

TEMAS DE MATEMÁTICAS

# Geometría analítica

Una introducción  
a la geometría

*Ana Irene Ramírez-Galarza*



Ana Irene Ramírez-Galarza

**GEOMETRÍA ANALÍTICA**  
Una introducción a la geometría

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM



1ª edición electrónica, 25 de julio de 2011

Formación: Juan Pablo Romero

[editoriales@ciencias.unam.mx](mailto:editoriales@ciencias.unam.mx)

Prohibida la reproducción parcial o total de la obra por cualquier medio.  
Sin la autorización por escrito del titular de los derechos patrimoniales.  
Hecho en México.

# Introducción

Este libro tiene un doble propósito. Por un lado, pretende mostrar la utilidad y la belleza del área de las matemáticas llamada Geometría; por otro, se propone facilitar el desarrollo de los cursos de Geometría Analítica de nivel universitario presentando un programa concreto para un curso de 2 semestres y una forma de desarrollarlo.

Para cumplir el primer propósito hemos tenido en mente ideas centrales en Geometría, como la de grupo de transformaciones y sus invariantes asociados introducida por Félix Klein y en la cual subyace el concepto de simetría; o la de dimensión de un espacio geométrico debida a Bernhard Riemann. Para ilustrar esas ideas utilizamos ejemplos concretos, sencillos pero interesantes, que serán la mejor referencia para fijar los conceptos y los resultados y para generalizaciones futuras.

El segundo propósito nos ha hecho incluir muchos dibujos y consignar la mayor parte de los cálculos, además de proponer suficientes ejercicios y preguntas que muestran los rumbos a seguir. La mayor parte del material es indispensable en los cursos de Cálculo de Varias Variables, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra Lineal y Geometría Diferencial. Sólo algunos incisos del final de ciertos capítulos contienen material que puede omitirse aunque tienen el valor de mostrar aplicaciones de los resultados expuestos.

El método de estudio que utilizaremos es el analítico, cuyo creador es René Descartes. Consiste en asignar coordenadas a los puntos, ecuaciones a los lugares geométricos y funciones a las transformaciones, lo cual tiene la ventaja de permitir el uso de las herramientas del Álgebra y el Cálculo.

En los primeros cursos de Geometría, los dibujos juegan un papel esencial: un dibujo correcto, que no es lo mismo que perfecto, es fuente de ideas y muchas veces da la clave para resolver el problema. El método analítico permite traducir fácilmente esas ideas en una demostración.

Sin embargo, no eludiremos utilizar conocimientos adquiridos mediante el

método sintético debido a Euclides, y que consiste en deducir lógicamente los resultados de un conjunto de postulados. Más aún, enfatizaremos el carácter esencialmente integrador de la Geometría al mencionar, y si es posible utilizar, conocimientos de otras áreas, como el Cálculo Diferencial o la Física.

Al presentar muchos ejemplos, dibujos y cálculos hemos pretendido poner el ejemplo, pues el dominio de cualquier conocimiento nuevo sólo se logra con la práctica. Por ello será indispensable que el lector vaya realizando los cálculos y los dibujos por su cuenta; comprobará que la “lectura” de los dibujos facilita la comprensión de los conceptos y viceversa, ya que en la medida que un concepto se entiende mejor es más fácil lograr un dibujo correcto.

Hemos tenido presente la dificultad para visualizar formas geométricas en el espacio tridimensional debida a los muchos años de estudio en el plano, por eso desde el principio introducimos regiones tridimensionales y, en colaboración con el Mat. Juan Pablo Romero Méndez, elaboramos el video interactivo *Un paseo por el espacio tridimensional* accesible desde la página **[www.matematicas.unam.mx](http://www.matematicas.unam.mx)**

Para el lector interesado en profundizar o ampliar el panorama aquí expuesto, hemos incluido bibliografía suficiente y asequible pues, como el título lo indica, el material del libro es sólo el principio de uno de los campos más vastos y ricos de las matemáticas.

Finalmente, queremos hacer notar que la introducción y el uso de un mínimo de conceptos y resultados del Álgebra Lineal simplifica la obtención de los resultados, mostrando así el contenido esencialmente geométrico de esta rama de las matemáticas que está presente en muchas de las materias de cualquier carrera científica.

Los comentarios, dudas y sugerencias serán bienvenidos en la dirección siguiente:

Departamento de Matemáticas, cubículo 204  
Facultad de Ciencias, U.N.A.M. Circuito Exterior, C.U.  
México, D.F., C.P. 04510.  
e-mail: [anai@matematicas.unam.mx](mailto:anai@matematicas.unam.mx)

## Agradecimientos

A los estudiantes participativos; ellos hicieron posible este libro.

Al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía; su profesionalismo y bonhomía modificaron sustancialmente el contenido.

Fueron muy valiosos los comentarios a la primera versión de los colegas siguientes: Dr. Juan Manuel Lozano Mejía, Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco, Dr. Javier Páez Cárdenas, Dr. José Antonio Zapata Ramírez, Mat. Pablo Rosenblueth Laguette, Mat. Guillermo Ruiz Galván, Dr. Guillermo Sienra Loera, M. en I. Leda Espeziale San Vicente, Mat. Renato Leriche Vázquez, Profr. Alfonso Escoto, Mat. Noel Jaramillo Arce, y de los alumnos Mariana del Castillo Borja, Juan José López Badillo, Zdenek Palecek y Max Ortega del Vecchy.

Al Dr. Andrés Pedroza y al Mat. Juan Pablo Romero; su cuidado y paciencia en la elaboración de los dibujos son parte fundamental del libro.

## SUGERENCIAS PARA EL USO DE ESTE LIBRO

Hemos intentado que éste sea un libro cuya lectura cuidadosa, junto con la resolución de los ejercicios planteados, permita al lector dominar por sí mismo el material. Con ese fin, hemos decidido incluir temas que tal vez ya fueron mencionados en el bachillerato.

Un planteamiento fundamental de este libro es que el estudiante debe ir familiarizándose desde el principio con figuras y coordenadas en el espacio; el tratamiento simultáneo y cuidadoso de figuras en el plano y en el espacio permite observar analogías y ver en qué radican las diferencias. Ésa es la intención del primer capítulo.

También hay que dedicarle tiempo a otros dos puntos que difícilmente son familiares para un estudiante de primer año de facultad:  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  como espacios vectoriales con sus productos escalar, vectorial y triple producto escalar; y a los grupos de transformaciones y sus invariantes.

Para un curso de dos semestres, sugerimos llegar en el primero hasta Cónicas (inclusive), y comenzar el segundo semestre retomando estas curvas para generar las superficies cuádricas: primero los cilindros, después las superficies de revolución y, finalmente, el paraboloides hiperbólico. Tanto en el caso de las cónicas como en el de las superficies cuádricas, basamos el estudio en las ecuaciones canónicas, y dejamos para el último capítulo la demostración de que los términos mixtos pueden eliminarse con una rotación adecuada.

En el primer semestre debe lograrse el manejo por el alumno del lenguaje vectorial y de su significado geométrico; es indispensable en Cálculo de Varias Variables y en el resto de los cursos de Geometría.

El segundo semestre debe enfatizar la visualización de superficies y su ubicación en el espacio coordenado, además de lograr la comprensión de los conceptos de subespacio invariante de una transformación lineal y el de grupo de transformaciones. En la sección de transformaciones es fundamental resolver todos los ejercicios.

Algunas secciones, marcadas con un asterisco, utilizan conceptos de Cálculo que no pueden considerarse un requisito. El propósito ha sido mostrar su contenido geométrico y su utilidad al abreviar los cálculos.

Es importante recalcar que no necesariamente todo el material incluido en el texto debe estar sujeto a evaluación, eso debe fijarse de acuerdo al curso y programa específicos.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1	Plano y espacio cartesianos . . . . .	1
1.2	Subconjuntos del plano y del espacio cartesianos . . . . .	9
1.3	Simetrías . . . . .	18
1.4	Funciones y sus gráficas . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Funciones trigonométricas y coordenadas polares</b>	<b>35</b>
2.1	Razones trigonométricas y algunas relaciones . . . . .	35
2.2	Resolución de triángulos . . . . .	42
2.3	Funciones e identidades trigonométricas . . . . .	47
2.4	Funciones trigonométricas inversas . . . . .	59
2.5	Coordenadas polares . . . . .	61
2.6	Curvas en coordenadas polares . . . . .	64
2.7	Curvas paramétricas . . . . .	68
2.8	Coordenadas esféricas y cilíndricas . . . . .	73
2.9	Un comentario sobre series de Fourier (*) . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Espacios vectoriales básicos</b>	<b>81</b>
3.1	Fuerzas; funciones; plano y espacio cartesianos . . . . .	82
3.2	Subespacios vectoriales . . . . .	98
3.3	Base y dimensión . . . . .	106



3.4	Determinantes y sus propiedades . . . . .	119
3.5	Productos: escalar, vectorial y triple escalar . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Rectas, planos, semiplanos y semiespacios</b>	<b>137</b>
4.1	Rectas y semiplanos de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	137
4.2	Rectas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	145
4.3	Planos y semiespacios en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	150
4.4	Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	156
4.5	Sistemas de desigualdades lineales . . . . .	166
4.6	Apéndice: Rectas y puntos notables de un triángulo . . . . .	173
<b>5</b>	<b>Cónicas</b>	<b>175</b>
5.1	Definición, trazado y nomenclatura . . . . .	175
5.2	Ecuaciones canónicas . . . . .	181
5.3	Cónicas con ejes paralelos a los coordenados . . . . .	188
5.4	Discriminante, simetrías, extensión y asíntotas . . . . .	192
5.5	Excentricidad. Secciones de un cono . . . . .	204
5.6	Propiedad focal de las cónicas . . . . .	210
5.7	Algunos resultados sobre la circunferencia . . . . .	214
5.8	Cónicas en coordenadas polares. Órbitas de los planetas(*) . . .	219
<b>6</b>	<b>Superficies Cuádricas</b>	<b>225</b>
6.1	Cilindros . . . . .	226
6.2	Superficies de revolución . . . . .	230
6.3	Las posibles superficies cuádricas . . . . .	241
6.4	Simetrías y extensión . . . . .	250
6.5	Cuádricas con ejes paralelos a los coordenados . . . . .	257
6.6	Superficies regladas . . . . .	259
6.7	Plano tangente a una cuádrica (*) . . . . .	265
6.8	Algunas propiedades de la esfera . . . . .	270

<b>7</b>	<b>Transformaciones lineales</b>	
	<b>y transformaciones rígidas</b>	<b>275</b>
7.1	Definición y ejemplos de transformaciones lineales . . . . .	275
7.2	Matrices y transformaciones lineales . . . . .	282
7.3	Subespacios invariantes bajo transformaciones lineales . . . . .	292
7.4	Transformaciones rígidas . . . . .	303
7.5	Eliminación de términos mixtos . . . . .	309
7.6	Números Complejos y Transformaciones Conformes(*) . . . . .	324
	<b>Epílogo</b>	<b>329</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>331</b>

---

# Conceptos básicos

---

Para introducir al lector al estudio de la Geometría Analítica es necesario establecer un lenguaje y una notación específicos; muchos de los conceptos se han introducido en niveles escolares anteriores y lo único que pretendemos en este primer capítulo es hacer una revisión de ellos teniendo siempre presente la correspondencia entre el concepto geométrico y su expresión en coordenadas.

## 1.1 Plano y espacio cartesianos

Como lo mencionamos en la introducción, las coordenadas son básicas para el tipo de estudio que vamos a emprender. Por eso conviene recordar cómo se asigna coordenadas cartesianas a un punto del plano o del espacio euclidianos, y también cómo se localiza un punto en el plano o el espacio cartesiano si conocemos sus coordenadas.

En el caso del plano se toma un par de rectas perpendiculares, que por cuestiones tipográficas o de comodidad suelen dibujarse una horizontal y otra vertical. Consideramos a ambas rectas como rectas numéricas, es decir, estamos ya utilizando la correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos de una recta y el conjunto de los números reales, que en adelante denotaremos con  $\mathbb{R}$ . Entonces, al punto de intersección le hacemos corresponder el origen de ambas rectas numéricas mientras que como punto correspondiente a 1 elegimos un punto en el rayo derecho de la recta horizontal y un punto en el rayo superior de la recta vertical. Un plano en el que se han introducido coordenadas cartesianas se denomina *plano cartesiano* y se denota como  $\mathbb{R}^2$ .

Es importante recalcar que la unidad utilizada en ambos ejes debe ser la misma; cuando eso no ocurra, debe hacerse la observación correspondiente, pues las gráficas se alteran y eso puede dar lugar a confusiones (vea el Ejercicio 7).

A la recta horizontal la denominamos *eje de las abscisas* o *eje X*, y a la recta

vertical la llamamos *eje de las ordenadas* o *eje Y* (aquí conviene aclarar que en matemáticas leemos “eje ye” para no tener que decir “i griega”). Tenemos entonces la situación ilustrada en la Figura 1.1.

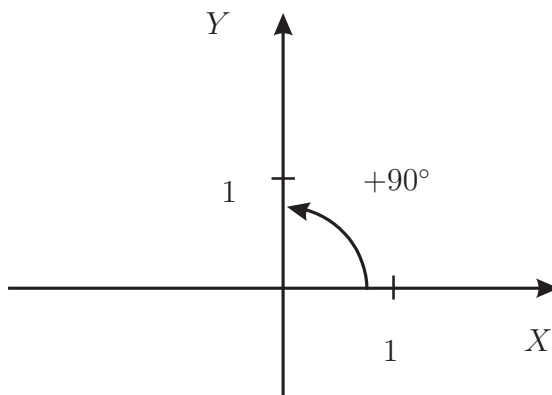


Figura 1.1: Sistema derecho en el plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$

Como al ubicar el número 1 en el rayo derecho del eje  $X$  el resto de los números reales positivos queda también localizado en ese mismo rayo, se le llama *semieje  $X$  positivo* (se excluye al origen), y al rayo restante se le llama *semieje  $X$  negativo*. Lo mismo ocurre para los dos rayos (sin el origen) del eje  $Y$ . Por tanto, los puntos en el rayo derecho del eje  $X$  deben satisfacer la condición  $x > 0$ , mientras que los puntos del rayo izquierdo satisfacen la condición  $x < 0$ ; análogamente, los puntos del rayo superior del eje  $Y$  deben satisfacer la condición  $y > 0$ , y los del rayo inferior satisfacen la condición  $y < 0$ .

En este libro la unidad utilizada en ambos ejes será la misma a menos que se avise lo contrario. El lector deberá preguntarse siempre cuáles son las unidades utilizadas en las gráficas, porque la información visual puede ser engañosa.

Desde luego, habrá casos en que el sistema coordenado ya esté introducido y desde nuestra posición los ejes no se vean como una recta horizontal y otra vertical, pero lo que sí debe ocurrir es que al girar el semieje positivo de las abscisas un ángulo de  $90^\circ$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, éste alcance al semieje positivo de las ordenadas (véase la Figura 1.1). También puede usarse ejes no perpendiculares, en cuyo caso los cálculos se complican; el material de los capítulos 3 y 7 permitirá al lector utilizar ese tipo de sistemas de referencia.

Es importante observar que ningún movimiento rígido del plano puede hacer coincidir un *sistema derecho* como el ilustrado en la Figura 1.1, con un *sistema izquierdo*, como el dibujado en la Figura 1.2. Desde luego, esta discriminación es arbitraria, pero así como la mayoría de los objetos que utilizamos están diseñados para ser utilizados por personas diestras, también ocurre que las ecuaciones mencionadas en los libros o en las clases están referidas a sistemas derechos.

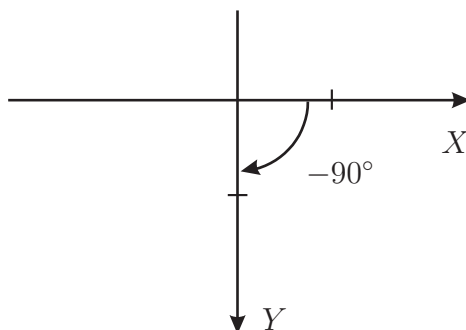


Figura 1.2: Sistema coordenado izquierdo, no utilizado.

Para asignarle *coordenadas cartesianas* al punto  $P$  ilustrado en la Figura 1.3, trazamos paralelas a cada uno de los ejes por dicho punto y nos fijamos en los puntos  $A$  y  $B$  de intersección con el otro eje (véase la Figura 1.3). Al número  $a$  correspondiente en el eje  $X$  a la intersección  $A$  le llamamos *primera coordenada* o *abscisa de  $P$* , y al número  $b$  correspondiente en el eje  $Y$  al punto de intersección  $B$  le llamamos *segunda coordenada* u *ordenada de  $P$* , mientras que al par ordenado  $(a, b)$  le llamamos *coordenadas de  $P$* .

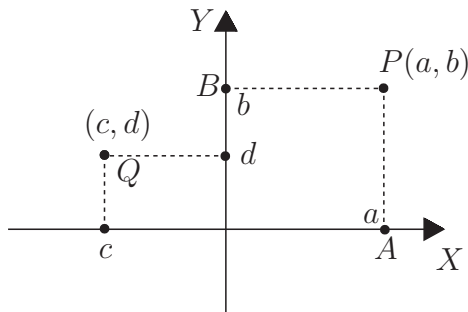


Figura 1.3: Coordenadas cartesianas de un punto en el plano.

Recíprocamente, si contamos con las coordenadas  $(c, d)$  de un punto del plano cartesiano, la manera de localizar el punto  $Q$  que determinan es trazar una perpendicular al eje  $X$  por el punto correspondiente a la abscisa  $c$  y otra perpendicular al eje  $Y$  por el punto asociado a la ordenada  $d$ . El punto de intersección de ambas perpendiculares es el punto  $Q$  buscado.

Las cuatro regiones obtenidas al excluir los ejes se denominan *cuadrantes*. Cada uno de los cuadrantes puede caracterizarse por los signos de las coordenadas de sus puntos, como lo ilustra la Figura 1.4.

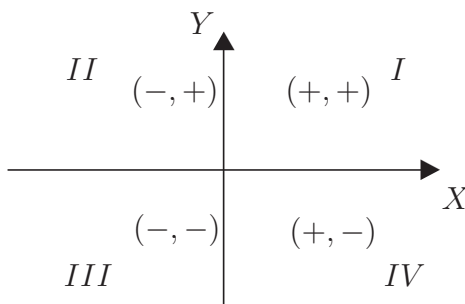


Figura 1.4: Cuadrantes del plano y signos de las coordenadas.

El cuadrante con el juego de signos  $(+, +)$  se denomina *primer cuadrante*, el cuadrante con el juego de signos  $(-, +)$  se denomina *segundo cuadrante*, el correspondiente al juego de signos  $(-, -)$  es el *tercer cuadrante*, y el cuadrante con signos  $(+, -)$  se denomina *cuarto cuadrante*.

Conviene notar que los puntos del plano cartesiano pertenecientes al eje  $X$  se caracterizan porque su ordenada es cero y, en consecuencia,

$$y = 0 \text{ es la ecuación del eje } X.$$

Análogamente, los puntos del eje  $Y$  se caracterizan porque su abscisa es cero y por tanto,

$$x = 0 \text{ es la ecuación del eje } Y.$$

Vayamos ahora al espacio euclidiano. Para introducir en él coordenadas cartesianas, basta tomar tres planos concurrentes y perpendiculares dos a dos, como sucede con las dos paredes y el suelo que forman una esquina de cualquier habitación; la ilustración que suele presentarse en los textos o en el pizarrón es la Figura 1.5, pero lo realmente importante es que los tres planos se corten en un punto y que sean perpendiculares dos a dos.

Las tres rectas determinadas tomando los planos por pares serán los ejes coordenados y también en este caso deberemos respetar la convención universalmente establecida en cuanto a la relación que guardan los tres semiejes positivos (véase la Figura 1.5).

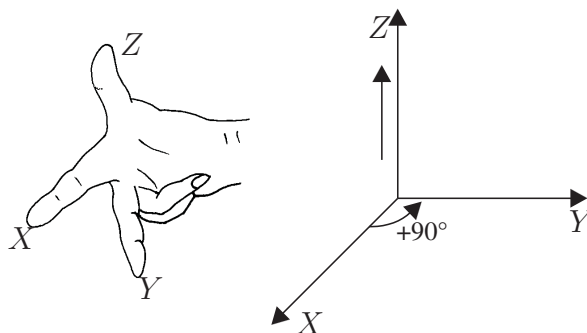


Figura 1.5: Sistema coordenado derecho en el espacio cartesiano.

Si nos ubicamos frente a una de las esquinas de la habitación en la que nos encontramos, el suelo corresponde al *plano*  $XY$ , donde el *eje*  $X$  corresponde a la recta de la izquierda y la parte que vemos pertenece al *semieje*  $X$  *positivo*; el *eje*  $Y$  corresponde a la recta de la derecha y la parte que vemos pertenece al *semieje*  $Y$  *positivo*; finalmente, la recta frente a nosotros corresponde al *eje*  $Z$  y la parte que vemos pertenece al *semieje*  $Z$  *positivo*. La característica que define a este sistema coordenado como un *sistema derecho* es el hecho de que al colocar nuestra mano **derecha** con los dedos pulgar, índice y medio estirados como lo muestra la figura, el dedo índice apunta hacia la parte positiva del eje  $X$ , el medio apunta hacia la parte positiva del eje  $Y$  y el pulgar hacia la parte positiva del eje  $Z$ . El espacio provisto de un sistema coordenado como el descrito se denomina *espacio cartesiano* y se denota por  $\mathbb{R}^3$ .

También en este caso la diferencia entre un sistema derecho y un sistema izquierdo es esencial, tanto como la que existe entre nuestras manos derecha e izquierda. Las ecuaciones de lugares geométricos que aparecen en los textos o artículos especializados están referidas siempre a sistemas derechos.

Los planos  $XY$ ,  $YZ$  y  $ZX$  se denominan *planos coordenados* y dividen al espacio en *octantes*. El único que suele distinguirse llamándolo *primer octante* es el mostrado en la Figura 1.5; la característica de sus puntos es tener las tres coordenadas positivas.

Para determinar las coordenadas cartesianas de un punto  $P$  en el espacio

procedemos así: primero trazamos por  $P$  una perpendicular al plano  $XY$  y otra perpendicular al eje  $Z$ ; después, por el pie  $H$  de la perpendicular al plano  $XY$  trazamos perpendiculares a los ejes  $X$  y  $Y$  para repetir la construcción realizada en el caso del plano, la cual nos permitió determinar las coordenadas de cualquier punto en el plano. Entonces las coordenadas del punto  $P$  se determinan así (véase la Figura 1.6): la primera coordenada es el número  $x$  asociado al pie  $R$  de la perpendicular de  $H$  al eje  $X$ , la segunda coordenada es el número  $y$  asociado al pie  $S$  de la perpendicular de  $H$  al eje  $Y$ , y la tercera coordenada es el número  $z$  correspondiente al pie  $T$  de la perpendicular desde  $P$  al eje  $Z$ . La terna ordenada  $(x, y, z)$  está formada por las coordenadas cartesianas del punto  $P$ . Nos gustaría que el lector notara que las coordenadas pueden determinarse trazando directamente perpendiculares a cada uno de los ejes  $X, Y, Z$  y tomando como coordenadas los números  $x, y$  y  $z$  correspondientes a los pies de las perpendiculares al eje  $X$ , al eje  $Y$  y al eje  $Z$ ; tanto esta forma como la descrita anteriormente constituyen dos formas de generalizar la determinación de coordenadas hecha en el caso del plano.

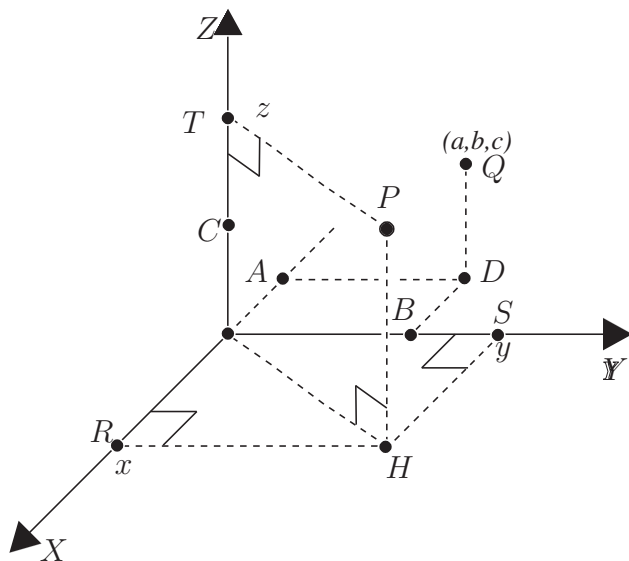


Figura 1.6: Coordenadas cartesianas de un punto en el espacio.

Recíprocamente, dada una terna ordenada de números reales  $(a, b, c)$ , el punto  $Q$  con esas coordenadas se localiza mediante los puntos  $A$  en el eje  $X$ ,  $B$  en el eje  $Y$  y  $C$  en el eje  $Z$  de coordenadas  $a, b$  y  $c$ , respectivamente, haciendo



la construcción siguiente: primero localizamos en el plano  $XY$  el punto  $D$  de coordenadas  $(a, b, 0)$  y, luego, sobre la perpendicular al plano  $XY$  por  $D$  subimos o bajamos según lo indique el signo de  $c$  (véase la Figura 1.6). Hay otras formas de localizar el punto  $Q$ ; el lector las encontrará en los ejercicios.

Cada uno de los planos coordenados puede caracterizarse por el hecho de que la coordenada faltante se anula; así, para los puntos del plano  $XY$  la tercera coordenada es cero y por tanto

$$z = 0 \text{ es la ecuación del plano } XY;$$

para los puntos del plano  $YZ$  la primera coordenada es cero y en consecuencia

$$x = 0 \text{ es la ecuación del plano } YZ;$$

finalmente, para los puntos del plano  $XZ$  ocurre que la segunda coordenada es cero, por lo cual

$$y = 0 \text{ es la ecuación del plano } XZ.$$

Seguramente el lector notará que la misma ecuación corresponde a lugares geométricos distintos según debamos localizarlos en el plano o en el espacio; ello se debe a que una ecuación como  $x = 0$  sólo condiciona a la primera coordenada obligándola a ser cero, en tanto que “las” restantes pueden tomar cualquier valor. “Las” restantes son una sola,  $y$ , en el caso de  $\mathbb{R}^2$ , y dos,  $y$  y  $z$ , en el caso de  $\mathbb{R}^3$ .

Las Figuras 1.7(a) y 1.7(b), muestran los lugares geométricos correspondientes a la ecuación  $y = 2$  en el caso del plano y el espacio, respectivamente.

La observación sobre cuántas y cuáles variables aparecen en una ecuación debe ser bien comprendida, y muestra la importancia de saber de antemano en dónde nos interesa localizar el lugar geométrico correspondiente a una ecuación. En nuestro caso sólo trataremos con el plano o el espacio cartesianos, pero no es difícil encontrar situaciones en que se requiera más de tres variables para describir un fenómeno que nos interesa; en tales casos puede ser difícil visualizar el lugar geométrico correspondiente, pero siempre podremos recurrir al método analítico para hacer el estudio y la generalización será más sencilla mientras mejor manejemos los casos del plano y el espacio.

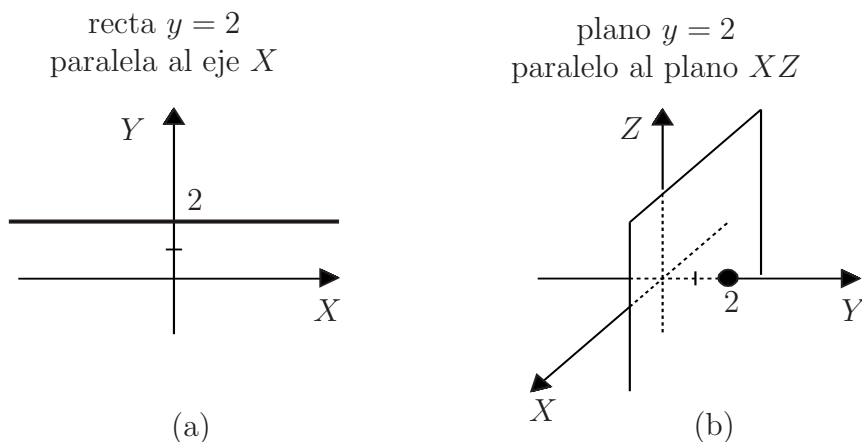


Figura 1.7: Una misma ecuación tiene lugares geométricos distintos en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ .

## EJERCICIOS

1. Localizar en dos gráficas distintas los puntos dados en los dos incisos siguientes:
  - i)  $P(1, 1)$ ,  $Q(1, -1)$ ,  $R(-1, -1)$ ,  $S(-1, 1)$ .
  - ii)  $P(1, 1, 1)$ ,  $Q(1, 1, -1)$ ,  $R(-1, 1, 1)$ ,  $S(-1, 1, -1)$   
 $T(-1, -1, 1)$ ,  $U(-1, -1, -1)$ ,  $V(1, -1, 1)$ ,  $W(1, -1, -1)$ .
2. ¿A cuál eje coordenado pertenece un punto de  $\mathbb{R}^2$  cuya segunda coordenada sea 0? ¿A cuál eje coordenado pertenece un punto de  $\mathbb{R}^2$  cuya primera coordenada sea cero?
3. ¿Qué característica deben satisfacer las coordenadas de un punto de  $\mathbb{R}^3$  para que pertenezca a uno de los planos coordenados?
4. Después de dibujar los tres ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  correspondientes a un sistema derecho en el que el plano  $XY$  sea horizontal y la parte positiva del eje  $Z$  apunte hacia arriba, determine qué característica deben tener las coordenadas de un punto para satisfacer la condición establecida en cada uno de los incisos siguientes:
  - i) Estar arriba del plano  $XY$ .
  - ii) Estar en el plano  $XY$ .
  - iii) Estar abajo del plano  $XY$ .
  - iv) Estar atrás del plano  $YZ$ .

- v) Estar a la izquierda del plano  $XZ$ .
5. Sean  $(x, y, z)$  las coordenadas de un punto  $P$  del espacio cartesiano. Para un sistema coordenado como el de la figura 1.5, ¿dónde se ubica el punto si  $x > 0$ ? ¿Y dónde se ubica  $P$  si  $y < 0$ ?
  6. Verifique que los planos siguientes tienen como intersección al punto  $(a, b, c)$ : el plano paralelo a  $XY$  por el punto  $(0, 0, c)$ , el plano paralelo a  $YZ$  por el punto  $(a, 0, 0)$ , y el plano paralelo a  $XZ$  por el punto  $(0, b, 0)$ .
  7. Trace la gráfica de la función  $y = x$  en sistemas coordenados tales que:
    - i) la unidad en ambos ejes mida lo mismo;
    - ii) la unidad en el eje  $X$  mida el doble de la unidad en el eje  $Y$ .

## 1.2 Subconjuntos del plano y del espacio cartesianos

La materia de Geometría Analítica se considera básica porque incluye temas necesarios en Cálculo, Geometría, Álgebra lineal, Física, Probabilidad, etc. En esos cursos es necesario manejar subconjuntos del plano y el espacio cartesianos (a veces serán necesarias más de tres variables, esto es, más de tres dimensiones, como en Física), y muchas veces será necesario considerar la región definida como una unión, una intersección, un complemento, etc.

Conviene entonces ejemplificar cómo visualizar ese tipo de regiones y, también, recordar la notación y algunos hechos de Teoría de Conjuntos. Podemos hacer ambas cosas a la vez mediante algunos ejemplos y ejercicios. Pero primero recordemos las definiciones y la notación correspondientes a los términos que hemos mencionado.

Si  $A$  denota un conjunto, sus elementos deben estar bien caracterizados y entonces siempre podremos decidir si un elemento  $a$  pertenece o no al conjunto; si  $a$  tiene la característica o características determinantes de  $A$ , escribimos

$$a \in A, \text{ que se lee } a \text{ está en o es elemento de } A,$$

y si  $a$  no reúne las características determinantes de  $A$ , escribimos

$$a \notin A, \text{ que se lee } a \text{ no está en o no es elemento de } A.$$

Cuando todos los elementos de un conjunto  $A$  son también elementos de otro conjunto  $B$ , se dice que  $A$  es *subconjunto del conjunto*  $B$  y la notación es  $A \subset B$ . Nótese que  $A \subset A$ .

La *igualdad de dos conjuntos*  $A$  y  $B$  ocurre cuando cada conjunto es subconjunto del otro, es decir,

$$A = B \text{ si y sólo si } A \subset B \text{ y } B \subset A$$

La *unión del conjunto*  $A$  con el conjunto  $B$  es el conjunto cuyos elementos pertenecen a, al menos, uno de los conjuntos  $A$  y  $B$ ; la notación es

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\},$$

donde las dos llaves indican que se trata de un conjunto, la barra se lee “tal que” y la conjunción “ó” significa que *basta una* de las dos condiciones para considerar que el elemento pertenece a la unión.

La *intersección de los conjuntos*  $A$  y  $B$  es el conjunto cuyos elementos pertenecen tanto a  $A$  como a  $B$ ; la notación es

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\},$$

donde la conjunción “y” significa que *ambas* condiciones deben ser satisfechas por el elemento para considerar que pertenece a la intersección.

Si  $A$  y  $B$  no tienen elementos en común se dice que son *conjuntos ajenos* o que su intersección es el *conjunto vacío*  $\emptyset$ . El conjunto vacío debe considerarse subconjunto de cualquier otro conjunto.

El *complemento de un conjunto*  $A$  es el conjunto de los elementos (en el universo bajo consideración) que no reúnen las características distintivas de  $A$ ; la notación es

$$A^- = \{x \mid x \notin A\},$$

aunque, en contraste con las notaciones correspondientes a unión e intersección, la asignada al complemento puede variar de un libro a otro.

Por último, la *diferencia de  $A$  con  $B$*  es el conjunto de aquellos elementos de  $A$  que no pertenecen a  $B$ ; se le llama también el *complemento de  $B$  relativo a  $A$*  y la notación es

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Es claro que podríamos abundar mucho sobre el tema de Teoría de Conjuntos, pero el hacerlo nos desviaría de nuestro interés principal, la Geometría;

por tanto, nos limitaremos a proponer en forma de ejercicios algunos de los resultados más utilizados en este libro. Lo mismo ocurre con las propiedades de los números reales, en especial las referentes a desigualdades; los conceptos referentes a este tema los discutiremos sobre la marcha, en ejemplos específicos como los siguientes.

**Ejemplo 1.** Si  $A = \{(x, y) \mid xy < 0\}$  y  $B = \{(x, y) \mid y^2 > 4\}$ , dibuje en gráficas separadas las regiones del plano cartesiano correspondientes a

- (i)  $A \cup B$ ; (ii)  $A \cap B$ ; (iii)  $A^-$ ; (iv)  $B^-$ ; (v)  $B - A$ .

**Solución.** Lo primero que necesitamos es determinar las regiones de  $\mathbb{R}^2$  que corresponden a  $A$  y a  $B$ ; entonces será sencillo ubicar los complementos de cada uno, la unión de ambos, su intersección y la diferencia indicada en v).

La forma de caracterizar los elementos de  $A$  es analizar la desigualdad  $xy < 0$ : para que el producto de dos números reales sea negativo, esto es, estrictamente menor que cero, es necesario que uno sea positivo y el otro negativo, es decir, los juegos de signos permitidos son  $(+, -)$  y  $(-, +)$ , correspondientes a los puntos de los cuadrantes II y IV. En consecuencia su dibujo es el de la Figura 1.8(a), donde los ejes están excluidos porque la desigualdad es estricta.

En cuanto a  $B$ , sus elementos están caracterizados porque el cuadrado de su ordenada es mayor que 4, lo cual obliga a  $y$  a ser mayor que 2 o menor que  $-2$ , pero deja en libertad a la abscisa de tomar cualquier valor; por ejemplo, para la ordenada 3, que satisface la condición de que su cuadrado es mayor que 4, podemos tomar cualquier abscisa, 0, 1,  $-2$ , 15, etc., y los puntos así formados,  $(0, 3)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(-2, 3)$ ,  $(15, 3)$ , etc., ubicados todos en la recta horizontal  $y = 3$ , pertenecen al conjunto  $B$ . Lo mismo ocurre con los demás valores de  $y$  correspondientes a puntos en el eje  $Y$  arriba del asociado a  $y = 2$ , o los correspondientes a puntos del rayo del eje  $Y$  cuyo extremo superior corresponde a  $-2$ ; cada punto determina toda una recta horizontal cuyos puntos pertenecen a  $B$  puesto que el cuadrado de su ordenada es mayor que 4. En resumen,  $B$  consta de dos semiplanos: el que tiene como borde inferior la recta horizontal  $y = 2$  y la excluye, porque la desigualdad es estricta, y el que tiene como borde superior a la recta horizontal  $y = -2$  pero también la excluye (véase la Figura 1.8(b)).

Una vez identificadas las regiones correspondientes a los conjuntos  $A$  y  $B$ ,

para identificar la correspondiente a la unión basta tomar en cuenta todos los puntos que pertenecen a **alguna** de las dos regiones, lo cual da lugar a la Figura 1.8(c).

En términos de conjuntos escribimos:

$$A \cup B = \{(x, y) \mid xy < 0 \text{ ó } y^2 > 4\};$$

La región correspondiente a la intersección consta sólo de los puntos que pertenecen a **ambas** regiones, obteniéndose la Figura 1.8(d) cuyo conjunto correspondiente es:

$$A \cap B = \{(x, y) \mid xy < 0 \text{ y } y^2 > 4\}$$

El complemento de  $A$  consta de todos aquellos puntos del plano cartesiano que no pertenecen a  $A$ , esto es, los puntos de los cuadrantes I y III con los ejes incluidos, como lo muestra la Figura 1.8(e), cuyo conjunto correspondiente es

$$A^- = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}.$$

El complemento de  $B$  consta de todos los puntos del plano que no están en  $B$ , esto es, los que se ubican en la banda horizontal entre 2 y  $-2$  con los bordes incluidos, como lo muestra la Figura 1.8 (f); para todos esos puntos el cuadrado de la ordenada es menor o igual que 4, es decir,

$$B^- = \{(x, y) \mid y^2 \leq 4\}.$$

Finalmente, la diferencia de  $B$  con  $A$  es el conjunto de los puntos en  $B$  que no pertenecen a  $A$ , lo cual elimina de los cuadrantes II y IV los puntos arriba de la recta horizontal  $y = 2$  y los puntos debajo de la recta horizontal  $y = -2$ , como lo muestra la Figura 1.8(g); el conjunto correspondiente es

$$B - A = \{(x, y) \mid xy \geq 0 \text{ y } y^2 > 4\}.$$

### Observación.

Conviene tomar nota de que si una condición no involucra alguna de las coordenadas, ésta es **libre** de tomar cualquier valor; en términos geométricos eso significa que hay rectas completas, paralelas al eje de la coordenada libre, que pertenecen al conjunto en cuestión.

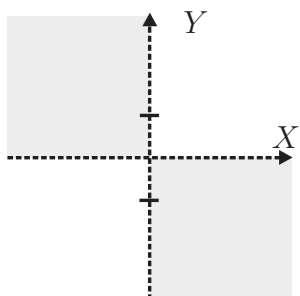
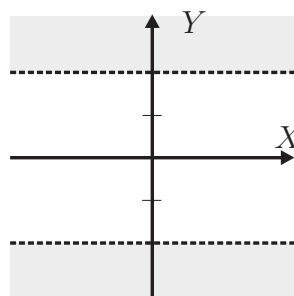
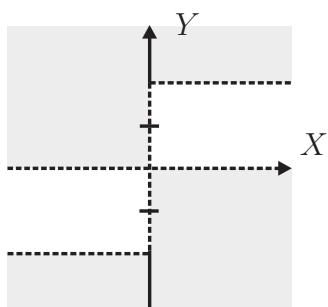
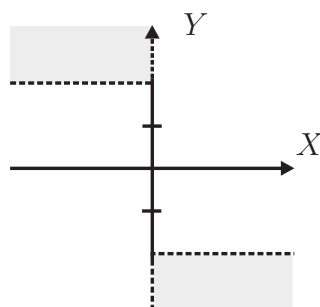
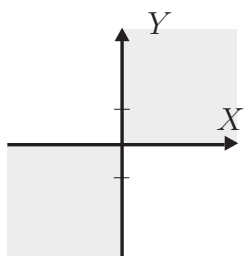
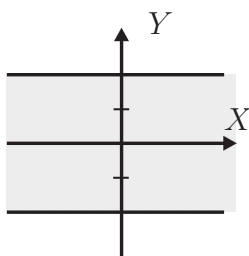
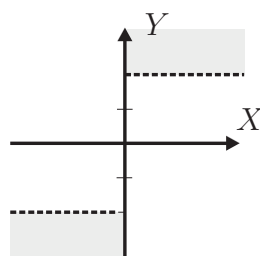
(a)  $A$ (b)  $B$ (c)  $A \cup B$ (d)  $A \cap B$ (e)  $A^-$ (f)  $B^-$ (g)  $B - A$ 

Figura 1.8: Regiones del plano cartesiano del Ejemplo 1.

**Ejemplo 2.** Dibujar en gráficas separadas las regiones del espacio cartesiano indicadas en los incisos siguientes

- i)  $A \cap B$ ;
- ii)  $B - A^-$ ;
- iii)  $A \cap B^-$ ;

donde  $A = \{(x, y, z) \mid |z| > 2\}$  y  $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Solución.** Empecemos por identificar y dibujar separadamente las regiones de  $\mathbb{R}^3$  correspondientes a los conjuntos  $A$  y  $B$ , para después identificar sus complementos y la unión, intersección o diferencia entre los conjuntos mencionados en los incisos i)-iii).

En general, para cada gráfica debemos empezar por dibujar los tres ejes positivos de forma que nos ofrezcan una buena perspectiva del primer octante; los ejes deben determinar un sistema derecho (recuérdese la discusión inicial); después hay que reducir la condición definitoria de cada conjunto a términos que nos resulten más fácilmente identificables.

En el caso del conjunto  $A$ , identifiquemos en el eje  $Z$  los puntos que satisfacen la condición de que su valor absoluto es mayor que 2; eso ocurre para los puntos del eje arriba del punto correspondiente a 2, es decir, los ubicados en el rayo superior que empieza en ese punto pero lo excluye, y también cumplen con la condición los puntos del rayo inferior cuyo extremo corresponde a  $-2$ , aunque dicho extremo queda excluido porque la desigualdad es estricta.

De acuerdo con la observación hecha durante el desarrollo del ejemplo 1, como la condición no menciona las coordenadas  $x$  y  $y$ , éstas son libres de tomar cualquier valor, por lo que cada punto del eje  $Z$  cuyo número asociado tenga valor absoluto mayor que 2, como 5, determina un número infinito de puntos  $(x, y, 5)$  que pertenecen al conjunto  $A$ . Así como el conjunto de los puntos  $z = 0$  es el plano  $XY$ , el conjunto de los puntos  $(x, y, 5)$  es el plano paralelo al  $XY$  que corta al eje  $Z$  en el punto correspondiente a 5, y como esto ocurre con cada uno de los valores de  $z$  correspondientes a puntos del rayo cuyo extremo inferior es 2, resulta que todos los puntos del espacio que están arriba del plano  $z = 2$  pertenecen al conjunto. Lo mismo sucede con los puntos del espacio que están debajo del plano  $z = -2$ . El croquis de la región aparece en la Figura 1.9(a).



Para dibujar la región correspondiente a  $B$ , primero localizamos en el plano  $XY$  el subconjunto que satisface la condición  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Cuando se tiene la igualdad, la condición es  $x^2 + y^2 = 1$ , que según sabemos corresponde a una circunferencia con centro en el origen y de radio 1; cada punto interior del disco bordeado por la circunferencia pertenece a una circunferencia de radio  $r$  menor que 1, y por tanto satisface la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ , pero como  $r$  es un número positivo y menor que uno, su cuadrado satisface la desigualdad  $r^2 < 1$ , lo cual significa que las coordenadas de un punto interior del círculo satisfacen la desigualdad  $x^2 + y^2 < 1$  y, por tanto, el punto pertenece al conjunto  $B$ .

Como la variable  $z$  no figura en la condición, es claro que para cada punto del círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ , toda la recta paralela al eje  $Z$  que pasa por ese punto pertenece al conjunto, esto es, todos los puntos en el interior del cilindro ilustrado en la Figura 1.9(b) pertenecen al conjunto  $B$ .

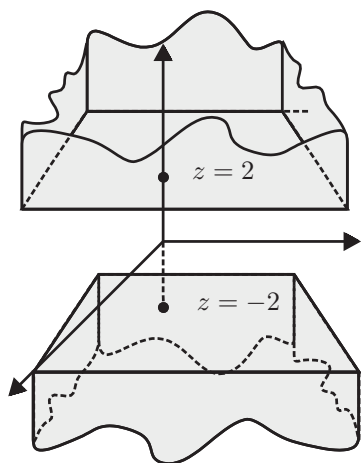
El conjunto  $A \cap B$  consta de los puntos del espacio que pertenecen tanto a  $A$  como a  $B$ , es decir, debe estar arriba del plano  $z = 2$  o debajo del plano  $z = -2$ , y además deben pertenecer al cilindro cuyo eje es el eje  $Z$  y de radio 1; por tanto, la intersección consta de dos pedazos infinitos de cilindro, como lo muestra la Figura 1.9(c).

El conjunto  $B - A^-$  consta de los puntos de  $B$  que no están en  $A^-$ , es decir, que están en  $A$ ; en consecuencia se trata precisamente del mismo conjunto del inciso anterior.

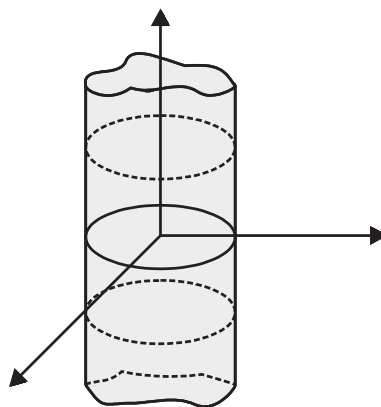
Por último, el conjunto  $A \cap B^-$  consta de los puntos de  $A$  que pertenecen también a  $B^-$ , esto es, deben estar arriba del plano  $z = 2$  o debajo del plano  $z = -2$  y fuera del cilindro correspondiente a  $B$ ; la Figura 1.9(d) ilustra esa región.

### Observación.

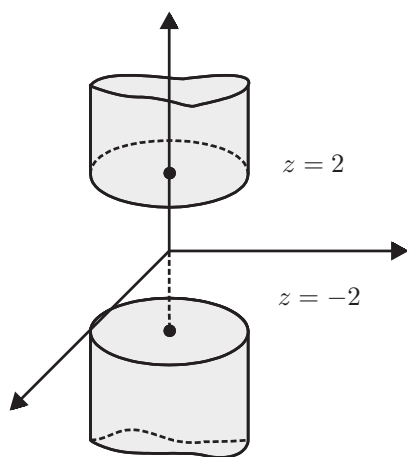
Acabamos de descomponer una desigualdad del tipo  $a \leq b$  en una igualdad y una desigualdad estricta, lo cual es válido porque tanto los elementos que satisfacen la igualdad como los que satisfacen la desigualdad estricta satisfacen la condición correspondiente a menor o igual; vale la pena notar que el conjunto determinado por la igualdad es sólo una curva, mientras que el conjunto correspondiente a la desigualdad estricta es toda una región del plano. Más adelante, cuando en el capítulo de espacios vectoriales lleguemos a precisar el concepto de dimensión, que es uno de los conceptos geométricos más importantes, esto último tendrá un significado más claro.



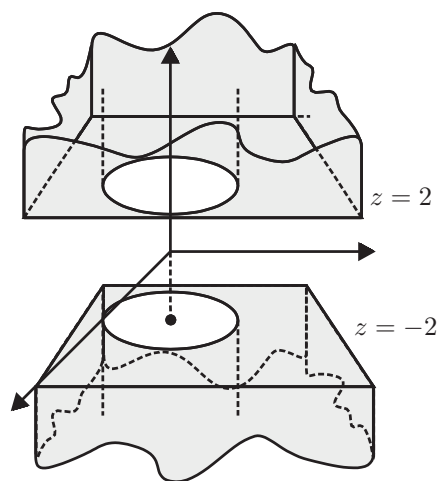
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.9: Regiones del espacio cartesiano del ejemplo 2.

---

## EJERCICIOS

1. Dibuje separadamente las gráficas de los subconjuntos del plano cartesiano dados a continuación.

$$A = \{(x, y) \mid x + y > 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid x^2 < 1\},$$

$$C = \{(x, y) \mid xy \leq 0\}, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

2. Escriba las expresiones correspondientes a los subconjuntos del plano cartesiano dados como los complementos de los subconjuntos del ejercicio anterior,  $A^-$ ,  $B^-$ ,  $C^-$  y  $D^-$ , y dibuje sus gráficas separadamente.
3. Dibuje separadamente las gráficas de los subconjuntos siguientes del plano cartesiano formados a partir de los subconjuntos definidos en los dos ejercicios anteriores:

i)  $A - B$ .

ii)  $B \cup C$ .

iii)  $C \cap D$ .

iv)  $D - A^-$ .

4. Dibuje separadamente las gráficas de los subconjuntos del espacio cartesiano dados a continuación.

i)  $R = \{(x, y, z) \mid y > 3\}$ ,

ii)  $S = \{(x, y, z) \mid z^2 > 4\}$ ,

iii)  $T = \{(x, y, z) \mid xz \geq 0\}$ ,

iv)  $U = \{(x, y, z) \mid y - z \leq 0\}$ .

5. Escriba las expresiones correspondientes a  $R^-$ ,  $S^-$ ,  $T^-$  y  $U^-$ , complementos de los subconjuntos  $R$ ,  $S$ ,  $T$  y  $U$  del ejercicio anterior, y dibuje sus gráficas separadamente.
6. Forme nuevos subconjuntos del espacio cartesiano a partir de los subconjuntos dados en los ejercicios anteriores, escriba la expresión correspondiente y dibuje las gráficas separadamente.

## 1.3 Simetrías

Una de las propiedades geométricas más importantes de una figura, la primera apreciada por el hombre, es la de ser simétrica respecto a un punto, a una recta o, si la figura se ubica en el espacio, a un plano. Como estos conceptos involucran distintos tipos de distancias, conviene que establezcamos cómo vamos a medir las distancias de un punto a otro, de un punto a una recta o de un punto a un plano. El lector puede hacer referencia a la Figura 1.10.

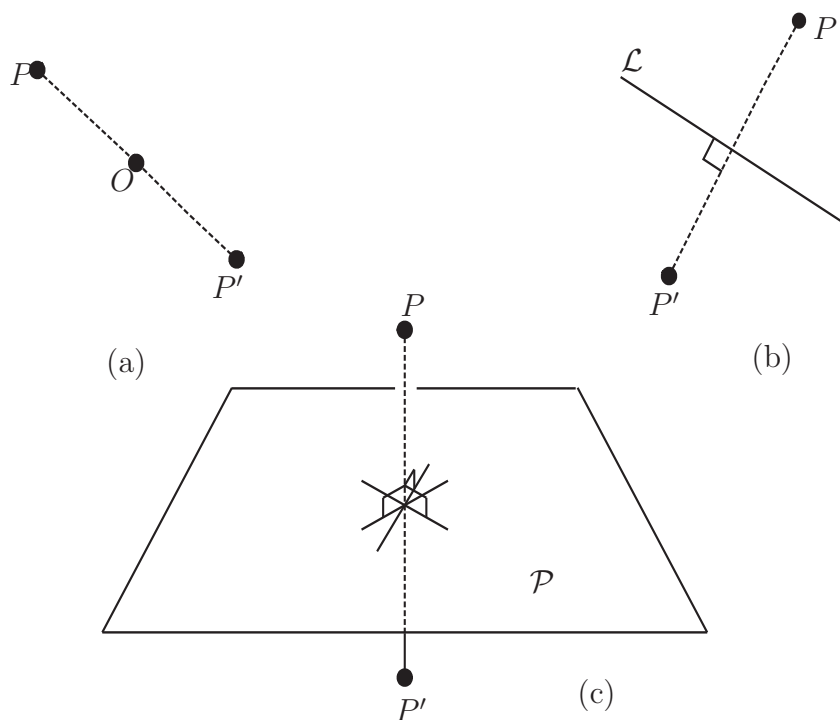


Figura 1.10: Puntos simétricos a  $P$  respecto a (a) un punto  $O$ , (b) una recta  $\mathcal{L}$  y (c) un plano  $\mathcal{P}$ .

La *distancia de un punto  $P$  a otro punto  $Q$*  es simplemente la medida del segmento de recta entre  $P$  y  $Q$ . Estamos suponiendo únicamente que sabemos medir longitudes; en los ejercicios pediremos al lector recapacitar en las propiedades de esta distancia entre puntos del espacio.

La *distancia de un punto  $P$  a una recta  $\mathcal{L}$*  es la longitud del segmento de perpendicular de  $P$  a  $\mathcal{L}$ ; es interesante hacer notar que ese segmento es el de

mínima longitud entre todos los segmentos determinados por el punto dado y uno de los puntos de la recta.

La *distancia de un punto  $P$  a un plano  $\mathcal{P}$*  es la longitud del segmento de perpendicular del punto al plano; también en este caso ese segmento es el de mínima longitud entre todos los segmentos determinados por el punto dado y uno de los puntos del plano.

Veremos primero la definición de cada una de las simetrías mencionadas en forma puramente geométrica, sin referirnos a coordenadas, y después veremos que cuando la figura se ubica en el plano o el espacio coordenados, los casos especiales de simetrías respecto al origen, los ejes coordenados o los planos coordenados tienen caracterizaciones muy sencillas.

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A}$  es *simétrica respecto a un punto  $O$*  si para cada punto  $P \in \mathcal{A}$ , el punto  $P'$  tal que  $P, O, P'$  son colineales y  $O$  es el punto medio del segmento  $PP'$  pertenece también a  $\mathcal{A}$  (Fig. 1.10 (a)). Se dice entonces que *la figura  $\mathcal{A}$  tiene simetría central* y que  $O$  es *un centro de simetría de  $\mathcal{A}$* .

Note que una recta tiene simetría central respecto a un punto en ella, pero no respecto a un punto fuera de ella.

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A}$  es *simétrica respecto a una recta  $\mathcal{L}$*  si para cada punto  $P \in \mathcal{A}$ , el punto  $P'$  tal que  $\mathcal{L}$  es la perpendicular por el punto medio de  $PP'$  pertenece también a  $\mathcal{A}$  (Fig. 1.10 (b)). Se dice entonces que *la figura  $\mathcal{A}$  tiene simetría axial* y que  $\mathcal{L}$  es *un eje de simetría de  $\mathcal{A}$* .

Note que un plano tiene simetría axial respecto a una recta en él o perpendicular a él, pero no respecto a las demás.

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A}$  es *simétrica respecto a un plano  $\mathcal{P}$*  si para cada punto  $P \in \mathcal{A}$ , el punto  $P'$  tal que  $\mathcal{P}$  es perpendicular al segmento  $PP'$  en su punto medio pertenece también a  $\mathcal{A}$  (Fig. 1.10 (c)). Se dice entonces que  $\mathcal{P}$  es *un plano de simetría de  $\mathcal{A}$* .

El cuerpo humano tiene un plano de simetría, pero no un centro ni un eje de simetría.

La página siguiente muestra ejemplos de todos estos tipos de simetrías; el lector queda invitado a mirar su entorno y decidir qué tipo de simetrías tienen los objetos que lo rodean.

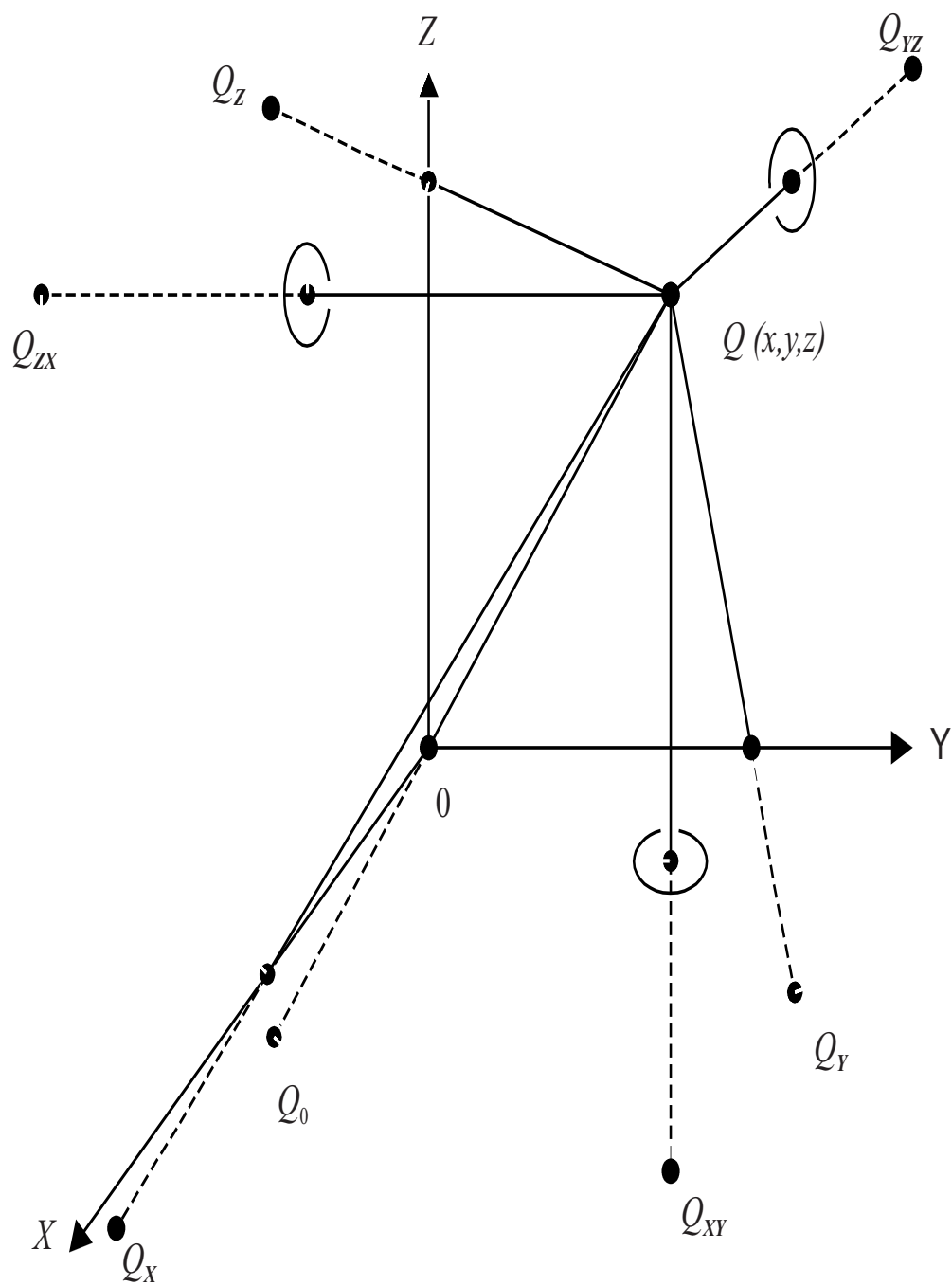


Figura 1.11: Figuras con algún tipo de simetría.

Las simetrías de las figuras permiten reducir el estudio a sólo una parte de la figura; de ahí la conveniencia de conocer las simetrías que posee una figura.

Nosotros tendremos figuras geométricas dadas por ecuaciones; por ello es importante poder decidir si una figura dada tiene o no alguna de las simetrías propuestas a partir de dichas ecuaciones.

Tomaremos el caso sencillo de que el punto respecto al cual pretendemos que exista simetría sea el origen, y en el caso de simetría respecto a una recta o un plano supondremos que se trata de un eje o un plano coordenado.

La justificación de hacer esta simplificación es geométrica: cuando el punto respecto al cual se pretende que existe simetría central no es el origen, una traslación lleva ese punto al origen, y una traslación seguida de una rotación apropiada llevan cualquier recta a uno de los ejes coordenados, o un plano a uno de los planos coordenados. Las traslaciones y las rotaciones son transformaciones rígidas, y las propiedades invariantes bajo ellas son el verdadero objeto de nuestro estudio, según lo mencionamos en la introducción.

Veamos entonces las definiciones. Escribiremos y ejemplificaremos separadamente los casos del plano y el espacio cartesianos para mayor claridad, pero al lector le sugerimos que observe cómo se corresponden.

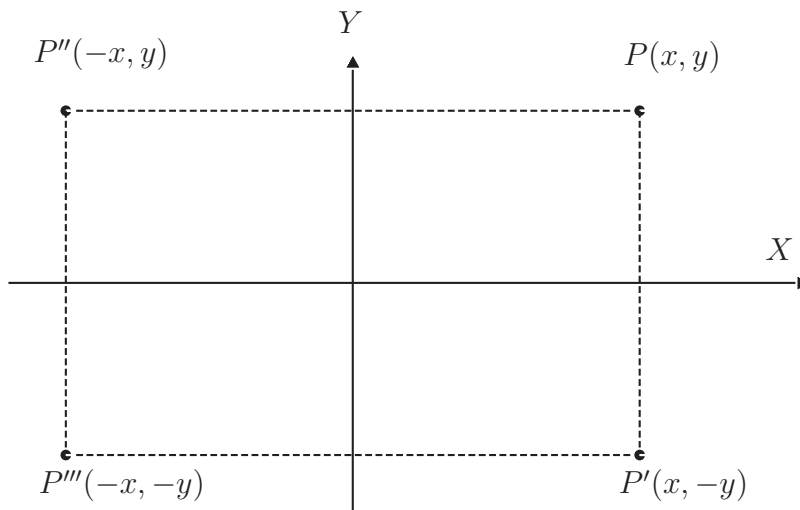


Figura 1.12: Simetrías respecto al origen y los ejes en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  es *simétrica respecto al origen* si siempre que un punto  $P(x, y)$  pertenece a la figura, el punto  $P'''(-x, -y)$  también

pertenece al conjunto  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.12).

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  es *simétrica respecto al eje  $X$*  si siempre que un punto  $P(x, y)$  pertenece a la figura, el punto  $P'(x, -y)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.12).

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  es *simétrica respecto al eje  $Y$*  si siempre que un punto  $P(x, y)$  pertenece a la figura, el punto  $P''(-x, y)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.12).

Es muy sencillo comprobar que si una figura tiene dos de las simetrías anteriores también tiene la tercera; lo dejaremos como ejercicio para el lector.

Vayamos ahora a las definiciones en el caso del espacio cartesiano.

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica respecto al origen* si siempre que un punto  $Q(x, y, z)$  pertenece a la figura, el punto  $Q_0(-x, -y, -z)$  también pertenece al conjunto  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.13).

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica respecto al eje  $X$*  si siempre que un punto  $Q(x, y, z)$  pertenece a la figura, el punto  $Q_X(x, -y, -z)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.13).

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica respecto al eje  $Y$*  si siempre que un punto  $Q(x, y, z)$  pertenece a la figura, el punto  $Q_Y(-x, y, -z)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.13).

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica respecto al eje  $Z$*  si siempre que un punto  $P(x, y, z)$  pertenece a la figura, el punto  $Q_Z(-x, -y, z)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.13).

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica respecto al plano  $XY$*  si siempre que un punto  $P(x, y, z)$  pertenece a la figura, el punto  $P_{XY}(x, y, -z)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.13).

**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica respecto al plano  $YZ$*  si siempre que un punto  $P(x, y, z)$  pertenece a la figura, el punto  $P_{YZ}(-x, y, z)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.13).



**Definición.** Una figura  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$  es *simétrica respecto al plano ZX* si siempre que un punto  $P(x, y, z)$  pertenece a la figura, el punto  $P_{ZX}(x, -y, z)$  también pertenece a  $\mathcal{A}$  (véase la Figura 1.13).

Vale la pena observar que en la definición de simetría respecto al origen hay tres cambios de signo, en la de simetría respecto a un eje hay dos cambios de signo (de las variables ajenas al eje), y en la de simetría respecto a un plano hay sólo un cambio de signo (de la variable ajena al plano). Con esta observación, deberá ser sencillo resolver los ejercicios 4 y 5 siguientes.

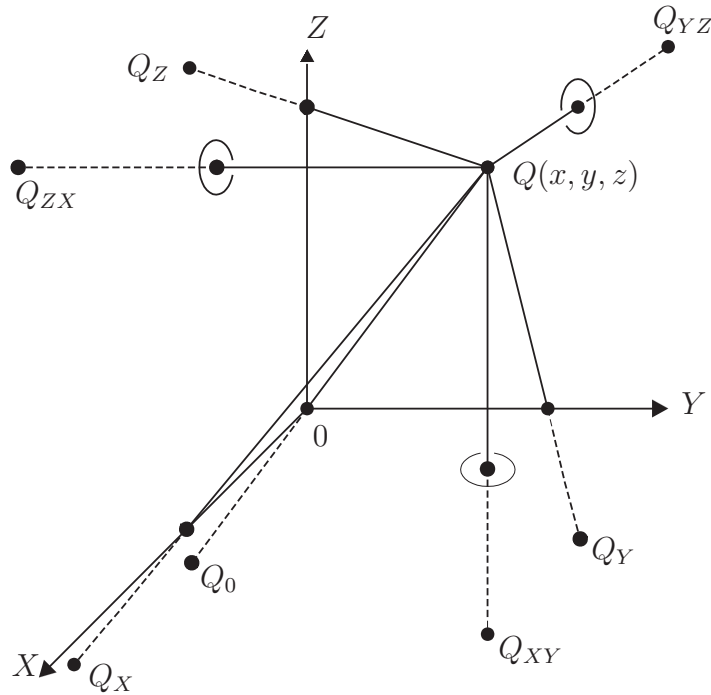
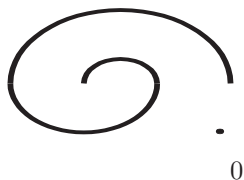


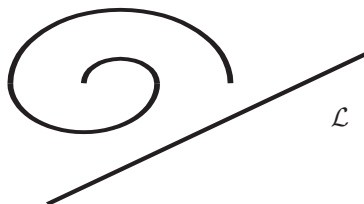
Figura 1.13: Simetrías respecto al origen, los ejes y los planos coordenados en  $\mathbb{R}^3$

## EJERCICIOS

1. Determine, sin ilustrar la figura, cuáles simetrías posee cada uno de los subconjuntos del plano cuyos puntos  $P(x, y)$  satisfacen una de las condiciones siguientes.
  - (a)  $x = y$ ;
  - (b)  $x = y^2$ ;
  - (c)  $x^2 + y^2 = 1$ ;
  - (d)  $x = y^3$ ;
  - (e)  $x^2 + y^4 = 1$ .
2. Verifique, a partir de la definición, que la distancia de un punto a otro tiene las propiedades siguientes:
  - (a) la distancia de  $P$  a  $Q$  es mayor o igual que cero, y esto último ocurre si y sólo si  $P = Q$ , es decir, el valor de una distancia es siempre mayor o igual que cero.
  - (b) la distancia de  $P$  a  $Q$  es igual a la distancia de  $Q$  a  $P$ .
  - (c) la distancia de  $P$  a  $R$  es menor o igual que la suma de las distancias de  $P$  a  $Q$  y de  $Q$  a  $R$ . Esta propiedad se denomina *desigualdad del triángulo*.
3. Complete las figuras siguientes a fin de que posean la simetría indicada. ¿Se obtiene el mismo dibujo?

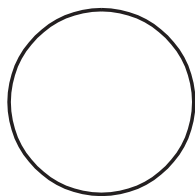


Respecto a 0.

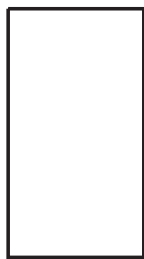


Respecto a  $\mathcal{L}$

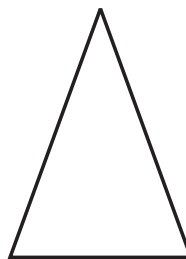
4. ¿Cuáles simetrías poseen las figuras siguientes? ¿Y las de la Figura 1.11 (considere cada letra por separado)?



Circunferencia



Rectángulo



Triángulo isósceles

5. Determine, sin ilustrar la figura, cuáles simetrías posee cada uno de los subconjuntos del espacio cuyos puntos  $P(x, y, z)$  satisfacen la condición del inciso.
- (a)  $x = z$ ;
  - (b)  $x = y^2$ ;
  - (c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;
  - (d)  $y = z^3$ ;
  - (e)  $x^2 + y^4 + z^6 = 1$ .
6. Demuestre que si una figura en el plano cartesiano tiene dos de las simetrías, también tiene la tercera. ¿Qué ocurre en el caso del espacio cartesiano?

## 1.4 Funciones y sus gráficas

La relación entre una función y su gráfica es muy estrecha y muy útil; por eso, uno de nuestros propósitos principales es lograr que el estudiante visualice, incluso sin necesidad de hacer un dibujo o pedírselo a una computadora, la forma de la gráfica de una función real de una o varias variables. Las estrategias para visualizar la gráfica de una función son múltiples e irán definiéndose a medida que analicemos ejemplos típicos concretos; de hecho, también pretendemos que el estudiante conozca a profundidad algunos de esos ejemplos típicos de suerte que se conviertan en puntos de referencia que den información inmediata sobre el comportamiento de funciones con las que deba trabajar.

Para definir el concepto de función de un conjunto en otro existen dos caminos; el primero es formal e involucra un concepto importante, el de producto cartesiano de dos conjuntos dados, mientras que el segundo es práctico aunque cuestionable, porque involucra otro concepto equivalente a aquél que se pretende definir.

El *producto cartesiano de dos conjuntos*  $A$  y  $B$  es el conjunto de las parejas ordenadas cuyo primer elemento pertenece a  $A$  y cuyo segundo elemento pertenece a  $B$ , es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Este concepto se utiliza constantemente, no sólo en matemáticas. Por ejemplo, el orden de los apellidos de una persona no es arbitrario, sino que, en nuestro país, se escribe en primer lugar el apellido paterno y en segundo lugar el materno.

Dos elementos  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  del producto cartesiano de  $A$  y  $B$  son iguales sólo si las coordenadas correspondientes son iguales, es decir,  $a_1 = a_2$  y  $b_1 = b_2$ .

Cualquier subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos  $A$  y  $B$  se denomina una *relación de  $A$  en  $B$* ; podemos construir muchos ejemplos a partir de relaciones de la vida real. Si  $H$  es el conjunto de los habitantes de una ciudad y  $C$  es el conjunto de las colonias de esa ciudad, es natural considerar la relación  $h$  vive en  $c$ , donde  $h$  es un habitante y  $c$  es una colonia de la ciudad:

$$\mathcal{D} = \{(h, c) \in H \times C \mid h \text{ vive en } C\}.$$

Otra relación es la que se establece entre el conjunto  $P$  de las profesiones ofrecidas en un centro de estudios y el conjunto  $E$  de los estudiantes cuando se analiza cuál o cuáles carreras fueron elegidas por cada estudiante:

$$\mathcal{P} = \{(e, p) \in E \times P \mid e \text{ estudia } P\}.$$

En el primer ejemplo, a cada  $h \in H$  le corresponde un único  $c \in C$ , en tanto que en el segundo ejemplo a cada  $e \in E$  pueden corresponderle varios elementos  $p \in P$ ; la primera situación se denomina función y tiene la caracterización siguiente en términos del producto cartesiano.

Una *función del conjunto  $A$  al conjunto  $B$*  es una relación de  $A$  en  $B$  tal que cada elemento  $a \in A$  aparece en un único par ordenado de la relación, es decir, si denotamos a la función con  $f$  la condición que debe satisfacer es

$$(a, b_1) \in f \text{ y } (a, b_2) \in f \text{ implican } b_1 = b_2.$$

Desde luego, el tipo de funciones que nos interesa estudiar en este libro es el que se maneja en cálculo de una variable, que asignan a un número real dado otro número real, único, mediante una *regla de correspondencia bien definida*, como las siguientes

$$f(x) = 3x + 2, \quad g(x) = x^4, \quad h(x) = 1/x,$$

y también las dependientes de varias variables, como

$$F(x, y) = x^2 + y^2,$$

que a un par ordenado  $(x, y)$  le asocian un número real bien definido.

La definición de función en términos del producto cartesiano coincide con la de *gráfica de la regla de correspondencia*  $f : A \rightarrow B$ ,

$$\mathcal{G}(f) = \{(a, f(a)) \mid f(a) \text{ está bien definida}\}.$$

Es muy frecuente leer en los libros de cálculo expresiones como “función real de variable real” cuya notación suele ser  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , lo cual no compromete a la regla de correspondencia a estar definida para todos los números reales. En tales casos deberá examinarse cuidadosamente cuál es el subconjunto de números reales para los cuales tiene sentido la regla de correspondencia.

El *dominio de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$* ,  $Dom(f)$ , es el subconjunto de  $\mathbb{R}$  para los cuales está definida la regla de correspondencia. En el caso de las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$  y  $F$  antes mencionadas tenemos

$$Dom(f) = \mathbb{R}, \quad Dom(g) = \mathbb{R}, \quad Dom(h) = \mathbb{R} - \{0\}, \quad Dom(F) = \mathbb{R}^2$$

La *imagen de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$* ,  $Im(f)$ , es el subconjunto de  $\mathbb{R}$  cuyos elementos son valores de la regla de correspondencia; en el caso de las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$  y  $F$ , las imágenes son

$$Im(f) = \mathbb{R}, \quad Im(g) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad Im(h) = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-, \quad Im(F) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

El procedimiento más rudimentario para construir la gráfica de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es tabular, es decir, dar algunos valores de la variable  $x$ , calcular los valores  $f(x)$  correspondientes según la regla y localizar los puntos de  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $(x, f(x))$ ; la gráfica se completa, si es el caso, uniendo esos puntos con una curva lisa. Tanto la decisión de si la gráfica es una curva lisa como

la de tomar una unidad conveniente en los ejes (la misma a menos de que se avise lo contrario), dependen del comportamiento de la función; eso es parte de lo que debe aprenderse en este curso y se facilitará con el manejo por parte del estudiante de un buen número de casos típicos.

Cuando la función se aplica en puntos de  $\mathbb{R}^2$  y los valores obtenidos son elementos de  $\mathbb{R}$ , como ocurre con la función  $F(x, y) = x^2 + y^2$ , la gráfica  $\mathcal{G}(F)$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$

Dado que los ejes y planos coordenados juegan un papel relevante en el trabajo, suele ser conveniente encontrar los puntos  $x$  del dominio en los cuales se anula la función. Eso no siempre es sencillo, pues en el caso de una función polinomial eso significa encontrar las raíces del polinomio, pero cuando sea factible encontrar dichos puntos será muy útil marcarlos.

En el curso de Cálculo Diferencial (vea [Ha 1] o [Pi]) se ve cómo encontrar los máximos y mínimos relativos de una función; esos puntos también colaboran a formarnos una idea del comportamiento de la función.

Las gráficas de la Figura 1.14 fueron obtenidas de las tablas que consignamos a continuación.

$x$	$f(x)$	$x$	$g(x)$	$x$	$h(x)$	$(x, y)$	$F(x, y)$
-1	-1	-2	16	-2	-1/2	(0,0)	0
-2/3	0	-1	1	-1	-1	(1,0)	1
0	2	0	0	1	1	(0,1)	1
2/3	4	1	1	2	1/2	(1,1)	2
1	5	2	16	3	1/3	(-1,-1)	2
						(1,-1)	2
						(-1,1)	2

En el caso de la función  $h(x)$ , es interesante notar que a la imposibilidad algebraica de definir la función en cero corresponde el hecho geométrico de que según por dónde nos aproximemos a cero, los valores correspondientes son cada vez menores (por la izquierda), o cada vez mayores (por la derecha).

Las funciones se clasifican según varios criterios; algunos de los más importantes aparecen a continuación.

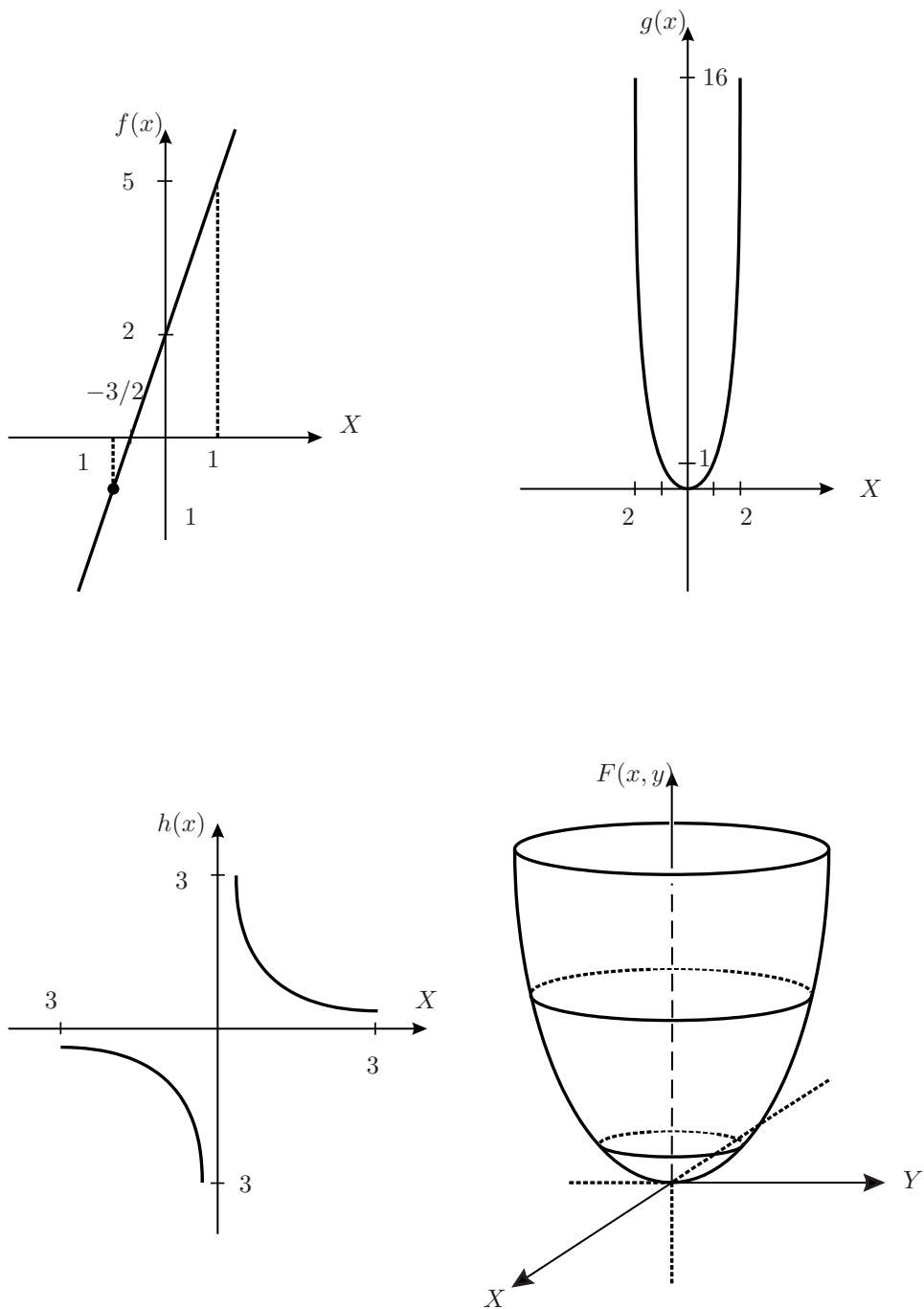


Figura 1.14: Gráficas de las funciones  $f(x) = 3x + 2$ ,  $g(x) = x^4$ ,  $h(x) = 1/x$ ,  $F(x, y) = x^2 + y^2$ .

Una función  $f : A \rightarrow B$  se denomina *inyectiva* si no hay dos puntos distintos del dominio con el mismo valor, esto es,

$$f(a_1) = b \text{ y } f(a_2) = b \text{ sólo si } a_1 = a_2.$$

Una función se denomina *suprayectiva* si cubre todo el contradominio, es decir,

$$\text{para todo } b \in B \text{ existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b.$$

Una manera sencilla de examinar la inyectividad y suprayectividad de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si se conoce su gráfica, es trazar paralelas al eje  $X$ ; si la función es inyectiva, cualquier recta paralela al eje  $X$  corta a la gráfica a lo más en un punto, en tanto que si la función es suprayectiva, cualquier recta paralela al eje  $X$  corta a la gráfica al menos en un punto. Debe considerarse cuidadosamente las expresiones “a lo más” y “al menos”; si la función es inyectiva, puede ocurrir que una recta paralela al eje  $X$  no corte a la gráfica, pero no puede ocurrir que la corte en dos puntos, en tanto que si la función es suprayectiva, puede ocurrir que una recta paralela al eje  $X$  corte varias veces a la gráfica, pero no puede ocurrir que no la corte (véase la Figura 1.15).

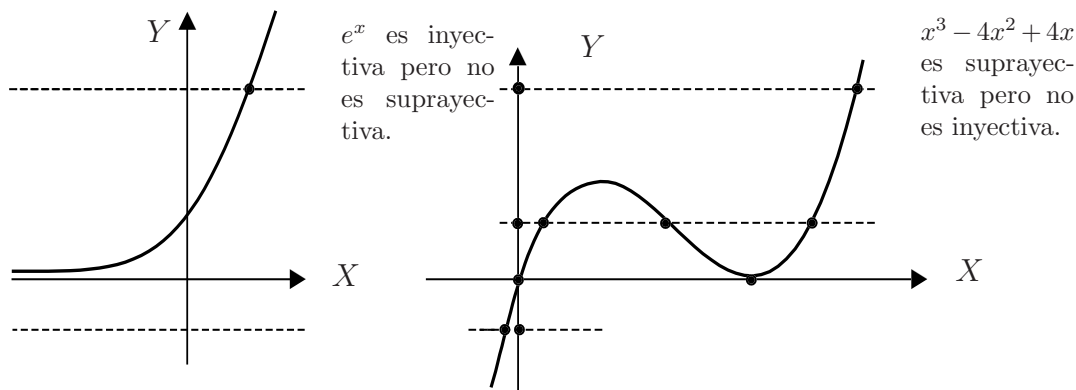


Figura 1.15: Análisis gráfico de la inyectividad y la suprayectividad de una función.

Una función  $f : A \rightarrow B$  se llama *biyectiva* si  $\text{Dom}(f) = A$  y es inyectiva y suprayectiva.

Desde el punto de vista del análisis gráfico, la biyectividad de una función equivale a que *cualquier* recta paralela al eje  $X$  corte a la gráfica una y sólo una vez.



Un caso especial de funciones no inyectivas son las llamadas *periódicas*, pero como las funciones trigonométricas son de ese tipo y a ellas dedicaremos un capítulo completo, las dejaremos por el momento.

Examinemos algunas de las funciones más usuales respecto a estas propiedades; esas funciones nos mostrarán comportamientos típicos de muchas otras funciones, por lo cual conviene tenerlas presentes.

### **Ejemplo 1.** Funciones monomiales

Una *función monomial*  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por

$$f_n(x) = x^n, \quad \text{con} \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}.$$

Si  $n = 1$ ,  $f_1(x) = x$  es la función identidad; es tanto inyectiva (porque  $f_1(x) = f_1(y)$  implica  $x = y$ ), como suprayectiva (porque cada  $x \in \mathbb{R}$  es imagen de sí mismo para esta función) y, en consecuencia, es biyectiva.

Si  $n = 2$ ,  $f_2(x) = x^2$  es una función no inyectiva (porque  $f_2(1) = f_2(-1) = 1$ ) ni suprayectiva (porque ningún número negativo pertenece a la imagen de esta función).

Es inmediato comprobar que los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  pertenecen a la gráfica de todas las funciones  $f_n$ , y que el punto  $(-1, -1)$  pertenece a la gráfica si y sólo si  $n$  es impar, en tanto que el punto  $(-1, 1)$  pertenece a la gráfica si y sólo si  $n$  es par.

Cuando  $n$  es impar, la gráfica de  $f_n$  es *simétrica respecto al origen*, es decir, si un punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  pertenece a la gráfica, entonces el punto  $Q$  de coordenadas  $(-x, -y)$  pertenece también a la gráfica; en cambio, cuando  $n$  es par, la gráfica es *simétrica respecto al eje Y*, es decir, el punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  pertenece a la gráfica si y sólo si el punto  $R$  de coordenadas  $(-x, y)$  pertenece también a la gráfica.

El comportamiento de estas funciones da lugar a la definición de función par y función impar; *una función*  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *es par* si  $f(-x) = f(x)$ , en tanto que *una función es impar* si  $f(-x) = -f(x)$ . Según el análisis anterior, las funciones pares son simétricas respecto al eje Y y las impares son simétricas respecto al origen.

La Figura 1.16 ilustra las gráficas de varias de estas funciones.

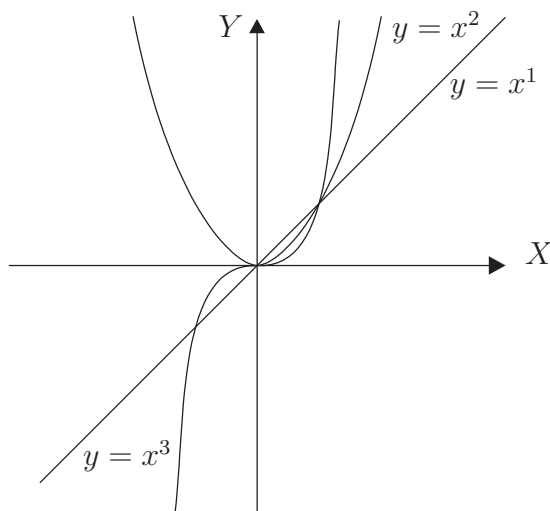


Figura 1.16: Gráficas de funciones monomiales  $f_n(x) = x^n$ .

### Ejemplo 2. Funciones exponenciales

Una *función exponencial de base  $a > 0$*  tiene la forma  $f(x) = a^x$ , donde  $a \in \mathbb{R}$  está fijo. Cuando  $x = 0$  el valor es 1 sin importar la base, de tal forma que el punto  $(0, 1)$  pertenece a la gráfica de cualquiera de estas funciones.

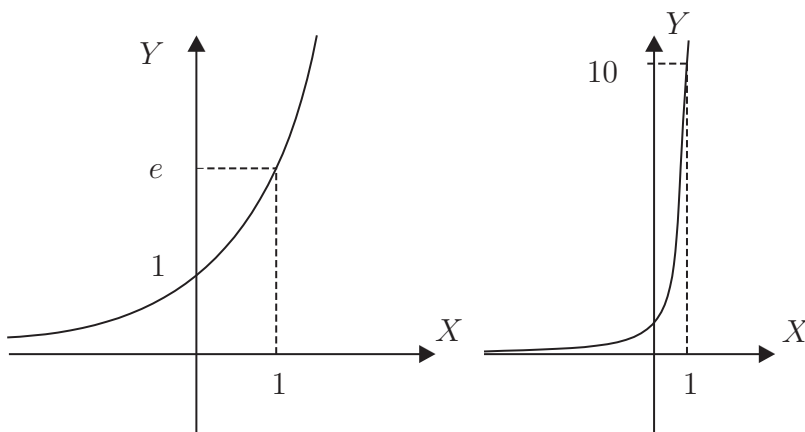


Figura 1.17: Gráficas de las funciones exponenciales de base  $e$  y 10.

Si  $a > 1$  y  $x < 0$ , la gráfica de la función se acerca al eje  $X$  tanto como se quiera al decrecer  $x$  y la recta tangente en cada punto tiende a ser horizontal

cuando  $x$  tiende a  $-\infty$  (se dice que *la gráfica es asintótica* al eje  $X$ ), y para valores positivos de  $x$ , la gráfica “sube” tanto como se quiera al crecer  $x$ . La Figura 1.17 muestra los casos en que  $a = e, 10$ . Cada una de estas funciones es inyectiva pero no suprayectiva.

Dejamos como ejercicio para el estudiante la discusión de las funciones exponenciales cuando la base es  $0 < a < 1$  (Ejercicio 1).

### Ejemplo 3. Función parte entera

La *función parte entera*,  $[\cdot]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se define así:  $[x] = n$  si  $n$  es el máximo entero menor o igual que  $x$ . La gráfica de esta función está formada por los segmentos paralelos al eje  $X$  de altura  $n$  y longitud 1 que contienen al extremo izquierdo pero no al derecho, como lo muestra la Figura 1.18.

La función parte entera no es inyectiva porque  $f(2.1) = f(2.5) = 2$ , ni suprayectiva porque  $f$  sólo toma valores enteros. Además, como la función no es continua, pues presenta discontinuidades en todos los enteros, la gráfica no es una curva continua. Es un caso particular de las llamadas *funciones escalonadas*, que son constantes por pedazos.

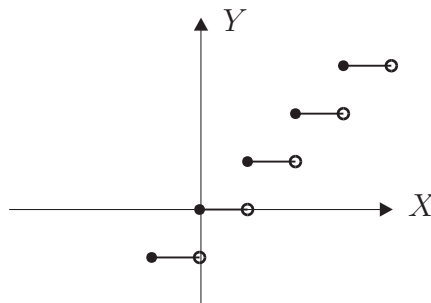


Figura 1.18: Gráfica de la función parte entera.

### Ejemplo 4. Función valor absoluto.

La función *valor absoluto*,  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se define por casos:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La función valor absoluto no es inyectiva, porque  $|2| = |-2| = 2$ , y tampoco es suprayectiva porque ningún real negativo pertenece a la imagen de esta función.

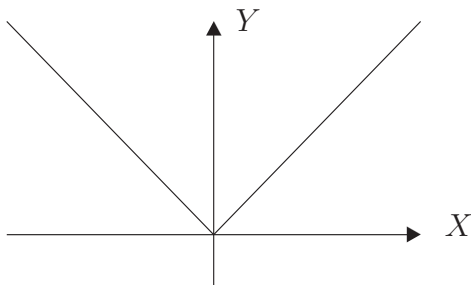


Figura 1.19: Gráfica de la función valor absoluto.

**Ejemplo 5.** La función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

no toma valores negativos, por lo que no es suprayectiva, y como toma el mismo valor,  $r^2$ , para cualquier punto de la circunferencia con centro en  $(0, 0)$  y radio  $r$ , tampoco es inyectiva. La gráfica aparece en la Figura 1.14: cada plano por encima de  $y$  paralelo al plano  $XY$  corta a la gráfica en una circunferencia.

## EJERCICIOS

1. Analice en cuanto a inyectividad, suprayectividad y biyectividad las funciones siguientes, y dibuje sus gráficas.

(a)  $\alpha(x) = x + 1$ ; (b)  $\beta(x) = x^2 - 2$ ; (c)  $\gamma(x) = x^3$ ;

(d)  $\rho(x) = x^3 - x$ ;  $\sigma(x) = a^x$  cuando  $a = 2$ ,  $a = 1/2$  y  $a = 1/10$ .

2. Analice la inyectividad y suprayectividad de las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  de la Figura 1.14 utilizando paralelas al eje  $X$ .
3. Generalice la técnica usada en el Ejercicio 2 para analizar gráficamente la inyectividad y suprayectividad de una función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .
4. Analice la inyectividad y suprayectividad de las funciones siguientes de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ .

(a)  $F(x, y) = x + y$ ; (b)  $G(x, y) = x$ ; (c)  $H(x, y) = x^2 - y^2$ .

5. Analice las simetrías de las gráficas de las funciones de los ejercicios 1 y 4.

---

# Funciones trigonométricas y coordenadas polares

---

Las funciones trigonométricas generalizan a las razones trigonométricas, las cuales figuran ya en el libro II de los *Elementos* de Euclides y han tenido desde entonces múltiples aplicaciones.

Las razones trigonométricas se definen en los triángulos rectángulos, es decir, aquéllos en los cuales uno de los ángulos mide  $90^\circ$ . Ciertamente que estos triángulos son especiales, pero cualquier triángulo puede descomponerse en dos triángulos rectángulos utilizando una altura adecuada. Debido a este hecho, la trigonometría es importante no sólo en Geometría Euclidiana, sino también en las Geometrías Elíptica e Hiperbólica (véanse [Bn], [Ce], [Cx], [Ev], [Gr], [H-C], [R-Se] o [Re]).

Comenzaremos revisando la definición de cada razón trigonométrica y después estudiaremos cuidadosamente los conceptos involucrados en las funciones trigonométricas. Finalmente, mostraremos la utilidad de las funciones trigonométricas al trabajar con curvas dadas en forma polar y al poder establecer coordenadas esféricas y cilíndricas en el espacio.

## 2.1 Razones trigonométricas y algunas relaciones

En un triángulo rectángulo llamamos *hipotenusa* al lado opuesto al ángulo recto y *catetos* a los otros dos lados. Si fijamos uno de los ángulos agudos, por ejemplo el ángulo  $\phi$  del triángulo rectángulo  $HIJ$  ilustrado en la Figura 2.1, al cateto que delimita ese ángulo,  $HI$ , se le llama *cateto adyacente* y al otro cateto,  $JH$ , se le llama *cateto opuesto*. En las definiciones de las razones trigonométricas deberá entenderse por “cateto opuesto” la longitud de dicho

cateto, y lo análogo ocurrirá cuando se diga “cateto adyacente” o “hipotenusa”.

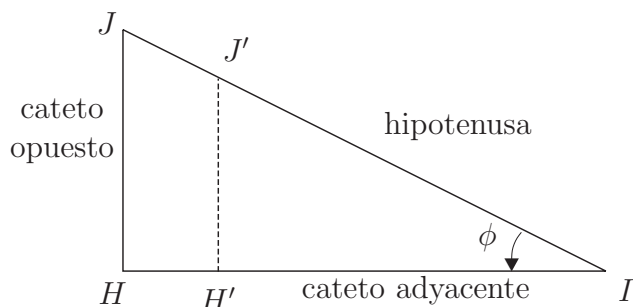


Figura 2.1: Cateto adyacente y cateto opuesto al ángulo  $\phi$ .

Entonces, el *seno del ángulo*  $\phi$  es el cociente del cateto opuesto (CO) entre la hipotenusa (H), el *coseno del ángulo*  $\phi$  es el cociente del cateto adyacente (CA) entre la hipotenusa, y la *tangente del ángulo*  $\phi$  es el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente; en símbolos,

$$\text{sen } \phi = \frac{\text{CO}}{\text{H}}, \quad \text{cos } \phi = \frac{\text{CA}}{\text{H}}, \quad \text{tan } \phi = \frac{\text{CO}}{\text{CA}}.$$

Las razones recíprocas también reciben nombres especiales: la recíproca del seno de  $\phi$  se denomina *cosecante* de  $\phi$  y es el cociente de la hipotenusa entre el cateto opuesto, la razón recíproca del coseno se denomina *secante* y es el cociente de la hipotenusa entre el cateto adyacente, y la razón recíproca de la tangente se denomina *cotangente* y es el cociente del cateto adyacente entre el cateto opuesto; en símbolos

$$\text{csc } \phi = \frac{\text{H}}{\text{CO}}, \quad \text{sec } \phi = \frac{\text{H}}{\text{CA}}, \quad \text{cot } \phi = \frac{\text{CA}}{\text{CO}}.$$

Se acostumbra escribir “sen  $\phi$ ” y no “sen ( $\phi$ )” para no sobrecargar el uso de los paréntesis.

## Observaciones

**I.** La justificación de referirse al ángulo sin mencionar el triángulo rectángulo del cual proviene es muy sencilla: si en la Figura 2.1 consideramos el triángulo de lados punteados  $H'I'J'$  obtenido al modificar todos los lados por un mismo factor, las razones trigonométricas son las mismas, pues el factor aparece

tanto en el numerador como en el denominador correspondientes a los lados del triángulo grande. Y, además, si  $\phi$  es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, ese triángulo será proporcional (o semejante) a cualquier otro triángulo rectángulo que lo contenga, puesto que el tercer ángulo medirá  $90^\circ - \phi$  en todos los casos por ser el ángulo complementario.

**II.** En este momento de la exposición, los ángulos se miden en grados.

Un ejercicio sencillo pero de cierto interés práctico es calcular las razones trigonométricas de los ángulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . Consideremos los dos triángulos ilustrados en la Figura 2.2 y tomemos en cuenta el Teorema de Pitágoras (véase el inciso siguiente). El primer triángulo es rectángulo e isósceles y sus catetos miden ambos 1 unidad, por lo cual su hipotenusa mide  $\sqrt{2}$  y sus dos ángulos agudos miden  $45^\circ$  cada uno; el segundo es equilátero y cada uno de sus lados mide 2 unidades, por lo que al trazar una de sus alturas resultan dos triángulos rectángulos cuyos catetos miden 1 y  $\sqrt{3}$  y cuya hipotenusa mide 2, en tanto que los ángulos agudos miden  $30^\circ$  y  $60^\circ$ .

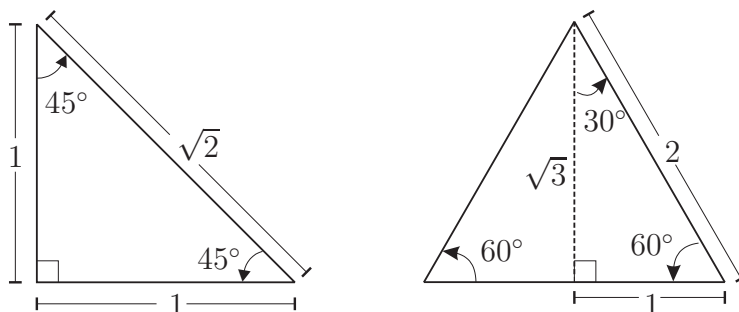


Figura 2.2: Triángulos para el cálculo de las razones trigonométricas de algunos ángulos especiales.

El lector puede sustituir estas medidas para completar la Tabla 2.1.

Si en lugar de fijarnos en el ángulo  $\phi$  utilizamos el otro ángulo agudo,  $90^\circ - \phi$ , llamado *ángulo complementario*, es inmediato obtener las relaciones siguientes (véase la Figura 2.1):

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \phi) &= \sin \phi, \\ \sin(90^\circ - \phi) &= \cos \phi, \\ \tan(90^\circ - \phi) &= \cot \phi,\end{aligned}\tag{2.1}$$

ángulo	sen	cos	tan	csc	sec	cot
30°	1/2					$\sqrt{3}$
45°		$1/\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		
60°			$\sqrt{3}$			

Tabla 2.1: Cálculo de las razones trigonométricas de algunos ángulos.

es decir, dados dos ángulos complementarios el seno de uno es el coseno del otro y la tangente de uno es la cotangente del otro.

Otras relaciones interesantes y que se utilizarán muchas veces resultan cuando debemos obtener el seno o el coseno de un ángulo que está dado como la suma de otros dos (la Figura 2.3 ilustra el caso en que  $\alpha + \beta$  es un ángulo agudo).

Consideremos los triángulos rectángulos:

$$\begin{aligned}\triangle OHI & \quad \text{para el ángulo } \alpha + \beta, \\ \triangle OKL & \quad \text{para el ángulo } \alpha, \\ \triangle OLI & \quad \text{para el ángulo } \beta,\end{aligned}$$

donde  $OL$  es el lado final del ángulo  $\alpha$  y el lado inicial del ángulo  $\beta$ , y donde  $IL$  es perpendicular a la prolongación de  $OL$ .

Entonces, si aplicamos la definición de coseno en el  $\triangle OHI$  y trazamos  $JL$  paralela a  $HK$  tenemos

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{OH}{OI} = \frac{OK - JL}{OI}, \quad (2.2)$$

y utilizando el  $\triangle OKL$ ,

$$\cos \alpha = \frac{OK}{OL}, \text{ y por tanto, } OK = OL \cos \alpha.$$

También podemos expresar  $JL$  en términos de  $\alpha$ , pues como  $IL$  es perpendicular a  $OL$ ,  $\gamma = 90^\circ - \alpha$  y, por la relación (2.1),

$$\sin \alpha = \cos \gamma = \frac{JL}{IL}, \text{ y entonces } JL = IL \sin \alpha.$$



Si sustituimos  $OK$  y  $JL$  en (2.2) obtenemos

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{OL \cos \alpha - IL \operatorname{sen} \alpha}{OI},$$

y los cocientes  $OL/OI$  y  $IL/OI$  pueden expresarse en términos de  $\beta$  si nos fijamos en el  $\triangle OLI$ :

$$\cos \beta = OL/OI, \quad \operatorname{sen} \beta = IL/OI.$$

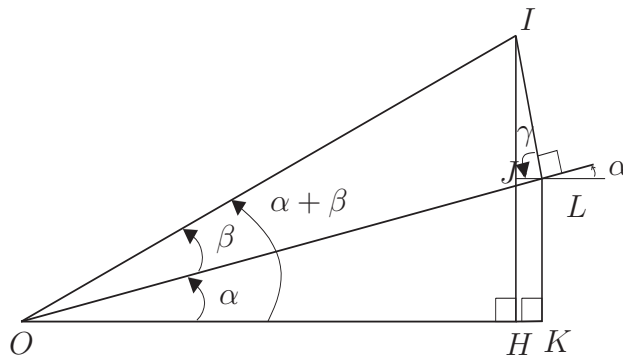


Figura 2.3: Coseno y seno de un ángulo que es suma de otros dos.

Lo anterior da lugar a la primera de las relaciones buscadas,

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (2.3)$$

La relación correspondiente al seno de la suma de dos ángulos puede obtenerse de manera análoga y tiene la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta. \quad (2.4)$$

De estas dos relaciones puede obtenerse la correspondiente a la tangente de la suma de dos ángulos,

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (2.5)$$

Obtuvimos las identidades anteriores a partir de una figura para la cual  $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ , pero puede construirse una figura para el caso  $90^\circ \leq \alpha + \beta \leq 180^\circ$

y dejamos al lector como ejercicio la demostración correspondiente. Más aún, cuando hayamos introducido la noción de producto escalar podremos hacer la demostración en general.

Hablemos ahora de las medidas de los ángulos. En la escuela elemental nos enseñaron a medir los ángulos con un transportador cuyas divisiones marcadas corresponden a grados, entendiéndose por *grado* la medida de un ángulo que abarca  $1/360$  de la circunferencia. Pero una calculadora de bolsillo de las llamadas científicas, que puede proporcionarnos el valor del seno y demás funciones trigonométricas de un ángulo, admite también medidas del ángulo en una unidad llamada radián, cuya definición consignamos a continuación (no utilizaremos la unidad llamada *mil* que satisface  $1600 \text{ mil} = 90^\circ$ ).

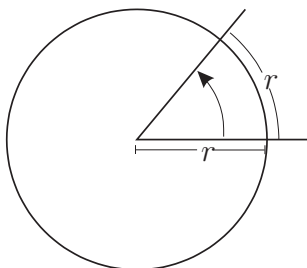


Figura 2.4: Un radián es la medida de un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio.

Un *radián* es la medida de un ángulo que abarca un arco de circunferencia de longitud igual al radio. Esta definición es independiente de la circunferencia que se tome, pues la longitud de cualquier circunferencia se obtiene multiplicando por  $2\pi$  la longitud del radio, es decir, cualquier circunferencia abarca un ángulo que mide  $2\pi$  radianes (véase la Figura 2.4).

Como en una circunferencia hay  $360^\circ$  y  $2\pi$  radianes, podemos establecer la relación

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes.}$$

Se acostumbra suprimir la palabra “radianes” y escribimos, por ejemplo,

$$180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \pi/2, \quad 60^\circ = \pi/3, \quad 45^\circ = \pi/4, \quad 30^\circ = \pi/6.$$

Entonces, el sentido de la expresión “sen 2” es “seno del ángulo que mide 2 radianes”, y la de “tan  $\pi/4$ ” es “tangente del ángulo que mide  $\pi/4$  radianes”,

y así es como toma las medidas de los ángulos una calculadora científica en el modo rad.

Nótese que la medida del ángulo total de una circunferencia no es un número entero de radianes, ni un número racional de radianes porque  $\pi$  es un número irracional. Por ello, al medir los ángulos en radianes es preferible utilizar números reales, en lugar del sistema acostumbrado pero poco práctico de grados, minutos y segundos.

Además, de ahora en adelante distinguiremos entre ángulos positivos o negativos, correspondiendo al hecho físico de que debe distinguirse entre giros en uno u otro sentido. Como todavía existen relojes de manecillas y casi todos ellos giran de la misma manera, llamamos *ángulo positivo* a uno que corresponde a un giro de sentido opuesto al de las manecillas de un reloj, en tanto que un *ángulo negativo* es el descrito en el mismo sentido que el de las manecillas de un reloj.

En muchas situaciones prácticas se describen ángulos de más de un giro completo, en uno u otro sentido; por tanto, tendrá sentido hablar de ángulos cuya medida  $x$  sea cualquier número real. Y podrá determinarse el seno, el coseno, etc. de cada uno de estos ángulos.

## EJERCICIOS

1. ¿Cuántos grados hay en un radián? ¿Cuántos radianes hay en un grado?
2. Obtenga la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos cuando la suma sea un ángulo obtuso. Lo mismo para el coseno.
3. Utilice las fórmulas (2.3)-(2.5) para obtener las fórmulas correspondientes a las razones trigonométricas de un ángulo que mida el doble de un ángulo  $x$ :  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$ ,  $\tan 2x$ .
4. Obtenga la fórmula para el seno de un ángulo que mida la mitad de otro ángulo. Y lo análogo para el coseno.
5. Utilice las fórmulas (2.3)-(2.5) para obtener, a partir de los valores en la tabla 2.1, los siguientes:

$$\cos 75^\circ; \quad \sin 75^\circ; \quad \cos 15^\circ; \quad \sin 15^\circ.$$

6. Complete la tabla 2.1.
7. Para  $\pi/2 < \alpha + \beta < \pi$  defina  $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \delta$  y demuestre la validez de la fórmula 2.3 utilizando la Figura 2.5.

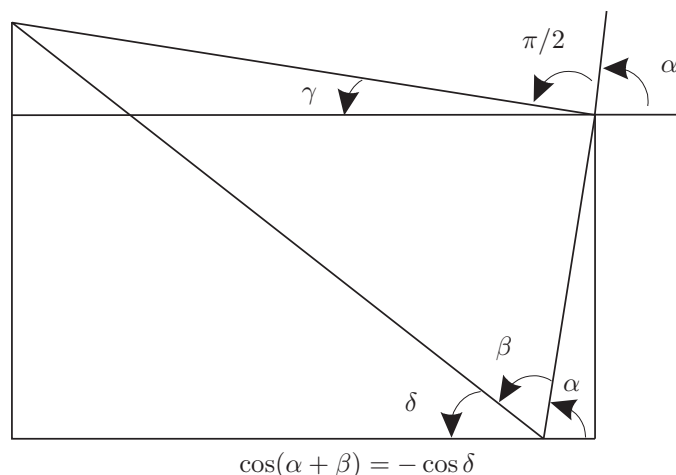


Figura 2.5: Obtención de la fórmula (2.3) cuando  $\pi/2 < \alpha + \beta < \pi$ .

## 2.2 Resolución de triángulos

Mencionamos en la introducción la gran aplicabilidad de las funciones trigonométricas, pero ciertamente también las razones trigonométricas mostraron su utilidad desde la antigüedad.

No pretendemos hacer aquí una exposición exhaustiva de tales aplicaciones; nos concretaremos sólo a demostrar la ley de los senos y la de los cosenos y a señalar cómo se utilizan para determinar los elementos faltantes de un triángulo cuando se conocen algunos de ellos. Supondremos conocidos los dos resultados clásicos siguientes.

*Teorema de Pitágoras.* En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

*Teorema de Tales.* La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a  $180^\circ$ .

Dado un triángulo cualquiera, denotaremos por  $A$ ,  $B$  y  $C$  sus vértices, por  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  los ángulos correspondientes (y también sus medidas), y por  $a$ ,  $b$  y  $c$  los respectivos lados opuestos (y sus medidas), como en la figura siguiente.

Note que los ángulos se describen positivamente y también que el orden de

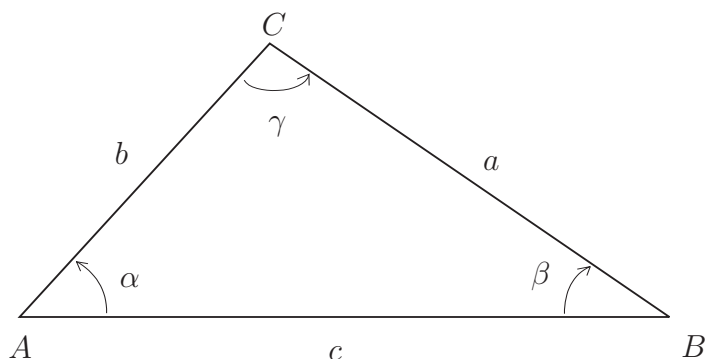


Figura 2.6: Elementos de un triángulo.

los lados corresponde a un recorrido positivo (el área encerrada por el triángulo queda a la izquierda cuando se recorre el triángulo de  $A$  a  $B$ , de  $B$  a  $C$  y de  $C$  a  $A$ ). La orientación o sentido de recorrido es muy importante en matemáticas.

Al trazar la altura desde un vértice cualquiera, por ejemplo  $C$ , se determinan dos triángulos rectángulos con ángulo recto en  $H$ , el pie de la altura (véase la Figura 2.7). Para ellos tenemos

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{b} \text{ y } \text{sen } \beta = \frac{h}{a}$$

y, en consecuencia,  $b \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \beta$  lo cual da lugar a la llamada *Ley de los senos*:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma},$$

donde la última igualdad resulta de aplicar el mismo razonamiento cuando se considera cualquiera de las otras dos alturas.

El Teorema de Pitágoras se utiliza para demostrar la llamada *Ley de los cosenos*, que consta de las tres igualdades siguientes:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Demostremos la primera de las relaciones (las otras son totalmente análogas) refiriéndonos a la Figura 2.7.

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos  $AHC$  y  $CHB$  y llamamos  $x$  a la longitud del segmento  $AH$  y  $h$  a la altura desde  $C$ , obtenemos

$$x^2 + h^2 = b^2 \text{ y } h^2 + (c - x)^2 = a^2.$$

Al desarrollar el binomio de la última igualdad y sustituir la expresión para  $h^2$  obtenida de la primera, resulta

$$b^2 - x^2 + c^2 - 2xc + x^2 = a^2.$$

Los términos en  $x^2$  se cancelan y considerando el triángulo rectángulo  $AHC$  obtenemos  $x = b \cos \alpha$  lo cual da lugar a la igualdad deseada

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

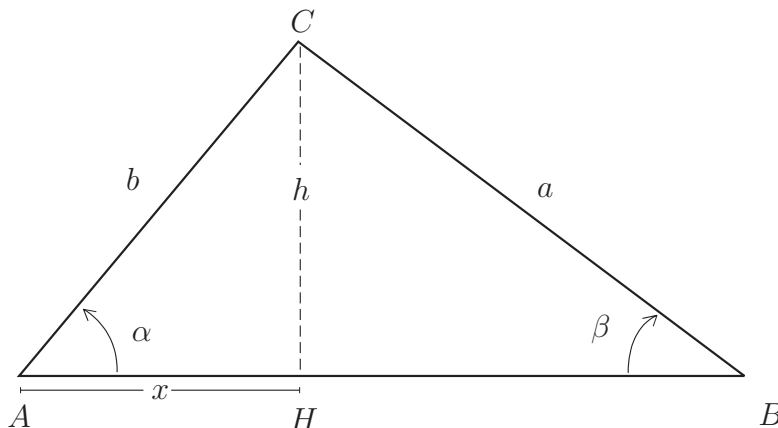


Figura 2.7: Trazamos alturas para demostrar las leyes de los senos y de los cosenos.

Definamos ahora qué se entiende por *resolución de un triángulo*: el objetivo es determinar todos los lados y ángulos de un triángulo si se conocen al menos tres de esos elementos.

El problema puede no tener solución, como si pretendemos que los lados midan 1, 3 y 5, o si desconocemos el Teorema de Tales y proponemos tres ángulos cuya suma no sea  $180^\circ$ , o puede tener muchas soluciones, como cuando las únicas condiciones son que los ángulos midan  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ .

La imposibilidad en el primer caso se debe a que en cualquier triángulo debe cumplirse no sólo el Teorema de Tales, sino también la desigualdad siguiente para cualquiera de los lados.

*Desigualdad del triángulo.* En cualquier triángulo, la longitud de un lado es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos; en símbolos:

$$a \leq b + c, \quad b \leq c + a \quad \text{y} \quad c \leq b + a.$$

En el ejemplo propuesto ocurre  $5 \not\leq 1 + 3$ .

La comprobación de la desigualdad del triángulo es inmediata de la Figura 2.7 y de la igualdad siguiente :

$$c = AB = AH + HB = b \cos \alpha + a \cos \beta \leq b + a$$

porque el coseno de cualquier ángulo es menor que 1, pues es el cociente de un cateto entre la hipotenusa. Tal vez el lector prefiera una demostración más geométrica y por reducción al absurdo: si un lado es mayor que la suma de los otros dos, no podemos construir un triángulo con esos lados porque al trazar, con centro en los extremos del lado que viola la desigualdad, circunferencias de radios correspondientes a los otros dos lados, dichas circunferencias no se cortan (trace la figura correspondiente). ¿Cuándo se da la igualdad?

La multiplicidad de las soluciones del tercer ejemplo se debe a que hay una infinidad de *triángulos semejantes*, es decir, con lados proporcionales, cuyos ángulos miden  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $90^\circ$ .

En consecuencia, uno de los datos debe ser un lado y si se prescriben tres lados, entonces debe verificarse la validez de la desigualdad del triángulo.

Pretendemos que el lector sea capaz, utilizando las relaciones, leyes e identidades consignadas hasta ahora, de comprobar las afirmaciones siguientes, y también de proporcionar un método de construcción para cada una de las soluciones posibles.

1. Dadas tres longitudes  $a$ ,  $b$  y  $c$  para las cuales se cumple la desigualdad del triángulo, hay una única solución con la orientación convenida.
2. Dados dos lados y el ángulo comprendido, la solución es única.
3. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, puede haber dos, una o ninguna solución dependiendo de la relación entre los datos.
4. Dados dos ángulos y uno de los lados, la solución es única.

Como ejemplo, haremos la demostración de la afirmación 3, que utiliza la ley de los senos. Pero primero pedimos al lector que intente dibujar un triángulo con  $c = 1$ ,  $a = 4$  y  $\gamma = 60^\circ$ .

Si en cualquier punto de la circunferencia con centro en  $B$  y radio 4 colocamos un rayo que forme un ángulo de  $60^\circ$  con el radio correspondiente, ese rayo no corta al lado  $c$ . La imposibilidad se explica con la ley de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

que implica, tomando en cuenta  $\operatorname{sen} \alpha \leq 1$

$$\operatorname{sen} \gamma \leq \frac{c}{a}.$$

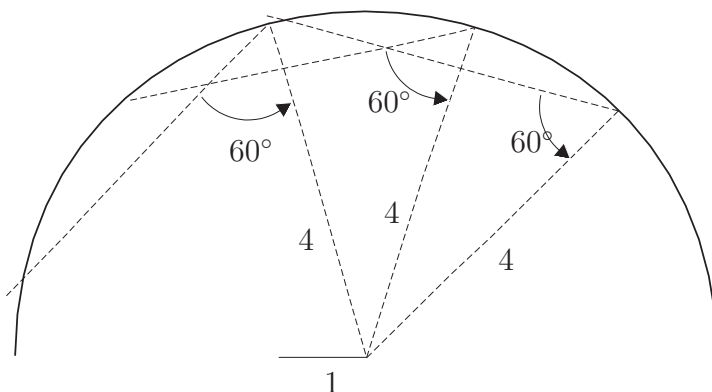


Figura 2.8: No existe un triángulo tal que  $c = 1$ ,  $a = 4$  y  $\gamma = 60^\circ$ .

Cuando se da la igualdad,  $\operatorname{sen} \alpha = 1$  la solución es única, y cuando se da la desigualdad estricta hay siempre dos soluciones porque hay dos posibilidades para  $\alpha$  debido a la identidad  $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$ . Una vez elegido  $\alpha$ , el ángulo  $\beta$  se obtiene de restar a  $180^\circ$  la suma  $\alpha + \gamma$ , y el lado  $b$  tiene longitud

$$b = a \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}.$$



---

## EJERCICIOS

1. Demuestre que con sólo dos datos hay siempre un número infinito de triángulos. (Sugerencia: considere todos los casos posibles.)
2. Demuestre la afirmación 1 y dé un método de construcción del triángulo.
3. Demuestre la afirmación 2 y dé un método de construcción del triángulo.
4. Demuestre la afirmación 4 y dé un método de construcción del triángulo.
5. Dé ejemplos de problemas prácticos en cuya solución se resuelva un triángulo.
6. Dé ejemplos de problemas prácticos que requieran la resolución de algún triángulo, como la determinación de la altura de un edificio conocido el ángulo de elevación desde un punto distante  $c$  unidades de su base.
7. Construya una figura que permita demostrar el Teorema de Pitágoras.
8. Construya una figura que permita demostrar el Teorema de Tales.
9. Demuestre la Desigualdad del triángulo.

## 2.3 Funciones e identidades trigonométricas

La figura de la página siguiente se denomina *círculo trigonométrico*, pues con base en ella definiremos las funciones trigonométricas elementales: seno, coseno y tangente. Consta de una circunferencia de radio 1 con centro en el origen, y de un rayo que parte del origen y forma un ángulo  $\alpha$  con la parte positiva del eje de las  $X$ . El rayo corta al círculo unitario en un punto  $P$ , cuya proyección  $H$  en el eje  $X$  determina el triángulo rectángulo  $OHP$ .

La hipotenusa del triángulo  $OHP$  mide 1, puesto que es el radio del círculo, y por ello la abscisa y la ordenada de  $P$  son  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$ , respectivamente, según es inmediato de las definiciones de las razones trigonométricas, ya que el denominador es 1. Y también es inmediata una relación trigonométrica fundamental, consecuencia del Teorema de Pitágoras:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \quad (2.6)$$

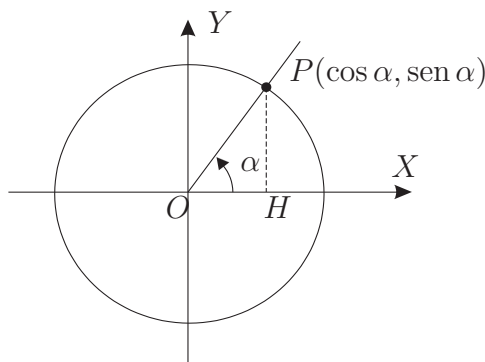


Figura 2.9: Determinación de las funciones trigonométricas mediante el círculo trigonométrico.

Hemos denotado al ángulo por  $x$  porque su medida (en radianes) puede ser cualquier número real, pero es muy importante tener presente que en el círculo trigonométrico la variable  $x$  corresponde al ángulo (a su medida en radianes) y no a la abscisa de un punto. Con esta observación en mente, establecemos las definiciones de las primeras dos funciones trigonométricas.

**Definición.** Si  $x$  es la medida en radianes de un ángulo, el *coseno de  $x$*  es la abscisa del punto  $P$  en el círculo trigonométrico correspondiente al radio que forma un ángulo de medida  $x$  con la parte positiva del eje de las abscisas (véase la Figura 2.9).

**Definición.** Si  $x$  es la medida en radianes de un ángulo, el *seno de  $x$*  es la ordenada del punto  $P$  en el círculo trigonométrico correspondiente al radio que forma un ángulo de medida  $x$  con la parte positiva del eje de las abscisas (véase la Figura 2.9).

## Observaciones

**I.** Las funciones coseno y seno pueden tomar valores negativos, pero la relación (2.6) implica que los valores no pueden ser menores que  $-1$  ni mayores que  $1$ . Esta observación también merece consignarse:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad (2.7)$$

y si recordamos los signos correspondientes a puntos en los distintos cuadrantes, podremos decir inmediatamente si el seno o el coseno tienen uno u otro signo dependiendo del cuadrante donde se ubique  $P$ .

**II.** Si dos ángulos difieren por giros completos, positivos o negativos, los valores del seno y del coseno son idénticos, lo cual escribimos así:

$$\cos (x + 2k\pi) = \cos x; \quad \text{sen } (x + 2k\pi) = \text{sen } x \quad (2.8)$$

Si para una función  $f$  existe algún valor  $p \neq 0$  de la variable tal que  $f(x) = f(x+p)$  para todo  $x$  en el dominio de la función, entonces  $f$  se denomina *función periódica*. Si la función no es constante, es fácil demostrar que existe un periodo positivo mínimo al cual se le denomina *el periodo*. Entonces, el coseno y el seno son funciones periódicas con el periodo  $2\pi$ , pues ningún número positivo menor que  $2\pi$  satisface 2.8 para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Si queremos dibujar las gráficas de estas funciones, es conveniente comenzar por la gráfica de la función seno; a partir de ella será inmediato trazar la gráfica de la función coseno si tomamos en cuenta las identidades (2.9) siguientes.

Cuando en lugar del ángulo  $x$  tomamos el ángulo  $x + \pi/2$  (dibuje el círculo trigonométrico y localice ambos ángulos), las coordenadas del punto  $P'$  correspondiente a este nuevo ángulo son, por un lado,  $(\cos (x + \pi/2), \text{sen } (x + \pi/2))$ , y por otro,  $(-\text{sen } x, \cos x)$ , lo cual resulta de la congruencia de los triángulos  $OH'P'$  y  $OHP$ , donde  $H'$  es el pie de la perpendicular de  $P'$  al eje  $Y$ . Obtenemos así las relaciones:

$$\cos (x + \pi/2) = -\text{sen } x, \quad \text{sen } (x + \pi/2) = \cos x, \quad (2.9)$$

que son un caso particular de (2.3)–(2.4); conviene leer la segunda de estas relaciones así: para obtener el valor de  $\cos x$ , basta conocer el valor de  $\text{sen } (x + \pi/2)$ . Entonces, para obtener la gráfica de la función coseno, basta trasladar la gráfica de la función seno  $\pi/2$  unidades a la izquierda (véanse la gráficas correspondientes).

Para trazar la gráfica de la función seno, dibujamos el círculo trigonométrico a la izquierda y otro sistema coordenado a su derecha; por la relación (2.7) sabemos que los puntos de la gráfica quedan en la banda determinada por las rectas  $y = -1$  y  $y = 1$ . Los puntos de la gráfica resultan al tomar, sobre el punto correspondiente a  $x$  en el eje horizontal, una altura igual a la ordenada del punto  $P$  en el círculo trigonométrico tal que el radio  $OP$  forma un ángulo  $x$  con la parte positiva del eje de las abscisas (véase la Figura 2.10).

Observe que en el círculo trigonométrico  $x$  denota la medida del ángulo,

mientras que en el sistema coordenado del lado derecho sí juega el papel acostumbrado de abscisa.

Por la relación (2.9), para obtener la gráfica de la función coseno basta desplazar  $\pi/2$  unidades a la izquierda la gráfica de la función seno sobre el eje  $X$  (véase la Figura 2.11).

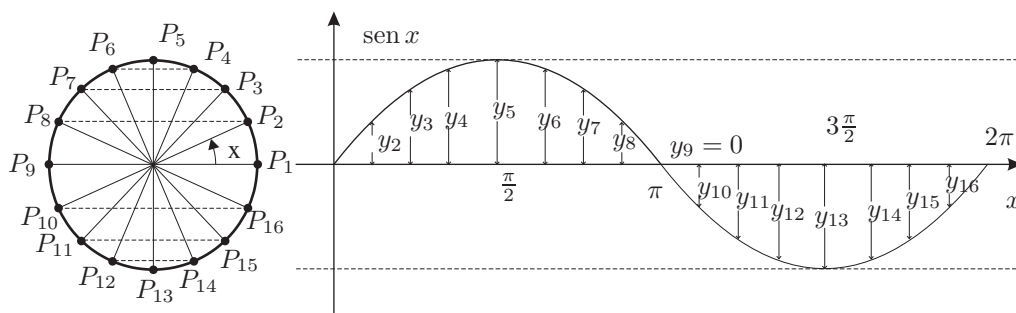


Figura 2.10: Obtención de la gráfica de la función  $\text{sen } x$ .

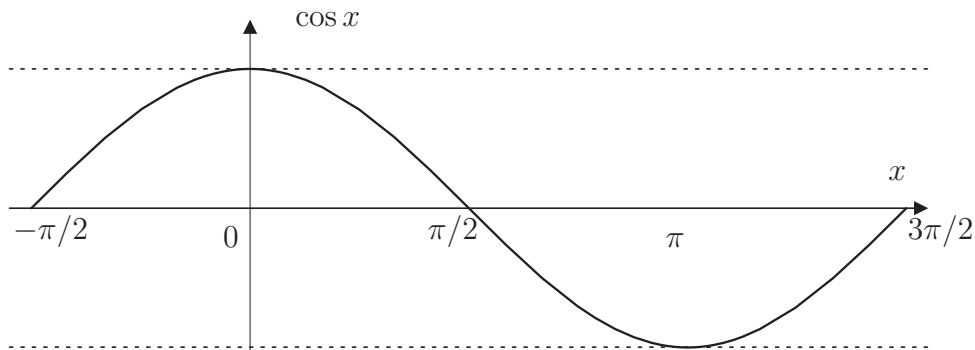


Figura 2.11: Gráfica de la función  $\cos x$ .

Note que, debido a tratarse de funciones periódicas, basta tomar el trozo de gráfica correspondiente al intervalo  $[x, x + 2\pi)$  para poder obtener el resto con sólo repetir ese trozo, donde el corchete izquierdo indica que el extremo sí se incluye, mientras que el paréntesis derecho indica que el extremo no se incluye.

Definamos ahora la función tangente.

**Definición.** Si  $x$  es la medida en radianes de un ángulo, la función *tangente* es el cociente de la función seno entre la función coseno, es decir,  $\tan x$

es el cociente de  $\sin x$  dividido entre  $\cos x$ .

La tangente no está definida para todos aquellos ángulos en los que el coseno se anula, es decir, si nos referimos a la Figura 2.11,

$$\text{Dom}(\tan) = \mathbb{R} - \{(2k + 1)\pi/2 \mid k \text{ es entero}\}.$$

El lector familiarizado con las técnicas del Cálculo Diferencial puede demostrar que cuando la medida del ángulo se aproxima a uno de los valores excluidos, dependerá de si la aproximación es por la izquierda o por la derecha que el valor  $\tan x$  tienda a menos o a más infinito; por ello en esos puntos no es posible asignar un valor a la función tangente. Más aún, si en la Figura 2.12 trazamos las rectas verticales correspondientes a  $x = (2k + 1)\pi/2$ , resulta que las distintas partes de la gráfica están delimitadas por dos de esas rectas, acercándose a ellas tanto como se quiera sin llegar a tocarlas, y pareciéndose a ellas tanto como se quiera en el sentido de que cuando  $x$  tiende a uno de los valores excluidos del dominio, la recta tangente a la gráfica tiende a ser vertical. Esas rectas se denominan *asíntotas* de la gráfica.

Obtengamos ahora la gráfica de la función  $\tan x$ . La forma más sencilla de dibujarla es tomar en cuenta el triángulo rectángulo cuyo ángulo en  $O$  mide  $x$  y cuyo cateto horizontal (el cateto adyacente al ángulo) coincide con el radio horizontal derecho; entonces, como el denominador vale 1, el valor  $\tan x$  corresponde exactamente al otro cateto, opuesto al ángulo (véase la Figura 2.12).

Se ve que cuando el ángulo se aproxima a  $\pi/2$ , el cateto opuesto crece tanto como se quiera, y cuando el ángulo ha superado la medida de  $\pi/2$  radianes, el valor de  $\tan x$  es negativo y de valor absoluto tan grande como se quiera (recuérdese que los puntos del segundo cuadrante tienen coordenadas de signos opuestos). La función  $\tan x$  toma cualquier valor real, pues basta considerar el punto  $P$  de coordenadas  $(1, \tan x)$  para formar el triángulo  $OEP$ , donde  $E$  tiene coordenadas  $(1, 0)$ , cuyo ángulo en  $O$  mide  $x$ .

Dada la definición de  $\tan x$  y el hecho de que  $\cos x$  y  $\sin x$  son periódicas de periodo  $2\pi$ , resulta claro que  $\tan(x + 2\pi) = \tan x$ , pero de hecho *el* periodo de  $\tan x$  es  $\pi$ . Esto puede demostrarse gráficamente, pues los puntos  $P$  y  $P'$  simétricos respecto al origen tienen el mismo cociente de coordenadas y corresponden a los ángulos  $x$  y  $x + \pi$  (trace la figura), pero también puede hacerse un cálculo utilizando las fórmulas (2.3)-(2.4) para el seno y el coseno

de la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned}\tan (x + \pi) &= \frac{\operatorname{sen} (x + \pi)}{\cos (x + \pi)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos \pi + \cos x \operatorname{sen} \pi}{\cos x \cos \pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x)(-1) + (\cos x)0}{(\cos x)(-1) - (\operatorname{sen} x)0} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \tan x.\end{aligned}$$

Por tanto, la función  $\tan x$  es periódica de periodo  $\pi$ , es decir, para obtener su gráfica basta conocer los valores de  $\tan x$  cuando  $x$  recorre el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

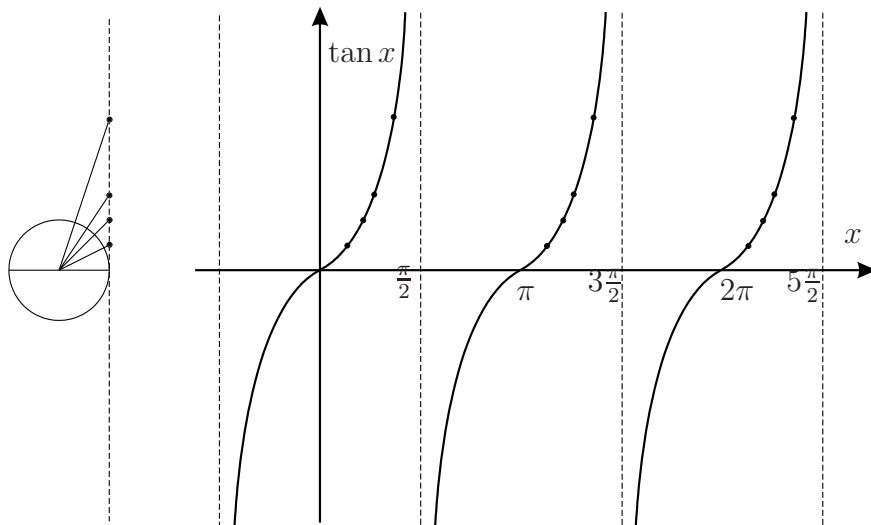


Figura 2.12: Gráfica de la función  $\tan x$ .

Daremos ahora las definiciones de las funciones que extienden a las razones secante, cosecante y cotangente; serán los cocientes respectivos. Por ello, estas funciones no estarán definidas para los valores de  $x$  donde el denominador se anule; el límite toma el valor  $-\infty$  o  $+\infty$  dependiendo de que  $x$  se aproxime por la izquierda o por la derecha a uno de esos valores.

**Definición.** Si  $x$  es la medida en radianes de un ángulo, la función *secante* es el cociente de la función constante 1 dividida entre la función coseno, es decir,  $\sec x$  es el inverso multiplicativo de  $\cos x$ .

**Definición.** Si  $x$  es la medida en radianes de un ángulo, la *cosecante* es el cociente de la función constante 1 dividida entre la función seno, es decir,  $\csc x$  es el inverso multiplicativo de  $\sin x$ .

**Definición.** Si  $x$  es la medida en radianes de un ángulo, la función *cotangente* es el cociente de la función constante 1 dividida entre la función tangente, es decir,  $\cot x$  es el inverso multiplicativo de  $\tan x$ .

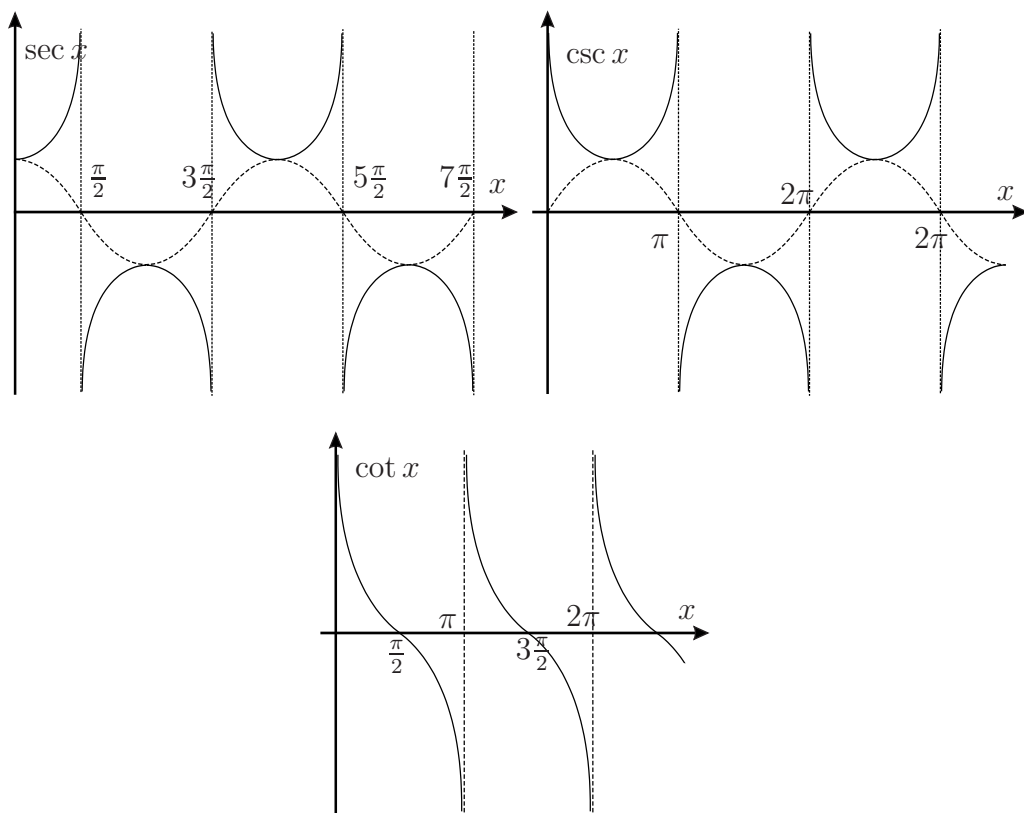


Figura 2.13: Gráficas de las funciones  $\sec x$ ,  $\csc x$  y  $\cot x$ .

Entonces, los dominios de estas funciones son los siguientes:

$$\text{Dom}(\sec) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi/2 \mid k \text{ es entero}\};$$

$$\text{Dom}(\csc) = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \text{ es entero}\};$$

$$\text{Dom}(\cot) = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \text{ es entero}\};$$

Un ejercicio sencillo pero interesante es determinar la imagen de cada una de estas funciones; lo dejaremos al lector, pues ello le permitirá justificar las gráficas, mismas que aparecen en la Figura 2.13.

Para concluir este inciso, veamos qué ocurre cuando componemos las funciones trigonométricas con algunas funciones sencillas. Por ejemplo, obtengamos el dominio, la imagen, el periodo y la gráfica de las funciones

$$\cos 2x, \quad \sin x/2, \quad 3 \cos x, \quad (1/3) \sin x, \quad \sin(1/x), \quad x \sin(1/x).$$

Analizaremos estas funciones una a una, a fin de que el lector verifique que, en todos los casos, el esquema es el mismo.

La función  $\cos 2x$  es composición de la función coseno con la función que aplica  $x$  en  $2x$ , lo cual escribimos como  $x \mapsto 2x$ ; el dominio de esta última función es todo  $\mathbb{R}$  y su imagen también; entonces, como el dominio de  $\cos x$  también es  $\mathbb{R}$ ,  $\cos 2x$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  y su imagen coincide con la de  $\cos x$ ; en resumen

$$\text{Dom}(\cos 2x) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}(\cos 2x) = [-1, 1].$$

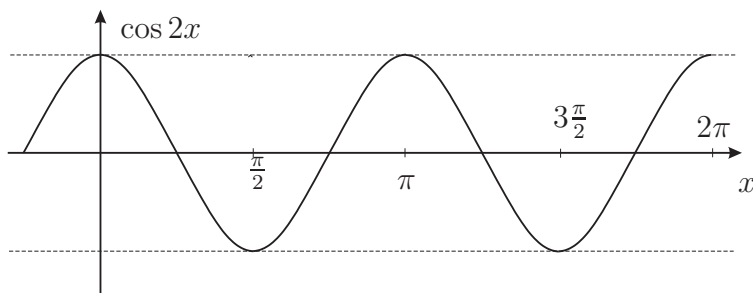


Figura 2.14: Gráfica de la función  $\cos 2x$ .

En cuanto al periodo, sabemos que  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ; en este caso el papel de  $x$  lo juega  $2x$  y, en consecuencia, el periodo es  $\pi$ .

$$\cos(2x + 2\pi) = \cos 2x, \quad \text{es decir,} \quad \cos 2(x + \pi) = \cos 2x,$$

El lector deberá comparar las Figuras 2.14 y 2.11.

Como hay el doble de ondas en la gráfica de esta función que en la de la original, se dice que la *frecuencia* ha cambiado, es el doble de la frecuencia



de la función original. Es decir, cuando el periodo disminuye la frecuencia aumenta; en este caso, el periodo es la mitad del periodo original mientras que la frecuencia es el doble de la frecuencia original.

Analicemos ahora la función  $\sin(x/2)$ ; nuevamente, esta función se obtiene al componer una función trigonométrica,  $\sin x$ , con otra, la función que aplica  $x$  en  $x/2$ ,  $x \mapsto (x/2)$ , cuyo dominio e imagen es todo  $\mathbb{R}$ . Por tanto, el dominio de la función compuesta es todo  $\mathbb{R}$  y su imagen es la imagen de la función seno,  $[-1, 1]$ . El periodo, como en el caso anterior, cambia, porque en la igualdad  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  debemos sustituir  $x$  por  $x/2$  y, en consecuencia,

$$\sin((x/2) + 2\pi) = \sin(x/2), \text{ es decir, } \sin((x + 4\pi)/2) = \sin(x/2).$$

Por tanto, el periodo de  $\sin(x/2)$  es  $4\pi$ . La gráfica aparece a continuación y deberá compararse con la Figura 2.10.

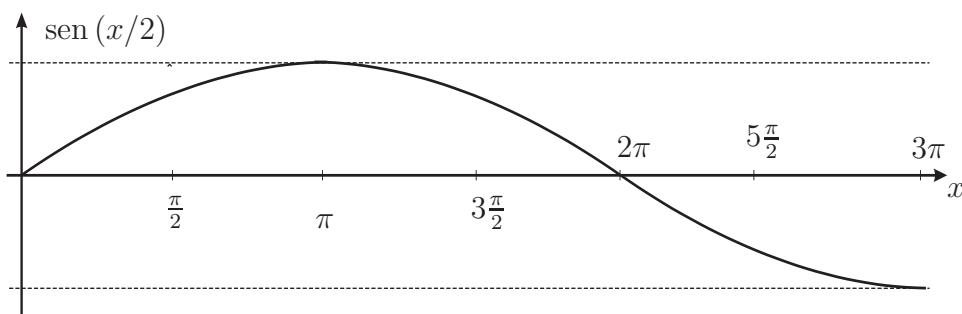


Figura 2.15: Gráfica de la función  $\sin(x/2)$ .

En el caso de la función  $3\cos x$ , también hay una composición pero en el otro sentido, pues primero se aplica la función coseno y luego se multiplica por 3. Como el dominio de la función coseno es todo  $\mathbb{R}$  y su imagen es el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ , que está contenido en el dominio de la función  $y \mapsto 3y$ , el dominio de la función  $3\cos x$  es todo  $\mathbb{R}$  y su imagen es el intervalo cerrado  $[-3, 3]$ . El periodo es  $2\pi$ , pues la igualdad

$$3\cos x = 3\cos(x + p) \text{ equivale a } \cos x = \cos(x + p),$$

y ya sabemos que el periodo de la función coseno es  $2\pi$ . La gráfica aparece a continuación y deberá compararse con la Figura 2.11 (observe que en la Figura 2.16 hemos cambiado la escala respecto a las gráficas anteriores).

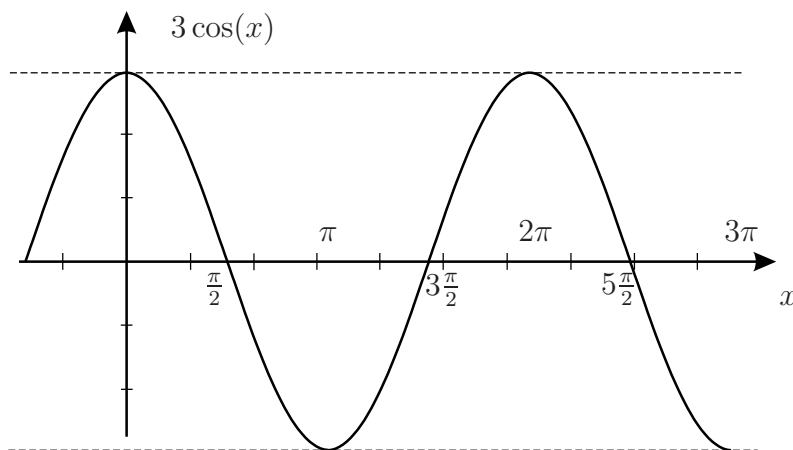


Figura 2.16: Gráfica de la función  $3 \cos x$ .

Como la imagen triplica a la imagen de la función coseno, decimos que la *amplitud* ha cambiado; esta función tiene una amplitud tres veces mayor que la de la función trigonométrica original.

Ahora ya podemos hacer muy fácilmente el análisis de la función siguiente,  $(1/3)\sin x$ : el dominio es todo  $\mathbb{R}$  porque ése es el dominio de  $\sin x$  y cualquier número puede multiplicarse por  $1/3$ , y la imagen es  $[-1/3, 1/3]$  porque  $1/3$  multiplica números en el intervalo  $[-1, 1]$ , lo cual significa que la amplitud de esta función es  $1/3$  de la amplitud de la función original; finalmente, el periodo es el mismo de  $\sin x$ , pues si un número  $p$  satisface que  $(1/3)\sin(x + p) = (1/3)\sin x$ , entonces también satisface  $\sin(x + p) = \sin x$ , es decir,  $p$  es periodo de la función seno,  $2\pi$ .

Pediremos al lector en uno de los ejercicios trazar la gráfica de la función  $\cos(x + \pi/4)$ ; es claro que la función con la cual se compone a la función coseno es una traslación,  $x \mapsto x + \pi/4$ , de tal suerte que  $\cos(x + \pi/4)$  toma el valor 1 cuando  $x = -\pi/4$  y, de hecho, para obtener la gráfica basta trasladar la gráfica original a la izquierda una distancia de  $-\pi/4$ . El lector también deberá comprobar que el periodo nuevamente es  $2\pi$ . La relación entre las gráficas de  $\cos(x + \phi)$  y  $\cos x$  para  $\phi$  fijo, que se reduce a una traslación, hace que al ángulo  $\phi$  se le llame *desplazamiento de fase* o *desfasamiento*.

Los dos últimos ejemplos propuestos son más interesantes.

La función  $\sin(1/x)$  es composición de la función seno con la función

$x \mapsto 1/x$ . La gráfica superior de la Figura 2.17 muestra el efecto de esta última función en los elementos de su dominio,  $\mathbb{R} - \{0\}$ : en la semirrecta correspondiente a los números negativos, el número  $-1$  permanece fijo por ser su propio inverso multiplicativo, pero los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(-1, 0)$  se intercambian, “encogiéndose” el primero y “agrandándose” el segundo. Lo análogo ocurre con la semirrecta de los números positivos: el número  $1$  permanece fijo por ser su propio inverso multiplicativo y los intervalos  $(0, 1)$  y  $(1, +\infty)$  se intercambian.

En consecuencia, como lo muestra la gráfica intermedia de la Figura 2.17, para obtener la gráfica de la función  $\text{sen}(1/x)$  a partir de la gráfica de la función original, basta transformar la gráfica de la misma manera que lo hicimos con los intervalos: el trozo de gráfica correspondiente en la Figura 2.10 al intervalo  $(-\infty, -1)$  se refleja y comprime para corresponder al intervalo  $(-1, 0)$ , mientras que el trozo de gráfica correspondiente a  $(-1, 0)$  deberá reflejarse y alargarse para corresponder al intervalo infinito  $(-\infty, -1)$ . La gráfica se rompe en  $x = 0$  que no pertenece al dominio de la función  $1/x$ . La gráfica no es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, sino con respecto al origen (¿por qué?).

La gráfica de la última función,  $x \text{ sen}(1/x)$ , está ilustrada en la Figura 2.17.

Para justificar esta gráfica, el lector deberá observar que aquellos valores de  $x$  en los cuales  $\text{sen}(1/x) = 1$  (ubicados todos entre  $-1$  y  $1$ ) dan lugar a puntos de la gráfica con coordenadas  $(x, x)$ , y los valores de  $x$  para los cuales  $\text{sen}(1/x) = -1$  dan lugar a puntos de la gráfica con coordenadas  $(x, -x)$ . La ecuación  $y = x$  corresponde a una recta por el origen que forma un ángulo de  $45^\circ$  con la parte positiva del eje  $X$ , y la ecuación  $y = -x$  corresponde a una recta por el origen que forma un ángulo de  $-45^\circ$  con la parte positiva del eje  $X$ ; la gráfica de  $x \text{ sen}(1/x)$  queda entre estas dos rectas, como lo muestra la figura.

Aquí vale la pena observar que aunque  $x = 0$  no pertenece al dominio de la función  $y$ , en consecuencia, la gráfica tiene una discontinuidad en ese punto, podríamos añadir el origen para unir los dos pedazos de la gráfica. Un lector con conocimientos de cálculo puede demostrar que la función que coincide con  $x \text{ sen}(1/x)$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y que vale  $0$  en  $x = 0$  es una función continua en todos los puntos de su dominio.

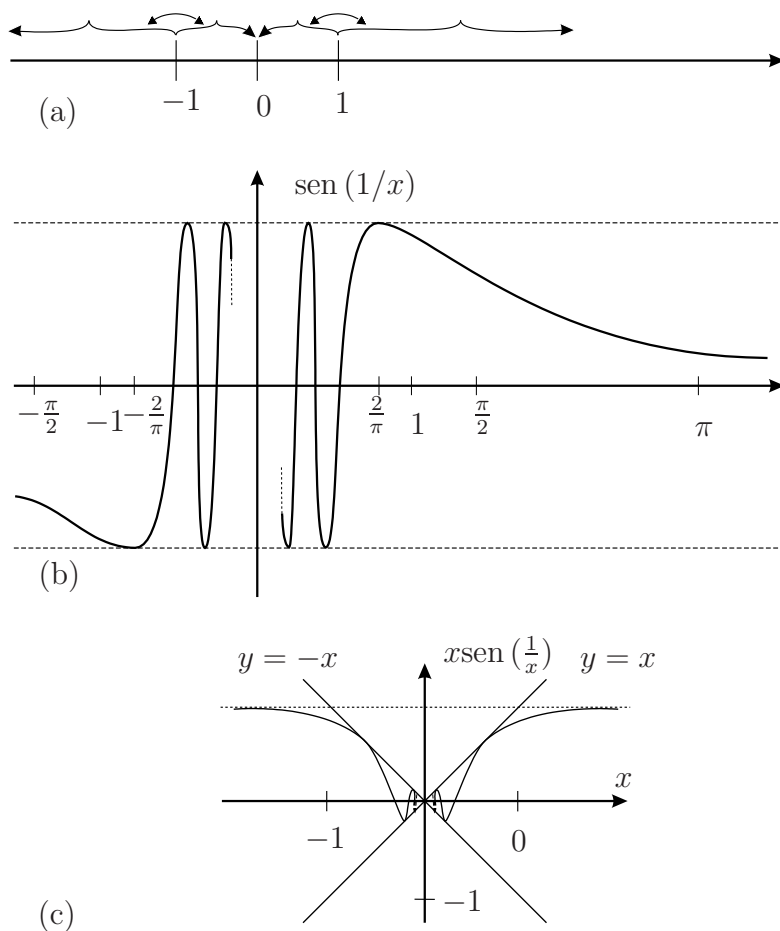


Figura 2.17: Gráficas de las funciones  $\text{sen}(1/x)$  y  $x \text{sen}(1/x)$ .

La gráfica es simétrica respecto al eje  $Y$  y es asintótica a la recta  $y = 1$ ; lo primero es consecuencia de que

$$x \text{sen}(1/x) = (-x) \text{sen}(1/(-x))$$

por la imparidad de la función seno, y lo segundo es consecuencia de que

$$\frac{\text{sen } x}{x} \rightarrow 1 \text{ cuando } x \rightarrow 0,$$

cuando  $x$  se sustituye por  $1/z$  y  $z \rightarrow +\infty$  o  $z \rightarrow -\infty$ , y de que la pendiente de la tangente tienda a cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Las razones y funciones trigonométricas tienen, como lo mencionamos en la introducción de este capítulo, un gran número de aplicaciones. Pero nosotros nos contentaremos con estudiar, en un inciso próximo, una de la que se desprenden otras muchas: permiten introducir otro tipo de coordenadas en el plano, y muchos problemas se simplifican al usar esas nuevas coordenadas.

## EJERCICIOS

1. Haga una tabla donde figuren los signos de las distintas funciones trigonométricas según el cuadrante donde se ubique el ángulo.
2. Determine el dominio de las funciones  $\sec x$ ,  $\csc x$ ,  $\cot x$ .
3. Determine el periodo de las funciones  $\sec x$ ,  $\csc x$ ,  $\cot x$ .
4. Determine el periodo de la función  $\cos(x + \pi/4)$ , trace la gráfica correspondiente y compárela con la de la función coseno.
5. Determine el dominio, la imagen y el periodo de las funciones siguientes:
  - (a)  $2 \tan x$ , (b)  $\tan 2x$ , (c)  $\tan(x/2)$ ,
  - (d)  $3 \sec x$ , (e)  $\csc 3x$ , (f)  $\cot(x/3)$ .
6. Use la función tangente para dar una biyección entre un intervalo y  $\mathbb{R}$ .

## 2.4 Funciones trigonométricas inversas

Como acabamos de hacer referencia a la composición de funciones, tiene sentido decir que la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la *función inversa* de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si al componer  $g$  con  $f$  obtenemos la *función identidad*

$$Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por  $Id(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Intuitivamente, la función inversa de una función dada “regresa” el valor  $f(x)$  al argumento  $x$  del cual proviene. Pero si el valor  $f(x)$  no proviene de

un único argumento, la “función” inversa no está bien definida y no puede llamarse función.

Como cada una de las funciones trigonométricas es periódica, los valores se repiten cuando a la variable se le suma un múltiplo entero de  $2\pi$  o de  $\pi$ , según el caso.

Pero existe un recurso sencillo para definir las funciones trigonométricas inversas: restringir apropiadamente el dominio.

Restringir apropiadamente el dominio significa dos cosas: una, que no haya dos elementos distintos del dominio restringido con el mismo valor; la otra cosa que debemos cuidar es que la imagen de ese dominio restringido abarque toda la imagen de la función original.

Informalmente, eso corresponde a elegir un trozo mínimo de la gráfica cuyas ordenadas cubran la imagen. Entonces se fija como dominio de la función cuya inversa queremos definir, el intervalo del eje  $X$  al que corresponde dicho trozo de gráfica. Ése intervalo será la imagen de la función inversa.

Trabajaremos únicamente el caso de la función seno y dejaremos al lector todas las demás (véanse [Ha] o [Pi]).

Para empezar, es claro que hay muchas formas de elegir el intervalo al que restringiremos la función seno, pero la más usual es la que prefiere el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$  por constar de números con valor absoluto mínimo entre todos los intervalos de números reales que dan lugar a la imagen completa  $[-1, 1]$ .

Nótese que el intervalo  $[0, \pi]$  no es elegible porque en ese intervalo la función seno no es inyectiva.

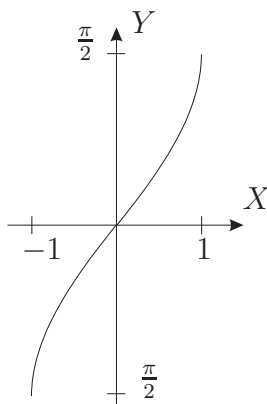


Figura 2.18: Gráfica de la función  $\text{arc sen} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ .

Entonces, definimos la función *ángulo cuyo seno*, en símbolos *arc sen*, como

la función cuyo dominio es el intervalo  $[-1, 1]$  y cuyos valores satisfacen

$$\arcsin x = y \quad \text{si} \quad \sin y = x.$$

La gráfica aparece en la Figura 2.18. Note que, como para cualquier función inversa, la gráfica se obtiene de la gráfica de la función original reflejando respecto a la recta  $y = x$ .

## EJERCICIOS

1. Restrinja apropiadamente los dominios de cada una de las funciones trigonométricas.
2. Trace la gráfica de las funciones  $\arccos$ ,  $\arctan$ ,  $\operatorname{arccsc}$ ,  $\operatorname{arcsec}$ ,  $\operatorname{arccot}$ . (Sugerencia: Utilice la observación hecha al final del inciso.)

## 2.5 Coordenadas polares

Si en un plano fijamos un punto  $O$  que llamaremos *polo* u *origen*, y a partir de él trazamos un rayo o semirrecta  $\mathcal{L}$  que dibujaremos horizontal por comodidad, llamado *eje polar*, cualquier punto  $P$  del plano pertenece a una única circunferencia con centro en el polo y cuyo radio sea igual a la distancia  $d(P, O)$  del punto al polo. Si el punto  $P$  no coincide con el polo, determina también un solo rayo por el polo, el rayo  $OP$  y de esta manera se determina el ángulo del eje polar al rayo  $OP$  (véase la Figura 2.19).

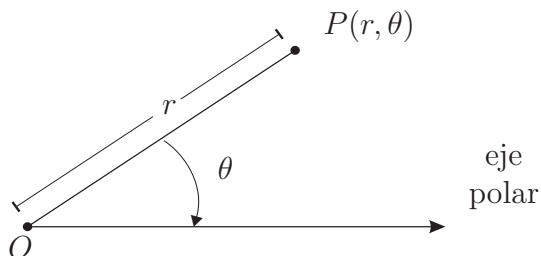


Figura 2.19: Coordenadas polares de un punto en el plano.

El polo es el único punto caracterizado por la condición de que el radio es nulo y no se le asocia ningún ángulo.

Las *coordenadas polares del punto  $P$*  serán los números  $(r, \theta)$ , llamados *radio* (o *norma*) y *ángulo* (o *argumento*), respectivamente, donde

$$r = d(O, P) \quad \text{y} \quad \theta = \text{ángulo entre } \mathcal{L} \text{ y } OP.$$

Desde luego, el ángulo no está unívocamente determinado, pues si dos ángulos difieren en un múltiplo de  $2\pi$  el rayo obtenido es el mismo; se acostumbra utilizar ángulos entre 0 (inclusive) y  $2\pi$  (exclusive), a menos de que haya alguna razón para considerar otro intervalo de variación del ángulo.

A la inversa sí hay unicidad: dada una pareja  $(r, \theta)$  hay un único punto  $P$  del plano coordenado polar que se localiza como la intersección de la circunferencia de centro el polo y radio  $r$  con el rayo a partir del polo que forma un ángulo  $\theta$  con el eje polar.

Recordemos ahora la importancia de las rectas coordenadas,  $x = \text{cte}$  y  $y = \text{cte}$  en el caso cartesiano; en este caso el lugar geométrico de los puntos de un plano que satisfacen la condición en coordenadas polares  $r = \text{cte}$  es una circunferencia con centro en el polo y radio  $r$ , y el lugar geométrico de los puntos del plano coordenado polar que satisfacen la condición  $\theta = \text{cte}$  es el rayo a partir del polo que forma el ángulo  $\theta$  con el eje polar.

Estas circunferencias y estos rayos se denominan *curvas coordenadas* del sistema coordenado polar.

Entonces, en vez de la cuadrícula correspondiente a las coordenadas cartesianas, lo que resulta en este caso es la Figura 2.20, que solemos asociar con un radar.

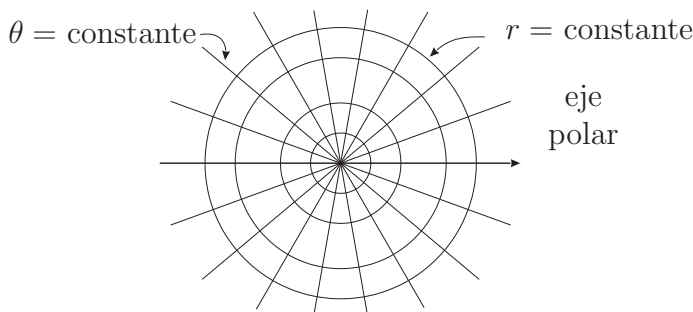


Figura 2.20: Red coordenada polar en el plano.



Es importante notar que dos curvas coordenadas  $r = \text{cte}$  y  $\theta = \text{cte}$  cualesquiera se cortan siempre en forma perpendicular (corresponden a una circunferencia y uno de sus radios), como ocurría en el caso cartesiano.

De hecho hay una forma de aplicar la red cartesiana en la red polar (salvo por el polo) utilizando la función exponencial compleja (véase [Ma]).

Por lo pronto, es sencillo establecer fórmulas para obtener las coordenadas polares de un punto  $P$  de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  con el origen como polo, el eje  $X$  coincidente e igualmente orientado que el eje polar y el eje  $Y$  perpendicular al eje  $X$  con orientación que complete un sistema derecho.

Como el triángulo  $OHP$  de la Figura 2.21 es rectángulo, tenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad (2.10)$$

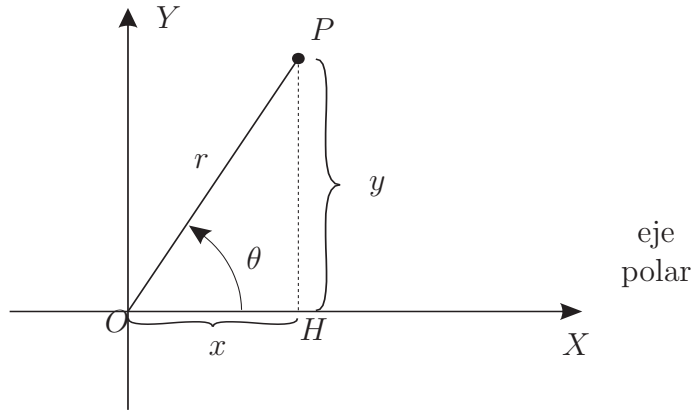


Figura 2.21: Transformación de un tipo de coordenadas en otro.

Debemos tener presente que el ángulo no está unívocamente determinado, y que para puntos de la forma  $(0, y)$  no está determinado el valor de  $\tan(y/x)$ , aunque el ángulo correspondiente sí lo está: es  $\pi/2$  ó  $3\pi/2$  dependiendo de que  $y$  sea positiva o negativa, respectivamente.

Recíprocamente, si conocemos las coordenadas polares  $(r, \theta)$  de un punto  $P$ , sus coordenadas cartesianas se obtienen mediante las ecuaciones siguientes:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (2.11)$$

según es inmediato de la Figura 2.21.

---

## EJERCICIOS

1. Dibuje en una misma gráfica las curvas coordenadas correspondientes a las condiciones siguientes:
  - (a)  $r = 1, r = 2, r = 3, r = 4$ ;
  - (b)  $\theta = \pi/6, \theta = \pi/4, \theta = \pi/3$ ,
  - (c)  $\theta = -\pi/4, \theta = -\pi/2, \theta = -5\pi/6$ .
2. Determine las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares aparecen a continuación:

$$P(1, -\pi/3), Q(2, 2\pi/3), R(3, \pi), S(2, 3\pi/4).$$

3. Determine las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas aparecen a continuación (considere ángulos entre 0 (incluido) y  $2\pi$  (excluido)):

$$P(1, 1), Q(-1, 2), R(1, -2), S(0, -2).$$

4. Obtenga la ecuación en coordenadas cartesianas de cada una de las ecuaciones polares siguientes, y llévela a una forma en que pueda identificarla.
  - (a)  $r = 5$
  - (b)  $r = 4/\cos(\theta - 30^\circ)$
  - (c)  $r = |2 \cos \theta|$  (Sugerencia: la unión de los lugares geométricos de dos ecuaciones, corresponde al producto de las ecuaciones.)
  - (d)  $r = 4/(2 + \cos \theta)$

## 2.6 Curvas en coordenadas polares

Así como estamos acostumbrados a representar la gráfica de una función dada por  $y = f(x)$ , es importante desarrollar la habilidad de dibujar una curva dada en forma polar, es decir, donde  $r$  es función del ángulo  $\theta$ :  $r = f(\theta)$ .

Aquí debemos prevenir al lector de que para una ecuación como  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ , la curva sólo estará completa cuando se considere la rama correspondiente a  $-r$  de la raíz cuadrada. En tales casos se conviene en considerar

el rayo complementario a  $\theta$ , correspondiente a  $\theta + \pi$ , y localizar en dicho rayo el punto  $P$  a distancia  $r$  del polo.

Como en el caso cartesiano, el determinar de antemano las simetrías de una curva respecto al eje polar, al polo o a la perpendicular al eje polar, que llamaremos *eje conjugado*, puede abreviarnos el trabajo. Por ello pediremos al lector justificar las caracterizaciones siguientes.

*Un punto  $P'$  es simétrico del punto  $P(r, \theta)$  respecto al eje polar si sus coordenadas son  $(r, -\theta) = (r, 2\pi - \theta)$ .*

*Un punto  $P''$  es simétrico del punto  $P(r, \theta)$  respecto al eje conjugado si sus coordenadas son  $(r, \pi - \theta)$ .*

*Un punto  $P'''$  es simétrico del punto  $P(r, \theta)$  respecto al polo si sus coordenadas son  $(r, \theta + \pi) = (-r, \theta)$ .*

Vayamos ahora a un ejemplo, la curva determinada por la ecuación polar

$$r = \cos 2\theta.$$

Para trazar su gráfica consideramos un sistema coordenado polar cuyos rayos tengan una separación de  $n\pi/6$  con  $n$  entero. El lector aprenderá a reconocer, después de trazar varias gráficas, cuál es el espaciamiento más conveniente entre los rayos dependiendo de las características de la ecuación.

Las cuestiones fundamentales son:

- periodicidad o no de la función dependiente del ángulo (lo cual puede restringir los valores del argumento al intervalo de periodicidad);
- simetrías de la gráfica (lo cual puede restringir aún más el intervalo de variación del argumento);
- si deben considerarse valores negativos de  $r$ .

En cuanto a periodicidad, sabemos que para la función coseno basta variar el argumento ( $2\theta$  en el caso de  $f(\theta) = \cos 2\theta$ ) en el intervalo  $[0, 2\pi]$ ; es decir,  $2\theta \in [0, 2\pi)$ , lo que implica  $\theta \in [0, \pi)$ . Y como además  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ , basta calcular los valores de  $r$  correspondientes a  $\theta \in [0, \pi/2)$ .

En lo relativo a simetrías, la igualdad  $\cos \theta = \cos(-\theta)$ , implica que la gráfica es simétrica respecto al eje polar, y también lo es respecto al eje conjugado porque  $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$ , como es inmediato de la fórmula del coseno de

$\theta$	$2\theta$	$\cos 2\theta$
0	0	1
15°	30°	.866
30°	60°	.5
45°	90°	0
60°	120°	-0.5
75°	150°	-.866
90°	180°	-1

Tabla 2.2: Valores suficientes para trazar la gráfica de  $r = \cos 2\theta$ .

la suma de dos ángulos.

Y sí hay valores negativos de  $r$  porque  $\cos x \leq 0$  cuando  $x \in [\pi/2, 3\pi/2)$ , pero como en este caso el papel de  $x$  lo juega  $2\theta$  los valores negativos de  $r$  corresponden a  $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4)$ .

El paso final consiste en tabular los valores de  $r = \cos 2\theta$  correspondientes a los rayos elegidos, como lo muestra la Tabla 2.2.

Los puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  y  $P_7$  indican que hay dos medios pétalos, uno en la parte del plano correspondiente al primer cuadrante de las coordenadas cartesianas y otro en el tercer cuadrante de dichas coordenadas, recorridos en el orden dado por los subíndices.

Los puntos  $P_5, P_6$  y  $P_7$  quedan en el tercer cuadrante porque deben localizarse en el rayo complementario de los rayos a  $60^\circ, 75^\circ$  y  $90^\circ$ . Lo análogo ocurre con los puntos correspondientes a ángulos entre  $90^\circ$  y  $135^\circ$  ubicados en el cuarto cuadrante en tanto que los correspondientes a  $\theta \in (135^\circ, 180^\circ)$  se localizan en el rayo original y no en el complementario. La figura se completa tomando en cuenta la simetría respecto al eje polar para formar una *rosa de cuatro pétalos*.

Un ejercicio interesante es demostrar que la curva cuya ecuación polar es  $r = \cos k\theta$  tiene  $k$  pétalos si  $k$  es impar y  $2k$  pétalos si  $k$  es par. Por cierto que cuando  $k = 1$  el pétalo es una circunferencia, lo cual se demuestra transformando la ecuación a coordenadas cartesianas.

Ahora sólo resta proponer al lector una variedad de ejercicios. Consignamos los nombres con que se mencionan en la literatura las curvas resultantes para

que el lector las tenga en mente.

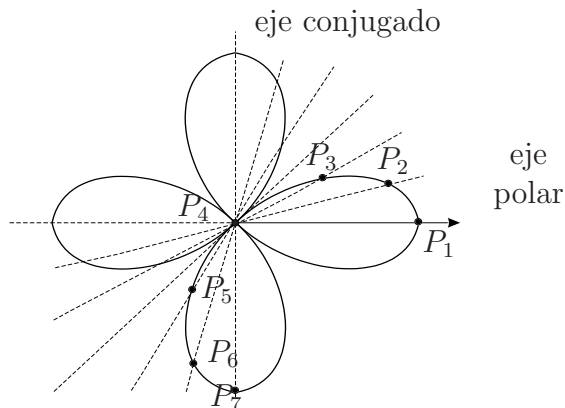


Figura 2.22: Rosa de cuatro pétalos.

## EJERCICIOS

En los primeros seis ejercicios, el lector deberá proceder a elaborar primero una tabla (recuerde que el intervalo de variación del ángulo puede reducirse si se hace el análisis de la función) y luego deberá marcar los puntos correspondientes a los valores de la tabla para, finalmente, trazar una curva suave que los contenga.

Una *lemniscata* es una curva cuya ecuación tiene la forma

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

donde para cada  $a$  fija la figura tiene un tamaño distinto.

- Una *cardioide* es una curva (una para cada elección de  $a$ ) con ecuación

$$r = a(1 + \cos \theta).$$

- Un *caracol de Pascal* es una curva con ecuación

$$r = b + a \cos \theta,$$

donde cada elección de  $a$  y de  $b$  da lugar a una curva distinta y cuando  $a = b$  se obtiene una cardioide.

- Una *espiral de Arquímedes* tiene por ecuación

$$r = a\theta.$$

5. Una *espiral logarítmica* es una curva de ecuación

$$r = c e^{-m\theta},$$

donde la función exponencial  $e^x$  está compuesta con la función  $x = -m\theta$ , y cada elección de  $c$  y  $m$  da lugar a una espiral distinta.

6. Una *espiral hiperbólica* es una curva de ecuación

$$r\theta = c,$$

donde cada elección de  $c$  da lugar a una espiral distinta.

7. Un *óvalo de Cassini* es una curva que satisface la ecuación

$$r^4 + a^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta = b^4.$$

La figura consta de dos trozos separados si  $b \leq a$  y es una lemniscata si  $b = a$ . ¿Puede demostrarlo?

## 2.7 Curvas paramétricas

Supongamos que en un plano cartesiano dibujamos una curva, y que el punto de la curva correspondiente al instante  $t$  se denota por  $P(t)$ ; entonces, como los puntos del plano pueden ubicarse mediante su abscisa y su ordenada, la dependencia de  $t$  indica que cada coordenada es función de  $t$ , es decir,

$$P(t) = (x(t), y(t)),$$

donde  $t$  es el *parámetro* y  $x(t)$ ,  $y(t)$  son las *ecuaciones paramétricas* de la curva.

De hecho, toda curva correspondiente a la gráfica  $\mathcal{G}_f$  de una función real de variable real,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tiene como ecuaciones paramétricas

$$x = x, \quad y(x) = f(x).$$

Lo mismo ocurre para la curva descrita por un punto que se mueve en el espacio cartesiano dependiendo de un parámetro,

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Un ejemplo sencillo lo constituye una *hélice* (véase la Figura 2.23) cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x(\theta) = \cos \theta, \quad y(\theta) = \sin \theta, \quad z(\theta) = \theta.$$

Cualquier punto de esta curva pertenece al cilindro dado por la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ , y dos ángulos que difieran por múltiplos de  $2\pi$  dan lugar a puntos cuya única coordenada distinta es la coordenada  $z$ .

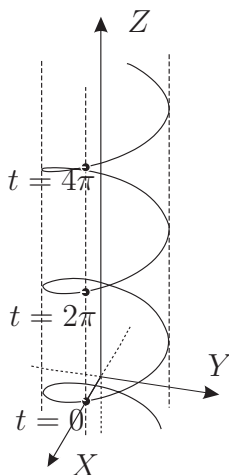


Figura 2.23: Una hélice.

Nótese que dos curvas parametrizadas pueden describir la misma curva de manera distinta, como los coches que recorren una misma carretera con velocidades distintas o en diferente sentido. Eso ocurre con las curvas planas

$$P(t) = (t, t) \quad \text{y} \quad Q(t) = (t^3, t^3),$$

o

$$R(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{y} \quad S(t) = (\cos t, -\sin t).$$

¿En qué radica la diferencia entre la curva descrita por  $P(t)$  y la correspondiente a  $Q(t)$ ? ¿Y entre las descritas por  $R(t)$  y  $S(t)$ ?

Los ejercicios siguientes piden al lector obtener las ecuaciones paramétricas de algunas curvas interesantes. Es muy importante analizar la figura; por ejemplo, las coordenadas del centro de las circunferencias rodantes se obtienen fácilmente, y a partir de ellas pueden obtenerse las de  $P(\theta)$ . Veamos un par de ejemplos.

**Ejemplo 1.** Obtenga las ecuaciones paramétricas  $(x(\theta), y(\theta))$  de una *cicloide*, curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta. La curva se ilustra a continuación y puede pensarse como la curva que veríamos si fijamos un foquito a un rayo de una rueda de bicicleta que recorre un camino recto en la oscuridad.

*Solución.* Como la longitud de una circunferencia es  $2\pi r$ , una regla de tres nos muestra que cuando el radio  $C_0P_0$  alcanza la posición  $C_\theta P_\theta$ , el arco de circunferencia entre este radio y la vertical mide  $r\theta$ . Por tanto, tenemos  $r\theta = d(O, C')$  (donde  $C'$  es el pie de la perpendicular del centro de la rueda al piso) porque es lo que ha rodado la circunferencia.

Por tanto, la abscisa de  $P_\theta$  es  $r\theta - r \sin \theta$ , y la ordenada es  $r - r \cos \theta$ .

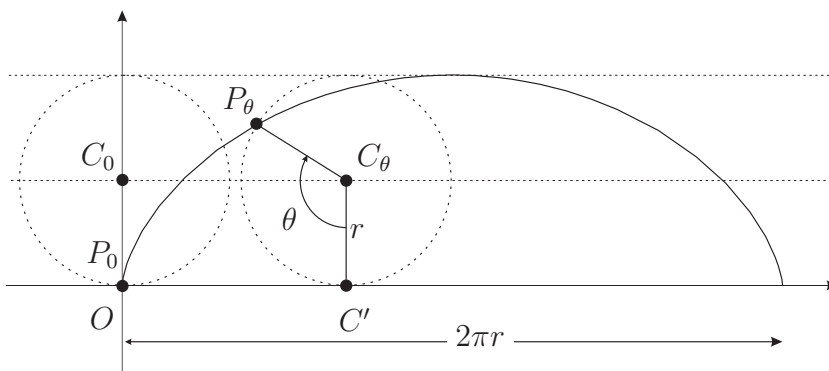


Figura 2.24: Una cicloide.

**Ejemplo 2.** Otra curva muy interesante es la descrita por un punto marcado en una circunferencia que gira (sin resbalar) sobre otra circunferencia que permanece fija; esta curva se llama *epicicloide* (vea la Figura 2.25).

Note que las circunferencias son siempre tangentes, por eso los radios  $R$  y  $r$  al punto de tangencia son colineales. El punto marcado tiene la posición  $P_0$  antes de que la circunferencia pequeña empiece a girar, y la posición  $P_\theta$  cuando los radios colineales forman un ángulo  $\theta$  con la parte positiva del eje  $X$ .

Por tanto, las coordenadas del centro  $C_\theta$  son

$$C_\theta = ((R + r) \cos \theta, (R + r) \sin \theta).$$

El ángulo  $\phi$  formado por el segmento  $C_\theta P_\theta$  con el radio  $r$  depende del ángulo  $\theta$ , porque la longitud de los arcos en que las circunferencias han estado



en contacto es la misma; en consecuencia

$$R\theta = r\phi$$

pues la longitud el arco es directamente proporcional al ángulo, como es inmediato de una regla de tres.

Ahora basta imaginar que el centro de la circunferencia pequeña está en el origen para obtener las coordenadas del punto  $P_\theta$  en ese sistema coordenado, pues el ángulo que formaría  $P_\theta$  con la parte positiva del eje  $X$  sería  $\pi + \theta + \phi$  (haga un dibujo). Entonces, las coordenadas serían:

$$(r \cos(\pi + \theta + \phi), r \sin(\pi + \theta + \phi)).$$

Las coordenadas de  $P_\theta$  en el sistema coordenado que tiene el origen en el centro de la circunferencia fija, son la suma de las coordenadas de  $C_\theta$  con las coordenadas que acabamos de obtener. Dejamos al lector la tarea de realizar esa suma, la de expresar a  $\phi$  en términos de  $\theta$ , y la de tomar en cuenta las expresiones para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos para verificar que las coordenadas  $(x(\theta), y(\theta))$  del punto  $P_\theta$  son:

$$((R + r) \cos \theta - r \cos(\theta(r + R)/r), ((R + r) \sin \theta - r \sin(\theta(r + R)/r)).$$

## EJERCICIOS

1. Obtenga las ecuaciones paramétricas de una *hipocicloide*, curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar dentro de otra circunferencia fija. (*Sugerencia:* Relacione los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  en la Figura 2.26 mediante el arco que abarcan en la circunferencia respectiva, como se hizo en el caso de epicicloide.)
2. Determine cuál relación entre los radios de las circunferencias, la fija y la rodante, determina que la curva se cierre para algún valor de  $\theta$  o no, tanto para la epicicloide como para la hipocicloide.
3. Demuestre que la curva de ecuación  $r = \cos k\theta$  tiene  $k$  pétalos si  $k$  es impar y  $2k$  pétalos si  $k$  es par.

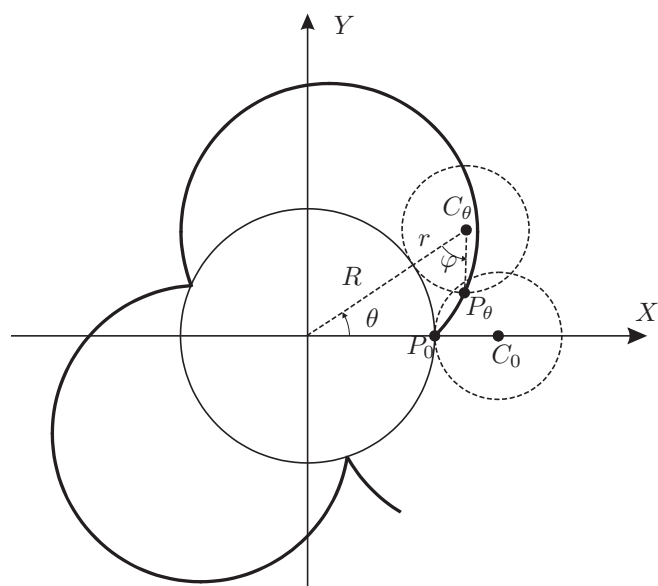


Figura 2.25: Una epicicloide.

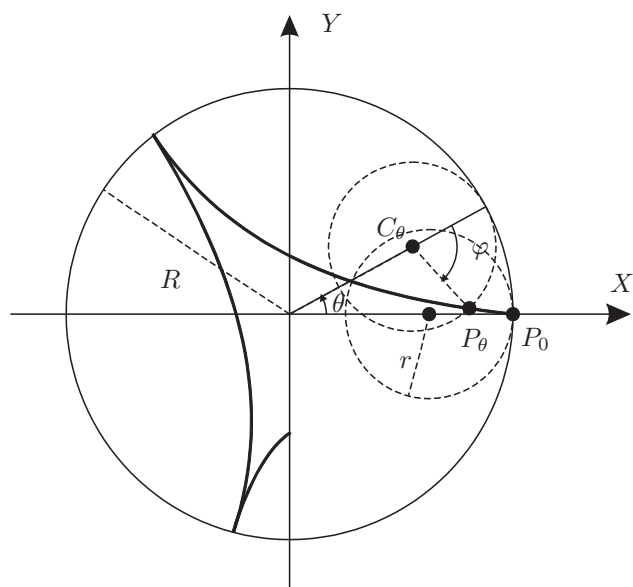


Figura 2.26: Una hipocicloide.

## 2.8 Coordenadas esféricas y cilíndricas

Los husos horarios y las coordenadas de los marineros son una muestra de la utilidad de las coordenadas esféricas en nuestro globo terráqueo. Tanto esas coordenadas como las cilíndricas son una generalización de las coordenadas polares del plano al caso del espacio, surgen de manera natural en problemas de radiación y se utilizarán en la parte de integración en Cálculo de varias variables.

### Coordenadas esféricas

Consideremos un plano fijo en el espacio (que suele dibujarse horizontal) en el cual se introduce un sistema coordenado polar con eje polar  $X$  y polo  $O$ , y una recta perpendicular a dicho plano que denotaremos por  $Z$  y en la cual eligimos como rayo positivo el que con el eje polar y el conjugado dé lugar a un sistema derecho. Entonces cualquier punto  $P \notin Z$  del espacio determina tres números (véase la Figura 2.27) llamados las *coordenadas esféricas del punto  $P$* :

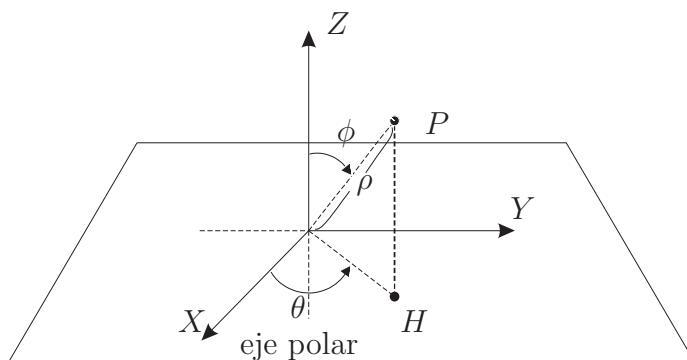


Figura 2.27: Coordenadas esféricas de un punto en el espacio.

- la *distancia del punto al polo*, que denotaremos por  $\rho$ ;
- el *ángulo entre el semiplano  $XZ$  y el semiplano por la recta  $Z$  que contiene al punto  $P$* , denotado por  $\theta$  y con valores entre 0 (incluido) y  $2\pi$  (excluido);
- el *ángulo entre el rayo positivo del eje  $Z$  y el rayo  $OP$* , que denotaremos

por  $\phi$  y consideraremos entre 0 y  $\pi$ , ambos excluidos.

El polo está caracterizado por la coordenada  $\rho : \rho = 0$ , y los puntos en el rayo positivo del eje  $Z$  están caracterizados por sólo dos coordenadas:  $\rho$  variable y  $\phi = 0$ , mientras que los del rayo negativo corresponden a  $\rho$  variable y  $\phi = \pi$ . Las coordenadas no mencionadas no están definidas.

En el caso cartesiano las *superficies coordenadas*, es decir, correspondientes a que una de las coordenadas sea constante, son todas planos; en este caso las superficies coordenadas son (véase la Figura 2.28):

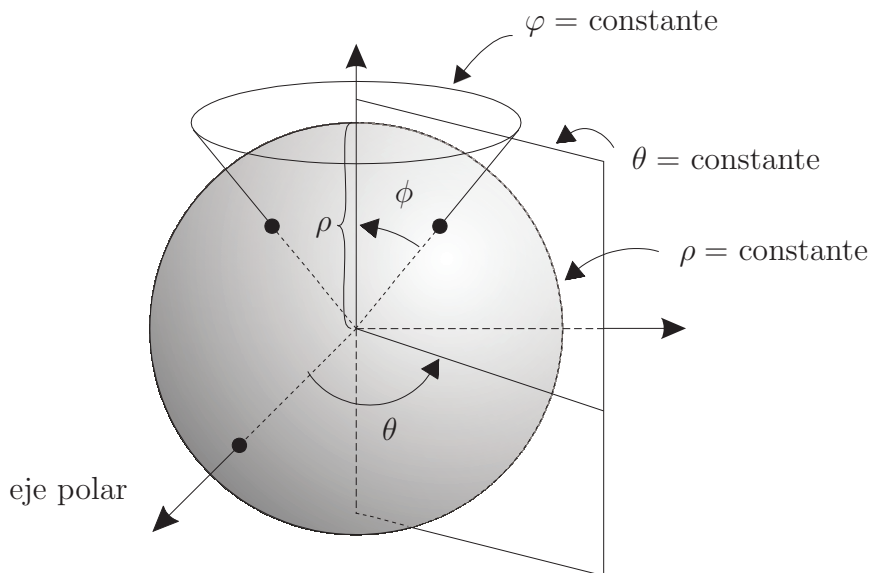


Figura 2.28: Superficies coordenadas en un sistema esférico.

- esferas con centro en el origen si  $\rho = \text{constante}$ , y dicha constante es el radio de la esfera;
- semiplanos por el eje  $Z$  si  $\theta = \text{constante}$ , y dicha constante corresponde al ángulo en el sistema polar del pie  $H$  de la perpendicular de  $P$  al plano fijo;
- conos (más bien, medios conos) de revolución con vértice en el origen si  $\phi = \text{constante}$ , donde el eje de revolución es el rayo positivo  $Z$ .

Afirmamos (y más adelante lo justificaremos) que dos superficies coordenadas de familias distintas se cortan perpendicularmente, por lo cual la intersección es toda una curva (¿de qué tipos?), y tres superficies coordenadas cada

una de un tipo distinto se cortan en un sólo punto y, por tanto, lo determinan.

La expresión misma de las superficies coordenadas en este sistema muestra que en muchas situaciones puede ser más cómodo utilizar coordenadas esféricas que coordenadas cartesianas. Por eso es conveniente establecer las ecuaciones de transformación de un sistema a otro. El lector deberá referirse a la Figura 2.27.

Si las coordenadas cartesianas de un punto  $P$  son  $(x, y, z)$ , entonces sus coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \text{ang tan } \frac{y}{x}, \\ \phi &= \text{ang cos } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\end{aligned}$$

donde *ang tan* y *ang cos* denotan el único valor del ángulo perteneciente al intervalo de variación correspondiente convenido desde un principio.

Recíprocamente, si las coordenadas esféricas de un punto  $P$  son  $(\rho, \theta, \phi)$ , entonces sus coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \sin \phi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \phi, \\ z &= \rho \cos \phi.\end{aligned}$$

El lector encontrará en los ejercicios al final de la sección oportunidad de practicar este tipo de coordenadas espaciales.

## Coordenadas cilíndricas

Si tenemos una varilla que fue sometida a un cierto calentamiento, los puntos del espacio a los cuales irradia el mismo calor constituyen cilindros cuyo eje es la varilla. Situaciones de este tipo hacen conveniente la introducción de coordenadas cilíndricas, mismas que definimos a continuación.

Consideremos un plano con un sistema coordenado polar cuyo eje polar denotamos por  $X$ , y tracemos por el polo una recta perpendicular que denotaremos por  $Z$  en la cual elegimos un rayo positivo. Entonces, cualquier punto  $P$  del espacio que no pertenezca a la recta  $Z$  determina tres números reales en la forma siguiente (véase la Figura 2.29):

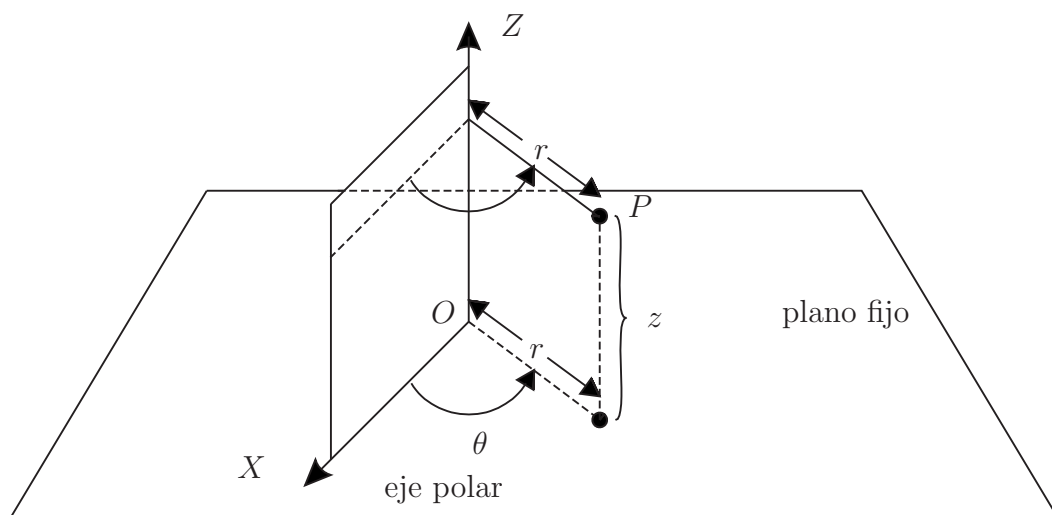


Figura 2.29: Coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio.

- la *distancia del punto P a la recta perpendicular Z*, que denotamos por  $r$ ;
- el *ángulo entre los semiplanos XZ y PZ*, el semiplano por la recta  $Z$  que contiene al punto  $P$ , que denotaremos por  $\theta$ , y cuyo intervalo de variación será  $[0, 2\pi)$ ;
- la *altura orientada sobre el plano elegido*, acorde con la orientación en la recta coordenada  $Z$  y que denotaremos por  $z$ .

Los números de la terna  $(r, \theta, z)$  se denominan *coordenadas cilíndricas* del punto  $P$  y suelen escribirse en ese orden.

Nuevamente, es importante determinar las superficies coordenadas de este sistema. La identificación será más sencilla si atendemos a la Figura 2.30.

- El lugar geométrico correspondiente a la ecuación  $r = \text{constante}$  es un cilindro circular, porque cualquier punto del cilindro de radio  $r$  con eje  $Z$  cumple la condición.
- El lugar geométrico correspondiente a la ecuación  $\theta = \text{constante}$  es el semiplano por el eje  $Z$  que forma un ángulo  $\theta$  con el semiplano  $XZ$ . La

razón de considerar sólo un semiplano y no todo el plano es que el semiplano complementario forma un ángulo  $\pi + \theta$  con el semiplano  $XZ$ , como ocurre en el caso de coordenadas polares con dos rayos complementarios.

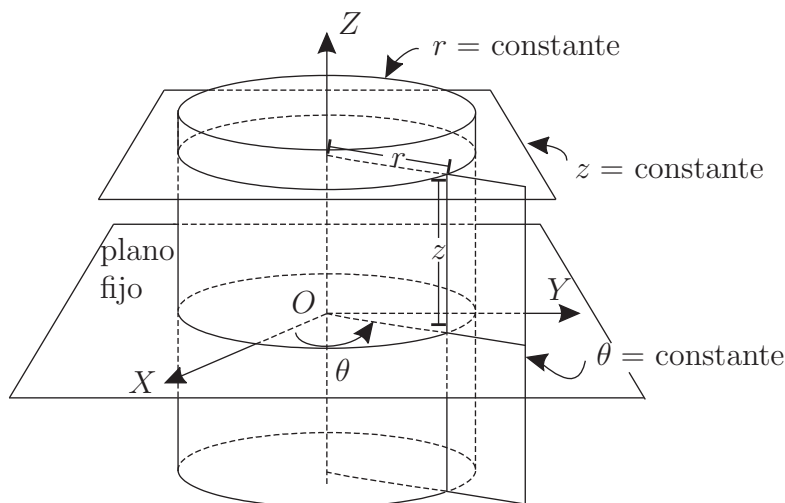


Figura 2.30: Superficies coordenadas en un sistema cilíndrico.

- El lugar geométrico correspondiente a la condición  $z = \text{constante}$  es un plano cuya altura orientada sobre el plano fijo original es  $z$ .

También en este caso cualesquiera dos superficies coordenadas de familias distintas se cortan perpendicularmente y el lector está invitado a determinar cuáles curvas resultan de esos cortes. En consecuencia, cualesquiera tres superficies una de cada tipo tienen como intersección común un sólo punto y, por eso, dados tres números reales  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  pertenecientes a los intervalos correspondientes, existe un único punto en el espacio cuyas coordenadas cilíndricas forman la terna dada.

A continuación obtenemos la relación entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas, considerando como eje  $X$  a la recta que contiene el eje polar, como eje  $Z$  a la recta perpendicular al plano fijo, y como eje  $Y$  a la recta perpendicular a las dos anteriores con la orientación adecuada para que el sistema resulte derecho. Entonces, si nos referimos a la Figura 2.29, el punto

$P$  de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  tiene coordenadas cartesianas

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta,$$

$$z = z.$$

Recíprocamente, si conocemos las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  del punto  $P$ , sus coordenadas cilíndricas son (compare con el caso esférico):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \operatorname{ang} \tan (y/x),$$

$$z = z.$$

En algunos de los ejercicios siguientes pediremos al lector utilizar las coordenadas cilíndricas para determinar algunas regiones del plano.

## EJERCICIOS

1. Dibuje un sistema coordenado esférico y ubique en él los puntos cuyas coordenadas esféricas le proporcionamos a continuación.

$$P(1, \pi/2, \pi/4), \quad Q(1, 1, 1), \quad R(2, (4/3)\pi, (2/3)\pi).$$

2. Obtenga las coordenadas cartesianas de los puntos del Ejercicio 1.
3. Ilustre en gráficas separadas las regiones del espacio que satisfacen las condiciones siguientes en un sistema coordenado esférico.

$$(a) \mathcal{A} = \{(r, \theta, \phi) | 1 \leq r \leq 2\}, \quad (b) \mathcal{B} = \{(r, \theta, \phi) | \pi/6 \leq \theta \leq \pi/3\},$$

$$(c) \mathcal{C} = \{(r, \theta, \phi) | \pi/4 \leq \phi \leq 3\pi/4\}, \quad (d) \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \quad (e) \mathcal{A} \cap \mathcal{C}, \quad (f) \mathcal{B} \cap \mathcal{C}.$$

4. Dibuje un sistema coordenado cilíndrico y ubique en él los puntos cuyas coordenadas cilíndricas le proporcionamos a continuación.

$$S(1, \pi/2, -2), \quad T(1, 1, 1), \quad U(2, (4/3)\pi, -1).$$

5. Obtenga las coordenadas cartesianas de los puntos del ejercicio anterior.
6. Ilustre en gráficas separadas las regiones del espacio que satisfacen las condiciones siguientes en un sistema coordenado cilíndrico.

$$(a) \mathcal{D} = \{(r, \theta, z) | 1 \leq r \leq 2\}, \quad (b) \mathcal{E} = \{(r, \theta, z) | \pi/6 \leq \theta \leq \pi/3\},$$

$$(c) \mathcal{F} = \{(r, \theta, z) | \pi/4 \leq z \leq 3\pi/4\}, \quad (d) \mathcal{D} \cap \mathcal{E}, \quad (e) \mathcal{D} \cap \mathcal{F}, \quad (f) \mathcal{E} \cap \mathcal{F}.$$



## 2.9 Un comentario sobre series de Fourier (\*)

No podemos desaprovechar la oportunidad de mostrar una de las aplicaciones más importantes de las funciones trigonométricas pese a que deberemos mencionar (únicamente mencionar) varios conceptos de cálculo que exigen un tratamiento cuidadoso y que pueden consultarse en casi cualquier libro de Cálculo Diferencial, en particular [Ha] o [Pi] de la bibliografía usados como fuente de nuestros comentarios históricos y gráficos, respectivamente.

Mostraremos gráficamente la forma en que las sumas parciales de funciones trigonométricas de una serie de Fourier conveniente aproximan tanto como se quiera una función periódica de periodo  $2\pi$  *monótona* y *acotada* en  $[-\pi, \pi]$ .

La parte histórica refiere que mientras Daniel Bernoulli (1700-1782) afirmaba, con base en su trabajo sobre cuerdas vibrantes, que cualquier función  $f$  continua que se anula en los extremos del intervalo  $[0, \pi]$  puede representarse mediante una *serie* de funciones sinuidales

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx,$$

(el símbolo  $\sum$  indica que los términos, en número infinito,  $b_n \text{sen } nx$  deben sumarse), los matemáticos opinaban lo contrario pues aún no habían desarrollado los conceptos que permiten darle sentido a una suma infinita (una serie) de funciones. El lector que nunca ha tratado con series aceptará que una suma infinita, como:

$$1 + (1/2) + (1/4) + (1/8) + \dots + (1/2^n) + \dots$$

represente un número finito, 2 en el ejemplo.

Posteriormente, Jean Baptiste Fourier (1768-1830) renovó la discusión al utilizar series trigonométricas, llamadas *series de Fourier*, en su trabajo sobre conducción de calor:

$$S(x) = (1/2)a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx).$$

Las gráficas deberían haber hecho sospechar a los incrédulos que Bernoulli y Fourier tenían razón, pues al considerar las funciones definidas por las *sumas*

*parciales* (de los dos primeros términos, de los tres primeros, etc.) de  $S(x)$ , las gráficas aproximan, tanto como se quiera (vea la Figura 2.31), a la gráfica de la función periódica  $f(x)$ .

Definimos la función periódica de periodo  $2\pi$  por sus valores en el intervalo fundamental  $[0, 2\pi]$  (su gráfica está formada por los segmentos de altura 1 y  $-1$  de la Figura 2.31):

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

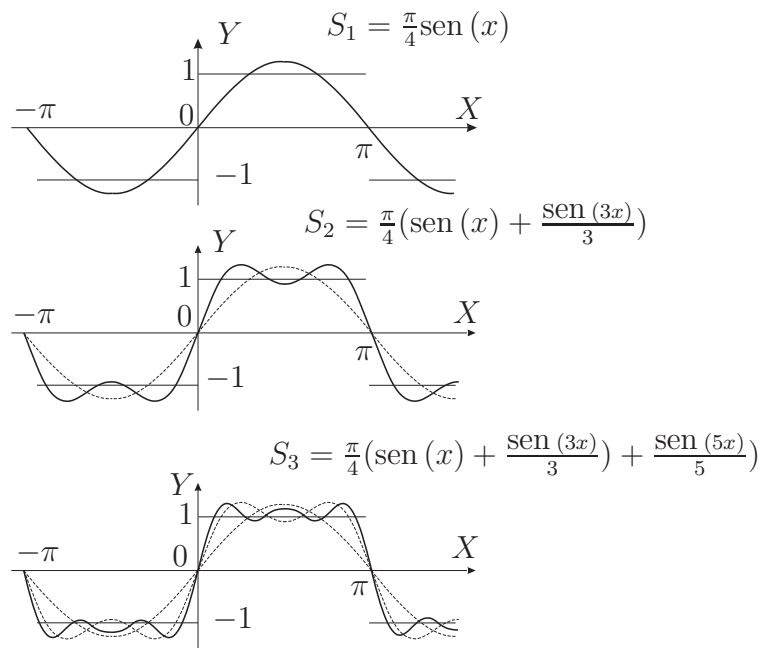


Figura 2.31: Aproximaciones de la función  $f(x)$  mediante sumas parciales de su serie de Fourier.

La serie de Fourier correspondiente es

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\text{sen } x}{1} + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5} + \dots + \frac{\text{sen } (2n+1)x}{2n+1} + \dots \right],$$

y sus tres primeras sumas parciales se aproximan a la gráfica de  $f(x)$  como lo ilustra la Figura 2.31

---

# Espacios vectoriales básicos

---

Hasta ahora hemos trabajado con  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  como conjuntos de puntos cuyos subconjuntos corresponden a ecuaciones o desigualdades. Pero ya los científicos de los siglos pasados, grandes calculistas por necesidad, acabaron por descubrir patrones de comportamiento al resolver sistemas de ecuaciones lineales; eso unido al concepto físico de vector, dio origen al concepto de espacio vectorial y, finalmente, a la rama de las matemáticas denominada Álgebra Lineal.

Como el método analítico utiliza las coordenadas de manera esencial, es conveniente elegir la técnica apropiada para que nuestros cálculos sean lo más eficientes posibles. Por ello conviene estudiar a  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  como espacios vectoriales. Eso está estrechamente relacionado con los conceptos geométricos de recta tangente (a una curva en uno de sus puntos) y de plano tangente (a una superficie en uno de sus puntos).

La recta tangente y el plano tangente son espacios vectoriales y esa estructura es muy útil, pues las curvas y superficies lisas se comportan, en la cercanía de uno de sus puntos, como su recta tangente en el punto o como su plano tangente en el punto, respectivamente.

Por ejemplo, si queremos deslumbrar a alguien con los rayos del Sol, sabemos lograrlo aún cuando la superficie reflejante no sea plana. Eso se debe a que hay una forma de determinar cómo se refleja la luz en una superficie; si la superficie es plana, para lograr que la luz alcance el objeto propuesto debemos ubicar la superficie en forma tal que la recta determinada por el punto de incidencia y el objeto a iluminar, forme con la superficie un ángulo igual al ángulo de incidencia (véase la Figura 3.1(a)). Cuando la superficie no es plana pero sí lisa, sin picos, la manera de iluminar un cierto objeto es considerar que el reflejo se efectúa en el plano tangente a la superficie en el punto (véase la Figura 3.1(b)).

Haremos una consideración de este tipo cuando demos la propiedad focal de las cónicas, pues supondremos que en un punto dado el reflejo se lleva a cabo como si ocurriera en la recta tangente a la cónica en el punto de incidencia.

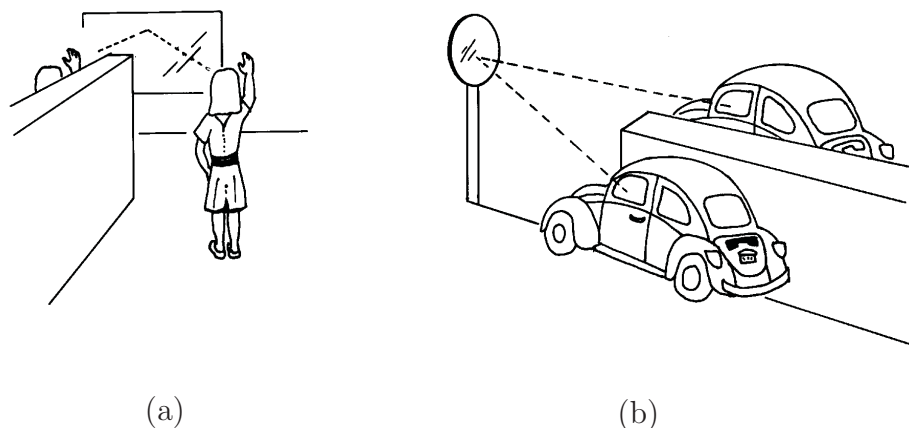


Figura 3.1: Reflexión de un rayo de luz en una superficie lisa.

El estudiante se convencerá fácilmente de la importancia y el poder del Álgebra Lineal a lo largo de este libro, pues aún cuando no iremos más allá del espacio tridimensional, los resultados obtenidos con esta técnica son realmente sorprendentes y, en muchos casos, válidos para espacios de cualquier dimensión finita.

## 3.1 Fuerzas; funciones; plano y espacio cartesianos

A continuación mostraremos al lector que conoce y ha estudiado varios ejemplos de espacio vectorial, aunque ignorara ese nombre.

Tanto en el caso de las fuerzas, como en el de las funciones reales de variable real y en el de las parejas ordenadas, hemos aprendido a darle un sentido al hecho de sumarlas y al de multiplicarlas por constantes. Por ejemplo, cuando dos fuerzas actúan sobre un mismo objeto puntual, la experiencia nos muestra que el objeto se acelera con una dirección y un sentido bien definidos, correspondiente a lo que en física nos han enseñado a llamar *fuerza resultante* y que podemos visualizar como la diagonal del paralelogramo de la Figura 3.2. Como caso particular, sabemos que si dos personas empujaban un objeto en reposo

con la misma dirección pero en sentidos opuestos y ambas fueran igualmente fuertes, el objeto no se movería porque las fuerzas se anulan la una a la otra.

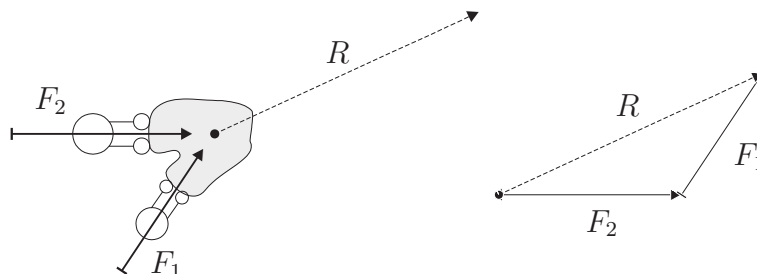


Figura 3.2: La resultante de dos fuerzas.

En Cálculo Diferencial trabajamos con funciones tales como  $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 7x$ , que bien podemos descomponer como una suma de funciones:

$$f(x) = g(x) + h(x) + c(x),$$

donde

$$g(x) = 3x^3, \quad h(x) = 5x^2 \quad \text{y} \quad c(x) = -7x.$$

Finalmente, en el curso de Geometría Analítica de la preparatoria, aprendimos que tiene sentido sumar parejas ordenadas, o bien multiplicarlas por una constante, como en el caso en que interesaba obtener el punto medio del segmento determinado por los puntos  $(1, 4)$  y  $(5, 3)$ , cuyas coordenadas  $(\frac{6}{2}, \frac{7}{2})$  obteníamos mediante la fórmula  $(\frac{1+5}{2}, \frac{4+3}{2})$ .

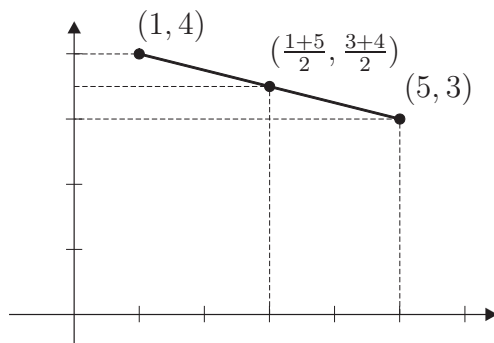


Figura 3.3: Punto medio de un segmento.

Las fuerzas, las funciones y las parejas ordenadas satisfacen las condiciones que se piden a un conjunto para denominarlo espacio vectorial. Establezcamos con cuidado la definición.

**Definición.** Un conjunto  $V$ , cuyos elementos llamaremos *vectores*, constituye un *espacio vectorial real* si se tienen definidas dos reglas de composición,

- i) *suma*, denotada por  $+$ , que asigna a cualquier par de vectores  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$ , un nuevo vector denotado por  $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ ;
- ii) *producto por un escalar*, sin símbolo, que asigna a un número real (en lo sucesivo llamado *escalar*)  $\lambda$  y un vector  $\bar{v}$ , un nuevo vector denotado por  $\lambda\bar{v}$ .

Las reglas de composición deben obedecer las condiciones siguientes, mismas que daremos primero coloquialmente y después simbólicamente:

- 1) *V es cerrado bajo la suma*, es decir, la suma de dos vectores es un vector; en símbolos escribimos

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in V \text{ para cualesquiera } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V;$$

- 2) *la suma es asociativa*, es decir, dados tres vectores pueden sumarse los dos primeros y después añadir el tercero, o bien sumarse los dos últimos y añadir el resultado al primer vector; en símbolos escribimos (note que el orden de los sumandos no cambia)

$$(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{v}_3) \text{ para cualesquiera } \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in V;$$

- 3) *existe un elemento neutro para la suma*, es decir, un vector que sumado a cualquier otro no lo afecta; el elemento neutro suele denotarse con  $\bar{0}$  porque juega, respecto a la suma de vectores, el mismo papel que el número real 0 respecto a la suma de números reales. En símbolos escribimos

$$\text{existe } \bar{0} \in V \text{ tal que } \bar{0} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{0} = \bar{v} \text{ para cualquier } \bar{v} \in V;$$

- 4) *cada elemento tiene inverso*, es decir, para cada vector existe otro tal que al sumarlo con el original da como resultado el elemento neutro; en símbolos expresamos

$$\text{para cada } \bar{v} \in V \text{ existe } -\bar{v} \in V \text{ tal que } -\bar{v} + \bar{v} = \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0};$$

- 5) *la suma es conmutativa*, es decir, dos vectores pueden sumarse en cualquier orden sin alterar el resultado; en símbolos,

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_1 \text{ para cualesquiera } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V;$$

- 6) *el producto (de un vector) por un escalar produce un vector*, es decir, cuando se multiplica un vector por un número real, el resultado es otro vector; en símbolos

$$\lambda \bar{v} \in V \text{ para cualesquiera } \lambda \in \mathbb{R}, \bar{v} \in V;$$

- 7) *el producto por un escalar se distribuye sobre la suma de vectores*, es decir, al multiplicar una suma de vectores por un número real, se obtiene el mismo resultado que si cada vector se multiplica separadamente por el número y después se suman los vectores así obtenidos; en símbolos,

$$\lambda(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \lambda\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_2 \text{ para cualesquiera } \lambda \in \mathbb{R}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V;$$

- 8) *el producto por un escalar distribuye la suma de escalares*, es decir, al multiplicar un vector por el resultado de la suma de dos números reales, se obtiene el mismo vector que cuando primero se multiplica el vector original por cada uno de los escalares y después se suma el resultado de esas dos multiplicaciones; en símbolos escribimos

$$(\lambda + \mu)\bar{v} = \lambda\bar{v} + \mu\bar{v} \text{ para cualesquiera } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \bar{v} \in V;$$

- 9) *el producto por escalares puede asociarse en cualquier forma*, es decir, si se multiplica un vector por el resultado de la multiplicación de dos números reales, se obtiene el mismo resultado que si primero se multiplica el vector por uno de los números y después al nuevo vector se le multiplica por el otro; en símbolos

$$(\lambda\mu)\bar{v} = \lambda(\mu\bar{v}) \text{ para cualesquiera } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \bar{v} \in V;$$

- 10) *el número real 1 funciona como neutro para el producto por escalares*, es decir, si multiplicamos cualquier vector por el número real 1, el vector no se altera; en símbolos

$$1\bar{v} = \bar{v} \text{ para cualquier } \bar{v} \in V.$$

En un momento verificaremos que cada uno de los ejemplos propuestos es un espacio vectorial real, pero antes es conveniente hacer tres observaciones y demostrar un lema.

### Observaciones

**I.** Nosotros conocemos ya varios ejemplos de conjuntos con una operación que satisfacen las cinco primeras condiciones: el conjunto de números enteros con la suma usual; el conjunto de los números racionales con la suma usual; el conjunto de los números reales con la suma usual. Cuando en un conjunto está definida una operación que satisface las cuatro primeras condiciones, se dice que el conjunto es un *grupo* bajo esa operación, y si además se cumple la quinta condición se dice que se trata de un *grupo conmutativo o abeliano*, esto último en honor del gran matemático noruego Niels H. Abel. En el capítulo 7 estudiaremos los grupos de transformaciones de la geometría euclidiana.

**II.** El orden en que hemos mencionado las condiciones no es arbitrario. No tendría sentido dar la condición 4) antes de la 3) porque no estaría definido el elemento neutro, y tampoco es conveniente dar antes la condición 5) porque, como veremos, hay grupos que no son conmutativos y sin embargo son muy importantes. Así, conviene acostumbrarse a recordar las condiciones de grupo en el orden propuesto aunque para los grupos conmutativos resulte redundante la segunda condición para el elemento neutro y para el inverso de un elemento dado.

**III.** El elemento neutro y el inverso de cada elemento son únicos, porque si  $0^*$  y  $\bar{0}$  son elementos neutros, se tiene:

$$0^* = 0^* + \bar{0} = \bar{0},$$

y si  $-\bar{v}$  y  $v^*$  son inversos aditivos de  $\bar{v}$ , entonces

$$v^* = v^* + \bar{0} = v^* + (\bar{v} - \bar{v}) = (v^* + \bar{v}) - \bar{v} = \bar{0} - \bar{v} = -\bar{v}.$$

Los resultados consignados a continuación serán utilizados muchas veces en el resto del libro, por ello los enunciamos en forma de lema.



**Lema.** En un espacio vectorial  $V$ , son válidas las igualdades siguientes para cualquier  $\bar{v} \in V$ :

$$0\bar{v} = \bar{0},$$

$$(-1)\bar{v} = -\bar{v},$$

es decir, al multiplicar cualquier vector por el escalar 0, se obtiene el elemento neutro del espacio vectorial,  $\bar{0}$ , y al multiplicar un vector por el inverso aditivo del escalar 1, se obtiene el inverso aditivo del vector.

### **Demostración.**

Para comprobar la primera igualdad, veamos primero que al sumar  $0\bar{v}$  al vector  $\bar{v}$  éste no se altera:

$$0\bar{v} + \bar{v} = 0\bar{v} + 1\bar{v} = (0 + 1)\bar{v} = 1\bar{v} = \bar{v},$$

y si ahora sumamos  $-\bar{v}$  en el primer y último miembros de las igualdades anteriores, obtenemos lo que deseábamos:

$$0\bar{v} = \bar{0}.$$

La demostración de la segunda igualdad resulta de la primera y de la observación III, pues

$$(-1)\bar{v} + \bar{v} = (-1)\bar{v} + 1\bar{v} = (-1 + 1)\bar{v} = 0\bar{v} = \bar{0}$$

implica que  $(-1)\bar{v}$  funciona como el inverso de  $\bar{v}$  que es único. ■

Ahora verificaremos que los tres ejemplos propuestos constituyen espacios vectoriales.

Tomaremos primero el caso de las *fuerzas en un mismo plano*. Para empezar es necesario recordar cómo representamos una fuerza.

Una *fuerza* en un plano fijo se representa por un segmento dirigido, es decir, nos interesa su *magnitud* representada por la longitud del segmento, la *dirección* de la fuerza que está definida por la recta a la que pertenece el segmento, y su *sentido*, es decir, deberemos distinguir uno de sus extremos como extremo inicial y el otro como extremo final (a éste lo distinguimos dibujando la cabeza de una flecha). Nótese que la fuerza nula queda caracterizada por su magnitud, 0, y que no puede asignársele una dirección ni un sentido.

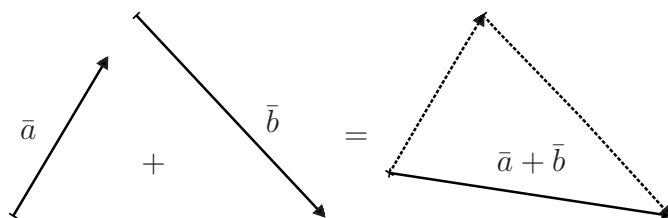


Figura 3.4: Para sumar fuerzas, las desplazamos paralelamente.

Para sumar fuerzas, desplazamos paralelamente los segmentos dirigidos que las representan, como lo muestra la Figura 3.4.

La *suma de fuerzas* se realiza de acuerdo a la ley del paralelogramo, es decir, si debemos sumar la fuerza  $\vec{a}$  con la fuerza  $\vec{b}$ , desplazamos la fuerza  $\vec{b}$  paralelamente hasta que su origen coincida con el extremo de  $\vec{a}$  y llamamos *suma o resultante de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$*  a la fuerza con la dirección de la recta determinada por el origen de  $\vec{a}$  y el extremo de  $\vec{b}$  (véase la Figura 3.4).

La *multiplicación de una fuerza  $\vec{a}$  por un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$*  se lleva a cabo según la regla siguiente, ilustrada en la Figura 3.5:

- i) si  $\lambda = 0$ , entonces la magnitud de la fuerza  $\lambda\vec{a}$  es nula. Esto puede interpretarse como que el origen y el extremo coinciden y por eso la fuerza nula se representa por un punto.
- ii) si  $\lambda > 0$ , entonces la nueva fuerza  $\lambda\vec{a}$  conserva la dirección y el sentido de  $\vec{a}$ , pero su magnitud se multiplica por  $\lambda$ .
- iii) si  $\lambda < 0$ , entonces la nueva fuerza  $\lambda\vec{a}$  sólo conserva la dirección, pero el sentido se invierte y la magnitud se multiplica por  $|\lambda|$ .

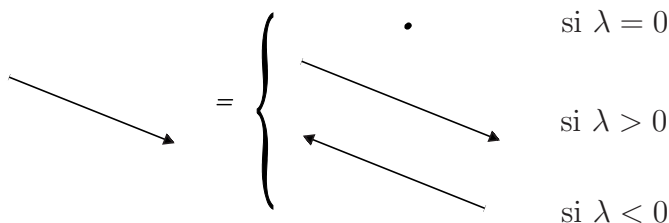


Figura 3.5: Cómo multiplicar una fuerza por un escalar.

Para verificar que estas dos reglas de composición satisfacen las diez condiciones impuestas, deberemos interpretar correctamente qué significa cada una de ellas en este ejemplo particular (lo mismo habrá que hacer con los demás ejemplos).

La condición 1), cerradura de la suma, obliga a que el resultado de la suma de dos fuerzas sea nuevamente una fuerza, es decir, un segmento dirigido con una dirección, un sentido y una magnitud bien definidas. Todo ello se satisface en la definición de suma que acabamos de dar.

La condición 2), asociatividad de la suma, obliga a que la fuerza obtenida al sumar a la fuerza  $\bar{a} + \bar{b}$  la fuerza  $\bar{c}$ , sea la misma que se obtiene cuando a la fuerza  $\bar{a}$  se le suma la fuerza  $\bar{b} + \bar{c}$ . Eso es cierto porque en ambos casos debemos construir una misma línea quebrada,  $\bar{a}$  seguida de  $\bar{b}$  seguida de  $\bar{c}$  y trazar finalmente el segmento dirigido cuyo origen es el origen de esa línea quebrada y cuyo extremo es el extremo final de la línea quebrada.

Para demostrar que se cumple la condición 3), existencia de una fuerza nula, debemos encontrar una fuerza que sumada a cualquier otra deje a esta última invariante; el lector cuidadoso recordará inmediatamente que hemos mencionado en varias ocasiones la fuerza nula, y como su representación es un punto es claro que sumada a cualquier otra no la afecta.

La condición 4), existencia (en cada caso) de una fuerza que anule a una fuerza dada, también tiene ya un referente en nuestra exposición y en la experiencia cotidiana del lector: es la fuerza con la misma magnitud y dirección pero en sentido contrario de la fuerza dada.

La condición 5), conmutatividad de la suma de fuerzas, es consecuencia del hecho geométrico mostrado en la Figura 3.4: la línea quebrada mediante la cual se obtiene la suma  $\bar{a} + \bar{b}$  determina con la línea quebrada correspondiente a la suma  $\bar{b} + \bar{a}$ , un paralelogramo una de cuyas diagonales es la suma que interesa en ambos casos.

La condición 6) significa en este caso que el resultado de multiplicar una fuerza por un número real debe ser otra fuerza, es decir, un segmento dirigido bien determinado por su magnitud, su dirección y su sentido. Pero nuestra definición cuidó de satisfacer todos esos requisitos.

La condición 7) significa que la fuerza obtenida al multiplicar la fuerza  $\bar{a} + \bar{b}$  por el escalar  $\lambda$  es igual a la fuerza obtenida cuando se suman las fuerzas  $\lambda\bar{a}$  y  $\lambda\bar{b}$ . La Figura 3.6 exhibe esta igualdad mediante consideraciones geométricas elementales en un caso particular; al lector le dejamos el caso general como un

ejercicio geométrico.

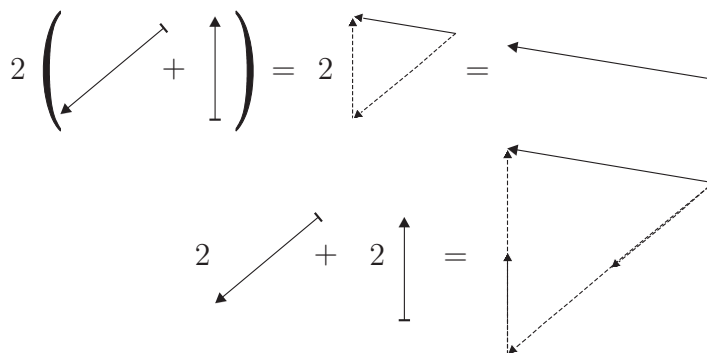


Figura 3.6: Multiplicación de una suma de fuerzas por un escalar.

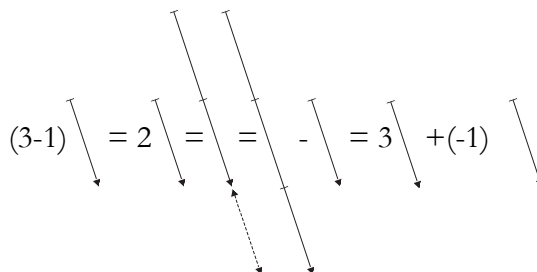


Figura 3.7: Multiplicación de una fuerza por la suma de dos escalares.

La condición 8) significa que al multiplicar una fuerza por la suma de dos números reales, se obtiene la misma fuerza que al sumar el resultado de la multiplicación de la fuerza por cada uno de los números reales. También en este caso verificamos la igualdad mediante consideraciones geométricas elementales en uno de los casos posibles y dejamos los tipos restantes a cargo del lector (véase la Figura 3.7).

La condición 9) dice que el resultado de multiplicar sucesivamente una fuerza primero por un número real y a la fuerza obtenida por otro, es igual al de multiplicar la fuerza por el producto de los dos números reales. La comprobación es consecuencia directa de la definición, pues en ambos casos la fuerza original sufre un alargamiento igual a  $|\lambda\mu|$  pero conserva su dirección, y cambia o invierte el sentido según el signo del producto  $\lambda\mu$ ; en el caso de que alguno de los dos números sea 0, la magnitud de la fuerza se anula en algún

momento y al multiplicarla por cualquier otro número real la magnitud sigue siendo cero.

Finalmente, la condición 10) resulta de la definición del producto escalar de una fuerza por un número real, pues si el número real es 1 la magnitud, la dirección y el sentido se conservan y la fuerza obtenida coincide es la original.

Vayamos ahora al ejemplo de las *funciones reales de variable real con dominio*  $\mathbb{R}$ , cuyo conjunto denotaremos con  $\mathfrak{R}$ .

De nuestra discusión del concepto de función realizada en el capítulo 1, nos interesa recordar que para denominar función a una regla de correspondencia de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , es imprescindible que el número real asociado con otro número dado esté bien definido, esto es, que sea único.

Entonces podemos definir la *suma de dos funciones*  $f$  y  $g$  puntualmente, como la función  $h$  que asocia con el número real  $x$  el número real  $f(x) + g(x)$ , es decir,

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

y  $h$  es una función porque los números  $f(x)$  y  $g(x)$  están bien definidos.

La definición de la *multiplicación de una función por un número real*  $\lambda$  también se da punto a punto: es la función  $\lambda f$  que al número real  $x$  le asocia el número  $\lambda f(x)$ , esto es,

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

donde el miembro derecho debe leerse como el producto de los números reales  $\lambda$  y  $f(x)$ , este último bien definido porque  $f$  es función.

En este caso la comprobación de que  $\mathfrak{R}$  provisto de estas reglas de composición satisface las condiciones para considerarlo un espacio vectorial es más formal que en el ejemplo anterior, pero como cada una de las propiedades se comprueba punto a punto, casi todas las condiciones resultan depender de alguna(s) propiedad(es) de la suma y la multiplicación de los números reales, y eso abreviará la tarea.

La condición 1) establece simplemente que la suma de dos funciones debe ser una función, pero de eso cuidamos en la definición.

La condición 2) establece que al tomar tres funciones,  $f, g$  y  $h$ , la función obtenida al sumar primero  $f + g$  y después añadir  $h$ , debe ser la misma que si sumamos a  $f$  la función obtenida de la suma  $g + h$ ; eso no es más que una consecuencia directa de la asociatividad de la suma de los números reales que

permite establecer la tercera de las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + ((g(x) + h(x))) = (f + (g + h))(x), \end{aligned}$$

y como las funciones  $(f + g) + h$  y  $f + (g + h)$  asocian el mismo real para cada número real  $x$ , las dos funciones son una misma.

La condición 3) exige exhibir una función  $n \in \mathfrak{R}$  tal que al sumarse a cualquier otra,  $f \in \mathfrak{R}$ , deje invariante a esta última, es decir, debe tenerse  $(n + f)(x) = f(x)$ , pero eso significa  $n(x) = 0$  para cada  $x$ , esto es, la función neutra para la suma es la función constante 0.

La condición 4) exige exhibir, dada una función  $f \in \mathfrak{R}$ , otro elemento de  $\mathfrak{R}$ , que denotaremos por  $-f$ , y que satisface  $f + (-f) = n$ ; si valuamos ambas funciones en  $x$  obtenemos

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = n(x) = 0,$$

y de la igualdad resulta que  $(-f)(x) = -f(x)$ , es decir, la función  $-f$  vale, en el número real  $x$ , el negativo del número  $f(x)$ .

La condición 5) expresa únicamente que la función definida como  $f + g$  debe coincidir con la función definida como  $g + f$ , pero eso es consecuencia inmediata de la propiedad conmutativa de la suma de dos números reales.

La condición 6), equivalente a que el resultado de multiplicar una función por un número real sea nuevamente una función, se cumple por la manera en que definimos el producto de una función por un escalar.

La condición 7), equivalente a que el producto por un escalar se distribuya sobre la suma de funciones, es consecuencia inmediata de la distributividad del producto de los números reales sobre la suma, pues al valuar en  $x$  cada lado de la igualdad que debemos comprobar:

$$(\lambda(f + g)) = (\lambda f) + (\lambda g),$$

obtenemos, por un lado,

$$(\lambda(f + g))(x) = \lambda((f + g)(x)) = \lambda(f(x) + g(x)) = (\lambda f(x)) + (\lambda g(x)),$$

y por el otro,

$$((\lambda f) + (\lambda g))(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f(x)) + (\lambda g(x)),$$

lo cual demuestra la igualdad.

La comprobación de las condiciones 8), 9) y 10) las dejamos a cargo del lector, insistiendo en la importancia de tener la capacidad de realizar las demostraciones con todo cuidado y, además, en que una vez efectuado ese trabajo ya tendremos el derecho de operar con las funciones del mismo modo en que lo hacemos con los números reales.

El último ejemplo que estudiaremos es el del *plano cartesiano*, que hemos identificado con el conjunto de los pares ordenados de números reales,  $\mathbb{R}^2$ . Este ejemplo debe ser revisado con todo cuidado porque, junto con el del espacio cartesiano, es el que más utilizaremos en el libro.

Para empezar, definamos en el conjunto que nos interesa,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

una suma y una multiplicación por escalares.

La *suma de dos elementos de  $\mathbb{R}^2$*  es el par ordenado cuya primera coordenada se obtiene sumando las primeras coordenadas de las dos parejas dadas, y cuya segunda coordenada es la suma de las segundas coordenadas de dichas parejas, es decir,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Esta definición satisface la condición 1), *cerradura de la suma*.

La *multiplicación de un elemento de  $\mathbb{R}^2$  por un escalar  $\lambda$*  da como resultado el par ordenado cuyas coordenadas se obtienen multiplicando la coordenada respectiva del elemento dado por  $\lambda$ , esto es,

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

También en este caso la definición satisface la primera condición que involucra al producto por un escalar, la condición 6).

Como en el caso de las funciones, la comprobación de la mayoría de las propiedades depende únicamente de las propiedades de la suma y el producto de los números reales.

La condición 2), *propiedad asociativa de la suma*, se escribe en este caso así (lea correctamente los dobles paréntesis):

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f)),$$

y su comprobación es inmediata:

$$\begin{aligned}
 ((a, b) + (c, d)) + (e, f) &= (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f) \\
 &= (a + (c + e), b + (d + f)) = (a, b) + (c + e, d + f) \\
 &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)),
 \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad utiliza la propiedad asociativa de la suma de números reales.

La condición 3), *existencia de un elemento neutro*, pide exhibir un elemento de  $\mathbb{R}^2$  que sumado a cualquier otro, deje invariante a este último. Cuando se trata de la suma de números reales esta cualidad la tiene el cero y, por tanto, la pareja  $(0, 0)$  debe tener la propiedad deseada, como verificamos enseguida:

$$(0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b),$$

donde la última igualdad utiliza la propiedad mencionada de  $0 \in \mathbb{R}$ .

La condición 4), *existencia de inverso para cada elemento de  $\mathbb{R}^2$* , pide exhibir, dado un par ordenado  $(a, b)$ , otro elemento de  $\mathbb{R}^2$  que sumado al primero dé como resultado  $(0, 0)$ ; eso sugiere que la primera coordenada del elemento buscado sea  $-a$  y la segunda coordenada,  $-b$ . En efecto,  $(-a, -b)$  es el inverso de  $(a, b)$ :

$$(-a, -b) + (a, b) = (-a + a, -b + b) = (0, 0).$$

Para verificar la condición 5), *conmutatividad de la suma en  $\mathbb{R}^2$* , debemos comprobar la igualdad siguiente:

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b).$$

El lector puede verificarla con sólo recordar que la suma de los números reales tiene la propiedad conmutativa.

Para verificar la condición 7), *el producto por un escalar se distribuye sobre la suma de elementos de  $\mathbb{R}^2$* , debemos comprobar lo siguiente:

$$\lambda((a, b) + (c, d)) = \lambda(a, b) + \lambda(c, d).$$

Si aplicamos las definiciones de suma y producto por un escalar en este caso, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \lambda((a, b) + (c, d)) &= \lambda(a + c, b + d) = (\lambda(a + c), \lambda(b + d)) \\
 &= (\lambda a + \lambda c, \lambda b + \lambda d) = (\lambda a, \lambda b) + (\lambda c, \lambda d) \\
 &= \lambda(a, b) + \lambda(c, d),
 \end{aligned}$$



donde la tercera igualdad utiliza la propiedad distributiva del producto de los números reales respecto a la suma.

La verificación de la condición 8), *el producto de un elemento de  $\mathbb{R}^2$  por un escalar distribuye la suma de números reales*, es muy semejante a la anterior y la pediremos al lector como un ejercicio.

La condición 9), *el producto por dos escalares puede asociarse en cualquier forma*, en este caso se escribe así

$$(\lambda\mu)(a, b) = \lambda(\mu(a, b)).$$

Esta comprobación también es inmediata de la definición del producto por un escalar y de la propiedad asociativa del producto de los números reales.

Resta únicamente la condición 10), *el número real 1 funciona como neutro para el producto por un escalar*, que equivale a pedir

$$1(a, b) = (a, b),$$

pero esta comprobación es consecuencia inmediata de la propiedad del número real 1 de ser neutro para la multiplicación de números reales.

La demostración de que el *espacio cartesiano*, identificado con  $\mathbb{R}^3$ , es un espacio vectorial corre a cargo del lector; es necesario comenzar por definir cómo se suman dos ternas ordenadas de números reales y cómo se multiplica una de ellas por un escalar. Desde luego, ambas leyes de composición son totalmente análogas a las establecidas en el caso de  $\mathbb{R}^2$ , y la comprobación de cada una de las diez propiedades no es más que una copia de la comprobación correspondiente en el caso de  $\mathbb{R}^2$ ; sin embargo, consideramos que vale la pena irse acostumbrando al proceso de encontrar qué es lo que debe demostrarse y, después, a escribir limpiamente la demostración misma.

Prometimos sacar provecho de la demostración de que  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  poseen la *estructura* de espacio vectorial. Antes de hacerlo, queremos recalcar que ahora los elementos de  $\mathbb{R}^2$  y de  $\mathbb{R}^3$  podrán jugar un doble papel: el de puntos  $P$  (elementos de un conjunto) y el de vectores  $\bar{p}$  (elementos de un espacio vectorial). Trataremos de conservar la notación anterior a fin de distinguir el papel jugado por los elementos de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , pero de hecho el contenido geométrico de una situación distinguirá entre ambos papeles.

Será muy útil representar o imaginar los vectores de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  como flechas cuyo origen coincide con el origen del sistema coordenado y cuyo extremo final sea el punto correspondiente a las coordenadas dadas, aunque a la hora de sumar dos de ellos debemos desplazar uno de ellos.

Una primera ventaja de que  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  posean la estructura de espacio vectorial, es la posibilidad de definir términos como punto, recta y plano de manera totalmente formal pero apegada a nuestra intuición geométrica. He aquí las definiciones.

- i) llamaremos *puntos del plano cartesiano* a los elementos de  $\mathbb{R}^2$ , y los denotaremos por  $P$  o  $(x, y)$  indistintamente;
- ii) las *rectas del plano cartesiano* serán los subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  de la forma

$$\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid P = P_0 + \lambda \bar{u}, \text{ con } P_0, \bar{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ fijos, } \bar{u} \neq \bar{0}, \lambda \in \mathbb{R} \right\};$$

note que  $\bar{u}$  define una dirección (por eso debe ser distinto del origen), en tanto que  $P_0$  es el punto de apoyo, y el lector deberá verificar que  $\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}} = \mathcal{L}_{Q_0, \bar{v}}$  si y sólo si  $Q_0 \in \mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$  y  $\bar{v} = \alpha \bar{u}$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;

- iii) los *puntos del espacio cartesiano* serán los elementos de  $\mathbb{R}^3$  y los denotaremos por  $P$  o  $(x, y, z)$ ;
- iv) las *rectas del espacio cartesiano* serán los subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  de la forma

$$\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}} = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + \lambda \bar{u}, \text{ con } P_0, \bar{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ fijos, } \bar{u} \neq \bar{0} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

donde nuevamente  $P_0$  es el punto de apoyo en tanto que  $\bar{u} \neq \bar{0}$  define la dirección de la recta, y el lector deberá verificar que  $\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}} = \mathcal{L}_{Q_0, \bar{v}}$  si y sólo si  $Q_0 \in \mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$  y  $\bar{v} = \alpha \bar{u}$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;

- v) finalmente, los *planos del espacio cartesiano* serán los subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}} = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + \lambda \bar{u} + \mu \bar{v}, \text{ con } P_0, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ fijos, } \right. \\ \left. \bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}, \bar{u} \neq \alpha \bar{v} \text{ para toda } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

En este caso, las condiciones impuestas a  $\bar{u}, \bar{v}$  permiten obtener no sólo cualquier punto de las rectas definidas por  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  apoyadas en  $P_0$ , sino también, como es fácil comprobar, los puntos de cualquier recta apoyada en  $P_0$  y con una dirección de la forma  $\rho \bar{u} + \sigma \bar{v}$  (véase la Figura 3.8). De lo anterior es inmediato que  $\mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}} = \mathcal{P}_{Q_0, \bar{s}, \bar{t}}$  si y sólo si  $Q_0 \in \mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}}$  y  $\bar{s} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}, \bar{t} = \gamma \bar{u} + \delta \bar{v}$  para algunos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ .

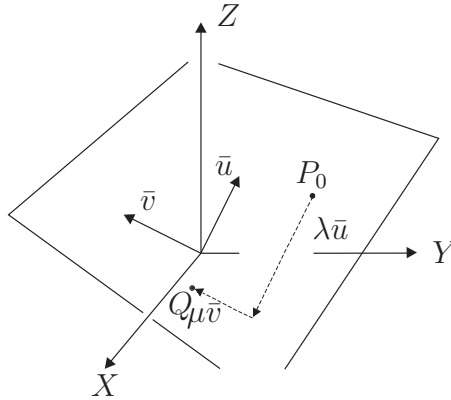


Figura 3.8: Puntos del plano  $\mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}}$  del espacio cartesiano.

## EJERCICIOS

1. Demuestre que el conjunto de todas las fuerzas del plano que actúan en una misma dirección, es decir, las que determinan segmentos paralelos, constituyen un espacio vectorial.
2. Compruebe las condiciones 8), 9), y 10) en el caso del espacio vectorial  $\mathfrak{R}$ .
3. Verifique la condición 8) en el caso del espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ .
4. Demuestre que el conjunto de los polinomios en una variable con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, es decir,

$$\{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

junto con el polinomio cero, es un espacio vectorial con las leyes de composición dadas por la suma usual de polinomios y la multiplicación de un polinomio por una constante.

5. Demuestre que el conjunto de los puntos del plano cartesiano pertenecientes al eje  $Y$ ,

$$\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

determinan un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en  $\mathbb{R}^2$ .

6. Encuentre subconjuntos de  $\mathfrak{R}$  y  $\mathbb{R}^2$  análogos a los propuestos en 4) y 5) respectivamente, que sean espacios vectoriales con la suma y el producto por un escalar del conjunto que los contiene.

7. Demuestre que  $\mathbb{R}^3$  es un espacio vectorial.
8. Demuestre que el plano  $YZ$  es un espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar propuesto para resolver el ejercicio anterior.
9. Defina  $\mathbb{R}^n$  y demuestre que es un espacio vectorial.
10. Demuestre que el conjunto de sucesiones de números reales es un espacio vectorial definiendo la suma y el producto por un escalar de manera natural.

## 3.2 Subespacios vectoriales

Vimos en los ejercicios que algunos subconjuntos propios de un espacio vectorial pueden constituir a su vez un espacio vectorial, si como leyes de composición para el subconjunto se consideran las restricciones a éste de las dadas para el espacio vectorial total.

Pero no cualquier subconjunto de un espacio vectorial tiene esa propiedad; por ejemplo, en el plano cartesiano estamos acostumbrados a considerar subconjuntos como los determinados por una circunferencia, una recta o una parábola. La pregunta que nos interesa responder es cuáles de esos subconjuntos son espacios vectoriales cuando pensamos en sumar dos de sus elementos y en multiplicar uno de ellos por un número real.

Planteado de esa forma, el lector responderá sin vacilar que la circunferencia no constituye un espacio vectorial, pues puede uno sumar dos puntos de la circunferencia tales que la ley del paralelogramo dé un punto que no pertenezca a la circunferencia. Y otro tanto ocurrirá con la parábola. Pero en el caso de una recta como el eje  $Y$ , el lector ha comprobado ya que se satisfacen las diez condiciones y, por lo tanto, puede inclinarse a pensar que tal vez haya más ejemplos de rectas en  $\mathbb{R}^2$  que sí constituyen un espacio vectorial.

¿Qué ocurre cuando la recta no pasa por el origen? Si el lector se ha grabado ya las diez condiciones, recordará que en el pretendido espacio vectorial es necesario contar con el elemento neutro para la suma, y dado que en la observación **III** comprobamos que el elemento neutro es único, el origen debe pertenecer a la recta en cuestión. En consecuencia, sólo las rectas por el origen tienen posibilidad de ser un espacio vectorial. La demostración de que cualquier recta por el origen de  $\mathbb{R}^2$  o de  $\mathbb{R}^3$  es un espacio vectorial

con la restricción de la suma y el producto por un escalar, será más sencilla si antes establecemos con cuidado la definición de subespacio vectorial y demostramos un lema que nos facilitará realizar ese tipo de comprobaciones en el caso general.

**Definición.** Un subconjunto  $U$  de un espacio vectorial  $V$  es un *subespacio vectorial* de  $V$  si  $U$  es espacio vectorial cuando se restringe a  $U$  las leyes de composición de  $V$ .

Ahora bien, cuando uno analiza las diez condiciones que debe satisfacer un conjunto para ser considerado espacio vectorial, encuentra que varias de ellas se refieren a propiedades que, por ser válidas para todos los elementos de  $V$ , son *hereditarias*; por ejemplo, la asociatividad dice que para tres elementos cualesquiera de  $V$  (y cualquier elemento de  $U$  pertenece a  $V$ ), el resultado no varía si procedemos así

$$(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \quad \text{o así} \quad \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}).$$

Por tanto, la asociatividad es válida en  $U$ . Y lo mismo podemos decir de la conmutatividad de la suma, de cualquiera de las distributividades y de la forma en que funciona el número real 1 cuando lo multiplicamos por un vector.

Pero cuando pedimos que el resultado de la suma de dos elementos de  $U$  sea un elemento de  $U$ , no podemos valernos de la condición 1) en  $V$ , como nos lo hace ver el ejemplo de la circunferencia. Y lo mismo ocurre con la condición de que el neutro  $\bar{0}$  pertenezca al subconjunto que nos interesa (la condición 3)), o con la condición 4), según la cual el elemento inverso de cada elemento de  $U$  debe pertenecer a  $U$ , y con la condición 6), referente al producto de un escalar por un elemento y que exige que el resultado de esta ley de composición sea nuevamente elemento de  $U$ .

La reflexión anterior muestra que la tarea es menos latosa de lo que parece en un principio; afortunadamente podemos demostrar que se reduce a sólo dos comprobaciones.

**Lema.** Si  $V$  es un espacio vectorial y  $U$  es subconjunto de  $V$ , entonces  $U$  es subespacio vectorial de  $V$  si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- i)  $U$  no es vacío; en símbolos,  $U \neq \emptyset$ ;

- ii) para cualesquiera escalares  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y vectores  $\bar{u}, \bar{v} \in U$ , el vector  $\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}$  pertenece a  $U$ ; en símbolos,

$$\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \in U \quad \text{para cualesquiera } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \bar{u}, \bar{v} \in U.$$

### **Demostración.**

Como se trata de una afirmación doble, primero comprobaremos que si  $U$  es un espacio vectorial entonces se cumplen i) y ii), y después demostraremos que si un subconjunto  $U$  de un espacio vectorial  $V$  satisface i) y ii), entonces se tienen para  $U$  las condiciones que no se refieren a modos de comportamiento. Como las otras condiciones se heredan de  $V$ , habremos terminado.

Para empezar, si  $U$  es un espacio vectorial no puede ser vacío porque al menos cuenta con el elemento neutro,  $\bar{0}$ , y por tanto satisface i).

Para comprobar la condición ii), recordamos que si  $U$  es un espacio vectorial con la restricción de la suma y el producto por un escalar que se tenían en  $V$ , entonces  $\lambda\bar{u} \in U$  si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\bar{u} \in U$ , porque la condición 6) es válida en  $U$ , y por lo mismo  $\mu\bar{v} \in U$  si  $\mu \in \mathbb{R}$ , y  $\bar{v} \in U$ . Pero como en  $U$  también es válida la condición 1), la suma de estos elementos de  $U$  es elemento de  $U$ , es decir,

$$\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \in U,$$

lo cual muestra la validez de ii).

Supongamos ahora que  $U$  satisface i) y ii); entonces, si  $\bar{u}, \bar{v}$  son elementos de  $U$ , basta tomar  $\lambda = \mu = 1$  en ii) para exhibir que la suma de cualesquiera dos elementos de  $U$  pertenece a  $U$ .

Análogamente, para comprobar que el resultado de la multiplicación de un número real  $\lambda$  por cualquier elemento  $\bar{u} \in U$  es nuevamente elemento de  $U$ , basta tomar  $\mu = 0$  en ii).

Para mostrar que el elemento neutro  $\bar{0}$  pertenece a  $U$ , basta considerar el elemento  $\bar{u}$  con que necesariamente cuenta  $U$  (puesto que es no vacío), y tomar  $\lambda = \mu = 0$  en ii) para obtener, por el Lema de la sección anterior, que el elemento neutro pertenece a  $U$ :

$$0\bar{u} + 0\bar{u} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \in U.$$

La comprobación de que el inverso de un elemento  $\bar{u} \in U$  también pertenece a  $U$ , es directa si tomamos  $\lambda = -1, \mu = 0$  y aplicamos el Lema ya mencionado.

Pedimos al lector verificar que el resto de las condiciones se refieren a modos de comportamiento en todo  $V$  y, en consecuencia, siguen siendo válidas en  $U$ . Con esto finaliza la demostración del lema. ■

Conviene establecer de una vez la terminología con que se manejan las expresiones como la que aparece en ii), pues son fundamentales en nuestro estudio.

**Definición.** Una *combinación lineal de vectores de  $V$*  es un vector de la forma

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n \bar{u}_n,$$

donde  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \in V$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Veamos algunos subespacios de los espacios vectoriales que introdujimos como ejemplos.

En el caso de las *fuerzas que actúan en un plano*, es sencillo comprobar, a partir de la definición, que aquellas fuerzas cuyos segmentos son colineales pueden sumarse o multiplicarse por un escalar y las nuevas fuerzas así obtenidas siguen estando determinadas por segmentos de la misma recta; por tanto, cualquier conjunto del tipo

$$F_{\bar{u}} = \{\lambda \bar{u} \mid \bar{u} \text{ es una fuerza fija y } \lambda \in \mathbb{R}\},$$

constituye un subespacio vectorial, pues por contener a la fuerza  $\bar{u}$  es no vacío, y por la observación del principio resulta que cualquier combinación lineal de elementos del subconjunto pertenece también al subconjunto, como probamos formalmente a continuación:

$$\lambda \bar{u} + \mu \bar{u} = (\lambda + \mu) \bar{u} \in F_{\bar{u}},$$

y la última afirmación se debe a que  $\lambda + \mu$  es un número real por la propiedad de cerradura de la suma de números reales.

El caso del espacio vectorial de las *funciones reales de variable real*,  $\mathfrak{R}$ , ofrece gran variedad de ejemplo de subespacios; veamos unos cuantos.

1. El conjunto de polinomios en una variable con coeficientes reales es un subconjunto de  $\mathfrak{R}$  porque cada polinomio puede verse como función de la variable  $x$ ; este conjunto se denota por  $\mathbb{R}[x]$ , es decir,

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

y es un subespacio de  $\mathfrak{R}$  porque es no vacío y porque al multiplicar un polinomio por cualquier número real se obtiene un nuevo polinomio:

$$\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \cdots + \lambda a_nx^n,$$

y como al sumar dos polinomios en la variable  $x$  se obtiene un nuevo polinomio en dicha variable, resulta que cualquier combinación lineal de dos polinomios  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,

$$\lambda P(x) + \mu Q(x),$$

es también un polinomio, con lo cual se verifica la condición ii) del Lema anterior.

2. El conjunto de las funciones reales de variable real que son continuas para todo  $x \in \mathbb{R}$  también es un subespacio de  $\mathfrak{R}$ , porque es no vacío (las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$  son funciones continuas en todo  $\mathbb{R}$ ) y según un teorema de Cálculo, al multiplicar una función continua por una constante se obtiene otra función que también es continua. Como otro teorema demuestra que la suma de funciones continuas es una función continua, se tiene que cualquier combinación lineal de dos funciones continuas  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,

$$\lambda f(x) + \mu g(x),$$

es nuevamente un función continua. Nos gustaría que el lector hubiera observado que este subespacio de  $\mathfrak{R}$  tiene como subespacio vectorial al de los polinomios mencionado en 1.

3. El conjunto de las funciones reales de variable real que son derivables en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , forman también un subespacio vectorial de  $\mathfrak{R}$  según resultados de Cálculo que establecen la derivabilidad del producto de una función derivable por una constante, y la derivabilidad de la suma de dos funciones derivables en el punto en cuestión. ¿Existe una relación entre este espacio vectorial y los anteriores?



El caso del plano cartesiano,  $\mathbb{R}^2$ , es particularmente importante para nosotros pero dejaremos como ejercicio para el lector determinar sus subespacios. A cambio, desarrollaremos el caso del espacio cartesiano,  $\mathbb{R}^3$ , es decir, determinaremos todos los tipos posibles de subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$ .

Ya hemos establecido la necesidad de que el elemento neutro para la suma,  $\bar{0}$ , pertenezca siempre a un subconjunto del cual pretendemos sea un subespacio vectorial; lo que no habíamos observado es que el subconjunto que consta únicamente de dicho elemento *es* un espacio vectorial, pues cuando formamos la combinación lineal

$$\lambda\bar{0} + \mu\bar{0},$$

obtenemos nuevamente el elemento  $\bar{0}$ , lo cual satisface ii). En consecuencia,  $\{(0, 0, 0)\}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Supongamos ahora que en el subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^3$  hay al menos un elemento no nulo,  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Entonces  $U$  debe contener todos los múltiplos de dicho elemento,

$$\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c),$$

que geoméricamente corresponden a una recta  $\mathcal{L}$  por el origen (véase la Figura 3.9). Llamamos *vectores paralelos* a los que son múltiplos uno del otro.

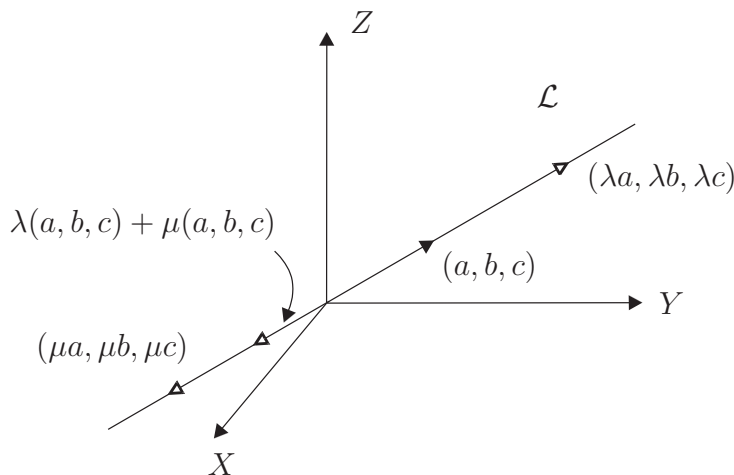


Figura 3.9: Una recta por el origen es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Pero de hecho cualquier subconjunto de este tipo, formado por todos los múltiplos de un vector no nulo, constituye un subespacio vectorial, como lo

demuestra el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda(a, b, c)) + \beta(\mu(a, b, c)) &= (\alpha\lambda)(a, b, c) + (\beta\mu)(a, b, c) \\ &= (\alpha\lambda + \beta\mu)(a, b, c) \in \mathcal{L},\end{aligned}$$

que verifica la condición ii).

La conclusión geométrica es, entonces, que *las rectas por el origen son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$* .

¿Qué ocurre cuando en el subconjunto tenemos dos vectores  $\bar{u}, \bar{v}$  no nulos y no paralelos? Sabemos que la recta por el origen generada por cada uno de los vectores debe pertenecer al subconjunto, si pretendemos que éste sea un subespacio vectorial; pero como también requerimos que cualquier combinación lineal de esos dos vectores pertenezca al subconjunto, porque debe cumplirse ii), resulta que cualquier punto del plano por el origen que contiene a esos dos vectores debe pertenecer al subconjunto (la Figura 3.10 muestra una rejilla plana creada por combinaciones lineales de dos vectores no nulos de  $\mathbb{R}^3$ ).

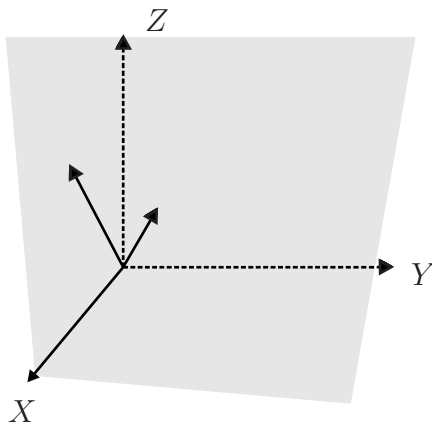


Figura 3.10: Un plano por el origen es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

De hecho, nos gustaría mencionar que la imagen geométrica de una combinación lineal de vectores de  $\mathbb{R}^3$  es precisamente la de una línea quebrada, no necesariamente plana, donde cada segmento corresponde a uno de los sumandos de la combinación lineal algebraica.

A continuación verificamos formalmente que el conjunto de las combinaciones lineales de dos vectores no nulos y no paralelos  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathcal{P}_{\bar{u}, \bar{v}} = \{\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \mid \bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0} \bar{u} \neq \alpha\bar{v} \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ :

- i)  $\mathcal{P}_{\bar{u}, \bar{v}} \neq \emptyset$  porque contiene dos vectores no nulos de  $\mathbb{R}^3$ ;
- ii) si formamos una combinación lineal de combinaciones lineales de  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$ , volvemos a obtener una combinación lineal de los vectores originales:

$$\begin{aligned} & \alpha(\lambda_1 \bar{u} + \mu_1 \bar{v}) + \beta(\lambda_2 \bar{u} + \mu_2 \bar{v}) \\ &= (\alpha\lambda_1 \bar{u} + \alpha\mu_1 \bar{v}) + (\beta\lambda_2 \bar{u} + \beta\mu_2 \bar{v}) \\ &= (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) \bar{u} + (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) \bar{v}. \end{aligned}$$

Por tanto, la conclusión geométrica es que *los planos por el origen constituyen subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^3$* .

Supongamos ahora que tenemos tres elementos  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  de  $\mathbb{R}^3$  que no pertenecen a un mismo plano por el origen; cuando tomamos dos de ellos, por ejemplo  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$ , generamos un plano  $\mathcal{P}_{\bar{u}, \bar{v}}$  por el origen y utilizamos el tercero,  $\bar{w}$ , que no pertenece a ese plano, para trazar por un punto arbitrario  $P(x, y, z)$  una recta paralela a  $\bar{w}$  que corta al plano  $\mathcal{P}_{\bar{u}, \bar{v}}$  en un punto  $H = \alpha\bar{u} + \beta\bar{v}$  (véase la Figura 3.11).

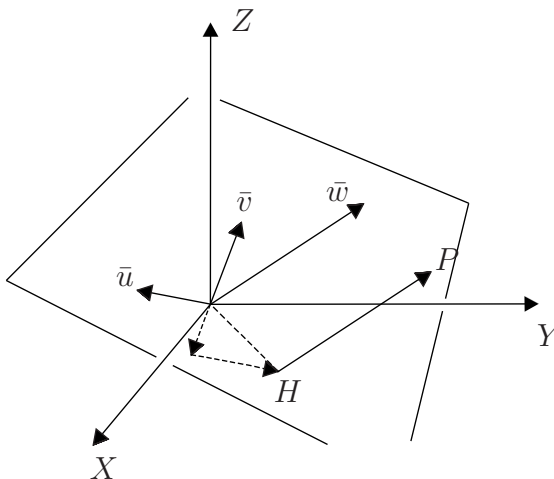


Figura 3.11: Cualquier punto del espacio cartesiano es combinación lineal de tres vectores no pertenecientes a un mismo plano por el origen.

Por tanto, cualquier punto  $P$  del espacio cartesiano puede obtenerse como una cierta combinación lineal de  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , y  $\bar{w}$ .

Formalmente, lo anterior significa que si tenemos  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  tales que el tercer vector no pertenece al plano por el origen generado por los dos primeros, esto es,

$$\bar{w} \neq \lambda(a, b, c) + \mu(r, s, t) \text{ para cualesquiera } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales es el espacio total,  $\mathbb{R}^3$ .

Esta vez la comprobación formal de que todas esas combinaciones lineales constituyen un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  la dejamos a cargo del lector (sólo hay que escribir un poco más que en la comprobación anterior), y la demostración formal de que cualquier elemento  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  puede obtenerse de esa forma preferimos hacerla en el marco del inciso siguiente.

## EJERCICIOS

1. Determine todos los posibles subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Demuestre que, en cualquier espacio vectorial, el subconjunto de todos los múltiplos de uno de sus elementos es un subespacio vectorial.
3. Demuestre que, en cualquier espacio vectorial, el subconjunto de las combinaciones lineales de dos de sus elementos es un subespacio vectorial.
4. Dé ejemplos de subespacios vectoriales de  $\mathfrak{R}$  de los tipos propuestos en los ejercicios 2 y 3.
5. Utilice algún resultado de Cálculo Integral que permita obtener otro ejemplo de subespacio vectorial de  $\mathfrak{R}$ .
6. Generalice el ejercicio 3.
7. Demuestre que la intersección de dos subespacios vectoriales  $U_1$ ,  $U_2$  de un espacio vectorial  $V$ , es subespacio vectorial de  $V$ . ¿Qué puede decir de la unión?
8. ¿Puede verse  $\mathbb{R}^2$  como subespacio de vectorial de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique su respuesta.

## 3.3 Base y dimensión

Los dos conceptos mencionados en el título son fundamentales en Geometría; esperamos que el lector logre apropiarse de ellos al estudiarlos en los ejemplos

propuestos hasta el momento y en los que veremos a lo largo de este inciso.

Vimos que dos vectores no nulos y no paralelos en  $\mathbb{R}^3$  permiten generar un plano por el origen, y como con uno sólo de ellos no podemos salir de la recta por el origen a la que pertenece, no podemos generar ese plano con menos de dos vectores; ésta es precisamente la idea que llevó a desarrollar el concepto de base de un espacio vectorial: tener un conjunto de vectores, los menos posibles, que permitan obtener todo el espacio vectorial en cuestión. Es importante señalar que no cualquier espacio vectorial admite una base finita, o al menos numerable (uno de nuestros ejemplos,  $\mathfrak{R}$ , no admite una base finita ni numerable), pero afortunadamente los ejemplos que nos conciernen más directamente sí admiten base finita.

Para llegar al concepto de base, conviene precisar los dos conceptos que lo conforman.

**Definición.** Un subconjunto  $U$  de un espacio vectorial  $V$  es un *conjunto generador del espacio vectorial*  $V$  si cualquier elemento de  $V$  puede obtenerse como combinación lineal de elementos de  $U$ , es decir, para cualquier  $\bar{v} \in V$  se tiene

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_s \bar{u}_s,$$

para algunos  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in U, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Por ejemplo, si recordamos la forma en que asignamos coordenadas cartesianas a un punto del plano (véase la Figura 1.3), podemos pensar que hemos obtenido el vector  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  como la suma de los vectores  $x(1, 0)$  y  $y(0, 1)$ , lo cual demuestra que los vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  constituyen un conjunto generador de  $\mathbb{R}^2$ , pues tenemos

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1),$$

que exhibe a  $(x, y)$  como combinación lineal de los vectores propuestos.

Análogamente, cualquier vector de  $\mathbb{R}^3$  es combinación lineal de los vectores de longitud 1 en cada uno de los ejes coordenados, a saber:  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , pues el hecho de que las coordenadas de un punto cualquiera sean  $(x, y, z)$  puede interpretarse como la suma de los vectores  $x(1, 0, 0)$ ,  $y(0, 1, 0)$  y  $z(0, 0, 1)$ , esto es,

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$

que exhibe a  $(x, y, z)$  como combinación lineal de los vectores propuestos y, en consecuencia, que dichos vectores son un conjunto generador de  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora bien, no sólo con los dos vectores  $(1, 0), (0, 1)$  puede generarse  $\mathbb{R}^2$ ; basta tener dos vectores no paralelos para alcanzar, como lo muestra la Figura 3.12, cualquier punto  $(x, y)$  del plano.

La comprobación formal de la aseveración anterior se hace así: tenemos dos vectores que no pertenecen a la misma recta por el origen, es decir,

$$(a, b) \neq \lambda(c, d) \text{ para cualquier } \lambda \in \mathbb{R},$$

y queremos comprobar que cualquier  $(x_0, y_0)$  es combinación lineal de ellos, es decir,

$$(x_0, y_0) = \alpha(a, b) + \beta(c, d),$$

para algunos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  cuya existencia debemos mostrar.

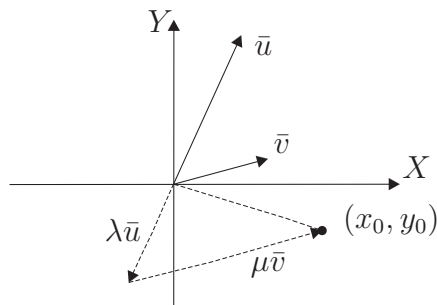


Figura 3.12: Dos vectores no paralelos generan  $\mathbb{R}^2$ .

La igualdad anterior da lugar a un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas  $\alpha, \beta$ ,

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha a + \beta c, \\ y_0 &= \alpha b + \beta d. \end{aligned}$$

Si resolvemos este sistema por cualquiera de los métodos que conocemos, obtenemos que la solución está dada formalmente por los números:

$$\begin{aligned} \alpha &= (x_0 d - y_0 c) / (ad - bc), \\ \beta &= (ay_0 - bx_0) / (ad - bc). \end{aligned}$$

Cuando el denominador es distinto de cero, esos números están bien definidos y la solución es única; ése es nuestro caso, porque como los vectores  $(a, b), (c, d)$  no pertenecen a la misma recta tenemos

$$(a, b) \neq (\lambda c, \lambda d) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R},$$

que, como puede comprobarse fácilmente, equivale a

$$ad - bc \neq 0.$$

Por tanto, cualesquiera dos vectores no paralelos de  $\mathbb{R}^2$  son un conjunto generador de ese espacio vectorial.

Ya vimos que cualesquiera tres vectores que no pertenecen al mismo plano por el origen de  $\mathbb{R}^3$  generan este espacio, pero la demostración formal será más sencilla cuando hayamos revisado el tema de determinantes; por lo pronto podemos recurrir a la imagen geométrica que vimos al final del inciso anterior para convencernos que cualquier elemento de  $\mathbb{R}^3$  puede ser alcanzado por una poligonal de lados paralelos a los vectores con la condición mencionada.

Ahora bien, es claro que si un conjunto es generador del espacio que lo contiene y le añadimos más elementos, el nuevo conjunto sigue siendo generador.

Más interesante es saber cuándo es posible **quitar** algún elemento sin perder la propiedad de generar; eso ocurrirá si y sólo si el elemento eliminado puede ser generado con los restantes, es decir, si **depende** de ellos. De lo contrario, el elemento resulta indispensable para generar el total de los elementos del espacio.

Por ejemplo, del conjunto  $\{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$  podemos quitar uno cualquiera de los vectores y el conjunto formado por los dos restantes sigue generando  $\mathbb{R}^2$ , pero si quitamos dos de los vectores ya no generamos  $\mathbb{R}^2$ .

Ésos son los otros conceptos necesarios para llegar a la noción de base, el de dependencia lineal y su negación, la independencia lineal.

**Definición.** Un subconjunto  $U$  de un espacio vectorial  $V$  es *linealmente dependiente* si algún elemento  $\bar{v}$  de  $U$  es combinación lineal de los restantes, es decir, si existen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  y  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r \in U$  tales que

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \dots + \lambda_r \bar{u}_r.$$

Nótese que lo anterior es equivalente a que entre los elementos de  $U$  pueda establecerse una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero:

$$(-1)\bar{v} + \lambda_1\bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r\bar{u}_r = \bar{0}.$$

Por eso la definición de independencia lineal tiene la forma siguiente.

**Definición.** Un subconjunto  $U$  de un espacio vectorial  $V$  es *linealmente independiente* si ninguno de sus elementos es combinación lineal de los restantes, es decir, si **no** puede establecerse con ellos una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero. Es decir, si una combinación lineal de elementos de  $U$  da lugar al vector nulo,

$$\mu_1\bar{u}_1 + \mu_2\bar{u}_2 + \cdots + \mu_s\bar{u}_s = \bar{0},$$

todos los coeficientes deben ser cero:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0.$$

Antes de ver ejemplos de subconjuntos linealmente independientes y otros de subconjuntos linealmente dependientes en el plano y el espacio cartesianos, será muy útil notar lo siguiente.

### Observación.

Si un subconjunto  $U$  es linealmente dependiente, cualquier subconjunto  $W$  que contenga a  $U$  es también linealmente dependiente porque la combinación no trivial de elementos de  $U$  que genera al elemento neutro es también una combinación no trivial de elementos de  $W$ .

Veamos ahora los ejemplos prometidos.

1. El subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  constituido por el vector  $(0, 0)$  es linealmente dependiente, porque, por ejemplo,  $3(0, 0) = (0, 0)$ ; en general, el elemento neutro de un espacio vectorial constituye siempre un subconjunto linealmente dependiente, pues para cualquier  $\lambda \neq 0$ , se tiene  $\lambda(0, 0) = (0, 0)$ . La observación anterior muestra que cualquier subconjunto de un espacio vectorial que contenga al elemento neutro es un subconjunto linealmente dependiente.



2. En cambio, si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  constituido por ese solo vector es linealmente independiente, pues al multiplicar  $(x, y)$  por  $\lambda \neq 0$ , obtenemos  $(\lambda x, \lambda y)$  y para que  $(\lambda x, \lambda y) = (0, 0)$ , debe tenerse  $\lambda x = 0$ ,  $\lambda y = 0$ , y como  $\lambda \neq 0$ , esas dos ecuaciones implican que  $x = 0$ , y  $y = 0$ , contra la hipótesis original. Desde luego, un solo vector no nulo en  $\mathbb{R}^3$ ,  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , constituye también un subconjunto linealmente independiente de  $\mathbb{R}^3$ ; la comprobación es totalmente análoga a la anterior.
3. Tomemos ahora dos elementos no nulos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(a, b)$  y  $(c, d)$ ; ya demostramos que si los vectores no son paralelos, podemos generar con ellos todo  $\mathbb{R}^2$ . La manera de comprobarlo fue plantear, para cada  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x_0, y_0) = \alpha(a, b) + \beta(c, d),$$

lo cual dio lugar a un sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha a + \beta c, \\ y_0 &= \alpha b + \beta d, \end{aligned}$$

con solución única

$$\begin{aligned} \alpha &= (x_0 d - y_0 c)/(ad - bc), \\ \beta &= (ay_0 - bx_0)/(ad - bc), \end{aligned}$$

que en el caso  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  da  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , es decir, si los vectores no son paralelos la única forma de generar al neutro es con la combinación trivial.

En cambio, si los vectores son paralelos, cada uno pertenece a la recta por el origen generada por el otro, es decir,  $(a, b) = \lambda(c, d)$ , y por tanto

$$(a, b) - \lambda(c, d) = (0, 0),$$

y como el coeficiente de  $(a, b)$  es 1, la combinación anterior es no trivial. Así hemos demostrado que dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  son linealmente dependientes si y sólo si son paralelos.

4. Para el espacio cartesiano, la situación es totalmente análoga; si tenemos dos vectores no nulos,  $(a, b, c), (s, t, u) \in \mathbb{R}^3$ , el subconjunto constituido por ellos es linealmente dependiente si son vectores paralelos (la comprobación la dejamos al lector), pero es linealmente independiente si son vectores no paralelos, pues si se tiene

$$\alpha(a, b, c) + \beta(s, t, u) = (0, 0, 0),$$

y uno de los coeficientes no es cero, por ejemplo,  $\alpha \neq 0$ , podemos multiplicar por  $\alpha^{-1}$  y obtener

$$(a, b, c) = -\beta\alpha^{-1}(s, t, u),$$

lo cual significa que los vectores son paralelos, contra la hipótesis.

5. En  $\mathbb{R}^2$ , cualesquiera tres vectores son linealmente dependientes, puesto que, por la Observación, el único caso que falta se da cuando dos de ellos son linealmente independientes, pero eso implica que generan a cualquier otro, según hemos recordado en el ejemplo 3, y podemos escribir la combinación

$$(x_0, y_0) - \alpha(a, b) - \beta(c, d) = (0, 0),$$

que es no trivial porque el primer coeficiente es 1.

6. En  $\mathbb{R}^3$ , dados tres vectores no nulos las posibilidades geométricas son: que los tres sean paralelos, y por tanto linealmente dependientes; que pertenezcan al mismo plano por el origen, y por tanto sean linealmente dependientes; o que ninguno de ellos pertenezca al subespacio generado por los otros dos. En este último caso, los tres vectores forman un conjunto linealmente independiente, pues si planteamos que exista una combinación lineal de ellos que sea nula,

$$\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} + \gamma\bar{w} = \bar{0},$$

y alguno de los coeficientes no fuera 0, entonces podríamos despejar al vector correspondiente en términos de los otros dos, es decir, dicho vector pertenecería al subespacio generado por los otros dos, contra la hipótesis.

7. Como tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes generan todo  $\mathbb{R}^3$ , si tomamos cualquier subconjunto de más de tres vectores, el subconjunto es linealmente dependiente pues, por la Observación, basta estudiar el caso en que tres de los vectores son linealmente independientes. Entonces cualquier otro vector es combinación lineal de estos tres y al sumar a la combinación el inverso aditivo del vector en cuestión, se obtiene una combinación lineal con al menos un coeficiente no cero igual al vector nulo (escriba esto último en símbolos).

En lo referente al espacio vectorial de las funciones reales de variable real, sólo haremos un comentario: el conjunto de las funciones dadas por los monomios de los distintos grados,

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots\},$$

es un conjunto linealmente independiente, pues si se pretende que una combinación lineal de ellos sea la función idénticamente nula, eso equivaldría a pretender que un polinomio de grado finito tenga a cualquier número real como raíz, es decir, debería tener un número infinito de raíces, lo cual es imposible porque un polinomio tiene, a lo más, tantas raíces reales como su grado.

Los ejemplos anteriores muestran que un conjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por dos elementos no paralelos tiene las dos propiedades discutidas en este inciso, la de generar el espacio vectorial al que pertenecen y la de ser linealmente independiente; análogamente, en  $\mathbb{R}^3$  cualquier subconjunto de tres vectores que no pertenezcan al mismo plano por el origen tiene esas dos características. El concepto de base se forma con ellas.

**Definición.** Un subconjunto de un espacio vectorial es una *base* del espacio vectorial si tiene las propiedades de generar al espacio vectorial y la de ser un subconjunto linealmente independiente.

Si de un subconjunto  $B$  de un espacio vectorial  $V$  se sabe que posee una de las dos características, la verificación de la otra puede hacerse utilizando una de las dos condiciones establecidas en la proposición siguiente, que debe parecer natural al lector después de la discusión de los ejemplos anteriores.

**Lema.** Un subconjunto  $B$  de un espacio vectorial  $V$  es una base de dicho espacio si y sólo si posee cualquiera de las dos características siguientes:

- i) es un subconjunto máximo linealmente independiente;
- ii) es un subconjunto mínimo generador.

### **Demostración.**

Veamos primero que si  $B$  es una base, entonces posee las dos características mencionadas.

Para comprobar i), sólo falta verificar la propiedad de ser máximo, puesto que la independencia lineal es necesaria para que  $B$  sea base. Si no fuera un subconjunto máximo con la propiedad de independencia lineal, podríamos añadir a  $B$  algún otro elemento del espacio,  $\bar{u}$ , y conservar la propiedad, pero eso es imposible porque  $\bar{u}$  está generado por los elementos de  $B$ , es decir,

$$\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_s \bar{u}_s,$$

donde cada  $\lambda_i$  es un número real y cada  $\bar{u}_i$  es un elemento de  $B$ ; entonces, como lo hicimos en los ejemplos, de la igualdad anterior es posible obtener una combinación lineal no trivial (porque el coeficiente de  $\bar{u}$  es 1) igual al vector nulo:

$$\bar{u} - \lambda_1 \bar{u}_1 - \lambda_2 \bar{u}_2 - \dots - \lambda_s \bar{u}_s = \bar{0},$$

y esto muestra que el conjunto  $B \cup \{\bar{u}\}$  es linealmente dependiente, es decir, a una base no se le puede añadir ningún elemento sin perder la propiedad de independencia lineal.

Comprobemos ahora que una base tiene también la propiedad ii); por ser base, es un subconjunto generador, así que únicamente falta comprobar que es un conjunto mínimo con tal propiedad. Si no lo fuera, podríamos quitar un elemento y seguir generando a todo el espacio vectorial, en particular al vector que quitamos. Si lo llamamos  $\bar{u}$ , eso significa que

$$\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_s \bar{u}_s,$$

donde cada  $\lambda_i$  es un número real y cada  $\bar{u}_i$  es un elemento de  $B - \bar{u}$ . Pero entonces podríamos obtener una combinación lineal no trivial

y nula con elementos de  $B$  (véase la penúltima igualdad), lo cual impediría a  $B$  ser una base.

Falta comprobar que si un conjunto  $B$  tiene cualquiera de las condiciones i) o ii), entonces es una base. Haremos sólo una de las comprobaciones y la otra la dejamos al lector.

Supongamos que  $B$  es un subconjunto mínimo generador; entonces, para que  $B$  sea base sólo falta comprobar que también es linealmente independiente. Pero si no lo fuera, alguno de sus elementos sería combinación lineal de los restantes,

$$\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_s \bar{u}_s,$$

y cada vez que  $\bar{u}$  fuera necesario para generar algún elemento del espacio vectorial, podría ser sustituido por la expresión anterior, lo cual muestra que no es necesario para generar el espacio. Pero si de  $B$  podemos quitar  $\bar{u}$  y  $B$  sigue generando todo el espacio,  $B$  no es un conjunto mínimo de generadores, contra la hipótesis inicial.

■

El lema anterior es muy útil, en particular para demostrar que la definición de dimensión de un espacio vectorial tiene sentido. Y ciertamente implica que una base del espacio vectorial  $\mathfrak{R}$  de las funciones reales de variable real tiene un número infinito de elementos, pues ya mencionamos que las funciones monomiales:  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = x$ , ...,  $f_n = x^{n-1}$ , ..., son linealmente independientes.

A continuación damos la definición de dimensión de un espacio vectorial; el lector tendrá oportunidad de utilizarla en muchos contextos, pero es de particular importancia en Geometría.

**Definición.** La *dimensión de un espacio vectorial* es el número de elementos de una base del espacio.

Si no fuera cierto que cualquier base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos, la definición anterior no tendría sentido.

El caso que nos interesa, porque es el del plano y el del espacio cartesianos, es el de un espacio vectorial con base finita. En este caso comprobaremos que la definición de dimensión es una buena definición.

**Teorema** Si un espacio vectorial  $V$  tiene una base finita, cualquier otra base debe tener el mismo número de elementos.

**Demostración.**

Sea  $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  la base finita y  $A$  otra base cuyos elementos denotaremos  $\bar{a}_i$ . La idea de la demostración es ir sustituyendo, paso a paso, los elementos de  $E$  por elementos de  $A$  mediante el mecanismo de añadir a una base un elemento de  $A$ ; entonces, por la proposición anterior, el conjunto se vuelve linealmente dependiente y puede comprobarse que uno de los elementos de la base puede ser eliminado. Hagámoslo.

- i) Si  $\tilde{A}_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}_1\}$ , éste es un conjunto linealmente dependiente por el Lema anterior, y en consecuencia existe una combinación lineal nula no trivial,

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n + \mu \bar{a}_1 = \bar{0},$$

donde algún coeficiente es no cero. Obsérvese que en esta combinación intervienen elementos de dos bases,  $E$  y  $A$ , así que no es posible que todos los coeficientes correspondientes a elementos de una de las bases (digamos  $E$ ) se anulen, porque entonces la combinación lineal nula no trivial se daría entre elementos de la otra base,  $A$ , lo cual es imposible pues  $A$  es linealmente independiente; este argumento será usado una y otra vez a lo largo de la demostración.

Por la observación, existe alguna  $\lambda_i \neq 0$ , y renumerando los elementos de  $E$  si es necesario, tomamos  $\lambda_1 \neq 0$ ; entonces  $\bar{e}_1$  puede expresarse en términos de  $\bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}_1$ , lo cual muestra que  $A_1 = \tilde{A}_1 - \{\bar{e}_1\}$  es un conjunto generador de  $V$ . Si comprobamos que también es linealmente independiente, tendremos que  $A_1$  es base. Pero si  $A_1$  no fuera linealmente independiente, existiría entre sus elementos una combinación lineal nula no trivial,

$$\lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n + \mu \bar{a}_1 = \bar{0},$$

donde, por la observación anterior,  $\mu \neq 0$ , lo cual implicaría que  $\bar{a}_1$  está generado por  $\bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ , y por tanto bastarían estos vectores para generar  $V$ . Pero entonces  $E$ , la base original, no sería un conjunto mínimo de generadores, lo cual contradice el Lema. Así, hemos comprobado que  $A_1 = \{\bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}_1\}$  es base de  $V$ , y eso concluye el primer paso de la demostración.

- ii) Si  $\tilde{A}_2 = \{\bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ , aplicando el Lema a la base  $A_1$ , se tiene que  $\tilde{A}_2$  es un conjunto linealmente dependiente, y en consecuencia, existe una combinación lineal nula no trivial entre sus elementos,

$$\lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n + \mu_1 \bar{a}_1 + \mu_2 \bar{a}_2 = \bar{0}.$$

Por la observación del principio de la demostración, algún  $\lambda_i$  debe ser no cero; renumerando los  $\bar{e}_i$  si es necesario, podemos tomar  $\lambda_2 \neq 0$  y, en consecuencia,  $\bar{e}_2$  puede generarse con  $A_2 = \{\bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ . Este conjunto, además, es linealmente independiente, porque si no lo fuera, con sus elementos podemos formar una combinación lineal nula no trivial,

$$\lambda_3 \bar{e}_3 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n + \mu_1 \bar{a}_1 + \mu_2 \bar{a}_2 = \bar{0},$$

y  $\mu_2 \neq 0$  porque de lo contrario los elementos de la base  $A_1$  serían linealmente dependientes; pero entonces  $\bar{a}_2$  puede generarse con  $\bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}_1$ , y bastaría con estos elementos para generar  $V$ , puesto que  $A_2$  era un conjunto de generadores. Como ese conjunto es un subconjunto propio de  $A_1$ , porque tiene un elemento menos,  $A_1$  no podría ser base por no ser mínimo de generadores, así que  $A_2$  debe ser linealmente independiente y, por tanto, resulta una base. Esto concluye el segundo paso de la demostración.

- n) En el paso  $n$ -ésimo, se han sustituido los  $n$  elementos de  $E$  por  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in A$ , es decir, tenemos que  $A_n = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \subset A$  es base de  $V$ ; en consecuencia  $A$  no puede tener más elementos y así termina la demostración.

■

**Corolario.** La dimensión del plano cartesiano es 2, y la del espacio cartesiano es 3.

### **Demostración.**

Los dos vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  son una base de  $\mathbb{R}^2$ , y los tres vectores  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  son base de  $\mathbb{R}^3$ . ■

Además de las *bases canónicas* constituidas por vectores en los que todas las coordenadas son 0 excepto una, la cual es 1, cualquier par de vectores en  $\mathbb{R}^2$  que constituya un conjunto linealmente independiente es una base de  $\mathbb{R}^2$ , y cualquier tercia de vectores en  $\mathbb{R}^3$  que constituya un conjunto linealmente independiente es una base de  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, basta elegir un vector no cero, como  $(1, 2)$  y tomar cualquier otro  $(a, b)$  que no sea un múltiplo del primero para tener una base de  $\mathbb{R}^2$ , o tomar  $(1, 2, 3)$  y elegir primero  $(a, b, c)$  que no sea un múltiplo de éste y luego  $(d, e, f)$  que no sea combinación lineal de los dos primeros, para obtener una base de  $\mathbb{R}^3$ .

## EJERCICIOS

1. ¿Es posible que tres vectores de  $\mathbb{R}^2$  sean linealmente independientes? Justifique su respuesta.
2. ¿Es posible que dos vectores de  $\mathbb{R}^3$  generen  $\mathbb{R}^3$ ?
3. ¿Es siempre cierto que dos vectores de  $\mathbb{R}^3$  son linealmente independientes?
4. Demuestre que la dimensión de un espacio vectorial es mayor o igual que la dimensión de cualquiera de sus subespacios. Dé ejemplos de esas dos posibilidades.
5. ¿Es posible generar el espacio de todas las funciones reales de variable real con un número finito de ellas? Justifique su respuesta.
6. Determine si los subconjuntos listados a continuación poseen una o varias de las propiedades siguientes: linealmente independiente; generador; base. Justifique su respuesta.
  - i)  $\{(1, 1), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - ii)  $\{(1, 1), (0, n)\} \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $n \neq 0$ ;
  - iii)  $\{(2, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ ;
  - iv)  $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ ;
  - v)  $\{x^2, x^3, 2x^2 + 3x^3\} \subset \mathfrak{R}$ ;
  - vi)  $\{x^2, x^3, x^5\} \subset \mathfrak{R}$ .
7. Añada un vector al subconjunto propuesto, de manera que el nuevo subconjunto sea una base del espacio correspondiente.
  - i)  $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - ii)  $\{(-1, 1, 0), (-1, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$ ;



8. Añada un vector a cada uno de los subconjuntos del ejercicio anterior, de forma tal que el nuevo subconjunto resulte linealmente dependiente.
9. Demuestre que si un subconjunto  $V$  de vectores contiene un subconjunto linealmente dependiente  $U$ , el primero necesariamente es linealmente dependiente.
10. Demuestre que si un subconjunto  $V$  de vectores contiene un subconjunto generador, el primero necesariamente es generador.
11. Demuestre que un subconjunto de vectores que contiene al vector neutro para la suma, es un subconjunto linealmente dependiente.
12. Defina  $\mathbb{R}^5$  y dé varias bases de este espacio vectorial.
13. Demuestre que un subconjunto  $B$  de un espacio vectorial  $V$  es base de  $V$  si y sólo si es un subconjunto máximo linealmente independiente.
14. ¿Cuántas bases tiene  $\mathbb{R}^2$ ? Justifique su respuesta.

## 3.4 Determinantes y sus propiedades

En la introducción de este capítulo mencionamos que los científicos de los siglos pasados encontraron en sus cálculos algunos patrones de comportamiento; al resolver sistemas de ecuaciones lineales, los casos sencillos de 2 ecuaciones con 2 incógnitas o de 3 ecuaciones con 3 incógnitas hicieron evidente, cuando el sistema tiene solución única, que ciertos números formados a partir de los coeficientes de las ecuaciones aparecían siempre en el denominador. En el caso del sistema

$$Ax + By = I, \quad Cx + Dy = J,$$

el número tiene siempre la forma  $AD - BC$ , y en el caso del sistema

$$Ax + By + Cz = L, \quad Dx + Ey + Fz = M, \quad Gx + Hy + Iz = N,$$

el número tiene la expresión  $AEI + DHC + BFG - CEG - AFH - BDI$ .

Si uno escribe en renglones distintos los coeficientes de las variables de cada ecuación, respetando siempre el mismo orden según la variable a que

correspondan, en los sistemas mencionados obtiene los arreglos siguientes:

$$\begin{array}{lcl} Ax + By = I & & \\ Cx + Dy = J & \rightarrow & \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}, \\ Ax + By + Cz = L & & \\ Dx + Ey + Fz = M & \rightarrow & \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}. \\ Gx + Hy + Iz = N & & \end{array}$$

Estos arreglos de números entre barras,  $2 \times 2$  en un caso y  $3 \times 3$  en el otro, definen un número, denominado el *determinante* del sistema, obtenido como  $AD - BC$  para el arreglo de  $2 \times 2$  números, y como  $AEI + DHC + BFG - CEG - AFH - BDI$ , para el arreglo de  $3 \times 3$  números.

Es completamente natural preguntarse si cualquier sistema de  $n$  ecuaciones de primer grado en  $n$  incógnitas tiene asociado un arreglo análogo; desde luego la respuesta es sí, y además el determinante de  $n$  por  $n$  números puede obtenerse de manera recurrente, es decir, en términos de subdeterminantes de orden menor. Por ejemplo, en el caso del determinante de 3 por 3, es muy sencillo comprobar que si acordamos asignar a los 9 lugares signos alternados  $+$  y  $-$  en forma análoga a los cuadros blancos y negros de un tablero de ajedrez y empezando siempre con el signo  $+$  en el cuadro de arriba a la izquierda,

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

el valor del determinante no cambia si lo desarrollamos utilizando cualquier renglón o columna de acuerdo a la regla siguiente.

**Regla para desarrollar un determinante.** El valor de un determinante puede obtenerse a partir de cualquier renglón o columna, como la suma de los productos de cada elemento de dicho renglón o columna por el subdeterminante obtenido del original suprimiendo el renglón y columna del elemento en cuestión, donde a cada producto se le respeta o cambia el signo según le corresponda al elemento el signo  $+$  o el signo  $-$  en la distribución mencionada anteriormente.

El número que resulta de respetar o cambiar el signo del subdeterminante asociado a un elemento de un determinante según la regla del ajedrez se denomina *cofactor del elemento*.

Para ilustrar la definición desarrollaremos el determinante del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a partir de la última columna.

Los cofactores correspondientes a las entradas de la última columna son:

al elemento  $C$  le corresponde el cofactor  $DH - EG$ ;

al elemento  $F$  le corresponde el cofactor  $-(AH - BG)$ ;

al elemento  $I$  le corresponde el cofactor  $AE - BD$ .

Por tanto, el desarrollo es  $C(DH - EG) - F(AH - BG) + I(AE - BD)$ , y si distribuimos los productos obtenemos  $AEI + DHC + BFG - CEG - AFH - BDI$ , que concuerda con la definición. El lector puede elegir cualquier otra columna o renglón para hacer el desarrollo; comprobará que en todos los casos el valor es el mismo.

Los números definidos por determinantes juegan un papel muy importante en el Álgebra lineal y, en consecuencia, en Geometría. Por ello, sus propiedades se utilizarán continuamente y será muy importante conocerlas bien. Haremos las demostraciones para determinantes de  $3 \times 3$ , pero de la forma de la demostración será inmediata su validez en el caso de  $n \times n$  y, también, la posibilidad de sustituir la palabra “columna” por “renglón”.

Es conveniente mencionar que cuando un arreglo de  $m \times n$  números  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  en  $m$  renglones de  $n$  elementos se escribe entre paréntesis, se llama *matriz*. Una matriz **no** es número sino que jugará el papel de una transformación entre espacios vectoriales, como veremos en el capítulo 7, y sólo las matrices cuadradas tienen asociado un determinante.

## Propiedades

- i) Si en un determinante se intercambian dos columnas, el valor del determinante cambia de signo; por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} C & B & A \\ F & E & D \\ I & H & G \end{vmatrix}.$$

En consecuencia, un determinante con dos columnas iguales es cero.

- ii) Si en un determinante los elementos de una columna son sumas de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes, uno

de los cuales reemplaza la columna en cuestión por la columna cuyos elementos son los primeros sumandos, y el otro de dichos determinantes reemplaza la columna original por otra cuyos elementos son los segundos sumandos, es decir,

$$\begin{vmatrix} A + A' & B & C \\ D + D' & E & F \\ G + G' & H & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A' & B & C \\ D' & E & F \\ G' & H & I \end{vmatrix}.$$

- iii) Si en un determinante una columna tiene como elementos productos de dos factores uno de los cuales es constante, el determinante es igual al producto de dicha constante por el determinante que reemplaza la columna mencionada por otra cuyos elementos son los otros factores; en símbolos:

$$\begin{vmatrix} \lambda A & B & C \\ \lambda D & E & F \\ \lambda G & H & I \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}.$$

- iv) Si a una de las columnas se le suma un múltiplo de otra de las columnas, el valor del determinante no se altera; por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} A + \lambda B & B & C \\ D + \lambda E & E & F \\ G + \lambda H & H & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}.$$

- v) Un determinante es cero si y sólo si sus vectores renglón son linealmente dependientes, es decir,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = 0$$

si y sólo si los vectores  $(A, B, C)$ ,  $(D, E, F)$  y  $(G, H, I)$  son linealmente dependientes (desde luego, la misma observación es válida para los vectores columna).

### **Demostración de las propiedades.**

i) Desarrollemos el determinante respecto a la primera columna y luego intercambiamos la primera columna con la segunda, que es contigua, y desarrollemos el nuevo determinante respecto a la nueva segunda columna; de

acuerdo con la regla, los resultados son

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} - D \begin{vmatrix} B & C \\ H & I \end{vmatrix} + G \begin{vmatrix} B & C \\ E & F \end{vmatrix},$$

por un lado, y

$$\begin{vmatrix} B & A & C \\ E & D & F \\ H & G & I \end{vmatrix} = -A \begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} + D \begin{vmatrix} B & C \\ H & I \end{vmatrix} - G \begin{vmatrix} B & C \\ E & F \end{vmatrix},$$

que evidentemente difieren en signo. Ahora, para obtener el resultado en el caso propuesto (intercambio de columnas no contiguas), sólo falta observar lo siguiente: si el determinante cambia de signo al intercambiar dos columnas contiguas, el intercambio de dos columnas no contiguas equivale a un número impar de cambios de columna contiguas y, en consecuencia, se da un número impar de cambios de signo que resulta en un cambio de signo como habíamos afirmado.

La consecuencia se demuestra observando que el intercambio de las columnas iguales debe cambiar el signo del determinante por lo que acabamos de demostrar, pero el determinante es el mismo en ambos casos porque las columnas intercambiadas son iguales. El único número que es su propio inverso aditivo es 0.

ii) Desarrollemos el determinante respecto a la columna, la primera en nuestro caso, cuyas entradas son sumas; al aplicar la propiedad distributiva de la suma primero y la conmutativa después, obtenemos seis sumandos tres de los cuales, los primeros, conforman el desarrollo de un determinante cuya primera columna consta de los primeros sumandos, y los tres últimos sumandos corresponden al desarrollo de un determinante cuya primera columna consta de los segundos sumandos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A + A' & B & C \\ D + D' & E & F \\ G + G' & H & I \end{vmatrix} &= A \begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} + A' \begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} - D \begin{vmatrix} B & C \\ H & I \end{vmatrix} \\ &\quad - D' \begin{vmatrix} B & C \\ H & I \end{vmatrix} + G \begin{vmatrix} B & C \\ E & F \end{vmatrix} + G' \begin{vmatrix} B & C \\ E & F \end{vmatrix} \\ &= A \begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} - D \begin{vmatrix} B & C \\ H & I \end{vmatrix} + G \begin{vmatrix} B & C \\ E & F \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A' \begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} - D' \begin{vmatrix} B & C \\ H & I \end{vmatrix} + G' \begin{vmatrix} B & C \\ E & F \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A' & B & C \\ D' & E & F \\ G' & H & I \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

iii) En este caso, desarrollamos el determinante respecto a la columna cuyos términos tienen el factor común; es claro que cada uno de los términos del desarrollo tiene  $\lambda$  como factor y, en consecuencia, puede extraerse como factor común de los sumandos que corresponden al desarrollo de un determinante cuya columna correspondiente ha eliminado el factor  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda A & B & C \\ \lambda D & E & F \\ \lambda G & H & I \end{vmatrix} &= \lambda A \begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} - \lambda D \begin{vmatrix} B & C \\ H & I \end{vmatrix} + \lambda G \begin{vmatrix} B & C \\ E & F \end{vmatrix}, \\
&= \lambda \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

iv) Las propiedades ii) y iii) permiten escribir

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A + \lambda B & B & C \\ D + \lambda E & E & F \\ G + \lambda H & H & I \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda B & B & C \\ \lambda E & E & F \\ \lambda H & H & I \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} B & B & C \\ E & E & F \\ H & H & I \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de aplicar la consecuencia de la propiedad i).

v) La afirmación contiene una implicación doble, pero dejaremos al lector la comprobación de que cuando los renglones forman un conjunto linealmente dependiente (i.e., cuando un renglón es combinación lineal de los otros dos) el determinante se anula; cuenta para ello con las propiedades anteriores. Entonces, sólo comprobaremos que cuando el determinante es cero los renglones son linealmente dependientes.

Hay dos casos: cuando uno de los renglones está formado por ceros y cuando todo renglón tiene algún elemento no cero. En el primer caso, basta recordar que el vector  $(0, 0, 0)$  constituye un conjunto linealmente dependiente, así que cualquier conjunto que lo incluya también es linealmente dependiente.

En el segundo caso, intercambiando renglones y columnas si es necesario (lo cual sólo podría cambiar el signo) podemos suponer que el elemento de arriba a la izquierda es no cero, es decir,  $A \neq 0$  en el ejemplo. Entonces la propiedad iv) permite obtener un arreglo con el mismo determinante pero en el cual los primeros elementos de los renglones segundo y tercero son cero:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D - (D/A)A & E - (D/A)B & F - (D/A)C \\ G - (G/A)A & H - (G/A)B & I - (G/A)C \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A & B & C \\ 0 & E - (D/A)B & F - (D/A)C \\ 0 & H - (G/A)B & I - (G/A)C \end{vmatrix}$$

Al desarrollar este último determinante por la primera columna obtenemos

$$A \begin{vmatrix} E - (D/A)B & F - (D/A)C \\ H - (G/A)B & I - (G/A)C \end{vmatrix},$$

y como la nulidad de un producto implica que uno de los números debe ser cero, la hipótesis  $A \neq 0$  implica la nulidad del determinante de  $2 \times 2$ . Pero para este tipo de determinantes es inmediato comprobar la afirmación y, en consecuencia, sus vectores renglón

$$(E - (D/A)B, F - (D/A)C) \text{ y } (H - (G/A)B, I - (G/A)C)$$

son linealmente dependientes. Entonces, los vectores renglón

$$\bar{r} = (0, E - (D/A)B, F - (D/A)C) \text{ y } \bar{s} = (0, H - (G/A)B, I - (G/A)C)$$

también son linealmente dependientes, es decir, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alguno distinto de cero, tales que

$$\lambda \bar{r} + \mu \bar{s} = \bar{0}.$$

Los vectores  $\bar{r}$  y  $\bar{s}$  se obtuvieron de los vectores originales  $\bar{u} = (A, B, C)$ ,  $\bar{v} = (D, E, F)$  y  $\bar{w} = (G, H, I)$  así:

$$\bar{r} = \bar{v} - (D/A)\bar{u}, \quad \bar{s} = \bar{w} - (G/A)\bar{u},$$

y si sustituimos estas expresiones en la igualdad anterior resulta

$$\lambda(\bar{v} - (D/A)\bar{u}) + \mu(\bar{w} - (G/A)\bar{u}) = \bar{0}.$$

Al multiplicar por  $A$  y agrupar los términos en  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  obtenemos

$$-(D + G)\bar{u} + A\lambda\bar{v} + A\mu\bar{w} = \bar{0}.$$

Como alguno de los números  $\lambda$  o  $\mu$  no es cero, uno de los coeficientes de esta última combinación no es cero y, por tanto, los vectores renglón del determinante original son linealmente dependientes.

## EJERCICIOS

1. Demuestre que si un determinante de  $2 \times 2$  se anula, sus vectores renglón son linealmente dependientes.
2. Demuestre que si tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  son linealmente independientes, el determinante que los tiene como renglones no es cero.
3. Si con nueve números tomados al azar se forma un determinante, ¿qué es más probable, que el determinante se anule o que no se anule? Justifique su respuesta en términos del plano generado por dos de los vectores renglón.
4. Compruebe que al desarrollar un determinante de  $3 \times 3$  utilizando el último renglón, el número obtenido es el mismo que al desarrollarlo por la primera columna.
5. ¿Cuántos ceros admite un determinante de  $3 \times 3$  sin anularse?
6. Dé una forma de desarrollar un determinante de  $3 \times 3$  que utilice las “ diagonales”:  $AEI$ ,  $DHC$ ,  $GBF$  y  $CEG$ ,  $FHA$ ,  $IBD$ . (Cuide los signos.)

## 3.5 Productos: escalar, vectorial y triple escalar

Es posible realizar varias “operaciones” con vectores; en el caso de  $\mathbb{R}^3$ , a dos vectores se les puede asociar un escalar (producto escalar) o un vector (producto vectorial) dependiendo de la forma en que se defina la correspondencia,



y en cada caso veremos cuál es la importancia geométrica. Y si a dos vectores les hemos hecho corresponder otro vector, todavía podemos hacer el producto escalar con un tercero para tener un triple producto cuyo resultado es un escalar.

Antes de dar las definiciones de cada “operación”, conviene hacer la observación de que hay una *inclusión canónica* de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , mediante la identificación de  $\mathbb{R}^2$  con el plano  $XY$  del espacio cartesiano; escribimos

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ bajo la identificación } (x, y) \mapsto (x, y, 0).$$

Desde luego, esto es arbitrario pero es usual y, como veremos, tiene varias ventajas.

Convendremos también en denotar los vectores de la base  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente. El cambio de la barra por el “sombrero” indicará, para cualquier vector, que la longitud del vector es 1.

## Producto escalar

El *producto escalar o producto punto de dos vectores en  $\mathbb{R}^3$*   $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$  es la suma de los productos de las coordenadas correspondientes; en símbolos,

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

donde el calificativo de “escalar” proviene de que el resultado de esta operación es un escalar (nótese la diferencia con el producto **por** un escalar), y el de “punto” proviene únicamente de la notación que en algunos textos es sustituida por otra.

Las *propiedades del producto escalar* de dos vectores  $\bar{u} \cdot \bar{v} \in \mathbb{R}^3$  son las siguientes:

1. Es conmutativo; en símbolos,

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}.$$

2. Se distribuye sobre la suma de vectores; en símbolos,

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}.$$

3. “Saca escalares”; en símbolos,

$$(\lambda \bar{u}) \cdot \bar{v} = \lambda(\bar{u} \cdot \bar{v}).$$

4. Es *definido positivo*, es decir, el producto escalar de un vector por sí mismo da un real mayor o igual que cero, y el resultado es cero si y sólo si el vector es el vector cero; en símbolos

$$\bar{u} \cdot \bar{u} \geq 0 \quad \text{y} \quad \bar{u} \cdot \bar{u} = 0 \text{ si y sólo si } \bar{u} = \bar{0}.$$

La comprobación de las propiedades se reduce a expresar cada vector en coordenadas, aplicar la definición y utilizar las propiedades de la suma y el producto de los números reales, así que dejaremos las tres primeras a cargo del lector.

La última propiedad resulta de que el producto escalar de un vector por sí mismo es una suma de cuadrados, es decir, una suma de números no negativos:

$$\bar{u} \cdot \bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq 0,$$

y una suma tal sólo se anula si cada sumando es cero, es decir, si  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ , esto es,  $\bar{u} = \bar{0}$ .

Esta propiedad permite definir la *norma de un vector* (norma de un vector  $\bar{u}$  como la raíz cuadrada (no negativa) del producto punto del vector por sí mismo; en símbolos,

$$||\bar{u}|| = (\bar{u} \cdot \bar{u})^{1/2} = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}.$$

Los vectores cuya norma es 1 se denominan *vectores unitarios* y, como lo mencionamos, cambiarán la barra por un acento circunflejo o “sombbrero”.

Note en la figura que  $||\bar{u}||$  es la longitud de la diagonal mayor  $OP$  del paralelepípedo.

Si los vectores pertenecen al plano cartesiano, la inclusión canónica de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  da un producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ , así

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Si  $\hat{u} = (1, 0)$  y  $\hat{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , como lo muestra la Figura 3.14, el producto escalar es

$$(1, 0) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta,$$

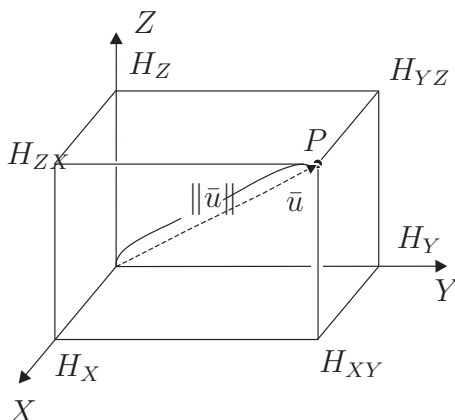


Figura 3.13: Interpretación geométrica de  $\|\bar{u}\|$ .

es decir, el producto escalar proporciona el coseno del ángulo que forma  $\bar{v}$  con la parte positiva del eje  $X$ .

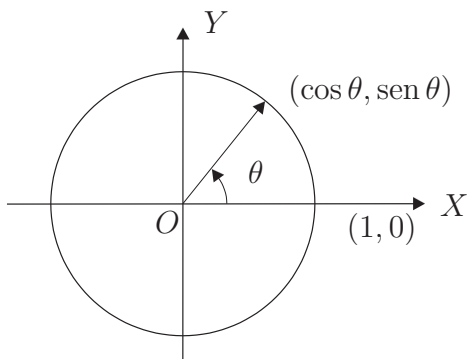


Figura 3.14: Interpretación geométrica de  $\hat{u} \cdot \hat{v}$ .

Este caso hace plausible la última propiedad del producto escalar en  $\mathbb{R}^3$ , cuya comprobación depende esencialmente de una observación geométrica muy sencilla.

5. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*. El valor absoluto del producto escalar de dos vectores es menor o igual que el producto de las normas de los vectores; en símbolos

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|.$$

Para comprobar esta desigualdad basta aplicar la propiedad 4) al vector  $\bar{u} - \lambda \bar{v}$  :

$$0 \leq \|\bar{u} - \lambda \bar{v}\|^2,$$

Si tomamos en cuenta las propiedades ya demostradas podemos escribir

$$0 \leq (\bar{u} - \lambda \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \lambda \bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 - 2\lambda \bar{u} \cdot \bar{v} + \lambda^2 \|\bar{v}\|^2.$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si interpretamos el último miembro de la relación anterior como polinomio en  $\lambda$ , el hecho de que siempre sea mayor o igual que cero significa que su gráfica permanece arriba de, o a lo sumo es tangente a, el eje correspondiente a  $\lambda$  (véase la Figura 3.15), lo cual implica que el discriminante es menor o igual que cero, porque no puede haber dos raíces reales distintas.

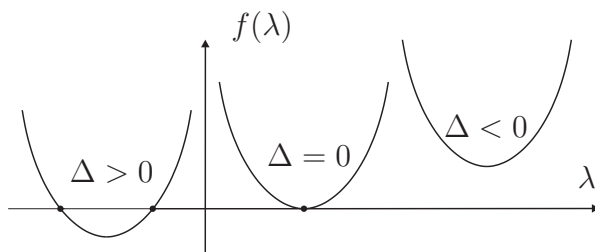


Figura 3.15: Demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Si el lector escribe con cuidado los coeficientes de  $\lambda^2$  y de  $\lambda$  y el término independiente, comprobará que la condición sobre el discriminante da lugar a

$$\Delta = 4(\bar{u} \cdot \bar{v})^2 - 4\|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2 \leq 0,$$

que a su vez implica

$$(\bar{u} \cdot \bar{v})^2 \leq \|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2,$$

y al extraer raíz cuadrada en ambos miembros (que representan números no negativos) obtenemos la desigualdad propuesta.

Al dividir ambos miembros de la desigualdad de Cauchy-Schwarz entre el miembro derecho obtenemos que para dos vectores cualesquiera de  $\mathbb{R}^3$  se cumple

$$\frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \leq 1,$$

y entonces tiene sentido definir el *ángulo entre dos vectores* así

$$\text{ang } (\bar{u}, \bar{v}) = \arccos \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}|| ||\bar{v}||},$$

lo cual concuerda con el caso ilustrado en la Figura 3.14 y da un sentido geométrico al signo del producto escalar: es positivo si  $0 < |\theta| < \pi/2$  y es negativo si  $\pi/2 < |\theta| < 3\pi/2$ .

Como consecuencia, podemos escribir

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = ||\bar{u}|| ||\bar{v}|| \cos \text{ang } (\bar{u}, \bar{v})$$

y decir que *dos vectores son perpendiculares* si ninguno es el vector nulo y su producto escalar es cero.

Nótese que si en  $\bar{u} \cdot \bar{v}$  uno de los vectores es unitario, por ejemplo  $\hat{u}$ , el producto escalar puede interpretarse como la *componente de  $\bar{v}$  en la dirección de  $\hat{u}$* , también llamada la *proyección de  $\bar{v}$  en  $\hat{u}$* .

Si en una base todos los vectores son unitarios y perpendiculares dos a dos, la llamamos *base ortonormal*.

Vale la pena hacer notar que el concepto de producto escalar tiene sentido en espacios vectoriales mucho más generales que los cartesianos, y que la demostración anterior de la desigualdad de Cauchy-Schwarz no requirió de coordenadas, sino únicamente de las propiedades del producto escalar real.

## Producto vectorial

En contraste con el comentario anterior, este nuevo producto sólo está definido para vectores en  $\mathbb{R}^3$ ; el lector deberá analizar en los ejercicios las implicaciones de cada una de las propiedades que consignamos.

El *producto vectorial* (o *producto cruz*) de dos vectores asocia a dos vectores  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$  un nuevo vector  $\bar{u} \times \bar{v}$  de la forma siguiente:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (a, b, c) \times (r, s, t) = (bt - sc, cr - at, as - br).$$

La manera práctica de calcular el producto vectorial resulta de las igualdades siguientes, en la última de las cuales se facilita si el determinante se desarrolla respecto al primer renglón:

$$(bt - sc, cr - at, as - br) = \hat{i} \begin{vmatrix} b & c \\ s & t \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a & c \\ r & t \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix}$$

Las *propiedades del producto vectorial* pueden verificarse con sólo recordar las correspondientes de los determinantes.

1. Es anticonmutativo, es decir,

$$\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}.$$

2. Se distribuye sobre la suma, esto es,

$$\bar{u} \times (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u} \times \bar{v}_1 + \bar{u} \times \bar{v}_2,$$

donde, como de costumbre, primero obtenemos los productos y después sumamos.

3. Saca escalares, es decir,

$$(\lambda \bar{u}) \times \bar{v} = \lambda(\bar{u} \times \bar{v}).$$

4. El producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a cada uno de sus factores, esto es

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{y} \quad (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{v} = 0.$$

5. La norma del producto vectorial de dos vectores es igual al producto de las normas de los factores por el valor absoluto del seno del ángulo entre ellos, y por tanto, es el área del paralelogramo de la Figura 3.16; en símbolos,

$$||\bar{u} \times \bar{v}|| = ||\bar{u}|| ||\bar{v}|| |\text{sen } \theta|,$$

si  $\theta = \text{ang } (\bar{u}, \bar{v})$ .

Dejaremos al lector la verificación de las propiedades excepto la última, misma que realizamos a continuación.

Primero recordemos que

$$\text{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})^2}{||\bar{u}||^2 ||\bar{v}||^2}$$

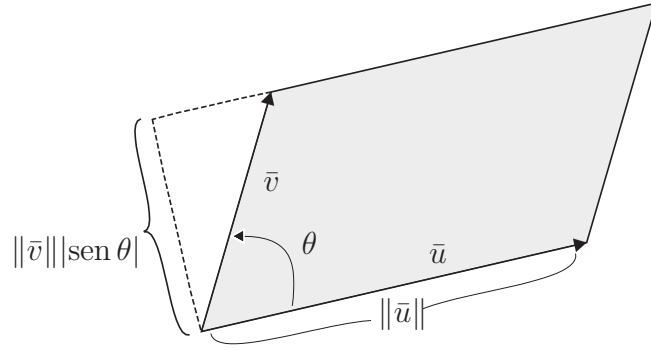


Figura 3.16: Interpretación geométrica de  $\|\bar{u} \times \bar{v}\|$ .

y entonces la igualdad que debemos comprobar equivale a la siguiente

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 \sin^2 \theta = \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \cdot \bar{v})^2.$$

Ahora no queda más remedio que introducir coordenadas para verificar la igualdad. Calcularemos el primer y el último miembro por separado, tomando  $\bar{u} = (a, b, c)$  y  $\bar{v} = (r, s, t)$ , y al final compararemos los resultados:

$$\begin{aligned} \|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 &= (bt - sc)^2 + (cr - at)^2 + (as - br)^2 \\ &= b^2 t^2 - 2btsc + s^2 c^2 + c^2 r^2 - 2crat + a^2 t^2 + a^2 s^2 \\ &\quad - 2asbr + b^2 r^2 \end{aligned}$$

y el último miembro da lugar a

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)(r^2 + s^2 + t^2) - (ar + bs + ct)^2 \\ &= a^2 r^2 + b^2 r^2 + c^2 r^2 + a^2 s^2 + b^2 s^2 + c^2 s^2 \\ &\quad + a^2 t^2 + b^2 t^2 + c^2 t^2 - (a^2 r^2 + b^2 s^2 \\ &\quad + c^2 t^2 + 2arbs + 2arct + 2bsct). \end{aligned}$$

El lector puede comprobar, después de efectuar las cancelaciones de términos semejantes en el último desarrollo, que los términos restantes figuran todos en el desarrollo del primer miembro.

Para finalizar con las observaciones respecto a este producto, conviene señalar que **no es asociativo**, es decir, en general se tiene

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} \neq \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}),$$

como lo comprueba el ejemplo siguiente:

$$(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i},$$

en tanto que

$$\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{j}) = \hat{i} \times \bar{0} = \bar{0}.$$

Pero es posible demostrar (Ejercicio 10) la validez de la expresión siguiente, que es útil en muchas ocasiones:

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}.$$

### Triple producto escalar

Dados tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ , el único sentido que tiene el *triple producto escalar*,  $\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w}$  es el de formar primero el producto vectorial y luego el producto punto de  $\bar{u}$  con  $\bar{v} \times \bar{w}$ .

Hay una forma sencilla de obtener el resultado de este triple producto escalar, como lo muestra el cálculo siguiente, donde  $\bar{u} = (a, b, c)$ ,  $\bar{v} = (r, s, t)$  y  $\bar{w} = (x, y, z)$ :

$$\bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = a \begin{vmatrix} s & t \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} r & t \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} r & s \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}].$$

La última igualdad define una notación para el triple producto escalar que evita escribir todo el determinante.

Las propiedades de los determinantes dan lugar a las siguientes *propiedades del triple producto escalar*:

1. Es cíclico, es decir, puede tomarse como primer factor otro vector con tal de que no se altere el orden cíclico (coloque los tres vectores en una circunferencia cuyo recorrido pase primero por  $\bar{u}$ , luego por  $\bar{v}$  y finalmente por  $\bar{w}$ ); en símbolos

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = [\bar{v}, \bar{w}, \bar{u}] = [\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}].$$

2. Cambia de signo al intercambiar dos de los vectores (note que eso cambia el orden cíclico); por ejemplo,

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = -[\bar{v}, \bar{u}, \bar{w}].$$



3. Se distribuye sobre la suma, es decir,

$$[\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{v}, \bar{w}] = [\bar{u}_1, \bar{v}, \bar{w}] + [\bar{u}_2, \bar{v}, \bar{w}].$$

4. Saca escalares, esto es,

$$[\lambda \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = \lambda [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}].$$

5. Expresa el volumen orientado del paralelepípedo  $\mathcal{P}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  de la Figura 3.17.

Esta propiedad se demuestra tomando en cuenta la interpretación geométrica de los productos anteriores:

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = \bar{u} \cdot \bar{v} \times \bar{w} = \|\bar{u}\| \|\bar{v} \times \bar{w}\| \cos \phi,$$

donde  $\phi = \text{ang}(\bar{u}, \bar{v} \times \bar{w})$ , y como  $\bar{v} \times \bar{w}$  es perpendicular a  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$ , el número  $\|\bar{u}\| \cos \phi$  es la altura orientada de  $\mathcal{P}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  respecto a la base formada por el paralelogramo determinado por  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  (véase la Figura 3.17), cuya área es precisamente  $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$ .

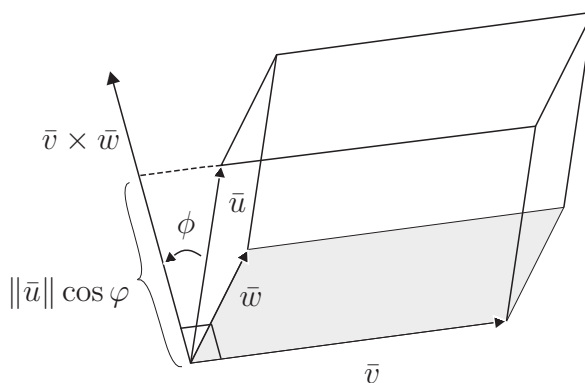


Figura 3.17: Interpretación geométrica de  $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ .

Si una base ortonormal se ordena de forma que su triple producto escalar sea  $+1$ , la llamamos *base ortonormal derecha*.

A continuación pediremos al lector comprobar las propiedades de estos productos cuya demostración omitimos, y además aplicarlas para obtener algunos resultados geométricos.

---

## EJERCICIOS

Demuestre las propiedades 1)-3) del producto escalar.

Demuestre las propiedades 1)-4) del producto vectorial.

2. Demuestre las propiedades 1)-4) del triple producto escalar
3. Compruebe que si  $\bar{u}$  tiene norma 1, entonces  $\bar{u} \cdot \bar{v}$  da la proyección orientada de  $\bar{v}$  en  $\bar{u}$ .
4. Demuestre que dos vectores no nulos son paralelos si y sólo si su producto vectorial es cero.
5. Demuestre que tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si su triple producto escalar es cero.
6. Calcule todos los posibles productos escalares entre los vectores de la base canónica  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ .
7. Demuestre que  $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}] > 0$  para cualesquiera dos vectores no nulos y no paralelos.
8. Dibuje los paralelepípedos  $\mathcal{P}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  y  $\mathcal{P}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  donde  $\bar{u} = \bar{a} = (2, 0, 0)$ ,  $\bar{v} = \bar{b} = (0, 1, 0)$ ,  $\bar{w} = (0, 1, 1)$ ,  $\bar{c} = (0, 1, -1)$  y calcule  $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$  y  $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ . Justifique haber llamado “volumen orientado” de  $\mathcal{P}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  al triple producto escalar.
9. Demuestre la validez de la fórmula

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}.$$

Sugerencia: Haga el cálculo con elementos de la base canónica, y extienda el resultado por linealidad.

# Rectas, planos, semiplanos y semiespacios

En el capítulo anterior introdujimos el lenguaje y la técnica del Álgebra Lineal elemental necesarios para facilitar el resto de nuestro trabajo.

Para empezar, haremos un estudio completo de las ecuaciones lineales en el plano y el espacio cartesianos, e interpretaremos geoméricamente las desigualdades lineales en el plano y en el espacio cartesianos.

Después analizaremos los sistemas de ecuaciones lineales en dos y en tres variables; en este estudio el lenguaje vectorial mostrará su eficacia tanto al simplificar los cálculos como al revelar el significado geométrico completo de algunos cálculos algebraicos. Y mostraremos cómo está involucrado el concepto de dimensión en el término “grados de libertad” involucrado en algunas distribuciones de probabilidad.

Finalmente, cuando analicemos los sistemas de desigualdades, podremos introducir una noción geométrica muy interesante, la convexidad, y a partir de ella los elementos de la programación lineal.

## 4.1 Rectas y semiplanos de $\mathbb{R}^2$

A continuación consignamos las distintas formas de la ecuación de una recta en el plano cartesiano e interpretamos los coeficientes o parámetros que aparecen en cada caso.

### Distintas formas de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$

En el capítulo anterior definimos una recta de  $\mathbb{R}^2$  eligiendo un vector no nulo (o *dirección*)  $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$  fijo, y un punto de apoyo  $P_0$ , y dejamos como ejercicio al lector comprobar que el subconjunto llamado *recta en la dirección*

de  $\bar{u}$  apoyada en el punto  $P_0$ ,

$$\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \mid P = P_0 + \lambda \bar{u}, \text{ con } P_0, \bar{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ fijos, } \bar{u} \neq \bar{0} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \right\};$$

no varía cuando en lugar de  $P_0$  tomamos  $Q_0 \in \mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$ , o si en vez de  $\bar{u}$  tomamos  $\bar{v} = \mu \bar{u}$  con  $\mu \neq 0$ .

La ecuación

$$P = P_0 + \lambda \bar{u}, \quad (4.1)$$

se denomina *forma vectorial de la ecuación de la recta*.

Ahora bien, seguramente al lector le es más familiar la definición de recta como el lugar geométrico siguiente;

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By + C = 0 \text{ con } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ y } A \text{ ó } B \neq 0 \right\},$$

además de los casos particulares “de punto y pendiente” o “de la recta determinada por dos puntos”.

A continuación demostramos que nuestra definición abarca todos esos casos.

Para ello, observemos que la ecuación vectorial (4.1) puede interpretarse así: primero se genera la recta por el origen (o subespacio)  $\lambda \bar{u}$  y luego se traslada esa recta paralelamente hasta que pase por el punto  $P_0$

$$P = P_0 + \lambda \bar{u}.$$

Para cada uno de los puntos  $P$  en la recta, el vector de  $P_0$  a  $P$  es paralelo a  $\bar{u}$ :

$$P - P_0 = \lambda \bar{u},$$

En consecuencia,  $P - P_0$  es perpendicular a cualquier vector  $(A, B)$  perpendicular a  $\bar{u}$ . Pero si  $(A, B)$  es perpendicular a  $\bar{u}$  entonces

$$(A, B) \cdot \lambda \bar{u} = 0.$$

De las dos igualdades anteriores obtenemos otra ecuación vectorial:

$$(P - P_0) \cdot (A, B) = 0, \quad (4.2)$$

y si las coordenadas de  $P$  y  $P_0$  son  $P(x, y)$  y  $P_0(x_0, y_0)$ , respectivamente, la condición anterior da lugar a la ecuación

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0,$$

que puede escribirse así:

$$Ax + By + C = 0. \quad (4.3)$$

donde  $C = -(Ax_0 + By_0)$ .

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación general de la recta en el plano*, porque cualquier recta del plano tiene una ecuación de esta forma.

La afirmación recíproca también es cierta, pues dada una ecuación de primer grado en dos variables,  $Ax + By + C = 0$ , si  $P_0(x_0, y_0)$  satisface la ecuación, es decir, si

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

entonces el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que satisfacen dicha ecuación coincide con la recta  $\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$  donde  $\bar{u} = (-B, A)$  :

$$0 = Ax + By + C = Ax + By - (Ax_0 + By_0) = (x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B).$$

Las dos afirmaciones pueden resumirse en un teorema.

**Teorema** Cualquier recta  $\mathcal{L}$  del plano cartesiano determina una ecuación polinomial de primer grado en dos variables  $Ax + By + C = 0$ . Y recíprocamente, cualquier ecuación de primer grado en dos variables es la ecuación de una recta.

Nótese que si  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ , las ecuaciones

$$Ax + By + C = 0 \text{ y } \lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0 \text{ para } \lambda \neq 0,$$

sólo son aparentemente distintas pues la condición  $\lambda \neq 0$  en la segunda ecuación implica  $Ax + By + C = 0$ .

De nuestro análisis es claro que la interpretación geométrica de los coeficientes  $A$  y  $B$  es que determinan un vector  $(A, B)$  perpendicular a la recta, en tanto que el término independiente  $C$  puede escribirse como  $C = -(Ax_0 + By_0)$  si  $(x_0, y_0)$ , son las coordenadas de un punto en la recta. La relación

$$C = -(Ax_0 + By_0) = -(x_0, y_0) \cdot (A, B).$$

puede leerse, según aprendimos del producto punto en el capítulo anterior, salvo por el factor  $\|(A, B)\|$ , como el negativo de la proyección del vector  $(x_0, y_0)$  en el vector unitario  $(A, B)/\|(A, B)\|$  (véase la Figura 4.1).

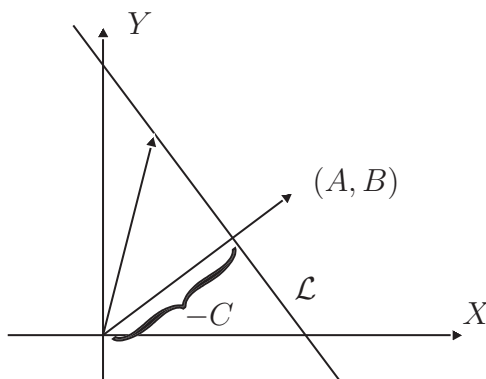


Figura 4.1: Interpretación geométrica de los coeficientes de  $Ax + By + C = 0$  cuando  $\|(A, B)\| = 1$ .

La figura muestra que la proyección es la misma no importa cuál punto se considere como punto de apoyo de la recta (es el segmento de perpendicular del origen a la recta), y que el producto escalar diferirá en signo dependiendo de que la recta esté de uno u otro lados del origen (se anula cuando la recta pasa por el origen).

En el capítulo 1 definimos la distancia de un punto a una recta como la longitud del segmento de perpendicular del punto a la recta, y por eso cuando  $(A, B)$  tiene norma 1 podemos interpretar  $C$  como la *distancia orientada del origen a la recta* (véase la Figura 4.1). Como el producto escalar  $C = -(x_0, y_0) \cdot (A, B)$ ,  $C$  será negativo si  $(A, B)$  y la proyección tienen el mismo sentido (tome en cuenta el signo  $-$ ), y positivo si  $(A, B)$  y las proyecciones tienen sentidos opuestos.

Todas las demás formas de la ecuación de la recta se obtienen de la ecuación general, como veremos a continuación.

La *forma de pendiente y ordenada al origen* puede darse si  $B \neq 0$ , pues entonces podemos despejar  $y$  de la ecuación general para obtener

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

que suele escribirse como

$$y = mx + b. \quad (4.4)$$

En vista de la interpretación que ya teníamos del vector  $(A, B)$  como un vector perpendicular a la recta, resulta que el coeficiente  $m = -A/B$  del

término en  $x$  es precisamente la *pendiente de la recta*, pues  $m$  es la tangente del ángulo  $\theta$  que forma el vector  $(B, -A)$  de dirección de la recta con el vector  $(1, 0)$ . Para el término independiente,  $b = -C/B$ , la interpretación geométrica es la *ordenada al origen*, pues es la ordenada del punto en que la recta corta al eje  $Y$ , es decir, si sustituimos  $x = 0$  en la ecuación (4.4) obtenemos  $y = b$  (véase la figura siguiente).

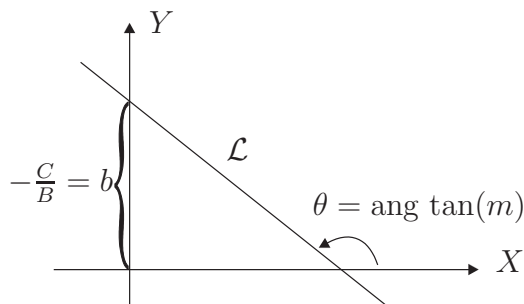


Figura 4.2: Interpretación geométrica de los coeficientes de  $y = mx + b$ .

La *forma de punto y pendiente* se obtiene cuando se conoce la pendiente  $m$  (y, por tanto, la dirección  $(1, m)$ ) y un punto de apoyo  $P_0(x_0, y_0)$ . Entonces, un punto genérico  $P(x, y)$  de la recta determina con  $P_0(x_0, y_0)$  un vector paralelo a  $(1, m)$  y, en consecuencia, (véase la Figura 4.3):

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{m}{1},$$

lo cual suele escribirse así

$$y - y_0 = m(x - x_0). \quad (4.5)$$

La *forma de la ecuación de la recta dados dos puntos* utiliza la misma idea geométrica del caso anterior, sólo que directamente sustituimos el coeficiente  $m$  de la ecuación (4.5) por el cociente  $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$  de la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las abscisas de los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Aquí es muy importante observar que debe respetarse el orden en que se toman las diferencias, es decir, si de la ordenada del segundo punto restamos la ordenada del primero, también debe restarse de la abscisa del segundo punto la abscisa del primero (véase la Figura 4.3). Ahora podemos usar el caso anterior, si como punto de apoyo tomamos cualquiera de los puntos

$P_1$  o  $P_2$ ; la ecuación toma la forma

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (4.6)$$

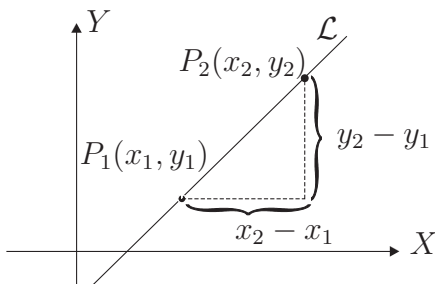


Figura 4.3: Interpretación geométrica de los coeficientes de la ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

La *forma paramétrica de la ecuación de la recta* en el plano resulta de la forma vectorial (4.1) cuando introducimos las coordenadas  $(x, y)$  para  $P$ ,  $(x_0, y_0)$  para  $P_0$  y  $(u_1, u_2)$  para  $\bar{u}$ :

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2).$$

Si escribimos la igualdad entre las coordenadas del vector de la izquierda y el de la derecha (se acostumbra escribir  $t$  en vez de  $\lambda$ ) obtenemos:

$$x = x_0 + tu_1, \quad y = y_0 + tu_2, \quad (4.7)$$

donde  $t$  puede tomar cualquier valor real.

La *forma normal de la ecuación de la recta* en el plano cartesiano puede darse cuando las dos coordenadas de  $\bar{u}$  son no nulas, y resulta si de cada una de las componentes de la forma paramétrica despejamos  $t$  e igualamos las expresiones obtenidas:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \quad (4.8)$$

Éstas son todas las formas de la ecuación de la recta en  $\mathbb{R}^2$ . Como son ecuaciones de lugares geométricos, “están todos los que son y son todos los que están”, es decir un punto pertenece a la recta si y sólo si satisface alguna de las formas de la ecuación de la recta.



Vale la pena mencionar que se denomina *haz de rectas* al conjunto de todas las rectas que pasan por un punto fijo  $P_0$  (hay tantas como diámetros en un círculo con centro en  $P_0$ ); la dirección  $\bar{u}$  puede ser cualquiera y el haz está determinado por el punto  $P_0$  (haga un dibujo).

También podemos fijar la dirección  $\bar{u}$  variando el punto de apoyo; en este caso se dice que las rectas pertenecen a un *haz de paralelas*. En la geometría de la perspectiva se dice que las paralelas tienen en común un “punto al infinito” (véanse [H-C] o [R-Se]).

## Desigualdades lineales y semiplanos

Si en la ecuación general de la recta sustituimos las coordenadas de un punto  $Q^*(x^*, y^*)$  que no pertenece a la recta, por la propiedad de tricotomía de los números reales tenemos dos posibilidades para el número  $Ax^* + By^* + C$ :

$$Ax^* + By^* + C > 0 \quad \text{ó} \quad Ax^* + By^* + C < 0;$$

cuya validez depende de que el punto esté de un lado de la recta o del otro.

**Definición.** Llamamos *semiplano* a cada una de las regiones del plano delimitadas por una recta.

De hecho, fija una ecuación para la recta, cada uno de los semiplanos determinados por la recta está caracterizado por el signo que se obtiene al sustituir las coordenadas de un punto en ese lado. Lo anterior se justifica mediante las igualdades siguientes, que utilizan la expresión de  $C$  obtenida anteriormente:

$$Ax^* + By^* + C = (A, B) \cdot (x^*, y^*) - (x_0, y_0) \cdot (A, B) = (A, B) \cdot (x^* - x_0, y^* - y_0),$$

donde  $(x_0, y_0)$  es un punto en la recta. Como el vector  $(A, B)$  está fijo, con sentido definido, el vector  $(x^* - x_0, y^* - y_0)$  se proyecta en el mismo sentido o en sentido opuesto de  $(A, B)$  dependiendo de que el ángulo entre ambos vectores sea menor o mayor que un ángulo recto, y el ángulo recto sólo se forma si  $(x^*, y^*)$  está en la recta (véase la Figura 4.4), por eso la *distancia orientada* del punto  $Q^*$  a la recta  $\mathcal{L}$  puede encontrarse así:

$$d(Q^*, \mathcal{L}) = \frac{Ax^* + By^* + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (4.9)$$

La argumentación anterior puede resumirse así.

**Lema.** Cualquier semiplano es el lugar geométrico correspondiente a una de las desigualdades lineales

$$Ax^* + By^* + C > 0 \quad \text{ó} \quad Ax^* + By^* + C < 0. \quad (4.10)$$

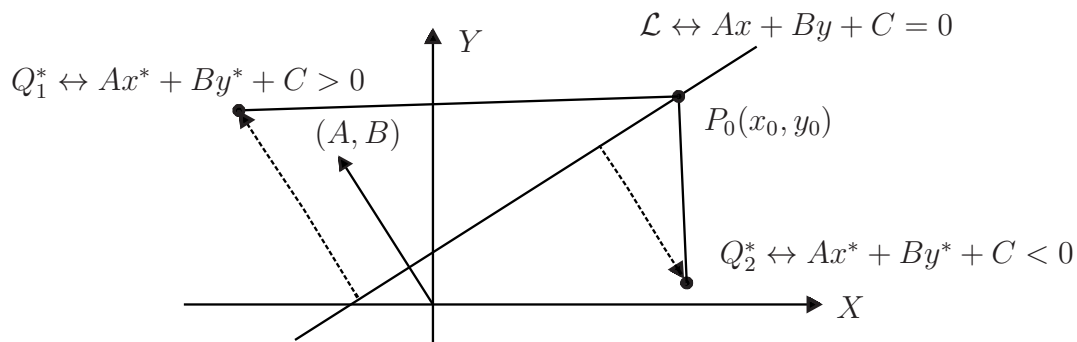


Figura 4.4: Cada semiplano corresponde a un signo de  $Ax^* + By^* + C$

Note que hay una diferencia esencial entre los lugares geométricos correspondientes a una ecuación o a una desigualdad: para la ecuación tenemos sólo una recta, en tanto que para una de las desigualdades es todo un semiplano. Tiene sentido decir que la recta tiene un *grado de libertad*, y que un semiplano tiene *dos grados de libertad*, porque si elegimos un valor de  $x_0$  y queremos satisfacer la ecuación, el valor de  $y_0$  está determinado:

$$y_0 = -(B/A)x_0 - (C/A),$$

mientras que si queremos satisfacer una desigualdad y elegimos  $x_0$ , para que se cumpla la desigualdad los posibles valores de  $y$  tienen libertad de recorrer todo un intervalo infinito,

$$y \leq y_0 \quad \text{ó} \quad y \geq y_0$$

es decir, también podemos elegir  $y_0$ .

Observe que si multiplicamos la ecuación de la recta por un número negativo, el signo que caracteriza a cada semiplano cambia porque el cambio de signo corresponde a un cambio en la dirección del vector normal y eso da lugar a un cambio de signo en las proyecciones.

## EJERCICIOS

- Dé todas las formas de la ecuación de la recta determinada por cada una de las condiciones siguientes:
  - La recta por el origen y que forma un ángulo de  $45^\circ$  con la parte positiva del eje  $X$ .
  - La recta por los puntos  $(1, 3)$  y  $(2, 3)$ .
  - La recta con pendiente  $-2/3$  y ordenada al origen  $-3$ .
  - La recta con dirección  $\bar{u} = (3, -4)$  apoyada en el punto  $P(2, -1)$ .
- Escriba la ecuación general de dos rectas del haz determinado por el origen y forme una combinación lineal de dichas ecuaciones. ¿Es la ecuación de una recta? ¿Es una recta por el origen?
- Dé tres rectas del haz de paralelas con dirección  $\bar{u} = (1, 2)$ .
- Si  $\bar{u} = (1, 2, 3)$  y  $t \in \mathbb{R}$  recorre el segmento  $[0, 2]$  de longitud 2, ¿cuál es la longitud del segmento de recta correspondiente, es decir,

$$\{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + t\bar{u}, t \in [0, 2]\}.$$

- Para la ecuación general que propuso en cada uno de los incisos del ejercicio 1, ilustre el semiplano cuyos puntos dan lugar a números negativos.
- Dibuje dos semiplanos sin puntos comunes. ¿Puede establecer la condición sobre las rectas frontera que da lugar a esa situación?
- Determine la recta paralela a  $x + y + 1 = 0$  cuya distancia orientada al origen es la negativa de la distancia de la recta dada.
- Verifique que  $(x, y)$  pertenece a la recta por  $P(a, b)$  y  $Q(c, d)$  si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta forma de la ecuación de la recta proviene de la Geometría Afín (vea [R-Se]).

## 4.2 Rectas en $\mathbb{R}^3$

La forma vectorial de la ecuación de la recta en  $\mathbb{R}^2$  tiene la ventaja de que su escritura no necesitó de precisar las coordenadas de los puntos, simple-

mente estableció el hecho de una recta es un subespacio de dimensión 1 o un trasladado de un tal subespacio. En consecuencia, la definición de recta en  $\mathbb{R}^3$  tiene exactamente la misma forma y sólo difiere en el hecho de que tanto el punto de apoyo como el vector de dirección pertenecen a  $\mathbb{R}^3$ .

Por tanto, establecemos que la *forma vectorial de la ecuación de una recta*  $\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$  en  $\mathbb{R}^3$  con dirección  $\bar{u}$  apoyada en el punto  $P_0$  es

$$P = P_0 + \lambda \bar{u}, \quad (4.11)$$

donde  $P_0, \bar{u} \in \mathbb{R}^3$  son fijos,  $\bar{u} \neq \bar{0}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En el capítulo 3 pedimos al lector comprobar que si “otra” recta tiene la forma

$$P = Q_0 + \mu \bar{v},$$

donde  $Q_0 \in \mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$  y  $\bar{v} = \alpha \bar{u}$ , entonces las dos rectas coinciden.

Desde luego, de esta forma se desprenden las demás formas de la ecuación de la recta en  $\mathbb{R}^3$ , como

$$P - P_0 = \lambda \bar{u}, \quad (4.12)$$

que expresa el hecho de que el vector  $P - P_0$  es paralelo al vector  $\bar{u}$ .

Pero hay que notar que no todas las generalizaciones de las distintas formas de la ecuación de la recta en el plano cartesiano corresponden a una recta en  $\mathbb{R}^3$ ; por ejemplo, la ecuación general de primer grado en tres variables no corresponde a una recta en  $\mathbb{R}^3$  sino a un plano, porque los vectores perpendiculares a un vector fijo  $\bar{n} \neq \bar{0}$  constituyen todo un plano por el origen (véase la Figura 4.5).

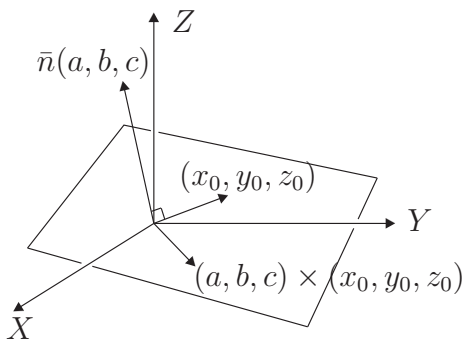


Figura 4.5: Los vectores perpendiculares a  $\bar{n} \in \mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}$  forman un plano, no una recta.

La comprobación es muy simple: dado  $\bar{n} = (a, b, c) \neq \bar{0}$ , para que  $(u_1, u_2, u_3)$  sea perpendicular a  $\bar{n}$  debe cumplirse

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0,$$

y si  $a \neq 0$  podemos despejar  $u_1$ ,

$$u_1 = -(b/a)u_2 - (c/a)u_3,$$

lo cual muestra que  $u_2$  y  $u_3$  pueden elegirse arbitrariamente quedando determinado  $u_1$ . Si ahora formamos el producto vectorial de  $(a, b, c)$  con  $(u_1, u_2, u_3)$  obtenemos otro vector perpendicular a  $\bar{n}$  y linealmente independiente con  $(x_0, y_0, z_0)$ . Ambos vectores generan un plano por el origen perpendicular al vector original  $\bar{n}$ .

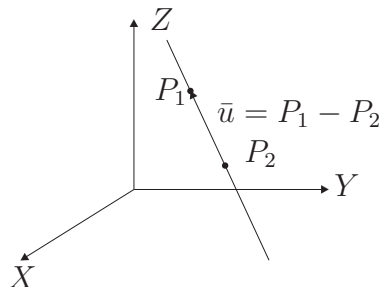


Figura 4.6: Interpretación geométrica de los coeficientes de  $P = P_1 + \lambda(P_1 - P_2)$ .

En cambio, sí es cierto que dados dos puntos distintos queda determinada una recta, pues si los puntos son  $P_1$  y  $P_2$  el vector  $\bar{u} = P_1 - P_2$  (que comienza en el punto  $P_2$  y termina en el punto  $P_1$ ) define la dirección de la recta y cualquiera de los puntos puede jugar el papel de punto de apoyo. Entonces, la *forma de la ecuación de la recta determinada por dos puntos* en el espacio cartesiano es

$$P = P_1 + \lambda(P_1 - P_2), \quad (4.13)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  puede tomar cualquier valor real; el papel geométrico de  $P_1$  y de  $P_1 - P_2$  está ilustrado en la Figura 4.6.

También hay una *forma paramétrica de la ecuación de la recta en el espacio cartesiano*, que resulta al escribir la ecuación (4.11) en términos de coordenadas; si las coordenadas de  $P$ ,  $P_0$  y  $\bar{u}$  son, respectivamente,  $(x, y, z)$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  y  $(u_1, u_2, u_3)$  obtenemos, cuando escribimos  $t$  en vez de  $\lambda$ :

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_2, u_3),$$

e igualando coordenadas resulta

$$x = x_0 + tu_1, \quad y = y_0 + tu_2, \quad z = z_0 + tu_3. \quad (4.14)$$

Para obtener de la anterior la *forma normal de la ecuación de la recta* en el espacio cartesiano, consideramos el caso especial en que las tres coordenadas de  $\bar{u}$  son no nulas. Entonces, al despejar  $t$  de cada una de las tres igualdades de 4.14 e igualar las expresiones obtenidas resulta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}. \quad (4.15)$$

Como en el caso del plano, si tomamos la forma vectorial de la ecuación de la recta y fijamos primero el punto de apoyo  $P_0$  permitiendo variar la dirección, obtenemos el conjunto de las rectas que se apoyan en  $P_0$ , denominado también en este caso *haz de rectas por  $P_0$* , formado por las rectas que contienen a los diámetros de una esfera con centro en  $P_0$  y que ilustramos en la Figura 4.7

En cambio, cuando fijamos la dirección  $\bar{u}$  y permitimos variar el punto de apoyo, lo que obtenemos es un *haz de rectas paralelas* que llenan el espacio. Se le llama haz porque, como ya lo mencionamos en el inciso anterior, tiene sentido decir que las paralelas pasan por un mismo “punto al infinito”.

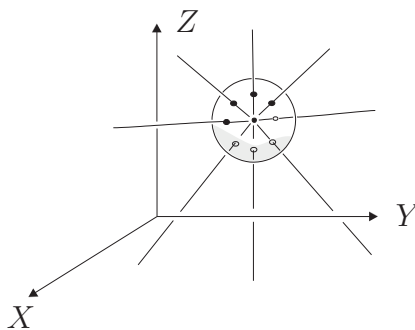


Figura 4.7: Haz de rectas por un punto  $P_0 \in \mathbb{R}^3$ .

Ahora bien, dos rectas en el espacio tienen tres tipos de ubicaciones relativas: pueden ser paralelas (cuando sus vectores de dirección son múltiplos uno de otro), pueden cortarse en un punto (cuando están en direcciones distintas pero tienen un punto en común) o pueden cruzarse, como ocurre con el eje  $Y$  y la recta en el plano  $XZ$  paralela al eje  $X$  apoyada en el punto  $(0, 0, 1)$ , que tienen direcciones distintas y ningún punto en común (haga una figura).

Entonces, dos rectas que se cruzan no son paralelas ni se cortan, pero sí tienen una perpendicular en común, cuyo vector de dirección,  $\bar{w}$  es el producto vectorial de los vectores de dirección  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  de cada una de las rectas; en el caso del ejemplo anterior, esa perpendicular común es el eje  $Z$ .

La *distancia entre dos rectas que se cruzan*,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$ , es la longitud del segmento de perpendicular común, que puede encontrarse con la fórmula siguiente:

$$d(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = |\hat{u} \cdot (P_0 - Q_0)|,$$

donde  $\hat{u}$  es un vector unitario perpendicular a ambas rectas, y  $P_0 \in \mathcal{L}$  y  $Q_0 \in \mathcal{M}$ . El lector queda encargado de justificar la fórmula.

Conviene observar que en la forma vectorial de la ecuación de la recta, (4.11),  $\lambda > 0$  determina un rayo de  $\mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$  a partir de  $P_0$  y  $\lambda < 0$  determina el rayo complementario.

Y si en la ecuación (4.13) reemplazamos  $P_1$  por  $Q$  y  $P_2$  por  $R$ , vemos que cuando  $\lambda$  recorre el intervalo  $[0, 1]$ , el punto  $P$  describe el *segmento*  $[Q, R]$ . Más aún,  $\lambda = 1/n$  determina el punto  $P_n$  que divide al segmento  $[Q, R]$  en la razón (haga un dibujo)

$$\frac{||P_n - Q||}{||R - P_n||} = \frac{1}{n-1}.$$

## EJERCICIOS

1. Demuestre que las rectas

$$\mathcal{L}_{Q_0, \bar{v}} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$$

coinciden si y sólo si  $Q_0 \in \mathcal{L}_{P_0, \bar{u}}$  y  $\bar{v} = \alpha \bar{u}$  para algún  $\alpha \neq 0$ .

2. Determine todas las formas de la ecuación de cada una de las rectas especificadas a continuación:
  - (a) La recta por los puntos  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 1, 1)$ .
  - (b) La recta con dirección  $(1, 1, 1)$  apoyada en el punto  $(0, 0, -1)$ .
  - (c) La recta paralela al eje  $Z$  por el punto  $(1, -1, 1)$ .
  - (d) La recta paralela al eje  $Y$  por el punto  $(-1, -1, -1)$ .
  - (e) La recta paralela al eje  $X$  por el punto  $(1, 1, -1)$ .
3. Dibuje en gráficas separadas cada una de las rectas del ejercicio anterior.

4. Dibuje en una misma gráfica las rectas por el origen paralelas a cada una de las rectas del ejercicio anterior.
5. Dé un criterio para decidir, comparando sus ecuaciones vectoriales, si dos rectas son paralelas, se cortan o se cruzan.
6. Determine si cada dos rectas del ejercicio 2 son paralelas, se cortan o se cruzan.
7. Determine las coordenadas del punto  $R \in \mathbb{R}^3$  que divide al segmento  $[P, Q]$  en la razón  $r = 0.75$ , si las coordenadas de  $P$  y  $Q$  son  $(1, 2, 3)$  y  $(4, 5, 6)$ , respectivamente.
8. Demuestre la validez de la fórmula para la distancia entre dos rectas que se cruzan.

## 4.3 Planos y semiespacios en $\mathbb{R}^3$

La primera forma de la ecuación de un plano en el espacio cartesiano la dimos al definir un plano como un subespacio de dimensión 2 o como el trasladado de un tal subespacio por uno cualquiera (pero fijo) de sus puntos, y en el inciso pasado comprobamos que una ecuación de primer grado en tres variables también corresponde a un plano. A continuación consignamos todas las formas de la ecuación de un plano en el espacio cartesiano.

La *forma vectorial de la ecuación del plano* es

$$\mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + \lambda \bar{u} + \mu \bar{v}\}, \quad (4.16)$$

donde  $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  son linealmente independientes, y  $\lambda, \mu$  toman cualquier valor real.

De esta forma vectorial se obtiene otra muy útil con sólo recordar que el producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ambos, pues de la ecuación (4.16) resulta

$$P - P_0 = \lambda \bar{u} + \mu \bar{v},$$

y si denotamos  $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}$ , como el producto vectorial se distribuye sobre la suma de vectores y saca escalares, al multiplicar escalarmente por  $\bar{n}$  ambos miembros de esta igualdad obtenemos

$$(P - P_0) \cdot \bar{n} = 0, \quad (4.17)$$



que expresa el hecho geométrico de que para cualquier punto  $P$  en el plano  $\mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}}$  el vector  $P - P_0$  es perpendicular al vector  $\bar{n}$  (haga un dibujo).

De la ecuación (4.17) es inmediato obtener la *forma general de la ecuación de un plano*  $\mathcal{P}$  si introducimos coordenadas  $(x, y, z)$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  y  $(A, B, C)$  para  $P$ ,  $P_0$  y  $\bar{n}$ , respectivamente, pues entonces la ecuación (4.17) da lugar a

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0,$$

y si efectuamos la multiplicación podemos escribir

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz + D = 0 \text{ con } (A, B, C) \neq \bar{0}\}, \quad (4.18)$$

donde  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ .

Ahora bien, en el caso de la ecuación general de primer grado en dos variables, cuyo lugar geométrico es una recta, dimos una interpretación geométrica a los coeficientes de las variables y al término independiente. En este caso también podemos decir que los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, forman un vector perpendicular al plano, mientras que el término independiente  $D$  es, salvo por el factor  $\|(A, B, C)\|$ , la distancia orientada del origen al plano según lo exhiben la figura y los cálculos siguientes.

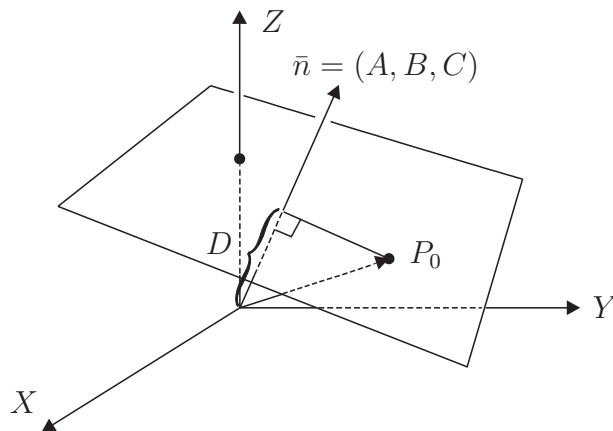


Figura 4.8: Interpretación geométrica de los coeficientes de la ecuación general del plano cuando  $\|(A, B, C)\| = 1$ .

Para demostrar que  $D$  es  $\|(A, B, C)\|$  veces la distancia orientada del origen al plano  $\mathcal{P}$ , basta recordar que si en el producto escalar uno de los vectores

es unitario, el producto punto puede interpretarse como la proyección del otro vector sobre el unitario. Por tanto, si  $\|(A, B, C)\| = 1$ , el producto escalar de  $(x, y, z)$  (visto como el vector ilustrado en la Figura 4.8 por  $(A, B, C)$  da lugar a las igualdades siguientes, obtenidas de la ecuación (4.18):

$$-D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = (A, B, C) \cdot (x_0, y_0, z_0).$$

Cuando el vector  $(A, B, C)$  no es unitario, para obtener la proyección deseada (que es, salvo por el signo, la longitud del segmento de perpendicular del origen al plano) deberemos dividir  $D$  entre la norma  $\|(A, B, C)\|$ . El término independiente  $D$  será negativo si el plano está del mismo lado del origen que “la cabeza” del vector  $(A, B, C)$ , cuando  $D$  es positivo el plano y la “cabeza” del vector normal están en lados distintos respecto al origen, y cuando el plano pasa por el origen el término independiente  $D$  se anula.

Es importante notar que de la definición de plano expresada por la ecuación (4.16) pudimos obtener la ecuación general (4.18), y en el inciso anterior habíamos demostrado la implicación inversa. Por tanto, hemos establecido el teorema siguiente.

**Teorema** Cualquier plano del espacio cartesiano determina una ecuación de primer grado en tres variables,  $Ax + By + Cz + D = 0$ , y recíprocamente, cualquier ecuación de primer grado en tres variables tiene como lugar geométrico un plano del espacio cartesiano.

Otra forma de la ecuación del plano resulta cuando fijamos tres puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  ubicados en el plano pero no colineales; entonces los vectores  $P_2 - P_1$  y  $P_3 - P_1$  juegan el papel de  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  de la ecuación (4.16) y cualquiera de los puntos puede jugar el papel de punto de apoyo para dar lugar a la *forma determinada por tres puntos* de la ecuación del plano:

$$\mathcal{P}_{P_1, P_2, P_3} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_1 + \lambda(P_2 - P_1) + \mu(P_3 - P_1)\}, \quad (4.19)$$

y la Figura 4.9 ilustra el papel de los parámetros en este caso.

La última forma de la ecuación del plano es la *forma paramétrica*, sólo que a diferencia de los casos de la recta en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ , en los que hay sólo un parámetro, para un plano hay dos parámetros, dos *grados de libertad* que escribiremos como  $s$  y  $t$ . Esta forma resulta cuando en la ecuación (4.16)

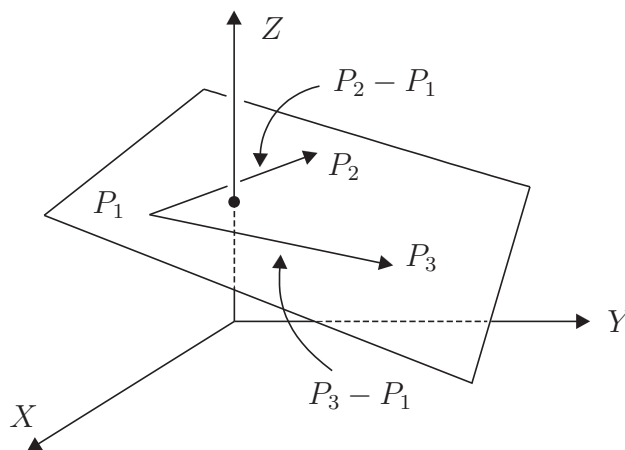


Figura 4.9: Interpretación geométrica de los coeficientes en  $\mathcal{P}_{P_1, P_2, P_3}$ .

introducimos coordenadas e igualamos las coordenadas del lado izquierdo y del lado derecho después de reemplazar  $\lambda$  y  $\mu$  por  $s$  y  $t$ , respectivamente:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

da lugar a

$$x = x_0 + su_1 + tv_1, \quad y = y_0 + su_2 + tv_2, \quad z = z_0 + su_3 + tv_3, \quad (4.20)$$

donde  $s$  y  $t$  pueden tomar cualquier valor real.

## Desigualdades lineales y semiespacios

Antes de pedir al lector trabajar con todas estas formas de la ecuación del plano, haremos la misma pregunta que en el caso de una recta en el plano:

¿Qué ocurre cuando un punto  $Q^*(x^*, y^*, z^*)$  no pertenece a un plano dado y sustituimos sus coordenadas en la ecuación general de dicho plano?

Por la propiedad de tricotomía, el número  $Ax^* + By^* + Cz^* + D$  sólo puede ser mayor o menor que 0. Según sabemos, si  $\|(A, B, C)\| = 1$ , el producto escalar  $(A, B, C) \cdot (x^*, y^*, z^*)$  da la proyección del vector  $(x^*, y^*, z^*)$  ilustrado en la figura siguiente en la dirección definida por  $(A, B, C)$ .

Por otro lado, hemos establecido que  $D$  expresa la distancia orientada del origen al plano. Análogamente, el número  $Ax^* + By^* + Cz^* + D = (A, B, C) \cdot (Q^* - P_0)$  expresa la distancia del punto  $Q^*$  al plano, pues no es más que

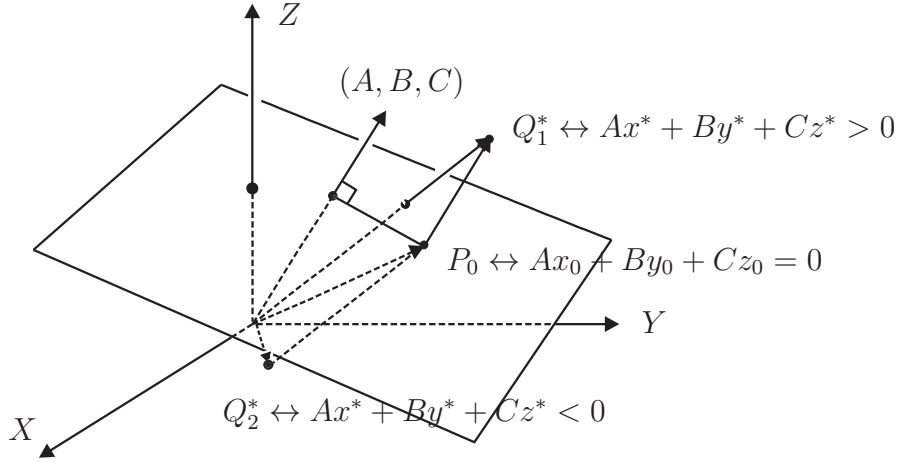


Figura 4.10: Semiespacios determinados por el plano  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

la proyección del vector  $(x^*, y^*, z^*) - (x_0, y_0, z_0)$  en la dirección definida por  $(A, B, C)$ , donde  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  es un punto en el plano (véase la Figura 4.10). Por tanto, los puntos en uno de los lados del plano darán lugar a un número positivo y los del otro lado darán lugar a un número negativo; lo anterior da una interpretación geométrica a la definición formal siguiente.

**Definición.** Un *semiespacio* es cualquiera de las regiones del espacio separadas por un plano de ecuación  $Ax + By + Cz + D = 0$ , y cada uno están caracterizado por una de las desigualdades

$$Ax + By + Cz + D > 0 \quad \text{ó} \quad Ax + By + Cz + D < 0.$$

También hemos obtenido una forma sencilla de calcular la distancia de un punto  $Q^*(x^*, y^*, z^*)$  a un plano, misma que denotaremos por  $d(Q^*, \mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}})$ :

$$d(Q^*, \mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}}) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\|(A, B, C)\|}. \quad (4.21)$$

Nótese que si el punto está en el plano la distancia es cero, y que si suprimimos las barras de valor absoluto en el numerador, obtenemos una distancia orientada.

Hay una diferencia en dimensión entre un plano y un semiespacio: en un plano hay *dos grados de libertad* y en un semiespacio hay *tres grados de libertad*,

pues si en la ecuación  $2x + 3y + 4z + 5 = 0$  sustituimos valores arbitrarios  $a$  y  $b$  para  $x$  y  $y$  respectivamente, el valor  $c$  de  $z$  que logra  $(a, b, c) \in \mathcal{P}_{P_0, \bar{u}, \bar{v}}$  está forzado por la ecuación y es:

$$c = -\frac{2a + 3b + 5}{4}$$

en tanto que para una desigualdad, dados valores  $a$  de  $x$  y  $b$  de  $y$ , si un valor  $c$  de  $z$  es menor que el valor anterior, hay todo un intervalo infinito de valores de  $z$  que satisfacen la desigualdad, de hecho,

$$z < -\frac{2a + 3b + 5}{4}$$

es decir,  $z$  también es libre a partir de un cierto valor.

Como en el caso de los semiplanos definidos por una recta en  $\mathbb{R}^2$ , al multiplicar la ecuación general de primer grado en tres variables por un número negativo, los signos correspondientes a cada semiespacio se intercambian porque la multiplicación por un número negativo equivale a cambiar el sentido al vector normal y, en consecuencia, las proyecciones también cambian de signo. Por eso fue necesario pedir, en el lema, que la ecuación del plano estuviera fija para distinguir cada semiespacio por el signo obtenido al sustituir las coordenadas  $(a, b, c)$  de un punto en uno de los semiespacios.

En algunas distribuciones de probabilidad, como la  $t$  de Student y la  $\chi^2$ , es necesario especificar los *grados de libertad*, cuyo número es igual a, por ejemplo,  $n - 1$  si los  $n$  datos disponibles debieron usarse para calcular el *estadístico de prueba* obtenido de una ecuación algebraica. El valor del estadístico determina una *hipersuperficie* de dimensión  $n - 1$  en el espacio  $n$ -dimensional de las muestras con  $n$  datos (véase [A].)

## EJERCICIOS

1. Dé todas las formas de la ecuación del plano determinado por cada una de las condiciones siguientes:
  - (a) El plano por el origen cuyo vector normal es  $(1, -1, 1)$ .
  - (b) El plano por los puntos  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$  y  $(3, 1, 2)$ .
  - (c) El plano paralelo al subespacio generado por los vectores  $(1, -1, 1)$  y  $(0, 0, 1)$  y con punto de apoyo  $(2, 1, 0)$ .

- (d) Un plano normal al vector  $(1, -1, 1)$  cuya distancia al origen sea 2.
- 2. Determine la distancia al origen de cada de los planos del ejercicio 1.
- 3. Dé tres planos que contengan al eje  $Z$ .
- 4. Tome las ecuaciones generales de los planos de los dos primeros incisos del ejercicio 1 y forme una combinación lineal de dichas ecuaciones. Compruebe que los tres planos tienen una recta en común.
- 5. Para la ecuación general que propuso en cada uno de los incisos del ejercicio 1, ilustre el semiespacio correspondiente a la desigualdad  $< 0$ .
- 6. Dé ejemplos de dos semiespacios sin puntos comunes, y dibújelos. ¿Puede establecer la condición que da lugar a esa situación?

## 4.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Como las ecuaciones lineales (o de primer grado en todas las variables) corresponden a rectas en  $\mathbb{R}^2$  o a planos en  $\mathbb{R}^3$  dependiendo de dónde deban considerarse, tomar varias de ellas que deban cumplirse simultáneamente equivale a preguntarse cuál es la intersección de los lugares geométricos.

**Definición.** Un *sistema de ecuaciones* es una colección de ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente, es decir, un punto es solución del sistema si verifica cada una de las ecuaciones del sistema.

Entonces, en el caso de sistemas de ecuaciones lineales en el plano o en el espacio cartesianos, estamos interesados en los puntos comunes a varias rectas en el plano o a varios planos en el espacio.

Nos restringiremos a estudiar los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (las llamaremos indistintamente variables) y los de tres ecuaciones lineales con tres variables por una razón sencilla.

Si el lector pide a tres personas que escriban una ecuación lineal en dos variables y luego dibuja las correspondientes rectas del plano cartesiano, lo “más probable” es que las tres rectas correspondan a los lados de un triángulo y, por tanto, no tendrán ningún punto en común. Algo análogo ocurre cuando tomamos más de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. El término “más probable” tiene una interpretación geométrica muy interesante, como veremos al final de nuestro análisis.

## Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

El *sistema general de dos ecuaciones lineales en dos variables* tiene la forma

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sabemos que cada ecuación corresponde a una recta  $\mathcal{L}_i$  y que los coeficientes de las variables determinan vectores normales  $(A_1, B_1)$  y  $(A_2, B_2)$  a cada una de las rectas mientras que los términos independientes  $C_1$  y  $C_2$  permiten determinar la distancia **orientada** de cada una de las rectas al origen mediante la fórmula

$$d(\mathcal{L}_i, \bar{0}) = \frac{C_i}{\|(A_i, B_i)\|}. \quad (4.23)$$

Entonces, basta determinar todas las posibles posiciones relativas entre los vectores normales y las distancias orientadas al origen de dos rectas en el plano. Nótese que en el análisis no importa la longitud de los vectores, sino que sean paralelos o no.

Si los vectores normales  $(A_1, B_1)$  y  $(A_2, B_2)$  son paralelos, las rectas pueden coincidir o ser paralelas y la distancia al origen permite distinguir cuál es el caso. En cambio, si los vectores normales son linealmente independientes, las rectas se cortan en un único punto que puede obtenerse utilizando determinantes.

Las posibilidades geométricas y las correspondientes caracterizaciones algebraicas son las siguientes (véase la Figura 4.11).

1. Las rectas pueden coincidir (Figura 4.11(a)); éste es el caso si las ecuaciones son una múltiplo de la otra, lo cual equivale a que cada uno de los coeficientes de la primera recta sea el mismo múltiplo del correspondiente coeficiente de la segunda recta, es decir,

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \quad \text{con } \lambda \neq 0,$$

Por tanto, los vectores normales son paralelos y la distancia al origen es la misma:

$$(A_1, B_1) = \lambda(A_2, B_2) \quad \text{y} \quad C_1/\|(A_1, B_1)\| = C_2/\|(A_2, B_2)\|.$$

2. Las rectas son paralelas (Figura 4.11(b)) sólo si los vectores normales son uno un múltiplo del otro pero las distancias de las rectas al origen difieren, lo cual equivale a

$$(A_1, B_1) = \lambda(A_2, B_2) \text{ y } C_1 \neq \lambda C_2.$$

3. La última posibilidad es que las dos rectas se corten en un sólo punto, lo cual ocurre si y sólo si los vectores normales no son múltiplos uno del otro, es decir,

$$(A_1, B_1) \neq \lambda(A_2, B_2) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

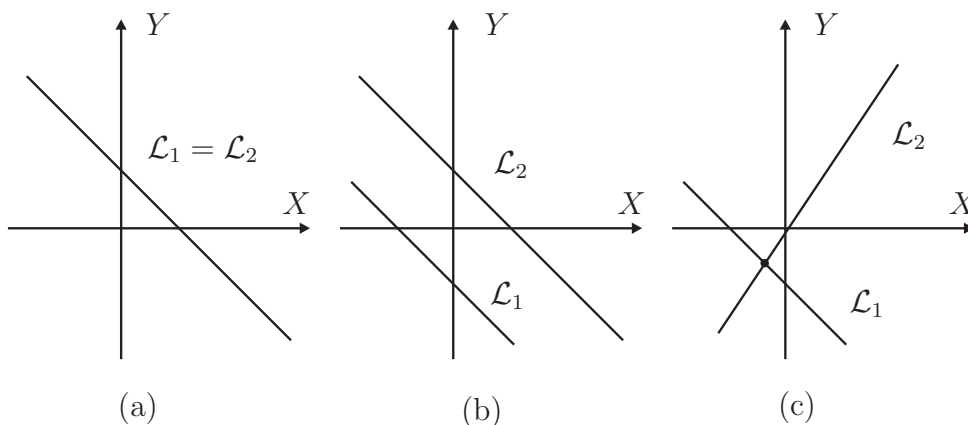


Figura 4.11: Posiciones relativas de dos rectas en el plano.

Nótese que en los casos 1) y 2) el *determinante del sistema*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

se anula, pero ambas situaciones son radicalmente distintas: en el caso 1) todos los puntos son comunes, es decir, el sistema tiene un número infinito de soluciones, mientras que en el caso 2) no hay puntos comunes, esto es, el sistema no tiene solución.

El caso 3) corresponde a que el determinante no se anule, lo cual es lo “más probable”, pues si damos cuatro números  $a, b, c$  y  $d$  al azar y formamos con



ellos un determinante de  $2 \times 2$ , pedir que el determinante  $ad - bc$  se anule equivale a que el cuarto número  $d$  satisfaga la relación  $d = (bc/a)$ , lo cual ocurre sólo para un número real y no sucede para los reales en cualquiera de los intervalos infinitos  $(-\infty, bc/a)$  y  $(bc/a, \infty)$ .

Si el determinante del sistema no se anula, el estudiante puede comprobar que las coordenadas del único punto solución se encuentran mediante el *método de Cramer* (véase [Bi]),

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

donde el denominador es, en ambos casos, el determinante del sistema, y los numeradores son los determinantes obtenidos al reemplazar los coeficientes de la variable que interesa por los términos independientes.

### Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

Si el lector resolvió el último ejercicio del inciso anterior, seguramente descubrió que, en general, dos planos en el espacio tienen puntos en común, pues para que dos planos no se corten sus vectores normales deben satisfacer la condición de ser paralelos y, además, las distancias al origen de ambos planos deben ser distintas.

Dejaremos como ejercicio al lector demostrar la afirmación siguiente, que puede resolverse en términos de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

**Afirmación.** Si dos planos no son paralelos, i.e., tienen vectores normales que no son paralelos, la intersección es no vacía y consta de todos los puntos de una recta cuya dirección está dada por el producto vectorial de los vectores normales de ambos planos.

Por tanto, es más interesante estudiar las posibilidades de intersección de tres planos en el espacio, es decir, las posibles soluciones de un *sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables*:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Sabemos que los coeficientes de las variables  $x, y$  y  $z$  dan lugar a un vector normal al plano correspondiente y que los términos independientes permiten determinar las distancias orientadas del plano al origen mediante la fórmula

$$d(\mathcal{P}_i, \bar{0}) = \frac{D_i}{\|(A_i, B_i, C_i)\|}. \quad (4.25)$$

A continuación demostramos que las posibilidades de intersección dependen de los tres vectores normales (los tres son paralelos dos a dos; uno es combinación de los otros dos; son linealmente independientes), y de las distancias de cada plano al origen, y en la Figura 4.12 están ilustradas las posibilidades geométricas.

1. Los tres planos pueden ser coincidentes; para ello es necesario que las dos últimas ecuaciones sean cada una un múltiplo de la primera, es decir, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned} (A_2, B_2, C_2) &= \lambda(A_1, B_1, C_1) & \text{y} & & D_2 &= \lambda D_1, \\ (A_3, B_3, C_3) &= \mu(A_1, B_1, C_1) & \text{y} & & D_3 &= \mu D_1, \end{aligned}$$

lo cual puede leerse así: los vectores normales a los “tres” planos son paralelos y las distancias al origen coinciden (Figura 4.12 (a)).

2. Dos de los planos coinciden y el tercero es paralelo; entonces la segunda ecuación es un múltiplo de la primera y para la tercera sólo los coeficientes que determinan el vector normal son múltiplo de los correspondientes coeficientes de la primera ecuación, mientras que el término independiente **no** debe ser ese mismo múltiplo del término independiente de la primera ecuación; en símbolos, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned} (A_2, B_2, C_2) &= \lambda(A_1, B_1, C_1) & \text{y} & & D_2 &= \lambda D_1, \\ (A_3, B_3, C_3) &= \mu(A_1, B_1, C_1) & \text{pero} & & D_3 &\neq \mu D_1, \end{aligned}$$

lo cual significa que los vectores normales a los tres planos son paralelos y dos de las distancias al origen coinciden mientras la tercera difiere (Figura 4.12 (b)).

3. Si los tres planos son paralelos, los vectores normales de los dos últimos son cada uno múltiplo del vector normal del primero pero las distancias al origen son todas distintas; eso implica que existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned} (A_2, B_2, C_2) &= \lambda(A_1, B_1, C_1) & \text{pero} & & D_2 &\neq \lambda D_1, \\ (A_3, B_3, C_3) &= \mu(A_1, B_1, C_1) & \text{pero} & & D_3 &\neq \mu D_1. \end{aligned}$$

La figura correspondiente es la 4.12 (c).

4. Cuando dos de los planos son paralelos y el tercero los corta, el vector normal del segundo es múltiplo del vector normal del primero pero las distancias no guardan la misma relación, y el vector normal del tercer plano no es múltiplo del vector normal del primer plano, es decir, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1), \text{ pero } D_2 \neq \lambda D_1,$$

y, además, para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$(A_3, B_3, C_3) \neq \mu(A_1, B_1, C_1).$$

La figura es la 4.12 (d).

5. Cuando dos de los planos coinciden y el tercero los corta (Figura 4.12(e)), la segunda ecuación es múltiplo de la primera pero el vector normal del tercer plano no es múltiplo del vector normal del primer plano; en símbolos,

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \text{ y } D_2 = \lambda D_1,$$

y para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$(A_3, B_3, C_3) \neq \mu(A_1, B_1, C_1).$$

6. Si los tres planos tienen una recta en común, como las hojas de un libro (Figura 4.12 (f)), las ecuaciones son linealmente dependientes pues el tercer plano pertenece al *haz de planos* que contienen a la recta de intersección de los dos primeros; entonces los vectores normales son linealmente dependientes y los términos lineales satisfacen la misma combinación que los vectores normales, esto es, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que

$$(A_3, B_3, C_3) = \lambda(A_1, B_1, C_1) + \mu(A_2, B_2, C_2), \text{ y } D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2.$$

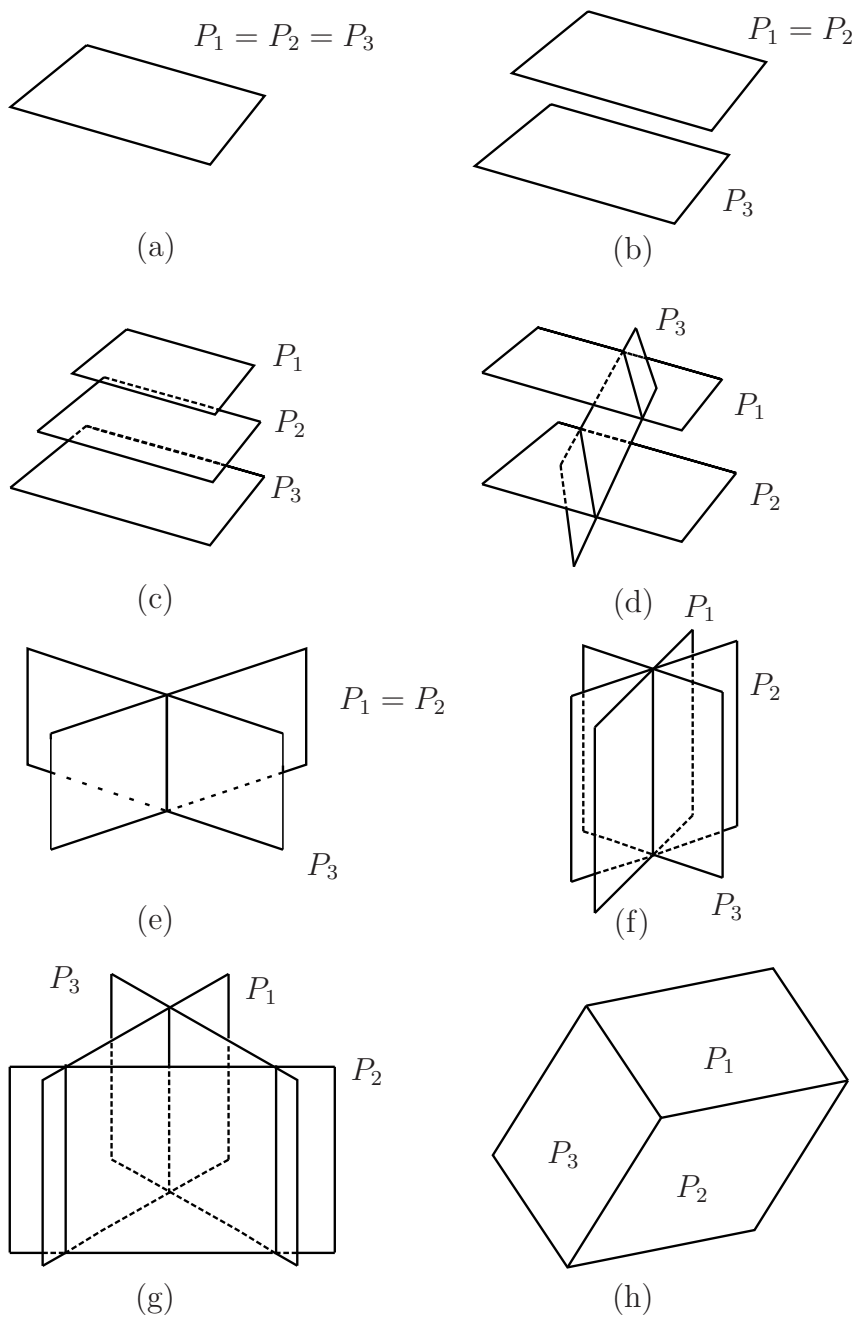


Figura 4.12: Posiciones relativas de tres planos en el espacio.

7. Si los tres planos son como las caras de un prisma triangular (Figura 4.12 (g)), los vectores normales son linealmente dependientes pero los términos independientes no satisfacen la misma combinación lineal que los vectores, es decir, existen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tales que

$$(A_3, B_3, C_3) = \lambda(A_1, B_1, C_1) + \mu(A_2, B_2, C_2), \text{ pero } D_3 \neq \lambda D_1 + \mu D_2.$$

8. Si los tres planos son como las caras de una pirámide triangular (Figura 4.12 (h)), sus vectores normales no son linealmente dependientes y, en consecuencia, el *determinante del sistema*:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

es no nulo.

Ésta es la caracterización algebraica de que los tres planos se corten en un único punto, (el vértice de la pirámide). Se dice que los tres planos están en *posición general*, pues para que tres vectores del espacio sean linealmente dependientes debe existir una combinación lineal no trivial de ellos que dé lugar al vector  $(0, 0, 0)$ .

Es inmediato comprobar, utilizando las propiedades de los determinantes demostradas en el capítulo anterior, que en los casos 1) a 7) el determinante del sistema se anula, pero es muy importante resaltar que eso no significa que el sistema no tenga solución pues, como lo muestran las correspondientes interpretaciones geométricas, la intersección puede ser todo un plano, una recta o vacía según el caso.

El lector deberá demostrar que cuando el determinante del sistema no es cero (caso 8)), las coordenadas del único punto de intersección se encuentran nuevamente por el *método de Cramer*,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}.$$

También ahora el denominador es, en todos los casos, el determinante del sistema, y los numeradores se forman, en cada caso, sustituyendo la columna de los coeficientes de la variable de que se trata por la columna de los términos independientes.

El lector puede analizar las posibilidades de solución de un sistema de  $n$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas estudiando primero si los vectores normales son todos paralelos, si algunos son linealmente dependientes, etc. y complementando esta información con la distancia de cada uno de los *hiperplanos* de  $\mathbb{R}^n$  al origen, donde por hiperplano entendemos el lugar geométrico de los puntos  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  que satisfacen una ecuación lineal en  $n$  variables:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + B = 0.$$

Vale la pena señalar que al arreglo de  $3 \times 3$  números que da lugar al determinante del sistema

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix},$$

se le llama *matriz del sistema*. Ya mencionamos que una matriz no es un número, sino que está asociada a una transformación entre espacios vectoriales (véase el Capítulo 7). El lector deberá tratar con ellas cuando obtenga la derivada de una función diferenciable de varias variables. Para un sistema de ecuaciones, la matriz del sistema permite analizar la compatibilidad de las condiciones impuestas por las ecuaciones (véase el Ejercicio 11).

## EJERCICIOS

1. Dé ejemplos de sistemas de 2 ecuaciones con dos incógnitas que correspondan a cada una de las tres posibilidades. Haga el dibujo correspondiente.
2. Determine la intersección de los pares de rectas correspondientes a cada uno de los sistemas siguientes. En cada caso, haga un dibujo.

$$(a) \quad \begin{array}{rclcl} -x & + & y & = & -1 \\ x & + & y & = & -1. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rclcl} -x & - & 2y & = & -3 \\ 3x & + & 2y & = & 1. \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{rrcr} -x & + & y & = & -1 \\ -x & + & y & = & 0. \end{array}$$

3. Demuestre que si los vectores normales de dos planos no son paralelos, entonces la intersección es una recta y diga cómo determinarla.
4. Determine la intersección de los pares de planos correspondientes a cada uno de los sistemas siguientes. En cada caso, haga un dibujo.

$$(a) \quad \begin{array}{rrcr} -x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & -1. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rrcr} -x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 1. \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{rrcr} -x & + & y & = & -1 \\ x & - & y & = & 1. \end{array}$$

5. Para cada uno de los casos ilustrados en la Figura 4.12, dé dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas que correspondan al dibujo.
6. Para cada uno de los sistemas siguientes, encuentre la solución y haga el dibujo correspondiente.

$$(a) \quad \begin{array}{rrcr} -x & + & z & = & -1 \\ x & - & z & = & 1 \\ -2x & + & 2z & = & -2. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rrcr} -x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 1. \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{rrcr} -x - 2y - 3z & = & 0 \\ -x + 2y + z & = & 2 \\ -3x - 2y + 5z & = & 1. \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{rrcr} x + 2y + 3z & = & 0 \\ -x + 2y + z & = & 2 \\ -3x - 2y + 5z & = & 2. \end{array}$$

7. Analice las posibles posiciones relativas de un plano y una recta en el espacio cartesiano, dé criterios para determinar cuál es el caso a partir de las ecuaciones del plano y la recta, y haga un dibujo para cada posibilidad.
8. Analice las posibles posiciones relativas de dos rectas en el espacio tridimensional, dé criterios para determinar cuál es el caso para dos rectas dadas, y haga un dibujo para cada caso.
9. Defina un *hiperplano de  $\mathbb{R}^4$*  como el lugar geométrico de los puntos  $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$  que satisfacen una ecuación lineal en 4 variables,  $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + B = 0$ , generalice adecuadamente el producto escalar y haga el análisis de las posibilidades de solución de un sistema de 4 ecuaciones lineales en 4 incógnitas.

10. Demuestre que cuando el determinante del sistema es distinto de cero la solución puede encontrarse mediante el método de Cramer.
11. Demuestre que si el determinante del sistema se anula, entonces el sistema tiene solución si y sólo si cualquier determinante que sustituya una columna por la de los términos independientes también se anula.

## 4.5 Sistemas de desigualdades lineales

A diferencia de los sistemas de ecuaciones, donde “lo más probable” es que la intersección de los conjuntos solución de más de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas sea vacía, y otro tanto ocurre si damos más de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas, cuando se trata de un sistema de desigualdades lineales puede tenerse cualquier número de ellas y lo más probable es que la intersección sea no vacía, como lo muestra la Figura 4.13, correspondiente al sistema

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 12 &\leq 0 \\ x - 2y + 6 &\leq 0 \\ 2x - y - 4 &\geq 0. \end{aligned}$$

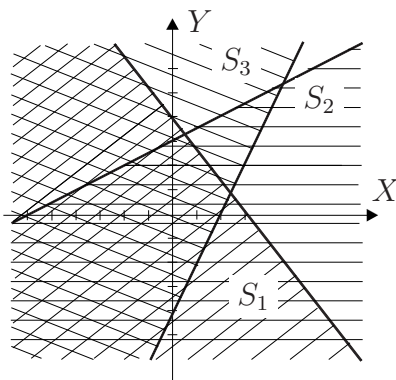


Figura 4.13: Intersección de semiplanos correspondientes a un sistema de desigualdades lineales.

Eso se debe a que el lugar geométrico asociado a una desigualdad lineal es un semiplano (si nos estamos refiriendo al plano cartesiano) o un semiespacio



(si el universo es  $\mathbb{R}^3$ ); la frontera, una recta o un plano, respectivamente, debe incluirse o no dependiendo de que la desigualdad no sea estricta o sí lo sea.

Los sistemas de desigualdades surgen de manera natural en muchas situaciones prácticas y nosotros sólo daremos un bosquejo de este tema, la Programación Lineal, utilizando un concepto geométrico muy interesante, la convexidad. Comenzaremos desarrollando la parte teórica en el caso del plano cartesiano, y luego plantearemos un problema típico de Programación Lineal para que el lector pueda tener una idea de las múltiples aplicaciones de esta teoría (véanse [Br], [Ho] o [Lu]).

### Conjuntos convexos

Un subconjunto  $\mathcal{S}$  es *convexo* si para cualesquiera dos de sus puntos  $P$  y  $Q$  pertenecientes a él, el segmento de recta entre ellos, denotado por  $[P, Q]$ , está totalmente contenido en  $\mathcal{S}$ .

La expresión del segmento  $[P, Q]$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  se obtiene a partir de la ecuación vectorial de la recta que lo contiene, cuyo vector de dirección es  $\bar{u} = Q - P$  y apoyada en  $P$ :

$$\mathcal{L}_{P, \bar{u}} = \{R \in \mathbb{R}^2 \mid R = P + \lambda(Q - P) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Vimos que si  $\lambda$  se restringe a los valores  $0 \leq \lambda \leq 1$ , el punto  $R$  recorre el segmento  $[P, Q]$ , es decir,

$$[P, Q] = \{R \in \mathbb{R}^2 \mid R = P + \lambda(Q - P) \text{ donde } 0 \leq \lambda \leq 1\}. \quad (4.26)$$

Si en el lado derecho de la igualdad agrupamos los términos en  $P$  obtenemos

$$[P, Q] = \{R \in \mathbb{R}^2 \mid R = (1 - \lambda)P + \lambda Q \text{ donde } 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

que preferimos escribir en la forma

$$[P, Q] = \{R \in \mathbb{R}^2 \mid R = sP + tQ \text{ con } 0 \leq s, t \leq 1 \text{ y } s + t = 1\}. \quad (4.27)$$

Una estrella o una luna menguante **no** son conjuntos convexos, como podemos comprobar al tomar  $P$  y  $Q$  en las puntas de la estrella o de la luna menguante, pero un semiplano y un círculo sí lo son, como comprobamos a continuación.

Si  $P(a_1, a_2)$  y  $Q(b_1, b_2)$  pertenecen al semiplano

$$Ax + By + C > 0,$$

entonces son válidas las desigualdades

$$Aa_1 + Ba_2 + C > 0 \quad \text{y} \quad Ab_1 + Bb_2 + C > 0,$$

y las coordenadas de cualquier punto  $R(x, y)$  del segmento  $[P, Q]$  satisfacen, por la ecuación (4.27),

$$(x, y) = s(a_1, a_2) + t(b_1, b_2) \quad \text{donde} \quad 0 \leq s, t \leq 1 \text{ y } s + t = 1.$$

Si sustituimos las expresiones

$$x = sa_1 + tb_1, \quad y = sa_2 + tb_2$$

en  $Ax + By + C$  obtenemos

$$A(sa_1 + tb_1) + B(sa_2 + tb_2) + C = s(Aa_1 + Ba_2 + C) + t(Ab_1 + Bb_2 + C)$$

porque  $C = (s + t)C$ . Y como en el miembro derecho las expresiones entre paréntesis son mayores o iguales que 0 porque  $P$  y  $Q$  pertenecen al semiplano y también  $s, t$  son no negativas, todo el miembro derecho es no negativo, es decir, las coordenadas de  $R$  satisfacen la desigualdad que caracteriza al semiplano (lo análogo ocurriría para el otro semiplano).

En el caso de un círculo de radio  $r$  y centro en  $O$ , si introducimos coordenadas tales que  $O$  coincida con el origen  $(0, 0)$ , la condición de que los puntos  $P$  y  $Q$  pertenezcan al círculo se reduce a

$$||P|| \leq r \quad \text{y} \quad ||Q|| \leq r,$$

y para comprobar que el círculo es convexo, esto es, que  $||R|| \leq r$ , basta utilizar la expresión (4.27):

$$||R|| = ||sP + tQ|| \leq s||P|| + t||Q|| \leq sr + tr = (s + t)r = r.$$

En consecuencia, cualquier punto  $R$  del segmento  $[P, Q]$  pertenece al círculo.

Los conjuntos convexos poseen muchas propiedades importantes; a continuación demostramos una que es fundamental.

**Lema.** La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

### **Demostración.**

Si  $P$  y  $Q$  pertenecen a la intersección es porque pertenecen a cada uno de los conjuntos; la convexidad de cada conjunto implica que el segmento  $[P, Q]$  pertenece a cada uno de los conjuntos y, por tanto, a la intersección, esto es, la intersección es un conjunto convexo. ■

Como consecuencia tenemos el corolario siguiente.

**Corolario.** La intersección de cualquier número de semiplanos es un conjunto convexo.

### **Fundamentos de Programación Lineal.**

En muchas situaciones prácticas surgen funciones, como el costo o la ganancia por ejemplo, que son de tipo lineal (polinomial de primer grado en cada una de las variables), y donde las variables están sujetas a restricciones que dan lugar a desigualdades lineales.

La región en que se verifican todas las desigualdades que restringen a las variables es intersección de semiplanos, si estamos tratando con dos variables, o de semiespacios si las variables son tres, etc.

El lema siguiente, base de la Programación Lineal, implicará que los valores extremos de una función lineal definida en un intervalo se alcanzan en los vértices de la frontera de la región en que se verifican todas las restricciones. En consecuencia, bastará contrastar los valores de la función en los vértices de la frontera para determinar los puntos correspondientes a valores extremos de la función. Enunciamos el lema para dos variables, pero es válido para cualquier número de variables.

**Lema.** Si una función polinomial de primer grado  $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$  se restringe al segmento  $[P, Q]$ , alcanza su máximo y su mínimo en los extremos del segmento.

### **Demostración.**

Si las coordenadas de  $P$  y  $Q$  son, respectivamente,  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$ , los puntos  $R$  del segmento  $[P, Q]$  tienen coordenadas  $(sa_1 +$

$tb_1, sa_2 + tb_2)$ , donde  $s, t \geq 0$  y  $s + t = 1$  según la fórmula (4.27). Supongamos  $m = f(P) = f(a_1, a_2) \leq f(b_1, b_2) = f(Q) = M$ , es decir,

$$m = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma \leq \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma = M$$

Comprobemos que al evaluar  $f$  en las coordenadas de un punto del segmento,  $x = sa_1 + tb_1$  y  $y = sa_2 + tb_2$ , el número obtenido está entre los anteriores:

$$\begin{aligned} f(sa_1 + tb_1, sa_2 + tb_2) &= \alpha(sa_1 + tb_1) + \beta(sa_2 + tb_2) + (s + t)\gamma \\ &= s(\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma) + t(\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma) = sm + tM, \end{aligned}$$

y entonces es inmediata la desigualdad siguiente

$$sm + tm \leq sm + tM \leq sM + tM.$$

Si recordamos que  $s + t = 1$ ,  $m = f(P)$  y  $M = f(Q)$ , obtenemos

$$f(P) \leq f(R) \leq f(Q)$$

como debíamos demostrar. ■

Como consecuencia tenemos el teorema siguiente.

**Teorema** Si una función  $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$  está restringida a una región acotada que es intersección de semiplanos, entonces toma sus valores extremos en los vértices de la frontera de la región.

Es importante observar que cuando el número de variables es mayor que 2, el cálculo de los valores de la función en todos los vértices de la frontera puede ser una tarea ingrata. Entonces debe usarse un procedimiento llamado *método simplex* que nosotros no expondremos pero que puede consultarse en [Br], [Ho] o [Lu].

A continuación desarrollaremos un ejemplo, sencillo pero típico de problemas de maximización de ganancia.

Una fábrica produce dos tipos de sillas tubulares, A y B, con cada uno de los cuales se obtiene una ganancia neta de \$ 100 por unidad. Las sillas de ambos tipos requieren de los tiempos siguientes (expresados en fracciones de

hora) en los departamentos de producción (P), ensamblado (E) y terminado (T):

	P	E	T
A	.1	.35	.8
B	.3	.4	.1

La disponibilidad en horas-hombre a la semana en cada uno de los departamentos es la siguiente:

300 en el departamento de producción de partes (P);

520 en el departamento de ensamblado (E);

800 en el departamento de terminado (T).

El fabricante ha pedido asesoría para determinar cuántas sillas de cada tipo debe producir para maximizar su ganancia.

### Planteamiento

Si  $x$  y  $y$  son los números de sillas del tipo A y el B, respectivamente, producidas en una semana, la función de ganancia es

$$G(x, y) = 100x + 100y,$$

y las restricciones a que están sujetas las variables  $x$  y  $y$  debido a la disponibilidad de tiempos en los diferentes departamentos son:

$$\begin{aligned} .1x + .3y &\leq 300 \\ .35x + .4y &\leq 520 \\ .8x + .1y &\leq 800 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

donde las últimas desigualdades tienen un motivo obvio.

La Figura 4.14 ilustra la región que satisface todas las desigualdades; cada punto de la región determina un valor de la ganancia y el vértice  $P_3$  corresponde a la ganancia máxima.

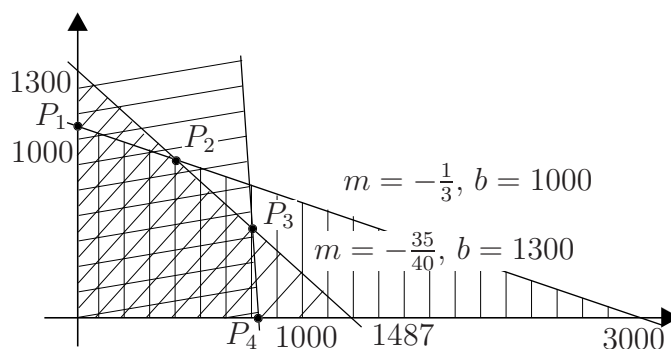


Figura 4.14: Región de posibilidades para el ejemplo.

Las coordenadas (aproximadas) de los vértices y la ganancia asociada con cada uno son

$$\begin{aligned}
 P_1(0, 1000) &\rightarrow G(0, 1000) = 100000 \\
 P_2(533.8, 815.3) &\rightarrow G(533.8, 815.3) = 136914 \\
 P_3(940.3, 477.2) &\rightarrow G(940.3, 477.2) = 141750 \\
 P_4(1000, 0) &\rightarrow G(1000, 0) = 100000.
 \end{aligned}$$

Entonces lo conveniente es fabricar 940 sillas del tipo A y 477 del tipo B.

## EJERCICIOS

1. Modifique las restricciones en el ejemplo (es decir, la disponibilidad de horas-hombre) y determine el vértice que da lugar al máximo.
2. Modifique la función de ganancia en forma tal que el máximo se alcance en otro vértice.
3. Plantee un problema sencillo donde interese minimizar costos.
4. Dé un ejemplo donde la función que se desea maximizar alcance el máximo (también) en un punto que no sea un vértice.

## 4.6 Apéndice: Rectas y puntos notables de un triángulo

Este apéndice tiene sobre todo la finalidad de consignar la nomenclatura de las rectas notables de un triángulo. Pero tiene sentido hacerlo aquí porque hay concurrencias que dan lugar a definir los puntos notables del triángulo.

El uso de los términos que consignaremos, incluidos los puntos notables, es muy frecuente en Matemáticas y en Física. Por eso decidimos tratarlos, aunque la tarea de comprobar la concurrencia queda a cargo del lector. Para conocer más propiedades de estas rectas y puntos, las referencias indicadas son [Ca], [Ev], [H-C] y [Sh].

Cada uno de los términos está ilustrado en la Figura 4.15.

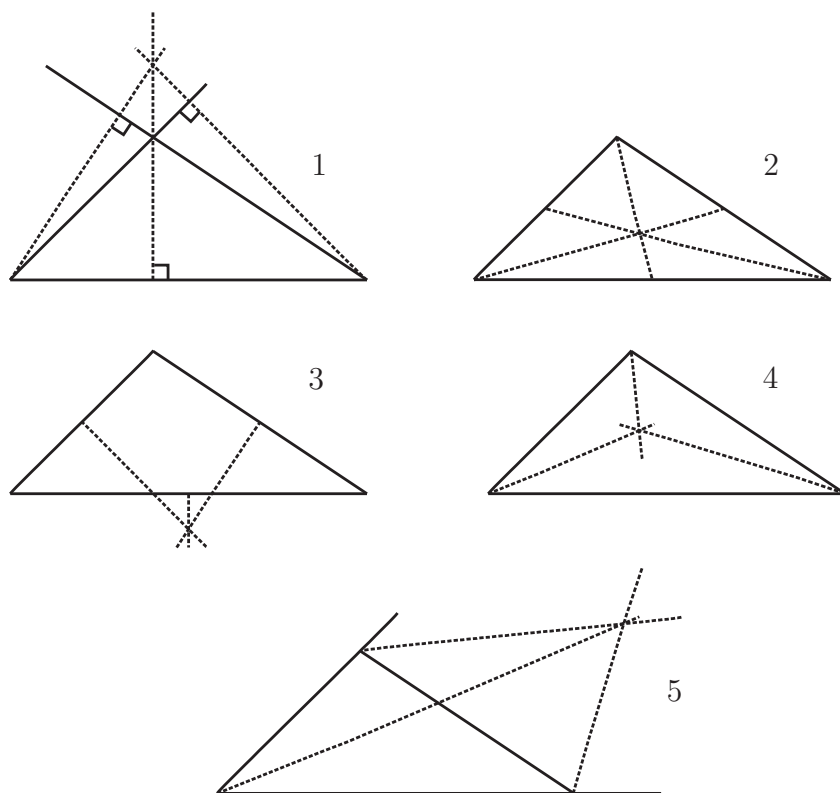


Figura 4.15: Rectas y puntos notables de un triángulo.

**Definición.** Llamamos *altura de un triángulo* a una recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto. Este mismo nombre reciben el segmento de dicha perpendicular entre el vértice y el lado opuesto, y la longitud de dicho segmento (Figura 4.15.1).

**Definición.** Llamamos *mediana de un triángulo* a una recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto (Figura 4.15.2).

**Definición.** Llamamos *mediatriz de un triángulo* a una recta perpendicular por el punto medio a uno de los lados (Figura 4.15.3).

**Definición.** Llamamos *bisectriz (interior) de un triángulo* a la bisectriz de uno de los ángulos (interiores) del triángulo; el adjetivo “interior” suele omitirse, pero lo señalamos por contraste con el siguiente (Figura 4.15.4).

**Definición.** Llamamos *bisectriz exterior de un triángulo* a la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, donde por *ángulo exterior* entendemos uno de los formados por un lado del triángulo y la prolongación de uno de los lados adyacentes (Figura 4.15.5).

En la proposición siguiente, cuya demostración queda a cargo del lector, introducimos la definición de los puntos notables de un triángulo.

**Proposición.** En cualquier triángulo tenemos las concurrencias de las rectas siguientes

1. las tres alturas; el punto en que concurren se llama *ortocentro*;
2. las tres medianas; el punto en que concurren se llama *baricentro* porque es el centro de gravedad del triángulo;
3. las tres mediatrices; el punto en que concurren se llama *circuncentro* porque es el centro de la circunferencia circunscrita, es decir, que pasa por los tres vértices;
4. las tres bisectrices interiores; el punto en que concurren se llama *incentro* porque es el centro de la circunferencia inscrita, es decir, interior y tangente a los tres lados;
5. una bisectriz interior y dos bisectrices exteriores; cada uno de los tres puntos así formados se llama *excentro* porque es el centro de una circunferencia exterior y tangente a los tres lados.



---

# Cónicas

---

Las curvas llamadas cónicas son importantes desde muchos puntos de vista.

Desde un punto de vista práctico, sirven para aproximar pequeños trozos de curvas complicadas con un grado de aproximación mayor que el de la recta tangente en uno de los puntos.

Desde el punto de vista de la enseñanza, su trazo es lo suficientemente sencillo como para que el estudiante llegue a analizarlas bastante bien, y ese análisis permite ilustrar cómo se hace el estudio de los objetos geométricos, clasificándolos según distintos criterios.

Desde un punto de vista algebraico, sus ecuaciones siguen a las de las rectas porque son ecuaciones de segundo grado en dos variables.

Finalmente, tienen aplicaciones en la Física, tanto en el estudio del tiro parabólico como en el de la trayectoria de los planetas, y poseen una propiedad que da lugar a un gran número de aplicaciones, la propiedad focal, gracias a la cual existen las antenas parabólicas.

El lector interesado en conocer más propiedades de estas curvas puede consultar [Ev], [H-C] o [R-Se].

## 5.1 Definición, trazado y nomenclatura

### La elipse

Si fijamos dos tachuelas en un cartón y tomamos un trozo de cuerda de longitud mayor que la distancia que separa las tachuelas, al tensar la cuerda con un lápiz y deslizar el lápiz sobre el cartón se dibuja una elipse (véase la Figura 5.1).

Como la cuerda se ha mantenido tensa, la suma de las distancias del punto  $P$  a cada uno de los puntos marcados con  $F_1$  y  $F_2$  es constante: la longitud de

la cuerda. Por tanto, podemos dar la definición siguiente.

**Definición.** Una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$  es una constante denotada con  $2a$ . En símbolos escribimos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \quad (5.1)$$

donde  $d(P, F_1)$  denota la distancia de  $P$  a  $F_1$  y  $d(P, F_2)$  denota la distancia de  $P$  a  $F_2$ .

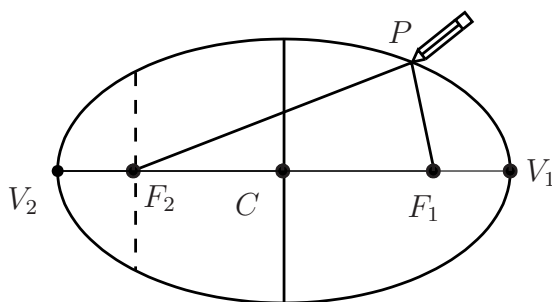


Figura 5.1: Trazado y elementos de una elipse.

Por comodidad tipográfica, suele dibujarse los puntos  $F_1$  y  $F_2$ , llamados *focos*, en una recta horizontal llamada *eje focal*, y por razones correspondientes a la Geometría Proyectiva (véase [Ev]), a la mediatriz del segmento  $F_1 F_2$  se le llama *eje conjugado*. El punto  $C$  en que se cortan ambos ejes se denomina *centro de la elipse*.

El segmento del eje focal abarcado por la elipse se denomina *eje mayor* y el segmento del eje conjugado comprendido por la elipse se denomina *eje menor*.

La distancia entre los focos se denota por  $2c$ , y como la cuerda debe ser más larga que la distancia entre los focos, es inmediato que  $2a > 2c$ .

También merecen un nombre especial los puntos  $V_1$  y  $V_2$  en que la elipse corta al eje focal; se llaman *vértices* porque es en ellos donde la elipse se curva más. El concepto de curvatura es fundamental en Geometría Diferencial (véase [Do]).

Finalmente, se llama *lado recto* de la elipse a cualquiera de los segmentos de perpendicular al eje focal por uno de los focos, comprendido dentro de la elipse (recta punteada de la Figura 5.1).

La obtención de la llamada *ecuación canónica* permite hacer un estudio de esta curva con base en argumentos algebraicos muy sencillos, pero desde ahora nos gustaría hacer la observación siguiente utilizando la Figura 5.2: de la definición se deduce inmediatamente que la elipse es simétrica respecto a cada uno de sus ejes, y en consecuencia también respecto a su centro, es decir, los ejes son ejes de simetría y el centro es centro de simetría.

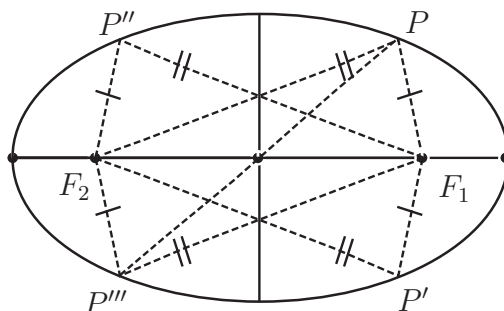


Figura 5.2: Ejes de simetría y centro de simetría de una elipse.

## La parábola

Fijemos ahora una recta  $l$  y un punto  $F$  fuera de la recta; si el pie de una perpendicular  $h$  a la recta se denota por  $H$ , la mediatriz del segmento  $HF$  corta a la perpendicular  $h$  en un punto  $P$  **equidistante** de la recta  $l$  y del punto  $F$  (véase la Figura 5.3). El conjunto de todos los puntos así obtenidos constituye una parábola.

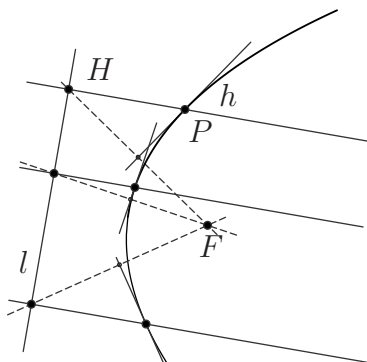


Figura 5.3: Trazado y elementos de una parábola.

La definición en este caso es la siguiente.

**Definición.** Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta fija  $l$  y un punto fijo  $F$  exterior a la recta. En símbolos escribimos

$$d(P, l) = d(P, F). \quad (5.2)$$

Como lo muestra la Figura 5.3, dibujamos la recta fija, llamada *directriz*, en forma vertical y por el punto fijo, llamado *foco*, trazamos una perpendicular a la directriz, que denominamos *eje de la parábola*.

Desde luego, el punto medio del segmento de perpendicular del foco a la directriz pertenece a la parábola y se denomina *vértice de la parábola* porque es el punto donde la parábola se curva más.

El *lado recto* es el segmento, abarcado por la parábola, de la perpendicular al eje focal que pasa por el foco,

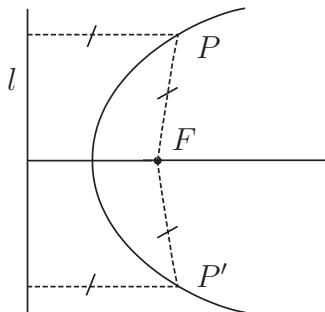


Figura 5.4: Eje de simetría de la parábola.

El estudio de las propiedades de esta figura también es muy sencillo a partir de la ecuación canónica, pero de la Figura 5.4 es inmediato que la reflexión de una parábola en su eje focal no la altera, y que todos los puntos de la parábola están en uno de los semiplanos determinados por la directriz: aquél al que pertenece el foco.

¿Puede usted dar un argumento para demostrar que la parábola no se cierra?

## La hipérbola

Fijemos nuevamente un par de tachuelas en un cartón y tracemos dos circunferencias de radios distintos que se corten, cada una con centro en una de las

tachuelas (véase la Figura 5.5). Si dibujamos nuevos pares de circunferencias cuidando de que el valor absoluto de la diferencia entre los dos radios sea igual al de la diferencia entre los dos radios primeros, estaremos obteniendo puntos de una hipérbola.

Es inmediato observar que la hipérbola tiene dos *ramas*, es decir, está formada por dos curvas ajenas. Esto está relacionado con el hecho de que la elipse es una curva cerrada pero la parábola ya no lo es. De hecho, es cierto que cada tipo de cónica corresponde a un paso de un mismo proceso, como veremos después.

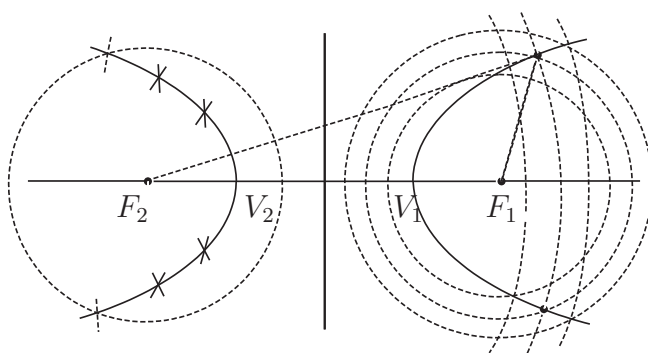


Figura 5.5: Trazado y elementos de una hipérbola.

La definición en este caso es la siguiente.

**Definición.** Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano cuyas distancias a dos puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$  tienen una diferencia con valor absoluto constante, denotado por  $2a$ . En símbolos escribimos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, \quad (5.3)$$

Para esta curva dibujamos la recta determinada por los *focos*,  $F_1$  y  $F_2$  en forma horizontal y la llamamos *eje focal*; la mediatriz del segmento  $F_1F_2$  se denomina *eje conjugado*, y el punto de intersección de ambos ejes se denomina *centro* de la hipérbola.

Los puntos  $V_1$  y  $V_2$  en que la hipérbola corta al eje focal se denominan *vértices de la hipérbola*, pues son los puntos en que la hipérbola se curva más.

Es fácil deducir de la definición que la hipérbola es simétrica respecto a sus dos ejes, y que el centro de la hipérbola es un centro de simetría. La Figura 5.6 exhibe estas simetrías.

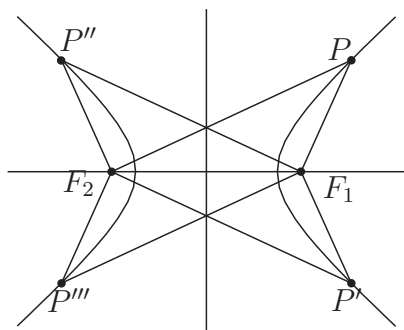


Figura 5.6: Ejes de simetría y centro de simetría de la hipérbola.

En este caso también se denota por  $2c$  la distancia entre los focos, pero la desigualdad entre  $2a$  y  $2c$  es  $2a < 2c$ , justamente la contraria de la obtenida para la elipse, pues si  $r_2 > r_1$ , de la definición tenemos

$$2a = r_2 - r_1, \quad \text{es decir,} \quad r_2 = 2a + r_1;$$

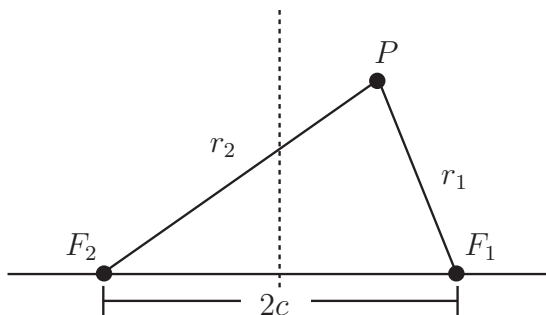


Figura 5.7: Para la hipérbola,  $2a < 2c$ .

Por otra parte, la desigualdad del triángulo asegura (vea la Figura 5.7)

$$r_2 \leq 2c + r_1.$$

Si ahora comparamos esta desigualdad con la igualdad anterior, obtenemos  $2a < 2c$ , como habíamos afirmado.

La hipérbola también tiene *lados rectos*; son los segmentos de perpendicular al eje focal por uno de los focos, comprendidos por la rama respectiva.

La hipérbola es la única cónica que consta de dos partes separadas llamadas *ramas*, y que tiene *asíntotas*, esto es, existe un par de rectas tales que cuando el punto de la hipérbola se aleja del centro, la distancia a una de las rectas tiende a cero y la pendiente de la tangente en dicho punto tiende a la pendiente de la asíntota en cuestión, como lo comprobaremos más adelante.

## EJERCICIOS

- Trace algunos puntos de las elipses con la distancia  $2a$  dada, si los focos distan  $2c = 4$  en todos los casos, y complete las elipses suavemente.  
(a)  $2a = 6$ ;                      (b)  $2a = 8$ ;                      (c)  $2a = 10$ .
- Trace una recta vertical y en una recta horizontal ubique puntos  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  que disten 1, 2 y 3 unidades de la primera. Construya algunos puntos de cada una de las parábolas correspondientes y complételas suavemente.
- Dibuje dos puntos que disten entre sí 4 unidades y trace algunos puntos de las hipérbolas correspondientes a  $2a = 1$ ,  $2a = 2$  y  $2a = 3$ , respectivamente, y complete las ramas suavemente.
- ¿Qué ocurre si para la elipse se permite  $a = c$ ? ¿Y si para la parábola se permite que el foco esté en la directriz? ¿Y si para la hipérbola se permite  $a = c$ ?
- Demuestre que la hipérbola es simétrica respecto a cada uno de sus ejes y al centro.
- Demuestre que ninguna recta distinta del eje focal es eje de simetría de la parábola.
- Dado un sistema coordenado en el plano, obtenga la ecuación de una elipse cuyos focos no determinen una recta paralela al eje  $X$  ni al eje  $Y$ , y compruebe que aparece un término mixto. ¿Qué ocurre si hace lo análogo para el caso de una hipérbola? ¿O si la directriz de una parábola no es paralela a un eje coordenado?

## 5.2 Ecuaciones canónicas

Llamamos *ecuaciones canónicas* a las obtenidas de las igualdades (5.1), (5.2) y (5.3) cuando introducimos un sistema coordenado conveniente para cada caso.

Las ecuaciones canónicas permiten obtener fácilmente muchas propiedades de las cónicas.

Ésta es una observación fundamental en Geometría Analítica, muy importante para ahorrar trabajo superfluo: si no hay un sistema coordenado dado de antemano, el que se introduzca puede elegirse apropiadamente, donde esto último casi siempre significa *de manera natural*.

## La elipse

En el caso de la elipse, si uno de los ejes coordenados se hace coincidir con el eje focal, una de las coordenadas de los focos será cero y eso simplificará los cálculos. Si el eje focal coincide con el eje  $X$  y el centro de la elipse con el origen, entonces el eje conjugado coincide con el eje  $Y$ . El lector ya está acostumbrado a que el eje  $X$  se dibuje como una recta horizontal por cuestiones tipográficas. Las coordenadas de los focos son:

$$F_1 = (c, 0) \text{ y } F_2 = (-c, 0)$$

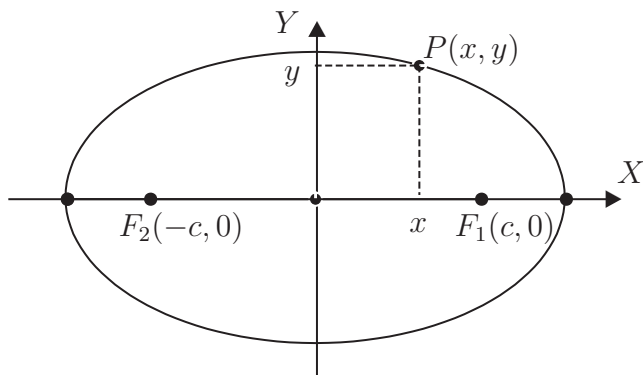


Figura 5.8: Para la elipse, se toma como ejes coordenados los de simetría.

y si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la elipse, las distancias que aparecen en la fórmula (5.1) pueden expresarse así (véase la Figura 5.8):

$$\begin{aligned} d(P, F_1) &= \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ d(P, F_2) &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

y al sustituir en (5.1) resulta

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$



Las raíces cuadradas se eliminan elevando dos veces al cuadrado; el proceso se facilita si restamos la segunda raíz de ambos miembros antes de elevar al cuadrado la primera vez:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Si ahora elevamos al cuadrado, resulta:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Desarrollamos los cuadrados que no figuran en el radical y cancelamos términos semejantes para obtener

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

y si, después de dividir entre 4 y aislar el radical en el segundo miembro, elevamos nuevamente al cuadrado tenemos

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2].$$

Desarrollemos el cuadrado del segundo miembro:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2;$$

Entonces, después de simplificar nos queda

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

y si dividimos entre el número no cero de la derecha, resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1.$$

Como  $a > c$  y ambos números son positivos, también es cierto que  $a^2 > c^2$  y por eso existe un número positivo  $b$  tal que  $b^2 = a^2 - c^2$ ; sustituyendo este valor en el denominador de  $y^2$ , obtenemos la *ecuación canónica de la elipse*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.4)$$

Esta ecuación muestra que la *circunferencia* es un caso particular de elipse, cuando  $a = b$ . La circunferencia tiene propiedades muy útiles e interesantes, en gran parte conocidas desde la antigüedad. Las más importantes pueden encontrarse en [Ca], [Do], [Ev], [H-C], [Mn] y [Sh].

## La parábola

Vayamos ahora al caso de la parábola; para esta curva elegimos como eje  $X$  al eje focal (la perpendicular a la directriz  $l$  que pasa por el foco), y como eje  $Y$  a la paralela a la directriz que pasa por el vértice (véase la Figura 5.9).

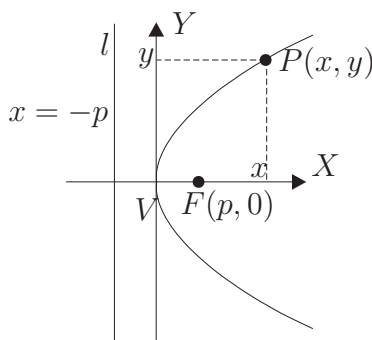


Figura 5.9: Ejes coordenados convenientes en el caso de la parábola.

En algunos textos se toma como eje  $Y$  a la directriz misma, pero en ese caso el vértice de la parábola no queda en el origen y la ecuación no es tan sencilla como la obtenida en nuestro caso.

Tomemos como coordenadas del foco  $(p, 0)$ ; entonces la ecuación de la directriz es  $x = -p$  y las distancias que aparecen en la fórmula (5.2) tienen la expresión coordenada siguiente (véase la Figura 5.9):

$$d(P, l) = |x - (-p)|, \text{ y } d(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2},$$

por lo que la fórmula (5.2) se convierte en

$$|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2},$$

y si elevamos al cuadrado para eliminar el radical, obtenemos

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2.$$

Al desarrollar los cuadrados, vemos que en ambos miembros aparecen los términos  $x^2$  y  $p^2$ , y después de cancelarlos y reducir términos semejantes resulta

$$y^2 = 4px, \quad (5.5)$$

que es la *ecuación canónica de la parábola*.

## La hipérbola

En este caso también es conveniente tomar como eje  $X$  al eje focal y ubicar el origen de coordenadas en el centro de la hipérbola:

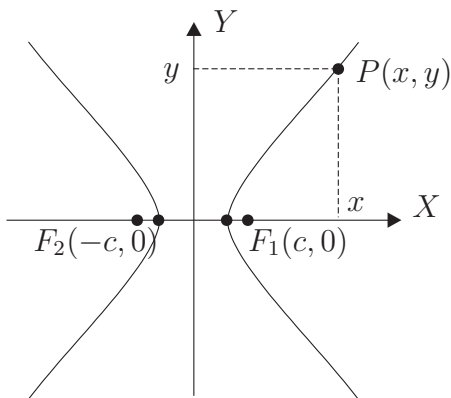


Figura 5.10: Para la hipérbola, se toma como ejes coordenados los de simetría.

Entonces el eje  $Y$  es el eje conjugado y, en consecuencia, las coordenadas de los focos son

$$F_1 = (c, 0) \text{ y } F_2 = (-c, 0),$$

y si  $P(x, y)$  es un punto cualquiera de la hipérbola, las distancias que aparecen en la fórmula (5.3) pueden expresarse así (véase la Figura 5.10):

$$\begin{aligned} d(P, F_1) &= \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ d(P, F_2) &= \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

y al sustituir en (5.3) resulta

$$\left| \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Las raíces cuadradas se eliminan elevando dos veces al cuadrado; esta vez el proceso es un poco más latoso que en el caso de la elipse, porque el valor absoluto nos impide restar la segunda raíz de ambos miembros. Comenzamos elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2,$$

y al desarrollar el cuadrado del miembro izquierdo resulta

$$(x+c)^2+y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 = 4a^2;$$

Si aislamos en un miembro el producto de radicales y, después de desarrollar los cuadrados, reducimos términos semejantes obtenemos

$$-2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 2(x^2+y^2+c^2).$$

Ahora dividimos ambos miembros entre  $-2$  y después elevamos al cuadrado; resulta

$$\left[(x+c)^2+y^2\right]\left[(x-c)^2+y^2\right] = \left[-2a^2 + (x^2+y^2+c^2)\right]^2,$$

que, después de efectuar la multiplicación del lado izquierdo y desarrollar el cuadrado en el derecho toma la forma

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^2c^2 + c^4 + y^2(x^2 + 2xc + c^2 + x^2 - 2xc + c^2) + y^4 \\ &= 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + 2x^2c^2 + 2y^2c^2. \end{aligned}$$

Los términos  $x^4, y^4, c^4, 2x^2y^2, 2y^2c^2$  aparecen en ambos lados y, por tanto, se cancelan; dentro del paréntesis del primer miembro hay términos semejantes que también se cancelan. Y en ambos miembros hay términos en  $x^2c^2$  con signos distintos; así, la expresión anterior se convierte en

$$-4x^2c^2 + 4a^2x^2 + 4a^2y^2 = 4a^4 - 4a^2c^2.$$

Si dividimos entre  $-4$  y sacamos factor común  $x^2$  en el miembro izquierdo tenemos

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Para terminar basta recordar que en el caso de la hipérbola  $c^2 - a^2 > 0$ , por lo que podemos encontrar  $b > 0$  tal que  $b^2 = c^2 - a^2$  y entonces, si dividimos

la ecuación anterior entre el miembro de la derecha llegamos a la *ecuación canónica de la hipérbola*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.6)$$

Cuando  $a = b$ , decimos que la *hipérbola es equilátera*. La hipérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$  sirve para definir las funciones trigonométricas hiperbólicas (véase [Ma]).

## EJERCICIOS

1. Obtenga la ecuación canónica de cada una de las elipses cuyos parámetros se especifican a continuación, y dibújelas:
  - (i)  $2a = 4, 2c = 2$ ;
  - (ii)  $2a = 6, 2c = 2$ ;
  - (iii)  $2a = 8, 2c = 4$ .
2. Demuestre que la longitud del eje mayor de la elipse es  $2a$  y la longitud del eje menor es  $2b$ .
3. Obtenga la ecuación canónica de cada una de las parábolas cuyo parámetro se especifica a continuación, y dibújelas:
  - (i)  $p = 2$ ;
  - (ii)  $p = 3$ ;
  - (iii)  $p = 5$ .
4. Obtenga la ecuación canónica de cada una de las hipérbolas cuyos parámetros se especifican a continuación, y dibújelas:
  - (i)  $2a = 2, 2c = 4$ ;
  - (ii)  $2a = 2, 2c = 6$ ;
  - (iii)  $2a = 4, 2c = 8$ .
5. Demuestre que si se ubica el eje focal en el eje  $Y$  y el centro o el vértice sigue estando en el origen, las ecuaciones canónicas tienen la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad x^2 = 4py, \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

6. Demuestre que los puntos  $P \in \mathbb{R}^2$  de coordenadas  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$  pertenecen a una elipse en posición canónica, cuyos semiejes mayor y menor miden, respectivamente,  $a$  y  $b$ .

7. Trace las circunferencias con centro en el origen y de radios  $a$  y  $b$  para dar una forma geométrica de obtener puntos de la elipse del ejercicio anterior al intersecar dichas circunferencias con el rayo que forma un ángulo  $\theta$  con el rayo positivo del eje  $X$ .
8. Demuestre que de todas las curvas cerradas con longitud fija, la que abarca mayor área es la circunferencia (véase la Propiedad isoperimétrica en [Do]).
9. Demuestre que para cualquier  $k \neq 0$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k,$$

es la ecuación de una hipérbola, y determine qué se obtiene cuando  $k = 0$ . En una misma gráfica, haga los dibujos correspondientes a cada uno de los valores siguientes de  $k$ :  $-4$ ,  $-2$ ,  $0$ ,  $2$  y  $4$ .

10. Calcule la longitud del lado recto de cada una de las cónicas.

## 5.3 Cónicas con ejes paralelos a los coordenados

Cuando una cónica tiene ejes paralelos a los coordenados, es muy sencillo obtener su ecuación a partir de la canónica correspondiente. El razonamiento puede aplicarse siempre que se conozca la ecuación que satisface la curva original (véase la figura siguiente.)

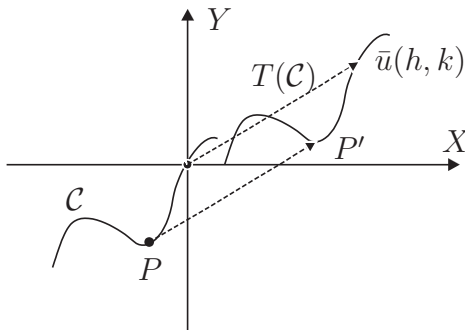


Figura 5.11: Obtención de la ecuación para una curva trasladada.

Si la curva  $T(\mathcal{C})$  se obtiene de la curva  $\mathcal{C}$  por la traslación paralela debida al vector  $\bar{u} = (h, k)$ , entonces el punto  $P'$  proveniente del punto  $P$  bajo la traslación se expresa así:

$$P' = P + \bar{u},$$

y al restar  $\bar{u}$  en ambos miembros e introducir coordenadas,  $(x, y)$  de  $P$  y  $(x', y')$  de  $P'$ , podemos expresar  $(x, y)$  en términos de  $(x', y')$  y de  $(h, k)$ :

$$x = x' - h, \quad y = y' - k.$$

Si los puntos  $P$  de la curva  $\mathcal{C}$  satisfacen la ecuación  $f(x, y) = 0$ , entonces los puntos  $P'$  de la curva  $T(\mathcal{C})$  satisfacen la ecuación

$$f(x' - h, y' - k) = 0,$$

que puede verse como una nueva ecuación  $F(x, y) = 0$  cuyo lugar geométrico es la curva  $T(\mathcal{C})$  si suprimimos las primas de las coordenadas. En otras palabras, basta realizar la sustitución siguiente

$$x \mapsto x - h \quad \text{y} \quad y \mapsto y - k, \quad (5.7)$$

en la ecuación  $f(x, y) = 0$  de la curva  $\mathcal{C}$  para obtener la ecuación  $F(x, y) = 0$  de la curva  $\mathcal{C}'$ .

A continuación daremos un ejemplo para cada tipo de cónica.

Para obtener la ecuación de una elipse cuyo eje focal es paralelo al eje  $X$  y cuyo centro es  $(2, 1)$ , hacemos la consideración siguiente: como el centro de una elipse con ecuación canónica es  $(0, 0)$ , sabemos que el centro se trasladó por el vector  $(2, 1)$ .

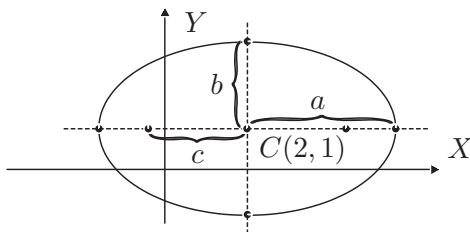


Figura 5.12: Elipse con eje focal paralelo al eje  $X$  y centro  $(2, 1)$ .

Por tanto, la sustitución que debemos efectuar en la ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es

$$x \mapsto x - 2, \quad y \mapsto y - 1.$$

La ecuación resultante aparece a continuación y su gráfica es la Figura 5.12.

$$\frac{(x - 2)^2}{a^2} + \frac{(y - 1)^2}{b^2} = 1$$

Para una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje  $X$ , que se abre hacia la izquierda y cuyo vértice es  $(-1, 1)$ , la ecuación de la que debemos partir (cuando el vértice es el origen) es

$$y^2 = -4px$$

y al sustituir

$$x \mapsto x - (-1), \quad y \mapsto y - 1,$$

lo cual da lugar a la ecuación

$$(y - 1)^2 = -4p(x + 1)$$

cuya gráfica aparece en la Figura 5.13.

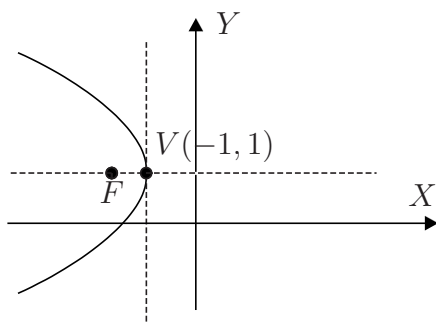


Figura 5.13: Parábola con eje focal paralelo al eje  $X$ , abierta a la izquierda y con vértice  $(-1, 1)$ .

Por último, escribamos la ecuación de una hipérbola cuyo eje focal sea paralelo al eje  $Y$  y con centro en  $(-2, 2)$ .



Si el lector resolvió el ejercicio 5 de la sección 2, sabe que una hipérbola con centro en el origen y cuyo eje focal es el eje  $Y$  tiene la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

La sustitución que debemos efectuar es

$$x \mapsto x - (-2) = x + 2, \quad y \mapsto y - 2.$$

Entonces, la ecuación que nos interesa es:

$$\frac{(y - 2)^2}{a^2} - \frac{(x + 2)^2}{b^2} = 1,$$

y la figura es la 5.14.

Para resolver el ejercicio 3 siguiente, el lector deberá completar los cuadrados que aparezcan, en  $x$  y/o en  $y$  para identificar la cónica con ejes paralelos a los coordenados.

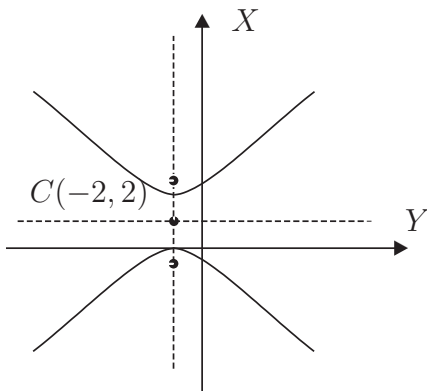


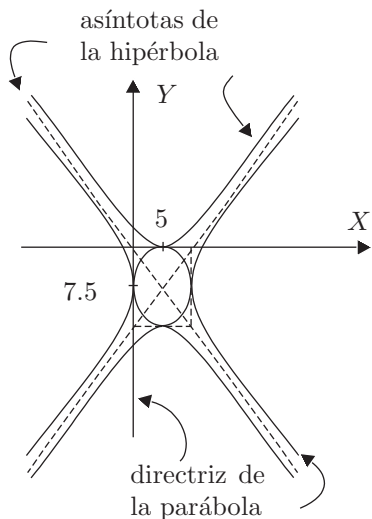
Figura 5.14: Hipérbola con eje focal paralelo al eje  $Y$  y centro en  $(-2, 2)$ .

---

## EJERCICIOS

1. Obtenga la ecuación de cada una de las cónicas especificadas a continuación y dibújelas en la misma gráfica:

- (a) La elipse con eje focal paralelo al eje  $Y$ ,  $a = 4$ ,  $b = 3$  y centro en  $(-1, 2)$ .
  - (b) La hipérbola con eje focal paralelo al eje  $X$ ,  $a = 3$ ,  $b = 4$  y centro  $(-1, 2)$ .
  - (c) La parábola con eje focal paralelo al eje  $Y$ , abierta hacia abajo y con vértice  $(-1, 5)$ .
2. Obtenga las ecuaciones de las cónicas de la figura siguiente.



3. Obtenga los focos y los vértices de las cónicas siguientes, y dibújelas.
- (i)  $y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$ ;
  - (ii)  $4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 = 0$ ;
  - (iii)  $x^2 - 4y^2 - 2x - 16y - 19 = 0$ .

## 5.4 Discriminante, simetrías, extensión y asíntotas

En este inciso discutiremos algunas propiedades de las cónicas (hay muchísimas; recordamos al lector interesado que puede consultar [Ev], [H-C] o [R-Se] de la bibliografía), y constataremos que al trabajar con las ecuaciones canónicas se obtiene información geométrica de manera muy sencilla.

## Discriminante

Sabemos que cualquier ecuación de primer grado en dos variables,

$$Ax + By + C = 0,$$

tiene como lugar geométrico una recta, y aprendimos que los coeficientes dan información geométrica sobre la recta: el vector  $(A, B)$  es perpendicular a la recta y  $|C|/\sqrt{A^2 + B^2}$  da la distancia de la recta al origen (si tomamos  $C/\sqrt{A^2 + B^2}$  se tiene más información, porque obtenemos la distancia orientada, como ya hemos visto).

El propósito de este inciso es observar que también los coeficientes de los términos cuadráticos de una ecuación de segundo grado, por ahora sin término mixto  $xy$ , dan información sobre el lugar geométrico que les corresponde. En el último capítulo demostraremos que el término mixto de una ecuación cuadrática puede eliminarse con una rotación adecuada, y que el discriminante es invariante bajo rotaciones.

Para la *ecuación general de segundo grado*,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

el *discriminante* es el número  $B^2 - AC$ . La importancia de ese número es que realmente permite distinguir (discriminar) de qué cónica se trata. En el caso de las ecuaciones canónicas, como no hay término mixto se tiene  $B = 0$  y el discriminante se reduce a  $-AC$ , el negativo del producto de los únicos términos cuadráticos que aparecen en la ecuación. Este número será el que estudiaremos.

Observemos que para la ecuación canónica (5.4) correspondiente a una elipse, los coeficientes de los términos en  $x^2$  y  $y^2$  tienen el mismo signo, pues

$$A = \frac{1}{a^2} > 0 \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{b^2} > 0$$

y, en consecuencia,  $-AC < 0$ .

En el caso de la ecuación canónica (5.5) correspondiente a una parábola, uno de los coeficientes se anula, el de  $x^2$ , y por tanto  $-AC = 0$ .

En el caso de una hipérbola, los coeficientes de los términos cuadráticos en (5.6) difieren en signo:

$$\frac{1}{a^2} > 0 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{b^2} < 0$$

y, en consecuencia,  $-AC > 0$ .

El lector que haya resuelto el ejercicio 5 de la sección 2, podrá comprobar que las observaciones anteriores siguen siendo ciertas para las ecuaciones que obtuvo. Por tanto, establecemos el criterio siguiente para ecuaciones de segundo grado sin término mixto.

*Criterio del discriminante.* Para una ecuación de segundo grado sin término mixto, los coeficientes  $A$  y  $C$  de los términos de segundo grado permiten determinar el tipo de cónica, de acuerdo a la regla siguiente:

si ambos tienen el mismo signo,  $AC > 0$ , se trata de una elipse;

si uno de ellos se anula,  $AC = 0$ , es una parábola;

si uno es positivo y otro negativo,  $AC < 0$ , se trata de una hipérbola.

Ahora bien, las ecuaciones siguientes no son ecuaciones canónicas:

$$x^2 + y^2 = 0; \quad y^2 = 0; \quad x^2 - y^2 = 0,$$

pero podríamos aplicar el criterio anterior y establecer con él que se trata de una circunferencia, una parábola y una hipérbola, respectivamente, aunque los lugares geométricos correspondientes son un punto:  $(0, 0)$ ; una recta (doble):  $y^2 = 0$ ; y un par de rectas que se cortan:  $(x + y)(x - y) = 0$ .

Hay una explicación geométrica de lo anterior. Más adelante demostraremos que una elipse, una parábola y una hipérbola pueden obtenerse al seccionar un cono con un plano que no pasa por el vértice del cono (véase la Figura 5.23), y el tipo de cónica depende de que el ángulo entre el eje y el plano de corte sea mayor que el ángulo entre el eje y una generatriz (elipse), o igual (parábola), o menor (hipérbola).

Si el plano se desliza conservando el ángulo que forma con el eje hasta alcanzar el vértice, las intersecciones respectivas son un punto, una generatriz en que se da la tangencia (que por eso resulta ser doble, lo cual está indicado por el exponente cuadrático), y un par de generatrices, como lo muestra la Figura 5.15.

Como el vértice es un *punto singular* del cono, se dice que un punto es un caso singular de elipse, que una recta doble es un caso singular de parábola y que un par de rectas que se cortan constituyen un caso singular de hipérbola.

El motivo de llamar al vértice punto singular es que en él no está definido el plano tangente (véase [DoC 1]).

El proceso de deslizar el plano hasta alcanzar el origen equivale a tomar el límite de las ecuaciones de una circunferencia, una parábola y una hipérbola equilátera cuando el parámetro correspondiente tiende a cero, pues si tomamos la ecuación canónica de cada uno de esos tipos de cónica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad y^2 = 4px, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

y si multiplicamos la primera y la tercera ecuación por  $a^2$ , obtenemos

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 = 4px, \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Si los parámetros  $a$  y  $p$  tienden a cero, en el límite obtenemos las ecuaciones propuestas:

$$x^2 + y^2 = 0, \quad y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 0.$$

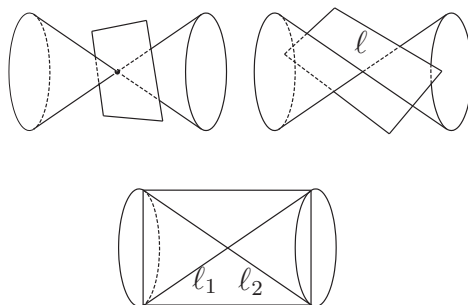


Figura 5.15: Cónicas singulares como secciones de un cono.

Finalmente, uno puede preguntarse qué ocurre con una ecuación del tipo  $x^2 + y^2 = -1$ , para la cual ningún punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es solución. Con coordenadas reales, como es nuestro caso, el lado izquierdo es siempre un número positivo. Por eso, en  $\mathbb{R}^2$  el lugar geométrico correspondiente a la ecuación en cuestión es vacío.

Pero cuando trabajamos con coordenadas complejas, como el cuadrado de un número complejo puede ser negativo, el lugar geométrico no es vacío y, para uniformizar la nomenclatura, se habla de una *circunferencia imaginaria* (véase [Gr]).

## Simetrías

Así como el dato algebraico del signo de los coeficientes de los términos cuadráticos permite determinar una cuestión geométrica: el tipo de cónica, hay otros datos algebraicos de una ecuación que permiten determinar otras cuestiones geométricas, como las simetrías respecto a los ejes, que para las ecuaciones canónicas coinciden con los ejes coordenados.

La Figura 5.16 recuerda que los puntos  $P(x, y)$ ,  $P'(x, -y)$ ,  $P''(-x, y)$  y  $P'''(-x, -y)$  son los vértices de un rectángulo, y los ejes de simetría de ese rectángulo son precisamente los ejes coordenados.

Escribiremos las definiciones dadas en el Capítulo 1 en la forma siguiente.

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  es *simétrico respecto al eje X* si la relación  $(x, y) \in A$  implica la relación  $(x, -y) \in A$ .

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  es *simétrico respecto al eje Y* si la relación  $(x, y) \in A$  implica la relación  $(-x, y) \in A$ .

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  es *simétrico respecto al origen* si la relación  $(x, y) \in A$  implica la relación  $(-x, -y) \in A$ .

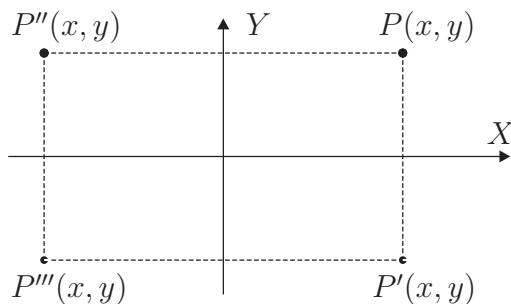


Figura 5.16: Puntos simétricos de  $P(x, y)$  respecto a los ejes coordenados y el origen.

En el caso de la elipse, que un punto  $P(x_0, y_0)$  pertenezca a la elipse significa que sus coordenadas  $x_0$  y  $y_0$  verifican la ecuación

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Pero entonces los puntos  $P'(x_0, -y_0)$ ,  $P''(-x_0, y_0)$  y  $P'''(-x_0, -y_0)$  también satisfacen la ecuación porque

(i)  $y_0^2 = (-y_0)^2$  implica que

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

es decir,  $P'(x_0, -y_0)$  pertenece a la elipse;

(ii)  $x_0^2 = (-x_0)^2$  implica

$$\frac{(-x_0)^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

es decir,  $P''(-x_0, y_0)$  pertenece a la elipse;

(iii)  $x_0^2 = (-x_0)^2$ ,  $y_0^2 = (-y_0)^2$  implican

$$\frac{(-x_0)^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

es decir,  $P'''(-x_0, -y_0)$  pertenece a la elipse.

Por todo lo anterior se dice que una elipse en posición canónica es simétrica respecto al eje  $X$ , al eje  $Y$  y al origen (véase la Figura 5.2).

En el caso de la parábola de ecuación canónica (5.5), hay simetría respecto al eje  $X$ , que es el eje focal de la parábola, pues si  $P_0(x_0, y_0)$  satisface

$$y_0^2 = 4px_0,$$

la igualdad  $y_0^2 = (-y_0)^2$  implica

$$(-y_0)^2 = 4px_0,$$

es decir,  $P'(x_0, -y_0)$  pertenece a la parábola.

Pero la parábola no es simétrica respecto al eje  $Y$ , pues si  $P(x_0, y_0)$  satisface (5.5), para que  $P''(-x_0, y_0)$  también satisfaga la ecuación deberían cumplirse las dos condiciones siguientes:

$$y_0^2 = 4px_0 \quad \text{y} \quad y_0^2 = 4p(-x_0),$$

es decir,  $4px_0 = -4px_0$  lo cual implica  $x_0 = -x_0$  que sólo es válido para  $x_0 = 0$ .

La demostración de que la hipérbola en posición canónica es simétrica respecto al eje  $X$ , respecto al eje  $Y$  y al origen es totalmente análoga al caso de la elipse y podemos dejarla de ejercicio al lector.

Más interesante es analizar qué característica algebraica de la ecuación canónica de la parábola asegura que tiene sólo a uno de los ejes coordenados como eje de simetría. Vimos que los términos cuadráticos  $x^2$  y  $y^2$  no se alteran cuando sustituimos  $x$  por  $-x$  o  $y$  por  $-y$ , pero los de primer grado sí se alteran porque cambian su signo.

La conclusión es la siguiente:

*Si en una ecuación polinomial las variables tienen únicamente exponentes pares, la ecuación no se altera al sustituir  $x$  por  $-x$  o  $y$  por  $-y$ ; en consecuencia el lugar geométrico correspondiente es simétrico respecto a los dos ejes coordenados y al origen.*

*Pero si la ecuación polinomial tiene algún término de grado impar, ese término cambia de signo bajo alguna de las sustituciones mencionadas.*

## Extensión

Nos interesa ahora determinar, a partir de las ecuaciones canónicas, regiones del plano que contengan a las cónicas.

En el caso de la elipse, si de la ecuación (5.4) despejamos una variable en términos de otra, por ejemplo  $y$  en términos de  $x$ , obtenemos

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad (5.8)$$

y para que la raíz cuadrada tenga sentido, es necesario que el radical sea no negativo, esto es

$$1 - \frac{x^2}{a^2} \geq 0,$$

lo cual implica  $a^2 \geq x^2$ ,

$$-a \leq x \leq a.$$

Lo anterior significa que si un punto  $(x, y)$  pertenece a la elipse, su primera coordenada está restringida a tomar valores en el intervalo  $[-a, a]$ .

Si ahora despejamos  $x$  en términos de  $y$ , los mismos pasos anteriores dan lugar a la desigualdad

$$-b \leq y \leq b,$$



que debe leerse así: si un punto  $(x, y)$  pertenece a la elipse, su segunda coordenada está restringida a tomar valores en el intervalo  $[-b, b]$ .

Como la primera coordenada está restringida al intervalo  $[-a, a]$  y la segunda está restringida al intervalo  $[-b, b]$ , entonces ningún punto de la elipse puede estar fuera del rectángulo dado como intersección de las bandas mostradas en la Figura 5.17.

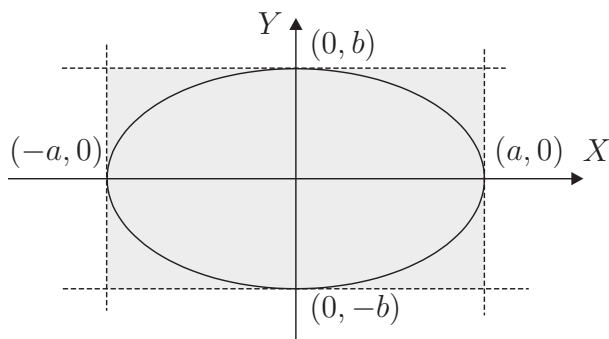


Figura 5.17: Extensión de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

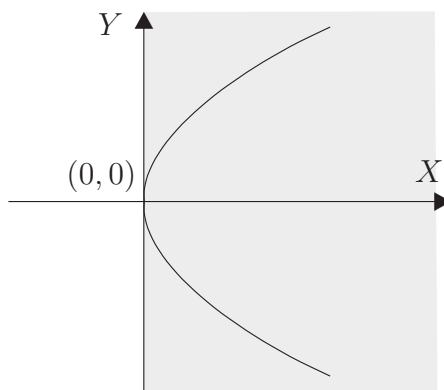


Figura 5.18: Extensión de la parábola  $y^2 = 4px$ .

La ecuación canónica de la parábola también da información sobre la región que contiene a la parábola. Como las coordenadas  $(x, y)$  deben satisfacer  $y^2 = 4px$  y el lado izquierdo es el cuadrado de un número real que es siempre no negativo, entonces el lado derecho también es no negativo. Pero el lado derecho de la ecuación canónica de la parábola es un producto de números

reales, y como 4 y  $p$  son reales positivos,  $x$  debe ser no negativo (y puede tomar cualquier valor positivo), es decir, un punto  $(x, y)$  de la parábola de ecuación (5.5) no puede pertenecer al semiplano izquierdo caracterizado por  $x < 0$ .

Finalmente, para el caso de la hipérbola también podemos tomar la ecuación canónica y despejar cada una de las variables en términos de la otra. Por ejemplo, si de (5.6) despejamos  $x$  en términos de  $y$  obtenemos

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

y para que la raíz cuadrada tenga sentido, el radical debe ser no negativo, es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 \geq 0,$$

lo cual equivale a

$$x^2 \geq a^2,$$

es decir,  $x$  no puede pertenecer al intervalo  $(-a, a)$ , y en consecuencia un punto de la hipérbola en posición canónica debe quedar fuera de la banda caracterizada por  $-a < x < a$ .

Si ahora despejamos  $x$  en términos de  $y$ , vemos que  $y$  no tiene restricción y puede tomar cualquier valor; en cambio, podemos observar que  $x^2/a^2$  es siempre mayor que  $y^2/b^2$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2},$$

y si  $x \neq 0$  podemos escribir

$$\frac{b^2}{a^2} > \frac{y^2}{x^2},$$

que si extraemos raíz cuadrada en ambos miembros da lugar a

$$b/a > |y/x|.$$

porque  $a$  y  $b$  son números positivos. Una desigualdad como la anterior equivale a una desigualdad doble:

$$-(b/a) < (y/x) < b/a,$$

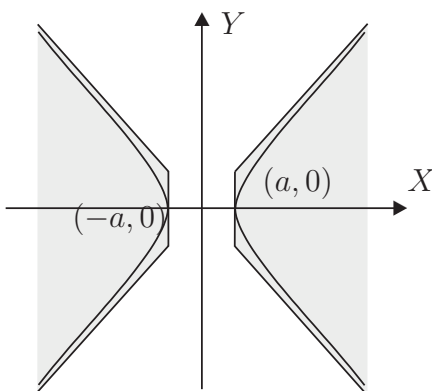


Figura 5.19: Extensión de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

que geométricamente puede leerse así: un punto  $(x, y)$  de la hipérbola debe quedar en las regiones sombreadas de la Figura 5.19 determinadas por las rectas de pendientes  $-b/a$  y  $b/a$  que pasan por el origen.

### Asíntotas de la hipérbola.

Las rectas  $y = (b/a)x$  y  $y = -(b/a)x$ , se denominan *asíntotas de la hipérbola* porque cumplen las dos condiciones requeridas para que una recta sea asíntota de una curva: la distancia entre una de las rectas y la rama de la hipérbola que pertenece al mismo cuadrante tiende a cero cuando el valor absoluto del parámetro tiende a infinito, y la pendiente de la tangente en un punto de la hipérbola tiende a la pendiente de la asíntota ubicada en el mismo cuadrante cuando el valor absoluto del parámetro tiende a infinito.

Nótese que, como lo ilustra la Figura 5.19, cada rama tiende a una asíntota distinta dependiendo del cuadrante en que se encuentre el punto. El concepto de asíntota pertenece a la Geometría Afín, donde se le da un sentido al concepto de *punto al infinito* (véanse [H-C], [R-Se] o [R-Si]).

Para comprobar que las rectas propuestas son asíntotas de la hipérbola, aprovecharemos la simetría de la configuración de la hipérbola y las pretendidas asíntotas, exhibida en la Figura 5.19.

Si  $P(x, y)$  es un punto del primer cuadrante que pertenece a la hipérbola, su distancia a la recta es la longitud del segmento de perpendicular del punto a la hipérbola, y esa longitud es la de un cateto del triángulo formado por el punto  $P$ , el pie  $H$  de la perpendicular a la recta, y la intersección  $P_l$  de

la paralela al eje  $Y$  que pasa por  $P$  con la recta  $l$  de pendiente  $b/a$  (véase la Figura 5.20).

El segmento vertical  $PP_l$  es la hipotenusa del triángulo rectángulo y, por tanto su longitud es mayor que la distancia de  $P$  a la recta. Entonces, si demostramos que la diferencia de las ordenadas de  $P_l$  y  $P$  tiende a 0 cuando  $x$ , que es el parámetro, tiende a infinito, habremos demostrado que la hipotenusa  $PP_l$  tiende a cero y, por el Teorema de Pitágoras, también el cateto  $PH$  tiende a cero, como debe ocurrir para una asíntota.

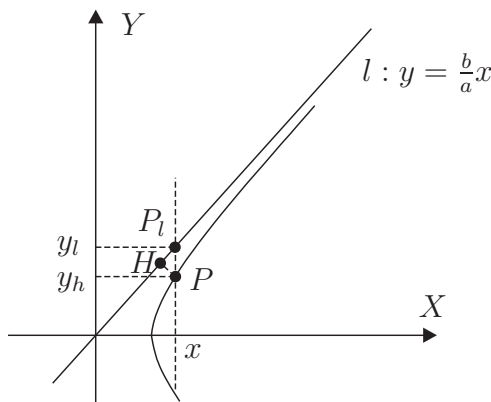


Figura 5.20: La recta  $y = (b/a)x$  es asíntota de la rama de la hipérbola perteneciente al primer cuadrante.

Las ordenadas de los puntos de la recta y de la hipérbola correspondientes a la misma  $x$  son:

$$y_l = (b/a)x \quad \text{y} \quad y_h = (b/a)\sqrt{x^2 - a^2},$$

y la diferencia que nos interesa es  $y_l - y_h$ :

$$= \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \left(\frac{b}{a}\right) \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.$$

Cuando  $x$  tiende a infinito el último cociente tiende a 0, es decir, la distancia de un punto de la hipérbola a la asíntota tiende a cero cuando el parámetro tiende a infinito, que es la primera condición en la definición de asíntota.

La segunda condición es que la pendiente de la recta tangente a la hipérbola en un punto tienda a la pendiente de la recta en cuestión cuando el parámetro

tiende a infinito. Si derivamos respecto a  $x$  la expresión de  $y_h$  en términos de  $x$  para obtener la pendiente, resulta:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (b/a)(1/2)(x^2 - a^2)^{-1/2}(2x) \\ &= \frac{(b/a)x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{(b/a)}{\sqrt{1 - (a^2/x^2)}}. \end{aligned}$$

Cuando  $x$  tiende a infinito, el radical del denominador tiende a 1 y  $y'(x)$  tiende a  $b/a$  como habíamos afirmado.

Las simetrías de la Figura 5.19 respecto a los dos ejes y el origen implican que esta misma recta es asíntota de la otra rama de la hipérbola cuando  $x$  tiende a menos infinito, y que la recta por el origen de pendiente  $-(b/a)$  es asíntota de cada una de las ramas según que  $x$  tienda a más o menos infinito.

## EJERCICIOS

1. Compruebe que el criterio del discriminante es válido para las ecuaciones obtenidas en el ejercicio 3 de la sección anterior.
2. Determine el tipo de cónica correspondiente a cada una de las ecuaciones siguientes:
  - (i)  $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$ ;
  - (ii)  $4x^2 - 25y^2 + 100 = 0$ ;
  - (iii)  $4x^2 + 100y = 0$ ;
  - (iv)  $4y^2 + 25x + 100 = 0$ .
3. Determine los focos y los vértices de las cónicas del ejercicio anterior y haga en cada caso un dibujo en el que señale todos los elementos.
4. Demuestre que la hipérbola de ecuación (5.6) es simétrica respecto al eje  $X$ , al eje  $Y$  y al origen.
5. Analice las simetrías de las cónicas cuyas ecuaciones obtuvo en el ejercicio 4 de la sección 2.
6. Demuestre que ni la elipse ni la parábola tienen asíntotas.
7. Demuestre que ni la parábola ni la hipérbola pueden encerrarse en un rectángulo.
8. Demuestre que una cónica no singular tiene uno, dos o infinitos ejes de simetría y en este último caso la cónica es una circunferencia.

## 5.5 Excentricidad.

### Secciones de un cono

En esta sección damos la definición de cónica en términos del concepto de excentricidad y mostramos su interpretación geométrica. Esta definición permite comprobar que al seccionar un cono por un plano que no pasa por el vértice se obtiene una elipse, una parábola o una hipérbola.

#### Excentricidad

En el plano consideremos una recta fija  $l$  y un punto fijo  $F$  fuera de la recta; queremos estudiar el lugar geométrico  $\mathcal{C}_e$  de los puntos  $P$  del plano tales que su distancia al punto fijo  $F$ , llamado *foco*, y a la recta fija  $l$ , llamada *directriz*, tienen una razón fija,  $e$  (necesariamente positiva) llamada *excentricidad*. Es decir

$$\mathcal{C}_e = \{P \mid d(P, F) = ed(P, l)\}. \quad (5.9)$$

Sabemos que cuando  $e = 1$  el lugar geométrico es una parábola, y nos interesa hacer el ejercicio de trazar las figuras correspondientes a  $e = 1/2$  y a  $e = 2$ . En la Figura 5.21 hemos señalado algunos puntos que evidentemente pertenecen al lugar geométrico correspondiente a cada valor de  $e$ .

Los puntos **parecen** indicar que las figuras deben ser una elipse y una hipérbola, respectivamente. ¿Cómo podríamos saber si realmente lo son? Introduzcamos un sistema coordenado conveniente, esto es, tomemos como eje  $X$  a la perpendicular a la directriz  $l$  por el foco  $F$ , y como eje  $Y$  a la recta  $l$ , como lo muestra la Figura 5.22.

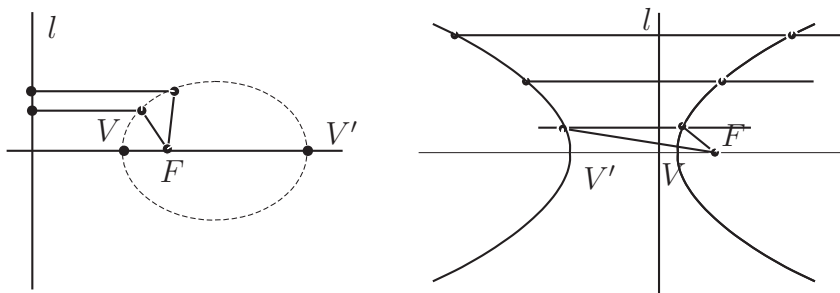


Figura 5.21: Trazado de  $\mathcal{C}_{1/2}$  y de  $\mathcal{C}_2$ .

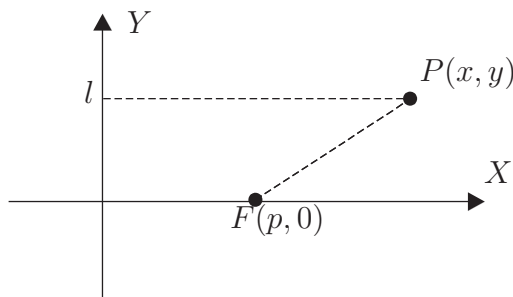


Figura 5.22: Un sistema coordenado conveniente para  $\mathcal{C}_e$ .

Resaltamos el término “parecen” porque no sólo en la antigüedad, sino actualmente, se sigue confundiendo la curva llamada *catenaria* formada por una cadena, con una parábola (véase [R]).

Entonces, si el foco tiene coordenadas  $(p, 0)$  y  $P(x, y)$  pertenece a  $\mathcal{C}_e$ , las distancias involucradas en la ecuación (5.9) pueden escribirse así:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad d(P, l) = |x|,$$

y la condición para que  $P$  pertenezca al lugar geométrico es

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = e|x|,$$

que, elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes toma la forma

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0. \quad (5.10)$$

Ésta es una ecuación cuadrática sin término mixto y, por tanto, podemos aplicar el criterio del discriminante, que en este caso se reduce a analizar el signo de  $1 - e^2$  porque el coeficiente de  $y^2$  es 1:

- i)  $\mathcal{C}_e$  es una elipse si  $1 - e^2 > 0$ , y como se trata de números positivos, la condición se reduce a  $1 > e$ ;
- ii)  $\mathcal{C}_e$  es una parábola si  $1 = e^2$ , es decir, si  $1 = e$ ;
- iii)  $\mathcal{C}_e$  es una hipérbola si  $1 < e^2$ , es decir, si  $1 < e$ .

Entonces puede caracterizarse cada tipo de cónica en términos de la excentricidad:

*Criterio de la excentricidad.* Una cónica es elipse si su excentricidad es menor que 1, es una parábola si su excentricidad es 1, y es una hipérbola si su excentricidad es mayor que 1.

Si en los casos i) y iii) se completa el cuadrado en  $x$  para llevar la ecuación a una de las formas trasladadas, puede comprobarse que  $e = c/a$ .

Sabemos que una elipse y una hipérbola tienen dos focos y que son simétricas respecto al eje conjugado. Entonces es claro que cada foco tiene una directriz que le corresponde; por tanto, una elipse y una hipérbola tienen dos directrices que son simétricas respecto al eje conjugado.

La excentricidad tiene una interpretación en términos de ángulos que es una consecuencia del análisis siguiente.

### Las cónicas como secciones de un cono

Consideremos un cono de revolución completo cuyo eje  $E$  forma un ángulo  $\theta$  con cualquiera de las generatrices, y supongamos que cortamos el cono con un plano  $\mathcal{P}$  que no pasa por el vértice  $V$  (véase la Figura 5.23).

El plano determinado por  $E$  y una recta perpendicular a  $\mathcal{P}$  corta a  $\mathcal{P}$  en una recta  $m$  llamada la *proyección ortogonal* de  $E$  sobre el plano  $\mathcal{P}$ ;  $E$  y  $m$  forman un ángulo  $\phi$  llamado el *ángulo entre el eje y el plano*.

Existe una única esfera  $\mathcal{S}$  entre el plano  $\mathcal{P}$  y el vértice  $V$  que es tangente al cono y al plano simultáneamente; su centro es la intersección del eje del cono con la bisectriz del ángulo determinado por la recta  $m$  y la generatriz  $g$  del cono que corta a  $m$ .

Sea  $\mathcal{C}$  la circunferencia de tangencia entre  $\mathcal{S}$  y el cono, y sea  $F$  el punto de tangencia entre  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{P}$ .

El plano  $\mathcal{Q}$  que contiene a la circunferencia  $\mathcal{C}$  y el plano  $\mathcal{P}$  se intersectan en la recta  $l$ ; la recta  $l$  es perpendicular a  $m$  por la forma en que se obtienen ambas rectas (véase el ejercicio 2 siguiente).

Sea  $P$  un punto cualquiera de la intersección del plano  $\mathcal{P}$  con el cono, y sea  $L$  el pie de la perpendicular de  $P$  a  $l$ . Demostraremos que la razón entre la distancia de  $P$  a  $F$  y la distancia de  $P$  a  $l$  es constante, y que dicha constante es  $\cos \phi / \cos \theta$ .

Con eso habremos demostrado que los puntos  $P$  de la intersección satisfacen la definición de una cónica en términos de la excentricidad, y bastará considerar  $e = \cos \phi / \cos \theta$  para, aplicando el criterio de la excentricidad, poder conocer



el tipo de cónica que resulta al cortar un cono con un plano.

Sea  $g_P$  la generatriz del cono que contiene al punto  $P$ , y sea  $G$  el punto de intersección de  $g_P$  con  $\mathcal{C}$ .

Tracemos una perpendicular desde  $P$  al plano  $\mathcal{Q}$ , y llamemos  $H$  al pie de dicha perpendicular.

Entonces, entre los elementos que hemos definido existen las relaciones siguientes:

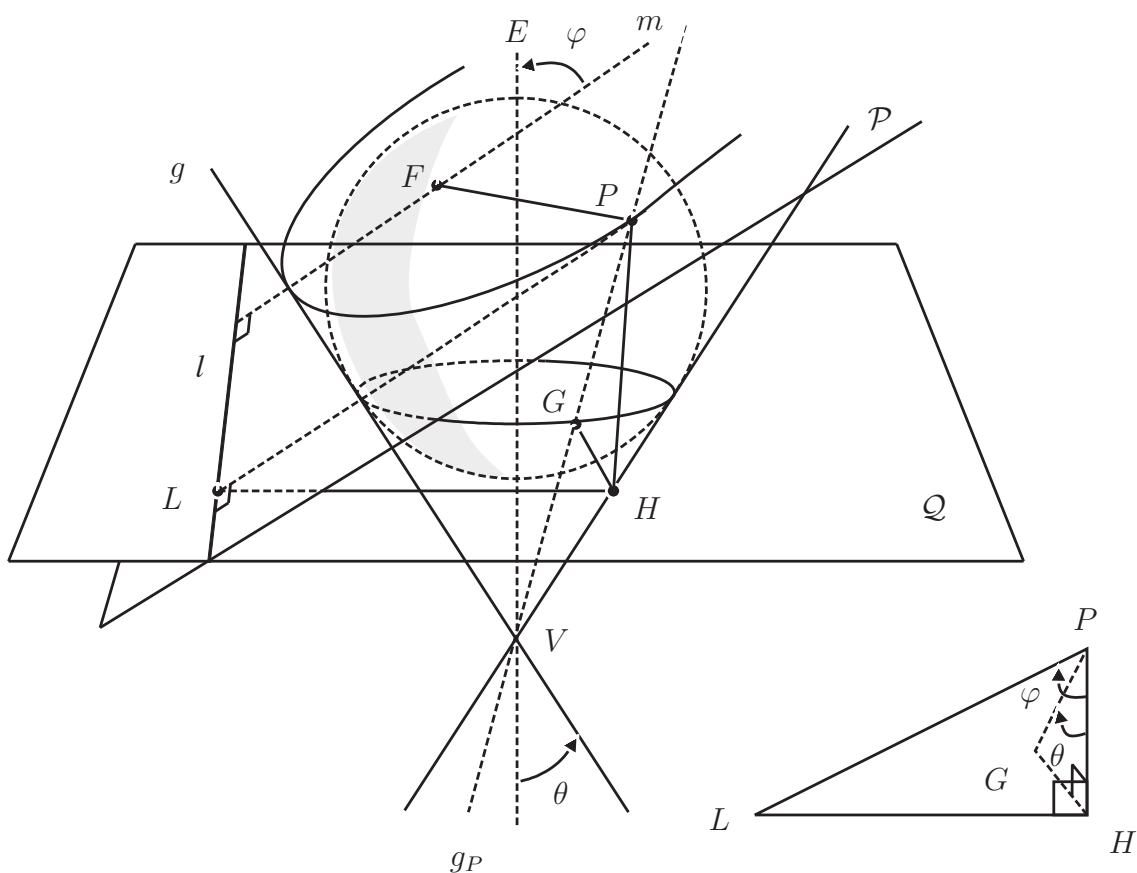


Figura 5.23: Corte de un cono con un plano.

- i)  $d(P, F) = d(P, G)$ , porque ambos son segmentos de tangentes desde  $P$  a una misma esfera,  $\mathcal{S}$ ;

- ii)  $d(P, l) = d(P, L)$ , porque la distancia de un punto a una recta es, precisamente, la longitud del segmento de perpendicular del punto a la recta;
- iii) los triángulos  $\triangle PHL$  y  $\triangle PHG$  son rectángulos con un cateto común,  $PH$ , aunque no son coplanares (véase la Figura 5.23);
- iv) como la recta  $PH$  es paralela al eje del cono y  $PG$  es una generatriz,

$$\angle HPG = \theta$$

y, en consecuencia,  $\cos \theta = d(P, H)/d(P, G)$ ;

- v) como la recta  $PL$  es paralela a  $m$  (ambas son perpendiculares a  $l$ ),

$$\angle LPH = \phi$$

y, en consecuencia,  $\cos \phi = d(P, H)/d(P, L)$ ;

De iii), iv) y v) obtenemos

$$\cos \theta = d(P, H)/d(P, G) \quad \text{y} \quad \cos \phi = d(P, H)/d(P, L),$$

y si de ambas igualdades despejamos  $d(P, H)$  e igualamos lo obtenido, resulta

$$d(P, G) \cos \theta = d(P, L) \cos \phi,$$

lo cual da lugar a la relación prometida si tomamos en cuenta i) y ii):

$$d(P, F) = \left( \cos \phi / \cos \theta \right) d(P, l).$$

Como el criterio de la excentricidad determina el tipo de cónica al comparar  $e$  con 1, y ya que en este caso  $e = \cos \phi / \cos \theta$ , el tipo de cónica depende de cuál ángulo,  $\theta$  ó  $\phi$ , es mayor que el otro:

*Criterio de la razón entre los ángulos.* El tipo de cónica depende de la desigualdad que se dé entre los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  de la Figura 5.23:

si  $\phi > \theta$ , la cónica es una elipse porque en ese caso  $e = (\cos \phi / \cos \theta) < 1$  pues el coseno es una función decreciente entre 0 y  $\pi/2$ ;

si  $\phi = \theta$ , la cónica es una parábola porque en ese caso  $e = (\cos \phi / \cos \theta) = 1$ ;

si  $\phi < \theta$ , la cónica es una hipérbola porque en ese caso  $e = (\cos \phi / \cos \theta) > 1$ .

Lo anterior ha demostrado que la intersección de un cono con un plano que no pasa por el origen es una cónica no singular, es decir, una elipse, una parábola o una hipérbola, y también ha permitido encontrarle una interpretación geométrica a la excentricidad.

Falta únicamente discutir qué ocurre cuando el plano de corte pasa por el origen; ya habíamos pedido al lector imaginar que el plano se desliza hacia el origen conservando el ángulo que forma con el eje. Entonces se ve que cuando las intersecciones eran elipses, se obtiene un punto (el vértice del cono) como caso límite; que cuando las intersecciones eran parábolas, se obtiene una recta (una generatriz) de tangencia como caso límite; y que cuando las intersecciones eran hipérbolas se obtienen dos rectas (dos generatrices) como caso límite (véase la Figura 5.15).

Puestos a imaginar, también podríamos preguntarnos qué ocurre cuando el vértice del cono tiende a infinito. ¿En cuál figura se convierte el cono? ¿Qué tipo de intersecciones resultan al cortar la figura obtenida con planos en posiciones distintas?

Como comentario final a esta sección, nos gustaría mencionar el hecho de que al proyectar un aro circular de alambre en un plano podemos obtener tanto elipses (con circunferencias como caso particular), como parábolas o hipérbolas. Esto puede interpretarse así: bajo proyecciones, una elipse puede transformarse en una parábola o una hipérbola, es decir, el tipo de cónica **no** es invariante bajo proyecciones.

## EJERCICIOS

1. Demuestre que  $e = c/a$  para una elipse y una hipérbola.
2. Asigne el vector de dirección  $(0, 0, 1)$  al eje del cono y el vector de dirección  $(1, 0, 0)$  a  $l$ ; entonces  $m$  tiene vector de dirección  $(0, b, c)$ . Compruebe la perpendicularidad de  $l$  y  $m$ .
3. Suponga que el plano de corte forma con el eje un ángulo distinto al de las generatrices; la intersección es entonces una elipse o una hipérbola.

Demuestre que hay otra esfera tangente al cono y al plano además de la mencionada en nuestra discusión, y que el punto de tangencia entre esa esfera y el plano corresponde, en cada caso, al otro foco. (Estas dos esferas son conocidas como *esferas de Dandelin*.)

4. Demuestre que la elipse y la hipérbola admiten dos directrices.
5. Conteste las preguntas planteadas al final de la sección.
6. Haga una lista exhaustiva de las distintas posibilidades de ecuaciones de segundo grado en dos variables sin término mixto, idéntifíquelas y dibújelas.
7. ¿Cuáles son las posibles cónicas representadas por la ecuación  $x^2 + Cy^2 + y = 0$  al variar  $C \in \mathbb{R}$ ? Analice también las posibilidades para la ecuación  $x^2 + y^2 + Ey = 0$  cuando  $E \in \mathbb{R}$  varía.

## 5.6 Propiedad focal de las cónicas

Los faros de los automóviles cuentan con una parte brillante cuya forma se denomina parabólica por la misma razón a la que deben su nombre las antenas parabólicas. Tanto los faros y las antenas como algunas formas de calentar agua mediante el calor del Sol, emplean la propiedad focal de la parábola. Esta propiedad la tienen todas las cónicas y puede enunciarse de manera que sea válida para todas ellas.

*Propiedad focal de las cónicas.* Si un rayo de luz pasa por un foco, al reflejarse en la cónica lo hace siguiendo una recta que pasa por el otro foco.

Hay varias cosas que aclarar. Por un lado, entendemos que un rayo se refleja en una curva como lo haría si el rayo incidiera en la recta tangente a la curva en el punto. En consecuencia, por el Principio de reflexión, el ángulo de incidencia del rayo en la tangente es igual al ángulo de reflexión.

Entonces, la comprobación de la validez de la propiedad focal en los casos de la elipse y la hipérbola puede reducirse a demostrar que los ángulos formados por la recta tangente  $t$  con cada una de las rectas  $PF_1$  y  $PF_2$  tienen la misma magnitud (véase la Figura 5.24).

Por otro lado, en el caso de la parábola, el “otro” foco es el *punto al infinito* del eje focal, lo cual se entiende mejor cuando uno imagina que el plano de

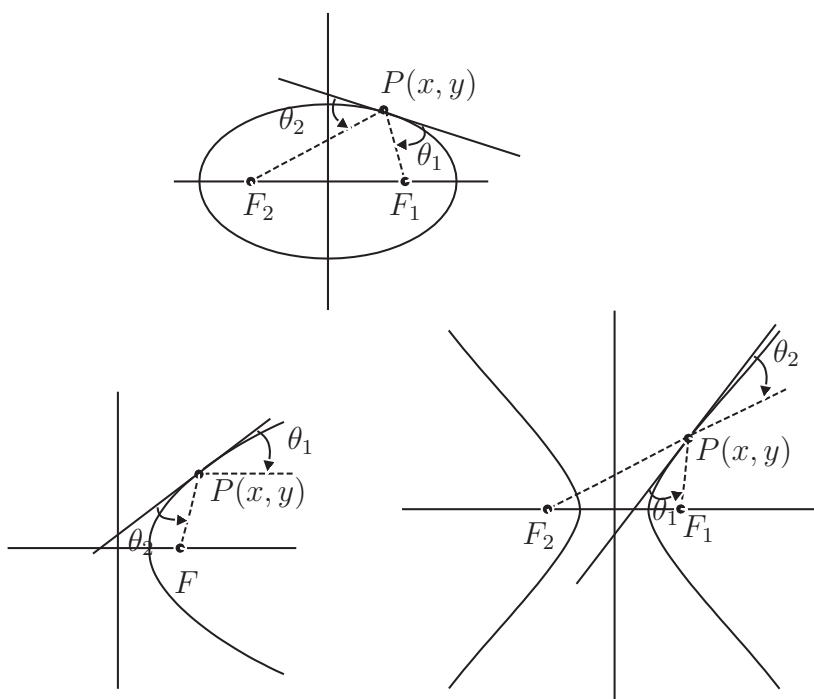


Figura 5.24: La propiedad focal de las cónicas.

corte del cono se inclina hasta alcanzar el ángulo de las generatrices; el foco determinado por la tangencia de la otra esfera considerada en el ejercicio 3 de la sección anterior se aleja sin cota del foco determinado por la esfera considerada en el curso de la demostración. Entonces, para comprobar la propiedad focal en este caso, bastará ver que el ángulo entre la tangente y la recta  $PF$  es igual al ángulo entre la tangente y la paralela al eje focal por  $P$ , o entre la tangente y el eje focal.

La Figura 5.24 ilustra la propiedad focal en los tres casos: elipse, parábola e hipérbola.

Haremos la demostración de la propiedad focal en el caso de la elipse y los otros dos los dejaremos como ejercicio. Supondremos que el punto no está en el eje focal, pues en este caso la verificación es trivial (¿por qué?). De acuerdo con la Figura 5.24, sean  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los ángulos de  $PF_1$  a la tangente y de la tangente a  $PF_2$ , respectivamente. Como los ángulos son positivos y menores

que  $\pi/2$ , serán iguales si y sólo si

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2.$$

Para demostrar que se da la igualdad anterior, tomamos en cuenta la interpretación geométrica del producto escalar de dos vectores

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \cos(\text{arc}(\bar{u}, \bar{v})).$$

Con ello, bastará encontrar vectores  $\bar{u}$  en la dirección de la tangente,  $\bar{v}_1$  en la dirección de  $PF_1$  y  $\bar{v}_2$  en la dirección de  $PF_2$  y comprobar que se verifica la igualdad siguiente:

$$\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}_1\|} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}_2\|}. \quad (5.11)$$

Si en la ecuación (5.8) elegimos el signo de +,

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

que expresa a  $y$  como función de  $x$ , obtenemos la pendiente de la tangente al derivar respecto a  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a^2} \frac{x}{\sqrt{1 - (x^2/a^2)}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

y, por tanto, un vector en la dirección de la tangente es (recuérdese que  $y \neq 0$ ):

$$\bar{u} = (y, -(b^2/a^2)x).$$

Los vectores  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$  se determinan así:

$$PF_1 = \bar{v}_1 = (x - c, y) \text{ y } PF_2 = \bar{v}_2 = (x + c, y).$$

Como en los denominadores de cada miembro de (5.10) aparece  $\|\bar{u}\|$ , bastará verificar la igualdad siguiente:

$$(\bar{u} \cdot \bar{v}_1)^2 \|\bar{v}_2\|^2 = (\bar{u} \cdot \bar{v}_2)^2 \|\bar{v}_1\|^2.$$

Calculemos ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} (\bar{u} \cdot \bar{v}_1)^2 \|\bar{v}_2\|^2 &= (xy - cy - (b^2/a^2)xy)^2 (x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\ &= y^2 \{x[1 - (b^2/a^2)] - c\}^2 (x^2 + 2xc + c^2 + y^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{u} \cdot \bar{v}_2)^2 ||\bar{v}_1||^2 &= (xy + cy - (b^2/a^2)xy)^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
&= y^2\{x[1 - (b^2/a^2)] + c\}^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2).
\end{aligned}$$

Como el punto no está en el eje focal,  $y \neq 0$ , y podemos cancelar  $y^2$  en ambos miembros; entonces la igualdad por comprobar se reduce a

$$\{x[1 - (b^2/a^2)] - c\}^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = \{x[1 - (b^2/a^2)] + c\}^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2). \quad (5.12)$$

Si desarrollamos los cuadrados y establecemos, para simplificar los cálculos,

$$A = x^2 \left(1 - (b^2/a^2)\right)^2 + c^2, \quad B = 2xc \left(1 - (b^2/a^2)\right),$$

$$C = x^2 + y^2 + c^2, \quad D = 2xc,$$

la igualdad (5.12) se escribe como  $(A - B)(C + D) = (A + B)(C - D)$  que se reduce a  $BC = AD$ , es decir, deberemos demostrar

$$\left[2xc \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right] [x^2 + y^2 + c^2] = \left[x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 + c^2\right] [2xc]$$

El factor  $2xc$  aparece en ambos miembros y puede cancelarse; si tomamos en cuenta la relación  $a^2 - b^2 = c^2$ , la igualdad anterior se reduce a

$$(x^2 + y^2 + c^2)(c^2/a^2) = x^2(c^4/a^4) + c^2.$$

Ahora agrupamos los términos en  $x^2$  y dejamos en el miembro derecho los términos independientes para obtener

$$x^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c^4}{a^4}\right) + \frac{c^2}{a^2}y^2 = \frac{c^2(a^2 - c^2)}{a^2},$$

que es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} \left(\frac{c^2(a^2 - c^2)}{a^2}\right) + \frac{c^2}{a^2}y^2 = \frac{c^2(a^2 - c^2)}{a^2}.$$

Como  $a^2 - c^2 = b^2$ , si dividimos toda la ecuación entre el miembro derecho resulta la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

lo cual implica (porque todos los pasos pueden revertirse) la validez de la propiedad focal en el caso de la elipse.

## EJERCICIOS

1. Demuestre la propiedad focal en el caso de la parábola.
2. Demuestre la propiedad focal en el caso de la hipérbola.
3. Otra propiedad común a todas las cónicas es la que Pascal denominó *del Hexágono Místico*: si en una cónica marcamos seis puntos y los numeramos del 1 al 6, los puntos de intersección de “lados opuestos”, es decir, 12 con 45, 23 con 56 y 34 con 61, resultan ser colineales. Ilustre la propiedad en el caso de la elipse; para la cónica singular formada por dos rectas, se tiene el Teorema de Pappus.

## 5.7 Algunos resultados sobre la circunferencia

Tanto en el caso de la circunferencia como en el de la esfera, dice Hilbert en su libro clásico [H-C] que para abarcar sus múltiples propiedades haría falta al menos todo un libro.

Por eso el título de la sección: intentamos únicamente consignar algunas de las propiedades que son de uso más frecuente. Varias de ellas ya eran conocidas desde la antigüedad y su demostración no requiere del uso de coordenadas. Ciertamente no las demostraremos todas; el estudiante puede intentar la demostración por su cuenta o, si lo prefiere, puede recurrir a [Ca], [Ev] o [Sh] de la bibliografía.

Consignaremos primero aquellas propiedades relativas a sus características algebraicas o al tipo de razonamiento que hemos utilizado en el libro.



[1] La ecuación cartesiana de una circunferencia de radio  $r$  y centro  $(h, k)$  tiene las características siguientes:

- (a) Es de segundo grado tanto en  $x$  como en  $y$ ;
- (b) No tiene término mixto;
- (c) Los coeficientes de  $x^2$  y de  $y^2$  son iguales.

Por tanto, la ecuación de una circunferencia tiene siempre el aspecto siguiente, donde  $A \neq 0$ :

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

¿Qué relación entre los coeficientes implica que el lugar geométrico es vacío y cuándo se reduce a un punto? Encargamos al lector la respuesta en el Ejercicio 1 de esta sección.

Note que las características de la ecuación de una circunferencia implican que está determinada por 3 parámetros:  $D/A$ ,  $E/A$  y  $F/A$ , lo cual corresponde a un hecho ampliamente conocido de la geometría elemental:

[2] Una circunferencia está determinada por 3 puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  no colineales: el centro  $O$  es la intersección de las mediatrices del triángulo  $PQR$ , y el radio es la distancia de  $O$  a cualquiera de los puntos.

[3] La circunferencia es un caso límite de elipses, cuando la distancia entre los focos tiende a cero, pues entonces  $b$  tiende a  $a$ . Desde el punto de vista de secciones de un cono, ¿cómo caracterizaría usted a la circunferencia como un límite?

[4] La circunferencia es simétrica respecto a cualquiera de sus diámetros y a su centro, lo cual es inmediato de su ecuación canónica  $x^2 + y^2 = r^2$ .

[5] El interior de la circunferencia (llamado en geometría un *disco*), es un conjunto convexo. Es decir, si dos puntos  $P$  y  $Q$  distan del centro  $O$  menos que el radio, todos los puntos  $R$  del segmento  $PQ$  distan del centro menos que el radio.

El lector recordará que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo, y como el disco está contenido en uno de los semiplanos determinado por la recta tangente a la circunferencia en uno de sus puntos, la intersección de todos esos semiplanos contiene al disco.

Analicemos ahora la circunferencia desde otros puntos de vista.

[6] La circunferencia es una *figura de ancho constante*, es decir, si la circunferencia es tangente a dos rectas paralelas, la distancia entre ambas rectas es constante: la longitud de un diámetro. Esta propiedad es consecuencia de que la tangente a la circunferencia en uno de sus puntos, es perpendicular al radio correspondiente al punto. La circunferencia no es la única curva de ancho constante (vea [Mn]).

[7] En una circunferencia, un ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central que comprende el mismo arco, es decir, en la Figura 5.25, el  $\angle ABC$  mide la mitad del ángulo  $\angle AOC$ , donde  $O$  es el centro de la circunferencia.

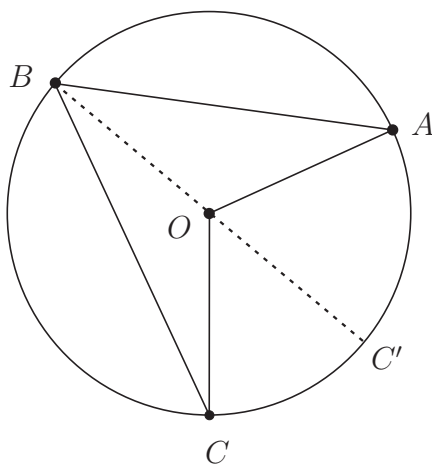


Figura 5.25: En una circunferencia, el ángulo inscrito mide la mitad del central que comprende el mismo arco.

Para la demostración basta considerar el caso en que uno de los lados, por ejemplo la recta punteada  $BC'$  del dibujo, del ángulo inscrito es un diámetro; el triángulo  $ABO$  es isósceles y por tanto el ángulo  $AOB$  es el suplemento tanto del ángulo central  $C'OA$  como del doble del ángulo  $COA$ .

Dos consecuencias triviales de lo anterior son:

[8] Un triángulo inscrito en una circunferencia, uno de cuyos lados es un diámetro, es rectángulo y el ángulo recto es opuesto al diámetro.

[9] En un cuadrilátero *cíclico* (esto es, inscrito en una circunferencia) convexo, los ángulos opuestos son suplementarios. En la Figura 5.26, los ángulos

en  $A$  y en  $C$  suman  $180^\circ$ , lo mismo que los ángulos en  $B$  y en  $D$ , puesto que la unión de cada par de ángulos abarca toda la circunferencia.

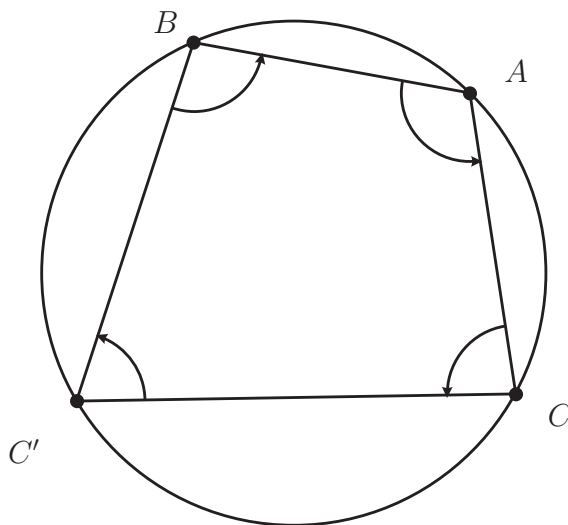


Figura 5.26: En un cuadrilátero cíclico convexo, los ángulos opuestos suman  $180^\circ$

Un tema particularmente interesante y que da lugar a muchas aplicaciones, es el de familias de circunferencias.

Obtenemos una *familia de circunferencias* si en lugar de fijar tres puntos, fijamos únicamente dos, por ejemplo  $Q$  y  $R$ . Por la propiedad [2], cada vez que elijamos un tercer punto  $P$  en el plano tendremos una circunferencia, salvo el caso límite de una recta, cuando  $P$  es colineal con  $Q$  y  $R$ . Entonces, hay un número infinito de circunferencias en la familia determinada por  $Q$  y  $R$ , y sus centros pertenecen a la mediatriz del segmento  $QR$ .

La mediatriz del segmento  $PQ$  se llama el *eje radical* de la familia. Es perpendicular a todas las circunferencias de la familia, puesto que contiene un diámetro, y no es más que el caso límite de circunferencias de otra familia, ortogonal a la primera, cada una de las cuales es el lugar geométrico de puntos  $P$  tales que el cociente de las distancias a  $Q$  y a  $R$  es una constante  $k$ .

De la propiedad [1], es inmediato que ese lugar geométrico es una circunferencia para cada valor  $k \in R^+$ , llamada una *circunferencia de Apolonio* respecto a los puntos  $Q$  y  $R$ .

La red formada por ambas familias se llama una *red de Steiner* (vea la Figura 5.27), y es importante en Variable Compleja y en Geometría Hiperbólica

(vea el inciso 7.6, [Ma] y [R-Se]).

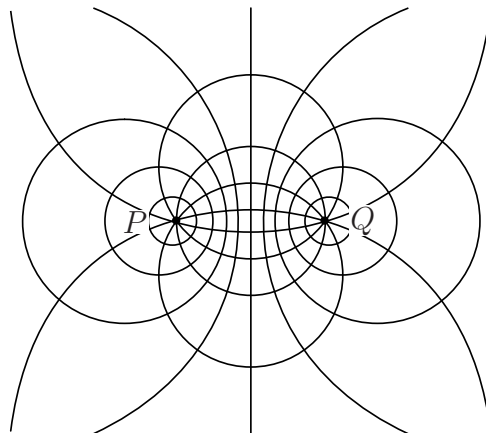


Figura 5.27: La red de Steiner correspondiente a dos puntos  $P$  y  $Q$ .

A continuación proponemos algunos ejercicios para el lector interesado en este tema.

---

## EJERCICIOS

1. Responda cada una de las preguntas planteadas en este inciso.
2. Demuestre que cualquier elemento de una de las familias de una red de Steiner, corta perpendicularmente a todos los elementos de la otra familia.
3. Si fijamos una longitud  $l$  para una curva cerrada, se puede demostrar una de las propiedades más interesantes de la circunferencia:  
 $[10]^{(*)}$  De todas las curvas cerradas con longitud fija  $l$ , la que abarca mayor área es la circunferencia con perímetro  $l$ . Esta propiedad se denomina *Desigualdad Isoperimétrica*. (Para una demostración elemental, vea [DoC 1])
4. Busque en la bibliografía más resultados sobre la circunferencia.

## 5.8 Cónicas en coordenadas polares. Órbitas de los planetas(\*)

Entre los ejercicios del Capítulo 2, se encontraban una elipse, una parábola y una hipérbola, dadas, respectivamente, por las ecuaciones polares:

$$r = 4/(2 + \cos \theta); \quad r = a/\sin^2(-\theta/2); \quad r = a/\sqrt{\sin 2\theta}. \quad (5.13)$$

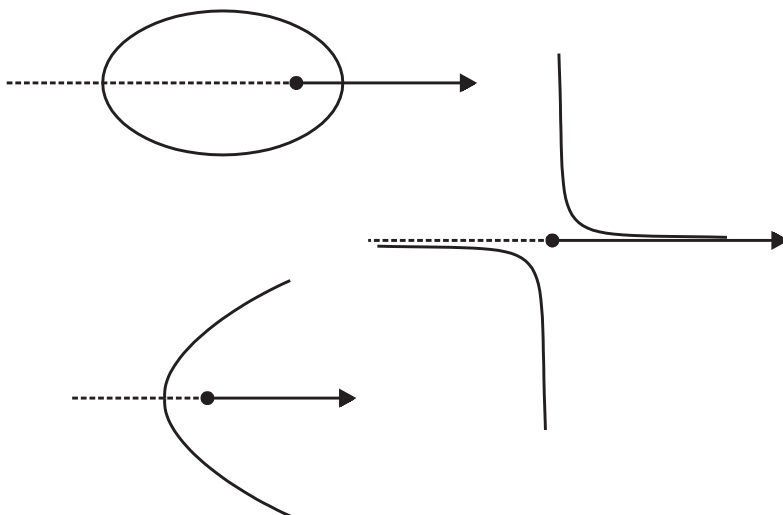


Figura 5.28: Cónicas correspondientes a las ecuaciones (5.13) si  $a = 1$ .

Las coordenadas polares se utilizan en muchos contextos porque ese tipo de presentación puede facilitar ciertos cálculos. A nosotros nos interesa obtener la forma polar de una cónica cuando el polo está en un foco, pues ésa es la forma en que se reconocerá que la trayectoria de un planeta es una elipse.

Para obtener la forma polar de una cónica en el caso de que el polo esté en el foco, trazamos la Figura 5.29, donde  $O$  es el polo,  $P$  un punto de la cónica, la directriz  $\mathcal{D}$  es perpendicular a la dirección del eje polar y dista  $p$  del foco,  $C$  es el pie de la perpendicular de  $P$  a la directriz y  $(r, \theta)$  las coordenadas polares de  $P$ .

Tomando en cuenta la definición de cónica en términos de la excentricidad;  $d(P, O) = e d(P, C)$ , y la Figura 5.29, escribimos

$$r = e(p + r \cos \theta)$$

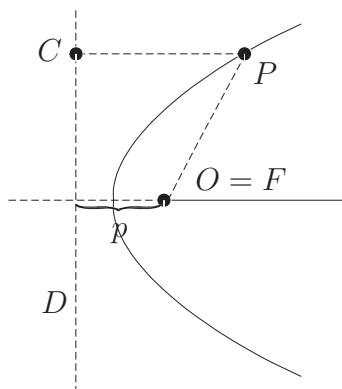


Figura 5.29: Forma polar de la ecuación de una cónica.

y si despejamos  $r$  obtenemos la *forma polar de una cónica con un foco en el origen*

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}. \quad (5.14)$$

que abarca como casos particulares las tres ecuaciones (5.13), si tomamos en cuenta las identidades trigonométricas adecuadas en las dos primeras, y además hacemos una rotación en la tercera.

## Órbitas de los planetas

Este inciso requiere de algunas nociones de Cálculo de Varias Variables, como las de derivada e integral de una función  $\bar{Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y de resultados asociados, como el que afirma que la derivada de un producto satisface la regla de Leibnitz. Sugerimos al lector que lo lea aceptando aquello que no conozca porque seguramente no tardará mucho en familiarizarse con esos conceptos y en ver demostrados los resultados que usaremos. A cambio verá cómo se establece una relación entre Física y Matemáticas (el puente lo establecen las Ecuaciones Diferenciales) y la manera en que al interpretar la solución de una ecuación diferencial se obtiene la información física.

La exposición está tomada casi literalmente del libro *Advanced Calculus* de Nickerson, Spencer y Steenrod (véase [N-S-S] de la bibliografía).

Puede pensarse que la función  $\bar{Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  describe el movimiento de una partícula en el espacio en función del tiempo, por lo que escribimos

$$\bar{Y}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

La *derivada de  $\bar{Y}$  en  $t$* , cuando existe, representa la velocidad y está dada coordenada a coordenada:

$$\frac{d\bar{Y}}{dt}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t));$$

por eso son válidas las propiedades que pueden obtenerse de las que conocemos en Cálculo de una Variable.

Como la derivada vuelve a ser una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ , tiene sentido definir la aceleración o *segunda derivada de  $\bar{Y}$  en  $t$* , cuando existe, como

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)).$$

La integración de este tipo de funciones se lleva a cabo también coordenada a coordenada y nos permite utilizar el conocimiento de las propiedades de la integración en Cálculo de una Variable.

Consideremos que un planeta y el Sol son dos puntos que se mueven en el espacio con vectores de posición  $\bar{Y}_1$  y  $\bar{Y}_2$  con masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente.

Dos cuerpos que se mueven en el espacio están sujetos a la *Ley de Atracción de Newton* expresada por el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas

$$m_1 \frac{d^2\bar{Y}_1}{dt^2} = gm_1m_2 \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\|\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1\|^3} \quad (5.15)$$

$$m_2 \frac{d^2\bar{Y}_2}{dt^2} = gm_1m_2 \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\|\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1\|^3} \quad (5.16)$$

donde  $g$  es la constante gravitacional.

La suma de ambas ecuaciones da el vector nulo del lado derecho, por lo que al integrar dos veces el lado izquierdo obtenemos

$$m_1\bar{Y}_1 + m_2\bar{Y}_2 = \bar{A}t + \bar{B} \quad (5.17)$$

donde  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son vectores constantes.

El *centro de gravedad* de  $\bar{Y}_1$  y  $\bar{Y}_2$  es el vector

$$\bar{Z} = \frac{m_1\bar{Y}_1 + m_2\bar{Y}_2}{m_1 + m_2}$$

que, por (5.17), depende linealmente de  $t$ .

Para referir el movimiento del planeta  $\bar{Y}_1$  respecto a  $\bar{Z}$  tomamos

$$\bar{Y} = \bar{Y}_1 - \bar{Z} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2),$$

lo cual implica, porque  $\bar{Z}(t) = (1/(m_1 + m_2))(\bar{A}t + \bar{B})$ ,

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{Y}_1}{dt^2}.$$

Entonces, la ecuación (5.15) del sistema inicial da

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} = -k^2 \frac{\bar{Y}}{||\bar{Y}||^3} \quad (5.18)$$

donde  $k^2 = gm_2^3/(m_1 + m_2)^2$ .

Para integrar esta ecuación formamos primero el producto vectorial con  $\bar{Y}$  en ambos miembros:

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} \times \bar{Y} = \bar{0},$$

y si el lector deriva el producto siguiente siguiendo la regla de Leibnitz, comprobará que su derivada es la expresión anterior:

$$\bar{Y} \times \frac{d\bar{Y}}{dt} = \bar{C} \quad (5.19)$$

donde  $\bar{C}$  es un vector constante.

Por las propiedades del triple producto escalar obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{Y} \cdot \bar{C} &= \bar{0}, \\ \frac{d\bar{Y}}{dt} \cdot \bar{C} &= \bar{0}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

lo cual implica que:

*$\bar{Y}(t)$  describe una curva plana en un plano ortogonal a  $\bar{C}$ .*

Si introducimos coordenadas polares en ese plano,

$$\bar{Y} = (r \cos \theta)\hat{i} + (r \sin \theta)\hat{j},$$



de la ecuación (5.19) obtenemos, tomando en cuenta que  $r = r(t)$  y  $\theta = \theta(t)$ :

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}|\bar{C}|.$$

La expresión  $(1/2)r^2d\theta$  puede verse como el *elemento de área* en coordenadas polares (reemplaza a  $dx dy$  en una integral doble), y entonces leemos:

*Segunda Ley de Kepler.* El radio vector del Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Formemos ahora el producto vectorial de ambos miembros de (5.18) con  $\bar{C}$  usando (5.19):

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} \times \bar{C} = \frac{k^2}{||\bar{Y}||^3} \bar{Y} \times \left( \bar{Y} \times \frac{d\bar{Y}}{dt} \right). \quad (5.21)$$

Usamos la relación

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$$

para obtener, tomando en cuenta  $\bar{Y} \cdot \bar{Y} = r^2$  y  $\bar{Y} \cdot \frac{d\bar{Y}}{dt} = r \frac{dr}{dt}$ ,

$$\bar{Y} \times \left( \bar{Y} \times \frac{d\bar{Y}}{dt} \right) = \left( \bar{Y} \cdot \frac{d\bar{Y}}{dt} \right) \bar{Y} - r^2 \frac{d\bar{Y}}{dt} = r \frac{dr}{dt} \bar{Y} - r^2 \frac{d\bar{Y}}{dt}.$$

Por tanto, la ecuación (5.21) se transforma en

$$\frac{d^2\bar{Y}}{dt^2} \times \bar{C} = \frac{k^2}{r^3} \left( r \frac{dr}{dt} \bar{Y} - r^2 \frac{d\bar{Y}}{dt} \right) = k^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{Y}}{r} \right), \quad (5.22)$$

de la cual, por integración, resulta

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} \times \bar{C} = k^2 \left( \frac{\bar{Y}}{r} + \bar{E} \right) \quad (5.23)$$

donde el vector constante  $\bar{E}$  es ortogonal a  $\bar{C}$ .

Ahora ya podemos calcular el triple producto escalar  $[\bar{Y}, d\bar{Y}/dt, \bar{C}]$  de dos maneras distintas, una utilizando la relación (5.19) y otra utilizando la relación (5.22) para obtener

$$k^2(r + \bar{E} \cdot \bar{Y}) = \bar{C} \cdot \bar{C}.$$

Si la base  $\hat{i}, \hat{j}$  se escoge de forma que  $\bar{E} = e\hat{i}$  con  $e > 0$ , la expresión anterior toma la forma de la *ecuación de Runge-Lenz*:

$$r = \frac{c^2/k^2}{1 + e \cos \theta}$$

donde  $c = ||\bar{C}||$ .

Sabemos que ésta es la forma polar de una cónica con foco en el polo, de excentricidad  $e$  y directriz paralela a  $\hat{j}$  a distancia  $p$  del origen, donde  $ep = c^2/k^2$  (véase la ecuación (5.14)). La diferencia en el signo del denominador se debe a que el eje polar “natural” para esta situación es el rayo complementario.

Como los planetas describen órbitas cerradas, la excentricidad debe cumplir  $0 < e < 1$ , y hemos obtenido la

*Primera Ley de Kepler.* Un planeta describe una elipse que tiene al Sol en uno de sus focos.

Ciertamente,  $\bar{Z}$  es el vector de posición del centro de gravedad, pero dada la diferencia entre las masas del Sol y uno de los planetas, lo anterior es una buena aproximación.

# Superficies Cuádricas

Así como justificamos el estudio de las cónicas argumentando que son las curvas que siguen de las rectas porque sus ecuaciones son polinomios de segundo grado en dos variables, diremos que las *superficies cuádricas* siguen de los planos (cuyas ecuaciones son polinomios de primer grado en tres variables) porque son el lugar geométrico de los puntos  $P$  del espacio cartesiano  $\mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas  $(x, y, z)$  satisfacen una ecuación de segundo grado en tres variables. Esperamos que en este punto el lector ya no se sorprenda ante un argumento tan algebraico, pues hemos estado enfatizando la importancia de hacer una lectura geométrica de las expresiones algebraicas. Por tanto, saquemos algunas conclusiones de esta definición.

Para empezar, y ya que en el Capítulo 4 resolvimos sistemas de ecuaciones, observemos que para obtener la intersección de una de esas superficies con un plano, deberemos resolver el *sistema* formado por una ecuación cuadrática con una ecuación de primer grado, como las siguientes:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5y^2 - z^2 + 2x - 1 &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Si sustituimos  $x = 0$  en la primera ecuación, obtenemos una ecuación que sigue siendo cuadrática pero sólo en dos variables:

$$5y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

Nosotros ya sabemos que una ecuación de segundo grado en dos variables es una cónica (una cónica ubicada en el plano correspondiente a la ecuación lineal). Entonces, al resolver el sistema formado por una ecuación cuadrática y otra lineal en tres variables, obtenemos una ecuación de segundo grado en dos variables, es decir, al cortar una superficie cuádrica con un plano se obtiene una cónica.

Ésa es también una buena razón para estudiar las superficies cuádricas: hemos estudiado ya sus posibles intersecciones con planos, llamadas *trazas*, y a partir de eso será relativamente sencillo dibujarlas e imaginarlas.

Las superficies cuádricas también tienen *ecuaciones canónicas*, todas las cuales carecen de términos mixtos, ya sea en  $xy$ ,  $yz$  y  $zx$  pues ese tipo de términos no aparecen cuando los ejes coordenados coinciden con los de simetría. Por tanto, procederemos en forma totalmente análoga a como lo hicimos en el caso de las cónicas: obtendremos las ecuaciones canónicas y trazaremos sus gráficas (es indispensable que el lector haga un esfuerzo por lograr un dibujo verídico, es decir bien ubicado en cuanto a ejes y planos de simetría), luego haremos un análisis de las simetrías y extensión de cada una y, finalmente comprobaremos que podemos determinar cuál es el tipo de cuádrica correspondiente a una ecuación cuadrática sin términos mixtos aún sin dibujarla, a partir del análisis de sus coeficientes. Recomendamos consultar el video [R-Ro].

## 6.1 Cilindros

El tipo más sencillo de superficies cuádricas es aquél en el que sólo aparecen involucradas dos variables o una; ya habíamos discutido en el primer capítulo el significado geométrico del hecho de que una variable no aparezca explícitamente en la condición o condiciones: es libre y, en consecuencia, genera rectas completas paralelas al eje de la variable que falta.

Veamos un ejemplo antes de dar la definición formal de cilindro.

**Ejemplo.** Para dibujar o imaginar el lugar geométrico de los puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  que satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

hacemos las consideraciones siguientes: si dibujamos en el plano  $XZ$  la cónica correspondiente a la ecuación dada, por cada punto  $P_0(x_0, 0, z_0)$  de dicha cónica se tiene una recta totalmente contenida en el lugar geométrico: la recta  $(x_0, y, z_0)$  paralela al eje  $Y$ . Eso se debe a que la variable  $y$  no está condicionada y puede tomar cualquier valor si los números  $x_0$  y  $z_0$  satisfacen la ecuación. Cada una de esas rectas es una *generatriz* del *cilindro elíptico* ilustrado en la Figura 6.1. Por tener sólo términos cuadráticos, este cilindro es simétrico respecto a los tres planos coordenados, los tres ejes coordenados y al origen, pero hay muchas más simetrías.

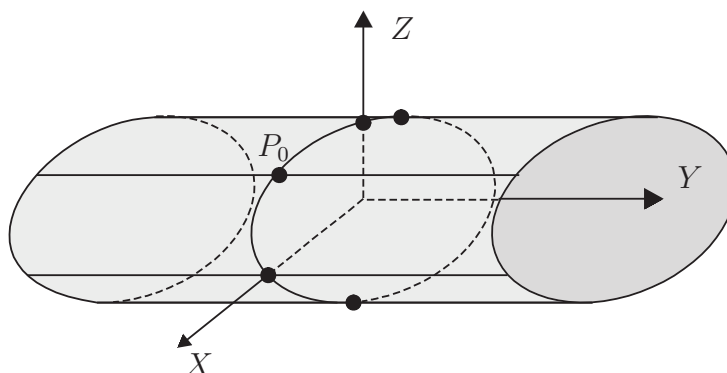


Figura 6.1: Un cilindro elíptico en posición canónica.

Nótese que el cilindro elíptico puede cortarse por un plano no perpendicular al eje del cilindro; en general, la curva de intersección es otra elipse y aunque las generatrices ya no son perpendiculares al plano de corte, sí siguen siendo paralelas entre sí. Ésa es la condición que define a un cilindro.

**Definición.** Un *cilindro* es la superficie formada por rectas paralelas cada una de las cuales contiene un punto de una curva plana llamada *directriz del cilindro*. Cada una de las rectas paralelas es una *generatriz del cilindro*.

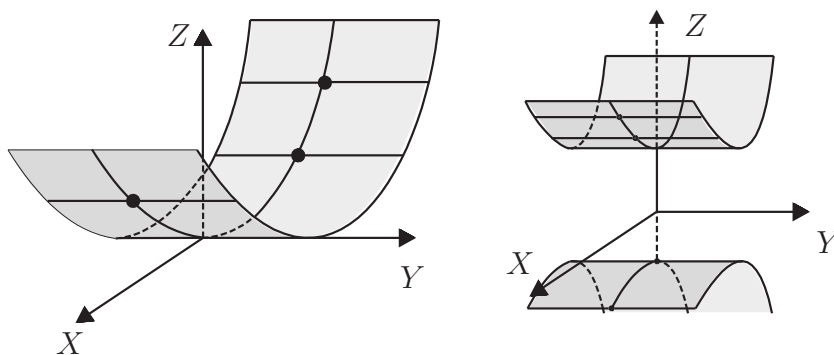


Figura 6.2: Cilindro parabólico y cilindro hiperbólico en posición canónica.

La Figura 6.2 ilustra un cilindro parabólico y otro hiperbólico cuyas ecuaciones son, respectivamente

$$x^2 = 4z \quad \text{y} \quad \frac{z^2}{4} - x^2 = 1.$$

También en este caso hemos empezado por trazar, en el plano de las variables que sí aparecen en la ecuación, la cónica correspondiente; es la *traza* del cilindro en ese plano. Luego completamos el cilindro con esa directriz al tomar generatrices paralelas al eje de la variable que falta.

Una vez dibujados todos los tipos cilindros cuya directriz es una cónica no singular, dibujemos los cilindros cuya directriz es una cónica singular, como es el caso de cada una de las ecuaciones siguientes:

$$(y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 0; \quad (z - 3)^2 = 0; \quad x^2 - z^2 = 0; \quad x^2 - 1 = 0.$$

correspondientes, respectivamente, a un punto, una recta (doble), un par de rectas que se cortan y un par de rectas paralelas (recuérdese la discusión anterior a la Figura 5.15). Omitimos ecuaciones del tipo  $x^2 + y^2 = -1$  y  $x^2 = -1$  que corresponden al conjunto vacío, porque los cilindros respectivos también son vacíos, pues si ningún par de primeras coordenadas satisface la condición, no puede haber una terna de coordenadas que satisfaga esta condición.

Para visualizar los cilindros correspondientes a las ecuaciones dadas, dibujamos en el plano coordenado de las variables involucradas en cada caso (ojo con las ecuaciones segunda y cuarta) la cónica singular respectiva, y por cada uno de los puntos de ese lugar geométrico trazamos una recta paralela al eje que falta. Resulta entonces una sola recta para la primera ecuación,  $(2, y, -2)$ ; un plano (doble),  $(x, y, 3)$ , para la segunda ecuación; dos planos que se cortan,  $(x, y, x)$  y  $(x, y, -x)$ , para la tercera ecuación, y dos planos paralelos,  $(1, y, z)$  y  $(-1, y, z)$  para la cuarta ecuación. Los dibujos aparecen en la Figura 6.3.

En el caso de las cónicas singulares, vimos que cada una era caso límite de un cierto tipo de cónica regular; lo mismo ocurre para los cilindros con directriz singular: una recta es el límite de cilindros circulares cuyo radio tiende a cero; un plano doble es el límite de cilindros parabólicos que se pegan al plano perpendicular por el eje focal de la parábola directriz al plano de parábola; dos planos que se cortan son el límite de cilindros hiperbólicos que se pegan a los planos perpendiculares por las asíntotas al plano de la hipérbola directriz. Y si el lector resolvió el ejercicio 3 de la sección 5.5, aceptará que dos planos paralelos son caso límite de dos planos que se cortan cuando la recta de intersección se aleja indefinidamente.

Entonces tenemos siete tipos de cilindros cuya ecuación es cuadrática: elípticos, parabólicos, hiperbólicos, una recta, un plano doble, dos planos que se cortan y dos planos paralelos.

La Figura 6.4 muestra cilindros cuyas directrices no son cónicas. En el

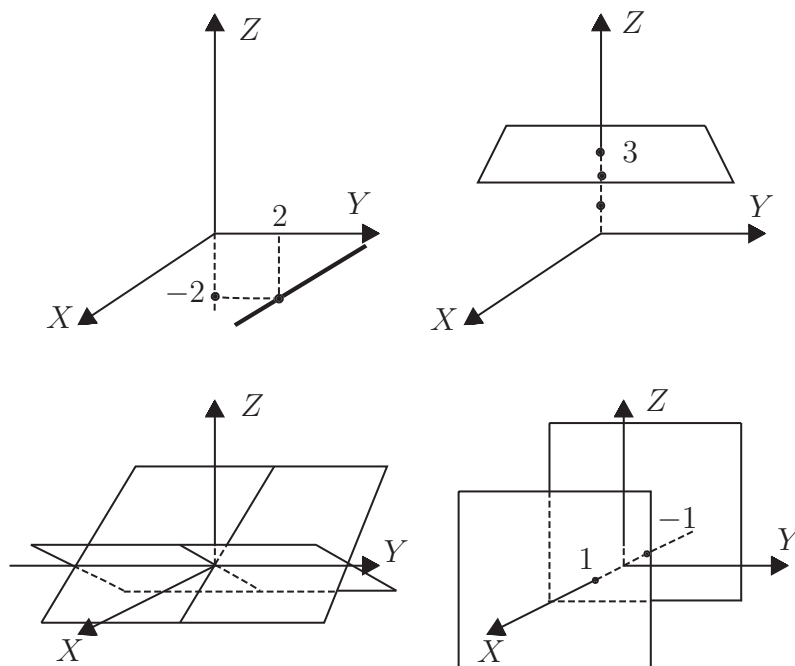


Figura 6.3: Cilindros cuya directriz es una cónica singular.

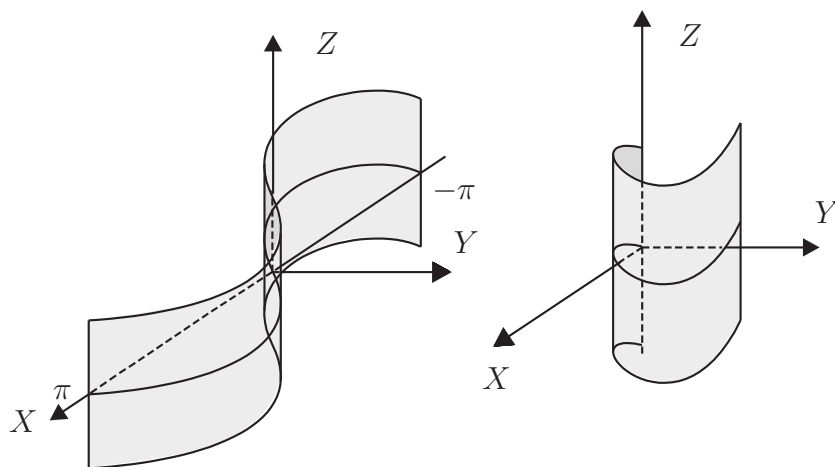


Figura 6.4: Cilindros cuya ecuación no es cuadrática.

primer caso hemos tomado como directriz la gráfica de la función  $y = \sin x$ , y en el segundo, una de las espirales que obtuvimos al trabajar con curvas en coordenadas polares,  $r = \theta$ .

## EJERCICIOS

1. Dibuje por separado cada uno de los cilindros correspondientes a las ecuaciones siguientes:
  - a)  $z^2 = y$ ;
  - b)  $\frac{x^2}{9} - z^2 = 1$ ,
  - c)  $(x + 1)^2 + (z - 2)^2 = 0$ ,
  - d)  $(x + 4)^2 = 4$
  - e)  $y^2 - z^2 = 0$ .
2. Dé en cada caso una ecuación para el cilindro propuesto:
  - a) un cilindro elíptico cuyo eje sea el eje  $Y$ ;
  - b) un cilindro hiperbólico cuya hipérbola directriz esté contenida en el plano  $YZ$ ;
  - c) un cilindro parabólico cuya parábola directriz esté contenida en el plano  $XY$  y cuyo foco sea el punto  $(2, 0)$ .
3. Demuestre que cualquier cilindro tiene un número infinito de planos de simetría.

## 6.2 Superficies de revolución

Otra forma sencilla de obtener superficies cuádricas es rotar una cónica en torno a uno de sus ejes de simetría. El lector puede hacer el experimento sencillo de recortar la región de una cartulina acotada por una elipse, o de una parte del plano acotada por una parte de una parábola o entre las dos ramas de una hipérbola, pegar un palito delgado a uno de los ejes y girar la cartulina en torno al palito; la retina se encargará de hacernos ver una cuádrica de revolución.

Nos interesa obtener la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de una cónica en posición canónica cuando rota en torno a uno



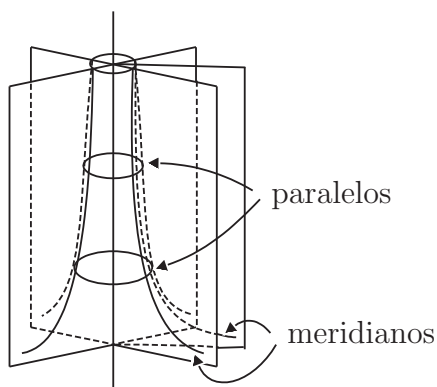


Figura 6.5: Meridianos y paralelos de una superficie de revolución.

de sus ejes de simetría, pero como el método sirve también para obtener la ecuación de la superficie de revolución generada por una curva plana cualquiera contenida en un plano coordenado, haremos las consideraciones en el caso general. Empecemos por la definición.

**Definición.** Una *superficie de revolución* es la superficie generada al rotar una curva plana en torno a una recta contenida en ese mismo plano.

El lector podría realizar el experimento sugerido antes utilizando la curva que es gráfica de la función seno, ¿conoces algún objeto parecido?

Las distintas posiciones de la curva generatriz se denominan *meridianos* de la superficie de revolución, y las circunferencias descritas por cada uno de los puntos de la curva generatriz se denominan *paralelos* de la superficie de revolución, generalizando así los conceptos de meridiano y paralelo del globo terráqueo.

De la definición y el experimento sugerido es inmediato que una superficie de revolución es simétrica respecto a cualquier plano que pase por el eje de revolución, pues cada meridiano tiene un simétrico respecto a cualquiera de esos planos (véase la Figura 6.5).

Para obtener la ecuación de una superficie de revolución, supondremos que la curva  $\mathcal{C}$  está contenida en la parte del plano coordenado  $XZ$  con  $x > 0$ , como lo muestra la Figura 6.6, e imaginamos cada plano que contiene al eje  $Z$  como una hoja de vidrio que tiene dibujada una curva que coincide con  $\mathcal{C}$  si la hoja regresa a la posición  $XZ$ . Si el ángulo entre ambos planos es  $\theta$ , podemos

llamar a la curva en dicho plano  $\mathcal{C}_\theta$  y  $X_\theta$  a la recta perpendicular al eje  $Z$  por el origen. Si la ecuación de la curva original es  $f(x, z) = 0$ , la ecuación de la curva  $\mathcal{C}_\theta$  en el plano  $X_\theta Z$  es  $f(x_\theta, z) = 0$  (véase la Figura 6.6).

El punto  $P_\theta$ , perteneciente a la circunferencia generada por la rotación del punto  $P_0(x_0, 0, z_0)$ , tiene coordenadas  $(x_\theta, z)$  en el plano  $X_\theta Z$  cuya relación con las originales es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} z_0 = z & \text{porque la altura respecto al plano } XY \text{ no cambia,} \\ |x_0| = |x_\theta| & \text{porque la distancia al eje } Z \text{ es fija.} \end{array}$$

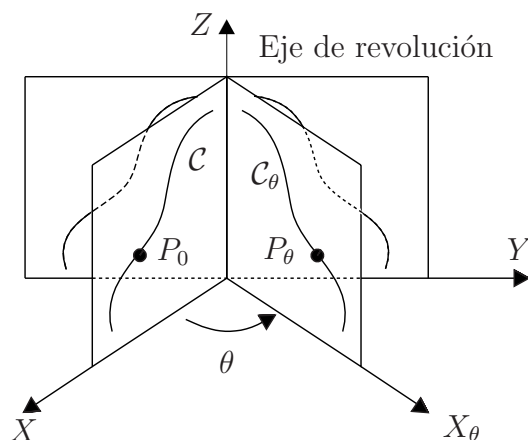


Figura 6.6: Superficie de revolución generada por una curva del plano  $XZ$ .

Ahora bien, si pensamos al punto  $P_\theta$  como un elemento de  $\mathbb{R}^3$ , le corresponden tres coordenadas  $(x, y, z)$  y las dos primeras deben satisfacer

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |x_\theta|,$$

porque  $|x_\theta|$  es la distancia al eje, es decir, el radio de la circunferencia engendrada por el punto  $P \in \mathcal{C}$ .

Entonces, para obtener la ecuación que satisface cualquier punto en la superficie de revolución, basta efectuar las sustituciones siguientes en la ecuación  $f(x, z) = 0$  de la curva original

$$z \mapsto z \quad \text{y} \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6.1)$$

pues lo primero se debe a que cuando el punto  $P$  rota en torno al eje  $Z$  conserva su altura,  $z$ , respecto al plano  $XY$ , y lo segundo simplemente expresa el radio de la circunferencia generada por  $P$ . En general, podemos decir que la variable correspondiente al eje de rotación se conserva, mientras que la otra variable “introduce” a la variable faltante al expresar la distancia al eje de revolución.

De acuerdo a lo anterior, si la curva  $\mathcal{C} \subset XZ$  gira en torno al eje  $X$ , las sustituciones deben ser

$$x \mapsto x \quad y \quad z \mapsto \sqrt{z^2 + y^2}, \quad (6.2)$$

porque la situación geométrica es la de la Figura 6.7.

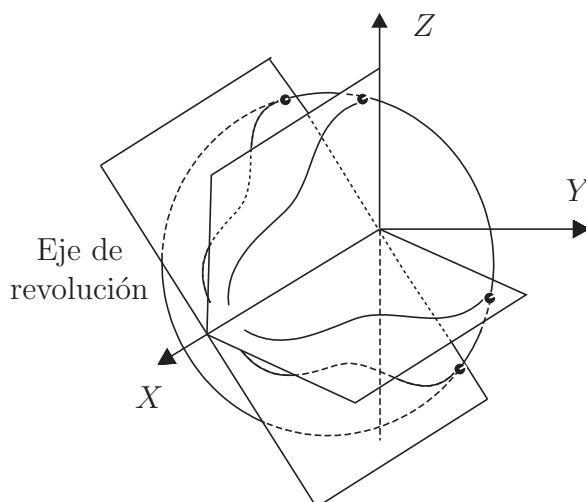


Figura 6.7: Superficie de revolución cuando el eje de rotación es el eje  $X$ .

Si la curva está contenida en algún otro plano coordenado, las sustituciones son las indicadas a continuación, dependiendo de cuál sea el eje de rotación:

- Si  $\mathcal{C} \subset XY$  y el eje de rotación es el eje  $X$ , entonces las sustituciones son

$$x \mapsto x \quad y \quad y \mapsto \sqrt{z^2 + y^2}. \quad (6.3)$$

- Si  $\mathcal{C} \subset XY$  y el eje de rotación es el eje  $Y$ , entonces las sustituciones son

$$y \mapsto y \quad y \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (6.4)$$

- Si  $\mathcal{C} \subset YZ$  y el eje de rotación es el eje  $Y$ , entonces las sustituciones son

$$y \mapsto y \quad y \quad z \mapsto \sqrt{z^2 + x^2}. \quad (6.5)$$

- Si  $\mathcal{C} \subset YZ$  y el eje de rotación es el eje  $Z$ , entonces las sustituciones son

$$z \mapsto z \quad y \mapsto \sqrt{y^2 + x^2}. \quad (6.6)$$

Al comenzar este apartado correspondiente a las superficies de revolución, dijimos que cuando una cónica gira en torno a uno de sus ejes de simetría da lugar a una superficie cuádrica. Bastará obtener las ecuaciones de las superficies con una sustitución del tipo (6.1) anterior para comprobar la afirmación, pero además veremos que cuando una cónica rota en torno a una recta que **no** es un eje de simetría, la ecuación obtenida **no** es de segundo grado.

Obtendremos las superficies cuádricas que nos interesan tomando cónicas en distintos planos coordenados; eso tiene el doble propósito de utilizar cada una de las sustituciones propuestas, y de entrenar al lector en el uso de los distintos ejes coordenados como ejes de revolución.

## Elipsoides

Consideremos una elipse en posición canónica en el plano coordenado  $XZ$ ; la ecuación es entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

y podemos rotarla en torno al eje  $X$  o al eje  $Z$ . En el primer caso aplicamos la sustitución (6.2), porque la variable del eje de revolución permanece sin cambio; obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{z^2 + y^2})^2}{b^2} = 1,$$

que puede simplificarse así:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2 + y^2}{b^2} = 1,$$

o, mejor,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (6.7)$$

Obsérvese que dos denominadores son iguales; eso se debe a que cuando la elipse ha girado un ángulo de  $\pi/2$  en torno al eje  $X$  queda ubicada en el plano  $XY$ , o bien, a que el corte del elipsoide con el plano  $z = 0$  es una elipse congruente con la original. Este elipsoide tiene el aspecto de una sandía,

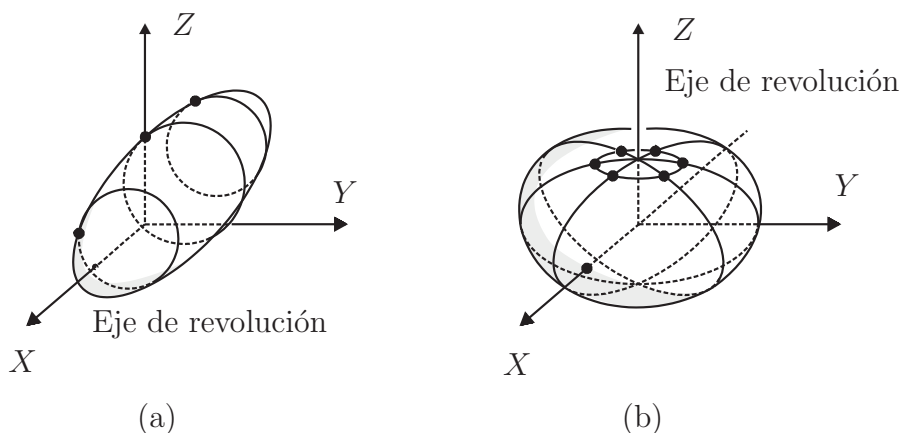


Figura 6.8: Elipsoides de revolución.

con un eje de simetría largo y los restantes, perpendiculares al anterior, más pequeños (véase la Figura 6.8(a)).

Cuando el eje de revolución sea el eje menor, correspondiente en este caso al eje  $Z$ , la sustitución que se aplica es (6.1) y después de elevar al cuadrado la raíz la ecuación de este elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (6.8)$$

Este elipsoide tiene el aspecto de una gragea o de una hamburguesa, pues un vértice de la elipse generatriz da lugar a una circunferencia, mientras que el eje menor no se mueve (véase la Figura 6.8(b)).

Desde luego, si la elipse es realmente una circunferencia, el “elipsoide” es una *esfera* y, como todos los denominadores son iguales, la ecuación suele escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (6.9)$$

Como en el caso de la circunferencia, la esfera es una superficie con muchísimas propiedades geométricas, tanto desde el punto de vista de los conjuntos convexos como del de la Geometría Diferencial y del Cálculo de Variaciones; como en el caso de la circunferencia, nosotros dedicaremos sólo un inciso, el último de este capítulo, para consignar algunas de esas propiedades adicionales a las que incluimos en los ejercicios de esta sección.

## Paraboloide

Tomemos ahora una parábola contenida en el plano  $XY$  y con ecuación

$$x^2 = 4py,$$

cuyo eje de simetría es el eje  $Y$ ; usando la sustitución (6.4) resulta

$$x^2 + z^2 = 4py. \quad (6.10)$$

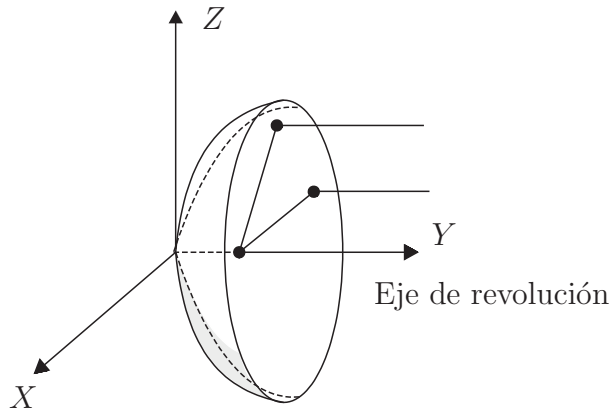


Figura 6.9: Paraboloide de revolución.

El aspecto de un paraboloide de revolución es precisamente el de una antena parabólica; el foco de la parábola original es el foco de todas las parábolas meridianas y en él se concentran los rayos reflejados en el paraboloide provenientes de un satélite artificial (véase la Figura 6.9) que, para efectos prácticos, está en el infinito.

Si rotamos la parábola en torno al eje conjugado, que no es un eje de simetría, se forma una superficie parecida a un cojín circular (infinito) con un botón puntual en el centro (haga un dibujo), que corresponde al vértice de todas las parábolas meridianas. La sustitución que debemos utilizar es la dada por (6.3); entonces resulta

$$x^2 = 4p\sqrt{y^2 + z^2},$$

y para eliminar el radical debemos elevar al cuadrado, lo cual originará un término de cuarto grado en el lado izquierdo. Por tanto, ésta no es una superficie cuádrica.

## Hiperboloides

Tomemos ahora una hipérbola en posición canónica en el plano  $YZ$ . Si la ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

entonces el eje focal es el eje  $Y$  y el conjugado, el eje  $Z$ . Como ambos son ejes de simetría de la hipérbola, la rotación en torno a cualquiera de ellos dará lugar a una superficie cuádrica. Pero éstas son esencialmente diferentes, como veremos a continuación.

Si rotamos en torno al eje  $Y$ , deberemos usar la sustitución (6.5), lo cual da lugar a la ecuación siguiente:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Para dibujar el hiperboloide correspondiente a esta situación, conviene observar que las ramas de la hipérbola dan lugar a dos partes ajenas (que no se cortan) del hiperboloide, que de hecho son reflejadas una de la otra respecto al plano  $XZ$ . Debido a ello este hiperboloide se denomina *hiperboloide de dos hojas* o *de dos mantos*, y tiene el aspecto mostrado en la Figura 6.10.

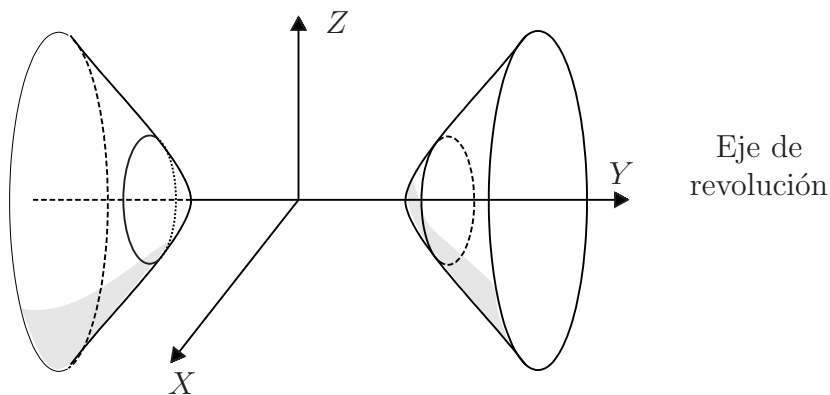


Figura 6.10: Hiperboloide de dos mantos.

Si ahora utilizamos como eje de rotación el eje  $Z$ , la sustitución es (6.6) y la ecuación de la superficie es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

porque la variable que cambia es  $y$ .

Este hiperboloide consta de una sola pieza, porque una rama de la hipérbola alcanza a la otra después de dar media vuelta, por eso se llama *hiperboloide de una hoja o de un manto*, y la figura correspondiente aparece a continuación.

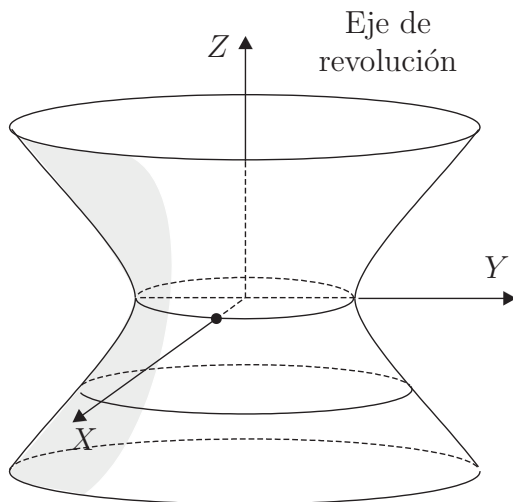


Figura 6.11: Hiperboloide de un manto.

### Cuádricas generadas por cónicas singulares

Rotemos ahora las cónicas singulares: un punto, una recta doble, dos rectas que se cortan o dos rectas paralelas. Tomemos como ecuaciones canónicas las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + y^2 = 0 & \text{punto contenido en el plano } XY, \\
 z^2 = 0 & \text{recta doble contenida en el plano } YZ, \\
 z^2 - x^2 = 0 & \text{rectas que se cortan contenidas en el plano } ZX, \\
 y^2 = 9 & \text{rectas paralelas contenidas en el plano } YZ.
 \end{array}$$

En el primer caso, cualquiera de las sustituciones (6.3) o (6.4) da lugar a la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

que nuevamente corresponde a un punto,  $(0,0,0)$ , caso límite de esferas cuyo centro es el origen y cuyos radios tienden a cero.



En el segundo caso, dependiendo de cuál eje se tome como de revolución, obtenemos una recta

$$x^2 + z^2 = 0 : \text{ el eje } Y, \text{ si el eje de revolución es el eje } Y,$$

o un plano doble

$$z^2 = 0 : \text{ el plano } XY \text{ si el eje de revolución es el eje } Z.$$

Las dos rectas que se cortan pertenecientes al plano  $ZX$ , podemos rotarlas respecto a cualquiera de los ejes,  $Z$  o  $X$ , porque ambos son ejes de simetría, y obtenemos un cono en ambos casos,

$$y^2 + z^2 - x^2 = 0 \quad \text{si el eje de rotación es el eje } X,$$

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{si el eje de rotación es el eje } Z.$$

Desde luego, los conos son distintos como lo muestra la Figura 6.12.

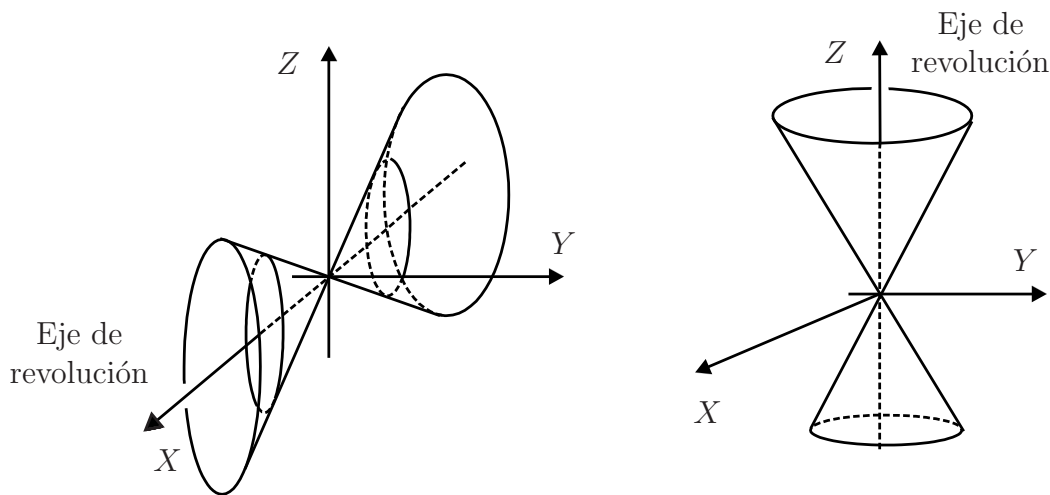


Figura 6.12: Los dos conos generados al rotar dos rectas que se cortan.

Las dos rectas paralelas pertenecientes al plano  $YZ$  son simétricas respecto a cualquiera de los ejes  $Y$  o  $Z$ , y paralelas respecto al eje  $Z$ . Si las rotamos en torno al eje  $Y$ , cada una genera un plano paralelo al plano  $XZ$ , y si las rotamos en torno al eje  $Z$ , cada una alcanza a la otra después de rotar un ángulo de  $\pi$  y se forma un cilindro. Las sustituciones son (6.5) y (6.6), respectivamente, que dan lugar a las ecuaciones

$$y^2 = 9 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 9.$$

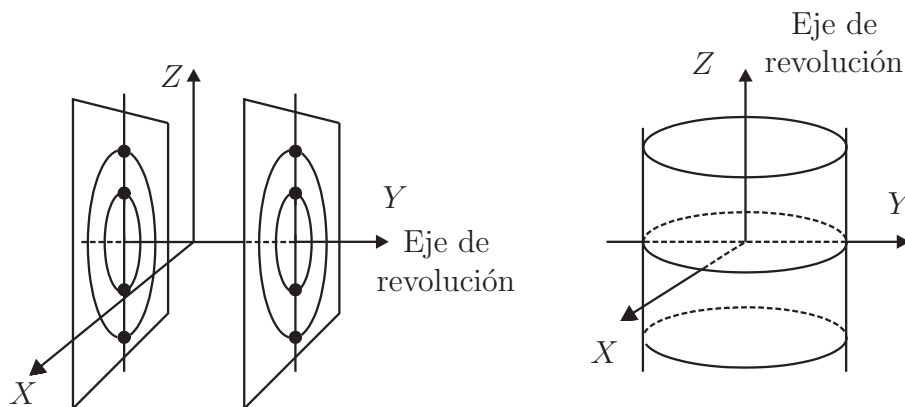


Figura 6.13: Al rotar dos rectas paralelas, resultan dos planos paralelos o un cilindro.

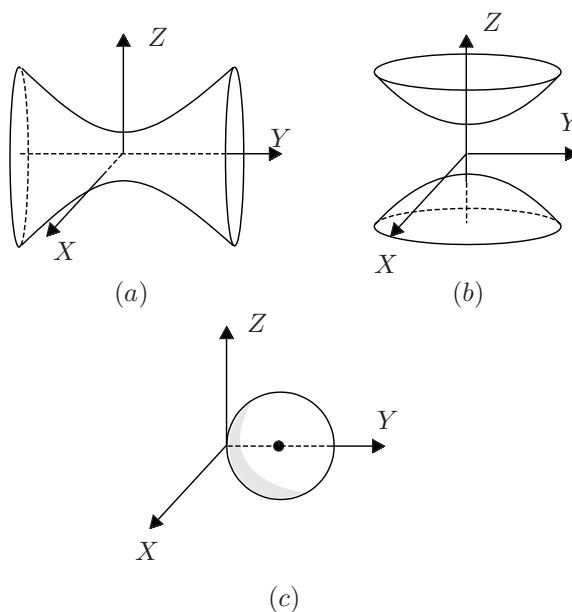
Las ilustraciones aparecen en la Figura 6.13.

## EJERCICIOS

1. Obtenga la ecuación de la superficie de revolución generada al rotar la circunferencia en el plano  $YZ$   $(y - 2)^2 + z^2 = 1$  en torno al eje  $Z$ ,  $y$  dibújela. El nombre matemático de esta superficie es *toro*, y juega un papel importante en muchas ramas de la geometría. ¿Es una superficie cuádrica?
2. Dibuje la superficie de revolución correspondiente a cada una de las ecuaciones siguientes:
  - a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ ;
  - b)  $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ ;
  - c)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ ;
  - d)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0$ .
3. Para cada una de las figuras ilustradas, dé una ecuación cuadrática que pueda corresponderle.
4. Demuestre que la familia de elipsoides cuyo centro es el origen obtenida al variar  $k \geq 0$  en la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = k,$$

llena el espacio, en el sentido de que cada punto  $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  pertenece a uno de esos elipsoides.



5. Demuestre que la familia de hiperboloides obtenidos al variar  $k \in \mathbb{R}$  en la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = k,$$

llena el espacio en el mismo sentido del ejercicio anterior.

6. Demuestre que una esfera tiene un número infinito de planos y de ejes de simetría. ¿Cuántos centros?
7. Demuestre que al cortar una esfera con cualquier plano resulta una circunferencia.
8. Demuestre que si  $A$  y  $B$  son dos puntos fijos en  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto de puntos que satisfacen  $(P - A) \cdot (P - B) = 0$  es una esfera.

## 6.3 Las posibles superficies cuádricas

Una ecuación de segundo grado en tres variables sin términos mixtos tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0. \quad (6.11)$$

Es importante notar que, en general, para satisfacerla podemos elegir arbitrariamente el valor de dos de las variables y entonces la tercera queda obligada excepto por el signo. Por haber dos **grados de libertad** decimos que *una ecuación en tres variables representa una superficie*. Afirmamos dos cosas.

- 1a.) Cuando hay términos mixtos en una ecuación cuadrática, éstos pueden eliminarse mediante una rotación adecuada con centro en el origen  $(0, 0, 0)$ .
- 2a.) Salvo un único caso, ya hemos visto ejemplos de las superficies que resultan como lugar geométrico al dar valores numéricos a los coeficientes de la ecuación anterior.

Para justificar la primera de estas afirmaciones necesitamos nociones básicas de transformaciones lineales, mismas que conforman el último capítulo; en cambio, para justificar la segunda bastará hacer un análisis ordenado de los casos posibles.

Es importante recalcar que cuando un problema se resuelve por casos, debe cuidarse de agotar **todos** los casos posibles. En nuestro caso, el papel relevante lo tienen los términos cuadráticos, y por eso la primera división considerará tres casos esenciales: I)  $A, B$  y  $C$  no nulos; II)  $A = 0$ ,  $B$  y  $C$  no nulos; III)  $A = B = 0$  y  $C \neq 0$ . Las posibilidades como  $B = 0$  y  $A$  y  $C$  no nulos sólo involucran un cambio en la posición de la superficie.

En el caso I se dice que la cuádrlica tiene *rango 3*, en el caso II se dice que la cuádrlica tiene *rango 2*, y en el caso III la cuádrlica tiene *rango 1*; en el Capítulo 7 demostraremos que el rango es invariante bajo cambios de posición de la cuádrlica en un sistema coordenado.

Nos ahorraremos mucha escritura si tomamos en cuenta una observación sencilla: cuando uno de los coeficientes cuadráticos sea no cero, por ejemplo  $A \neq 0$ , la existencia del término lineal correspondiente,  $G \neq 0$ , no es relevante, pues bastará completar el cuadrado (lo cual implica sólo una traslación) para reducir el estudio a un caso trasladado de uno canónico. Esto quedará más claro con el análisis del primer caso.

- I) Si  $A, B, C \neq 0$  en (6.11), tenemos dos subcasos esencialmente distintos:
  - a) que el signo de los tres coeficientes sea el mismo, o b) que dos coincidan en signo y difieran del tercero.

- a) Un caso típico con los tres coeficientes del mismo signo lo proporciona la ecuación siguiente, donde hemos tomado  $A = B = C = 1$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Si  $G$ ,  $H$  o  $I$  no son cero, podemos completar el cuadrado correspondiente, por ejemplo

$$x^2 + Gx + (G/2)^2 - (G/2)^2 = \left(x - (G/2)\right)^2 - (G/2)^2,$$

para obtener una ecuación del tipo

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - m)^2 + J' = 0,$$

donde  $J'$  resulta al agrupar con  $J$  los negativos de los números que debimos sumar para completar los cuadrados. La última ecuación es una esfera con centro  $(h, k, m)$  si  $J' < 0$ , el punto  $(h, k, m)$  si  $J' = 0$ , o el conjunto vacío si  $J' > 0$ . Si en lugar de tomar los tres coeficientes iguales hubiéramos tomado, por ejemplo,  $A = 1$ ,  $B = 2$  y  $C = 3$ , la única diferencia se daría si  $J' < 0$ , pues la superficie sería un *elipsoide no de revolución* con centro  $(h, k, m)$  en lugar de una esfera, pero las otras dos posibilidades no cambian, lo cual deberá justificar el lector en uno de los ejercicios. La diferencia entre un elipsoide de revolución y el que resulta al tomar  $A = 1$ ,  $B = 2$  y  $C = 3$ , es que los cortes con planos paralelos a los de simetría son siempre elipses, nunca circunferencias.

- b) Un caso típico en que dos de los coeficientes tienen el mismo signo y difieren del signo del tercero, está dado por la ecuación siguiente:

$$x^2 + y^2 - z^2 + J = 0,$$

que, según hemos visto, corresponde a un hiperboloide de dos mantos si  $J > 0$ , a un cono si  $J = 0$ , y a un hiperboloide de un manto si  $J < 0$ . Si en lugar de tomar  $A = B = 1$  y  $C = -1$  hubiéramos tomado, por ejemplo,  $A = 1$ ,  $B = 2$  y  $C = -3$ , la diferencia sería que los hiperboloides y el cono no serían de revolución sino *hiperboloides elípticos* y *cono elíptico*. La costumbre es no escribir el adjetivo “elíptico”, sino más bien resaltar el caso en que sea “de revolución”.

Así pues, podemos concluir que cuando los tres coeficientes de los términos cuadráticos son no cero y tienen el mismo signo (subcaso (a)), el lugar geométrico puede ser un *elipsoide*, un *punto* o el *conjunto vacío*, en tanto que cuando dos de los coeficientes tienen un mismo signo que difiere del tercero (subcaso (b)), los lugares geométricos posibles son un *hiperboloide de dos mantos*, un *cono* o un *hiperboloide de un manto*.

- II) Cuando uno de los coeficientes cuadráticos de (6.11) se anula pero los otros dos son no cero, por ejemplo  $C = 0$  y  $A, B \neq 0$ , hay cuatro subcasos esencialmente distintos: a) cuando el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático nulo es distinto de cero,  $I \neq 0$  si  $C = 0$  para nuestro ejemplo, y los otros dos coeficientes tienen el mismo signo, b) cuando el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático nulo es distinto de cero y los otros dos coeficientes difieren en signo, c) cuando el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático nulo también se anule,  $I = 0$  en la ecuación (6.11), y los coeficientes cuadráticos no nulos tienen el mismo signo, y d) cuando es cero el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático que se anula y los dos coeficientes cuadráticos no cero difieren en signo.

- a) Un ejemplo típico del primer subcaso es la ecuación

$$x^2 + 2y^2 + z = 0,$$

cuyo lugar geométrico es un *paraboloide elíptico*, muy parecido al paraboloide de revolución de la Figura 6.9, con la única diferencia de que los cortes con los planos  $z = \text{constante}$  son elipses en vez de circunferencias.

- b) Un ejemplo del segundo subcaso está dado por la ecuación

$$x^2 - y^2 - z = 0,$$

de cuyo lugar geométrico no tenemos un ejemplo hasta ahora. Si analizamos los cortes de esta superficie con los planos  $z = \text{constante}$ , por ejemplo con  $z = 1$ ,  $z = 0$  y  $z = -1$ , resulta una hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje  $X$  a altura  $z = 1$ , o el par de rectas a más y menos  $45^\circ$  en el plano  $XY$ , o una hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje  $Y$  a altura  $z = -1$ . En cambio, cuando

cortamos con planos  $x=\text{constante}$  (paralelos al plano  $YZ$ ), o con planos  $y=\text{constante}$  (paralelos al plano  $XZ$ ), obtenemos parábolas que se abren hacia abajo en el primer caso, y hacia arriba en el segundo. Esta superficie se denomina *paraboloide hiperbólico* o *silla de montar*, pues su aspecto es el ilustrado en la Figura 6.14.

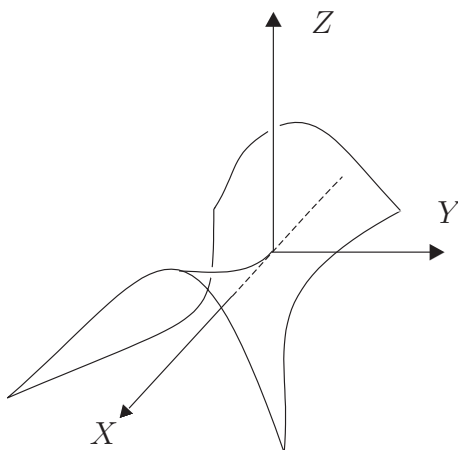


Figura 6.14: Paraboloide hiperbólico o silla de montar.

El punto  $(0,0,0)$  pertenece a la superficie y es el mejor ejemplo de un *punto silla*, pues para la parábola resultante al cortar con el plano  $y = 0$  es el punto más bajo (su vértice), pero para la parábola resultante al cortar con el plano  $x = 0$  es el punto más alto (también es el vértice).

Nos interesa que el lector estudie cuidadosamente esta superficie; puede pensarse como formada por parábolas congruentes a la parábola  $z = -y^2$  del plano  $x = 0$ , paralelas a ese plano y cuyos vértices pertenecen a la parábola  $z = x^2$  del plano  $XZ$ , y también puede pensarse como formada por hipérbolas de la familia  $x^2 - y^2 = k$  ubicadas cada una a la altura  $k$  sobre el plano  $XY$ . Más sorprendente resulta pensarla formada por rectas de dos familias distintas, como lo demostraremos más adelante.

c) El tercer subcaso tiene como ejemplo la ecuación

$$x^2 + 2y^2 + J = 0,$$

que tiene como lugar geométrico el *conjunto vacío* si  $J > 0$ ; una *recta*,  $(0, 0, z)$ , si  $J = 0$ , y un *cilindro elíptico* si  $J < 0$ .

d) Un ejemplo del cuarto subcaso es la ecuación

$$x^2 - y^2 + J = 0,$$

cuyos posibles lugares geométricos son: un *cilindro hiperbólico* si  $J \neq 0$  y *dos planos que se cortan* cuando  $J = 0$ .

Por tanto, cuando uno de los coeficientes de los términos cuadráticos es cero, los posibles lugares geométricos son: un *paraboloide elíptico* en el subcaso a); un *paraboloide hiperbólico o silla de montar* en el subcaso b); el *conjunto vacío*, una *recta* o un *cilindro elíptico* en el subcaso c); y un *cilindro hiperbólico* o *dos planos que se cortan* en el subcaso d).

**III)** Cuando dos de los coeficientes cuadráticos de (6.11) se anulan, por ejemplo  $B = C = 0$ , el tercero debe ser no nulo y hay tres subcasos distintos: a) cuando son no nulos ambos coeficientes de los términos lineales correspondientes a los cuadráticos que se anulan,  $H, I \neq 0$  en la ecuación (6.11); b) cuando se anula sólo uno de los coeficientes de los términos lineales correspondientes a los cuadráticos que se anulan,  $H = 0$  e  $I \neq 0$  en nuestro ejemplo; y c) cuando se anulan los dos términos lineales correspondientes a los cuadráticos que se anulan.

a) Una ecuación típica para este subcaso es

$$x^2 + y + z = 0,$$

y el lugar geométrico correspondiente es un *cilindro parabólico* que no está en posición canónica, pero el lector lo reconocerá al considerar que la intersección con un plano del tipo  $x = k$  es una recta,  $y + z + k^2 = 0$ , como lo muestra la Figura 6.15.

Nótese que si  $J \neq 0$ , la superficie difiere únicamente por estar trasladada, es decir, no pasa por el origen sino por el punto  $(0, -J, 0)$ .

b) Un ejemplo de este subcaso es la ecuación

$$x^2 + y = 0,$$



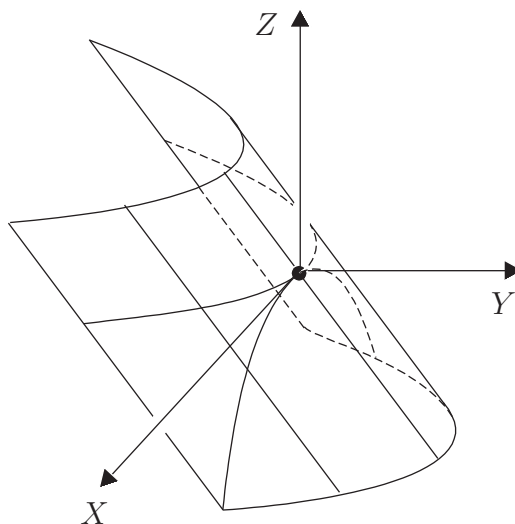


Figura 6.15: Cilindro parabólico en posición no canónica.

que es también un *cilindro parabólico*, sólo que esta vez sí está en posición canónica. Nuevamente, si  $J \neq 0$  la superficie sólo difiere de la del ejemplo por una traslación.

c) Finalmente, un ejemplo de este subcaso es

$$x^2 + J = 0,$$

que corresponde al *conjunto vacío* si  $J > 0$ , o a un *plano doble*, el  $YZ$ , si  $J = 0$ , o a *dos planos paralelos*,  $x = \pm\sqrt{-J}$  si  $J < 0$ .

Entonces, cuando sólo uno de los coeficientes cuadráticos es distinto de cero, las posibilidades son: un *cilindro parabólico* para los casos a) y b), y el *conjunto vacío*, un *plano doble* o *dos planos que se cortan* para el caso c).

El lector deberá comprobar que hemos analizado ya todos los casos.

Si comparamos las posibilidades obtenidas con las que conocíamos antes de este análisis, comprobamos que la única superficie de la cual no teníamos algún ejemplo es el paraboloides hiperbólico, pues no surge ni al modificar el tamaño de los ejes de una superficie de revolución, puesto que eso significaría convertir en elipses las circunferencias de una superficie de revolución, y en

un paraboloide hiperbólico no hay elipses, ni es un cilindro porque no está formado por rectas paralelas a una dirección fija.

A continuación listamos los distintos lugares geométricos correspondientes a una ecuación cuadrática sin términos mixtos en tres variables, acompañándolos de su *ecuación canónica*:

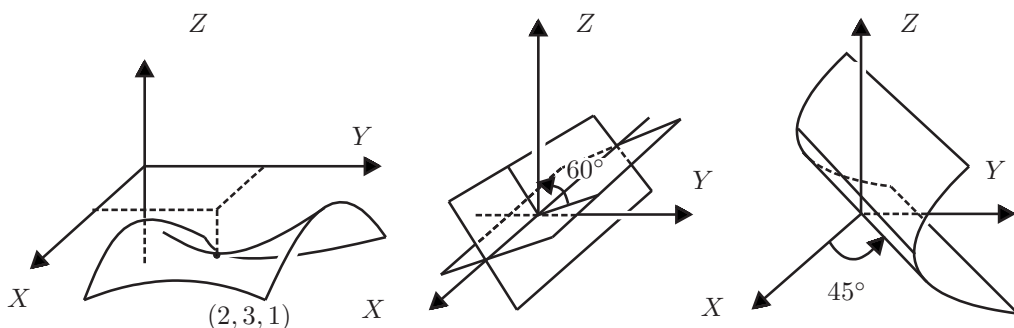
1. elipsoide:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
2. hiperboloide de dos mantos:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
3. hiperboloide de un manto:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
4. paraboloide elíptico:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ .
5. paraboloide hiperbólico:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ .
6. cilindro elíptico:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
7. cilindro hiperbólico:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
8. cilindro parabólico:  $x^2 = 4py$ ;
9. cono elíptico:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$
10. dos planos que se cortan:  $x^2 - 2y^2 = 0$ ;
11. dos planos paralelos:  $x^2 - 1 = 0$ ;
12. un plano doble:  $x^2 = 0$ ;
13. una recta:  $x^2 + y^2 = 0$ ;
14. un punto:  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ;
15. el conjunto vacío:  $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ .

Desde luego, no todos estos lugares geométricos constituyen verdaderas superficies, como ocurre con los tres últimos, y es fácil observar que un cono o dos planos que se cortan contienen puntos en los cuales el plano tangente no está bien definido. Pero como lo exhiben los ejemplos, son posibles lugares geométricos de una ecuación de segundo grado en tres variables.

Hemos escrito las ecuaciones canónicas en sólo una de sus modalidades, por ejemplo  $x^2 = 0$  para un plano doble, pero claramente pudimos escribir  $z^2 = 0$ . La única diferencia es la posición de la superficie respecto al sistema coordenado, pero las propiedades geométricas son exactamente las mismas.

## EJERCICIOS

1. Dé un ejemplo de cada uno de los distintos tipos de polinomios cuadráticos en tres variables sin términos mixtos y haga el dibujo correspondiente en cada caso.
2. ¿Cuáles son los posibles lugares geométricos si la ecuación (6.11) carece de término en  $x^2$ ? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.
3. ¿Cuáles son los posibles lugares geométricos si la ecuación (6.11) carece de término en  $y^2$  y en  $y$ ? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.
4. ¿Cuáles son los posibles lugares geométricos si la ecuación (6.11) tiene exactamente dos coeficientes cuadráticos iguales? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.
5. ¿Cuáles son los posibles lugares geométricos si el polinomio tiene sólo un coeficiente cuadrático no nulo? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.
6. Dé la ecuación correspondiente al paraboloide hipérbolico, el par de planos que se cortan y el cilindro parabólico en posición no canónica ilustrados a continuación.



7. Demuestre que si cualquier corte de una superficie cuádrica con un plano es una elipse, la superficie debe ser un elipsoide.

8. Justifique la afirmación siguiente: el cono de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$  es un caso límite tanto de una familia de hiperboloides de un manto como de una familia de hiperboloides de dos mantos. *Sugerencia:* sustituya el 1 en el lado derecho de la ecuación canónica de un hiperboloide de un manto por  $k \in \mathbb{R}$ ; ¿qué superficie resulta cuando  $k = 0$ ? ¿Y cuando  $k = -1$ ? ¿Y cuando  $k < 0$ ? ¿Y cuando  $k > 0$ ?
9. Demuestre que nuestro análisis abarcó todos los casos posibles.
10. Haga el análisis de las posibles superficies correspondientes a la ecuación  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$ , dependiendo del signo de  $G$ ,  $H$ ,  $I$  y  $J$ .

## 6.4 Simetrías y extensión

Analizaremos ahora algunas propiedades de las superficies cuadráticas. Veremos que ese análisis es muy sencillo a partir de las ecuaciones canónicas consignadas en el inciso anterior, pues esas ecuaciones resultaron de ubicar apropiadamente las cónicas que las originaron.

### Simetrías

Si recordamos la definición de simetría respecto a cada uno de los planos coordenados, de los ejes coordenados o del origen, es inmediato concluir lo siguiente (nos referiremos a la numeración utilizada en la lista del final del inciso anterior):

- 1) Un elipsoide tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría*.

El elipsoide en posición canónica tiene los tres planos coordenados como planos de simetría, pues cuando una de las coordenadas de un punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  del elipsoide cambia de signo, por ejemplo  $x_0 \mapsto -x_0$ , resulta un punto simétrico respecto al plano de las otras dos variables,  $YZ$  en nuestro ejemplo, pero como la variable  $x$  aparece elevada al cuadrado en la ecuación del elipsoide, el punto  $P'(-x_0, y_0, z_0)$  satisface también la ecuación del elipsoide.

En consecuencia, los ejes coordenados son ejes de simetría del elipsoide, pues en el ejercicio 7 de la sección 3 del capítulo 1 se demostró que si

dos planos coordenados son ejes de simetría de una figura, el eje común resulta eje de simetría de la figura. Los segmentos de los ejes de simetría encerrados en el elipsoide se denominan *ejes del elipsoide*, y sus longitudes son las *longitudes de los ejes*.

Y, desde luego, el punto  $P'''$  simétrico respecto al origen de un punto  $P$  en el elipsoide tiene como coordenadas las negativas del punto original, y al elevarlas al cuadrado la ecuación sigue siendo satisfecha. Este centro de simetría se denomina *centro del elipsoide*.

- 2) Un hiperboloide de dos mantos tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría*.

Los argumentos son exactamente los mismos que en el caso anterior.

- 3) Un hiperboloide de un manto tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría*.

Nuevamente, la demostración se basa en el hecho de que todas las variables aparecen sólo con grado par.

- 4) Un paraboloide elíptico tiene *dos planos de simetría y un eje de simetría*.

En este caso, sólo pueden cambiar de signo las variables que aparecen con exponente cuadrático, mientras que la variable cuyo exponente es uno impide que haya simetría respecto al plano de las otras dos.

- 5) Un paraboloide hiperbólico tiene *dos planos de simetría y un eje de simetría*.

Las razones son las mismas del caso anterior.

- 6) Un cilindro elíptico tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría*.

Además de los planos sobre los ejes de la elipse sobre la que se levanta el cilindro, deben considerarse todos los planos paralelos al plano de dicha elipse. Un eje de simetría es la recta por el centro de dicha elipse y perpendicular al plano de la elipse (a esta recta suele llamársele *eje del cilindro elíptico*), y los restantes son los ejes de las elipses paralelas a la original y los de ella misma (¿por qué?). Los centros de simetría son los puntos del llamado eje del cilindro.

- 7) Un cilindro hiperbólico tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría.*

Las razones son las mismas del caso anterior.

- 8) Un cilindro parabólico tiene *un número infinito de planos de simetría y un número infinito de ejes de simetría.*

En este caso todos los planos de simetría son paralelos al plano de la parábola sobre la que se levanta el cilindro, y los ejes de simetría del cilindro son los ejes de las parábolas que resultan de cortar con un tal plano al cilindro parabólico.

- 9) Un cono elíptico tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría.*

Eso se debe a que cada variable aparece con grado 2 únicamente.

- 10) Dos planos que se cortan tienen *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de centros de simetría y un número infinito de ejes de simetría.*

Además de los dos planos que bisecan a los planos analizados, deben considerarse los planos paralelos entre sí y perpendiculares a los planos dados; la recta en que se cortan los planos analizados es un eje de simetría, y cualquier punto del eje funciona como centro de simetría. Pero también son ejes de simetría las rectas en los planos que bisecan y perpendiculares a la recta de intersección de los planos. Pediremos al lector que justifique estas afirmaciones en los ejercicios.

- 11) Dos planos paralelos tienen *un número infinito de planos de simetría, de ejes de simetría y de centros de simetría.*

Además de los planos ortogonales a ambos planos, hay simetría respecto al plano paralelo a los dos y equidistante de ambos. Las rectas de dicho plano son ejes de simetría de la figura formada por la unión de los dos planos, y cualquier punto de dicho plano es un centro de simetría.

- 12) Un plano doble tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría.*

Pediremos al lector encontrar todos los planos, ejes y centros de simetría de este caso.

- 13) Una recta tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría.*

También en este caso, será el lector quien encuentre los elementos mencionados.

- 14) Un punto tiene *un número infinito de planos de simetría y de ejes de simetría, pero sólo un punto de simetría.*

El lector no tendrá problema para justificar lo anterior.

- 15) El conjunto vacío tiene *simetría respecto a cualquier plano, cualquier recta y cualquier punto.*

La justificación de lo anterior es que la definición de cualquier tipo de simetría es *condicional*: si  $P \in (\text{figura})$  ..., pero como el conjunto vacío carece de elementos, no hay condición que satisfacer.

## Extensión

Decimos que una figura en el espacio tridimensional está *acotada* si existe alguna esfera que la contiene.

Como la única cónica acotada es la elipse, cuando una superficie contenga parábolas o hipérbolas no podremos encontrar ninguna esfera que la contenga. Pero también sería útil encontrar un plano que deje a la superficie en uno del semiespacios que define, o una “rebanada del espacio” (la región entre dos planos paralelos) en la que no haya puntos de la superficie, etc.

Para determinar regiones sencillas que contengan a nuestras superficies, haremos referencia nuevamente a las ecuaciones canónicas del inciso anterior.

- a) En el caso de los cilindros, bastará considerar los cilindros sobre la frontera de las regiones que contenían a la cónica que origina el cilindro para obtener las regiones que encierran a la cuádrica.

Como ejemplo, consideremos un cilindro hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

y la región que encierra a la hipérbola con esa misma ecuación en el plano  $XY$ , la cual está delimitada por las asíntotas y las rectas  $x = \pm a$ ; entonces el cilindro hiperbólico consta de dos pedazos, uno sobre cada una de las ramas y contenido en la región acotada por los tres planos

$$y = (b/a)x, \quad y = -(b/a)x, \quad x = \pm a,$$

donde el signo  $-$  se toma para la parte del cilindro sobre la rama izquierda de la hipérbola, y el signo  $+$  se toma para la parte del cilindro sobre la rama derecha de la hipérbola.

El análisis de la extensión del resto de los cilindros cuadráticos correrá por cuenta del lector.

- b) Entonces sólo falta analizar las superficies correspondientes a las ecuaciones canónicas 1)–5), del elipsoide al paraboloides hiperbólico, y 9), el cono elíptico.

El elipsoide de ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

está acotado por la esfera de radio  $r = \max\{a, b, c\}$ , pues cualquier punto  $P(x, y, z)$  en el elipsoide tiene norma menor que  $r$ , como es inmediato comprobar. Si  $r = a$ , es decir,  $b, c \leq a$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} &\geq \frac{y^2}{a^2}, \\ \frac{z^2}{c^2} &\geq \frac{z^2}{a^2}, \end{aligned}$$

y, en consecuencia, si  $P(x, y, z)$  satisface la ecuación del elipsoide, las desigualdades anteriores dan lugar a la desigualdad

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1,$$

que implica

$$|P| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq a.$$



El hiperboloide de dos mantos,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

y el hiperboloide de un manto,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

están separados por el cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

De hecho, es conveniente pensar en la *familia de hiperboloides* correspondientes a las ecuaciones, una por cada  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k.$$

Cuando  $k = 0$  se trata del cono elíptico, cuando  $k > 0$  se trata de un hiperboloide de un manto cuya “cintura” es tanto más reducida cuanto menor sea  $k > 0$ , y cuando  $k < 0$ , para tener una ecuación de tipo canónico deberemos dividir ambos lados de la igualdad entre  $k$ , pero como  $k < 0$  los signos del miembro izquierdo cambian y la ecuación corresponde a un hiperboloide de dos mantos. Los “vértices” de ambos mantos son más cercanos al vértice del cono cuanto menor sea  $|k|$ .

El estudiante que tenga nociones de cálculo de varias variables reconocerá que estamos hablando de las *superficies de nivel*  $k \in \mathbb{R}$  de la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

La superficie de nivel  $k$  está formada por los puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tales que al aplicarles la función dan el valor  $k$ . Se dice que el espacio está *foliado* por los hiperboloides (cono incluido) de nivel  $k$ , pues cada punto pertenece a una y sólo una de las *hojas* de la foliación.

El paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$$

está contenido en uno de los semiespacios determinados por el plano  $XY$ , pues dicho plano contiene a todas las rectas que son borde de uno de los semiplanos que contienen a una de las parábolas obtenidas al cortar el paraboloide con uno de los planos que contienen al eje (de simetría) del paraboloide. Sugerimos al lector que haga un dibujo de la situación que acabamos de describir.

El paraboloide hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

no puede acotarse por una región sencilla, pues ninguna de las coordenadas de sus puntos presenta alguna restricción, y, de hecho, contiene puntos arriba y abajo del plano  $XY$ , a derecha e izquierda del plano  $XZ$ , y en ambos lados del plano  $YZ$ . Por tanto, no podemos proponer alguna región sencilla que lo limite.

El cono elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

correspondiente a  $k = 0$  en la familia de los hiperboloides, puede decirse que está contenido en cualquiera de los hiperboloides de un manto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = k > 0,$$

y, adicionalmente, sabemos que contiene sólo un punto, el vértice, en el plano perpendicular al eje por el dicho vértice.

## EJERCICIOS

1. Haga un dibujo de cada una las superficies cuádricas 1)–14), marque un punto y localice todos los puntos simétricos respecto a los planos, rectas y puntos mencionados en el análisis de las simetrías.

2. Justifique las simetrías señaladas en el texto y que no fueron justificadas formalmente, correspondientes a los casos 10), 12), 14).
3. Determine y dibuje regiones que acoten a las superficies siguientes:
  - a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ ,
  - b)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ ,
  - c)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = z$ .
4. Establezca una regla sencilla en términos de coordenadas para determinar si hay simetría respecto a planos paralelos a los coordenados, a ejes paralelos a los coordenados y a un punto cualquiera.

## 6.5 Cuádricas con ejes paralelos a los coordenados

Si trasladamos paralelamente una cuádrica  $\mathcal{S}$  en posición canónica, cada punto  $P \in \mathcal{S}$  se desplaza por un mismo vector  $\bar{u}_0 = (h, k, l)$  para convertirse en el punto  $P' \in \mathcal{S}'$ , es decir,

$$P' = P + \bar{u}_0$$

o, equivalentemente,

$$P = P' - \bar{u}_0,$$

que en términos de coordenadas da las igualdades

$$x = x' - h, \quad y = y' - k, \quad z = z' - l.$$

Ahora utilizamos el mismo razonamiento aplicado para obtener la ecuación de una cónica trasladada: si la ecuación de la cuádrica  $\mathcal{S}$  es

$$f(x, y, z) = 0,$$

la ecuación de la cónica trasladada  $\mathcal{S}'$  es

$$f(x' - h, y' - k, z' - l) = 0$$

que, si suprimimos las primas, puede escribirse como una nueva ecuación en  $x, y, z$ :

$$F(x, y, z) = 0$$

y cuyo lugar geométrico es precisamente la cuádrica trasladada.

Por tanto, la “regla” para obtener la ecuación de la cuádrica trasladada  $\mathcal{S}'$  por el vector  $\vec{u} = (h, k, l)$  es efectuar las sustituciones

$$x \mapsto x - h, \quad y \mapsto y - k, \quad z \mapsto z - l.$$

Como único ejemplo escribamos la ecuación del paraboloide hiperbólico cuyo punto silla es  $(-3, -2, -1)$  obtenido al trasladar por el vector  $(-3, -2, -1)$  al paraboloide hiperbólico de ecuación canónica

$$z^2 - x^2 = y.$$

Según la regla, en esta ecuación debemos efectuar las sustituciones siguientes:

$$x \mapsto x + 3, \quad y \mapsto y + 2, \quad z \mapsto z + 1,$$

y obtenemos

$$(z + 1)^2 - (x + 3)^2 = y + 2.$$

El lector queda encargado de hacer un dibujo del paraboloide hiperbólico trasladado; note que los planos y ejes de simetría también se trasladan: los planos de simetría son los planos  $x = -3$  y  $z = -1$ . mientras que el eje de simetría es la recta paralela al eje  $Y$  de ecuación vectorial  $(-3, -2, -1) + t(0, 1, 0)$ .

## EJERCICIOS

1. Analice las simetrías del paraboloide hiperbólico  $(z+1)^2 - (x+3)^2 = y+2$  utilizando el análisis del caso canónico.
2. Dé una ecuación que corresponda a una cuádrica con ejes paralelos a los coordenados para cada tipo 1)-14).
3. Haga el dibujo correspondiente a cada una de las ecuaciones del inciso anterior.
4. Haga el dibujo correspondiente a cada una de las ecuaciones siguientes:
  - (a)  $(y - 1)^2 - 4 = 0$ ;
  - (b)  $(x + 1)^2 + \frac{(z+2)^2}{9} = y$ ;
  - (c)  $\frac{(x+4)^2}{2} + \frac{(y-4)^2}{2} + \frac{(z+2)^2}{8} = 2$ ;

- (d)  $y^2 - \frac{(z+3)^2}{9} = 1$ ;  
 (e)  $(z+4)^2 - 4(y-1)^2 = 0$ ;  
 (f)  $\frac{(z+2)^2}{25} - (x+2)^2 = y-1$ ;  
 (g)  $\frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z+2)^2}{8} = 2(x-3)^2$ .

5. Dé las ecuaciones de los planos, ejes y centros de simetría para cada una de las ecuaciones que escribió en el inciso anterior.

## 6.6 Superficies regladas

Los cilindros y el cono elíptico son ejemplos de superficies con la propiedad de que para cada punto en ellas hay toda una recta contenida en la superficie y que pasa por el punto. Una superficie con dicha propiedad se denomina *superficie reglada*.

Ya habíamos definimos *cilindro* como la superficie formada por las rectas paralelas a una dirección fija y cada una de las cuales contiene un punto de una curva plana; eso proporciona una gran cantidad de ejemplos de superficies regladas. La curva plana se denomina *directriz del cilindro*, y cada una de las rectas paralelas a la dirección fija se denominan *generatrices*. En la Figura 6.4 ilustramos un cilindro cuya directriz es la gráfica de la función seno, que recuerda a una lámina acanalada, y un cilindro cuya directriz es una espiral.

El concepto de *cono* es análogo al anterior si en lugar de rectas paralelas consideramos rectas que pasen por un punto fijo  $V$ , llamado *vértice del cono*, cada una de las cuales contiene un punto de una curva plana llamada *directriz del cono*, donde el plano de la curva no contiene al vértice del cono. Por tanto, si tomamos una curva plana y elegimos un punto fuera de ese plano como vértice, el conjunto de rectas por el vértice que contienen un punto de la curva dan lugar a un cono. La Figura 6.16 ilustra un cono sobre una lemniscata.

Otro ejemplo de superficie reglada, muy familiar actualmente, es un *helicoides*, superficie formada por rectas paralelas al plano  $XY$ , cada una de las cuales pasa por un punto de la hélice  $(\cos t, \sin t, t)$  y por el punto  $(0, 0, t)$  del eje  $Z$ . Si el lector examina la Figura 6.17, reconocerá que las rampas de los estacionamientos de automóviles son parte de un helicoides.

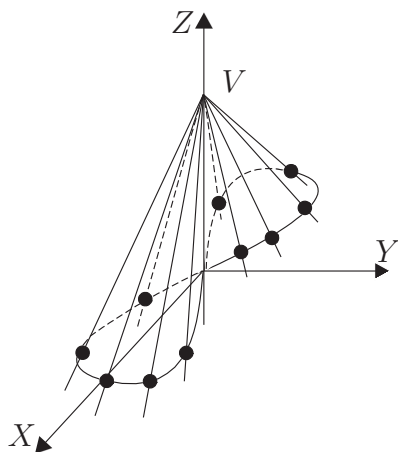


Figura 6.16: Cono sobre una lemniscata.

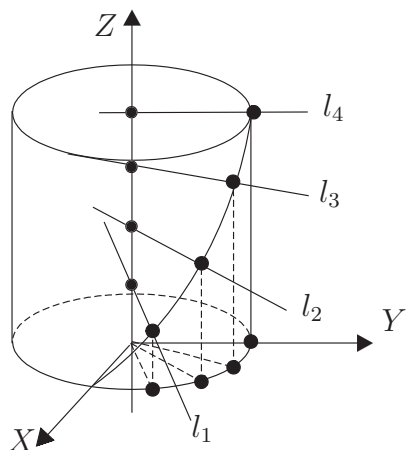


Figura 6.17: Rectas de un helicoides.

Desde luego, puede ocurrir que por cada punto pase más de una recta contenida en la superficie, como ocurre con un plano. Por cada punto del plano existe un haz de rectas contenidas en el plano y puede decirse que un plano es *infinitamente reglado*, y puede demostrarse que es la única superficie suave con esa propiedad (vea el Ejercicio 4).

Pues bien, dos de las superficies cuádricas son *doblemente regladas*, es decir, por cada uno de sus puntos pasan dos rectas completamente contenidas en la superficie. Tales cuádricas son el hiperboloide de un manto y la silla de montar.

Para lograr la aceptación intuitiva de nuestra afirmación, recordaremos al lector que existen cestos de mimbre formados por varitas entrecruzadas o, si lo prefiere, puede imaginar un aro de alambre al que se le sueldan en un punto dos varillas simétricamente inclinadas; si el aro gira en torno al centro de su circunferencia, cada varilla adopta una posición distinta para cada uno de los ángulos de rotación.

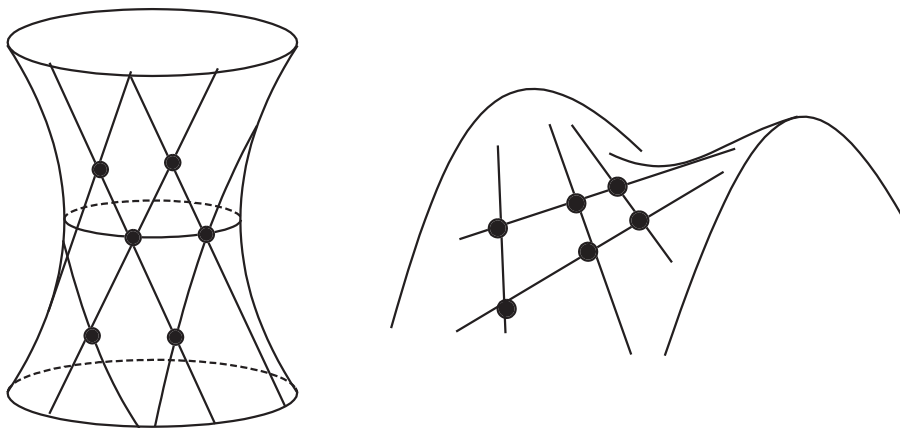


Figura 6.18: El hiperboloide de un manto y el paraboloide hiperbólico son superficies doblemente regladas.

Ésas son las dos familias de rectas, y al tomar una recta de cada familia se obtiene un punto en la superficie que resulta ser un hiperboloide de un manto (véase la Figura 6.18). En el caso del paraboloide hiperbólico, recordemos que por el punto silla pasan dos rectas, correspondientes a las asíntotas de la familia de hipérbolas que se obtienen de la ecuación canónica cuando se toman los cortes con los planos  $z = k$ . Entonces no es difícil imaginar que cuando se toma otro punto que no es el punto silla, también existen dos rectas por el punto que logran “acomodarse” en la superficie.

La demostración formal se basa en la factorización de una diferencia de cuadrados y es constructiva, es decir exhibe las dos rectas, cada una como intersección de dos planos.

La ecuación de un hiperboloide de un manto es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

y podemos reescribirla en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Como ambos miembros son una diferencia de cuadrados, podemos escribir la ecuación anterior como (tomamos  $k \neq 0$ )

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left[k \left(1 + \frac{y}{b}\right)\right] \left[\frac{1}{k} \left(1 - \frac{y}{b}\right)\right].$$

Para cada  $k \neq 0$  podemos establecer dos sistemas de ecuaciones: el primero resulta al pedir simultáneamente la igualdad de los primeros factores de cada miembro y la igualdad de los segundos factores. Entonces, el primer sistema consta de las dos ecuaciones

$$L_{13} : \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = k \left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad (6.12)$$

y

$$L_{24} : \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (6.13)$$

Las dos ecuaciones son lineales y, por tanto, corresponden a planos; los vectores normales son, respectivamente,

$$\bar{u}_k = \left((1/a), -(k/b), (1/c)\right) \text{ y } \bar{v}_k = \left((1/a), (1/kb), -(1/c)\right).$$

Como estos vectores nunca son paralelos, los dos planos se cortan en una recta que está contenida en la superficie (porque sus puntos satisfacen el sistema) y cuya dirección puede obtenerse mediante el producto cruz de los vectores normales. Cuando eligimos un punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  en el hiperboloide de un manto, la sustitución de ese punto en la ecuación (6.12) determina  $k$  y, con ello,  $\bar{u}_k$  y  $\bar{v}_k$  si  $k \neq 0$ .

En vez de igualar los primeros factores de ambos miembros, pudimos igualar el primero del miembro izquierdo con el segundo del miembro derecho, lo cual obliga a la igualdad del segundo factor del miembro izquierdo con el primero del lado derecho, obteniéndose el sistema

$$L_{14} : \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (6.14)$$



y

$$L_{23} : \left( \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = k \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \quad (6.15)$$

Los vectores normales de estos planos son, respectivamente,

$$\hat{u} = \left( (1/a), (1/kb), (1/c) \right) \quad \text{y} \quad \hat{v} = \left( (1/a), (k/b), -(1/c) \right),$$

que nunca son paralelos. Por tanto, su intersección es una recta contenida en la superficie porque sus puntos son solución del sistema, y cuya dirección se determina mediante el producto cruz de los vectores normales. Como antes, la elección de un punto particular en la superficie determina el parámetro  $k \neq 0$  y, con ello, los vectores normales y la dirección de la recta.

Para que el lector se haga cargo de cómo funcionan las cosas en un caso concreto, la comprobación de que un paraboloides hiperbólico es doblemente reglado la haremos tomando un ejemplo particular.

Consideremos la silla de montar en posición canónica

$$x^2 - y^2 = z.$$

Podemos factorizar la diferencia de cuadrados del miembro izquierdo y multiplicar el miembro derecho por  $k/k$  donde  $k \neq 0$ :

$$(x + y)(x - y) = (kz)(1/k).$$

También ahora podemos formar dos sistemas de ecuaciones:

$$L_{13} : x + y = kz \quad \text{y} \quad L_{24} : x - y = 1/k, \quad (6.16)$$

y

$$L_{14} : x - y = kz \quad \text{y} \quad L_{23} : x + y = 1/k. \quad (6.17)$$

La solución al primer sistema de ecuaciones es una recta con dirección

$$(1, 1, -k) \times (1, -1, 0) = (-k, -k, -2),$$

y la solución al segundo sistema de ecuaciones es la recta con dirección

$$(1, -1, -k) \times (1, 1, 0) = (k, -k, 2).$$

Tomemos un punto en la silla de montar que no sea  $(0, 0, 0)$ , por ejemplo  $P(0, 1, -1)$ ; entonces, para determinar  $k$  en el primer sistema, sustituimos en una de las ecuaciones las coordenadas del punto:

$$0 + 1 = k(-1) \text{ y, en consecuencia, } k = -1,$$

lo cual implica que el vector de dirección de la recta  $L_{13} \cap L_{24}$  correspondiente al sistema (6.16) es  $(1, 1, -2)$  y la recta de la primera familia que contiene al punto  $P(0, 1, -1)$  es

$$l_{(13)(24)}(0, 1, -1) : (x, y, z) = (0, 1, -1) + t(1, 1, -2).$$

El lector puede comprobar que las coordenadas de cualquier punto de esta recta,

$$x = t, \quad y = 1 + t, \quad z = -1 - 2t,$$

satisfacen la ecuación del paraboloides hiperbólico, es decir, la recta completa está contenida en la superficie.

Análogamente, al sustituir las coordenadas de  $P$  en una de las ecuaciones del sistema (6.17) se obtiene el valor de  $k$  que distingue a la recta de esta otra familia que pasa por  $P$ :

$$0 - 1 = -k \cdot 1 \text{ y, por tanto, } k = 1,$$

lo cual da  $(1, -1, 2)$  como vector de dirección de la recta  $L_{14}$  solución del sistema (6.17). Entonces, la recta de la segunda familia que pasa por el punto  $P$  es:

$$l_{(14)(23)}(0, 1, -1) : (x, y, z) = (0, 1, -1) + t(1, -1, 2),$$

y puede comprobarse que las coordenadas de cualquier punto de esta recta,

$$x = t \quad y = 1 - t, \quad z = -1 + 2t,$$

satisfacen la ecuación de la silla de montar de la cual partimos, por lo que toda la recta está contenida en la superficie.

Otro método para obtener las dos rectas contenidas en una superficie doblemente reglada que pasan por un punto dado, estará a nuestra disposición después de estudiar el inciso siguiente.

---

## EJERCICIOS

1. Encuentre las dos rectas que pasan por el punto  $P(0, 2, \sqrt{3})$  y contenidas en el hiperboloide de un manto  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .
2. Encuentre las dos rectas que pasan por el punto  $(2, 2, 0)$  de la silla de montar del ejemplo, contenidas en ella.
3. Encuentre las dos rectas que pasan por el punto  $P(1, 1, 0)$  del hiperboloide de un manto.

*Sugerencia:* la recta de una de las familias corresponde al valor  $k = 0$ , por lo que el método ilustrado no funciona. Utilice la simetría de una superficie de revolución respecto a cualquiera de los planos que contienen al eje para obtener esa recta a partir de la recta de la otra familia.

4. (\*) [Do 1] Utilice la Fórmula de Euler y la Proposición 4, Cap. 3, para demostrar que el plano es la única superficie diferenciable infinitamente reglada.

## 6.7 Plano tangente a una cuádrica (\*)

Como cada una de las superficies cuádricas es el lugar geométrico de los puntos del espacio que satisfacen una ecuación polinomial en tres variables, el problema de dar un método para obtener el plano tangente a una cuádrica en uno de sus puntos quedará resuelto si damos un método para obtenerlo cuando la superficie esté dada por una ecuación  $f(x, y, z) = 0$  con  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable.

No vamos a detenernos en dar definiciones que corresponden a un curso de cálculo, pero sí nos interesa concientizar al lector de que ha estado trabajando con funciones cuyo dominio es  $\mathbb{R}^3$  y cuyo contradominio es  $\mathbb{R}$ ; cada una de las ecuaciones canónicas da lugar a una función de ese tipo. Por ejemplo, si se trata del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

estamos trabajando con la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

y un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  pertenece al elipsoide si y sólo si  $f(x, y, z) = 1$ .

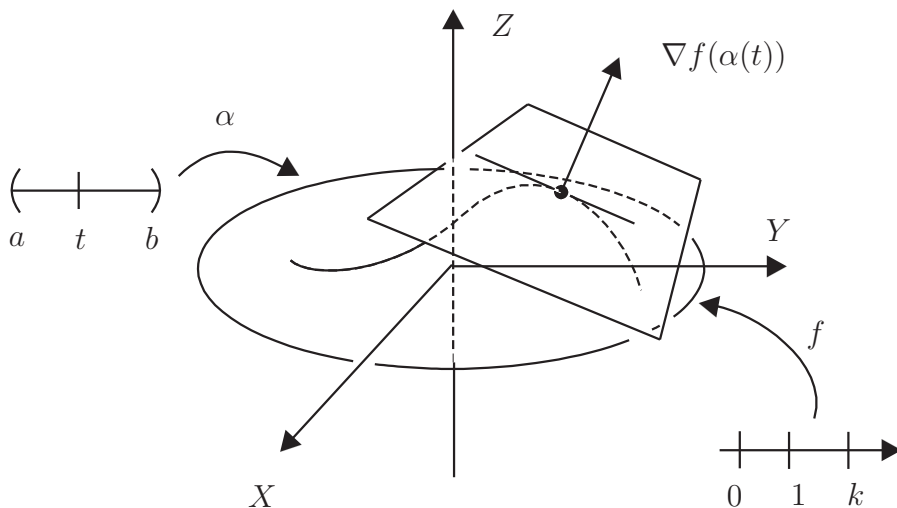


Figura 6.19: Plano tangente a una superficie en uno de sus puntos.

Nótese que cuando se fija un valor  $k \in \mathbb{R}$  para la función, el lugar geométrico es: vacío si  $k < 0$ , un punto (el origen) si  $k = 0$ , y un elipsoide con centro en el origen para cada  $k > 0$ ; como en el caso de los hiperboloides y el cono, estamos hablando de la *familia de superficies de nivel de la función  $f$* .

Ahora bien, supongamos que tenemos una curva parametrizada  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  en la superficie de nivel  $k$  de la función  $f$  (véase la Figura 6.19); eso significa que el punto imagen de  $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$  bajo la función  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisface la ecuación de la superficie, es decir,  $f(\alpha(t)) = k$ . En el caso concreto del elipsoide de nivel 1 escribimos

$$\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{y^2(t)}{b^2} + \frac{z^2(t)}{c^2} = 1.$$

Tenemos entonces la siguiente composición de funciones:

$$f \circ \alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R},$$

y por tanto tiene sentido encontrar la derivada de la función  $f \circ \alpha$  en  $t_0 \in (a, b)$ . La regla de la cadena es válida siempre que las funciones involucradas sean derivables en los puntos adecuados,  $t_0$  para  $\alpha$  y  $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  para  $f$ . Si el lector no ha seguido un curso de cálculo de varias variables, le pedimos creer en la validez de la regla de la cadena y le aclararemos enseguida lo que debe entenderse por la diferenciabilidad de  $f$  en un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  de su dominio.

Si fijamos dos de las variables,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , entonces  $f$  depende sólo de  $z$  y puede derivarse  $f$  respecto a  $z$ , lo cual se escribe como  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , que se lee *parcial de  $f$  respecto a  $z$* , y para la función inducida por la ecuación canónica del elipsoide es:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

Análogamente, podemos fijar  $x = x_0$  y  $z = z_0$  lo cual deja a  $f$  como función de  $y$  únicamente, y si derivamos  $f$  respecto a  $y$  escribimos  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , leemos *parcial de  $f$  respecto a  $y$* ; en nuestro caso resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$$

Finalmente, al fijar las dos últimas coordenadas,  $y = y_0$  y  $z = z_0$ , obtenemos  $f$  como función sólo de  $x$  y cuando derivamos respecto a esta variable escribimos  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y leemos *parcial de  $f$  respecto a  $x$* ; para nuestro ejemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}.$$

Las tres derivadas parciales anteriores están considerando cómo cambia  $f$  en cada una de las direcciones de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , y si la expresión que se obtiene en cada caso es función continua de las variables  $x, y, z$ , el vector

$$\nabla f(P_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \right)$$

se denomina *gradiente de  $f$  en*  $P_0$  y es la *derivada de  $f$  en  $P_0$* .

Entonces, si escribimos la regla de la cadena para la función compuesta  $f \circ \alpha$  y  $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = P_0$  obtenemos

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \nabla f(P_0) \cdot \alpha'(t_0),$$

donde, por supuesto,  $\alpha'(t_0)$  denota el vector velocidad de la curva  $\alpha$  en el punto  $t_0$ , es decir,

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

El producto punto surge del hecho de que la derivada es la transformación lineal que mejor aproxima a la función, y por tanto se aplica al vector  $\alpha'(t_0)$  en la forma que veremos en el Capítulo 7.

Ahora basta recordar que las superficies de nivel se caracterizan porque la función toma un valor constante  $k$  en todos sus puntos; en particular, para todos los puntos  $(x(t), y(t), z(t))$  de la curva tenemos  $f(x(t), y(t), z(t)) = k$  y como la derivada del lado derecho de esta igualdad es 0, podemos escribir

$$\nabla f(P_0) \cdot \alpha'(t_0) = 0,$$

lo cual significa, cuando  $\nabla f(P_0)$  no es cero, que es un vector **perpendicular** al vector tangente de cualquier curva en la superficie.

El *plano tangente a una superficie* de ecuación  $f(x, y, z) = 0$  en un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  tal que  $\nabla f(P_0) \neq \bar{0}$  es el plano de ecuación

$$(P - P_0) \cdot \nabla f(P_0) = 0, \tag{6.18}$$

que contiene a la recta tangente a cualquier curva suave contenida en la superficie y que pase por  $P_0$ .

En el caso del elipsoide de nivel 1 de la función

$$f(x, y, z) = \frac{x(t)^2}{4^2} + \frac{y(t)^2}{3^2} + \frac{z(t)^2}{2^2},$$

su gradiente en el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  es

$$\nabla f(P_0) = ((2/16)x_0, (2/9)y_0, (2/4)z_0)$$

y la ecuación del plano tangente al elipsoide en el punto  $P_0$  resulta al introducir las coordenadas de  $P$  y  $P_0$  en la ecuación (6.18).

Ahora ya es fácil aclarar la afirmación hecha al final del análisis sobre superficies doblemente regladas. Afirmamos que tomar en cuenta el plano tangente a la superficie en uno de sus puntos nos daría otra manera de obtener las dos rectas que están contenidas en la superficie y que pasan por un punto de ella. El lector deberá justificar la técnica siguiente.

- (1) Obtenemos la ecuación del plano tangente a la superficie por el punto.
- (2) Resolvemos el sistema formado por la ecuación de la cuádrica y la ecuación del plano tangente.
- (3) La ecuación resultante de dicho sistema se descompone en dos factores lineales; el sistema formado por la ecuación del plano tangente y la nulidad de cada uno de los factores proporciona cada una de las rectas buscadas.

Los títulos [Co] y [Ha] de la bibliografía sirven como referencia para el lector que necesite aclarar los conceptos de Cálculo de Varias Variables que hemos utilizado.

## EJERCICIOS

1. Obtenga explícitamente una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  para cada una de las superficies cuádricas, y calcule cada una de sus derivadas parciales para formar  $\nabla f$ .
2. Analice cuál es el nivel de la función determinada en el ejercicio 1, al que corresponden un elipsoide, un paraboloides elíptico, un hiperboloides de un manto, un hiperboloides de dos mantos y una silla de montar de ecuación canónica.
3. Demuestre que en cualquier punto  $P_0$  de una de las superficies del ejercicio 2, el gradiente de la función correspondiente es no cero.
4. Obtenga la ecuación del plano tangente a cada una de las superficies siguientes en el punto indicado:
  - a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ , en el punto  $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ .
  - b)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$ , en el punto  $(2, 0, 0)$ .
  - c)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ , en el punto  $(1, 3, 1)$ .
  - d)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = z$ , en el punto  $(3, 0, 1)$ .
  - e)  $x^2 - y^2 = z$ , en el punto  $(1, 0, 1)$ .
  - f)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , en el punto  $(a, 0, z)$ .
5. El gradiente del cono elíptico  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$  en  $(0, 0, 0)$  es el vector nulo. ¿Corresponde este hecho a algún problema geométrico?
6. Justifique la técnica planteada al final del inciso para obtener las rectas de una superficie doblemente reglada que pasan por uno de sus puntos.
7. Demuestre que el gradiente de una función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en un punto de su dominio, corresponde a la dirección  $\bar{v}$  de máxima variación (véanse [Co] o [Ha] de la bibliografía).

## 6.8 Algunas propiedades de la esfera

Como en el caso de la circunferencia, empezaremos por caracterizar a la esfera a la luz de nuestro tratamiento; después haremos observaciones adicionales y el lector hará bien en consultar [H-C], [I] y [DoC 1].

Definimos una *esfera* como el lugar geométrico de los puntos  $P$  del espacio que equidistan (una distancia  $r$ ) de un punto fijo  $O$  llamado el *centro* de la esfera; la distancia constante se llama el *radio*.

En consecuencia, la ecuación de una esfera con centro arbitrario  $(h, k, l)$  y radio  $r$  es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2,$$

De esta ecuación es inmediata la primera propiedad:

[1] La ecuación cartesiana de una esfera de radio  $r$  y centro  $(h, k, l)$  tiene las características siguientes:

- (a) Es de segundo grado en  $x$ , en  $y$  y en  $z$ ;
- (b) No tiene términos mixtos;
- (c) Los coeficientes de  $x^2$ , de  $y^2$  y de  $z^2$  son iguales.

La ecuación siguiente tiene esas propiedades si  $A \neq 0$ :

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Jz + I = 0,$$

pero no siempre da lugar a una esfera. ¿Puede usted caracterizar los casos que no corresponden a una esfera?

Esta vez, las características de la ecuación de una esfera implican que está determinada por 4 parámetros:  $h, k, l$  y  $r$ , o bien  $G/A$ ,  $H/A$ ,  $I/A$  y  $J/A$ . Eso corresponde a un hecho geométrico fácilmente demostrable:

[2] Una esfera está determinada por 4 puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  no coplanares. El lector estará de acuerdo en que cada terna de puntos determina una circunferencia; la recta perpendicular al plano de la circunferencia por el centro de ésta contiene al centro de la esfera, puesto que los puntos de la perpendicular por el centro equidistan de todos los puntos de la circunferencia, en particular de los de la terna; entonces el centro  $O$  de la esfera puede obtenerse como la intersección de dos de esas perpendiculares, y el radio es la distancia de  $O$  a cualquiera de los cuatro puntos.



[3] La esfera es un caso límite de elipsoides,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

cuando las longitudes de dos de los semiejes, por ejemplo  $b$  y  $c$ , tienden al tercero,  $a$ .

[4] La esfera es simétrica respecto a cualquier plano y recta por su centro, y también es simétrica respecto al centro, todo lo cual es inmediato de su ecuación canónica  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

[5] El interior de la esfera (llamado en geometría una *bola*), es un conjunto convexo. Es decir, si dos puntos  $P$  y  $Q$  distan del centro  $O$  menos que el radio, todos los puntos  $R$  del segmento  $PQ$  distan del centro menos que el radio.

El lector queda encargado de dar un argumento similar al utilizado en el caso de la circunferencia, para justificar esa afirmación.

[6] Al cortar una esfera con un plano, se obtiene una circunferencia. La demostración de esta propiedad queda también a cargo del lector.

Analicemos ahora la esfera desde otros puntos de vista.

[7] La esfera es una *figura de ancho constante*, es decir, si la esfera es tangente a dos planos paralelos, la distancia entre ambos planos es constante: la longitud de un diámetro. Esta propiedad es consecuencia de que un plano tangente a una esfera en uno de sus puntos, es perpendicular al radio correspondiente al punto. La esfera no es la única figura de ancho constante (vea [Mn]).

En [H-C, & 32, *Eleven properties of the sphere*], la propiedad que menciona [7] enuncia también que la esfera es una figura de perímetro (de una proyección ortogonal) constante, lo cual es inmediato de que la proyección en cualquiera de los planos coordenados de una esfera en posición canónica, es un disco acotado por un círculo máximo, y de las simetrías mencionadas en [4].

[8] Un triángulo inscrito en una esfera, uno de cuyos lados es un diámetro, es rectángulo y el ángulo recto es opuesto al diámetro, lo cual es inmediato de la propiedad análoga para la circunferencia si cortamos la esfera con el plano que contiene al diámetro y el tercer vértice.

[9] Una esfera es *homogénea* e *isotrópica*. Lo primero significa que puede recortarse un trozo de esfera alrededor de un punto  $P$ , y acomodarse en la esfera en torno a cualquier otro punto  $Q$ . En un cilindro recto circular también puede hacerse eso, pero hay que orientar adecuadamente el pegado, porque, parados en el cilindro, vemos cosas distintas en direcciones distintas: en la dirección de la generatriz por el punto, el cilindro es infinito y recto; en la dirección de la circunferencia que pasa por el punto, el cilindro es finito y curvo. El aspecto de la esfera es el mismo en cualquier dirección, por eso es isotrópica.

[10] Todos los puntos de la esfera son *umbílicos*, es decir, al cortar con cualquier plano perpendicular a la esfera por un punto, la *curvatura* en el punto de la curva que resulta de la sección (una circunferencia, por [6], cuyo centro es el de la esfera, por la perpendicularidad del plano), es la misma. La curvatura es la rapidez con que la curva se aleja de su tangente en el punto, y es un concepto fundamental en Geometría Diferencial (vea [DoC 1]).

[11] Las geodésicas de la esfera, es decir, las curvas trazadas en la esfera que minizan el recorrido entre dos de sus puntos, son lazos (curvas cerradas) y, en consecuencia, tienen longitud finita. De hecho, tales curvas son *círculos máximos*, como se llama por una deformación del lenguaje a las circunferencias resultantes de cortar la esfera con un plano por el centro.

Una demostración intuitiva de este resultado se obtiene considerando que si una curva  $\mathcal{C}$  en la esfera que contiene a los puntos  $P$  y  $Q$  no es un tal círculo, un espejo que contenga a los dos puntos y el centro de la esfera mostraría otra curva del mismo largo que  $\mathcal{C}$  y el arco de círculo máximo entre  $P$  y  $Q$ , que estaría contenido en el espejo, necesariamente es más corto que la curva  $\mathcal{C}$  o su reflejada.

La propiedad anterior de una esfera, y las que siguen, así como la propiedad [10] de una circunferencia, pertenecen al área del Cálculo de Variaciones, donde se busca funciones que realicen extremos de *funcionales*, como la curva entre dos puntos de mínima longitud (la longitud de una curva dada por una cierta función, se expresa mediante una integral), o la región de área máxima cuyo borde mida una distancia prefijada (el área se expresa también mediante una integral), etc. El tema rebasa nuestros propósitos, pero el lector interesado puede consultar [I].

[12] De todas las superficies que encierran un volumen fijo, la esfera es la de menor área. Todos hemos constatado que las pompas de jabón (que contienen el volumen del aire que les hemos insuflado), terminan por adoptar una forma esférica, porque el área de la esfera minimiza la tensión superficial de la película de jabón.

[13] De todas las superficies con un área fija, la que encierra un volumen mayor es la esfera. (Vea [H-C].)

Desde luego que el tema de *familias de esferas* también es interesante; tratamos con un tipo particular cuando mencionamos las coordenadas esféricas: todas las esferas de la familia tienen el mismo centro, lo cual implica fijar tres parámetros:  $h$ ,  $k$  y  $l$ .

Pero también pudimos fijar tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  (lo cual fija una circunferencia) y dejar variar el cuarto punto  $S$ . El resultado es una familia de esferas que se cortan en la circunferencia fija y cuyos centros están alineados. Cuando el cuarto punto se aleja de los tres primeros, en el límite se determina un elemento degenerado: el plano  $PQR$  (¿puede justificarlo?).

De la discusión al final del inciso dedicado a las propiedades de la circunferencia, rescatamos una última propiedad que adecuamos a la esfera:

[14] El lugar geométrico de los puntos  $P$  del espacio cuyas distancias a dos puntos fijos  $A$  y  $B$  guardan una razón constante  $k$ , es una esfera. Si el lector se plantea obtener la ecuación de ese lugar geométrico, inmediatamente verá que cumple la propiedad [1]. Y al variar  $k$ , obtendrá una familia de esferas que bien podrían llamarse *esferas de Apolonio*. Haga un dibujo.

A continuación proponemos algunos ejercicios para el lector interesado en este tema. Para el último le conviene consultar [H-C] & 32: *Once propiedades de la esfera*, [Mn] o [DoC 1] Cap. 4& 5 *Superficies mínimas*).

## EJERCICIOS

1. Responda cada una de las preguntas planteadas en este inciso.
2. Encuentre dos familias de superficies tales que, para cada una, sus elementos corten ortogonalmente a cada una de las esferas de una familia

de esferas concéntricas. (La condición de ortogonalidad entre dos superficies significa que los planos tangentes a las superficies en un punto común, son ortogonales.)

3. Justifique la propiedad [14] usando rotaciones.
4. Haga un dibujo para cada una de las familias de esferas mencionadas en esta sección.
5. Busque en la bibliografía más resultados sobre la esfera.
6. Averigüe en la bibliografía sobre *sistemas triplemente ortogonales de superficies cuádricas*.

---

# Transformaciones lineales y transformaciones rígidas

---

La Geometría Euclidiana estudia aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo transformaciones del plano o del espacio que no alteran distancias entre puntos, llamadas *transformaciones rígidas*; las transformaciones rígidas forman un grupo bajo la composición (el lector sabe componer funciones reales de variable real, y conoce el concepto de grupo desde el Capítulo 3, Observación I). Las transformaciones pueden ser de varios tipos, y algunos de ellos forman subgrupos que pueden identificarse con objetos geométricos conocidos.

En los casos del plano y el espacio cartesianos haremos un estudio exhaustivo de todas las transformaciones rígidas y podremos constatar la ventaja de considerar que constituyen un grupo y la de identificar la estructura geométrica de los subgrupos.

Las transformaciones rígidas pueden obtenerse componiendo traslaciones con las llamadas *transformaciones ortogonales*, es decir, rotaciones respecto al origen y reflexiones respecto a un subespacio. Las transformaciones ortogonales forman parte de un grupo más grande que actúa en espacios vectoriales, llamado el *grupo lineal*; como hemos estado trabajando con espacios vectoriales empezaremos por estas últimas.

## 7.1 Definición y ejemplos de transformaciones lineales

Cuando dos conjuntos  $A$  y  $B$  tienen un mismo tipo de estructura, dada una función entre ellos,  $T : A \rightarrow B$ , es importante saber si la función respeta la estructura.

El plano y el espacio cartesianos tienen varios tipos de estructuras, en particular la de espacio vectorial, y hemos visto que una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío de un espacio vectorial sea espacio vectorial con las operaciones restringidas, es que sea cerrado bajo combinaciones lineales. Cuando una aplicación entre dos espacios vectoriales lleva combinaciones lineales de vectores en la combinación lineal de las imágenes de los vectores con los mismos coeficientes, está conservando la propiedad esencial de la estructura de espacio vectorial; éstas son las llamadas transformaciones lineales.

Así como el lector conocía varios ejemplos de espacio vectorial aún antes de serle presentado el concepto, así también descubrirá que conoce varios ejemplos de transformaciones lineales. Precisemos primero la definición.

**Definición.** Una aplicación  $T : V \rightarrow W$  entre dos espacios vectoriales es una *transformación lineal* si la imagen de una combinación lineal de vectores del dominio puede obtenerse formando la combinación lineal de las imágenes de los vectores originales **con los mismos coeficientes**; en símbolos,

$$T(\lambda \bar{u} + \mu \bar{v}) = \lambda T(\bar{u}) + \mu T(\bar{v}).$$

Una consecuencia inmediata de la definición es que, bajo una transformación lineal, la imagen del vector nulo de  $V$ ,  $\bar{0}_V$ , es el vector nulo de  $W$ ,  $\bar{0}_W$ , porque

$$T(\bar{0}_V) = T(0 \bar{0}_V) = 0 T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W.$$

Las transformaciones con esta característica que esperamos sean familiares al lector, son las siguientes.

**Ejemplo 1.** Una *homotecia de razón  $k$*  en el plano cartesiano es una aplicación  $H_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$H_k(x, y) = (kx, ky) \quad \text{donde } k \in \mathbb{R}^+.$$

El efecto geométrico de una homotecia es achicar o agrandar las figuras del plano según que  $k < 1$  ó  $k > 1$ , respectivamente, como lo muestran las partes a) y b) de la Figura 7.1. Nótese que, salvo para el caso  $k = 1$ , las distancias no se conservan; sin embargo, la aplicación sí es inyectiva.

Para comprobar que una homotecia es una transformación lineal, debe verificarse que

$$H_k(\lambda(x, y) + \mu(s, t)) = \lambda H_k(x, y) + \mu H_k(s, t),$$

lo cual es inmediato de la distributividad del producto por un escalar sobre la suma de vectores:

$$\begin{aligned}
 H_k(\lambda(x, y) + \mu(s, t)) &= k(\lambda(x, y) + \mu(s, t)) \\
 &= k\lambda(x, y) + k\mu(s, t) = \lambda(kx, ky) + \mu(ks, kt) \\
 &= \lambda H_k(x, y) + \mu H_k(s, t)
 \end{aligned}$$

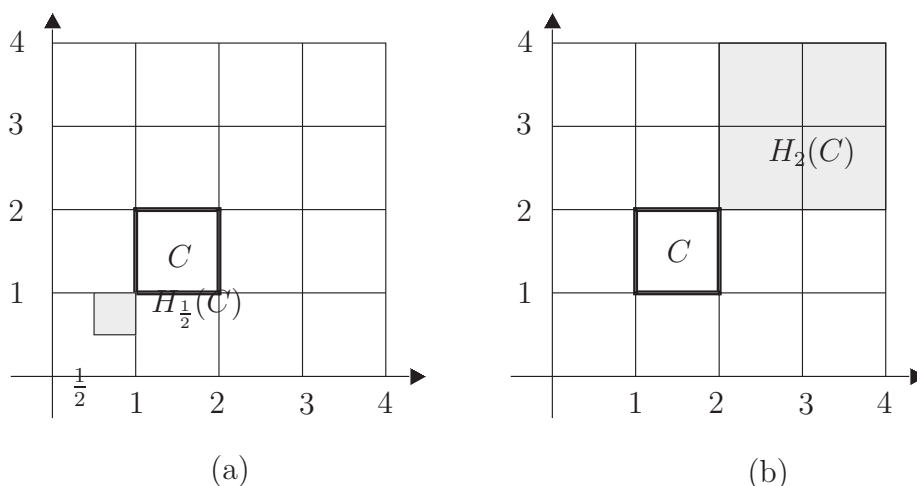


Figura 7.1: Homotecias de razones  $k = 1/2$  y  $k = 2$  en el plano.

**Ejemplo 2.** La *proyección del espacio cartesiano en el plano  $XY$*  es la aplicación  $\Pi_{XY} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\Pi_{XY}(x, y, z) = (x, y, 0).$$

El efecto geométrico de la proyección en el plano  $XY$  de una cierta figura situada en el espacio, es el correspondiente a su nombre: a cada punto de la figura le asocia el pie de la perpendicular del punto al plano  $XY$ , como lo muestra la Figura 7.2. Nótese que la proyección **no** es una función inyectiva, pues todos los puntos de la recta perpendicular a un punto  $(a, b, 0)$  del plano  $XY$  tienen a dicho punto como su proyección.

Para demostrar que la proyección en el plano  $XY$  es una transformación lineal, debe comprobarse la validez de la igualdad:

$$\Pi_{XY}(\lambda(x, y, z) + \mu(s, t, u)) = \lambda\Pi_{XY}(x, y, z) + \mu\Pi_{XY}(s, t, u).$$

Para hacerlo, basta aplicar la definición de la proyección:

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{XY}(\lambda(x, y, z) + \mu(s, t, u)) \\
 &= \Pi_{XY}(\lambda x + \mu s, \lambda y + \mu t, \lambda z + \mu u) \\
 &= (\lambda x + \mu s, \lambda y + \mu t, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0) + (\mu s, \mu t, 0) \\
 &= \lambda(x, y, 0) + \mu(s, t, 0) = \lambda \Pi_{XY}(x, y, z) + \mu \Pi_{XY}(s, t, u),
 \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

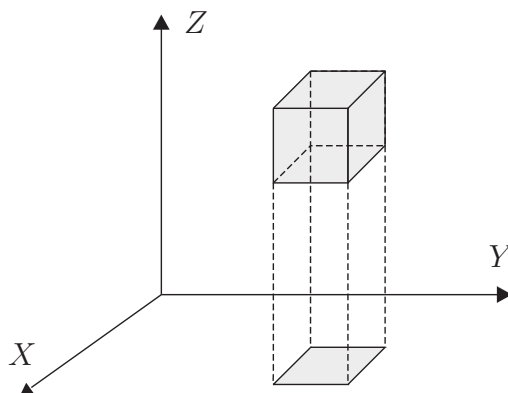


Figura 7.2: Proyección de una figura en el plano  $XY$ .

**Ejemplo 3.** Una rotación en el plano cartesiano con centro en el origen por un ángulo  $\phi$ , lleva el vector de posición de un punto  $P$  al vector de posición del punto  $P_\phi$  tal que el ángulo entre ambos vectores es precisamente  $\phi$ .

Si observamos los triángulos de la Figura 7.3, vemos que el triángulo determinado por los puntos  $O$ ,  $H$  y  $P$  se transforma, bajo la rotación, en el triángulo determinado por los puntos  $O$ ,  $H_\phi$  y  $P_\phi$ , y si las coordenadas de  $P$  son  $(x, y)$  y las de  $P_\phi$  son  $(x_\phi, y_\phi)$ , la igualdad  $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$  se transforma en la igualdad

$$(x_\phi, y_\phi) = x(\cos \phi, \sin \phi) + y(-\sin \phi, \cos \phi),$$

es decir, el rotado de un vector que es una cierta combinación lineal de los vectores de la base, es el vector obtenido formando la misma combinación lineal de los rotados de los vectores básicos.

Por tanto, definimos la rotación por un ángulo  $\phi$  con centro en el origen de  $\mathbf{R}^2$ , como la transformación  $Ro_\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  cuya regla de correspondencia es

$$Ro_\phi(x, y) = x(\cos \phi, \sin \phi) + y(-\sin \phi, \cos \phi),$$



y que muy probablemente, antes del lenguaje vectorial, le fue presentada al lector así:

$$R_\phi(x, y) = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi).$$

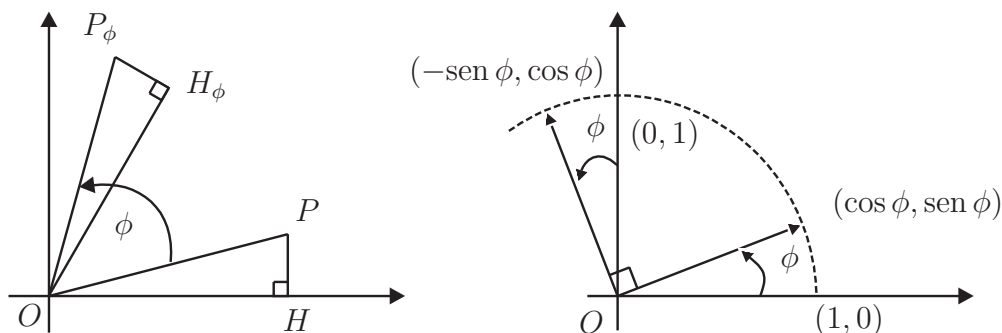


Figura 7.3: Rotación en el plano con centro en el origen.

Desde luego, ambas expresiones son iguales, pero la lectura geométrica es más directa de la primera, y, sobre todo, hace innecesaria la comprobación de la linealidad de la transformación que define pues, como el lector deberá comprobar en un ejercicio, si una transformación respeta combinaciones de los vectores básicos, entonces respeta combinaciones de vectores cualesquiera.

Más adelante veremos que las rotaciones del plano con centro en el origen tienen un gran número de propiedades, como ser rígidas, formar un grupo cuando se componen entre sí, etc.

**Ejemplo 4.** Para definir formalmente la transformación correspondiente a una reflexión respecto a una recta  $l$  por el origen del plano cartesiano, considérese la Figura 7.4.(a).

Si la recta  $l(\theta)$  forma un ángulo  $\theta$  con la parte positiva del eje  $X$ , el triángulo correspondiente a la suma  $P = x(1, 0) + y(0, 1)$  se refleja en un triángulo de las mismas dimensiones (pero de orientación opuesta) y correspondiente a la suma

$$P_{l(\theta)} = x(\cos 2\theta, \sin 2\theta) + y(\sin 2\theta, -\cos 2\theta),$$

donde la duplicación del ángulo se debe a la reflexión.

Como lo muestra la Figura 7.4.(b), los vectores que aparecen en el miembro derecho son, precisamente, los reflejados de los vectores básicos; por tanto, si definimos la *reflexión del plano cartesiano respecto a la recta por el origen  $l(\theta)$*

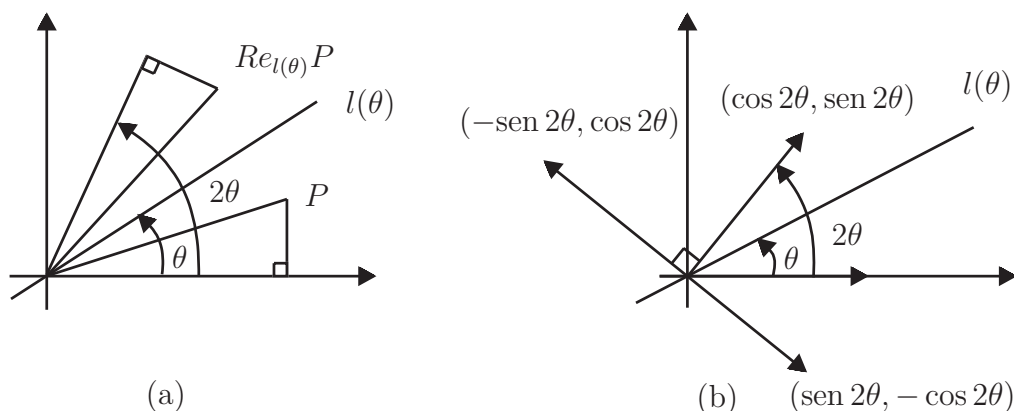


Figura 7.4: Reflexión en el plano respecto a una recta por el origen.

como

$$Re_{l(\theta)}(x, y) = x(\cos 2\theta, \sin 2\theta) + y(\sin 2\theta, -\cos 2\theta),$$

ya no es necesario demostrar que tal transformación es lineal, pues por definición el vector reflejado de una cierta combinación de los vectores básicos es esa misma combinación de los reflejados de los vectores de la base.

Demostremos que las reflexiones también preservan distancias entre puntos; en consecuencia, son transformaciones permitidas en la Geometría Euclídea.

**Ejemplo 5.** Los dos últimos ejemplos sugieren, cuando se atiende únicamente a la parte formal, que si se eligen dos vectores arbitrarios como los transformados de los vectores básicos, por ejemplo

$$T(1, 0) = (2, 1) \quad \text{y} \quad T(0, 1) = (4, 3),$$

y se extiende  $T$  a  $\mathbb{R}^2$ , linealmente:

$$T(x, y) = x(2, 1) + y(4, 3),$$

la transformación resultante es siempre lineal, por definición.

Nótese que el primer cuadrante del plano (Figura 7.5) se transforma en el sector sombreado comprendido entre las dos semirrectas definidas por los vectores elegidos; el lector deberá investigar cuáles son las regiones en que se transforman los otros tres cuadrantes.

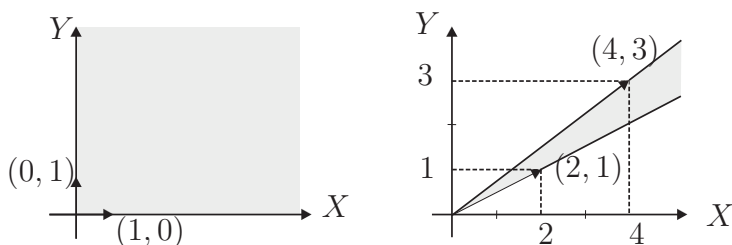


Figura 7.5: Imagen del primer cuadrante bajo la transformación  $T$ .

---

## EJERCICIOS

1. Demuestre que una traslación en el plano, es decir, una transformación del tipo  $T(x, y) = (x + a, y + b)$ , con  $(a, b)$  un vector fijo, **no** es una transformación lineal.
2. Demuestre que si una transformación respeta combinaciones lineales de los vectores de una base, entonces respeta combinaciones lineales de cualesquiera otros vectores.
3. Demuestre que la composición de dos transformaciones lineales es nuevamente una transformación lineal.
4. Demuestre que la composición de la homotecia  $H_k$  con la homotecia  $H_r$  da la homotecia  $H_{kr}$ .
5. Demuestre mediante un ejemplo que la composición de transformaciones lineales no es conmutativa.
6. Justifique geoméricamente que la transformación inversa de una rotación con centro en el origen del plano cartesiano es una rotación. ¿Cuál es el ángulo?
7. Determine geoméricamente la transformación inversa de una reflexión respecto a una recta por el origen del plano cartesiano.
8. Determine la región en que se transforma cada uno de los cuadrantes II, III y IV bajo la transformación definida en el ejemplo 5.
9. Demuestre que una transformación lineal lleva cualquier recta en otra recta. (Sugerencia: considere la forma vectorial de la ecuación de la recta.)

## 7.2 Matrices y transformaciones lineales

En el ejercicio 2 de la sección anterior, el lector comprobó que basta conocer las imágenes de los vectores de una base bajo una transformación lineal, para poder determinar el transformado de cualquier otro vector.

Pero de hecho, si se fija una base en el dominio y una en el contradominio de una transformación lineal hay un instrumento auxiliar (denominado *matriz* porque proporciona, en términos de la segunda base, el transformado de un vector dado en términos de la primera base), cuya utilidad rebasa cualquier expectativa. El apartado siguiente mostrará al lector las operaciones que es posible realizar con las matrices.

### Operaciones con matrices

Una *matriz de  $m$  renglones y  $n$  columnas* de números reales es un arreglo de  $m \times n$  números reales en  $m$  renglones y  $n$  columnas.

En muchas ocasiones será conveniente pensar una matriz como formada por  $n$  vectores columna, cada uno con  $m$  componentes, o como formada por  $m$  vectores renglón, cada uno de los cuales tiene  $n$  componentes.

Denotaremos al conjunto de las matrices de  $m \times n$  números reales así:

$$\mathcal{M}_{m \times n} = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Las matrices de  $m \times n$  forman un espacio vectorial si la *suma* y el *producto por un escalar* se definen entrada por entrada forma análoga a las operaciones respectivas en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

La comprobación de que  $\mathcal{M}_{m \times n}$  es un espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar que acabamos de definir es totalmente análoga a la realizada en los casos de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , e incluso puede reducirse al hecho de que  $\mathbb{R}^{mn}$  es un espacio vectorial (véase el ejercicio 15).

Ahora bien, cuando  $m = n$ , también puede definirse la *multiplicación de matrices de  $n \times n$*  mediante la regla siguiente (producto punto de un renglón de la matriz izquierda por una columna de la matriz derecha) que ejemplificamos en el caso de  $n = 3$ :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a, b, c) \cdot (r, u, x) & (a, b, c) \cdot (s, v, y) & (a, b, c) \cdot (t, w, z) \\ (d, e, f) \cdot (r, u, x) & (d, e, f) \cdot (s, v, y) & (d, e, f) \cdot (t, w, z) \\ (g, h, i) \cdot (r, u, x) & (g, h, i) \cdot (s, v, y) & (g, h, i) \cdot (t, w, z) \end{pmatrix}$$

Pediremos al lector comprobar que la multiplicación de matrices tiene la propiedad asociativa y la distributiva sobre la suma, y que existe un elemento neutro, la *matriz identidad*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es muy importante tener presente que la multiplicación de matrices **no** es conmutativa, como lo muestra el ejemplo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en tanto que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma en que se multiplican las matrices de  $n \times n$  sugiere que tiene sentido multiplicar matrices que no son cuadradas, pero tales que cualquier renglón de la primera tenga tantos elementos como cualquier columna de la segunda, porque con esa condición es posible efectuar el producto punto de un renglón de la primera por una columna de la segunda. El caso más simple es, precisamente, cuando la primera matriz sea una matriz renglón, por ejemplo de  $1 \times 3$ , y la segunda sea una matriz columna, necesariamente de  $3 \times 1$ , como las siguientes:

$$(1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

El resultado es una matriz con un renglón y una columna; el lector no tendrá problema para comprobar que el resultado de multiplicar una matriz de  $m$  renglones y  $n$  columnas (a la izquierda) por una matriz de  $n$  renglones y  $p$  columnas (a la derecha) es una matriz con  $m$  renglones y  $p$  columnas. Escribimos la notación abreviada utilizada frecuentemente para que el lector pueda reconocerla al encontrarla en otros textos ( $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ ):

$$(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} (b_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p} = (c_{ik})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p}$$

En este libro utilizaremos la multiplicación de matrices cuadradas y la de una matriz cuadrada (a la izquierda) por una matriz columna (a la derecha), pero en Cálculo de Varias Variables el lector utilizará la multiplicación general que acabamos de definir y de la cual  $\nabla f(P_0) \cdot \alpha'(t_0)$  es un caso particular.

Cuando el determinante asociado a una matriz cuadrada es distinto de cero, la matriz tiene un inverso multiplicativo. Como los casos que nos interesan son los de matrices de  $2 \times 2$  y de  $3 \times 3$ , encontraremos explícitamente la forma de la matriz inversa en el caso de  $3 \times 3$  y pediremos al lector hacer lo propio para el caso de  $2 \times 2$ .

Suponemos que el determinante  $\Delta$  de la matriz original no es cero,  $\Delta \neq 0$ , y planteamos la existencia de otra matriz, la *matriz inversa*, cuyo producto

con la original sea el elemento neutro, es decir,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el producto de la izquierda es igual a la matriz de la derecha, las entradas correspondientes deben coincidir y eso nos lleva a plantear 3 sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, cada uno de los cuales tiene como determinante el de la matriz original. Uno de esos sistemas es el siguiente (recuerde que  $a, \dots, i$  están dados, y que  $p, \dots, x$  son las incógnitas):

$$\begin{aligned} ap + bs + cv &= 1 \\ dp + es + fv &= 0 \\ gp + hs + iv &= 0. \end{aligned}$$

Podemos aplicar la regla de Cramer para obtener

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} = \frac{ei - fh}{\Delta}; \quad s = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} = \frac{-di + fg}{\Delta};$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} = \frac{dh - eg}{\Delta}.$$

El lector puede comprobar que

- $p$  es el cociente del cofactor de  $a$  entre  $\Delta$ ;
- $s$  es el cociente del cofactor de  $b$  entre  $\Delta$ ;
- $v$  es el cociente del cofactor de  $c$  entre  $\Delta$ .

De hecho, la forma de obtener cada elemento de la matriz inversa es la siguiente:

- (1) Tómese el elemento de la matriz original que ocupa el lugar *simétrico* respecto a la *diagonal principal* (de arriba a la izquierda a abajo a la derecha).

- (2) Fórmese el cofactor de dicho elemento simétrico.
- (3) Divídase el número anterior entre el determinante  $\Delta$ .

Entonces, la matriz inversa tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}{\Delta} & -\frac{\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}}{\Delta} & \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{\Delta} \\ -\frac{\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}{\Delta} & \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}{\Delta} & -\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\Delta} \\ \frac{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}{\Delta} & -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}}{\Delta} & \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Ahora es muy sencillo verificar que ésta es la matriz inversa de la matriz original, pues si las multiplicamos el resultado será la matriz neutra.

El determinante de la matriz inversa es el inverso del determinante de la matriz original; en general, el determinante de la matriz producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes de las matrices que se multiplican. La comprobación de estas afirmaciones en los casos  $n = 2, 3$  queda a cargo del lector.

Para terminar esta breve introducción al manejo de las matrices, definiremos la *matriz transpuesta* de una matriz dada. Es la matriz cuyas columnas son los renglones de la matriz original (o cuyos renglones son las columnas de la matriz original), y si la matriz original se denota con  $M$ , la matriz transpuesta se denota con  $M^t$ . Para que el lector se familiarice con las matrices transpuestas, le pediremos verificar que la transpuesta de una matriz que es producto de otras dos, es el producto en el orden inverso de las matrices transpuestas de las dos dadas.

## La matriz de una transformación lineal

El teorema siguiente muestra cómo se construye la matriz de una transformación lineal cuando se especifican las bases en el dominio y el contradominio de una tal transformación.

**Teorema** Si  $V$  y  $W$  son dos espacios vectoriales de dimensión finita y  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, dadas bases en  $V$  y  $W$   $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  de  $V$  y  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m\}$  de  $W$ , la matriz cuyas columnas son  $T(\bar{e}_1), T(\bar{e}_2), \dots, T(\bar{e}_n)$  expresados en coordenadas respecto a la base de  $W$ , permite obtener la imagen



de cualquier otro vector  $\bar{v}$  bajo  $T$  con sólo multiplicar dicha matriz por el vector columna de las coordenadas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $\bar{v}$  respecto a la base dada de  $V$  (obsérvese que la multiplicación tiene sentido sólo si la matriz está a la izquierda del vector columna); es decir,

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

### **Demostración.**

Si la expresión de  $\bar{v}$  en la base de  $V$  es

$$\bar{v} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \cdots + a_n \bar{e}_n,$$

y las de  $T(\bar{e}_1), T(\bar{e}_2), \dots, T(\bar{e}_n)$  en la base de  $W$  son

$$\begin{aligned} T(\bar{e}_1) &= b_{11} \bar{f}_1 + b_{21} \bar{f}_2 + \cdots + b_{m1} \bar{f}_m, \\ T(\bar{e}_2) &= b_{12} \bar{f}_1 + b_{22} \bar{f}_2 + \cdots + b_{m2} \bar{f}_m, \\ &\vdots \\ T(\bar{e}_n) &= b_{1n} \bar{f}_1 + b_{2n} \bar{f}_2 + \cdots + b_{mn} \bar{f}_m, \end{aligned}$$

como  $T$  es lineal se tiene

$$\begin{aligned} T(\bar{v}) &= a_1 T(\bar{e}_1) + a_2 T(\bar{e}_2) + \cdots + a_n T(\bar{e}_n) \\ &= a_1 (b_{11} \bar{f}_1 + b_{21} \bar{f}_2 + \cdots + b_{m1} \bar{f}_m) \\ &\quad + a_2 (b_{12} \bar{f}_1 + b_{22} \bar{f}_2 + \cdots + b_{m2} \bar{f}_m) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_n (b_{1n} \bar{f}_1 + b_{2n} \bar{f}_2 + \cdots + b_{mn} \bar{f}_m). \end{aligned}$$

La última suma puede escribirse, en términos de  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n$ , así:

$$\begin{aligned} T(\bar{v}) &= (a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \cdots + a_n b_{1n}) \bar{f}_1 \\ &\quad + (a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + \cdots + a_n b_{2n}) \bar{f}_2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (a_1 b_{m1} + a_2 b_{m2} + \cdots + a_n b_{mn}) \bar{f}_m. \end{aligned}$$

Ahora ya es inmediato para el lector comprobar que el vector columna cuyas entradas son las componentes de este último vector, resulta de efectuar la multiplicación indicada en el enunciado. ■

**Observación.** Es muy importante notar que la matriz depende de las bases elegidas tanto en el dominio como en el contradominio, aunque en este libro, salvo que se especifique lo contrario, el dominio y el contradominio serán iguales, ya sea  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$ , y en ambos se usará siempre la base canónica.

A continuación construiremos las matrices asociadas, en las bases canónicas, a los ejemplos de transformaciones lineales que vimos en el inciso anterior.

**Ejemplo 1.** Para la homotecia de razón  $k$  en  $\mathbb{R}^2$ , se tiene  $H_k(1, 0) = (k, 0)$  y  $H_k(0, 1) = (0, k)$ ; entonces la matriz de dicha homotecia es

$$M_{H_k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 2.** Para la proyección de  $\mathbb{R}^3$  en el plano  $XY$ , las imágenes de los vectores básicos son  $\Pi_{XY}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ ,  $\Pi_{XY}(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$  y  $\Pi_{XY}(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ , por lo que la matriz de esta proyección es

$$M_{\Pi_{XY}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 3.** Para la rotación en  $\mathbb{R}^2$  con centro en el origen por un ángulo  $\phi$ , se tiene  $Ro_\phi(1, 0) = (\cos \phi, \sin \phi)$  y  $Ro_\phi(0, 1) = (-\sin \phi, \cos \phi)$ ; por tanto, la matriz correspondiente es

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

y la imagen de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se obtiene así:

$$Ro_\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \phi - y \sin \phi \\ x \sin \phi + y \cos \phi \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 4.** Para la reflexión en  $\mathbb{R}^2$  respecto a la recta por el origen que forma un ángulo  $\theta$  respecto a la parte positiva del eje  $X$ , los transformados de los vectores básicos son  $Re_{l(\theta)}(1, 0) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ , y  $Re_{l(\theta)}(0, 1) = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta)$ , por lo que la matriz correspondiente es

$$M_{l(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

El transformado de  $(x, y)$  se obtiene mediante la multiplicación siguiente:

$$Re_{l(\theta)}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

**Observación.** Tanto la matriz correspondiente a una rotación como la correspondiente a una reflexión tienen en sus columnas vectores unitarios y mutuamente ortogonales, pero mientras que el determinante de (la matriz correspondiente a) una rotación es 1, el determinante de una reflexión es  $-1$ , correspondiendo al hecho de que la base transformada de la canónica bajo una rotación es una base derecha en tanto que la transformada bajo una reflexión es una base izquierda.

**Ejemplo 5.** Sea  $T$  una transformación lineal cualquiera en  $\mathbb{R}^2$ , y sean  $T(1, 0) = (a, b)$ ,  $T(0, 1) = (c, d)$ ; entonces la matriz de  $T$  es

$$M_T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

y el transformado de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se obtiene mediante la multiplicación siguiente:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Ésta es la *forma general de la regla de correspondencia de una transformación lineal en  $\mathbb{R}^2$* , pues si se la compara con las cuatro anteriores, se verá que lo único que varía en cada caso son los coeficientes  $a, b, c, d$  de los polinomios de primer grado **sin** término independiente que constituyen las dos entradas de la matriz columna correspondiente al vector transformado.

**Ejemplo 6.** Una *rotación con centro en el origen de  $\mathbb{R}^3$*  es una transformación lineal  $Ro$  que manda bases ortonormales derechas en otras del mismo tipo; entonces, la base canónica  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  se transforma en otra base ortonormal

derecha  $Ro(\hat{e}_1) = \hat{a}_1$ ,  $Ro(\hat{e}_2) = \hat{a}_2$ ,  $Ro(\hat{e}_3) = \hat{a}_3 = \hat{a}_1 \times \hat{a}_2$ , (véase la Figura 7.6) y si las coordenadas de  $\hat{a}_i$  en la base canónica son (note los dobles índices y lo que denotan)

$$\hat{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}),$$

como la transformación es lineal determina, en la base canónica, la matriz

$$M_{Ro} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

El transformado de un vector  $(x, y, z)$  se obtiene así

$$Ro(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}.$$

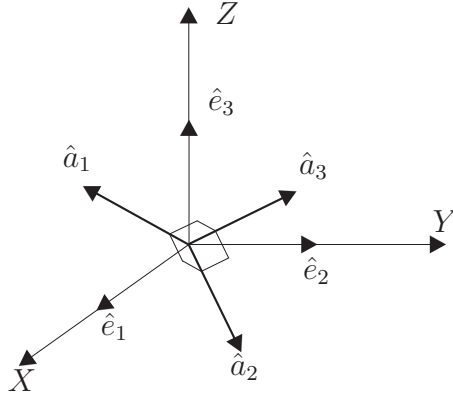


Figura 7.6: Una rotación con centro en el origen en  $\mathbb{R}^3$ .

Debe recordarse que el hecho de que la base transformada  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$  sea ortonormal derecha significa no sólo que cada vector tiene norma 1 y que cualesquiera dos son ortogonales, sino que el volumen orientado dado por el triple producto escalar  $[\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3]$  es 1.

**Ejemplo 7.** La *aplicación antípoda* en  $\mathbb{R}^3$  es la transformación  $A$  que lleva cada vector  $\bar{v}$  en su negativo,  $-\bar{v}$ ; en consecuencia, los transformados de los elementos de la base canónica son  $A(\hat{e}_1) = -\hat{e}_1$ ,  $A(\hat{e}_2) = -\hat{e}_2$ , y  $A(\hat{e}_3) = -\hat{e}_3$ . Es muy sencillo formar la matriz correspondiente a esta transformación: todos

los elementos de la diagonal son  $-1$  y cualquier otra entrada es 0; el lector deberá determinar si la base transformada de la canónica es una base derecha o izquierda.

---

## EJERCICIOS

1. Demuestre que cualquier matriz de 2 por 2 define una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mediante el producto

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

2. Encuentre la forma de la matriz inversa de una matriz de  $2 \times 2$  con determinante distinto de cero.
3. Demuestre que el producto de matrices tiene las propiedades asociativa y distributiva respecto a la suma (cuide las dimensiones de las matrices para que las operaciones tengan sentido.)
4. Demuestre que el determinante del producto de dos matrices de  $3 \times 3$  es igual al producto de los determinantes.
5. Encuentre la matriz inversa de la matriz de una homotecia e interprete el efecto geométrico de la transformación que determina. ¿Es una homotecia?
6. Encuentre la matriz inversa de la matriz de una rotación en el plano con centro en el origen, e interprete el efecto geométrico de la transformación que determina. ¿Es una rotación?
7. Encuentre la matriz inversa de la matriz de una reflexión en el plano respecto a una recta por el origen, e interprete el efecto geométrico de la transformación que determina. ¿Es una reflexión?
8. Demuestre que la matriz producto de dos matrices de rotación en el plano (con centro en el origen), determina una rotación por un ángulo que es la suma de los ángulos de las dos rotaciones dadas.
9. Multiplique las matrices de dos reflexiones respecto a rectas por el origen en el plano e identifique la transformación que determina la matriz producto.
10. ¿Qué condición, en términos de su matriz asociada respecto a una base, debe satisfacer una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  para ser invertible?
11. Demuestre que si  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  son transformaciones lineales, su composición  $S \circ T$  también lo es, y demuestre que, fija una

base, la matriz de la composición es el producto  $M_S M_T$  de las matrices de  $S$  y  $T$ .

12. Escriba las matrices correspondientes, en la base canónica del espacio dado, a las transformaciones indicadas:
  - a) la rotación del plano con centro en el origen por un ángulo de  $\pi/6$ .
  - b) la reflexión del plano respecto a la recta que forma un ángulo de  $\pi/6$  con la parte positiva del eje  $X$ .
  - c) la composición de las dos transformaciones anteriores en cada uno de los órdenes posibles.
  - d) la proyección de  $\mathbb{R}^3$  en el plano  $XZ$ .
13. Determine si la reflexión respecto a un plano coordenado en  $\mathbb{R}^3$  es una transformación lineal. Si la respuesta es afirmativa, escriba la matriz correspondiente a la reflexión en cada plano coordenado.
14. Demuestre que el conjunto de las rotaciones de  $\mathbb{R}^2$  en torno al origen forman un grupo cuyos elementos pueden identificarse con los puntos de la circunferencia con centro en el origen y de radio 1.
15. Defina una correspondencia biunívoca entre  $\mathbb{R}^{mn}$  y  $\mathcal{M}_{m \times n}$  que lleve sumas en sumas y el producto por un escalar en el producto por ese mismo escalar. Eso demostrará que las matrices forman un espacio vectorial de dimensión  $mn$ .
16. Demuestre que la transpuesta de una matriz que es producto de otras dos, es el producto en el orden inverso de las matrices transpuestas de las dos dadas.

## 7.3 Subespacios invariantes bajo transformaciones lineales

Desde la introducción se señaló como esenciales para la Geometría los conceptos o elementos que permanecen invariantes bajo una transformación, pues mediante ellos es posible entender mejor el efecto de dichas transformaciones.

En el caso de las transformaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo, es importante determinar las direcciones que permanecen invariantes, es decir, aquellos subespacios de dimensión 1 cuyos elementos se transforman en otros pertenecientes al mismo subespacio.

**Definición.** Si  $T : V \rightarrow V$  es una transformación lineal, decimos que  $\bar{v} \in V$  es un *vector característico de  $T$*  si su transformado es múltiplo del vector, es decir, si para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  se tiene

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}.$$

El escalar  $\lambda$  se denomina *valor característico de  $T$* .

Otras denominaciones para los vectores característicos son *vector propio* y *eigenvector*, y a los valores característicos se les llama también *valores propios* o *eigenvalores*.

**Observación.** Como cualquier transformación lineal lleva al vector cero en el vector cero, el vector  $\bar{0}_V$  es vector propio de cualquier transformación lineal, por eso lo interesante es determinar los vectores característicos no cero de una transformación lineal.

La proposición siguiente demuestra que un vector propio no cero determina un subespacio invariante de dimensión 1, es decir, la recta por el origen  $\mathcal{L}$  determinada por un vector propio no nulo de una transformación lineal  $T$ , contiene a sus transformados bajo  $T : T(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ . No podemos escribir  $T(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$  porque si el valor propio es cero,  $T(\mathcal{L}) = \{\bar{0}\}$ .

**Proposición.** Si  $\bar{v} \in V$  es vector propio de la transformación lineal  $T$ , cualquier múltiplo de  $\bar{v}$  también es vector propio de  $T$  con el mismo valor propio de  $\bar{v}$ .

**Demostración.**

Si  $\bar{v}$  es vector propio de  $T$ , entonces  $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ , y el efecto de  $T$  en el múltiplo  $\mu \bar{v}$  de  $\bar{v}$  es, por la linealidad de  $T$  y la propiedad asociativa de la multiplicación por un escalar,

$$T(\mu \bar{v}) = \mu T(\bar{v}) = \mu(\lambda \bar{v}) = \lambda(\mu \bar{v}),$$

lo cual exhibe a  $\mu \bar{v}$  como vector propio de  $T$  con el mismo valor propio de  $\bar{v}$ . ■

**Definición.** La recta generada por un vector propio de una transformación lineal  $T : V \rightarrow V$ , se denomina *subespacio  $T$ -invariante (unidimensional)*.

**Observación.** Si dos vectores propios linealmente independientes tienen valores propios iguales, todos los vectores del subespacio que generan son vectores propios con el valor propio de los originales. Éste es un subespacio invariante bidimensional.

El lector que haya entendido el efecto geométrico de las transformaciones presentadas como ejemplos, seguramente podrá decir cuáles son las rectas por el origen de  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  que quedan invariantes bajo cada una de ellas, pero en ocasiones no es tan sencillo entender el efecto geométrico de una cierta transformación lineal; para esos casos existe un instrumento algebraico que mecaniza la obtención de los elementos invariantes mediante la determinación de los valores y vectores característicos.

El procedimiento es el siguiente.

Sabemos que, dada  $T : V \rightarrow V$  lineal y fija una base en  $V$ , existe una única matriz  $M_T$  que al multiplicar por la izquierda al vector columna formado con las coordenadas de un vector  $\bar{v}$  en términos de esa base, produce el vector columna transformado del vector dado; en el caso de un vector propio, ese transformado debe ser  $\lambda\bar{v}$ ; si al vector columna lo escribimos como  $\bar{v}^t$ , obtenemos

$$M_T \bar{v}^t = \lambda \bar{v}^t,$$

que también puede escribirse como

$$M_T \bar{v}^t - \lambda \bar{v}^t = \bar{0}^t,$$

y si denotamos por  $I$  la matriz identidad, podemos introducirla en el segundo sumando del lado izquierdo así:

$$M_T \bar{v}^t - \lambda I \bar{v}^t = \bar{0}^t.$$

Por la propiedad distributiva del producto de matrices, el lado izquierdo puede escribirse en la forma

$$(M_T - \lambda I) \bar{v}^t = \bar{0}^t, \tag{7.1}$$

donde la resta de matrices indicada produce una matriz que difiere de  $M_T$  en que debe restarse  $\lambda$  a cada una de las entradas de la diagonal.



Para fijar ideas, tomaremos el caso en que  $V = \mathbb{R}^2$  (recuérdese el ejemplo 5 de transformaciones lineales); entonces la matriz de la ecuación (7.1) se escribe así:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Si esta matriz se multiplica (a la derecha) por el vector columna  $(x, y)^t$  y se iguala al vector  $(0, 0)^t$ , la igualdad de las coordenadas respectivas da el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} (a - \lambda)x + cy &= 0 \\ bx + (d - \lambda)y &= 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

del cual sabemos que tiene siempre la solución  $x = 0, y = 0$ , y que sólo admite solución no trivial si el determinante del sistema se anula,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

En este caso, dicho determinante puede verse como un polinomio de segundo grado en  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

que, como sabemos, puede tener o no raíces reales; si hay raíces reales, cada una de ellas permitirá determinar un vector propio en  $\mathbb{R}^2$  a partir del sistema, **necesariamente dependiente**, que resulta de sustituir cada raíz en las ecuaciones lineales homogéneas (7.2).

Antes de analizar cuáles son los subespacios invariantes de los ejemplos de transformaciones lineales presentados en el inciso 1, vale la pena consignar en su forma general el resultado particular que acabamos de obtener.

**Teorema** Si  $T : V \rightarrow V$  es una transformación lineal y  $M_T$  es la matriz de  $T$  en términos de una base fija, entonces los valores propios de  $T$  pueden obtenerse como las raíces del polinomio en  $\lambda$ ,  $P(\lambda)$ , correspondiente a la nulidad del determinante del sistema lineal homogéneo

$$(M_T - \lambda I)\bar{v}^t = \bar{0}^t.$$

Los vectores propios correspondientes a las raíces reales resultarán de dar solución al sistema dependiente (7.2) una vez que hayamos sustituido una de dichas raíces en lugar de  $\lambda$  en la igualdad anterior.

**Demostración.**

Como lo mencionamos al principio de este capítulo, nuestro interés principal radica en presentar los resultados para los casos de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ; nosotros acabamos de hacer el desarrollo del primer caso, y al lector le dejaremos el formalismo del segundo. El caso general es solamente más latoso de escribir, pero no ofrece dificultad conceptual alguna. ■

**Definición.** El polinomio  $P(\lambda)$  mencionado en el teorema anterior, se denomina *polinomio característico de  $T$* .

Como la definición de valor y vector característico es puramente geométrica, uno esperaría que, correspondiendo a su nombre, el polinomio característico  $P(\lambda)$  no dependa de la base respecto a la cual se escribe la matriz  $M_T$ , es decir,  $P(\lambda)$  sólo depende de  $T$  y es invariante bajo cambios de base, como comprobamos a continuación.

**Proposición.** El polinomio característico de una transformación lineal  $T : V \rightarrow V$ , es independiente de la base respecto a la cual se escriba la matriz de la transformación, es decir, es un invariante de  $T$ .

**Demostración.**

Comencemos por observar que si  $E$  y  $F$  son dos bases de  $V$ , y si  $B_E^F$  es la matriz de cambio de base de  $E$  a  $F$ , esto es, la que expresa cada elemento  $\bar{e}_i \in E$  respecto a la base  $F$ , entonces la *matriz de cambio de base* de  $F$  a  $E$  es  $B_F^E = (B_E^F)^{-1}$ , puesto que el producto  $B_F^E B_E^F$  expresa cada elemento de la base  $E$  respecto a esa misma base, es decir,  $B_F^E B_E^F$  es la matriz identidad  $I$ . Por tanto, la demostración se reduce a comprobar que

$$\det(M_T^E - \lambda I) = \det(M_T^F - \lambda I), \quad (7.3)$$

y sólo falta relacionar las matrices  $M_T^E$  y  $M_T^F$ .

La primera sirve para obtener los transformados de vectores que estén expresados respecto a la base  $E$ , y la segunda fabrica los transformados de vectores expresados respecto a la base  $F$ ; en consecuencia, la matriz  $B_F^E M_T^F B_E^F$  es exactamente  $M_T^E$ , pues trabaja sobre un vector  $\bar{v}_E$  expresado respecto a la base  $E$  así:

$B_E^F \bar{v}_E^t$  expresa al vector  $\bar{v}_E$  respecto a la base  $F$ , obteniéndose  $\bar{v}_F^t$ ;

$M_T^F \bar{v}_F^t$  aplica la transformación  $T$  a  $\bar{v}_F$ , obteniéndose  $T(\bar{v}_F^t) = \bar{w}_F^t$ ;

$B_F^E \bar{w}_F^t$  expresa al vector transformado  $\bar{w}_F^t$  respecto a la base  $E$ , obteniéndose  $\bar{w}_E^t$ .

Es decir, como para cualquier  $\bar{v} \in V$  tenemos:

$$B_F^E M_T^F B_E^F(\bar{v}_E^t) = \bar{w}_E^t = M_T^E(\bar{v}_E^t), \quad (7.4)$$

hemos comprobado la igualdad propuesta entre matrices.

Por tanto, el primer miembro de la igualdad (7.3) puede escribirse como

$$\det(M_T^E - \lambda I) = \det(B_F^E M_T^F B_E^F - \lambda I),$$

y si tomamos en cuenta que  $I = B_F^E B_E^F$ , podemos escribir

$$B_F^E M_T^F B_E^F - \lambda I = B_F^E M_T^F B_E^F - \lambda B_F^E B_E^F = B_F^E (M_T^F - \lambda I) B_E^F,$$

donde la última igualdad es consecuencia de la distributividad del producto de matrices. Ahora basta tomar en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, para obtener la igualdad (7.3). ■

Vayamos ahora a los ejemplos. Nos gustaría que el lector trate de encontrar, mediante argumentos geométricos, los subespacios invariantes en cada caso, y después coteje su respuesta con la dada por el álgebra.

**Ejemplo 1.** En el caso de una homotecia de razón  $k$  en el plano:

$$H_k(x, y) = (kx, ky) \quad \text{donde } k \text{ es un real positivo,}$$

por la definición del producto por un escalar se tiene

$$H_k(x, y) = (kx, ky) = k(x, y),$$

es decir, el transformado de cualquier vector es múltiplo de dicho vector, y por tanto cualquier vector es vector propio de una homotecia de razón  $k$  y el valor propio es precisamente  $k$ .

**Ejemplo 2.** En el caso de la proyección del espacio en el plano  $XY$ , cualquier vector que no pertenezca al plano  $XY$  se transforma en otro perteneciente al plano  $XY$  y, en consecuencia, cambia su dirección; en cambio, los vectores pertenecientes al plano  $XY$  quedan fijos, es decir, son vectores propios con valor propio 1. Ésa es parte de la respuesta dada por el álgebra, pues el polinomio característico en este caso es el determinante de la matriz

$$M_{\Pi_{XY}} - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix},$$

que es simplemente el producto de las entradas de la diagonal,

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)^2(-\lambda),$$

y sus raíces son  $\lambda = 1$  (doble) y  $\lambda = 0$ . Para obtener un vector propio, se sustituye un valor de  $\lambda$  en el sistema que resulta al multiplicar la matriz  $M_{\Pi_{XY}} - \lambda I$  por  $(x, y, z)^t$  e igualar a cero cada una de las coordenadas.

Para  $\lambda = 1$  resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} (1 - 1)x + 0y + 0z &= 0 \\ 0x + (1 - 1)y + 0z &= 0, \\ 0x + 0y + (0 - 1)z &= 0 \end{aligned}$$

que se reducen, puesto que las dos primeras se satisfacen trivialmente para cualesquiera  $x, y, z$ , a la última

$$-z = 0,$$

es decir, un vector propio con valor propio 1 debe tener tercera coordenada nula y, en consecuencia, pertenece al plano  $XY$ .

Para  $\lambda = 0$ , las ecuaciones son

$$\begin{aligned} (1 - 0)x + 0y + 0z &= 0 \\ 0x + (1 - 0)y + 0z &= 0 \\ 0x + 0y + (0 - 0)z &= 0 \end{aligned}$$

de las cuales sólo las dos primeras establecen condiciones (la tercera se satisface trivialmente para cualesquiera  $x, y, z$ ), que son

$$x = 0, \quad y = 0,$$

es decir, un vector con valor propio 0 pertenece tanto al plano  $x = 0$  como al plano  $y = 0$ , esto es, al eje  $Z$ . Nótese que en este caso  $T(Z) = \{\bar{0}\} \neq Z$ .

**Ejemplo 3.** Cuando se efectúa una rotación del plano en torno al origen, si el ángulo  $\phi$  es menor que  $\pi$ , ningún vector conserva su dirección.

Pero cuando el ángulo es un múltiplo (entero) de  $\pi$ , el transformado de cualquier vector resulta colineal con el original, en el mismo sentido o en sentido contrario dependiendo de que el entero sea par o impar.

Desde luego, ésta es la respuesta que da el álgebra; el polinomio característico es el determinante de la matriz  $M_\phi - \lambda I$ :

$$\begin{vmatrix} \cos \phi - \lambda & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \cos \phi + \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = \lambda^2 - 2\lambda \cos \phi + 1,$$

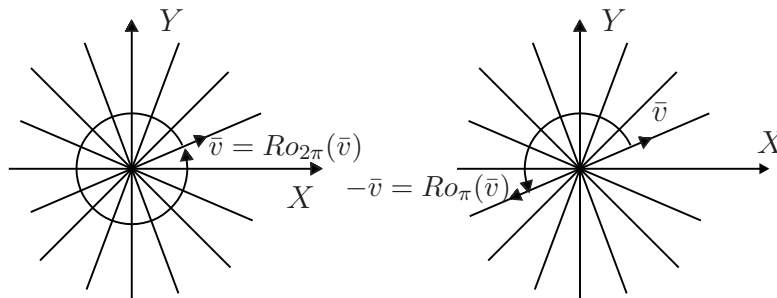


Figura 7.7: Subespacios invariantes bajo las rotaciones por  $2\pi$  y  $\pi$ .

y el lector puede comprobar que este polinomio tiene raíces reales **sólo si**  $\phi = k\pi$ , donde  $k$  es un número entero, además de que en tal caso las raíces son 1 ó  $-1$  dependiendo de la paridad de  $k$ , es decir, si el ángulo de rotación es de una o varias vueltas completas todos los vectores quedan fijos, mientras que si el giro es de media vuelta (o una y media, etc.), cada vector  $(x, y)$  se transforma en su opuesto  $(-x, -y)$  (véase la Figura 7.7).

**Ejemplo 4.** Al reflejar los elementos del plano respecto a la recta por el origen que forma un ángulo  $\theta$  con la parte positiva del eje  $X$ , los elementos de dicha recta quedan fijos, y las demás rectas por el origen se transforman en su reflejada respecto a la recta  $l_\theta$ ; por tanto, la única recta por el origen distinta de  $l_\theta$  que se transforma en sí misma es la perpendicular a  $l_\theta$ ,  $l_\theta^\perp$ . Para ella, si un vector  $\bar{v}$  pertenece a uno de los rayos a partir del origen, su transformado,  $-\bar{v}$ , pertenece al otro rayo (véase la Figura 7.8).

Para aplicar el procedimiento algebraico, calculamos el determinante de la matriz  $M_{l(\theta)} - \lambda I$ :

$$\begin{vmatrix} (\cos 2\theta) - \lambda & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (-\cos 2\theta) - \lambda \end{vmatrix} = [(\cos 2\theta) - \lambda][(-\cos 2\theta) - \lambda] - \sin^2 2\theta \\ = -(\cos^2 2\theta - \lambda^2) - \sin^2 2\theta = \lambda^2 - 1,$$

que como polinomio en  $\lambda$  tiene las raíces 1 y  $-1$ .

Los vectores propios correspondientes a uno de estos valores propios resultan de sustituir dicho valor en el sistema dependiente

$$\begin{aligned} ((\cos 2\theta) - \lambda)x + (\sin 2\theta)y &= 0 \\ (\sin 2\theta)x + ((-\cos 2\theta) - \lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

Como el sistema es dependiente, basta resolver una de las ecuaciones, por ejemplo la primera:

$$((\cos 2\theta) - \lambda)x + (\sin 2\theta)y = 0$$

que implica, si  $\lambda = 1$  y  $\theta \neq 0$ , lo siguiente:

$$\begin{aligned} y/x &= (1 - \cos 2\theta)/\sin 2\theta \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))/2 \cos \theta \sin \theta \\ &= (2\sin^2 \theta)/2 \cos \theta \sin \theta \\ &= \tan \theta, \end{aligned}$$

esto es, los vectores en la recta de reflexión quedan fijos.

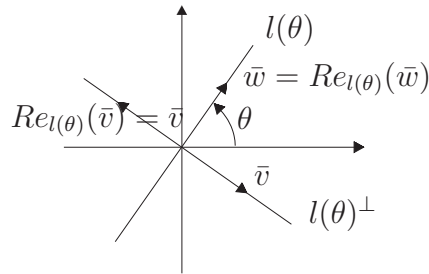


Figura 7.8: Subespacios invariantes en  $\mathbb{R}^2$  bajo la reflexión en  $l_\theta$ .

La sustitución del valor  $-1$  para  $\lambda$  da como primera ecuación

$$[(\cos 2\theta) + 1]x + (\sin 2\theta)y = 0,$$

y al despejar  $y/x$  se obtiene, de manera totalmente análoga a la anterior,  $y/x = -\cot \theta$ .

Por tanto, los vectores de la recta perpendicular a la de reflexión se transforman cada uno en su opuesto.

**Ejemplo 5.** En la sección anterior obtuvimos la matriz correspondiente a una transformación lineal general en  $\mathbb{R}^2$ ; como el determinante es una ecuación general de segundo grado en  $\lambda$ ,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0,$$

las raíces no necesariamente son reales, como ocurre con las rotaciones por ángulos que *no* son múltiplos de  $\pi$ , pues en ese caso el discriminante de la ecuación es menor que cero. Sería interesante que el lector intentara dar una interpretación geométrica de la condición algebraica de que el discriminante del polinomio característico deba ser no negativo para que existan subespacios invariantes.

**Ejemplo 6.** Definimos una rotación con centro en el origen en  $\mathbb{R}^3$ , como una transformación lineal que lleva la base canónica en otra base ortonormal derecha; eso significa que la longitud de cada vector no varía y, en particular, que la esfera con centro en el origen y de radio 1 se transforma en sí misma. Como hemos pedido al lector recurrir a su intuición geométrica para anticiparse al álgebra, le sugerimos que intente mover una pelota dejando fijo su centro.

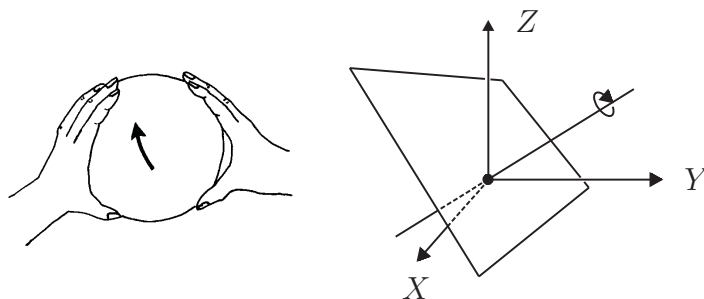


Figura 7.9: Toda rotación en  $\mathbb{R}^3$  con centro en  $(0, 0, 0)$  fija una dirección.

La manera natural de hacerlo es colocar las manos una opuesta a la otra, con la pelota entre ellas, y hacerla girar; si el movimiento realmente fija el centro de la pelota, también fija dos puntos diametralmente opuestos.

El álgebra proporciona esta información con base en el hecho de que el polinomio característico tiene grado impar, pues un resultado algebraico muy importante asegura que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales aparecen por pares (véase [Bi] de la bibliografía); en consecuencia, un polinomio de grado impar siempre tiene una raíz real; cuando se trata de un polinomio característico, el valor propio real corresponde a un vector propio que determina una recta invariante denominada, en nuestro caso, *eje de la rotación*.

Para comprobar que el polinomio característico tiene grado impar, basta recordar que dicho polinomio es el determinante de la matriz de  $3 \times 3$   $M_{Ro} - \lambda I$ , esto es,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix},$$

que como polinomio en  $\lambda$  tiene grado 3.

El hecho de que cualquier rotación con centro en el origen en  $\mathbb{R}^3$  fije una dirección, permite determinar la rotación en  $\mathbb{R}^3$  especificando el eje y una rotación en el plano perpendicular a dicho eje.

**Ejemplo 7.** La definición de la aplicación antípoda en  $\mathbb{R}^3$ ,  $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$  hace evidente que cualquier vector es vector propio con valor propio  $-1$ .

## EJERCICIOS

1. Determine si la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = x(2, 1) + y(3, 4)$  transforma alguna recta por el origen en sí misma.
2. Determine si la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = x(3, 4) + y(2, 1)$  transforma alguna recta por el origen en sí misma. Compare con el ejercicio anterior.
3. Encuentre los valores y vectores propios de las reflexiones de  $\mathbb{R}^3$  respecto a los distintos planos coordenados.
4. Demuestre que cualquier transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo



definida por una matriz simétrica, deja invariantes dos direcciones perpendiculares.

5. Demuestre que si dos vectores propios de una transformación lineal  $T$  son linealmente independientes y tienen el mismo valor propio, entonces cualquier combinación lineal de ellos es también vector propio de  $T$  con ese mismo valor propio.
6. Escriba la matriz de la transformación lineal  $\Pi_X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que aplica  $(x, y)$  en  $(x, 0)$  con respecto a la base  $(1, 1), (0, 1)$ . (Sugerencia: escriba primero la matriz de dicha transformación respecto a la base canónica, y luego aplique la técnica usada en la ecuación (7.4).)

## 7.4 Transformaciones rígidas

En este inciso estudiaremos las transformaciones rígidas del plano y las del espacio. Veremos que, en cada caso, forman un grupo bajo la composición, que dicho grupo es no conmutativo y que posee varios subgrupos: movimientos, traslaciones, transformaciones ortogonales y rotaciones. Las reflexiones no constituyen un grupo, pero tienen la virtud de generar a todo el grupo; por ejemplo, en el caso del plano, cualquier transformación rígida puede obtenerse componiendo a lo más tres reflexiones en rectas adecuadas (véase [Ev] de la bibliografía). Finalmente, demostraremos que cualquier transformación rígida puede obtenerse como composición de una traslación con una transformación ortogonal.

### El grupo de las transformaciones rígidas

Para ahorrarnos trabajo, haremos el estudio en el espacio cartesiano  $\mathbb{R}^3$  y cuando necesitemos analizar lo que ocurre en el caso del plano cartesiano, nos restringiremos al plano  $XY \subset \mathbb{R}^3$ .

**Definición.** Una *transformación rígida en  $\mathbb{R}^3$*  es una aplicación que respeta la distancias entre puntos,  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Es decir,

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)).$$

De la definición es inmediato comprobar que las transformaciones rígidas son inyectivas (por tanto, invertibles); un argumento geométrico simple demuestra que son suprayectivas y entonces tiene sentido componer cualesquiera dos de ellas. La composición  $T_2 \circ T_1$  de dos transformaciones rígidas es otra transformación rígida, pues

$$\begin{aligned} d(T_2 \circ T_1(P), T_2 \circ T_1(Q)) &= d(T_2(T_1(P)), T_2(T_1(Q))) \\ &= d(T_1(P), T_1(Q)) = d(P, Q), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad sólo se debe a la definición de composición de funciones, la segunda utiliza la rigidez de  $T_2$ , y la tercera utiliza la rigidez de  $T_1$ .

El lector debe comprobar que la identidad es una transformación rígida, que la inversa de una transformación rígida también es rígida y como la asociatividad es válida para la composición de funciones cualesquiera, habrá demostrado el teorema siguiente.

**Teorema** Las transformaciones rígidas del espacio cartesiano forman un grupo bajo la composición.

### Ejemplos y no ejemplos de transformaciones rígidas

El ejemplo más sencillo de transformación rígida es el de una *traslación por un vector fijo*  $\bar{a}$ , que ya hemos utilizado, y definida así:

$$T_{\bar{a}}(\bar{v}) = \bar{v} + \bar{a}.$$

Si recordamos que la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  es la norma del vector diferencia  $P - Q$ , es inmediato verificar la rigidez de una traslación:

$$\begin{aligned} d(T_{\bar{a}}(P), T_{\bar{a}}(Q)) &= ||T_{\bar{a}}(P) - T_{\bar{a}}(Q)|| \\ &= ||(P + \bar{a}) - (Q + \bar{a})|| = ||P - Q|| = d(P, Q). \end{aligned}$$

Como la composición de dos traslaciones,  $T_{\bar{a}}$  y  $T_{\bar{b}}$ , es la traslación  $T_{\bar{a}+\bar{b}}$ , es inmediato comprobar que las traslaciones en  $\mathbb{R}^3$  forman un grupo bajo la composición, y que dicho grupo es *isomorfo* al grupo aditivo  $\mathbb{R}^3$ , donde por *isomorfismo* entendemos una correspondencia biunívoca que respeta las operaciones. En este caso, si la correspondencia está dada por  $T_{\bar{a}} \mapsto \bar{a}$ , la

operación entre las traslaciones es la composición y entre los vectores, la suma y se cumple

$$T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} \mapsto \vec{a} + \vec{b}.$$

De las transformaciones lineales estudiadas en el inciso anterior, claramente las proyecciones en uno de los planos coordenados **no** son transformaciones rígidas, pues hay puntos distintos con la misma proyección (dé ejemplos). Y una homotecia de razón  $k \neq 1$  tampoco es rígida porque alarga o encoge las distancias por  $k$ .

En cambio, las rotaciones en torno al origen y las reflexiones respecto a un plano por el origen sí son transformaciones rígidas. Para convencernos hagamos dos observaciones:

1. Las normas se conservan, porque el paralelepípedo de la Figura 3.13 y cuya diagonal principal mide  $\|\vec{u}\|$ , se transforma bajo rotaciones con centro en el origen o reflexiones respecto a un plano por el origen, en otro paralelepípedo congruente con el original y cuyos lados son paralelos a los transformados de los vectores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .
2. Si las normas se conservan, las distancias se conservan. Eso se debe a la linealidad de las transformaciones en estudio:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \|P - Q\| = \|T(P - Q)\| \\ &= \|T(P) - T(Q)\| = d(T(P), T(Q)). \end{aligned}$$

Los miembros extremos de esta última igualdad dan precisamente la rigidez de rotaciones y reflexiones.

Las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  en sí mismo que preservan normas se denominan *transformaciones ortogonales*. Lo que acabamos de demostrar es el lema siguiente.

**Lema.** Las transformaciones ortogonales son rígidas.

El conjunto de las transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^3$  se denota  $O(3, \mathbb{R})$  y se denomina *grupo ortogonal de orden 3*. Es un subgrupo **no** conmutativo del *grupo lineal*  $GL(3, \mathbb{R})$ : las matrices de  $3 \times 3$  con determinante no nulo.

El determinante de la matriz de una transformación ortogonal sólo puede ser 1 o  $-1$ , dependiendo de que la transformación respete o invierta la orientación.

Hemos denominado a las primeras *rotaciones* y es obvio que forman un subgrupo respecto a la composición, en tanto que las segundas, denominadas *reflexiones*, no pueden formar un subgrupo porque la identidad no es una reflexión, además de que si componemos dos de ellas resulta una transformación cuya matriz tiene determinante 1, es decir, es una rotación.

Por otro lado, es claro que el grupo de las transformaciones ortogonales de orden 3 contiene un subgrupo que puede identificarse con el de las transformaciones ortogonales de orden 2. Para convencernos, basta pensar que el eje  $Z$  queda fijo y que la transformación sólo actúa sobre el plano  $XY$ . Las matrices correspondientes tendrán como tercera columna el vector  $(0, 0, 1)$  y son un subgrupo bajo la multiplicación.

El juego puede también jugarse a la inversa, es decir, tiene sentido generalizar todo lo anterior al caso de  $\mathbb{R}^n$ . El grupo lineal de orden  $n$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$ , consta de las transformaciones lineales invertibles de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , y el subgrupo de las transformaciones ortogonales  $O(n, \mathbb{R})$  consta de aquellos elementos de  $GL(n, \mathbb{R})$  cuyas matrices asociadas en la base canónica tienen la propiedad de que su transpuesta es su inversa. Hay muchos resultados interesantes sobre estos grupos que son el mejor ejemplo de los llamados *grupos de Lie*. El lector interesado puede consultar [Ch] o [W].

Para finalizar este inciso, únicamente demostraremos que los ejemplos de transformaciones rígidas analizados hasta ahora, traslaciones y transformaciones ortogonales bastan para obtener todas las demás.

**Teorema** Cualquier transformación rígida es composición de una traslación con una transformación ortogonal.

### **Demostración.**

Si  $T(\bar{0}) = \bar{a}$ , entonces  $U = T_{-\bar{a}} \circ T$ , donde  $T_{-\bar{a}}$  es la traslación por  $-\bar{a}$ , es una transformación rígida que fija al vector  $\bar{0}$ . Afirmamos que una transformación con ambas características resulta ortogonal. La demostración consta de varios pasos.

1.  $U$  respeta normas, es decir,  $\|U(P)\| = \|P\|$ :

$$\|U(P)\| = d(U(P), \bar{0}) = d(U(P), U(\bar{0})) = d(P, \bar{0}) = \|P\|,$$

donde la segunda igualdad se debe a que  $U$  fija a  $\bar{0}$  y la tercera utiliza la rigidez de  $U$ .

2.  $U$  respeta el producto escalar, es decir,  $U(P) \cdot U(Q) = P \cdot Q$ . Para comprobarlo, expresemos la rigidez de  $U$  así:

$$\|U(P) - U(Q)\|^2 = \|P - Q\|^2,$$

Si desarrollamos cada miembro obtenemos

$$\|U(P)\|^2 - 2U(P) \cdot U(Q) + \|U(Q)\|^2 = \|P\|^2 - 2P \cdot Q + \|Q\|^2,$$

Entonces, usando 1) obtenemos  $U(P) \cdot U(Q) = P \cdot Q$ .

3.  $U$  es lineal, es decir,  $U(P + Q) = U(P) + U(Q)$  y  $U(\lambda P) = \lambda U(P)$ .

Demostraremos sólo la primera igualdad, pues la segunda utiliza el mismo razonamiento: la igualdad es válida si y sólo si

$$U(P + Q) - U(P) - U(Q) = \bar{0}.$$

El vector cero está caracterizado por su norma; calculemos el cuadrado de la norma del vector en el miembro izquierdo:

$$\begin{aligned} & (U(P + Q) - U(P) - U(Q)) \cdot (U(P + Q) - U(P) - U(Q)) \\ &= \|U(P + Q)\|^2 + \|U(P)\|^2 + \|U(Q)\|^2 \\ & \quad - 2U(P + Q) \cdot U(P) - 2U(P + Q) \cdot U(Q) + 2U(P) \cdot U(Q). \end{aligned}$$

Por las partes 1) y 2), lo anterior es igual a

$$\|P + Q\|^2 + \|P\|^2 + \|Q\|^2 - 2(P + Q) \cdot P - 2(P + Q) \cdot Q + 2P \cdot Q.$$

Y si desarrollamos todos los productos punto, incluidos los cuadrados de las normas, comprobaremos que los sumandos se cancelan unos con otros.

Las partes 1) y 3) implican que  $U$  es ortogonal y, en consecuencia,  $T = T_{-\bar{a}} \circ U$ . ■

El lector preguntará si no es también un grupo bajo la composición el conjunto de las rotaciones en torno a otro punto del plano, o del espacio. Desde luego que sí, pero siempre podremos reducir su estudio al caso analizado si primero trasladamos el punto al origen, luego rotamos, y finalmente regresamos el punto a su posición original con la traslación inversa. Uno de los ejercicios siguientes permitirá al lector convencerse de lo anterior.

## EJERCICIOS

1. Demuestre que una transformación rígida es suprayectiva. (Sugerencia: Para cualquier  $P \in \mathbb{R}^3$ , considere el triángulo que forma con dos puntos que estén la imagen.)
2. Demuestre que los valores propios reales de una transformación ortogonal de orden 3 tienen valor absoluto 1.
3. Construya la matriz asociada (en la base canónica) a la transformación ortogonal de orden 3 correspondiente a la reflexión respecto al plano  $x + y + z = 0$ .
4. Demuestre que la composición de la traslación por  $(1, 2, 3)$  con el resultado de componer una rotación en torno al origen con la traslación por  $(-1, -2, -3)$  es una transformación rígida que fija al punto  $(1, 2, 3)$  y por eso se llama *rotación en torno a*  $(1, 2, 3)$ .
5. Demuestre que la matriz asociada a una reflexión respecto a una recta  $l_\theta$  por el origen en  $\mathbb{R}^2$  es ortogonal.
6. Demuestre que la matriz asociada a una reflexión respecto a uno de los planos coordenados en  $\mathbb{R}^3$  es ortogonal.
7. Demuestre que  $GL(3, \mathbb{R})$  es un grupo bajo la multiplicación.
8. Demuestre que las reflexiones generan al grupo ortogonal  $O(3, \mathbb{R})$ .
9. Determine cuáles las cuádricas son invariantes bajo alguna transformación rígida. (Sugerencia: Tome en cuenta las simetrías de cada cuádrica.)
10. Proponga una operación entre los puntos de la circunferencia unitaria con centro en el origen de  $\mathbb{R}^2$  tomando en cuenta que cada punto corresponde a una rotación y que las rotaciones forman grupo bajo la composición (véase [Ma]).

## 7.5 Eliminación de términos mixtos

En este inciso demostraremos que los términos mixtos de ecuaciones cuadráticas, ya sea en dos o en tres variables, pueden eliminarse siempre mediante una rotación adecuada. De esta manera justificaremos haber estudiado únicamente las cónicas y las cuádricas cuya ecuación era de tipo canónico (con los ejes de simetría coincidiendo con los coordenados o paralelos a ellos).

Aparecerán, como por arte de magia, transformaciones lineales cuyos vectores propios darán la solución al problema. Lo natural, entonces, sería resolver el enigma de la aparición de esas transformaciones lineales tan naturalmente ligadas al problema. Aunque no haremos una justificación formal, misma que pertenece al campo de la Geometría Proyectiva, después de demostrar que los términos mixtos siempre pueden eliminarse mediante una rotación adecuada, daremos un argumento intuitivo para entender el papel central jugado por la transformación lineal.

### Cónicas rotadas

Si queremos conocer la ecuación de la cónica obtenida al rotar en torno al origen una cónica en posición canónica, por ejemplo la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

debemos utilizar el procedimiento ya conocido: como las rotaciones son invertibles, si  $(x', y') = Ro_\phi(x, y)$ , entonces  $(x, y) = Ro_\phi^{-1}(x', y')$ .

La inversa de la rotación por el ángulo  $\phi$  es la rotación por el ángulo  $-\phi$  y podemos escribir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sen \phi \\ -\sen \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos \phi + y' \sen \phi \\ -x' \sen \phi + y' \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Si en la ecuación de la elipse sustituimos las expresiones para  $x$  y  $y$  dadas por la igualdad de los vectores columna primero y último, obtenemos

$$\frac{(x' \cos \phi + y' \sen \phi)^2}{a^2} + \frac{(-x' \sen \phi + y' \cos \phi)^2}{b^2} = 1,$$

que al desarrollar cuadrados da lugar a un polinomio de segundo grado en  $x$  y  $y$  cuyo término mixto tiene el coeficiente

$$2\left((1/a^2) - (1/b^2)\right) \cos \phi \sen \phi.$$

Este coeficiente es nulo sólo en tres casos: si  $a = b$ , lo cual indica que la elipse es en realidad una circunferencia; si  $\cos \phi = 0$ , lo cual ocurre sólo si  $\phi$  es múltiplo impar de  $\pi/2$ , implicando que hemos obtenido una elipse cuyo eje focal es el eje  $Y$  y que puede considerarse en posición canónica; o si  $\sin \phi = 0$ , lo cual implica que  $\phi$  es múltiplo par de  $\pi/2$ , dejando a la elipse invariante debido a la simetría respecto al eje conjugado que, en la posición canónica es el eje  $Y$ .

En todos los demás casos el ángulo no es múltiplo de  $\pi/2$ , y la ecuación de la elipse rotada tiene un término mixto con coeficiente no nulo.

### Eliminación de términos mixtos

El análisis anterior nos lleva a preguntar si así como una rotación puede lograr que la ecuación de la curva rotada adquiera un término mixto, también es posible que una rotación adecuada logre que al rotar una curva cuya ecuación tiene término mixto con coeficiente no cero, la ecuación de la curva rotada carezca de término mixto.

La respuesta es sí, y antes de demostrarlo haremos una observación sobre las ecuaciones cuadráticas.

Cualquier ecuación de segundo grado en dos variables  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

Note que la matriz donde aparecen los coeficientes cuadráticos se toma simétrica, lo cual la determina en forma única; se denomina *matriz de la parte cuadrática*.

El lector debe aprender a formar este tipo de matrices: tanto en los renglones como en las columnas se respeta el orden lexicográfico: primero  $x$ , luego  $y$ , etc. (cuando hay más de 2 variables), y entonces a las entradas les corresponde de manera natural los distintos términos:  $x^2$  a la entrada del primer renglón y primera columna;  $xy$  tanto a la entrada del primer renglón y segunda columna como a la del segundo renglón y primera columna, lo cual obliga a dividir entre dos el coeficiente del término mixto  $xy$ ;  $y^2$  a la entrada del segundo renglón y segunda columna, etc. (cuando hay más de 2 variables). La demostración es un poco larga, pero también es muy importante.

El teorema que vamos a demostrar es el siguiente.



**Teorema** Los términos mixtos de una ecuación cuadrática pueden eliminarse mediante una rotación adecuada.

### Demostración.

Tal vez el lector haya notado que en el enunciado no mencionamos el número de variables. Eso se debe a que la afirmación es válida con cualquier número de variables, aunque nosotros haremos la demostración sólo en los casos de 2 y 3 variables. El caso de 3 variables utiliza el caso de 2 variables indicando así el camino para demostrar la validez del teorema en el caso general.

En el **caso de dos variables**, si existe una rotación que permita eliminar el término mixto, eso significa que al sustituir en la forma matricial las matrices renglón  $(x \ y)$  y columna  $(x \ y)^t$  por las expresiones obtenidas de la ecuación 7.5, la ecuación de la curva rotada debe tener un coeficiente nulo en el término mixto. Obtenemos primero las expresiones de  $(x \ y)$  y  $(x \ y)^t$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y

$$(x \ y) = (x' \ y') \begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

donde la segunda igualdad se debe a que la transpuesta de una matriz que es producto de otras dos es igual al producto de las matrices transpuestas **pero** con el orden cambiado, según debe haberlo comprobado el lector en uno de los ejercicios.

Si sustituimos estas expresiones en la forma matricial, la nueva parte cuadrática es

$$\begin{aligned} & (x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x' \ y') \begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz de la nueva parte cuadrática es el producto de las tres matrices cuadradas y como pretendemos que la ecuación

de la curva rotada **no** tenga término mixto, la matriz producto debe ser diagonal (puesto que las entradas superior derecha e inferior izquierda son iguales a la mitad del coeficiente del término mixto); es decir, deben existir números reales  $A'$  y  $C'$  tales que

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \\ -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad entre matrices da lugar a interpretar la matriz de la parte cuadrática como la transformación lineal que induce en  $\mathbb{R}^2$ . Esto es claro cuando multiplicamos **por la izquierda** ambos miembros por la matriz inversa de la primera de la izquierda (como es la matriz de una rotación, su inversa es su transpuesta):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \\ -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \\ -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}.$$

Si el lector realiza los productos en ambos miembros, podrá comprobar que existen las igualdades siguientes entre los vectores columna de las matrices producto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\operatorname{sen} \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A' \cos \phi \\ -A' \operatorname{sen} \phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C' \operatorname{sen} \phi \\ C' \cos \phi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual conviene leer así:

*De existir una rotación  $Ro_\phi$  que elimine los términos mixtos, los vectores columna de la rotación inversa,  $Ro_\phi^{-1}$ , deben ser vectores propios de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática.*

Entonces, sólo falta demostrar que dicha transformación tiene siempre dos valores propios reales y, por consiguiente, dos vectores propios que conformen la inversa de la rotación buscada. Pero eso siempre ocurre, porque el polinomio característico de una matriz simétrica tiene siempre dos raíces reales, como comprobamos a continuación.

El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2.$$

El discriminante de esta ecuación es

$$\begin{aligned} \Delta &= (A + C)^2 - 4(AC - B^2) \\ &= A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + 4B^2 = (A - C)^2 + 4B^2. \end{aligned}$$

La suma de cuadrados del final muestra que  $\Delta$  nunca es menor que cero y, en consecuencia, los vectores buscados siempre existen. Faltaría únicamente verificar que dichos vectores son perpendiculares entre sí (para que den lugar a una matriz de rotación), pero ése fue el ejercicio 4 del inciso 3 y, por tanto, hemos demostrado la posibilidad de eliminar el término mixto de una ecuación de segundo grado en dos variables mediante una rotación adecuada.

Vayamos ahora al **caso de tres variables**:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

cuya expresión matricial es (la matriz de la parte cuadrática se toma simétrica):

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (G \ H \ I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0.$$

El razonamiento es idéntico al aplicado antes: si  $(x', y', z')$  son las coordenadas del punto  $P'$  resultante de haber rotado al punto  $P$  de coordenadas  $(x, y, z)$ , entonces  $(x, y, z)$  resultan de aplicar el inverso de esa rotación a  $(x', y', z')$ . La matriz de una rotación es ortogonal y, por tanto, su inversa es su transpuesta y las sustituciones que debemos efectuar son

$$\begin{aligned} (x \ y \ z) &= (x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pretendemos que la matriz de la nueva parte cuadrática sea diagonal (porque la nueva ecuación **no** debe tener términos mixtos), y por eso planteamos la igualdad siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

y, como antes, al multiplicar ambos miembros por la izquierda por la matriz inversa de la primera (que, por ser ortogonal, es la transpuesta) y comparar los correspondientes vectores columna de ambos miembros, obtenemos las igualdades

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

que expresan el hecho de que los vectores columna de la rotación inversa de la que estamos buscando deben ser vectores propios de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática.

Entonces, la posibilidad de eliminar los términos mixtos de una ecuación de segundo grado en 3 variables equivale a que el polinomio característico de una matriz simétrica de orden 3 tenga siempre tres raíces reales.

Para demostrar que eso siempre ocurre, comencemos por recordar que un polinomio de grado impar tiene siempre una raíz real  $\lambda_1$  que da lugar al primer vector propio (unitario)  $\hat{a}$ . Si la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática se escribe en términos de una base ortonormal cuyo primer elemento tenga la dirección del vector  $\hat{a}$ , entonces el primer vector columna tiene como coordenadas  $(\lambda_1, 0, 0)$  porque el vector unitario de la dirección invariante queda multiplicado por  $\lambda_1$ .

Para completar la nueva matriz, recordemos que al demostrar la invariancia del polinomio característico bajo cambios de base, establecimos la ecuación (7.4) para expresar en una nueva base  $E$  la matriz correspondiente a una transformación lineal cuando se conocen la matriz  $M_T^F$  en términos de una base anterior  $F$  y las matrices (inversa una de la otra) de cambio de una base a la otra, basta multiplicar la matriz conocida por dichas matrices de cambio de base (una de cada lado):

$$M_T^E = B_F^E M_T^F B_E^F$$

En este caso, las matrices  $B_F^E$  y  $B_E^F$  son ortogonales debido a que llevan una base ortonormal en otra; entonces, son una la transpuesta de la otra y eso da lugar a que la nueva matriz  $M_T^E$  sea simétrica, como se comprueba al transponerla:

$$(M_T^E)^t = (B_F^E M_T^F B_E^F)^t = (B_E^F)^t (M_T^F)^t (B_F^E)^t = B_F^E M_T^F B_E^F = M_T^E,$$

donde la segunda igualdad se debe a la regla para obtener la matriz transpuesta de un producto, y la tercera utiliza la ortogonalidad de las matrices de ambos cambios de base y la simetría de la matriz original.

Así, la matriz de la parte cuadrática respecto a la nueva base debe tener la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene como polinomio característico el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & \beta \\ 0 & \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix},$$

que es el producto del factor  $\lambda_1 - \lambda$  por el polinomio característico de una matriz simétrica de  $2 \times 2$ . Y como acabamos de ver que el polinomio característico de una tal matriz tiene siempre dos raíces reales, la invariancia del polinomio característico bajo cambios de base, implica que estas dos raíces son valores propios de la matriz original, lo cual concluye la demostración. ■

Nos interesa comentar dos cosas.

La primera, que el cálculo de las direcciones invariantes permite trazar la gráfica de la cónica o cuádrica original con sólo dibujar una ecuación canónica (o trasladada) respecto a los ejes con esas direcciones, como ejemplificaremos enseguida.

El segundo comentario será para explicar intuitivamente el significado geométrico de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática.

Veamos primero un ejemplo en dos variables.

El dibujo de una cónica (o una cuádrica) cuya ecuación respecto a un cierto sistema coordenado tiene términos mixtos se reduce al caso de una cónica de ecuación canónica o trasladada cuando conocemos ya los subespacios invariantes de la matriz de la parte cuadrática porque, según lo muestra el diagrama adjunto, si la rotación  $Ro$  “endereza” la cónica  $\mathcal{C}$ , la rotación inversa  $Ro^{-1}$  aplicada a la cónica en posición canónica lleva los ejes coordenados a las direcciones correspondientes a los vectores columna de  $Ro^{-1}$ :

Por tanto, si  $Ro$  da lugar a una figura  $\mathcal{C}'$  en posición canónica, una vez conocida la ecuación canónica (o trasladada) para dibujar la figura original  $\mathcal{C}$  basta dibujar la figura  $\mathcal{C}'$  respecto a los ejes definidos por los vectores columna de  $Ro^{-1}$ .

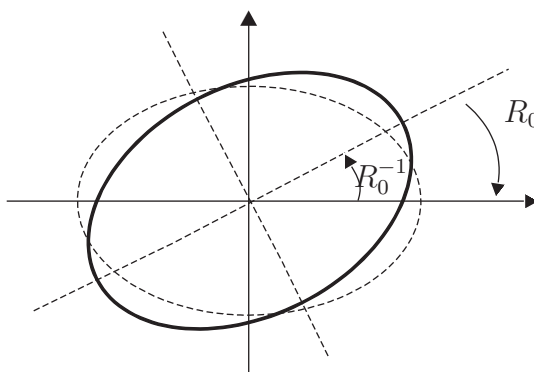


Figura 7.10: Cómo dibujar una cónica con ecuación no canónica.

Como primer ejemplo tomemos la elipse de ecuación

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y + 8 = 0.$$

El polinomio característico de la matriz de la parte cuadrática es

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16,$$

cuyas raíces son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 8$ . Los vectores característicos correspondientes están en las direcciones determinadas por las rectas

$$(5 - 2)u_1 - 3u_2 = 0 \text{ y } (5 - 8)u_1 - 3u_2 = 0,$$

cuyas pendientes respectivas son  $m_1 = u_2/u_1 = 1$  y  $m_2 = u_2/u_1 = -1$ .

Si la ecuación original no tuviera términos lineales y la constante fuera  $-8$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0,$$

para dibujar a la elipse original bastaría dibujar, respecto a las rectas de pendientes  $m_1$  como eje  $X'$  y  $m_2$  como eje  $Y'$ , la elipse de ecuación canónica

$$2x'^2 + 8y'^2 = 8, \text{ es decir, } \frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1,$$

puesto que los valores propios son los elementos de la diagonal de la matriz de la parte cuadrática de la cónica en posición canónica.

Pero nuestra ecuación sí tiene términos lineales, y deberemos efectuar la sustitución del vector columna  $(x, y)^t$  por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

para lograr “enderezadar” la cónica de la cual partimos.

La forma matricial de la ecuación original  $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y + 8 = 0$  es

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 8 = 0,$$

y después de obtener los valores propios ya podemos escribir la parte cuadrática de la curva rotada:  $2x'^2 + 8y'^2$ , pero para transformar la parte lineal debemos realizar la sustitución indicada por (7.6).

Entonces, la matriz correspondiente a la rotación  $Ro^{-1}$  tiene como columnas a los vectores  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , debido al valor propio 2, y  $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  debido al valor propio 8. Escribimos

$$2x'^2 + 8y'^2 + \begin{pmatrix} -16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 8 = 0.$$

Si el lector realiza el producto de matrices indicado obtendrá la ecuación

$$2x'^2 + 8y'^2 + 16\sqrt{2}y' + 8 = 0,$$

que corresponde a una cónica con ejes paralelos a las direcciones  $X'$  y  $Y'$  de los vectores propios porque tiene un término lineal en  $y'$ .

Para identificar la traslación respecto a los ejes  $X'$  y  $Y'$ , completamos el cuadrado:

$$2x'^2 + 8(y'^2 + 2\sqrt{2}y' + 2) + 8 - 16 = 2x'^2 + 8(y' + \sqrt{2})^2 - 8 = 0.$$

Entonces, la traslación respecto a los ejes  $X'$   $Y'$  está dada por el vector  $(0, -\sqrt{2})$ , y para dibujar la cónica original hacemos lo siguiente:

i) localizamos el vector de traslación y trazamos por él rectas paralelas a los ejes  $X'$  y  $Y'$ .

ii) dibujamos la cónica con ejes paralelos a  $X'$  y  $Y'$  con centro (o vértice si se trata de una parábola) correspondiente al vector de traslación.

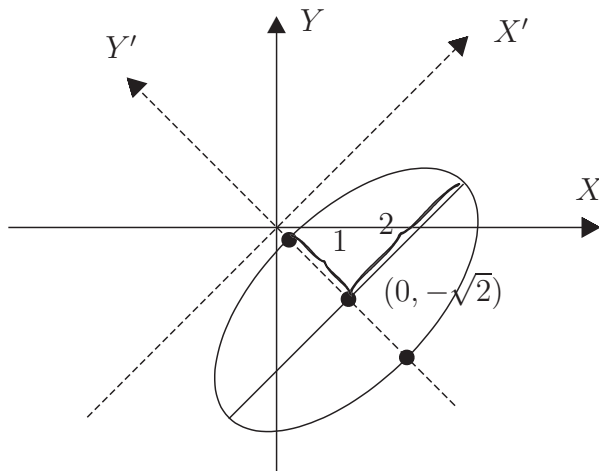


Figura 7.11: Cónica correspondiente a la ecuación

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y + 8 = 0.$$

Como segundo ejemplo, tomemos la ecuación en tres variables

$$x^2 + 8y^2 + z^2 - 2xz - \sqrt{2}x - \sqrt{2}z = 0.$$

La matriz de la parte cuadrática es



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2(8-\lambda) - (8-\lambda) \\ &= (8-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = (8-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda]. \end{aligned}$$

Es claro que las raíces de este polinomio son 0, 2 y 8, y los sistemas que permiten obtener los vectores característicos correspondientes se obtienen al sustituir  $\lambda$  por uno de estos valores en las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + 0y + (-1)z &= 0 \\ 0x + (8-\lambda)y + 0z &= 0. \\ (-1)x + 0y + (1-\lambda)z &= 0 \end{aligned}$$

Si la ecuación no tuviera términos lineales, ya podríamos escribir la ecuación canónica porque la nueva parte cuadrática es

$$0x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2$$

donde el eje  $X'$  tiene la dirección del vector propio correspondiente al valor propio 0, el eje  $Y'$  tiene la dirección del vector propio correspondiente al valor propio 2, y el eje  $Z'$  tiene la dirección del vector propio asociado al valor propio 8. Entonces, después de obtener las rectas invariantes podríamos dibujar la cuádrica  $2y'^2 + 8z'^2 = 0$ , que es singular: la recta  $(x, 0, 0)$ .

Pero como sí hay términos lineales, debemos formar la matriz de rotación para transformar la parte lineal.

Para  $\lambda = 0$  el sistema es

$$x - z = 0; \quad 8y = 0; \quad -x + z = 0,$$

que implica  $x = z$  y  $y = 0$ . Entonces, un vector característico unitario es  $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ .

Para  $\lambda = 2$  el sistema es

$$-x - z = 0; \quad 6y = 0; \quad -x - z = 0,$$

que implica  $x = -z$  y  $y = 0$ , y un vector característico unitario es  $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ .

Para  $\lambda = 8$  el sistema es

$$-7x - z = 0; \quad 0y = 0; \quad -x - 7z = 0,$$

que implica  $x = z = 0$  mientras que  $y$  es libre de tomar cualquier valor. Entonces, un vector característico unitario es  $(0, 1, 0)$ .

De hecho, una vez obtenidos dos vectores característicos unitarios, el tercero puede calcularse simplemente como el producto cruz de ellos pues el teorema nos asegura que estamos haciendo lo correcto y así la matriz con esas tres columnas, en ese orden, ya es de rotación.

La forma matricial de la parte lineal es

$$(-\sqrt{2} \ 0 \ -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y debemos sustituir el vector columna de la derecha por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

La nueva parte lineal es entonces

$$(-\sqrt{2} \ 0 \ -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -2x'.$$

Así, la forma canónica de la cuádrica es

$$2y'^2 + 8z'^2 - 2x' = 0,$$

lo cual ya nos permite identificarla como un paraboloide elíptico.

Ahora bien, para dibujar el paraboloide, primero trazamos los ejes  $X'$ ,  $Y'$  y  $Z'$  en las direcciones de los vectores propios y con respecto a esos ejes dibujamos el paraboloide elíptico (véase la Figura 7.12).

Desde luego, si el orden de los valores propios hubiera sido otro, por ejemplo 8 primero, luego 0 y por último 2, la ecuación cambiaría:

$$8x'^2 + 2z'^2 - 2y' = 0,$$

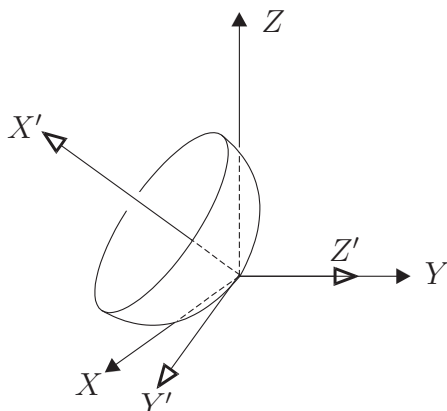


Figura 7.12: Paraboloide elíptico dado por  $x^2 + 8y^2 + z^2 - 2xz - \sqrt{2}x - \sqrt{2}z = 0$ .

pero hubiéramos debido dibujar este paraboloide respecto a los ejes  $X'$  con dirección  $(0, 1, 0)$ ,  $Y'$  con dirección  $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ , y  $Z'$  con dirección  $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ , y el paraboloide sería exactamente el mismo.

Ahora, vayamos al segundo punto.

Comentamos que al proyectar un aro de alambre en un plano convenientemente inclinado se obtiene una cónica (ésta es una forma de interpretar la Figura 5.23), pero como la proyección de un plano en otro desde un punto exterior a ambos es una transformación lineal entre los planos, puesto que la imagen de una recta  $\mathcal{L}$  en el plano  $\pi$  es una recta  $\mathcal{L}'$  en el plano  $\pi'$  podemos reinterpretar el hecho consignado en la figura mencionada así:

*Una cónica es la imagen de la circunferencia unitaria bajo una transformación lineal.*

Para simplificar el resto de la explicación, tomemos una transformación lineal no singular del plano cartesiano en sí mismo,  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y apliquémosla a la circunferencia unitaria. Si los transformados de los vectores de la base canónica son

$$T(1, 0) = (r, s) \text{ y } T(0, 1) = (t, u),$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y, por tanto, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Si las componentes de la matriz inversa son  $\rho, \sigma, \tau, \kappa$  (la expresión exacta no es importante para la discusión), entonces al sustituir en la ecuación matricial

de la circunferencia las expresiones de  $(x, y)$  como vector renglón y como vector columna, obtenemos, según deberá comprobar el lector,

$$1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \tau & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \tau \\ \sigma & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

La multiplicación de una matriz por su transpuesta da como resultado una matriz simétrica, que será la matriz de la parte cuadrática de la cónica:

$$\begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \tau & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \tau \\ \sigma & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2 + \sigma^2 & \rho\tau + \sigma\kappa \\ \rho\tau + \sigma\kappa & \tau^2 + \kappa^2 \end{pmatrix}.$$

Si la cónica obtenida es una elipse, los diámetros de la circunferencia van en los diámetros de la elipse y, en consecuencia, un diámetro de la circunferencia es el que más se alarga y otro, perpendicular, es el que menos se alarga bajo  $T$  (véase la Figura 7.13).

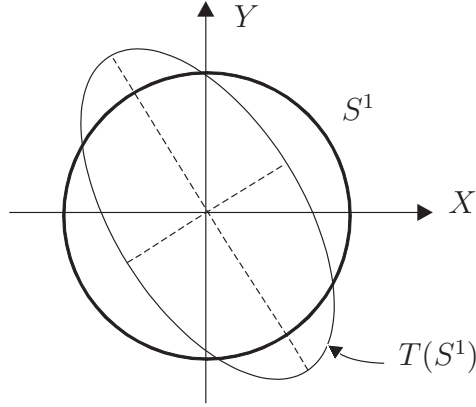


Figura 7.13: Una transformación lineal no singular lleva una circunferencia en una cónica.

Ésa es la información que proporciona la transformación inducida por la matriz de la parte cuadrática, pues si la ecuación hubiera resultado canónica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

es decir, si

$$\rho^2 + \sigma^2 = 1/a^2, \quad \rho\tau + \sigma\kappa = 0, \quad \tau^2 + \kappa^2 = 1/b^2,$$

entonces, para “regresar” la elipse a la circunferencia podríamos plantear la existencia de una transformación  $R$  cuya inversa (que en este caso claramente es  $T^{-1}$ ) tenga una matriz  $M$  que logre lo siguiente

$$M^t \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un tratamiento totalmente análogo al seguido para eliminar los términos mixtos nos diría que los vectores columna de  $M$  son vectores propios de la transformación inducida por la matriz de la parte cuadrática, que en este caso es diagonal y es el cuadrado de la matriz diagonal cuya diagonal tiene como entradas  $1/a$  y  $1/b$ . Los valores propios de esta última matriz son justamente  $1/a$  y  $1/b$  y sus vectores propios son los de los ejes.

## EJERCICIOS

1. Dibuje las cónicas en posición no canónica cuyas ecuaciones damos a continuación.
  - (a)  $3x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy - 8x - 8\sqrt{3}y = 0$ ;
  - (b)  $xy - x + y - 3 = 0$ ;
  - (c)  $13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0$ .
2. Dibuje las cuádricas cuyas ecuaciones damos a continuación.
  - (a)  $3x^2 - y^2 - 3z^2 - 4xz + 2 = 0$ ;
  - (b)  $2xy + 2xz + 2y - 5 = 0$ ;
  - (c)  $xz - x + z - 3 = 0$ ;
  - (d)  $5x^2 + z^2 + 3xz - 8y = 0$ .
3. Una recta está determinada por dos puntos, una circunferencia lo está por tres puntos; ¿cuántos puntos determinan una cónica en posición no canónica?

## 7.6 Números Complejos y Transformaciones Conformes(\*)

Sabemos que una ecuación tan sencilla como  $x^2 + 1 = 0$  no tiene solución en los números reales. La creación de un sistema numérico donde ésa y cualquier otra ecuación polinomial en una variable con coeficientes reales,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0,$$

tengan siempre una raíz (y, por el Teorema del Residuo, todas) se debe a Karl Frederick Gauss.

Gauss sencillamente postuló la existencia de un número  $i$  (por “imaginario”) que tuviera la propiedad de que su cuadrado fuera igual a  $-1$ ,  $i^2 = -1$ , y planteó la forma de sumar y multiplicar expresiones de la forma  $a + bi$ , donde la suma planteada es meramente formal y  $a, b \in \mathbb{R}$ .

La manera de sumar y multiplicar estos números, llamados *números complejos*, es la siguiente:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i,\end{aligned}$$

donde los signos de suma y resta dentro de los paréntesis de la derecha denotan operaciones entre números reales, mientras que la suma fuera de los paréntesis es la suma formal entre la *parte real* y la *parte imaginaria* de un número complejo.

Es muy sencillo comprobar que el sistema de los números complejos forma un grupo conmutativo bajo la suma, que al excluir el elemento neutro para la suma,  $0 + 0i$ , los demás números complejos forman un grupo bajo la multiplicación, y que ambas operaciones son conmutativas. Como además es válida la distributividad, decimos que los números complejos forman un *campo*.

Nótese que el sistema de los números reales está contenido en los números complejos; corresponde a los números complejos con  $b = 0$ . En cambio, para los números puramente imaginarios, caracterizados por  $a = 0$ , ocurre que si bien al sumar dos de ellos el resultado también es un número puramente imaginario, el resultado de multiplicar dos de ellos es un número real.

Los números complejos constituyen el sistema numérico más rico de todos los que el lector conozca hasta ahora, y parte de su riqueza se debe a la

geometría que conllevan. Intentaremos dar una breve justificación de esta afirmación.

Para empezar, convengamos en que parece natural representar cada número complejo  $z = a + bi$  por un punto de un plano coordenado, con un eje real y otro puramente imaginario (véase la Figura 7.14). Entonces, también es natural que cada número complejo  $z$  tenga asociado un *módulo*,  $||z||$ , y un *argumento*,  $\arg z$ , que corresponderían exactamente a las coordenadas polares del punto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\rho = ||z|| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arg z = \arctan(y/x).$$

Cualquier número complejo puede escribirse en la forma siguiente, llamada *forma polar* :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (7.7)$$

y como son válidas las propiedades asociativa y conmutativa del producto, si recordamos las fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos, al multiplicar dos de estas expresiones obtenemos la forma siguiente para el producto  $z_1 z_2$  :

$$(\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)) (\rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

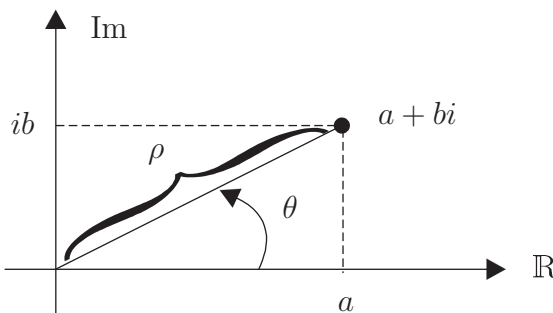


Figura 7.14: Forma polar de un número complejo.

Por tanto, el resultado de multiplicar dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos. Si uno de los números complejos está fijo y otro es variable, podemos interpretar esto último así:

*Un número complejo no cero induce, por multiplicación, una transformación entre los puntos del plano asociados a los números complejos; esa transformación es equivalente a la composición de una homotecia con una rotación.*

Sabemos que tanto las homotecias como las rotaciones son transformaciones lineales, y de hecho conocemos sus matrices:

$$M_{H_k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}; \quad M_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

También sabemos que la matriz correspondiente a la composición de dos transformaciones lineales, es el producto de las matrices asociadas a las transformaciones; en consecuencia, parece razonable asociar a un número complejo la matriz obtenida al multiplicar las dos matrices anteriores:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \phi & -k \operatorname{sen} \phi \\ k \operatorname{sen} \phi & k \cos \phi \end{pmatrix},$$

y como tanto las homotecias como las rotaciones preservan ángulos, se dice que son *transformaciones conformes*. Con esta terminología, el resultado en cursiva puede reescribirse así:

*Un número complejo no cero induce, por multiplicación, una transformación conforme de los puntos del plano asociados a números complejos.*

Nótese que la forma de la última matriz es, precisamente,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

El subgrupo de las matrices con estas características, las entradas de la diagonal principal iguales y negativa una de otra las entradas de la antidiagonal, dotado de las operaciones de suma y multiplicación de matrices, es *isomorfo* al *campo* de los números complejos, pues el resultado de sumar y multiplicar matrices de este tipo es otra matriz del mismo tipo, y además la correspondencia

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

es biunívoca. Los conceptos de campo e isomorfismo pueden consultarse en [Bi].



De la ecuación (7.7) es inmediato ubicar el complejo correspondiente a  $1/z$  si se conoce la forma polar de  $z$ . Si el lector intenta encontrar el lugar geométrico de los inversos multiplicativos de los puntos de alguna circunferencia, encontrará que es otra circunferencia. Esta inversión algebraica transforma los puntos correspondientes a números complejos como lo haría la composición de una reflexión respecto al eje real con una inversión geométrica respecto a la circunferencia  $S^1$ , llamada *circunferencia unitaria*, con centro en el origen y radio 1.

Por todo lo analizado hasta ahora, es razonable esperar que una transformación del tipo

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \text{con} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

llamada *transformación de Möbius*, transforme circunferencias en circunferencias y respete los ángulos con que se cortan las curvas. Aquí el término “circunferencia” abarca a las de radio infinito, las rectas.

Como en todo el libro hemos insistido en la importancia de los elementos invariantes bajo una transformación, sugerimos al lector investigar cuáles son los puntos fijos de algunos ejemplos de este tipo de transformaciones; esos datos y el conocimiento de que las circunferencias se transforman en circunferencias deben permitirle hacerse una idea de las imágenes de algunas regiones. La Figura 7.15 muestra cómo se transforma la familia de circunferencias con centro en el origen y las perpendiculares al eje real bajo la transformación

$$T(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}.$$

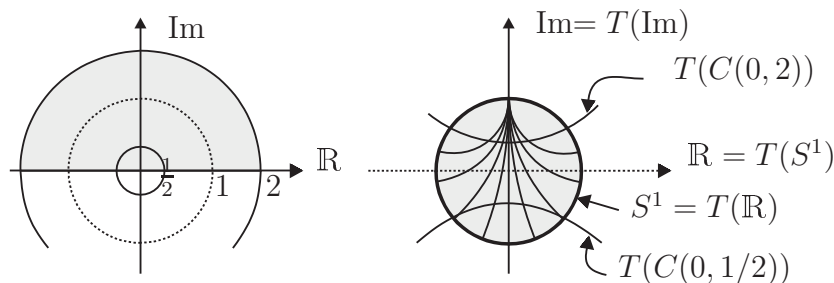


Figura 7.15: Imagen de las circunferencias  $\|z\| = cte$  bajo  $T(z)$ .

Es fácil comprobar que la recta real se transforma en la circunferencia de radio 1 con centro en  $(0, 0)$  (porque 1 y  $-1$  son puntos fijos de  $T(z)$  y  $T(0) = -i$ ), y también que el eje imaginario va en el eje imaginario (sustituya  $z = \alpha i$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Como, además, los ángulos de intersección de curvas se conservan bajo una transformación de Möbius, la Figura 7.15 está justificada.

Invitamos al lector a consultar el tema de Transformaciones de Möbius en [Ev], [H-C], [Ma] o [R-Se] de la bibliografía; le será útil tanto en Variable Compleja como en Geometría Hiperbólica.

# Epílogo

El lector que realmente haya trabajado los temas propuestos, incluidos los ejercicios, estará de acuerdo en que ya conoce las curvas y superficies correspondientes a lugares geométricos de ecuaciones de primer y segundo grados en dos y en tres variables, pudiendo distinguirlas unas de otras y dibujarlas en un sistema coordenado dado de antemano.

También conoció los conceptos de dimensión de un espacio vectorial y de grupo de transformaciones. Estos dos conceptos le permitirán más adelante entender el de dimensión de objetos geométricos y el de Geometría no euclidiana, respectivamente.

Justamente nuestra intención al escribir esta última sección es mostrar las posibles líneas de estudio a seguir en Geometría.

Con el manejo adecuado de los puntos al infinito logrado en el Renacimiento y después de una evolución a la que contribuye el Álgebra, se llega a las Geometrías Afín y Proyectiva para, más tarde, derivar en la Geometría Algebraica, donde las coordenadas pueden ser números complejos o elementos de otro tipo de campos.

Las Geometrías no euclidianas tuvieron un origen lógico: el intento de demostrar la redundancia del postulado de las paralelas, pero una vez adoptadas por los matemáticos han influido de manera esencial en el desarrollo de la ciencia y en el descrédito de las actitudes dogmáticas.

Directamente ligada al Análisis está la Geometría Diferencial, donde el concepto esencial es el de curvatura, a nivel local, y que requiere de la Topología en sus aspectos globales.

La Topología es el estudio de invariantes bajo transformaciones continuas y bicontinuas, éstas últimas llamadas homeomorfismos. La mayoría de las transformaciones estudiadas en Geometría son continuas, por eso la Topología es indispensable en Geometría.

Finalmente, los Sistemas Dinámicos, la Convexidad y la Geometría Com-

putacional cuentan entre las ramas más jóvenes de la Geometría. Los primeros se ocupan de proporcionar información cualitativa de la solución de ecuaciones diferenciales, de la segunda ya mostramos el concepto esencial y algunas de sus aplicaciones, y la tercera es necesaria para resolver problemas relacionados con autómatas.

Así que el lector deberá definir, de acuerdo a sus habilidades y gustos, las ramas a las que dedicará sus estudios futuros. Esperamos que encuentre apoyo en la bibliografía.

# Bibliografía

[\*] **Básica**

- [A] Alatorre & Mancera & Orozco, *Introducción a los métodos estadísticos 2*, UPN, 1990.
- [Ba] Barsov, A. *Qué es programación lineal*, MIR, Lecciones Populares de Matemáticas, 1959.
- [Bi] Birkhoff & McLane, *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, 1963.
- [Bl] Boltianski, V.G. *La envolvente*, MIR, Lecciones Populares de Matemáticas, 1977.
- [Bn] Bonola, R. *Non-Euclidean Geometry*, Dover, 1955.
- [Br] Brickman, L. *Mathematical Introduction to Linear Programming and Game Theory*. UTM, Springer-Verlag. 1989.
- [Ca] Cárdenas, S. *Dos o tres trazos*, Temas de Matemáticas para Bachillerato, IM, UNAM, 2003.
- [Ce] Cedeberg, J. *A Course in Modern Geometry*, Springer-Verlag, 1989.
- [Co] Courant, R. *Differential and Integral Calculus*. Interscience, 1937.
- [Cx] Coxeter, H.S.M., *Fundamentos de geometría*, Limusa, 1971.
- [Do 1] Do Carmo, M. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. (Trad. Oscar Palmas) Vínculos matemáticos Nos. 192-196., Dpto. de Matemáticas, F.C. U.N.A.M.

- [Du] Dubrovski, Smorodinski, Surkov. *El mundo relativista*, MIR, Física al alcance de todos, 1987
- [Ei] Eisenhart, L. *Coordinate Geometry*, Dover, 1960.
- [Ev] Eves, H. *Estudio de las geometrías*, UTEHA, 1969.
- [Ge] Gel'fand, I.M.. *Lectures on Linear Algebra*. Interscience, 1961.
- [Gr] Graustein, W. *Introduction to Higher Geometry*, The Macmillan Company, 1949.
- [Ha] Haaser, La Salle, Sullivan. *Análisis matemático 2*. Trillas, 1970.
- [H-C] Hilbert & Cohn Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Co., 1983.
- [Ho] Hoel, P. *Matemáticas finitas y cálculo con aplicaciones a los negocios*. LIMUSA. 1973.
- [I] Ize, J. *Cálculo de Variaciones*, IIMAS-FENOMECC, UNAM, 2003.
- [La] ascurain, A. *Introducción a la geometría hiperbólica*. Las Prensas de Ciencias, FC UNAM, 2005.
- [Li] Liustérnik, L. *Líneas más cortas. Problemas de variaciones*, MIR, Lecciones populares de matemáticas, 1979.
- [Lu] Luenberger, D. *Programación lineal y no lineal*. Addison-Wesley. 1984.
- [Ma] Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas*. MIR, 1978.
- [Mn] Montejano, L. *La cara oculta de las esferas*. La Ciencia desde México No. 75, Fondo de Cultura Económico, 1989.
- [Ms] Moshinky, M. *Espacio, tiempo y paridad*. Cuaderno 9 del Seminario de problemas científicos y filosóficos, UNAM, 1987.
- [Pi] Piskunov, N.S. *Differential and Integral Calculus*. MIR, 1969.
- [Po] Poincaré, H. *Filosofía de la ciencia*, UNAM, Nuestros Clásicos 74, 1984.

- [R1] Ramírez-Galarza, A. *¿Es o se parece?*, Revista Ciencias, No. 31, pp.9-12, 1993.
- [R2] Ramírez-Galarza, A. *Para aprender a dibujar*, Miscelánea Matemática **41** pp. 57-71, 2005.
- [R-Ro] Ramírez-Galarza, A., Romero, J.P. *Un paseo por el espacio tridimensional*, video científico interactivo accesible desde la página **www.matematicas.unam.mx**, y en modalidad de realidad virtual en la Sala Ixtli de la DGSCA de la UNAM.
- [R-Se] Ramírez-Galarza, A., Seade, J. *Introducción a la geometría avanzada*, Las Prensas de Ciencias, FC, UNAM, 2002.
- [R-Si] Ramírez-Galarza, A., Sienra, G. *Invitación a las geometrías no-euclidianas*, Las Prensas de Ciencias, FC, UNAM, 2002.
- [Sh] Shively, L. *Geometría moderna*. CECSA, 1980.
- [\*] **Avanzada**
- [Ch] Chevalley, C. *Theory of Lie Groups*. Princeton Univ. Press. 1946.
- [DoC 2] Do Carmo, M. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser. 1992.
- [H] Hadwiger, H. *Lo antiguo y lo nuevo acerca de conjuntos convexos*, (Trad. Luis Montejano) Aportaciones Matemáticas No. 10, SMM, 1998.
- [N-S-S] Nickerson, Spencer, Steenrod. *Advanced Calculus*, Princeton University, 1960.
- [Re] Rees, E. *Notes on Geometry*. Universitexts, Springer Verlag. 1983
- [W] Warner, F. *Foundations to Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott, Foresmann, Glenview. 1971.

# Índice Analítico

- ángulo
  - complementario, 37
  - entre dos vectores, 130
  - exterior, 174
  - negativo, 41
  - positivo, 41
- óvalo de Cassini, 68
- abscisa, 3
- acotada
  - figura, 254
- altura, 174
- amplitud, 56
- aplicación antípoda, 293
- asíntota, 51
- asíntotas
  - de una hipérbola, 181
- asíntotas de la hipérbola, 200
- baricentro, 174
- base, 113
  - canónica, 117
  - ortonormal, 131
  - ortonormal derecha, 135
- bisectriz
  - exterior, 174
  - interior, 174
- bola, 272
- cíclico
  - cuadrilátero, 215
- círculo
  - máximo, 273
  - trigonométrico, 47
- campo, 326
- caracol de Pascal, 67
- cardiode, 67
- catenaria, 205
- cateto, 35
  - adyacente, 36
  - opuesto, 36
- centro
  - de un elipsoide, 252
  - de una elipse, 176
  - de una hipérbola, 180
- cicloide, 69
- cilindro, 227
- cilindro elíptico, 246
- cilindro hiperbólico, 247
- cilindro parabólico, 247
- circuncentro, 174
- circunferencia, 184
- circunferencia
  - de Apolonio, 217
  - imaginaria, 195
  - unitaria, 329
- cofactor, 120
- combinación lineal, 101
- complemento relativo, 10



- conjunto
  - complemento de, 10
  - convexo, 167
  - generador, 107
- conjuntos
  - ajenos, 10
  - diferencia de, 10
  - intersección de dos, 10
  - relación entre dos, 26
  - unión de dos, 10
- cono, 260
  - directriz de un, 260
  - elíptico, 244
  - vértice de un, 260
- coordenada
  - primera, 3
  - segunda, 3
- coordenadas
  - cartesianas, 3
  - cilíndricas, 76
  - esféricas, 73
  - polares, 62
- cosecante
  - de un ángulo, 36
- coseno
  - de un ángulo, 36
- cotangente
  - de un ángulo, 36
- cuadrante
  - cuarto, 4
  - primero, 4
  - segundo, 4
  - tercero, 4
- curvas coordenadas, 62
- dependencia lineal, 109
- desigualdad
  - isoperimétrica, 218
- desigualdad de Cauchy-Schwarz, 129
- desigualdad del triángulo, 24
- desplazamiento de fase, 56
- determinante, 119
  - de un sistema, 158, 163
- dimensión, 115
- dirección, 138
- directriz
  - de un cilindro, 227
  - de una cónica, 204
  - de una parábola, 177
- disco, 215
- discriminante, 193
  - criterio del, 194
- distancia
  - de un punto a un plano, 18
  - de un punto a una recta, 18
  - entre dos puntos, 18
  - entre rectas, 149
  - orientada, 144
- distancia orientada, 140
- ecuación
  - de una recta en  $\mathbb{R}^3$ , 147
  - general de un plano, 151
  - general de una recta, 139
- ecuación canónica
  - de la elipse, 177, 183
  - de la hipérbola, 187
  - de la parábola, 185
- ecuación general
  - de segundo grado, 193
  - de un plano, 146
- eigenvalor, 295
- eigenvector, 295
- eje

- conjugado, 64
- de la parábola, 178
- de las abscisas, 2
- de las ordenadas, 2
- de rotación, 304
- mayor, 176
- menor, 176
- polar, 61
- X, 2, 5
- Y, 2, 5
- Z, 5
- eje conjugado
  - de una elipse, 176
  - de una hipérbola, 180
- eje focal
  - de una elipse, 176
  - de una hipérbola, 179
- eje radical, 217
- ejes
  - de un elipsoide, 252
- elipse, 176
- elipsoide, 244
- epicicloide, 70
- esfera, 235, 271
- esferas de Dandelin, 209
- espacio
  - cartesiano, 95
- espacio vectorial, 83
- espiral
  - de Arquímedes, 67
  - hiperbólica, 67
  - logarítmica, 67
- excentricidad
  - criterio de la, 205
  - de una cónica, 204
- excentro, 174
- familia
  - de hiperboloides, 256
- foco
  - de una parábola, 178
- focos
  - de la elipse, 176
  - de una hipérbola, 179
- foliación, 256
  - hojas de una, 256
- forma polar de una cónica, 219
- frecuencia, 54
- función, 26
  - biyectiva, 30
  - cosecante, 53
  - coseno, 48
  - cotangente, 53
  - dominio de una, 27
  - escalonada, 33
  - exponencial, 32
  - identidad, 59
  - imagen de una, 27
  - impar, 31
  - inversa del seno, 60
  - inyectiva, 30
  - monomial, 31
  - par, 31
  - parte entera, 33
  - periódica, 49
  - secante, 52
  - seno, 48
  - suprayectiva, 30
  - tangente, 50
  - valor absoluto, 33
- función inversa, 59
- función periódica, 31
- generatriz, 227

- de un cilindro, 227
- geodésica, 273
- grado, 40
- grados de libertad, 144
- grupo, 86
  - conmutativo, 86
  - de Lie, 308
  - lineal, 308
  - ortogonal, 308
- hélice, 68
- haz
  - de circunferencias, 217
  - de paralelas, 143
  - de planos, 161
  - de rectas, 143
- helicoides, 260
- Hexágono Místico, 213
- hipérbola, 179
  - equilátera, 187
- hiperboloide
  - de dos mantos, 238
  - de un manto, 239
  - elíptico, 244
- hiperplanos, 164
- hipocicloide, 71
- hipotenusa, 35
- homotecia, 278
- igualdad
  - de dos conjuntos, 10
- incentro, 174
- inclusión canónica, 126
- independencia lineal, 110
- isomorfismo, 307
- lado recto
  - de la elipse, 177
  - de la parábola, 178
  - de una hipérbola, 181
- lemniscata, 67
- Ley
  - de atracción de Newton, 221
  - de Kepler, 222, 223
  - de los senos, 43
- Ley de los cosenos, 43
- método de Cramer, 159
- matrices
  - multiplicación de, 285
  - suma de, 284
- matriz, 121, 284
  - de cambio de base, 298
  - de la parte cuadrática, 312
  - de un sistema, 164
  - identidad, 285
  - inversa, 287
  - transpuesta, 288
- mediana, 174
- mediatriz, 174
- meridiano, 231
- mil, 40
- número complejo, 326
  - argumento, 327
  - forma polar, 327
  - módulo, 326
  - parte imaginaria, 326
  - parte real, 326
- octante, 6
  - primero, 6
- ordenada, 3
- ordenada al origen, 141
- ortocentro, 174
- parábola, 177

- parámetro, 68
- paraboloide elíptico, 245
- paraboloide hiperbólico, 246
- paralelo, 231
- pendiente de una recta, 141
- periodo
  - de una función, 49
- plano
  - cartesiano, 1, 93
  - tangente, 269
  - XY, 5
- plano doble, 248
- planos
  - coordenados, 5
- planos paralelos, 248
- polinomio característico, 298
- polo, 61
- posición geneeral
  - de tres planos, 163
- Principio de reflexión, 210
- producto
  - cartesiano, 26
  - escalar (o punto), 127
  - vectorial (o cruz), 131
- propiedad focal, 210
- proyección
  - neel plano XY, 279
- proyección ortogonal, 206
- punto
  - umbílico, 273
- punto al infinito, 201, 210
- punto silla, 246
  
- radián, 40
- ramas de una hipérbola, 179, 181
- rango 1, 243
- rango 2, 243
- rango 3, 243
- rectas que se cruzan, 149
- red de Steiner, 217
- reflexión respecto a una recta, 282
- rosa de cuatro pétalos, 66
- rotación en torno al origen en  $\mathbb{R}^3$ , 292
- rotación respecto al origen
  - en  $\mathbb{R}^2$ , 280
  
- secante
  - de un ángulo, 36
- segmento, 149
- semieje
  - X negativo, 2
  - X positivo, 2, 5
  - Y positivo, 5
  - Z positivo, 5
- semiespacio, 154
- semiplano, 143
- seno
  - de un ángulo, 36
- serie de Fourier, 79
- silla de montar, 246
- simetría
  - axial, 19
  - central, 19
  - centro de, 19
  - eje de, 19
  - plano de, 19
  - respecto a  $(0, 0)$ , 196
  - respecto a un plano, 19
  - respecto a un punto, 19
  - respecto a una recta, 19
  - respecto al eje X, 22, 196
  - respecto al eje Y, 22, 196
  - respecto al eje Z, 22
  - respecto al origen en  $\mathbb{R}^2$ , 21

- respecto al origen en  $\mathbb{R}^3$ , 22
  - respecto al plano XY, 22
  - respecto al plano YZ, 22
  - respecto al plano ZX, 23
- simetría
  - en coordenadas polares, 65
- sistema
  - de ecuaciones, 156
  - derecho, 3, 5
  - izquierdo, 3
- subconjunto, 9
- subespacio
  - invariante, 296
- subespacio vectorial, 99
- suma
  - de fuerzas, 88
  - de funciones, 91
  - de pares ordenados, 93
- superficie
  - cuádrica, 225
  - de nivel, 256
  - de revolución, 231
  - doblemente reglada, 261
  - homogénea, 273
  - isotrópica, 273
  - reglada, 260
- superficies
  - coordenadas, 74
- tangente
  - de un ángulo, 36
- Teorema
  - de Pitágoras, 42
  - de Tales, 42
- toro, 241
- transformación
  - conforme, 328
  - de Möbius, 329
  - lineal, 278
  - ortogonal, 307
  - rígida, 277, 306
- traslación, 306
- traza
  - de una superficie, 226
- triángulo
  - desigualdad del, 45
  - resolución de un, 44
- triángulos
  - semejanza de, 45
- vértice
  - de la parábola, 178
- vértices
  - de una elipse, 176
  - de una hipérbola, 180
- valor característico, 295
- valor propio, 295
- vector
  - característico, 295
  - componente de un, 131
  - proyección de un, 131
- vector propio, 295
- vectores
  - paralelos, 103
  - perpendiculares, 130
  - unitarios, 128