(1.6 & 2.7 Mythen der Mathematik)

Tutorium 1 22.09., Montag, 14^{30} - 16^{00} ①

Präsenzübung 1.6.: Vorstellung, was Mathematik eigentlich ist...

Präsenzübung 2.7

2.7.1. Aufgabe:

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ der Menge der natürlichen Zahlen soll genau dann interessant heißen, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

- $2 \in A$
- $a \in A \Rightarrow a^2 \in A$
- $a \in A \Rightarrow a+4 \in A$

Finden und beweisen Sie nicht-triviale Sätze über interessante Mengen! Finden Sie Beispiele für interessante Mengen?

Def.: (Parität) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: n heißt gerade genau dann wenn $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. ungerade gdw. $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Erste Überlegung: Wie sehen (Elemente von) Teilmengen A aus? Bilde interessante Mengen aus Startmengen $\{2\}$, $\{2,5\}$, ...

z.B. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 14, 20, 18, 36, 22, 24, \dots\}$

1. Behauptung: Sei A eine beliebige, aber feste, interessante Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann enthält A alle geraden, natürlichen Zahlen.

Beweis: siehe S. ⑤

als Erstes zeigen lassen!

2. Behauptung: Die ~~natürlichen~~ geraden, natürlichen Zahlen ($2\mathbb{N}$) sind eine interessante Menge.

Beweis: Folgt direkt aus Beh. 1 [illegible], bzw. durch Nachprüfen der Eig. einer interessanten Menge.

3. Behauptung: Interessante Mengen sind unendlich groß.
folgt aus $2\mathbb{N} \subset A$ für bel. interessante Menge
~~[illegible]~~
(und ~~[illegible]~~ für $A = 2\mathbb{N}$: $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ Bij.)
(Eine Menge ist unendlich wenn es eine Bij. mit einer ihrer echten Teilmengen gibt, ~~[illegible]~~ also $|\mathbb{N}| = \infty$)

Weitere Behauptungen:

- Es gibt unendlich viele interessante Mengen
($\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1,3\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1,3,\dots,2k+1\}$ sind interessante Mengen)
- die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind interessant

Falsche Behauptung:

- Sei A eine interessante Menge. Jedes Element von A ist gerade. (falsch)

Gegenbeispiel: $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist interessant.

Schwierigere Behauptungen:

- A interessant, b ungerade. Wenn $b+2 \in A$, dann $A \supseteq \{x \in A \mid x \geq b\}$
- $x \in A$, x ungerade und $4 + x^2 - x$. Dann gilt: $\mathbb{N} \setminus A$ endlich.

2.7.2 Aufgabe

Formulieren Sie den Satz des Pythagoras!

Behauptung: (Satz des Pythagoras)

Sei D ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse c und Katheten a, b. Dann gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.

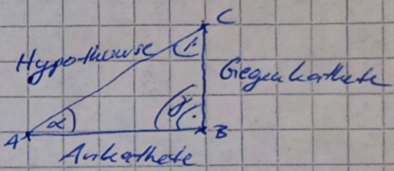
2.7.3. Aufgabe

Definieren Sie die Begriffe rechtwinkliges Dreieck, Kathete und Hypothenuse.

3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen

Def. (rechtwinkliges Dreieck) Ein Dreieck mit rechtem Winkel.

„Wenn eine gerade Linie auf eine gerade Linie gestellt einander gleiche Nebenwinkel stellt, dann heißen die NW rechte"



Def. (Kathete)

Die beiden Seiten eines recht-

~~Verbindungsstrecke zwisch~~ man braucht nur 2 Pkte für Gerade

winkligen Dreiecks nennt man Katheten.

Def. (Hypothenuse)

hier bräuchte man Metrik um Abstände zwischen Pkten zu def.

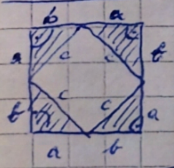
Die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks. (Sie liegt dem rechten Winkel gegenüber.)

2.7.4. Aufgabe

Beweisen Sie den Satz des Pythagoras.

Beweisidee: (ohne Def. von Flächeninhalt)

1.



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

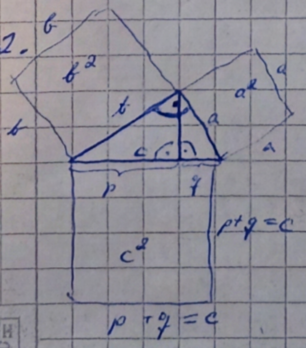
(Seiten des Quadrats)^2 = Fläche des Quadrats

(|||) abziehen ergibt Inneres (c^2): $c^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$4(\frac{1}{2}ab) = 2ab$

∎

2.



Das urspr. Dreieck ist ähnlich zu den kleineren, inneren ~~eingezeichneten~~ Dreiecken.

Jetzt: $\frac{a}{c} = \frac{q}{a} \Leftrightarrow a^2 = cq$

und $\frac{b}{c} = \frac{p}{b} \Leftrightarrow b^2 = cp \rightarrow a^2 + b^2 = cq + cp$

$= c(q+p)$

$= c \cdot c = c^2$ ∎

④

Zusätzlich zu Tutorium 1:

2023 wurde von 2 High School Schülerinnen Calcea Johnson und Ne'Kiya Johnson ein trigonometrischer Beweis für den Satz des Pythagoras gefunden (das galt zuvor als unmöglich ohne einen Zirkelschluss zu erhalten, d.h. verwendet nicht $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

Beweisidee:

wollen zeigen: $a^2 + b^2 = \frac{2ab}{\sin 2\alpha} = c^2$.

Spiegle das urspr. Dreieck.

Es gilt $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

Für das gespiegelte Dreieck gilt $\frac{\sin 2\alpha}{2a} = \frac{\sin\beta}{c}$

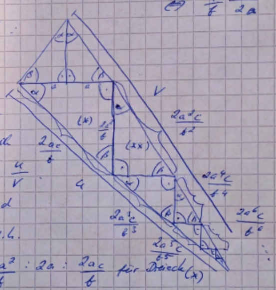
$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2\alpha}{2a} = \frac{\frac{b}{c}}{c} = \frac{b}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b}\frac{\sin 2\alpha}{2a} = c^2$$

Für $a^2 + b^2$:

Idee:

unendlich viele ähnliche Dreiecke



Für dieses Dreieck gilt: $\sin 2\alpha = \frac{u}{V}$.

Die Dreiecke sind alle ähnlich, d.h.

$a : b : c \Rightarrow \frac{2a^2}{b} : 2a : \frac{2ac}{b}$ für Dreieck (*)

$\Rightarrow \frac{2a^3}{b^2} : \frac{2a^2}{b} : \frac{2a^2c}{b^2}$ für Dreieck (**)

$$\Rightarrow u = \frac{2ac}{b} + \frac{2a^3c}{b^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2ac}{b} \cdot \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow u = \frac{2ac/b}{1 - a^2/b^2} \cdot \frac{b^2}{b^2} = \frac{2abc}{b^2 - a^2}$$

Und ähnlich:

$$V = \frac{c(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}$$

Insgesamt folgt: $\sin 2\alpha = \dfrac{\frac{2abc}{b^2 - a^2}}{\frac{c(a^2+b^2)}{b^2-a^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{2ab}{\sin 2\alpha}$ □

⑤

Beweis zur 1. Behauptung bei 27.1. Aufgabe:

Sei $x \in \mathbb{N}$ eine positive, gerade Zahl.

Dann gilt: $\exists k \in \mathbb{N}: 2k = x = 4q + r, 0 \le r < 4, r \in \mathbb{N}$

teile mit Rest durch 4.

$\Rightarrow$ r muss auch gerade sein.

$\Rightarrow r \neq 1, 3$, also $r = 0, 2$

Wenn $r = 2$: $x = 4q + 2 \in A$ wegen (i) & (iii).

Wenn $r = 0$: $x = 4q \in A$ wegen $2^2 \in A$ (i), (ii)) & (iii)