UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Projet 2 - Modélisation de la défaillance d'une chaîne de production

Éléments du calcul des probabilités

Bastien HOFFMANN (20161283)
Maxime MEURISSE (20161278)

2^{e} année de Bachelier Ingénieur Civil

Année académique 2017-2018

1 Manipulation des lois de probabilités

1.a Lois de probabilités marginales

Pour calculer les lois de probabilités marginales de chacune des variables aléatoires discrètes données, on marginalise la loi de probabilité jointe de ces 3 variables. Cela signifie que l'on considère tous les cas où une variable prend une valeur particulière et on somme les probabilités d'occurrence de chacun de ces cas. On effectue cette opération pour toutes les valeurs que peut prendre la variable :

$$P_{\mathcal{M}}(i) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{5} P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k) \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

$$P_{\mathcal{F}}(j) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{5} P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k) \qquad \forall j = 1,2,3$$

$$P_{\mathcal{C}}(k) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k) \qquad \forall k = 1,2,3,4,5$$

Le script `Q1a`[1], implémentant ces formules par le biais de sommes sur deux dimensions de la matrice `MFC`, fournit les résultats présentés au tableau 1.

Type de panne	$P_{\mathcal{M}}$	$P_{\mathcal{F}}$	$P_{\mathcal{C}}$
1	0,350	0,340	0,200
2	0,370	0,310	0,310
3	0,120	0,350	0,220
4	0,160	\	0,240
5	\	\	0,030

Tableau 1 – Lois de probabilités marginales des variables $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

Pour chaque machine, la somme des probabilités associées à ses pannes vaut 1 (vérifiant ainsi le second axiome de Kolmogorov), synonyme qu'elle présente toujours un état décrit par le type de panne.

1. Tous les scripts, et fonctions auxiliaires utilisées par ces scripts, mentionnés dans ce rapport se trouvent en annexe.

1.b Lois de probabilités conjointes

Les lois de probabilités conjointes des paires de variables $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ et $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ sont données, respectivement, par

$$P_{\mathcal{M},\mathcal{F}}(i,j) = \sum_{k=1}^{5} P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k) \qquad \forall i = 1,2,3,4 \quad \forall j = 1,2,3$$

$$P_{\mathcal{M},\mathcal{C}}(i,k) = \sum_{j=1}^{3} P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k) \qquad \forall i = 1,2,3,4 \quad \forall k = 1,2,3,4,5$$

$$P_{\mathcal{F},\mathcal{C}}(j,k) = \sum_{i=1}^{4} P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k) \qquad \forall j = 1,2,3 \quad \forall k = 1,2,3,4,5$$

La loi de probabilité conjointe d'un couple de variables aléatoires est donc obtenue en sommant les probabilités de tous les cas où le couple prend une paire de valeurs particulière, et en répétant cette opération pour toutes les paires de valeurs possibles.

Le script `Q1b`, implémentant ces formules par le biais de sommes sur une dimension de la matrice `MFC`, fournit 3 tableaux (2, 3 et 4) reprenant les 3 lois conjointes.

Type de panne	$\mathcal{F} = 1$	$\mathcal{F} = 2$	$\mathcal{F} = 3$
$\mathcal{M} = 1$	0,1190	0,1085	0,1225
$\mathcal{M} = 2$	0,1258	0,1147	0,1295
$\mathcal{M} = 3$	0,0408	0,0372	0,0420
$\mathcal{M} = 4$	0,0544	0,0496	0,0560

Tableau 2 – Loi de probabilité conjointe de la paire de variables $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Type de panne	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{M} = 1$	0,0700	0,1085	0,0770	0,0840	0,0105
$\mathcal{M} = 2$	0,0740	0,1147	0,0814	0,0888	0,0111
$\mathcal{M} = 3$	0,0240	0,0372	0,0264	0,0288	0,0036
$\mathcal{M} = 4$	0,0320	0,0496	0,0352	0,0384	0,0048

Tableau 3 – Loi de probabilité conjointe de la paire de variables $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$.

Type de panne	$\mathcal{C}=1$	$\mathcal{C}=2$	$\mathcal{C}=3$	$\mathcal{C}=4$	$\mathcal{C}=5$
$\mathcal{F}=1$	0,0820	0,1054	0,0814	0,0648	0,0064
$\mathcal{F}=2$	0,0640	0,0868	0,0748	0,0816	0,0028
$\mathcal{F}=3$	0,0540	0,1178	0,0638	0,0936	0,0208

Tableau 4 – Loi de probabilité conjointe de la paire de variables $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$.

1.c Lois de probabilités conditionnelles

En se basant sur les résultats calculés au point précédent, on peut aisément déterminer les lois de probabilités conditionnelles demandées par

$$P_{\mathcal{M}|\mathcal{F},\mathcal{C}}(i|j,k) = \frac{P_{\mathcal{M}}(i) \cap P_{\mathcal{F},\mathcal{C}}(j,k)}{P_{\mathcal{F},\mathcal{C}}(j,k)} = \frac{P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k)}{P_{\mathcal{F},\mathcal{C}}(j,k)}$$

$$P_{\mathcal{F}|\mathcal{M},\mathcal{C}}(j|i,k) = \frac{P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k)}{P_{\mathcal{M},\mathcal{C}}(i,k)}$$

$$P_{\mathcal{C}|\mathcal{F},\mathcal{M}}(k|j,i) = \frac{P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k)}{P_{\mathcal{F},\mathcal{M}}(j,i)}$$

$$\forall i = 1,2,3,4 \qquad \forall j = 1,2,3 \qquad \forall k = 1,2,3,4,5$$

On observe en effet que, pour chaque cas, le numérateur est la probabilité conjointe des 3 variables du problème (donnée par la matrice `MFC`), et que le dénominateur est la probabilité conjointe correspondant aux variables conditionnelles (calculée au point 1.b).

Le script `Q1c`, implémentant ces relations à l'aide de la fonction `bsxfun` de Matlab (utilisée pour effectuer des divisions élément par élément plus facilement), donne les résultats présentés aux tableaux 5, 6 et 7.

Cas pour $\mathcal{M} = 1$	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{F} = 1$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$
$\mathcal{F} = 2$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$
$\mathcal{F} = 3$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$	$0,3500$

Cas pour $\mathcal{M} = 2$	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{F} = 1$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$
$\mathcal{F} = 2$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$
$\mathcal{F} = 3$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$	$0,3700$

Cas pour $\mathcal{M} = 3$	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{F} = 1$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$
$\mathcal{F} = 2$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$
$\mathcal{F} = 3$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$	$0,1200$

Cas pour $\mathcal{M} = 4$	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{F} = 1$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$
$\mathcal{F} = 2$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$
$\mathcal{F} = 3$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$	$0,1600$

Tableau 5 – Loi de probabilité conditionnelle de $\mathcal{M}$ connaissant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

Cas pour $\mathcal{F} = 1$	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{M} = 1$	$0,4100$	$0,3400$	$0,3700$	$0,2700$	$0,2133$
$\mathcal{M} = 2$	$0,4100$	$0,3400$	$0,3700$	$0,2700$	$0,2133$
$\mathcal{M} = 3$	$0,4100$	$0,3400$	$0,3700$	$0,2700$	$0,2133$
$\mathcal{M} = 4$	$0,4100$	$0,3400$	$0,3700$	$0,2700$	$0,2133$

Cas pour $\mathcal{F} = 2$	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{M} = 1$	$0,3200$	$0,2800$	$0,3400$	$0,3400$	$0,0933$
$\mathcal{M} = 2$	$0,3200$	$0,2800$	$0,3400$	$0,3400$	$0,0933$
$\mathcal{M} = 3$	$0,3200$	$0,2800$	$0,3400$	$0,3400$	$0,0933$
$\mathcal{M} = 4$	$0,3200$	$0,2800$	$0,3400$	$0,3400$	$0,0933$

Cas pour $\mathcal{F} = 3$	$\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{C} = 5$
$\mathcal{M} = 1$	$0,2700$	$0,3800$	$0,2900$	$0,3900$	$0,6933$
$\mathcal{M} = 2$	$0,2700$	$0,3800$	$0,2900$	$0,3900$	$0,6933$
$\mathcal{M} = 3$	$0,2700$	$0,3800$	$0,2900$	$0,3900$	$0,6933$
$\mathcal{M} = 4$	$0,2700$	$0,3800$	$0,2900$	$0,3900$	$0,6933$

Tableau 6 – Loi de probabilité conditionnelle de $\mathcal{F}$ connaissant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{C}$.

Cas pour $\mathcal{C} = 1$	$\mathcal{M} = 1$	$\mathcal{M} = 2$	$\mathcal{M} = 3$	$\mathcal{M} = 4$
$\mathcal{F} = 1$	$0,2412$	$0,2412$	$0,2412$	$0,2412$
$\mathcal{F} = 2$	$0,2065$	$0,2065$	$0,2065$	$0,2065$
$\mathcal{F} = 3$	$0,1543$	$0,1543$	$0,1543$	$0,1543$

Cas pour $\mathcal{C} = 2$	$\mathcal{M} = 1$	$\mathcal{M} = 2$	$\mathcal{M} = 3$	$\mathcal{M} = 4$
$\mathcal{F} = 1$	$0,3100$	$0,3100$	$0,3100$	$0,3100$
$\mathcal{F} = 2$	$0,2800$	$0,2800$	$0,2800$	$0,2800$
$\mathcal{F} = 3$	$0,3366$	$0,3366$	$0,3366$	$0,3366$

Cas pour $\mathcal{C} = 3$	$\mathcal{M} = 1$	$\mathcal{M} = 2$	$\mathcal{M} = 3$	$\mathcal{M} = 4$
$\mathcal{F} = 1$	$0,2394$	$0,2394$	$0,2394$	$0,2394$
$\mathcal{F} = 2$	$0,2413$	$0,2413$	$0,2413$	$0,2413$
$\mathcal{F} = 3$	$0,1823$	$0,1823$	$0,1823$	$0,1823$

Cas pour $\mathcal{C} = 4$	$\mathcal{M} = 1$	$\mathcal{M} = 2$	$\mathcal{M} = 3$	$\mathcal{M} = 4$
$\mathcal{F} = 1$	$0,1906$	$0,1906$	$0,1906$	$0,1906$
$\mathcal{F} = 2$	$0,2632$	$0,2632$	$0,2632$	$0,2632$
$\mathcal{F} = 3$	$0,2674$	$0,2674$	$0,2674$	$0,2674$

Cas pour $\mathcal{C} = 5$	$\mathcal{M} = 1$	$\mathcal{M} = 2$	$\mathcal{M} = 3$	$\mathcal{M} = 4$
$\mathcal{F} = 1$	$0,0188$	$0,0188$	$0,0188$	$0,0188$
$\mathcal{F} = 2$	$0,0090$	$0,0090$	$0,0090$	$0,0090$
$\mathcal{F} = 3$	$0,0594$	$0,0594$	$0,0594$	$0,0594$

Tableau 7 – Loi de probabilité conditionnelle de $\mathcal{C}$ connaissant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{M}$.

1.d Relations entre les variables aléatoires

En observant les différents résultats obtenus précédemment, on peut déduire du tableau 5 que la variable $\mathcal{M}$ est indépendante des variables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$. En effet, pour une valeur fixée de $\mathcal{M}$, peu importe les valeurs de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$, la probabilité est toujours la même.

Les tableaux 6 et 7, quant à eux, montrent que les variables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ sont dépendantes l'une de l'autre. On constate, en effet, qu'en fixant la valeur d'une variable et en faisant varier la valeur de l'autre, les probabilités diffèrent.

2 Probabilités des pannes

2.a Panne de la chaîne de production

La probabilité que la chaîne de production tombe en panne correspond à la probabilité qu'au moins une des machines tombe en panne. La probabilité de cet événement peut être calculée en déterminant la probabilité de l'événement contraire, à savoir qu'aucune machine ne tombe en panne.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} P\left(\text{panne}\right) &= 1 - P\left(\text{aucune panne}\right) \\ &= 1 - P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}\left(1,1,1\right) \\ &= 0{,}9713 \end{aligned}$$

Ce résultat a été obtenu grâce au script `Q2a`.

2.b Panne de la machine $\mathcal{F}$ connaissant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{C}$

De la même manière qu'au point 2.a, on peut déterminer la probabilité que la machine $\mathcal{F}$ tombe en panne sachant que les machines $\mathcal{M}$ et $\mathcal{C}$ ne tomberont pas en panne au cours du mois en déterminant la probabilité de l'événement contraire, à savoir la probabilité que la machine $\mathcal{F}$ ne tombe pas en panne dans ces mêmes conditions.

On a alors, en se servant de la valeur déjà calculée au point 1.c,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{F}|\mathcal{M},\mathcal{C}}\left(2,3|1,1\right) &= 1 - P_{\mathcal{F}|\mathcal{M},\mathcal{C}}\left(1|1,1\right) \\ &= 0{,}59 \end{aligned}$$

Ce résultat a été obtenu grâce au script `Q2b`.

3 Coût moyen des pannes

3.a Coût moyen et variance par machine

Le coût[2] moyen de réparation d'une machine correspond à la moyenne de ses coûts, pondérée par les probabilités marginales associées à ces coûts (calculées à la section 1.a). Il s'agit en fait de l'espérance des coûts.

Le script `Q3a` multiplie chaque coût par sa probabilité marginale et somme le tout. On obtient les résultats présentés au tableau 8.

Machine	$\mathcal{M}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{C}$
Coût moyen [€]	7760	9090	28 790
Variance [€^{2}]	42 302 400	55 882 000	395 505 900

Tableau 8 – Coût moyen et variance des coûts de réparation de chaque machine.

Les variances de chaque machine ont été calculées avec la fonction `var` de Matlab, prenant en premier argument le vecteur des coûts de réparation, et en second argument le vecteur des probabilités marginales associées à ces coûts.

Les résultats sont également présentés au tableau 8 et correspondent bien à l'application de la définition de la variance.

$$\begin{aligned} V\{\mathcal{X}\} &= E\left\{(\mathcal{X} - E\{\mathcal{X}\})^2\right\} \\ &= E\left\{\mathcal{X}^2\right\} - E\{\mathcal{X}\}^2 \end{aligned}$$

3.b La fonction coût

Soit la fonction coût $\phi(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{C}) = \mathcal{K}_{\mathcal{M}} + \mathcal{K}_{\mathcal{F}} + \mathcal{K}_{\mathcal{C}}$. Elle représente le coût de réparation à payer pour une combinaison possible de pannes des machines $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

3.b.i Espérance et variance

L'espérance de la fonction ϕ correspond à la moyenne de toutes les valeurs que peut prendre ϕ (qui correspondent à toutes les combinaisons possibles de pannes pouvant survenir), pondérée par les probabilités associées à ces valeurs (fournies dans la matrice `MFC`).

Mathématiquement, on a

$$E\{\phi(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{C})\} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{5} \phi(i,j,k)\, P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k)$$

2. Dans ce rapport, chaque coût mentionné est un coût par mois.

La variance, quant à elle, est obtenue en appliquant sa définition :

$$\begin{aligned} V\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})\} &= E\left\{(\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}) - E\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})\})^2\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{5} (\phi(i,j,k) - E\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})\})^2 P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}(i,j,k) \end{aligned}$$

Les résultats, obtenus grâce au script `Q3b` implémentant les relations explicitées précédemment, sont présentés au tableau 9.

Espérance [€]	**Variance [€^{2}]**
45 640	532 521 600

Tableau 9 – Espérance et variance de la fonction ϕ.

3.b.ii Notion concrète associée à l'espérance

L'espérance de ϕ est la moyenne pondérée de tous les coûts de réparation possibles. Concrètement, elle correspond donc à ce que devra payer en moyenne, chaque mois, l'entreprise pour la réparation de ses machines.

3.b.iii Relation entre les différentes espérances et variances

L'espérance étant définie avec un opérateur linéaire, l'espérance d'une combinaison linéaire de variables aléatoires est la combinaison linéaire des espérances de ces variables.

L'espérance de la fonction ϕ, calculée au point 3.b.i, est donc égale à la somme des espérances (coûts moyens) de chaque machine, calculées au point 3.a.

$$E\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})\} = E\{\mathcal{K}_\mathcal{M}\} + E\{\mathcal{K}_\mathcal{F}\} + E\{\mathcal{K}_\mathcal{C}\}$$

Cette égalité, testée avec Matlab, est bien vérifiée.

En ce qui concerne les variances, cette égalité n'est pas vérifiée. En effet, la variance d'une combinaison linéaire de variables aléatoires est calculée avec une hypothèse d'indépendance des variables. Les variables de ce problème n'étant pas toutes indépendantes, un terme supplémentaire de *covariance* apparaît.

$$V\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})\} = V\{\mathcal{K}_\mathcal{M}\} + V\{\mathcal{K}_\mathcal{F}\} + V\{\mathcal{K}_\mathcal{C}\} + 2\cdot \mathrm{cov}\{\mathcal{K}_\mathcal{F};\mathcal{K}_\mathcal{C}\}$$

3.c État de la machine $\mathcal{M}$ connu

3.c.i Espérance et variance conditionnelles

L'espérance et la variance conditionnelles, pour chaque valeur de $\mathcal{M}$ fixée ($\forall i = 1, 2, 3, 4$), sont données par

$$E\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)|\mathcal{M}\right\} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\phi\left(i,j,k\right)\frac{P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}\left(i,j,k\right)}{P_{\mathcal{M}}\left(i\right)}$$
$$V\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)|\mathcal{M}\right\} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}\left(\phi\left(i,j,k\right) - E\left\{\phi\left(i,j,k\right)|i\right\}\right)^2\frac{P_{\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}}\left(i,j,k\right)}{P_{\mathcal{M}}\left(i\right)}$$

Ces formules ont été implémentées dans le script `Q3c`. Les résultats obtenus sont présentés au tableau 10.

Type de panne	$\mathcal{M} = 1$	$\mathcal{M} = 2$	$\mathcal{M} = 3$	$\mathcal{M} = 4$
Espérance [€]	37 880	49 880	42 880	54 880
Variance [€^{2}]	490 219 200	490 219 200	490 219 200	490 219 200

Tableau 10 – Espérance et variance conditionnelles de ϕ connaissant $\mathcal{M}$.

On constate que la variance est identique dans tous les cas. On déduit une nouvelle fois que la variable $\mathcal{M}$ est indépendante de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

3.c.ii Théorème de l'espérance totale

Le théorème de l'espérance totale stipule que

$$E\left\{E\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)|\mathcal{M}\right\}\right\} = E\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)\right\}$$

Cela signifie qu'en considérant $E\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)|\mathcal{M}\right\}$ comme une variable aléatoire, son espérance doit être égale à l'espérance de ϕ calculée au point 3.b.i.

Le script `Q3c` vérifie ce résultat en multipliant chaque valeur de l'espérance conditionnelle par la probabilité marginale de la valeur $\mathcal{M}$ correspondante et en sommant le tout. Le résultat obtenu est identique à l'espérance de ϕ calculée précédemment ; le théorème est bien vérifié.

3.c.iii Théorème de la variance totale

Le théorème de la variance totale stipule que

$$V\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)\right\} = E\left\{V\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)|\mathcal{M}\right\}\right\} + V\left\{E\left\{\phi\left(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C}\right)|\mathcal{M}\right\}\right\} \qquad (1)$$

En considérant $V\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})|\mathcal{M}\}$ comme une variable aléatoire, le premier terme du membre de droite de (1) se calcule en multipliant chaque valeur de cette variable par la probabilité marginale de $\mathcal{M}$ correspondante et en sommant le tout.

Le second terme du membre de droite de (1) se calcule en appliquant la définition de la variance :

$$\begin{aligned} V\{E\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})|\mathcal{M}\}\} &= E\left\{(E\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})|\mathcal{M}\} - E\{E\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})|\mathcal{M}\}\})^2\right\} \\ &= E\left\{(E\{\phi(\mathcal{M},\mathcal{F},\mathcal{C})|\mathcal{M}\} - 45\,640)^2\right\} \end{aligned}$$

Le script `Q3c` implémente l'égalité (1) en utilisant les éléments calculés auparavant. Le résultat obtenu est identique à la variance de ϕ calculée précédemment ; le théorème est bien vérifié.

4 Borne supérieure du coût des pannes

4.a Borne supérieure du coût de réparation pour chaque machine

4.a.i Aucune information sur la loi de répartition

Ne connaissant pas la loi de répartition des coûts des pannes, une méthode pour borner ces coûts serait d'utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev :

$$P(|\mathcal{X} - \mu_{\mathcal{X}}| \geq c\sigma_X) \leq \frac{1}{c^2}$$

avec $\mu_{\mathcal{X}}$ l'espérance et $\sigma_{\mathcal{X}}$ l'écart-type.

En effet, celle-ci permet de borner la valeur que peut prendre une variable aléatoire $\mathcal{X}$, peu importe sa répartition.

Puisque l'on veut que la probabilité que le coût soit supérieur à la borne soit inférieure ou égale à 0,05, on fixe c^2 à 20.

On a

$$P\left(\mathcal{X} \geq \sqrt{20}\sigma_{\mathcal{X}} + \mu_{\mathcal{X}}\right) \leq \frac{1}{20}$$

avec $\sqrt{20}\sigma_{\mathcal{X}}+\mu_{\mathcal{X}}$, la borne pour chaque coût. Les espérances et écart-types étant connus, le script `Q4a`, implémentant le calcul de cette borne, fournit les résultats du tableau 11.

Remarque Les 0 du tableau 11 pourraient être remplacés par des `NaN` car il n'est théoriquement pas possible de trouver des bornes supérieures aux coûts dans ces cas précis.

Type de panne	**Bornes supérieures [€]**		
	$\mathcal{M}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{C}$
1	0	0	0
2	14 683	9671	37 236
3	6342	19 789	16 565
4	18 789	\	60 143
5	\	\	53 367

Tableau 11 – Bornes supérieures des pannes de chaque machine, dans le cas où la loi de répartition est inconnue.

4.a.ii Répartition normale

En sachant que la loi de répartition des coûts des pannes suit une loi normale, le problème consiste en la recherche du x tel que

$$P(\mathcal{X} > x) \leq 0{,}05$$

En transformant le problème,

$$P(\mathcal{X} < x) \geq 1 - 0{,}05 \tag{2}$$

on peut se servir de la fonction de répartition de la loi de Gauss pour déterminer x. Il faut également tenir compte que, pour chaque cas, l'espérance et l'écart-type ne sont pas les mêmes.

En utilisant la fonction `norminv` (cette fonction permet de déterminer le x de la relation (2) en fournissant une approximation numérique de la répartition gaussienne considérée « à l'envers », c.-à-d. en isolant le x) de Matlab, avec comme arguments $1 - 0{,}05$, l'espérance et l'écart-type du cas concerné, le script `Q4a` fournit les résultats du tableau 12.

Type de panne	**Bornes supérieures [€]**		
	$\mathcal{M}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{C}$
1	`NaN`	`NaN`	`NaN`
2	12 987	9247	35 822
3	5493	18 658	15 576
4	17 658	\	56 892
5	\	\	49 974

Tableau 12 – Bornes supérieures des pannes de chaque machine, dans le cas où la loi de répartition est une loi normale.

Les `NaN` renvoyés par la fonction `norminv` rejoignent la remarque précédente : dans ces cas précis, il n'est pas possible de trouver des bornes supérieures aux coûts.

4.a.iii Comparaison des résultats

On constate que toutes les bornes calculées en connaissant la loi de répartition sont inférieures ou égales à celles calculées avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev.

Ceci est du au fait que les bornes calculées avec cette inégalité sont des bornes absolues, c.-à-d. des bornes générales valables pour tous les types de répartition.

Dès lors, il est certain que même si on supposait un autre type de répartition, les bornes calculées avec celui-ci seront toujours inférieures à celles calculées au point 4.a.i.

A Code Matlab

A.a Scripts

Question 1

```
fileName = 'MFC';

[MFC, dim] = readFile(fileName);

nbrDim = length(dim);

marginalProb = cell(1, nbrDim); % laws of marginal probabilities

marginalProb{1} = sum(sum(MFC, 2), 3); % M
marginalProb{2} = reshape(sum(sum(MFC, 1), 3), [3, 1]); % F
marginalProb{3} = reshape(sum(sum(MFC, 1), 2), [5, 1]); % C
```

Listing 1 – Script `Q1a.m`.

```
fileName = 'MFC';

[MFC, dim] = readFile(fileName);

nbrDim = length(dim);

jointProb = cell(1, nbrDim); % laws of joint probabilities

jointProb{1} = sum(MFC, 3); % (M,F)
jointProb{2} = reshape(sum(MFC, 2), [4, 5]); % (M,C)
jointProb{3} = reshape(sum(MFC, 1), [3, 5]); % (F,C)
```

Listing 2 – Script `Q1b.m`.

```
Q1b;

condProb = cell(1, nbrDim); % conditional probability laws

condProb{1} = bsxfun(@rdivide, permute(MFC, [2 3 1]), jointProb{3});
    % (M|F,C)
condProb{2} = bsxfun(@rdivide, permute(MFC, [1 3 2]), jointProb{2});
    % (F|M,C)
condProb{3} = bsxfun(@rdivide, permute(MFC, [2 1 3]),
    transpose(jointProb{1})); % (C|F,M)
```

Listing 3 – Script `Q1c.m`.

Question 2

```
fileName = 'MFC';

[MFC, dim] = readFile(fileName);
```

```

breakProb = 1 - MFC(1,1,1); % probability of a failure of the production line

clearvars -except breakProb MFC
```

Listing 4 – Script `Q2a.m`.

```
Q1c;

condBreakF = 1 - condProb{1,2}(1,1,1); % probability that F will fail knowing that M and C will not fail

clearvars -except condBreakF MFC
```

Listing 5 – Script `Q2b.m`.

Question 3

```
Q1a;
getCost;

[meanCost, varCost] = deal(cell(1, nbrDim)); % average costs and variances of these costs

for i = 1:nbrDim
    meanCost{i} = sum(cost{i}.*marginalProb{i});
    varCost{i} = var(cost{i}, marginalProb{i});
end

clearvars -except meanCost MFC varCost
```

Listing 6 – Script `Q3a.m`.

```
fileName = 'MFC';

[MFC, dim] = readFile(fileName);

getCost;

[espPhi, varPhi] = deal(0); % expected value of the phi function and variance of the phi function

for i = 1:dim(1) % M
    for j = 1:dim(2) % F
        for k = 1:dim(3) % C
            espPhi = espPhi + (cost{1}(i) + cost{2}(j) +
                cost{3}(k))*MFC(i,j,k);
        end
    end
end

for i = 1:dim(1) % M
    for j = 1:dim(2) % F
```

```
        for k = 1:dim(3) % C
            varPhi = varPhi + ((cost{1}(i) + cost{2}(j) + cost{3}(k)
                - espPhi)^2)*MFC(i,j,k);
        end
    end
end

clearvars -except espPhi MFC varPhi
```

Listing 7 – Script `Q3b.m`.

```
Q1a;
getCost;

[espCond, varCond] = deal(zeros(dim(1), 1)); % conditional expected
    value of phi and conditional variance of phi knowing M

%% Answer to question 3c - i
for i = 1:dim(1) % M
    for j = 1:dim(2) % F
        for k = 1:dim(3) % C
            espCond(i) = espCond(i) + (cost{1}(i) + cost{2}(j) +
                cost{3}(k))*(MFC(i,j,k)/marginalProb{1}(i));
        end
    end

    for j = 1:dim(2) % F
        for k = 1:dim(3) % C
            varCond(i) = varCond(i) + ((cost{1}(i) + cost{2}(j) +
                cost{3}(k) -
                espCond(i))^2)*(MFC(i,j,k)/marginalProb{1}(i));
        end
    end
end

%% Answer to question 3c - ii
% Theorem of total hope
espTot = sum(espCond.*marginalProb{1});

%% Answer to question 3c - iii
% Theorem of total variance
varTot = 0;

for i = 1:dim(1) % M
    varTot = varTot + ((espCond(i) - espTot)^2 +
        varCond(i))*marginalProb{1}(i);
end

clearvars -except espCond espTot MFC varCond varTot
```

Listing 8 – Script `Q3c.m`.

Question 4

```
fileName = 'MFC';

[MFC, dim] = readFile(fileName);

nbrDim = length(dim);

[espCost, etCost] = deal(cell(1, 3)); % expected value and standard
    deviation
bsCost = cell(2, 3); % upper bounds

espCost{1} = [0; 12000; 5000; 17000]; % M
espCost{2} = [0; 9000; 18000]; % F
espCost{3} = [0; 35000; 15000; 55000; 48000]; % C

etCost{1} = [0; 600; 300; 400]; % M
etCost{2} = [0; 150; 400]; % F
etCost{3} = [0; 500; 350; 1150; 1200]; % C

c = sqrt(20);

probBorne = 0.05;

%% Answer to question 4 - i
for i = 1:nbrDim
    bsCost{1, i} = espCost{i} + c*etCost{i}; % Inequality of
        Bienayme-Tchebyshev
end

%% Answer to question 4 - ii
for i = 1:nbrDim
    bsCost{2, i} = norminv(1-probBorne, espCost{i}, etCost{i}); %
        Normal distribution
end

clearvars -except bsCost MFC
```

Listing 9 – Script `Q4a.m`.

A.b Scripts et fonctions auxiliaires

```
% Function to read the matrix and to obtain its dimensions.

function [matrix, dim] = readFile(fileName)

file = load(strcat(fileName, '.mat'));
matrix = file.(fileName);

dim = size(matrix);

end
```

Listing 10 – Fonction `readFile.m`.

```matlab
% Script to recover costs in other scripts.

cost = cell(1, 3);

cost{1} = [0; 12000; 5000; 17000]; % M
cost{2} = [0; 9000; 18000]; % F
cost{3} = [0; 35000; 15000; 55000; 48000]; % C
```

Listing 11 – Script `getCost.m`.