Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Филиппов Андрей Александрович
608 группа
7 вариант

Численное интегрирование многомерных функций методом Монте-Карло

Москва
2022

1 Введение

В качестве модельной задачи предлагается задача вычисления многомерного интеграла методом Монте-Карло.

Программная реализация должна быть выполнена на языке C или C++ с использованием библиотеки параллельного программирования MPI.

Требуется исследовать масштабируемость параллельной MPI-программы на следующих параллельных вычислительных системах ВМК МГУ:

1. IBM Polus

2 Математическая постановка задачи

Функция $f(x,\, y,\, z)$ — непрерывна в ограниченой замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Требуется вычислить определённый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz\ ,$$

$$\text{где функция } f(x,\, y,\, z) = \sqrt{y^2 + z^2}\ ,$$

$$\text{область } G = \{(x,\, y,\, z)\ :\ 0\ \leqslant\ x\ \leqslant\ 2\,,\ y^2 + z^2\ \leqslant\ 1\}$$

3 Численный метод решения задачи

Пусть область G ограниченна параллелепипедом

$$\Pi : \begin{cases} a_1\ \leqslant\ x\ \leqslant\ b_1, \\ a_2\ \leqslant\ y\ \leqslant\ b_2, \\ a_3\ \leqslant\ z\ \leqslant\ b_3 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию:

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z)\,, & (x,y,z) \in G \\ 0\,, & (x,y,z) \notin G \end{cases}$$

Преобразуем искомый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz\ =\ \iiint_\Pi F(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz$$

Пусть $p_1(x_1,\, y_1,\, z_1), p_2(x_2,\, y_2,\, z_2), \ldots$ — случайные точки, равномерно распределённые в П. Возьмём n таких случайных точек. В качестве приближённого значения интеграла предлагается использовать выражение:

$$I \;\approx\; |\Pi| \cdot \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F(p_i),$$

где $|\Pi|$ - объём параллелепипеда П. $|\Pi| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$

4 Нахождение точного значения интеграла аналитически

$$I = \iiint_G \sqrt{y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz \;=\; \{x = x,\, y = r\cos\phi,\, z = r\sin\phi\} \;=\; \int_0^2 dx \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r^2 dr \;=\; \tfrac{4\pi}{3}$$

5 Описание программной реализации

Параллельная MPI-программа принимает на вход требуемую точность и генерирует случайные точки до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута. Программа вычисляет точность как модуль разности между приближённым значением, полученным методом Монте-Карло, и точным значением, вычислинным аналитически.

Программа считывает в качестве аргумента командной строки требуемую точность ϵ и выводит четыре числа:

- Посчитанное приближённое значение интеграла
- Ошибка посчитанного значения: модуль разности между приближённым и точным значениями интеграла
- Количество сгенерированных случайных точек
- Время работы программы в секундах

Время работы программы измеряется следующим образом. Каждый MPI-процесс измеряет своё время выполнения, затем среди полученных значений берётся максимум.

В моём варианте реализована независимая генерация точек MPI-процессом. Каждый процесс генерерирует одинаковое кол-во точек, вычисляют свою часть суммы, затем опреацией Allreduce каждый процесс получает общую сумму и считает разность между получившимся значением интеграла и истинным значением (ошибку), затем каждый процесс проверяет достижение нужной точности и если точность не достигнута, то уходит на следующую итерацию.

6 Исследование мастшабируемости программы на системе Polus

Таблица 1: Таблица с результатами расчётов для системы Polus

Точность ϵ	**Число MPI-процессов**	**Время работы программы (с)**	**Ускорение**	**Ошибка**
$3.0 \cdot 10^{-5}$	1	0.02454	1	2.629e-05
	4	0.00957	2.564	1.196e-05
	16	0.00625	3.926	8.623e-06
	32	0.00575	4.267	2.017e-05
$5.0 \cdot 10^{-6}$	1		1	
	4			
	16			
	64			
$1.5 \cdot 10^{-6}$	1		1	
	4			
	16			
	64			