Tutorium 3 (4.3. Quantoren) 23.09.2025, Di: 14^{30}–16^{00}

Kurze Wiederholung:

Quantoren – Beschreibung von All- oder Existenzaussagen mit $\forall x$, $\exists x$, $\exists! x$

- Variable frei: nicht durch Quantor gebunden
- es gibt ein paar Regeln zur Umformung von All- oder Existenzaussagen, z.B.:
  - $\neg \forall x : A(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$
  - $\neg \exists x : A(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$

~~Tutorium 3 (4.3. Quantoren) 23.09.2025, Di: 14^{30}–16^{00}~~

4.3. Präsenzübung

4.3.1. Aufgabe: Betrachten Sie die Aussagen:

- M: Menge aller Menschen
- Z: Menge aller Zeitpunkte
- $L(x,y)$: x lügt zum Zeitpunkt y

Drücken Sie die folgenden Aussagen formal aus:

1. Manche Menschen lügen immer.
2. Alle Menschen lügen manchmal.
3. Manche Menschen sagen manchmal die Wahrheit.
4. Es gibt genau einen Menschen, der immer die Wahrheit sagt.
5. Von je zwei verschiedenen Menschen sagt zu einem bestimmten Zeitpunkt immer der eine die Wahrheit und der andere nicht.

Lösung:

1. $\exists m \in M\ \forall z \in Z : L(m,z)$
2. $\forall m \in M\ \exists z \in Z : L(m,z)$
3. $\exists m \in M, z \in Z : \neg L(m,z)$
4. $\exists! m \in M\ \forall z \in Z : \neg L(m,z)$
5. $\forall m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \neq m_2\ \exists z \in Z : L(m_1,z) \wedge \neg L(m_2,z)$
   $\vee \neg L(m_1,z) \wedge L(m_2,z)$

4.3.2. Aufgabe: Analog zur Planet-Logico-Aufgabe im letzten Kapitel:

Regel: Es wird nie auf allen Baustellen gleichzeitig gearbeitet.

Lösung: ~~Sei b = eine Baustelle, B := Menge aller Baustellen~~

~~$A(b)$:= es wird auf Baustelle b gearbeitet~~

Drücke 1.–5. in Quantoren aus $\emptyset$:

1. Es gibt eine Baustelle auf der nicht gearbeitet wird.
2. Auf allen Baustellen wird nicht gearbeitet.
3. Es wird nur auf einer Baustelle gearbeitet.
4. Auf allen Baustellen wird gearbeitet.
5. Es gibt mindestens eine Baustelle auf der gearbeitet wird.

<u>Lösung:</u>

Sei $b :=$ eine Baustelle, $B :=$ Menge aller Baustellen, $Z :=$ Menge aller Zeitpunkte

$A(b) :=$ es wird auf Baustelle b gearbeitet.
und $A(b,t) :=$ auf Baustelle b wird zu Zeitpunkt t gearbeitet

1. $\exists b \in B: \neg A(b)$
2. $\forall b \in B: \neg A(b)$
3. $\exists! b \in B: A(b)$
4. $\exists t \in Z\ \forall b \in B: A(b,t)$
5. $\exists b \in B: A(b)$.

<u>4.3.3. Aufgabe:</u>

Versuchen Sie Formulierungen der folgenden Aussagen mit jeweils nur einem Quantor zu finden! Welche Formulierungen sind äquivalent, welche sind schwächer oder stärker als die urspr. Aussagen?

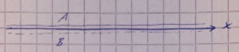
Sei M eine Menge.

1. $\forall x \in M: A(x) \wedge \forall x \in M: B(x)$
2. $\exists x \in M\ A(x) \vee \exists x \in M\ B(x)$
3. $\forall x \in M\ A(x) \vee \forall x \in M\ B(x)$
4. $\exists x \in M\ A(x) \wedge \exists x \in M\ B(x)$
5. $\forall x \in M\ A(x) \Rightarrow \forall x \in M\ B(x)$
6. $\forall x \in M\ A(x) \Rightarrow \exists x \in M\ B(x)$

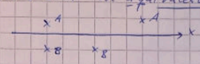
Nutzen Sie Zeichnungen wie in der Vorlesung um Gegenbeispiele für nicht gültige Implikationen zu finden.

<u>4.3.3. Lösung:</u>

1. $\forall x \in M\ (A(x) \wedge B(x))$ ist <u>äquivalent</u> und verwendet nur einen Quantor.

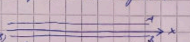
Zeichnung wie in Vorlesung: 

2. $\exists x \in M: A(x) \vee B(x)$ ist <u>äquivalent</u>.

Mgl. Zeichnung: 

3. $\forall x \in M: A(x) \vee B(x)$ ist <u>schwächer</u> als die urspr. Aussage.

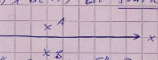
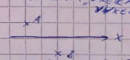
Beispiel: Betrag von $x \in \mathbb{R}$: $|x|$ „Alle x sind pos. oder alle x sind neg." ist eine stärkere Aussage als „Alle x sind pos. oder negativ."

Mgl. Zeichnung:  für $\forall x \in M\ A(x) \vee \forall x \in M\ B(x)$
(ginge auch für $\forall B, (A \wedge B)$)

Zeichnung:  für $\forall x \in M: A(x) \vee B(x)$

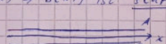
Beispiel: $A :=$ „$f(x) = x$", $B :=$ „$f(x) = -x$". Dann gilt für $f(x) = |x|$: „$\forall x \in \mathbb{R}\ (A(x) \vee B(x))$" aber nicht „$\forall x \in \mathbb{R}\ A(x)$ $\vee \forall x \in \mathbb{R}\ B(x)$".

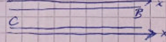
4. $\exists x \in M: (A(x) \wedge B(x))$ ist <u>stärker</u>.

Mgl. Zeichnung:  <u>stärker</u> als 

Bsp.: $A :=$ „$x < 3$", $B :=$ „$x > 5$". Dann gilt „$\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$" aber nicht „$\exists x\, A(x) \wedge B(x)$"

5. $\forall x \in M: (A(x) \Rightarrow B(x))$ ist <u>stärker</u>.

Mgl. Zeichnung:  für $\forall x: A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)$ urspr. Auss.

Mgl. Zeichnung:  für $\forall x: A(x) \Rightarrow B(x)$ (stärker)

6. $\exists x \in M: (A(x) \Rightarrow B(x))$ ist ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ <u>äquivalent</u>.

~~[illegible]~~

Mgl. Zeichnung: 

~~[illegible]~~

<u>Was lernen wir daraus?</u>

~~[illegible]~~ „Kürzen" und auch Vertauschen von Quantoren ist gefährlich!

4.3.4. Aufgabe

(Übung 21, Deiser 2010)

Lesen Sie „$\forall x$" als „für alle Menschen x",
„b" als „Butler"
„g" als „Gärtner"
„l" als „Lord"
„$K(x,y)$" als „x hat y ermordet"
„$A(x,y)$" als „x hat Angst vor y"
„$H(x,y)$" als „x hasst y".

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Butler oder der Gärtner hat den Lord umgebracht, oder der Lord hat Selbstmord begangen.

(b) Man mordet nur die, die man hasst und vor denen man Angst hat.

(c) Diejenigen, die der Lord hasst, mag der Gärtner.

(d) Diejenigen, die der Lord hasst, ~~mag~~ hasst auch der Butler.

(e) Der Lord hasst sich selbst, und er hasst den Gärtner.

(f) Der Butler hasst alle, die Angst vor dem Lord haben.

(g) Jeder mag den Lord, den Butler oder den Gärtner.

Lösung:

(a) $K(b,l) \vee K(g,l) \vee K(l,l)$

(b) $\forall x,y: (K(x,y) \Rightarrow H(x,y) \wedge A(x,y))$

(c) $\forall x\, (H(l,x) \Rightarrow \neg H(g,x))$

(d) $\forall x\, (H(l,x) \Rightarrow H(b,x))$

(e) $H(l,l) \wedge H(l,g)$

(f) $\forall x\, A(x,l) \Rightarrow H(b,x)$

(g) $\forall x\, (\neg H(x,l) \vee \neg H(x,b) \vee \neg H(x,g))$.

Lösung:

Laut (e) ist $H(l,l)$ und $H(l,g)$, also wegen (d): $H(b,l)$ und $H(b,g)$.

Wegen (c): $\neg H(g,l)$ und $\neg H(g,g)$ (Also wegen (b) und $\neg H(g,l)$ kann der Gärtner nicht der Mörder sein)

und mit (g): $\neg H(l,b)$ und $\neg H(b,b)$.

Da nach (f) aus $A(b,l)$ folgen würde $H(b,b)$ (das ist ein Widerspruch zu $\neg H(b,b)$) muss $\neg A(b,l)$ wahr sein. Mit (b) scheidet damit der Butler als Mörder aus.

Mit (a) erhalten wir also, dass der Lord Selbstmord begangen haben muss.