



۱ میدان برداری

۱. با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید که

$$\begin{aligned} 1. \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) \\ 2. \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) \end{aligned}$$

۲. یک ذره در صفحه xy طوری حرکت می کند که بردار مکان آن عبارت است از

$$\mathbf{r} = \hat{x}a\cos(\omega t) + \hat{y}a\sin(\omega t)$$

که در آن ω مقداری ثابت است. نشان دهید

۱. بردار سرعت عمود بر بردار مکان است.
۲. بردار شتاب در جهت مبدا است.
۳. تکانه زاویه ای $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ، برداری ثابت (مستقل از زمان) است.

۲ گرادیان

۳. میدان اسکالر زیر را در نظر بگیرید

$$V(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

که در آن k مقداری ثابت باشد. گرادیان این میدان اسکالر را در نقطه $(1, -1, 3)$ پیدا کنید.

۴. در مختصات دکارتی نشان دهید که برای یک تابع کلی به شکل $f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

، گرادیان عبارت است از

$$\nabla f = \frac{df}{dr} \hat{e}_r$$

که در آن \hat{e}_r پایه است.

۳ دیورژانس

۵. قضیه ی دیورژانس را ثابت کنید.

۶. فرض کنید جریان یک رودخانه را در نظر بگیرید و فرض کنید سرعت آن عبارت است از

$$\mathbf{v} = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \hat{x}$$

که x فاصله از وسط بستر رودخانه و a نیم پهنای رودخانه است. شار سرعت را پیدا کنید.

۷. اتحاد برداری زیر را ثابت کنید.

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f \nabla \cdot \mathbf{A}$$

۸. اتحاد برداری زیر را ثابت کنید

$$\nabla \cdot [\mathbf{r} f(r)] = r \frac{df}{dr}$$