Teorie množin

Tomáš Turek

Poznámka: Následující text jsou moje osobní zápisky z Teorie množin z roku 2021-2022. V textu se můžou vyskytovat jak gramatické chyby, tak i technicé chyby (jako ne zcela správný důkaz apod.), tím pádem berte text jako doplňek přednášky.

Přednáška 1

Jazyk teorie množin

- Jazyk teorie $x \in Y$.
- Také se bude používat *metajazyk* jako například: "definovat", "formule" a "třída".

Symboly

- Proměnné pro množiny $X, Y, Z, x_1, x_2, \ldots$.
- Binární predikátový (relační) symbol $=$ a taky $\in$ (náležení).
- Dále také logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow$ $(\Leftarrow, \Rightarrow)$.
- Také kvantifikátory: $\forall$ a $\exists$.
- Samozřejmě i závorky $()$, $[]$.

Formule

- Atomické formule $x = y$ a $x \in y$.

1. Jsou-li φ, ψ formule, pak $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ jsou také formule (popřípadě i uzávorkované).
2. Je-li φ formule, pak $(\forall x)\varphi$ a $(\exists x)\varphi$ jsou také formule.

- Každá formule pak lze dostat z atomických formulí konečně mnoha pravidly 1 a 2.

Rozšíření jazyka (zkratky)

- $x \neq y$ je pro $\neg(x = y)$.
- $x \notin y$ je pro $\neg(x \in y)$.

- $x \subseteq y$ je pro "x je podmnožina y" $(\forall u)(u \in x \to u \in y)$.
- $x \subset y$ je pro "x je vlastní podmnožina" $(x \subseteq y \wedge x \neq y)$.

Cvičeni

Napište formulí "množina x je prázdná".

Axiomy logiky ("jak se chovají logické symboly")

- Axiomy výrokové logiky např.: schéma axiomů: Jsou-li φ, ψ formule, pak

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$

- je **axiom**.
- Axiomy predikátové logiky např.: Schéma axiomů: Jsou-li φ, ψ formule, x proměnná, která není volná ve φ, pak

$$(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$$

- je axiom.
- Axiomy pro rovnost:
  - x je proměnná, pak $x = x$ je axiom.
  - x, y, z jsou proměnné, R je relační symbol, pak

$$(x = y) \to (\forall z)(R(x, z) \leftrightarrow R(y, z))$$

$$(x = y) \to (\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z)$$

$$(x = y) \to (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

- Odvozovací pravidla:
  - Z $\varphi, \varphi \to \psi$ odvoď ψ.
  - Z φ' odvoď $(\forall x)\varphi$.

Axiomy teorie množin

"Jak se chová $\in$." "Jaké množiny existují."

- *Zermelo-Fraenkelova teorie*, zkráceně **ZF** má celkem 9 axiomů (resp. 7 axiomů a 2 schémata).
- Pak je ještě 10.axiom výběru (**AC**) to pak je *ZF+AC=***ZFC**.

1.Axiom existence množin

- "Existuje množina."

$$(\forall x)(x = x)$$

2.Axiom extenzionality

- Udává souvislost mezi $\in$ a $=$.
- "Množina je určena svými prvky."

$$(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$$

Cvičeni

Dokažte $((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z)) \rightarrow x \subset z$.

Přednáška 2

3.Schéma axiomu vydělení

Je-li $\varphi(x)$ formule, která neobsahuje volnou proměnnou z. Pak:

$$(\forall a)(\forall x)(\exists z)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x))$$

je axiom.

- "Z množiny a vybereme prvky s vlastností $\varphi(x)$ a ty vytvoří novou množinu z."
- Díky axiomu extenzionality je taková z právě jedna.

Značení:

- $\{x; x \in a \wedge \varphi(x)\}$ je zkrácení.
- $\{x \in a; \varphi(x)\}$ "Množina všech prvků a splňující $\varphi(x)$."

Definice:

- Průnik: $a \cap b$ je $\{x, x \in a \wedge x \in b\}$.
- Rozdíl: $a \setminus b$ je $\{x, x \in a \wedge x \notin b\}$

Cvičení

- *Napište formulí "množina a je jednoprvková".*
- *Dokažte, že množina všech množin neexistuje.*

4.Axiom dvojice

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

- "(Ne)každým dvěma množinám a, b existuje množina z, která má za prvky právě a, b."

Definice:

- $\{a, b\}$ je **neuspořádaná dvojice** množin a, b, jakožto dvouprvková množina s prvky a, b (pokud $a \neq b$).
- $\{a\}$ znamená $\{a, a\}$, nebo-li jednoprvková množina s prvkem a.

Příklad:

Můžeme vytvořit $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$

Cvičení

Dokažte $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$.

Definice:

(a, b) je **uspořádaná dvojice** množin a, b. To je pak množina $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

Poznámka:

Pro $a = b$ *je* $(a, b) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Lemma

$$(x, y) = (u, v) \leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$$

Důkaz:

- $\leftarrow$
  - $\{x\} = \{u\}$ plyne z axiomu extenzionality.
  - $\{x, y\} = \{u, v\}; \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$
- $\rightarrow$
  - $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ to pak znamená, že $\{x\} = \{u\} \vee \{x\} = \{u, v\}$ kde v obou případech $x = u$.
  - $\{u, v\} = \{x\} \vee \{u, v\} = \{x, y\}$ tedy $v = x \vee v = y$
  - Pokud $v = x$ pak z $x = u$ plyne, že $v = u = x$.

$\square$

Definice:

Jsou-li $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ množiny, definujeme **uspořádanou n-tici** $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Následně (a_1) znamená a_1 a je-li definována $(a_1, \ldots, a_k)$ pak $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$ je $((a_1, \ldots, a_k), a_{k+1})$.

Lemma

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) \leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge \ldots a_n = b_n)$$

Důkaz:

- Jako *cvičení.*

5.Axiom sumy (*axiom of the union*)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$$

Definice:

$\bigcup a$ je **suma** množiny a. Tzn "$\{x, (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\}$".

Pozorování

Pokud $a = \{b, c\}$, pak $\bigcup\{b, c\} = \{x, x \in b \vee x \in c\}$.

Definice:

$b \cup c$ je $\bigcup\{b, c\}$ sjednocení množin b, c.

Definice:

Jsou-li $a_1, \ldots a_n$ množiny, definujeme **neuspořádanou n-tici** $\{a_1, \ldots a_n\}$ (n-prvkovou množinu, pokud každé a_i je různé) rekurzivně. Je-li definovaná $\{a_1, \ldots a_k\}$ pro $k \geq 2$, pak $\{a_1, \ldots a_k, a_{k+1}\}$ je $\{a_1, \ldots a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$.

6.Axiom potence (*power set, potenční množina*)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \subseteq a)$$

- "Existuje množina z jejichž prvky jsou právě podmnožiny množiny a."

Definice:

$\mathcal{P}(a)$ je "$\{x; x \subseteq a\}$" potenční množina $[2^a]$ množiny a (potence a).

Příklad:

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *a* $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Cvičení

Co je $\mathcal{P}(\bigcup a)$ a jestli $\bigcup(\mathcal{P}(a)) = a$?

7.Schéma axiomu nahrazení

- "Obraz množiny funkcí je množina." Je-li $\psi(u, v)$ formule, která neobsahuje volné proměnné w, z, pak

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \wedge \psi(u,w)) \rightarrow v = w) \rightarrow (\forall a)(\forall z)(\forall v)(v \in z \leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u,v)))$$

je axiom.

- "Je-li ψ funkce (částečná) určená formulí: $\psi(u, v)$ je $f(u) = v$, pak obrazem a touto funkcí je opět množina (z)."
- Také implikuje schéma vydělení: $\varphi(u) \wedge u = v$.
- Poznámka: *transfinitní rekurze, konstrukce $\omega + \omega$, Zornovo lemma, věta o dobrém uspořádání.*

Přednáška 3

8.Axiom fundovanosti (*foundation, regularity*)

$$(\forall a)(a \neq \emptyset \rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$$

- "Každá množina má prvek, který je s ní disjunktní."

Cvičení

Ukažte, že Axiom fundovanosti zakazuje existenci konečných cyklů relace $\in$. Tedy množiny y takové, že $y \in y$, ale i $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takové, že $y_1 \in y_2 \in \cdots \in y_n \in y_1$.

- Díky axiomu fundovanosti lze všechny množiny vygenerovat z prázdné množiny operacemi $\mathcal{P}, \bigcup$.

Třídy

Definice:

$\varphi(x)$ je formule a $\{x; \varphi(x)\}$ označuje "seskupení" množin, pro které platí $\varphi(x)$.

- Pokud $\varphi(x)$ je tvaru $x \in a \wedge \psi(x)$, pak je to množina (axiom vydělení).
- $\{x; \varphi(x)\}$ je třídový term, soubor které označuje je **třída** určená formulí $\varphi(x)$.
  - "Definovatelný soubor množin."

- Je-li y množina, pak $y = \{x; x \in y \wedge x = x\}$ je třída.
  - Tedy každá množina je i třída.
- **Vlastní třída** je třída, která není množinou.

Rozšíření jazyka:

- Ve formulích na místě volných proměnných připustíme třídové termy.
- Navíc proměnné pro třídy jsou $X, Y, \dots$ (nebude možné je kvantifikovat).

Atomické proměnné

- $x = y, x \in y, x = X, x \in X, X \in x, X = Y, X \in Y$
- Plus ještě výrazy vzniklé nahrazením $\{x, \varphi(x)\}$ za x a $\{y, \varphi(y)\}$ za y.
- Ostatní formule rozšířeného jazyka vznikají pomocí logických spojek $(\neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow)$ a kvantifikací množinových proměnných $((\forall x) \dots (\exists y) \dots)$.
- Formule s třídovými termy bez třídových proměnných označován jako "zkrácený zápis" formule základního jazyka.
- Formule s třídovými proměnnými označované jako "schéma formulí" základního (popř. rozšířeného) jazyka.

Eliminace třídových termů

- x, y, z, X, Y jsou proměnné a $\varphi(x), \psi(x)$ formule základního jazyka. X zastupuje $\{x, \varphi(x)\}$ a Y zastupuje $\{y, \varphi(y)\}$.

1. $z \in X$ zastupuje $z \in \{x, \varphi(x)\}$.
   - "z je prvkem třídy všech množin, splňující $\varphi(x)$."
   - Nahradíme: $\varphi(z)$.
2. $z = X$ zastupuje $z = \{x, \varphi(x)\}$.
   - "Množina z se rovná třídě X."
   - Nahradíme: $(\forall u)(u \in z \leftrightarrow \varphi(u))$.
3. $X \in Y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} \in \{y, \psi(y)\}$.
   - Nahradíme: $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge \psi(u))$.
4. $X \in y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} \in y$.
   - Nahradíme: $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge u \in y)$.
5. $X = Y$ zastupuje $\{x, \varphi(x)\} = \{y, \psi(y)\}$.
   - Nahradíme: $(\forall u)(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(v))$

Meta pozorování

Formule rozšířeného jazyka určují stejné třídy jako formule základního jazyka. Příklad $\{x; x \notin \{z, \psi(z)\}\} \rightarrow \{x; \neg\psi(x)\}$.

Třídové operace

Definice:

- $A \cap B$ je $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$.
- $A \cup B$ je $\{x, x \in A \vee x \in B\}$.
- $A \setminus B$ je $\{x, x \in A \wedge x \notin B\}$.
- Pokud $A = \{x, \varphi(x)\}$ a $B = \{y, \psi(y)\}$, pak $A \cap B = \{z, \varphi(z) \wedge \psi(z)\}$.

Definice:

$\{x; x = x\}$ je **univerzální třída**, která se značí jako V.

- A je třída, (absolutní) doplněk A je $V \setminus A$, který se značí jako $-A$.
- $A \subseteq B, A \subset B$ značí, že A je podtřídou B (popř. vlastní podtřídou).

Cvičení

Rozepište v základním jazyce teorie množin.

1. $\bigcup A$ *nebo-li suma třídy* A *je* $\{x, (\exists a)(a \in A \wedge x = a)\}$
2. $\bigcap A$ *nebo-li průnik třídy* A *je* $\{x, (\forall a)(a \in A \rightarrow x = a)\}$
3. $\mathcal{P}(A)$ *nebo-li potenciál třídy* A *je* $\{a, a \subseteq A\}$.

- $\bigcap \emptyset = V$, *protože* $\{x, (\forall a)(a \in \emptyset \rightarrow x \in a)\}$.

Cvičení

$a \neq \emptyset$, *je* $\bigcap a$ *množina?*

Cvičení

Je $\mathcal{P}(V) = V^2$*?*

Lemma

Univerzální třída V není množina.

Důkaz:

Cvičení.

Lemma

Je-li A třída a množina, průnik $A \cap a$ je množina.

Důkaz:

Schéma axiomu vydělení $A = \{x, \varphi(x)\}, a \cap A = \{x, x \in a \wedge \varphi(x)\}$.

$\square$

Definice:

Kartézský součin tříd A, B značen $A \times B$ je $\{(a,b), a \in A \wedge b \in B\}$ což je zkrácený zápis pro $\{x, (\exists a)(\exists b)(x = (a,b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}$.

Lemma

Jsou-li a, b množiny pak i $a \times b$ je množina.

Důkaz:

- Platí $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$.
- Vpravo je množina axiomu dvojice , sumy, dvakrát potence.
- Pak podle lemma (axiomu vydělení) $A = a \times b, a = \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ tedy $a \times b$ je množina.
- Pokud $u \in a, v \in b$, pak $\{u\}, \{u,v\} \subseteq a \cup b$ tedy $\{u\}, \{u,v\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$, stejně pak $\{\{u\}, \{u,v\}\} \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$ a $\{\{u\}, \{u,v\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$.

$\square$

Definice:

X je třída, pak $X^1 = X$, induktivně pak $X^n = X^{n-1} \times X$.

- X^n je třída všech uspořádaných n-tic prvků X.

Pozorování

$V^n \subseteq V^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq V^1 = V$

Cvičení

Ukažte, že obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$. Například pro $X = \{\emptyset\}$.

Přednáška 4

Relace

Definice:

- Třída R je (binární) **relace**, pokud $R \subseteq V \times V$.
- xRy zkratka za $(x, y) \in R$.
- n-ární relace je $R \subseteq V^n$.

Příklad:

- *Relace náležení* E *je* $\{(x, y), x \in y\}$.
- *Relace identity* Id *je* $\{(x, y), x = y\}$.

Definice:

Je-li X relace (libovolná třída), pak:

- $Dom(X)$ je $\{u, (\exists v)(u, v) \in X\}$
- $Rng(X)$ je $\{v, (\exists u)(u, v) \in X\}$
- Je-li Y třída, pak $X '' Y (X[Y])$ je $\{z, (\exists y)(y \in Y \wedge (y, z) \in X\}$.
  - Nebo-li obraz třídy Y třídou X.
- $X \restriction Y$ je $\{(y, z), y \in Y \wedge (y, z) \in X\}$.
  - Zúžení třídy X na třídu Y. (restrikce, parcelizace)

Lemma

Je-li x množina, Y třída, pak $Dom(x), Rng(x), x \restriction Y, x '' Y$ jsou množiny.

Důkaz:

- Vnoříme do větší množiny.
- Platí $Dom(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$.
  - Když $u \in Dom(x)$ pak $(\exists v)(u, v) \in x$ a $u \in \{u\} \in (u, v) \in x$. Tedy $\{u\} \in \bigcup(x)$, tedy $u \in \bigcup(\bigcup(x))$.
- Podobně i pro $Rng(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$.
  - $v \in Rng(x) : (\exists u)(u, v) \in x$
  - $v \in \{u, v\} \in (u, v) \in x$ tedy $v \in \bigcup(\bigcup(x))$.
- Pak už jenom $x \restriction Y \subseteq x; x '' Y \subseteq Rng(x)$

$\square$

Definice:

- R, S jsou relace. Pak R^{-1} je $\{(u, v), (v, u) \in R\}$.
  - Nebo-li relace **inverzní** k R.
- $R \circ S$ je $\{(u, v); (\exists w)((u, w) \in R \wedge (w, v) \in S)\}$.
  - Nebo-li složení relací R a S.

Poznámka:

$(f \circ g)(x) = g(f(x))$

Cvičení

- *Ověřte, že pro libovolnou relaci R je $Id \circ R = R = R \circ Id$.*
- $(x, y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y$

Definice:

Relace F je **zobrazení (funkce)** pokud:

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(((u, v) \in F \wedge (u, w) \in F) \rightarrow v = w)$$

- "Pro každé $v \in Dom(F)$ existuje právě jedna množina v taková, že $(u, v) \in F$."
- Píšeme $F(u) = v$.

Definice:

- F je zobrazení třídy X **do** třídy Y; $F : X \rightarrow Y$, pokud $Dom(F) = X$ a $Rng(F) \subseteq Y$.
- F je zobrazení třídy X **na** třídu Y; pokud navíc platí $Rng(F) = Y$.
- F je **prosté** zobrazení pokud F^{-1} je zobrazení.
  - Pokud $(\forall v)(\forall u)(\forall w)((F(u) = w \wedge F(v) = w) \rightarrow u = v)$.
  - "Každý prvek $Rng(F)$ má právě jeden vzor."

Pozorování

Pokud F je prosté zobrazení, pak F^{-1} je také prosté zobrazení.

Definice:

A je třída, φ je formule pak:

- $(\exists x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\exists x)(x \in A \wedge \varphi)$.
- $(\forall x \in A)\varphi$ je zkratka za $(\forall x)(x \in A \rightarrow \varphi)$.

Značení:

Obraz / vzor třídy X zobrazením F.

- $F[X]$ místo $F '' X : F[X] = \{y, (\exists x \in X) y = F(x)\}$
- $F^{-1}[X]$ místo $F^{-1} '' X : F^{-1}[X] = \{y, (\exists x \in X) x = F(y)\}$

Definice:

A je třída, a je množina, pak ${}^{a}A$ je $\{f; f : a \to A\}$, třída všech zobrazení z a do A.

Poznámka:

- *Z axiomu nahrazení $Rng(f)$ je množina, $f \subseteq a \times Rng(f)$, tedy f je množina.*
- *Nelze definovat ${}^{B}A$ pokud B je vlastní třída a $A \neq \emptyset$, protože je-li $Dom(f)$ vlastní třída, pak je i f.*
- ${}^{\emptyset}A = \{\emptyset\}$
- ${}^{x}\emptyset = \emptyset$

Lemma

1. Pro libovolné množiny x, y je ${}^{x}y$ množina.
2. Je-li $x \neq \emptyset, Y$ je vlastní třída, pak ${}^{x}Y$ je vlastní třída.

Důkaz:

1. Pokud $f : x \to y$. pak $f \subseteq x \times y$, tedy $f \in \mathcal{P}(x \times y)$. Tedy ${}^{x}y \subseteq \mathcal{P}(x \times y)$.
2. Pro $y \in Y$ definujeme konstantní zobrazení $K_y : x \to Y$ tak, že $(\forall u \in x)(K_y(u) = y)$. $K_y = x \times y$, protože $x \neq \emptyset$, pro $y \neq y'$ platí $K_y \neq K_{y'}$. $K = \{K_y, y \in Y\}$ máme $K \subseteq^{x} Y$.
    - Teď sporem: Pokud ${}^{x}Y$ je množina, pak K je množina. Definujeme $F : K \to Y$ jako $F(K_y) = y$. Z axiomu nahrazení Y je množina a to je spor.

$\square$

Uspořádání

Definice:

Relace $R(\subseteq V \times V)$ je na třídě A:

- Reflexivní:

$$(\forall x \in A)((x, x) \in R)$$

- Antireflexivní:

$$(\forall x \in A)((x, x) \notin R)$$

- Symetrická:

$$(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R)$$

- Slabě antisymetrická:

$$(\forall x, y \in A)(((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \rightarrow y = x)$$

- Antisymetrická

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \rightarrow \neg(yRx))$$

- Trichotomická:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx \vee x = y)$$

- Tranzitivní:

$$(\forall x, y, z \in A)((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

Pozorování

Tyto vlastnosti jsou **dědičné**, to znamená, že platí na každé podtřídě $B \subseteq A$.

Definice:

- Relace R je **uspořádání na třídě** A, pokud R je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.
- $x, y \in A$ jsou **porovnatelné (srovnatelné)** relací R pokud $xRy \vee yRx$.

Značení:

$x \leq_R y$ znamená xRy.

- "x je menší nebo rovno y vzhledem k R."

Definice:

- Uspořádání R je **lineární** pokud R je trichotomické.
- R' je **ostré** uspořádání pokud je tvaru $R \backslash Id$ (je antireflexivní, antisymetricá a tranzitivní).
- $x <_R y$ značí $xR'y$

Cvičení

- *Doplňte tabulku ANO/NE.*

Relace	*Uspořádání?*	*Ostré?*
E		
Id		

Přednáška 5

Definice:

Nechť R je uspořádání na třídě A a nechť $X \subseteq A$. Řekněme, že $a \in A$ je (vzhledem k R a A):

- **Majorita (horní mez)** třídy X, pokud $(\forall x \in X)(x \leq_R a)$.
- *Minoranta (dolní mez)* třídy X, pokud $(\forall x \in X)(a \leq_R x)$.
- **Maximální prvek** třídy X, pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(a <_R x))$.
- *Minimální prvek* třídy X, pokud $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(x <_R a))$.
- **Největší prvek** třídy X, pokud $a \in X$ a a je majoranta X.
- *Největší prvek* třídy X, pokud $a \in X$ a a je minoranta X.
- **Supremum** třídy X, pokud a je nejmenší prvek třídy všech majorant X.
- *Infimum* třídy X, pokud a je největší prvek třídy všech minorant X.

Pozorování

- Největší implikuje maximální, pokud R je lineární, tak platí i opačná implikace.
- Největší a supremum je vždy nejvýše 1. Lze značit jako $a = \max_R(X)$ a $a = \sup_R(X)$.

Definice:

- X je **shora omezená**, pokud existuje majoranta X v A.
- X je *zdola omezená*, pokud existuje minoranta X v A.
- X je **dolní množina**, pokud $(\forall x \in X)(\forall y \in A)(y \leq_R x \rightarrow y \in X)$.
- Analogicky i *horní množina*.
- $x \in A$, pak $\mid \leftarrow, x]$ je $\{y, y \in A \wedge y \leq_R x\}$. Nebo-li horní ideál omezená x.

Pozorování

R uspořádání na A, pak pro libovolné $x, y \in A$ platí $x \leq_R y \leftrightarrow \mid \leftarrow, x] \subseteq \mid \leftarrow, y]$.

Poznámka:

- *Konstrukce $\mathbb{R}$ z $\mathbb{Q}$: **Dedekindovy řezy**.*
- *$X \subseteq \mathbb{Q}, X$ je dolní množina (vzhledem k $\subseteq$) a navíc existuje-li $\sup X$, pak $\sup X \subseteq X$.*

Definice:

Uspořádání R na třídě A je **dobré**, pokud každá neprázdná podmnožina A : $(u \subseteq A)$ má nejmenší prvek vzhledem k R.

Cvičení

Napsat definice pomocí logických formulí.

Pozorování

- "Dobré" je dědičná vlastnost.
- Dobré implikuje lineární.

Cvičení

Najděte nějaké množiny, na nichž je E dobré ostré uspořádání.

Definice:

Ekvivalence je pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Srovnávání mohutností

Definice:

- Množiny x, y mají **stejnou mohutnost** (psáno $x \approx y$) pokud existuje prosté zobrazení x na y (nebo-li bijekce). Někdy označováno jako x je *ekvivalentní* y.
- Množina x má **mohutnost menší nebo rovnou** mohutnosti y (psáno $x \preceq y$) pokud existuje prosté zobrazení x do y. Někdy označováno jako x je *subvalentní* y.
- x má **menší mohutnost** než y (psáno $x \prec y$) pokud platí $x \preceq y \wedge \neg(x \approx y)$).

Pozorování

- $x \subseteq y \rightarrow x \preceq y$ (identita)
- $x \subset y \rightarrow x \preceq y$ (ne $x \prec y$, například $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{1\}$)

Poznámka:

*To jestli $\preceq$ je trichotomická v **ZF** nelze rozhodnout. Přidáím axiomu výběru už ale ano.*

Lemma

Jsou-li x, y, z množiny, potom:

1. $x \approx x$
2. $x \approx y \to y \approx x$
3. $((x \approx y) \wedge (y \approx z)) \to x \approx z$, tedy $\approx$ je ekvivalence.
4. $x \preceq x$
5. $x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z$

Důkaz:

- Prakticky jen triviální, stačí najít dané zobrazení.

  1. Id
  2. $F \to F^{-1}$
  3. $F \wedge G \to F \circ G$
  4. Id
  5. $F \wedge G \to F \circ G$

$\square$

Pozorování

$x \approx y \to (x \preceq y \wedge y \preceq x)$

Přednáška 6

Věta (Cantor-Bernstein)

$$(x \preceq y \wedge y \preceq x) \to x \approx x$$

Důkaz:

- Důkaz se provede pomocí grafů. Také bude potřeba dodatečné lemma, které bude později.
- Jako graf si představíme bipartitní, kde jedna partita je x a druhá y. Následně přidáme orientované hrany jakožto funkce f a g, kde $f : x \to y, g : y \to x$ jsou prosté zobrazení.
- Teď se podíváme na komponenty grafu.
  1. Buď může být kružnice sudé délky.
  2. Nebo cesta s počátkem.
  3. Anebo cesty obousměrné.
- Nyní uvažme "indukovaná" zobrazení: $(\hat{f}) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(y)$.
- Tahle funkce je monotónní vzhledem k inkluzi.

- Definujeme $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ takto: Pro $u \subseteq x$ nechť $H(u) = x - g[y - f[u]]$.
- H je monotónní vzhledem k inkluzi.
  - $u_1 \subseteq u_2 \Rightarrow f[u_1] \subseteq f[u_2] \Rightarrow y - f[u_1] \supseteq y - f[u_2] \Rightarrow$
  - $\Rightarrow g[y - f[u_1]] \supseteq g[y - f[u_2]] \Rightarrow H(u_1) \subseteq H(u_2)$.
- Podle lemma o pevném bodě $(\exists c)(H(c) = c)$, tedy $x - g[y - f[c]] = c \Rightarrow x - c = g[y - f[c]]$.
- Tedy g^{-1} je prosté zobrazení $x \setminus c$ na $y \setminus f[c]$.
- Stačí definovat $h : x \to y$ jako:

$$h(u) = \begin{cases} f(u) & \text{pokud } u = c \\ g^{-1}(u) & \text{jinak} \end{cases}$$

- h je prosté zobrazení x na y.

□

Definice:

Zobrazení $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ je **monotónní** (vzhledem k inkluzi) pokud pro každé dvě množiny $u, v \subseteq x$ platí $u \subseteq v \to H(u) \subseteq H(v)$.

Lemma

Je-li $H : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ zobrazení monotónní vzhledem k inkluzi, pak existuje podmnožina $c \subseteq x$ taková, že $H(c) = c$. Též označován jako **pevný bod**.

Důkaz:

- $A = \{u, u \subseteq x \wedge u \subseteq H(u)\}$
- $c = \bigcup A$ neboli supremum.
- $u \in A$ pak dostanu dvě možnosti:
  1. $u \subseteq c$
  2. $u \subseteq H(u) \subseteq H(c)$ (díky tomu, že H je monotónní)
- Z toho pak plyne, že $H(c)$ je majoranta a tedy $c \subseteq H(c)$.
- Pak z monotonie platí $H(c) \subseteq H(H(c))$, tedy $H(c) \in A$, takže $H(c) \subseteq c$, nebo-li c je majoranta.
- Z obou inkluzí pak plyne, že $c = H(c)$.

□

Cvičení

Ilustrace monotńní funkce $h : [0, 1] \to [0, 1]$.

Cvičení

$A \subseteq \mathcal{P}(x)$ a uspořádání $\subseteq$, pak $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$ a $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$.

Příklad:

- *$\omega = \mathbb{N}_0$ pak $\omega \approx \omega \times \omega$*
- *$f : \omega \to \omega \times \omega$ jako $f(n) = (0, n)$*
- *$g : \omega \times \omega \to \omega$ jako $g((m, n)) = 2^m 3^n$*
- *Podle Věty platí $\omega \approx \omega \times \omega$.*
- *$h : \omega \to \omega \times \omega$ jako $h((m, n)) = 2^m(2n + 1) - 1$*

Cvičení

Ověřte, že g je prosté a h je bijekce.

Cvičení

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$

Cvičení

$[0, 1] \approx [0, 1] \times [0, 1]$

Lemma

Nechť x, y, z, x_1, y_1 jsou množiny, pak:

1. $x \times y \approx y \times x$
2. $x \times (y \times z) \approx (x \times y) \times z$
3. $(x \approx x_1 \wedge y \approx y_1) \to (x \times y \approx x_1 \times y_1)$
4. $x \approx y \to \mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$
5. $\mathcal{P}(X) \approx^x 2$, kde $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Důkaz:

- Vždy jde o to najít vhodné funkce.

1. $(u, v) \to (v, u)$
2. $(u, (b, c)) \to ((u, b), c)$
3. $f : x \to x_1, g : y \to y_1 : (a, b) \to (f(a), g(b))$
4. $f : x \to y, u \to f[u]$ (izomorfismus vzhledem k inkluzi)
5. Pro $u \subseteq x$ definujeme charakteristickou funkci $\chi_a : x \to 2$, kde;

$$\chi_a(v) = \begin{cases} 1 & v \in a \\ 0 & v \notin a \end{cases}$$

- Zobrazení $\{(a, \chi_a); a \subseteq x\}$ je prosté a zobrazuje $\mathcal{P}(x)$ na ${}^x 2$.

□

Konečné množiny

Definice: (*Tarski*)

Množina x je **konečná**, označíme $Fin(x)$, pokud každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má **maximální** prvek vzhledem k inkluzi.

Cvičení

Napište definici pomocí formule.

Přednáška 7

Pozorování

x je konečná právě tehdy, když každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má minimální prvek vzhledem k inkluzi.

Důkaz:

- Uvažme $d : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ jako $d(u) = x \setminus u$.
- $u \subseteq v \Leftrightarrow d(u) \supseteq d(v)$

□

Definice:

Množina a je **Dedekindovsky konečná** pokud má větší mohutnost než každá vlastní podmnožina $b \subset a$. (Nebo-li neexistuje prosté zobrazení a na b.)

Lemma

Je-li množina a konečná tak je i Dedekindovsky konečná.

Důkaz:

- Nutno dokázat, že pokud $b \subset a$ pak $b \preceq a$.
- Sporem: $b \approx a$.
- Nechť $y = \{b, b \subset a \wedge b \approx a\}, y \neq \emptyset, y \in \mathcal{P}(a)$. Nechť $c \in y$ je minimální prvek y vzhledem k $\subseteq$.
- Nechť $f : a \to a$ je prosté zobrazení a na c. $d = f[c]$.

- $f \upharpoonright c$ je prosté zobrazení c na d. Tedy $c \approx d$, tedy $d \in y$.
- $d \subseteq c : (\exists x)(x \in a \setminus c)$ pak $f(x) \in c \setminus d$.
- Spor s minimalitou volby c.

$\square$

Poznámka:

*Opačná implikace v **ZF** není dokazatelná.*

- Existuje lineární uspořádání $\leq$, které je dobré, pak i $\geq$ je dobré.
- Existuje lineární uspořádání a každá 2 lineární uspořádání jsou izomorfní.
- x je konečná $\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ je dedekindovsky konečná

Věta

1. Je-li a konečná uspořádaná množina (relací $\leq$) pak každá její neprázdná podmnožina $b \subseteq a$ má maximální prvek.
2. Každé lineární uspořádání na konečné množině je dobré.

Důkaz:

1. Pro každé $x \in a$ uvažme $| \leftarrow, x] = \{y, y \in a \wedge y \leq x\}$.

- $u = \{| \leftarrow, x], x \in b\}, u \subseteq \mathcal{P}(a), u \neq \emptyset$
- Z konečnosti a existuje $m \in b$ takové, že $| \leftarrow, m]$ je maximální prvek vzhledem k $\subseteq$.
- $x \leq y \Leftrightarrow | \leftarrow, x] < | \leftarrow, y]$
- Tedy m je maximální prvek b vzhledem k $\subseteq$.
- *Minimální prvek se najde podobně, akorát to bude horní množina a minimální prvek.*

2. Minimální prvek v lineárním uspořádání je už nejmenší.

$\square$

Definice:

F je zobrazení A_1 do A_2, R_1, R_2 jsou relace. F je **izomorfismus** tříd A_1, A_2 vzhledem k R_1, R_2 pokud F je prosté zobrazení A_1 na A_2 a $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_2)(x, y) \in R_1 \leftrightarrow (F(x), F(y)) \in R_2$.

Definice:

- A je mmožina uspořádaná relací R.
- B je mmožina uspořádaná relací S.

- Zobrazení F je **počátkové vnoření** A do B, pokud $A_1 = Dom(F)$ je dolní podmnožina A a $B_1 = Rng(F)$ je dolní podmnožina B.
- A F je izomorfismus A_1 a B_1 vzhledem k R, S.

Lemma

Nechť F, G jsou počátkové vnoření dobře uspořádané množiny A do dobře uspořádané množiny B. Potom $F \subseteq G$ nebo $G \subseteq F$.

Důkaz:

- Nechť R je dobré uspořádání množiny A.
- Nechť S je dobré uspořádání množiny B.
- $Dom(F), Dom(G)$ jsou dolní podmnožiny A.
- R je lineární, tedy $Dom(F) \leq Dom(G) \vee Dom(G) \leq Dom(F)$. (BÚNO: $Dom(F) \leq Dom(G)$, jinak přejmenuji množiny).
- Dokážeme $(\forall x \in Dom(F))F(x) = G(x)$.
- Sporem Nechť x je nejmenší (vzhledem k R) prvek množiny $\{z, z \in A \wedge G(z) \neq F(z)\}$.
- Tedy $\forall y <_R x : F(y) = G(y)$.
- Z linearity S je $F(x) <_S G(x) \vee G(x) <_S F(x)$ (BÚNO: $F(x) <_S G(x)$).
- Nechť $b = F(x)$.
- Je-li $z \in Dom(G)$ pak buď:
  - $z <_R x$ $G(z) = F(z)$
  - $z \geq_R x$ $F(x) = b$
- Pak $G(z) \geq_S G(x) >_S F(x) = b$.
- V obou případech $b \notin Rng(G)$ a tedy $Rng(G)$ není dolní množina a to je spor.

□

Cvičení

Lineární uspořádání jsou každé dvě dolní množiny porovnatelné inkluzí.

Cvičení

Co když místo dobrého uspořádání bude jen lineární uspořádání.

Věta (*O porovnávání dobrých uspořádání.*)

- A je množina dobře uspořádaná relací R.
- B je množina dobře uspořádaná relací S.
- Pak existuje právě jedno zobrazení F, které je izomorfismus A a dolní množiny B, nebo B a dolní množiny A.

Důkaz:

- P je množina všech počátečních vnoření A do B. Nechť $F = \bigcup P$.
- F je zobrazení: Když $(x, y_1)(x, y_2) \in F$ existuje počáteční vnoření F_1, F_2, že $(x, y_1) \in F_1, (x, y_2) \in F_2$. Podle lemma $F_1 \subseteq F_2$ nebo naopak. Předpokládejme, že nastala tato situace.
- Tedy $(x, y_1) \in F_2; F_2$ je zobrazení, tedy $y_1 = y_2$.
- F je počáteční vnoření: Když $x_1 <_R x_2 \in Dom(F)$ tak existuje počáteční vnoření F' že $x_2 \in Dom(F')$. Tedy $x_1 \in Dom(F') \subseteq Dom(F)$.
- Podobně pro $Rng(F) = \bigcup Rng(F')$ je dolní.
- $F(x_1) = F'(x_1) <_S F'(x_2) = F(x_2)$
- $Dom(F) = A \vee Rng(F) = B$.
- Sporem: $A \setminus Dom(F), B \setminus Rng(F)$ jsou neprázdné, mající nejmenší prvky a, b.
- Definujeme $F' = F \cup \{(a, b)\}$ je počáteční vnoření $F' \in P, F' \subseteq F$ a to je spor.

$\square$

Cvičení

Jednoznačnost F.

Cvičení

Sjednocení dolních množin je dolní množina.

Přednáška 8

Věta

a je konečná množina, pak každé lineární uspořádání na a jsou izomorfní.

Důkaz:

- R, S jsou dvě lineární uspořádání a také dobrá uspořádání.
- (a, R) je izomorfní dolní množině (a, S) nebo dolní množina (a, R) je izomorfní (a, S).
- Dolní množina $b, b \approx a$, z Dedekindovy konečnosti platí, že $a = b$.

$\square$

Lemma (*Zachovávání konečnosti.*)

1. $(Fin(x) \wedge y \subseteq x) \rightarrow Fin(y)$
2. $(Fin(x) \wedge y \approx x) \rightarrow Fin(y)$
3. $(Fin(x) \wedge y \preceq x) \rightarrow Fin(y)$

Důkaz:

1. $w \subseteq \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x)$
2. $\mathcal{P}(y)$ je izomorfní $\mathcal{P}(x)$
3. Plyne z 1 a 2.

$\square$

Lemma (*sjednocení konečných množin*)

1. $Fin(x) \wedge Fin(y) \rightarrow Fin(x \cup y)$
2. $Fin(x) \rightarrow (\forall y) Fin(x \cup \{y\})$

Důkaz:

- $w \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$ neprázdná
- $w_1 = \{u, (\exists t \in w)(u = t \cap x)\} \subseteq \mathcal{P}(x)$
  - Má maximální prvek v_1.
- $w_2 = \{u, (\exists t \in w)(t \cap x = v_1 \wedge t \cap y = u)\} \subseteq \mathcal{P}(y)$
  - Má maximální prvek v_2.
- $v_1 \cup v_2$ je maximální prvek w.

$\square$

Definice:

Třída všech konečných množin $Fin = \{x, Fin(x)\}$.

Věta (Princip indukce pro konečné množiny)

Je-li X třída, pro kterou platí:

1. $\emptyset \in X$,
2. $x \in X \rightarrow (\forall y)(x \cup \{y\} \in X)$, pak $Fin \subseteq X$.

Důkaz:

- Sporem: Pokud $x \in Fin \setminus X$. nechť $w = \{v, v \subseteq x \wedge v \in X\}$.
- Podle 1: $\emptyset \in w$
- $w \subseteq \mathcal{P}(x)$, neprázdná.
- w má maximální prvek v_0.

- $v_0 \subseteq x$
- $v_0 \in X$, tedy $v_0 \neq x$ a $v_0 \subset X$.
- Tedy existuje $y \in x \setminus v_0$.
- Nechť $v_1 = v_0 \cup \{y\}$.
- Podle 2: $v_1 \in X$.
- Tedy $v_1 \in w$, spor s maximalitou v_0.

$\square$

Lemma

$Fin(x) \rightarrow Fin(\mathcal{P}(x))$

Důkaz:

- Indukcí: Nechť $X = \{x, Fin(\mathcal{P}(x))\}$.
- $\emptyset \in X$, protože $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ je konečná.
- Nechť $x \in X, y$ je množina. Chceme aby $x \cup \{y\} \in X$.
- BÚNO: $y \notin x$ (jinak triviální).
- Rozdělíme $\mathcal{P}(x \cup \{y\})$ na dvě části:
  - $\mathcal{P}(x \cup \{y\}) = \mathcal{P}(x) \cup (\mathcal{P}(x \cup \{y\}) \setminus \mathcal{P}(x))$
- Platí $\mathcal{P}(x) \approx z$, kde z se rovná předchozímu druhému prvku v sjednocení.
- Pro $u \in \mathcal{P}(x)$ definujeme $f(u) = u \cup \{y\}$.
  - f je prosté zobrazení $\mathcal{P}(x)$ na z.
- Podle předpokladu $Fin(\mathcal{P}(x))$.
- Podle lemma $Fin(z)$.
- Podle lemma o sjednocení $Fin(\mathcal{P}(x) \cup z)$.
- Podle principu indukce $Fin \subseteq X$.

$\square$

Důsledek:

$Fin(x) \cap Fin(y) \rightarrow Fin(x \times y)$

Důkaz:

- Nechť $z = x \cup y$, víme $Fin(z)$.
- $x \times y \subseteq z \times z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(z))$.

$\square$

Lemma (“sjednocení konečně mnoha konečných množin je konečná množina”)

Je-li $Fin(a)$ a $(\forall b \in a)Fin(b)$, pak $Fin(\bigcup a)$.

Důkaz:

- Indukcí: $X = \{x, x \subseteq Fin \rightarrow Fin(\bigcup x)\}$.

1. $\emptyset \in X$, protože $\bigcup \emptyset = \emptyset$.
2. Nechť $x \in X, y$ množina. Chceme aby $x \cup \{y\} \in X$.

- Předpokládejme, že $x \cup \{y\} \subseteq Fin$. Speciálně $x \subseteq Fin$.
- $\bigcup (x \cup \{y\}) = \bigcup x \cup y$
  - Obě dvě jsou konečné a sjednocení tím pádem je také konečné.
- Tedy $x \cup \{y\} \in X$.
- Podle principu indukce $Fin \subseteq X$.

□

Důsledek: (Dirichletův princip pro konečné množiny.)

Je-li nekonečná množina sjednocení konečně mnoha množin, pak jedna z nich musí být nekonečná.

Lemma (“Každá konečná množina je srovnatelná se všemi množinami.”)

$Fin(x) \rightarrow (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)$

Důkaz:

- Indukcí: $x = \{x, (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)\}$

1. $\emptyset \in X$, protože $(\forall y)\emptyset \subseteq y$ tedy $\emptyset \preceq y$.
2. Nechť $x \in X, u$ je množina. BÚNO: $u \notin X$. Chceme $x \cup \{u\} \in X$, nechť X je množina.

- Když $y \preceq x$, pak $x \preceq x \cup \{u\}$ z tranzitivity $y \preceq x \cup \{u\}$.
- Nechť $x \prec y$. g je prosté zobrazení x do y.
- Nechť $v \in X \setminus Rng(g)$.
- Definujeme $h = g \cup \{(u, v)\}, h$ je prosté zobrazení $x \cup \{u\}$ do y.
- Tedy $x \cup \{u\} \preceq y$.
- Z principu indukce $Fin \subseteq X$.

□

Cvičení

$Fin(x)$ a $f : x \to y$, pak $Rng(f) \preceq x$ (pomocí indukce).

Cvičení

$(\forall x)Fin(x)$ lze dobře uspořádat (indukcí).

Přirozená čísla

Definice: (von Neumann)

- Myšlenka: *"Přirozené číslo je množina všech menších přirozených čísel."*
- $0 = \emptyset; 1 = \{0\} = \{\emptyset\}; 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; 3 = \{0, 1, 2\} = \ldots$

Definice:

w je **induktivní množina**, pokud $\emptyset \in w \wedge (\forall v \in w)(v \cup \{v\} \in w)$.

9.Axiom nekonečna ("Existuje induktivní množina.")

$$(\exists z)(0 \in z \wedge (\forall x)(x \in z \to x \cup \{x\} \in z))$$

Definice:

Množina všech přirozených čísel ω je $\bigcap\{w, w$ je induktivní množina$\}$.

Lemma

ω je nejmenší induktivní množina.

Důkaz:

- $0 \in \omega$
- $x \in \omega, x$ patří do každé induktivní množiny.
- $x \cup \{x\}$ patří do každé induktivní množiny.
- $x \cup \{x\} \in \omega$.

$\square$

- Prvky ω jsou **přirozená čísla** v teorii množin.

Přednáška 9

Definice:

Funkce následník $S : \omega \to \omega$. Pro $v \in \omega : S(v) = v \cup \{v\}$.

- *"Následník čísla v."*

Věta Princip (*slabé*) indukce pro přirozená čísla.

Je-li $X \subseteq \omega$ taková, že platí:

1. $0 \in X$,
2. $x \in X \to S(x) \in X$. Pak $X = \omega$.

Důkaz:

- 1 a 2 dohromady říká, že X je induktivní, tedy $\omega \subseteq X$.

$\square$

Příklad:

- *Důkaz indukcí:*
  - *Chceme dokázat:* $(\forall n \in \omega)(\varphi(n))$.
  - *Dokazujeme: 1.* $\varphi(0)$ *a 2.* $(\forall n \in \omega)(\varphi(n) \to \varphi(S(n)))$.

Poznámka:

Princip silné indukce: 2: $((\forall m \in \omega)m \in X) \to n \in X$.

Lemma "$\in$ je ostré uspořádání"

Pro libovolné $m, n \in \omega$ platí:

1. $n \in \omega \to n \subseteq \omega$
   - *"Prvky přirozených čísel jsou přirozená čísla."*
2. $m \in n \to m \subseteq n$
   - *"Náležení je tranzitivní na ω."*
3. $n \notin n$
   - *"$\in$ je antireflexivní na ω."*

- Z toho všeho plyne, že se jedná o ostré uspořádání.

Důkaz:

- Indukcí:

1. $0 \subseteq \omega$, a indukční krok $n \in \omega$, předpokládáme, že $n \subseteq \omega$. Pak $\{n\} \subseteq \omega$ tedy $n \cup \{n\} \subseteq \omega$.
2. Indukcí podle n:
   - 1. Krok: $m \notin 0$ tím pádem implikace splněna.

- 2. Krok $X = \{n, n \in \omega \wedge (\forall m)(m \in n \rightarrow m \subseteq n)\}$.
- Víme $0 \in X$.
- Nechť $n \in X$, víme $S(n) \in \omega$.
- Nechť $m \in S(n) = n \cup \{n\}$. Pak buď $m \in n$ a z IP pak $m \subseteq n$ anebo $m = n$ tím pádem také $m \subseteq n \subseteq S(n)$.

3. $0 \nsubseteq 0$ platí, nechť $n \in \omega$ a $n \nsubseteq n$.
    - Sporem $S(n) \subseteq S(n) = n \cup \{n\}$. Z toho pak plyne, že buď $S(n) \subseteq \{n\}$ anebo $S(n) \subseteq n$. V obou případech je $S(n) \subseteq n$, ale to pak znamená, že $n \in S(n) \subseteq n$ což je spor s předpokladem.

$\square$

Lemma

Každé přirozené číslo je konečná množina.

Důkaz:

Indukcí: $Fin(\emptyset)$ víme. Podle lemma $Fin(x) \rightarrow (\forall y) Fin(x \cup \{y\})$, speciálně pro $Fin(x \cup \{x\})$ a to je následník.

$\square$

Věta

Množina x je konečná právě tehdy, když $(\exists n \in \omega) x \approx n$.

Důkaz:

- $\Leftarrow$ $Fin(n)$ tedy $Fin(x)$.
- $\Rightarrow$ indukcí:
    - $X = \{x; (\exists n \in \omega) x \approx n\}$
    - Víme, že $0 \in X$ protože $0 \approx 0$.
    - Nechť $x \in X, y$ množina. Víme, že $(\exists n \in \omega) n \approx x$.
    - $y \in x$ pak $x \cup \{y\} = x \approx n$
    - $y \notin x$ pak $x \cup \{y\} \approx S(n) = n \cup \{n\}$
    - K bijekci x a n přidáme (y, n).
    - Tedy $Fin \subseteq X$.

$\square$

Lemma

Množina ω i každá induktivní množina je nekonečná.

Důkaz:

- Podle lemma: 1 $n \in \omega \to n \subseteq \omega$, tedy $n \in \mathcal{P}(n)$ tedy $\omega \subseteq \mathcal{P}(n), \omega$ je neprázdná ale nemá maximální prvek vzhledem k inkluzi. Když $n \subseteq \omega$ pak podle lemma 3. $n \nsubseteq n$ a tedy $n \subset n \cup \{n\} = S(n)$.
- $\omega \subseteq W$ tedy i induktivní množiny.

□

Cvičení

ω je Dedekindovsky nekonečná.

Lemma (Linearita $\in$ na ω.)

- $m, n \in \omega$
- Platí:
  1. $m \in n \leftrightarrow m \subset n$
  2. $m \in n \vee m = n \vee n \in m$ (*trichotomie*)

Důkaz:

1. $\to$ plyne z lemma 2 $m \in n \to m \subset n \wedge n \nsubseteq n$
   - $\leftarrow$ indukcí podle n; $n = 0$ nelze splnit.
   - Indukční krok. Nechť platí pro nějaké n a $\forall m$.
   - Nechť $m \subset S(n) = n \cup \{n\}$ a $m \subseteq n$, kdyby ne pak $n \in m$ tedy $n \subseteq m$ tedy $S(n) = n \cup \{n\} \subseteq m$ a to je spor.
   - $m \subset n$ z IP $m \in n \subseteq S(n)$ tedy $m \in S(n)$
   - $m = n$ pak $n \in S(n)$
2. Pro $n \in \omega$ nechť $A(n) = \{m \in \omega, m \in n \vee m = n \vee n \in m\}$.
   - Dokážeme, že $A(n)$ je induktivní, indukcí podle m.
   - $n = 0 : 0 \in A(0)$, protože $0 = 0$
   - Je-li $m \in A(0)$, pak: $m = 0 : 0 \in \{m\}$ anebo $0 \in m$ a z obou plyne $0 \in m \cup \{m\} = S(n)$.
   - Tedy $S(n) \in A(0)$.
   - Tedy $A(0) = \omega$.
   - Tedy také $(\forall n \in \omega) 0 \in A(n)$.
   - $n \in \omega, m \in \omega$, předpokládejme, že $m \in A(n)$. Ukážeme, že $S(m) \in A(n)$.
     - $m \in n \to m \subset n; \{m\} \subseteq n$ tedy $S(m) \subseteq n$ z toho plyne, že $S(m) = n \vee S(m) \in n$.
     - $m = n \vee n \in m$ potom $n \in m \cup \{m\} = S(m)$
   - Ve všech případech ke $S(m) \in A(n)$.

□

Věta

Množina ω je dobře (ostře) uspořádaná relací $\in$.

Důkaz:

- Nechť $a \subseteq \omega, a \neq \emptyset$. Zvolme $n \in a$.
- Není-li n nejmenší (minimální), tak definuji $b = n \cap a$. n je konečná, tak i b je konečná a neprázdná.
- $b \subseteq \omega$ tedy b má minimální prvek m vzhledem k náležení.
- m je minimální i v množině a: kdyby $(\exists x \in a)x \in m$, tak víme, že $m \in n$, tedy $m \subseteq n$, tedy $x \in n$, tedy $x \in b$. To je spor s minimalitou m v b.
- $\in$ je lineární na ω, tedy m je nejmenší prvek v a. Tedy $\in$ je dobré uspořádání.

$\square$

Poznámka:

Nekonečná množina A s lineárním (ostrým) uspořádáním $<$ pro každé $a \in A$: $| \leftarrow, a]$ je konečná. Pak $<$ je dobré a $(A, <)$ je izomorfní $(\omega, \in)$.

Přednáška 10

Věta (Charakterizace uspořádání $\in$ na ω)

Nechť A je nekonečná množina, lineárně uspořádaná (ostře) relací $<$ tak, že pro každé $a \in A$ je dolní množina $| \leftarrow, a]$ konečná. Pak $<$ je dobré a množiny A, ω jsou izomorfní vzhledem k $<, \in$.

Důkaz:

- $<$ je dobré: $\emptyset \neq c \in A$. Nechť $a \in c$, předpokládejme, že a není minimální v c, pak definujeme $b = c \cap | \leftarrow, a]$. b je konečná. Tedy má minimální prvek m, m je minimální i v c.
- Protože $m \leq a$, pak $x \leq a$ tedy $x \in | \leftarrow, a]$ tedy $x \in b$ a to je spor.
- Izomorfismus: podle věty o porovnávání dobrých uspořádání jsou 2 možnosti:

1. A je izomorfní s dolní podmnožinou $B \subseteq \omega$, pak B není shora omezená. Neexistuje $n \in \omega(\forall b \in B)b \in n$. Sporem $B \subseteq S(n)$ tedy B by byla konečná a to je spor.

- To znamená, že $(\forall n \in \omega)$ je menší než nějaký prvek $b \in B$. B je dolní množina, tedy $n \in B \to \omega \subseteq B \to \omega = B$.

2. ω je izomorfní dolní podmnožině $C \subseteq A$. C není shora omezená, kdyby ano, tak $\exists a \in A : C \subseteq | \leftarrow, a], C$ by byla konečná, spor. $(\forall a \in A, \exists c \in C : a \subseteq c, C$ je dolní, tedy $C = A$.

$\square$

Spočetné množiny

Definice:

- Množina x je **spočetná**, pokud $x \approx \omega$.
- Množina x je **nejvýše spočetná**, pokud je konečná nebo spočetná.
- Jinak je množina **nespočetná**.

Věta

1. Každá shora omezená množina $A \subseteq \omega$ je konečná, každá shora neomezená $A \subseteq \omega$ je spočetná.
2. Každá podmnožina spočetné množiny je nejvýše spočetná.

Důkaz:

1. A omezená, to znamená, že $\exists n : A \subseteq S(n)$. Takže $Fin(S(n)) \rightarrow Fin(A)$.

- Pokud je A neomezená, pak je nekonečná. To lze dokázat sporem, že kdyby byla konečná, pak má A maximální prvek m, tedy je shora omezená m, to je spor.
- A je lineárně uspořádaná $\in$. Pro každé $n \in A$ je $| \leftarrow, n] \subseteq S(n)$, tedy $| \leftarrow, n]$ je konečná. Podle charakterizační věty A je izomorfní ω. Takže $A \approx \omega$.

2. A je spočetná $f : A \rightarrow \omega$ (bijekce). $B \subseteq A$, pak $B \approx f[B] \subseteq \omega$. Podle 1) je $f[B]$ spočetná anebo konečná.

$\square$

Příklad:

Lexikografické uspořádání *na* $\omega \times \omega$.

$$(m_1, n_1) <_L (m_2, n_2) \leftrightarrow (m_1 \in m_2 \vee ((m_1 = m_2) \wedge (n_1 \in n_2)))$$

Cvičení

Ověřte, že $<_L$ *je dobré uspořádání na* $\omega \times \omega$.

Cvičení

Ověřte, že $<_L$ na $\omega \times 2$ je izomorfní s $(\omega, \in)$.

Cvičení

Ověřte, že $<_L$ na $2 \times \omega$ není izomorfní s $(\omega, \in)$.

Definice:

Maximo-lexikografické uspořádání na $\omega \times \omega$ je:

$$\max(m,n) = \begin{cases} m & n \in m \\ n & \text{jinak} \end{cases}$$

$$(m_1, n_1) <_{ML} (m_2, n_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$((\max(m_1,n_1) \in \max(m_2,n_2)) \vee ((\max(m_1,n_1) = \max(m_2,n_2)) \wedge ((m_1,n_1) <_L (m_2,n_2))))$$

Cvičení

Ověřte, že $\omega \times \omega$ $<_{ML}$ je izomorfní $(\omega, \in)$.

Věta

Jsou-li A, B spočetné množiny, pak $A \cup B$ a $A \times B$ jsou spočetné.

Důkaz:

- $f : A \to \omega$ a $g : B \to \omega$ jsou bijekce.
- Definujeme $h : A \cup B \to \omega \times 2 \approx \omega$ jako:

$$h(x) = \begin{cases} (f(x), 0) & x \in A \\ (g(x), 1) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

- h je prosté. Tedy $A \cup B \subseteq \omega \times 2 \approx \omega \wedge \omega \preceq A \preceq A \cup B$ a z Cantor-Bernsteinovy věty implikuje, že $\omega \approx A \cup B$.
- $A \times B$ definujeme $k : A \times B \to \omega \times \omega$ jako $k((a,b)) = (f(a), g(b)), k$ je bijekce.
- Opět mám $A \times B \approx \omega \times \omega \approx \omega$.

$\square$

Důsledek:

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné. Kde $\mathbb{Z}$ lze modelovat jako množinu dvojic, kde první je číslo a druhé bool jestli je kladné nebo ne. A $\mathbb{Q}$ jako množinu dvojic (m, n) kde je číslo nejmenší společný dělitel $(m, n) = 1$ a číslo je $\frac{m}{n}$.

Důsledek:

- Konečná sjednocení, konečné součiny jsou spočetné.
- **Dirichletův princip**: je-li A nespočetná, $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, potom aspoň jedna množina A_i je nespočetná.
- Konečná podmnožina $[A]^{<\omega}$ konečné posloupnosti jsou spočetné.

Cvičení

Je-li A nespočetné, B spočetná, C konečná, potom $A \cup C, A \setminus C$ jsou nespočetné a $B \cup C, B \setminus C$ jsou spočetné, $A \cup B, A \setminus B$ jsou nespočetné.

Poznámka:

Spočetné sjednocení spočetně mnoha množin $\bigcup A$, kde A je spočetná a $(\forall a \in A)$ jsou spočetné.

Přednáška 11

Věta (*Cantor*)

$$x \prec \mathcal{P}(x)$$

Důkaz:

- Pomocí *diagonální metody*.
- $\preceq$: $f(y) = \{y\}, f : x \to \mathcal{P}(x)$ je prosté.
- Definujme $y = \{t, t \in x \wedge t \notin f(t)\}$. Potom $y \subseteq \mathcal{P}(x)$ nemá vzor při f. Kdyby

$$f(v) = y : \begin{cases} v \in y & \text{pak } v \notin f(v) = y \quad \text{SPOR} \\ v \notin y = f(v) & \text{tedy } v \in y \quad \text{SPOR} \end{cases}$$

$\square$

Důsledek:

$\mathcal{P}(\omega)$ je nespočetná.

Důsledek:

V není množina: $\mathcal{P}(V) \subseteq V$, kdyby byla množina, pak by musela platit Cantorova věta.

Věta

$$\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R} \approx [0,1]$$

Důkaz:

- Víme $\mathcal{P}(\omega) \approx^{\omega} 2$ podmnožiny $\leftrightarrow$ charakteristická funkce $\leftrightarrow$ posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, kde $a_i \in \{0,1\}$.
- $[0,1] \approx^{\omega} 2 : a \in [0,1]$ zapíšu v binární soustavě tak, že pokud je to nula, tak je to nekonečně nul a jinak vždy tak, aby obsahovalo nekonečno jedniček.
- $\leftarrow$ použijeme trojkovou soustavu. $(a_0, a_1, a_2, \dots) \rightarrow a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n+1}}$.
- Cantor-Bernstein $\rightarrow [0,1] \approx^{\omega} 2$. (*pozn.: Cantorovo diskontinuum*).
- $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$
- $\mathbb{E} \rightarrow [0,1]$ nějakou vhodnou funkci např. $\frac{\pi/2 - \arctan(x)}{\pi}$.

$\square$

Poznámka:

Množina algebraických čísel (tj. kořeny polynomů s racionálními koeficienty) je spočetná.

Cvičení

- *Pokrytí N intervaly.*

1. *Konečně.*
    - $A \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ *pak* $\sum(b_i - a_i \geq 1$
2. *Nekonečně.*
    - $\forall \epsilon > 0 : \exists I_1, I_2, \dots, A \subseteq \bigcup I_i; \sum(b_i - a_i) < \epsilon$

Poznámka:

Hypotéza kontinua *je, že každá nekonečná podmnožina $\mathbb{R}$ je buď spočetná anebo ekvivalentní s $\mathbb{R}$.*

Axiom výběru

Princip výběru

Pro každý rozklad r množiny x existuje **výběrová množina**. To jest $v \subseteq x$, pro kterou platí $(\forall u \in r)(\exists x)(v \cap u = \{x\})$.

Definice:

Je-li X množina, pak funkce f definovaná na X splňující $(y \in X \wedge y \neq \emptyset) \rightarrow f(y) \in y$ se nazývá **selektor** na množině X.

10.Axiom výběru (*AC - axiom of choice*)

Na každé množině existuje selektor.

Ekvivalentně

- Každou množinu lze dobře uspořádat.
- $\leq$ je trichotomická.
- Zornovo lemma.

Důsledky:

- Každý vektorový prostor má bázi.
- Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.
- Hahn-Banachova věta.
- Princip kompaktnosti.
- Banach Tarski (rozdělení koule na malé části a vytvoření dvou stejně velkých koulí).

Definice:

(Indexový) soubor množin $< F_j; j \in J >$. Kde F je zobrazení s definovaným obrazem J. Pro $j \in J : F_j = F(j)$. J je **indexová třída** a jeho prvky jsou **indexy**.

- Lze definovat:

$$\begin{cases} \bigcup_{j \in J} F_j \text{ jako } \{x, (\exists j \in J) x \in F_j)\} \\ \bigcup_{j \in J} F_j = \bigcup Rng(F) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bigcap_{j \in J} F_j \text{ jako } \{x, (\forall j \in J) x \in F_j)\} \\ \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap Rng(F) \end{cases}$$

- Kartézský součin souboru množin indexovaného množinou J je $X_{j \in J} F_j : \{f, f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} F_j \wedge (\forall j \in J) f(j) \in F_j\}$.

Lemma

Je-li J množina, pak $X F_j$ je množina. Je-li $(\forall j \in J) F_j = Y$, pak $X_{j \in J} F_j =^J Y$.

Důkaz:

- Axiom nahrazení. $Rng(F)$ je množina, $\bigcup Rng(F)$ je množina. ${}^J \bigcup_{j \in J} F_j$ je množina. $X F_j \subseteq^J \bigcup_{j \in J} F_j$.

$\square$

Přednáška 12

Lemma

NTJE: (Následující tvrzení jsou si ekvivalentní.)

1. Axiom výběru.
2. Princip výběru.
3. Pro každou množinovou relaci s existuje funkce $f \subseteq s$ taková, že $Dom(f) = Dom(s)$.
4. Kartézský součin $X_{i \in x} a_i$ neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný.

Důkaz:

- $1 \Rightarrow 2$: r rozklad X, podle 1 existuje selektor f na r. Pak $Rng(f)$ je výběrová množina.
- $2 \Rightarrow 3$: BÚNO: $s \neq \emptyset$. Vytvoříme rozklad s.
  - $n = \{\{i\} \times s \shortparallel \{i\}; i \in Dom(s)\} = \{\{(i,x),(i,x) \in s\}, i \in Dom(s)\}$
  - Výběrová množina n je funkce, která je podmnožina s a má stejný definiční obor.
- $3 \Rightarrow 4$: Máme soubor množin $< a_i, i \in x >$. Vytvoříme relaci $s = \{(i,y), i \in x \wedge y \in a_i\}$.
  - Funkce $f \subseteq s : Dom(f) = Dom(s) = x$ je prvkem $X_{i \in x} a_i$.
- $4 \Rightarrow 1$: x množina. BÚNO: $x \neq \emptyset, \emptyset \in X$. $ID \restriction x$ určuje soubor $< y; y \in x >$. Každý prvek $X_{y \in x} y$ je selektor na x.

$\square$

Lemma

Sjednocení spočetného souboru spočetných množin je spočetné. (Popřípadě je všude místo ~~spočetné~~ *nejvýše spočetné*.)

Důkaz:

- Soubor $< B_j; j \in J >$. BŮNO: $I = \omega$.
- Najděme prosté zobrazení $\bigcup_{j\in\omega} B_j$ do $\omega \times \omega$.
- Uvažujme soubor $< E_j; j \in \omega >$ kde E_j je množina všech prostých zobrazení B_j do ω.
- Podle lemma 4) je $X_{j\in\omega} E_j$ neprázdný, tedy existuje soubor $< f_j; j \in \omega >$, kde $f_j \in F_j$.
- Definujme $h; \bigcup_{j\in\omega} B_j \to \omega \times \omega$ jako $h(x) = (j, f_j(x))$. Kde j je nejmenší prvek ω pro který $x \in B_j$.

$\square$

Poznámka:

Bez AC je bezesporné ZF a to, že "$\mathbb{R}$ jsou spočetným sjednocením spočetných množin".

Princip maximality (*PM*)

- AC $\leftrightarrow$ PM
- Je-li A množina uspořádaná relací $\leq$ tak, že každý řetězec má horní mez.
- Pak pro každé $a \in A$ existuje maximální prvek $b \in A$ takový, že $a \leq b$.

Definice:

$B \subseteq A$ je **řetězec** pokud B je lineárně uspořádaná $\leq$.

Poznámka:

V aplikacích často pro $(A, \subseteq); A \subseteq \mathcal{P}(x)$ stačí ověřit, že $\bigcup B \in A$.

Cvičení

Ukažte pomocí PM: Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, pak pro každý řetězec $B \subseteq A$ existuje maximální řetězec C splňující $B \subseteq C \subseteq A$.

Princip maximality II (*PMS*)

Je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, kde každý řetězec má suprémum, pak pro každé $a \in A$ existuje $b \in A$ maximální prvek splňující $a \leq b$.

Cvičení

Dokažte: PM$\leftrightarrow$PMS.

Princip trichotomie $\preceq$ (*PT*)

Pro každé dvě množiny x, y platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Lemma

PM $\to$ PT.

Důkaz:

- Definuji množinu $D = \{f, f \text{ prosté zobrazení } \wedge Dom(f) \subseteq x \wedge Rng(f) \subseteq y\}$.
- $(D, \subseteq)$ splňuje předpoklady PM.
- Tedy má maximální prvek g.
- Kdyby $x \setminus Dom(f) \neq \emptyset$ a $y \setminus Rng(f) \neq \emptyset$, pak lze g rozšířit o novou dvojici (u, v), spor s maximalitou g.
- Pokud $Dom(f) = x$, pak $x \preceq y$.
- Pokud $Rng(f) = y$, pak g^{-1} je prosté zobrazení y do x, tedy $y \preceq y$.

□

Cvičení:

Sjednocení řetězce prostých zobrazení je prosté zobrazení.

Princip dobrého uspořádání (*VVO*)

- Každou množinu lze dobře uspořádat.
- Známo jako Zermelova věta.
- AC $\leftrightarrow$ VVO

Lemma

VVO $\to$ AC

Důkaz:

- $x \neq \emptyset, \emptyset \notin x$ podle VVO máme dobré uspořádání na $\bigcup x$.
- Každý $y \in x$ je neprázdná podmnožina $\bigcup x$, tedy má nejmenší prvek $\min_{\leq} y$.
- Definujeme $f : x \to \bigcup x$ jako $f(y) = \min_{\leq}(y)$. Tato f je selektorem na množině x.

□

Cvičení

PM $\to$ *VVO*

Ordinální čísla

"Typy dobře uspořádaných množin."

- Kardinální čísla $\subseteq$ ordinální čísla. Mohutnosti dobře uspořádaných množin. S (AC) mohutnosti všech množin.
- Ordinální čísla jsou dobře uspořádaná $\in$, platí pro ně princip transfinitní indukce.

Definice:

Třída X je **tranzitivní** pokud $x \in X \to x \subseteq X$.

Příklad:

ω i každé $n \in \omega$ jsou tranzitivní i V.

Cvičení

X tranzitivní $\leftrightarrow \bigcup X \subseteq X$

Lemma

1. Jsou-li X, Y tranzitivní pak $X \cap Y, X \cup Y$ jsou tranzitivní.
2. X třída, pro kterou každé $x \in X$ je tranzitivní množina, pak $\bigcap X$ a $\bigcup X$ jsou tranzitivní.
3. Je-li X tranzitivní třída, pak $\in$ je tranzitivní na $X \leftrightarrow$ každý $x \in X$ je tranzitivní množina.

Důkaz:

1. Je pozorování.
2. Plyne analogicky z 1.
3. Jako *Cvičení*.

□

Definice:

Množina x je **ordinální číslo (ordinála)** pokud x je tranzitivní množina a $\in$ je dobré uspořádání na x.

- Třídu všech ordinálních čísel značíme On.

Příklad:

ω a každé $n \in \omega$ je ordinální číslo.

Přednáška 13

Důsledek:

Pro každou nekonečnou množinu x platí $\omega \preceq x$.

Lemma

On je tranzitivní třída.

Důkaz:

- $y \in x \in On$. Máme $y \leq x, \in$ je dobré ostré uspořádání na y.
- $\in$ je dobré ostré na x.
- Z lemma 3) je y tranzitivní množina.
- y je ordinála.

$\square$

Lemma

$\in$ je tranzitivní na On.

Lemma

$x, y \in On$, pak:

1. $x \notin x$
2. $x \cap y \in On$
3. $x \in y \leftrightarrow x \subset y$

Důkaz:

1. Sporem z antireflexivity $\in$ na x.
2. Přímo z definice.
3. $\rightarrow$ z tranzitivity y a 1)

- $\leftarrow y \setminus x \neq \emptyset \subseteq y, y \setminus x$ má nejmenší prvek z. Platí $z = x$ (*Cvičení*).

$\square$

Věta

$\in$ je dobré ostré uspořádání třídy On.

Důkaz:

- Antireflexivita z lemma 1), tranzitivita pak dohromady dává ostré uspořádání.
- Trichotomie: $x \neq y \in On$ podle lemma 2) $x \cap y \in On$. Sporem kdyby $x \cap y \subset x \wedge x \subset y$ pak $x \cap y \in y \wedge x \cap y \in x$, tedy $x \cap y \in x \cap y$ a to je spor s lemma 1).
- Když tedy $x \cap y = x$ pak $x \subset y$ tedy $x \in y$. Z toho plyne, že se jedná o lineární uspořádání.
- Pro dobrost stačí existence minimálního prvku (*Cvičení*).

$\square$

Důsledek:

- On je vlastní třída.
- Je-li X vlastní třída, tranzitivní, dobře uspořádaná $\in$, pak $X = On$.

Značení:

- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jsou ordinální čísla.
- $\alpha < \beta$ místo $\alpha \in \beta$.
- $\alpha \leq \beta$ místo $\alpha \in beta \vee \alpha = \beta$.

Lemma

1. Množina $x \subseteq On$ je ordinální číslo $\leftrightarrow$ x je tranzitivní.
2. $A \subseteq On, A \neq \emptyset$, pak $\bigcap A$ je nejmenší prvek A vzhledem k $\leq$.
3. $a \subseteq On$ množina, pak $\bigcup a \in On$ a $\bigcup a = \sup_{\leq} a$.

Důkaz:

1. $\rightarrow$ z definice, $\leftarrow$ z věty.
2. Z věty a $\bigcap A = \inf A$.
3. $\bigcup a$ je tranzitivní, $\bigcup a \subseteq On$ podle 1) je ordinální číslo.

$\square$

Důsledek:

ω je supremum množiny všech přirozených čísel v On. Konečné ordinály jsou právě přirozená čísla.

Cvičení

Důkaz: $\bigcup \omega \in On \wedge \bigcup \omega = \sup_{\leq} \omega$. *Zbývá ověřit* $\omega = \bigcup \omega$.

Lemma

$\alpha \in On$, pak $\alpha \cup \{\alpha\}$ je nejmenší ordinální číslo větší než α.

Důkaz:

- $\alpha \subseteq On$ protože On je tranzitivní.
- $\alpha \cup \{\alpha\}$ je tranzitivní množina ordinálních čísel.
- Podle lemma 1) $\alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinální číslo.
- Je-li $\beta \in On, \beta \in \alpha\{\alpha\}$, pak $\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$ tedy $\beta \subseteq \alpha$.

$\square$

Definice:

- $\alpha \cup \{\alpha\}$ je **následník** α.
- α je **předchůdce** $\alpha \cup \{\alpha\}$.
- α je **izolované** pokud $\alpha = 0$ nebo pokud α má předchůdce,
- jinak je **limitní**.

Věta (*O typu dobrého uspořádání.*)

Je-li a množina dobře uspořádaná relací r, pak existuje právě jedno ordinální číslo α a právě jeden izomorfismus (a, r) a $(\alpha, \leq)$.

Bez důkazu.

Definice:

α je **typ** dobrého uspořádání r.

Poznámka:

Na $On^2 = On \times On$ *lze definovat lexikografické uspořádání i maximo-lexikografické uspořádání.*

Princip transfinitní indukce

Je-li $A \subseteq On$ třída splňující $(\forall \alpha \in On)(\alpha \subseteq A \to \alpha \in A)$, potom $A = On$.

Důkaz:

Sporem: $On \setminus A \neq \emptyset$ díky dobrému uspořádání $\in$ existuje nejmenší prvek $\alpha \in On \setminus A$. Potom každé $\beta \in \alpha$ už je prvkem A, tedy $\alpha \subseteq A$, z předpokladu věty $\alpha \in A$ a to je spor.

$\square$

Věta (*Druhá verze principu transfinitní indukce.*)

Je-li $A \subseteq On$ třída splňující:

1. $0 \in A$
2. Pro každý $\alpha \in On$ platí $\alpha \in A \to \alpha \cup \{\alpha\} \in A$.
3. Je-li α lineární pak $\alpha \subseteq A \to \alpha \in A$.

Pak $A = On$.

Věta (*O konstrukci transfinitních rekurzí.*)

Je-li $G : V \to V$ třídové zobrazení, pak existuje právě jedno zobrazení $F : On \to V$ splňující $(\forall \alpha \in On) F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$.

- Varianty:
  - $F(\alpha = G(F[\alpha])$
  - $F(\alpha) = G(\alpha, F \upharpoonright \alpha)$
  - $G_1(F(\beta))$ je-li α následník β, jinak $G_2(F[\alpha])$ je-li α limitní.

Důkaz:

Je pomocí transfinitní indukce a axiomu nahrazení.

Příklad:

- *$m + n : F(m) = n + m$ se dá nadefinovat jako $F(0) = n, F(S(m)) = S(F(m))$.*
- *$AC \to VVO$: A množina g selektor na $\mathcal{P}(A)$ tak $f(0) = g(A)$ a $f(\beta) = g(A - f[\beta])$.*