Geometría de Poisson Computacional

Pablo Suárez Serrato,
Miguel Angel Evangelista Alvarado,
José Crispin Ruiz Pantaleón
.
Instituto de Matemáticas UNAM

Octubre, 2020

Siméon Denis Poisson

MÉMOIRE

Sur la Variation des Constantes arbitraires dans les questions de Mécanique,

Lu à l'Institut le 16 Octobre 1809;

Par M. POISSON.

constante a ni la constante b; dans d'autres cas elle ne contiendra aucune constante arbitraire, et se réduira à une constante déterminée; mais, afin de rappeler l'origine de cette quantité, qui représente une certaine combinaison des différences partielles des valeurs de a et b, nous ferons usage de cette notation (b, a), pour la désigner; de manière que nous aurons généralement

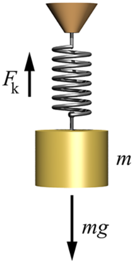
$$\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}+\frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\psi}-\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi}+\frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\theta}-\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta}=(b, a).$$

Oscilador Armónico

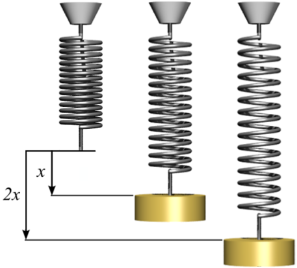
Ec. de Movimiento:

$$\ddot{x} = -c\,x, \qquad c > 0$$

- **Posición de Reposo**



- **Perturbaciones**



$$\left(F_k = -kx,\ \text{Hooke}\right) \ \ \& \ \ \left(F_k = m\ddot{x},\ \text{Newton}\right)$$

Oscilador Armónico

Ec. de Movimiento:

$$\ddot{x} = -x, \qquad (c = 1)$$

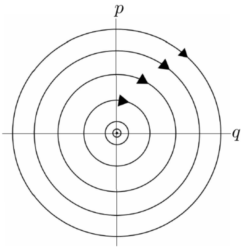
$$\downarrow$$

Sist. de Ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \ \ p \\ \dot{p} &= -q \end{aligned}$$

$$\big(q = x,\ p = \dot{x}\big)$$

Retrato Fase:



Oscilador Armónico (Sistema Hamiltoniano)

Sist. de Ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \ \ p \\ \dot{p} &= -q \end{aligned}$$

- $H(q,p) \ = \ \frac{1}{2}\, q^2 + \frac{1}{2}\, p^2$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \ \ \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

Oscilador Armónico (Sistema Hamiltoniano)

- $H(q,p) \; = \; \frac{1}{2}\, q^2 + \frac{1}{2}\, p^2$

$$\dot{q} \; = \; \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} \; = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Notemos que, si $X = (q,p)^\top$, entonces

$$\dot{X} = \mathbb{J}\, \nabla H$$

donde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Oscilador Armónico (Estructura Simpléctica)

$$\dot{X} = \mathbb{J}\,\nabla H, \qquad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dados dos campos vectoriales $u = (u_1, u_2)^\top$ y $v = (v_1, v_2)^\top$, $u_i, v_i \in C^\infty_{\mathbb{R}^2}$,

$$\omega(u, v) = u^\top \mathbb{J}\, v = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

$\mathbb{J}$ induce una 2-forma diferencial.

Oscilador Armónico (Corchete de Poisson)

$$\omega(u,v) \;=\; u^{\top}\mathbb{J}\,v \;=\; u_1v_2 - u_2v_1$$

- Definimos $\{,\} : C^{\infty}_{\mathbb{R}^2} \times C^{\infty}_{\mathbb{R}^2} \to C^{\infty}_{\mathbb{R}^2}$ por

$$\{f,g\}_{\omega} \;:=\; -\omega(\nabla f, \nabla g) \;=\; \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \;-\; \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$$

- Entonces,

$$\dot{q} = \{H,q\}_{\omega}, \qquad \dot{p} = \{H,p\}_{\omega}$$

- En general, para cualquier observable:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{H,f\}_{\omega}, \qquad f = f(q,p)$$

Corchetes de Poisson en $\mathbb{R}^2$

$$\{,\} : C^\infty_{\mathbb{R}^2} \times C^\infty_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow C^\infty_{\mathbb{R}^2}$$

- $\mathbb{R}$-linealidad.
- Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Identidad de *Jacobi*:

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$$

- Regla de *Leibniz*:

$$\{f, g \cdot h\} = g \cdot \{f, h\} + h \cdot \{f, g\}$$

Nota: $C^\infty_{\mathbb{R}^2} := \{\, f : M \to \mathbb{R} \,\big|\, f \text{ es lisa} \,\}$

Sist. Hamiltonianos en $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\}$

Dado $H \in C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}}$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Defínase $\{,\} : C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}} \times C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}} \to C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}}$ por

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

- Entonces,

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}, \qquad \dot{p}_i = \{H, p_i\}$$

Corchete de Poisson $\{,\} : C^\infty_M \times C^\infty_M \longrightarrow C^\infty_M$

- $\mathbb{R}$-linealidad.
- Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, h\}$
- Identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} \;=\; \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$$

- Regla de Leibniz:

$$\{f, gh\} = g\,\{f, h\} + h\,\{f, g\}$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3_x$, dada

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)\big)^\top$$

- Se define

$$\{f, g\}_\psi = \big\langle \psi, \nabla f \times \nabla g \big\rangle$$

- *Identidad de Jacobi:*

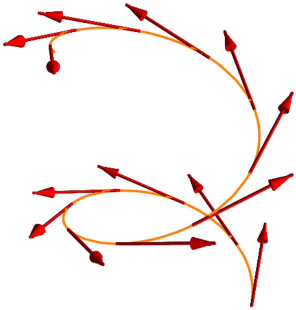
$$\big\langle \psi, \operatorname{rot} \psi \big\rangle = 0$$

Nota: $\{f, g\}_\psi = \nabla f^\top \Pi_\psi, \nabla g$, donde

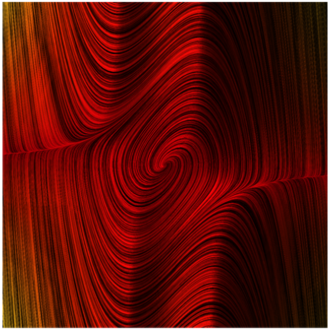
$$\Pi_\psi = \begin{pmatrix} 0 & \psi_3 & -\psi_2 \\ -\psi_3 & 0 & \psi_1 \\ \psi_2 & -\psi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Foliaciones Inducidas por Campos Vectoriales

- **Existencia y Unicidad**

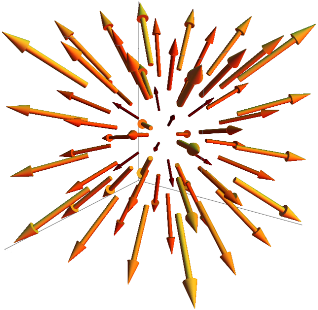


- **Foliación por Curvas Integrales**

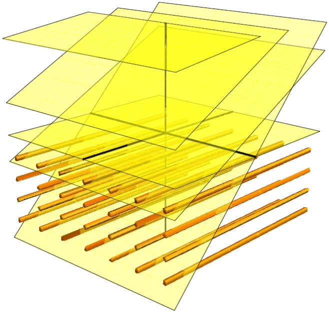


Campos Vectoriales vs Distribuciones

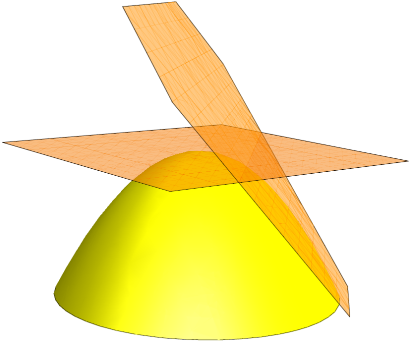
- **Campo Vectorial**



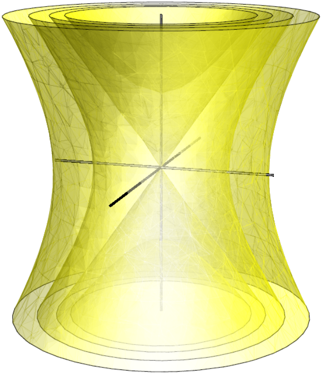
- **Distribución**



- **Stefan-Sussman**



- **Foliación por Variedades Integrales**



Estructura de Poisson $\leftrightarrow$ Foliación Simpléctica

Sea Π tensor de Poisson:

$$D^{\Pi} := \{ X_f \,\big|\, f \in C^{\infty}_M \},$$

con $X_f(g) = \{f, g\}$.

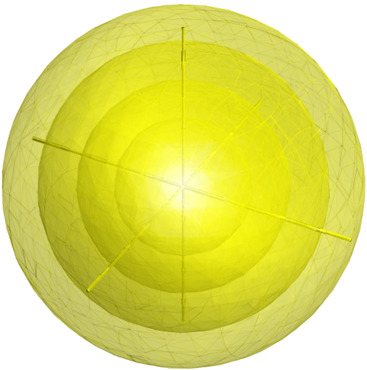
Afirmación:

D^{Π} es integrable.

$\downarrow$

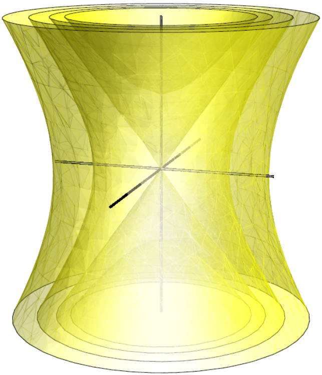
Foliación simpléctica.

Ejemplo : $\mathfrak{so}(3)$



- $\psi_1 = x_1, \quad \psi_2 = x_2, \quad \psi_3 = x_3$
- $\Pi_\psi = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \{f, g\}_\psi = \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle$

Ejemplo : $\mathfrak{sl}(2)$



- $\psi_1 = x_1, \quad \psi_2 = x_2, \quad \psi_3 = -x_3$
- $\Pi_\psi = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \{f, g\}_\psi = \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle$

Estructuras de Poisson

- Sistema Hamiltoniano:

$$\dot{x} = \{H, x\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Campo Hamiltoniano:

$$X_h = \mathbf{i}_{\mathrm{d}h}\Pi$$

- Función de Casimir, $K \in C^\infty_M$ tq

$$X_K = 0$$

- Campo de Poisson:

$$\mathcal{L}_Z\Pi = 0.$$