1- معادله ی لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)=0$$

را از طریق جانشانی سری مستقیم حل کنید.

الف) تحقیق کنید که معادله اندیسی به صورت زیر است

$$k(k-1)=0$$

ب) با استفاده از $k=0$ ، یک سری از توان های زوج x ، $(a_1=0)$ به دست آورید.

$$y_{even}=a_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^2+\cdots\right]$$

که در آن

$$a_{i+2}=\frac{i(i+1)-n(n+1)}{(i+1)(i+2)}a_i$$

ج) با استفاده از $k=1$ ، یک سری از توان های فرد x ، $(a_1=0)$ به دست آورید.

$$y_{odd}=a_0\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots\right]$$

که در آن

$$a_{i+2}=\frac{(i+1)(i+2)-n(n+1)}{(i+2)(i+3)}a_i$$

د) نشان دهید که ، اگر سری ها تا بینهایت ادامه یابند ، هر دو جواب y_{even} و y_{odd} ، به ازای $x=\pm1$ واگرا می شوند.

2- نشان دهید

$$\delta'(x)\equiv\frac{d}{dx}\delta(x) \text{ که در آن } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)f(x)dx=-f'(0)$$

سوال امتیازی

3- هم گرایی یا واگرایی سری های زیر را مشخص کنید.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{1+n/2} n^2}{3^{2+n}(n+3)}$$

$$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n}$$