سوالات سری چهارم

دانشگاه شهید بهشتی ، دانشکده فیزیک

۱۶ آبان ماه ۱۴۰۲

مهلت تحویل : ۲۳ آبان

۱ دترمینان

۱. ثابت کنید $det(AB) = det(A)det(B)$.

۲. نشان دهید در حالت کلی ، $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$.

۳. ثابت کنید اگر O یک ماتریس متعامد باشد ، آنگاه $det(O) = \pm 1$.

۴. اگر A یک ماتریس $N \times N$ باشد و دارای شکل بلوکی زیر باشد

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ B & \boxed{A_2} \end{pmatrix} \quad or \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & B \\ 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix}$$

آنگاه ثابت کنید

$$det(A) = det(A_1)det(A_2)$$

۲ رد

۵. سه ماتریس $N \times N$ ، L_1 ، L_2 ، L_3 در روابط زیر صدق می کنند

$$[L_1, L_2] = iL_3 \ \ , \ \ [L_1, L_3] = iL_2 \ \ , \ \ [L_2, L_3] = iL_1$$

ثابت کنید

$$tr(L_k) = 0 \quad , \quad k = 1,2,3$$

۶. فرض کنید نگاشتی مانند g داریم که $g : M^{N\times N} \times M^{N\times N} \to C$ که در آن $M^{N\times N}$ فضای برداری ماتریس های $N \times N$ است و C مجموعه اعداد مختلط است. فرض کنید این نگاشت ویژگی های زیر را دارا باشد

1. $g(a,b) = g(b,a)$
2. $g(a, \alpha b + \gamma c) = \alpha g(a,b) + \gamma g(a,c)$
3. $g(a,a) \geq 0 \ . \ if \ \ a = 0 \ , \ g(a,a) = 0$

اگر نگاشتی ویژگی های بالا را داشته باشد به آن **متریک** می گوییم.
حال فرض کنید نگاشتی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$g : M^{N\times N} \times M^{N\times N} \to C$$
$$g(A,B) = tr(A^\dagger B)$$

نشان دهید که آیا می توان نگاشت تعریف شده را متریک دانست یا خیر.

۷. فرض کنید ماتریس های A ، B ، C به ترتیب دلخواه ، متقارن و پادمتقارن هستند. ثابت کنید که

1. $tr(A) = tr(\hat{A})$
2. $tr(BC) = 0$