

1. نشان دهید .

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cos \theta & \dots & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & \vdots & & & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix} = \cos n\theta$$

راهنمایی: با استفاده از عناصر آخرین سطر یا ستون گسترش دهید. از استقرای ریاضی و فرمول های جمع مثلثاتی استفاده کنید.

2. ثابت کنید دترمینان یک ماتریس مربعی برابر است با دترمینان ترانهاد همان ماتریس.

3. جابجاگر هر کدوم از دوتایی های ماتریس های زیر را حساب کنید و رابطه ی $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ را بررسی کنید.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. ثابت کنید دترمینان ماتریس متعامد برابر با ± 1 است و به این ترتیب دترمینان ماتریس یکانی را بدست آورید.

5. بنا به توابع ماتریسی (صفحه ی 113 کتاب آرفکن ویرایش 7) فرض کنید ماتریس D یک ماتریس قطری است. رابطه ی زیر را اثبات کنید و بررسی کنید که آیا حتما باید ماتریس D قطری باشد تا رابطه ی زیر درست باشد یا خیر.

$$\det(D) = e^{\text{tr}(\ln D)}$$

سوال امتیازی

6. فرمول بیکر-هاسدورف (رابطه ی 2.85 کتاب آرفکن ویرایش 7) را بدست آورید.