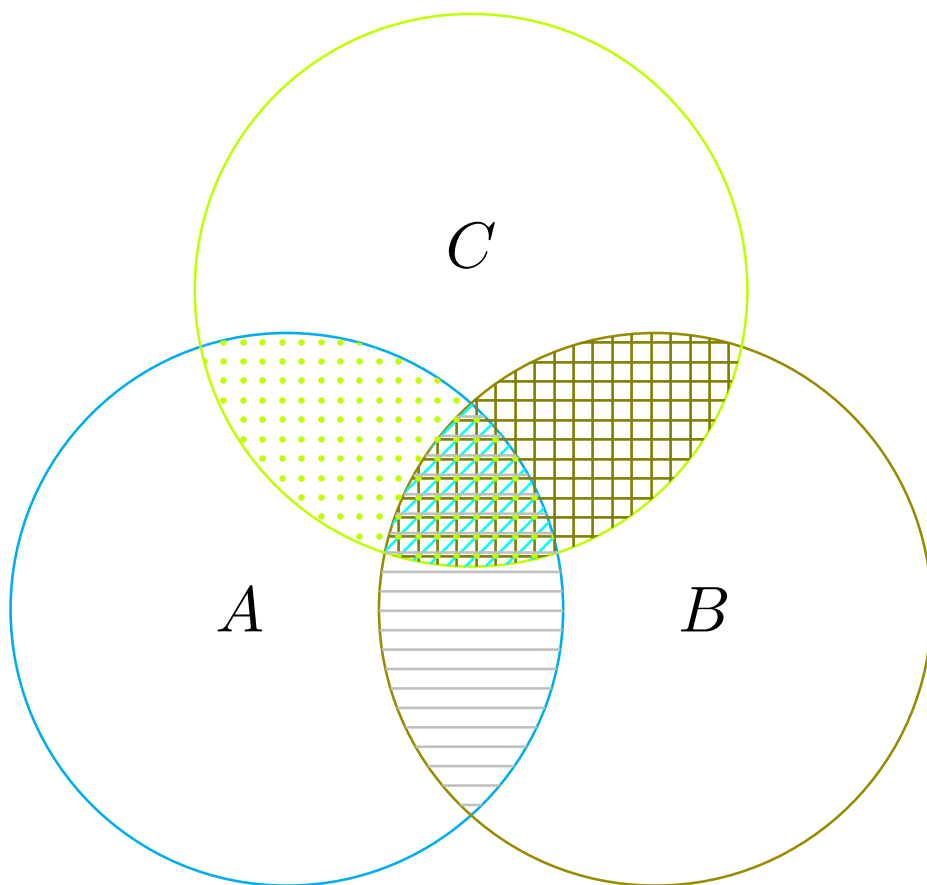


# Teorie množin

Tomáš Turek



26. února 2024

## Information

*Následující text jsou moje osobní zápisky z Teorie množin z roku 2021-2022.*

Keep in mind there may be some **mistakes**. You may visit [GitHub](#).

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
1.1	Jazyk teorie množin . . . . .	4
1.1.1	Symboly . . . . .	4
1.1.2	Formule . . . . .	4
1.1.3	Rozšíření jazyka (zkratky) . . . . .	4
1.2	Axiomy logiky (“jak se chovají logické symboly”) . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Axiomy teorie množin</b>	<b>6</b>
2.1	1.Axiom existence množin . . . . .	6
2.2	2.Axiom extenzionality . . . . .	6
2.3	3.Schéma axiomu vydělení . . . . .	6
2.3.1	Značení: . . . . .	6
2.4	4.Axiom dvojice . . . . .	7
2.5	5.Axiom sumy (axiom of the union) . . . . .	7
2.6	6.Axiom potence (power set, potenční množina) . . . . .	8
2.7	7.Schéma axiomu nahrazení . . . . .	8
2.8	8.Axiom fundovanosti (foundation, regularity) . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Třídy</b>	<b>9</b>
3.1	Rozšíření jazyka: . . . . .	9
3.2	Atomické proměnné . . . . .	9
3.3	Eliminace třídivých termů . . . . .	9
3.4	Třidové operace . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Relace</b>	<b>12</b>
4.1	Značení: . . . . .	13
4.2	Uspořádání . . . . .	14
4.2.1	Značení: . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Srovnávání mohutností</b>	<b>17</b>
5.1	Konečné množiny . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Přirozená čísla</b>	<b>23</b>
6.1	9.Axiom nekonečna (“Existuje induktivní množina.”) . . . . .	23
6.2	Spočetné množiny . . . . .	26
6.3	Axiom výběru . . . . .	28
6.3.1	Princip výběru . . . . .	28
6.3.2	10.Axiom výběru (AC - axiom of choice) . . . . .	28
6.4	Princip maximality (PM) . . . . .	29
6.4.1	Princip maximality II (PMS) . . . . .	29
6.5	Princip trichotomie $\preceq$ (PT) . . . . .	29
6.6	Princip dobrého uspořádání (VVO) . . . . .	30

<b>7</b>	<b>Ordinální čísla</b>	<b>31</b>
7.1	"Typy dobře uspořádaných množin."	31
7.1.1	Značení:	32
7.2	Princip transfinitní indukce	33

# 1. Úvod

## 1.1 Jazyk teorie množin

Jazyk teorie  $x \in Y$ . Také se bude používat \*metajazyk\* jako například: “definovat”, “formule” a “třída”.

### 1.1.1 Symboly

- Proměnné pro množiny  $X, Y, Z, x_1, x_2, \dots$ .
- Binární predikátový (relační) symbol  $=$  a taky  $\in$  (náležení).
- Dále také logické spojky:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow$  ( $\Leftarrow, \Rightarrow$ ).
- Také kvantifikátory:  $\forall$  a  $\exists$ .
- Samozřejmě i závorky  $()$ ,  $[]$ .

### 1.1.2 Formule

Atomické formule  $x = y$  a  $x \in y$ .

1. Jsou-li  $\varphi, \psi$  formule, pak  $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$  jsou také formule (popřípadě i uzavorkované).
2. Je-li  $\varphi$  formule, pak  $(\forall x)\varphi$  a  $(\exists x)\varphi$  jsou také formule.

Každá formule pak lze dostat z atomických formulí konečně mnoha pravidly 1 a 2.

### 1.1.3 Rozšíření jazyka (zkratky)

- $x \neq y$  je pro  $\neg(x = y)$ .
- $x \notin y$  je pro  $\neg(x \in y)$ .
- $x \subseteq y$  je pro “ $x$  je podmnožina  $y$ ” ( $(\forall u)(u \in x \rightarrow u \in y)$ ).
- $x \subset y$  je pro “ $x$  je vlastní podmnožina” ( $x \subseteq y \wedge x \neq y$ ).

*Cvičení: Napište formulí “množina  $x$  je prázdná”.*

## 1.2 Axiomy logiky (“jak se chovají logické symboly”)

Axiomy výrokové logiky např.: schéma axiomů: Jsou-li  $\varphi, \psi$  formule, pak

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

je **\*\*axiom\*\***.

Axiomy predikátové logiky např.: Schéma axiomů: Jsou-li  $\varphi, \psi$  formule,  $x$  proměnná, která není volná ve  $\varphi$ , pak

$$(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$$

je axiom.

Axiomy pro rovnost:

- $x$  je proměnná, pak  $x = x$  je axiom.
- $x, y, z$  jsou proměnné,  $R$  je relační symbol, pak

$$(x = y) \rightarrow (\forall z)(R(x, z) \leftrightarrow R(y, z))$$

$$(x = y) \rightarrow (\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z)$$

$$(x = y) \rightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

Odvozovací pravidla:

- Z  $\varphi, \varphi \rightarrow \psi$  odvod  $\psi$ .
- Z  $\varphi'$  odvod  $(\forall x)\varphi$ .

## 2. Axiomy teorie množin

“Jak se chová  $\in$ .” “Jaké množiny existují.”

*Zermelo-Fraenkelova teorie*, zkráceně **ZF** má celkem 9 axiomů (resp. 7 axiomů a 2 schémata). Pak je ještě 10. axiom výběru (**AC**) to pak je **ZF+AC=ZFC**.

### 2.1 1.Axiom existence množin

“Existuje množina.”

$$(\forall x)(x = x)$$

### 2.2 2.Axiom extenzionality

Udává souvislost mezi  $\in$  a  $=$ . “Množina je určena svými prvky.”

$$(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$$

*Cvičení: Dokažte  $((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z)) \rightarrow x \subseteq z$ .*

### 2.3 3.Schéma axiomu vydělení

Je-li  $\varphi(x)$  formule, která neobsahuje volnou proměnnou  $z$ . Pak:

$$(\forall a)(\forall x)(\exists z)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x)))$$

je axiom.

“Z množiny  $a$  vybereme prvky s vlastností  $\varphi(x)$  a ty vytvoří novou množinu  $z$ .” Díky axiomu extenzionality je taková  $z$  právě jedna.

#### 2.3.1 Značení:

- $\{x; x \in a \wedge \varphi(x)\}$  je zkrácení.
- $\{x \in a; \varphi(x)\}$  "Množina všech prvků  $a$  splňující  $\varphi(x)$ ."

**Definice 1.** • *Průnik:  $a \cap b$  je  $\{x, x \in a \wedge x \in b\}$ .*

- *Rozdíl:  $a \setminus b$  je  $\{x, x \in a \wedge x \notin b\}$*

*Cvičení:*

- *Napište formulí “množina  $a$  je jednoprvková”.*
- *Dokažte, že množina všech množin neexistuje.*

## 2.4 4.Axiom dvojice

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

“(Ne)každým dvěma množinám  $a, b$  existuje množina  $z$ , která má za prvky právě  $a, b$ .”

**Definice 2.** •  $\{a, b\}$  je **neuspořádaná dvojice** množin  $a, b$ , jakožto dvouprvková množina s prvky  $a, b$  (pokud  $a \neq b$ ).

- $\{a\}$  znamená  $\{a, a\}$ , nebo-li jednoprvková množina s prvkem  $a$ .

*Příklad.* Můžeme vytvořit  $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$

*Cvičení:* Dokažte  $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$ .

**Definice 3.**  $(a, b)$  je **uspořádaná dvojice** množin  $a, b$ . To je pak množina  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

*Poznámka.* Pro  $a = b$  je  $(a, b) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$ .

**Lemma 1.**

$$(x, y) = (u, v) \leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$$

*Důkaz.* •  $\leftarrow$

- $\{x\} = \{u\}$  plyne z axiomu extenzionality.
- $\{x, y\} = \{u, v\}; \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$
- $\rightarrow$
- $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$  to pak znamená, že  $\{x\} = \{u\} \vee \{x\} = \{u, v\}$  kde v obou případech  $x = u$ .
- $\{u, v\} = \{x\} \vee \{u, v\} = \{x, y\}$  tedy  $v = x \vee v = y$
- Pokud  $v = x$  pak z  $x = u$  plyne, že  $v = u = x$ .

□

**Definice 4.** Jsou-li  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  množiny, definujeme **uspořádanou  $n$ -tici**  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ . Následně  $(a_1)$  znamená  $a_1$  a je-li definována  $(a_1, \dots, a_k)$  pak  $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$  je  $((a_1, \dots, a_k), a_{k+1})$ .

**Lemma 2.**

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) \leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n)$$

*Důkaz.* Jako cvičení.

□

## 2.5 5.Axiom sumy (axiom of the union)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y \wedge y \in a))$$

**Definice 5.**  $\bigcup a$  je **suma** množiny  $a$ . Tzn  $\{x, (\exists y)(x \in y \wedge y \in a)\}$ .

Pozorování: Pokud  $a = \{b, c\}$ , pak  $\bigcup \{b, c\} = \{x, x \in b \vee x \in c\}$ .

**Definice 6.**  $b \cup c$  je  $\bigcup \{b, c\}$  sjednocení množin  $b, c$ .

**Definice 7.** Jsou-li  $a_1, \dots, a_n$  množiny, definujeme **neuspořádanou  $n$ -tici**  $\{a_1, \dots, a_n\}$  ( $n$ -prvkovou množinu, pokud každé  $a_i$  je různé) rekurzivně. Je-li definovaná  $\{a_1, \dots, a_k\}$  pro  $k \geq 2$ , pak  $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$  je  $\{a_1, \dots, a_k\} \cup \{a_{k+1}\}$ .



## 2.6 6.Axiom potence (power set, potenční množina)

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow x \subseteq a)$$

“Existuje množina  $z$  jejichž prvky jsou právě podmnožiny množiny  $a$ .”

**Definice 8.**  $\mathcal{P}(a)$  je “ $\{x; x \subseteq a\}$ ” potenční množina  $[2^a]$  množiny  $a$  (potence  $a$ ).

*Příklad.*  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  a  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

*Cvičení:* Co je  $\mathcal{P}(\cup a)$  a jestli  $\cup(\mathcal{P}(a)) = a$ ?

## 2.7 7.Schéma axiomu nahrazení

“Obraz množiny funkcí je množina.”

Je-li  $\psi(u,v)$  formule, která neobsahuje volné proměnné  $w, z$ , pak

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \wedge \psi(u,w)) \rightarrow v = w) \rightarrow (\forall a)(\forall z)(\forall v)(v \in z \leftrightarrow (\exists u)(u \in a \wedge \psi(u,v)))$$

je axiom.

- “Je-li  $\psi$  funkce (částečná) určená formulí:  $\psi(u,v)$  je  $f(u) = v$ , pak obrazem  $a$  touto funkcí je opět množina  $(z)$ .”
- Také implikuje schéma vydělení:  $\varphi(u) \wedge u = v$ .
- Poznámka: *transfinitní rekurze, konstrukce  $\omega + \omega$ , Zornovo lemma, věta o dobrém uspořádání.*

## 2.8 8.Axiom fundovanosti (foundation, regularity)

$$(\forall a)(a \neq \emptyset \rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset))$$

“Každá množina má prvek, který je s ní disjunktní.”

*Cvičení:* Ukažte, že Axiom fundovanosti zakazuje existenci konečných cyklů relace  $\in$ . Tedy množiny  $y$  takové, že  $y \in y$ , ale i  $y_1, y_2, \dots, y_n$  takové, že  $y_1 \in y_2 \in \dots \in y_n \in y_1$ .

Díky axiomu fundovanosti lze všechny množiny vygenerovat z prázdné množiny operacemi  $\mathcal{P}, \cup$ .

## 3. Třídý

**Definice 9.**  $\varphi(x)$  je formule a  $\{x; \varphi(x)\}$  označuje “seskupení” množin, pro které platí  $\varphi(x)$ .

- Pokud  $\varphi(x)$  je tvaru  $x \in a \wedge \psi(x)$ , pak je to množina (axiom vydělení).
- $\{x; \varphi(x)\}$  je třídivý term, soubor které označuje je **třída** určená formulí  $\varphi(x)$ .
- “Definovatelný soubor množin.”
- Je-li  $y$  množina, pak  $y = \{x; x \in y \wedge x = x\}$  je třída.
- Tedy každá množina je i třída.
- **Vlastní třída** je třída, která není množinou.

### 3.1 Rozšíření jazyka:

- Ve formulích na místě volných proměnných připustíme třídivé termy.
- Navíc proměnné pro třídy jsou  $X, Y, \dots$  (nebude možné je kvantifikovat).

### 3.2 Atomické proměnné

- $x = y, x \in y, x = X, x \in X, X \in x, X = Y, X \in Y$
- Plus ještě výrazy vzniklé nahrazením  $\{x, \varphi(x)\}$  za  $x$  a  $\{y, \varphi(y)\}$  za  $y$ .
- Ostatní formule rozšířeného jazyka vznikají pomocí logických spojek ( $\neg, \vee, \wedge, \leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow$ ) a kvantifikací množinových proměnných ( $(\forall x) \dots (\exists y) \dots$ ).
- Formule s třídivými termy bez třídivých proměnných označován jako “zkrácený zápis” formule základního jazyka.
- Formule s třídivými proměnnými označované jako “schéma formulí” základního (popř. rozšířeného) jazyka.

### 3.3 Eliminace třídivých termů

$x, y, z, X, Y$  jsou proměnné a  $\varphi(x), \psi(x)$  formule základního jazyka.  $X$  zastupuje  $\{x, \varphi(x)\}$  a  $Y$  zastupuje  $\{y, \varphi(y)\}$ .

1.  $z \in X$  zastupuje  $z \in \{x, \varphi(x)\}$ .
  - “ $z$  je prvkem třídy všech množin, splňující  $\varphi(x)$ .”
  - Nahradíme:  $\varphi(z)$ .
2.  $z = X$  zastupuje  $z = \{x, \varphi(x)\}$ .

- “Množina  $z$  se rovná třídě  $X$ .”
  - Nahradíme:  $(\forall u)(u \in z \leftrightarrow \varphi(u))$ .
3.  $X \in Y$  zastupuje  $\{x, \varphi(x)\} \in \{y, \psi(y)\}$ .
- Nahradíme:  $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge \psi(u))$ .
4.  $X \in y$  zastupuje  $\{x, \varphi(x)\} \in y$ .
- Nahradíme:  $(\exists u)(\forall v)((v \in u \leftrightarrow \varphi(v)) \wedge u \in y)$ .
5.  $X = Y$  zastupuje  $\{x, \varphi(x)\} = \{y, \psi(y)\}$ .
- Nahradíme:  $(\forall u)(\varphi(u) \leftrightarrow \psi(u))$

Meta pozorování: Formule rozšířeného jazyka určují stejné třídy jako formule základního jazyka. Příklad  $\{x; x \notin \{z, \psi(z)\}\} \rightarrow \{x; \neg\psi(x)\}$ .

### 3.4 Třídivé operace

**Definice 10.** •  $A \cap B$  je  $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$ .

- $A \cup B$  je  $\{x, x \in A \vee x \in B\}$ .
- $A \setminus B$  je  $\{x, x \in A \wedge x \notin B\}$ .
- Pokud  $A = \{x, \varphi(x)\}$  a  $B = \{y, \psi(y)\}$ , pak  $A \cap B = \{z, \varphi(z) \wedge \psi(z)\}$ .

**Definice 11.**  $\{x; x = x\}$  je **univerzální třída**, která se značí jako  $V$ .

- $A$  je třída, (absolutní) doplněk  $A$  je  $V \setminus A$ , který se značí jako  $-A$ .
- $A \subseteq B, A \subset B$  značí, že  $A$  je podtřídou  $B$  (popř. vlastní podtřídou).

*Cvičení: Rozepište v základním jazyce teorie množin.*

1.  $\bigcup A$  nebo-li suma třídy  $A$  je  $\{x, (\exists a)(a \in A \wedge x = a)\}$
2.  $\bigcap A$  nebo-li průnik třídy  $A$  je  $\{x, (\forall a)(a \in A \rightarrow x = a)\}$
3.  $\mathcal{P}(A)$  nebo-li potenciál třídy  $A$  je  $\{a, a \subseteq A\}$ .

$\bigcap \emptyset = V$ , protože  $\{x, (\forall a)(a \in \emptyset \rightarrow x = a)\}$ .

*Cvičení:  $a \neq \emptyset$ , je  $\bigcap a$  množina?*

*Cvičení: Je  $\mathcal{P}(V) = V^2$ ?*

**Lemma 3.** Univerzální třída  $V$  není množina.

*Důkaz. Cvičení.*

□

**Lemma 4.** Je-li  $A$  třída a množina, průnik  $A \cap a$  je množina.

*Důkaz.* Schéma axiomu vydělení  $A = \{x, \varphi(x)\}, a \cap A = \{x, x \in a \wedge \varphi(x)\}$ .

□

**Definice 12.** *Kartézský součin tříd*  $A, B$  značen  $A \times B$  je  $\{(a, b), a \in A \wedge b \in B\}$  což je zkrácený zápis pro  $\{x, (\exists a)(\exists b)(x = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}$ .

**Lemma 5.** *Jsou-li  $a, b$  množiny pak  $a \times b$  je množina.*

*Důkaz.* • Platí  $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ .

- Vpravo je množina axiomu dvojice, sumy, dvakrát potence.
- Pak podle lemma (axiomu vydělení)  $A = a \times b, a = \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$  tedy  $a \times b$  je množina.
- Pokud  $u \in a, v \in b$ , pak  $\{u\}, \{u, v\} \subseteq a \cup b$  tedy  $\{u\}, \{u, v\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$ , stejně pak  $\{\{u\}, \{u, v\}\} \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$  a  $\{\{u\}, \{u, v\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ .

□

**Definice 13.**  $X$  je třída, pak  $X^1 = X$ , induktivně pak  $X^n = X^{n-1} \times X$ .

$X^n$  je třída všech uspořádaných  $n$ -tic prvků  $X$ .

Pozorování:  $V^n \subseteq V^{n-1} \subseteq \dots \subseteq V^1 = V$

Cvičení: Ukažte, že obecně neplatí  $X \times X^2 = X^3$ . Například pro  $X = \{\emptyset\}$ .

## 4. Relace

**Definice 14.** • Třída  $R$  je (binární) **relace**, pokud  $R \subseteq V \times V$ .

- $xRy$  zkratka za  $(x,y) \in R$ .
- $n$ -ární relace je  $R \subseteq V^n$ .

*Příklad.* • Relace náležení  $E$  je  $\{(x,y), x \in y\}$ .

- Relace identity  $Id$  je  $\{(x,y), x = y\}$ .

**Definice 15.** Je-li  $X$  relace (libovolná třída), pak:

- $Dom(X)$  je  $\{u, (\exists v)(u,v) \in X\}$
- $Rng(X)$  je  $\{v, (\exists u)(u,v) \in X\}$
- Je-li  $Y$  třída, pak  $X \parallel Y (X[Y])$  je  $\{z, (\exists y)(y \in Y \wedge (y,z) \in X)\}$ .
- Nebo-li obraz třídy  $Y$  třídou  $X$ .
- $X \upharpoonright Y$  je  $\{(y,z), y \in Y \wedge (y,z) \in X\}$ .
- Zúžení třídy  $X$  na třídu  $Y$ . (restrikce, parcelizace)

**Lemma 6.** Je-li  $x$  množina,  $Y$  třída, pak  $Dom(x), Rng(x), x \upharpoonright Y, x \parallel Y$  jsou množiny.

*Důkaz.* • Vnoříme do větší množiny.

- Platí  $Dom(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$ .
- Když  $u \in Dom(x)$  pak  $(\exists v)(u,v) \in x$  a  $u \in \{u\} \in (u,v) \in x$ . Tedy  $\{u\} \in \bigcup(x)$ , tedy  $u \in \bigcup(\bigcup(x))$ .
- Podobně i pro  $Rng(x) \subseteq \bigcup(\bigcup(x))$ .
- $v \in Rng(x) : (\exists u)(u,v) \in x$
- $v \in \{u,v\} \in (u,v) \in x$  tedy  $v \in \bigcup(\bigcup(x))$ .
- Pak už jenom  $x \upharpoonright Y \subseteq x; x \parallel Y \subseteq Rng(x)$

□

**Definice 16.** •  $R, S$  jsou relace. Pak  $R^{-1}$  je  $\{(u,v), (v,u) \in R\}$ .

- Nebo-li relace **inverzní** k  $R$ .
- $R \circ S$  je  $\{(u,v); (\exists w)((u,w) \in R \wedge (w,v) \in S)\}$ .
- Nebo-li složení relací  $R$  a  $S$ .

*Poznámka.*  $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

*Cvičení*

- Ověřte, že pro libovolnou relaci  $R$  je  $Id \circ R = R = R \circ Id$ .
- $(x, y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y$

**Definice 17.** Relace  $F$  je **zobrazení (funkce)** pokud:

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((u, v) \in F \wedge (u, w) \in F \rightarrow v = w)$$

“Pro každé  $v \in Dom(F)$  existuje právě jedna množina  $u$  taková, že  $(u, v) \in F$ .” Píšeme  $F(u) = v$ .

**Definice 18.** •  $F$  je zobrazení třídy  $X$  **do** třídy  $Y$ ;  $F : X \rightarrow Y$ , pokud  $Dom(F) = X$  a  $Rng(F) \subseteq Y$ .

- $F$  je zobrazení třídy  $X$  **na** třídu  $Y$ ; pokud navíc platí  $Rng(F) = Y$ .
- $F$  je **prosté** zobrazení pokud  $F^{-1}$  je zobrazení.
- Pokud  $(\forall v)(\forall u)(\forall w)((F(u) = w \wedge F(v) = w) \rightarrow u = v)$ .
- “Každý prvek  $Rng(F)$  má právě jeden vzor.”

Pozorování: Pokud  $F$  je prosté zobrazení, pak  $F^{-1}$  je také prosté zobrazení.

**Definice 19.**  $A$  je třída,  $\varphi$  je formule pak:

- $(\exists x \in A)\varphi$  je zkratka za  $(\exists x)(x \in A \wedge \varphi)$ .
- $(\forall x \in A)\varphi$  je zkratka za  $(\forall x)(x \in A \rightarrow \varphi)$ .

## 4.1 Značení:

**Obraz / vzor** třídy  $X$  zobrazením  $F$ .

- $F[X]$  místo  $F \parallel X : F[X] = \{y, (\exists x \in X)y = F(x)\}$
- $F^{-1}[X]$  místo  $F^{-1} \parallel X : F^{-1}[X] = \{y, (\exists x \in X)x = F(y)\}$

**Definice 20.**  $A$  je třída,  $a$  je množina, pak  ${}^a A$  je  $\{f; f : a \rightarrow A\}$ , třída všech zobrazení z  $a$  do  $A$ .

*Poznámka.* • Z axiomu nahrazení  $Rng(f)$  je množina,  $f \subseteq a \times Rng(f)$ , tedy  $f$  je množina.

- Nelze definovat  ${}^B A$  pokud  $B$  je vlastní třída a  $A \neq \emptyset$ , protože je-li  $Dom(f)$  vlastní třída, pak je i  $f$ .
- ${}^\emptyset A = \{\emptyset\}$
- ${}^x \emptyset = \emptyset$

**Lemma 7.** 1. Pro libovolné množiny  $x, y$  je  ${}^x y$  množina.

2. Je-li  $x \neq \emptyset, Y$  je vlastní třída, pak  ${}^x Y$  je vlastní třída.

- Důkaz.* 1. Pokud  $f : x \rightarrow y$ , pak  $f \subseteq x \times y$ , tedy  $f \in \mathcal{P}(x \times y)$ . Tedy  ${}^x y \subseteq \mathcal{P}(x \times y)$ .
2. Pro  $y \in Y$  definujeme konstantní zobrazení  $K_y : x \rightarrow Y$  tak, že  $(\forall u \in x)(K_y(u) = y)$ .  
 $K_y = x \times y$ , protože  $x \neq \emptyset$ , pro  $y \neq y'$  platí  $K_y \neq K_{y'}$ .  $K = \{K_y, y \in Y\}$  máme  
 $K \subseteq {}^x Y$ .
- Teď sporem: Pokud  ${}^x Y$  je množina, pak  $K$  je množina. Definujeme  $F : K \rightarrow Y$  jako  $F(K_y) = y$ . Z axiomu nahrazení  $Y$  je množina a to je spor.

□

## 4.2 Uspořádání

**Definice 21.** *Relace  $R(\subseteq V \times V)$  je na třídě  $A$ :*

*Reflexivní:*

$$(\forall x \in A)((x, x) \in R)$$

*Antireflexivní:*

$$(\forall x \in A)((x, x) \notin R)$$

*Symetrická:*

$$(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R)$$

*Slabě antisymetrická:*

$$(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow y = x)$$

*Antisymetrická*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \rightarrow \neg(yRx))$$

*Trichotomická:*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(xRy \vee yRx \vee x = y)$$

*Tranzitivní:*

$$(\forall x, y, z \in A)((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$$

Pozorování: Tyto vlastnosti jsou **dědičné**, to znamená, že platí na každé podtřídě  $B \subseteq A$ .

**Definice 22.** • *Relace  $R$  je **uspořádání na třídě  $A$** , pokud  $R$  je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.*

- $x, y \in A$  jsou **porovnatelné (srovnatelné)** relací  $R$  pokud  $xRy \vee yRx$ .

### 4.2.1 Značení:

$x \leq_R y$  znamená  $xRy$ , neboli " $x$  je menší nebo rovno  $y$  vzhledem k  $R$ ."

**Definice 23.** • Uspořádání  $R$  je **lineární** pokud  $R$  je trichotomické.

- $R'$  je **ostré** uspořádání pokud je tvaru  $R \setminus Id$  (je antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní).
- $x <_R y$  značí  $xR'y$

Cvičení: Doplňte tabulku ANO/NE.

Relace	Uspořádání?	Ostré?
$E$		
$Id$		

**Definice 24.** Nechť  $R$  je uspořádání na třídě  $A$  a nechť  $X \subseteq A$ . Řekněme, že  $a \in A$  je (vzhledem k  $R$  a  $A$ ):

- **Majorita (horní mez)** třídy  $X$ , pokud  $(\forall x \in X)(x \leq_R a)$ .
- **Minoranta (dolní mez)** třídy  $X$ , pokud  $(\forall x \in X)(a \leq_R x)$ .
- **Maximální prvek** třídy  $X$ , pokud  $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(a <_R x))$ .
- **Minimální prvek** třídy  $X$ , pokud  $a \in X \wedge (\forall x \in X)(\neg(x <_R a))$ .
- **Největší prvek** třídy  $X$ , pokud  $a \in X$  a  $a$  je majoranta  $X$ .
- **Největší prvek** třídy  $X$ , pokud  $a \in X$  a  $a$  je minoranta  $X$ .
- **Supremum** třídy  $X$ , pokud  $a$  je nejmenší prvek třídy všech majorant  $X$ .
- **Infimum** třídy  $X$ , pokud  $a$  je největší prvek třídy všech minorant  $X$ .

Pozorování: Největší implikuje maximální, pokud  $R$  je lineární, tak platí i opačná implikace. Také největší a supremum je vždy nejvýše 1. Lze značit jako  $a = \max_R(X)$  a  $a = \sup_R(X)$ .

**Definice 25.** •  $X$  je **shora omezená**, pokud existuje majoranta  $X$  v  $A$ .

- $X$  je **zdola omezená**, pokud existuje minoranta  $X$  v  $A$ .
- $X$  je **dolní množina**, pokud  $(\forall x \in X)(\forall y \in A)(y \leq_R x \rightarrow y \in X)$ .
- Analogicky i horní množina.
- $x \in A$ , pak  $|\leftarrow, x]$  je  $\{y, y \in A \wedge y \leq_R x\}$ . Nebo-li horní ideál omezená  $x$ .

Pozorování:  $R$  uspořádání na  $A$ , pak pro libovolné  $x, y \in A$  platí  $x \leq_R y \leftrightarrow |\leftarrow, x] \subseteq |\leftarrow, y]$ .

Poznámka. • Konstrukce  $\mathbb{R}$  z  $\mathbb{Q}$ : **Dedekindovy řezy**.



- $X \subseteq \mathbb{Q}$ ,  $X$  je dolní množina (vzhledem k  $\subseteq$ ) a navíc existuje-li  $\sup X$ , pak  $\sup X \in X$ .

**Definice 26.** *Uspořádání  $R$  na třídě  $A$  je **dobré**, pokud každá neprázdná podmnožina  $A : (u \subseteq A)$  má nejmenší prvek vzhledem k  $R$ .*

*Cvičení: Napsat definice pomocí logických formulí.*

Pozorování: “Dobré” je dědičná vlastnost. Dobré implikuje lineární.

*Cvičení: Najděte nějaké množiny, na nichž je  $E$  dobré ostré uspořádání.*

**Definice 27.** ***Ekvivalence** je pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

## 5. Srovnávání mohutností

**Definice 28.** • Množiny  $x, y$  mají **stejnou mohutnost** (psáno  $x \approx y$ ) pokud existuje prosté zobrazení  $x$  na  $y$  (nebo-li bijekce). Někdy označováno jako  $x$  je ekvivalentní  $y$ .

- Množina  $x$  má **mohutnost menší nebo rovnou** mohutnosti  $y$  (psáno  $x \preceq y$ ) pokud existuje prosté zobrazení  $x$  do  $y$ . Někdy označováno jako  $x$  je subvalentní  $y$ .
- $x$  má **menší mohutnost** než  $y$  (psáno  $x \prec y$ ) pokud platí  $x \preceq y \wedge \neg(x \approx y)$ .

Pozorování:  $x \subseteq y \rightarrow x \preceq y$  (identita),  $x \subset y \rightarrow x \preceq y$  (ne  $x \prec y$ , například  $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ).

*Poznámka.* To jestli  $\preceq$  je trichotomická v **\*\*ZF\*\*** nelze rozhodnout. Přidám axiomu výběru už ale ano.

**Lemma 8.** Jsou-li  $x, y, z$  množiny, potom:

1.  $x \approx x$
2.  $x \approx y \rightarrow y \approx x$
3.  $((x \approx y) \wedge (y \approx z)) \rightarrow x \approx z$ , tedy  $\approx$  je ekvivalence.
4.  $x \preceq x$
5.  $x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z$

*Důkaz.* Prakticky jen triviální, stačí najít dané zobrazení.

- $Id$
- $F \rightarrow F^{-1}$
- $F \wedge G \rightarrow F \circ G$
- $Id$
- $F \wedge G \rightarrow F \circ G$

□

Pozorování:  $x \approx y \rightarrow (x \preceq y \wedge y \preceq x)$

**Theorem 1** (Cantor-Bernstein).

$$(x \preceq y \wedge y \preceq x) \rightarrow x \approx y$$

*Důkaz.* Důkaz se provede pomocí grafů. Také bude potřeba dodatečné lemma, které bude později. Jako graf si představíme bipartitní, kde jedna partita je  $x$  a druhá  $y$ . Následně přidáme orientované hrany jakožto funkce  $f$  a  $g$ , kde  $f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow x$  jsou prosté zobrazení. Teď se podíváme na komponenty grafu.

1. Buď může být kružnice sudé délky.
2. Nebo cesta s počátkem.
3. Anebo cesty obousměrné.

Nyní uvažme “indukovaná” zobrazení:  $(\hat{f}) : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(y)$ . Tahle funkce je monotónní vzhledem k inkluzi. Definujeme  $H : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$  takto: Pro  $u \subseteq x$  nechť  $H(u) = x - g[y - f[u]]$ .  $H$  je monotónní vzhledem k inkluzi.  $u_1 \subseteq u_2 \Rightarrow f[u_1] \subseteq f[u_2] \Rightarrow y - f[u_1] \supseteq y - f[u_2] \Rightarrow g[y - f[u_1]] \supseteq g[y - f[u_2]] \Rightarrow H(u_1) \subseteq H(u_2)$ . Podle lemma o pevném bodě  $(\exists c)(H(c) = c)$ , tedy  $x - g[y - f[c]] = c \Rightarrow x - c = g[y - f[c]]$ . Tedy  $g^{-1}$  je prosté zobrazení  $x \setminus c$  na  $y \setminus f[c]$ . Stačí definovat  $h : x \rightarrow y$  jako:

$$h(u) = \begin{cases} f(u) & \text{pokud } u = c \\ g^{-1}(u) & \text{jinak} \end{cases}$$

$h$  je prosté zobrazení  $x$  na  $y$ . □

**Definice 29.** Zobrazení  $H : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$  je **monotónní** (vzhledem k inkluzi) pokud pro každé dvě množiny  $u, v \subseteq x$  platí  $u \subseteq v \rightarrow H(u) \subseteq H(v)$ .

**Lemma 9.** Je-li  $H : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$  zobrazení monotónní vzhledem k inkluzi, pak existuje podmnožina  $c \subseteq x$  taková, že  $H(c) = c$ . Též označován jako **pevný bod**.

*Důkaz.*  $A = \{u, u \subseteq x \wedge u \subseteq H(u)\}$ ,  $c = \bigcup A$  neboli supremum.  $u \in A$  pak dostanu dvě možnosti:

1.  $u \subseteq c$
2.  $u \subseteq H(u) \subseteq H(c)$  (díky tomu, že  $H$  je monotónní)

Z toho pak plyne, že  $H(c)$  je majoranta a tedy  $c \subseteq H(c)$ . Pak z monotonie platí  $H(c) \subseteq H(H(c))$ , tedy  $H(c) \in A$ , takže  $H(c) \subseteq c$ , nebo-li  $c$  je majoranta. Z obou inkluzí pak plyne, že  $c = H(c)$ . □

*Cvičení:* Ilustrace monotónní funkce  $h : [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

*Cvičení:*  $A \subseteq \mathcal{P}(x)$  a uspořádání  $\subseteq$ , pak  $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$  a  $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$ .

*Příklad.* •  $\omega = \mathbb{N}_0$  pak  $\omega \approx \omega \times \omega$

- $f : \omega \rightarrow \omega \times \omega$  jako  $f(n) = (0, n)$
- $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  jako  $g((m, n)) = 2^m 3^n$
- Podle Věty platí  $\omega \approx \omega \times \omega$ . item  $h : \omega \rightarrow \omega \times \omega$  jako  $h((m, n)) = 2^m(2n + 1) - 1$

*Cvičení:* Ověřte, že  $g$  je prosté a  $h$  je bijekce.

*Cvičení:*  $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$

*Cvičení:*  $[0,1] \approx [0,1] \times [0,1]$

**Lemma 10.** Nechť  $x, y, z, x_1, y_1$  jsou množiny, pak:

1.  $x \times y \approx y \times x$
2.  $x \times (y \times z) \approx (x \times y) \times z$

3.  $(x \approx x_1 \wedge y \approx y_1) \rightarrow (x \times y \approx x_1 \times y_1)$
4.  $x \approx y \rightarrow \mathcal{P}(x) \approx \mathcal{P}(y)$
5.  $\mathcal{P}(X) \approx^x 2$ , kde  $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

*Důkaz.* Vždy jde o to najít vhodné funkce.

1.  $(u, v) \rightarrow (v, u)$
2.  $(u, (b, c)) \rightarrow ((u, b), c)$
3.  $f : x \rightarrow x_1, g : y \rightarrow y_1 : (a, b) \rightarrow (f(a), g(b))$
4.  $f : x \rightarrow y, u \rightarrow f[u]$  (izomorfismus vzhledem k inkluzi)
5. Pro  $u \subseteq x$  definujeme charakteristickou funkci  $\chi_a : x \rightarrow 2$ , kde;

$$\chi_a(v) = \begin{cases} 1 & v \in a \\ 0 & v \notin a \end{cases}$$

Zobrazení  $\{(a, \chi_a); a \subseteq x\}$  je prosté a zobrazuje  $\mathcal{P}(x)$  na  $2^x$ . □

## 5.1 Konečné množiny

**Definice 30** (Tarski). *Množina  $x$  je **konečná**, označíme  $Fin(x)$ , pokud každá neprázdная podmnožina  $\mathcal{P}(x)$  má **maximální** prvek vzhledem k inkluzi.*

*Cvičení:* Napište definici pomocí formule.

Pozorování:  $x$  je konečná právě tehdy, když každá neprázdная podmnožina  $\mathcal{P}(x)$  má minimální prvek vzhledem k inkluzi.

*Důkaz.* Uvažme  $d : \mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$  jako  $d(u) = x \setminus u$ .  $u \subseteq v \Leftrightarrow d(u) \supseteq d(v)$  □

**Definice 31.** *Množina  $a$  je **Dedekindovsky konečná** pokud má větší mohutnost než každá vlastní podmnožina  $b \subset a$ . (Nebo-li neexistuje prosté zobrazení  $a$  na  $b$ .)*

**Lemma 11.** *Je-li množina  $a$  konečná tak je i Dedekindovsky konečná.*

*Důkaz.* Nutno dokázat, že pokud  $b \subset a$  pak  $b \preceq a$ . Sporem:  $b \approx a$ . Necht  $y = \{b, b \subset a \wedge b \approx a\}$ ,  $y \neq \emptyset$ ,  $y \in \mathcal{P}(a)$ . Necht  $c \in y$  je minimální prvek  $y$  vzhledem k  $\subseteq$ . Necht  $f : a \rightarrow a$  je prosté zobrazení  $a$  na  $c$ .  $d = f[c]$ .  $f \upharpoonright c$  je prosté zobrazení  $c$  na  $d$ . Tedy  $c \approx d$ , tedy  $d \in y$ .  $d \subseteq c : (\exists x)(x \in a \setminus c)$  pak  $f(x) \in c \setminus d$ . Spor s minimalitou volby  $c$ . □

*Poznámka.* Opačná implikace v **ZF** není dokazatelná.

- Existuje lineární uspořádání  $\leq$ , které je dobré, pak i  $\geq$  je dobré.
- Existuje lineární uspořádání a každá 2 lineární uspořádání jsou izomorfní.
- $x$  je konečná  $\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$  je dedekindovsky konečná.

**Theorem 2.** 1. *Je-li  $a$  konečná uspořádaná množina (relací  $\leq$ ) pak každá její neprázdная podmnožina  $b \subseteq a$  má maximální prvek.*

2. Každé lineární uspořádání na konečné množině je dobré.

*Důkaz.* 1. Pro každé  $x \in a$  uvažme  $|\leftarrow, x] = \{y, y \in a \wedge y \leq x\}$ .

- $u = \{|\leftarrow, x], x \in b\}, u \subseteq \mathcal{P}(a), u \neq \emptyset$
- Z konečnosti  $a$  existuje  $m \in b$  takové, že  $|\leftarrow, m]$  je maximální prvek vzhledem k  $\subseteq$ .
- $x \leq y \Leftrightarrow |\leftarrow, x] < |\leftarrow, y]$
- Tedy  $m$  je maximální prvek  $b$  vzhledem k  $\subseteq$ .
- Minimální prvek se najde podobně, akorát to bude horní množina a minimální prvek.

2. Minimální prvek v lineárním uspořádání je už nejmenší. □

**Definice 32.**  $F$  je zobrazení  $A_1$  do  $A_2$ ,  $R_1, R_2$  jsou relace.  $F$  je **izomorfismus** tříd  $A_1, A_2$  vzhledem k  $R_1, R_2$  pokud  $F$  je prosté zobrazení  $A_1$  na  $A_2$  a  $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_2)(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow (F(x), F(y)) \in R_2$ .

**Definice 33.**  $A$  je množina uspořádaná relací  $R$ .  $B$  je množina uspořádaná relací  $S$ . Zobrazení  $F$  je **počáteční vnoření**  $A$  do  $B$ , pokud  $A_1 = \text{Dom}(F)$  je dolní podmnožina  $A$  a  $B_1 = \text{Rng}(F)$  je dolní podmnožina  $B$ . A  $F$  je izomorfismus  $A_1$  a  $B_1$  vzhledem k  $R, S$ .

**Lemma 12.** Necht  $F, G$  jsou počáteční vnoření dobře uspořádané množiny  $A$  do dobře uspořádané množiny  $B$ . Potom  $F \subseteq G$  nebo  $G \subseteq F$ .

*Důkaz.* Necht  $R$  je dobré uspořádání množiny  $A$ . Necht  $S$  je dobré uspořádání množiny  $B$ .  $\text{Dom}(F), \text{Dom}(G)$  jsou dolní podmnožiny  $A$ .  $R$  je lineární, tedy  $\text{Dom}(F) \leq \text{Dom}(G) \vee \text{Dom}(G) \leq \text{Dom}(F)$ . (BÚNO:  $\text{Dom}(F) \leq \text{Dom}(G)$ , jinak přejmenuji množiny). Dokážeme  $(\forall x \in \text{Dom}(F)) F(x) = G(x)$ . Sporem Necht  $x$  je nejmenší (vzhledem k  $R$ ) prvek množiny  $\{z, z \in A \wedge G(z) \neq F(z)\}$ . Tedy  $\forall y <_R x : F(y) = G(y)$ . Z linearit  $S$  je  $F(x) <_S G(x) \vee G(x) <_S F(x)$  (BÚNO:  $F(x) <_S G(x)$ ). Necht  $b = F(x)$ . Je-li  $z \in \text{Dom}(G)$  pak buď:  $z <_R x \wedge G(z) = F(z)$ ,  $z \geq_R x \wedge F(x) = b$ . Pak  $G(z) \geq_S G(x) >_S F(x) = b$ . V obou případech  $b \notin \text{Rng}(G)$  a tedy  $\text{Rng}(G)$  není dolní množina a to je spor. □

*Cvičení:* Lineární uspořádání jsou každé dvě dolní množiny porovnatelné inkluzí.

*Cvičení:* Co když místo dobrého uspořádání bude jen lineární uspořádání.

**Theorem 3** (O porovnávání dobrých uspořádání.).  $A$  je množina dobře uspořádaná relací  $R$ .  $B$  je množina dobře uspořádaná relací  $S$ . Pak existuje právě jedno zobrazení  $F$ , které je izomorfismus  $A$  a dolní množiny  $B$ , nebo  $B$  a dolní množiny  $A$ .

*Důkaz.*  $P$  je množina všech počátečních vnoření  $A$  do  $B$ . Necht  $F = \bigcup P$ .  $F$  je zobrazení: Když  $(x, y_1)(x, y_2) \in F$  existuje počáteční vnoření  $F_1, F_2$ , že  $(x, y_1) \in F_1, (x, y_2) \in F_2$ . Podle lemma  $F_1 \subseteq F_2$  nebo naopak. Předpokládejme, že nastala tato situace. Tedy  $(x, y_1) \in F_2$ ;  $F_2$  je zobrazení, tedy  $y_1 = y_2$ .  $F$  je počáteční vnoření: Když  $x_1 <_R x_2 \in \text{Dom}(F)$  tak existuje počáteční vnoření  $F'$  že  $x_2 \in \text{Dom}(F')$ . Tedy  $x_1 \in \text{Dom}(F') \subseteq \text{Dom}(F)$ . Podobně pro  $\text{Rng}(F) = \bigcup \text{Rng}(F')$  je dolní.  $F(x_1) = F'(x_1) <_S F'(x_2) = F(x_2)$ ,  $\text{Dom}(F) = A \vee \text{Rng}(F) = B$ . Sporem:  $A \setminus \text{Dom}(F), B \setminus \text{Rng}(F)$  jsou neprázdné, mající nejmenší prvky  $a, b$ . Definujeme  $F' = F \cup \{(a, b)\}$  je počáteční vnoření  $F' \in P, F' \subseteq F$  a to je spor. □

*Cvičení: Jednoznačnost  $F$ .*

*Cvičení: Sjednocení dolních množin je dolní množina.*

**Theorem 4.**  *$a$  je konečná množina, pak každé lineární uspořádání na  $a$  jsou izomorfní.*

*Důkaz.*  $R, S$  jsou dvě lineární uspořádání a také dobrá uspořádání.  $(a, R)$  je izomorfní dolní množině  $(a, S)$  nebo dolní množina  $(a, R)$  je izomorfní  $(a, S)$ . Dolní množina  $b, b \approx a$ , z Dedekindovy konečnosti platí, že  $a = b$ .  $\square$

**Lemma 13** (Zachovávání konečnosti.). 1.  $(Fin(x) \wedge y \subseteq x) \rightarrow Fin(y)$

2.  $(Fin(x) \wedge y \approx x) \rightarrow Fin(y)$

3.  $(Fin(x) \wedge y \preceq x) \rightarrow Fin(y)$

*Důkaz.* 1.  $w \subseteq \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x)$

2.  $\mathcal{P}(y)$  je izomorfní  $\mathcal{P}(x)$

3. Plyne z 1 a 2.  $\square$

**Lemma 14** (sjednocení konečných množin). 1.  $Fin(x) \wedge Fin(y) \rightarrow Fin(x \cup y)$

2.  $Fin(x) \rightarrow (\forall y) Fin(x \cup \{y\})$

*Důkaz.*  $w \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$  neprázdná.  $w_1 = \{u, (\exists t \in w)(u = t \cap x)\} \subseteq \mathcal{P}(x)$ . Má maximální prvek  $v_1$ .  $w_2 = \{u, (\exists t \in w)(t \cap x = v_1 \wedge t \cap y = u)\} \subseteq \mathcal{P}(y)$ . Má maximální prvek  $v_2$ .  $v_1 \cup v_2$  je maximální prvek  $w$ .  $\square$

**Definice 34.** *Třída všech konečných množin  $Fin = \{x, Fin(x)\}$ .*

**Theorem 5** (Princip indukce pro konečné množiny). *Je-li  $X$  třída, pro kterou platí:*

1.  $\emptyset \in X$ ,

2.  $x \in X \rightarrow (\forall y)(x \cup \{y\} \in X)$ , *pak  $Fin \subseteq X$ .*

*Důkaz.* Sporem: Pokud  $x \in Fin \setminus X$ . nechť  $w = \{v, v \subseteq x \wedge v \in X\}$ . Podle 1:  $\emptyset \in w$ .  $w \subseteq \mathcal{P}(x)$ , neprázdná.  $w$  má maximální prvek  $v_0$ .  $v_0 \subseteq x$ .  $v_0 \in X$ , tedy  $v_0 \neq x$  a  $v_0 \subset x$ . Tedy existuje  $y \in x \setminus v_0$ . Nechť  $v_1 = v_0 \cup \{y\}$ . Podle 2:  $v_1 \in X$ . Tedy  $v_1 \in w$ , spor s maximalitou  $v_0$ .  $\square$

**Lemma 15.**  $Fin(x) \rightarrow Fin(\mathcal{P}(x))$

*Důkaz.* Indukcí: Nechť  $X = \{x, Fin(\mathcal{P}(x))\}$ .  $\emptyset \in X$ , protože  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  je konečná. Nechť  $x \in X, y$  je množina. Chceme aby  $x \cup \{y\} \in X$ . BÚNO:  $y \notin x$  (jinak triviální). Rozdělíme  $\mathcal{P}(x \cup \{y\})$  na dvě části:  $\mathcal{P}(x \cup \{y\}) = \mathcal{P}(x) \cup (\mathcal{P}(x \cup \{y\}) \setminus \mathcal{P}(x))$ . Platí  $\mathcal{P}(x) \approx z$ , kde  $z$  se rovná předchozímu druhému prvku v sjednocení. Pro  $u \in \mathcal{P}(x)$  definujeme  $f(u) = u \cup \{y\}$ .  $f$  je prosté zobrazení  $\mathcal{P}(x)$  na  $z$ . Podle předpokladu  $Fin(\mathcal{P}(x))$ . Podle lemma  $Fin(z)$ . Podle lemma o sjednocení  $Fin(\mathcal{P}(x) \cup z)$ . Podle principu indukce  $Fin \subseteq X$ .  $\square$

*Důsledek.*  $Fin(x) \cap Fin(y) \rightarrow Fin(x \times y)$

*Důkaz.* Nechť  $z = x \cup y$ , víme  $Fin(z)$ .  $x \times y \subseteq z \times z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(z))$ .  $\square$

**Lemma 16** (sjednocení konečně mnoha konečných množin je konečná množina). Je-li  $Fin(a)$  a  $(\forall b \in a) Fin(b)$ , pak  $Fin(\bigcup a)$ .

*Důkaz.* Indukcí:  $X = \{x, x \subseteq Fin \rightarrow Fin(\bigcup x)\}$ .

1.  $\emptyset \in X$ , protože  $\bigcup \emptyset = \emptyset$ .
2. Necht  $x \in X, y$  množina. Chceme aby  $x \cup \{y\} \in X$ .

Předpokládejme, že  $x \cup \{y\} \subseteq Fin$ . Speciálně  $x \subseteq Fin$ .  $\bigcup(x \cup \{y\}) = \bigcup x \cup y$ . Obě dvě jsou konečné a sjednocení tím pádem je také konečné. Tedy  $x \cup \{y\} \in X$ . Podle principu indukce  $Fin \subseteq X$ .  $\square$

*Důsledek* (Dirichletův princip pro konečné množiny). Je-li nekonečná množina sjednocení konečně mnoha množin, pak jedna z nich musí být nekonečná.

**Lemma 17** (Každá konečná množina je srovnatelná se všemi množinami).  $Fin(x) \rightarrow (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)$

*Důkaz.* Indukcí:  $x = \{x, (\forall y)(y \preceq x \vee x \preceq y)\}$ .

1.  $\emptyset \in X$ , protože  $(\forall y)\emptyset \subseteq y$  tedy  $\emptyset \preceq y$ .
2. Necht  $x \in X, u$  je množina. BÚNO:  $u \notin X$ . Chceme  $x \cup \{u\} \in X$ , necht  $X$  je množina.

Když  $y \preceq x$ , pak  $x \preceq x \cup \{u\}$  z tranzitivity  $y \preceq x \cup \{u\}$ . Necht  $x \prec y$ .  $g$  je prosté zobrazení  $x$  do  $y$ . Necht  $v \in X \setminus Rng(g)$ . Definujeme  $h = g \cup \{(u, v)\}$ ,  $h$  je prosté zobrazení  $x \cup \{u\}$  do  $y$ . Tedy  $x \cup \{u\} \preceq y$ . Z principu indukce  $Fin \subseteq X$ .  $\square$

*Cvičení:*  $Fin(x)$  a  $f : x \rightarrow y$ , pak  $Rng(f) \preceq x$  (pomocí indukce).

*Cvičení:*  $(\forall x) Fin(x)$  lze dobře uspořádat (indukcí).

## 6. Přirozená čísla

**Definice 35** (von Neumann).  $0 = \emptyset; 1 = \{0\} = \{\emptyset\}; 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; 3 = \{0, 1, 2\} = \dots$ , *Myšlenka*: “Přirozené číslo je množina všech menších přirozených čísel.”

**Definice 36.**  $w$  je **induktivní množina**, pokud  $\emptyset \in w \wedge (\forall v \in w)(v \cup \{v\} \in w)$ .

### 6.1 9.Axiom nekonečna (“Existuje induktivní množina.”)

$$(\exists z)(0 \in z \wedge (\forall x)(x \in z \rightarrow x \cup \{x\} \in z))$$

**Definice 37.** *Množina všech přirozených čísel*  $\omega$  je  $\cap\{w, w \text{ je induktivní množina}\}$ .

**Lemma 18.**  $\omega$  je nejmenší induktivní množina.

*Důkaz.*  $0 \in \omega$ ,  $x \in \omega$ ,  $x$  patří do každé induktivní množiny.  $x \cup \{x\}$  patří do každé induktivní množiny.  $x \cup \{x\} \in \omega$ .  $\square$

Prvky  $\omega$  jsou **přirozená čísla** v teorii množin.

**Definice 38.** *Funkce následník*  $S : \omega \rightarrow \omega$ . Pro  $v \in \omega : S(v) = v \cup \{v\}$ . “Následník čísla  $v$ .”

**Theorem 6** (Princip (slabé) indukce pro přirozená čísla.). *Je-li*  $X \subseteq \omega$  *taková, že platí:*

1.  $0 \in X$ ,
2.  $x \in X \rightarrow S(x) \in X$ . *Pak*  $X = \omega$ .

*Důkaz.* 1 a 2 dohromady říká, že  $X$  je induktivní, tedy  $\omega \subseteq X$ .  $\square$

*Příklad.* Důkaz indukci: Chceme dokázat:  $(\forall n \in \omega)(\varphi(n))$ . Dokazujeme: 1.  $\varphi(0)$  a 2.  $(\forall n \in \omega)(\varphi(n) \rightarrow \varphi(S(n)))$ .

*Poznámka.* Princip silné indukce: 2:  $((\forall m \in \omega)m \in X) \rightarrow n \in X$ .

**Lemma 19** ( $\in$  je ostré uspořádání). *Pro libovolné*  $m, n \in \omega$  *platí:*

1.  $n \in \omega \rightarrow n \subseteq \omega$ 
  - “Prvky přirozených čísel jsou přirozená čísla.”
2.  $m \in n \rightarrow m \subseteq n$ 
  - “Nálezení je tranzitivní na  $\omega$ .”
3.  $n \not\subseteq n$ 
  - “ $\in$  je antireflexivní na  $\omega$ .”

*Z toho všeho plyne, že se jedná o ostré uspořádání.*



*Důkaz.* Indukcí:

1.  $0 \subseteq \omega$ , a indukční krok  $n \in \omega$ , předpokládáme, že  $n \subseteq \omega$ . Pak  $\{n\} \subseteq \omega$  tedy  $n \cup \{n\} \subseteq \omega$ .
2. Indukcí podle  $n$ :
  - 1. Krok:  $m \notin 0$  tím pádem implikace splněna.
  - 2. Krok  $X = \{n, n \in \omega \wedge (\forall m)(m \in n \rightarrow m \subseteq n)\}$ .
  - Víme  $0 \in X$ .
  - Necht  $n \in X$ , víme  $S(n) \in \omega$ .
  - Necht  $m \in S(n) = n \cup \{n\}$ . Pak buď  $m \in n$  a z IP pak  $m \subseteq n$  anebo  $m = n$  tím pádem také  $m \subseteq n \subseteq S(n)$ .
3.  $0 \not\subseteq 0$  platí, necht  $n \in \omega$  a  $n \not\subseteq n$ .
  - Sporem  $S(n) \subseteq S(n) = n \cup \{n\}$ . Z toho pak plyne, že buď  $S(n) \subseteq \{n\}$  anebo  $S(n) \subseteq n$ . V obou případech je  $S(n) \subseteq n$ , ale to pak znamená, že  $n \in S(n) \subseteq n$  což je spor s předpokladem.

□

**Lemma 20.** *Každé přirozené číslo je konečná množina.*

*Důkaz.* Indukcí:  $Fin(\emptyset)$  víme. Podle lemma  $Fin(x) \rightarrow (\forall y)Fin(x \cup \{y\})$ , speciálně pro  $Fin(x \cup \{x\})$  a to je následník. □

**Theorem 7.** *Množina  $x$  je konečná právě tehdy, když  $(\exists n \in \omega)x \approx n$ .*

*Důkaz.*  $\Leftarrow Fin(n)$  tedy  $Fin(x)$ .  $\Rightarrow$  indukcí:  $X = \{x; (\exists n \in \omega)x \approx n\}$ . Víme, že  $0 \in X$  protože  $0 \approx 0$ . Necht  $x \in X$ ,  $y$  množina. Víme, že  $(\exists n \in \omega)n \approx x$ .  $y \in x$  pak  $x \cup \{y\} = x \approx n$ ,  $y \notin x$  pak  $x \cup \{y\} \approx S(n) = n \cup \{n\}$ . K bijekci  $x$  a  $n$  přidáme  $(y, n)$ . Tedy  $Fin \subseteq X$ . □

**Lemma 21.** *Množina  $\omega$  i každá induktivní množina je nekonečná.*

*Důkaz.* Podle lemma:  $1 \ n \in \omega \rightarrow n \subseteq \omega$ , tedy  $n \in \mathcal{P}(n)$  tedy  $\omega \subseteq \mathcal{P}(n)$ ,  $\omega$  je neprázdná ale nemá maximální prvek vzhledem k inkluzi. Když  $n \subseteq \omega$  pak podle lemma 3.  $n \not\subseteq n$  a tedy  $n \subset n \cup \{n\} = S(n)$ .  $\omega \subseteq W$  tedy i induktivní množiny. □

*Cvičení:*  $\omega$  je Dedekindovsky nekonečná.

**Lemma 22** (Linearita  $\in$  na  $\omega$ ).  $m, n \in \omega$ , platí:

1.  $m \in n \leftrightarrow m \subset n$
2.  $m \in n \vee m = n \vee n \in m$  (*trichotomie*)

*Důkaz.* 1.  $\rightarrow$  plyne z lemma 2  $m \in n \rightarrow m \subset n \wedge n \not\subseteq m$

- $\Leftarrow$  indukcí podle  $n$ ;  $n = 0$  nelze splnit.
- Indukční krok. Necht platí pro nějaké  $n$  a  $\forall m$ .

- Necht  $m \subset S(n) = n \cup \{n\}$  a  $m \subseteq n$ , kdyby ne pak  $n \in m$  tedy  $n \subseteq m$  tedy  $S(n) = n \cup \{n\} \subseteq m$  a to je spor.
- $m \subset n$  z IP  $m \in n \subseteq S(n)$  tedy  $m \in S(n)$
- $m = n$  pak  $n \in S(n)$

2. Pro  $n \in \omega$  necht  $A(n) = \{m \in \omega, m \in n \vee m = n \vee n \in m\}$ .

- Dokážeme, že  $A(n)$  je induktivní, indukcí podle  $m$ .
- $n = 0 : 0 \in A(0)$ , protože  $0 = 0$
- Je-li  $m \in A(0)$ , pak:  $m = 0 : 0 \in \{m\}$  anebo  $0 \in m$  a z obou plyne  $0 \in m \cup \{m\} = S(n)$ .
- Tedy  $S(n) \in A(0)$ .
- Tedy  $A(0) = \omega$ .
- Tedy také  $(\forall n \in \omega) 0 \in A(n)$ .
- $n \in \omega, m \in \omega$ , předpokládejme, že  $m \in A(n)$ . Ukážeme, že  $S(m) \in A(n)$ .
- $m \in n \rightarrow m \subset n; \{m\} \subseteq n$  tedy  $S(m) \subseteq n$  z toho plyne, že  $S(m) = n \vee S(m) \in n$ .
- $m = n \vee n \in m$  potom  $n \in m \cup \{m\} = S(m)$
- Ve všech případech ke  $S(m) \in A(n)$ .

□

**Theorem 8.** *Množina  $\omega$  je dobře (ostře) uspořádaná relací  $\in$ .*

*Důkaz.* Necht  $a \subseteq \omega, a \neq \emptyset$ . Zvolme  $n \in a$ . Není-li  $n$  nejmenší (minimální), tak definuji  $b = n \cap a$ .  $n$  je konečná, tak i  $b$  je konečná a neprázdná.  $b \subseteq \omega$  tedy  $b$  má minimální prvek  $m$  vzhledem k náležitosti.  $m$  je minimální i v množině  $a$ : kdyby  $(\exists x \in a) x \in m$ , tak víme, že  $m \in n$ , tedy  $m \subseteq n$ , tedy  $x \in n$ , tedy  $x \in b$ . To je spor s minimalitou  $m$  v  $b$ .  $\in$  je lineární na  $\omega$ , tedy  $m$  je nejmenší prvek v  $a$ . Tedy  $\in$  je dobré uspořádání. □

*Poznámka.* Nekonečná množina  $A$  s lineárním (ostrým) uspořádáním  $<$  pro každé  $a \in A : |\leftarrow, a|$  je konečná. Pak  $<$  je dobré a  $(A, <)$  je izomorfní  $(\omega, \in)$ .

**Theorem 9** (Charakterizace uspořádání  $\in$  na  $\omega$ ). *Necht  $A$  je nekonečná množina, lineárně uspořádaná (ostře) relací  $<$  tak, že pro každé  $a \in A$  je dolní množina  $|\leftarrow, a|$  konečná. Pak  $<$  je dobré a množiny  $A, \omega$  jsou izomorfní vzhledem k  $<, \in$ .*

*Důkaz.*  $<$  je dobré:  $\emptyset \neq c \in A$ . Necht  $a \in c$ , předpokládejme, že  $a$  není minimální v  $c$ , pak definujeme  $b = c \cap |\leftarrow, a|$ .  $b$  je konečná. Tedy má minimální prvek  $m$ ,  $m$  je minimální i v  $c$ . Protože  $m \leq a$ , pak  $x \leq a$  tedy  $x \in |\leftarrow, a|$  tedy  $x \in b$  a to je spor. Izomorfismus: podle věty o porovnávání dobrých uspořádání jsou 2 možnosti:

1.  $A$  je izomorfní s dolní podmnožinou  $B \subseteq \omega$ , pak  $B$  není shora omezená. Neexistuje  $n \in \omega (\forall b \in B) b \in n$ . Sporem  $B \subseteq S(n)$  tedy  $B$  by byla konečná a to je spor.
  - To znamená, že  $(\forall n \in \omega)$  je menší než nějaký prvek  $b \in B$ .  $B$  je dolní množina, tedy  $n \in B \rightarrow \omega \subseteq B \rightarrow \omega = B$ .
2.  $\omega$  je izomorfní dolní podmnožině  $C \subseteq A$ .  $C$  není shora omezená, kdyby ano, tak  $\exists a \in A : C \subseteq |\leftarrow, a|$ ,  $C$  by byla konečná, spor.  $(\forall a \in A, \exists c \in C : a \subseteq c, C$  je dolní, tedy  $C = A$ .

□

## 6.2 Spočetné množiny

**Definice 39.** Množina  $x$  je **spočetná**, pokud  $x \approx \omega$ . Množina  $x$  je **nejvýše spočetná**, pokud je konečná nebo spočetná. Jinak je množina **nespočetná**.

**Theorem 10.** 1. Každá shora omezená množina  $A \subseteq \omega$  je konečná, každá shora neomezená  $A \subseteq \omega$  je spočetná.

2. Každá podmnožina spočetné množiny je nejvýše spočetná.

*Důkaz.* 1.  $A$  omezená, to znamená, že  $\exists n : A \subseteq S(n)$ . Takže  $Fin(S(n)) \rightarrow Fin(A)$ .

- Pokud je  $A$  neomezená, pak je nekonečná. To lze dokázat sporem, že kdyby byla konečná, pak má  $A$  maximální prvek  $m$ , tedy je shora omezená  $m$ , to je spor.
- $A$  je lineárně uspořádaná  $\in$ . Pro každé  $n \in A$  je  $|\leftarrow, n] \subseteq S(n)$ , tedy  $|\leftarrow, n]$  je konečná. Podle charakterizační věty  $A$  je izomorfní  $\omega$ . Takže  $A \approx \omega$ .

2.  $A$  je spočetná  $f : A \rightarrow \omega$  (bijekce).  $B \subseteq A$ , pak  $B \approx f[B] \subseteq \omega$ . Podle 1) je  $f[B]$  spočetná anebo konečná. □

*Příklad.* **Lexikografické uspořádání** na  $\omega \times \omega$ .

$$(m_1, n_1) <_L (m_2, n_2) \leftrightarrow (m_1 \in m_2 \vee ((m_1 = m_2) \wedge (n_1 \in n_2)))$$

*Cvičení:* Ověřte, že  $<_L$  je dobré uspořádání na  $\omega \times \omega$ .

*Cvičení:* Ověřte, že  $<_L$  na  $\omega \times 2$  je izomorfní s  $(\omega, \in)$ .

*Cvičení:* Ověřte, že  $<_L$  na  $2 \times \omega$  není izomorfní s  $(\omega, \in)$ .

**Definice 40.** **Maximo-lexikografické uspořádání** na  $\omega \times \omega$  je:

$$\begin{aligned} \max(m, n) &= \begin{cases} m & n \in m \\ n & \text{jinak} \end{cases} \\ (m_1, n_1) &<_{ML} (m_2, n_2) \\ &\quad \updownarrow \\ &((\max(m_1, n_1) \in \max(m_2, n_2)) \vee ((\max(m_1, n_1) = \\ &\quad = \max(m_2, n_2)) \wedge ((m_1, n_1) <_L (m_2, n_2)))) \end{aligned}$$

*Cvičení:* Ověřte, že  $\omega \times \omega <_{ML}$  je izomorfní  $(\omega, \in)$ .

**Theorem 11.** Jsou-li  $A, B$  spočetné množiny, pak  $A \cup B$  a  $A \times B$  jsou spočetné.

*Důkaz.*  $f : A \rightarrow \omega$  a  $g : B \rightarrow \omega$  jsou bijekce. Definujeme  $h : A \cup B \rightarrow \omega \times 2 \approx \omega$  jako:

$$h(x) = \begin{cases} (f(x), 0) & x \in A \\ (g(x), 1) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

$h$  je prosté. Tedy  $A \cup B \subseteq \omega \times 2 \approx \omega \wedge \omega \preceq A \preceq A \cup B$  a z Cantor-Bernsteinovy věty implikuje, že  $\omega \approx A \cup B$ .  $A \times B$  definujeme  $k : A \times B \rightarrow \omega \times \omega$  jako  $k((a, b)) = (f(a), g(b))$ ,  $k$  je bijekce. Opět mám  $A \times B \approx \omega \times \omega \approx \omega$ . □

*Důsledek.*  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  jsou spočetné. Kde  $\mathbb{Z}$  lze modelovat jako množinu dvojic, kde první je číslo a druhé bool jestli je kladné nebo ne. A  $\mathbb{Q}$  jako množinu dvojic  $(m,n)$  kde je číslo nejmenší společný dělitel  $(m,n) = 1$  a číslo je  $\frac{m}{n}$ .

*Důsledek.* Konečná sjednocení, konečné součiny jsou spočetné. **Dirichletův princip:** je-li  $A$  nespočetná,  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , potom aspoň jedna množina  $A_i$  je nespočetná. Konečná podmnožina  $[A]^{<\omega}$  konečné posloupnosti jsou spočetné.

*Cvičení:* Je-li  $A$  nespočetné,  $B$  spočetná,  $C$  konečná, potom  $A \cup C, A \setminus C$  jsou nespočetné a  $B \cup C, B \setminus C$  jsou spočetné,  $A \cup B, A \setminus B$  jsou nespočetné.

*Poznámka.* Spočetné sjednocení spočetně mnoha množin  $\bigcup A$ , kde  $A$  je spočetná a  $(\forall a \in A)$  jsou spočetné.

**Theorem 12** (Cantor).

$$x \prec \mathcal{P}(x)$$

*Důkaz.* Pomocí diagonální metody.  $\preceq: f(y) = \{y\}, f: x \rightarrow \mathcal{P}(x)$  je prosté. Definujme  $y = \{t, t \in x \wedge t \notin f(t)\}$ . Potom  $y \subseteq \mathcal{P}(x)$  nemá vzor při  $f$ . Kdyby

$$f(v) = y : \begin{cases} v \in y & \text{pak } v \notin f(v) = y \quad \text{SPOR} \\ v \notin y = f(v) & \text{tedy } v \in y \quad \text{SPOR} \end{cases}$$

□

*Důsledek.*  $\mathcal{P}(\omega)$  je nespočetná.

*Důsledek.*  $V$  není množina:  $\mathcal{P}(V) \subseteq V$ , kdyby byla množina, pak by musela platit Cantorova věta.

**Theorem 13.**

$$\mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R} \approx [0,1]$$

*Důkaz.* Víme  $\mathcal{P}(\omega) \approx^\omega 2$  podmnožiny  $\leftrightarrow$  charakteristická funkce  $\leftrightarrow$  posloupnosti  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ , kde  $a_i \in \{0,1\}$ .  $[0,1] \approx^\omega 2$ :  $a \in [0,1]$  zapíšu v binární soustavě tak, že pokud je to nula, tak je to nekonečně nul a jinak vždy tak, aby obsahovalo nekonečno jedniček.  $\leftarrow$  použijeme trojkovou soustavu.  $(a_0, a_1, a_2, \dots) \rightarrow a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n+1}}$ . Cantor-Bernstein  $\rightarrow [0,1] \approx^\omega 2$ . (pozn.: Cantorovo diskontinuum).  $[0,1] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \rightarrow [0,1]$  nějakou vhodnou funkci např.  $\frac{\pi/2 - \arctan(x)}{\pi}$ . □

*Poznámka.* Množina algebraických čísel (tj. kořeny polynomů s racionálními koeficienty) je spočetná.

*Cvičení:* Pokrytí  $N$  intervaly.

1. Konečně.

$$\bullet A \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \text{ pak } \sum(b_i - a_i) \geq 1$$

2. Nekonečně.

$$\bullet \forall \epsilon > 0 : \exists I_1, I_2, \dots, A \subseteq \bigcup I_i; \sum(b_i - a_i) < \epsilon$$

*Poznámka.* **Hypotéza kontinua** je, že každá nekonečná podmnožina  $\mathbb{R}$  je buď spočetná anebo ekvivalentní s  $\mathbb{R}$ .

## 6.3 Axiom výběru

### 6.3.1 Princip výběru

Pro každý rozklad  $r$  množiny  $x$  existuje **výběrová množina**. To jest  $v \subseteq x$ , pro kterou platí  $(\forall u \in r)(\exists x)(v \cap u = \{x\})$ .

**Definice 41.** Je-li  $X$  množina, pak funkce  $f$  definovaná na  $X$  splňující  $(y \in X \wedge y \neq \emptyset) \rightarrow f(y) \in y$  se nazývá **\*\*selektor\*\*** na množině  $X$ .

### 6.3.2 10.Axiom výběru (AC - axiom of choice)

Na každé množině existuje selektor.

#### Ekvivalentně

Každou množinu lze dobře uspořádat.  $\leq$  je trichotomická. Zornovo lemma.

*Důsledek.* • Každý vektorový prostor má bázi.

- Součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní.
- Hahn-Banachova věta.
- Princip kompaktnosti.
- Banach Tarski (rozdělení koule na malé části a vytvoření dvou stejně velkých koulí).

**Definice 42.** (Indexový) soubor množin  $\langle F_j; j \in J \rangle$ . Kde  $F$  je zobrazení s definovaným obrazem  $J$ . Pro  $j \in J : F_j = F(j)$ .  $J$  je **indexová třída** a jeho prvky jsou **indexy**.

Lze definovat:

$$\begin{cases} \bigcup_{j \in J} F_j \text{ jako } \{x, (\exists j \in J)x \in F_j\} \\ \bigcup_{j \in J} F_j = \bigcup \text{Rng}(F) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bigcap_{j \in J} F_j \text{ jako } \{x, (\forall j \in J)x \in F_j\} \\ \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcap \text{Rng}(F) \end{cases}$$

Kartézský součin souboru množin indexovaného množinou  $J$  je  $X_{j \in J} F_j : \{f, f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} F_j \wedge (\forall j \in J)f(j) \in F_j\}$ .

**Lemma 23.** Je-li  $J$  množina, pak  $X F_j$  je množina. Je-li  $(\forall j \in J) F_j = Y$ , pak  $X_{j \in J} F_j =^J Y$ .

*Důkaz.* Axiom nahrazení.  $\text{Rng}(F)$  je množina,  $\bigcup \text{Rng}(F)$  je množina.  $^J \bigcup_{j \in J} F_j$  je množina.  $X F_j \subseteq ^J \bigcup_{j \in J} F_j$ .  $\square$

**Lemma 24.** NTJE: (Následující tvrzení jsou si ekvivalentní.)

1. Axiom výběru.
2. Princip výběru.
3. Pro každou množinovou relaci  $s$  existuje funkce  $f \subseteq s$  taková, že  $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(s)$ .

4. Kartézský součin  $X_{i \in x} a_i$  neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný.

*Důkaz.*  $1 \Rightarrow 2$  :  $r$  rozklad  $X$ , podle 1 existuje selektor  $f$  na  $r$ . Pak  $Rng(f)$  je výběrová množina.  $2 \Rightarrow 3$  : BÚNO:  $s \neq \emptyset$ . Vytvoříme rozklad  $s$ .  $n = \{\{i\} \times s \parallel \{i\}; i \in Dom(s)\} = \{\{(i,x), (i,x) \in s\}, i \in Dom(s)\}$ . Výběrová množina  $n$  je funkce, která je podmnožina  $s$  a má stejný definiční obor.  $3 \Rightarrow 4$  : Máme soubor množin  $\langle a_i, i \in x \rangle$ . Vytvoříme relaci  $s = \{(i,y), i \in x \wedge y \in a_i\}$ . Funkce  $f \subseteq s : Dom(f) = Dom(s) = x$  je prvkem  $X_{i \in x} a_i$ .  $4 \Rightarrow 1$  :  $x$  množina. BÚNO:  $x \neq \emptyset, \emptyset \in X$ .  $ID \upharpoonright x$  určuje soubor  $\langle y; y \in x \rangle$ . Každý prvek  $X_{y \in x} y$  je selektor na  $x$ .  $\square$

**Lemma 25.** *Sjednacení spočetného souboru spočetných množin je spočetné. (Popřípadě je všude místo spočetné nejvýše spočetné.)*

*Důkaz.* Soubor  $\langle B_j; j \in J \rangle$ . BÚNO:  $I = \omega$ . Najdeme prosté zobrazení  $\bigcup_{j \in \omega} B_j$  do  $\omega \times \omega$ . Uvažujme soubor  $\langle E_j; j \in \omega \rangle$  kde  $E_j$  je množina všech prostých zobrazení  $B_j$  do  $\omega$ . Podle lemma 4) je  $X_{j \in \omega} E_j$  neprázdný, tedy existuje soubor  $\langle f_j; j \in \omega \rangle$ , kde  $f_j \in E_j$ . Definujme  $h; \bigcup_{j \in \omega} B_j \rightarrow \omega \times \omega$  jako  $h(x) = (j, f_j(x))$ . Kde  $j$  je nejmenší prvek  $\omega$  pro který  $x \in B_j$ .  $\square$

*Poznámka.* Bez AC je bezesporné ZF a to, že " $\mathbb{R}$  jsou spočetným sjednocením spočetných množin".

## 6.4 Princip maximality (PM)

- $AC \leftrightarrow PM$
- Je-li  $A$  množina uspořádaná relací  $\leq$  tak, že každý řetězec má horní mez.
- Pak pro každé  $a \in A$  existuje maximální prvek  $b \in A$  takový, že  $a \leq b$ .

**Definice 43.**  $B \subseteq A$  je **řetězec** pokud  $B$  je lineárně uspořádaná  $\leq$ .

*Poznámka.* V aplikacích často pro  $(A, \subseteq); A \subseteq \mathcal{P}(x)$  stačí ověřit, že  $\bigcup B \in A$ .

*Cvičení:* Ukažte pomocí PM: Je-li  $(A, \leq)$  uspořádaná množina, pak pro každý řetězec  $B \subseteq A$  existuje maximální řetězec  $C$  splňující  $B \subseteq C \subseteq A$ .

### 6.4.1 Princip maximality II (PMS)

Je-li  $(A, \leq)$  uspořádaná množina, kde každý řetězec má supremum, pak pro každé  $a \in A$  existuje  $b \in A$  maximální prvek splňující  $a \leq b$ .

*Cvičení:* Dokažte:  $PM \leftrightarrow PMS$ .

## 6.5 Princip trichotomie $\preceq$ (PT)

Pro každé dvě množiny  $x, y$  platí  $x \preceq y$  nebo  $y \preceq x$ .

**Lemma 26.**  $PM \rightarrow PT$ .

*Důkaz.* Definuji množinu  $D = \{f, f \text{ prosté zobrazení} \wedge \text{Dom}(f) \subseteq x \wedge \text{Rng}(f) \subseteq y\}$ .  $(D, \subseteq)$  splňuje předpoklady PM. Tedy má maximální prvek  $g$ . Kdyby  $x \setminus \text{Dom}(g) \neq \emptyset$  a  $y \setminus \text{Rng}(g) \neq \emptyset$ , pak lze  $g$  rozšířit o novou dvojici  $(u, v)$ , spor s maximalitou  $g$ . Pokud  $\text{Dom}(g) = x$ , pak  $x \preceq y$ . Pokud  $\text{Rng}(g) = y$ , pak  $g^{-1}$  je prosté zobrazení  $y$  do  $x$ , tedy  $y \preceq x$ .  $\square$

*Cvičení:* Sjednocení řetězce prostých zobrazení je prosté zobrazení.

## 6.6 Princip dobrého uspořádání (VVO)

- Každou množinu lze dobře uspořádat.
- Známo jako Zermelova věta.
- $\text{AC} \leftrightarrow \text{VVO}$

**Lemma 27.**  $\text{VVO} \rightarrow \text{AC}$

*Důkaz.*  $x \neq \emptyset, \emptyset \notin x$  podle VVO máme dobré uspořádání na  $\bigcup x$ . Každý  $y \in x$  je neprázdná podmnožina  $\bigcup x$ , tedy má nejmenší prvek  $\min_{\leq} y$ . Definujeme  $f : x \rightarrow \bigcup x$  jako  $f(y) = \min_{\leq}(y)$ . Tato  $f$  je selektorem na množině  $x$ .  $\square$

*Cvičení:*  $\text{PM} \rightarrow \text{VVO}$

# 7. Ordinální čísla

## 7.1 "Typy dobře uspořádaných množin."

- Kardinální čísla  $\subseteq$  ordinální čísla. Mohutnosti dobře uspořádaných množin. S (AC) mohutnosti všech množin.
- Ordinální čísla jsou dobře uspořádaná  $\in$ , platí pro ně princip transfinite indukce.

**Definice 44.** Třída  $X$  je **tranzitivní** pokud  $x \in X \rightarrow x \subseteq X$ .

*Příklad.*  $\omega$  i každé  $n \in \omega$  jsou tranzitivní i  $V$ .

*Cvičení:*  $X$  tranzitivní  $\leftrightarrow \bigcup X \subseteq X$

**Lemma 28.** 1. Jsou-li  $X, Y$  tranzitivní pak  $X \cap Y, X \cup Y$  jsou tranzitivní.

2.  $X$  třída, pro kterou každé  $x \in X$  je tranzitivní množina, pak  $\bigcap X$  a  $\bigcup X$  jsou tranzitivní.
3. Je-li  $X$  tranzitivní třída, pak  $\in$  je tranzitivní na  $X \leftrightarrow$  každý  $x \in X$  je tranzitivní množina.

*Důkaz.* 1. Je pozorování.

2. Plyne analogicky z 1.

3. Jako Cvičení.

□

**Definice 45.** Množina  $x$  je **ordinální číslo (ordinála)** pokud  $x$  je tranzitivní množina a  $\in$  je dobré uspořádání na  $x$ . Třidu všech ordinálních čísel značíme  $On$ .

*Příklad.*  $\omega$  a každé  $n \in \omega$  je ordinální číslo.

*Důsledek.* Pro každou nekonečnou množinu  $x$  platí  $\omega \preceq x$ .

**Lemma 29.**  $On$  je tranzitivní třída.

*Důkaz.*  $y \in x \in On$ . Máme  $y \leq x, \in$  je dobré ostré uspořádání na  $y$ .  $\in$  je dobré ostré na  $x$ . Z lemma 3) je  $y$  tranzitivní množina.  $y$  je ordinála. □

**Lemma 30.**  $\in$  je tranzitivní na  $On$ .

**Lemma 31.**  $x, y \in On$ , pak:

1.  $x \notin x$
2.  $x \cap y \in On$
3.  $x \in y \leftrightarrow x \subset y$

*Důkaz.* 1. Sporem z antireflexivity  $\in$  na  $x$ .

2. Přímo z definice.



3.  $\rightarrow$  z tranzitivity  $y$  a 1)

$\leftarrow y \setminus x \neq \emptyset \subseteq y, y \setminus x$  má nejmenší prvek  $z$ . Platí  $z = x$  (Cvičení).  $\square$

**Theorem 14.**  $\in$  je dobré ostré uspořádání třídy  $On$ .

*Důkaz.* Antireflexivita z lemma 1), tranzitivita pak dohromady dává ostré uspořádání. Trichotomie:  $x \neq y \in On$  podle lemma 2)  $x \cap y \in On$ . Sporem kdyby  $x \cap y \subset x \wedge x \subset y$  pak  $x \cap y \in y \wedge x \cap y \in x$ , tedy  $x \cap y \in x \cap y$  a to je spor s lemma 1). Když tedy  $x \cap y = x$  pak  $x \subset y$  tedy  $x \in y$ . Z toho plyne, že se jedná o lineární uspořádání. Pro dobrotu stačí existence minimálního prvku (Cvičení).  $\square$

*Důsledek.*  $On$  je vlastní třída. Je-li  $X$  vlastní třída, tranzitivní, dobře uspořádaná  $\in$ , pak  $X = On$ .

### 7.1.1 Značení:

- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  jsou ordinální čísla.
- $\alpha < \beta$  místo  $\alpha \in \beta$ .
- $\alpha \leq \beta$  místo  $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ .

**Lemma 32.** 1. Množina  $x \subseteq On$  je ordinální číslo  $\leftrightarrow x$  je tranzitivní.

2.  $A \subseteq On, A \neq \emptyset$ , pak  $\cap A$  je nejmenší prvek  $A$  vzhledem k  $\leq$ .

3.  $a \subseteq On$  množina, pak  $\cup a \in On$  a  $\cup a = \sup_{\leq} a$ .

*Důkaz.* 1.  $\rightarrow$  z definice,  $\leftarrow$  z věty.

2. Z věty a  $\cap A = \inf A$ .

3.  $\cup a$  je tranzitivní,  $\cup a \subseteq On$  podle 1) je ordinální číslo.  $\square$

*Důsledek.*  $\omega$  je supremum množiny všech přirozených čísel v  $On$ . Konečné ordinály jsou právě přirozená čísla.

*Cvičení:* Důkaz:  $\cup \omega \in On \wedge \cup \omega = \sup_{\leq} \omega$ . Zbývá ověřit  $\omega = \cup \omega$ .

**Lemma 33.**  $\alpha \in On$ , pak  $\alpha \cup \{\alpha\}$  je nejmenší ordinální číslo větší než  $\alpha$ .

*Důkaz.*  $\alpha \subseteq On$  protože  $On$  je tranzitivní.  $\alpha \cup \{\alpha\}$  je tranzitivní množina ordinálních čísel. Podle lemma 1)  $\alpha \cup \{\alpha\}$  je ordinální číslo. Je-li  $\beta \in On, \beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ , pak  $\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$  tedy  $\beta \subseteq \alpha$ .  $\square$

**Definice 46.**  $\alpha \cup \{\alpha\}$  je **následník**  $\alpha$ .  $\alpha$  je **předchůdce**  $\alpha \cup \{\alpha\}$ .  $\alpha$  je **izolované** pokud  $\alpha = 0$  nebo pokud  $\alpha$  má předchůdce, jinak je **limitní**.

**Theorem 15** (O typu dobrého uspořádání). Je-li  $a$  množina dobře uspořádaná relací  $r$ , pak existuje právě jedno ordinální číslo  $\alpha$  a právě jeden izomorfismus  $(a, r)$  a  $(\alpha, \leq)$ . (Bez důkazu.)

**Definice 47.**  $\alpha$  je **typ** dobrého uspořádání  $r$ .

*Poznámka.* Na  $On^2 = On \times On$  lze definovat lexikografické uspořádání i maximo-lexikografické uspořádání.

## 7.2 Princip transfinite indukce

Je-li  $A \subseteq On$  třída splňující  $(\forall \alpha \in On)(\alpha \subseteq A \rightarrow \alpha \in A)$ , potom  $A = On$ .

*Důkaz.* Sporem:  $On \setminus A \neq \emptyset$  díky dobrému uspořádání  $\in$  existuje nejmenší prvek  $\alpha \in On \setminus A$ . Potom každé  $\beta \in \alpha$  už je prvkem  $A$ , tedy  $\alpha \subseteq A$ , z předpokladu věty  $\alpha \in A$  a to je spor.  $\square$

**Theorem 16** (Druhá verze principu transfinite indukce.). *Je-li  $A \subseteq On$  třída splňující:*

1.  $0 \in A$
2. Pro každý  $\alpha \in On$  platí  $\alpha \in A \rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in A$ .
3. Je-li  $\alpha$  lineární pak  $\alpha \subseteq A \rightarrow \alpha \in A$ .

*Pak  $A = On$ .*

**Theorem 17** (O konstrukci transfinite rekurzí.). *Je-li  $G : V \rightarrow V$  třídové zobrazení, pak existuje právě jedno zobrazení  $F : On \rightarrow V$  splňující  $(\forall \alpha \in On) F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)$ .*

*Varianty:*

- $F(\alpha) = G(F[\alpha])$
- $F(\alpha) = G(\alpha, F \upharpoonright \alpha)$
- $G_1(F(\beta))$  je-li  $\alpha$  následník  $\beta$ , jinak  $G_2(F[\alpha])$  je-li  $\alpha$  limitní.

*Důkaz.* Je pomocí transfinite indukce a axiomu nahrazení.  $\square$

*Příklad.*  $m + n : F(m) = n + m$  se dá nadefinovat jako  $F(0) = n, F(S(m)) = S(F(m))$ .  
AC  $\rightarrow$  VVO:  $A$  množina  $g$  selektor na  $\mathcal{P}(A)$  tak  $f(0) = g(A)$  a  $f(\beta) = g(A - f[\beta])$ .