Aus dem Skript von Franz Merkl, Analysis 1 (2017) (1)

Konventionen zur Klammerersparnis bei Junktoren:

- „$\neg$" bindet stärker als „$\land$"
- „$\land$" bindet stärker als „$\lor$"
- „$\lor$" bindet stärker als „$\Rightarrow$" und „$\Leftrightarrow$"
- „$\Rightarrow$" und „$\Leftrightarrow$" binden gleich stark.
- „bindet stärker" ist transitiv.

Wichtigste aussagenlogische Herleitungsregeln:

1. Beweis einer Konjunktion: Um $A \land B$ zu zeigen, zeigt man einerseits A und andererseits B.
2. Vorwärtsschließen: Sind A und $A \Rightarrow B$ gegeben, so können wir daraus B schließen. Das Vorwärtsschließen beruht auf der Tautologie: $A \land (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. (Tautologie = aussagenlogisch allgemeingültige Formel)
3. Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$: Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass A gilt. Unter (möglicher) Verwendung von A wird dann B gezeigt. Damit ist $A \Rightarrow B$ gezeigt.
4. Beweis von $\neg A$: Um $\neg A$ zu zeigen, nehmen wir an, dass A gilt. Unter (möglicher) Verwendung von A wird dann ein Widerspruch gezeigt. (Also $(A \land P_1 \land \dots) \Rightarrow \perp$ für P_i Aussagen)
5. Indirekter Beweis: Um A zu zeigen, nehmen wir an, dass $\neg A$ gilt. Unter (möglicher) Verwendung von $\neg A$ wird ein Widerspruch gezeigt. Damit ist A gezeigt.
6. Beweis durch Kontraposition: Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir $\neg B$ an und leiten unter (möglicher) Verwendung von ~~A~~ $\neg B$, $\neg A$ her. Damit ist $A \Rightarrow B$ gezeigt.

7. Beweis durch Fallunterscheidung: Um eine Aussage B zu zeigen, zeigt man zunächst für geeignete Aussagen $A_1, A_2, \dots, A_n$ die Disjunktion $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$.

Dann: 1. Fall: wir nehmen A_1 an und zeigen B.
2. Fall: wir nehmen A_2 an und zeigen B.
⋮
n. ter Fall: wir nehmen A_n an und zeigen B.

Damit ist B gezeigt. $\underbrace{((A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \wedge (A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B)) \Rightarrow B)}_{\text{Tautologie}}$

8. Beweis einer Disjunktion $A \vee B$:

Strategie 1: Nehme $\neg A$ an. Zeige B. Damit ist $A \vee B$ gezeigt.

Strategie 2: Fallunterscheidung. Sei C ein geeignete Aussage.
1. Fall: Nehme C an, unter dieser Annahme zeige A.
2. Fall: Nehme $\neg C$ an, unter dieser Annahme zeige B.
Damit ist $A \vee B$ gezeigt.

Dieser aussagenlogischen Herleitungsregel liegt die Tautologie $(C \Rightarrow A) \wedge (\neg C \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$ zu Grunde.

9. Beweis einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$.

„$\Rightarrow$" Nehme A an und zeige unter dieser Annahme B.

„$\Leftarrow$" Nehme B an und zeige unter dieser Annahme A.

Prädikatenlogik

Aussagen mit freien Variablen haben a priori keinen Wahrheitswert, d.h. z.B. „$x > 2$" hat keinen Wahrheitswert, solange wir x nicht spezifizieren. Erst durch Belegung von x mit einem Wert oder durch Binden von x mit einem Quantor „$\forall, \exists$" wird die Formel wahr oder falsch.

Regeln für Quantoren:
- $\neg \forall x : A(x)$ ist gleichwertig zu $\exists x : \neg A(x)$
- $\neg \exists x : B(x)$ ist gleichwertig mit $\forall x : \neg B(x)$

Merkregel: Eine Aussage mit Quantorenfolge zu Beginn z.B. $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 :$ ~~A(...)~~ $(\dots)$ wird negiert indem man alle Exi[illegible] All- und alle All- durch Existenzquantoren

vertauscht und den aussagenlogischen „Kern" der Formel negiert, z.B. hier also $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 : \neg (\dots)$.

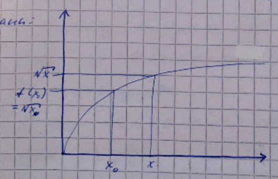
Typisch für die Analysis sind komplexe Kombinationen von alternierenden Quantoren z.B. (Epsilon-Delta-Stetigkeit): $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Hierbei muss man genau auf die Reihenfolge der Quantoren achten.

Zum Präsenzblatt II:

Wir betrachten das Beispiel aus Aufgabe 1.6.2. noch einmal: „$\forall x_0 > 0\ \exists c > 0\ \forall x > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < c\,|x - x_0|$"

Diese Formel behauptet, dass die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, \sqrt{x})$ und $(x_0, \sqrt{x_0})$ bei fest gehaltenem x nicht beliebig groß werden kann, also durch ein $c > 0$ beschränkt werden kann:



Diese Formel ist wahr.

Beweis: Sei $x_0 > 0$ gegeben. Wir wählen $c = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$.

Sei nun $x > 0$ gegeben. Es gilt $\sqrt{x} \geq 0$,

also $\sqrt{x_0} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x_0}$ und

wegen $|x - x_0| \geq 0$: $\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} = c\,|x - x_0|$

und mit Hilfe von $(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) = x - x_0$

folgt: $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq c\,|x - x_0|$.

Die Formel „$\exists c>0\ \forall x>0\ \forall x_0>0: |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| \leq c|x-x_0|$"
ist jedoch falsch:

Wir beweisen das Gegenteil: „$\forall c>0\ \exists x>0\ \exists x_0>0:$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| > c|x-x_0|\text{"}$$

<u>Beweis</u>: Es sei $c>0$ gegeben. Wir wählen:

$$x = \frac{1}{4c^2} > 0 \quad \text{und} \quad x_0 = \frac{x}{4} > 0$$

Dann gilt: $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2c} - \frac{1}{4c} = \frac{1}{4c}$

und: $x - x_0 = \frac{1}{4c^2} - \frac{1}{16c^2} = \frac{3}{16c^2}$

folglich: $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \frac{1}{4c} > \frac{3}{16c} = c \cdot \frac{3}{16c^2} = c|x-x_0|$

also: $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| > c \cdot |x-x_0|$. ∎

Beim Beweisen erfolgt die Behandlung der Quantoren genau nach der Reihenfolge der Quantoren in der zu beweisenden Formel.

Um das zu sehen analysieren wir ein Beispiel:

<u>Zu zeigen</u>: $\forall x_0>0\ \exists c>0\ \forall x>0: |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| \leq c|x-x_0|$

Es sei $x_0>0$ gegeben.

<u>Noch zu zeigen</u>: $\exists c>0\ \forall x>0: |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| \leq c|x-x_0|$ geg. $x_0>0$

Wir wählen $c = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$.

<u>Noch zu zeigen</u>: $\forall x>0: |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| \leq c|x-x_0|$
gegeben $x_0>0$, $c = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$.

Sei nun $x>0$ gegeben.

<u>Noch zu zeigen</u>: $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| \leq c|x-x_0|$ gegeben $x_0>0$, $c = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$, $x>0$.

Nach unserer vorherigen Rechnung, folgt: $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \ldots \leq c|x-x_0|$.

<u>Nichts mehr zu zeigen</u>.

<u>Definition</u>: ((Lokale) Lipschitzstetigkeit)

Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$, $(M \subseteq \mathbb{R})$, heißt lokal Lipschitz-stetig in $x \in M$, wenn gilt: $\exists c>0\ \exists \varepsilon>0\ \forall y \in U_\varepsilon(x) \cap M:$

$$|f(y) - f(x)| \leq c|x-y|.$$

Sie heißt gleichmäßig (oder global) Lipschitzstetig, wenn gilt: $\exists c>0\ \forall x,y \in M: |f(y)-f(x)| \leq c|x-y|$.

D.h. wir haben eben gezeigt, dass die Wurzelfunktion in $]0,\infty[$ überall <u>lokal</u> Lipschitzstetig, aber nicht <u>global</u>/gleichmäßig Lipschitzstetig ist.