Tutorium 2 (3.5 Aussagenlogik) Dienstag, 23.09, 10^{30} – 12^{00} ①

Kurze Wiederholung:

Def.: (Aussage) Aussagen sind Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert (wahr, falsch) zuordnen kann.

Junktoren verknüpfen Aussagen zu neuen Aussagen ($\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$). Beachte: Logisches $\vee$ ist kein umgangssprachliches „entweder oder", beide Aussagen können wahr sein

Eigentlich reicht $\vee, \wedge, \neg$

Präsenzübung 3.5

3.5.1. Aufgabe:

Auf dem Planeten Logico wird das Leben durch einfache Regeln bestimmt, die von allen Personen immer eingehalten werden müssen – und auch werden. Im Folgenden finden Sie eine dieser Regeln und dazu Aussagen. Geben Sie an, ob diese Aussagen auf dem Planeten Logico immer gültig sind, oder immer falsch sind, oder ob man darüber mit Hilfe der Regel nichts sagen kann. Welche der Aussagen sind gleichwertig zu den Regeln?

Formulieren Sie die Aussagen auch in symbolischer Schreibweise. Überprüfen Sie mit Wahrheitstafeln.

Regel: Wenn Sandsturm ist, dann darf keine Musik gemacht werden.

Prüfe:
1. Wenn Musik zu hören ist, dann ist sicher kein Sandsturm.
2. Wenn kein Sandsturm ist, dann ist immer Musik.
3. Wenn kein Sandsturm ist, dann ist nie Musik.
4. Wenn Musik ist, dann ist gerade ein Sandsturm.

BRUNNEN

Lösung: ②

3.5.1. Aufgabe:

Seien S := „Es ist ein Sandsturm."
M := „Es ist Musik zu hören."

1. Die Aussage ist immer gültig, da sie äquivalent zur Regel ist.
Wir übersetzen die Regel zu $S \Rightarrow \neg M$, und die Aussage 1. zu: $M \Rightarrow \neg S$.

Prüfe Äquivalenz:

S	$\Rightarrow$	$\neg$	M	$\Leftrightarrow$	M	$\Rightarrow$	$\neg$	S
w	f	f	w	w	w	f	f	w
f	w	f	w	w	w	w	w	f
w	w	w	f	w	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	w	w	f
1.	4.	3.	2.	5.	2.	4.	3.	1.

← gehe nach Reihenfolge der Bindungsstärke vor

Diese logische Äquivalenz basiert auf Kontraposition ($(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$)

2.

S	$\Rightarrow$	$\neg$	M	$\not\Leftrightarrow$	$\neg$	S	$\Rightarrow$	M
w	f	f	w	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	f	w	w
w	w	w	f	w	f	w	w	f
f	w	w	f	f	w	f	f	f

(zweite Aussage) sind nicht gleichwertig / äquivalent, keine Implikation (Regel ⇏ 2. Auss.), d.h. sie ist nicht immer gültig. Sie ist aber auch nicht immer falsch.

3.

S	$\Rightarrow$	$\neg$	M	$\not\Leftrightarrow$	$\neg$	S	$\Rightarrow$	$\neg$ M
w	f	f	w	f	w	w	f	w
f	w	f	w	f	f	f	f	w
w	w	w	f	w	w	w	w	f
f	w	w	f	w	f	w	w	f

D.h. man kann mit Hilfe der Regel nicht mehr sagen.

D.h. Aussage 3 nicht äquivalent zur Regel, keine Implikation.

4.

S	$\Rightarrow$	$\neg$	M	$\not\Leftrightarrow$	M	$\Rightarrow$	S
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	f	f
w	w	w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f	w	f

, also Aussage 4 nicht gleichwertig zur Regel, nicht immer wahr, nicht immer falsch.

($\neg S \Rightarrow \neg M$ wäre äquivalent.)

Bemerkung: Wie viele Möglichkeiten w, f für jede Aussage gibt es?
D.h. wie lang werden die Spalten der Aussagen? $2^{\#\text{ der versch. Auss.}}$ lang.
Also hier: $2^2 = 4$, ungleiche Wahrheitswertebelegungen.

BRUNNEN

3.5.2. Aufgabe:

Betrachten Sie die folgenden Kombinationen der Aussagen A und B mit Junktoren. Welche Kombinationen sind äquivalent?

1. $\neg(A \wedge B)$.
2. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
3. $(\neg A) \vee B$.
4. $A \wedge (B \vee C)$.
5. $\neg(A \vee B)$.
6. $A \vee (B \wedge C)$.
7. $\neg A \wedge \neg B$.
8. $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
9. $A \Rightarrow B$.
10. $\neg A \vee \neg B$.

Machen Sie sich jeweils die Bedeutung der Aussagen mit Hilfe von Alltagsbeispielen klar.
Versuchen Sie zusammengehörige Aussagen zu finden und überprüfen Sie Ihre Ideen mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

Lösung: 5. & 7. sind äquivalent
und 1. & 10. sind äquivalent
} De Morgansche Gesetze

und 2. & 8. sind äquivalent
und 4. & 6. sind äquivalent
} Aussagenlogische „Distributivgesetze"

und 9. & 3. sind äquivalent (Materielle Implikation)

Hierzu lassen sich wieder wie zuvor passende (teils recht große) Wahrheitstafeln erstellen.

Alltagsbeispiel für 9. und 3.: A: „Es regnet."
B: „~~Der Boden~~ Die Erde ist nass."

- Wenn A, dann B.
- Wenn $\neg A$ (es regnet nicht), dann ist $A \Rightarrow B$ immer wahr, egal was mit dem Boden ist (aus Falschem folgt Beliebiges).
- Wenn es regnet (A), aber der Boden nicht nass ist ($\neg B$) dann ist die Implikation $A \Rightarrow B$ falsch, also der Boden ist nicht wegen des Regens nass.

3.5.3. Aufgabe:

Analog zur Planet Logico-Aufgabe oben:

Regel: Wer einen Quaz oder einen Quox als Haustier hat, der betreibt ein Restaurant.

1. Wer einen Quox als Haustier hat, der betreibt ein Restaurant.
2. Wer weder einen Quaz, noch einen Quox hat, der betreibt kein Restaurant.
3. Wer einen Quaz und einen Quox hat, der betreibt ein Restaurant.
4. Wer ein Restaurant betreibt, besitzt immer einen Quaz.
5. Wer kein Restaurant betreibt, besitzt weder einen Quaz, noch einen Quox.

Lösung:

Wir formalisieren die Regel:

$(Q_a \vee Q_o) \Rightarrow R$, wobei $Q_a :=$ „hat Quax"

$Q_o :=$ „hat Quox"

$R :=$ „betreibt Restaurant"

1. Formalisiert: $Q_o \Rightarrow R$. $(Q_a \vee Q_o) \Rightarrow R \not\Leftrightarrow Q_o \Rightarrow R$.

Es gilt nur: $(Q_o \Rightarrow R) \Rightarrow (Q_a \vee Q_o) \Rightarrow R$; also Aussage 1 nicht gleichwertig, aber Implikation.

2. Formalisiert: $(\neg Q_a \wedge \neg Q_o) \Rightarrow \neg R$.

$(\underbrace{(\neg Q_a \wedge \neg Q_o)}_{\Leftrightarrow \neg(Q_a \vee Q_o)} \Rightarrow \neg R) \not\Leftrightarrow (Q_a \vee Q_o) \Rightarrow R$, also nicht gleichwertig.

aber Sie ist nicht immer falsch.

BRUNNEN

3. Formalisiert: $(Q_a \wedge Q_o) \Rightarrow R$.

$(Q_a \wedge Q_o) \Rightarrow R \not\Leftrightarrow (Q_a \vee Q_o) \Rightarrow R$ nicht äquivalent,

aber (Aussage 3) $\Rightarrow$ Regel

4. Formalisiert: $R \Rightarrow Q_a$.

$(R \Rightarrow Q_a) \not\Leftrightarrow (Q_a \vee Q_o) \Rightarrow R$

w	w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w	f	f
w	f	f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	w	f	f
w	w	w	w	w	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	f	f	w	f

nicht immer falsch, keine Impl.
nicht gleichwertig
keine weitere Auss.
mit Hilfe der Regel umgl.

5. Formalisiert: $\neg R \Rightarrow (\neg Q_a \wedge \neg Q_o)$

$\neg R \Rightarrow \underbrace{(\neg Q_a \wedge \neg Q_o)}_{\neg (Q_a \vee Q_o)} \Leftrightarrow (Q_a \vee Q_o) \Rightarrow R$, ist äquivalent.

(mit Kontraposition)

3.5.4. Aufgabe:

Erstellen Sie eine Wahrheitstafel mit den Spalten A, B, C und P.

Tragen Sie alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten w und f für A, B, C ein (8 Kombinationen).

Belegen Sie die P Spalte zufällig mit w und f.

Finden Sie nun eine Kombination von A, B, C mit Hilfe von Junktoren, die immer die Wahrheitswerte der Spalte P ergibt.

Lösung: Wir beschränken uns auf $\vee, \wedge, \neg$.

A	B	C	z.B. P_1	z.B. P_2	z.B. P_3
w	w	w	w	w	
f	w	w	w	w	⋮
w	f	w	w	w	
f	f	w	w	w	usw.
w	w	f	w	w	
f	w	f	w	w	
w	f	f	w	f	
f	f	f	f	w	

$P_1 = A \vee B \vee C$; $P_2 = (\neg A \vee B) \vee C$

Es genügen die Junktoren $\vee, \wedge, \neg$. Somit erhalten wir 8 mögliche Aussagen: $(A \vee B) \vee C$, $(A \vee B) \vee \neg C$, $(A \vee \neg B) \vee C$, $(A \vee \neg B) \vee \neg C$, $(\neg A \vee B) \vee C$, $(\neg A \vee B) \vee \neg C$, $(\neg A \vee \neg B) \vee C$, $(\neg A \vee \neg B) \vee \neg C$. Diese liefern in genau einer Zeile den Wahrheitswert f. Durch

z.B. für $(A \vee B) \vee C$ und $(A \vee B) \vee \neg C$: Verknüpfung mit „$\wedge$" erhält man 2 Zeilen mit Ww f, 3, ... usw. Die Verbindung mit „$\vee$" liefert in jeder Zeile w.

BRUNNEN

3.5.5. Aufgabe

Regel: Wenn Ferien sind und die Sonne scheint, ~~[illegible]~~ muss man entweder Kickball spielen oder ins Freibad gehen.

1. Wenn keine Sonne scheint und keine Ferien sind, spielt niemand KB und es ist keiner im Freibad.
2. Wenn keiner Kickball spielt und niemand im Freibad ist, dann scheint keine Sonne und es sind keine Ferien.
3. Wenn alle entweder KB spielen ~~und~~ oder im Freibad sind, scheint die Sonne und es sind Ferien.
4. Wenn die Sonne scheint, aber niemand ist im Freibad oder spielt Kickball, dann sind ~~[illegible]~~ keine Ferien.

Lösung: 1. $(\neg S \wedge \neg F) \Rightarrow (\neg K \wedge \neg B)$,

wobei $F :=$ „Ferien"

$S :=$ „Die Sonne scheint."

$K :=$ „Kickball spielen."

$B :=$ „Baden gehen."

Regel

Bsp. für größer WT:

F	$\wedge$	S	$\Rightarrow$	K	$\vee$	B	$\Leftrightarrow$	$\neg S \wedge \neg F$	$\Rightarrow$	$\neg K \wedge \neg B$
w	w	w	w	w	w	w	w	f	w	f
w	w	w	w	w	w	f	w	f	w	f
w	w	w	w	f	w	w	w	f	w	f
w	w	w	f	f	f	f	w	f	w	f
w	f	f	w	w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	w	w	f	w	f	w	f
w	f	f	w	f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	w	f	f	f	w	f	w	f
f	f	w	w	w	w	w	w	f	w	f
f	f	w	w	w	w	f	w	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	w	f	f	f	w	f	f	f
f	f	f	w	w	w	w	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	f	f	w	f	f
f	f	f	w	f	w	w	f	w	w	f
f	f	f	w	f	f	f	w	w		w

nicht immer falsch, nicht immer wahr, keine Implikation, keine Äquivalenz.

2. $(\neg K \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg S \vee \neg F)$.

$\underbrace{(\neg K \wedge \neg B)}_{= \neg(K \vee B)} \Rightarrow \underbrace{(\neg S \vee \neg F)}_{\neg(S \wedge F) = \neg(F \wedge S)} \Leftrightarrow (F \wedge S) \Rightarrow (K \vee B)$ ist äquivalent (wieder Kontraposition)

3. $(K \vee B) \Rightarrow (S \wedge F)$ formalisiert Auss. 3.

$\underbrace{(K \vee B)}_{=:D} \Rightarrow \underbrace{(S \wedge F)}_{= F \wedge S =: C} \not\Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge S)}_{=:C} \Rightarrow \underbrace{(K \vee B)}_{=:D}$ nicht äquivalent.

da z.B. $D = f$, $C = w$ liefert 1. Implikation w, 2. Impl. f.

d.h. nicht gleichwertig, keine Impl. (Regel $\not\Rightarrow$ 3. Auss.), nicht immer falsch (z.B. $D = w$, $C = w$).

4. $S \wedge \neg(B \vee K) \Rightarrow \neg F$.

$\underbrace{S \wedge \neg \underbrace{(B \vee K)}_{=C} \Rightarrow \neg F}_{S \wedge \neg C \Rightarrow \neg F}) \Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge S) \Rightarrow \underbrace{(K \vee B)}_{=:C}}_{(F \wedge S) \Rightarrow C}$

$\Leftrightarrow F \Rightarrow \neg(S \wedge \neg C) = \neg S \vee C$

$\Leftrightarrow \neg(F \wedge S) \vee C$

$\Leftrightarrow (\neg F \vee \neg S) \vee C$

mit Kontraposition

$\Leftrightarrow \neg F \vee (\neg S \vee C)$

assoziativ

3.5.6. Aufgabe

Bemerke: Das „niemand(en)" in Auss. 3. und 5. ist irreführend!

Regel: Wer keine kurzen Haare hat, darf nicht mit dem Ufo fliegen.

1. Alle Bewohner mit kurzen Haaren dürfen mit dem Ufo fliegen.
2. Bewohner mit langen Haaren dürfen bei schönem Wetter mit dem Ufo fliegen.
3. Wenn kein Ufo fliegt, hat niemand kurze Haare.
4. Jeder der mit dem Ufo fliegt, hat kurze Haare.
5. Wenn ein Ufo fliegt, gibt es niemand mehr auf dem Planeten mit kurzen Haaren.

3.5.6. Aufgabe

Sei H := „hat kurze Haare"

U := „fliegt Ufo"

W := „Wetter ist schön"

Regel: $\neg H \Rightarrow \neg U$

1. Formalisiert: $H \Rightarrow U$.

$H \Rightarrow U \not\Leftrightarrow \underbrace{(\neg H \Rightarrow \neg U)}_{\Leftrightarrow U \Rightarrow H}$ nicht äquivalent zur Regel, und keine Implikation.

da z.B. aus $U = f$, $H = w$ folgt, dass 1. Implikation falsch
2. Implikation wahr

2. Formalisiert: $\neg H \wedge W \Rightarrow U$.

$(\neg H \wedge W \Rightarrow U) \not\Leftrightarrow (\neg H \Rightarrow \neg U)$ nicht äquivalent zur Regel, und keine Implikation z.B. $H = f$, $U = f$, $W = w$

da: $H = f$, $W = w$
$\neg H = w$, $\neg H \wedge W = w$, 1. Implikation = wahr für $U = f, w$
aber für $U = w$, 2. Implikation = f $(\underbrace{\underset{w}{\neg H} \Rightarrow \underset{f}{\neg U}}_{f})$

3. Formalisiert: $\neg U \Rightarrow \neg H$ ist nicht äquivalent zur Regel. (und keine Implikation)

$\underbrace{(\neg U \Rightarrow \neg H)}_{\Leftrightarrow H \Rightarrow U} \not\Leftrightarrow \underbrace{(\neg H \Rightarrow \neg U)}_{\Leftrightarrow U \Rightarrow H}$

wieder: falsch für $H = f$, $U = w$ z.B., dann 1. Implikation w
2. Implikation f

4. $U \Rightarrow H$, formal.

$U \Rightarrow H \Leftrightarrow (\neg H \Rightarrow \neg U)$ ist äquivalent. (Kontraposition)

5. $U \Rightarrow \neg H$, formal.

$(U \Rightarrow \neg H) \not\Leftrightarrow \underbrace{(\neg H \Rightarrow \neg U)}_{\Leftrightarrow U \Rightarrow H}$, nicht äquivalent zur Regel (Und keine Impl. z.B. $H = w$, $U = w$)

ist z.B. für $U = w$, $H = f$ nicht äquivalent,

da 1. Implikation ($w \Rightarrow w$ wahr)
2. Implikation ($w \Rightarrow f$ falsch).

BRUNNEN