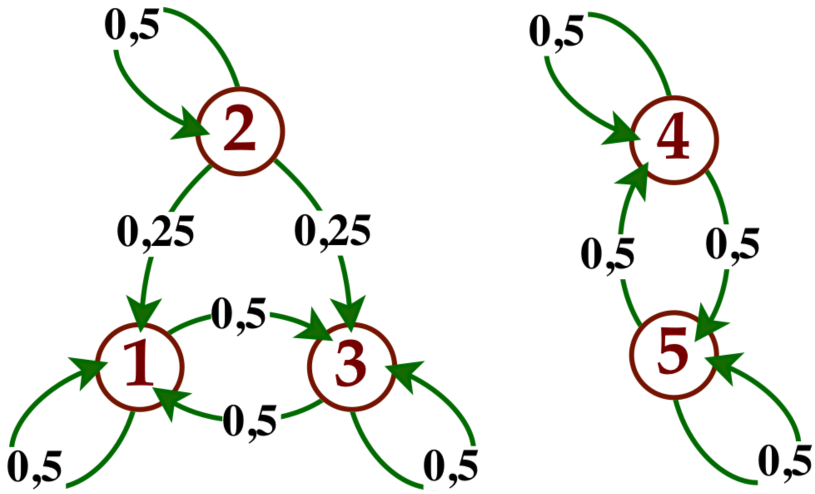
M4212C - Compléments sur les graphes

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



Semestre 4

Année universitaire 2021-2022

TABLE DES MATIÈRES

1 Chaînes de Markov

Pour tout ce chapitre on considérera un espace des états E **fini**.

1.1 Graphe probabiliste

Définition.
Un **graphe probabiliste** est un graphe *orienté simple* dont les arcs sont pondérés et tel que :

1. tous les poids sont positifs,
2. la somme des poids des arcs sortant d'un sommet quelconque vaut 1.

Exemple « Le temps d'Oz »
En pays d'Oz, le temps peut être dans 3 états : pluvieux, beau ou neigeux. Si le temps est dans un état donné, en une étape, soit le lendemain, il sera dans un des trois états avec une probabilité représentée sur le graphe figure 1.1.

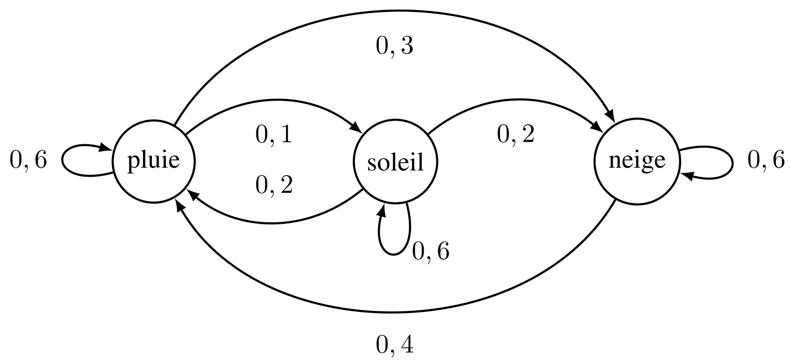


FIGURE 1.1 – Pays d'Oz

1.2 Chaîne de Markov

1.2.1 Définitions

Définition.
Une **chaîne de Markov** est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E espace des états telle que :

$\forall(i_0;\ldots;i_{n-1};i;j)\in E^{n+2}$:

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i;X_{n-1}=i_{n-1};\ldots;X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$$

La chaîne est dite **homogène** si $P(X_{n+1}=j|X_n=i)$ ne dépend pas de n :

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_1=j|X_0=i)$$

X_n est l'état de la chaîne à l'instant n.

Dans une chaîne de Markov, le futur $t = n + 1$ ne dépend que du présent $t = n$ et non du passé. Le processus est sans mémoire.

Pour une chaîne homogène, cela signifie que la probabilité de transition de létat i à l'état j en une étape ne dépend pas de l'instant considéré mais seulement du fait d'être dans létat i.

Définition.
La probabilité $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j|X_n = i) = P(X_1 = j|X_0 = i)$ est appelée **probabilité de transition** en une étape de l'état i à l'état j.

Définition.
On appelle **distribution initiale** (ou loi de probabilité initiale) le vecteur :

$$\mu_0 = (P(X_0 = e_0); P(X_0 = e_1); \dots ; P(X_0 = e_n))$$

où l'espace des état est $E = \{e_1; e_2; \dots ; e_n\}$

Exemple 1

Au pays d'Oz

1. Pour l'exemple « Le temps d'Oz », exprimer les probabilités d'être dans les différents états pour $t = 1$ en fonction des mêmes probabilités pour $t = 0$.
2. Traduire ces relations sous forme matricielle.

Exemple 2

Quelles sont les relations obtenues dans le cas général « Au pays d'Oz » (figure 1.2) ?

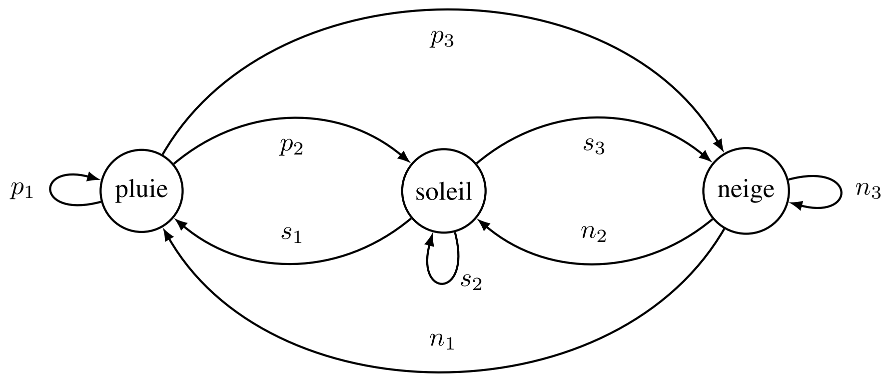


FIGURE 1.2 – Pays d'Oz

1.2.2 Matrice de transition

Définition.
On appelle **matrice de transition** d'une chaîne de Markov homogène à k états (on identifie l'espace des états à $E = \{e_1; e_2; \dots ; e_k\}$), la matrice $T = \begin{pmatrix} & & \\ & p_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix}$.

Remarque :
La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène est une matrice stochastique. On peut donc lui associer un graphe probabiliste.

Définition.

- On appelle distribution de probabilité sur E un vecteur $V = (v_0; v_1; \ldots; v_k)$ tel que ses coefficients sont positifs et de somme 1
- Une distribution de probabilité sur E est dite **invariante (ou stationnaire)**, ou encore **probabilité d'équilibre**, pour la chaîne de Markov de matrice de transition T si V vérifie $V \times T = V$.

1.2.3 Classification des états

Définition.
Une chaîne de Markov est dite **irréductible** si le graphe associé à cette matrice est fortement connexe.

Si la chaîne n'est pas irréductible, on appelle une composante fortement connexe, une **classe** de la chaîne. Une classe est dite **finale** si elle ne conduit à aucune autre. Sinon, la classe est dite **transitoire**.

- Si une classe n'est pas finale, tous ses états sont **transients** (ou **transitoires**).
- Si une classe est à la fois finale et finie, tous ses états sont **récurrents positifs**.

(On considère qu'il n'y a pas d'arc d'un sommet a à un sommet b, si la probabilité de passer de l'état a à l'état b est nulle.)

Rappel

- Un graphe G est dit fortement connexe si pour tout couple de sommets $(u; v)$ de G, il existe dans G un chemin de u vers v (et un de v vers u).
- On appelle composante fortement connexe du graphe G un sous graphe fortement connexe maximal (pour l'inclusion).

1.3 Puissances de la matrice de transition

Proposition. Distribution de probabilité
On identifie l'espace des états à $E = \{1; 2; \ldots; k\}$. On note

- $\mu_0 = (P(X_0 = 1); P(X_0 = 2); \ldots; P(X_0 = k))$ la distribution de probabilité initiale
- $\mu_n = (P(X_n = 1); P(X_n = 2); \ldots; P(X_n = k))$ la distribution de probabilité à l'étape n.

On a alors : $\mu_n = \mu_{n-1} \times T$ et $\mu_n = \mu_0 \times T^n$

Théorème. La relation de Chapman-Kolmogorov

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène et $T = \left(\quad p_{i,j} \quad \right)$ sa matrice de transition.

On pose $p_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ la probabilité d'être dans l'état j à l'instant n sachant que l'on est dans l'état i à l'instant 0 (probabilité de transition de l'état i à l'état j en exactement n étapes).

On note $T^{(n)}$ la matrice $T^{(n)} = \left(\quad p_{i,j}^{(n)} \quad \right)$.

On a alors : $T^{(n)} = T^n$

Exemple

Cas particulier d'une matrice de transition 2×2

Un pays est partagé en deux zones : l'une urbaine, l'autre rurale. Chaque année 10% des urbains partent vivrent à la campagne et 20% des ruraux partent vivre en ville. Au début de l'observation 75% de la population est rurale.

1. Donner le graphe probabiliste et la matrice de transition modélisants ce problème.
2. Que se passe-t-il après une année ? 2 années ? 10 ? ... Que semble-t-il se passer ?

1.4 Compléments sur les matrices

1.4.1 Vecteurs et valeurs propres

Définition.
On appelle **vecteur propre** de f associé à λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) tout vecteur $\vec{v}$ de E tel que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
Si un tel vecteur non nul existe alors λ est appelée **valeur propre** de f.

Remarque :

- Si $\vec{v}$ est un vecteur propre de f alors $\forall k\in\mathbb{R}$, $k\vec{v}$ est un autre vecteur propre.
- L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le **spectre** de f et se note $sp(f)$.
- Si $\vec{v}$ est un vecteur propre de f on a donc $(f - \lambda Id)(\vec{v}) = \vec{0}$.
- Le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \{\vec{u}$ tel que $(f - \lambda Id)(\vec{u}) = \vec{0}\}$, stable par f, s'appelle le sous-espace propre associé à λ.

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x, 0)$. f a deux valeurs propres : 0 et 1.

Proposition.
Si α et β sont deux valeurs propres distinctes de f alors : $E_\alpha \cap E_\beta = \{0_E\}$.

1.4.2 Polynôme caractéristique

Définition.
$P_A(x) = det\,(A - xI)$ est un polynôme de degré n, appelé **polynôme caractéristique** de A (ou polynôme caractéristique de f). (Il ne dépend pas de la base choisie.)

Théorème.
$\lambda\in sp(f) \Longleftrightarrow P_A(\lambda) = 0$. (C'est-à-dire λ est racine du polynôme caractéristique de f.)
Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système $(A - \lambda I_n)\, X = 0$.

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x + 3y, x - y)$.
Déterminer les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés.

Remarque :
Soit m_λ la multiplicité de la racine λ du polynôme $P_A(x)$ alors $1 \leqslant dim\,(E_\lambda) \leqslant m_\lambda$.

Théorème. Théorème de Cayley-Hamilton
$P_A(A) = 0$ où 0 est la matrice nulle. (P_A s'appelle un polynôme annulateur de A.)

Exemple Application

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

1.4.3 Diagonalisation

Définition.
f est **diagonalisable** s'il existe une base B' de E dans laquelle la matrice de f est diagonale :

$$mat_{B'}(f) = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si P est la matrice de passage de B à B' : $A' = P^{-1}AP$.

Théorème. Conditions de diagonalisation
f est diagonalisable si (avec les notations précédentes) $\forall \lambda \in sp(f),\ dim(E_\lambda) = m_\lambda$.
Cas particulier : Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Exemple

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Application au calcul de la puissance d'une matrice.

Exemple

Calculer A^n ($\forall n \in \mathbb{N}$) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.5 Exemples

Exemple 1
Pile ou Face ?

On jette une pièce 100 fois de suite. Faut-il s'attendre à trouver (au moins) une série d'au moins 5 piles de suite ?

Exemple 2
Quel acronyme ?

Les enseignants de mathématiques d'un IUT hésitent entre une généralisation de l'enseignement de la théorie des graphes à plusieurs département et un statu quo. N'arrivant pas à se décider, ils décident de faire tirer au hasard les lettres T et G par un ordinateur. La première des deux séquences TGG (Théorie des Graphes Généralisée) et GGT (Généralisation des Graphes Temporisée) qui apparaîtra donnera la décision finale.

Quelle est la probabilité pour chacune des deux décisions possibles ?

1.6 Comportement asymptotique des chaînes de Markov

Proposition.
Une matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène admet 1 comme valeur propre.

Théorème. Théorème de Perron-Frobenius pour les chaines de Markov
Soit T la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène.
Si tous ses coefficients sont strictement positifs, alors :

- 1 est une valeur propre *simple*, associée à un vecteur propre dont tous les coefficients sont positifs
- toutes ses valeurs propres sont inférieures à 1 (en module)

Proposition. Corollaire 1
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition T.
Si tous ses coefficients sont strictement positifs, alors :

- il existe une unique probabilité invariante $V = (v_0; v_1; \dots; v_k)$
- quelque soit la distribution initiale de la chaîne, X_n converge en loi vers V quand n tend vers ∞,

C'est-à-dire qu'on a pour tous les états i, j : $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i) = v_j$.

Proposition. Corollaire 2 (plus général)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition T.
S'il existe un entier m tel que T^m a tous ses coefficients strictement positifs, alors :

- il existe une unique probabilité invariante $V = (v_0; v_1; \dots; v_k)$
- quelque soit la distribution initiale de la chaîne, X_n converge en loi vers V quand n tend vers ∞,

1.7 Exercices

1.7.1 Vecteurs et valeurs propres

Exercice 1.1 Diagonaliser les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire,$\forall n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 1.3 Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.
On considère le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$
2. Diagonaliser A, puis en déduire A^n
3. Montrer par récurrence sur n que $X_n = A^n X_0$. En déduire u_n.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

1.7.2 Chaînes de Markov

Exercice 1.4 On considère une chaîne de Markov à trois états, dont la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

1. Donner une représentation graphique de l'espace des états et des transitions.
2. Vérifier que la chaîne est irréductible.
3. Calculer la probabilité invariante.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice de transition ainsi que les espaces propres associés.
5. On donne la matrice P ci-dessous ainsi que sa matrice inverse :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 9 \\ 1 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

   En déduire une preuve que la chaîne admet comme probabilité limite la probabilité invariante.

Exercice 1.5 On considère une chaîne de Markov à quatre états, dont la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une représentation graphique de l'espace des états et des transitions.
2. Est-ce une chaîne de Markov irréductible ?
3. Déterminer les éléments récurrents pour cette chaîne.

4. Déterminer la ou les mesures stationnaires.

Exercice 1.6 Mêmes questions que l'exercice 1.5 page 9 pour la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.7 On considère une chaîne de Markov à quatre états, dont la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner une représentation graphique de l'espace des états et des transitions.
2. Donner les classes de la chaîne.
3. Déterminer toutes les probabilités stationnaires de la chaîne.
4. Déterminer le comportement asymptotique de la chaîne.

Exercice 1.8 On considère une chaîne de Markov à trois états, dont la matrice de transition est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner une représentation graphique de l'espace des états et des transitions.
2. Vérifier que la chaîne est irréductible.
3. Calculer la probabilité invariante.
4. Calculer M^n pour tout n. La chaîne possède-t-elle une probabilité limite ?
5. Comment interpréter la probabilité invariante (dans ce cas précis) ?

Exercice 1.9 On lance indéfiniment un dé à 4 faces (un tétraèdre régulier) non pipé pour définir le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $X_i =$ le maximum des i premiers lancés du dé.

On admettra que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

1. Donner la matrice de transition de la chaîne et une représentation graphique de celle-ci.
2. Déterminer le statut (transitoire ou récurrent) des états de la chaîne
3. Montrer que la chaîne possède comme probabilité limite son unique probabilité invariante.
4. Calculer le nombre moyen de lancés nécessaires pour atteindre l'état absorbant de la chaîne.

Exercice 1.10 Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité de $0,75$. Au jour 0, le réverbère est éteint.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. On note T la matrice de transition. Vérifier que $T = N - \frac{1}{2}R$, où $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   Calculer N^2, R^2, NR, RN, puis en déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Au jour 0, le réverbère est éteint (resp. allumé). Calculer la probabilité que le réverbère soit éteint (resp. allumé) au $n^{\text{ième}}$ matin.
4. La chaîne admet-elle une probabilité limite ?

1.8 Moteur de recherche - Google (problème)

1.8.1 Problématique

Lorsque l'on utilise le moteur de recherche de Google pour une requête quelconque, celui-ci nous retourne toute une liste de liens qui sont ordonnés par « pertinence ». Il se trouve qu'effectivement, en général, les premiers liens correspondent assez bien à l'objet de la recherche alors que les derniers (ou tout simplement ceux qui sont trop loin dans la liste), même s'ils comportent les mots clés sont beaucoup moins pertinents. La question se pose alors de savoir comment Google « devine » quelles sont les pages qui nous intéressent le plus. L'algorithme utilisé pour répondre à cette question est appelé « PageRank ». L'objet de l'exercice est de découvrir le fonctionnement de cet algorithme.

Pour étudier cette algorithme, on va réduire la Toile qui comporte des milliards de pages à un internet nettement plus modeste avec seulement quelques pages.

On modélisera la Toile par un graphe orienté dont les nœuds sont les pages et un arc correspondra à un lien d'une page vers une autre. De plus, on supposera qu'un « promeneur » choisit de suivre un des liens proposés par la page où il se trouve de manière impartiale (c'est-à-dire les chances de cliquer sur les différents liens sont équiprobables).

On considère la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les positions du promeneur à l'instant n, à valeurs dans T l'ensemble des pages de notre Toile simplifiée.

1.8.2 Étude du PageRank simplifié

On considère que le graphe de cette Toile simplifiée est celui de la figure 1.3 (avec $T = \{A; B; C; D; E\}$).

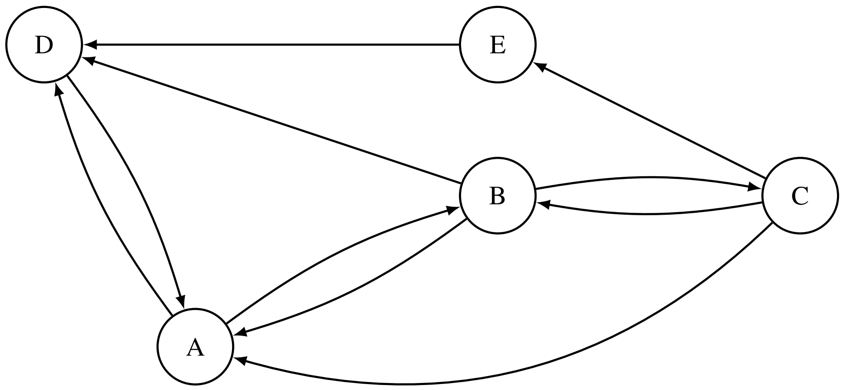


FIGURE 1.3 – PageRank - Exemple 1

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
2. Donner sa matrice de transition.
3. Donner une représentation graphique de l'espace des états et des transitions.
4. Vérifier que la chaîne est irréductible.
5. Calculer la probabilité invariante que l'on notera π.

Définition.
Le rang donné à la page numéro i par l'algorithme PageRank « simplifié » est la composante π_i correspondant à cette page dans le vecteur π. Les pages sont ensuite ordonnées par leurs rangs.

6. Quelle est la page de plus grand PageRank (qui sera donc retournée en tête de liste) ?
7. Quel est l'ordre des 5 pages ?

Une autre façon de voir les choses est de considérer que chaque page transmet une part équitable de son rang (ou sa « popularité ») aux pages vers lesquelles elle pointe.

8. À partir des rangs donnés par π, montrer que cette façon de voir le PageRank est bien cohérent avec les résultats.

1.8.3 PageRank « affiné »

On considère maintenant que le graphe de la Toile est celui de la figure 1.4 (avec $T = \{A; B; C; D; E; F; G\}$).

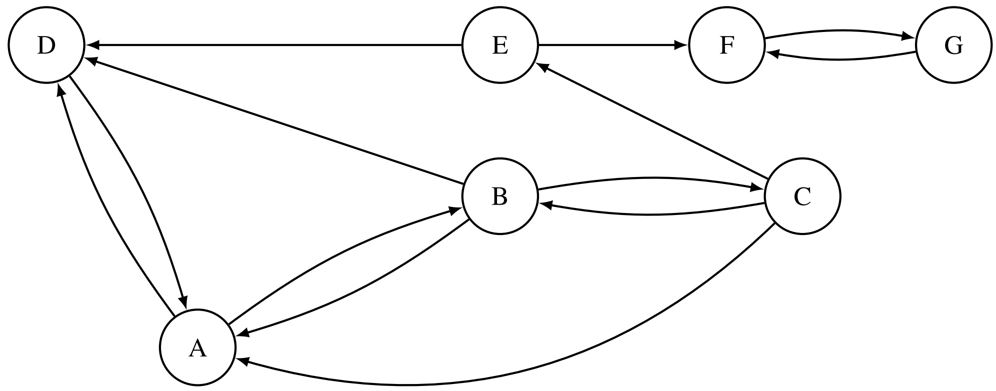


FIGURE 1.4 – PageRank - Exemple 2

De même que précédemment, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

1. Donner sa matrice de transition.
2. Donner une représentation graphique de l'espace des états et des transitions.
3. Déterminer le statut (transitoire ou récurrent) des états de la chaîne.
4. La chaîne est-elle irréductible ? Si non, donner ses classes.
5. Calculer la(les) probabilité(s) invariante(s).
6. Pourquoi ce résultat n'est-il pas surprenant ? Quelle est sa signification ?
7. Les conditions du théorème de Frobenius sont-elles respectées ?
8. La chaîne admet-elle une probabilité limite ?

On voit donc dans ce cas que le résultat fourni n'est pas satisfaisant. On va donc améliorer l'algorithme. Pour cela, on va prendre en compte les « envies » du promeneur qui pourra choisir, au lieu de suivre un lien, d'aller sur une autre page comme bon lui semble.

On va donc introduire une matrice M_e des envies du promeneur. cette matrice doit être elle-même une matrice de transition. La nouvelle matrice modélisant notre Toile est alors :

$$Q = \alpha P + (1-\alpha)M_e, \text{ avec } \alpha \in [0;1]$$

9. Montrer que Q est une matrice de transition.

Dans l'algorithme du PageRank, la matrice M_e est construite en donnant à toutes les pages la même importance, c'est-à-dire, si la Toile comporte N pages, tous les coefficients de la matrice valent $\frac{1}{N}$.

En prenant $\alpha = 0$, on considère que le promeneur ne suit que ses envies et ignore complètement les liens présents sur les pages. À l'autre extrémité, en prenant $\alpha = 1$, ce sont les envies du promeneur qui sont complètement ignorées (comme dans l'étude précédente du PageRank simplié).

Pour la suite on prendra $\alpha = 0,85$.

10. Les conditions du théorème de Frobenius sont-elles respectées avec l'amélioration proposée ci-dessus ?
11. Déterminer la probabilité stationnaire de la chaîne.
12. Déterminer le comportement asymptotique de la chaîne.
13. Quelle est la page de plus grand PageRank (qui sera donc retournée en tête de liste) ?
14. Quel est l'ordre des 7 pages ?

2 Graphes

2.1 Graphes orientés (rappels)

Définition. (Graphe orienté)

- Un graphe orienté G est un objet mathématique constitué d'un ensemble non vide fini S de points appelés sommets, et d'un ensemble fini A d'arcs. À chaque arc a_i est associé un couple d'éléments de S.
  Si on note ce couple (s_i, s_f), s_i s'appelle l'extrémité initiale (ou l'origine) de l'arc et s_f s'appelle l'extrémité finale de l'arc. s_i s'appelle aussi le prédécesseur de s_f et s_f le successeur de s_i.
  On notera $G = (S, A)$.
- L'arc $a = (s_i, s_f)$ est dit « sortant » du sommet s_i et « entrant » sur le sommet s_f.
- On notera $\Gamma^+(s)$ (respectivement $\Gamma^-(s)$) l'ensemble des successeurs (respectivement prédécesseurs) du sommet s et $d^+(s)$ (respectivement $d^-(s)$) le cardinal de celui-ci.
  $d^+(s)$ s'appelle le demi degré extérieur de s et $d^-(s)$ le demi degré intérieur.
- On dit que le graphe orienté est simple si pour tout couple de sommets (s, s'), il y a au plus un arc associé à ce couple. Dans le cas des graphes orientés simples, on confondra donc l'arc et le couple qui lui est associé.

Définition. (Chemin)

- Un chemin est une suite $\mu = (s_0; a_0; s_1; a_1; s_2; \ldots; s_{(n-1)}; a_{(n-1)}; s_n)$, telle que :
  - la suite commence et finit par un sommet,
  - la liste alterne les sommets et les arcs,
  - pour tout i entier compris entre 1 et n, $a_{i-1} = (\ s_{i-1}\ ;\ s_i\ )$.

  s_0 et s_n sont appelés, respectivement, extrémités initiale et finale du chemin.
- Un chemin est dit fermé si son extrémité initiale et son extrémité finale sont les mêmes.
- Un chemin est dit simple si il ne passe pas deux fois par le même arc.
- Un circuit est un chemin simple et fermé.

Définition. (Matrice d'adjacence)

- Soit G un graphe orienté simple d'ordre n, on numérote ses sommets de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A = (a_{i,j})$, où $a_{i,j} = 1$ si un arc va du sommet i vers le sommet j, 0 sinon.

Définition. (Graphes valués)

- On appelle graphe valué (ou pondéré), un graphe dont les arcs ont été munis d'une valeur numérique. Cette valeur peut représenter par exemple un temps de parcours entre 2 sommets ou la distance entre ceux-ci. On notera l_{xy} la valeur associée à l'arc (x, y).
- La longueur d'un chemin est égale à la somme des valeurs des arcs qui le constitue.

Remarques :

- On ne considèrera dans ce cours que des valuations positives.
- On peut considérer un graphe non valué comme valué en donnant aux arcs la valeur 1 par défaut. Dans ce cas, la longueur d'un chemin est donc le nombre d'arcs qui le constitue.

Définition. (Matrice des distances)

- Soit G un graphe orienté valué et simple d'ordre n, on numérote ses sommets de 1 à n. On appelle matrice des distances du graphe la matrice $D = (a_{i,j})$, où $a_{i,j} = l_{ij}$ si l'arc (i, j) existe, ∞ sinon.

2.2 Dictionnaire

Outre une représentation matricielle à l'aide d'une matrice d'adjacence, un graphe peut être représenté par un tableau, appelé **dictionnaire** des précédents (respectivement des suivants), qui à chaque sommet énumère ses prédécesseurs (respectivement ses successeurs).

Exemple

Détermination du dictionnaire des suivants pour le graphe de la figure 2.1.

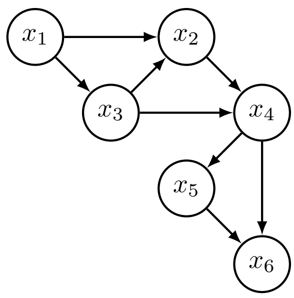


FIGURE 2.1 – Graphe - Exemple de dictionnaire

Dictionnaire des suivants :

Sommets x	Suivants $S(x)$
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	
x_5	
x_6	

Dictionnaire des précédents :

Sommets x	Précédents $P(x)$
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	
x_5	
x_6	

2.3 Niveau

Définition. (Niveau)

- Dans un graphe non valué sans circuit, le **niveau** d'un sommet x est la longueur du plus long chemin d'extrémité x. Si le graphe est valué, on ne tient pas compte de la valuation des arcs pour déterminer les niveaux.

La détermination des niveaux se fait à partir du dictionnaire des précédents.

Algorithme 1 : Algorithme de détermination des niveaux

/* On notera : */
/* C_i l'ensemble des sommets de niveau i, */
/* T l'ensemble des sommets dont le niveau a été déterminé, */
/* S l'ensemble des sommets */

- C_0 est l'ensemble des sommets sans précédents.
- $\forall i \neq 0,\ C_i \leftarrow \emptyset$
- $T \leftarrow C_0$
- $k \leftarrow 0$

while $\underline{T \neq S}$ **do**
- On barre les sommets de niveau k partout où ils figurent dans la colonne $P(x)$
- Pour tout x tel que $x \notin T$ et qui a tous ses prédécesseurs barrés, $x \in C_{k+1}$
- $T \leftarrow T \cup C_{k+1}$
- $k \leftarrow k + 1$

end

Exemple

Déterminer le niveau des sommets du graphe de la figure 2.2.

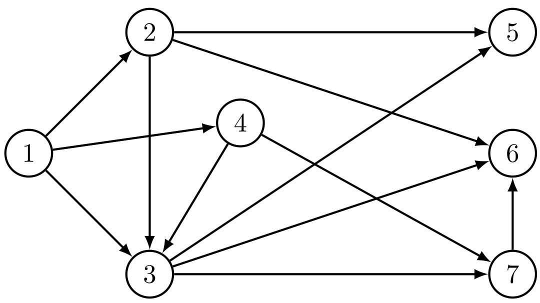


FIGURE 2.2 – Graphe - Exemple de détermination des niveaux

- **Étape 0**

$C_0 =$

Sommets x	Précédents $P(x)$
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	
x_5	
x_6	
x_7	

- **Étape 1**

Sommets x	Précédents $P(x)$
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	
x_5	
x_6	
x_7	

$C_1 =$

- **Étape 2**

Sommets x	Précédents $P(x)$
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	
x_5	
x_6	
x_7	

$C_2 =$

- **Étape 3**

Sommets x	Précédents $P(x)$
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	
x_5	
x_6	
x_7	

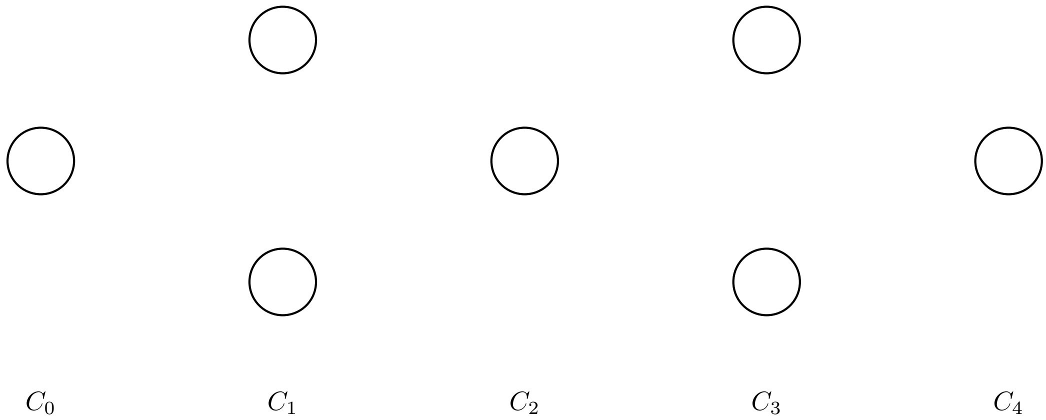
$C_3 =$

- **Étape 4**

Sommets x	Précédents $P(x)$
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	
x_5	
x_6	
x_7	

$C_4 =$

Représentation du graphe par niveaux :



2.4 Chemins extrémaux

2.4.1 Chemin de valeur maximale

L'algorithme de Ford va nous permettre de déterminer le chemin de valeur maximale entre un sommet D (Début) et un sommet F (Fin).

1. On ordonne le graphe par niveaux et on fait la représentation du graphe par niveau.
2. À partir de cette représentation, on supprime les sommets et les arcs par lesquels on ne peut pas passer pour aller de D à F. (Les sommets de niveau inférieur ou égal à celui de D et ceux de niveau supérieur ou égal à celui de F.)
3. On associe à chaque sommet x une marque $(m(x); p(x))$, $m(x)$ correspondant à la valeur du chemin de valeur maximale aboutissant à x et $p(x)$ correspondant au prédécesseur de x permettant d'obtenir cette valeur maximale.

Les marques sont alors obtenues avec l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Algorithme de Ford

- $m(D) \leftarrow 0$; $p(D) \leftarrow \emptyset$
- $\forall s \neq D, m(s) \leftarrow \infty$ et $p(s) \leftarrow \emptyset$
- $k \leftarrow 1$

while $m(F) = \infty$ **do**

- On affecte à tous les sommets y de niveau k la marque

  $m(y) = \underset{x \in \Gamma^-(y)}{Max} [m(x) + l_{xy}]$

  $p(y) = z$ tel que $z \in \Gamma^-(y)$ et $m(z) + l_{zy} = \underset{x \in \Gamma^-(y)}{Max} [m(x) + l_{xy}]$
- $k \leftarrow k + 1$

end

La marque de F donnera donc la valeur du chemin de valeur maximale entre D et F. Le chemin de valeur maximale est le chemin qui a permis d'aboutir à la marque de F. Il est obtenu en partant de F et en remontant les prédécesseurs successifs (à l'aide de la marque p) jusqu'à D.

Exemple

Déterminer le chemin le plus long du sommet 1 au sommet 9 pour le graphe de la figure 2.3.

2.4.2 Chemin de valeur minimale

Pour un chemin de longueur minimale, il suffit de remplacer « Max » par « Min » dans l'algorithme précédent.

Exemple

Déterminer le chemin le plus court du sommet 4 au sommet 7 pour le graphe de la figure 2.3.

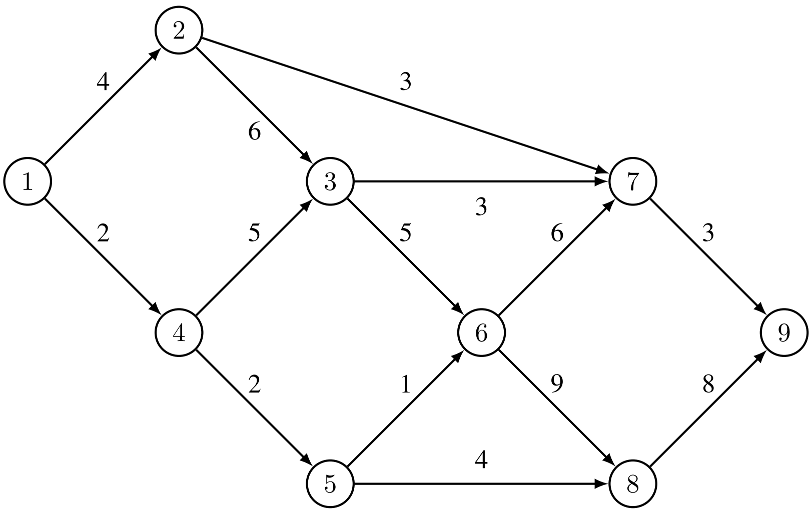


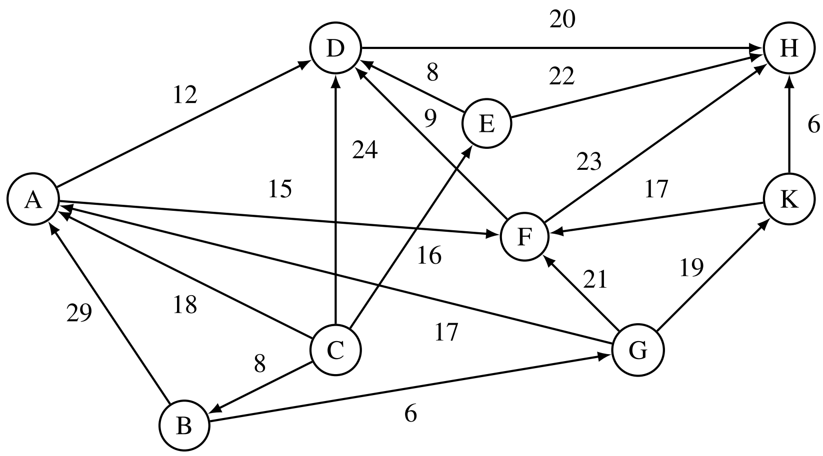
FIGURE 2.3 – Graphe - Chemin maximal/minimal

2.5 Exercices

Exercice 2.1 Tracer le diagramme sagittal du graphe défini par son dictionnaire des suivants (ci-dessous) puis déterminer le chemin le plus long et le chemin le plus court du sommet A au sommet P.

Sommet	Suivant(s) (coût)
A	B (5), C (9), D (4)
B	E (3), F(2)
C	D (4), F (1)
D	G (7)
E	H (4), I (2), J(9)
F	G (3), J (9), K (6)
G	K (7), O (5)
H	L (5)
I	H (3), M(10)
J	I (6), M(5), N(1)
K	N (2)
L	P (9)
M	L (4), N(3)
N	P (4)
O	N (4), P(3)
P	-

Exercice 2.2 A partir du graphe ci-dessous, déterminer le chemin le plus long entre le sommet de niveau le plus faible et le sommet de niveau le plus élevé.
Quelle est sa longueur ?



Exercice 2.3 Pour envoyer des données d'un serveur initial S_I à un serveur final S_F, il y a plusieurs solutions possibles, passant par un certain nombre d'autres serveurs notés de A à H.

L'informaticien chargé de la programmation souhaite connaître quel est la durée minimum nécessaire pour transmettre ses données. Le tableau ci-dessous indique les différentes durée de transmission, exprimées en *ms*, entre les serveurs susceptibles d'être empruntés.

	S_I	A	B	C	D	E	F	G	H	S_F
S_I	0			18	15	10				
A		0								2
B			0				10			
C			5	0	12					
D		13			0		14	7	9	
E					8	0				
F							0			6
G		5						0		14
H							4		0	
S_F										0

1. Après avoir représenté le graphe ordonné par niveaux, déterminer le chemin le plus court, ainsi que la durée correspondante.

2. Dans le cas où plusieurs serveurs tomberaient en panne, l'informaticien souhaite connaître la durée maximum que mettra l'information pour être transmise du serveur S_I au serveur S_F. Déterminer cette durée.

3 ORDONNANCEMENT

Un problème d'ordonnancement consiste à ordonner dans le temps un ensemble de tâches contribuant à la réalisation d'un même projet. L'objectif est de minimiser la durée de réalisation du projet compte tenu des contraintes d'antériorité reliant les différentes tâches. De plus, on détermine les calendriers de réalisation de chacune de ces tâches ainsi que les marges de manœuvre associées.

Deux méthodes sont classiquement utilisées et présentées dans ce fascicule :

- la méthode MPM (**M**éthodes des **P**otentiels **M**etra),
- la méthode PERT (**P**rogramm **E**valuation and **R**esearch **T**ask).

Toutes les deux utilisent une représentation graphique pour résoudre le problème.

3.1 La méthode MPM

3.1.1 Construction du graphe / Principe de la représentation

- Un sommet correspond à une tâche.
- Un arc définit une relation d'antériorité.
- La valeur de l'arc définit le temps minimum qui doit s'écouler entre le début de la tâche d'origine et le début de la tâche extrémité. Lorsque les contraintes sont uniquement des contraintes de succession, la valeur de l'arc sera donc égale à la durée de la tâche d'origine.
- La représentation graphique est ordonnée suivant les niveaux des sommets (i.e. des tâches).
- Chaque sommet de la représentation graphique est figuré par un rectangle du type :

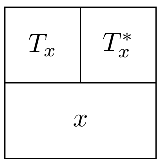


FIGURE 3.1 – Sommet - Méthode MPM

  où :

  - x désigne le nom de la tâche,
  - T_x la date de début au plus tôt de la tâche,
  - T_x^* la date de début au plus tard de la tâche.

- Un sommet terminal permettant de dater la fin des travaux est rajouté au graphe.
- On rajoute parfois un sommet initial fictif associé à une tâche de durée 0.

3.1.2 Détermination du calendrier au plus tôt

Une tâche x ne pouvant débuter que lorsque toutes les tâches qui y aboutissent sont terminées, T_x correspond à la valeur du chemin de valeur maximale aboutissant à x. Ceci sera obtenu en utilisant l'algorithme de Ford, après avoir ordonné le graphe par niveaux des tâches. Les tâches de niveau 0 peuvent commencer immédiatement, ainsi pour ces tâches $T_x = 0$.

Pour le sommet terminal z, T_z correspond à la durée minimale du projet (qui correspond au chemin de valeur maximale aboutissant à z). Le chemin de valeur maximale associé est appelé chemin critique, constitué de tâches critiques : un retard sur l'une de tâches critiques entraînerait un allongement de la durée du projet.

3.1.3 Détermination du calendrier au plus tard

Il s'agit de déterminer pour chaque tâche x une date de début au plus tard T_x^* telle que T_z (date de fin des travaux au plus tôt) ne soit pas retardée.

L'algorithme traite les sommets du niveau le plus élevé jusqu'au niveau le plus faible.

On dit qu'un sommet x est marqué lorsque T_x^* a été déterminé.

Algorithme 3 : Algorithme - début au plus tard

/* On notera : z le sommet terminal */
/* C_n l'ensemble des sommets de niveau n */
- $T_z^* \leftarrow T_z$
- $\forall x \neq z, T_x^* \leftarrow \infty$
- $k \leftarrow$ Niveau du sommet z

while $\underline{\forall x \in C_0, T_x^* = \infty}$ **do**
- $\forall u \in C_{k-1} : T_u^* \leftarrow \underset{v \in \Gamma^+(u)}{Min} [T_v^* - l_{uv}]$
- $k \leftarrow k - 1$

end

Remarque : Sur toutes les tâches critiques $T_x^* = T_x$.

3.1.4 Marges totales

C'est le retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route d'une tâche sans remettre en cause les dates au plus tard des tâches suivantes (donc sans retarder la fin des travaux).

Pour une tâche x, cette marge totale est donc égale à $M_{tot}(x) = T_x^* - T_x$.

3.1.5 Marges libres

C'est le retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route d'une tâche sans remettre en cause les dates au plus tôt des tâches suivantes.

Pour une tâche x, cette marge libre est donc égale à $M_L(x) = \underset{y \in \Gamma^+(x)}{Min} [T_y - T_x - l_{xy}]$.

3.2 La méthode PERT

3.2.1 Construction du graphe / Principe de la représentation

- À chaque tâche correspond un arc du graphe.
- La valeur de l'arc représente la durée de la tâche.
- Chaque sommet du graphe est une étape (ou un évènement) signifiant :
  - Toutes les tâches qui y arrivent sont terminées.
  - Toutes les tâches qui en partent peuvent commencer.

Exemple

Le graphe de la figure 3.2 signifie : a et b doivent être terminées pour que c et d puissent commencer.

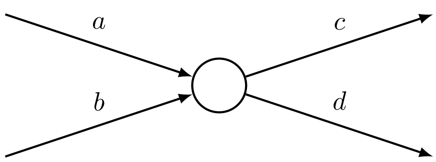


FIGURE 3.2 – Méthode PERT - Principe

Remarque 1 : La représentation de certaines relations d'antériorité nécessite en PERT l'introduction de tâches fictives de durée 0.

Exemple

Si a et b sont antérieurs à c et b est antérieur à d.
La représentation de la figure 3.2 est incorrecte car elle impliquerait que a précède d, ce qui n'est pas une donnée du problème.
On utilise donc une tâche fictive (figure 3.3).

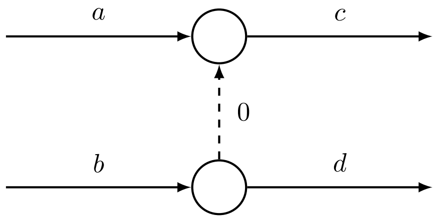


FIGURE 3.3 – Méthode PERT - Tâche fictive

Remarque 2 : En général, deux arcs ne peuvent pas avoir à la fois la même origine et la même extrémité. Dans ce cas, il est donc nécessaire de rajouter une tâche fictive.

Exemple

FIGURE 3.4 – Méthode PERT - Arcs parallèles

- Chaque sommet de la représentation graphique est figuré par un cercle du type :

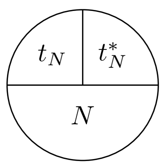


FIGURE 3.5 – Sommet - Méthode PERT

où :

- N désigne le numéro de l'étape,
- t_N la date attendue de l'évènement N (date de début au plus tôt),
- t_N^* la date limite de l'évènement N (de début au plus tard).

- On ajoute un sommet initial d'où partent toutes les tâches dont la mise en route n'est soumise à aucune contrainte d'antériorité.
- On ajoute un sommet final (en général noté Z) auquel aboutissent toutes les tâches n'ayant pas de suivantes.

La représentation graphique est ordonnée par niveaux des sommets, c'est à dire des étapes (et non des tâches).

3.2.2 Détermination du calendrier au plus tôt des étapes

Une étape N ne pouvant débuter que lorsque toutes les étapes qui y aboutissent sont terminées, t_N correspond à la valeur du chemin de valeur maximale aboutissant à N. Ceci sera obtenu en utilisant l'algorithme de Ford, après avoir ordonné le graphe par niveaux des étapes. L'étape initiale peut commencer immédiatement, ainsi $t_1 = 0$.

Pour le sommet terminal Z, t_Z correspond à la durée minimale du projet (qui correspond au chemin de valeur maximale aboutissant à Z). Le chemin de valeur maximale associé est appelé chemin critique, constitué d'étapes critiques : un retard sur l'une des étapes critiques entraînerait un allongement de la durée du projet.

3.2.3 Détermination du calendrier au plus tôt des tâches

La date de début au plus tôt d'une tâche x est égale à la date de début au plus tôt de l'étape dont elle est issue : $T_x = t_N$ si la tâche x est issue de l'étape N.

3.2.4 Détermination du calendrier au plus tard des étapes

Il s'agit de déterminer pour chaque étape N une date de début au plus tard t^*_N telle que t_Z (date de fin des travaux au plus tôt) ne soit pas retardée.

L'algorithme traite les sommets du niveau le plus élevé jusqu'au niveau le plus faible.

On dit qu'un sommet N est marqué lorsque t^*_N a été déterminé.

Algorithme 4 : Algorithme - début au plus tard des étapes

/* On notera : Z le sommet terminal */
/* C_n l'ensemble des sommets de niveau n */
- $t^*_Z \leftarrow t_Z$
- $\forall X \neq Z, t^*_X \leftarrow \infty$
- $k \leftarrow$ Niveau du sommet Z

while $\underline{\forall x \in C_0, t^*_X = \infty}$ **do**
- $\forall U \in C_{k-1} : t^*_U \leftarrow \underset{V \in \Gamma^+(U)}{Min} [t^*_V - l_{UV}]$
- $k \leftarrow k - 1$

end

Remarque : Sur toutes les étapes critiques $t^*_N = t_N$.

3.2.5 Détermination du calendrier au plus tard des tâches

La date de début au plus tard d'une tâche x est égale à la date de début au plus tard de l'étape à laquelle elle aboutit, diminuée de la durée de la tâche.

$T^*_x = t^*_N - l_{MN}$ si la tâche x va du sommet M au sommet N.

Remarque : Sur les tâches critiques, $T^*_x = T_x$.

3.2.6 Marges totales

De même que dans la méthode MPM, c'est le retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route d'une tâche sans remettre en cause les dates au plus tard des tâches suivantes (donc sans retarder la fin des travaux).

Pour une tâche x, cette marge totale est donc égale à $M_{tot}(x) = T^*_x - T_x$.

3.2.7 Marges libres

Là encore, de même que dans la méthode MPM, c'est le retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route d'une tâche sans remettre en cause les dates au plus tôt des tâches suivantes.

Pour une tâche x, qui va du sommet M au sommet N, cette marge libre est donc égale à :

$$M_L(x) = t_N - t_M - l_{MN}$$

Remarque : Si du sommet d'arrivée N ne partent que des tâches fictives, on retiendra le minimum sur tous les premiers sommets suivants d'où partent au moins une tâche réelle.

3.3 Exercices

Exercice 3.1 La réalisation d'un projet nécessite l'accomplissement d'un certain nombre de tâches qui ont été recensées ci-dessous :

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Précédences	-	-	-	A	B	B	B	C, F	D, E
Durée [jours]	3	9	5	8	4	7	20	6	5

A l'aide de la méthode MPM, déterminer les calendriers au plus tôt et au plus tard, le chemin critique, les marges totales et libres du projet.

Exercice 3.2 La construction d'une maison se décompose en plusieurs tâches décrites dans le tableau ci-dessous. Ce dernier donne également les précédentes à respecter lors de la planification des travaux ainsi qu'une estimation de la durée de chacune des tâches.

Tâches	Désignation Tâche	Durée	Prédécesseurs
A	Cmd et livraison câblage	3	-
B	Pose câblage	4	A, I
C	Inspection câblage	1	B
D	Cmd et livraison mat plomberie	4	-
E	Travaux plomberie extérieure	2	H, D
F	Travaux plomberie extérieure	5	I, D, E
G	Terrassement	1	-
H	Fondation	3	G
I	Construction ossature	5	H
J	Cmd et livraison brique	6	-
K	Briquetage	3	J, I
L	Cmd et livraison tuile	14	-
M	Construction charpente	2	I
N	Pose couverture	2	M, L
O	Revêtement intérieur	3	M, C, F
P	Aménagement intérieur	3	N, O
Q	Inspection générale	2	P, S
R	Nettoyage extérieur	1	N, K, O
S	Aménagement extérieur	3	R

1. Représenter l'ensemble des contraintes à l'aide d'un graphe.
2. Déterminez une durée totale minimale de construction en exhibant un chemin critique dans le graphe précédent. (Vous utiliserez la méthode MPM.)

Exercice 3.3 Représenter le réseau PERT correspondant à la table de tâches dans les différents cas.

Vous utiliserez le moins de tâches fictives possible.

1.

Tâches	A	B	C	D
Prédécesseurs	-	-	A, B	B

2.

Tâches	A	B	C	D
Prédécesseurs	-	A	A	B, C

3.

Tâches	A	B	C	D	E	F
Prédécesseurs	-	-	A	A	B, D	C, E

4.

Tâches	A	B	C	D	E	F
Prédécesseurs	-	A	A	B, C	B, C	D, E

5.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Prédécesseurs	-	A	B	C, G	D, H, K, M	A	F	F	F	I, L	A	A	B

6.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Prédécesseurs	-	A	B, D, G, I, E	A, G, K	G	K	A	G	A, F, H, J, K	A	G

7.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G
Prédécesseurs	-	-	A	C	A, B	C, E	D, F

8.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Prédécesseurs	-	-	-	A	B	C	D	A, E	B,F	G, H, I

9.

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Prédécesseurs	-	A	B	-	-	A, D	D, E	C, F, G

Exercice 3.4 Reprendre l'exercice 3.2 page 25 et le résoudre avec la méthode PERT.

Exercice 3.5 La réalisation d'un projet nécessite l'accomplissement d'un certain nombre de tâches qui ont été recensées ci-dessous :

Tâche	Tâches immédiatement antérieures	Durée	Tâche	Tâches immédiatement antérieures	Durée
A	Q	28	K	N , S	26
B	C , L	14	L	D	12
C	E , M	9	M	-	8
D	-	6	N	B , P	16
E	-	7	P	C , F	11
F	E , R	15	Q	B , H	15
H	L	10	R	-	12
J	F	5	S	P , J	13

Déterminer le graphe PERT correspondant, puis les calendriers au plus tôt et au plus tard, le chemin critique, les marges totales et libres du projet.

Exercice 3.6 Un projet se décompose en plusieurs tâches décrites dans le tableau ci-dessous. Ce dernier donne également les contraintes à respecter lors de la planification du projet, y compris la durée de chacune des tâches.

Tâche	Tâches antérieures	Durée	Tâche	Tâches antérieures	Durée
A	G, M	7	H	G, M	4
B	H, I	7	I	D	8
C	B^*+2	2	J	A, K	12
D	-	3	K	-	7
E	H	5	L	C, E	7
F	B, L	1	M	D	6
G	-	5			

B^*+2 signifie que la tâche peut commencer deux jours après le début de B.

Déterminer la durée minimale du projet à l'aide de la méthode PERT.
Quelles sont les tâches critiques ?

Exercice 3.7 Un projet se décompose en plusieurs tâches décrites dans le tableau ci-dessous. Ce dernier donne également les contraintes à respecter lors de la planification du projet, y compris la durée de chacune des tâches.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Tâches antérieures	-	-	A	B	A, B	A^*+4	C, D, E	B+5	F, H
Durée	7	5	6	8	3	5	6	5	4

- A^* + 4 signifie que la tâche peut commencer quatre jours après le début de A
- B+5 signifie que la tâche ne peut commencer que cinq jours après la fin de B

Déterminer la durée minimale du projet à l'aide de la méthode PERT.
Quelles sont les tâches critiques ?

Exercice 3.8 Un projet se décompose en plusieurs tâches décrites dans le tableau ci-dessous. Ce dernier donne également les contraintes à respecter lors de la planification du projet, y compris la durée de chacune des tâches.

Tâche	Tâches antérieures	Durée	Tâche	Tâches antérieures	Durée
A	G, M	7	J	A, L	12
B	H	7	K	-	7
C	E, Q, N	10	L	K, O	1
D	-	3	M	I	6
E	H	5	N	A, L	1
F	B, P	1	O	G, M	5
G	-	5	P	E, N, Q	7
H	G,M	4	Q	H^*+2	2
I	D	8			

H^*+2 signifie que la tâche peut commencer deux jours après le début de H.

Déterminer la durée minimale du projet à l'aide de la méthode PERT.
Quelles sont les tâches critiques ?

---

4 BIBLIOGRAPHIE

[1] M. QUEYSANNE, *Algèbre*, Armand Colin, 1967

[2] J. DIXMIER, *Cours de mathématiques du premier cycle (première année)*, Gauthier-Villars, 1976

[3] P. VARIOT, *Cours de mathématiques - BTS / IUT*, ellipses, 1991

[4] P. VARIOT, *Exercices corrigés de mathématiques - BTS / IUT*, ellipses, 1991

[5] T. ALHALEL, F. ARNAL, L. CHANCOGNE, *Mathématiques IUT 1ère année*, Dunod, 2011

[6] T. ALHALEL, F. ARNAL, L. CHANCOGNE, *Mathématiques IUT 2ère année*, Dunod, 2013

[7] JM. MENY, G. ALDON, L. XAVIER, *Introduction à la théorie des graphes*, CRDP Lyon, 2005

[8] ROSEAUX, *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle*, Dunod, 1998

[9] ROSEAUX, *Recherche opérationnelle*, Dunod, 2004

[10] F.DROESBEKE, M.HALLIN, CI.LEFEVRE, *Les graphes par l'exemple*, ellipses, 1987