Tutorium 6 (Teilbarkeit II) Donnerstag, 25.09, 14^{30} - 16^{00} (1)

6.3.

6.3 Präsenzübung

6.3.1. Aufgabe

Beweisen Sie: – die Summe von zwei geraden Zahlen ist immer gerade (gerade + gerade = gerade)

– die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade (ungerade + ungerade = gerade)

– das Produkt von zwei ungeraden Zahlen ist immer ungerade (ungerade · ungerade = ungerade)

Lösung:

Beweis: – Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ gerade

$\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{Z}: a = 2r$ und $b = 2s$

Dann: $a + b = 2r + 2s = 2(r+s)$

$\Leftrightarrow 2 \mid a+b$, also $a+b$ ist gerade.

– Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade $\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{Z}: a = 2r+1$ und $b = 2s+1$

Dann: $a + b = (2r+1) + (2s+1) = 2r + 2s + 2 = 2(r+s)+1$

~~$\Leftrightarrow 2 \mid a+b$, also~~ $\Leftrightarrow$ $a+b$ hat bei Division durch 2 Rest 1

$\Leftrightarrow$ $a+b$ ist ungerade

– $ab = (2r+1)(2s+1) = 4rs + 2r + 2s + 1$
$= 2(2rs + r + s) + 1$

(d.h. ab hat bei Division durch 2 Rest 1)
d.h. ab ist ungerade

6.3.2. Aufgabe

Formulieren und beweisen Sie Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch:

– 2

– 8

– $2^n, n \in \mathbb{N}$

Lösung:

– Behauptung: $2 \mid x \Leftrightarrow 2 \mid$ die letzte $\overbrace{\text{Stelle}}^{\text{Ziffer}}$ von x in (endlicher) Dezimaldarstellung

Beweis: Dezimaldarstellung von x: $x = x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \dots$
mit $0 \leq x_i \leq 9$ für alle i
(und $x_i = 0$ für fast alle i)

②

„⇒": Es gelte $2 / x$. ~~Wegen 2/10 folgt~~

Wegen $2/10 \Rightarrow 2 / x_i \cdot 10^i$ für $i \geq 1$, also

$2 / (x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \dots)$

$\Rightarrow 2 / x - (x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 + \dots) = x_0$

d.h. die letzte Ziffer ist gerade.

„⇒": Es gelte die letzte Ziffer ist gerade.

$\Leftrightarrow 2 / x_0$, wegen $2 / x_i \cdot 10^i$ für alle i:

$\Rightarrow 2 / (x_0 + x_1 \cdot 10^1 + x_2 \cdot 10^2 + \dots) = x$.

- Behauptung: $8 / x \Leftrightarrow 8 /$ die aus den letzten drei ~~Stellen~~ Ziffern von x gebildete Zahl

Beweis: Wegen $2/10 \Rightarrow 2^3 / x_i \cdot 10^i$ für $i \geq 3$, ~~also~~

$\Leftrightarrow 8 / (x_3 \cdot 10^3 + x_4 \cdot 10^4 + \dots)$

Dann: $8 / x \Leftrightarrow 8 / \underbrace{x - (x_3 \cdot 10^3 + x_4 \cdot 10^4 + \dots)}$

$= x_0 + x_1 \cdot 10 + x_2 \cdot 10^2 =$ Zahl geg. durch die letzten drei Ziffern

- Analoge Regel für $2^n, n \in \mathbb{N}$:

$2^n / x \Leftrightarrow 2^n / x - x_n 10^n = \underbrace{x_0 + x_1 \cdot 10 + \dots + x_{n-1} 10^{n-1}}$

$\Leftrightarrow 2^n$ teilt die letzten n Ziffern von x

6.3.3. Aufgabe

Untersuchen Sie, für welche $i \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden Aussagen gelten:

1. $11 / 10^i + 1$
2. $11 / 10^i - 1$

Formulieren und beweisen Sie Ihre Vermutung!

Hinweis: $10^i + 1 = 11 + 10 \cdot (10^{(i-1)} - 1)$

Lösung: ~~Wir folgen dem Hinweis~~

(Hinweis: $11 + 10 \cdot (10^{(i-1)} - 1) = 11 + 10^i - 10 = 10^i + 1$ ✓ $= 10 + 1 + 10^i - 10 = 10^i + 1$)

1.: ~~Es folgt~~: $11 / 10^i + 1 \overset{\text{Hinweis}}{\Leftrightarrow} 11 / 10 \cdot (10^{(i-1)} - 1)$ (wegen $11/11$)

$\Leftrightarrow 11 / 10^{(i-1)} - 1$ $(11 \nmid 10)$

2. auf gleiche Weise mit modifiziertem Hinweis: $11 / 10^i - 1 \Leftrightarrow 11 / 10^{i-1} + 1$

~~Hinweis: $10^i + 1 = 10 + 1 + (10^{(i-1)} - 1) \cdot 10$~~

~~$10^i + 1 = (10^{i-1} \cdot 10) + 1$~~

~~$= (10^{i-1} \cdot 1) \cdot 10 + 1$~~

~~$=$~~

Hinweis:

$$10^i + 1 = (10^i - 10 + 10) + 1$$
$$= (10^i - 10) + 11$$
$$= (10^{(i-1)} - 1) \cdot 10 + 11$$

Behauptung: kann man sich mit Bsp. überlegen

1. $11 \mid 10^i + 1 \Leftrightarrow i$ ungerade

Beweis: $11 \mid 10^i + 1 \overset{\text{Hinweis}}{\Leftrightarrow} 11 \mid (10^{(i-1)} - 1) \cdot 10 + \cancel{11}$

$\Leftrightarrow 11 \mid (10^{(i-1)} - 1) \cdot 10$

$\Leftrightarrow 11 \mid (10^{\underbrace{(i-1)}_{=:j}} - 1)$

Jetzt haben wir etwas das aussicht wie aus 2.:

$11 \mid 10^i - 1 \overset{\text{Hinweis}}{\Leftrightarrow} 11 \mid 10^{(i-1)} + 1$

modifiziert

$10^i - 1 = 10^i + 10 - 10 - 1 = (10^{(i-1)} + 1) 10 - 11$

Also: $11 \mid 10^i + 1 \Leftrightarrow 11 \mid 10^{(i-1)} - 1 \Leftrightarrow 11 \mid \underbrace{10^{((i-1)-1)} + 1}_{= 10^{i-2} + 1} \Leftrightarrow 11 \mid 10^{i-3} - 1 \Leftrightarrow \ldots$

$\ldots \Leftrightarrow 11 \mid 10^{(i-2k)} + 1 \; (\Leftrightarrow 11 \mid 10^{(i-2k-1)} - 1)$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, d.h. es ist egal ob wir Vielf. von 2 von i abziehen.

– i ~~gerade~~ gerade $\Leftrightarrow i = 2k'$. Wir können k nun so wählen, dass $k = k'$.

Dann gilt: $11 \nmid 10^{(i-2k')} + 1 = 10^0 + 1 = 2$,

aber für i ungerade: $\exists k \in \mathbb{Z}: i = 2k' + 1$. Wähle $k = k'$.

Dann: $11 \mid 10^{(i-2k')} + 1 = 10^{(2k'+1-2k')} + 1 = 11$

d.h. $11 \mid 10^i + 1$ gdw. i ungerade

2. ist jetzt ein Spezialfall von 1.:

$11 \mid 10^i - 1 \Leftrightarrow 11 \mid 10^{(i-1)} + 1 = 10^j + 1$

Das gilt wenn $i-1$ ungerade ist, also wenn i gerade ist. $\square$

6.3.4. Aufgabe:

Für jede Zahl $z \in \mathbb{Z}$ definieren wir die alternierende Quersumme: Ist $z = \pm \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$ die Dezimaldarstellung von z ($n \in \mathbb{N}$, $\forall i: 0 \leq a_i \leq 9$), so ist $A(z) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$ die alternierende Quersumme von z.

– Berechnen Sie die alternierende Quersumme für einige ganze Zahlen und prüfen Sie die folgende Beh. anhand von einigen Beispielen: Eine ganze Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

– Beweisen Sie die obige Beh.

(Hinweis: 6.3.3, Teilbarkeitsregel 9, 3. Beweise, 5.3.4, 5.3.5)

Lösung:

– 11, 25, 66, 69, 121, 1331

$A(11) = 1 - 1 = 0$ ($11 \mid 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: 0 = 11 \cdot k$), $11 \mid 0$, $11 \mid 11$, passt

$A(25) = 5 - 2 = 3$, $11 \nmid 3$, $11 \nmid 25$, passt

$A(66) = 6 - 6 = 0$, passt

$A(69) = 9 - 6 = 3$, $11 \nmid 3$, $11 \nmid 69$, passt

$A(121) = 1 - 2 + 1 = 0$, $11 \mid 0$, $11 \mid 121 = 11^2 = (10+1)^2 = 100 + 20 + 1$

$A(1331) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$, passt ($11 \mid 0$, $11 \mid 1331 = 11^3$) passt

– Beweis:

$a_i \cdot 10^i = a_i \cdot (10^i + 1 - 1) = a_i (10^i \pm 1) \mp a_i$

$z = \pm \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i = \pm \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_i (10^i - 1) + a_i)}_{\text{alle } i \text{ gerade, „gerade" Summanden}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_i (10^i + 1) - a_i)}_{\text{„ungerade" Summanden}} \Big)$

(i ungerade $\Rightarrow a_i = 0$)

$a_i = 0$ wenn i ungerade

$= \pm \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i (10^i - 1)}_{i \text{ gerade}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i}_{i \text{ gerade}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i (10^i + 1)}_{i \text{ ungerade}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i}_{i \text{ ungerade}} \Big)$

$\overset{6.3.3.}{\Rightarrow}$ wird von 11 geteilt

i ungerade $\overset{6.3.3.}{\Rightarrow}$ wird von 11 geteilt

das ist genau die alternierende Quersumme

Es folgt, $11 \mid z \Leftrightarrow 11 \mid \pm \left(\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{j=0}^{n} a_j \right)$

$a_i = 0$, wenn i gerade; $a_j = 0$, wenn i ungerade

$$= \pm \left(\sum_{i,j=0}^{n} a_i - a_j \right)$$

$a_i = 0$, wenn i gerade
$a_j = 0$, wenn i ungerade

$$= \pm (-a_0 + a_1 - a_2 + \dots)$$

$$= \pm \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \right) \qquad \square$$

6.3.5. Aufgabe

Zeigen Sie: Jede natürliche Zahl liefert bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Quersumme. Verallgemeinern Sie auf andere Teilbarkeitsregeln!

Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Schreibe $n = \sum_{i \geq 0} x_i \cdot 10^i$.

Die Quersumme von n ist $s = \sum_{i \geq 0} x_i$.

Es folgt:

Rest von n bei Division durch 9 = Rest von Quersumme von n

$\overset{\text{vorherige Aufgabe}}{\Leftrightarrow}$ $9 \mid (n-s) = \sum_{i \geq 0} (x_i 10^i - x_i) = \sum_{i \geq 0} x_i (10^i - 1)$

$\Leftrightarrow 9 \mid (10^i - 1) = (9 \cdot 10^{i-1} + 10^{i-1}) - 1$

$= 9 \cdot 10^{i-1} + (9 \cdot 10^{i-2} + 10^{i-2}) + \dots +$

$= \dots + 9 \cdot 10 + \underbrace{10 - 1}_{=9}$

Also gilt:

$9 \mid (10^i - 1) \Rightarrow 9 \mid (n - s)$

(Das ist ein Beispiel für eine geometrische Summe:

$9 \cdot (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{i-1}) = 9 \cdot \frac{10^i - 1}{10 - 1} = 10^i - 1$)

Anmerkung:

- das Gleiche gilt für 3, da $3 \mid 9$
- man kann 10 auch durch andere Basis tauschen

z.B. $F \mid n \Leftrightarrow F \mid$ Quersumme von n in Hexadezimal

(Bsp. 900 Dez. = 384 Hex. $3 + 8 + 4 = 15 \mid 900$)

6.3.6. Aufgabe:

Versuchen Sie eine Regel zu finden, mit der man prüfen kann, ob eine 2-stellige (bzw. 3-stellige, ...) ganze Zahl durch 7 teilbar ist.

Lösung:

Regel für 7 (muss man kennen!)

Nehme die letzte Ziffer x_0 von einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ und betrachte $\frac{n - x_0}{10} - 2x_0 = x$.

Dann: $7 \mid n \Leftrightarrow 7 \mid x$.

Beispiel: $n = 49 \Rightarrow x_0 = 9$, $x = 4 - 2 \cdot 9 = 4 - 18 = -14$, $7 \mid 14$ passt

$n = 203 \Rightarrow x_0 = 3$, $x = 20 - 2 \cdot 3 = 14$, $7 \mid 14$, passt. $(7 \cdot 29 = 203)$

Beweis der Regel:

$10x = n - x_0 - 20x_0 = n - 21x_0 \Rightarrow 7 \mid n \Leftrightarrow 7 \mid 10x \Leftrightarrow 7 \mid x$

(Weil 7 eine Primzahl ist und nicht in der (eindeutigen!) Primfaktorzerlegung von 10 vorkommt, gilt: $7 \mid 10x \Leftrightarrow 7 \mid x$.)

Also: $7 \mid n \Leftrightarrow 7 \mid x$. $\square$