  $G$  je vrcholově 2-souvislý  $\Leftrightarrow G \div e$  je vrcholově 2-souvislý.

*Důkaz.* Empty.

□

**Věta 26** (Ušaté lemma). Graf  $G$  je vrcholově 2-souvislý  $\Leftrightarrow G$  lze vytvořit z  $K_3$  operacemi přidávání a podrozdělování hran. Proč "Ušaté lemma"? Přidání hrany a její podrozdělení odpovídám přidání cesty mezi 2 vrcholy ("přiepení ucha").

**Věta 27** (Alternativní znění).  $G$  je vrcholově 2-souvislý  $\Leftrightarrow G$  lze vytvořit z cyklu přidáváním uší, protože přidávání ucha lze simulovat přidáním hrany a jejím podrozdělením.

*Důkaz.* Empty.

□

## 6. Počítání dvěma způsoby

Metoda důkazů v kombinatorice. Určíme nějaký neznámý počet  $X$  vyjádřením počtu  $Z$  dvěma výrazy, z nichž jeden  $X$  obsahuje a druhý ne  $\Rightarrow$  máme vyjádření pro  $X$ .

### 6.1 Cayleyho vzorec

Kolika způsoby lze vytvořit strom na vrcholech  $\{1, \dots, n\}$ ? Nebo-li jaká je počet koster  $\kappa(n)$  grafu  $K_n$ ?

**Definice 25.** Kostra grafu  $G = (V, E)$  je strom  $T = (V, E')$  s  $E' \subseteq E$ .

**Věta 28** (Cayleyho vzorec). Pro každé  $n \geq 1$  platí  $\kappa(n) = n^{n-2}$ .

Existuje řada důkazů s velmi odlišnými myšlenkami, ukážeme si nejjednodušší založený na počítání dvěma způsoby.

*Důkaz.* Empty.

□

**Věta 29.** Graf  $K_n - e$  má  $(n-2)n^{n-3}$  koster pro  $n \geq 2$ .

*Důkaz.* Empty.

□

Počet koster  $\kappa(G)$  grafu  $G = (\{1, \dots, n\}, E)$  lze určit pomocí determinantu. Uvažme **Laplacián**  $L(G)$  grafu  $G$ , tedy matici  $L(G) = (L_{ij})_{i,j=1}^n$ , kde

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg_G(i) & \text{pokud } i = j \\ -1 & \text{pokud } (i, j) \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

**Věta 30** (Kirchhoffova věta).  $\forall G : \kappa(G) = \det(L(G)^{1,1})$ , kde  $(L(G)^{1,1})$  je Laplacián  $L(G)$  bez 1. řádků a 1. sloupce.

### 6.2 Spernerova věta

**Definice 26.** Systém  $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1, \dots, n\}}$  podmnožin  $n$ -prvkové množiny  $\{1, \dots, n\}$  je **nezávislý**, pokud platí:  $\forall A, B \in \mathcal{M}, A \neq B : A \not\subseteq B \wedge A \not\supseteq B$ .

**Věta 31** (Spernerova věta). Každý nezávislý systém v  $2^{\{1, \dots, n\}}$  obsahuje  $\leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  množin a tento odhad je těsný. Ekvivalentně: Nejdelší antiřetězec v  $(2^{\{1, \dots, n\}}, \subseteq)$  má právě  $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  prvků.

*Důkaz.* Empty.

□

## 7. Úvod do Ramseyovy teorie

"Každý velký systém obsahuje homogenní podsystem" dané velikosti.

**Definice 27.** *Obarvení množiny  $X$   $r$  barvami (zkráceně  $r$ -obarvení) je libovolné zobrazení přiřazující každému prvku  $x \in X$  jednu z  $r$  barev.*

**Věta 32** (Dirichletův princip, Pigeonhole principle).  $\forall r, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ : obarvíme-li prvky množiny  $X$   $r$  barvami, pak je-li  $|X| \geq 1 + \sum_{i=1}^r (n_i - 1)$ ,  $X$  obsahuje  $n_i$  prvků  $i$ -té barvy.

*Důkaz.* Triviální. □

Co kdybychom chtěli obarvit dvojice?

**Definice 28.** Pro  $k, l \in \mathbb{N}$  buď  $R(k, l)$  nejmenší  $N \in \mathbb{N}$  takové, že každé 2-obarvení ( $BÚNO$ : červené a modré obarvení)  $E(K_N)$  obsahuje červené  $K_k$  nebo modré  $K_l$  jako podgraf.

**Věta 33** (Ramseyova věta pro 2 barvy).  $\forall k, l \in \mathbb{N}$ :  $R(k, l)$  je konečné. Dokonce  $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{l-1}$ .

*Důkaz.* Empty. □

Určit Ramseyovská čísla  $R(k, l)$  přesně je velice obtížné (už pro malé případy). Známá čísla  $R(3, 3) = 6$ ,  $R(4, 4) = 18$ .

**Věta 34.**  $\forall k \geq 3 : R(k, k) > 2^{k/2}$

*Důkaz.* Empty. □

Rozšíření Ramseyovy věty na více barev a také na barvení  $p$ -tic vrcholů.

**Definice 29.** Pro čísla  $p, r, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$  ( $p$  - velikost barevných množin,  $r$  - počet barev,  $n_i$  - velikost 1-barevných podstruktur, které chceme najít) definujeme **\*\*Ramseyovo číslo\*\***  $R_p(n_1, \dots, n_r)$  jako nejmenší  $N \in \mathbb{N}$  takové, že pro každou množinu  $X$  s  $|X| \geq N$  a každé  $r$ -obarvení množiny  $\binom{X}{p}$  existuje  $i \in \{1, \dots, r\}$  a  $Y \subseteq X$  takové, že  $|Y_i| = n_i$  a všechny  $p$ -tice z  $\binom{Y}{p}$  mají  $i$ -tou barvu.

**Věta 35** (Ramseyova věta pro  $p$ -tice). Pro každé  $p, r, n_1, \dots, n_r$  je  $R_p(n_1, \dots, n_r)$  konečné.

*Důkaz.* Empty. □

## 7.1 Aplikace - Erdősova-Szekeresova věta

**Definice 30.**  $P$  = konečná množina bodů v rovině  $\mathbb{R}^2$ .  $P$  je v **obecné poloze**, pokud neobsahuje 3 body na přímce.  $P$  je v **konvexní poloze**, pokud tvoří množinu vrcholů konvexního mnohoúhelníku.

**Lemma 36.** Každá množina 5 bodů v  $\mathbb{R}^2$  v obecné poloze obsahuje 4 body v konvexní poloze.

*Důkaz.* Empty.

□

**Věta 37** (Erdősova-Szekeresova věta). Pro každé  $r \in \mathbb{N}$  existuje nejmenší  $ES(r) \in \mathbb{N}$  takové, že každá konečná množina  $s \geq ES(r)$  bodů v  $\mathbb{R}^2$  v obecné poloze obsahuje  $r$  bodů v konvexní poloze.

*Důkaz.* Empty.

□

Erdősova-Szekeresova domněnka je že  $\forall r \geq 2 : ES(r) = 2^{r-2} + 1$ . Zatím se zná, že to je dolní odhad a horní jako  $\leq 2^{r+o(r)}$ .

**Věta 38** (Nekonečná verze Ramseyovy věty). Pro každé  $p, r \in \mathbb{N}$  a pro každé  $r$ -obarvení množiny  $\binom{\mathbb{N}}{p}$  existuje nekonečná  $A \subseteq \mathbb{N}$  taková, že všechny její  $p$ -tice mají v daném  $r$ -obarvení stejnou barvu.

*Důkaz.* Empty.

□

Nekonečná verze implikuje konečnou. Dá se dokázat sporem, my si ji ukážeme pro  $n_1 = \dots = n_n = n$ .

**Lemma 39** (Königovo lemma). V každém zakořeněném stromě, který má nekonečně mnoho vrcholů ale jen konečné stupně existuje nekonečná cesta začínající v kořeni.

*Důkaz.* (implikace konečné věty) Empty.

□

## 8. Samoopravné kódy

**Definice 31.** *Abeceda*  $\Sigma$  = konečná množina symbolů, **slovo** délky  $n$  = posloupnost  $n$  symbolů,  $\Sigma^n$  = množina všech slov délky  $n$ .

**Definice 32.** *Hammingova vzdálenost*:  $x, y \in \Sigma^n : d(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}|$ , neboli počet pozic, kde se  $x$  a  $y$  liší.  $d$  je metrika a tedy  $(\Sigma^n, d)$  je metrický prostor.

**Definice 33.** *(Blokový) kód* je  $C \subseteq \Sigma^n$  a prvky  $C$  jsou **kódová slova**. Pomocí  $C$  umíme opravit  $\leq t$  chyb, pokud  $\forall y \in \Sigma^n \exists n$ anejvýš 1 slovo  $x \in C$  t.ž.  $d(x, y) \leq t$ .

**Definice 34.** *Parametry kódu*:

1. délka  $= n$ ,
2. velikost abecedy  $q = |\Sigma|$ ,
3. dimenze  $k = \log_q |C|$ ,
4. vzdálenost  $d = \min_{x, x' \in C, x \neq x'} d(x, x')$ .

Kód s parametry  $n, k, d, q$  značíme  $(n, k, d)_q$ .

V kódu s parametry  $(n, k, d)_q$  dokážeme opravit  $\leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  chyb. Množiny slov ve vzdálenosti  $\leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  od kódových slov jsou navzájem disjunktní. Pokud  $d \leq n$ , tak dokážeme opravit  $\leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

*Příklad.* 1. opakovací kód: každý symbol  $n$ -krát zopakujeme, parametry:  $(n, 1, n)_q$

2. charakteristický vektory KPR

- kódová slova  $P$  -  $\{0, 1\}$  - vektor, kde na pozici  $x$  je 1  $\leftrightarrow x \in P$
- $(X, \mathcal{P})$  - KPR řádu  $n$
- parametry:  $(n^2 + n + 1, \log_2(n^2 + n + 1), 2n)_2$
- $|X| = n^2 + n + 1$  a  $|C| = |\mathbb{P}| = n^2 + n + 1$
- $d = 2n$
- 2 kódové slova sdílí jednu jedničku, na zbytku se liší na  $2n$  pozicích

3. hadamardovy kódy

- hadamardova matice řádu  $n$  je  $H \in \{-1, 1\}$ , kde  $H \cdot H^T = n \cdot I_n$
- každý 2 různé řádky se liší na  $n/2$  pozicích
- zvolme  $C = \{\text{řádky } H\} \cup \{-\text{řádky } H\}$
- parametry:  $(n, 1 + \log_2(n), \frac{n}{2})_2$

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sylvestrova konstrukce hadamardovy matice:

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix}$$

**Hadamardova domněnka:** pro  $\forall k \in \mathbb{N} \exists$  hadamardova matice řádu  $4k$

Kódy  $C, C'$  jsou ekvivalentní, pokud se liší jen pořadím pozic.  $\exists \Pi \in S_n : X = (x_1, \dots, x_n) \in C \leftrightarrow \Pi(X) = (X_{\Pi(1)}, \dots, X_{\Pi(n)}) \in C'$ . Pro jaké parametry existuje kód?

**Definice 35.** *Kombinatorická koule je středem  $X \in \Sigma^n$  a poloměrem  $t$  je  $B(X, t) = \{y \in \Sigma^n : d(x, y) \leq t\}$ .*

**Lemma 40.** *Je-li  $C$  kód se vzdáleností  $2t + 1$ , pak  $\forall X, X' \in C : B(X, t) \cap B(X', t) = \emptyset$ .*

*Důkaz.* Sporem -  $\exists z \in B(x, t) \cap B(x', t) \implies d(x, x') \leq d(x, z) + d(x', z) \leq t + t = 2t$ , kde  $d(x, x')$  je  $\geq 2t + 1$ , takže celkově je  $2t + 1 \leq 2t$ . □

**Věta 41** (Hammingův odhad).  $\forall$  kód  $C$  s parametrami  $(n, k, d)_q$  platí, že  $|C| \leq \frac{q^n}{V(t)}$ .

*Důkaz.*  $d = 2t + 1 \implies$  koule okolo kódových slov s poloměrem  $t$  jsou disjunktní.  
 $\implies |C| \cdot |V(t)| \leq |\Sigma^n| \implies |C| \leq \frac{|\Sigma^n|}{|V(t)|} = \frac{q^n}{|V(t)|}$ . □

**Definice 36.** *Perfektní kód = kód s parametry  $(n, k, 2t + 1)_q$  a s  $|C| = \frac{q^n}{V(t)}$ .*

Opakovací kód s  $q = 2$  a lichou delkou.

**Věta 42** (Gilbertův - Varshalův odhad).  $\forall n, q, d \in \mathbb{N} : \exists$  kód  $C$  s parametry  $(n, k, d)_q$ , kde  $|C| \geq \frac{q^n}{V(d-1)}$ .

*Důkaz.* Stačí iterativně odebírat slova z  $\Sigma^n$  spolu se slovy v Hammingové vzdálenosti  $\leq d - 1$ . Proces skončí po  $\geq \frac{q^n}{V(d-1)}$  krocích, protože odebírané koule jsou nanejvýš disjunktní. □

**Definice 37.** *Lineární kódy - jako abecedu použít konečné těleso  $\mathbb{K} = \Sigma^n$ . Podprostor vektorového prostoru  $\mathbb{K}^n$  s parametry  $n, k, d, q$  značíme  $[n, k, d]_q$ .*

*Příklad.* 1. opakovací kódy nad  $\mathbb{Z}_p$  [nejsou lineární]

2. charakteristický vektory KPR [nejsou lineární]

3. hadamardovy kódy [obecně ne, ze Sylvestrovy konstrukce ano]

## 8.1 Lineární kódy

Víme, že každé těleso  $\mathbb{K}$  odpovídá Galoisovu tělesu  $\mathbb{F}_q$ .  $\forall x, y, z \in \mathbb{K}^n : d(x, y) = d(x + z, y + z) = d(x - y, 0)$ .  $\Rightarrow$  minimální vzdálenost  $d$  se rovná  $\min_{x, y \in C, x \neq y} \{d(x - y, 0)\} = \min_{x \in C, x \neq 0} \{d(x, 0)\}$ .  $\Rightarrow$  ke zjištění  $d$  není třeba zkoumat všechny dvojice, stačí počítat nenulové složky kódových slov. Výhodou lineárních kódů je úsporný popis, namísto všech  $q^r$  prvků kódu stačí uvést  $r$  prvků nějaké jeho báze.

**Definice 38. Generující matice** kódu  $C =$  matice  $M \in \Sigma^{r \times n}$  jejíž řádky tvoří bázi kódu  $C$ . V prostoru  $\mathbb{F}_q^n$  definujeme **skalární součin**  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  pro  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}_q^n$ . Nejedná se o klasický skalární součin podle klasické definice, protože neplatí  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (třeba  $x = (1, 1, 0, 0)$  nad  $\mathbb{F}_2^4$ ).

**Definice 39. Duálním kódem** k lineárnímu kódu  $C$  je jeho ortogonální doplněk.

$$C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_q^n : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pro každé } y \in C\}$$

Z povahy našeho skalárního součinu nemusí platit  $C \cap C^\perp = \{0\}$ . Platí  $\dim(C^\perp) + \dim(C) = n$  a  $(C^\perp)^\perp = C$ . Generující matice  $M^\perp$  kódu  $C^\perp$  se nazývá **kontrolní matice**. Řádky kontrolní matice určují lineární rovnice, které musí každé slovo z  $C$  splňovat (a naopak každý vektor z  $\mathbb{F}_q^n$ , který je splňuje, je kódovým slovem v  $C$ ). Nebo-li  $C = \{x \in \mathbb{F}_q^n : M^\perp x = 0\}$ .

Mějme lineární kód  $C$  s parametry  $[n, r, d]_q$ .

### 8.1.1 Kódování lineární kódy

Ze vstupního slova  $z \in \mathbb{F}_q^n$  chceme vytvořit kódové slovo  $x \in C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ . Nechť  $M \in \mathbb{F}_q^{r \times n}$  je generující matice kódu  $C$ . Pro každý lineární kód existuje ekvivalentní kód, jehož generující matice má tvar:

$$(I_r \ B)$$

Kde výška je  $r$  a šířka  $n$ . Říká se jí **standardní forma**. Stačí generující matici upravit Gaussovou eliminací a popřípadě zpermutovat sloupce.  $\Rightarrow$  BŮNO: Matice  $M$  je ve standardní formě. Jako kódové slovo zvolíme  $x = M^\top z \in C$ .  $\Rightarrow x$  má na prvních  $r$  souřadnicích slovo  $z$  (**indormační symboly**) a na zbylých  $n - r$  souřadnicích obsahuje **kontrolní symboly**.

$$\begin{pmatrix} I_r \\ B^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}$$

### 8.1.2 Dekódování lineárních kódů

Po odeslání  $x \in C$  bylo přijato  $y \in \mathbb{F}_q^n$ . Příjemce zná pouze  $y$  a chce najít kódové slovo, které je mu nejbližší. Nechť  $M^\perp$  je kontrolní matice kódu  $C$ , pokud je matice  $M$  ve standardní formě pak:

$$M^\perp = \begin{pmatrix} -B^\top & I_{n-r} \end{pmatrix}$$



kde šířka je  $r$  a výška  $n - r$ , protože pak  $M^\perp M^\top = -B^\top I_r + I_{n-r} B^\top = 0$ . Jako **syndrom slova**  $y \in \mathbb{F}_q^n$  nazveme součin  $M^\perp y$ , protože  $C = \{x \in \mathbb{F}_q^n : M^\perp x = 0\}$ , tak máme určené lineární zobrazení  $S : \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^{n-r}$  splňující  $C = \text{Ker}(S)$ . Zobrazení  $S$  nazveme **syndrom**. Zobrazení  $S$  je na, protože platí  $\dim(\text{Ker}(S)) + \dim(\text{Im}(S)) = \dim(\mathbb{F}_q^n)$ , kde  $\text{Im}(S)$  je obraz  $S$ .

**Lemma 43.** *Zobrazení  $S$  je prosté na  $B(0, t)$  kde  $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ .*

*Důkaz.* Empty. □

Podle lemma tedy k  $S \upharpoonright B(0, t)$  existuje inverzní zobrazení  $S^{-1} : S(B(0, t)) \rightarrow B(0, t)$ .  $S^{-1}$  není lineární, ale jde popsat tabulkou s  $q^{n-k}$  prvky z  $B(0, t)$  a v této tabulce je pro každý syndrom slova uloženo nějaké slovo s minimální vahou a s daným syndromem.

Co víme:

1. Pro  $y \in B(x, t)$  máme  $S(y - x) = S(y) - S(x) = S(y)$  (díky linearitě a toho že  $x \in \text{Ker}(S)$ ). Neboli  $y$  a vzniklá chyba  $y - x$  mají stejný syndrom.
2. Pro  $y \in B(x, t)$  máme  $y - x \in B(0, t)$  a tedy  $y - x = S^{-1}(S(y - x))$ . Neboli vzniklou chybu jde vyjádřit pomocí  $S$ .
3.  $x = y - (y - x) = y - S^{-1}(S(y - x)) = y - S^{-1}(S(y))$  nezávisí na  $x$ , pro dané  $y$  pomocí syndromu  $S(y)$  dokážeme určit kódové slovo  $x$ , ze kterého vzniklo, nastalo-li  $\leq t$  chyb.

### 8.1.3 Jak dekódovat

Pro přijaté slovo  $y \in \mathbb{F}_q^n$  spočítat  $x = y - S^{-1}(M^\perp y)$ , kde  $M^\perp$  je kontrolní matice a zobrazení  $S^{-1}$  máme připravené jako tabulku. Nastane-li  $\leq t$  chyb, je  $x$  kódové slovo, ze kterého  $y$  vzniklo.

**Tvrzení 44.** *Vzdálenost  $d$  kódu  $C = \text{minimální počet lineárně závislých sloupců kontrolní matice } M^\perp$ .*

*Důkaz.* Víme, že  $d = \text{minimální počet nenulových symbolů v nenulovém slově } x \text{ z } C$ .  $x \in C \Leftrightarrow M^\perp x = 0$  tedy sloupce  $M^\perp$  vybrané nenulovými složkami  $x$  jsou lineárně závislé. □

## 8.2 Hammingovy kódy

Příklad lineárních kódů, které jsou dokonce perfektní. Jejich nevýhodou je, že nedokáží opravit příliš mnoho chyb. Například nad tělesem  $\mathbb{F}_2$ . Mějme parametr  $r = 3$ . Generující matice:

$$M = \begin{pmatrix} & - & l_1 & - \\ I_{2^{r-r-1}} & - & l_2 & - \\ & - & l_3 & - \end{pmatrix}$$

Kde  $l_i$  jsou všechny nenulové vektory z  $\mathbb{F}_2^r$  různé od vektorů kanonické báze. Kontrolní matice:

$$M^\perp = \left( \begin{array}{ccc|c} | & | & | & \\ l_1 & l_2 & l_3 & I_r \\ | & | & | & \end{array} \right)$$

Parametry matic jsou  $r$  a  $2^r - r - 1$ . Dva vektory z  $\mathbb{F}_2^r \setminus \{0\}$  jsou lineárně závislé  $\Leftrightarrow$  jsou totožné  $\Rightarrow$  minimální počet lineárně závislých sloupců v  $M^\perp$  je 3 a podle tvrzení 13.2. je vzdálenost kódu 3.  $\Rightarrow$  jedná se o kód s parametry  $[2^r, 2^r - r - 1, 3]_2$ , takže opraví  $\leq 1$  chybu

*Příklad.* Pro  $r = 3$  dostaneme kód s parametry  $[7, 4, 3]_2$ . Jedná se o kód sestavený z Fanovy roviny přidáním počátku a doplňků.

Hammingovy kódy jsou perfektní: stačí ukázat, že Hammingův odhad  $|C| \leq \frac{q^n}{V(t)}$  je těsný.  $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor = 1$ .  $V(t) = V(1) = \sum_{i=0}^t = (q-1) = 1 + (2^r - 1) = 2^r$ .  $\frac{q^n}{V(1)} = \frac{2^{3r-1}}{2^r} = 2^{2r-r-1}$ .  $|C| = 2^r = 2^{2r-r-1}$  takže Hammingův je skutečně pro Hammingovy kódy těsný.

Lepší reprezentace funkce  $S^{-1}$ . Tabulka reprezentující  $S^{-1}$  má pouze  $2^{n-r} = 2^{2^r-1-(2^r-r-1)} = 2^r = n+1$  prvků. Ve skutečnosti tabulku vůbec nepotřebujeme. Zpermutujeme-li sloupce a řádky  $M^\perp$  pak, aby  $i$ -tý sloupec byl binárním zápisem čísla  $i$ , pak  $S(y)$  určuje pozici na níž nastala chyba.  $\Rightarrow$  lze dékodovat tak, že pokud  $S(y) = 0$ , pak  $x = y$ , jinak je  $S(y)$  binárním zápisem čísla  $i$  a pak  $x$  = slovo vzniklé z  $y$  výměnou bitu, který je v  $y$  na pozici  $i$ .

## Part II

### Kombinatorika a grafy II

## 9. Párování v grafech

**Definice 40.** ***Párování** v grafu  $G = (V, E)$  je množina hran  $M \subseteq E$  taková, že každý vrchol z  $G$  je obsažen v nejvýš jedné hraně v  $M$ .  $\mu(G) :=$  velikost největšího párování v grafu  $G$ .*

**Definice 41.** ***Vrcholové pokrytí** v grafu  $G = (V, E)$  je množina vrcholů  $T \subseteq V$  t.ž. každá hrana obsahuje aspoň jeden vrchol z  $T$ .  $\tau(G) :=$  velikost nejmenšího vrcholového pokrytí v grafu  $G$ .*

**Cvičení.** *Nechť  $G = (V, E)$  je bipartitní graf s partitami  $A, B$ ,  $|A| \leq |B|$ , souvislý. Jaké nerovnosti (nebo rovnosti) platí mezi  $\mu(G), \tau(G), |A|$ :*

- $\mu(G) \leq |A|$
- $\mu(G) = \tau(G)$  (plyne z König-Egarvaryho vety)

**Pozorování.**  $\mu(G) \leq \tau(G)$  v libovolném grafu  $G$ .

**Cvičení.** *Dokažte:*

1.  $\exists G : \mu(G) \neq \tau(G)$ 
  - $K_4$  s tím že uprostřed je vrchol (má  $\mu(G) = 2$  a  $\tau(G) = 3$ )
2.  $\forall G : \tau(G) \leq 2\mu(G)$ 
  - v nejhorším případě vezmu oba vrcholy všech hran z  $M$

**Definice 42.** ***Volný vrchol:** vrchol nesousedící s žádnou hranou z  $M$ . **volná střídavá cesta:** cesta spojující dva volné vrcholy na níž se střídají párovací ( $\in M$ ) a nepárovací ( $\notin M$ ) hrany.*

**Lemma 45.** *Nechť  $M$  je párování v  $G$ . Potom  $M$  je největší párování v  $G \Leftrightarrow$  v  $G$  neexistuje volná střídající se cesta pro  $M$ .*

*Důkaz.*  $\Rightarrow$  Pokud v  $G$  existuje VSC pak lze tyto hrany přehodit. Potom je to spor s tím, že je největší.  $\Leftarrow$  Nechť  $M$  není největší potom existuje  $N$  větší párování než  $M$ . Uvažme graf s hranami  $M \cup N$ . Každá komponenta grafu je buď:

1. izolovaná hrana v  $M \cap N$
2. kružnice sudé délky, kde se střídají  $M$  a  $N$
3. cesta na níž se střídají  $M$  a  $N$

Protože  $|N| > |M|$  v  $M \cup N$  musí být komponenta  $K$ , která má víc hran z  $N$  než z  $M$ .  $K$  je cesta liché délky, která začíná a končí hranou z  $N$ , tedy  $K$  je VSC pro  $M$ . □

**Definice 43.** *Kytka* v grafu  $G$  a párování  $M$  je podgraf tvořený **stonkem**  $S$  a **květem**  $K$ , kde  $S$  je cesta sudé délky mezi dvěma vrcholy  $x$  a  $y$ , kde  $x$  je volný a  $y \in K$ , navíc na  $S$  se střídají párovací a nepárovací hrany.  $K$  je lichá kružnice, která neobsahuje žádný vrchol z  $S$  a střídají se na ní párovací a nepárovací hrany ( $u, y$  má dvě nepárovací hrany).

Může nastat že  $x = y$  a  $S = \{x\}$ .

**Pozorování.** *Hrany z květu jsou nepárovací. Jinak by se nejednalo o párování.*

**Definice 44.** **Kontrakce** květu  $K$  nahradí  $K$  jedním vrcholem  $y$ , smaže všechny hrany indukované  $K$  a každou hranu  $\{u, v\}$ , kde  $u \in K$  a  $v \notin K$  nahradí hranou  $\{y, v\}$ . Označme  $G.K$  graf vzniklý z  $G$  kontrakcí květu  $K$ ,  $M.K$  pak párování vzniklé z  $M$  odstraněním všech hran  $K$ .

**Lemma 46.** *Nechť  $M$  je párování v grafu  $G$  obsahující kytku se stonkem  $S$  a květem  $K$ . Potom  $M$  je největší párování v  $G \Leftrightarrow M.K$  je největší párování v  $G.K$ .*

Nebo-li:  $M$  má VSC v  $G \Leftrightarrow M.K$  má VSC v  $G.K$ . Navíc z VSC v  $M.K$  v  $G.K$  lze v polynomiálním čase najít VSC v  $M$  a  $G$ .

*Proof.*  $\Rightarrow$  (v alternativním znění) Nechť  $P$  je VSC v  $M.K$ . Potom:

1.  $y \in P \Rightarrow P$  je i VSC v  $M$
2.  $y$  je vnitřní vrchol v  $P$ , potom lze nahradit obloukem z  $K$  (jsou dva oblouky, protože je tam celkově lichý počet hran, tak jedna cesta musí být lichá a druhá sudá, tudíž to lze spojit)
3.  $y$  je koncový vrchol v  $P$ , potom  $y$  musí být volný, tudíž  $x = y$ , poté prakticky stejný postup jako u 2.

$\Leftarrow$   $G$  má VSC  $\Rightarrow G.K$  má VSC, pokud  $S$  má délku 0, to jest  $y$  je volný vrchol. Následně to pak už není cesta ale sled. Začnu tedy z konce cesty a poprvé co se dostanu do  $y$  tak skončím.  $M \Delta S$  : Párování v  $G$  vznikne tak, že se na  $S$  prohodí párovací a nepárovací hrany.

Pozorování: V  $M \Delta S$  je květ  $K$  kytka se stonkem délky 0. Pozorování:  $|M \Delta S| = |M|$ .

$G$  má VSC  $\Rightarrow G.K$  má VSC, navíc  $S$  má délku 0.  $(G, M)$  má VSC  $\Leftrightarrow (G, M \Delta S)$  má VSC  $\Rightarrow (G.K, (M \Delta S).K)$  má VSC  $\Leftrightarrow (G.K, M.K)$  má VSC.  $\square$

**Lemma 47.** *Pokud NajdiVSCneboKytka napíše "M je největší", tak  $M$  je největší.*

*Proof.* Pokud  $M$  není největší, tak obsahuje VSC  $v_0 v_1 \dots v_k \in V$ , dokážeme indukci podle  $i$ , že každý z vrcholů  $v_0 \dots v_k$  dostal přidělenou hladinu  $h(v_i)$  splňující  $h(v_i) \equiv i \pmod 2$ . Pro  $i = 0$   $v_0$  je volný, tedy  $h(v_0) = 0$ . Hotovo. Pro  $i > 0$ ,  $i$  liché, indukční předpoklad je  $h(v_{i-1})$  je sudá: tak z algoritmu buď už  $v_i$  měla lichou  $h(v_i)$  nebo ji dostala. (Kdyby sudá, tak vyhodí VSC nebo Kytka.) Pro  $i > 0$   $i$  je sudé, indukční předpoklad, že  $h(v_{i-1})$  je lichá: tak obdobně bude  $h(v_i)$  sudé. Jistě  $k$  je liché, tedy  $h(v_k)$  je lichá, ale  $v_k$  je volný vrchol, tedy  $h(v_k) = 0$  a to je spor.  $\square$

**Definice 45.** **Perfektní párování** v grafu  $G$  je párování v němž každý vrchol sousedí s právě jednou párovací hranou.

---

**Algorithm 1** NajdiVSCneboKytku

---

**Require:** Graf  $G = (V, E)$  párování  $M$

**Ensure:** Buď VSC  $P$  pro  $(G, M)$ , nebo kytka  $S \cup K$  v  $(G, M)$ , nebo "M je největší párování v  $G$ ".

- 1: Používáme frontu vrcholů 'F', pro každý vrchol  $x \in V$  máme hladinu  $h(x) \in \mathbb{N}_0$  a rodiče  $r(x) \in V$ .
- 2: Na začátku 'F' =  $\emptyset$ ,  $h(x)$  a  $r(x)$  jsou nedefinované.
- 3: **for** každý volný vrchol  $x$  **do**
- 4:     Zařaď  $x$  do 'F',  $h(x) = 0$ .
- 5: **end for**
- 6: Dokud 'F'  $\neq \emptyset$ : odebereme  $x$  z 'F'.
- 7: **if**  $h(x)$  je lichá. Necht  $y$  je vrchol spojený s  $x$  hranou  $M$ . **then**
- 8:     Pokud  $h(y)$  není definovaná:  $h(y) = h(x) + 1$ ,  $r(y) = x$ , zařaď  $y$  do 'F'.
- 9:     Pokud  $h(y)$  je sudá: to nemůže nastat
- 10:    **if** (1.3) Pokud  $h(y)$  je lichá:  $Px =$  cesta  $x, r(x), r(r(x)), \dots$ ,  $Py$  je cesta  $y, r(y), r(r(y)), \dots$  obě cesty vedou až do volného vrcholu. **then**
- 11:       Pokud  $Px \cap Py = \emptyset$  tak potom  $Px \cup Py \cup \{x, y\}$  je **VSC**, konec.
- 12:       Pokud  $Px \cap Py \neq \emptyset$  našli jsme **kytku**  $Px \cap Py \cap \{x, y\}$ , konec.
- 13:    **end if**
- 14: **else** Pokud  $h(x)$  je sudá. Pro každý  $y$  t.z.  $\{xy\} \notin M$ :
- 15:     Pokud  $h(y)$  není definovaná:  $h(y) = h(x) + 1$ ,  $r(y) = x$ , vlož  $y$  do 'F'.
- 16:     Pokud  $h(y)$  je lichá, tak nedělej nic.
- 17:     Pokud  $h(y)$  je sudá: najdi VSC nebo kytku jako v 1.3, konec.
- 18: **end if**
- 19: Pokud dojdeme do stavu, že  $F = \emptyset$ , napiš "M je největší", konec.

---

**Algorithm 2** ZvětšPárování

---

**Require:**  $G, M$

**Ensure:** párování  $M'$  v  $G$ ,  $|M'| > |M|$  nebo "M je největší"

- 1: Procedura NajdiVSCneboKytku( $G, M$ )
- 2:  $M$  je největší, tak konec
- 3: VSC, invertuji a zvětši  $M$ , konec
- 4: **if** Kytka **then**
- 5:     ZvětšPárování( $G, K, M, K$ )
- 6:      $M, K$  je největší, potom i  $M$  je největší
- 7:      $M'$  je větší párování v  $G, K$  než  $M, K$ :  $M^* := M' \cup (\frac{|K|-1}{2}$  hran květu ) tak aby to šlo.
- 8: **end if**

---

**Algorithm 3** Algoritmus pro hledání největšího párování

---

**Require:**  $G$

**Ensure:** největší párování v  $G$

- 1:  $M :=$  libovolné párování (buď prázdné, nebo hladově nějaké)
- 2: Opakuj ZvětšPárování( $G, M$ ) dokud to jde. **return** Vypiš nalezené párování.

**Pozorování.** *Perfektní párování je největší párování.*

**Pozorování.** *Ne každý graf má perfektní párování (trojúhelník).*

**Definice 46.** *Lichá komponenta* grafu  $G$  je komponenta s lichým počtem vrcholů.  $\text{odd}(G) :=$  počet lichých komponent v  $G$ . Pro graf  $G = (V, E)$  a množinu  $S \subseteq V$  :  $G - S = (V \setminus S, E \cap \binom{V \setminus S}{2})$ .

**Věta 48** (Tutte). Pro každý  $G = (V, E)$  platí  $G$  má perfektní párování  $\Leftrightarrow \forall S \subseteq V$  :  $\text{odd}(G - S) \leq |S|$ . Druhá část se nazývá Tutteova podmínka.

*Důkaz.*  $\Rightarrow$  Necht  $G$  má perfektní párování  $M$ . Pro spor, necht  $\exists S \subseteq V$  :  $\text{odd}(G - S) > |S|$ . Potom ale z každé liché komponenty  $G - S$  vede aspoň jedna hrana z  $M$  do  $S$ , tudíž  $\text{odd}(G - S) \leq |S|$  a to je spor.  $\Leftarrow$  Necht  $G$  splňuje Tutteovu podmínku. Pozorování:  $\text{odd}(G) = 0$ , jinak spor  $S = \emptyset$ . Chci dokázat, že  $G$  má perfektní párování a to pomocí indukce podle  $|\binom{V}{2} \setminus E|$ .

Pro  $|\binom{V}{2} \setminus E| = 0$ :  $G$  je úplný graf, navíc  $\text{odd}(G) = 0$ . Tudíž zjevně má perfektní párování. Pro  $|\binom{V}{2} \setminus E| > 0$  :  $S := \{x \in V : \deg(x) = |V| - 1\}$ . Rozliším dva případy:

1. Každá komponenta  $G - S$  je úplný graf:  $G$  snadno najdu perfektní párování, díky tomu, že  $\text{odd}(G - S) \leq |S|$ .
2. Existuje komponenta  $Q$  grafu  $G - S$ , která není úplná. V  $Q$  lze najít dva nesousední vrcholy  $x, y$ , které mají společného souseda z  $Q$ . Protože  $z \notin S$ ,  $\exists w : w$  nesousedí se  $z$ . Označme  $G_1 = (V, E \cup \{xy\})$ ,  $G_2 = (V, E \cup \{zw\})$ .

Pozorování  $G_1, G_2$  splňují Tutteovu podmínku. Pak z indukčního předpokladu  $G_1$  má perfektní párování  $M_1$  a  $G_2$  má  $M_2$ . Pokud  $M_1$  neobsahuje hranu  $\{xy\}$ , tak  $M_1$  je perfektní párování v  $G$ . Tak je to hotové.

Pokud ale  $\{xy\} \in M_1$  tak podobně předpokládám, že  $\{zw\} \in M_2$ . Uvažme graf  $H = (V, M_1 \cup M_2)$ : každá komponenta  $H$  je buď hrana patřící  $M_1 \cap M_2$ , nebo sudá kružnice na níž se střídají hrany z  $M_1$  a  $M_2$ . V každé komponentě  $H$  neobsahující hranu  $\{xy\}$  můžu vrcholy spárovat pomocí hran  $M_1$ . Necht  $C$  je komponenta  $H$  obsahující  $\{xy\}$ . Pokud  $C$  neobsahuje  $\{zw\}$ , vrcholy spáruji pomocí  $M_2$ , hotovo. Ve zbylém případě v  $C$  použijeme jednu z hran  $\{xy\}, \{zw\}$  a zbytek lze spárovat pomocí  $M_1 \setminus \{xy\}$  a  $M_2 \setminus \{zw\}$ . Tedy  $G$  má perfektní párování. □

**Definice 47.** Graf je *d-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň  $d$ .

**Definice 48.** Graf je (vrcholově) *k-souvislý*, pokud má aspoň  $k + 1$  vrcholů a nemá vrcholový řez velikosti  $< k$ .

**Lemma 49.** Necht  $G = (V, E)$  je graf, jehož každý vrchol má lichý stupeň, necht  $A \subseteq V$  je množina liché velikosti. Potom  $G$  obsahuje lichý počet hran z  $A$  do  $V \setminus A$ .

*Důkaz.*  $|S| = 2k + 1$  ven je součet stupňů v  $A$ . Ten musí být lichý.  $2k$  je pro každou hranu, která má oba vrcholy v  $A$ . Tudíž *ven* musí být lichý. □

**Věta 50** (Petersen). Každý 3-regulární a 2-souvislý graf má perfektní párování.

*Důkaz.* Necht  $G = (V, E)$  je 3-regulární a 2-souvislý graf. Tvrdíme:  $\forall S \subseteq V : \text{odd}(G - S) \leq |S|$ . Pro  $S = \emptyset$  Tutteova podmínka platí:  $|V|$  je sudá (z principu sudosti grafů) a taky souvislý  $\Rightarrow \text{odd}(G) = 0$ .  $S \neq \emptyset, l := \text{odd}(G - S)$  necht  $Q_1, \dots, Q_l$  jsou liché komponenty  $G - S$ . Necht  $p$  je počet hran mezi  $S$  a  $Q_1 \cap \dots \cap Q_l$ . Pozorování:  $p \leq 3|S|$  - plyne z toho, že je 3-regulární. Pozorování: z každé  $Q_i$  vedou aspoň 2 hrany do  $S$  to plyne z toho, že je  $G$  2-souvislý, jinak by existovala artikulace. Pozorování: z každé  $Q_i$  vedou aspoň 3 hrany do  $S$ . To plyne z lemma.  $\Rightarrow p \geq 3l \Rightarrow l \leq |S|$ . A ještě použít Tutteovu větu.

□



# 10. Kontrakce a minory

**Definice 49.** Necht  $G = (V, E)$  je graf,  $e = \{x, y\} \in E$  pak **kontrakce** hrany  $e$  je operace, která vrcholy  $x, y$  nahradí jedním vrcholem  $v_e$  a pro každý vrchol  $z \in V \setminus \{x, y\}$  sousedící s  $x$  nebo  $y$  se hrany  $\{xz\}, \{yz\}$  nahradí  $\{v_e z\}$ . Výsledek se značí  $G.e$ .

**Lemma 51** (o kontrahovatelné hraně). V každém 3-souvislém grafu  $G = (V, E)$ , který není izomorfní  $K_4$  existuje hrana  $e \in E$  taková, že  $G.e$  je opět 3-souvislý graf.

**Tvrzení 52.** Pro každou hranu  $e = \{xy\} \in E$  existuje vrchol  $z \in V \setminus \{x, y\}$  takový, že  $G - \{x, y, z\}$  je nesouvislý, navíc každý z vrcholů  $\{x, y, z\}$  má aspoň jednoho souseda v každé komponentě  $G - \{x, y, z\}$ .

*Důkaz.* Víme, že  $G.e$  není 3-souvislý, navíc  $|V(G.e)| \geq 4$  jinak je to  $K_4$ , tedy existuje v  $G.e$  vrcholový řez  $R$  velikosti nejvýše 2. Jistě  $v_e \in R$  jinak by  $R$  byl řez v  $G$   $R \neq \{v_e\}$  jinak by  $\{x, y\}$  byl řez v  $G$ . Tedy  $R = \{v_e, z\}$  a  $\{x, y, z\}$  je řez v  $G$ . Kdyby např.  $x$  neměl žádného souseda v nějaké komponentě  $C$  grafu  $G - \{x, y, z\}$ , tak  $G - \{y, z\}$  je nesouvislý, spor s tím, že  $G$  má být 3-souvislý. □

*Důkaz.* Pro spor necht  $G = (V, E)$  je protipříklad. Volme  $e = \{x, y\} \in E$  a vrchol  $z \in V$ , komponentu  $C$  grafu  $G - \{x, y, z\}$  tak, aby  $C$  mělo co nejméně vrcholů. Necht  $w$  je vrchol  $C$  sousedící se  $z$ . Pro hranu  $f = \{z, w\}$  použijí pomocné tvrzení:  $\exists v \in V \setminus \{z, w\} : G - \{z, w, v\}$  je nesouvislý a každá jeho komponenta obsahuje vrchol sousedící s  $w$ . Necht  $D$  je komponenta  $G - \{z, v, w\}$  neobsahující  $x$  ani  $y$ . Tedy  $D \subseteq C \setminus \{w\}$  :  $D$  obsahuje souseda  $w$ , ten musí být uvnitř  $C$ , žádná cesta uvnitř  $D$  neobsahuje  $x, y, z, w$  tedy  $D$  je uvnitř jediné komponenty  $G - \{x, y, z\}$ , tedy  $D$  je uvnitř  $C$ , tedy i uvnitř  $C \setminus \{w\}$ . To je spor s minimalitou  $C$ . □

**Věta 53** (Tutteova charakterizace 3-souvislých grafů). Graf  $G = (V, E)$  je 3-souvislý  $\Leftrightarrow \exists$  posloupnost grafů  $G_0, G_1, \dots, G_k$ , kde:

1.  $G_0 \cong K_4, G_k \cong G$ .
2.  $\forall i = 1, \dots, k : G_i$  obsahuje hranu  $e = \{x, y\}$  spojující dva vrcholy  $x, y$  stupně  $\geq 3$ ,  $\deg(x) = \deg(y) = 3$  a  $G_{i-1} \cong G_i.e$ .

*Proof.* " $\Rightarrow$ " Opakovaná aplikace lemma o kontrahovatelné hraně.

" $\Leftarrow$ " Necht  $G_0, \dots, G_k$  splňuje podmínky na pravé straně. Dokážeme, že všechny grafy  $G_0, \dots, G_k$  jsou 3-souvislé. Indukcí pdole  $i$  dokážeme, že  $G_i$  je 3-souvislý.  $i = 0$  :  $K_4$  je 3-souvislý.  $i > 0$  předpokládáme, že  $G_{i-1}$  je 3-souvislý, pro spor necht  $G_i$  není 3-souvislý,  $\exists u, v \in V(G_i) : G_i - \{u, v\}$  je nesouvislý, navíc  $\exists e = \{x, y\} \in E(G_i) = G_i.e = G_{i-1}$ . Případy:

1.  $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$   $G_{i-1}$  pak není 3-souvislý. Spor.
2.  $\{u, v\} = \{x, y\}$  pak  $G_{i-1}$  je 1-souvislý. Spor.

3.  $|\{u,v\} \cap \{x,y\}| = 1$  BŮNO:  $x = u$ : nelze, protože  $\deg(y) \geq 3$ , tedy komponenta  $G_i - \{u,v\}$  obsahující  $y$  má aspoň 2 vrcholy, tedy  $G_i.e = G_{i-1}$  má řez  $\{v, v_e\}$ . Spor.

□

**Definice 50.** Graf  $H$  je **minor** grafu  $G$  pokud  $H$  lze vyrobit z  $G$  posloupností mazání hrany, kontrakce hrany, mazání vrcholu. Značení:  $H \leq_m G$ .

**Definice 51.** Graf  $F$  je **dělení** grafu  $H$ , pokud  $F$  vznikne z  $H$  tak, že se každá hrana  $\{x,y\} \in E(H)$  nahradí cestou délky  $\geq 1$ .

**Definice 52.** Graf  $H$  je **topologický minor** grafu  $G$ , pokud  $G$  obsahuje nějaké dělení grafu  $H$  jako podgraf. Značení  $H \leq_t G$ .

**Definice 53.** Graf  $H$  je **indukovaný podgraf** grafu  $G$ , pokud je  $H$  podgraf grafu  $G$  a zároveň má všechny hrany původního grafu indukované vrcholům grafu  $H$ . Značení  $H \leq_i G$ .  $H$  je **podgraf** grafu  $G$ . Značení  $H \subseteq G$ .

**Pozorování.** Platí implikace  $H \leq_i G \Rightarrow H \subseteq G \Rightarrow H \leq_t G \Rightarrow H \leq_m G$ . Ale neplatí žádná opačná implikace.

**Lemma 54.**  $H = (V_H, E_H)$  je graf,  $V_H = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ,  $G = (V_G, E_G)$  je graf. Potom  $H \leq_m G$  iff  $G$  obsahuje  $k$  disjunktích souvislých neprázdných podgrafů  $B_1, B_2, \dots, B_k$  takových, že pokud  $\{x_i, x_j\} \in E_H$ , tak  $G$  obsahuje aspoň jednu hranu spojující vrchol  $B_i$  s vrcholem  $B_j$ .

*Důkaz.* Danou vlastnost si označíme jako vlastnost p. " $\Leftarrow$ " Zkontrahujeme všechny hrany v  $B_i$ . Nadbytečné hrany a vrcholy odstraníme. " $\Rightarrow$ " Necht  $H \leq_m G$ , tj. existuje posloupnost grafů  $G_0, G_1, \dots, G_p$ , kde  $H \cong G_0, G_p \cong G$  a pro  $\forall i = 1, \dots, p : G_{i-1}$  vznikne z  $G_i$  smazáním hrany nebo vrcholu anebo kontrakcí hrany. Dokážeme indukcí podle  $i = 0, \dots, p$ , že  $G_i$  má vlastnost p.  $i = 0 : \forall j = 1, \dots, k : \{x_j\} = B_j$ .  $i > 0$  předpokládejme  $G_{i-1}$  splňuje vlastnost p. Pak přidáním vrcholu nebo hrany - nic neděláme, zůstávají stejné. Dekontrakce hrany. Pokud není v  $B_j$  tak hotovo (zůstane stejné). Pokud ale je v  $B_j$  tak oba nové vrcholy přidáme do  $B_j$  a ostatní stejné.

□

**Definice 54.** Pro uspořádání  $\leq$  a množinu grafů  $F = \{F_1, F_2, \dots\}$  označíme  $\text{Forb}_{\leq}(F) := \{G \text{ graf} : \forall H \in F : H \not\leq G\}$ . (Plyne ze slova *Forbidden*, nebo-li *zakázané*.)

**Definice 55.** Třída grafů  $\mathcal{G}$  je **uzavřená** vůči uspořádání  $\leq$  pokud  $\forall G \in \mathcal{G} \forall H \leq G : H \in \mathcal{G}$ .

**Pozorování.** Třída  $\mathcal{G}$  se dá přepsat jako  $\text{Forb}_{\leq}(F)$  pro nějakou množinu  $F$  iff  $\mathcal{G}$  je uzavřená vůči  $\leq$ .

**Fakt.** Rovinné grafy jsou uzavřené vůči  $\subseteq, \leq_i, \leq_t, \leq_m$ .

Připomenutí:  $G = (V, E)$  rovinný, souvislý, má nakreslení mající  $f$  stěn, potom  $|V| - |E| + f = 2$ . Pokud  $|V| \geq 3$  tak  $|E| \leq 3|V| - 6$ . Pokud  $|V| \geq 4$  a  $G$  neobsahuje trojúhelník jako podgraf, tak  $|E| \leq 2|V| - 4$ .

**Věta 55** (Kuratowski, Wagner). Pro graf  $G = (V, E)$  je ekvivalentní:

1.  $G$  je rovinný,
2.  $G \in \mathcal{Forb}_{\leq_t}(K_5, K_{3,3})$ ,
3.  $G \in \mathcal{Forb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$ .

*Proof.*  $1 \Rightarrow 2$  :  $G$  je rovinný  $\Rightarrow$  každý topologický minor je rovinný  $\Rightarrow K_5 \not\leq_t G \wedge K_{3,3} \not\leq_t G \Rightarrow G \in \mathcal{Forb}_{\leq_t}(K_5, K_{3,3})$ .

$1 \Rightarrow 3$  : Obdobně jako předchozí.

$3 \Rightarrow 2$  :  $H \leq_t J \Rightarrow H \leq_m J$  a taky  $H \not\leq_m J \Rightarrow H \not\leq_t J$ .  $J \in \mathcal{Forb}_{\leq_m}(H) \Rightarrow J \in \mathcal{Forb}_{\leq_t}(H)$  nebo-li  $\mathcal{Forb}_{\leq_m}(H) \subseteq \mathcal{Forb}_{\leq_t}(H)$ .

$2 \Rightarrow 3$  : Připomenutí: Pro graf  $H$  s maximálním stupněm  $\leq 3$ .  $H \leq_t G \Leftrightarrow H \leq_m G$ . A taky  $K_5 \leq_m H \Rightarrow ((K_5 \leq_t H) \vee (K_{3,3} \leq_t H))$ . Pak dokážeme obměnu ( $\neg 3 \Rightarrow \neg 2$ )  $K_5 \leq_m G \vee K_{3,3} \leq_m G \Rightarrow K_5 \leq_t G \vee K_{3,3} \leq_m G \Rightarrow G \notin \mathcal{Forb}(K_5, K_{3,3})$ .

$3 \Rightarrow 1$  Indukcí podle  $|V|$ .  $|V| \leq 4$  : Jistě  $G$  je rovinný. Předpoklad, že  $|V| \geq 5$  a  $G \in \mathcal{Forb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$ . Necht  $k$  je vrcholová souvislost. Rozlišíme případy:

1.  $k = 0$ : každá komponenta je dle indukčního předpokladu rovinná  $\Rightarrow G$  je rovinný.
2.  $k = 1$ : Lze rozdělit graf  $G$  na dva grafy  $G_1, G_2$  podle dané artikulace  $x$ . S tím, že oba grafy mají i daný vrchol  $x$ . Podle IP jsou oba grafy rovinné, navíc jdou nakreslit tak, že  $x$  bude vždy na vnější stěně (pomocí projekce na sféru), potom je můžeme "slepit" dohromady a máme stále rovinný graf.
3.  $k = 2$  Obdobně rozdělím graf na  $G_1, G_2$  a z nich vytvořím  $G_1^+ := G_1 \cup \{xy\}$  a  $G_2^+ := G_2 \cup \{xy\}$ . Následně tvrdím:  $G_1^+, G_2^+ \in \mathcal{Forb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$ .  $G_1$  i  $G_2$  obsahuje cestu  $P_1$  a  $P_2$  z  $x$  do  $y$  (jinak by  $x$  nebo  $y$  obsahovalo řez).
  - $G_1^+ \leq_m G$  (dokonce  $G_1^+ \leq_m G_1 \cup P_2 \subseteq G$ ).
  - $G_1^+ \in \mathcal{Forb}_{\leq_m}(K_5, K_{3,3})$  kdyby např.  $K_5 \leq_m G_1^+ \leq_m G$ , tak  $K_5 \leq_m G$  a to je spor. Dle IP  $G_1^+$  i  $G_2^+$  jsou rovinné, oba se dají nakreslit tak, že hrana  $\{xy\}$  je na vnější stěně. Následně pak slepím  $G_1^+$  a  $G_2^+$  a popřípadě smažu hranu  $\{xy\}$  a získám rovinný graf.
4.  $k \geq 3$  :  $G$  je 3-souvislý: Fakt: v rovinném nakreslení 2-souvislého grafu je každá stěna ohraničená kružnicí. A taky lemma o kontrahovatelné hraně:  $\exists e = \{xy\} \in E$  taková, že  $G.e$  je 3-souvislý, tedy  $G.e - v_e$  je 2-souvislý.

- Pozorování:  $G.e - v_e = G - \{x, y\}$ . Dle IP  $G.e$  je rovinný. Zvolme rovinné nakreslení  $G.e$ . V  $G.e - v_e$  je stěna, z níž byl smazán  $v_e$  ohraničená kružnicí  $C$ . Do stěny ohraničené  $C$  nakreslíme vrchol  $x$ . Každý soused  $v_e$  v grafu  $G.e$  leží na  $C$ , tedy každý soused  $x$  v grafu  $G$  různý od  $y$  leží na  $C$ . Označme  $N_C(x)$  : sousedé  $x$  na  $C$  a podobně  $N_C(y)$ . Teď rozdělme případy.

- (a)  $|N_C(x) \cap N_C(y)| \geq 3$  : to nelze,  $C \cup \{x, y\}$  indukují dělení  $K_5$ .
- (b)  $\exists a_1, a_2 \in N_C(x), b_1, b_2 \in N_C(y) : |\{a_1, a_2, b_1, b_2\}| = 4$  leží na  $C$  v pořadí  $a_1, b_1, a_2, b_2$ : to taky nelze, pak je tam  $K_{3,3}$ .
- (c) Nenastane ani jedna z předchozích možností. Vrcholy  $N_C(x)$  rozdělí  $C$  na cesty  $P_1, P_2, \dots, P_k, \exists j : N_C(y) \subseteq P_j$ .

□

# 11. Kreslení grafů na plochy

**Definice 56.** Necht  $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ . Zobrazení  $f : X \rightarrow Y$  je **homeomorfismus** pokud  $f$  je pojitá bijekce  $X$  na  $Y$  a  $f^{-1}$  je spojitá bijekce  $Y$  na  $X$ .

**Definice 57.**  $X, Y$  jsou **homeomorfní**, pokud existuje homeomorfismus  $X$  na  $Y$ . Značím  $X \cong Y$ .

**Fakt.** Homeomorfismus zachovává kompaktnost, uzavřenost a otevřenost. Omezenst však ne.

**Definice 58. Plocha** je souvislá kompaktní 2-rozměrná varieta bez hranic.

*Příklad.* Příklady: sféra, torus. Nepříklady:  $\mathbb{R}^2$ , otevřený kruh, dvě separátní sféry.

**Definice 59** (operace s plochami). 1. Přidání ucha:

- "Odebrání dvou kruhů a přidáním válce mezi ně."
- Na diagramu se kreslí, že mají orientaci opačným směrem.

2. Přidání křížítka:

- "Odebrání jednoho kruhu a přidání křížítka, tj. že se jeden bod propojí s přesně opačným bodem na druhé straně, ale nikdy se nepřekříží."

**Definice 60. Orientovatelná plocha** rodu  $g$ , značená  $\Sigma_g (g \geq 0)$ , je plocha vzniklá ze sféry přidáním  $g$  uší.

**Definice 61. Neorientovatelná plocha** rodu  $g$ , značená  $\Pi_g (g \geq 1)$ , je plocha vzniklá ze sféry přidáním  $g$  křížítek.

**Fakt.** Plocha vzniklá ze sféry přidáním  $k \geq 1$  křížítek a  $l \geq 0$  uší je  $\Pi_{k+2l}$ .

**Fakt.** Každá plocha je homeomorfní právě jedné ploše z posloupnosti  $\Sigma_0, \Pi_1, \Sigma_1, \Pi_2, \dots$

**Definice 62. Známé plochy:**

- $\Sigma_0$  je **sféra**.
- $\Sigma_1$  je **torus**.
- $\Sigma_2$  je **dvojitý torus**.
- $\Pi_1$  je **projektivní rovina**.
- $\Pi_2$  je **kleinova láhev**.

**Definice 63.** Nakreslení grafu  $G = (V, E)$  na plochu  $\Gamma$  je zobrazení  $\mathcal{G}$ , které:

1. vrcholům  $x \in V$  přiřadí bod  $\bar{x} \in \Gamma$ ,
2. hraně  $e = \{xy\} \in E$  přiřadí křivku  $\bar{e} \subseteq \Gamma$  spojující  $\bar{x}$  a  $\bar{y}$ . ("Křivka" je homeomorfní kopie intervalu  $[0,1]$ .)

Navíc platí:

1.  $x, y \in V, x \neq y \Rightarrow \bar{x} \neq \bar{y}$ ,
2. pro  $x \in V, e \in E : \bar{x} \in \bar{e} \Rightarrow x \in e$ ,
3. pro  $e, f \in E, e \neq f : \bar{e} \cap \bar{f} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{e} \cap \bar{f} = \{\bar{x}\}$ , kde  $e \cap f = \{x\}$ .

**Definice 64.** *Stěna* je souvislá komponenta  $\Gamma \setminus (\bigcup_{x \in V} \bar{x} \cup \bigcup_{e \in E} \bar{e})$ .

**Definice 65.** Nakreslení je **buňkové** (2-cell), pokud každá jeho stěna je homeomorfní otevřenému kruhu.

**Fakt.** Nakreslení  $\mathcal{G}$  na  $\Sigma_0$  je buňkové iff nakreslený graf je souvislý.

**Definice 66.** *Eulerova charakteristika* plochy  $\Gamma$  značená  $\chi(\Gamma)$ , je:

$$\chi(\Gamma) = \begin{cases} 2 - 2g & \text{pro } \Gamma \cong \Sigma_g \\ 2 - g & \text{pro } \Gamma \cong \Pi_g \end{cases}$$

**Věta 56** (Zobecněná Eulerova formule). Necht  $\mathcal{G}$  je buňkové nakreslení grafu  $G = (V, E)$  na ploše  $\Gamma$  a označme  $h(\mathcal{G}) = |V|, e(\mathcal{G}) = |E|, f(\mathcal{G}) = \# \text{ stěn } \mathcal{G}$ . Potom  $h(\mathcal{G}) - e(\mathcal{G}) + f(\mathcal{G}) = \chi(\Gamma)$ .

*Důkaz.* Předpokládáme, že  $\Gamma \cong \Sigma_g$  (případně  $\Gamma \cong \Pi_g$  je podobný). Indukcí podle  $g$ . -  $g = 0$  : Eulerova formule pro rovinné grafy. Hotovo.  $g > 0$  : Zafixujeme si ucho reprezentované kružnicemi  $u, u'$ . Necht  $e_1, e_2, \dots, e_k$  jsou hrany křížící  $u, u'$  v pořadí daným orientací  $u, u'$  ( $e_1, e_2, \dots, e_k$  nejsou nutně různé). Jistě  $k \geq 1$ , jinak by nakreslení nebylo buňkové. Označme  $LS(\mathcal{G}) = n(\mathcal{G}) - e(\mathcal{G}) + f(\mathcal{G})$ . Necht  $\mathcal{G}_1$  vznikne z  $\mathcal{G}$  tak, že se na každou  $e_i$  přidají dělicí vrcholy  $x_i$  a  $y_i$ , těsně k  $u$  a  $u'$ .  $LS(\mathcal{G}_1) = LS(\mathcal{G})$ . Necht  $\mathcal{G}_2$  vznikne z  $\mathcal{G}_1$  tak, že pro  $\forall i = 1, \dots, k$  přidám cestu délky 3 z  $x_i$  do  $x_{i+1}$  a z  $y_i$  do  $y_{i+1}$  a  $x_k$  do  $x_1$  a  $y_k$  do  $y_1$ , cesty jsou těsně u  $u$  a  $u'$ .  $LS(\mathcal{G}_2) = LS(\mathcal{G}_1)$ .  $\mathcal{G}_3$  nakreslení na  $\Sigma_{g-1}$  vzniklé z  $\mathcal{G}_2$  odstraněním  $u, u'$  a všech hran, které ho kříží.  $n(\mathcal{G}_2) = n(\mathcal{G}_3), e(\mathcal{G}_2) - k = e(\mathcal{G}_3), f(\mathcal{G}_2) = f(\mathcal{G}_3) - 2 + k$ .  $LS(\mathcal{G}_2) = LS(\mathcal{G}_3) - 2 \stackrel{IP}{=} \chi(\Sigma_{g-1}) - 2 = \chi(\Sigma_g)$ .

□

**Fakt.** Pro nebuňkové nakreslení  $\mathcal{G}$  platí:  $h(\mathcal{G}) - e(\mathcal{G}) + f(\mathcal{G}) > \chi(\Gamma)$ .

*Důsledek.* Necht  $G = (V, E)$  je graf, který má nakreslení  $\mathcal{G}$  na  $\Gamma$ , necht  $|V| \geq 3$ . Potom:

1.  $|E| \leq 3|V| - 3\chi(\Gamma)$ ,
2. (průměrný stupeň  $G = \frac{2|E|}{|V|} \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|}$ ).

*Důkaz.* BÚNO  $\mathcal{G}$  je buňkové, každá stěna je incidentní s aspoň 3mi hranami, každá hrana je incidentní s nejvýš dvěma stěnami. Tedy  $3f(\mathcal{G}) \leq \text{počet incidencí "hrana-stěna"} : \leq 2e(\mathcal{G}) \Rightarrow f(\mathcal{G}) \leq \frac{2}{3}e(\mathcal{G})$ . Tedy:  $\chi(\Gamma) \leq |V| - \frac{1}{3}|E|$ .

□

**Definice 67.** Pro plochu  $\Gamma$  označme:

$$H_\Gamma := \left\lfloor \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$$

**Věta 57.** Necht  $\Gamma$  je plocha,  $\Gamma \not\cong \Sigma_0$ . Potom každý graf, který má nakreslení na  $\Gamma$  obsahuje vrchol stupně  $\leq H_\Gamma$ .

*Důkaz.*  $\Gamma \cong \Pi_1$  : průměrný stupeň nakreslení  $\mathcal{G}$  na  $\Gamma$  je  $\leq 6 - \frac{6}{n(\mathcal{G})} < 6 \Rightarrow \exists$  vrchol stupně  $\leq 5 = H_{\Pi_1}$ .  $\Gamma \cong \Pi_2$  nebo  $\Gamma \cong \Sigma_1$  : průměrný stupeň  $\leq 6$ . Hotovo.  $\chi(\Gamma) < 0$  : Mějme nakreslení  $\mathcal{G}$  na  $\Gamma$ , uvažme pro minimální stupeň  $\delta$  nakreslení  $\mathcal{G}$  dva odhady.

$$1. \delta \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n(\mathcal{G})}$$

$$2. \delta \leq n(\mathcal{G}) - 1$$

tedy  $\delta \leq \min\{6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n(\mathcal{G})}, n(\mathcal{G}) - 1\}$ . Budeme zkoumat  $\max_{n \in \mathbb{N}} (\min\{6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n}, n - 1\} \leq \lfloor \delta_0 \rfloor)$ . Hledáme  $n_0 : 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{n_0} = n_0 - 1 \Leftrightarrow 6n_0 - 6\chi(\Gamma) = n_0^2 - n_0 \Leftrightarrow n_0^2 - 7n_0 + 6\chi(\Gamma) = 0$ .  
 $n_0 = \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Gamma)}}{2}$ .  $\delta_0 = n_0 - 1 = \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi(\Gamma)}}{2}$ .

□

**Definice 68.** Graf  $G = (V, E)$  je ***d-degenerovaný***, pokud každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně  $\leq d$ .

*Důsledek.* Každý graf nakreslitelný na plochu  $\Gamma \not\cong \Sigma_0$  je  $H_\Gamma$ -degenerovaný.

**Pozorování.** Každý  $d$ -degenerovaný graf má barevnost  $\leq d + 1$ .

*Důsledek* (Heawood). Každý graf nakreslitelný na  $\Gamma \not\cong \Sigma_0$  má barevnost  $\leq H_\Gamma + 1$ .

**Fakt** (Ringel-Youngs). Na každou plochu  $\Gamma \not\cong \Pi_2$  se dá nakreslit  $K_{H_\Gamma+1}$ .

# 12. Barvení grafů

**Definice 69.** *Značení:*

- $\Delta(G)$  - největší stupeň v  $G$
- $\delta(G)$  - nejmenší stupeň v  $G$
- $\chi(G)$  - barevnost  $G$
- $d(G)$  - degenerovanost  $G$ , nebo-li nejmenší  $d \in \mathbb{N}_0$  takové, že  $G$  je  $d$ -degenerovaný.
- $G$  je  $d$ -degenerovaný: každý jeho neprázdný podgraf má vrchol stupně  $\leq d$ .

**Pozorování.**  $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$

**Pozorování.**  $\chi(G) \leq d(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1$

**Lemma 58.** *Nechť  $G$  je souvislý graf, který má aspoň jeden vrchol stupně menšího než  $\Delta(G)$ . Potom  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

*Proof.* Nechť  $x \in V(G)$  je vrchol stupně  $< \Delta(G)$ . Tvrdím:  $\delta(G) \leq \Delta(G) - 1$ . Zvolme libovolný podgraf  $H$ . Dva případy:

1.  $x \in H$  tak hotovo, protože  $\deg_H(x) \leq \deg_G(x) \leq \Delta(G) - 1$ .
2.  $x \notin H$  Protože  $G$  je souvislý, tak existuje  $y \in V(H)$ , který má v  $G$  souseda, který nepatří do  $H$   $\deg_H(y) \leq \deg_G(y) - 1 \leq \Delta(G) - 1 \Rightarrow \chi(G) \leq d(G) + 1 \leq \Delta(G)$ .

□

**Věta 59 (Brooks).** *Pro každý souvislý graf  $G$ , který není ani úplný graf ani lichá kružnice, platí  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

*Důkaz.* Nechť  $k$  je vrcholová souvislost  $G$ . Potom zavedeme  $\Delta := \Delta(G)$ .

Pokud  $k = 1$ , tak existuje artikulace  $x$ . Graf  $G$  rozdělíme na  $G_1$  a  $G_2$  podle dané artikulace s tím, že  $x$  je v obou grafech. Z toho pak plyne, že  $\deg_{G_1}(x) < \Delta$  a  $\deg_{G_2}(x) < \Delta$ . Pak po použití lemma máme  $\chi(G_1) \leq \Delta$  a  $\chi(G_2) \leq \Delta$ : obarvím  $G_1$  obarvením  $f_1$  pomocí  $\Delta$  barev, stejně i pro  $G_2$  s  $f_2$ . BŮNO:  $f_1(x) = f_2(x)$ , jinak udělám permutaci barev. Pak mám obarvení celého  $G$ .

Pro  $k = 2$  udělám to stejné, akorát rozdělím grafy podle  $x, y$ , které jsou právě vrcholovým řezem grafu  $G$ . BŮNO:  $\deg_{G_1}(x) \geq \deg_{G_2}(x)$ . Poznámka: podgrafy  $G$  s  $\Delta(G) \leq 2$  věta platí, předp.  $\Delta(G) = \Delta \geq 3$ . Nyní mám možnosti:

1.  $\{xy\}$  patří do  $E(G)$  (i  $E(G_1) \wedge E(G_2)$ ) pomocí lemma obarvíme  $G_1$  i  $G_2$  pomocí  $\Delta$  barev,  $x$  má jinou barvu než  $y$  a dostanu i obarvení  $G$ .
2.  $\deg_{G_1}(x) \leq \Delta - 2$  nebo  $\deg_{G_1}(y) \leq \Delta - 2$ , přidám  $\{xy\}$  a pořád platí obarvení pomocí lemma.
3.  $\deg_{G_1}(x) = \deg_{G_1}(y) = \Delta - 1 \Rightarrow \deg_{G_2}(x) = \deg_{G_2}(y) = 1$ , tak místo  $xy$  použiji  $\{vy\}$ , kde  $v$  je soused  $x$  z  $G_2$ . dále viz 2).

$k \geq 3$  :  $G$  souvislý, není úplný  $\Rightarrow G$  obsahuje 2 nesousedící vrcholy  $x$  a  $y$ , které mají společného souseda  $z$ .  $G - x - y$  je souvislý, tedy jeho vrcholy lze uspořádat do posloupnosti  $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$  tak, že  $v_{n-2} = z$  a každý  $v_i \in \{v_1, \dots, v_{n-3}\}$  má aspoň jednoho souseda mezi  $v_{i+1}, \dots, v_{n-2}$ . Vrcholy tedy uspořádám  $x, y, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$  a obarvím  $G$  hladově zleva doprava pomocí  $\Delta$  barev.

□

**Definice 70.** *Hranové obarvení* grafu  $G = (V, E)$  je funkce  $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$  taková, že pro 2 různé hrany  $e, e' \in E$  sdílející vrchol platí  $f(e) \neq f(e')$ . **Hranová barevnost** grafu  $G$  značená  $\chi_e(G)$  je nejmenší  $k$  takové, že  $G$  má hranové obarvení používající  $k$  barev.

**Definice 71.** *Line graph* značen jako  $L(G)$  vznikne z grafu  $G$ .

$$L(G) = (E, \{ef\} \in \binom{E}{2}; e \cap f \neq \emptyset)$$

**Pozorování.**  $\chi_e(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta(L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1$

**Věta 60** (Vizing).  $\forall G : \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$

*Proof.* Mějme  $G = (V, E)$ ,  $\Delta = \Delta(G)$ . Necht  $H = (V, E_H)$  je co největší podgraf  $G$ , který lze hranově obarvit pomocí  $\Delta + 1$  barev, necht  $f_H$  je takové hranové obarvení. Pokud  $H = G$  jsme hotovi. Pro spor necht existuje  $e_0 = \{xy_0\} \in E \setminus E_H$ . Řeknu, že barva  $\beta \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$  je \*volná\* u vrcholu  $w$ , pokud žádná hrana  $H$  incidentní s  $w$  nemá barvu  $\beta$ . **Pozorování:** Každý vrchol má  $\geq 1$  volnou barvu. Necht  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_k$  je co nejdelší posloupnost různých hran, kde  $e_i = \{xy_i\}$ , pro každé  $i = 1, \dots, k$  :  $f_H(e_1)$  je barva, která je volná u  $y_{i-1}$ . Necht  $\beta$  je volná barva u  $y_k$ . Pak jsou případy:

1.  $\beta$  je volná u  $x$

- $e_k$  obarvím  $\beta$  a pro  $j = 0, \dots, k - 1$  hranu  $e_j$  obarvím  $f_H(e_{j+1})$ . To je ale spor s maximalitou  $H$ .

2.  $\beta$  je použitá na nějaké hraně  $\tilde{e}$  incidentní s  $x$ , nepatřící do  $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$

- $e_{k+1} := \tilde{e}$  Opět spor s maximalitou  $e_0, e_1, \dots, e_k$ .

3.  $\beta$  je použitá na nějaké hraně  $e_j \in \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$

- Necht  $\alpha$  je volná barva u  $x$ . Dle předpokladu  $\alpha \neq \beta$ . Necht  $P$  je co největší souvislý podgraf  $H$  na jehož hranách jsou jen barvy  $\alpha$  a  $\beta$  a který obsahuje hranu  $e_j$ .  $P$  má maximální stupeň  $\leq 2$ ,  $\deg_P(x) = 1 \Rightarrow P$  je cesta, která má začátek v  $x$ .
- Necht  $z$  je druhý konec  $P$ . Uvažujeme obarvení  $\tilde{f}_H : E_H \rightarrow \{1, \dots, \Delta + 1\}$  vznikne z  $f_H$  tak, že na  $P$  prohodíme barvy  $\alpha$  a  $\beta$ . 2 podpříklady:
  - (a)  $z = y_{j-1}$  : v  $\tilde{f}_H$  je  $\beta$  volná u  $x$  i u  $y_k$ .  $\alpha$  je volná u  $y_{j-1}$  a použitá na  $e_j \Rightarrow$  nastává případ 1) pro  $e_0, \dots, e_k$ .
  - (b)  $z \neq y_{j-1}$  : v  $\tilde{f}_H$  je  $\beta$  volná u  $x$  i u  $y_{j-1} \Rightarrow$  nastává případ 1 pro  $e_0, \dots, e_{j-1}$ .

□



## 12.1 Perfektní grafy

**Definice 72.** *Značení:*

- $\omega(G)$  - klikovost  $G$ , nebo-li velikost největší kliky v  $G$ .
- $\alpha(G)$  - nezávislost  $G$ , nebo-li velikost největší nezávislé množiny v  $G$
- Doplněk grafu  $G = (V, E)$  je graf  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ .

**Pozorování.**

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}) \quad \omega(\bar{G}) = \alpha(G)$$

**Pozorování.**  $\chi(G) \geq \omega(G)$

**Pozorování.**  $\omega(C_{2k+1}) > 2$

**Definice 73.** Graf  $G = (V, E)$  je **perfektní**, pokud pro každý indukovaný podgraf  $H$  grafu  $G$  platí  $\omega(H) = \chi(H)$ .

**Pozorování.**  $G$  perfektní graf,  $G' \leq_i G \Rightarrow G'$  je perfektní.

*Důsledek.*  $G$  obsahuje  $C_{2k+1}$  nebo  $\overline{C_{2k+1}}$  jako indukovaný podgraf  $\Rightarrow G$  není perfektní.

**Věta 61** (Silná věta o perfektních grafech).  $G$  je perfektní iff  $G$  neobsahuje  $C_{2k+1}$  ani  $\overline{C_{2k+1}}$  (pro  $k \geq 2$ ) jako indukovaný podgraf.

**Definice 74.** Nezávislá množina  $N$  v grafu  $G = (V, E)$  je **rozlehlá**, pokud každá klika  $G$  velikosti  $\omega(G)$  obsahuje vrchol z  $N$ . Ekvivalentně:  $\omega(G - N) = \omega(G) - 1$ .

**Lemma 62** (1). Pro graf  $G = (V, E)$  jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1.  $G$  je perfektní,
2.  $\forall H \leq_i G : H$  má rozlehlou nezávislou množinu,
3.  $\forall H \leq_i G, \forall x \in V(H) : H$  má rozlehlou nezávislou množinu obsahující  $x$ .

*Důkaz.*  $3 \Rightarrow 2$  triviálně.

$2 \Rightarrow 1$  Necht  $G' \leq_i G$  a chceme  $\omega(G') = \chi(G')$ . Obarvení  $G'$  pomocí  $\omega(G')$  barev najdeme takto:  $N_1$  je rozlehlá NzMna v  $G_1$  a té dáme barvu 1. Následně  $N_2 := \text{NzMna}$  v  $G' - N_1$  barvu 2 a tak dále opakujeme dokud nemáme obarvené celé  $G'$ .  $\omega(G' - N_1) = \omega(G') - 1$ ,  $\omega(G' - (N_1 \cup N_2)) = \omega(G') - 2$  a tak dále. Proto použijeme právě  $\omega(G')$  barev. Hotovo.

$1 \Rightarrow 3$  Necht  $G$  je perfektní graf, mějme  $H \leq_i G, \forall x \in V(H)$ . Víme  $\omega(H) = \chi(H)$ . Vrcholy  $H$  barvy  $f(x)$  jsou rozlehlá nezávislá množina. Každá největší klika musí mít právě jeden vrchol s danou barvou.

□

**Definice 75.** Necht  $G = (V, E)$  je graf s vrcholem  $x$ . Necht  $k \in \mathbb{N}$ . Potom  **$k$ -násobné nafouknutí** vrcholu  $x$ , která vytvoří  $G^+$  takto:

1. Vrchol  $x$  se nahradí  $k$ -ticí nových vrcholů  $x_1, \dots, x_k$  tvořící kliku.

2. Každý soused vrcholu  $x$  v  $G$  se spojí se všemi  $x_1, \dots, x_k$ .

**Lemma 63** (2). Pokud  $G$  je perfektní a  $G^+$  je jeho nafouknutí, tak i  $G^+$  je perfektní.

*Důkaz.* Dokážeme, že  $\forall H \leq_i G^+$  má rozlehlou nezávislou množinu. Pak ještě použijeme Lemma 1 a máme hotovo. Volme  $H \leq_i G^+$  : Pokud  $H$  obsahuje nejvýš jeden z  $x_1, \dots, x_k$  tak  $H \leq_i G$ , takže  $H$  má rozlehlou NzMnu dle Lemma 1. Předpokládejme, že  $H$  obsahuje aspoň dva vrcholy z  $x_1, \dots, x_k$ . Potom  $H$  je nfouknutí nějakého  $H^- \leq_i G, x \in V(H^-)$ . Dle Lemma 1,  $H^-$  obsahuje rozlehlou NzMnu  $N^-$  obsahující  $x$ . BÚNO:  $x_1 \in V(H)$ . Tvrdím:  $N := (N^- \setminus \{x\}) \cup \{x_1\}$  je rozlehlá NzMna v  $H$ . Jistě  $N$  je nezávislá. Necht  $K$  je klika  $H$  velikosti  $\omega(H)$ . Pak jsou dvě možnosti:

1.  $K \cap \{x_1, \dots, x_k\} = \emptyset$  v tom případě je  $K$  i největší v  $H^-$ , tedy  $N^- \cap K \neq \emptyset$ , dokonce  $(N^- \setminus \{x\}) \cap K \neq \emptyset, N \cap K \neq \emptyset$ .
2.  $K \cap \{x_1, \dots, x_k\} \neq \emptyset$  nutně  $K$  obsahuje všechny vrcholy z  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  patřící do  $H$ , tedy i  $x_1 \in K$ , tedy  $K \cap N = \{x_1\} \neq \emptyset$ .

Tedy  $N$  he rozlehlá NzMna  $H$ .

□

**Definice 76.** Značení:  $H <_i G := H \leq_i G \text{ \& } H \not\cong G - H$  je vlastní indukovaný podgraf  $G$ .

**Věta 64** (Slabá věta o perfektních grafech.).  $G$  je perfektní iff  $\bar{G}$  je perfektní.

*Důkaz.* Sporem:  $\exists$  perfektní graf  $G = (V, E)$ . ale  $\bar{G}$  není perfektní. Volme  $G$  tak, že  $|V|$  je co nejmenší. Tedy  $\forall H <_i G$  platí, že  $H$  i  $\bar{H}$  jsou perfektní. Jinak to je menší graf co do velikosti  $|V|$ . Protože  $\bar{G}$  není perfektní, tak dle Lemma 1  $\exists G' \leq_i \bar{G} : G'$  nemá rozlehlou NzMnu. Tvrdím, že  $G' \cong \bar{G}$ , kdyby  $G' <_i \bar{G}$  tak  $G'$  není perfektní, ale  $\bar{G}' <_i G$  tedy  $\bar{G}'$  je perfektní, spor s minimalitou  $G$ . Tedy  $\bar{G}$  nemá rozlehlou NzMnu. Tj. pro každou NzMnu  $\bar{N}$  v  $\bar{G}$  existuje v  $\bar{G}$  klika velikosti  $\omega(G)$  disjunktní s  $\bar{N}$ . Tedy pro každou kliku  $K$  v  $G$  existuje v  $G$  NzMna velikosti  $\alpha(G)$  disjunktní s  $K$ . Necht  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  je seznam všech klik v  $G$ . Necht  $N_i$  je NzMna  $G$  velikosti  $\alpha(G)$  disjunktní s  $Q_i$ , pro  $i = 1, \dots, t$ . Pro každý vrcholy  $x \in V$  necht  $f(x)$  je počet indexů  $i \in \{1, \dots, t\}$  takových, že  $x \in N_i$ .  $G^+$  vznikne z  $G$  tak, že se každý vrchol  $x$  nafoukne  $f(x)$ -krát. Vrcholy  $x \in V$  s  $f(x) = 0$  se smažou. Dle Lemma 2  $G^+$  je stále perfektní.  $|V(G^+)| = t\alpha(G) = t\alpha(G^+)$ . Víme:  $\chi(G^+)\alpha(G^+) \geq |V(G^+)| = t\alpha(G^+)$ . Tedy  $\chi(G^+) \geq t - (1)$ . Ale  $\chi(G^+) = \omega(G^+) - (2)$ . Necht  $Q^+$  je největší klika v  $G^+$ , ta musela vzniknout nafouknutím nějaké kliky  $Q_j$  v  $G$ .  $(3) - |Q^+| = \sum_{x \in Q_j} f(x) = \sum_{x \in Q_j} \sum_{i=1}^t |N_i \cap \{x\}| = \sum_{i=1}^t \sum_{x \in Q_j} |N_i \cap \{x\}| = \sum_{i=1}^t |Q_j \cap N_i| \leq t - 1$ . Protože  $Q_j \cap N_j = \emptyset$  dle definice  $N_j$  a dohromady (1), (2) a (3) je spor.

□

**Definice 77** (Připomenutí). Částečné uspořádaná množina  $(X, \leq)$ , kde  $\leq$  je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. **Řetězec:** podmnožina  $X$ , v níž každé dva prvky jsou porovnatelné. **Antiřetězec:** podmnožina  $X$ , v níž žádné dva prvky nejsou porovnatelné. Také je dobré znát **Hasseho diagram**.

**Cvičení.** Dokažte: Pokud každý řetězec v  $(X, \leq)$  má velikost  $\leq k$ , tak  $(X, \leq)$  se dá rozdělit na  $\leq k$ , antiřetězců. – Indukcí dle  $k$  (postupně se mažou maximální prvky).

**Definice 78.** Pro částečně uspořádanou množinu  $(X, \leq)$  definuji graf **porovnatelnosti**  $G_{\leq} = (X, E)$ , kde  $E = \{\{xy\} \in \binom{X}{2} : x \leq y \vee y \leq x\}$ .

**Cvičení.** Dokažte:  $G_{\leq}$  je perfektní. Klikovost = nejdelší řetězec. Barevnost = počet antiřetězců. Použití předchozího cvičení.

**Věta 65** (Dilworth). Pokud v částečně uspořádané množině  $(X, \leq)$  má každý antiřetězec velikost  $l$ , tak  $(X, \leq)$  se dá rozdělit na  $\leq l$  řetězců.

*Důkaz.* Každý  $G_{\leq}$  je perfektní  $\Rightarrow \bar{G}_{\leq}$  je perfektní.  $\omega(\bar{G}_{\leq}) \leq l$  &  $\chi(\bar{G}_{\leq}) \leq l \Rightarrow l$  Nzmna  $\rightarrow l$  klik  $\Rightarrow$  řetězce v  $(X, \leq)$ . □

**Pozorování.** Bipartitní grafy jsou perfektní.

**Definice 79** (Značení).  $m(G) :=$  velikost největšího párování v grafu  $G$  a  $vp(G) :=$  velikost nejmenšího vrcholového pokrytí v grafu  $G$ .

**Pozorování.**  $m(G) \leq vp(G)$

Připomenutí: Konig-Egerváryho věta:  $G$  bipartitní:  $m(G) = vp(G)$ .

**Definice 80.** Graf  $G = (V, E)$  je **chordální**, pokud neobsahuje kružnici délky  $\geq 4$  jako indukovaný podgraf.

**Pozorování.** Graf  $G$  je chordální a  $H \leq_i G \Rightarrow H$  je chordální.

**Definice 81.** Necht  $G = (V, E)$  je graf, necht  $x$  a  $y$  jsou dva nesousední vrcholy v  $G$ .  $xy$ -řez je množina  $R \subseteq V$ , t.ž.  $x$  a  $y$  jsou v různých komponentách  $G - R$ .

**Lemma 66.** Graf  $G = (V, E)$  je chordální iff pro každé dva nesousední vrcholy  $x, y$  existuje  $xy$ -řez, který je klika v  $G$ .

*Důkaz.* " $\Leftarrow$ " Necht  $G$  není chordální. Chceme dva nesousední vrcholy  $x, y$ , t.ž. žádný  $xy$ -řez není klika. Necht  $G$  obsahuje indukovanou kružnici  $C$  délky  $\geq 4$ , necht  $x, y$  jsou nesousedící vrcholy na  $C$ . Vždy musím odebrat aspoň 2 vrcholy z cyklu. Ale mezi nimi není hrana a tudíž nemůže se jednat o kliku. S tím, že odstraněné vrcholy musí přerušit dvě cesty  $P_1, P_2$ . Kde  $P_1$  a  $P_2$  je rozdělení  $C$  dle  $x, y$ .

" $\Rightarrow$ " Necht  $G$  je chordální, necht  $x, y$  jsou dva nesousedící vrcholy. Necht  $R$  je  $xy$ -řez minimální vzhledem k inkluzi. Ukážeme, že  $R$  je klika v  $G$ . Sporem: necht existují nesousedící vrcholy  $u, v \in R$ . Necht  $G_x, G_y$  jsou komponenty  $G - R$  obsahující  $x$  respektive  $y$ . Pozorování:  $u$  i  $v$  má aspoň jednoho souseda v  $G_x$  i v  $G_y$  z minimality řezu. Necht  $P_x$  je co nejkratší cesta z  $u$  do  $v$  jejichž vnitřní vrcholy patří do  $G_x$ . Podobně  $P_y$ .  $P_x \cup P_y$  je indukovaná kružnice délky  $\geq 4$ , spor. □

**Definice 82.** Vrchol  $x$  grafu  $G$  je **simpliciální**, pokud sousedi  $x$  tvoří kliku v  $G$ .

**Pozorování.** Vrchol stupně  $\leq 1$  je simplicialní.

**Lemma 67.** Každý chordální graf (*s aspoň jedním vrcholem*) má simplicialní vrchol.

*Důkaz.* Dokážeme:  $\forall$  chordální graf  $G = (V, E)$  je buď úplný nebo má dva nesousední simplicialní vrcholy. Indukcí dle  $|V|$ .

$|V| = 1$   $G$  je úplný.

$|V| > 1$  Pokud  $G$  není úplný (jinak triviálně platí). Volme  $x, y$  nesousedící vrcholy v  $G$ . Necht  $R$  je  $xy$ -řez tvořící kliky v  $G$  (Lemma).  $G_x, G_y$  jsou komponenty  $G - R$  obsahující  $x$  popřípadě  $y$ .  $G_x^+, G_y^+$  jsou podgrafy  $G$  indukované  $G_x \cup R$  respektive  $G_y \cup R$ . IP:  $G_x^+$  je buď úplný, nebo obsahuje dva nesousedící simplicialní vrcholy. V obou případech to znamená, že  $G_x^+$  obsahuje simplicialní vrchol  $s_x$  nepatřící do  $R$ . Obdobně  $s_y$  je simplicialní vrchol v  $G_y^+$  nepatřící do  $R$ . V  $G$  mají  $s_x$  i  $s_y$  stejné sousedy jako v  $G_x^+$  resp.  $G_y^+$ , tedy  $s_x$  a  $s_y$  jsou dva nesousedící simplicialní vrcholy v  $G$ .

□

**Definice 83.** *Perfektní eliminační schéma (PES) grafu  $G$  je uspořádání vrcholů  $G$  do posloupnosti  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  takové, že  $\forall i = 1, \dots, n$  sousedi  $v_i$  mezi  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  tvoří kliky v  $G$ . (Ekvivalentně:  $v_i$  je simplicialní v indukovaném podgrafu  $G \{v_1, \dots, v_i\}$ .)*

**Věta 68.** Následující vlastnosti grafu  $G = (V, E)$  jsou ekvivalentní:

1.  $G$  je chordální,
2.  $\forall H \leq_i G : H$  má simplic. vrchol,
3.  $G$  má PES.

*Důkaz.*  $1 \Rightarrow 2 : \forall H \leq_i G$  je chordální  $\Rightarrow$  z Lemma  $H$  má simplicialní vrchol.  $2 \Rightarrow 3 :$  Vezmu simplicialní vrchol v  $G$  dám ho doprava v PES. Odeberu z  $G$  a takhle pořád opakuji.  $3 \Rightarrow 1 : G$  s PES, pak každá  $C$  s  $|V| \geq 4$  musí mít chordu. Podívám se na poslední vrchol v PES. Pak z vlastnosti PES musí mít předchozí vrcholy chordu.

□

*Důsledek.* Důkaz  $2 \Rightarrow 3$  říká, že v polynomiálním čase lze pro dané  $G$  najít PES nebo zjistit, že neexistuje.

**Věta 69.** Každý chordální graf je perfektní. Pro chordální graf  $G$  lze v polynomiálním čase zjistit  $\omega(G) = \chi(G)$ , spolu s největší klikou a optimálním obarvením.

*Důkaz.* Už víme, že lze vytvořit PES. Pro každý vrchol v PES platí, že jeho předchozí sousedi tvoří kliku a s daným vrcholem tvoří kliku o jedna větší. Pak již stačí najít vrchol s největším počtem předchozích vrcholů (značeno  $k$ ) a potom  $\omega(G) = k + 1$ . Pro spor vezmu největší kliku z algoritmu. Kdyby nebyl největší, tak lze přidat další, ale ten musí být sousedem a tudíž ho algoritmus musel najít. Pro obarvení budu postupovat zleva a danému vrcholu dám nejmenší možnou barvu. Zaznačím si největší barvu a novou barvu přidám jakmile vrchol bude mít v předchozích vrcholech právě tolik sousedů. Tím pádem nikdy nepřekročím velikost maximální kliky a tedy  $\chi(G) = \omega(G)$ . Najdu tedy obarvení, které je rovno klice a tedy je i perfektní.

□

# 13. Extremální kombinatorika

**Definice 84.** Pro  $n \in \mathbb{N}$  a graf  $F$  definujeme  $ex(n, F) :=$  největší počet hran v grafu na  $n$  vrcholech, který neobsahuje  $F$  jako podgraf. Nebo-li:

$$ex(n, F) = \max\{|E|; G = (V, E) : |V| = n, F \subseteq G\}$$

**Definice 85. Turánův graf**  $T(n, r)$  je úplný  $r$ -partitní graf na  $n$  vrcholech, jehož všechny partity mají velikost  $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$  anebo  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ . Potom  $t(n, r) :=$  počet hran  $T(n, r)$ .

**Věta 70** (Turán).  $\forall n, r \in \mathbb{N} : ex(n, K_{r+1}) = t(n, r)$

*Důkaz.* Pozorování:  $T(n, r)$  neobsahuje  $K_{r+1}$ , tedy  $ex(n, K_{r+1}) \geq t(n, r)$ . Stačí dokázat:  $ex(n, K_{r+1}) \leq t(n, r)$ . Necht  $G = (V, E)$  je graf na  $n$  vrcholech,  $K_{r+1} \not\subseteq G$  a  $|E| = ex(n, K_{r+1})$ . Tvrzení 1: Každé 2 nesousedící vrcholy  $x, y$  mají v  $G$  stejný stupeň. Sporem kdyby  $\deg(x) > \deg(y)$  tak  $y$  odstraním sousedy a přidám mu sousedy  $x$ . Ten má ale více hran a protože  $\{x, y\} \notin E$  a s  $x$  nebyla klika, tak teď také žádná klika nevznikla s  $y$ . "Nebo-li  $y$  nahradím kopií  $x$ ." Tvrzení 2: Definujeme relaci  $R := \{(x, y) \in V \times V : \{x, y\} \notin E\}$ . Potom  $R$  je ekvivalence. Jistě je  $R$  reflexivní, také symetrické. Pro spor předpokládejme, že  $R$  není tranzitivní:  $\exists x, y, z : (x, y) \in R, (y, z) \in R \wedge (x, z) \notin R$ . Dle Tvrzení 1:  $\deg_G(x) = \deg_G(y) = \deg_G(z)$ . Potom "nahradím  $x$  a  $z$  kopiemi  $y$ ". A platí  $|E(G')| > |E|$ . A  $G'$  neobsahuje  $K_{r+1}$  obdobným argumentem jako u Tvrzení 1. Nyní necht  $P_1, P_2, \dots, P_k$  jsou třídy ekvivalence  $R$ . Tvrzení 3:  $k = r$  (pokud  $n \geq r$ ).  $k > r$  : tak  $K_{r+1} \subseteq G$  a to je spor.  $k < r$  : tak lze partitu s  $\geq 2$  vrcholy rozdělit na dvě menší partity a přidáme hrany mezi nimi a dostaneme  $G'$ , který  $K_{r+1} \not\subseteq G'$  &  $|E(G')| > |E|$  opět spor. Tvrzení 4: BÚNO:  $|P_1| \leq |P_2| \leq \dots \leq |P_r|$ . Tvrdivíme, že  $|P_1| \leq |P_r| + 1$ . Kdyby nějaké dvě partity byly odlišné  $\geq 2$ . Potom vezmeme půlku přebytečných vrcholů a přehodíme je do předchozí partity. Následně spojíme hranami. Dostanu  $G'$  kde  $K_{r+1} \not\subseteq G$  a  $|E(G')| > |E|$ . *Poznámka:*  $(l+2)l < (l+1)(l+1)$ . Shrnutí:  $G$  je úplný  $r$ -partitní graf, kde všechny partity jsou skoro stejné  $\Rightarrow G \cong T(n, r)$ .

□

**Definice 86. Hypergraf** je dvojice  $(V, E)$ , kde prvky  $E$  ("hyperhrany") jsou podmnožiny  $V$ .

**Definice 87.** Hypergraf je  $k$ -**uniformní**, pokud všechny jeho hyperhrany mají  $k$  vrcholů.

**Definice 88.**  $f(n, k) :=$  max počet hyperhran v  $k$ -uniformním hypergrafu na  $n$  vrcholech, v němž žádné dvě hyperhrany nejsou disjunktní.

**Pozorování.** Pro  $n < k : f(n, k) = 0$ .

**Pozorování.** Pro  $k \leq n < 2k : f(n, k) = \binom{n}{k}$ .

**Pozorování.** Pro  $n \geq 2k : f(n, k) \geq \binom{n-1}{k-1}$ . (Vybereme předem jeden vrchol.)

**Definice 89.** Označme  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , na  $V$  uvažujme sčítání modulo  $n$ . **Interval** je podmnožina  $V$  tvaru  $\{i, i+1, i+2, \dots, i+k\}$ .

**Pozorování.** Pro  $n \geq 2k$  máme na  $V$  přesně  $n$  intervalů.

**Lemma 71.** *Nechť  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2k$  a  $G = (V, E)$  je  $k$ -uniformní hypergraf jehož každá hyperhrana je interval a každé dvě hyperhrany se protínají. Potom  $|E| \leq k$ .*

*Důkaz.* BÚNO:  $I = \{1, 2, 3, \dots, k\} \in E$ . Označme  $I_j^- := \{j, j-1, j-2, \dots, j-k+1\}$  a  $I_j^+ := \{j+1, j+2, \dots, j+k\}$ .  $I$  je protnutí  $I_1^-, I_2^-, \dots, I_{k-1}^-$  &  $I_1^+, I_2^+, \dots, I_{k-1}^+$ . Navíc z každé dvojice  $I_j^-, I_j^+$  nejvýše jeden patří do  $E$ , protože  $I_j^- \cap I_j^+ = \emptyset$ . Tudíž  $|E| \leq k$ .  $\square$

**Věta 72** (Erdős-Ko-Rado). *Pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  a  $n \geq 2k$  platí  $f(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$ .*

*Důkaz.* **Myšlenka:**  $G = (V, E)$  je  $k$ -uniformní hypergraf na  $n$  vrcholech, každé dvě hyperhrany se protínají  $\rightarrow |E| \leq \binom{n-1}{k-1}$ . Ekvivalentně: **(1)** –  $\frac{|E|}{\binom{n}{k}} \leq \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$ .

Lemma: Když každá hyperhrana je interval  $\frac{|E|}{n} \leq \frac{k}{n}$  – **(2)**. Tyto dva zlomky jsou vlastně pravděpodobnosti. Takže náhodně očísloveme vrcholy a mám stejnou pravděpodobnost v obou případech. **Důkaz:** Mějme  $n \geq 2k$ . Nechť  $G = (V, E)$  je  $k$ -uniformní hypergraf v němž každé 2 hyperhrany se protínají a  $|E|$  je co největší. Chceme dokázat  $|E| \leq \binom{n-1}{k-1}$ . Nechť  $X$  je počet dvojic  $(e, \pi)$  t.ž.  $e \in E$  a  $\pi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  taková, že  $\pi$  zobrazí  $e$  na intervalu. Potom pomocí počítání dvěma způsoby:

$$1. X \leq n! \cdot k \text{ (dle lemma)}$$

$$2. X = |E| \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)!$$

$$|E| \cdot n \cdot k! \cdot (n-k)! \leq n! \cdot k \text{ a } |E| \leq \frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

$\square$

**Definice 90.** *Slunečnice (nebo  $\Delta$ -systém) se středem  $S$  a  $l$  lístky je  $l$ -tice množin  $L_1, \dots, L_l$  taková, že  $\forall i \neq j : L_i \cap L_j = S$ .*

**Definice 91.**  $s(k, l) := \sup\{|E|; G = (V, E) \text{ je } k\text{-uniformní hypergraf neobsahující žádnou slunečnici s } l \text{ lístky}\}$ .

**Věta 73** ("lemma o slunečnici", Erdős-Rado).  $\forall k, l \in \mathbb{R} : s(k, l) < +\infty$

*Důkaz.* Indukcí dle  $k$ .  $k = 1 : s(k, l) = l - 1$ .  $k > 1$  : Nechť  $G = (V, E)$  je  $k$ -uniformní hypergraf neobsahující slunečnici s  $l$  lístky. Nechť  $D \subseteq E$  je co největší množina po dvou disjunktních hyperhran v  $G$ . Jistě  $|D| \leq l - 1$ , jinak máme slunečnici s  $|D| \geq l$  lístky. Označme  $W := \bigcup_{d \in D} d \subseteq V$ ,  $|W| = k \cdot |D| \leq k \cdot (l - 1)$ . Jistě každá  $e \in E$  obsahuje aspoň jeden vrchol  $W$ . Tedy existuje  $x \in W$ , který je obsažen v aspoň  $\frac{|E|}{|W|} = \frac{|E|}{k \cdot (l-1)}$  hyperhranách z  $E$ . Označme  $E_x := \{e \in E, x \in e\}$  pak  $E_x^- := \{e \setminus \{x\}, e \in E_x\}$  a  $G_x^- := (V, E_x^-)$ .  $G_x^-$  je  $(k-1)$ -uniformní hypergraf, který neobsahuje slunečnici s  $l$  lístky: kdyby  $e_1, e_2, \dots, e_l$  byla slunečnice v  $G_x^-$ , tak  $e_1 \cup \{x\}, e_2 \cup \{x\}, \dots, e_l \cup \{x\}$  je slunečnice v  $G$ . Tedy dle IP:  $|E_x^-| = s(k-1, l) < +\infty$ . Navíc  $|E_x^-| = |E_x| \geq \frac{|E|}{k \cdot (l-1)}$ , tedy  $|E| \leq k \cdot (l-1) \cdot s(k-1, l)$ . Tedy  $s(k, l) \leq k \cdot (l-1) \cdot s(k-1, l)$ .  $\square$

*Poznámka.* Důkaz nám dává odhad  $s(k,l) \leq k!(l-1)^k$ .

*Hypotéza:*  $(\forall l)(\exists c_l) : s(k,l) \leq c_l^k$ .

**Definice 92.** *Hamiltonovská kružnice* v grafu  $G = (V,E)$  je kružnice v  $G$  obsahující všechny vrcholy  $G$ .

**Definice 93.** Pro  $n \geq 3$  označme  $h(n) := \max\{d \in \mathbb{N}_0, \exists \text{ graf na } n \text{ vrcholech s min stupněm } \geq d, \text{ který neobsahuje hamiltonovskou kružnici.}\}$ .

**Věta 74** (Bondy-Chvátal). Necht  $G = (V,E)$  je graf s  $n \geq 3$  vrcholy, necht  $x, y \in V$  jsou nesousedící vrcholy  $G$  takové, že  $\deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$ . Necht  $G^+ := (V, E \cup \{xy\})$ . Potom  $G$  je hamiltonovský iff  $G^+$  je hamiltonovský.

*Důkaz.* " $\Rightarrow$ " je triviální. " $\Leftarrow$ " Označme  $e_0 = \{xy\}$ . Necht  $G^+$  obsahuje hamiltonovskou kružnici  $C$ . Pokud  $e_0 \notin C$ , tak  $C$  je hamiltonovská kružnice v  $G$ . Předpoklad  $e_0 \in C$  jinak triviálně. Očíslujeme vrcholy a hrany  $C$  takto:  $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = y$  a  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, e_0$ . Cíl je najít  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$  tak, že  $x$  sousedí s  $x_{i+1}$  a  $y$  sousedí s  $x_i$  v grafu  $G$ . Označme  $S_x := \{i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, \{xx_{i+1}\} \in E\}$  z toho plyne, že  $|S_x| = \deg_G(x)$  a taky  $S_y := \{i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, \{yx_i\} \in E\}$  pak  $|S_y| = \deg_G(y)$ . Tedy  $|S_x| + |S_y| \geq n, |S_x \cup S_y| \leq |\{1, 2, 3, \dots, n-1\}| \leq n-1$ , tudíž  $\exists i \in S_x \cap S_y$ .  $(C \setminus \{e_0, e_i\}) \cup \{\{xx_{i+1}\}, \{yx_i\}\}$  je hamiltonovská kružnice v  $G$ . □

*Důsledek* (Dirac). Každý graf na  $n \geq 3$  vrcholech s min stupněm  $\geq \frac{n}{2}$  je hamiltonovský. (Nebo  $h(n) < \frac{n}{2}$ .)

*Důsledek.*  $\forall x \neq y \in V : \deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$ . Pokud  $G$  je úplný, tak hotovo. Jinak můžeme postupně přidávat hrany a vytvořit úplný graf. Pak pomocí Bondy-Chvátalovy věty jsou všechny tyto grafy v posloupnosti hamiltonovské.

**Definice 94.** *Multigraf* je jako graf, ale můžu mít více hran mezi stejnou dvojicí vrcholů a můžu mít i smyčky. Formálně: Multigraf je dvojice množin  $(V,E)$  spolu s incidenční funkcí  $f : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$ , kde  $V$  jsou vrcholy a  $E$  hrany.

**Definice 95.** *Incidenční matice* multigrafu  $G = (V,E)$  je matice  $I_G \in \{0,1,2\}^{|V| \times |E|}$ , kde v řádku odpovídajícímu vrcholu  $x \in V$  a sloupci odpovídající hraně  $e \in E$  je hodnota 2, pokud  $e$  je smyčka u  $x$ , 1 pokud  $x$  je jedna ze dvou konců  $e$ , 0 jinak.

**Definice 96.** Mějme multigraf  $G = (V,E)$  s maticí incidence  $I_G$ .

1. Označme:  $k(G) = k(V,E)$  počet komponent souvislosti  $G$ .
2. Označme:  $r(G) = r(V,E)$  hodnost  $I_G$ . (nad  $\mathbb{Z}_2$ )
3. Označme:  $n(G) = n(V,E)$  dimenze jádra  $\text{Ker}(I_G)$  matice  $I_G$ , kde  $\text{Ker}(I_G) = \{x \in (\mathbb{Z}_2)^{|E|} : I_G x = 0\}$ . Také se  $n(G)$  nazývá nulita  $G$ .

**Pozorování.**  $r(V,E) = |V| - k(V,E)$

**Pozorování.**  $n(V,E) = |E| - r(V,E)$

**Definice 97.**  $\text{Ker}(I_G)$  *prostor cyklů*  $G = (V,E)$ .

**Definice 98.**  $G = (V, E)$  multigraf  $e \in E$ . Pak:

- $G - e := (V, E \setminus \{e\})$
- $G/e$  (kontrakce hrany  $y$ )  $:= G - e$ , pokud  $e$  je smyčka, jinak nový vrchol  $v_e$  všechny hrany se projeví na novém vrcholu (protože máme multigraf).

**Pozorování.**  $G - e$  i  $G/e$  má vždy o jednu hranu méně než  $G$ .

$r(G) = |V| - k(G) = |F|$ , kde  $F \subseteq E$  je největší podmnožina  $E$  neobsahující kružnici.  
 $n(G) = |E| - r(G) = |F|$ , kde  $F \subseteq E$  je největší podmnožina  $E$  taková, že  $k(G - F) = k(G)$

$$r(G - e) = \begin{cases} r(G) - 1 & e \text{ je most v } G \\ r(G) & \text{jinak} \end{cases}$$

$$n(G - e) = \begin{cases} n(G) & e \text{ je most v } G \\ n(G) - 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$r(G/e) = \begin{cases} r(G) & e \text{ je smyčka v } G \\ r(G) - 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$n(G/e) = \begin{cases} r(G) - 1 & e \text{ je smyčka v } G \\ r(G) & \text{jinak} \end{cases}$$

**Definice 99.** *Tutteův polynom* multigrafu  $G = (V, E)$ , značený  $T_G(x, y)$  je definován:

$$T_G = \sum_{F \subseteq E} (x - 1)^{r(V, E) - r(V, F)} \cdot (y - 1)^{n(V, F)}$$

*Poznámka.*  $x^0$  je konstantní funkce  $\equiv 1$

**Pozorování.**  $T_G(1, 1) = \#$  počet koster v souvislém grafu  $G$ .

**Tvrzení 75.** Necht  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  jsou multigrafy, kde  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  a  $|V_1 \cap V_2| \leq 1$ . Necht  $G = (V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2)$ . Potom  $T_G(x, y) = T_{G_1}(x, y) T_{G_2}(x, y)$ .

*Důkaz.* Necht  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  (situace  $|V_1 \cap V_2| = 1$  je obdobná).

$T_G(x, y) = \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x - 1)^{r(V, E) - r(V, F_1 \cup F_2)} \cdot (y - 1)^{n(V, F_1 \cup F_2)} = (1) \cdot r(V, F_1 \cup F_2) = r(V, F_1) + r(V, F_2)$  stejně tak i pro  $n(G)$ .

$$(1) = \sum_{F_1 \subseteq E_1} \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x - 1)^{r(E_1) + r(E_2) - (r(F_1) + r(F_2))} \cdot (y - 1)^{n(F_1) + n(F_2)} =$$

$$\left( \sum_{F_1 \subseteq E_1} (x - 1)^{r(E_1) - r(F_1)} \cdot (y - 1)^{n(F_1)} \right) \left( \sum_{F_2 \subseteq E_2} (x - 1)^{r(E_2) - r(F_2)} \cdot (y - 1)^{n(F_2)} \right) =$$

$$= T_{G_1}(x, y) T_{G_2}(x, y)$$

□



*Důsledek.*  $e$  je most v  $G + (V, E)$ , tak  $T_{G-e}(x, y) = T_{G/e}(x, y)$ .

**Pozorování.**  $e$  je smyčka v  $G$ , potom  $T_{G-e}(x, y) = T_{G/e}(x, y)$ , protože  $G - e = G/e$ .

**Věta 76.** Necht  $G = (V, E)$  je multigraf. Potom:

1. pokud  $E = \emptyset$ , tak  $T_G(x, y) = 1$

2. pokud  $e \in E$ , tak

(a) pokud  $e$  je smyčka, tak  $T_G(x, y) = y \cdot T_{G-e}(x, y) = y \cdot T_{G/e}(x, y)$

(b) pokud  $e$  je most, tak  $T_G(x, y) = x \cdot T_{G-e}(x, y) = x \cdot T_{G/e}(x, y)$

(c) jinak  $T_G(x, y) = T_{G-e}(x, y) + T_{G/e}(x, y)$ .

*Důkaz.* 1. Plyne z definice. 2. Volme  $e \in E$  potom:

$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E; e \notin F} \cdots + \sum_{F \subseteq E; e \in F} \cdots = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \sum_{F \subseteq E; e \notin F} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

$$S_2 = \sum_{F \subseteq E; e \in F} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

$$T_{G-e}(x, y) = \sum_{F \subseteq E \setminus \{e\}} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

$$T_{G/e}(x, y) = \sum_{F \subseteq E \setminus \{e\}} (x-1)^{r(E \setminus \{e\}) - r(F)} \cdot (y-1)^F$$

Pokud  $e$  není most v  $G$  tak  $r(E) = r(E \setminus \{e\})$ , tedy  $S_1 = T_{G-e}(x, y)$ . Pokud  $e$  je most v  $G$ , tak  $r(E) = r(E \setminus \{e\}) + 1$  a tedy  $S_1 = (x-1) \cdot T_{G-e}(x, y)$ . Pokud  $e$  je smyčka, tak  $S_2 = (y-1) \cdot T_{G/e}(x, y)$ . Pokud  $e$  není smyčka, tak  $S_2 = T_{G/e}(x, y)$ . Takže pak celkově podle toho co je  $e$ :

$$T_G(x, y) = S_1 + S_2 = \begin{cases} \text{most} & (x-1)T_{G-e} + T_{G/e} = x \cdot T_{G/e} = x \cdot T_{G-e} \\ \text{smyčka} & (y-1)T_{G/e} + T_{G-e} = y \cdot T_{G-e} = y \cdot T_{G/e} \\ \text{jinak} & T_{G-e} + T_{G/e} \end{cases}$$

□

**Definice 100.** *Obarvení multigrafu*  $G = (V, E)$  pomocí  $b$  barev je funkce  $f : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, b\}$  taková, že žádná hrana  $e \in E$  nemá oba konce zbarvené na stejnou barvu. Pokud  $G$  obsahuje smyčku, tak  $G$  nemá žádné obarvení.

**Definice 101.** *Chromatický polynom*  $G = (V, E)$  je funkce  $\chi_G(z) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ , kde  $\chi_G(z)$  je počet obarvení  $G$  pomocí  $z$  barev.

**Cvičení.**  $G = K_n$  tak  $\chi_G(z) = \binom{z}{n} n! = z \cdot (z-1) \cdot \dots \cdot (z-n+1)$  a  $H = \bar{K}_n$  tak  $\chi_H(z) = z^n$ .

**Tvrzení 77.** *Nechť  $G = (V, E)$  je multigraf,  $z \in \mathbb{N}_0$ . Potom:*

1. *pokud  $E = \emptyset$ , tak  $\chi_G(z) = z^{|V|}$*
2. *pokud  $e \in E$ , tak:*
  - (a) *pokud  $e$  je smyčka tak  $\chi_G(z) = 0$*
  - (b) *jinak  $\chi_G(z) = \chi_{G-e}(z) - \chi_{G/e}(z)$ .*

*Důkaz.* 1. Triviálně. 2. 1. Plyne z definice. 2. 2. jsou dvě možnosti: Více hran: pak musí být stejné obarvení a to také platí, protože  $\chi_{G/e}(z) = 0$  kvůli smyčce. Jen jedna hrana, tak musíme odebrat obarvení, které dají oboum vrcholům stejnou barvu a to je přesně  $\chi_{G/e}(z)$ . □

**Tvrzení 78.**  $\forall$  multigraf  $G$ :

$$\chi_G(z) = (-1)^{|V|-k(G)} \cdot z^{k(G)} \cdot T_G(1-z, 0)$$

*Důkaz.* Druhou stranu výrazu si označíme jako  $PS_G(z)$ . Pak jsou dva možné postupy.

1. Opraví se  $PS_G(z)$  a zjistí se, že  $PS_G(z) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} \cdot z^{k(V, F)}$ . Pak pomocí **\*\*principu inkluze a exkluze\*\*** (\*PIE\*) ze zdůvodní, že ten výraz je roven  $\chi_G(z)$ .
2. Zkontroluje se, že  $\chi_G(z)$  splní stejné podmínky rekurze jako  $PS_G(z)$ .

V tomto případě volíme první možnost. Označme  $\bar{\chi}_G(z) := \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} \cdot z^{k(V, F)}$  **(1)**.  
Pozorování: Pokud  $G$  obsahuje smyčku  $e$ , tak  $\bar{\chi}_G(z) = 0$ , protože:

$$\bar{\chi}_G(z) = \sum_{F \subseteq E \setminus \{e\}} ((-1)^{|F|} \cdot z^{k(V, F)} + (-1)^{|F \cup \{e\}|} \cdot z^{k(V, F)})$$

**(1)** Předpokládejme, že  $G$  neobsahuje smyčku. Označme si  $\mathcal{F} :=$  množina všech funkcí  $|V| \rightarrow \{1, 2, \dots, z\}$   $|\mathcal{F}| = z^{|V|}$ . Pro hranu  $e = \{xy\} \in E$  označím  $\hat{S}_e := \{f \in \mathcal{F}; f(x) = f(y)\}$ .

$$\begin{aligned} \chi_G(z) &= |\mathcal{F} \setminus \bigcup_{e \in E} \hat{S}_e| = |\mathcal{F}| - |\bigcup_{e \in E} \hat{S}_e| \stackrel{\text{PIE}}{=} \\ &\stackrel{\text{PIE}}{=} |\mathcal{F}| - \left( \sum_{\emptyset \neq F \subseteq E} (-1)^{|F|} + 1 \right) |\bigcap_{e \in F} \hat{S}_e| = z^{|V|} + \sum_{\emptyset \neq F \subseteq E} (-1)^{|F|} |\bigcap_{e \in F} \hat{S}_e| = (1) \end{aligned}$$

Obecně  $|\bigcup_{e \in E} \hat{S}_e| = z^{k(V, E)}$ , protože v komponentě musí být jedna barva.

$$(1) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} z^{k(V, F)} = \bar{\chi}_G(z)$$

□

# 14. Vytvořující funkce

$$(a_0, a_1, \dots) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A(x) = a_0 + xa_1 + x^2a_2 + \dots$$

**Definice 102.** *Formální mocninná řada* reprezentující posloupnost reálných čísel  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  je výraz tvaru  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ .

**Definice 103** (Značení).  $[[\mathbb{R}]]$  je množina formálních mocninných řad (v proměnné  $x$  nad  $\mathbb{R}$ ).

Pro  $A(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ ,  $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  je  $[x^n]A(x)$  koeficient u  $x^n$  v  $A(x)$ , tj.  $a_n$ .

## 14.1 Operace s formálními mocninnými řadami

Násobení:

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha A(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \dots$$

Sčítání:

$$A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]], A(x) = a_0 + a_1x + \dots, B(x) = b_0 + b_1x + \dots$$

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots \text{ má vlastnost:}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}[[x]] : A + 0 = 0 + A = A$$

Násobení:

$$A(x) \cdot B(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots, \text{ kde}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots, \text{ má vlastnost:}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}[[x]] : A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$$

**Fakt.**  $(A + B)C = AC + BC$  a  $\mathbb{R}[[x]]$  je okruh (tj. komutativní okruh s jednotkou).

**Definice 104.** Pro  $A \in \mathbb{R}[[x]]$  označme  $A^{-1}$  (nebo  $\frac{1}{A}$ ) mocninnou řadu  $B \in \mathbb{R}[[x]]$  splňující  $AB = 1 \in \mathbb{R}[[x]]$ .  $A^{-1}$  je **multiplikativní inverze (převrácená hodnota)**  $A$ .

*Poznámka.* Ne všechny FMR mají inverzní prvky, například 0.

**Tvrzení 79.** Pokud  $\mathbb{R}[[x]] \ni A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  má  $A^{-1}(x)$  v tom případě je  $A^{-1}(x)$  jednoznačná.

*Důkaz.*  $a_0 = 0 \Rightarrow A^{-1}(x)$  neexistuje. Předpoklad  $a_0 \neq 0$  hledejme  $b_0, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$  tak, aby

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) &= 1 \\ \Updownarrow \\ a_0b_0 &= 1 \\ a_1b_0 + a_0b_1 &= 0 \\ a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \Updownarrow \\ b_0 &= \frac{1}{a_0} \\ b_1 &= -\frac{1}{a_0} \cdot a_1b_0 \\ b_2 &= -\frac{1}{a_0}(a_2b_0 + a_1b_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

□

**Definice 105.** Necht  $A_1(x), A_2(x), \dots$  je posloupnost FMR řeknu, že součet  $A_1(x) + A_2(x) + \dots$  je **konvergentní**, pokud  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  existuje jen konečně mnoho indexů  $j \in \mathbb{N}_0$  takových, že  $[x^n]A_j(x) \neq 0$ . V takovém případě pak definuji  $A_1(x) + A_2(x) + A_3(x) + \dots$  jako FMR  $S(x) \in \mathbb{R}[[x]]$  splňující (jen konečně mnoho nenul):

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : [x^n]S(x) := [x^n]A_1(x) + [x^n]A_2(x) + [x^n]A_3(x) + \dots$$

**Definice 106.** Mějme  $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots \in \mathbb{R}[[x]]$ , necht  $b_0 = 0$ . Potom:

$$A(B(x)) = a_0 + a_1B(x) + a_2B^2(x) + a_3B^3(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nB^n(x)$$

*Poznámka.* Pokud  $b_0 = 0$ , tak  $B(x) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots)$  a tedy  $B^n(x) = x^n(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots)$  má nulové koeficienty stupňů  $0, 1, 2, 3, 4, \dots, n-1$ .

Součet  $A(B(x)) = a_0 + a_1B(x) + a_2B^2(x) + \dots$ , protože  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  pouze sčítance  $a_0, a_1B(x), a_2B^2(x), \dots, a_nB^n(x)$  mohou mít nenulový koeficient u  $x^n$ .

**Definice 107. Kombinatorická třída** je množina  $\mathcal{A}$  taková, že každý prvek  $\alpha \in \mathcal{A}$  má definovanou velikost  $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$  a pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathcal{A}$  má jen konečně mnoho prvků velikosti  $n$ . Značení:  $\mathcal{A}_n := \{\alpha \in \mathcal{A}; |\alpha| = n\}$ .

**Definice 108. Obyčejná vytvářející funkce** kombinační třídy  $\mathcal{A}$ , značená  $OVF(\mathcal{A})$  je FMR  $\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n| x^n$ .

**Pozorování.**  $OVF(\mathcal{A}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{|\alpha|}$

**Pozorování.** Pokud  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  disjunktní kombinační třídy, tak  $OVF(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = OVF(\mathcal{A}) + OVF(\mathcal{B})$ .

**Definice 109.** Necht  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  jsou kombinační třídy. Potom  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{(\alpha, \beta); \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\}$ , kde  $|(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$ .

**Pozorování.**  $OVF(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = OVF(\mathcal{A}) \cdot OVF(\mathcal{B})$

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} OVF(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) &= \sum_{n=0}^{\infty} |(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_n| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n |\mathcal{A}_k| \cdot |\mathcal{B}_{n-k}| \right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |\mathcal{A}_k| x^k \cdot |\mathcal{B}_{n-k}| x^{n-k} = OVF(\mathcal{A}) \cdot OVF(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

□

**Pozorování.**

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}, \quad OVF(\mathcal{A}^k) = OVF(\mathcal{A})^k$$

**Definice 110.** Necht  $\mathcal{A}$  je kombinační třída taková, že  $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ , potom:

$$Seq(\mathcal{A}) = \{\emptyset\} \cup \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \dots$$

tj. množina všech konečných posloupností prvků  $\mathcal{A}$ .

**Pozorování.**

$$OVF(Seq(\mathcal{A})) = 1 + OVF(\mathcal{A}) + OVF(\mathcal{A})^2 + \dots = \frac{1}{1 - OVF(\mathcal{A})}$$

**Definice 111. Labelovaná kombinatorická třída** je množina  $\mathcal{A}$ , jejíž každý prvek  $\alpha$  má danou množinu vrcholů  $V(\alpha)$ , což je konečná množina  $\mathbb{N}$ , kde platí následující:

1. Označíme-li  $\mathcal{A}_V := \{\alpha \in \mathcal{A} : V(\alpha) = V\}$ , pak pro každé  $V \subseteq \mathbb{N}$  konečné platí  $|\mathcal{A}_V| < +\infty$ .
2. Pro dvě konečné množiny vrcholů  $V, W \subseteq \mathbb{N}$  takové, že  $|V| = |W|$ , platí  $|\mathcal{A}_V| = |\mathcal{A}_W|$

Značení:  $\mathcal{A}_n := \mathcal{A}_{\{1,2,3,\dots,n\}}$  a  $\mathcal{A}_* := \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots$  pro  $\alpha \in \mathcal{A} : |\alpha| := |V(\alpha)|$ .

**Definice 112. Exponenciální vytvořující funkce** labelované kombinatorické třídy  $\mathcal{A}$ , značená  $EVF(\mathcal{A})$  je

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n| \frac{x^n}{n!} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_*} \frac{x^{|\alpha|}}{|\alpha|!}$$

**Pozorování.** Pro labelované kombinatorické třídy  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , které jsou disjunktní, platí

$$EVF(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = EVF(\mathcal{A}) + EVF(\mathcal{B}).$$

**Definice 113. Labelovaný součin**  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  labelovaných kombinačních tříd  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  je labelovaná kombinační třída  $\{(\alpha, \beta); \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}, V(\alpha) \cap V(\beta) = \emptyset\}$ , kde  $V((\alpha, \beta)) := V(\alpha) \cup V(\beta)$ .

**Tvrzení 80.**  $EVF(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = EVF(\mathcal{A}) \cdot EVF(\mathcal{B})$

*Důkaz.* Levou stranu si označím jako  $LS(x)$  a pravou jako  $PS(x)$ .  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : [x^n]LS$  jestli se rovná  $[x^n]PS$

$$\begin{aligned}
[x^n]LS &= \frac{1}{n!} |(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_n| = \frac{1}{n!} \sum_{V \subseteq \{1,2,3,\dots,n\}} |\mathcal{A}_V| |\mathcal{B}_{\{1,\dots,n\} \setminus V}| = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |\mathcal{A}_k| |\mathcal{B}_{n-k}| = \sum_{k=0}^n \frac{|\mathcal{A}_k|}{k!} \frac{|\mathcal{B}_{n-k}|}{(n-k)!} = \\
&= \sum_{k=0}^n [x^k]EV(\mathcal{A})[x^{n-k}]EVF(\mathcal{B}) = PS(x)
\end{aligned}$$

□

# 15. Akce grup a počítání orbit

Grupa  $\Gamma$  je multiplikativní:  $\alpha, \beta \in \Gamma$  tak i  $\alpha\beta \in \Gamma$  součin je v  $\Gamma$ .  $1_\Gamma$  neutrální prvek v  $\Gamma$  ( $\forall \alpha \in \Gamma : 1_\Gamma \alpha = \alpha 1_\Gamma = \alpha$ ) a  $\alpha^{-1}$  inverzní prvek k  $\alpha \in \Gamma$  ( $\alpha \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \alpha = 1_\Gamma$ ).

**Definice 114.** *Akce grupy  $\Gamma$  na množině  $\mathcal{M}$  je binární operace  $(\_ \bullet \_): \Gamma \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Splňující:*

1.  $\forall p \in \mathcal{M} : 1_\Gamma \bullet p = p$ ,
2.  $\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \forall p \in \mathcal{M} : \alpha \bullet (\beta \bullet p) = (\alpha\beta) \bullet p$ .

**Pozorování.**  $\bullet$  je akce  $\Gamma$  na  $\mathcal{M}$ :

1. pokud pro  $\alpha \in \Gamma, p \in \mathcal{M} : \alpha \bullet p = q \in \mathcal{M}$ , pak  $(\alpha^{-1}) \bullet q = p$ . Protože  $(\alpha^{-1}) \bullet q = (\alpha^{-1}\alpha) \bullet p 1_\Gamma p = p$
2. pro pevné  $\alpha \in \Gamma$ , funkce  $p \rightarrow \alpha p$  je bijekce  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

**Definice 115.** Mějme akci  $\Gamma$  na  $\mathcal{M}$ . Prvky  $p, q \in \mathcal{M}$  jsou **ekvivalentní** (vůči  $\bullet$ ) pokud  $\exists \alpha \in \Gamma : \alpha \bullet p = q$ . Značení  $p \simeq q$ .

**Pozorování.**  $\simeq$  je ekvivalence na množině  $\mathcal{M}$ :

1.  $p \simeq p : 1_\Gamma \bullet p = p$
2.  $p \simeq q \Rightarrow q \simeq p : \alpha \bullet p = q \Rightarrow (\alpha^{-1}) \bullet q = p$
3.  $(p \simeq q \wedge q \simeq r) \Rightarrow p \simeq r : (\alpha \bullet p = q \wedge \beta \bullet q = r) \Rightarrow (\beta\alpha) \bullet p = r$

**Definice 116.** Třídy  $\simeq$  se nazývají **orbity**, orbitu obsahující  $p \in \mathcal{M}$  značím  $[p]$  (nebo  $[p]_{\mathcal{M}, \bullet}$ ). Množinu orbit značím  $\mathcal{M}/\Gamma$ .

**Definice 117.** **Stabilizátor** prvku  $p \in \mathcal{M}$ , značený  $Stab(p)$ , je  $\{\alpha \in \Gamma : \alpha \bullet p = p\}$ .

**Pozorování.**  $Stab(p)$  je podgrupa  $\Gamma$ .

**Definice 118.** **Množina pevných bodů** pro  $\alpha \in \Gamma$ , značená  $Fix(\alpha)$ , je  $\{p \in \mathcal{M}, \alpha \bullet p = p\}$ .

**Lemma 81** (o orbitě a stabilizátoru). Nechť  $\Gamma$  je konečná grupa s akcí na  $\mathcal{M}$ . Potom

$$\forall p \in \mathcal{M} : |[p]| \cdot |Stab(p)| = |\Gamma|$$

*Proof.* Volme  $p \in \mathcal{M}$ , nechť  $k := |[p]|$ ,  $[p] = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ , kde  $q_1 := p$ . Označme  $\Gamma_i := \{\alpha \in \Gamma : \alpha \bullet p = q_i\}, i = 1, 2, \dots, k$ . Tedy  $\Gamma_1 = Stab(p)$ . Zjevně  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  jsou disjunktní a jejich sjednocení je  $\Gamma$ . Tvrdím, že  $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = \dots = |\Gamma_k|$ . Volme  $i \geq 2$  a dokážeme  $|\Gamma_1| = |\Gamma_i|$ . Jistě  $\Gamma_i$  je neprázdná, protože jinak by  $p \not\simeq q_i$  a  $q_i \notin [p]$ . Volme libovolné  $\alpha_0 \in \Gamma_i$ . Uvážím zobrazení  $\Phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_i$  definované pro  $\beta \in \Gamma_1 : \Phi(\beta) = \alpha_0 \beta$ . Tvrdím, že  $\Phi$  je bijekce  $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_i$ . Ověřme:

1.  $\forall \beta \in \Gamma_1 : \Phi(\beta) \in \Gamma_i$

$$\Phi(\beta) \bullet p = (\alpha_0 \beta) \bullet p = \alpha_0 \bullet (\beta \bullet p) = q_i$$

2.  $\Phi$  je prosté

- Předpokládejme, že  $\exists \beta_1, \beta_2 \in \Gamma_1 : \Phi(\beta_1) = \Phi(\beta_2)$ , tj.  $\alpha_0 \beta_1 = \alpha_0 \beta_2$ , tj.  $\beta_1 = \beta_2$ .

3.  $\Phi$  je na

- Volme  $\gamma \in \Gamma_i$  hledejme  $\beta \in \Gamma_1$  t.ž.

$$\Phi(\beta) = \gamma \Leftrightarrow \alpha_0 \beta = \gamma \Leftrightarrow \beta = \alpha_0^{-1} \gamma \in \Gamma_1$$

□

**Věta 82** ("Burnsideovo lemma", "Cauchy-Froheriova fromule"). *Nechť  $\Gamma$  je konečná grupa s akcí na množině  $\mathcal{M}$ . Potom:*

1. (jednoduchá verze) pokud  $\mathcal{M}$  je konečná, tak  $|\mathcal{M}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha \in \Gamma} |\text{Fix}(\alpha)|$ . Nebo-li "počet orbit je průměrný počet bodů".
2. (obecná verze) Nechť má každá orbita  $o \in \mathcal{M}/\Gamma$  přiřazenou váhu  $||o|| \in \mathbb{N}_0$  tak, že pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  existuje jen konečně mnoho orbit váhy  $n$ . Potom:

$$\sum_{o \in \mathcal{M}/\Gamma} x^{||o||} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{p \in \text{Fix}(\alpha)} x^{||p||}$$

*Důkaz.* Levou stranu si označím  $LS(x)$  a pravou  $PS(x)$ .  $2 \Rightarrow 1$  Zvolme  $||o|| = 0$  pro každé  $o \in \mathcal{M}/\Gamma$ . Definujeme  $\mathcal{D} := \{(\alpha, p) \in \Gamma \times \mathcal{M}; \alpha \bullet p = p\}$  a  $S = \sum_{(\alpha, p) \in \mathcal{D}} x^{||p||}$ . Pak počítáme dvěma způsoby.

$$\begin{aligned} (1) S &= \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}; (\alpha, p) \in \mathcal{D}} x^{||p||} = \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{p \in \text{Fix}(\alpha)} x^{||p||} = |\Gamma| \cdot PS(x) \\ (2) S &= \sum_{p \in \mathcal{M}} \sum_{\alpha \in \Gamma; (\alpha, p) \in \mathcal{D}} x^{||p||} = \sum_{p \in \mathcal{M}} |\text{Stab}(p)| \cdot x^{||p||} = \\ &= \sum_{p \in \mathcal{M}} \frac{|\Gamma|}{||[p]||} x^{||p||} = \sum_{o \in \mathcal{M}/\Gamma} \sum_{p \in o} \frac{|\Gamma|}{|o|} x^{||o||} = |\Gamma| \sum_{o \in \mathcal{M}/\Gamma} x^{||o||} = |\Gamma| \cdot LS(x) \end{aligned}$$

□



## Part III

### Kombinatorika a grafy III

# 16. Structural graph theory

## 16.1 Minors and subgraphs

**Definition 1.**  $H \leq_t G$  means that subdivision of  $H$  is a subgraph of  $G$ , also known as *topological minor*.

**Definition 2.**  $H \leq_m G$  means that  $H$  is a **minor** of  $G$ .

**Definition 3.**  $H \subseteq G$  means that  $H$  is a **subgraph** of  $G$ .

**Definition 4.**  $H \sqsubseteq G$  means that  $H$  is a **induced subgraph** of  $G$ .

**Theorem 1** (Kuratowski).

$$K_5, K_{3,3} \not\leq_t G \Leftrightarrow G \text{ planar}$$

$$K_5, K_{3,3} \not\leq_m G \Leftrightarrow G \text{ planar}$$

**Definition 5.**  $\chi(G)$  means that  $G$  has a coloring of size  $\chi(G)$ .

**Observation.**  $C_3, C_5, C_7, \dots \not\leq G \Leftrightarrow \chi(G) \leq 2$  which holds also for  $\sqsubseteq$ .

**Observation.**  $C_3 \not\leq_m G \Leftrightarrow G$  is a forest also holds for  $\leq_t$ .

**Definition 6.**  $\text{Forb}_{\leq}(\mathcal{F}) = \{G | (\forall F \in \mathcal{F}) F \not\leq G\}$

We will try to show  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\leq_m}(\mathcal{F})$ . If  $G \in \mathcal{G}$  then all minors of  $G$  belong to  $\mathcal{G}$ .

**Observation.** If  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\leq}(\mathcal{F})$  then  $\mathcal{G}$  is  $\leq$ -closed. Which means that  $\forall G, G'$  if  $G \in \mathcal{G}$  and  $G' \leq G$  then  $G' \in \mathcal{G}$ .

**Lemma 83.** Let  $\leq$  be a partial ordering of graphs. If a class  $\mathcal{G}$  of graphs is  $\leq$ -closed, then there exist  $\mathcal{F}$  s.t.  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\leq}(\mathcal{F})$ .

*Proof.*  $\mathcal{F} = \{F : F \not\leq G\}$ . □

**Definition 7.**  $F$  is **minimal  $\leq$ -obstruction** for  $\mathcal{G}$  if  $F \notin \mathcal{G}$  but for every  $F' \preceq F$  and  $F' \in \mathcal{G}$ .

**Lemma 84.** Let  $\leq$  be an ordering of graphs **without infinite decreasing chains**. If  $\mathcal{G}$  is  $\leq$ -closed, then  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\leq}(\{F : F \text{ is a minimal } \leq\text{-obstruction for } \mathcal{G}\})$ .

*Proof.*  $G \notin \mathcal{G}$  is min  $\leq$ -obstruction or  $\exists G' \preceq G : G' \notin \mathcal{G} \Rightarrow G'$  is obstruction or we continue and because we don't have **infinite decreasing chains** we will eventually end. □

If  $\mathcal{G}$  is  $\leq_m$ -closed, then there exists a **finite**  $\mathcal{F}$  such that  $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\leq_m}(\mathcal{F})$ .

**Theorem 2** (Robertson-Seymour). For every  $F$  there exists an algorithm that for input graph  $G$  decides whether  $F \leq_m G$  in time  $O_F(|G|^3)$ .

**Definition 8.** For graph  $G = (V, E)$  we define  $|G| := |V|$  and  $||G|| := |E|$ . Also for some  $U \subseteq V$   $G[U]$  is a induced subgraph of  $G$  that has only vertices from  $U$ . Then  $N_G(v)$  stands for the neighborhood of vertex  $v$  in graph  $G$ .

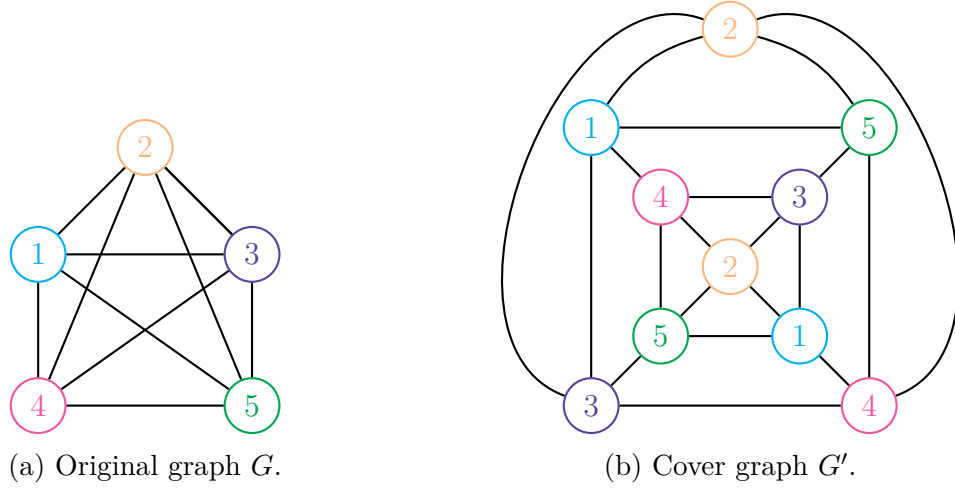


Figure 16.1: Example of  $G$  and  $G'$  as covers.

**Definition 9.**  $G'$  is a **cover** of  $G$  if  $(\exists f : V(G') \rightarrow V(G)) \forall v \in V(G')$  for  $N_{G'}(v)$  is a bijection with  $N_G(f(v))$ .

*Example.* We may see an example 16.1:

$$\begin{array}{c} \{G | \exists \text{ planar } G' \text{ cover of } G\} \\ \Updownarrow \\ F_1, \dots, F_n \not\leq_m G \end{array}$$

Contrary we take  $\mathcal{G} = \{G : (\forall uv \in V(G) \ u \neq v, \deg(u) \geq 5, \deg(v) \geq 5) (\exists X \subseteq E(G) : |X| \leq 1) \ u \text{ and } v \text{ are in different component of } G - X\}$  which is  $\leq_t$ -closed. But take these graphs:

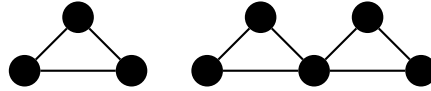


Figure 16.2: Obstructions.

Where each one of them is an obstruction. And we could create much more of them.

Now we take a look at some nice properties of graphs if we forbid some graphs as a minors.

$$\begin{array}{ll} K_1 \not\leq_m G & \Leftrightarrow V(G) = \emptyset \\ K_2 \not\leq_m G & \Leftrightarrow E(G) = \emptyset \\ K_3 \not\leq_m G & \Leftrightarrow G \text{ is a forest} \\ & G \text{ is obtained from } K_1, K_2 \text{ by clique sums} \\ K_4 \not\leq_m G & \Leftrightarrow G \text{ is obtained from } K_1, K_2, K_3 \text{ by clique sums} \end{array}$$

## 16.2 Clique sums

**Definition 10.** Graph  $G$  can be obtained from  $G_1$  and  $G_2$  by **clique-sum** if the intersection that these graphs have in  $G$  form a clique. In other way it is that we bind together two graphs by identifying their vertices and edges in the same size clique. Sometimes we

may denote it as  $G_1 \oplus G_2 = G$ . Or even  $G_1 \oplus_k G_2 = G$  to explicitly state the size of the clique is  $k$ .

**Observation.** If  $G$  is obtained from  $G_1$  and  $G_2$  by a clique-sum then:

$$K_m \leq_m G \Leftrightarrow K_m \leq_m G_1 \vee K_m \leq_m G_2$$

**Lemma 85.** If  $K_k \leq_m G$  and  $G$  is the clique-sum of  $G_1$  and  $G_2$  then  $K_k \leq_m G_1 \vee K_k \leq_m G_2$ .

**Lemma 86.** If  $G$  is not 3-connected then there exist  $G_1, G_2 \not\leq_m G$  s.t.  $G$  is a clique-sum of  $G_1$  and  $G_2$ .

*Proof.* If  $G$  is not connected then it is done since it is a clique sum on  $K_0$ . If  $G$  is connected, but not 2-connected then it is a clique-sum on  $K_1$  since there exist a articulation. If  $G$  is 2-connected then there must be two vertices which splits the graph. And these two vertices form a  $K_2$  as a minor. That is because we split  $G$  to two parts where we leave the major one side and add a edge to these two vertices, which we can do because they need to have a path between them so we contract all the edges alongside the path.  $\square$

**Definition 11.**  $\delta(G)$  is a minimum degree of a graph  $G$ .

**Theorem 3.** If  $G$  is  $K_4$ -minor-free then  $G$  is obtained from  $K_{\leq 3}$ 's by clique-sums.

*Proof.* By induction on  $|V(G)|$ .

- (a) If  $G$  is not 3-connected.  $G$  is a clique-sum of  $G_1, G_2 \not\leq_m G$ . Since  $K_4 \not\leq_m G_1$  and  $K_4 \not\leq_m G_2$  we use induction hypothesis and we are done.
- (b) If  $G$  is 3-connected. If  $|V(G)| \leq 3$ , then  $G = K_{\leq 3}$ , wlog  $|V(G)| \geq 4$ .  $\delta(G) > 1 \Rightarrow G$  contains a cycle. Let  $C$  be the shortest cycle in  $G$ .  $C$  is induced in  $G$  3-connected  $\Rightarrow G \neq C$  so  $\exists v \in V(G) \setminus V(C)$ . By Merger's theorem there exists three paths from  $v$  to  $C$  intersecting only in  $v$ . That gives us  $K_4$  as a minor of the graph. Which is contradiction.

$\square$

$K_5 \not\leq_m G \Leftrightarrow G$  is obtained from planar graphs and  $W_8$  by clique sums

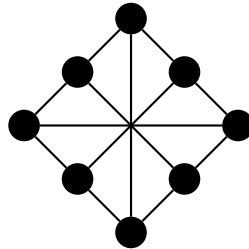


Figure 16.3:  $W_8$  graph.

**Observation.** If  $G$  is a clique-sum of  $G_1$  and  $G_2$  then

$$\chi(G) \leq \max(\chi(G_1), \chi(G_2))$$

*Proof.* We just need to match the coloring of the cliques. Other than that we don't have any problem.  $\square$

## 16.3 Hadwiger's conjecture

$K_t$ -minor-free graphs are  $(t - 1)$  colorable.

$$\begin{array}{lll} K_1 \not\leq_m G & \chi \leq 1 & \delta \leq 0 \\ K_2 \not\leq_m G & \chi \leq 2 & \delta \leq 1 \\ K_3 \not\leq_m G & \chi \leq 3 & \delta \leq 2 \\ K_4 \not\leq_m G & \chi \leq 4 & \delta \leq 5 \\ K_5 \not\leq_m G & \chi \leq 5 & \end{array}$$

**Theorem 4.**  $\exists f$  every  $K_t$ -minor-free graph  $G$  has  $\delta(G) \leq f(t)$ .

The function is somewhere near  $f(t) = (1,6 \dots + O(1))t\sqrt{\log t}$ . But we won't show this result. Instead we will show  $f(t) = O(t^2)$ .

## 16.4 Chordal decomposition

Before we continue it is better to remind ourselves **chordal graph** and **elimination ordering** (known as PES).

**Definition 12** (Chordal decomposition of  $G$ ).  $V(G) = \mathcal{P}_1 \dot{\cup} \mathcal{P}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathcal{P}_n$  and

1.  $(\forall i) G[\mathcal{P}_i]$  is connected.
2. " $\mathcal{P}_i$ 's form elimination ordering" Precisely:  $(\forall i \in [n])(\forall j_1, j_2 < i)$  if  $G$  has an edge between  $\mathcal{P}_i$  and  $\mathcal{P}_{j_1}$  and also between  $\mathcal{P}_i$  and  $\mathcal{P}_{j_2}$  then it also has an edge between  $\mathcal{P}_{j_1}$  and  $\mathcal{P}_{j_2}$ .

**Definition 13.** Chordal partition is **geodesic** if  $(\forall i)(\exists v_i \in \mathcal{P}_i)$  s.t. if  $j_1, \dots, j_t < i$  are the indices s.t.  $G$  has an edge between  $\mathcal{P}_i$  and  $\mathcal{P}_{j_1}, \mathcal{P}_{j_2}, \dots, \mathcal{P}_{j_t}$  then  $u_1, \dots, u_t \in \mathcal{P}_i$  s.t.  $u_i$  has a neighbor in  $\mathcal{P}_{j_1}, \mathcal{P}_{j_2}, \dots, \mathcal{P}_{j_t}$  and  $G - \bigcup_{j < i} \mathcal{P}_j$  contains shortest paths from  $v_i$  to  $u_1, \dots, u_t$  which cover all vertices in  $\mathcal{P}_i$ .

**Theorem 5.** Every graph has a geodesic chordal partition.

Before we show us the proof we will take a look at a simple application. If  $G$  is  $K_k$ -minor-free last part has neighbours in  $t \leq k - 2$  parts (otherwise it will have  $K_k$  as a minor). Then we may take a look at a  $\deg(v) \leq (k - 2) + (k - 2)(k - 2)3 \leq 3k^2$ . Thus getting the upper bound  $\delta(G) \leq 3k^2$ .

**Definition 14.** Part is called **terminal** if there is no edge from any vertex in that part going to some vertex in one of the parts on the right.

*Proof of theorem 5.* Let  $\mathcal{P}$  be a chordal decomposition of  $G$  into parts satisfying both properties of definition of chordal decomposition (i) and (ii) and geodesity (iii) for all non-terminal parts.

This can be easily done by creating parts based on the components of connectivity. For them all properties hold, since they are all connected and "chordal" property is also satisfied since there are no edges. Also all of them are terminal (iii) doesn't have to be satisfied.

Now we proof that by choosing  $\mathcal{P}$  with largest number of parts. Lets say that there is a part that does not satisfy (iii). This means that it is terminal part. Lets take vertex

from the part and find the shortest paths to the vertices that are connected to some of the parts to the left. Now we put vertices to separate components and these components will make a new parts. We will also remove all these vertices from the origin part. Note that all properties are satisfied. (i) is trivial. (ii) If there are any vertices from the new parts to other parts then they are to the ones which are already connected to the origin part, which satisfied (ii) before so it is fine. Also (iii) is satisfied.

The thing is that we created  $\mathcal{P}$  with larger number of parts which is contradiction.  $\square$

**Observation.**  $H \leq_t G \Rightarrow H \leq_m G$

**Observation.**  $\Delta(H) \leq 3 : H \leq_m G \Rightarrow H \leq_t G$

Lets remind ourselves a table and add some new properties.

$$\begin{array}{lll}
K_1 \not\leq_t G \Leftrightarrow K_1 \not\leq_m G & \Leftrightarrow & V(G) = \emptyset \\
K_2 \not\leq_t G \Leftrightarrow K_2 \not\leq_m G & \Leftrightarrow & E(G) = \emptyset \\
K_3 \not\leq_t G \Leftrightarrow K_3 \not\leq_m G & \Leftrightarrow & G \text{ is a forest} \\
& & G \text{ is obtained from } K_1, K_2 \text{ by clique sums} \\
K_4 \not\leq_t G \Leftrightarrow K_4 \not\leq_m G & \Leftrightarrow & G \text{ is obtained from } K_1, K_2, K_3 \text{ by clique sums} \\
K_5 \not\leq_t G \not\Leftrightarrow K_5 \not\leq_m G & \Leftrightarrow & G \text{ is obtained from planar graphs and } W_8 \text{ by clique sums}
\end{array}$$

Well technically  $K_5 \not\leq_t G \Rightarrow K_5 \not\leq_m G$  but the other way around is what doesn't work  $K_5 \not\leq_m G \not\Rightarrow K_5 \not\leq_t G$ . For that we can see an example 16.4. We may see that  $\mathcal{G} = \{G : G \text{ has } \leq 4 \text{ vertices of degree } \geq 4\}$  these graphs are so that  $K_5 \not\leq_t G$ .

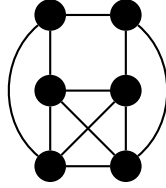


Figure 16.4: A counter example.

## 16.5 Hájos conjecture

If we remember Hadwiger's conjecture then Hájos conjecture is the same only with topological minors. Thus it is that  $K_t \not\leq_t G \Rightarrow \chi(G) \leq t - 1$ . This is actually true for  $t < 4$  but it is false for  $t \geq 7$  and 5,6 are open questions.

**Theorem 6.**  $\exists f_m(k) = O(k\sqrt{\log k})$  Every  $K_k$ -minor-free graph  $G$  satisfies  $\delta(k) \leq f_m(k)$ .

We won't prove this, but we will prove something similiar, that is for topological minors.

**Theorem 7.**  $\exists f_t(k) = O(k^2)$  Every  $G$  s.t.  $K_k \not\leq_t G$  satisfies  $\delta(G) \leq f_t(k)$ .

The corollary to this is that  $\chi(G) \leq f_t(k) + 1$ . We will proof this theorem, but to do that we need to do some steps beforehand.

Firstly imagine that the enemy gives you a graph and you need to prove that. But the enemy is kind enough to give you a graph  $H$  with connectivity  $\gg k^2$ . We could apply Merger's theorem. Though this will only give certain number of vertex disjoint paths from one vertex to another. We would more likely have this many paths between more pairs of sources and targets.

## 16.6 $k$ -linked, model, separation

**Definition 15.** Graph  $G$  is  $k$ -**linked** if  $|V(G)| \geq 2k$  and  $\forall s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, t_k$  distinct vertices of  $G$ .  $G$  contains pairwise vertex-disjoint paths  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . When  $P_i$  has ends  $s_i$  and  $t_i$ .

We may see that there exist a graph that is 2-connected and yet not 2-linked. You may see this on the picture 16.5a. Also not even 3-connected graph has to be 2-linked. Which is also on the picture 16.5b (though we can change the vertex inside for any planar graph). We could continue and end up with that not even 5-connectivity forces 2-linked.

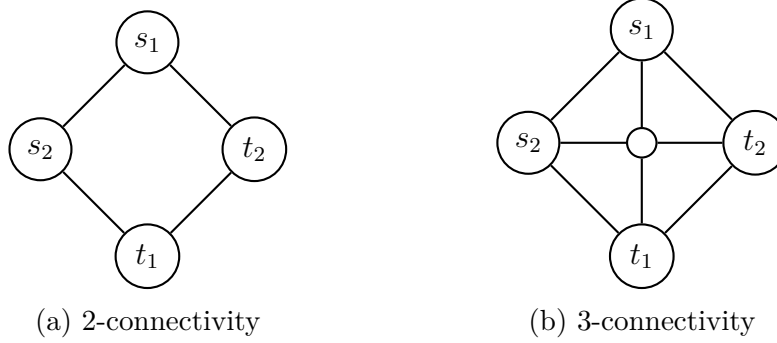


Figure 16.5: A counter example to 2-linked graphs.

**Observation.** Every  $k$ -linked graph is  $(2k - 1)$  connected.

*Proof.* That is simply because we put all the  $s_i, t_i$  for  $i \in [k - 1]$  to the vertex cut and then choose  $s_k$  in the left part and  $t_k$  in the right part then we can see that it is indeed  $(2k - 1)$ -connected.  $\square$

**Theorem 8.** If  $G$  is  $2k$ -connected,  $K_{4k} \leq_m G$  then  $G$  is  $k$ -linked.

We won't prove this directly. Instead we will later on introduce another theorem that is actually pretty much the same and prove that.

*Corollary.* If  $G$  is  $\max(2k, f_m(4k) + 1)$ -connected then  $G$  is  $k$ -linked.

*Proof.* We use the theorem to get that  $\delta > f_m(4k)$  thus  $K_{4k} \leq_m G$ .  $\square$

Also we can say  $\exists f_l(k) = O(k\sqrt{\log k})$ . If  $G$  is  $f_l(k)$ -connected then  $G$  is  $k$ -linked.

*Corollary.* If  $G$  is  $f_l\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)$ -connected then  $K_k \leq_t G$ .

*Proof.* To see this we choose  $k$  vertices and for every one of them  $k - 1$  neighbors. Then we give  $s_i$  and  $t_i$  to every single one of these vertex so that every neighborhood has pair with all others. Then we find such paths between them.  $\square$

**Lemma 87.** If  $\bar{d}(G) \geq 4d$  then  $G$  contains a  $(d + 1)$ -connected subgraph  $H$  of minimum degree  $2d + 1$ .

*Proof.* Let  $H$  be a minimal subgraph of  $G$  s.t.  $|V(H)| \geq 2d$  and  $|E(H)| > 2d(|V(H)| - d)$ . We may see that  $|V(H)| > 2d$  that is if it has  $2d$  vertices then

$$\frac{2d^2 - d}{2} = \binom{2d}{2} > |E(H)| > 2d^2$$

which is a contradiction.

Then we also have that  $\delta(H) \geq 2d + 1$ . If we have  $\delta(H) \leq 2d$  we may remove the certain vertex. But we need to show that given properties still hold. We will split the graph to two parts  $|A|, |B| \geq 2d + 2 > 2d$ . Then

$$\begin{aligned}
|E(G)| &\leq |E(A)| + |E(B)| \\
(1) \quad &\leq 2d(|V(A)| - d) + 2d(|V(B)| - d) \\
&= 2d(|V(A)| + |V(B)| - 2d) \\
&= 2d(|V(H)| - |V(A \cap B)| - 2d) \\
|E(G)| &> 2d(|V(H)| - d)
\end{aligned}$$

Where (1) is due to the minimality of  $H$ . The thing is with the last two lines we get that  $|A \cap B| > d$ .  $\square$

*Proof.* This actually is enough for the theorem to be proven since the enemy doesn't have to be kind anymore.  $\square$

**Definition 16.** A **model** of  $K_m$  in  $G$  is  $M_1, M_2, \dots, M_m \subseteq V(G)$  pairwise distinct and  $\forall i : G[M_i]$  is connected and  $(\forall i \neq j) \exists uv \in E(G) : u \in M_i, v \in M_j$ .

We may take a look at an example of model of  $K_4$  which is in picture 16.6.

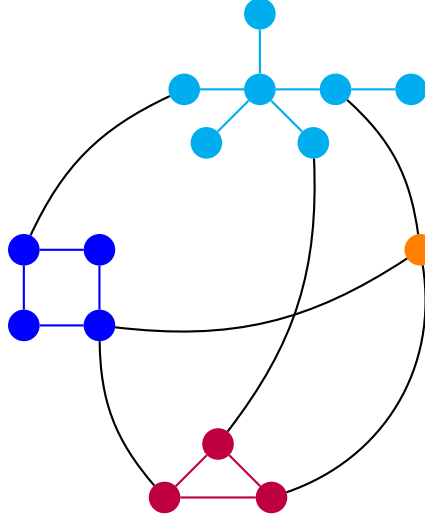


Figure 16.6: Example of  $K_4$  model.

**Observation.**  $K_m \leq_m G \Leftrightarrow$  there is a mode of  $K_m$  in  $G$ .

**Definition 17. Separation** in  $G$  is  $(A, B)$  where  $A, B \subseteq V(G)$ ,  $A \cup B = V(G)$ , no edge between  $A \setminus B$  and  $B \setminus A$ .

On picture 16.7 we may see an example of  $(A, B)$ -separation. Where the orange points are both in  $A$  and  $B$  and then the rest is either only in one or second part, which are set by their connectivity.

**Definition 18.** The **order** of the separation is  $|A \cap B|$ .

**Definition 19.**  $S$  is **well-linked** to a model  $M_1, M_2, \dots, M_m$  if every separation  $(A, B)$  with  $S \subseteq A$   $(\exists i) M_i \subseteq B \setminus A$  has order  $\geq |S|$ .



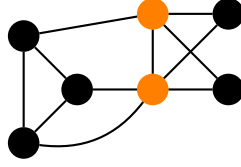


Figure 16.7: Example of separation.

**Theorem 9.**  $\forall G, S = \{s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\} \subseteq V(G)$  and  $M_1, \dots, M_{4k}$  model of  $K_{4k}$  in  $G$ . If  $S$  is well-linked to  $M_1, M_2, \dots, M_{4k}$  then  $G$  contains distinct paths from  $s_i$  to  $t_i$  for all  $i \in [k]$ .

We can see that this is somewhat reformulation of theorem before (8). Thus if we prove this we will also prove the previous theorem. But we will introduce another similiar theorem which will imply this theorem.

**Definition 20.**  $G, S \subseteq V(G)$  and  $M_1, M_2, \dots, M_m \subseteq V(G)$  pairwise distinct is an *S-relaxed model* of  $K_m$  in  $G$  if

1.  $(\forall i) G[M_i]$  is connected or every component of  $G[M_i]$  intersects  $S$ .
2.  $(\forall i \neq j) \exists uv \in E(G)$  s.t.  $u \in M_i, v \in M_j$  or  $M_i \cap S \neq \emptyset \neq M_j \cap S$ .

**Theorem 10 (Slightly changed).**  $\forall G, S = \{s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\} \subseteq V(G)$  and  $M_1, \dots, M_{4k}$  *S-relaxed mdel* of  $K_{4m}$  in  $G$ . If  $S$  is well-linked to  $M_1, M_2, \dots, M_{4k}$  then  $G$  contains distinct paths from  $s_i$  to  $t_i$  for all  $i \in [k]$ .

*Proof.* We will prove this theorem by induction on  $|V(G)|$ . We will separate it to some distinct cases.

- (1) Suppose there exists a separation  $(A, B)$  of order  $2k$  (which is  $= |S|$ ) s.t.  $S \subsetneq A$  and  $(\exists i) M_i \subseteq B \setminus A$ . Then by Menger's theorem there exists  $2k$  disjoint paths from  $S$  to  $A \cap B$  (since  $S$  is well-linked to  $M_1, \dots, M_{4k}$ ). We want:  $G[B]$  disjoint paths from  $s'_i$  to  $t'_i$  for all  $i \in [k]$ , where  $s'_i$  and  $t'_i$  are the ends from the paths labeled same as the beginnings. We apply induction hypothesis on  $G[B]$   $S' = \{s'_i, t'_i | \forall i \in [k]\}$   $M_1 \cap B, M_2 \cap B, \dots, M_{4k} \cap B$ .

First we need to prove that the properties still holds. Such as that it is still  $S'$ -relaxed and  $S'$  is well-linked. Consider  $M_i \cap S = \emptyset$  so  $\forall j \neq i$  there is at least one vertex in  $B$ . Then  $M_1 \cap B$  components do not intersect  $S'$  so it didn't intersect  $S$ . Therefore it had to be connected and thus still is. That is the first property and the second is left out as exercise. So  $S'$  is relaxed model.

We now take a look at if  $S'$  wouldn't be well-linked. Then there would be a separation with order  $< 2k$ . But this separation would be present even before so it cannot be there.

Now WLOG: Every separation  $(A, B)$  s.t.  $S \subsetneq A, (\exists i) M_i \subseteq B \setminus A$  has order  $> 2k$ .

- (2) Suppose  $\exists v \in V(G) \setminus (S \cup \bigcup_i^{4k} M_i)$  apply I.H. on  $G - v$ . We need to show that it is well-linked. Suppose we have a separation with order  $< 2k$ . We put  $v$  in the intersection of the separation ("cut") and get a separation of  $G$  with order  $\leq 2k$ . That can't happen since we assumed the orrder is  $> 2k$ .

- (3) Suppose  $(\exists i)\exists uv \in E(G[M_i])$  s.t.  $v \notin S$ . Aplly I.H> to  $G/uv$  (contract the edge  $uv$ ). We may see that  $S$  is relaxed model and well-linked with the similiar arguments as in the point before.

With this induction we end up with  $S \subseteq V(G)$  and  $M_1, M_2, \dots, M_{4k}$ . We know  $(\forall i)M_i \cap S = \emptyset \Rightarrow |M_i| = 1$  or  $M_i \subseteq S$ . Also all single  $M_i$  forms a clique. We would like to find if there exist a mathcing between  $S$  and  $V(G) \setminus S$  covering  $S$ . For that we may recall Hall's theorem and thus we need  $\forall X \subseteq S : |N(X)| \geq |X|$  where  $N(X)$  are the neighbours of  $X$ . Lets take a look at one  $M_k = X$  and its  $N(X)$ . There are not necessarily edges to  $M_1, \dots, M_g$ . Lets put  $A = S \cup N(X)$  and  $B =$  clique on  $M_i \cup (S \setminus X)$ . By that we get that  $X = A \setminus B$  and  $V(G) \setminus (S \cup N(X)) = B \setminus A$ . So  $(S \setminus X) \cup N(X) = A \cap B$  which can't be smaller than  $2k$ . So  $|S \setminus X| + |N(X)| \geq 2k$  where  $|S \setminus X| = |S| - |X|$  and  $|S| = 2k$  this means that  $|N(x)| \geq |X|$ .

Therefore we find the matching between  $S$  and clique. Thus we take for each  $i$  the edge in matching from  $s_i$  to  $s'_i$ , then path from clique from  $s'_i$  to  $t'_i$  and next from matching  $t'_i$  to  $t_i$ .  $\square$

# 17. Tree decomposition

Firstly we may recall that:  $K_5 \not\leq_m G$  iff  $G$  is obtained from planar graphs and  $W_8$ 's by clique-sums. When we draw the graphs expanding by the clique sums we may notice a somewhat tree structure that they generate. Now we will define it and see it properly.

## 17.1 Basics

**Definition 21.** A **tree decomposition**  $(T, \beta)$  of graph  $G$  is when  $T$  is a tree and  $\beta : V(T) \rightarrow 2^{V(G)}$  (called bags) such that

- (1)  $(\forall uv \in E(G))(\exists x \in V(T)) : u, v \in \beta(x)$  or by words every edge is contained in a bag.
- (2)  $\forall v \in V(G)$  the set  $\{x \in V(T) : v \in \beta(x)\}$  induces a non-empty connected subtree of  $T$ .

**Lemma 88.** If  $(T, \beta)$  is a tree decomposition of  $G$ ,  $K \subseteq V(G)$  is a clique in  $G$  then  $(\exists x \in V(T)) : K \subseteq \beta(x)$ .

*Proof.* For contradiction suppose it is not true. Thus  $(\forall x \in V(T))(\exists v_x \in K) : v_x \notin \beta(x)$ . We define "arrows" for each vertex which points to the set  $\{y : v'_x \notin \beta(y)\}$ . Thus there is  $|V(T)|$  of "arrows" but because it is a tree there is  $|E(T)| = |V(T)| - 1 < |V(T)|$ . So at least one edge must have two "arrows". Therefore there is no  $y \in V(T)$  with  $v_x, v_{x'} \in \beta(y)$  so  $K$  clique implies that  $v_x$  and  $v_{x'}$  are adjacent. This is contradiction with (1) from definition.  $\square$

## 17.2 Torso

**Definition 22.**  $(T, \beta)$  is tree decomposition of  $G$  and let  $x \in V(T)$  then the **torso** of  $x$  is  $G[\beta(x)] +$  cliques on  $\beta(x) \cap \beta(y)$  for every  $xy \in E(T)$ .

This definition may not be clear to everybody so lets take a look at an example. On picture 17.1 we may see the original graph 17.1a and on picture 17.1b we may see the tree decomposition. Now we set  $x$  to be **BGE**. Now for the torso itself we create a three vertices **B**, **G** and **E** where there is no induced edge. Then for the neighbors **ABG** we add a edge between **B** and **G**. For **BED** we add an edge between **B** and **E** and lastly for **EGF** we add **E-G** edge. And finally we get what is drawn on picture 17.1c.

**Lemma 89.** Let  $\mathcal{G}$  be a class of graphs.  $G$  is obtained by clique-sums from graphs belonging to  $\mathcal{G}$  iff  $G$  has a tree decomposition whose torsos belongs to  $\mathcal{G}$ .

*Proof.* Firstly the " $\Leftarrow$ " is easy since when taken the tree decomposition torso we may see that it is somewhat the same as clique-sum of the graphs.

Next we have " $\Rightarrow$ " for them we will prove it by induction on the number of terms.

- (i) When we have one term than the whole  $G \in \mathcal{G}$  and we take a tree decomposition with only one vertex having all vertices from  $G$ .

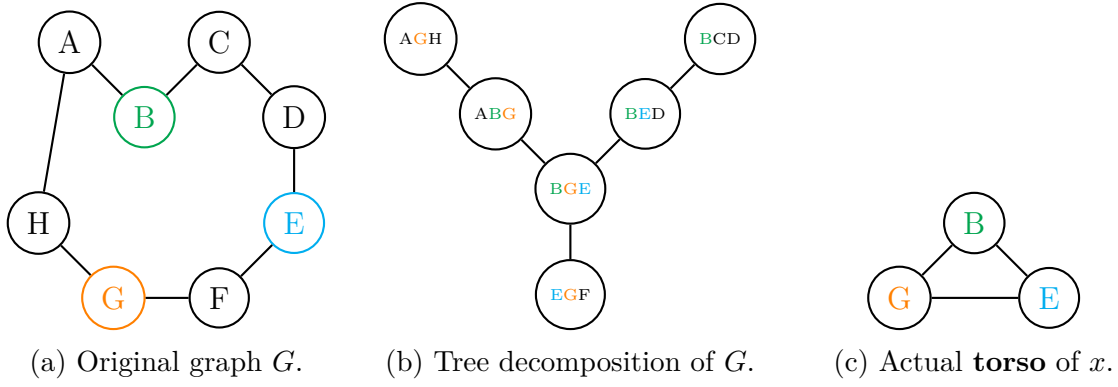


Figure 17.1: An example of **torso**.

- (ii) Now we have  $G = G_1 \oplus_K G_2$  thus there by induction hypothesis we have  $(T_1, \beta_1)$  and  $(T_2, \beta_2)$  tree decompositions of their respected graphs  $G_1$  and  $G_2$ . By lemma there exists a bag with clique  $K$  in both  $T_1$  and  $T_2$ . So we create  $T$  by adding edge between those bags in  $T_1$  and  $T_2$ . So  $(T, \beta = \beta_1 \cup \beta_2)$  will be the tree decomposition. While it may seem easy it is necessary to show that all properties holds. Every edge is contained in at least one bag since we did not added no edge. Secondly all  $x$  induces a non-empty connected subtree.

Also we have to take a look at the torsos we are getting from this tree decomposition. For those bags not having new edge it is still the same as before and for bag  $\beta(x)$  which  $K \subseteq \beta(x)$  we see that its only intersection is  $K$  so it won't change any torso because it is a clique.

□

## 17.3 Tree width

So we introduced basic tree decomposition but now we take a deeper look at some special cases of them.

**Definition 23.** *Width* of  $(T, \beta)$  is  $\max_{x \in V(T)} (|\beta(x)|) - 1$ .

**Definition 24.** We denote  $tw(G) = \min \text{width of } (T, \beta) \text{ for all } (T, \beta) \text{ tree decompositions of } G$ . It is called the **treewidth**.

We may recall and extend that for  $k \leq 4$ :  $K_k \not\leq_m G$  iff  $G$  is obtained by clique-sum from graphs with  $\leq k - 1$  vertices iff  $G$  having tree decomposition  $(T, \beta)$  such that  $(\forall x \in V(T)) : |\beta(x)| \leq k - 1$  which means that  $\text{width}(T, \beta) \leq k - 2$  iff  $tw(G) \leq k - 2$ .

We would now need  $\{G : tw(G) \leq k\}$  is minor-closed.

**Observation.**  $H \leq_m G \Rightarrow tw(H) \leq tw(G)$

*Proof.* We may see all possible operations. First deletion of vertex may only decrease the value. Second the deletion of edge may also only decrease the value. Lastly for contracting an edge  $uv$  we overwrite all these vertices to  $w$  and change the edges. This is easily seen that it will only decrease the value or it will stay the same. □

From that we get that  $\exists \mathcal{F}_k \text{ } tw(G) \leq k \text{ iff } (\forall F \in \mathcal{F}_k) F \not\leq_m G$ . Also for some simple values we know  $\mathcal{F}_1 = \{K_3\}$  also  $\mathcal{F}_2 = \{K_4\}$  and for  $\mathcal{F}_3 = \{K_5, \dots\}$  where it is known but not that important.

## 17.4 Bramble

**Definition 25.** *Bramble  $\mathcal{B} \subseteq 2^{V(G)}$  such that*

- (1)  $(\forall B \in \mathcal{B}) B \neq \emptyset$  and  $G[B]$  is connected.
- (2)  $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}) G[B_1 \cup B_2]$  is connected.

As previously we will take a look at an example of a bramble so that a reader gets a better grasp on this definition. On the picture 17.2 we may see a graph  $G$  where there is Bramble  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ .

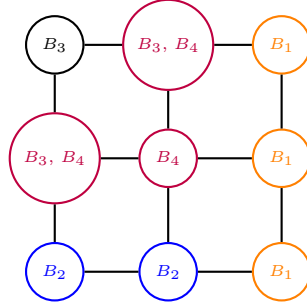


Figure 17.2: Bramble of a graph  $G$ .

**Definition 26.** *Set  $X$  **hits** the Bramble  $\mathcal{B}$  if  $(\forall B \in \mathcal{B}) B \cap X \neq \emptyset$ .*

For the previous example a hit could be all these vertices highlighted on the picture 17.3.

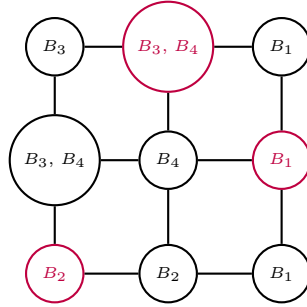


Figure 17.3: Brumble of a graph  $G$ .

**Lemma 90** (duality). *If  $(T, \beta)$  is a tree decomposition of  $G$  and  $\mathcal{B}$  is a bramble then  $(\exists x \in V(T)) \beta(x)$  hits the bramble.*

**Observation.** *If  $(T, \beta)$  is a tree decomposition of  $G$  and  $F \subseteq G$  connected, then  $\{x \in V(T) : \beta(x) \cap V(F) \neq \emptyset\}$  induces a connected subtree of  $T$ .*

*Proof.* By induction on  $|V(F)|$ .

- (i)  $|V(F)| = 1$  is by the definition.
- (ii)  $|V(F)| > 1$  consider  $v \in V(F)$  such that  $F - v$  is connected (we could take a leaf from a spanning tree of  $F$ ) so we use an induction hypothesis  $F - v$ . We take a subtree on  $V(F - v)$  and  $\{v\}$ . By the definition  $\exists y : u, v \in \beta(y)$ .

□

*Proof of lemma.* For contradiction suppose it is false. So  $(\forall x \in V(T))\beta(x)$  does not hit  $\mathcal{B}$  so we have  $B_x \in \mathcal{B}$  disjoint from  $\beta(x)$ . By lemma  $B_x$  forms in  $(T, \beta)$  a connected subtree. Again we assign "arrows" to vertices pointing to  $x-B_x$ . Also there are more arrows than edges so at least one edge has two "arrows". We can find  $B_x$  and  $B_{x'}$  not in the same bag so they are disjoint. This is a contradiction by the definition. □

Note that on  $K$  clique the bramble is  $\mathcal{B} = \{\{u\} : u \in K\}$ .

**Definition 27.** *Order of bramble is defined as  $order(\mathcal{B}) = \min(|X|) : X \text{ hits } \mathcal{B}$ .*

*Corollary.*  $tw(G) \geq \max(order(\mathcal{B})) - 1$  for all  $\mathcal{B}$  rumble in  $G$ .

*Remark.* It can be proven so that there is equality not inequality. But we will not be showing this result since it is not so easy.

In other words we may rewrite the previous findings as a similiar lemma.

**Lemma 91.**  $\forall$  tree decompositions  $(T, \beta)$  and  $\forall$  bramble  $\mathcal{B}$  in  $G$  it holds that

$$width(T, \beta) \geq order(\mathcal{B}) - 1$$

### 17.4.1 $n \times n$ grid

Now we will take a look at a simple example of a graph and its tree decomposition and bramble. This graph is an  $n \times n$  grid where every neighbor is connected, one can be seen on picture 17.4.

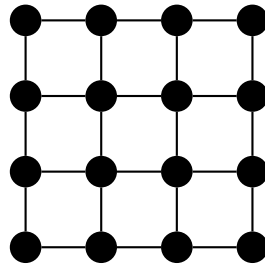


Figure 17.4:  $n \times n$  matrix example.

When we examine a tree decomposition we may easily find one such with tree width  $2n$ . That is we take 2 rows that are adjacent. But much better tree decomposition is when we take it like it is visualized on picture 17.5. This gives us a tree decomposition with width  $n + 1$ .

So we can say that  $tw(n \times n \text{ grid}) \leq n$ . Can we construct some with even lower width? We can use the previous lemma and construct a bramble which can be seen on picture 17.6. So there are two special sets on the sides and then we have all the crosses in the rest of the grid. This will lead to bramble  $\mathcal{B}$  of order  $\geq n + 1$ . We must select two points for two special sets and points on the diagonal for example. Therefore with the use of the lemma we also have that  $tw(n \times n \text{ grid}) \geq n$  thus it has to be equal.

With that we can state that if  $n \times n \text{ grid} \leq_m G$  then  $tw(G) \geq n$ . Which also means that we can construct planar graph with any given tree width.

**Theorem 11.**  $tw(G) \geq \Omega(n^{10})$  then  $n \times n \text{ grid} \leq_m G$ .

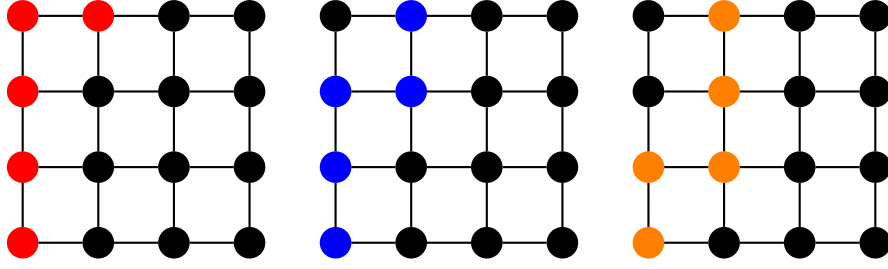


Figure 17.5: First three bags of tree decomposition.

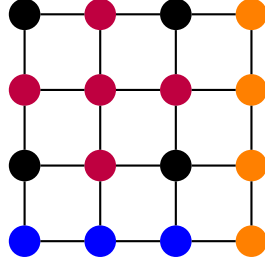


Figure 17.6: A bramble for  $n \times n$  grid.

This is quite recent discovery and long time it was only exponential. Now it is polynomial. We won't be proving this but instead we take a look at something in a way similar.

#### 17.4.2 $n$ -ladder

$n$ -ladder is graph that looks like a  $2 \times n$  grid. Or just like it is on the picture 17.7.

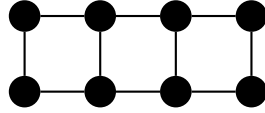


Figure 17.7: Example of an  $n$ -ladder.

**Theorem 12.**  $tw(G) \geq 2n^2 - 1 \Rightarrow n\text{-ladder} \leq_m G$ .

We won't be proving this straightforward. Instead we will prove something similar which implies this theorem.

**Theorem 13.** *If  $G$  contains a bramble  $\mathcal{B}$  of order  $\geq 2n^2$  then  $n\text{-ladder} \leq_m G$ .*

Firstly we will show some lemmas.

**Lemma 92.** *If  $\mathcal{B}$  is a bramble in  $G$ , then there exists path  $P \subseteq G$  such that*

$$\forall B \in \mathcal{B} : B \cap V(P) \neq \emptyset$$

*Proof.* Lets take  $B_1 \in \mathcal{B}$  and  $x \in V(G)$  such that  $x \in B_1$ . If it is contained in all sets from bramble then we are done. Otherwise find such  $B_2 \in \mathcal{B}$  that does not contain it. Then by the bramble properties we are able to find path from  $x$  to  $B_2$ . If now the path is contained in all sets from bramble we are done. Otherwise we iterate.  $\square$

**Lemma 93.** *Suppose  $\mathcal{B}$  is a bramble,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot{\cup} \mathcal{B}_2$ . Then  $\mathcal{B}_1$  and  $\mathcal{B}_2$  are also brambles and*

$$\text{order}(\mathcal{B}) \leq \text{order}(\mathcal{B}_1) + \text{order}(\mathcal{B}_2)$$

*Proof.* This is straightforward from the definition of the bramble and some observations.  $\square$

*Proof of theorem.* Let  $P$  be a path intersecting all sets in  $\mathcal{B}$ . let  $P_1$  be a path segment.

$$\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B} : B \cap V(P_1) \neq \emptyset\}$$

Choose  $P_1$  shortest such that  $\text{order}(\mathcal{B}_1) \geq n^2$ . We also claim there need to be equality since we are looking for the shortest path. Now let  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$ . By the lemma we know  $\text{order}(\mathcal{B}_2) \geq n^2$ . Also we set  $P_2$  to path intersecting all sets in  $\mathcal{B}_2$ .

The claim is that  $G$  contains  $n^2$  disjoint paths from  $P_1$  to  $P_2$ . By Merger's theorem if there is cut of such size there must as many disjoint paths. If we would remove  $< n^2$  vertices there would exists in both paths such  $B_1$  and  $B_2$  respectively so the are not hit. By their properties they induce a connected subgraph. So there is a path. This proves the claim.

We also remind ourselves a theorem

**Theorem 14** (Erdos-Szekeres). *Every sequence of length  $n^2$  contains a monotone sub-sequence of length  $n$ .*

Thus if the sub-sequence is increasing we just find  $n$  paths thus an  $n$ -ladder. If it is decreasing we just flip one path and find the same result.  $\square$

Now we will see an application of this theorem.

**Theorem 15** (Erdos-Prosa). *There exists  $f$  such that  $\forall k \forall G$  either*

- $G$  contains more than  $k$  pairwise distinct cycles or
- $\exists X \subseteq V(G)$ ,  $|X| \leq f(k)$  such that  $G - X$  does not contain cycle.

They proved it for  $f(k) = O(k \log k)$ , but we will show for other  $f$  that exploits our previous theorem.

**Definition 28.**  $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  is  **$k$ -bounded** if  $n_1, n_2, \dots, n_m \leq k/2$  and  $\sum_i n_i \leq k$ .

Now we set our  $f$  to be:  $f(0) = 0$  and

$$f(k) = 2(2k + 2)^2 + \max_{I \text{ } k\text{-bounded}} \sum_{i \in I} f(i).$$

*Proof.* Suppose  $G$  contains  $\leq k$  disjoint cycles. We will be proving this by induction on  $k$ .

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq V(G) : G[B] \text{ is connected, contains } > k/2 \text{ disjoint cycles}\}$$

is a bramble. Any two  $B_1$  and  $B_2$  must intersect otherwise we have a contradiction with our assumption of not having  $k$  cycles. If  $\text{order}(\mathcal{B}) \geq 2(2k + 2)^2$  then there is  $2k + 2$ -ladder as a minor of  $G$ . This means there would be  $k + 1$  pairwise distinct cycles which is a contradiction.



So  $(\exists X : |X| < 2(2k+2)^2)X$  hits  $\mathcal{B}$ . Now take  $G - X$  and denote their components as  $K_1, K_2, \dots$ . let  $n_i$  be the number of pairwise distinct cycles in  $K_i$ . We may see that the sum  $\sum n_i \leq k$  otherwise it is a contradiction with the assumption. And also  $n_i \leq k/2$  for any  $i$ . Due to the bramble properties. Thus this sequence is  $k$ -bounded. Apply induction on components. We get  $|X_i| \leq f(n_i)$  by induction hypothesis. Thus

$$G = (X \cup \bigcup_i X_i) \text{ is a forest and}$$

$$|G - (X \cup \bigcup_i X_i)| \leq f(k)$$

□

# 18. Polynomials for graph theory

## 18.1 Basics

We will introduce polynomials representing the graphs. Then we will look at what properties these polynomials have. But firstly we will look at some basics. Let  $p(x_1, \dots, x_n)$  be a polynomial on  $n$  variables. One term  $ax_i^l x_j^k \dots$  is called a **monomial**.

**Definition 29.** The **total degree** of a monomial  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$  is the sum  $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ .

**Definition 30.** Total degree of polynomial is the maximal total degree of its monomials.

Also we will denote  $[x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}]p$  the coefficients of  $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ .

**Theorem 16** (Chevalley–Warning, no proof). Let  $p$  be a prime number and  $f_1, \dots, f_k$  polynomials over  $\mathbb{Z}_p$  in  $n$  variables and  $\sum_{i=1}^k$  total degree of  $f_i < n$ , then the number of  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_p$  such that for all  $i$   $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$  is divisible by  $p$ .

Now let's see an example of this. Let  $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 + u = 0$  and  $f_2 = x - y + z - u = 0$  over  $\mathbb{Z}_3$ . The total degree of  $f_1 + f_2 = 2 + 1 < 4$  which is the number of variables. So the solutions are  $x = y = z = u = 0$  where the number of them has to be divisible by 3. Also we have a solution  $x = 1, z = 1, y = 2, u = 0$ .

**Theorem 17** (Combinatorial Nullstellensatz, no proof). Let  $f$  be a polynomial in  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ ,  $f \neq 0$ . Suppose  $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq \mathbb{R}$  such that  $(\forall i) |S_i| > \deg_{x_i}(f)$ . Then  $\exists a_1 \in S_1, \dots, a_n \in S_n$  such that  $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ .

Where  $\deg_{x_i}(f)$  is the largest degree of  $x_i$  in  $f$ . Example of application would be to ask if graph  $G$  has a 3-regular graphs as a subgraph, e.g. if it is true that  $\delta(G) \geq 10^{10} \Rightarrow G$  has a 3-regular subgraph? Generally NO.

**Theorem 18.** Suppose  $\delta(G) \geq 4, \Delta(G) \leq 5$  and  $G$  is not 4-regular. Then  $G$  has a 3-regular subgraph.

*Proof.* We will consider the following polynomials over  $\mathbb{Z}_3$ , for  $v \in V(G)$  we define  $f_v = \sum_{e \ni v} x_e^2$ . Now we will take a look at such system of equations. We have this many variables:  $|E(G)| = \frac{\sum_v \deg(v)}{2} > 2|V(G)|$ . (Remember  $G$  is not 4-regular.) And  $\sum_v$  total degree( $f_v$ ) =  $2|V(G)| < |E(G)|$ . This implies that we can use the first theorem. Therefore  $|\{a_e \in \mathbb{Z}_3 : e \in E(G)\}|$  such that  $f_v(\vec{a}) = 0$  for all  $v \in V(G)$  is divisible by 3. There exists at least one solution (since  $x_e = 0$  for  $e \in E(G)$ ) which means there exists another solution  $\{a_e : e \in E(G)\}$  such that  $\exists e : a_e \neq 0$ .

Now we create a subgraph  $H$  as follows.  $E(H) = \{e \in E(G) : a_e \neq 0\}$  and  $V(H)$  are all vertices incident to  $E(H)$ . If we look at vertex  $v$  then  $f_v(\vec{a}) = \sum_{e \ni v} a_e^2 = \sum_{e \ni_H v} a_e^2$  which is equivalent to  $\deg_H(v) \pmod 3$ . Also  $f_v = 0$ . So every vertex has a degree 3.  $\square$

## 18.2 List coloring polynomial

Now we will use polynomials for coloring, but not the usual one we may find. We will be talking about a coloring which is obtained by choosing one color from a list assigned to each vertex. Then it must have the same property as a normal coloring. This is called **list coloring**. When all vertices have the same size lists  $k$ , then it can be also called that it is  **$k$ -choosable**.

**Definition 31.** List chromatic number  $\chi_l(G) = \text{smallest } k : G \text{ can be colored from any assignment of list of size } \geq k.$

We will be trying to obtain the result that every bipartite plane graph is 3 list colorable. But before we do so we will build another theory. Also it is possible to create such bipartite graphs that the  $\chi_l(G)$  is arbitrarily large. For a graph  $G$  we define  $\vec{G}$  as an arbitrary orientation of  $G$ . And also we will define a polynomial:

$$P_{\vec{G}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(v_i, v_j) \in E(\vec{G})} x_i - x_j$$

To get a better understanding lets see a simple example of a graph  $G$  which can be seen on a picture 18.1. Here the polynomial would be  $P_{\vec{G}} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) = x_1x_2x_3 - x_2x_3 - x_1x_2^2 + x_2^2x_3 - x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_1^2x_2 - x_1x_2x_3.$

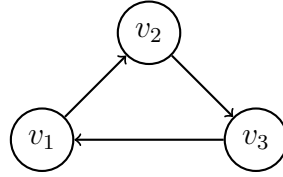


Figure 18.1: Example for a polynomial for a graph  $\vec{G}$ .

Now if we take  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  which map each one of them  $v_i \rightarrow x_i$ . Then for an assignment  $\vec{c}$  as for each  $i$   $v_i \rightarrow c_i$  we know that  $G$  has a proper coloring iff  $P_{\vec{G}}(\vec{c}) \neq 0$ . That is if  $S_1, \dots, S_n$  are lists of allowed colors for  $v_1, \dots, v_n$  then  $G$  is colorable from  $S_1, \dots, S_n$  iff  $(\exists c_1 \in S_1, \dots, c_n \in S_n) P_{\vec{G}}(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ . To prove this we could use the same theorem, but we will need a stronger version.

**Theorem 19** (Combinatorial Nullstellensatz 2nd version). *Let  $f$  be a polynomial in  $x_1, \dots, x_n$  and  $S_1, \dots, S_n \subseteq \mathbb{R}$ . If  $(\exists d_1, \dots, d_n)$  total degree  $(f) \leq d_1 + \dots + d_n$  and  $[x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}]f \neq 0$  and  $(\forall i)|S_i| > d_i$ . Then  $\exists c_1 \in S_1, \dots, c_n \in S_n : f(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ .*

But why does it hold? We can assume  $|S_i| = d_i + 1$ . For the values  $S_i = \{a_1, \dots, a_{d_i+1}\}$  (as colors). We know that if  $x_i \in S$  then  $(x_i - a_1)(x_i - a_2) \dots (x_i - a_{d_i+1}) = 0$ . Then  $x_i^{d_i+1} - (a_1 + \dots + a_{d_i+1})x_i^{d_i} + \dots$  where we denote  $b_{d_i} = (a_1 + \dots + a_{d_i+1})$  so that leads to:

$$x_i^{d_i+1} = b_{d_i}x_i^{d_i} + \dots + b_1x_i + b_0$$

Now we may take a polynomial  $f$  from the 2nd theorem. The polynomial  $f'$  has the same values on  $S_1, \dots, S_n$  but  $\deg_{v_i}(f') \leq d_i$ . So now the condition  $(\forall i)|S_i| > \deg_{v_i}(f')$  holds. Only thing is to see that  $f' \neq 0$ .

We have already shown this theorem.

**Theorem 20.** *If  $[x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}]P \neq 0$ ,  $d_1 + \dots + d_n = \text{total degree of } P$ ,  $S_1, \dots, S_n, (\forall i)|S_i| > d_i$  then  $\Rightarrow (\exists c_1 \in S_1, \dots, c_n \in S_n) P(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ .*

**Observation.**  $P_{\vec{G}}(c_1, \dots, c_n) \neq 0 \Leftrightarrow c_1, \dots, c_n$  is a proper coloring of  $G$ .

By combining these two results we may get a following corollary.

*Corollary.* If  $[x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}]P_{\vec{G}} \neq 0$  and  $L$  is a list assignment such that  $(\forall i)|L(v_i)| > d$  then  $G$  is  $L$ -colorable.

Now we will see other variants of this polynomial and how it can be computed in other ways. Here we see an example on picture 18.2. First we may see the original graph and its orientation  $\vec{G}$  on picture 18.2a. Then one monomial in a corresponding polynomial is a choice of one  $\pm x_i$  in the bracket. This choice induces a new orientation  $\tilde{\vec{G}}$  which both can be seen on picture 18.2b. Thus the polynomial can be computed as follows:

$$\sum_{\tilde{\vec{G}} \text{ orientation of } G} (-1)^{\# \text{ of different direction in } \tilde{\vec{G}} \text{ from } \vec{G}} \prod_i x_i^{\deg_{\tilde{\vec{G}}}^-(v_i)}$$

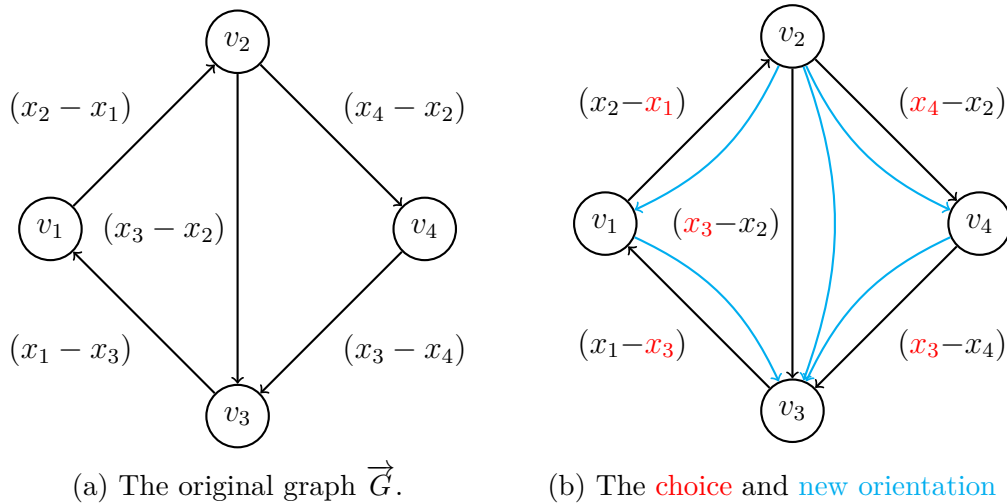


Figure 18.2: Example for computing polynomial by orientation, the original graph  $\vec{G}$ .

Thus altogether we get this result:

$$[x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}] P_{\vec{G}} = \sum_{\tilde{\vec{G}} \text{ orientation of } G: \deg_{\tilde{\vec{G}}}^-(v_i) = d_i \forall i} (-1)^{\# \text{ of different direction in } \tilde{\vec{G}} \text{ from } \vec{G}}$$

When we show another example where we have a vertex with in degree 3. See picture 18.3. For the indegree to be same it must be that for all changed edge to the vertex there must be some changed edge out of the vertex.

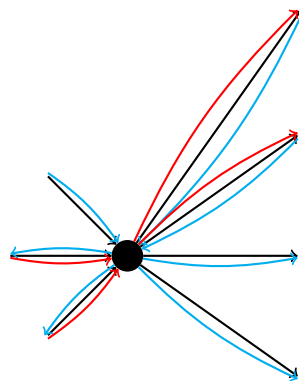


Figure 18.3: Example for Eulerian subgraph orientations.

**Observation.** If  $\vec{G}$  and  $\vec{\tilde{G}}$  are orientations with the same indegrees, the  $\vec{H}$  subgraph of  $\vec{G}$  with edges oriented differently, then  $\forall v \in V \deg_{\vec{H}}^+(v) = \deg_{\vec{H}}^-(v)$  or in other words:  $\vec{H}$  is Eulerian subgraph of  $\vec{G}$ .

**Lemma 94.** Suppose  $\vec{G}$  is an orientation of  $G$  such that  $\forall i d_i = \deg^-(v_i)$  in  $\vec{G}$ . Then

$$[x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}] P_{\vec{G}} = \sum_{\vec{H} \text{ Eulerian subgraph of } \vec{G}} (-1)^{|E(\vec{H})|}$$

which is also equivalent to the **number of Eulerian paths of  $\vec{G}$  with even number of edges minus number of Eulerian paths of  $\vec{G}$  with odd number of edges**.

*Corollary.* Suppose  $\vec{G}$  is an orientation of  $G$  where  $(\forall i) \deg^-(v_i) = d_i$ . Let  $L$  be a list assignment for  $G$  s.t.  $(\forall i) |L(v_i)| > d_i$ . If  $\vec{G}$  has different number of Eulerian subgraphs with even and odd number of edges then it is  $L$ -colorable.

Lets see this result on an example on pictures 18.4. Where the sizes of lists are written in the nodes. We may see there are visualized two Eulerian paths with 3 edges and 4 edges. Also there is an empty Eulerian subgraph. Altogether we have two even subgraphs and one odd, so that means there exists  $L$ -coloring. But this theory only show the existence, not the construction.

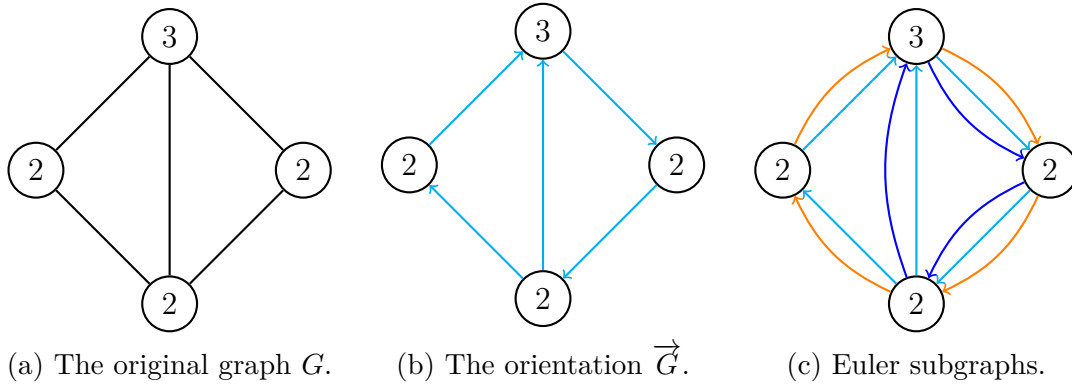


Figure 18.4: Usage of shown corollary for a list assignment.

Now lets take  $G$  a bipartite graph. We may see an observation that every Eulerian subgraph is edge-disjoint union of cycles. Therefore if  $G$  is bipartite, then it has even number of edges in all Eulerian subgraphs.

*Corollary.* If  $G$  is bipartite,  $\vec{G}$  has indegrees  $d_1, \dots, d_n$  then  $G$  is  $L$ -colorable for every list assignments  $L$  s.t.  $(\forall i) |L(v_i)| > d_i$ .

**Observation.** Every planar bipartite graph has an orientation with maximal indegree  $\leq 2$  therefore it has list chromatic number at most 3.

But it does not apply for all bipartite graphs since it is possible to create such bipartite graph such that  $\chi_l$  is arbitrarily large.

# 19. VC - dimension

VC stands for the names Varnik–Cherrenkis. We will be considering a set systems  $\mathcal{F}$ . And then for a set  $X$  we denote  $X \cap \mathcal{F}$  as  $\{X \cap A : A \in \mathcal{F}\}$ .

## 19.1 Set systems

**Definition 32.**  $\mathcal{F}$  *breaks*  $X$  if  $X \cap \mathcal{F} = 2^X$ .

Lets see for ourselves an example, which is on picture 19.1. For  $\mathcal{F}$  we have all half planes in  $\mathbb{R}^2$ . Then the set  $X = \{a, b, c\}$ . Then if we draw all lines and choose both planes it will generate  $X \cap \mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$  which are all subsets of  $X$ . Hence it breaks the  $X$ .

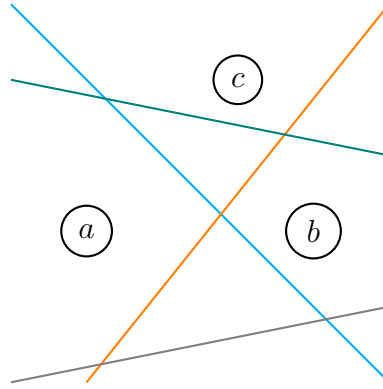


Figure 19.1: Example of  $\mathcal{F}$  and set  $X$  which is broken.

**Definition 33.** We say that  $VC - \dim(\mathcal{F})$  is  $\max\{|X| : \mathcal{F} \text{ breaks } X\}$ .

In our previous example we see that  $VC - \dim(\mathcal{F})$  is at least 3. But we may see that it is exactly 3. Because if we take 4 points they are either all in convex hull thus it is impossible to take the opposite points or one point is in the convex hull of other three of them, for which it is impossible to take only the points forming the convex hull except the middle one. Other example can be  $\mathcal{F}$  as all intervals in  $\mathbb{R}$  for which the  $VC - \dim(\mathcal{F})$  is 2.

All these examples are geometrical ones. Lets see some for graph theory. Lets have  $G$  graph s.t.  $K_n \not\leq_t G$ . Then  $\mathcal{F} = \{N_G[v] : v \in V(G)\}$ . Where the **closed neighborhood** is defined as  $N_G[v] = \{v\} \cup \{u \mid \{u, v\} \in E(G)\}$ . We may see that  $VC - \dim(\mathcal{F}) \leq n - 1$ . For contradiction  $X \subseteq V$  and  $|X| = n$ . For every 2-element subset there is a vertex adjacent to them, this would give me a  $K_n$  as a topological subgraph.

## 19.2 Subsystems

Now we will be considering sub-systems. That is  $\mathcal{F} \subseteq 2^Y$  for some  $Y$ . There will be defined a measurement  $\mu$  on  $Y$ . As an example can be the half-planes but only inside the square of size 1.

**Definition 34.**  $N \subseteq Y$  is an  $\epsilon$ -net if

$$(\forall A \in \mathcal{F}) : \mu(A) \geq \epsilon \mu(Y) \Rightarrow N \cap A \neq \emptyset$$

For an example consider  $\mathcal{F} = \{\text{axis aligned rectangles in } Y\}$  and  $\mu$  be the area of the rectangle. Then the  $\epsilon$ -net must hit all rectangles. We can easily create a grid of points which are  $\epsilon$  apart. This will create  $\frac{1}{\epsilon^2}$  points in net.

**Theorem 21.** There  $\exists c$  s.t. if  $\mathcal{F} \subseteq 2^Y$  has  $VC - \dim(\mathcal{F}) \leq k$  then

$$(\forall \epsilon > 0) \quad c \cdot \frac{k}{\epsilon} \cdot \log\left(\frac{k}{\epsilon}\right)$$

independently at random chosen elements of  $Y$  form an  $\epsilon$ -net with probability  $\geq 1/2$ . This is all with the probability for  $A \subseteq Y$   $\Pr[p \in A] = \frac{\mu(A)}{\mu(Y)}$ .

**Definition 35.**  $\tau(\mathcal{F}) = \min(|Z| : (\forall A \in \mathcal{F}) Z \cap A \neq \emptyset)$ .

As an example we may see that for  $\mathcal{F}$  closed neighborhood in  $G$  the  $\tau(\mathcal{F})$  is for the minimal size of dominating set in the given graph  $G$ . Also we have shown that if  $K_k \not\leq_t G \Rightarrow VC - \dim(\mathcal{F}) \leq k - 1$ .

Now we will introduce an integer program that will be able to solve this problem. Note that we will assume that  $\mathcal{F}$  and  $Y$  are finite. Otherwise it would not make any sense.

$$\begin{aligned} \min \sum_v x_v \\ \forall v \in Y : x_v \in \{0,1\} \\ \forall F \in \mathcal{F} : \sum_{v \in F} x_v \geq 1 \end{aligned}$$

This problem will output such  $X = \{x_v \mid v \in Y : x_v = 1\}$  and  $|X| = \tau(\mathcal{F})$ . We can use this to create an LP relaxation.

$$\begin{aligned} \min \sum_v x_v \\ \forall v \in Y : x_v \geq 0 \\ \forall F \in \mathcal{F} : \sum_{v \in F} x_v \geq 1 \end{aligned}$$

We will denote this fraction optimum as  $\tau^*(\mathcal{F})$ . Easily seen it is  $\leq \tau(\mathcal{F})$ . And it is also solvable in polynomial time, due to the properties of linear programs. Now consider  $\mathcal{F}$  which has  $VC - \dim(\mathcal{F}) \leq k$ . We then have  $x_v : v \in Y$  from the optimal solution of LP. Lets put the measurement for all  $A \subseteq Y : \mu(A) = \sum_{v \in A} x_v$ . By the given solution we have that  $F \in \mathcal{F} : \mu(F) \geq 1$ . Also  $\mu(Y) = \tau^*(\mathcal{F})$ . Let  $N$  be an  $\epsilon$ -net for  $\epsilon = 1/\tau^*(\mathcal{F})$ . That is because  $N \cap F \neq \emptyset$  for all  $F \in \mathcal{F}$  s.t.  $\mu(F) \geq \epsilon \mu(Y) = 1$ . Therefore

$$\tau(\mathcal{F}) \leq |N| = \Theta(k\tau^*(\mathcal{F}) \log(k\tau^*(\mathcal{F})))$$

so it is  $(k \log(k\tau^*(\mathcal{F})))$ -approximation.

## 20. Edge disjoint spanning trees

We will be trying to take a look at a problem of finding many edge disjoint spanning trees like on picture 20.1. Note that this may be used in a technical problems like packet routing in a computer network. Since it can be done by finding a spanning tree and then path between two vertices is uniquely determined. But what if some edge breaks and it is not operating. Then you may choose another spanning tree.

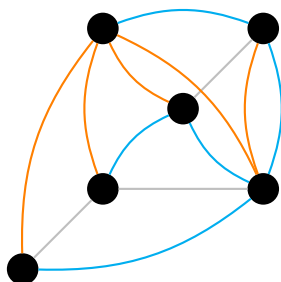


Figure 20.1: Example of two pairwise edge-disjoint spanning trees.

The terminology will be for a graph  $G = (V, E)$ . And the question is: Does  $G$  have  $k$  pairwise edge-disjoint spanning trees? Easily observable then if it happens than the graph  $G$  is  $k$ -edge-connected. But does the other implication work? Well as it can be shown on picture 20.2 no. But there is someway similiar result.

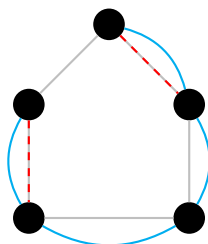


Figure 20.2: Simple cycle for a counterexample. It is 2-edge-connected, but only 1 pairwise edge-disjoint spanning tree can be found. There is an example of a **edge-cut** and a **spanning tree**.

**Theorem 22.** *If  $G$  is  $2k$ -edge-connected then  $G$  has  $k$  pairwise edge-disjoint spanning trees.*

This is similiar with what we have said before, only it is multiplied by 2. We will prove this by another theorem, which will be shown later on.

### 20.1 Necessary condition

Let  $G$  be a graph with  $k$  spanning trees. Then denote  $\mathcal{P}$  as any division of vertices  $V(G)$ . That is  $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = V(G)$  and for two sets  $P \neq Q \in \mathcal{P}$  it holds that  $P \cap Q = \emptyset$ . Then we will contract these sets into one vertex and then for every spanning tree there must remain  $|\mathcal{P}| - 1$  number of edges. So lets denote  $e(\mathcal{P})$  as the number of edges of  $G$  with ends in different parts of  $\mathcal{P}$ .



Now to observe that if  $G$  has  $k$  pairwise edge-disjoint spanning trees then for every  $\mathcal{P}$  partition of  $V(G)$  it holds that  $e(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$ . This may be easily seen, but what about the second implication. There exists a Nash-Williams theorem which states exactly that. And we will be showing that.

**Observation.** *If  $G$  is  $2k$ -edge-connected graph and then  $G/\mathcal{P}$  is also  $2k$ -edge-connected then the minimal degree  $\delta(G/\mathcal{P}) \geq 2k$  which implies that*

$$e(\mathcal{P}) = |E(G/\mathcal{P})| \geq \frac{1}{2} \cdot |\mathcal{P}| \cdot 2k = k \cdot |\mathcal{P}| > k(|\mathcal{P}| - 1)$$

Where notation  $G/\mathcal{P}$  is for contracting the partitions. Also we may see that this proves the former theorem. Now we will state and prove the theorem.

**Theorem 23.** *( $\forall \mathcal{P} : \text{partition of } V(G)) \ e(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$  then there is  $k$  pairwise edge-disjoint spanning trees.*

## 20.2 Jungle and forests

**Definition 36.** *Spanning forest is a set of edges that cover all vertices and is a forest.*

**Definition 37.** *Jungle is a set of  $k$  pairwise edge-disjoint spanning forests.*

**Definition 38.** *For two jungles  $J, J'$  in a graph  $G$  and a subgraph  $A \subseteq G$  we define a relation  $J \cong_A J'$  if*

1.  $(\forall i) \ E(F_i) \setminus E(A) = E(F'_i) \setminus E(A)$  and
2. components of  $F_i \cap A$  must be the same as in  $F'_i \cap A$ .

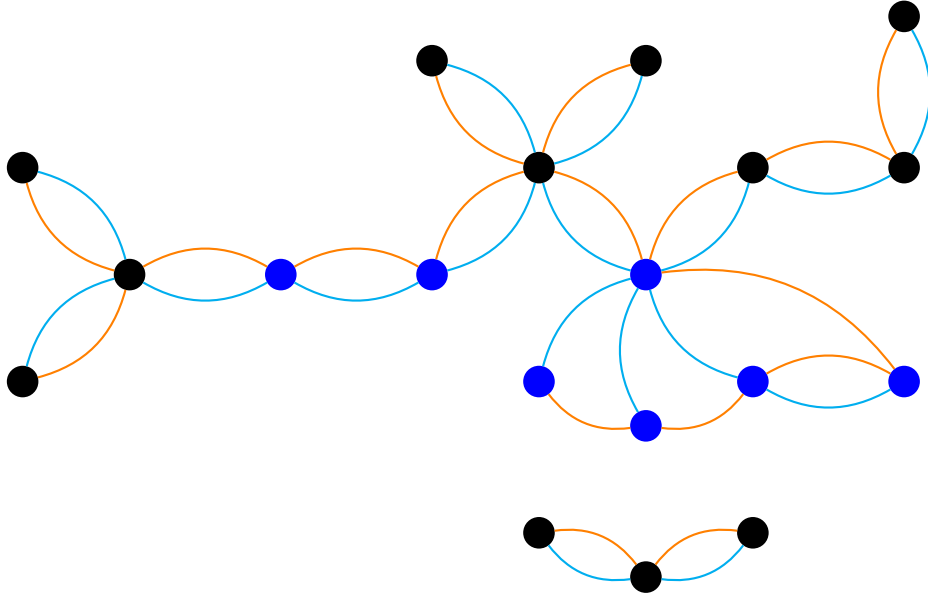


Figure 20.3: Example of two jungles, where first  $J$  and second  $J'$  are  $J \cong_A J'$  for vertices in  $A$ .

**Definition 39.** For a graph  $G$ , subgraph  $A \subseteq G$  and a jungle  $J$ .  $A$  is  $J$ -free if  $(\forall e \in E(A))$  there exists a jungle  $J' \cong_A J$  such that  $e \notin E(\cup J')$ .

*Proof of theorem.* Lets take a jungle  $J = (F_1, F_2, \dots, F_k)$  in  $G$  with  $|E(\cup J)|$  largest possible. Before we continue we state a lemma.

**Lemma 95.**  $\exists H \subseteq G$  connected such that  $|V(H)| \geq 2$  and  $(\forall i) H \cap F_i$  is connected (where  $F_i$  is taken from jungle  $J$ ).

*Proof of lemma.* We will take  $A \subseteq G$  and two jungles  $J = (F_1, \dots, F_k)$ ,  $J' = (F'_1, \dots, F'_k)$  in  $G$ . Let us choose  $H \subseteq G$  connected which is  $J$ -free and maximal. We take  $\mathcal{P}$  that  $|\mathcal{P}| = |V(G)|$  and  $e(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$  and  $|E(G)| \geq k(|V(G)| - 1)$ . If  $E(\cup J) = E(G)$  then  $J$  consists of  $k$ -spanning trees. And we are done.

So suppose  $\exists e_o \in E(G) \setminus E(\cup J)$  then there exists  $H$  with only this edge. Now suppose there is some  $F_i$  which is not connected in  $H$ . Which means there is some edge  $e$  disconnecting these graphs. Now we have two options.

- (a)  $e$  joins different components of  $F_i$  because  $H$  is  $J$ -free  $J' \cong_H J$ ,  $e \notin E(\cup J')$  we create  $J' + e$  and then we are getting a larger jungle which is a contradiction.
- (b) There exists path  $P$  in  $F_i$  joining ends of  $e$ . Therefore  $H \cup P$  is  $J$ -free. Simple we delete one edge from the outer path and add  $e$  which is also a contradiction.

□

We can now continue by induction on the number of vertices  $|V(G)|$ . Lets take such  $H$  from the lemma and  $G/V(H)$ . By the induction hypothesis  $G/V(H)$  has  $k$  pairwise edge-disjoint spanning trees  $T_1, T_2, \dots, T_k$ . Lets take  $T'_i := T_i$  with  $H$  replaced is a spanning tree in  $G$  by  $F_i \cap H$  so  $T_i$  for all  $i \in [k]$  are  $k$  pairwise edge-disjoint spanning trees.

□

# 21. Regularity of graphs

As one can already meet the random graphs which are denoted as  $G = (n, p)$  where we have  $n$  vertices and every edge between each pair of a vertices is there with a probability  $p$ . This notation is usually used for proving some properties that graphs tend to have for more vertices.

Example could be computing the number of triangles in the graph. To be exact we want to compute the expected number, so  $E[\text{number of triangle}] = p^3 \binom{n}{3}$ . And also then we may use Chernoff's bound to get that  $\Pr[|\text{number of triangles} - p^3 \binom{n}{3}| > \epsilon n^3] = e^{-\Theta(n^3)}$ . In other words the probability that the number being way different is small.

In the next example and for further reading we will denote  $e(A, B)$  as the number of edges between two subset of vertices  $A, B \subseteq V$ . In the probability case it is somewhat similar to  $p \cdot |A| \cdot |B|$ . Which leads to the fact that

$$\Pr[|e(A, B) - p \cdot |A| \cdot |B|| \geq \epsilon \cdot |A| \cdot |B|] < e^{-\Theta(|A||B|)}.$$

If we would take  $A, B$  such that  $|A|, |B| \geq \delta n$  then there may be  $\leq 4^n$  number of subsets.

Well the real graphs we may encounter do not have this nice property. So we will build a theory around that in fact it is not that bad and can be somewhat similar to the probability case.

## 21.1 Regular pairs

**Definition 40.** Lets denote  $d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A| \cdot |B|}$  or so called **density** of a graph. Sometimes we will denote  $d(A, B)$  as  $p$ , because it will behave somewhat similarly as the probability.

**Definition 41.** For some  $\delta, \epsilon > 0$ . Let  $A, B \subseteq V$  for some graph  $G = (V, E)$ . Then we say that  $(A, B)$  is  $(\delta, \epsilon)$ -**regular pair** if following holds

$$\forall A' \subseteq A : |A'| \geq \delta |A|, \forall B' \subseteq B : |B'| \geq \delta |B| : |d(A'B') - d(A, B)| \leq \epsilon.$$

Sometimes we will shorten the notation to just  $\epsilon$ -regular pair. For  $\delta = \epsilon$ .

Now we will look at how many neighbors can be for some  $v \in A$ . To be exact we will denote  $B_0$  the neighbors and we want to count these vertices for which  $|B_0| \geq \delta |B|$ . But we may see there are some degenerate vertices, but we will show it is not that many.

**Lemma 96.** The number of vertices in  $A$  such that  $\deg_{B_0} v > (p + \epsilon |B_0|)$  is at most  $\delta |A|$ . And also the number of vertices in  $A$  such that  $\deg_{B_0} v < (p - \epsilon |B_0|)$  is at most  $\delta |A|$ . And also vice versa for  $B$ .

*Proof.* For contradiction denote  $A_0$  as all such vertices in  $A$  which have low number of neighbors. For the contradiction suppose  $|A_0| \geq \delta |A|$ . This result in the following.

$$\begin{aligned}
|d(A_0, B_0) - p| &\leq \epsilon \\
&= \left| \frac{e(A_0, B_0)}{|A_0||B_0|} - p \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{v \in A_0} \deg_{B_0}(v)}{|A_0||B_0|} - p \right| \\
&= \left| \frac{|A_0| \cdot (p + \epsilon|B_0|)}{|A_0||B_0|} - p \right| \\
&= \frac{|A_0| \cdot (p + \epsilon|B_0|)}{|A_0||B_0|} - p = \epsilon
\end{aligned}$$

Which is a contradiction.  $\square$

Now we will denote  $q(A, B)$  as the number of vertices  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  forming a 4-cycle and  $v_1 \neq v_3 \in A$  and  $v_2 \neq v_4 \in B$ . In the probability case we see that

$$\mathbb{E}[q(A, B)] = p^4 \binom{|A|}{2} \binom{|B|}{2} \cdot 4 \approx p^4 |A|^2 |B|^2 - O(n^3)$$

One can be confused by the 4 in there. That is because the way we defined it we count every 4-cycle four times.

**Lemma 97.** *For a graph  $G$  and  $A, B \subseteq V$  as an  $(A, B)$   $\epsilon$ -regular pair and  $|A| = |B| = n$  we have following inequalities.*

$$(p^4 - 6\epsilon)n^4 - 2n^3 \leq q(A, B) \leq (p^4 + 16\epsilon)n^4$$

The exact constants are not that necessary, so they are picked somewhat randomly. We will prove only the lower bound. The other one is similiar.

*Proof.* Lets put  $A_0 = \{v \in A : \deg_B v < (p - \epsilon)n\}$ . Which by the lemma we get  $|A_0| \leq \epsilon n$ . Now lets take  $v_1 \in A \setminus A_0$ . Now lets consider such  $B_{v_1}$  (neighbors of  $v_1$ ) for which  $|B_{v_1}| \geq (p - \epsilon)n$ . WLOG we may assume it is  $\geq \epsilon n$ , otherwise the lower bound is negative. Denote  $A_{v_1} = \{v \in A : \deg_{B_{v_1}} v < (p - \epsilon)|B_{v_1}|\}$ . Also by the lemma  $|A_{v_1}| \leq \epsilon n$ . Now we choose  $v_3 \in A \setminus A_{v_1}$ .

Now we may say that the number of 4-cycles is  $\geq (1 - \epsilon)n(1 - \epsilon)n((p - \epsilon)|B_{v_1}|)62 - 2n^3$ . Where the first  $(1 - \epsilon)n$  is for  $v_1$  and the second for  $v_3$ , we multiply it by the choices from  $B$  and subtract all wrong choices (choosing the same vertex more than once). Now this can be calculated.

$$\begin{aligned}
\text{number of 4-cycles} &= (1 - \epsilon)^2(p - \epsilon)^4 n^4 - 2n^3 \\
&\geq (1 - 2\epsilon)(p^4 - 4\epsilon)n^4 - 2n^3 \\
&\geq (p^4 - 6\epsilon)n^4 - 2n^3
\end{aligned}$$

$\square$

Now we will try to use this even more for computing the number of triangles from  $A, B, C$  which are all  $\epsilon$ -regular pairs. Also denote the number as  $t(A, B, C)$  then the densities will be denoted as  $p_{AB}, p_{BC}, p_{AC}$ . Also we are interested only in those triangles  $v_1, v_2, v_3$  where  $v_1 \in A, v_2 \in B, v_3 \in C$ . In the random graph it would be  $p_{AB}p_{BC}p_{AC}n^3$ . But we will show it is also similiar with regular pairs.

**Lemma 98.** For  $\epsilon$ -regular pairs  $(A,B), (B,C), (A,C)$  which are the same size  $|A| = |B| = |C| = n$  where the densities  $d(X,Y)$  are denoted by  $p_{XY}$  (as before). The following bounds hold.

$$p_{AB}p_{BC}p_{AC}n^3 - 10\epsilon n^3 \leq t(A,B,C) \leq p_{AB}p_{BC}p_{AC}n^3 + 10\epsilon n^3$$

*Proof.* Now we will show us the upper bound. Lets consider these sets:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{v \in A : \deg_B v \geq (p_{AB} + \epsilon)n\} & |A_1| &\leq \epsilon n \\ A_2 &= \{v \in A : \deg_C v \geq (p_{AC} + \epsilon)n\} & |A_2| &\leq \epsilon n \end{aligned}$$

Now we consider three separate cases for which set is used for the  $v_1 \in A$ .

- (i)  $v_1 \in A_1$  then  $\epsilon|A_1|n^2 \leq \epsilon n^3$ .
- (ii)  $v_1 \in A_2$  similarly  $\epsilon|A_2|n^2 \leq \epsilon n^3$ .
- (iii) Last case is if  $v_1 \in A \setminus (A_1 \cup A_2)$ . We denote as  $B_{v_1}$  and  $C_{v_1}$  the neighbors of  $v_1$  in  $B$  and  $C$  respectively. By the definition  $|B_{v_1}| \leq (p_{AB} + \epsilon)n$  and  $|C_{v_1}| \leq (p_{AC} + \epsilon)n$ . Therefore altogether  $e(B_{v_1}, C_{v_1}) \leq (p_{BC} + \epsilon) \cdot |B_{v_1}| \cdot |C_{v_1}| \leq (p_{AB}p_{BC}p_{AC} + 7\epsilon)n^2$ . So we may have at most  $\epsilon n^2$  choices for  $B_{v_1}$  and  $C_{v_1}$ .

If we sum it all then the  $t(A,B,C) \leq 2\epsilon n^3 + n(\epsilon n^2 + \epsilon n^2 + (p + 7\epsilon)n^2) = (p + 9\epsilon)n^3$ .  $\square$

Now with all of that we would like to see if we are able to partition the vertices of graph  $G$  into such sets which are  $\epsilon$ -regular. At least we would like to try bounding the number of partitions for some  $m$  and larger  $M_\epsilon$  which will be bounded to  $\epsilon$ . Well we may see that it won't work this way, like for the graph known as **Half graph** which is shown in the picture 21.1.

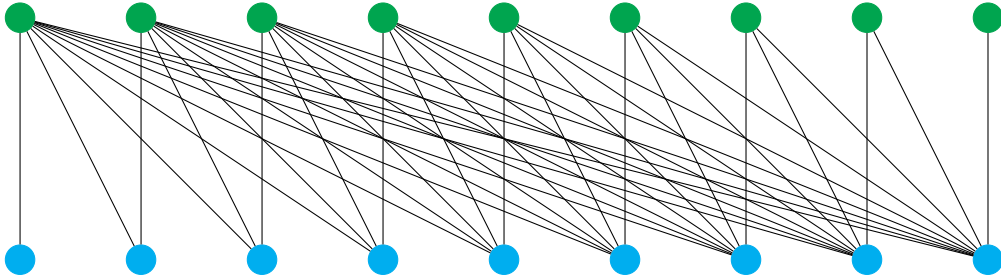


Figure 21.1: Counterexample of a graph  $G$  as a half graph with 18 vertices.

## 21.2 Regular partition

**Definition 42.** We will denote  $\epsilon$ -regular partition of graph  $G$  with  $n = |V(G)|$  such disjoint parts  $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  of  $V(G)$  for which all properties are satisfied.

1.  $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_m|$ ,
2.  $|A_0| \leq \epsilon n$  and
3. for  $1 \leq i \leq j \leq m$ ,  $(A_i, A_j)$  are  $\epsilon$ -regular with at most  $\leq \epsilon m^2$  exceptions.

Also  $m$  is the **order** of partition  $\mathcal{P}$ .

**Theorem 24** (Szemerédi, Regularity lemma (RL)).  $\forall \epsilon > 0, \forall m_0 \geq 1$  there exists  $M$  such that  $\forall G : |V(G)| \geq m_0$  there exists  $\epsilon$ -regular partitioning of  $G$   $A_0, \dots, A_m$  that  $m_0 \leq m \leq M$ .

This theorem may actually be useful in some other theoretical results but as we will show us later on the number  $M$  is approximately

$$2^{2^{2^2 \dots^{m_0}}} \quad \text{where there is } \frac{1}{\epsilon^4} \text{ number of twos.}$$

## 21.3 Applications

**Lemma 99** (Removal lemma for triangle).  $(\forall \alpha > 0) (\exists n_0, \beta > 0) (\forall G : |V(G)| = n \geq n_0)$  then either

- $G$  contains  $\beta n^3$  triangles, or
- $(\exists X \subseteq E(G) : |X| \leq \alpha n^2)$  and  $G - X$  is triangle free.

This application and many others may be used for huge graphs that typically cannot fit into RAM or even is way to large to have the data (like a friendship graph for the whole world). Thus we use only sampling for some portion of the data and then we can be somewhat certain of the correctness.

*Proof.* Firstly we will transform  $\alpha$  into  $\epsilon$  and  $m_0$  (which will be  $m_0 = 1/\epsilon$ ). Then we will use regularity lemma to obtain  $M$  and lastly transform this into  $n_0$  and  $\beta$  where  $n_0 = m_0$ .

Given graph  $G$  we use RL which gives us  $\epsilon$ -regular partition  $V_0, \dots, V_m$  for  $m_0 \leq m \leq M$ . Now lets denote

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{all edges incident to vertices in } V_0 \\ X_2 &= \bigcup_{i \in 1, \dots, m} E(G[V_i]) \quad (\text{all edges connected in one part}) \\ X_3 &= \text{edges between } V_i \text{ and } V_j, \text{ where } (V_i, V_j) \text{ is not } \epsilon - \text{regular} \\ X_4 &= \text{edges between } V_i \text{ and } V_j, \text{ where } d(V_i, V_j) \leq p \\ X &= X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \end{aligned}$$

Now lets compute the sizes of all sets.

$$\begin{aligned} |X_1| &\leq |V_0| \cdot n \leq \epsilon n^2 \\ |X_2| &\leq m \left( \frac{n}{m} \right)^2 \leq \frac{n^2}{m} \leq \frac{n^2}{m_0} = \epsilon n^2 \\ |X_3| &\leq \epsilon m^2 \left( \frac{n}{m} \right)^2 \leq \epsilon n^2 \\ |X_4| &\leq m^2 \cdot p \left( \frac{n}{m} \right)^2 = p n^2 \\ |X| &\leq (p + 3\epsilon) n^2 \end{aligned}$$

And we want  $(p + 3\epsilon)n^2$  to be at most  $\alpha n^2$ . Thus  $(p + 3\epsilon)$  to be at most  $\alpha$ . We will consider few cases.

- (a)  $G - X$  is triangle-free, therefore we are done.
- (b)  $G - X$  contains a triangle. None of the vertices are from  $V_0$ . All vertices are from different parts and also all of these parts are  $\epsilon$ -regular with density  $> p$ . This all comes from the definition of  $X$ . And now we may use the triangle lemma stated before. Hence the number of triangles in  $G$  is  $\geq (p^3 - 10\epsilon)t^3$  for  $t$  as a number of vertices in those parts.

$$t = \frac{n - |V_0|}{m} \geq \frac{(1 - \epsilon)n}{m} \geq \frac{(1 - \epsilon)n}{M}$$

So the number of triangles is

$$\geq (p^3 - 10\epsilon) \left( \frac{1 - \epsilon}{M} \right)^3 n^3$$

Therefore  $\beta = (p^3 - 10\epsilon) \left( \frac{1 - \epsilon}{M} \right)^3$ . Because  $\beta$  has to be positive so  $p \geq \sqrt[3]{10\epsilon}$  so we put  $p = \sqrt[3]{11\epsilon}$ . We need to choose  $\epsilon$  so that  $\sqrt[3]{11\epsilon} + 3\epsilon = p + 3\epsilon \leq \alpha$ .

□

**Lemma 100.** *Let  $H$  be a graph with  $\chi(G) = k$  and  $(\forall p > 0) (\exists \epsilon > 0, n_1)$  such that if in  $G$  there are disjoint sets  $V_1, \dots, V_k$  s.t.*

1.  $|V_1| = \dots = |V_k| = n$
2.  $\forall 1 \leq i < j \leq k$   $(V_i, V_j)$  is an  $\epsilon$ -regular and  $d(V_i, V_j) \geq p$

*then  $H \subseteq G$ .*

*Proof.* Actually this proof is fairly similiar to the one before. We may divide the vertices to sets with the same color. Then we fix some vertices in  $G$  for a color in the same part. After that we must choose huge subsets of other parts and fix other vertices from these. Because they are  $\epsilon$ -regular such subsets exists. Further proof is left as an exercise. □

**Theorem 25** (Túrán). *For a graph  $G$  which has  $|V(G)| = n$  and  $|E(G)| > \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$  then  $K_k \subseteq G$ .*

This won't be proven since it is more of a reminder. Also note that this is tight since we can create a graph with this many vertices and edges which does not contain  $K_k$ . That is the Túrán's graph. Now we can ask ourselves a question. If we have a graph  $H$  what is the maximum number of edges of an  $n$ -vertex graph that does not contain  $H$  as a subgraph. This is typical problem for extremal theory, so we can denote this number as a function  $f_H(n)$ .

**Theorem 26** (Erdos-Stone). *Suppose  $k = \chi(H) \geq 2$  then  $(\forall \beta > 0) (\exists n_0)$  if  $|V(G)| = n \geq n_0$  and  $|E(G)| \geq \left(1 - \frac{1}{k-1} + \beta\right) \frac{n^2}{2}$ , then  $H \subseteq G$ .*

This theorem actually somewhat answers our question. Because  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_H(n)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{k-1}$ . But this does not actually work that well for bipartite graphs, because the content in the parentheses goes to 0. So it gives only rough estimate.

*Proof.* Similarly as before we will from  $\beta$  get to  $p = \beta/8$  and by the use of lemma for subgraph  $H$  we get  $0 < \epsilon < p$  and  $n_1$ . Lets put  $m_0 = 1/\epsilon$  and use RL to get  $M$  and then  $n_0 = \max\left(m_0, \frac{M}{1-\epsilon}n_1\right)$ .

For given graph  $G$  create partition  $V_0, V_1, \dots, V_m$  for  $m_0 \leq m \leq M$  by the RL. We define  $X_1, X_2, X_3, X_4$  and  $X$  as before. So

$$|X| \leq (p + 3\epsilon)n^2 < 4pn^2 = \frac{\beta}{2}n^2$$

Therefore we may compute the size of edges as:

$$|E(G - X)| > |E(G)| - \beta \frac{n^2}{2} \geq \left(1 - \frac{1}{k-1} + \beta\right) \frac{n^2}{2} - \beta \frac{n^2}{2} \geq \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

Lets define an auxiliary graph  $F$ . Which has  $V(F) = \{1, \dots, m\}$  and  $ij \in E(F)$  iff  $(V_i, V_j)$  is an  $\epsilon$ -regular pair of density  $\geq p$  iff  $G - X$  has an edge between  $V_i$  and  $V_j$ .

$$\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2} < |E(G - X)| \leq |E(F)| \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

Hence altogether  $|E(F)| > \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{m^2}{2}$  and by Túrán  $K_k \subseteq F$  and therefore  $k$  parts are  $\epsilon$ -regular. Each part has  $\frac{n(1-\epsilon)}{m} \geq \frac{n(1-\epsilon)}{M} \geq n_1$  so by the lemma mentioned before we get that  $H \subseteq G$ .  $\square$

### 21.3.1 Arithmetic Ramsey theory

Firstly we will show a theorem that one could already encounter.

**Theorem 27** (Van der Warden).  $(\forall c)(\forall l)\forall \text{ coloring } \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, c\} \text{ there exists } k \in \{1, \dots, c\}, a, d > 0 \text{ such that } \varphi(a) = \varphi(a + d) = \dots = \varphi(a + d(l - 1)).$

This is called a arithmetic progression or AP for short. Now the question may be if we could somewhat limit it and not use all numbers from  $\mathbb{N}$ . In particular if it is true that  $(\forall c \geq 1)(\forall l)(\exists N_0)(\forall N \geq N_0)(\forall B \subseteq \{1, \dots, N\} : |B| \geq \frac{N}{c})(\exists a, d > 0)$  such that  $a, a + d, \dots, a + d(l - 1) \in B$ .

Actually Róth showed that it is indeed true for  $l = 3$  and later on also Szemerédi showed that it holds for arbitrary  $l$ . Now we will show us the Róth theorem.

**Definition 43.** Given  $A \subseteq \{1, \dots, N\}^2$  the **corner** in  $A$  is a triplet  $(x, y), (x + d, y), (x, y + d) \in A$  for  $d \neq 0$ .

**Lemma 101** (Corner lemma).  $(\forall \delta > 0)(\exists N_1)(\forall N \geq N_1)(\forall A \subseteq \{1, \dots, N\}^2) \text{ if } |A| \geq \delta N^2, \text{ then } A \text{ contains a corner.}$

*Proof.* That is we obtain  $\delta$  and by setting  $\alpha = \delta/40$  we may use the triangle removal lemma and get  $n_0, \beta$ . After that we would get our  $N_1$ . (This will be  $N_1 = \max\{\frac{n_0}{6}, \frac{1}{\beta}\}$ .)

Firstly we will create 3-partite graph. Three parts will be  $X, Y$  and  $Z$ . Now we define when there are edges.

- $x \in X, y \in Y$  forms an edge  $xy$  if  $(x, y) \in A$ ,
- $x \in X, z \in Z$  forms an edge  $xz$  if  $(x, z - x) \in A$  and



- $z \in Z, y \in Y$  forms an edge  $zy$  if  $(z - y, y) \in A$ .

One can already see that the triangles in this graph corresponds to corners. That is for a triplet  $(x, y), (x, y + d), (x + d, y) \in A$  then  $x, y, z = x + y + d$  forms a triangle. And the other way we have  $xyz$  triangle. Then  $(x, y), (x, y + d), (x + d, y) \in A$  for  $d = z - x - y$ .

Now we can observe that  $\forall (x, y) \in A, x, y, x + y$  is also a triangle and we will call these the **bad** triangles. We may see that  $\delta N^2 \leq$  the number of bad triangles  $= |A| \leq N^2$ . Now we have two cases by the removing triangles lemma.

1. Either there is  $\geq \beta(6N)^3$  triangles and we need to show that this is  $> N^2 \geq$  bad triangles. So  $216\beta N > 1$  that is for the choice of  $N_1$  previously mentioned.
2. Or there  $\exists X \in E : X \leq \alpha(6N)^2$  intersecting all triangles.  $X = \frac{36}{40}\delta N^2$ , but we may see because of the estimate on the number of bad triangles and also by the observation that bad triangles are edge-disjoint that  $X$  is not possible.

□

**Theorem 28** (Róth).  $(\forall c \geq 1)(\exists N_0)(\forall N \geq N_0)(\forall B \subseteq \{1, \dots, N\})$  if  $|B| \geq \frac{N}{c}$ , then  $B$  contains 3-AP.

*Proof.* The scheme is: we obtain  $c$  and create  $\delta$  with which we use the corner lemma and get  $N_1$  and create  $N_0$  from it.

Let  $A = \{(x, y) : y - x \in B\}$  and  $x, y \in \{1, \dots, 2N\}$ . So for  $k \in B$  there is  $(1, k + 1), (2, k + 2), \dots, (N, k + N)$ .  $|A| = N \cdot |B| \geq \frac{N^2}{c} - \frac{(2N)^2}{4c}$  so we put  $\delta = \frac{1}{4c}$  and  $N_0 = N_1$ . By the corner lemma  $\exists x, y, d \neq 0$  s.t.  $(x, y), (x, y + d), (x + d, y) \in A$ . Now it means that  $y - x \in B, y - x - d \in B$  and  $y - x + d \in B$  which forms the 3-arithmetic progression. □

Now for arbitrary  $l$  we could rewrite corner lemma for  $l - 1$  dimension case then use hypergraphs with  $l - 1$  tuples and so on. But the thing is that this is not that easy, since the regularity lemma wouldn't be enough. Everything would have to be redefined and proved again.

Now we will show that  $\exists B \subseteq \{0, \dots, N - 1\}$  and  $|B| \geq \frac{N}{16^{\sqrt{\log_e N}}}$  without 3-AP. Firstly we will put  $S \subseteq \mathbb{Z}^n$  without 3-AP. We will set  $d = 2^{n-1}$  and  $N = (2d)^n$  so actually  $S \subseteq \{0, \dots, d - 1\}^n$  then let  $S_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0, \dots, d - 1\}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2 = k\}$  which is a sphere. This does not contain 3-AP. Because if we intersect two points on the sphere then the line does not intersect any other point. We will use this for  $0 \leq k \leq (d - 1)^2 n$  and also  $\exists k : |S_k| \geq \frac{d^n}{(d - 1)^{2n + 1}} \geq \frac{d^n}{d^{2n}} = \frac{d^{n-2}}{n}$  and let's fix such  $k$ . Now we ap  $(x_1, \dots, x_n)$  to the  $f = \sum_{i=1}^n x_i (2d)^{i-1}$ . (Or in other words the number in base  $2d$ .) Let  $B = f(S_k)$ . And also  $0 \leq f \leq (2d)^n - 1 = N - 1$ .  $f$  is injective and  $|B|$  is large enough. If we sum two digits then there will be no carries because we used base  $2d$ . If there would be 3-AP then  $f(x) + f(y) = 2f(z)$  but  $f(x) + f(y) = f(x + y)$  and  $2f(z) = f(2z)$ . And  $x + y = 2z$  would mean there was 3-AP in  $S_k$ , which is a contradiction.

## 21.4 Proof of regularity lemma

To make the proof easier we will slightly change the definition of  $\epsilon$ -regular partition. So that it will be  $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_{m+t}\}$  where we have replaced  $A_0$  by singleton parts. So  $t \leq \epsilon n$  and  $|V_{m+1}| = \dots = |V_{m+t}|$ .

The overall sketch of the proof is that we will create a partition  $\mathcal{P}_0$  and then step by step we will replace the partition by  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  where  $\mathcal{P}_k$  will be  $\epsilon$ -regular. We will also introduce a "quality" function  $q$ .

1. In each iteration, the order of the partition increases at most exponentially.
2.  $(\forall i) q(\mathcal{P}_i) \geq q(\mathcal{P}_{i-1}) + \frac{\epsilon^5}{4} n^2$ .

Therefore  $k \leq \frac{4}{\epsilon^5}$  and ahence  $M = \exp(\exp(\dots \exp(m_0)))$  which is iterated  $k$  times. That is all to the outline of the proof.

**Definition 44.** *The quality function  $q : \text{partition of } V(G) \rightarrow [0, n^2]$  is defined firstly by  $q : A, B \rightarrow [0, n^2]$  for  $A, B \subseteq V(G)$  disjoint subsets.*

$$q(A, B) = |A| \cdot |B| \cdot d^2(A, B) = \frac{e^2(A, B)}{|A| \cdot |B|}$$

Then for partition  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_p\}$  is defined as

$$q(\mathcal{P}) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} q(V_i, V_j).$$

Firstly we will show us that if we subdivide the parts or refine them the quality can only rise.

**Lemma 102.** *If  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_s\}$  is a partition of  $A$  and  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_t\}$  is a partition of  $B$ . Then*

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t q(A_i, B_j) \geq q(A, B).$$

*Proof.* For the proof we will use Cauchy-Schwarz inequality. That is  $(\sum_i u_i^2)(\sum_i v_i^2) \geq |\sum_i u_i v_i|$ . Lets define  $u$  and  $v$  and then sum it.

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \sqrt{|A_i| \cdot |B_j|} d(A_i, B_j) \\ v_{ij} &= \sqrt{|A_i| \cdot |B_j|} \\ \sum_{i,j} u_{ij}^2 &= \sum_{i,j} |A_i| \cdot |B_j| d^2(A_i, B_j) = \sum_{i,j} q(A_i, B_j) \\ \sum_{i,j} v_{ij}^2 &= \sum_{i,j} |A_i| \cdot |B_j| = \left( \sum_i |A_i| \right) \left( \sum_j |B_j| \right) = |A| \cdot |B| \\ \sum_{i,j} u_{ij} v_{ij} &= |A_i| \cdot |B_j| d(A_i, B_j) = \sum_{i,j} e(A_i, B_j) = e(A, B) \end{aligned}$$

So with Cauchy Schwarz inequality we get.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} q(A_i, B_j) |A| \cdot |B| &\geq e(A, B)^2 \\ \sum_{i,j} q(A_i, B_j) &\geq \frac{e(A, B)^2}{|A| \cdot |B|} = q(A, B) \end{aligned}$$

□

**Lemma 103.** *If  $\mathcal{P}'$  is a refinement of  $\mathcal{P}$  then  $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P})$ .*

*Proof.* Let  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_m\}$  then subdivision of each part is  $\mathcal{P}' = \mathcal{V}_1 \dot{\cup} \mathcal{V}_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \mathcal{V}_m$ . To be precise  $\mathcal{V}_i$  is a partition of  $V_i$ .

$$\begin{aligned} q(\mathcal{P}') &\geq \sum_{1 \leq i < j \leq m} \sum_{P \in \mathcal{V}_i} \sum_{Q \in \mathcal{V}_j} q(P, Q) \\ &\geq \sum_{1 \leq i < j \leq m} q(V_i, V_j) \quad (\text{by the lemma}) \\ &= q(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

□

**Lemma 104.** *Suppose  $(A, B)$  is not  $\epsilon$ -regular. This means that  $\exists A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B : |A_1| \geq \epsilon|A|, |B_1| \geq \epsilon|B|$  such that  $|d(A_1, B_1) - d(A, B)| \geq \epsilon$ . Lets denote  $A_2 = A \setminus A_1, B_2 = B \setminus B_1$  then*

$$\sum_{i,j=1}^2 q(A_i, B_j) \geq q(A, B) + \epsilon^4 |A| \cdot |B|.$$

*Proof.* Firstly some simplification for  $u \in A_i, v \in B_j$   $d(u, v) = d(A_i, B_j)$  also  $d = d(A, B)$  and  $\delta(u, v) = d(u, v) - d$ . Now we will show us that the sum of deltas is zero.

$$\begin{aligned} d \cdot |A| \cdot |B| &= e(A, B) = \sum_{i,j=1}^2 e(A_i, B_j) = \sum_{i,j=1}^2 d(A_i, B_j) |A_i| \cdot |B_j| \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \sum_{u \in A_i} \sum_{v \in B_j} d(u, v) = \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} d(u, v) \\ &= \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} \delta(u, v) + d = d \cdot |A| \cdot |B| + \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} \delta(u, v) \\ \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} \delta(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

With that and similiar process we will prove the lemma.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 q(A_i, B_j) &= \sum_{i,j=1}^2 |A_i| \cdot |B_j| \cdot d^2(A_i, B_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \sum_{u \in A_i} \sum_{v \in B_j} d^2(u, v) \\ &= \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} d^2(u, v) \\ &= \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} (d + \delta(u, v))^2 \\ &= \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} (d^2 + 2d\delta(u, v) + \delta^2(u, v)) \\ &= |A| \cdot |B| \cdot d^2 + 2d \sum_{u \in A, v \in B} \delta(u, v) + \sum_{u \in A, v \in B} \delta^2(u, v) \\ &\geq q(A, B) + 0 + \sum_{u \in A_1, v \in B_1} \delta^2(u, v) \end{aligned}$$

Now because  $|d(A_1, B_1) - d(A, B)| > \epsilon$  and  $\delta^2(u, v) > \epsilon^2$  we get that

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^2 q(A_i, B_j) &> q(A, B) + \epsilon^2 |A_1| \cdot |B_1| \\
&\geq q(A, B) + \epsilon^4 |A| \cdot |B|
\end{aligned}$$

□

Now suppose  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_s, V_{s+1}, \dots, V_{s+t}\}$  where  $V_{s+1}, \dots, V_{s+t}$  are singletons. Suppose it is not  $\epsilon$ -regular and  $N = |V_1| = \dots = |V_s|$  and also  $t \leq \epsilon n$ . So let's denote  $X = \{(i, j) : i < j \leq s, (V_i, V_j) \text{ is not } \epsilon\text{-regular}\}$ . It means that  $|X| \geq \epsilon s^2$ . Look at  $(i, j)$  if it is not  $\epsilon$ -regular then we can use the very last lemma and get four parts which we will denote  $V_{ij1}, V_{ij2}$  and  $V_{ji1}, V_{ji2}$ . We get that  $\sum_{a,b=1}^2 q(V_{ija}, V_{jib}) > q(V_i, V_j) + \epsilon^4 N^2$ . This will be for all pairs. These partitions will be denoted as  $\mathcal{P}_{ij}$ .

Altogether we will create new partitions by these refinements and putting it together with  $\mathcal{P}$ . So formally  $\mathcal{P}'$  will be common subdivision of  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{P}_{ij}$  for  $(i, j) \in X$ .

Now the number of non-singleton parts in  $\mathcal{P}'$  is at most  $s2^s$  since we split up to  $s$  parts and each one  $2^s$  times (doubling every time). Now we can compute the following.

$$q(\mathcal{P}') \geq \sum_{1 \leq i < j \leq s+t} \sum_{P \text{ subpart of } V_i} \sum_{Q \text{ subpart of } V_j} q(P, Q)$$

Now the part  $\sum_{P \text{ subpart of } V_i} \sum_{Q \text{ subpart of } V_j} q(P, Q)$  is either  $\geq q(V_i, V_j)$  by the first lemma or if  $(i, j) \in X$  then  $\geq q(V_i, V_j) + \epsilon^4 N^2$  by the first and last lemma. Therefore we may continue in the computation.

$$\begin{aligned}
q(\mathcal{P}') &\geq \sum_{1 \leq i < j \leq s+t} \sum_{P \text{ subpart of } V_i} \sum_{Q \text{ subpart of } V_j} q(P, Q) \\
&\geq \sum_{1 \leq i < j \leq s+t} q(V_i, V_j) + |X| \epsilon^4 N^2 \\
&\geq q(\mathcal{P}) + \epsilon^5 (sN)^2 \\
&\geq q(\mathcal{P}) + \epsilon^5 ((1 - \epsilon)n)^2 \\
&\geq q(\mathcal{P}) + \epsilon^5 (n/2)^2 \\
&\geq q(\mathcal{P}) + \frac{\epsilon^5}{4} n^2
\end{aligned}$$

Which is the increase of quality we were aiming for. Therefore we will repeat this process. But we are not guaranteed to have same-sized parts. Thus we transform  $\mathcal{P}'$  and we will try to round it to  $N' = \left\lceil \frac{N}{4^2} \right\rceil$ . We will greedily split those parts to obtain  $N'$  parts. All the leftovers will proceed to be as singletons. Hence we obtain  $\mathcal{P}''$ .

- Non-singleton parts have size  $N'$ .
- $q(\mathcal{P}'') \geq q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P}) + \frac{\epsilon^5 n^2}{4}$ .
- Number of non-singleton parts is at most  $\frac{Ns}{N/4^s} = s4^s$ .
- Number of new singleton parts is at most  $s2^s(N' - 1) \leq s2^s \frac{N}{4^s} = s \frac{N}{2^s} \leq \frac{n}{2^s}$  for large  $s$  it is small.
- Number of non-singleton parts is at least  $S_0/2$ .

Lastly we need to set up the parameters.

$$s_0 := \max \left( 2m_0, \left\lceil 2 \log_2 \frac{8}{\epsilon^6} \right\rceil \right)$$

$$M := \max \left( \left\lceil \frac{2}{\epsilon} s_0 \right\rceil, f(f(f(\dots f(s_0)))) \right) \quad (\text{repeated } \lceil 4/\epsilon^5 \rceil \text{ times})$$

Lastly it is necessary to show that it actually works and that there is not too many of singletons. The exact details are omitted.