Um curso fechado e limitado de Análise Real

© 2023 por Renan M. Mezabarba[0]

Última Atualização: 4 de outubro de 2023.

A preguiça é a locomotiva do progresso.

Sasha Ananin.

Sumário

Prefácio

Desceu a chuva, vieram as torrentes, sopraram os ventos e bateram com ímpeto contra aquela casa, e ela caiu: e foi grande a sua ruína.

Lucas *et al.* (*circa* 60 d.E.C.).

Um dos princípios básicos da construção é estabelecer fundações firmes sobre as quais aquilo que se deseja construir será erguido, algo certamente já conhecido muito antes que Lucas de Antioquia[0] escrevesse sobre parábolas e outras *cônicas*. Sob tal ótica, este livro se propõe a apresentar os fundamentos da *construção* usualmente chamada de *Cálculo*.

Tal analogia é, evidentemente, forçada, já que a Matemática não é um prédio. Não por coincidência, ao longo da História, o raciocínio matemático foi desenvolvido por seus praticantes sem as mesmas preocupações de rigor que temos hoje: bem antes do método axiomático ser inventado na Grécia, por exemplo, a famosa relação entre os quadrados de catetos de triângulos retângulos e suas hipotenusas já era conhecida; áreas de círculos foram calculadas dezenas de séculos antes de Riemann nascer; etc. De modo geral, a Matemática tem existido antes que os *Fundamentos da Matemática* fossem estabelecidos ou mesmo percebidos como *necessários*.

Na verdade, embora seja reducionista, costuma parecer mais apropriado considerar a Matemática como uma *linguagem* ou *idioma*, onde cada área faz o papel de *dialeto* ou coisa do tipo. Inclusive, sob tal perspectiva, o caminho usual do aprendizado matemático ganha contornos quase indistinguíveis do que se verifica no caso das linguagens:

- ✓ primeiro se aprende a falar,
- ✓ depois, possivelmente, aprende-se tanto a ler quanto a escrever,
- ✓ e só então, por sorte ou azar, estudam-se os mecanismos e fundamentos da linguagem, da fala, da escrita, etc[1].

Nesse sentido, este livro se destina prioritariamente a quem já aprendeu a *falar* e tem algumas noções básicas de *leitura* e *escrita* Matemática: na prática, isto significa que o *leitor*[2] já deve ter cursado alguma disciplina de Matemática do Ensino Superior, em que *demonstrações* e outros jargões comuns já tenham sido mencionados, mesmo que superficialmente. Em outras palavras, um curso de Cálculo I minimamente bem feito já é mais do que suficiente, dado que o dialeto a ser explorado é a *Análise Real*, que em certo sentido constitui os *fundamentos* do Cálculo[3].

[0] Grande romancista do Século I.

[1] Epifania de Gabriel Luchini, revelada numa conversa sobre o Ensino de Cálculo, por volta de 2019.

[2] Ou leitora, naturalmente. Ao longo do texto, o uso do substantivo "leitor" deve ser entendido com o gênero neutro, de modo a se aplicar a qualquer pessoa. O mesmo deve ser entendido para casos afins.

[3] Mas quem quiser aproveitar os eventuais desvios em várias variáveis também precisará de algum traquejo com Álgebra Linear.

Embora discussões com tal nível de profundidade sejam extremamente pertinentes de um ponto de vista filosófico-científico, realizá-las nessa etapa da vida pode ser uma tarefa tão árdua quanto infrutífera: seria como estudar metalinguagem e sintaxe ao mesmo tempo em que se aprendem as técnicas disponíveis de comunicação (fala, sinais, etc.) na infância. Portanto, é comum que textos voltados para Análise na Reta assumam um *background* linguístico mínimo sem muito alarde, numa postura pragmática quase sempre justificável. Este texto não será diferente, a menos do alarde.

O leitor com a impressão de que escrevo como quem pisa em ovos não está errado: no Brasil, o ensino de Análise Real *básica* parece substituir o pragmatismo temporário defendido acima pelo dogmatismo, ao se apoiar quase que exclusivamente nas obras de um único e prolífico autor, sabi(d)amente pragmático. *Com efeito*, um texto que, em seu prefácio, afirma

> "*A teoria é apresentada desde o começo.* ***Não se faz uso de resultados que não sejam estabelecidos no texto***" [19]

sugere que um *começo* existe, está bem estabelecido e é *único*. Uma vez que tal afirmação é, para dizer o mínimo, imprecisa[4], a única conclusão razoável é que seu autor tenha sido (acertadamente) pragmático ao escrevê-la. Porém, muitos leitores incautos, ao se depararem com tal afirmação, tomam-na como verdade por não saberem que se trata de uma simplificação deliberada que deveria ser temporária. Como consequência, entre outras coisas, cristaliza-se a ideia de que a intuição não é debatível em Matemática – ou que os axiomas matemáticos são *verdades absolutas*, seja lá o que isso signifique.

Então, como resposta à falta de um mero aviso, eu decidi escrever um livro de Análise? ~~Talvez~~[5] Não. Tampouco penso que as observações acima desmereçam os inúmeros méritos *históricos* do *Curso de Análise* [19]: num contexto em que simplesmente havia quase nenhuma bibliografia nacional sobre o assunto, o *Curso de Análise* e as outras obras do Prof. Elon foram fundamentais para a formação matemática brasileira[6]. Apesar disso, da mesma forma que linguagens são objetos em constante construção e adaptação, a Matemática e seus dialetos *hoje* já não são como nos anos 70. Surgem, pelo menos, duas alternativas:

a) ensinar os conteúdos *básicos* de acordo com os cânones;

b) modernizar os cânones.

Acima, a modernização não se refere apenas aos recursos tipográficos propiciados pelo LaTeX, mas principalmente aos diversos conceitos matemáticos *popularizados* nos últimos cinquenta anos. Assim, fica *fácil ver* que o apoio irrestrito à opção (a) significa, na prática, dificultar o acesso às novas tecnologias matemáticas[7], inclusive daquelas que potencialmente facilitariam o tratamento de assuntos clássicos.

[4]Para começo de conversa, não há consenso sobre qual deve ser o começo de um ponto de vista teórico: a resposta depende da profundidade que se busca alcançar, da linguagem que será usada para implementar os resultados, da bagagem assumida, etc. A segunda afirmação é ainda mais problemática: são várias as demonstrações que dependem de *infinitas escolhas arbitrárias*, por exemplo, ou que utilizam funções definidas por *recorrência*, sem que se discuta o que permite realizar tais procedimentos.

[5]Sim, o traçado é proposital. Eu tenho um senso de humor controverso.

[6]Os meus primeiros passos no aprendizado de Análise foram justamente com livros do Prof. Elon: o "Elão" [19] e o magnífico ~~mas resumível ou *reorganizável*~~ *Espaços Métricos* [17].

[7]Para extrapolar: daqui 100 anos, as graduações brasileiras em Matemática, se existirem, ainda não terão Teoria de Categorias em suas grades?

Com isso dito, o presente texto se propõe a apresentar um curso de Análise ~~na Reta~~ Real que seja um pouco mais cuidadoso com aspectos lógico-fundamentais, ao mesmo tempo em que moderniza a discussão de alguns temas. Posto de outra forma, busca-se: discutir o *máximo possível* de Análise Real (será *fechado*), mas de forma *honesta* e com o *mínimo possível* de esforço (será *limitado*)[8]. Entre outras coisas, isso acarreta que

a teoria será apresentada desde *um* começo.

Tal começo será uma discussão breve sobre Teoria dos Conjuntos, tão ingênua quanto minha consciência permite: notações usuais, operações básicas e suas propriedades, noções de cardinalidade, boa ordenação e *escolhas*. Os mais dogmáticos certamente protestarão pela abordagem escolhida para discutir os Axiomas de (Dedekind!)-Peano, que *descrevem* os naturais e constituem o clássico começo do *Elinho* [18]. Contudo, eu escrevo principalmente para pessoas não-convertidas e, por isso, não consigo me importar. Numa provocação deliberada, tudo isso constitui o Capítulo 0.

Os assuntos seguintes são *essencialmente* os mesmos discutidos no cânone [19], a menos de *permutação*. A diferença mais marcante será o emprego de *nets*[9] no lugar de sequências para o estudo de convergência e continuidade, uma generalização natural e nada recente de sequências: foram introduzidas por Moore e Smith [23] em 1922 e popularizadas por Kelley [15] nos anos 50 (!). Embora, *topologicamente*, não exista ganho em usar *nets* na reta real, a generalidade delas permite tratar simultaneamente diversos tipos de limites com uma única abordagem: portanto, ganha-se tempo e escopo! Outra peculiaridade será o tratamento de espaços de funções, que ocorrerá antes mesmo da introdução de derivadas.

Além disso, alguns resultados serão demonstrados por meio da generalização de certos conceitos da reta para o contexto de *espaços topológicos* ou *métricos*, a fim de explicitar as hipóteses realmente importantes e economizar o uso de épsilons e deltas tanto quanto possível[10]. Apesar dessas pequenas incursões, não haverá ênfase sobre pormenores de natureza topológica ou *patológica*, de modo que o texto se manterá fiel ao escopo euclidiano de dimensão finita, majoritariamente 1.

Certamente, muitos dentre os *eventuais* leitores deste material desaprovarão a abordagem adotada ou encontrarão equívocos que julgarão grotescos. Três coisas me consolam: a primeira é acreditar que qualquer exposição pode ser melhorada, o que inclusive costuma se perceber por meio das críticas; a segunda é o alívio em saber que a redação deste texto (e eventual publicação) não inviabiliza a existência (e utilização!) de outras obras – trata-se tão somente de uma alternativa; a terceira é o meu filtro de SPAMs.

Renan M. Mezabarba

Ilhéus-BA, 4 de outubro de 2023.[11]

[8] E, portanto, será *compacto*... Esta é uma piada que o leitor entenderá, possivelmente, ao longo do Capítulo 4.

[9] Redes, para os nacionalistas.

[10] Cabe destacar que a ênfase da exposição será qualitativa: proposições de natureza quantitativa que não contribuam para o desenrolar da teoria, como estimativas muito específicas ou desigualdades enfadonhas, serão relegadas a exemplos breves ou exercícios dirigidos – ou sumariamente ignoradas.

[11] Convém ressaltar que a redação começou em 16 de abril de 2021.

Prólogo: Análise para quê?

Os números naturais foram criados por Deus, todo o resto é trabalho da humanidade.

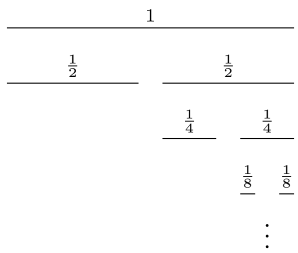
Leopold Kronecker (1886).

Faz parte do folclore matemático atribuir a frase anterior ao algebrista Leopold Kronecker (1823-1891), como uma síntese de seu ceticismo perante os diversos métodos *infinitários* e não-construtivos que se propagaram na Matemática a partir da segunda metade do Século XIX [11]. Longe de ser uma mera declaração teológica, ela expressa a confiabilidade que temos diante dos *métodos aritméticos* usuais, explicitamente ancorados na (aparente?) realidade imediata, em contraponto aos argumentos do *Cálculo*, que frequentemente dependem de suposições incomuns ao nosso cotidiano intrinsecamente *finito*, como no caso das *séries*.

Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \qquad (\dagger)$$

que manifesta a ideia de somar iteradamente parcelas da forma $\frac{1}{2^n}$ conforme toma-se n cada vez maior. Embora possa parecer artificial, esse tipo de animal surge naturalmente em problemas que envolvem o *cálculo* de áreas *curvilíneas*, por meio do chamado *método da exaustão*[0]. O ponto a chamar atenção, porém, é o seguinte: embora cada estágio finito desse processo seja facilmente calculável, não é completamente óbvio o que poderia *significar* realizar uma soma com infinitas parcelas.



Com argumentos aritmético-geométricos do tipo ilustrado acima, é razoável *convencionar* que o valor para (†) (seja lá qual for) deve corresponder ao *número* para o qual as *somas parciais* se *dirigem*: no caso, tal número *deveria* ser 1, já que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \cdots$ Ainda assim, trata-se de uma convenção: não há vida suficiente para efetuar *todas* as somas e verificar uma igualdade legítima.

Agora, o que significa dizer que tais somas parciais se dirigem para algum valor? Uma vez respondida essa pergunta: o que impediria que certas somas se dirigissem para números diferentes? Mais uma: como determinar os valores de tais somas infinitas?

[0] O que será revisto quando tratarmos de integração.

Evidentemente, nada impede que tais perguntas sejam respondidas de forma vaga e intuitiva – ou apenas ignoradas. No caso da série proposta, por exemplo, um argumento muito comum para justificar as estimativas sem muito esforço (abanando as mãos) é o seguinte: ao escrever $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, chega-se a

$$2S = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + S$$

e, consequentemente, $S = 1$, justamente o que o raciocínio intuitivo geométrico sugeria!

Não é difícil adaptar o *método* para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ e, mais geralmente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{m-1}$ sempre que $m > 1$, identidades compatíveis com suas respectivas interpretações geométricas. O que acontece, porém, ao aplicar tal "metodologia" na determinação do valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$? Como antes, ao escrever $T := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, chega-se a

$$2T = 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{n+1} + \ldots \Rightarrow 2T + 2 = 2 + 4 + 8 + \ldots = T \Rightarrow T = -2,$$

resultado que, desta vez, não parece *certo*, por discordar do que a interpretação geométrica sugere.

Finalmente encontramos uma pergunta mais inescapável do que as feitas um pouco acima: *por que o truque algébrico preguiçoso pareceu funcionar nos primeiros casos mas falhou no último?*

Responder a esse tipo de pergunta é, pelo menos historicamente, um dos papéis da Análise: pode-se dizer que ela surgiu do processo natural de revisão metodológica, típico do *modus operandi* científico, no contexto do *Cálculo* de Leibniz-Newton; embora, a princípio, tratasse-se de um movimento voltado a justificar (e expandir) os resultados da área com base em conceitos geométricos menos vagos, seus praticantes não tardaram a empregar a *linguagem de conjuntos* no processo de retraduzir e *sintetizar* o Cálculo a partir de noções aparentemente tão sólidas quanto os números criados pelo Deus de Kronecker.

Nos capítulos que se seguem, as perguntas feitas acima serão respondidas de forma tão honesta quanto possível, o que (in) felizmente exige algum grau de tergiversão para que se discutam as suposições implícitas nas respostas – e assim explicitar a subjetividade inerente. Uma vez que a parcela pragmática dos leitores em potencial[1] costuma se entendiar com tais discussões, para não piorar ainda mais a situação, evitarei apresentar (diversas) motivações de caráter histórico[2].

[1] Que acredito ser majoritária entre praticantes de Matemática.

[2] A quem se interessar pelo assunto, minhas sinceras desculpas, bem como as sugestões de leitura a seguir: Ferreirós [11] (para História da Teoria dos Conjuntos), Tatiana Roque [26] (para História da Matemática *geral*) e Thomas Sonar [30] (para História da Análise).

Capítulo 0

Sobre os “fundamentos”

…Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.

David Hilbert (1926)[0].

Intuitivamente, a *reta real* é um objeto geométrico: um *segmento retilíneo sem saltos*, i.e., *contínuo*. Por outro lado, como segmentos dessa reta podem ser *somados* (copiados e justapostos) e *multiplicados*[1], segue que a reta também é um objeto *algébrico*. Daí, uma pergunta natural a se fazer é: como conciliar as duas noções a fim de *descrever*, matematicamente, a reta real?

A resposta usual faz uso da *linguagem de conjuntos*: a reta real será definida como *um conjunto* (de pontos), cujos *aspectos geométricos* desejados serão abstraídos por uma *relação de ordem* que deverá capturar, de alguma forma, as noções de *linearidade* e *continuidade*; os *aspectos algébricos*, por sua vez, serão descritos por meio de *operações binárias* que imitarão as operações usuais que aprendemos na *escola*. Nesse sentido, a Seção 0.0 cumpre o *ingênuo* papel de relembrar as terminologias conjuntistas, bem como suas principais propriedades, que serão utilizadas no próximo capítulo a fim de descrever a reta real. Fica por conta da Seção 0.1 introduzir o ferramental básico usado na comparação entre *cardinalidades* (quantidade de elementos) de conjuntos *infinitos*, por meio do qual seremos capazes de determinar, oportunamente, a cardinalidade da reta real. Por fim, a Seção 0.2 irá escancarar os problemas da abordagem ingênua adotada (deliberadamente) ao longo do capítulo e, mais importante, sugerir como remediá-los por meio de uma *axiomática* mais restritiva – no entanto, dado o escopo do texto, isto será feito de maneira relativamente superficial.

0.0 O Paraíso de Cantor

A palavra “conjunto” é uma daquelas típicas expressões (*atômicas*) que não se explicam por meio de outras expressões mais simples, como *tempo*, *espaço*, *ser*, etc. Costuma ficar a cargo da (vida em) sociedade ensinar o significado dessas coisas: no caso, conjuntos podem ser entendidos como *agrupamentos de objetos* ou *coleções de indivíduos* que partilham algum tipo de característica comum num certo contexto. Inclusive, nesse sentido, conjuntos são mais *primitivos* do que os números utilizados para *quantificar* seus *elementos* (como veremos na Seção 0.1).

[0]Tradução livre da tradução apresentada por Ferreirós [11].

[1]Pergunte para Descartes – ou, na falta de uma prancheta Ouija, para Tatiana Roque [26].

O uso desse tipo de aparato linguístico em contexto matemático costuma mimetizar o raciocínio binário já bastante difundido com a popularização dos computadores: uma afirmação é `verdadeira` ou `falsa`; o transistor está `On` ou `Off`; o *bit* é 0 ou 1, etc. No caso, dados x e A, pode-se ter apenas "$x \in A$" (lido como "x pertence a A", "x é elemento de A" ou "x é membro de A") ou o contrário, indicado por "$x \notin A$" (lido como "x não pertence a A", "x não é elemento de A" ou "x não é membro de A"). Porém, como não se define explicitamente o que significa *ser* conjunto e, muito menos, o que é a relação de pertinência "$\in$", precisa-se, pelo menos, indicar os comportamentos esperados – inclusive no que se refere à igualdade: afinal, como decidir se duas *manifestações* se referem a um mesmo objeto se *nem* sabemos definir o que significa ser o objeto em questão?

Definição 0.0.0. Para conjuntos A e B:

(i) escreveremos "$A \subseteq B$" para abreviar a afirmação "para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$", lida como "A é **subconjunto** de B", ou "A **está contido em** B";

(ii) escreveremos "$A \nsubseteq B$" para abreviar a negação de "$A \subseteq B$", i.e., para indicar que "existe $x \in A$ tal que $x \notin B$";

(iii) escreveremos "$A \subsetneq B$" para abreviar "$A \subseteq B$ e $A \neq B$" e, em tais situações, diremos que A é **subconjunto próprio** de B. ¶

Axioma da Extensão. *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos. Em notação mais econômica:* $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)$ *e* $(B \subseteq A)$.

O axioma acima manifesta a ideia de que são os elementos de um conjunto, e apenas eles, que o caracterizam. Este axioma poderia não ser útil se, por exemplo, quiséssemos distinguir conjuntos não apenas por seus elementos, mas também pela cor da fonte em que eles são grafados: se fosse o caso, então os conjuntos $\{L, L'\}$ e $\{L, L'\}$ seriam distintos, mesmo com ambos sendo *compostos* pelos mesmos elementos. Da mesma forma, ao pensar em *conjuntos* como *pastas* de arquivos num computador, duas pastas distintas podem ter exatamente os mesmos arquivos (duplicados), revelando um *modelo* em que o Axioma da Extensão não é satisfeito.

Observação 0.0.1. *Axiomas* não *devem* ser tratados como *verdades absolutas* ou *inquestionáveis*, mas apenas como ~~convenções~~ suposições estabelecidas a fim de embasar deduções posteriores. Eles podem ser debatidos, mas *fora* do panorama discursivo regido por eles. Costuma ser útil pensar em axiomas como regras de um jogo: elas se discutem antes ou depois de uma partida, mas não durante. Inclusive, é lícito buscar por regras que respeitem alguma noção de *verdade*, o que evidentemente exige debate – que ocorre fora do jogo. △

Podemos agora nos dedicar a problemas mais emocionantes, como a *formação de conjuntos*. Intuitivamente, sempre que se tem algum tipo de *propriedade matemática*[2], é razoável considerar o conjunto das *coisas* que possuem tal propriedade. Em vista do Axioma da Extensão, para uma propriedade $\mathcal{P}$ fixada, é único, *caso exista*, o conjunto de *todos* os elementos que possuem a propriedade $\mathcal{P}$: ora, se tanto A quanto B têm como elementos precisamente aqueles com a propriedade $\mathcal{P}$, então "$x \in A \Leftrightarrow x \in B$", acarretando $A = B$.

[2] Aqui, "propriedade matemática" é meramente uma *fórmula* escrita na *linguagem* da Teoria dos Conjuntos, possivelmente com *variáveis livres*. Porém, tais pormenores não serão discutidos.

Com isso em mente, para uma propriedade $\mathcal{P}$ dada, ao escrever $\mathcal{P}(y)$ para indicar que y possui a propriedade $\mathcal{P}$ e $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ para denotar a coleção dos elementos com a propriedade $\mathcal{P}$, i.e., tal que $y \in \{x : \mathcal{P}(x)\}$ se, e somente se, $\mathcal{P}(y)$, a intuição clássica diz que deveria valer o seguinte

***Princípio* da Abstração.** *Para toda propriedade $\mathcal{P}$ existe o conjunto $\{x : \mathcal{P}(x)\}$.*

Exemplo 0.0.2. Ao escrever $\{n : n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é par}\}$, por exemplo, a condição "$n \in \mathbb{N}$ e n é par" é o critério usado para decidir quais elementos serão considerados membros do conjunto. Assim, como a afirmação "$6 \in \mathbb{N}$ e 6 é par" é verdadeira, tem-se $6 \in \{n : n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é par}\}$, ao passo que $7 \notin \{n : n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é par}\}$, posto que a afirmação "$7 \in \mathbb{N}$ e 7 é par" é falsa (embora $7 \in \mathbb{N}$, não é verdade que 7 seja par). Não faria diferença escrever $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ é par}\}$: tanto no primeiro caso quanto no segundo, "n" e "x" são variáveis, de modo que a opção por uma das letras se deve apenas a fatores estético-psicológicos. ▲

Exemplo 0.0.3 (Pares, triplas, etc. não ordenadas)**.** Para a e b fixados, "ser a ou b" é uma propriedade possuída apenas por a e b. Desse modo, o Princípio da Abstração assegura a existência do conjunto $\{x : x = a \text{ ou } x = b\}$, cujos elementos são todos aqueles que são a ou b, ou seja: $y \in \{x : x = a \text{ ou } x = b\}$ se, e somente se, $y = a$ ou $y = b$. Posto de outra forma: a e b são os únicos elementos de $\{x : x = a \text{ ou } x = b\}$. Por comodidade, costuma-se abreviar a notação desse tipo de conjunto:

Definição 0.0.4. Escreve-se $\{a, b\}$ para denotar o conjunto cujos únicos elementos são a e b, que será chamado de **par não-ordenado** de a e b. ¶

Fica assim justificada a grafia mais *comum* para conjuntos, em que seus membros são listados entre os símbolos "{" e "}". Evidentemente, considerações análogas se aplicam a coisas como $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, etc. Cabe destacar que a expressão "não-ordenado" se refere ao fato de que a ordem com que se grafam "a" e "b" em "$\{a, b\}$" é irrelevante: por definição, $x \in \{a, b\}$ se, e somente se, "$x = a$ ou $x = b$" $(\star)$, enquanto $x \in \{b, a\}$ se, e somente se, "$x = b$ ou $x = a$" $(\star\star)$, com $(\star)$ e $(\star\star)$ equivalentes entre si. Em particular, como $\{a, a\}$ tem apenas a como elemento (verifique?), costuma-se denotar tal conjunto por $\{a\}$, usualmente xingado como (**conjunto**) **unitário** de a. ▲

Supondo a validade do Princípio da Abstração *momentaneamente*[3], é possível justificar a maioria das construções *conjuntistas* com as quais o leitor já teve o desprazer de esbarrar. A fim de fixar as notações, elas serão listadas adiante e discutidas MUITO brevemente. No que segue, a notação "$A := B$" indica que a igualdade $A = B$ é imposta por definição ou, em outras palavras, o símbolo B é *definido* como um *nome* alternativo para o conjunto A.

Definição 0.0.5.

(i) Denota-se $\emptyset := \{x : x \neq x\}$, *coleção* que será chamada de **conjunto vazio** por razões *óbvias*: não existe x com $x \in \emptyset$, já que o contrário daria $x \neq x$.

(ii) Para X e Y conjuntos, considera-se $X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\}$, que denota a **diferença** entre X e Y, também chamada de **complementar de Y em X**.

(iii) Para conjuntos A e B, $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ e $A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ denotam os conjuntos chamados, respectivamente, de **interseção** e (**re**) **união** dos conjuntos A e B. Em particular, A e B são **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$. ¶

[3]Como veremos na última seção deste capítulo, tal princípio é "problemático".

Observação 0.0.6. É comum haver confusão com o uso dos conectivos "e" e "ou" entre principiantes. Na linguagem comum, "e" funciona como um *agregador*, enquanto "ou" indica *alternativa*: por exemplo, os pontos da reta nos intervalos $(-\infty, 1)$ *e* $(3, +\infty)$ constituem a solução da inequação $x^2 - 4x + 3 > 0$, o que em linguagem conjuntista se expressa por meio da reunião $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. No entanto, **não** faz sentido dizer que tal reunião é composta por todo x tal que $x \in (-\infty, 1)$ **e** $x \in (3, +\infty)$, pois este "e" (da linguagem matemática usual) indica simultaneidade – e não há x com as duas propriedades *ao mesmo tempo*: o correto é dizer que $x \in (-\infty, 1)$ **ou** $x \in (3, +\infty)$. Cabe ainda destacar que o "ou" matemático não é exclusivo: sempre que dissermos "$x \in A$ ou $x \in B$", deve-se entender que *pelo menos* um dos casos deve ocorrer, o que não inviabiliza a ocorrência de ambos (confira o item (i) do Exercício 0.1). △

Proposição 0.0.7. *Para todo conjunto A ocorre $\emptyset \subseteq A$.*

Demonstração. Dado x qualquer, a implicação "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" é verdadeira por *vacuidade*, já que "$x \in \emptyset$" é falso. Alternativamente: se a *inclusão* fosse falsa, deveria existir $x \in \emptyset$ com $x \notin A$, mas não existe $x \in \emptyset$, absurdo[4]. □

Observação 0.0.8 (Contido vs. pertence)**.** O leitor deve tomar cuidado para não confundir *pertinência* e *continência*:

- "$x \in y$" significa que "x" é um dos elementos de "y";
- "$x \subseteq y$" significa que "todo elemento de x é também elemento de y".

Assim, embora $\emptyset \subseteq A$ ocorra para qualquer conjunto A, nem sempre ocorre $\emptyset \in A$. Na verdade, fora de contextos mais formais, é raro que se tenha $\emptyset \in A$. Veja que, por exemplo, $\emptyset \notin \emptyset$, já que o contrário é dizer que $\emptyset$ tem um elemento. Mesmo assim, $\emptyset \subseteq \emptyset$. A raiz dessa confusão é, possivelmente, oriunda do fato de que muitas vezes se diz "y contém x" a fim de expressar "$x \in y$". △

Exercício 0.0. Convença-se de que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. ■

Exercício 0.1. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre as identidades, inclusões, equivalências e implicações a seguir.

a) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

d) $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

f) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

g) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$.

h) $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

i) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. ■

[4] Por exemplo: a sentença "todas as piscinas da minha casa são olímpicas" é verdadeira se a minha casa não tiver piscinas.

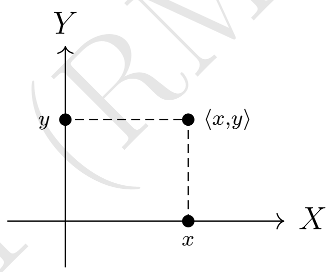
0.0.0 Pares ordenados e funções

O advento das *funções*, seja por invenção ou descoberta, deflagrou uma das maiores mudanças de paradigma na Matemática por permitir incorporar as noções de movimento e variação aos *modelos* que, até então, tratavam apenas de situações estáticas e posicionais. Embora hoje se apresente como um conceito simples, alguns séculos separam as primeiras menções explícitas às funções da "definição" apresentada por Dedekind na segunda metade do Século XIX:

Conceito de função. *Uma função é uma regra f que associa cada elemento x de um conjunto X a um único elemento $f(x)$ de um conjunto Y.*

Se, por um lado, a conceituação acima parece englobar os casos clássicos aprendidos na infância (funções *polinomiais*, *trigonométricas*, etc.), por outro lado ela empurra para debaixo do tapete a definição de "regra". Um modo mais honesto consiste em apelar para *pares ordenados*.

Diferente do que ocorre no caso não-ordenado, em que $\{a, b\} = \{b, a\}$ mesmo com $a \neq b$, pode-se *convencionar* escrever $\langle a, b\rangle$ com o intuito de ter o seguinte comportamento: $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Com tal *dispositivo*, usualmente xingado de **par ordenado**, passa a fazer sentido definir o **produto cartesiano** $X \times Y := \{\langle x, y\rangle : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ entre os conjuntos X e Y, cujos membros são todos os pares ordenados da forma $\langle x, y\rangle$ com $x \in X$ e $y \in Y$: noutras palavras, $X \times Y$ apenas abstrai um típico plano *cartesiano*.



Dado que um par ordenado $\langle x, y\rangle$ pode ser interpretado como uma *mini-regra* que faz sua *primeira coordenada* x corresponder à sua *segunda coordenada* y, é natural pensar em *regras* que associam elementos de X a Y como subconjuntos de $X \times Y$.

Definição 0.0.9 (Bourbaki, 1939)**.** Uma **função** (ou **mapa** ou **aplicação**) **de** X **em** Y é um subconjunto $f \subseteq X \times Y$ tal que:

(i) para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ com $\langle x, y\rangle \in f$ (cada x se associa a pelo menos um y);

(ii) se $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in f$, então $y = z$ (o y associado a x é único).

Escreve-se $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ para indicar que f é uma função de X em Y. ¶

Acima, o conjunto X costuma ser chamado de **domínio** da função f, enquanto Y é o seu **codomínio** (também chamado de *contradomínio*). Uma vez que a cada $x \in X$ corresponde um único $y \in Y$ com $\langle x, y\rangle \in f$, faz sentido atribuir a y uma notação que remeta ao elemento x: no caso, faz-se $y := f(x)$ (ou ainda $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$), e xinga-se $f(x)$ de **imagem de** x pela função f. Por sua vez, o subconjunto de Y formado por todos os elementos da forma $f(x)$, conforme x *varia* em X, é chamado de **imagem da função**, e denotado por $\mathrm{im}(f)$. Em símbolos: $\mathrm{im}(f) := \{f(x) : x \in X\}$.

Exemplo 0.0.10 (Funções polinomiais)**.** Futuramente, depois que já *soubermos* quem são $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, poderemos considerar *polinômios na indeterminada* t, i.e., *expressões* da forma $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, onde t indica apenas um símbolo *indeterminado*. Chamando por $p(t)$ tal polinômio, passa a fazer sentido substituir cada ocorrência de "t" na expressão $p(t)$ por um $x \in \mathbb{R}$ fixado, o que *produz* o *número real*

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Dessa forma, pode-se dizer que $p := \{\langle x, p(x)\rangle : x \in \mathbb{R}\}$ relaciona cada $x \in \mathbb{R}$ ao número $p(x) \in \mathbb{R}$. Uma vez que tal associação é claramente *funcional*[5], ganha-se uma função $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto p(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Funções desse tipo são ditas **polinomiais**. ▲

Exemplo 0.0.11 (Funções racionais)**.** Mais geralmente, e ainda no cenário futuro do exemplo anterior, é lícito considerar expressões da forma $r(t) := \dfrac{p(t)}{q(t)}$ em que ambos $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios na indeterminada t. Desta vez, só faz *sentido* substituir as ocorrências de "t" em $r(t)$ por um número real $x \in \mathbb{R}$ fixado nas situações em que se garantir $q(x) \neq 0$, pois a divisão por 0 não é realizável em *corpos*. Assim,a expressão $r(t)$ induz uma função r cujo domínio é $\operatorname{dom}(r) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$, e que faz $r(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ para cada $x \in \operatorname{dom}(r)$. Funções desse tipo costumam ser chamadas de **racionais**. ▲

Como sugerido no último exemplo, nem sempre o domínio ou o codomínio de uma função ficam óbvios pelo contexto. Tendo em vista tais situações, convém estender parcialmente a definição de função:

Definição 0.0.12. Uma **função** f é um conjunto de pares ordenados tal que $y = z$ sempre que $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in f$. Neste caso, definem-se ainda

(i) o **domínio de** f, $\operatorname{dom}(f) := \{x : \langle x, y\rangle \in f\}$, e

(ii) a **imagem de** f, $\operatorname{im}(f) := \{f(x) : x \in \operatorname{dom}(f)\}$. ¶

É claro que uma função f como na definição acima determina uma função como na Definição 0.0.9, i.e., da forma $f\colon \operatorname{dom}(f) \to \operatorname{im}(f)$. Na verdade, é legítimo escrever $f\colon \operatorname{dom}(f) \to Y$ para qualquer conjunto Y com $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$. Por sua vez, a uma função $g\colon X \to Y$ associa-se o conjunto

$$\operatorname{graf}(g\colon X \to Y) := \{\langle x, g(x)\rangle : x \in X\} \subseteq X \times Y,$$

chamado de **gráfico** da função $g\colon X \to Y$. Note que o gráfico de $g\colon X \to Y$ é a *própria função* g no sentido da Definição 0.0.12.

Exemplo 0.0.13 (Igualdade entre funções)**.** De um jeito ou de outro, funções foram definidas como conjuntos, de modo que, a princípio o critério para determinar quando duas funções são iguais deriva daquele utilizado para conjuntos. No entanto, a sutil diferença entre as duas definições costuma causar alguma confusão.

[5] No sentido de que se $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in p$, então $y = z$.

(i) Na Definição 0.0.9, os conjuntos X e Y fazem parte do que significa dizer que $f \subseteq X \times Y$ é uma "função de X em Y". Na prática, é como se pensássemos em "$f\colon X \to Y$" como um modo elegante de abreviar "$\langle X, Y, f\rangle$ é tal que...". Logo, se $f\colon X \to Y$ e $g\colon X' \to Y'$ são funções iguais, então deve-se ter $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

(ii) Por sua vez, a Definição 0.0.12 não explicita domínios ou codomínios, de modo que duas funções f e g desse tipo são iguais se, e somente se, ocorrer $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, tal qual ocorre com conjuntos. Na prática, significa que $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g)$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$.

Isso dá margem para situações estranhas. Por exemplo, para um conjunto X, é fácil ver que $\mathrm{Id}_X := \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ é uma função, chamada de **identidade** de X. Pode-se expressar a função Id_X como uma função de X em X, uma vez que se verifica $X = \operatorname{dom}(\mathrm{Id}_X) = \operatorname{im}(\mathrm{Id}_X)$. Contudo, se Y é um conjunto com $X \subseteq Y$, então também faz sentido definir a **inclusão** $i\colon X \to Y$ dada por $i(x) := x$ para cada $x \in X$. Agora, se ocorrer $X \subsetneq Y$, então as funções $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ e $i\colon X \to Y$ são formalmente distintas, embora ambas sejam definidas pela *mesma regra*, i.e.,

$$\mathrm{Id}_X(x) := x =: i(x)$$

para todo $x \in X$. ▲

Apesar dos inconvenientes apontados pelo último exemplo, o contexto costuma deixar o contradomínio das funções consideradas fixado. O modo mais prático de fazer isso consiste em definir

$$Y^X := \{f : f \subseteq X \times Y \text{ é função de } X \text{ em } Y\},$$

explicitamente o conjunto de todas as funções da forma $X \to Y$. Em tais situações, deixa de ser perigoso se referir à função $f\colon X \to Y$ apenas pela letra "f".

Observação 0.0.14. Uma das vantagens em considerar funções como membros bem definidos de um conjunto fixado virá quando passarmos a *enxergar* funções como *vetores* no tratamento de sequências e séries... de funções. △

Embora seja um conceito incrivelmente maleável, nem sempre as *relações* estabelecidas entre elementos de certos conjuntos são exprimíveis por uma função. Apesar disso, o aparato para tratar delas matematicamente já está pronto:

Definição 0.0.15. Dados conjuntos X e Y, uma **relação (binária)** R entre X e Y é um subconjunto de $X \times Y$.

(i) Para um par $\langle x, y\rangle \in X \times Y$, costuma-se escrever $x \mathrel{R} y$ para indicar que o par $\langle x, y\rangle$ é membro da relação R, situação em que diremos que x e y estão **R-relacionados**. A ocorrência de $\langle x, y\rangle \notin R$ será indicada por $x \not\mathrel{R} y$.

(ii) O **domínio** da relação R é o conjunto $\operatorname{dom}(R) := \{x : \text{existe } y \in Y \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

(iii) A **imagem** da relação R é o conjunto $\operatorname{im}(R) := \{y : \text{existe } x \in X \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

Quando $X = Y$, diz-se apenas que R é uma relação em X. ¶

Exemplo 0.0.16 (Relação de igualdade)**.** Fixado um conjunto X, pode-se considerar $\Delta_X := \{\langle x, y\rangle \in X \times X : x = y\}$, a *relação de igualdade* em X. Daí, de acordo com a definição anterior, pode-se escrever $x \, \Delta_X \, y$ para indicar que $\langle x, y\rangle \in \Delta_X$, i.e., $x = y$. Note que Δ_X é o gráfico da função $\mathrm{Id}_X : X \to X$. ▲

Exemplo 0.0.17 (Partes e inclusão)**.** Fixado um conjunto X, faz sentido considerar a *coleção* de *todos os subconjuntos de* X, denotada por $\wp(X)$ e chamada de **conjunto das partes de** X, simbolicamente: $\wp(X) := \{A : A \subseteq X\}$. Por exemplo:

(i) para $X := \emptyset$, $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, já que $\emptyset$ é o único subconjunto de $\emptyset$;

(ii) para $X := \{0, 2\}$, $\wp(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}\}$, pois $\emptyset$ e X sempre são subconjuntos de X e, no caso, os demais subconjuntos possíveis são $\{0\}$ e $\{2\}$;

(iii) para $X := \mathbb{N}$, ocorre $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, bem como $\{n : n$ é par$\}$, $\{n : n$ é ímpar$\}$, $\{n : n$ é primo$\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, além dos típicos $\emptyset, \mathbb{N} \in \wp(\mathbb{N})$. TODO subconjunto de $\mathbb{N}$ é, por definição, membro de $\wp(\mathbb{N})$; oportunamente, veremos que se trata de um conjunto bem grande.

De qualquer forma, para X fixado, a relação de inclusão entre subconjuntos de X define, como a frase sugere, uma relação binária $\subseteq$ na *família*[6] $\wp(X)$ de todos os subconjuntos de X: explicitamente, $\subseteq := \{\langle A, B\rangle : A \subseteq B \subseteq X\}$. ▲

Exemplo 0.0.18 (*Curvas* e gráficos)**.** Em posse de *estruturas algébricas*, é possível utilizar expressões algébricas a fim de *relacionar variáveis*. Por exemplo, a *expressão polinomial* $x^2 + y^2 = 1$ induz a relação binária $S := \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Quando se representa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ graficamente como o plano cartesiano usual, o subconjunto S *passa a corresponder* aos pontos do plano que *distam* precisamente 1 da origem $\langle 0, 0\rangle$.

Em particular, S *não* determina uma função da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pois para um mesmo $x \in \operatorname{dom}(S)$ existem $y, y' \in \operatorname{im}(S)$ distintos e relacionados a x: explicitamente, se $x^2 + y^2 = 1$, então $y^2 = x^2 - 1$ e, como veremos, em tal situação pode-se concluir apenas que $|y| = \sqrt{x^2 - 1}$, o que dá margem a $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y' = -\sqrt{x^2 - 1}$, ambos relacionados ao mesmo x. ▲

Definição 0.0.19. Dada uma relação binária R, a **relação inversa** de R, denotada por R^{-1}, é a relação $R^{-1} := \{\langle y, x\rangle : x \, R \, y\}$. ¶

Exercício 0.2. Para uma relação binária R, mostre que:

a) para quaisquer x e y vale $x \, R \, y \Leftrightarrow y \, R^{-1} \, x$;

b) $\operatorname{dom}(R) = \operatorname{im}\left(R^{-1}\right)$;

c) $\operatorname{im}(R) = \operatorname{dom}\left(R^{-1}\right)$; e

d) $(R^{-1})^{-1} = R$. ■

Exercício 0.3. Supondo que $X = Y$ e $R \subseteq X \times X$, interprete geometricamente a definição de R^{-1} como sendo a "rotação" de R em torno da diagonal Δ_X. ■

Agora, se f é uma função, então é razoável perguntar: quando f^{-1} é uma função? Como a resposta para essa pergunta depende, em algum grau, da definição adotada para função, vamos nos restringir ao caso que será mais utilizado ao longo do texto:

[6] Não custa frisar: neste texto, "conjunto", "coleção" e "família" são tratados como sinônimos!

Definição 0.0.20. A função $f\colon X \to Y$ será dita:

(i) **injetora** (ou *injetiva*, *injeção*, etc.) se para quaisquer $x, x' \in X$, a ocorrência de $f(x) = f(x')$ acarretar $x = x'$;

(ii) **sobrejetora** (ou *sobrejetiva*, *sobrejeção*, *sobre* Y, etc.) se $\operatorname{im}(f) = Y$ e

(iii) **bijetora** (ou *bijetiva*, *bijeção*, etc.) se $f\colon X \to Y$ for injetora e sobrejetora. ¶

Proposição 0.0.21. *Uma função $f\colon X \to Y$ é bijetora se, e somente se, a relação inversa f^{-1} é uma função de Y em X.*

Demonstração. Primeiro, note que as identidades e inclusões $\operatorname{dom}(f^{-1}) = \operatorname{im}(f) \subseteq Y$ e $\operatorname{im}(f^{-1}) = \operatorname{dom}(f) = X$ valem para qualquer função $f\colon X \to Y$. Agora, observe que a condição de injetividade para f diz que para $x, x' \in \operatorname{dom}(f)$ e $y \in \operatorname{im}(f)$ deve valer "$x\ f\ y$ e $x'\ f\ y \Rightarrow x = x'$" ou, equivalentemente, "$y\ f^{-1}\ x$ e $y\ f^{-1}\ x' \Rightarrow x = x'$", que por sua vez significa dizer que f^{-1} é função de $\operatorname{im}(f)$ em $\operatorname{dom}(f) = X$. Logo, o resultado segue pois f é sobrejetora se, e somente se, $\operatorname{im}(f) = Y$. Os detalhes ficam por conta do leitor. □

Corolário 0.0.22. *Se $f\colon X \to Y$ é uma função bijetora, então $f^{-1}\colon Y \to X$ é bijetora.*

Demonstração. Já vimos que $f^{-1}\colon Y \to X$ é função. Como $(f^{-1})^{-1} = f$ é uma função de X em Y, o resultado segue da proposição anterior. □

Restam apenas duas definições sobre funções que devem ser mencionadas antes de avançarmos para o estudo das *ordens*.

Definição 0.0.23. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são funções, então fica *bem definida* uma função $g \circ f\colon X \to Z$ dada pela identidade

$$(g \circ f)(x) := g \circ f(x) := g(f(x)),$$

para todo $x \in X$, chamada de (função) **composta** entre f e g, em geral denotada apenas por $g \circ f$. ¶

A definição acima faz sentido pois $f(x) \in Y$ para todo $x \in X$ e $Y = \operatorname{dom}(g)$, de modo que g *sabe* o que *fazer* com $f(x)$.

Exercício 0.4. Sejam $f\colon W \to X$, $g\colon X \to Y$ e $h\colon Y \to Z$ funções. Mostre que as funções $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são iguais. ■

Exercício 0.5. Mostre que $f\colon X \to Y$ é bijetora se, e somente se, existe uma função $g\colon Y \to X$ satisfazendo $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Em particular, a função g é, necessariamente, a inversa de f. Dica: use a Proposição 0.0.21. ■

Definição 0.0.24. Para uma função $f\colon X \to Y$ e um subconjunto $W \subseteq X$, a **restrição** da função f ao subconjunto W é a função $f|_W\colon W \to Y$ definida por $f|_W(w) := f(w)$ para todo $w \in W$. Dizemos que $g\colon Z \to Y$ **estende** f se $X \subseteq Z$ e $g|_X = f$. Mais ainda, para subconjuntos $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ fixados, consideram-se:

(i) a **imagem direta** de A por f, definida como $f[A] := \{f(a) : a \in A\}$;

(ii) a **pré-imagem** de B por f, definida como $f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$. ¶

Observação 0.0.25 (Importante). Explicitamente, $y \in f[A]$ se, e somente se, existe *algum* $a \in A$ com $f(a) = y$, enquanto $x \in f^{-1}[B]$ se, e somente se, $f(x) \in B$. Embora a pressa possa fazer o leitor pensar o contrário, ao escrever “$f^{-1}[B]$”, **não se supõe** que a função f seja *invertível*/bijetora: “f^{-1}” se refere à **relação** inversa de f, que pode não ser uma função, como as discussões acima escancaram. Na dúvida, use a definição dada para a notação – e não a sua intuição para o que a notação deveria ser. △

Exercício 0.6. Leia a observação anterior novamente, mas preste atenção desta vez. ■

Exemplo 0.0.26. Supondo conhecidos os *números inteiros* e a *potenciação usual*, para $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) := x^2$ e $C := \{0, 1, 4\}$ tem-se

$$f[C] = \{0, 1, 16\} \text{ e } f^{-1}[C] = \{0, -1, 1, -2, 2\}.$$

Para $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) := x^2 + 1$ ocorre

$$(f \circ g)(x) := f(x^2+1) = (x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1 \text{ e } (g \circ f)(x) := g(f(x)) = (x^2)^2+1 = x^4+1.$$

O leitor certamente deve conhecer exemplos menos artificiais. De qualquer forma, os capítulos posteriores estarão fartos de casos mais desafiadores. ▲

Observação 0.0.27 (Opcional: pares ordenados *honestos*)**.** Embora a abordagem sugerida acima para funções e relações tenha permitido tratá-las como conjuntos, isto só foi possível por meio da introdução de outro tipo de animal: os pares ordenados. Da forma como se fez, pares ordenados seguem tão *misteriosos quanto conjuntos*, já que não foram definidos, mas apenas tiveram seu comportamento descrito. Isto se corrige, por exemplo, com a definição dada por Kuratowski no começo do século passado:

Definição 0.0.28. O **par ordenado** de x e y é o conjunto $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. ¶

Parece estranha? Bastante. Mas ela cumpre o que se pede:

Proposição 0.0.29. *Para quaisquer a, b, c e d ocorre $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.*

Demonstração. Se $a = b$, então $\langle a, a\rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$, de modo que a igualdade $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ acarreta $\{c\} = \{a\} = \{c, d\}$ e, por conseguinte, $a = c$ e $b = d$. Se $a \neq b$, então a hipótese $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ leva a $\{a\} = \{c\}$ ou $\{a\} = \{c, d\}$, bem como $\{a, b\} = \{c\}$ ou $\{a, b\} = \{c, d\}$: se não ocorresse $a = c$, então $\{a\} = \{c, d\}$ implicaria em $c = d$, de modo que a primeira parte do argumento acarretaria $a = b$; analogamente, se $b \neq d$, então restaria apenas $\{a, b\} = \{c\}$ e, novamente, $a = b$. □

Uma definição explícita para o par ordenado $\langle x, y\rangle$, embora importante por razões técnicas, não é *relevante* para o dia a dia matemático. Dito de outra forma: o leitor não deve se preocupar muito com a *construção* do par ordenado, mas sim com seu comportamento; o que realmente importa é saber que ao se escrever $\langle a, b\rangle$, manifesta-se a intenção de declarar “a” como *primeira coordenada* e “b” como *segunda coordenada*[7]. △

Observação 0.0.30 (Notação)**.** Quem preferir *pode* escrever (x, y) em vez de $\langle x, y\rangle$. *Porém*, a adoção desses *brackets* angulados aqui busca apenas evitar futuras ambiguidades com a notação para *intervalos abertos*, que será feita com parênteses. A alternativa usual para intervalos abertos, a saber “$]\alpha, \beta[$”, ficaria visualmente desagradável ao ser combinada com a notação “$f[A]$” adotada neste texto para indicar a *imagem direta* de um subconjunto A por uma *função* f. △

[7] “`Neo`: *I just have never...* `Rama Kandra`: ... *heard a program speak of love?* `Neo`: *It's a... human emotion.* `Rama Kandra`: *No, it is a word. What matters is the connection the word implies.*” (*The Matrix Revolutions*, 2003).

0.0.1 Questão de ordem

O aparato das relações binárias apresentado na subseção anterior permite abstrair o nosso entendimento de *ordenação*, que será usado posteriormente tanto na descrição da reta real quanto no tratamento das *nets*. Intuitivamente, os pontos da reta são *ordenados*, no sentido de que há uma *noção* de *antes* e *depois*, como em 3 que antecede 7 e 7 que antecede 9 (note que de nossa experiência diária, 3 também antecede 9). Mais do que isso, a *reta* está ordenada em forma de linha, no sentido de que dados dois pontos nela, algum deles deve anteceder o outro. Tais ideias se formalizam na próxima

Definição 0.0.31. Uma relação binária R num conjunto $\mathbb{X}$ é dita uma **relação de ordem** (**parcial**) se R for

(i) **reflexiva**, i.e., se para todo $x \in \mathbb{X}$ ocorrer $x \mathrel{R} x$,

(ii) **antissimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência simultânea de $x \mathrel{R} y$ e $y \mathrel{R} x$ acarretar $x = y$, e

(iii) **transitiva**, i.e., se para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{X}$, a ocorrência simultânea de $x \mathrel{R} y$ e $y \mathrel{R} z$ acarretar $x \mathrel{R} z$.

Escreve-se $\langle \mathbb{X}, R \rangle$ quando se busca enfatizar que o conjunto $\mathbb{X}$ é considerado com a ordem R, caso em que $\mathbb{X}$ é dito ser (**parcialmente**) **ordenado** pela ordem (parcial) R.¶

Dada a óbvia inspiração nas ordenações usuais entre números, costuma-se utilizar símbolos como "$\preceq$", "$\sqsubseteq$" ou mesmo "$\leq$" para denotar ordens parciais – o que sugere uma generalização alternativa, desta vez com base em "$<$".

Definição 0.0.32. Diz-se que $\prec$ é uma **relação de ordem estrita** em $\mathbb{X}$ se $\prec$ for transitiva mas, em vez de reflexiva e antissimétrica, for

(i) **irreflexiva**, i.e., se para todo $x \in \mathbb{X}$ ocorrer $x \not\prec x$, e

(ii) **assimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência de $x \prec y$ acarretar $y \not\prec x$.

Como no caso parcial, escreve-se $\langle \mathbb{X}, \prec \rangle$ para indicar que $\mathbb{X}$ *está* (**estritamente**) **ordenado** pela ordem (estrita) $\prec$. ¶

Contudo, a diferença entre (relações de) *ordens parciais* e *estritas* é meramente virtual, no seguinte sentido:

✓ se $\langle \mathbb{S}, \prec \rangle$ é uma ordem estrita, então a relação $\preceq$ definida por

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \neq y \text{ e } x \prec y) \text{ ou } x = y$$

é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{S}$;

✓ se $\langle \mathbb{P}, \sqsubseteq \rangle$ é uma ordem parcial, então a relação $\sqsubset$ definida por

$$x \sqsubset y \Leftrightarrow x \neq y \text{ e } x \sqsubseteq y$$

é uma relação de ordem estrita em $\mathbb{P}$.

Exercício 0.7. Convença-se de que as afirmações acima estão certas. ■

É claro que ao aplicar o primeiro procedimento à ordem estrita $\sqsubset$, retorna-se à ordem parcial original $\sqsubseteq$, enquanto o segundo procedimento aplicado à ordem parcial $\preceq$ resulta na ordem estrita original $\prec$. Assim, tem-se o direito de chamar tanto $\langle \mathbb{S}, \prec \rangle$ quanto $\langle \mathbb{P}, \sqsubseteq \rangle$ de **ordens**. Em tais situações, ficam implicitamente definidas a ordem parcial $\preceq$ e a ordem estrita $\sqsubset$ induzidas por $\prec$ e $\sqsubseteq$, respectivamente.

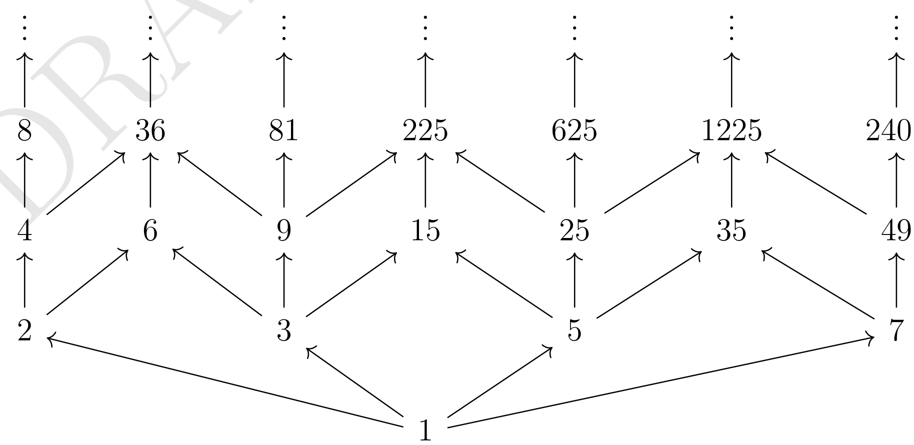
Exemplo 0.0.33. Leitores já familiarizados com conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.) devem ter em mente as formas usuais de ordenação em tais cenários como exemplos de ordens. Apesar disso, é importante saber que mesmo conjuntos *ordinários* admitem ordenações incomuns.

Por exemplo, em $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (que será discutido na próxima seção), pode-se declarar $m \preceq n$ sempre que m for um divisor de n. Embora tal relação defina uma ordem parcial sobre $\mathbb{N}^*$ (verifique?), ela é bastante diferente de sua ordenação usual: note que $2 \not\preceq 3$ e $3 \not\preceq 2$, já que ambos são primos. Portanto, $\langle \mathbb{N}^*, \preceq \rangle$ é uma ordem em que podem haver elementos *não-comparáveis* entre si, comportamento bem mais comum do que parece. ▲

Exemplo 0.0.34. A relação de inclusão $\subseteq$ sobre os membros de $\wp(X)$, para algum conjunto X fixado, faz de $\langle \wp(X), \subseteq \rangle$ uma ordem, já que: $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implicam $A = B$ e $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implicam $A \subseteq C$, para quaisquer $A, B, C \in \wp(X)$. Como no caso anterior, podem existir $A, B \in \wp(X)$ não-comparáveis: para $X := \mathbb{N}$ por exemplo, $A := \{0, 1, 2\}$ e $B := \{0, 1, 3\}$ não são comparáveis, já que $A \not\subseteq B$ (pois $2 \in A \setminus B$) e $B \not\subseteq A$ (pois $3 \in B \setminus A$). ▲

Observação 0.0.35 (Diagramas de Hasse)**.** Um modo bastante prático de *entender* certas ordens (ou *partes* delas) consiste em considerar seus *diagramas de Hasse*. A ideia é muito simples: a ocorrência de $x < y$ em $\mathbb{P}$ é representada por uma seta $(x \to y)$ que liga o vértice anterior (*menor*) x ao posterior (*maior*) y; quando $y < z$ e, por conseguinte, $x < z$, não se grafa uma seta entre ambos, pois subentende-se que as duas setas (entre x e y e entre y e z) compõem a seta entre x e z.

Assim, por exemplo, o diagrama de Hasse de $\langle \mathbb{N}^*, \preceq \rangle$ com a ordem do Exemplo 0.0.33 poderia *começar* com



Evidentemente, *diversos* (*infinitos*!) números foram omitidos, como 12 (que deveria estar acima de 4 e 3), 10 (que deveria estar acima de 5 e 2), 11 (que deveria estar acima de 1 apenas), 13... Já para o caso de $X := \{a, b, c\}$ e $\langle \wp(X), \subseteq \rangle$, o diagrama é mais simples, embora ainda intrincado.

$$\begin{tikzcd}
& \{a,b,c\} & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
& \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagramas desse tipo ajudam a perceber que a ocorrência de elementos não-comparáveis se traduz em bifurcações. Uma vez que pretendemos usar ordens para capturar o comportamento das retas, é razoável considerar aquelas em que quaisquer dois elementos sejam comparáveis, condição usualmente chamada de *tricotomia*.

Definição 0.0.36. Uma ordem $\langle \mathbb{X}, < \rangle$ é **total** se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorrer somente um dos três casos a seguir: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$. Se a ordem de $\mathbb{X}$ for parcial, basta dizer que para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorre $x \leq y$ ou $y \leq x$. ¶

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

Como o diagrama acima sugere, ordens totais[8] se comportam como linhas precisamente por não terem elementos incomparáveis (bifurcações). Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ com suas ordenações usuais são exemplos típicos de ordens totais. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ também, mas seus diagramas são mais desonestos em virtude da *densidade* de suas ordens: dado que entre quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x < y$ existe $z \in \mathbb{Q}$ com $x < z < y$, torna-se *impossível* representar *fielmente*, por meio de um diagrama de Hasse, o comportamento linear de tais ordens. Na prática, a alternativa honesta de representação gráfica nesses casos é, justamente... uma linha reta. △

Em geral, costuma-se ler uma expressão do tipo "$x \preceq y$" como "x é **menor do que ou igual** a y", enquanto "$x \prec y$" é lida como "x é (**estritamente**) **menor** do que y" – a menos que o contexto sugira uma terminologia própria para os símbolos. *Alternativamente*, lê-se "$x \preceq y$" como "y é **maior do que ou igual** a x", o que esconde um fato que será importante: escrevendo "$a \succeq b$" para indicar que $b \preceq a$, segue que $\succeq$ também é uma relação de ordem sobre o conjunto em questão: explicitamente, $\succeq$ é apenas a *relação inversa* de $\preceq$. Embora pareça banal, tal observação será útil adiante, quando explorarmos o *princípio da dualidade*.

Exercício 0.8. Já sabe né: verifique as afirmações anteriores. ■

[8]Que com muita razão também são chamadas de ordens *lineares*.

No que segue, fixam-se uma ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e elementos $a \in A$ e $p \in \mathbb{P}$. A cada *conceito* a ser definido na ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ a seguir, *corresponderá* um conceito *dual* em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, ou *co-conceito*, que consiste em reescrever o conceito original na ordem inversa $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$. Na prática, substituem-se as ocorrências dos símbolos $<$ e $\leq$ por $>$ e $\geq$, respectivamente. O leitor provavelmente já conhece algumas das definições na próxima tabela.

Conceito	**Co-conceito**
$a \in A$ é **elemento minimal de** A se não existe $x \in A$ com $x < a$	$a \in A$ é **elemento maximal** de A se não existe $x \in A$ com $a < x$
a é *um* **menor elemento** (ou **mínimo**) de A se $a \leq x$ ocorrer para todo $x \in A$	a é *um* **maior elemento** (ou **máximo**) de A se $x \leq a$ ocorrer para todo $x \in A$
p é um **limitante inferior** de A se $p \leq x$ para todo $x \in A$	p é um **limitante superior** de A se $x \leq p$ para todo $x \in A$
p é *um* **ínfimo** de A se p for *um* maior elemento do conjunto dos limitantes inferiores de A	p é *um* **supremo** de A se p for *um* menor elemento do conjunto dos limitante superiores de A
A é **limitado** se A é limitado inferiormente e superiormente	

Na tabela acima, escreve-se *um mínimo* (e *um máximo*) por puro preciosismo: se $a, a' \in A$ são mínimos de A, então ocorre $a \leq a'$ e $a' \leq a$, donde a antissimetria de $\leq$ acarreta $a = a'$. Como um máximo de A em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é um mínimo de A em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$, segue que máximos (quando existem) também são únicos. Em particular, supremos e ínfimos, quando existem, são únicos.

Exercício 0.9. Convença-se das afirmações acima. Dica: encare o parágrafo anterior até que ele te encare de volta. ■

Definição 0.0.37. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem e $A \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto. Adotaremos as seguintes notações:

(i) o menor elemento de A (caso exista) é denotado $\min\limits_{a \in A} a$, $\min_{\leq} A$ ou apenas $\min A$;

(ii) o maior elemento de A (caso exista) é denotado por $\max\limits_{a \in A} a$, $\max_{\leq} A$ ou apenas $\max A$;

(iii) o ínfimo de A (caso exista) é denotado por $\inf\limits_{a \in A} a$, $\inf_{\leq} A$ ou apenas $\inf A$;

(iv) o supremo de A (caso exista) é denotado por $\sup_{a \in A} a$, $\sup_{\leq} A$ ou apenas $\sup A$. ¶

Observação 0.0.38 (Dualidade)**.** A importância do argumento sugerido (implicitamente) para o Exercício 0.9 me obriga a mastigá-lo para o leitor desatento. Antes de qualquer outra coisa, dado que os símbolos “$\leq$” e “$\geq$” são carregados de significados que trazemos das ruas, convém reescrever a *frase* “$a \in A$ é mínimo de A” com respeito à uma ordem parcial $\langle \mathbb{X}, R \rangle$: explicitamente, para todo $x \in A$ deve ocorrer $a \, R \, x$.

Ora, $a \in A$ é mínimo de A com respeito à ordem $R :=\geq$ em $\mathbb{P}$ se, e somente se, $a \geq x$ para todo $x \in A$ (compare com o final do parágrafo anterior!), o que equivale a dizer que $x \leq a$ para todo $x \in A$, i.e., $a \in A$ é máximo de A com respeito à ordem $R^{-1} :=\leq$. Logo, se A só pode ter um mínimo em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$, então A só pode ter um máximo em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$. Em último caso, se a argumentação parecer confusa, pode-se provar diretamente a afirmação “*se $a, a' \in A$ são máximos de A, então $a = a'$*”: como tanto a quanto a' pertencem ao conjunto A, deve-se ter $a' \leq a$ e $a \leq a'$, donde a antissimetria acarreta $a = a'$. Em outras palavras, trata-se do mesmo argumento usado para mínimos, exceto pela troca das ocorrências de “$\leq$” por “$\geq$”. Vejamos outro exemplo:

Proposição 0.0.39. *Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem e $A, B \subseteq \mathbb{P}$ subconjuntos de $\mathbb{P}$.*

(i) *Se* $\sup A$ *e* $\sup B$ *existem e para todo $a \in A$ existe $b \in B$ com $a \leq b$, então*
$$\sup A \leq \sup B.$$

(ii) *Se* $\inf A$ *e* $\inf B$ *existem e para todo $a \in A$ existe $b \in B$ com $a \geq b$, então*
$$\inf A \geq \inf B.$$

Demonstração. Para provar (i), note que $b \leq \sup B$ para todo $b \in B$, de modo que por cada $a \in A$ *ter* um $b' \in B$ testemunhando $a \leq b'$, resulta $a \leq \sup B$ para qualquer $a \in A$, i.e., $\sup B$ é um limitante superior de A, donde a desigualdade $\sup A \leq \sup B$ segue por $\sup A$ ser o menor limitante superior de A.

Agora, para (ii), note que $\alpha = \inf_{\leq} A$ (i.e., em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$) se, e somente se, $\alpha = \sup_{\geq} A$ (i.e., em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$) (verifique!). Feito isso, a tradução da afirmação (ii) em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$ é "se $\sup_{\geq} A$ e $\sup_{\geq} B$ existem e para todo $a \in A$ existe $b \in B$ com $a \geq b$, então $\sup_{\geq} A \geq \sup_{\geq} B$", que já foi provada para uma ordem parcial qualquer – em particular, deve ser válida para $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$. Logo, ao *retraduzir de volta* para $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, obtém-se precisamente a afirmação (ii) que se pretendia provar. □

Exercício 0.10. Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Exercício 0.11. Mostre que se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{P}$ são não-vazios e ambos $\sup A$ e $\sup B$ existem, então $\sup A \leq \sup B$. Enuncie (e demonstre?) a versão dual para ínfimos. ■

O leitor pode preferir demonstrar "no braço" as diversas versões duais das afirmações de ordem que encontraremos pelo caminho, o que inclusive constitui um bom exercício de fixação e adaptação – além de comprovar, na prática, o *princípio da dualidade.* △

Exemplo 0.0.40. Dado um conjunto X e subconjuntos $A, B \subseteq X$, existem $\sup\{A, B\}$ e $\inf\{A, B\}$ em $\langle \wp(X), \subseteq \rangle$? Se sim, quem são? Vejamos:

(i) se existir, $\sup\{A, B\}$ deve limitar superiormente o conjunto $\{A, B\}$, acarretando $A, B \subseteq \sup\{A, B\}$ e, além disso, se C for um subconjunto de X com $A, B \subseteq C$, também deverá ocorrer $\sup\{A, B\} \subseteq C$ (o supremo de um conjunto é o seu *menor* limitante superior!);

(ii) analogamente, se existir $\inf\{A, B\}$, este deverá não apenas limitar inferiormente $\{A, B\}$ (i.e., $\inf\{A, B\} \subseteq A, B$), como também satisfazer $D \subseteq \inf\{A, B\}$ para qualquer subconjunto D de X com $D \subseteq A, B$ (o ínfimo de um conjunto é o seu *maior* limitante inferior!).

Parece familiar, não? Explicitamente, $\sup\{A, B\}$ deve ser o menor subconjunto de X a conter tanto A quanto B, e já conhecemos um subconjunto que faz isso: $A \cup B$! E, de fato, tem-se $\sup\{A, B\} = A \cup B$:

✓ $A \cup B$ limita $\{A, B\}$ superiormente, pois ocorre $A, B \subseteq A \cup B$;

✓ $A \cup B$ é o menor limitante superior de $\{A, B\}$, já que $A \cup B \subseteq C$ sempre que $A, B \subseteq C$.

O leitor que se depara com isso pela primeira vez pode se perguntar: como é possível que as linhas de argumentação acima tenham provado a identidade "$\sup\{A, B\} = A \cup B$", dado que a expressão "$\sup\{A, B\}$" nem sequer apareceu? Resposta: as condições verificadas acima são a *definição de supremo* que, quando existe, é único; assim, ao mostrar que $A \cup B$ tem as propriedades que $\sup\{A, B\}$ deveria ter, conclui-se que $A \cup B$ *é* o supremo procurado. ▲

Exercício 0.12. Mostre que $A \cap B = \inf\{A, B\}$ em $\wp(X)$. ■

Exemplo 0.0.41. Para verificar se um elemento específico $p \in \mathbb{P}$ é o supremo ou ínfimo de um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$, basta demonstrar que p atende a determinadas condições. Por outro lado, para justificar a *inexistência* de supremos ou ínfimos, é necessário provar que nenhum elemento de $\mathbb{P}$ possui as propriedades necessárias.

Por exemplo: veremos, oportunamente, que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não tem supremo no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pois $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, i.e., seu conjunto de limitantes superiores em $\mathbb{R}$ é vazio, de modo que não há como existir o *menor* limitante superior (em $\mathbb{R}$). Mesmo nas situações em que um conjunto admite limitantes superiores, não se garante em geral que exista um menor limitante superior: veremos, oportunamente, que o conjunto $A := \{q : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q^2 < 2\}$ é limitado superiormente mas, para qualquer limitante superior $\beta \in \mathbb{Q}$ de A, existe *outro* limitante superior $\beta' \in \mathbb{Q}$ de A com $\beta' < \beta$, mostrando assim que A não tem um *menor limitante superior* em $\mathbb{Q}$. ▲

Observação 0.0.42 (Importante). No último caso do exemplo anterior, a restrição "em $\mathbb{Q}$" é necessária, já que ao se considerar o mesmo conjunto A como subconjunto de $\mathbb{R}$, A *terá* $\sqrt{2}$ como supremo. Ter ou não ter supremos ou ínfimos é algo que não depende apenas do subconjunto analisado, mas também do conjunto ordenado que o contém. Leitores que se sentirem confusos devem adotar as notações alternativas "$\sup_{\mathbb{P}} A$" e "$\inf_{\mathbb{P}} A$" até que se sintam confortáveis com as mudanças súbitas de contexto: neste caso, o próximo capítulo mostrará que não existe $\sup_{\mathbb{Q}} A$, ao passo que $\sup_{\mathbb{R}} A = \sqrt{2}$. △

Exemplo 0.0.43 (Adiável)**.** Elementos minimais e maximais não costumam ser explorados em contextos introdutórios de Análise pois as ordens consideradas *geralmente* são totais – e, em tais casos, as definições coincidem.

Proposição 0.0.44. *Sejam $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ uma ordem, $A \subseteq \mathbb{T}$ um subconjunto e $a \in A$ um elemento qualquer.*

(i) *Se $a = \min A$, então a é minimal.*

(ii) *Se $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ é uma ordem total, então vale a recíproca do item anterior.*

Demonstração. Para a primeira parte, não pode existir $x \neq a$ com $x < a$ e $x \in A$, pois por a ser mínimo deve-se ter $a \leq x$ (lembre-se: ordens estritas são assimétricas!). Para a segunda parte: a princípio, por a ser minimal, para nenhum $x \in A$ *ocorre* $x < a$ e, como x e a são comparáveis pela hipótese de tricotomia, *resta* apenas $a \leq x$. Logo, $a = \min A$. □

Exercício 0.13. Enuncie e demonstre a versão dual da proposição anterior. ■

Com isso dito, o leitor curioso pode retornar para as ordens não-totais da Observação 0.0.35: no caso de $\wp(X)$, por exemplo, $A := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ é tal que todos os seus elementos são minimais em $\wp(X)$ (e nenhum deles é mínimo!), comportamento similar ao dos números primos em $\langle \mathbb{N}^*, \preceq \rangle$. Alguma delas apresenta subconjuntos com elementos maximais que não são máximos? ▲

Antes de avançar para o *próximo* assunto na *fila*, é conveniente destacar os modos com que podemos detectar supremos e ínfimos, principalmente no subcaso das ordens totais, que será o tipo mais utilizado no texto. Primeiro, para fixar as ideias, tratemos dos ínfimos.

Exercício 0.14. Para uma ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ e um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$, suponha que exista $\alpha := \min A$. Mostre que $\alpha = \inf A$. ■

Explicitamente, o exercício indica que o mínimo de um subconjunto A, quando existe, tem as propriedades do ínfimo, ou seja: limita A inferiormente e é maior do que todos os demais limitantes inferiores de A. Nesse sentido, a grande diferença entre ínfimos e mínimos é que os ínfimos fazem o papel de mínimo na ausência destes, uma vez que mínimos precisam pertencer aos seus respectivos conjuntos.

Exemplo 0.0.45. Para quem já está familiarizado com os racionais e sua ordenação usual, o subconjunto $A := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ não tem menor elemento: dado qualquer $q \in A$, tem-se $\frac{q}{2} \in A$ com $\frac{q}{2} < q$, mostrando que nenhum dos elementos de A pode tomar para si o papel de ser *o menor*. O "problema", como o leitor já deve ter percebido, é a ausência de 0 em A: se ocorresse $0 \in A$, então 0 seria, trivialmente, o menor elemento de A. Este é o indício de que 0, embora não seja o menor elemento de A, é o seu ínfimo! ▲

Formalmente, a afirmação final do exemplo anterior pode se justificar com as seguintes observações:

✓ 0 é limitante inferior de A pela definição de A;

✓ se $s \in \mathbb{Q}$ e $s \leq q$ para todo $q \in A$, i.e., se s é limitante inferior de A, então $s \leq 0$, posto que *o contrário obriga* a ocorrência de $0 < s$, donde segue que $\dfrac{s}{2} \in A$ com $\dfrac{s}{2} < s$, contrariando a suposição de s limitar A inferiormente.

Note que só foi possível concluir "$s > 0$" pois a totalidade da ordem impõe a ocorrência de "$s < 0$", "$s = 0$" ou "$s > 0$", de modo que a negação das duas primeiras forçou a validade da última. Noutras palavras, mostrou-se que nenhum $s > 0$ pode limitar A inferiormente, de modo que pela tricotomia, limitantes inferiores de A devem estar *abaixo* de 0. O fenômeno vale em geral.

Teorema 0.0.46. *Fixadas uma ordem total $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$, um subconjunto $A \subseteq \mathbb{T}$ e um $\alpha \in \mathbb{T}$ limitante inferior de A, são equivalentes:*

(i) $\alpha = \inf A$*;*

(ii) *para todo $\beta \in \mathbb{T}$, se ocorrer $\beta > \alpha$, então existe $a \in A$ com $a < \beta$.*

Demonstração. Se vale (i), então $\alpha = \max\{l \in \mathbb{T} : l \text{ é limitante inferior de } A\}$, donde segue que se $\beta > \alpha$, então β não pode ser limitante inferior de A, i.e., tem que existir $a \in A$ com $b \nleq a$, donde a tricotomia acarreta $a < b$, como desejado. Reciprocamente, se vale (ii), então nenhum $\beta > \alpha$ limita A inferiormente ou, equivalentemente (graças à tricotomia), todo β limitante inferior de A satisfaz $\beta \leq \alpha$, donde o restante segue por α ser limitante inferior de A (por hipótese). □

Exercício 0.15. Dualize o teorema anterior, i.e., enuncie (e demonstre?) a versão para supremos. Dica: explicitamente, "se α é limitante superior de A, então $\alpha = \sup A$ se, e somente se, para todo $\beta < \alpha$ existir $a \in A$ com $\beta < a$". ■

0.0.2 Boa ordenação e os números naturais

A discussão anterior sobre ordens torna bastante apropriado apresentar ao leitor a importantíssima ideia de *boa ordenação*:

Definição 0.0.47. Uma ordem $\leq$ (ou $<$) sobre um conjunto $\mathbb{B}$ é chamada de **boa ordem** se todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$ admite menor elemento. Diz-se também que $\mathbb{B}$ está **bem ordenado** pela (boa) ordem $\leq$. ¶

Moralmente, um conjunto está bem ordenado quando seus elementos podem ser *enfileirados* por meio da ordem $\leq$: há o *primeiro* elemento, digamos $b_0 := \min \mathbb{B}$, em seguida o seu *sucessor*, digamos $b_1 := \min(\mathbb{B} \setminus \{b_0\})$, em seguida... Como os índices "0" e "1" sugerem, parece haver alguma ligação com os *números naturais* que já conhecemos de longa data, o que suscita uma pergunta deliberadamente evitada até agora: *o que são números (e o que poderiam ser)?*[9]

$$b_0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow b_4 \longrightarrow \cdots$$

Evidentemente, esse tipo de pergunta não se refere ao símbolo utilizado para *denotar* um número, mas sim ao próprio número: por exemplo, qual o significado de "três" nas sentenças "A Argentina venceu três Copas do Mundo" e "Neymar rolou por três metros ao simular uma falta"? Quais as diferenças de significado, e quais as semelhanças?

Exercício 0.16. Reflita (por pelo menos *três* minutos) sobre as questões acima. ■

Apesar da sugestão numérica anterior, é possível evitar o emprego explícito de números no entendimento das boas ordens – o que inclusive será útil quando voltarmos a discutir a *natureza* dos números. A grande sacada para fazer isso está escondida na seguinte

Proposição 0.0.48. *Sejam $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem e $b \in \mathbb{B}$. Se existir $c \in \mathbb{B}$ com $c > b$, então existe $b' \in \mathbb{B}$ com as seguintes propriedades:*

(i) *$b < b'$;*

(ii) *se $d \in \mathbb{B}$ e $d > b$, então $b' \leq d$.*

Demonstração. É mais simples do que parece: a existência de c com $c > b$ garante que $\mathbb{B}_{>b} := \{d \in \mathbb{B} : d > b\}$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$, justamente por ter c como elemento. Logo, a boa ordenação garante a existência de $\min \mathbb{B}_{>b}$, de modo que basta tomar $b' := \min \mathbb{B}_{>b}$. □

Definição 0.0.49. Nas condições da proposição anterior, vamos denotar b' por $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, o **sucessor** de b na boa ordem $\mathbb{B}$. ¶

Assim como ocorre com sucessores nos diversos campos da vida real, o sucessor de b numa boa ordem $\mathbb{B}$, caso exista, é o primeiro elemento da ordem a ser maior do que b, o que em particular impede a existência de elementos *intermediários*. O próximo exercício deve esclarecer a ideia.

Exercício 0.17. Seja $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem. Mostre que se $b \in \mathbb{B}$ e existe $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, então não existe $c \in \mathbb{B}$ tal que $b < c < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. Dica: releia a definição de $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. ■

[9]Referência ao clássico "*Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*", de Richard Dedekind, em que *Ele* apresenta Sua construção para (o que hoje chamamos de) um corpo ordenado completo [11].

Observação 0.0.50. É importante destacar que a noção de sucessor só faz sentido em boas ordens. Para leitores já familiarizados com os números racionais, por exemplo, note que não faz sentido perguntar qual o sucessor de 0 em $\mathbb{Q}$, já que não existe o *primeiro racional* maior do que 0: sempre que $q > 0$, existe outro q' com $0 < q' < q$. Em particular, a relação de ordem usual sobre $\mathbb{Q}$ não é uma boa ordem. △

Exemplo 0.0.51. Por mais sem graça que pareça, $\mathbb{B} := \emptyset$ pode ser considerado como um conjunto bem ordenado: no caso, sua boa ordem $\leq$ é o único subconjunto de $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$, a saber, $\emptyset$! Apesar de sua simplicidade, $\emptyset$ é o gatilho de uma importante reação em cadeia, como veremos adiante. ▲

Definição 0.0.52. Fixada uma boa ordem $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$, diremos que $u \in \mathbb{B}$ é o **último elemento** de $\mathbb{B}$ se $u = \max \mathbb{B}$. ¶

Proposição 0.0.53. *Se $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é uma boa ordem e $u' \notin \mathbb{B}$, então existe uma boa ordem $\langle \mathbb{B}', \leq' \rangle$ tal que*

(i) $\mathbb{B} \subsetneq \mathbb{B}'$,

(ii) $x \leq y \Leftrightarrow x \leq' y$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{B}$, *e*

(iii) u' *é o último elemento de* $\mathbb{B}'$.

Demonstração. Basta definir $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\}$ e, para quaisquer $x, y \in \mathbb{B}'$, escrever $x \leq' y$ para indicar a ocorrência de "$x, y \in \mathbb{B}$ e $x \leq y$" ou "$y = u'$". Na prática, $\leq'$ apenas *estende* a definição de $\leq$ sobre $\mathbb{B}' \times \mathbb{B}'$ ao declarar $x \leq u'$ para todo $x \in \mathbb{B}'$, o que torna quase imediata a verificação das propriedades desejadas – o que fica por conta do leitor. □

Exemplo 0.0.54. Fixado qualquer objeto u', tem-se por definição que $u' \notin \emptyset$, o que permite empregar a última proposição a fim de estender a boa ordem $\mathbb{B}$ do Exemplo 0.0.51: faz-se $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\} = \{u'\}$, que tem u' como seu último (e único!) elemento. Ora, por que parar? Certamente existe $u'' \neq u'$, donde a proposição anterior garante a boa ordem $\mathbb{B}'' := \mathbb{B}' \cup \{u''\}$, com $u' < u''$ e u'' como último elemento. Em particular, u'' é sucessor de u', mas u'' não tem sucessores em $\mathbb{B}''$. Ora, por que parar? Certamente existe $u''' \notin \{u', u''\}$, donde a proposição anterior garante... ▲

Como os exemplos acima sugerem, a noção de sucessor numa boa ordem torna supérfluo o uso explícito de números *alienígenas* para descrever o seu enfileiramento. Na verdade, mais do que isso, o comportamento dos sucessores é tão parecido com o da *progressão* esperada dos números naturais que chega a ser tentador utilizar a noção de boa ordenação para *descrever* o que os números *poderiam ser*. Para agravar ainda mais o sentimento:

Teorema 0.0.55 (Indução numa boa ordem)**.** *Seja $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem. Suponha que X seja um subconjunto de $\mathbb{B}$ com a seguinte propriedade:*

sempre que ocorre $b \in X$ para todo $b < c$, também ocorre $c \in X$.

Em tais condições, $\mathbb{B} = X$.

Demonstração. Nada precisa ser feito se ocorrer $\mathbb{B} = \emptyset$. Agora, se $\mathbb{B} \neq \emptyset$ e existir $b \in \mathbb{B}$ com $b \notin X$, então o conjunto $T := \{b \in \mathbb{B} : b \notin X\}$ é não-vazio e, pela boa ordenação, deve existir $t := \min T$; em particular, $t \in T$. Ora, isto impede que X tenha a propriedade do enunciado: com efeito, por t ser o menor elemento em T, todo $b < t$ deve ser membro de X, de modo que se X tivesse a propriedade, concluiríamos que $t \in X$, mas $t \in T := \mathbb{B} \setminus X$. □

Na prática, o subconjunto X costuma ser formado pelos elementos de $\mathbb{B}$ que têm alguma propriedade $\mathcal{P}$ fixada, de modo que a exigência feita sobre X se traduz na seguinte condição: *sempre que vale* $\mathcal{P}(b)$ *para todo* $b < c$, *também vale* $\mathcal{P}(c)$. Note que em tal situação, o conjunto $X := \{x : x \in \mathbb{B} \text{ e vale } \mathcal{P}(x)\}$ satisfaz a condição imposta pelo teorema anterior, de modo que deve-se ter $X = \mathbb{B}$, i.e., $\mathcal{P}(b)$ vale para todo $b \in \mathbb{B}$.

Em todo caso, o cerne do argumento indutivo consiste em usar a *boa estruturação* de um conjunto bem ordenado para, em vez de verificar *individualmente* se "$b \in X$" para cada $b \in \mathbb{B}$, fazer a verificação de uma única afirmação condicional do tipo

"para todo c, $\mathcal{H}(c) \Rightarrow \mathcal{T}(c)$",

onde a **$\mathcal{H}$ipótese indutiva**, $\mathcal{H}(c)$, é "$b \in X$ para todo $b < c$", e a **$\mathcal{T}$ese**, $\mathcal{T}(c)$, é "$c \in X$". Em certo sentido, assegurar esta simples condicional dispara um efeito dominó:

✓ se $\mathbb{B} \neq \emptyset$, então existe $w := \min \mathbb{B}$ e, por não existirem elementos menores do que w, a hipótese indutiva $\mathcal{H}(w)$ torna-se verdadeira por vacuidade (para que fosse falsa, deveria existir $b < w$ com $b \notin X$, mas não há $b < w$), donde se conclui que vale a tese, i.e., $w \in X$;

✓ se existir $w' := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(w)$, então w é o único elemento de $\mathbb{B}$ estritamente menor do que w', e já sabemos que vale $w \in X$, o que garante a hipótese indutiva $\mathcal{H}(w')$ e, portanto, deve-se ter $w' \in X$;

✓ se existir $w'' := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(w')$, então...

Esse arquétipo de efeito dominó é equivalente ao que foi apresentado no teorema anterior, mas somente nas boas ordens em que todos os elementos, exceto o menor, são sucessores de *alguém*[10].

Corolário 0.0.56 (Indução "clássica")**.** *Sejam* $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ *uma boa ordem com* $\mathbb{B} \neq \emptyset$*, considere* $p := \min \mathbb{B}$ *e suponha que para todo* $b' \in \mathbb{B} \setminus \{p\}$ *exista* $b \in \mathbb{B}$ *tal que* $b' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. *Em tais condições, se* $X \subseteq \mathbb{B}$ *for tal que*

✓ $p \in X$, *e*

✓ $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$ *sempre que* $b \in X$,

então $\mathbb{B} = X$.

Demonstração. Basta verificar que X tem a propriedade do teorema anterior, i.e., que para qualquer $c \in \mathbb{B}$, tenha-se a ocorrência de $c \in X$ sempre que $b \in X$ para todo $b < c$: ora, se $c := p$, então $p \in X$ por hipótese; se $c > p$ e $b \in X$ para todo $b < c$, então em particular para $b \in \mathbb{B}$ com $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ (que existe pela hipótese sobre $\mathbb{B}$), deve-se ter $b < c$, donde segue que $b \in X$ e, pela hipótese sobre X, $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$, como desejado. □

Exercício 0.18. Prove o corolário anterior diretamente. Dica: suponha $\mathbb{B} \setminus X \neq \emptyset$ e note que seu menor elemento *deveria* ser da forma $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ para algum $b \in X$. ■

Como *último* passo antes de revelar as verdadeiras intenções de toda essa discussão:

Proposição 0.0.57. *Seja* $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ *uma boa ordem com* $\mathbb{B} \neq \emptyset$. *Se todo* $b \in \mathbb{B}$ *tem sucessor, então a função* $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}} \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *é injetora.*

[10]Cuidado: ter sucessor $\neq$ ser sucessor. O exemplo óbvio é o menor elemento de uma boa ordem com pelo menos *dois* elementos. Exemplos menos óbvios serão discutidos em breve.

Demonstração. Explicitamente, deve-se mostrar que se $b, b' \in \mathbb{B}$ são distintos, então $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \neq \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b')$. Uma vez que toda boa ordem é também total (Exercício 0.57), a ocorrência de $b \neq b'$ acarreta $b < b'$ ou $b' < b'$, de modo que mostraremos algo *mais forte*: se $b < b'$, então $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b')$. Como? Por indução!

Vamos mostrar que cada $c \in \mathbb{B}$ tem a seguinte propriedade: para todo $x \in \mathbb{B}$, se $x < c$, então $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)$. Para tanto, fixado $c \in \mathbb{B}$, suponha que todo $b < c$ tenha a *mesma* propriedade, i.e.: se $x < b$, então $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. Agora, tudo se resume a considerar as situações que podem acometer o elemento c.

- ✓ Se $c = \min \mathbb{B}$, então a implicação "$x < c \Rightarrow \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)$" vale por vacuidade, já que não existe $x < c$;
- ✓ Se $c > \min \mathbb{B}$, então:
  - ✓ *pode ser* que exista $b \in \mathbb{B}$ com $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, donde segue que $b < c$ e, por conseguinte, todo $x < c$ é tal que $x < b$ (caso em que $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) = c$ e $c < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)$) ou $x = b$ (caso em que $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) = c < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)$), já que a ocorrência de $b < x$ violaria o Exercício 0.17;
  - ✓ mas *pode ser que não*, i.e., pode não existir $b \in \mathbb{B}$ com $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, o que pela definição de sucessor se traduz em afirmar que todo $x < c$ admite $x' < c$ com $x < x'$, donde segue que $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) < c$ para todo $x < c$ (já que $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) = c$ contraria a hipótese, enquanto $c < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x)$ viola o Exercício 0.17) e, portanto, $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)$. □

A última parte do argumento anterior certamente soou estranha: um elemento maior do que o primeiro mas que não é sucessor de ninguém; ao pensar nos elementos de $\mathbb{B}$ como números naturais, seria como admitir um número maior do que *infinitos* antes dele!

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow ?$$

O problema é que, a rigor, $\mathbb{B}$ não é o conjunto dos naturais, mas apenas uma boa ordem em que todo elemento tem sucessor. Então, o que aconteceria se *impuséssemos* sobre $\mathbb{B}$ a condição de que todo $b \neq \min \mathbb{B}$ é sucessor de algúem?

Teorema 0.0.58. *Se $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é uma boa ordem com $\mathbb{B} \neq \emptyset$ tal que*

(i) $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ *existe para todo* $b \in \mathbb{B}$*,*

(ii) para todo $b' \in \mathbb{B} \setminus \{\min \mathbb{B}\}$ *existe* $b \in \mathbb{B}$ *com* $b' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$*,*

então a função $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *satisfaz os seguintes "axiomas":*

(DP_i) $\mathbb{B} \setminus \operatorname{im}(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}) = \{\min \mathbb{B}\}$*;*

(DP_{ii}) *a função* $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *é injetora; e*

(DP_{iii}) *se* $X \subseteq \mathbb{B}$ *for tal que* $\min \mathbb{B} \in X$ *e* $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$ *sempre que* $b \in X$*, então* $X = \mathbb{B}$*.*

Demonstração. As condições (i) e (ii) asseguram $\mathbb{B} \setminus \{\min \mathbb{B}\} = \operatorname{im}(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}})$, donde segue o primeiro axioma. Os axiomas restantes decorrem, respectivamente, da Proposição 0.0.57 e do Corolário 0.0.56. □

Os axiomas (DP_i), (DP_{ii}) e (DP_{iii}), elaborados independentemente por Dedekind e Peano, buscam capturar o *mínimo* que se espera dos *números naturais* dentro de um cenário regido por conjuntos. Em certo sentido, eles funcionam como os axiomas que descrevem os *grupos*, que por sua vez buscam capturar as propriedades básicas das noções de simetria. Com isso em mente, faz sentido a próxima

Definição 0.0.59. Diremos que $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ é um **sistema natural** se $\mathcal{N}$ for um conjunto, i for um elemento de $\mathcal{N}$ e $s\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ for uma função com as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{N} \setminus \mathrm{im}(s) = \{i\}$;

(ii) s é injetora; e

(iii) se um subconjunto $X \subseteq \mathcal{N}$ for tal que

(C.I.) $i \in X$, e

(H.I.) $s(n) \in X$ sempre que $n \in X$,

então $X = \mathcal{N}$. ¶

Com tal terminologia, o teorema anterior se transforma no

Corolário 0.0.60. *Se $\langle \mathbb{B}, \leq\rangle$ é uma boa ordem com $\mathbb{B} \neq \emptyset$ tal que*

(i) $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ existe para todo $b \in \mathbb{B}$,

(ii) para todo $b' \in \mathbb{B} \setminus \{\min \mathbb{B}\}$ existe $b \in \mathbb{B}$ com $b' = \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$,

então $\langle \mathbb{B}, \min \mathbb{B}, \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}\rangle$ é um sistema natural.

Equivalentemente, ao *se* começar com um sistema natural $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$, pode-se definir uma boa ordem $\leq$ sobre $\mathcal{N}$ que tenha i como menor elemento e tal que $\mathrm{suc}_{\mathcal{N}}(n) = s(n)$ para todo $n \in \mathcal{N}$: chamando um subconjunto $I \subseteq \mathcal{N}$ de *indutivo* se ocorrer $s(u) \in I$ sempre que $u \in I$, basta declarar $m \leq n$ se para todo subconjunto indutivo I de $\mathcal{N}$, valer que $n \in I$ sempre que $m \in I$.

Exercício 0.19 (Opcional)**.** Demonstre a última afirmação. Comentário: note que nas argumentações anteriores, a partir de uma boa ordem satisfazendo certas condições, *cozinhou-se* um sistema natural; desta vez, deve-se definir uma boa ordem a partir de um sistema natural dado – e por isso a descrição da ordem precisa usar informações desse sistema. ■

Definição 0.0.61. O exercício anterior torna lícito chamar de **boa ordem natural** às boas ordens que cumprem as exigências do Teorema 0.0.58. ¶

Portanto, existe uma boa ordem natural se, e somente se, existe um sistema natural. Agora: *existe* algum desses animais? A resposta pode ser mais delicada do que parece pois, como veremos na próxima seção, um conjunto dotado de uma injeção sobre uma parte própria (como ocorre com a função sucessor) é, necessariamente, *infinito*, o que revela um primeiro ponto de distinção metodológica: vamos admitir conjuntos *infinitos*?

A pergunta acima é mais delicada do que parece: como o Exemplo 0.0.54 ilustrou, o processo de acrescentar um último elemento à uma fila *previamente* dada é inesgotável, pelo menos enquanto experimento mental. Assim, é bastante razoável aceitar, intuitivamente, que o *universo* de todos os objetos *disponíveis* seja *infinito*. Em linguajar técnico, esta noção tem a ver com o *infinito potencial*, a ideia de que podemos considerar conjuntos finitos arbitrariamente grandes.

Porém, o problema que se desenrola à frente consiste em *aceitar* infinitos elementos *coexistindo* simultaneamente num mesmo conjunto – ideia que costuma ser xingada de *infinito atual* e que compreende o significado que tem sido empregado para o termo ao longo do texto. Seja por razões pessoais (por exemplo, a crença de que os objetos matemáticos devem algum tipo de satisfação perante a realidade material, que aparenta ser finita), técnicas (por exemplo, a restrição de que os objetos matemáticos tratados sejam replicáveis num computador[11]) ou de qualquer outra natureza, a subjetividade da questão impede que se descartem sumariamente os posicionamentos contrários aos conjuntos *infinitos*. Contudo, isto não significa que devamos nos guiar por tais restrições: é igualmente lícito, a princípio, aceitar que conjuntos *infinitos* possam *existir* enquanto entes abstratos. E será esta a postura adotada no texto.

Assim, fica um pouco mais fácil responder à primeira pergunta, sobre a existência de sistemas naturais: pelo menos intuitivamente, *deveria* existir um sistema natural, justamente aquele formado pelos *números naturais verdadeiros*, i.e., o conjunto formado efetivamente pelos objetos que entendemos como sendo os números naturais. A fim de tornar essa certeza parte do aparato formal que estamos *construindo*, é razoável postular mais um axioma.

Axioma de Dedekind-Peano. *Existe um sistema natural.*

Deste ponto em diante, é prática comum fixar *algum* sistema natural e, por meio de *argumentações indutivas*, construir *recursivamente* as operações de *adição* e *multiplicação* de forma precisa e verificar todas as propriedades operatórias esperadas, num árduo, doloroso e ~~gratificante?~~ demorado processo que, na prática, *recria* a Aritmética Básica. É nesse sentido que se costuma dizer que os Axiomas de Dedekind-Peano capturam o básico dos *naturais*: a partir deles e das construções conjuntistas (!)[12], recuperam-se todos os dispositivos aritméticos usuais e, *a posteriori*, todos os outros conjuntos numéricos! Há, porém, um elefante na sala: o vermelho que eu vejo é tão vermelho quanto o que você vê?

Explicitamente, o Axioma de Dedekind-Peano não assegura *o* sistema natural, mas apenas *um* sistema natural. Poderia haver vários? Se sim, então os processos descritos acima dependem do sistema natural escolhido? Cada sistema natural tem sua própria Aritmética? Será que essas preocupações realmente fazem sentido?

Comecemos pela última: a rigor, os questionamentos são pertinentes. Por exemplo: assim como um *grupo* é um conjunto dotado de funções que satisfazem certos axiomas, sistemas naturais também são conjuntos dotados de funções que satisfazem certos axiomas. Dado que existem grupos definitivamente *incompatíveis* entre si, há precedente para questionar a possibilidade de sistemas naturais *incompatíveis* em algum sentido. Feita a ressalva, o leitor pode se tranquilizar: embora existam (*infinitos*!) sistemas naturais distintos, todos eles são *rigorosamente* compatíveis entre si, o que na prática garante que a Aritmética desenvolvida em um seja *indistinguível* da Aritmética desenvolvida em outro.

[11] Caso em que inclusive faria sentido supor que existe um *último número natural*, como reflexo das limitações de memória que um computador factível sofre. O leitor interessado pode pesquisar pela posição filosófica chamada de *ultrafinitismo*.

[12] É relativamente comum encontrar quem propague máximas como "os Axiomas de (Dedekind-) Peano permitem construir a Matemática!", num indicativo claro de amnésia, já que os axiomas usados na descrição de sistemas naturais descrevem apenas tais sistemas. Por exemplo, se $\langle \mathcal{N}, i, s \rangle$ é um sistema natural, não são os seus axiomas que *permitem* construir o conjunto $\mathcal{N} \times (\mathcal{N} \setminus \{i\})$ a partir do qual se obtém os *inteiros*, mas sim as suposições tácitas (axiomas!) de que tais procedimentos podem ser realizados entre conjuntos – e o plural em "axiomas!" não foi um equívoco, como veremos na última seção.

Teorema 0.0.62 (Dedekind)**.** *Se $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ e $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$ são sistemas naturais, então existe uma única bijeção $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ tal que $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$.*

$$\begin{tikzcd}
(A) & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[r, "+1"] & 3 \arrow[r, "+1"] & 4 \arrow[r, "+1"] & \cdots \\
(B) & \bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \bullet\bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \bullet\bullet\bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \bullet\bullet\bullet\bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \cdots \\
(C) & | \arrow[r, "+|"] & || \arrow[r, "+|"] & ||| \arrow[r, "+|"] & |||| \arrow[r, "+|"] & \cdots \\
(D) & i \arrow[r, "s"] & s(i) \arrow[r, "s"] & s(s(i)) \arrow[r, "s"] & s(s(s(i))) \arrow[r, "s"] & \cdots \\
(E) & \emptyset \arrow[r, "\{\}"] & \{\emptyset\} \arrow[r, "\{\}"] & \{\{\emptyset\}\} \arrow[r, "\{\}"] & \{\{\{\emptyset\}\}\} \arrow[r, "\{\}"] & \cdots \\
(F) & \emptyset \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \cdots \\
(G) & 0 \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[r, "+1"] & 3 \arrow[r, "+1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figura 0.0: Vários sistemas naturais.

Demonstração. Primeiro, note que *se existir* uma função com as propriedades impostas, então ela é única: com efeito, se $\psi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ satisfaz as mesmas condições, então o subconjunto $X := \{n \in \mathcal{N} : \varphi(n) = \psi(n)\}$ é tal que

✓ $i \in X$, pois $\varphi(i) = j = \psi(i)$, e

✓ se $n \in X$, então $s(n) \in X$, já que $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(\psi(n)) = \psi(s(n))$,

donde a suposição de $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ ser um sistema natural assegura $X = \mathcal{N}$. Na prática, o que se fez foi um argumento indutivo nos moldes da indução clássica descrita no Corolário 0.0.56: provou-se o caso inicial ($i \in X$) e, supondo-se que $n \in X$ (hipótese indutiva), concluiu-se que $s(n) \in X$ (e $s(n)$ é o sucessor de n na boa ordem induzida pela função sucessor, como indicado no Exercício 0.19). O restante da prova consiste em fazer uma série de argumentações semelhantes, que não ficarão a cargo do leitor!

Supondo que exista uma função φ satisfazendo $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$, provaremos que ela deve ser bijetora.

✓ É sobrejetora pois $Y := \{m \in \mathcal{M} : \text{existe } n \in \mathcal{N} \text{ com } \varphi(n) = m\}$ é tal que $j \in Y$ (pois $\varphi(i) = j$) e $t(m) \in Y$ sempre que $m \in Y$ (pois se $n \in \mathcal{N}$ é tal que $\varphi(n) = m$, então $s(n) \in \mathcal{N}$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(m)$), donde segue que $Y = \mathcal{M}$ (já que $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$ é um sistema natural).

✓ Para verificar a injetividade, a ideia é mostrar que se $n \neq n'$, então $\varphi(n) \neq \varphi(n')$.

Em outras palavras, para $n \in \mathcal{N}$ fixado, busca-se provar que

$$D_n := \{n' \in \mathcal{N} : n' \neq n \Rightarrow \varphi(n') \neq \varphi(n)\}$$

satisfaz $D_n = \mathcal{N}$. Tem início a *primeira indução*: mostraremos que $D_i = \mathcal{N}$ (Caso Inicial) bem como $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$ (Hipótese Indutiva). Ocorre que para mostrar $D_i = \mathcal{N}$, também precisa-se argumentar por indução! Tem início a segunda indução:

✓ $i \in D_i$ (já que a implicação "$i \neq i \Rightarrow \varphi(i) \neq \varphi(i)$" é verdadeira[13]);

✓ se $n \in D_i$ para algum $n \in \mathcal{N}$ então $n = i$ ou $n \neq i$; no primeiro caso, $s(i) \neq i$ (por $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ ser sistema natural) e $\varphi(s(i)) = t(\varphi(i)) = t(j) \neq j$ (pelas condições satisfeitas por φ e por $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$ ser sistema natural); no segundo caso, dado que $n \in D_i$ e $n \neq i$, existe $n' \in \mathcal{N}$ com $s(n') = n$ (pois $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ é sistema natural) e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(\varphi(s(n'))) = t(t(\varphi(n'))) \neq j$ (pois $t(m) \neq j$ para todo $m \in \mathcal{M} \setminus \{j\}$), mostrando que $s(n) \in D_i$.

O argumento acima encerra a segunda indução, mas não a primeira: mostrou-se apenas que $D_i = \mathcal{N}$; falta provar a segunda parte, i.e., que $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$! E para surpresa de ninguém, tal igualdade será mostrada... na terceira indução:

✓ como antes, tem-se $s(n) \in D_{s(n)}$ por conta da igualdade $s(n) = s(n)$;

✓ agora, se $k \in D_{s(n)}$, deve-se provar que $s(k) \in D_{s(n)}$; se ocorrer $s(k) = s(n)$, nada precisa ser feito; se $s(k) \neq s(n)$, então a injetividade de s assegura $k \neq n$, enquanto o modo como tomamos n, i.e., satisfazendo $D_n = \mathcal{N}$, garante que $\varphi(k) \neq \varphi(n)$, donde finalmente a injetividade de t atesta $t(\varphi(k)) \neq t(\varphi(n))$, com a suposição sobre φ encerrando o trabalho, já que $\varphi(s(k)) = t(\varphi(k))$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$.

Portanto, mostrou-se que $D_i = \mathcal{N}$ (C.I.) e $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$ (H.I.), ou seja, $\{n \in \mathcal{N} : D_n = \mathcal{N}\} = \mathcal{N}$, exatamente o que se desejava. Falta apenas provar que *existe* uma função $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ satisfazendo $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$. Isto não é evidente? Veja: defina $\varphi(i) := j$, $\varphi(s(i)) := t(j)$, $\varphi(s(s(i))) := t(t(j))$ e *assim por diante*. Problema resolvido! $\square$

Observação 0.0.63 (Adiável: recursão (e reuniões arbitrárias))**.** O modo como a demonstração acima terminou é típico dos textos que evitam discutir *recursão*, que se baseia na ideia de que funções podem ser definidas a partir de aplicações sucessivas de certos passos pré-estabelecidos. Embora seja uma proposta intuitivamente razoável, há margem para dúvidas: explicitamente, uma função $f\colon X \to Y$ "*é* um subconjunto de $X \times Y$ com certas propriedades" – algo diferente de "*será* um subconjunto... com certas propriedades".

Por exemplo, uma vez em posse definitiva do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, definiremos a função **fatorial** $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa cada $n \in \mathbb{N}$ ao número $n!$, de acordo com os seguintes critérios: $0! := 1$ e $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$. Da forma como está posta, é como se a função F fosse usada em sua própria definição, algo circular e que poderia trazer dor de cabeça.

Porém, secretamente, a função F acima é a *colagem* de uma *família de funções* cuja existência é demonstrada por indução: prova-se que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função

$$F_n\colon \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\} \to \mathbb{N}$$

de tal forma que F_{n+1} estende F_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, para *colar* todas as F_n's numa única F, faz-se $F(m) := F_n(m)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $m < n$, o que torna F uma função pois, nas inevitáveis ocorrências de $n, n' > m$ com $n \neq n'$, ou F_n estende $F_{n'}$ (caso $n > n'$) ou $F_{n'}$ estende F_n (caso $n' > n$) e, portanto, $F_n(m) = F_{n'}(m)$. Implicitamente, F é a *reunião* de *todas* as F_n's.

[13] Posto que o seu *antecedente* é falso. Lembre-se de que afirmações do tipo "se P, então Q" só são falsas na ocorrência de *premissas* (P) verdadeiras com *conclusões* (Q) falsas.

Definição 0.0.64. Para um conjunto $\mathcal{S}$, define-se $\bigcup \mathcal{S} := \{x : \text{existe } S \in \mathcal{S} \text{ com } x \in S\}$, a **reunião da família** $\mathcal{S}$. Nas ocasiões em que $\mathcal{S} := \{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto $\mathcal{I}$ fixado, também é comum escrever $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_i$ ou $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_i$. ¶

O dispositivo acima apenas cria um modo bastante esperto de evitar abominações notacionais como "$S_0 \cup S_1 \cup \ldots$" quando se quer expressar uma reunião (possivelmente) *infinita* de conjuntos. Fora isso, ela não traz novidades: note, por exemplo, que para $\mathcal{S} := \{X, Y\}$, tem-se $\bigcup \mathcal{S} = X \cup Y$. De volta ao tema da colagem:

Lema 0.0.65. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções. Se, para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}$ valer que $f(x) = g(x)$ sempre que $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$, então $F := \bigcup \mathcal{F}$ é uma função cujo domínio é $\bigcup_{f\in\mathcal{F}} \operatorname{dom}(f)$. Em particular, $F(x) = f(x)$ para qualquer $f \in \mathcal{F}$ com $x \in \operatorname{dom}(f)$.*

Exercício 0.20. Demonstre o lema acima. Dica: perceba que todo elemento de $\bigcup \mathcal{F}$ é um par ordenado; depois, para $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in \bigcup \mathcal{F}$, note que devem existir $f, g \in \mathcal{F}$ com $\langle x, y\rangle \in f$ e $\langle x, z\rangle \in g$, acarretando $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$; conclua que $y = z$. ■

Dado que usaremos diversas funções definidas recursivamente ao longo do texto, a preguiça exige que se demonstre um único teorema que dê conta de todos casos que estão por vir.

Teorema 0.0.66 (Recursão)**.** *Sejam $\langle \mathbb{B}, \leq\rangle$ uma boa ordem natural, X um conjunto qualquer e $R\colon \mathbb{B} \times X \to X$ uma função[14]. Para cada $x \in X$ fixado, existe uma única função $R_x\colon \mathbb{B} \to X$ tal que $R_x(\min \mathbb{B}) = x$ e $R_x(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = R(b, R_x(b))$ para cada $b \in \mathbb{B}$.*

Antes de provar o teorema acima, convém observar como ele permite construir funções *na prática*.

(i) No Teorema de Dedekind, por exemplo, substitui-se $\mathbb{B}$ pelo sistema natural $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ com a boa ordem descrita no Exercício 0.19, toma-se $X := \mathcal{M}$, $x := j$ e faz-se $R_x\colon \mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ a função dada por $R(n, m) := t(m)$. Logo, $R_x(i) = j$ e $R_x(s(n)) = R(n, R_x(n)) = t(R_x(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$, mostrando que a função φ procurada é, tão somente, R_x.

(ii) Para o caso do fatorial, uma vez em posse dos naturais $\mathbb{N}$ e da operação de multiplicação $\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tomam-se $\mathbb{B} := X := \mathbb{N}$, $R\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $R(n, m) := (n + 1) \cdot m$ e $x := 1$. Note então que a função $R_x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ correspondente é tal que $R_x(0) = 1$ e $R_x(n + 1) = (n + 1) \cdot R_x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., R_x é a função que faz $n \mapsto n!$, como desejado.

Demonstração. Para cada $b \in \mathbb{B}$, seja $\mathbb{B}_{<b} := \{c \in \mathbb{B} : c < b\}$. Vamos dizer que uma função $f\colon \mathbb{B}_{<b} \to X$ é *R-recursiva em b* se $b = \min \mathbb{B}$ ou se $b > \min \mathbb{B}$ com $f(\min \mathbb{B}) = x$ e $f(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)) = R(c, f(c))$ para cada $c < b$ com $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c) < b$. Observe que para cada elemento $b > \min \mathbb{B}$, existe no máximo uma função R-recursiva em b: se tanto f quanto g são R-recursivas em b e $c < b$ é tal que $f(c) \neq g(c)$, então existe $c'' := \min\{c : c < b \text{ e } f(c) \neq g(c)\}$, com $c'' > \min \mathbb{B}$ (pois $f(\min \mathbb{B}) = g(\min \mathbb{B})$); logo, existe $c' < c''$ com $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c') = c''$ e, consequentemente,

$$f(c'') = f(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c')) = R(c', f(c')) = R(c', g(c')) = g(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c')) = g(c'').$$

Em particular, como uma função R-recursiva em b' é também R-recursiva em $b \leq b'$ (por quê?!), segue que se f e g forem R-recursivas em b e b', respectivamente, então g estende f. Agora, provaremos que para cada $b \in \mathbb{B}$ *existe* uma função R-recursiva em b.

[14] Nesse tipo de situação, escreveremos $R(b, x)$ em vez de $R(\langle b, x\rangle)$.

✓ (C.I.) Para $b := \min \mathbb{B}$, a função R-recursiva em b é $\emptyset$.

✓ (H.I.) Supondo que existe uma função R-recursiva em b, mostraremos que existe função R-recursiva em $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$:

  ✓ caso $b := \min \mathbb{B}$, tem-se $\mathbb{B}_{<\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)} = \{b\}$ e, assim, basta tomar $f\colon \{b\} \to X$ com $f(b) := x$;

  ✓ caso $b > \min\{\mathbb{B}\}$, existe $c < b$ com $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c) = b$, de modo que $\mathbb{B}_{<b} = \mathbb{B}_{<c} \cup \{c\}$ e $\mathbb{B}_{<\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)} = \mathbb{B}_{<c} \cup \{c, b\}$; daí, se $f\colon \mathbb{B}_{<b} \to X$ é a função R-recursiva existente por hipótese, basta definir $g\colon \mathbb{B}_{<\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)} \to X$ fazendo $g(d) := f(d)$ se $d < b$ (i.e., $d \leq c$), e $g(b) := R(c, f(c))$.

Ao aliar a indução acima com a argumentação do primeiro parágrafo, resulta que para todo $b \in \mathbb{B}$ existe uma única função R-recursiva em b, digamos f_b, de tal forma que $f_{b'}$ estende f_b sempre que $b \leq b'$. Isso *permite considerar a família de funções* $\mathcal{F} := \{f_b : b \in \mathbb{B}\}$, que satisfaz as exigências do Lema 0.0.65. Logo, $R_x := \bigcup_{b\in\mathbb{B}} f_b$ é uma função cujo domínio é $\bigcup_{b\in\mathbb{B}} \mathbb{B}_{<b} = \mathbb{B}$ (verifique!), que tem X como codomínio e tal que $R_x(\min \mathbb{B}) = x$ e $R_x(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = f_c(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b))$ para algum $c > b$, acarretando

$$R_x(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = R(b, f_c(b)) = R(b, R_x(b)),$$

como desejado. Nesta altura do campeonato, o leitor já deve saber como provar que R_x é a única com tal propriedade. □

Embora existam versões ainda mais gerais do teorema acima, esta será suficiente para dar cabo de todas as recursões utilizadas no texto. Evidentemente, utilizá-la para justificar as eventuais passagens do tipo “e assim por diante” será um trabalho deixado a cargo do leitor zeloso – mas só a partir da próxima seção. △

O Teorema 0.0.62 (de Dedekind) estabelece, portanto, a *irrelevância* de se apegar a um começo particular na descrição de um sistema natural: o importante é que exista um começo. Também fica implicitamente justificada a tranquilidade com que matemáticos profissionais *escolhem* um sistema natural arbitrário para desenvolver Aritmética, com a certeza de que os resultados obtidos valerão em qualquer outro sistema.

Exemplo 0.0.67. Fixados sistemas naturais $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ e $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$, suponha que seja verdadeira a asserção “não existe $n \in \mathcal{N}$ tal que $s(n) = n$”. Neste caso, também deverá valer que “não existe $m \in \mathcal{M}$ tal que $t(m) = m$”: de fato, se existisse m com $t(m) = m$, então ao tomar o único $n \in \mathcal{N}$ com $\varphi(n) = m$, teria-se $t(\varphi(n)) = \varphi(s(n)) = \varphi(n)$, donde a injetividade de φ garantiria $s(n) = n$. ▲

Observação 0.0.68. O argumento acima se vale da *compatibilidade* da bijeção φ com as funções sucessoras de cada sistema. Assim, a preservação dos resultados considera apenas afirmações expressas em termos das funções sucessoras. △

Acredito que a longa discussão anterior deslegitime os eventuais protestos que poderão ser feitos à próxima

Definição 0.0.69. Vamos denotar por $\mathbb{N}$ *um* sistema natural dado pelo Axioma de Dedekind-Peano, cujos elementos serão chamados de *números naturais*. Além disso:

- $0 := \min \mathbb{N}$;
- $1 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(0)$;
- $2 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(1)$;
- $3 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(2)$;
- $4 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(3)$;
- $5 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(4)$;
- $6 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(5)$;
- $7 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(6)$;
- $8 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(7)$;
- $9 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(8)$;

e assim por diante[15]. ¶

As operações de adição e multiplicação se definem recursivamente.

(+) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $+_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que faz $+m(0) = m$ e $+_m(\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n)) = \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(+_m(n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, defina $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $+(m, n) := +_m(n)$, que por simplicidade será denotado por $m + n$.

($\cdot$) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $\cdot_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que faz $\cdot_m(0) = 0$ e $\cdot_m(\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n)) = \cdot_m(n) + m$. Daí, defina $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $\cdot(m, n) := \cdot_m(n)$, que por simplicidade será denotado por $m \cdot n$.

Exercício 0.21. Use o Teorema 0.0.66 (da Recursão) para garantir a existência das funções acima. Dica: para $+_m$, tome $\mathbb{B} = X = \mathbb{N}$ no enunciado original, com $R := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $R(n, y) := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(y)$, $x := m$ e perceba que $+_m = R_m$; para $\cdot_m$, faça $R(n, y) := y + m$ (que existe pelo passo anterior!), tome $x := 0$ e perceba que, desta vez, $\cdot_m = R_m$. ■

A rigor, as funções anteriores são regras arbitrárias que descrevem diferentes formas de iterar a função sucessor de $\mathbb{N}$. Porém, uma vez investigadas as propriedades de tais operações, percebe-se que elas agem de acordo com a experiência empírica. Por exemplo:

Proposição 0.0.70. *Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $m + n = n + m$.*

Demonstração. Primeiro, tem-se $0 + n = n + 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$: por definição, $n + 0 = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por outro lado, $0 + 0 = 0$ e, se ocorrer $0 + n = n$, então $0 + \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n) = \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(0 + n) = \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n)$, donde segue, por indução, que $0 + n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, se para $m \in \mathbb{N}$ fixado ocorrer $m + n = n + m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então o mesmo valerá para $\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(m)$, pois... □

Exercício 0.22. Complete a demonstração anterior. ■

Embora seja edificante investir algum período da vida na verificação rigorosa das propriedades aritméticas a partir das definições anteriores, trata-se de algo mais pertinente a um curso de Aritmética ou de (Introdução a) Teoria dos Números do que a um curso de Análise *na Reta*. Por isso, todo o arcabouçou básico de Aritmética será assumido como conhecido – e, apenas por preciosismo, a verificação de algumas propriedades será sugerida na seção de exercícios adicionais do capítulo. Em particular: $\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n) := n + 1$ de agora em diante.

[15] Em posse das operações de adição, multiplicação e *potenciação*, definem-se rigorosamente os sistemas de representação numérica posicional. Em particular, o sistema em base 10 permite descrever todos os números naturais a partir dos números fixados acima.

Observação 0.0.71 (Opcional: sobre a *natureza* do Zero)**.** É comum haver certo debate acerca da corretude de se assumir que $0 \in \mathbb{N}$. Embora se trate apenas de um símbolo utilizado para indicar o menor elemento de $\mathbb{N}$, as definições recursivas adotadas para a soma e a multiplicação escondem um *viés* ideológico: *naturalizar* o *vazio* (confira o Exercício 0.74).

Mais precisamente, na próxima seção, em que a noção de *cardinalidade* entre conjuntos arbitrários será, finalmente, apresentada, os elementos de $\mathbb{N}$ serão usados como *parâmetros* de finitude, num procedimento formal que apenas imita a noção de contagem. E é justamente aí que começa o problema: como contar os elementos do vazio?

✗ Quem defende "$0 \notin \mathbb{N}$" argumenta que ao *contar* os elementos em $\{a, b, c\}$, escolhe-se o *primeiro*, o *segundo* e, finalmente, o *terceiro*, de modo que ao término do processo se chega ao *número de elementos do conjunto*: 3. Há também quem apele a fatores históricos e etimológicos, já que a "noção do zero" ocorreu de maneira relativamente tardia, justificando assim que não se trate de uma ideia *natural*. Moral da história: não se contam os elementos de $\emptyset$.

✓ Já quem defende "$0 \in \mathbb{N}$" costuma pensar nos números naturais mais como *registradores* do processo de contagem: ao se iniciar a indexação a partir do 0, o *número de elementos do conjunto* será o menor número maior que os índices utilizados na indexação. Assim, por exemplo, como nem se começa a contagem dos elementos do vazio, o conjunto vazio deve ter $\min\{n \in \mathbb{N} : n > x \text{ para todo } x \in \emptyset\} = 0$ elementos (pense a respeito!). Já no caso de $\{a, b, c\}$, tem-se o 0-ésimo elemento, o 1-ésimo elemento e, finalmente, o 2-ésimo elemento, de modo que $\{a, b, c\}$ terá $\min\{n \in \mathbb{N} : n > 0, n > 1 \text{ e } n > 2\} = 3$ elementos.

Certamente, a postura "$0 \notin \mathbb{N}$" tem a vantagem de ser conceitualmente mais simples, talvez por sua proximidade com a experiência empírica. No entanto, ela é tecnicamente limitada: fica relativamente mais custoso descrever, por exemplo, o sistema numérico posicional utilizado corriqueiramente para dar sentido a coisas como "19", essencialmente pela *ausência* de um *neutro* aditivo que *anule* a multiplicação; também ao expressar fórmulas de *cardinalidade*, como $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ para conjuntos finitos A e B, por exemplo, precisa-se excluir os casos que envolvem o conjunto vazio, já que não se define $|\emptyset|$ como um número *digno* de ser operado com os *naturais*.

Porém, acredito que o argumento mais forte em favor de se adotar $0 \in \mathbb{N}$ seja o da *azeitona*[16]. Como o leitor pode verificar por indução, para todo $n \in \mathbb{N}$ (com 0 incluso), existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<n} := \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\}$ e $\mathbb{N}_{<n+1} \setminus \{0\}$, o que na prática significa o que o leitor sempre soube: "contar de 1 até n e gritar n" é equivalente a "contar de 0 até $n - 1$ e gritar n". Em outras palavras: se não quiser a azeitona na pizza, basta tirá-la da sua fatia e, se quiser depois, basta pegá-la de volta! Inclusive, isto será feito com frequência ao longo do texto. △

[16] Há outros, relativamente mais abstratos. O leitor interessado pode conferir, por exemplo, o Exercício 0.58 e a Observação 0.2.6 subsequente. A última seção também traz a construção de von Neumann para os ~~ordinais~~ naturais como outro motivo (estético?) para adotar 0 como número natural.

0.1 Ao infinito e além

Independentemente das preferências metodológicas de *contagem* (começar de 0 ou 1), ao dizer que uma certa coleção A de objetos tem, digamos, "5 elementos", expressa-se tacitamente a ideia de que qualquer outra coleção B com "5 elementos" terá a *mesma quantidade de elementos* de A. Trata-se de uma abstração magnífica, provavelmente motivada pelo que hoje chamaríamos de trocas comerciais entre agrupamentos de pessoas nos princípios das civilizações humanas [4]: em vez de apenas comparar as coleções A e B entre si (para a realização de uma troca justa, por exemplo), elas são comparadas à uma terceira coleção (dedos da mão, traços num símbolo socialmente importante, etc.) que tem, por convenção, *cinco* elementos . Assim, embora soe circular, a palavra "*cinco*" representa ou faz referência à *coisa inefável* que é comum a todas as coleções dotadas de exatamente *cinco* elementos[17].

Nesse sentido, é curioso que, justamente ao abandonar os números para determinar se dois conjuntos têm *a mesma quantidade de elementos*, sejamos capazes de tornar a circularidade da "*definição*" anterior bem menos intragável.

Definição 0.1.0. Diremos que dois conjuntos **têm a mesma cardinalidade** ("quantidade de elementos") se existir uma bijeção entre os dois. ¶

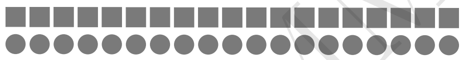


Figura 0.1: É evidente que há tantos círculos quanto quadrados, mesmo sem saber *quantos*.

Proposição 0.1.1. *Sejam A, B e C conjuntos.*

(i) *Existe uma bijeção de A para A.*

(ii) *Se existe uma bijeção de A para B, então existe uma bijeção de B para A.*

(iii) *Se existe uma bijeção de A para B e outra bijeção de B para C, então existe uma bijeção de A para C.*

Demonstração. O primeiro item segue por Id_A ser bijeção, enquanto o terceiro item decorre do fato de que a composição de bijeções é bijeção (Exercício 0.46). O segundo item é o Corolário 0.0.22. □

Intuitivamente, a proposição acima diz que ao fazer

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{existe bijeção } A \to B,$$

define-se uma *relação binária entre conjuntos* que se comporta, essencialmente, como a relação de igualdade: $A \approx A$, $B \approx A$ sempre que $A \approx B$ e $A \approx C$ sempre que $A \approx B$ e $B \approx C$. Esse tipo de coisa tem um nome: ~~gambiarra~~

[17]De um ponto de vista gramatical, é quase como se a palavra "cinco" funcionasse como um adjetivo.

0.1.0 Relações de equivalência

Definição 0.1.2. Uma relação binária $\sim$ num conjunto X é dita uma **relação de equivalência** se $\sim$ for reflexiva, transitiva e, além disso, **simétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in X$, a ocorrência de $x \sim y$ acarretar $y \sim x$. Diremos também que x e y são **$\sim$-equivalentes** sempre que ocorrer $x \sim y$, com a omissão do sufixo "$\sim$" quando a relação estiver clara pelo contexto. ¶

Em certo sentido, uma relação de equivalência $\sim$ estabelece um critério por meio do qual objetos a princípio distintos podem ser vistos como iguais, ao mesmo tempo em que separa outros objetos distintos pelo mesmo critério. Dessa forma, não espanta que a *relação de igualdade* ($x \sim y$ se, e somente se, $x = y$) seja o exemplo óbvio de equivalência.

Exemplo 0.1.3 (Horóscopo)**.** Frequentemente, praticantes da (pseudociência chamada de) `Astrologia` fazem uso implícito das relações de equivalência. De fato, de um ponto de vista informal, signos determinam uma "relação de equivalência" no "conjunto" de todas as pessoas:

✓ toda pessoa tem o mesmo signo de si mesma;

✓ se P tem o mesmo signo de P', então P' tem o mesmo signo de P;

✓ se P tem o mesmo signo de P' e esta tem o mesmo signo de P'', então P e P'' têm o mesmo signo.

Se a coisa parasse por aí, a `Astrologia` seria inofensiva. No entanto, é comum encontrar asserções do tipo "o comportamento X é característico do signo Y", o que sugere duas alternativas: ou a afirmação é falsa, ou *toda pessoa* do signo Y apresenta o comportamento X. Esse tipo de máxima ajuda a entender um dos usos mais comuns das relações de equivalência: a simplificação. Com efeito, se tais afirmações *astrológicas* fossem verdadeiras, então para entender os padrões comportamentais de *toda a humanidade* bastaria estudar os comportamentos de doze *representantes*, um de cada signo, algo bem mais simples do que estimar o comportamento individual dos oito bilhões de habitantes do planeta. Por *sorte*, signos estimam tão somente as datas de nascimento de seus portadores. ▲

Exemplo 0.1.4 (Paridade)**.** Recordemo-nos de que os números naturais podem ser classificados como *pares* ou *ímpares*: **pares** são os múltiplos de dois, **ímpares** são os outros. Isso pode ser usado para determinar uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$: $m, n \in \mathbb{N}$ serão ditos $\sim$-equivalentes se tiverem a mesma *paridade*. Assim, $0, 2, 4, 6, \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, $1, 3, 5, 7 \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, enquanto 0 e 1 não são $\sim$-equivalentes, por exemplo. Agora, há certos comportamentos *algébricos* que não dependem dos números escolhidos, e sim de suas paridades: a soma de *quaisquer* dois *ímpares* é *par*, o produto entre quaisquer *ímpares* é *ímpar*, etc. Isto sugere a possibilidade de realizar operações diretamente com as *classes* dos pares e dos ímpares em vez de lidar com seus infinitos representantes. ▲

Exemplo 0.1.5 (Restos da divisão por n)**.** Para generalizar o exemplo anterior, pode-se considerar a seguinte relação binária: para $n \in \mathbb{N}$ fixado e $x, y \in \mathbb{N}$, escreveremos $x \sim_n y$ a fim de indicar que x e y têm o mesmo *resto* na *divisão* por n. Verificar que tal relação $\sim_n$ é reflexiva, simétrica e transitiva é um bom exercício para quem se lembra de como fazer divisões. Ocorre que, como antes, certos comportamentos algébricos não dependem dos representantes escolhidos: por exemplo, a soma de quaisquer dois números com resto 2 na divisão por 3 terá resto 1, enquanto o produto de quaisquer dois números com resto 1 na divisão por 3 ainda terá resto 1. ▲

Um efeito colateral inevitável das relações de equivalência é a segregação dos elementos do conjunto em *classes de equivalência*[18]. Mais precisamente:

Definição 0.1.6. Para uma relação de equivalência $\sim$ sobre um conjunto X, diremos que o conjunto $\{y : x \sim y\}$ é a **$\sim$-classe de equivalência de** x. ¶

Com *relação* aos exemplos anteriores:

(i) a classe de equivalência de uma pessoa P com respeito aos signos astrológicos seria a coleção de todas as pessoas que têm o mesmo signo de P, consequentemente, existem apenas doze classes de equivalência (correspondentes aos signos possíveis);

(ii) a classe de equivalência de um número $n \in \mathbb{N}$ com respeito à paridade é a coleção dos naturais que têm a mesma paridade de n; logo, existem apenas duas classes, a dos pares e a dos ímpares;

(iii) a classe de equivalência de um número $p \in \mathbb{N}$ com respeito aos restos da divisão por n é a coleção dos números naturais que têm o mesmo resto na divisão, o que leva à conclusão de que existem precisamente n classes de equivalência (correspondentes aos restos possíveis na divisão por n).

Observação 0.1.7. A notação para a classe de equivalência de x varia de acordo com o contexto. Frequentemente, escreve-se $\overline{x}$ para denotá-la. Apesar disso, para a discussão a seguir, pode ser menos traumático escrever C_x em vez de $\overline{x}$. △

Proposição 0.1.8. *Sejam X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Então:*

(i) para todo $y \in X$, existe $x \in X$ com $y \in C_x$ (i.e., $X = \bigcup_{x \in X} C_x$);

(ii) para quaisquer $x, y \in X$ ocorre $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$;

(iii) para quaisquer $x, y \in X$, $C_x = C_y$ se, e somente se, $x \sim y$.

Demonstração. O primeiro item decorre da reflexividade de $\sim$: como $y \sim y$, basta fazer $x := y$. Os dois itens seguintes ficam a cargo do leitor (confira o exercício a seguir). □

Exercício 0.23. Sejam $\sim$ uma relação binária em X e $x, y \in X$ elementos quaisquer.

a) Mostre que se $\sim$ é transitiva, então "$x \sim y \Rightarrow C_x \subseteq C_y$".

b) Mostre que se $\sim$ é simétrica e transitiva, então "$x \sim y \Rightarrow C_x = C_y$".

c) Mostre que se $\sim$ é reflexiva, então "$C_x \subseteq C_y \Rightarrow x \sim y$".

d) Conclua que valem as condições (ii) e (iii) da proposição anterior. Dica: para (ii), o que ocorre com C_z se $z \in C_x \cap C_y$? ■

A última proposição mostra que $X/\sim := \{C_x : x \in X\}$, chamado de **quociente** de X por $\sim$, é uma família de subconjuntos de X que se enquadra como exemplo de *partição.*

Definição 0.1.9. Uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos não-vazios de X é uma **partição** de X se valerem as seguintes condições:

[18] Conotações políticas ficam a cargo do leitor.

(i) para todo $x \in X$ existe $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$ (i.e., $X = \bigcup \mathcal{P}$); e

(ii) [19] se $P, Q \in \mathcal{P}$ e $P \neq Q$, então $P \cap Q = \emptyset$. ¶

Exercício 0.24. Mostre que se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X, então $X/{\sim}$ é uma partição de X. ■

Como o nome sugere, uma partição de X *particiona* o conjunto X em *partes* ou blocos *dois a dois disjuntos*, de modo que cada elemento de X está precisamente em apenas um membro de $\mathcal{P}$. Assim, faz sentido dizer que dois elementos de X são $\mathcal{P}$*-equivalentes* se pertencerem ao mesmo membro de $\mathcal{P}$. Como o leitor atento certamente suspeita, isto define uma relação de equivalência legítima.

Proposição 0.1.10. *Se $\mathcal{P}$ for uma partição de X, então a relação $\sim_{\mathcal{P}}$ definida por*

$$u \sim_{\mathcal{P}} v \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } \{u, v\} \subseteq P$$

é uma relação de equivalência em X. Além disso, $\mathcal{P} = X/{\sim_{\mathcal{P}}}$.

Demonstração. A relação $\sim_{\mathcal{P}}$ é

✓ reflexiva, pois dado $x \in X$ existe $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$, e daí $\{x\} = \{x, x\} \subseteq P$,

✓ simétrica, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, então $\{x, y\} = \{y, x\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, e

✓ transitiva, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$ e $\{y, z\} \subseteq P' \in \mathcal{P}$, então $P \cap P' \neq \emptyset$, acarretando $P = P'$ e, por conseguinte, $\{x, z\} \subseteq \{x, y\} \cup \{y, z\} \subseteq P \in \mathcal{P}$.

A igualdade $\mathcal{P} = X/{\sim_{\mathcal{P}}}$ segue pois $P = [x]_{\sim_{\mathcal{P}}}$ para quaisquer x e P com $x \in P \in \mathcal{P}$. □

Exemplo 0.1.11. Para a relação $\sim_n$ do Exemplo 0.1.5, as classes de equivalência correspondem precisamente a todos os possíveis restos pela divisão por n. Assim, chamando por R_i a coleção dos naturais que têm resto i na divisão por n, segue que $\mathbb{N}/{\sim_n} = \{R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}\}$. Dito isso, observe que ao chamar por $\overline{i}$ a *classe* de equivalência de i, verifica-se $\overline{i} = R_i$. Desse modo, seria lícito escrever, por exemplo, $\mathbb{N}/{\sim_2} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, ou ainda $\mathbb{N}/{\sim_2} = \{\overline{12}, \overline{13}\}$, já que $\overline{0} = \overline{12}$ na relação $\sim_2$ (0 e 12 são divisíveis por 2) e $\overline{1} = \overline{13}$ (1 e 13 têm resto 1 na divisão por 2). Como o leitor deve suspeitar, trata-se de um fenômeno mais geral. ▲

Definição 0.1.12. Um subconjunto $R \subseteq X$ é uma **classe de representantes** de uma

(i) relação de equivalência $\sim$ se para todo $x \in X$ existe um único $r \in R$ tal que $x \sim r$,

(ii) partição $\mathcal{P}$ de X se R for classe de representantes da relação $\sim_{\mathcal{P}}$, i.e., se para cada $P \in \mathcal{P}$ existe um único $r \in R$ tal que $r \in P$. ¶

Exercício 0.25. Nas condições anteriores, mostre que $X/{\sim} = \{C_r : r \in R\}$, onde R é uma classe de representantes de $\sim$. ■

[19] Costuma-se expressar a condição (ii) como "os membros de $\mathcal{P}$ são dois a dois disjuntos".

Agora parece um bom momento para uma pergunta ardilosa: quais partições (ou relações de equivalência) sobre *um conjunto* não-vazio admitem classes de representantes? Certamente, se X é tal conjunto e $\mathcal{P}$ é uma de suas partições, então cada $P \in \mathcal{P}$ é um subconjunto não-vazio de X, o que permite *escolher* um desses elementos $x_P \in P$ para então considerar o conjunto $\{x_P : P \in \mathcal{P}\}$. Dado que para $P, P' \in \mathcal{P}$ distintos ocorre $P \cap P' = \emptyset$, deve-se ter $x_P \neq x_{P'}$ sempre que $P \neq P'$. Em outras palavras, $\mathcal{R} := \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$ é uma classe de representantes para $\mathcal{P}$. Se tal argumentação for honesta, significa que provamos o

Teorema 0.1.13 (©)**.** *Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto, então existe uma classe de representantes para $\sim$.*

Exercício 0.26. A argumentação acima foi *honesta*? Se esta for a primeira vez que você se deparou com tal pergunta, pense nela pelo resto do dia. Até amanhã! ■

0.1.1 Cardinalidades: como classes de equivalência

Observação 0.1.14 (Alerta)**.** Ao longo do capítulo, o Princípio da Abstração tem sido utilizado despreocupadamente para justificar todos os conjuntos e *operações* introduzidas, no que se pode chamar de abordagem *ingênua.* No entanto, como veremos na última seção, tal princípio traz consigo alguns problemas graves, o que exigirá substituí-lo por outros axiomas. Apesar disso, na prática, tudo o que se fez anteriormente permanece válido com pouquíssimas alterações, razão pela qual a introdução foi feita de modo *ingênuo.* Com isso dito, a presente subseção introduzirá algumas ideias que, *a posteriori*, exigirão grandes alterações a fim de serem justificadas. O símbolo “†” será usado para demarcá-las. △

Ao combinar as considerações da subseção anterior com a Proposição 0.1.1, parece evidente que “ter a mesma cardinalidade” define uma relação de equivalência entre conjuntos, o que sugere a próxima *definição.*

Definição 0.1.15 (†)**.** Denota-se como $\mathbb{V} := \{x : x = x\}$ o *conjunto de todos os conjuntos*, (provisoriamente) chamado de **conjunto universo**. Agora, para $A, B \in \mathbb{V}$, vamos escrever “$A \approx B$” para indicar que existe bijeção da forma $A \to B$. ¶

Corolário 0.1.16 (da Proposição 0.1.1, †)**.** *A relação binária $\approx$ definida acima é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{V}$.*

Todo esse aparato permite reescrever de modo *preciso* o que se tentou expressar na introdução desta seção (página 43):

Definição 0.1.17 (†)**.** Para um conjunto X, denotaremos por $\#X$ a *classe* de equivalência de X com respeito à relação $\approx$, i.e., $\#X := \{Y : X \approx Y\}$, que será chamada de **cardinalidade** de X. ¶

Dessa forma, $\#X$ *materializa* a propriedade “ter a mesma cardinalidade de X”, o que *pode* ser encarado como uma *definição* de *número cardinal* (†). Isto não deve ser confundido com o problema da *representação* dos números: as diferentes maneiras por meio das quais se decide representar, por exemplo, $\#\{a, b, c, d, e\}$, não mudam o fato de que $\#\{a, b, c, d, e\} = \#\{a', b', c', d', e'\}$. Nesse processo de *representação*, a primeira etapa depende da *escolha* de uma *classe* de representantes $\mathcal{R}$ para a relação de equivalência $\approx$, afinal de contas, o símbolo “5” só passa a ter sua *interpretação* usual depois que se convenciona o significado de “ter cinco elementos” (†).

É nesse sentido que os números naturais serão utilizados como representantes canônicos dos números cardinais de conjuntos *finitos*.

Definição 0.1.18. Diremos que um conjunto X é **finito** se para algum $n \in \mathbb{N}$ existir bijeção entre X e $\mathbb{N}_{<n} := \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\}$. Conjuntos *não*-finitos serão xingados de **infinitos**. ¶

Note que pela definição acima, $\emptyset$ é finito, posto que $\mathbb{N}_{<0} = \emptyset$. Também são finitos os conjuntos unitários, i.e., da forma $\{x\}$, por estarem em bijeção com $\mathbb{N}_{<1} = \{0\}$, bem como os conjuntos da forma $\{x, y\}$ com $x \neq y$, por estarem em bijeção com $\mathbb{N}_{<2} = \{0, 1\}$, etc. Como os casos iniciais sugerem, se X é finito, então o número $n \in \mathbb{N}$ na definição de *finitude* é único, precisamente o tipo de comportamento esperado dos representantes de uma relação de equivalência.

Teorema 0.1.19. *Se X é finito, então existe um único $n \in \mathbb{N}$ com $X \approx \mathbb{N}_{<n}$.*

Demonstração. A definição garante a existência do número natural n. Para provar sua unicidade, considere $m, n \in \mathbb{N}$ com $X \approx \mathbb{N}_{<m}$ e $X \approx \mathbb{N}_{<n}$. Como a *relação* $\approx$ é simétrica e transitiva, resulta que $\mathbb{N}_{<m} \approx \mathbb{N}_{<n}$. Logo, basta argumentar pela contrapositiva: vamos supor $m \neq n$ a fim de concluir que não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<m}$ e $\mathbb{N}_{<n}$. Isto encerrará a prova, posto que pela observação inicial, a ocorrência de $X \approx \mathbb{N}_{<m}$ e $X \approx \mathbb{N}_{<n}$ acarretará $m = n$, como desejado.

⌜**Afirmação.** *Se $X \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$, então não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e X.*

Demonstração. O argumento será feito por indução em n, com o caso $n := 0$ imediato (certo?). Supondo a afirmação verdadeira para $n \in \mathbb{N}$ fixado, veremos que a existência de uma bijeção φ entre $\mathbb{N}_{<n+1} = \mathbb{N}_{<n} \cup \{n\}$ e $X \subsetneq \mathbb{N}_{<n+1}$ resultaria numa bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e um subconjunto próprio de $\mathbb{N}_{<n}$, contrariando a *hipótese de indução*[20]:

- ✓ se $n \notin X$, então $X \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$ e, portanto, a restrição de φ a $\mathbb{N}_{<n}$ seria uma bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e $Y := X \setminus \{\varphi(n)\}$, um subconjunto próprio de $\mathbb{N}_{<n}$;
- ✓ se $n \in X$, então existe $k \leq n$ com $\varphi(k) = n$, de modo que a função $g \colon \mathbb{N}_{<n} \to X \setminus \{n\}$, que faz $g(i) := \varphi(i)$ para $i \neq k$ e $g(k) := \varphi(n)$ caso $k < n$, é uma bijeção. ⌟

Agora, note que por $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ser uma boa ordem, não há perda de generalidade em supor $m < n$, já que a ordem é total. Daí, $\mathbb{N}_{<m} \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$, o que segue pois $m \in \mathbb{N}_{<n} \setminus \mathbb{N}_{<m}$ (e todo $k < m$ também satisfaz $k < n$, pela transitividade da ordem). Logo, pela afirmação, não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<m}$ e $\mathbb{N}_{<n}$, como queríamos. □

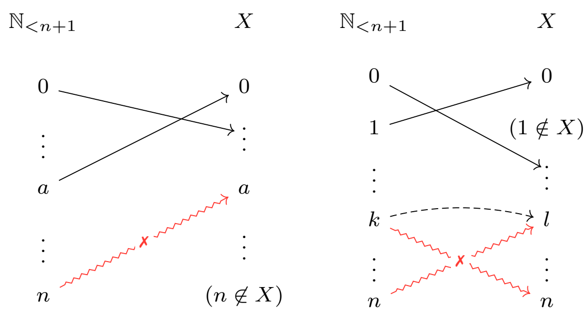


Figura 0.2: A demonstração anterior, em cores.

[20] Em outras palavras, trata-se do passo indutivo usual, porém escrito na contrapositiva: "se **não** vale o caso $n + 1$, então também **não** vale o caso n".

Definição 0.1.20. Dado um conjunto X finito, indicaremos por $|X|$ o único número natural em bijeção com X, que será chamado de **número cardinal de** X. ¶

Observação 0.1.21 (Alerta)**.** É comum encontrar obras que utilizam “$\#X$” para indicar o número cardinal de X. Por isso, é importante reforçar: neste texto, “$\#X$” denota a *classe* de todos os conjuntos que têm a mesma cardinalidade de X (†), enquanto “$|X|$” é o seu *número cardinal*, i.e., um representante escolhido em $\#X$. △

Portanto, como prometido, os números naturais cumprem o papel de representantes (das cardinalidades) dos conjuntos finitos, por meio de bijeções que abstraem os processos de contagem. Como efeito colateral, todas as *ferramentas* típicas de $\mathbb{N}$, desde suas operações até as argumentações por indução, ficam disponíveis para analisar questões que envolvam a cardinalidade de conjuntos finitos[21].

Exercício 0.27. Demonstre as seguintes afirmações.

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ ocorre $|\mathbb{N}_{<n}| = n$.

b) Se X é finito e $x \notin X$, então $|X \cup \{x\}| = |X| + 1$.

c) Se $X \subseteq Y$ e Y é finito, então X é finito e $|X| \leq |Y|$. Dica: indução em $|Y|$ + item anterior.

d) Se X e Y são finitos, então $X \cup Y$ é finito e $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$. Dica: indução em $|X|$ + item (b) para o subcaso do passo indutivo em que $X \not\subseteq Y$.

e) Se X e Y são finitos e disjuntos, então $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

f) Se $\mathcal{F}$ é finito e todo $F \in \mathcal{F}$ é finito, então $\bigcup \mathcal{F}$ é finito. Dica: indução em $|\mathcal{F}|$.

g) Se X e Y são finitos, então $X \times Y$ é finito e $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. Dica: $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$.

h) Se X é finito e $f \colon X \to Y$ é uma função, então $\operatorname{im}(f)$ é finito e $|\operatorname{im}(f)| \leq |X|$.

i) Se $X \times Y$ é finito, então X e Y são finitos.

j) Se X é finito, então $\wp(X)$ é finito e $|\wp(X)| = 2^{|X|}$. Dica: combine o próximo item com o Exercício 0.75.

k) Se X e Y são finitos, então Y^X é finito e $|Y^X| = |Y|^{|X|}$. ■

Além de firmar a posição dos números naturais como os cardinais de conjuntos finitos, a demonstração do último teorema também sugere, sem alarde, um critério para decidir se um conjunto é infinito.

Corolário 0.1.22 (da demonstração do Teorema 0.1.19)**.** *Se X admite bijeção com um subconjunto próprio $Y \subsetneq X$, então X é infinito.*

Demonstração. O diagrama a seguir resume a ideia:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\text{bijeção}"] \arrow[d, shift right, "\varphi|_Y"'] & & X \arrow[d, "\varphi"'] \\
\varphi[Y] \arrow[u, shift right, bend right, "(\varphi|_Y)^{-1}"'] & \subsetneq & \mathbb{N}_{<n}
\end{tikzcd}$$

[21] Que por sua vez é uma das formas de introduzir a *Análise Combinatória*.

Se existisse uma bijeção $\varphi \colon X \to \mathbb{N}_{<n}$ para *algum* $n \in \mathbb{N}$, então existiria uma bijeção entre $\varphi[Y] \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$ e $\mathbb{N}_{<n}$, contrariando a afirmação provada ao longo da demonstração do Teorema 0.1.19. O leitor pode cuidar dos detalhes. □

Corolário 0.1.23. *$\mathbb{N}$ é infinito.*

Demonstração. A correspondência $n \mapsto n+1$ define uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

A constatação de que existe um conjunto infinito cria um problema *momentâneo* na definição dos números cardinais: como nenhum número natural serve para representar a *cardinalidade* de $\mathbb{N}$, não parece haver uma noção natural de número que mereça ser xingada de $|\mathbb{N}|$. *Mas isto não deveria ser um problema, já que apenas os conjuntos infinitos ficaram sem cardinais e todos eles têm a mesma cardinalidade, justamente por serem infinitos... certo? Não bastaria fazer $|\mathbb{N}| := \infty$?* A situação não é tão simples.

Teorema 0.1.24 (Cantor)**.** *Dado um conjunto X, não existe sobrejeção $X \to \wp(X)$.*

Demonstração. Para uma função $\varphi \colon X \to \wp(X)$, o conjunto $T := \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$ atesta a não-sobrejetividade de φ: se ocorresse $\varphi(t) = T$ para algum $t \in X$, a definição de T daria "$t \in T \Leftrightarrow t \notin \varphi(t) = T$", uma contradição. Logo, não há sobrejeção $X \to \wp(X)$. □

Exercício 0.28. Mostre que se existe função injetora $\mathbb{N} \to Y$, então Y é infinito. Dica: $\mathbb{N}$ está em bijeção com um subconjunto de Y; o que ocorreria com tal subconjunto se Y fosse finito? ■

Corolário 0.1.25. *Se X é infinito, então $\wp(X)$ é infinito e $X \not\approx \wp(X)$.*

Demonstração. Como a correspondência $x \mapsto \{x\}$ define uma função injetora $X \to \wp(X)$, segue que uma injeção $\mathbb{N} \to X$ induz uma função injetora $\mathbb{N} \to \wp(X)$. O restante segue do Teorema de Cantor. □

Em particular, $\mathbb{N}$ e $\wp(\mathbb{N})$ são conjuntos infinitos que *não* têm a mesma cardinalidade, ou seja: existem cardinalidades infinitas distintas entre si, o que mostra a inefetividade de se escrever "$|X| = \infty$" para representar os números cardinais de conjuntos infinitos[22]. A próxima subseção apresentará um modo simples de contornar o problema, que será retomado na última seção.

0.1.2 Cardinalidades: sem cardinais

Apesar da aparente dificuldade em representar as cardinalidades infinitas, a observação de alguns *fatos* elementares pode ajudar a estabelecer alternativas metodológicas para analisá-las sem apelar explicitamente para números cardinais.

Proposição 0.1.26. *Para conjuntos finitos X e Y, são equivalentes:*

(i) $|X| \leq |Y|$;

(ii) *existe função injetora $X \to Y$;*

(iii) *existe função sobrejetora $Y \to X$.*

[22] Pelo menos se a intenção for fazer tal atribuição com o mínimo de decência.

Demonstração. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|X| := m$ e $|Y| := n$. Se $m \leq n$, então $\mathbb{N}_{<m} \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, de modo que a inclusão $i \colon \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ induz uma injeção $\psi^{-1} \circ i \circ \varphi \colon X \to Y$, onde $\varphi \colon X \to \mathbb{N}_{<m}$ e $\psi \colon Y \to \mathbb{N}_{<n}$ são bijeções existentes por hipótese. Esse truque de compor com bijeções permite supor, sem perda de generalidade, que $X := \mathbb{N}_{<m}$ e $Y := \mathbb{N}_{<n}$, o que será feito nas etapas restantes da demonstração.

Agora, se $f \colon \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ é injetora, então $\mathbb{N}_{<m} \subseteq \mathbb{N}_{<n}$: se tal inclusão não ocorresse, a tricotomia da ordem de $\mathbb{N}$ acarretaria $\mathbb{N}_{<n} \subsetneq \mathbb{N}_{<m}$, o que levaria à conclusão de que $\mathbb{N}_{<m}$ admite bijeção com parte própria – em particular, note que $m \leq n$. Daí, com $\mathbb{N}_{<m} \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, não é difícil obter uma função sobrejetora da forma $g \colon \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<m}$.

Por fim, se existe uma função sobrejetora $h \colon \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<m}$, então para cada $c < m$, o subconjunto $h^{-1}[\{c\}] := \{d : h(d) = c\}$ é não-vazio, o que permite *escolher* o número $d_c := \min h^{-1}[\{c\}]$. Secretamente, isto define a injeção $h' \colon \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ que faz $h'(c) := d_c$ para cada $c < m$: se $h'(a) = d_a$ e $h'(b) = d_b$ com $d_a = d_b$, então $a = h(d_a) = h(d_b) = b$. $\square$

Portanto, pelo menos no contexto finito, é lícito usar funções injetoras e sobrejetoras para comparar as *cardinalidades* entre conjuntos. Dado que o cenário infinito *parece* ser desprovido de uma noção apropriada de *número*, o uso de funções se coloca como uma alternativa razoável de generalização.

Definição 0.1.27. Para conjuntos X e Y, vamos fixar as seguintes notações:

(i) “$X \precsim Y$” será usada para indicar a existência de injeção $X \to Y$;

(ii) “$X \prec Y$” será usada para indicar “$X \precsim Y$” e “$X \not\approx Y$”;

(iii) “$Y \succsim X$” será usada para indicar a existência de sobrejeção $Y \to X$;

(iv) “$Y \succ X$” será usada para indicar “$Y \succsim X$” e “$X \not\approx Y$”. ¶

A ideia da definição acima é generalizar a *ordenação natural* dos números cardinais *finitos* a fim de *ordenar* as *cardinalidades* entre conjuntos quaisquer. Assim, espera-se que $\precsim$ seja uma relação no universo $\mathbb{V}$ capaz de *induzir* uma ordem parcial entre as próprias cardinalidades, com $\prec$ sua versão estrita, enquanto $\succsim$ e $\succ$ são as respectivas inversas (†). A escolha do verbo “induzir” não se deve a excesso de zelo: embora $\precsim$ seja claramente reflexiva e transitiva (certo?!), ela não tem chances de ser antissimétrica!

Exercício 0.29. Exiba conjuntos X e Y tais que $X \precsim Y$, $Y \precsim X$ e $X \neq Y$. Dica: Joãozinho tem duas maçãs, enquanto Maria tem duas laranjas. ■

Desse modo, escrevendo “$\#X \preceq \#Y$” para expressar a ocorrência de $X \precsim Y$, a única forma plausível de antissimetria se dá por meio de algo como “$\#X = \#Y$ sempre que $\#X \preceq \#Y$ e $\#Y \preceq \#X$ (†)” ou, explicitamente:

Teorema 0.1.28 (Cantor-Bernstein)**.** *Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$, então $X \approx Y$, i.e., se existem injeções da forma $X \to Y$ e $Y \to X$, então existe bijeção $X \to Y$.*

Observação 0.1.29. O resultado acima é uma banalidade nas situações em que X e Y são finitos. De fato, pela última proposição, a ocorrência simultânea de $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ acarreta $|X| = |Y|$. Apesar de tal igualdade já garantir a existência de uma bijeção entre X e Y, há um resultado subjacente ainda mais rígido: para qualquer $n \in \mathbb{N}$, uma função $f \colon \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<n}$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Exercício 0.30. Prove a última afirmação. ■

Com isso dito, o ponto que merece destaque é o seguinte: o fenômeno acima deixa de valer no caso de conjuntos infinitos. Observe, por exemplo, que as correspondências $n \mapsto n+1$ e $2n+k \mapsto n$ (para $k \in \{0,1\}$) induzem uma injeção e uma sobrejeção da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, respectivamente, com ambas não bijetivas. △

Em vista do que se observou acima, o leitor não deve esperar que a demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein envolva a prova de que as injeções são sobrejetivas: a ideia é *construir* uma "nova" função (bijetora) a partir das injeções dadas. Embora a coisa seja mais simples do que parece, alguns ingredientes preliminares devem ser introduzidos.

Definição 0.1.30. Para um conjunto $\mathcal{S}$, define-se $\bigcap \mathcal{S} := \{x : x \in S \text{ para todo } S \in \mathcal{S}\}$, a **interseção da família** $\mathcal{S}$. Nas ocasiões em que $\mathcal{S} := \{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto $\mathcal{I}$ fixado, também é comum escrever $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathcal{I}} S_i$ ou $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} S_i$. ¶

O dispositivo acima apenas cria um modo bastante esperto de evitar abominações notacionais como "$S_0 \cap S_1 \cap \ldots$" quando se quer expressar uma interseção (possivelmente) infinita de conjuntos. Fora isso, ela *quase* não traz novidades: note, por exemplo, que para $\mathcal{S} := \{X, Y\}$, tem-se $\bigcap \mathcal{S} = X \cap Y$.

Exercício 0.31 (†)**.** Mostre que $\bigcap \emptyset = \mathbb{V}$. ■

Lema 0.1.31 (Leis de De Morgan)**.** *Sejam X e $\mathcal{Y}$ conjuntos, com $\mathcal{Y} \neq \emptyset$.*

(i) $\displaystyle\bigcap_{B\in\mathcal{Y}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B.$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{Y}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B.$

Demonstração. Se $x \in \bigcap_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus B)$, então para todo $B \in \mathcal{Y}$ tem-se $x \in X \setminus B$, donde segue que $x \in X$ e não existe $B \in \mathcal{Y}$ tal que $x \in B$, i.e., $x \in X$ e $x \notin \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B$, precisamente $x \in X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B$. Pela arbitrariedade do x tomado, segue que $\bigcap_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus B) \subseteq X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B$. A recíproca é análoga.

Para provar o segundo item, note que se $x \in \bigcup_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus B)$, então existe $B' \in \mathcal{Y}$ com $x \in X \setminus B'$, i.e., $x \in X$ e $x \notin B'$ para algum $B' \in \mathcal{Y}$, donde se infere que $x \notin \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B$ e, por conseguinte, $x \in X \setminus \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B$. Logo, $\bigcup_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus \mathcal{Y}) \subseteq X \setminus \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B$. Novamente, a recíproca é análoga. □

Exercício 0.32. Para conjuntos A, B e C, mostre que $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ e $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. ■

Lema 0.1.32. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma função e considere famílias $\mathcal{U} \subseteq \wp(X)$ e $\mathcal{V} \subseteq \wp(Y)$. Então:*

(i) $f\left[\bigcup \mathcal{U}\right] = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} f[U]$ *e* $f\left[\bigcap \mathcal{U}\right] \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}} f[U]$*, com igualdade garantida no último caso se f for injetora;*

(ii) $f^{-1}\left[\bigcup \mathcal{V}\right] = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}[V]$ *e* $f^{-1}\left[\bigcap \mathcal{V}\right] = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}[V]$.

Exercício 0.33. Demonstre o lema anterior. ■

Demonstração do Teorema 0.1.28. Fixadas funções injetoras $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$, vamos obter partições $\{S, S'\}$ e $\{T, T'\}$ de X e Y, respectivamente, tais que $f[S] = T$ e $g[T'] = S'$ pois, se isso for feito, o teorema estará demonstrado (confira o Exercício 0.34). Para obter tal partição, note que qualquer subconjunto $S \subseteq X$ induz tanto uma partição em X quanto uma partição em Y: basta definir $S' := X \setminus S$, $T := f[S]$ e $T' := Y \setminus T$. Isso resolve *metade* do problema, dado que ainda é preciso garantir a identidade $g[T'] = S'$, essencial para definir a bijeção h. Ao se reescrever a igualdade $g[T'] = S'$ em *função* de S, obtém-se a identidade $g\,[Y \setminus f[S]] = X \setminus S$, equivalentemente exprimível como $S = X \setminus g\,[Y \setminus f[S]]$. Como obter tal S?

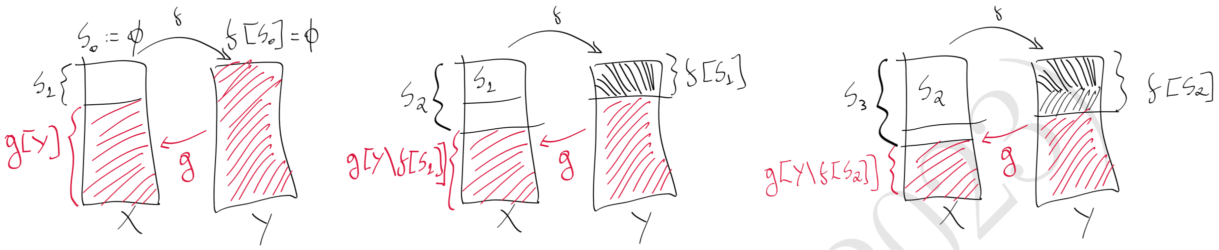


Figura 0.3: Heurística da construção recursiva do conjunto S.

Chamando $S_0 := \emptyset$ e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} := X \setminus g\,[Y \setminus f[S_n]]\,, \tag{0.0}$$

o subconjunto $S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ satisfaz a identidade desejada, pois

$$S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus g\,[Y \setminus f[S_n]]) = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g\,[Y \setminus f[S_n]] \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} X \setminus g\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Y \setminus f[S_n])\right] = X \setminus g\left[Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[S_n]\right] = X \setminus g\left[Y \setminus f\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right]\right] =$$

$$= X \setminus g\,[Y \setminus f\,[S]]\,,$$

onde a igualdade $(*)$ decorre da injetividade de g (lema anterior), enquanto as outras seguem das leis de De Morgan. □

Exercício 0.34. Mostre que se $F\colon A \to B$ e $G\colon C \to D$ são bijeções com $A \cap C = B \cap D = \emptyset$, então $F \cup G$ é uma bijeção da forma $A \cup C \to B \cup D$. Use isto para obter a bijeção procurada no teorema anterior. Dica: faça $A := S$, $B := f[S]$, $C := T'$ e $D := g[T']$, com $F := f|_S$ e $G := (g|_{T'})^{-1}$. ■

Portanto, a fim de estabelecer a *existência* de uma bijeção entre conjuntos X e Y, basta exibir injeções $X \to Y$ e $Y \to X$, sem a necessidade de explicitar uma bijeção particular. Isto será feito, por exemplo, no próximo capítulo, em que provaremos a *não-enumerabilidade* de $\mathbb{R}$ por meio de uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\wp(\mathbb{N})$, cuja *existência* será garantida por meio de funções injetoras da forma $\mathbb{R} \to \wp(\mathbb{N})$ e $\wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$. Aliás, este é um bom momento para introduzir uma das terminologias mais preguiçosas na História da Matemática.

Definição 0.1.33. Diremos que X é **enumerável** se existir função injetora da forma $X \to \mathbb{N}$. Nas situações em que se puder garantir a existência de bijeção (e isto precisar ser explicitado), X será dito *infinito enumerável*. Por fim, diremos que X é **não-enumerável** se X *não for* enumerável, i.e., se não existir injeção $X \to \mathbb{N}$. ¶

Proposição 0.1.34. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *é (infinito!) enumerável.*

Demonstração. A função $n\mapsto\langle 0,n\rangle$ define uma injeção $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Por outro lado, como leitores versados em Aritmética devem saber, a correspondência $\langle m,n\rangle\mapsto 2^m3^n$ define uma função injetora $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Logo, o resultado segue do Teorema de Cantor-Bernstein. □

Os primeiros contatos com esse tipo de resultado costumam ser estranhos, já que parece ser claro que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ deveria ter bem mais elementos do que $\mathbb{N}$: com efeito, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}\times\{n\}$, i.e., é uma *reunião* enumerável de conjuntos enumeráveis dois a dois disjuntos e, mesmo assim, sua cardinalidade não excede a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Contudo, uma simples ilustração ajuda a tornar a coisa toda mais palatável.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
0 & \langle 0,0\rangle \arrow[r] & \langle 1,0\rangle \arrow[dl] & \langle 2,0\rangle \arrow[d] & \langle 3,0\rangle \arrow[r] & \langle 4,0\rangle \arrow[d] & \\
1 & \langle 0,1\rangle \arrow[r] & \langle 1,1\rangle \arrow[ur] & \langle 2,1\rangle \arrow[dl] & \langle 3,1\rangle \arrow[u] & \langle 4,1\rangle \arrow[dl] & \\
2 & \langle 0,2\rangle \arrow[d] & \langle 1,2\rangle \arrow[l] & \langle 2,2\rangle \arrow[ur] & \langle 3,2\rangle \arrow[dl] & & \\
3 & \langle 0,3\rangle \arrow[r] & \langle 1,3\rangle \arrow[ur] & \langle 2,3\rangle \arrow[dl] & & & \\
4 & \langle 0,4\rangle \arrow[d] & \langle 1,4\rangle \arrow[l] & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{tikzcd}$$

Como o diagrama acima sugere, pode-se determinar uma bijeção da forma $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ao *percorrer* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ num zigue-zague maroto. O mesmo tipo de *percurso* também ajuda a perceber que o *conjunto dos números racionais* é infinito enumerável: a única diferença é que precisa-se evitar representações *equivalentes* de um mesmo número racional já *percorrido*, pois sem isso a injetividade se perde. Ou será que não?

Teorema 0.1.35 (©). *Uma função $f\colon X\to Y$ é sobrejetora se, e somente se, existe uma injeção $g\colon Y\to X$ tal que $f\circ g=\mathrm{Id}_Y$. Em particular, $Y\precsim X$ se, e somente se, $X\succsim Y$.*

Demonstração. Se a função g existe como no enunciado, então a sobrejetividade de f segue do Exercício 0.47 (a menos da ordem das letras). A parte delicada é a recíproca: como cozinhar uma função $g\colon Y\to X$ satisfazendo $f\circ g=\mathrm{Id}_Y$? Note que a identidade procurada se traduz em pedir $f(g(y))=y$ para todo $y\in Y$. Na prática, isto significa dizer que $g(y)\in X$ é *algum* elemento de X que é *levado* até y por f.

Certamente, *algum* $x\in X$ satisfaz $f(x)=y$, posto que f é sobrejetora por hipótese, o que garante $P_y:=f^{-1}[\{y\}]\neq\emptyset$ para todo $y\in Y$. Ocorre que $\mathcal{P}:=\{P_y:y\in Y\}$ é uma partição de X (certo?!), de tal maneira que o *insuspeito* Teorema 0.1.13 assegura uma classe de representantes para $\mathcal{P}$, digamos $\mathcal{R}$. Com isso, basta definir $g(y):=r$, onde r é o único elemento de $\mathcal{R}$ pertencente a $\mathcal{P}_y$, que satisfaz a identidade $f(g(y))=y$ por *construção.* □

Exercício 0.35. Compare o enunciado do teorema anterior com o Exercício 0.49 e com a argumentação empregada acima com a parte final da demonstração da Proposição 0.1.26 ■

Corolário 0.1.36 (©)**.** *Se f é uma função, então* $|\operatorname{im}(f)| \leq |\operatorname{dom}(f)|$.

Corolário 0.1.37 (©)**.** *Seja $\mathcal{X} := \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de conjuntos enumeráveis. Então $\bigcup \mathcal{X}$ é enumerável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\operatorname{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$, das funções sobrejetoras da forma $\mathbb{N} \to X_n$, é não-vazio, o que *permite escolher* uma função $f_n \in \operatorname{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (como na demonstração do Teorema 0.1.13). Com isso, pode-se definir $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ a função que faz $\langle m, n\rangle \mapsto f_m(n)$. Note que se $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, então existe $m \in \mathbb{N}$ com $x \in X_m$, bem como $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(n) = x$, i.e., $f(m, n) = x$. Logo, f é sobrejetora, acarretando $\bigcup \mathcal{X} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. □

Exemplo 0.1.38 (Opcional: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$)**.** Um dos modos de *motivar* a *introdução* dos números inteiros é dar *significado* a expressões como "$5-7$", que não têm sentido no contexto natural: tipicamente, uma expressão da forma "$m-n$" em $\mathbb{N}$ corresponde à cardinalidade resultante de um conjunto com m elementos após a exclusão de n elementos; logo, se $m < n$, então não se pode realizar tal procedimento. Todavia, como os Bancos nos ensinam desde tempos imemoriais, é possível registrar "quanto falta": no caso, faz-se "$7-5=2$", e escreve-se "$5-7=-2$" para indicar a natureza "negativa" do resultado[23].

Para *descrever* o nosso entendimento do que os inteiros *deveriam* ser dentro do cenário formal que se desenrola, pode-se observar o seguinte: embora coisas como "$5-7$" e "$3-5$" (que deveriam resultar em -2) não tenham significado em $\mathbb{N}$, a *informação* transmitida por tais expressões pode ser *codificada* em $\mathbb{N}$: em vez de escrever $5-7=3-5$, redistribuem-se as parcelas de modo a se obter uma igualdade entre somas positivas, i.e., $5+5=7+3$. Em outras palavras, duas *expressões* $a-b$ e $c-d$ são iguais (no que gostaríamos que fosse $\mathbb{Z}$) se, e somente se, $a+d$ e $b+c$ são iguais em $\mathbb{N}$. Em linguajar técnico:

Exercício 0.36. Sobre $Z := \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, considere a relação $\sim$ que declara $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $a+d=b+c$.

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Dica: para a transitividade, use a *lei do cancelamento*, i.e., "$a=b$ sempre que $a+c=b+c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$".

b) Mostre que se $\langle a, b\rangle \sim \langle a', b'\rangle$ e $\langle c, d\rangle \sim \langle c', d'\rangle$, então $\langle a+c, b+d\rangle \sim \langle a'+c', b'+d'\rangle$.

c) Mostre que ao definir $\overline{\langle a, b\rangle} +' \overline{\langle c, d\rangle} := \overline{\langle a+c, b+d\rangle}$, o resultado *independe da escolha de representantes*. Dica: encare o item anterior até que ele te encare de volta[24] ■

Definição 0.1.39. O quociente $Z/\!\sim$ do exercício acima será denotado por $\mathbb{Z}$ e xingado de **conjunto dos números inteiros**. ¶

No caso, a classe de equivalência $\overline{\langle a, b\rangle}$ representa o que gostaríamos de escrever como $a-b$, razão pela qual vamos escrever assim! Desse modo, a *operação* $+'$ definida no exercício anterior apenas estipula

$$(a-b) +' (c-d) := (a+c) - (b+d),$$

tal qual aprendemos na escola.

[23] A aceitação dos números negativos pela comunidade matemática foi relativamente tardia – ainda no Século XIX havia quem encrencasse com eles. O leitor interessado em aspectos históricos pode conferir [26].

[24] Por exemplo: por um lado, $\overline{\langle 1, 2\rangle} +' \overline{\langle 2, 5\rangle} = \overline{\langle 3, 7\rangle}$, enquanto $\overline{\langle 2, 3\rangle} +' \overline{\langle 3, 6\rangle} = \overline{\langle 5, 9\rangle}$ e, de fato, $\overline{\langle 3, 7\rangle} = \overline{\langle 5, 9\rangle}$, já que $3+9=7+5$. Elaborar exemplos particulares para entender afirmações aparentemente abstratas é algo que o leitor deve se acostumar a fazer por conta própria.

Exercício 0.37. Verifique as propriedades usuais da soma de números inteiros. ■

O "exercício" acima empurra para debaixo do tapete a verificação de diversas propriedades importantes do conjunto $\mathbb{Z}$ como construído aqui, mas que essencialmente permitem tratá-lo como já estamos acostumados – em particular, o apóstrofo empregado no símbolo de adição já pode ser abandonado. De maneira similar, ao definir

$$(a - b) \cdot' (c - d) := (ac + bd) - (ad + bc),$$

verifica-se que o resultado da expressão acima (a rigor, uma classe de equivalência em $Z/{\sim}$), não depende da escolha dos representantes das classes, essencialmente como no caso da adição "$+'$". Após verificar que tal operação $\cdot'$ tem o comportamento que se esperaria da multiplicação em $\mathbb{Z}$, a construção de $\mathbb{Q}$ se torna inevitável.

Exercício 0.38. Sobre $Q := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, considere a relação $\sim$ que declara $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $ad = bc$.

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

b) Chamando por $\dfrac{a}{b}$ a classe de equivalência de um par $\langle a, b\rangle$, mostre que $Q/{\sim}$ se comporta, essencialmente, como o ***conjunto* dos números racionais** que conhecemos na escola, e que passará a ser denotado por $\mathbb{Q}$. Em particular, defina as operações de adição e multiplicação e verifique suas propriedades usuais. ■

Com $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ *formalmente* apresentados ao leitor, já é possível determinar suas *cardinalidades* por meio dos resultados vistos no capítulo (entre outros exercícios elementares propostos no final do capítulo):

(i) como existem funções injetoras $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, resulta que $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z} \precsim \mathbb{Q}$;

(ii) por construção, $\mathbb{Q}$ vem de fábrica com uma sobrejeção da forma $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, mostrando que $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

(iii) em geral, se $A \approx A'$ e $B \approx B'$, então $A \times B \approx A' \times B'$, de modo que por valer $\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, resulta $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(iv) finalmente, $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\}$, com $\{-n, n\} \precsim \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resultando em $\mathbb{Z} \precsim \mathbb{N}$ (logo, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$) e, como acima, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Em suma:

$$\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z} \precsim \mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{N},$$

donde o Teorema de Cantor-Bernstein assegura as clássicas *identidades* $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$, i.e., tanto $\mathbb{Z}$ quanto $\mathbb{Q}$ são enumeráveis. ▲

Num primeiro contato, pode chamar a atenção do leitor que conjuntos infinitos aparentemente tão distintos possam ter a mesma cardinalidade infinita e, mais ainda, que esta cardinalidade seja, precisamente, a dos números naturais. Por um lado, isto se deve ao fato de a *construção* dos conjuntos em questão ter sido feita por meio de métodos que não *aumentam* cardinalidades infinitas (Proposição 0.1.34 e Corolário 0.1.34). Por outro lado, a *menor* cardinalidade infinita é a de $\mathbb{N}$, no seguinte sentido:

Teorema 0.1.40 (Ⓒ)**.** *Se X é infinito, então $\mathbb{N} \precsim X$.*

Demonstração. A ideia é simples: por X ser infinito, não existe $n \in \mathbb{N}$ com uma bijeção $\mathbb{N}_{<n} \to X$; logo, se $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \colon \mathbb{N}_{<n} \to X$ for uma função injetora, então $X \setminus \operatorname{im}(\varphi)$ é não-vazio, o que permite *escolher*, *recursivamente*, sequências finitas *cada vez maiores* de modo a obter uma injeção $\mathbb{N} \to X$. Parece honesto, certo? □

Exercício 0.39. Para um conjunto X, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) o conjunto X é infinito (não existe $n \in \mathbb{N}$ com uma bijeção $\mathbb{N}_{<n} \to X$);

b) existe uma função injetora $\mathbb{N} \to X$;

c) existe uma função bijetora $X \to Y$, com $Y \subsetneq X$. ■

Saber que $\#\mathbb{N}$ é *a menor cardinalidade infinita* (†) sugere a pergunta *natural*: qual é a *próxima* cardinalidade? Certamente, aplicações sucessivas do Teorema de Cantor resultam em diversas cardinalidades não-enumeráveis: $\mathbb{N} \prec \wp(\mathbb{N}) \prec \wp(\wp(\mathbb{N})) \prec \ldots$, o que não responde a pergunta, já que *poderia existir* X com $\mathbb{N} \prec X \prec \wp(\mathbb{N})$, caso em que $\#\wp(\mathbb{N})$ não seria a "*próxima*"[25]. Em todo caso, resta apenas um fato inócuo sobre conjuntos não-enumeráveis para ser apresentado – e, devido à sua simplicidade, a verificação ficará a cargo do leitor.

Exercício 0.40 (Princípio da Casa dos Pombos)**.** Sejam X um conjunto não-enumerável e $A, B \subseteq X$ subconjuntos disjuntos satisfazendo $X = A \cup B$. Mostre que deve ocorrer $\mathbb{N} \prec A$ ou $\mathbb{N} \prec B$, i.e., (pelo menos) um deles deve ser não-enumerável. Dica: suponha que não. ■

0.2 This is the bad place!

As duas seções anteriores completaram o cansativo trabalho de ilustrar (brevemente) os procedimentos por meio dos quais *conjuntos* podem ser utilizados como *Fundamentos* para a Matemática ou, pelo menos, para a Análise Clássica. Exceto pelos elementos de $\mathbb{N}$, cuja *natureza* não se discutiu em virtude de sua introdução pragmática com o Axioma de Dedekind-Peano, todas as coisas foram descritas/construídas a partir de noções conjuntistas, desde pares ordenados até a noção geral de cardinalidade: tudo garantido pelo Princípio da Abstração. Suspiro.

Paradoxo de Russell. O Princípio da Abstração torna lícito considerar o conjunto $R \coloneqq \{x : x \notin x\}$, cujos elementos são todos aqueles que não pertencem a si próprios. Ocorre que por R ser um conjunto, podemos nos perguntar se $R \in R$ ou $R \notin R$: se valer o primeiro caso, i.e., $R \in R$, então R deve ser um dos objetos do *universo* que não pertencem a si próprios e, portanto, $R \notin R$; se valer o segundo caso, i.e., $R \notin R$, então R é um dos objetos do *universo* que não pertencem a si próprios e, portanto, $R \in R$.

Assim, de um ponto de vista metodológico, não é razoável insistir no Princípio da Abstração da forma como este foi postulado, pois o contrário tornaria todo o empreendimento realizado aqui moralmente indistinguível dos argumentos malandros apresentados no Prólogo – e, se fosse para proceder de tal forma, não faria sentido cogitar uma revisão metodológica. Mas este não é o único problema.

[25]Em particular fica o **alerta**: afirmações do tipo "X e Y são não-enumeráveis" não significam, *a priori*, que X e Y tenham a mesma cardinalidade, mas apenas que ambas as cardinalidades são *maiores* do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Por mais que tenhamos firmado o *compromisso* de *aceitar* conjuntos infinitos, as ferramentas que temos para compreendê-los são *finitárias*: a vida, os símbolos, o papel, a paciência... são recursos indiscutivelmente finitos, o que leva à exigência (bastante) razoável de que *demonstrações* também devem ser *finitas* em algum sentido. Certamente, dado que textos empregam, invariavelmente, apenas finitos caracteres, a noção de finitude que se espera de uma demonstração não deve ser pensada textualmente, mas *computacionalmente*.

Exemplo 0.2.0 (Fundamental)**.** Para ilustrar, considere a demonstração do Teorema 0.1.40. Secretamente, o argumento *sugere* como definir, recursivamente, uma injeção da forma $\mathbb{N} \to X$ sempre que X for infinito:

- ✓ por X ser infinito, tem-se $X \neq \emptyset$, o que permite *escolher* $x_0 \in X$;
- ✓ por X ser infinito, tem-se $X \neq \{x_0\}$, o que permite *escolher* $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$;
- ✓ por X ser infinito...

Implicitamente, o raciocínio acima descreve um processo de construção *infinitamente arbitrário*: cada novo passo *exige* um `input`, uma escolha *indeterminada* que deve ser feita por quem executa a demonstração. Para ilustrar uma situação que não sofre deste problema, suponha que X seja bem ordenado: neste caso, bastaria definir $x_0 \coloneqq \min X$, $x_1 \coloneqq \min X \setminus \{x_0\}$, *e assim por diante*. Pode parecer a mesma coisa, mas não é: no último caso, o argumento explicita que a escolha deve ser feita por meio da boa ordem nativa de X, tomando-se *o* menor dentre os elementos ainda não escolhidos, o que independe de quem executa a demonstração[26]. ▲

Revelados os problemas, o propósito desta seção é apresentar brevemente (e sem muita pompa) uma das soluções (*aparentes*) mais utilizadas pela comunidade matemática: o sistema de axiomas conhecido como *Zermelo-Fraenkel-Choice*, ou...

0.2.0 ZFC (para os íntimos)

Na tentativa de resolver o primeiro problema da *lista de exercícios* proposta por David Hilbert em 1900, Zermelo *demonstrou*, em 1904, o que ficou conhecido como

Teorema 0.2.1 (da Boa Ordenação (©))**.** *Todo conjunto admite uma boa ordem.*

Mais precisamente, qualquer *conjunto* X admite pelo menos uma relação binária $\preceq$ que faz de $\langle X, \preceq\rangle$ uma boa ordem[27]. O problema de Hilbert em questão era a *Hipótese do Contínuo*, que consiste em saber se existe (ou não) um conjunto infinito X com $\mathbb{N} \prec X \prec \wp(\mathbb{N})$: no caso, a relação com a noção de boa ordem se dá por um resultado de Cantor que estabelece o conjunto das boas ordens de $\mathbb{N}$ (a menos de *isomorfismo*) como um representante da *primeira cardinalidade* maior do que $\#\mathbb{N}$. No entanto, o que interessa para a presente discussão é o fato de Zermelo ter usado, explicitamente, uma suposição que ele julgou razoável o bastante a ponto de chamar de

[26] Trata-se de uma versão menos divertida da *anedota das meias*, criada por Russell para ilustrar o uso do Axioma da Escolha: numa coleção infinita de pares de meias, a fim de tomar uma meia de cada par, precisa-se escolher arbitrariamente uma meia de cada par (já que meias de um mesmo par costumam ser indistinguíveis); já para uma coleção infinita de pares de sapato, basta escolher o pé esquerdo de cada par.

[27] Tal ordem não tem qualquer tipo de comprometimento com *outras ordens* previamente existentes em X: no caso de $\mathbb{Z}$, por exemplo, poderia ocorrer $3 = \min_{\preceq} \mathbb{Z}$, $-1 = \mathrm{suc}_{\preceq}(3)$, $19 = \mathrm{suc}_{\preceq}(-1)$, etc.

Axioma da Escolha[28]. *Para uma família não-vazia $\mathcal{A}$ de conjuntos não-vazios, existe uma função $f\colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

Embora exista quem aponte tal axioma como incompatível com posturas finitárias, pode-se argumentar que foi justamente o comprometimento com tais posturas que levou à percepção de que escolhas infinitas não podem ser realizadas de maneira *construtiva*. Nesse sentido, em vez de banir os resultados que dependem de tais processos, Zermelo propôs aceitar a *existência* de *escolhas completas* sem a limitação de descrevê-las ou construí-las, algo bem mais *honesto*.

Em todo caso, foi com o propósito de rebater as críticas feitas à sua demonstração de 1904 que Zermelo propôs, em 1908, a primeira versão de um sistema de axiomas para teoria dos conjuntos que, além de incluir o Axioma da Escolha como peça fundamental, eliminou o paradoxo de Russell. Mas não sem custo: no lugar do poderoso Princípio da Abstração, deve-se considerar o

Axioma da Separação. *Para toda propriedade $\mathcal{P}$ e todo conjunto A dado, existe o conjunto $\{x \in A : \mathcal{P}(x)\}$.*

Acima, a notação "$\{x \in A : \mathcal{P}(x)\}$" indica o que anteriormente escreveríamos como "$\{x : x \in A \text{ e } \mathcal{P}(x)\}$": neste caso, a alteração enfatiza que os elementos considerados não são tomados no *universo*, mas apenas no conjunto A previamente dado. Assim, em vez de supor que qualquer propriedade determina um conjunto de forma irrestrita, exige-se algum conjunto previamente conhecido para servir de substrato para a construção do *subconjunto*. Isto elimina o paradoxo de Russell pelo seguinte motivo: em vez de definir $R := \{x : x \notin x\}$, pode-se apenas tomar $R_A := \{x \in A : x \notin x\}$, para algum conjunto A pré-existente; agora, como no caso original, não pode ocorrer $R_A \in R_A$, já que isto daria $R_A \notin R_A$; porém, desta vez, a ocorrência de $R_A \notin R_A$ não acarreta sua negação, mas sim $R_A \notin A$! Evidentemente, se algum conjunto A fosse tal que $x \in A$ para todo x, retornaríamos ao paradoxo de Russell. Logo...

Teorema 0.2.2. *Não existe conjunto universo.*

O teorema acima estabelece a não existência de um *conjunto* com a propriedade de conter todos os *conjuntos* como elementos. Isto é diferente de dizer que não existe *universo*: em certo sentido, é como afirmar que $\mathbb{N}$ não é um número natural, ou que $\mathbb{Z}$ não é um número inteiro, ou seja, as coisas que entendemos como conjuntos não constituem uma totalidade que possa ser tratada como um dos objetos interpretados como conjunto.

Ocorre que num cenário regido apenas pelos Axiomas da Extensão, Dedekind-Peano, Separação e Escolha, não há como garantir todas as *construções* realizadas nas seções anteriores, que foram conjuradas por meio do poder criativo do Princípio da Abstração. É por isso que se acrescentam outros axiomas.

Axioma do par: dados a e b, existe $\{a, b\}$.

Axioma da reunião: dada uma família $\mathcal{F}$, existe $\bigcup \mathcal{F}$.

Axioma das partes: dado um conjunto X, existe $\wp(X)$.

Axioma da substituição: se para todo x num conjunto X existe um único p_x *associado* a x de alguma *forma bem determinada*, então existe o conjunto $p[X] := \{p_x : x \in X\}$.

[28] A rigor, em 1904, Zermelo tratou a suposição apenas como tal; foi só em 1908 que ele propôs uma axiomatização para a teoria de conjuntos que englobasse sua suposição como um dos axiomas.

Dos quatro axiomas acima, apenas o último carece de alguma discussão adicional, mas que não chega a ser profunda: essencialmente, trata-se da ideia de que se algum procedimento se comporta como *se fosse* uma função sobre um *domínio* conhecido, então existe um conjunto apto a ser o contradomínio desta (agora sim) função. Por exemplo: ao definir $P_0 := \emptyset$ e $P_{n+1} := \wp(P_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal axioma estabelece a existência da família $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 0.41. Revise o parágrafo final da demonstração apresentada para o Teorema 0.0.66. ■

Exercício 0.42. Convença-se de que os axiomas anteriores permitem definir pares ordenados e produtos cartesianos. Conclua que relações binárias como ordens, relações de equivalência e funções estão salvas. Dica: para $\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ com $a \in X$ e $b \in Y$, note que $\langle a, b\rangle \in \wp(\wp(X \cup Y))$. ■

Observação 0.2.3 (Naturais de von Neumann)**.** Atualmente, também é comum substituir o Axioma de Dedekind-Peano pelo

Axioma do infinito: existe $\mathcal{I}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{I}$ e $x \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ sempre que $x \in \mathcal{I}$.

Embora não se descrevam *todos* os elementos de $\mathcal{I}$, o *caso inicial* "$\emptyset \in \mathcal{I}$" e a validade da *hipótese indutiva* garantem que $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots \in \mathcal{I}$, o que permite fazer $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, etc. Se, por um lado, pode parecer estranho *definir* os números naturais como conjuntos, por outro lado, foram conjuntos definidos (essencialmente) dessa forma que serviram como *modelos* de finitude: note que $\mathbb{N}_{<4} = \{0, 1, 2, 3\}$, enquanto que com a definição apresentada aqui, $4 := \{0, 1, 2, 3\}$. Não me parece algo insuportável, mas cabe ao (senso estético-moral do) leitor decidir o que prefere. De qualquer forma, em tal cenário, $\mathbb{N}$ passa a ser definido como um subconjunto apropriado de $\mathcal{I}$, definido por meio do Axioma da Separação[29]. △

A lista de axiomas para o que se chama, atualmente, de (sistema de axiomas, axiomática, etc.) **Zermelo-Fraenkel-Choice**[30] (abreviado com ZFC) se encerra com o

Axioma da fundação: para todo X existe $x \in X$ com $x \cap X = \emptyset$,

cujas aplicações fogem do escopo deste texto – mas que, grosso modo, ajudam a *estruturar* o *universo* dos conjuntos.

O problema de decidir se tais axiomas capturam ou não alguma noção *transcendental* de *verdade* acerca dos *conjuntos* é algo que não será abordado neste texto, por ser uma discussão bem mais profunda e delicada, o que exige maturidade tanto de quem escreve quanto de quem lê[31]. Quem se incomodar pode assumir a postura pragmática de pensar nos resultados que serão provados ao longo do texto não como revelações matemáticas sobre as leis que regem o *universo*, mas apenas como a análise de afirmações condicionais ("se... então"), o que permite adiar (ou ignorar) debates mais calorosos sobre as noções de "verdade". Diga-se de passagem, esta é a minha postura padrão.

[29] Faz-se $\mathbb{N} := \{x \in \mathcal{I} : x \in J \text{ para todo } J \text{ indutivo}\}$, onde J é dito *indutivo* se $\emptyset \in J$ e $x \cup \{x\} \in J$ para todo $x \in J$.

[30] Fraenkel foi um dos muitos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do sistema em seus estágios iniciais, enquanto *Choice* se refere ao Axioma da Escolha. Para mais detalhes históricos acerca do desenvolvimento de ZFC, o leitor pode conferir [11].

[31] O leitor interessado pode conferir o texto de Penelope Maddy [20].

0.2.1 Como corrigir os erros no caminho

Antes de encerrar o capítulo, é importante mencionar como corrigir (quando possível) as considerações feitas de modo (deliberadamente) equivocado ao longo do capítulo.

As ocorrências marcadas com “(†)” são irrecuperáveis, pois elas dependem explicitamente do tratamento do universo como conjunto, o que viola o último teorema. Em particular, na Definição 0.1.30, só faz sentido tratar de $\bigcap \mathcal{F}$ para $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (e, por conseguinte, o Exercício 0.31 também está condenado). Por fim, revela-se como *impossível* abodar a noção de *cardinalidade* rigorosamente como uma classe de equivalência no universo.

Exercício 0.43. Mostre que se $X \neq \emptyset$, então $\#X$ não é um conjunto. Dica: mostre que não pode existir um conjunto Z tal que $Y \in Z$ sempre que Y tiver bijeção com X; para isso, suponha que Z existe e observe que $\bigcup Z$ seria o universo. ■

Não obstante, números cardinais *existem* em ZFC: há um modo *canônico* de determinar conjuntos que codificam todas as *formas* ~~imagináveis~~ de boa ordenação, por meio dos quais se definem objetos que se *comportam* como representantes das cardinalidades (se fosse lícito tratá-las como classes de equivalência). É nesse processo que surgem os clássicos *números transfinitos* “$\aleph_0$”, “$\aleph_1$”, “$\aleph_2$”,... que descrevem a ordenação das *cardinalidades* infinitas[32]. Em particular, tais considerações *permitem* atribuir a cada conjunto X (finito ou infinito) um desses *objetos*, indicado por $|X|$, que se comporta como o **número cardinal** de X, i.e., para o qual uma igualdade da forma $|X| = |Y|$ ocorre se, e somente se, $X \approx Y$. Por esta razão, as notações introduzidas na Definição 0.1.27 serão abandonadas e substituídas da maneira *natural*: ao encontrar afirmações do tipo “$|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{Q})|$” ou “$|X| < |\wp(X)|$”, por exemplo, o leitor deve entendê-las como abreviações para “$\mathbb{R} \approx \wp(\mathbb{Q})$” e “$X \prec \wp(X)$”, respectivamente.

As ocorrências destacadas com “©”, por sua vez, indicam apenas o uso implícito do Axioma da Escolha, de modo que não constituem erros propriamente ditos, mas apenas pontos de atenção.

- ✓ No Teorema 0.1.13, a classe de representantes se obtém por meio do Axioma da Escolha ao considerar $\mathcal{A}$ como a família das classes de equivalência da relação (ou como a própria partição, a depender do caso), i.e., basta tomar $\mathcal{R} := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$;
- ✓ O Teorema 0.1.35, por sua vez, utilizou o teorema anterior; o Corolário 0.1.36 foi apenas uma consequência.
- ✓ Para o Corolário 0.1.37, o Axioma da Substituição garante a existência da família $\mathcal{B} := \{\mathrm{Sob}(\mathbb{N}, X_n) : n \in \mathbb{N}\}$, enquanto o Axioma da Escolha *assegura* uma função $f\colon \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{B}$ com $f(n) \in \mathrm{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (por quê?).
- ✓ Finalmente, para o Teorema 0.1.40, com $\mathcal{A} := \wp(X) \setminus \{\emptyset\}$, o Axioma da Escolha dá uma função $f\colon \mathcal{A} \to X$ com $f(A) \in A$ para todo A, de modo que ao chamar por $\mathrm{seq}\,(X)$ a família das funções da forma $\mathbb{N}_{<n} \to X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pode-se definir a função $\mathcal{O}\colon \mathrm{seq}\,(X) \to X$ que faz $\mathcal{O}(s) := f(X \setminus \mathrm{im}\,(s))$, que explicitamente *escolhe* um elemento em X não pertencente à imagem da sequência $s \in \mathrm{seq}\,(X)$. Adaptando-se a ideia da demonstração do Teorema 0.0.66, mostra-se que existe uma (única) função $\psi\colon \mathbb{N} \to X$ tal que $\psi(n) = \mathcal{O}(\langle \psi(m) : m < n \rangle)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que pelo modo com que a função $\mathcal{O}$ foi tomada, deve ser injetora.

[32] O leitor interessado deve procurar pelos chamados *números ordinais* no contexto de ZFC – o que pode ser feito, por exemplo, em [22].

Exercícios adicionais

Exercício 0.44. Mostre que se $\mathcal{F} \neq \emptyset$, então

$$\bigcap \mathcal{F} = \left\{ x \in \bigcup \mathcal{F} : \exists F \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in F \right\}.$$

Conclua que seria legítimo *definir* $\bigcap \mathcal{F}$ por meio da identidade acima. ■

Observação 0.2.4. A identidade anterior tem a vantagem de dar sentido a $\bigcap \mathcal{F}$ mesmo nas situações em que $\mathcal{F} = \emptyset$. Porém, ela é incompatível com a implicação

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A},$$

válida sempre que $\mathcal{A} \neq \emptyset$: como $\emptyset \subseteq \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B}$, *seria natural* esperar que $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \emptyset$, o que não é compatível com a proposta do último exercício, que daria $\bigcap \emptyset = \emptyset$. Em certo sentido, isso mostra a artificialidade da definição: para leitores versados em frações, seria como introduzir a notação $\frac{1}{0} := 0$ em $\mathbb{Z}$, apenas para dar sentido a expressões do tipo $\frac{a}{b}$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$; embora tal definição não seja errada por si só, ela não é compatível com as propriedades operatórias das operações usuais de $\mathbb{Q}$. △

Exercício 0.45. Para uma função $h\colon X \to Y$, mostre que $\mathrm{Id}_Y \circ h = h = h \circ \mathrm{Id}_X$. ■

Exercício 0.46. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se g e f são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

b) Mostre que se g e f são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

c) Mostre que se g e f são bijetoras, então $g \circ f$ é bijetora.

d) Determine a inversa de $g \circ f$. ■

Exercício 0.47. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

b) Mostre que se $g \circ f$ é sobre, então g é sobre.

c) Mostre que se $g \circ f$ é bijetora, então f é injetora e g é sobrejetora. ■

Exercício 0.48. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ funções. Mostre que se $g \circ f$ e $f \circ g$ são bijeções, então f e g são bijeções. Adicionalmente, se $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ ou $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, então $g = f^{-1}$. ■

Exercício 0.49. Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre que a função f é injetora se, e somente se, existe uma (sobrejeção) $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. ■

Exercício 0.50. Seja $f\colon X \to Y$ uma função.

a) Mostre que $f[A] \subseteq f[A']$ e $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[B']$ sempre que $A \subseteq A' \subseteq X$ e $B \subseteq B' \subseteq Y$, respectivamente.

b) Mostre que $f[\emptyset] = \emptyset$ e $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

c) Mostre que $f^{-1}[Y] = X$.

d) Para $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ quaisquer, mostre que valem as inclusões $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ e $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$, com as igualdades garantidas se f for injetora (para o primeiro caso) ou sobrejetora (para o segundo caso). ■

Exercício 0.51 (Indução a partir de k)**.** Mostre que se $\mathcal{P}(x)$ for uma propriedade verificada para algum $k \in \mathbb{N}$ e, para todo $m \geq k$ valer que $\mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$, então $\mathcal{P}(n)$ vale para todo $n \geq k$. ■

Exercício 0.52. Mostre que para $m, n \in \mathbb{N}$ ocorre $n^{m+1} = n^m \cdot m$. Dica: proceda por indução em m. ■

Exercício 0.53 (Recursão “paramétrica”)**.** Para funções $a\colon P \to X$ e $g\colon \mathbb{N} \times P \times X \to X$ fixadas, mostre que existe uma única função $h\colon \mathbb{N} \times P \to X$ satisfazendo as condições

(i) $h(0, p) = a(p)$ para todo $p \in P$, e

(ii) $h(n+1, p) = g(n, p, h(n, p))$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $p \in P$.

Dica: para cada $p \in P$, obtenha $h_p\colon \mathbb{N} \to X$ adequada; daí defina $H\colon P \to X^{\mathbb{N}}$ da maneira *óbvia* e a utilize para cozinhar a função h desejada. ■

Exercício 0.54. Sejam $\langle \mathbb{S}, \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ ordens parciais. Uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ é:

(i) **crescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \leq f(s')$;

(ii) **decrescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \geq f(s')$;

(iii) **monótona** se f for crescente ou decrescente.

Sabendo disso, suponha que a ordem de $\mathbb{S}$ seja total.

a) Mostre que se f é crescente e $f(s) < f(s')$, então $s < s'$.

b) Mostre que se f é decrescente e $f(s) < f(s')$, então $s > s'$.

c) Conclua que se f for monótona e bijetora, então a inversa $f^{-1}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{S}$ também será monótona[33]. ■

Observação 0.2.5. Uma função crescente e injetora satisfaz a implicação *estrita*

$$s < s' \Rightarrow f(s) < f(s'),$$

já que deve ocorrer $f(s) \leq f(s')$, enquanto a injetividade proíbe $f(s) = f(s')$. Uma função em tal condição será chamada de **estritamente crescente**. A definição para funções **estritamente decrescentes** é análoga[34]. △

Exercício 0.55. Convença-se de que funções estritamente monótonas são injetoras. ■

Exercício 0.56. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial, $A \subseteq \mathbb{P}$ e $a \in \mathbb{P}$.

a) Mostre que $a = \min_{\leq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ se, e somente se, $a = \max_{\geq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$.

b) Mostre que A é limitado inferiormente em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ se, e somente se, A é limitado superiormente em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$.

c) Mostre que $a = \inf_{\leq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ se, e somente se, $a = \sup_{\geq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$. ■

Exercício 0.57. Mostre que se $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é uma boa ordem, então $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é ordem total. Dica: se $x, y \in \mathbb{B}$, então $\{x, y\}$ é subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$. ■

[33] Na verdade, f é crescente/decrescente se, e somente se, f^{-1} é crescente/decrescente.

[34] A literatura também costuma xingar de *não-decrescente* as coisas que aqui foram chamadas de *crescentes*. Em tais textos, o adjetivo *crescente* se reserva para as situações de desigualdade estrita. Um comentário análogo é válido para funções *não-crescentes*.

Exercício 0.58. Numa ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, mostre que $\mathbb{P}$ tem máximo se, e somente se, existe $\inf \emptyset$, com $\max \mathbb{P} = \inf \emptyset$. ■

Observação 0.2.6. O último exercício pode ajudar na *motivação* dos números (*ordinais*) *infinitos*, pelo menos quando se utiliza a metodologia de contagem de quem adota $0 \in \mathbb{N}$ (como na Observação 0.0.71). Por exemplo, para *contar* a quantidade de elementos de $\mathbb{N}$, o processo de indexação de $\mathbb{N}$ necessário esgotaria $\mathbb{N}$, de modo que nos veríamos forçados a tomar o menor elemento do conjunto vazio, que nem mesmo tem elementos. Porém, se *aceitássemos* o ínfimo, chegaríamos à conclusão de que $\mathbb{N}$ deveria ter $\inf \emptyset$ elementos!

Embora $\inf \emptyset$ também não exista em $\mathbb{N}$, o exercício anterior sugere que poderíamos acrescentar um *novo* elemento *acima* dos naturais (um *último elemento*), não para ser usado na indexação, mas apenas para registrar a contagem, i.e., a indexação já realizada! Esta é justamente a ideia que subjaz a definição do *ordinal* ω. △

Exercício 0.59. Mostre que se $|A| = |B|$, então $|\wp(A)| = |\wp(B)|$. ■

Exercício 0.60. Sejam A, B, C e D conjuntos. Mostre que se $|A| \leq |C|$ e $|B| \leq |D|$, então $|A^B| \leq |C^D|$. ■

Exercício 0.61. Mostre que se $|A| = |C|$ e $|B| = |D|$, então $|A^B| = |C^D|$. ■

Observação 0.2.7. Note que o exercício anterior justifica definir potenciação entre cardinalidades/números cardinais: $|X|^{|Y|} := |X^Y|$. △

Observação 0.2.8. Independentemente do que será discutido nos próximos capítulos a cerca das chamadas *indeterminações*, a definição acima obriga que se tenha $0^0 = 1$, o que está de acordo com o fato de que existe uma única função da forma $\emptyset \to \emptyset$. △

Exercício 0.62. Mostre que se $f : X \to Y$ é sobrejetora, então $|Y| \leq |X|$. ■

Exercício 0.63. Pense rápido: se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função sobrejetora, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}[\{n\}]$ é finito? ■

Exercício 0.64. Seja $f : X \to Y$ uma função.

a) Mostre que $|\operatorname{im}(f)| \leq |X|$.

b) Mostre que $\mathcal{P} := \{f^{-1}[\{y\}] : y \in \operatorname{im}(f)\}$ é uma partição de X. ■

Exercício 0.65. Seja $f : X \to Y$ uma função, com Y enumerável e X não-enumerável. Mostre que existe $y \in Y$ tal que $X' := \{x \in X : f(x) = y\}$ é não-enumerável. ■

Exercício 0.66. Seja $\psi : X \to Y$ uma função bijetora. Mostre que se $\mathcal{P}$ é uma partição de X, então $\psi(\mathcal{P}) := \{\psi[P] : P \in \mathcal{P}\}$ é uma partição de Y. Em particular, tem-se $|\mathcal{P}| = |\psi(\mathcal{P})|$. ■

Exercício 0.67. Seja X um conjunto infinito enumerável. Chame por $\mathcal{F}_X$ a família de todos os subconjuntos **finitos** de X, i.e., $\mathcal{F}_X := \{F \subseteq X : F \text{ é finito}\}$. Mostre que $|\mathcal{F}_X| = |X|$. Dica: pode ser útil mostrar, primeiro, que $|\operatorname{seq}(X)| = |X|$. ■

Exercício 0.68. Assuma o seguinte: se X é infinito, então $|X| = |X \times X|$. Com tal suposição, mostre que o resultado do exercício anterior permanece válido para qualquer X infinito (enumerável ou não). ■

Observação 0.2.9. Sempre que for preciso, o leitor tem o direito de assumir a hipótese do exercício anterior, i.e., que $|X| = |X \times X|$ se X for infinito. Tal liberdade se deve ao fato de tal afirmação ser *equivalente* ao Axioma da Escolha. △

Exercício 0.69. Mostre que existe uma partição $\mathcal{P} := \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ com cada P_n infinito. Enuncie e demonstre uma generalização adequada para X infinito qualquer. Dica: considere a função $\pi_0 \colon X \times X \to X$ que faz $\pi(x, y) := x$ para cada par $\langle x, y\rangle \in X \times X$. ■

Observação 0.2.10. A função π_0 acima é frequentemente chamada de **projeção**. O leitor deve estar preparado para mudanças *arbitrárias* de nomes de acordo com o contexto. Analogamente, a função $\pi_1 \colon X \times X \to X$ que faz $\pi_1(x, y) := y$, também é chamada de projeção. Não é difícil perceber que projeções podem ser definidas, mais geralmente, para produtos cartesianos da forma $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. △

Exercício 0.70 (Veja a Observação 0.2.7)**.** Para conjuntos X, Y e Z *quaisquer*, mostre que $\left(|X|^{|Y|}\right)^{|Z|} = |X|^{|Y|\cdot|Z|}$. Dica: exiba uma bijeção entre $(X^Y)^Z$ e $X^{Y\times Z}$. ■

Exercício 0.71. Se você fez o exercício acima apenas para os casos em que X, Y e Z são finitos, volte e faça de novo, para **conjuntos quaisquer**: a hipótese de finitude é irrelevante para a solução do exercício. ■

Observação 0.2.11. De modo geral, só assuma que os conjuntos são finitos quando isso for explicitamente indicado. △

Exercício 0.72. Para X fixado, sejam $\mathrm{Eqv}(X) := \{R \subseteq X \times X : R \text{ é rel. de equivalência}\}$ e $\mathrm{Part}(X) := \{\mathcal{P} \subseteq \wp(X) : \mathcal{P} \text{ é partição de } X\}$. Mostre que as *regras* $R \mapsto X/R$ e $\mathcal{P} \mapsto \sim_{\mathcal{P}}$ definem funções da forma $\mathrm{Eqv}(X) \to \mathrm{Part}(X)$ e $\mathrm{Part}(X) \to \mathrm{Eqv}(X)$, respectivamente, que são inversas uma da outra. ■

Exercício 0.73. Seja $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ uma ordem parcial. Dizemos que um subconjunto $I \subseteq \mathbb{P}$ é um **intervalo** se para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{P}$ valer que $c \in I$ sempre que $a \leq c \leq b$ com $a, b \in I$. Seja então $\mathcal{I}$ uma família não-vazia de intervalos de $\mathbb{P}$. Mostre que $\bigcap \mathcal{I}$ é um intervalo de $\mathbb{P}$. ■

Exercício 0.74. Suponha que você tenha que dar um curso de Análise em que $0 \notin \mathbb{N}$. Como definir, recursivamente, as operações de soma e multiplicação em $\mathbb{N}$? ■

Exercício 0.75. Para um conjunto X qualquer (possivelmente infinito!), exiba uma bijeção entre $\wp(X)$ e $\{0, 1\}^X$. Dica: para um subconjunto $A \subseteq X$, associe uma função “óbvia” da forma $X \to \{0, 1\}$; para facilitar, comece com X finito para daí generalizar. ■

Exercício 0.76. Mostre que $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. Dica: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \wp(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. ■

Capítulo 1

Álgebra e ordem

In real life, I assure you, there is no such thing as algebra.

Frase geralmente atribuída a Fran Lebowitz[0].

Neste capítulo, usaremos os ferramentais discutidos anteriormente a fim de *descrever* a reta real como um objeto simultaneamente *algébrico* e *ordenado*: explicitamente, definiremos a reta como (*um*) *corpo ordenado completo*. Para isso, a primeira seção tratará brevemente da parte *algébrica* de tais objetos (*corpo*), a segunda seção discutirá o significado da *ordenação completa* e, finalmente, a terceira seção mostrará a *razoabilidade* da definição *intencional* da reta. Mais precisamente, veremos que a definição é *honesta*, no sentido de que quaisquer dois corpos ordenados completos são *indistinguíveis*.

1.0 Um nanocurso de Álgebra

Fixado um conjunto X, uma função $*\colon X \times X \to X$ é chamada de **operação binária** em X. Porém, como não trataremos explicitamente de outras *aridades*, não há risco em chamar $*$ simplesmente de operação. Para $x, y \in X$, costuma-se escrever $x * y$ em vez de $*(x, y)$, em alusão às notações já bem estabelecidas para *adição* e *multiplicação*.

Naturalmente, a definição da operação $*$ determina o que é $x * y$ em X. Independentemente disso, como $x * y \in X$, é legítimo operar tal elemento com algum $z \in X$, situação em que se escreve $(x * y) * z$. Os parênteses são necessários pois, a princípio, poderia ocorrer $(x * y) * z \neq x * (y * z)$, entre outros comportamentos *indesejados*.

Exemplo 1.0.0. Seja $\star\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a operação dada pela regra $m \star n := m^n$, em que m^n indica a *potência* de m por n, que o leitor já deve conhecer em suas andanças por Aritmética. Observe que $(2 \star 1) \star 2 := (2^1 \star 2) := 2^2 = 4$, enquanto $2 \star (1 \star 2) := 2 \star 1^2 := 2^1 = 2$. Também é fácil ver que, em geral, não vale $m \star n = n \star m$. Finalmente, embora $m \star 1 = m$ ocorra para todo $m \in \mathbb{N}$, não há $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $e \star m = m$. ▲

1.0.0 Um pouco da fauna algébrica

Operações e conjuntos munidos de operações, bem como elementos desses conjuntos, recebem terminologias especiais a depender de condições adicionais satisfeitas por eles. Embora os protagonistas desta seção sejam objetos chamados de *corpos*, convém definir certos tipos de *estruturas* que compõem a definição principal.

[0] Na vida real, eu te garanto, não existe essa tal de Álgebra (tradução livre).

Definição 1.0.1. Seja $*\colon X \times X \to X$ uma operação num conjunto X.

(i) Diremos que a operação $*$ é **associativa** se para quaisquer $x, y, z \in X$ ocorrer $(x * y) * z = x * (y * z)$, o que na prática significa que pode-se escrever $x * y * z$ em vez de $(x * y) * z$ ou $x * (y * z)$.

(ii) Diremos que a operação $*$ é **comutativa** se para quaisquer $x, y \in X$ valer a identidade $x * y = y * x$.

(iii) Diremos que $e \in X$ é **elemento neutro**[1] da operação $*$ se para qualquer $x \in X$ ocorrer $e * x = x = x * e$. ¶

Como muitos leitores já devem saber, um elemento neutro de uma operação $*$, caso exista, é único, o que permite o uso da expressão "o elemento neutro" da operação. Para aquecer os motores, convém destacar isso.

Lema 1.0.2. *Uma operação admite, no máximo, um único elemento neutro.*

Demonstração. Se $e, e' \in X$ são ambos elementos neutros da operação, então $e = e * e'$ por e' ser elemento neutro, enquanto $e * e' = e'$ por e ser elemento neutro. $\square$

Definição 1.0.3. Diremos que $y \in X$ é um **$*$-inverso à direita** de x se valer $x * y = e$. Analogamente, y será dito um **$*$-inverso à esquerda** de x se ocorrer $y * x = e$. Se y for simultaneamente $*$-inverso à direita e à esquerda de x, diremos simplesmente que y é um **$*$-inverso**[2] de x. ¶

Observação 1.0.4. Naturalmente, o *prefixo* "$*$-" nas definições acima será abandonado sempre que o contexto permitir. △

Dito isso, se $*$ for uma operação associativa dotada de um elemento neutro e, então um $*$-inverso de x, caso exista, é único.

Lema 1.0.5. *Sejam X um conjunto e $*$ uma operação em X. Se $*$ é associativa e tem elemento neutro, então cada $x \in X$ admite, no máximo, um $*$-inverso.*

Demonstração. Sejam $y, y' \in X$ $*$-inversos de x. Então

$$y = y * e = y * (x * y') = (y * x) * y' = e * y' = y',$$

pois y' é $*$-inverso (à esquerda) de x e y é $*$inverso (à direita) de x. $\square$

Colecionadores de terminologias já podem acrescentar diversas figurinhas ao álbum:

- um **semigrupo** é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa;
- um **monóide** é um semigrupo com elemento neutro;
- um **grupo** é um monóide em que todo elemento tem um inverso;
- finalmente, um **grupo abeliano** é um grupo cuja operação é comutativa.

[1] Também chamado de **zero** ou **unidade** a depender do contexto.

[2] Ou oposto, simétrico, etc. Tudo depende do contexto.

Frequentemente, quando se busca algum tipo de precisão linguística exagerada, escreve-se algo como $\langle G; *\rangle$ para indicar que $*$ é uma operação em G, de modo que afirmações do tipo "$\langle G; *\rangle$ *é um semigrupo*" abreviam a tediosa frase "$*\colon G \times G \to G$ é uma operação que faz de G um semigrupo". Além disso, é lícito escrever $\langle G; *; e\rangle$ para destacar, caso exista, o elemento neutro $e \in G$ da operação. Na maior parte dos casos, porém, diremos apenas coisas como "G é um monóide" ou "G é um grupo abeliano", pois o tempo é curto e o contexto, quase sempre, é claro.

Exemplo 1.0.6 (Grupos simétricos)**.** Fixado um conjunto Z, pode-se considerar a família Z^Z de todas as funções da forma $Z \to Z$. Como a composição de duas funções em Z^Z resulta numa função em Z^Z, segue que a composição $\circ$ define uma operação em Z^Z. A associatividade de $\circ$, então, traduz a afirmação "Z^Z é um semigrupo", enquanto a função identidade Id_Z promove tal objeto ao patamar de monóide: na terminologia pomposa estabelecida acima, $\left\langle Z^Z; \circ; \mathrm{Id}_Z\right\rangle$ é um monóide. Não se pode afirmar, porém, que Z^Z seja um grupo com tal operação, já que as únicas funções de $Z \to Z$ que admitem inversas são (precisamente) as bijeções.

Dessa observação, segue que $\mathbb{S}(Z) := \left\{f \in Z^Z : f \text{ é bijeção}\right\}$ é um grupo (com a operação $\circ$), chamado de **grupo simétrico** de $|Z|$ elementos. ▲

Exemplo 1.0.7. As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ constituem exemplos elementares das estruturas definidas acima, embora isso não tenha sido sempre óbvio[3].

- ✓ $\langle \mathbb{N}; +; 0\rangle$ é um monóide comutativo, mas não é um grupo: não há, por exemplo, $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n + 1 = 0$.
- ✓ $\langle \mathbb{Z}; +; 0\rangle$ e $\langle \mathbb{Q}; +; 0\rangle$ são grupos abelianos.
- ✓ $\langle \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \cdot; 1\rangle$ é um monóide comutativo, mas não é um grupo.
- ✓ $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot; 1\rangle$ é um grupo abeliano.

Naturalmente, tais proposições só podem ser justificadas rigorosamente num cenário em que se tenha uma *construção* ou, pelo menos, uma definição explícita dos conjuntos e operações envolvidos. O leitor interessado pode conferir o Exemplo 0.1.38. ▲

Observação 1.0.8 (Contexto e notação)**.** Praticamente todas as operações elementares consideradas ao longo do texto serão comutativas – a exceção mais marcante é a composição de funções, que em geral não será considerada do ponto de vista estrutural. Apesar disso, no contexto que se aproxima, teremos que lidar com duas operações simultaneamente, que serão denotadas pelos símbolos $+$ e $\cdot$.

Em ambos os casos, as operações serão associativas, comutativas e dotadas de elemento neutro. No caso da operação $+$, o elemento neutro será denotado por 0, e o inverso de um elemento x, único em virtude do Lema 1.0.5, será denotado por $-x$ e chamado de **inverso aditivo** ou **simétrico**. Para a operação $\cdot$, o elemento neutro será denotado por 1, e o inverso de um elemento x, se existir, será denotado por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$, caso em que x será dito **invertível**[4]. △

[3] Historicamente, grupos de permutações foram os primeiros a dar as caras, entre as últimas décadas do século XVIII e as primeiras décadas do século XIX. Depois do aparecimento dessas estruturas, *percebeu-se* que entidades cotidianas compostas *números* também constituíam *modelos* de grupos [13].

[4] O verbo é "inverter" e não "inverser".

Proposição 1.0.9. *Sejam* $\langle G; \cdot; 1\rangle$ *um monóide e* $x \in G$. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *defina* $x^n \in G$ *recursivamente, fazendo* $x^0 := 1$ *e* $x^{n+1} := x^n \cdot x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* x *admitir inverso, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *com* $n > 0$ *defina ainda* $x^{-n} := (x^{-1})^n$. *Então, vale o seguinte:*

(*i*) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$;

(*ii*) $x^{mn} = (x^m)^n$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$;

(*iii*) *se* x *admite inverso, então as identidades anteriores valem para* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. O argumento é indutivo e depende das *estruturas* de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Por exemplo: para $m \in \mathbb{N}$ fixado, tem-se:

✓ $x^{m+0} = x^m = x^m \cdot 1 = x^m \cdot x^0$;

✓ se $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então

$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} := x^{(m+n)} \cdot x = (x^m \cdot x^n) \cdot x = x^m \cdot (x^n \cdot x) := x^m \cdot x^{n+1},$$

donde a validade do primeiro item segue por indução.

Para o segundo item, o pulo do gato é notar que

$$x^{m(n+1)} = x^{mn+m} = x^{mn} \cdot x^m = (x^m)^n \cdot x^m := (x^m)^{n+1}.$$

A parte final segue, dentre outras coisas, de se observar que $x^{-n} = (x^n)^{-1}$. O leitor interessado pode cuidar dos detalhes. □

Exercício 1.0. Complete a demonstração da proposição anterior. Dica: além do que já foi mencionado, pode ser útil observar que $x^{n+1} = x \cdot x^n$. ■

Observação 1.0.10. Será cada vez mais comum utilizar o mesmo símbolo com significados que variam de acordo com o contexto. Na proposição anterior, por exemplo, o símbolo "1" em "$\langle G; \cdot; 1\rangle$" denota o elemento neutro da operação "$\cdot$" de G. Já em "$x^{n+1} := x^n \cdot x$", o expoente "$n + 1$" indica o sucessor de n em $\mathbb{N}$. Esta é a chamada *notação multiplicativa*, em que o *histórico* das iterações é registrado no expoente.

Alternativamente, quando a operação de G é denotada com o símbolo "+", seu elemento neutro é indicado por "0" (caso exista), enquanto o *histórico das iterações* é registrado à esquerda, como explicitado no próximo corolário – esta é a chamada *notação aditiva*. Note que, a seguir, o símbolo "0" em "$0x := 0$" também assume *dupla função*. △

Corolário 1.0.11. *Sejam* $\langle G; +; 0\rangle$ *um grupo e* $x \in G$. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *defina* $nx \in G$ *recursivamente, fazendo* $0x := 0$ *e* $(n + 1)x := nx + x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.*Além disso, defina* $(-n)x := n(-x)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Então para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$ *valem as identidades* $(m + n)x = mx + nx$ *e* $m(nx) = (mn)x$.

Definição 1.0.12. Um **anel** consiste de um conjunto $A \neq \emptyset$ munido de duas operações, $+$ e $\cdot$, e elementos $0, 1 \in A$, onde

(i) $\langle A; +; 0\rangle$ é um grupo abeliano, cuja operação $+$ é chamada de *adição*,

(ii) $\langle A; \cdot; 1\rangle$ é um monóide comutativo, cuja operação é chamada de *multiplicação*, e

(iii) as operações $+$ e $\cdot$ *comutam* entre si, i.e., para quaisquer $a, b, c \in A$ valem as identidades $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$. ¶

É comum denotar o anel A como a *estrutura algébrica* $\langle A; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$. No entanto, quase sempre iremos nos referir simplesmente *ao anel* A, deixando as operações subentendidas no contexto.

Observação 1.0.13. A rigor, os anéis definidos acima deveriam ser chamados de *anéis comutativos com unidade*, dado que existem contextos que não exigem a comutatividade da multiplicação e tampouco a existência de elemento neutro (a unidade). △

Exemplo 1.0.14. Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são anéis quando munidos das operações usuais, enquanto $\mathbb{N}$ não é anel, posto que a adição não define uma estrutura de grupo. ▲

Exercício 1.1 (Opcional: um anel não-numérico)**.** Seja X um conjunto.

a) Mostre que $\langle\wp(X); \cup; \emptyset\rangle$ e $\langle\wp(X); \cap; X\rangle$ são monoides comutativos.

b) Responda rápido: $\langle\wp(X); \cup, \cap; \emptyset, X\rangle$ é um anel?

c) Mostre que $\langle\wp(X); \Delta, \cap; \emptyset, X\rangle$ é um anel, onde Δ é a operação que a cada par de subconjuntos $A, B \subseteq X$ associa o conjunto
$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$
chamado de **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B.

d) Quem é o oposto aditivo (i.e., Δ-inverso) de $A \in \wp(X)$ no último anel? ■

Exemplo 1.0.15. Se X é um conjunto e A é um anel, então o conjunto A^X das funções da forma $X \to A$ tem uma estrutura natural de anel com as operações herdadas de A em cada coordenada. Mais precisamente, para $f, g \in A^X$, definem-se $f + g, f \cdot g \in A^X$ por
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$
para cada $x \in X$. ▲

Muitas propriedades operatórias com as quais estamos acostumados no cenário aritmético ainda são válidas no contexto de anéis[5].

Proposição 1.0.16. *Sejam A um anel e $a \in A$ um elemento qualquer. Então valem as seguintes identidades:*

(*i*) $0 \cdot a = 0$;

(*ii*) $-a = (-1) \cdot a$.

Demonstração. Tais identidades relacionando as operações $+$ e $\cdot$ decorrem diretamente da distributividade exigida na definição de anel. De fato,
$$a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = (a\cdot 0)+(a\cdot 0) \Rightarrow 0 = (a\cdot 0)+(-(a\cdot 0)) = (a\cdot 0)+(a\cdot 0)+(-(a\cdot 0)) = a\cdot 0,$$
ao passo que
$$a + ((-1) \cdot a) = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0,$$
donde a igualdade $(-1) \cdot a = -a$ segue da unicidade do *oposto aditivo* de a. □

[5]E aqui cabe uma ressalva, possivelmente óbvia para alguns leitores, mas que ainda assim merece ser feita. O comportamento que se observa nos números do "dia a dia" não é decorrências dos axiomas utilizados para *formalizá-los*, pelo contrário: os axiomas postulados para formalizar os números são "bons" justamente por reproduzirem os *comportamentos* observados.

Observação 1.0.17. Em particular, como o inverso de $-a$ é a, segue que

$$(-1)\cdot(-a) = -(-a) = a,$$

identidade que será utilizada daqui em diante sem menções especiais. △

Ao longo do texto, usaremos simultaneamente a Proposição 1.0.9 e o Corolário 1.0.11: a primeira com respeito à multiplicação do anel, e o segundo com respeito à adição do anel. Assim, se A é um anel, $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$, então ma^n indica o que, intuitivamente, seria escrito como

$$\underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ vezes}}+\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ vezes}}+\ldots+\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ vezes}}}_{m\text{ vezes}},$$

com uma interpretação análoga para $m \in \mathbb{Z}$ e, se a for invertível, para $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.0.18. Daqui em diante, como de costume, "ab" também será usado para denotar "$a \cdot b$", o produto entre a e b num anel A. Como o tempo é curto, "$a - b$" abreviará a expressão "$a + (-b)$". △

Definição 1.0.19. Um anel A é chamado de **corpo** se $1 \neq 0$ e todo $a \in A \setminus \{0\}$ é invertível, i.e, se existir $b \in A \setminus \{0\}$ com $ab = 1$. ¶

Exemplo 1.0.20. O primeiro corpo com o qual nos deparamos *explicitamente* é $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais com suas operações usuais. A reta real $\mathbb{R}$, protagonista deste livro, também é um corpo. Estes não são os únicos corpos que existem: a Álgebra Comutativa é repleta de tais entidades. Porém, em contextos *introdutórios* de Análise, não costuma ser importante saber disso[6]. ▲

Há uma vastidão de classes de estruturas algébricas que habitam entre anéis e corpos. Uma dessas classes é composta pelos **domínios**: anéis *não-triviais*, i.e., em que $1 \neq 0$, e para os quais uma identidade do tipo $xy = 0$ só é possível com $x = 0$ ou $y = 0$. A terminologia algébrica costuma chamar de **divisor de zero** num anel qualquer elemento $x \neq 0$ para o qual exista $y \neq 0$ com $xy = 0$. Assim, domínios são anéis sem divisores de zero[7].

Em outras palavras, domínios são anéis não-triviais nos quais vale a *lei do cancelamento* para multiplicação: se D é um domínio e $x, y, z \in D$, com $x \neq 0$, então $xy = xz$ se, e somente se, $y = x$, o que segue pois a identidade $xy = xz$ é equivalente à identidade $x(y - z) = 0$. O fato de tal *lei* ser válida em corpos é então decorrência da simples

Proposição 1.0.21. *Se K é um corpo, então K é domínio.*

Demonstração. Se $x, y \in K$ com $xy = 0$ e $x \neq 0$, então $y = x^{-1}xy = x^{-1}0 = 0$. □

A recíproca, porém é falsa, e $\mathbb{Z}$ é o exemplo *perfeito*: dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq 2$, tem-se a desigualdade $mn > n$, e daí é fácil concluir que os únicos elementos de $\mathbb{Z}$ que admitem inversos multiplicativos são 1 e -1.

[6] O leitor iniciante não deve se enganar: a Análise é intrinsecamente dependente da Álgebra, embora a recíproca seja falsa – exceto pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*, que ainda é importante em *algumas áreas* da Álgebra, mas está longe de ser ao menos relevante em *todas as áreas* da Álgebra.

[7] Seria uma imbecilidade incluir no escopo de tal terminologia o caso em que $x = 0$, posto que $0 \cdot a = 0$ para qualquer elemento a de um anel.

Observação 1.0.22. Antes de encerrar esta subseção, cabe uma ressalva acerca da divisibilidade por zero, cuja *polêmica* só se justifica pela falta de discussão: não há lei universal ou *mandamento* vindo das colinas que proíba dividir por zero em absolutamente qualquer contexto – o ponto é que fazer isso em anéis é, na prática, inútil.

De fato, uma identidade do tipo $\frac{\alpha}{0} = \beta$ num anel A depende, implicitamente, de se admitir a existência de $z \coloneqq \frac{1}{0} \in A$, i.e., um elemento $z \in A$ que satisfaz $0 \cdot z = 1$. Ora, como também deve ocorrer $0 \cdot z = 0$, resulta que $0 = 1$ e, consequentemente, $0 \cdot x = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in A$, ou seja, $A = \{0\}$.

Algebricamente isto não é crime: um conjunto dotado de um único elemento admite tanto uma adição quanto uma multiplicação que o tornam um anel. O *problema* é que ao se modelar axiomaticamente os números naturais, inteiros, etc., *espera-se* que ocorra $0 \neq 1$ (vide o Lema 1.1.2), situação em que dividir por zero se torna inviável.

Essa é uma das razões pelas quais identidades do tipo

$$\frac{1}{0} = +\infty$$

nem chegam a fazer sentido (*Not even wrong*), embora sirvam como mantra. No próximo capítulo, veremos com calma o que alguém poderia querer expressar com uma identidade dessas. △

1.0.1 Como anéis conversam entre si?

Resta somente um conceito, tipicamente algébrico, que será bastante útil neste capítulo: a noção de *morfismos*.

Definição 1.0.23. Dados anéis A e B, uma função $f : A \to B$ é chamada de **morfismo** *de anéis* (ou *de corpos* quando ambos forem corpos) se

(i) $f(1_A) = 1_B$,

(ii) $f(a + a') = f(a) + f(a')$, e

(iii) $f(aa') = f(a)f(a')$. ¶

Observação 1.0.24. Acima, por preciosismo, os elementos neutros multiplicativos de A e B foram distinguidos como 1_A e 1_B, respectivamente. Porém, ainda mais precisão poderia ser dada às notações: note que em "$f(a + a') = f(a) + f(a')$", por exemplo o símbolo "+" em "$a + a$" indica a adição do anel A, enquanto o mesmo símbolo em "$f(a) + f(a')$" indica a adição em B. Analogamente, a ausência de símbolos operacionais na última cláusula indica as multiplicações em A e B, respectivamente. △

Em certo sentido, um morfismo de anéis $f : A \to B$ permite que A *manifeste* informações de natureza algébrica em B por meio de f. Por exemplo, se $a \in A$ é tal que $a^2 = 1$ em A, então o mesmo deve ocorrer com $f(a)$ em B, i.e., $f(a)^2 = 1_B$: de fato, deve-se ter

$$1_B = f(1_A) = f(a^2) = f(a)f(a) = f(a)^2.$$

No presente contexto, um tipo muito particular de morfismo de anéis será fundamental:

Proposição 1.0.25. *Para todo anel A existe um único morfismo de anéis $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$.*

Demonstração. Fazendo $\langle G; +; 0\rangle := \langle A; +; 0_A\rangle$ e $x := 1_A$ no Corolário 1.0.11, segue que a função $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ que faz $\zeta_A(n) := n \cdot 1_A$ e $\zeta(-n) := -(n \cdot 1_A)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é um morfismo de anéis. O leitor não deve ter dificuldades para verificar, por indução, que qualquer *outro* morfismo $\psi : \mathbb{Z} \to A$ deve ser tal que $\psi = \zeta_A$. □

Exercício 1.2. Complete a demonstração acima. Dica: deve-se ter $\psi(1) = 1_A = \zeta_A(1)$, $\psi(1 + 1) = 1_A + 1_A = \zeta_A(2)$, ... ■

Definição 1.0.26. Ao longo deste capítulo, fixados um anel A e um número inteiro $z \in \mathbb{Z}$, a notação z_A indicará a imagem de z pelo morfismo ζ_A da última proposição, a **interpretação** de z em A. ¶

Exercício 1.3. Mostre que para $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$, o elemento $za \in A$ (como definido no Corolário 1.0.11) é tal que $za = z_A a$. Conclua que para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in \mathbb{Z}$ deve-se ter $m(a + b) = ma + mb$. ■

Exemplo 1.0.27. No Exercício 1.1, o anel $A := \wp(X)$ tem como elementos neutros $0_A := \emptyset$ e $1_A := X$. Para tal anel, o morfismo $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ da proposição anterior faz

✓ $\zeta_A(0) = \emptyset$;

✓ $\zeta_A(1) = \emptyset \,\Delta\, X = X$;

✓ $\zeta_A(2) = X \,\Delta X = \emptyset$;

✓ $\zeta_A(3) = \emptyset \,\Delta\, X = X$...

Mais geralmente, $\chi_A(2z) = 0_A$ e $\chi_A(2z + 1) = 1_A$ para qualquer $z \in \mathbb{Z}$. Moralmente, as regras recursivas que definem $\mathbb{Z}$, quando realizadas com a unidade de A, resultam num conjunto que tem apenas dois elementos. ▲

Exemplo 1.0.28. Para $A := \mathbb{Q}$, o morfismo $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ é, meramente, a inclusão. ▲

Exemplo 1.0.29 (Matrizes)**.** O leitor familiarizado com *matrizes* não deve ter dificuldades para notar que se A denota o *anel das matrizes de ordem* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ associa cada inteiro $z \in \mathbb{Z}$ à matriz diagonal $(z\delta_{ij})$. ▲

Exercício 1.4. Seja $f : A \to B$ um morfismo de anéis.

a) Mostre que $f(0_A) = 0_B$.

b) Mostre que $f(ma) = mf(a)$ para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$.

c) Mostre que $f(-a) = -f(a)$ para qualquer $a \in A$.

d) Mostre que $f(a^m) = f(a)^m$ para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $a \in A$. ■

Os últimos comentários, frequentemente úteis, seguem destacados nos próximos exercícios.

Exercício 1.5. Dado um anel A, mostre que $\mathrm{Id}_A : A \to A$ é um morfismo de anéis. ■

Exercício 1.6. Mostre que a composição de morfismos de anéis é um morfismo de anéis. ■

Exercício 1.7 (Núcleo e injetividade)**.** Para um morfismo de anéis $f : A \to B$, chama-se de **núcleo** de f ao conjunto $\ker f := \{a \in A : f(a) = 0_B\}$.

a) Mostre que f é injetora se, e somente se, seu núcleo é *trivial*, i.e., se $\ker f = \{0_A\}$.

b) Mostre que se A e B são corpos, então f é injetora. ■

1.1 Corpos ordenados

Recordemo-nos de que uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ consiste de um conjunto $\mathbb{P}$ munido de uma relação binária $\leq$ reflexiva, antissimétrica e transitiva; se, adicionalmente, valer a *tricotomia*, diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma ordem total[8].

Definição 1.1.0. Um corpo $\mathbb{K}$ munido de uma relação de ordem total $\leq$ é chamado de **corpo ordenado** se $\leq$ for compatível com sua estrutura algébrica, i.e.,

(CO$_{\text{i}}$) $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$,

(CO$_{\text{ii}}$) $\forall a, b \in \mathbb{K} \quad a > 0_{\mathbb{K}}$ e $b > 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow ab > 0_{\mathbb{K}}$. ¶

Exercício 1.8 (Caracterização alternativa – cones)**.** Mostre que $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado se, e somente se, existir um subconjunto $P \subseteq \mathbb{K}$ com $x + y, xy \in P$ sempre que $x, y \in P$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{K}$, ocorra um, e somente um, dos seguintes casos: $x = 0_{\mathbb{K}}$, $x \in P$ ou $-x \in P$. Dica: faça $P := \{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\}$. ■

Exemplo 1.1.1. O corpo dos números racionais é ordenado por sua ordem usual. ▲

Lema 1.1.2 (Fundamental)**.** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, então $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração. O contrário daria $0_{\mathbb{K}} > 1_{\mathbb{K}}$, posto que a ordem é total e $\mathbb{K}$ é corpo. Logo, a condição (CO$_{\text{i}}$), com $c := -1_{\mathbb{K}}$, acarretaria $-1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ e, consequentemente, teria-se $0_{\mathbb{K}} > 1_{\mathbb{K}} = (-1_{\mathbb{K}})(-1_{\mathbb{K}}) > 0_{\mathbb{K}}$ em virtude da condição (CO$_{\text{ii}}$), uma contradição. □

Teorema 1.1.3. *Se $\mathbb{K}$ é corpo ordenado, então existe um único morfismo injetor de anéis $\rho \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$.*

Demonstração. Observe que o lema anterior garante que $n_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

✓ como $\mathbb{K}$ é corpo, tem-se $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$;

✓ supondo $n_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ para algum $n \geq 1$, tem-se $(n+1)_{\mathbb{K}} := n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, onde a última desigualdade decorre da condição (CO$_{\text{i}}$).

Logo, $z_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ para todo $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Agora, se $\sigma \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ for *um* morfismo de anéis, então $\sigma|_{\mathbb{Z}} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ também é um morfismo de anéis, donde a Proposição 1.0.25 obriga que se tenha $\sigma(z) = z_{\mathbb{K}}$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, da identidade

$$\sigma\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a}\right) = \sigma(a) \cdot \sigma\left(\frac{1}{a}\right),$$

não é difícil concluir que $\sigma\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\sigma(a)}$ para todo $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e, por conseguinte,

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} := \left(\frac{m}{n}\right)_{\mathbb{K}}$$

deve valer para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Portanto, tudo se resume a observar que a regra acima define, de fato, um morfismo de anéis da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, que será injetor por ter núcleo trivial. □

Exercício 1.9. Complete os detalhes da demonstração acima. Onde a hipótese de $\mathbb{K}$ ser ordenado é importante? ■

[8] Definições 0.0.31 e 0.0.36.

Observação 1.1.4. Moralmente, o elemento $q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ descrito recursivamente na demonstração anterior *representa* ou *interpreta* o número racional $q \in \mathbb{Q}$. Para leitores avessos à definição de morfismo, pode-se pensar em $\mathbb{K}$ como um *ambiente virtual* no qual é possível *implementar* os números racionais: nesse sentido, a demonstração apenas descreve e justifica o algoritmo de implementação. Indicaremos por $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ o subcorpo de $\mathbb{K}$ isomorfo a $\mathbb{Q}$, i.e., $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} := \{q_{\mathbb{K}} : q \in \mathbb{Q}\}$. △

Exercício 1.10 (Opcional)**.** Mostre que se K é um corpo finito, então não existe ordem total $\leq$ sobre K segundo a qual $\langle K, \leq\rangle$ seja um corpo ordenado. ■

Muitas propriedades operatórias corriqueiras dos números reais são, na verdade, comuns a qualquer corpo ordenado. As mais *úteis* seguem listadas na próxima

Proposição 1.1.5. *Sejam $\langle \mathbb{K}, \leq\rangle$ um corpo ordenado e $x, y, z \in \mathbb{K}$ elementos quaisquer. Então:*

(*i*) *$x > 0_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $-x < 0_{\mathbb{K}}$;*

(*ii*) *se $x > 0_{\mathbb{K}}$ e $y < z$, então $xy < xz$;*

(*iii*) *se $x < 0_{\mathbb{K}}$ e $y < z$, então $xy > xz$;*

(*iv*) *$x > 0_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $x^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$;*

(*v*) *se $x \neq 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > 0_{\mathbb{K}}$;*

(*vi*) *se $0_{\mathbb{K}} < x < y$, então $0_{\mathbb{K}} < y^{-1} < x^{-1}$.*

Demonstração. Se $x > 0_{\mathbb{K}}$, então $0_{\mathbb{K}} = x - x > 0_{\mathbb{K}} - x = -x$ por conta da condição (CO_i), i.e., $-x < 0_{\mathbb{K}}$. Analogamente mostra-se a recíproca. Os itens (ii) e (iii) seguem de (CO_{ii}) ao se observar que $y < z$ equivale a $y - z < 0_{\mathbb{K}}$. Para o item (iv), note que se $x > 0_{\mathbb{K}}$ e $x^{-1} < 0_{\mathbb{K}}$, então pelo item anterior resultaria $-1_{\mathbb{K}} = (-x)x^{-1} > -x0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, contrariando o fato de que $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$; a recíproca é automática, posto que $(x^{-1})^{-1} = x$. O quinto item também segue da condição (CO_{ii}) para $x > 0_{\mathbb{K}}$; para $x < 0_{\mathbb{K}}$, o mesmo raciocínio dá $(-x)^2 > 0_{\mathbb{K}}$, enquanto $(-x)^2 = (-1_{\mathbb{K}})^2x^2 = x^2$. O último é o mais divertido e, por tal razão, será deixado para o leitor. □

Exercício 1.11. Complete a demonstração anterior. Dica: para o item (vi), note que $x^{-1}y^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$; daí, use a condição ($CO_{ii}$). ■

Exercício 1.12. Nas condições anteriores, mostre que se $a < c$ e $b < d$ para certos $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, então $a + b < c + d$. ■

Exercício 1.13. Mostre que para quaisquer $p, q \in \mathbb{Q}$ vale a implicação

$$p < q \Rightarrow p_{\mathbb{K}} < q_{\mathbb{K}}.$$

Usando fato de que as ordens de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{K}$ são totais, conclua que vale a recíproca. Dica: use o Exercício 0.54 com a função $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$. ■

Definição 1.1.6. Dados corpos ordenados $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$, diremos que uma função $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ é um **morfismo de corpos ordenados** se f for simultaneamente um morfismo de corpos e uma função crescente[9]. ¶

[9]Como definido no Exercício 0.54.

Exemplo 1.1.7 (Complexos)**.** O leitor familiarizado com *números complexos* pode se perguntar se existe uma ordem total $\leq$ sobre $\mathbb{C}$ que torne $\langle \mathbb{C}, \leq \rangle$ um corpo ordenado. A resposta é não: releia o enunciado da última proposição até perceber o problema que ocorre com $\mathbb{C}$ ou, mais geralmente, em qualquer anel que admita *raiz* para o polinômio $x^2 + 1$. ▲

Definição 1.1.8. Seja $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ um corpo ordenado. O **valor absoluto** em $\mathbb{K}$ é a função $|\cdot|_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que associa cada $x \in \mathbb{K}$ ao elemento $|x|_{\mathbb{K}} := \max\{x, -x\}$. ¶

O valor absoluto constitui uma *maneira uniforme* de "medir" elementos de $\mathbb{K}$, por meio da *comparação* com os habitantes de seu **cone positivo**, i.e., do subconjunto $\mathbb{K}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{K} : x \geq 0_{\mathbb{K}}\}$, posto que $|x|_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Essa "*maneira uniforme*" se refere, entre outras coisas, ao fato de que o valor absoluto é compatível tanto com a estrutura algébrica quanto com a ordem de $\mathbb{K}$, no seguinte sentido.

Proposição 1.1.9. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x, y \in \mathbb{K}$. Então:*

(i) $|x|_{\mathbb{K}} \geq 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) $|x|_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $x = 0_{\mathbb{K}}$;

(iii) $|xy|_{\mathbb{K}} = |x|_{\mathbb{K}}|y|_{\mathbb{K}}$;

(iv) $|x + y|_{\mathbb{K}} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$.

Exercício 1.14. Prove a proposição acima. ■

A desigualdade (iv) acima, chamada de **desigualdade triangular**, será extremamente recorrente no texto. Por tal motivo, convém demonstrá-la aqui[10]: como $-x \leq |x|_{\mathbb{K}}$ e $-y \leq |y|_{\mathbb{K}}$, tem-se $-(x + y) \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$; como também ocorre $x + y \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$, conclui-se que $|x + y|_{\mathbb{K}} := \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$.

Exercício 1.15. Para $x, y \in \mathbb{K}$, com $\mathbb{K}$ corpo ordenado, mostre que são equivalentes:

(i) $-y \leq x \leq y$;

(ii) $x \leq y$ e $-x \leq y$;

(iii) $|x|_{\mathbb{K}} \leq y$.

Conclua que $|x - y| \leq z$ se, e somente se, $y - z \leq x \leq y + z$. ■

A relação de ordem em $\mathbb{K}$ pode ser estendida, em certo sentido, para funções da forma $X \to \mathbb{K}$, onde X é um conjunto qualquer.

Definição 1.1.10. Fixados um conjunto X, para funções $f, g \in \mathbb{K}^X$, escreveremos $f \leq g$ a fim de indicar a ocorrência de $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. ¶

Exercício 1.16. Mostre que $\langle \mathbb{K}^X, \leq \rangle$ é uma ordem parcial. A ordem é total? ■

As considerações feitas no Exemplo 1.0.15 já denunciam que o conjunto $\mathbb{K}^X$ é digno de ser chamado de anel. Porém, além de multiplicar funções umas com as outras, é possível multiplicá-las por *escalares*, i.e., elementos de $\mathbb{K}$: para $k \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathbb{K}^X$, faz-se

$$\begin{aligned} kf \colon X &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto k \cdot f(x) \end{aligned}$$

o que nada mais é do que fazer $kf := \underline{k} \cdot f$, onde $\underline{k} \colon X \to \mathbb{K}$ é a **função constante** k, i.e., tal que $\underline{k}(x) := k$ para todo $x \in X$.

[10] O leitor pode comparar com sua própria demonstração.

Definição 1.1.11. Um grupo abeliano $\langle V; +; 0\rangle$ é chamado de $\mathbb{K}$-**espaço vetorial** se existir uma função

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times V &\mapsto V\\ \langle k, v\rangle &\mapsto kv\end{aligned}$$

chamada de *multiplicação* (ou *ação*), satisfazendo as seguintes condições:

(i) $1_{\mathbb{K}} v = v$ para todo $v \in V$;

(ii) $(\alpha + \beta)v = (\alpha v) + (\beta v)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$;

(iii) $k(u + v) = (ku) + (kv)$ para quaisquer $u, v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$. ¶

Em tal contexto, os elementos de V são chamados de *vetores*, enquanto os membros de $\mathbb{K}$ são xingados de *escalares*.

Exercício 1.17. Mostre que $\mathbb{K}^X$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com a multiplicação $\langle k, f\rangle \mapsto kf$ definida anteriormente. ■

Observação 1.1.12. A definição de espaço vetorial, por si só, não depende da hipótese de $\mathbb{K}$ ser corpo ordenado. Em geral, a mesma definição se aplicaria com um anel A fazendo o papel do conjunto de escalares. Porém, em tais situações, em vez de "A-espaço vetorial", xinga-se a coisa de A-*módulo*. Nesse sentido, o leitor não deve ter dificuldades para observar que todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo: a função $\mathbb{Z} \times A \to A$ que faz $\langle z, a\rangle \mapsto za = z_A a$ é quem faz o papel da multiplicação. △

Exercício 1.18. Para $f \in \mathbb{K}^X$, defina $|f|_{\mathbb{K}} := |\cdot|_{\mathbb{K}} \circ f$. Mostre que para quaisquer $f, g \in \mathbb{K}^X$ e $k \in \mathbb{K}$ valem as (des) igualdades a seguir.

a) $|f|_{\mathbb{K}} \geq \underline{0_{\mathbb{K}}}$.

b) $|kf|_{\mathbb{K}} = |k|_{\mathbb{K}} |f|_{\mathbb{K}}$.

c) $|f + g|_{\mathbb{K}} \leq |f|_{\mathbb{K}} + |g|_{\mathbb{K}}$. ■

A partir do próximo capítulo, espaços da forma $\mathbb{K}^X$ serão tão importantes quanto o próprio $\mathbb{K}$, que então será chamado de $\mathbb{R}$. Em particular, para $X := \mathbb{N}$, escreve-se $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ para indicar funções em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, que passam a ser chamadas de **sequências**[11].

1.1.0 Completude e a condição arquimediana

Graficamente, ordens totais abstraem o comportamento de objetos *encadeados* ao longo de uma *corrente* (confira a Observação 0.0.35 bem como a Definição 0.0.35). Por sua vez, corpos ordenados adicionam a possibilidade de operar os elementos da corrente. No entanto, tais condições ainda não capturam a ideia de *continuidade* ou *ausência de buracos* que os nossos sentidos falhos atribuem aos *segmentos de reta*.

Definição 1.1.13. Uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ é dita **completa**[12] se todo subconjunto de $\mathbb{P}$, não-vazio e limitado superiormente admite um supremo[13]. Em particular, $\mathbb{K}$ é **corpo ordenado completo** se sua ordem total for completa no sentido anterior. ¶

[11] O leitor pode preferir chamá-las de *sequências infinitas*, a fim de distingui-las das funções da forma $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$, desde que tenha em mente que a *infinitude* se refere ao domínio e não, necessariamente, à sua imagem. Em todo caso, sequências serão retomadas no próximo capítulo.

[12] Também chamada de *Dedekind completa* ou *Bolzano completa* a depender da referência.

[13] O leitor desconfortável com as terminologias empregadas pode conferir a Subseção 0.0.1.

Proposição 1.1.14 (Aquecimento: caracterização via ínfimos)**.** *Dada uma ordem parcial* $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$*, são equivalentes:*

(i) *todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente admite supremo;*

(ii) *todo subconjunto não-vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.*

Demonstração. Assumindo (i), para um subconjunto não-vazio $B \subseteq \mathbb{P}$ limitado inferiormente, mostraremos que existe $\beta \in \mathbb{P}$ tal que $\beta = \inf B$. Para isso, consideremos o subconjunto $L := \{p \in \mathbb{P} : p \text{ limita } B \text{ inferiormente}\}$. Como $B \neq \emptyset$ é limitado inferiormente, segue que $L \neq \emptyset$ é limitado superiormente (por qualquer elemento de B). Logo, pela hipótese, existe $\beta := \sup L \in \mathbb{P}$, o menor limitante superior de L. Agora, basta observar que β é o maior limitante inferior de B:

✓ como qualquer $b \in B$ limita L superiormente, segue que $\beta \leq b$ para todo $b \in B$;

✓ se $l \leq b$ para todo $b \in B$, então $l \in L$ e, como $\beta = \sup L$, deve-se ter $l \leq \beta$.

Portanto, (i) $\Rightarrow$ (ii). Repetindo a demonstração acima num espelho[14], mostra-se que (ii) $\Rightarrow$ (i). □

Exercício 1.19. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial e $B \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto não-vazio.

a) Mostre que se o conjunto dos limitantes inferiores de B é não-vazio e admite um supremo β, então β é o ínfimo de B. Dica: apenas repita a demonstração anterior.

b) Enuncie e demonstre a versão dual do item anterior. ■

É muito natural perguntar por que a definição de completude de fato captura a noção de continuidade ou ausência de *buracos*, o que evidentemente depende do que se entende por “buraco”.

Definição 1.1.15. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Um **corte** em $\mathbb{K}$ é um par $\langle A, B \rangle$ de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{K}$ tais que

(i) $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{K}$,

(ii) para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$ ocorre $a < b$. ¶

Intuitivamente, os subconjuntos A e B na definição do corte $\langle A, B \rangle$ correspondem aos dois pedaços que se obteriam de $\mathbb{K}$ se este fosse *cortado* num determinado ponto de $\mathbb{K}$. Note que para $p \in \mathbb{K}$, há dois modos *triviais* de cortar $\mathbb{K}$ no ponto p e obter um corte $\langle A, B \rangle$:

✓ $A := \{x \in \mathbb{K} : x \leq p\}$ e $B := \{x \in \mathbb{K} : p < x\}$;

✓ $A := \{x \in \mathbb{K} : x < p\}$ e $B := \{x \in \mathbb{K} : p \leq x\}$.

Convém chamar atenção para o seguinte: no primeiro caso, p é trivialmente o supremo de A, e o exercício anterior garante a igualdade $p = \inf B$; no segundo caso, p é trivialmente o ínfimo de B, e novamente o mesmo exercício acarreta $p = \sup A$ (por quê?!). Porém, isto não significa que todo corte seja dessa forma.

[14]Ou aplicando o mesmo resultado para a ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$ (vide o Exercício 0.56).

Exemplo 1.1.16 (Um corte racional clássico)**.** Fixado um corpo totalmente ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$, os subconjuntos

$$A := \{x \in \mathbb{K} : x < 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } 0_{\mathbb{K}} \leq x^2 < 2_{\mathbb{K}}\} \text{ e } B := \{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}} \text{ e } x^2 \geq 2_{\mathbb{K}}\}$$

determinam um corte $\langle A, B \rangle$ em $\mathbb{K}$.

✓ $A \neq \emptyset$ pois $0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}} \in A$ e $B \neq \emptyset$ pois $2_{\mathbb{K}} \in B$.

✓ A tricotomia da ordem de $\mathbb{K}$ acarreta tanto $A \cap B = \emptyset$ quanto $A \cup B = \mathbb{K}$.

✓ Finalmente, se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$: isto é evidente para $a < 0_{\mathbb{K}}$; se ocorresse $a \geq 0_{\mathbb{K}}$ com $a \geq b$, teria-se $a^2 \geq ab \geq b^2 \geq 2_{\mathbb{K}}$, acarretando em $a \notin A$.

Pergunta-se: tal corte é, necessariamente, induzido por algum $\alpha \in \mathbb{K}$? Como a discussão anterior sugere, isto equivale a perguntar sobre a existência de supremo para A (ou ínfimo para B).

Lema 1.1.17. *Se existir $\alpha \in \mathbb{K}$ com $\alpha = \sup A$, então $\alpha^2 = 2_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração. Com

$$\beta := \alpha - \frac{\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}}}{\alpha + 2_{\mathbb{K}}} = \frac{2_{\mathbb{K}}\alpha + 2_{\mathbb{K}}}{\alpha + 2_{\mathbb{K}}}, \tag{1.0}$$

segue que

$$\beta^2 - 2_{\mathbb{K}} = \frac{2_{\mathbb{K}}(\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}})}{(\alpha + 2_{\mathbb{K}})^2}. \tag{1.1}$$

Note que por valer $1_{\mathbb{K}} \in A$, deve-se ter $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}} \leq \alpha$ e $\beta > 0_{\mathbb{K}}$ (o contrário daria $\alpha \leq -1_{\mathbb{K}}$). Assim, supondo $\alpha^2 \neq 2_{\mathbb{K}}$, restam dois casos.

✗ Se $\alpha^2 < 2_{\mathbb{K}}$, então $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$, donde (1.0) acarreta $\beta > \alpha > 0_{\mathbb{K}}$, ao passo que (1.1) implica em $\beta \in A$, contrariando a hipótese de que α limita A superiormente.

✗ Se $\alpha^2 > 2_{\mathbb{K}}$, então $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, donde (1.0) acarreta $0_{\mathbb{K}} < \beta < \alpha$, ao passo que (1.1) implica em $\beta^2 > 2_{\mathbb{K}}$, i.e., $\beta \in B$ e, portanto, β é limitante superior de A, contrariando a suposição de que α é o menor de tais limitantes superiores.

Portanto, $\alpha^2 = 2_{\mathbb{K}}$ é a única relação possível. □

Uma vez que tal argumento é válido em *qualquer* corpo ordenado, segue que para $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, o corte $\langle A, B \rangle$ acima não é induzido por qualquer $\alpha \in \mathbb{Q}$, posto que não existe número racional q satisfazendo $q^2 = 2$. ▲

Exercício 1.20 (Clássico?)**.** Mostre que não existe $q \in \mathbb{Q}$ com $q^2 = 2$. ■

É no sentido do exemplo acima que se costuma entender a afirmação de que o corpo dos números racionais tem buracos: explicitamente, trata-se da existência de cortes $\langle A, B \rangle$ em $\mathbb{Q}$ para os quais não existem $\sup A$ ou $\inf B$. É justamente esse o tipo de lacuna eliminada pela completude.

Exercício 1.21. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $\langle A, B \rangle$ um corte em $\mathbb{K}$. Mostre que se $\mathbb{K}$ é completo, então A tem máximo ou B tem mínimo. ■

A completude também traz outra consequência fundamental.

Teorema 1.1.18. *Se $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ é um corpo ordenado e completo, então o subconjunto*

$$\mathbb{N}_{\mathbb{K}} := \{n_{\mathbb{K}} : n \in \mathbb{N}\}$$

não é limitado superiormente, i.e., para qualquer $x \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_{\mathbb{K}}$.

Demonstração. Se $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ fosse limitado superiormente, existiria $\alpha := \sup \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$. Como $\alpha - 1_{\mathbb{K}} < \alpha$, a minimalidade de α como limitante superior de $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ acarreta a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1_{\mathbb{K}} < n_{\mathbb{K}}$. Mas daí $\alpha < n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$, uma contradição. □

Definição 1.1.19. Um corpo ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ satisfazendo a tese do teorema acima é chamado de (corpo) **arquimediano**. ¶

Que grande porcaria a propriedade arquimediana, não é mesmo? O conjunto dos naturais é ilimitado?! O que de útil poderia decorrer de uma afirmação tão *trivial*? Resposta:

Proposição 1.1.20. *Dado um corpo ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$, são equivalentes:*

(i) ($\mathbb{K}$ é arquimediano) *$\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{K}$;*

(ii) (ausência de “ilimitados”) *não existe $x \in \mathbb{K}$ com $n_{\mathbb{K}} < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) (ausência de “infinitésimos”) *não existe $x \in \mathbb{K}$ com $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ satisfazendo*

$$|x|_{\mathbb{K}} < \frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(iv) ($\mathbb{Q}$ é “denso” em $\mathbb{K}$) *se $x, y \in \mathbb{K}$ e $x < y$, então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q_{\mathbb{K}} < y$.*

Demonstração. Os três primeiros itens são claramente equivalentes entre si. Agora, supondo que $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ seja arquimediano e $x < y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0_{\mathbb{K}} < (y - x)^{-1} < n_{\mathbb{K}}$, donde segue que

$$y - x > \frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} \Rightarrow n_{\mathbb{K}} y > n_{\mathbb{K}} x + 1_{\mathbb{K}}.$$

Novamente, usando o fato de $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ ser arquimediano, toma-se[15] $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} \leq n_{\mathbb{K}} x < m_{\mathbb{K}},$$

acarretando

$$n_{\mathbb{K}} x < m_{\mathbb{K}} \leq n_{\mathbb{K}} x + 1_{\mathbb{K}} < n_{\mathbb{K}} y \Rightarrow x < \frac{m_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} < y,$$

com $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Logo, vale (iv). Finalmente, supondo (iv) e tomando $x > 0_{\mathbb{K}}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $0_{\mathbb{K}} < q_{\mathbb{K}} < x$. Ora, como $q = \frac{m}{n}$ para certos $m, n \in \mathbb{N}$, resulta

$$\frac{1}{n} < \frac{m}{n},$$

mostrando que vale (iii). □

[15] Para se convencer de que tal m existe, pode ser útil supor $0_{\mathbb{K}} \leq x < y$, pois o caso $x < y \leq 0_{\mathbb{K}}$ segue deste (e $x < 0_{\mathbb{K}} < y$ é trivial).

Exercício 1.22. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo arquimediano e $x, y \in \mathbb{K}$. Mostre que se $x, y > 0_{\mathbb{K}}$, então existe $N \in \mathbb{N}$ com $Nx > y$. ■

Exemplo 1.1.21 (Nem todo corpo arquimediano é completo)**.** A proposição acima estabelece que para um corpo ordenado $\mathbb{K}$ fixado, são as cópias de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{K}$ que codificam a informação necessária para decidir se $\mathbb{K}$ é arquimediano ou não. Em particular, é de se esperar que o próprio corpo ordenado $\mathbb{Q}$ seja arquimediano, o que de fato ocorre: dados $p, q \in \mathbb{Q}$ distintos, não é difícil perceber que $s := p + r$ é tal que $p < s < q$, onde $r = \frac{|p-q|}{2}$. Em particular, por $\mathbb{Q}$ ter subconjuntos não-vazios, limitados superiormente e sem supremo, resulta que a condição arquimediana não garante completude. ▲

1.1.1 O Axioma da Preguiça Infinita

Enquanto a seção anterior estabeleceu os significados dos termos "corpo", "ordenado" e "completo", a atual seção lidará com as tecnicalidades legais envolvidas na escolha de *corpos ordenados completos* como *o* modelo abstrato-formal da reta. A princípio, existem dois pontos fracos que carecem de atenção.

(i) *Existência.* Por que o ambiente formal utilizado, ZFC, permite afirmar que existe pelo menos um corpo ordenado completo?

(ii) *"Unicidade".* A Análise na $\mathbb{R}$eta depende do (*modelo* de) $\mathbb{R}$ escolhido?

O primeiro ponto pode ser resolvido de diversas formas.

✓ *Cortes de Dedekind.* Considera-se a família

$$\mathcal{C} := \{\langle A, B\rangle \in \wp(\mathbb{Q}) \times \wp(\mathbb{Q}) : \langle A, B\rangle \text{ é corte de } \mathbb{Q} \text{ e } A \text{ não tem máximo}\},$$

conjunto que é munido de uma estrutura de corpo ordenado completo – mas não sem dor.

✓ *Sequências de Cauchy racionais.* Considera-se a família

$$\mathcal{S} := \{\langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \text{ é de Cauchy}\},$$

onde "ser de Cauchy" significa, *grosso modo*, que os termos da sequência se tornam arbitrariamente próximos uns dos outros. Daí, com uma relação de equivalência $\sim$ apropriada sobre $\mathcal{S}$, definem-se sobre $\mathcal{S}/\sim$ operações de adição e multiplicação, bem como uma ordem, que fazem de $\mathcal{S}/\sim$ um corpo ordenado completo.

✓ *Completamento uniforme.* Apela-se para a *teoria de espaços uniformes* e seus teoremas de *completamento*, que englobam tipos de estruturas chamadas de *grupos topológicos*, reino em que habita o grupo aditivo $\langle\mathbb{Q}; +; 0\rangle$. Em tal cenário, mostra-se que o completamento uniforme de $\mathbb{Q}$ pode ser promovido ao patamar de corpo ordenado (completo).

Tecnicamente, o primeiro método é o menos exigente do ponto de vista terminológico: já temos, inclusive, bagagem suficiente para realizar a construção. Todavia, os meandros envolvidos nessa *implementação* não costumam contribuir para a prática da Análise no dia a dia[16]. Nesse sentido, o segundo método tem a vantagem de utilizar *ecos* de definições que serão importantes *após* a construção, como as *sequências de Cauchy*. Mesmo assim, as enfadonhas verificações de que as *estruturas* definidas satisfazem as condições desejadas só servem para o contexto da construção da reta: no futuro, quando o leitor *precisar* de *espaços métricos completos*, tudo deverá ser refeito.

O terceiro método não tem essa desvantagem: um único teorema de *completamento* de *espaços uniformes* dá conta de *completar* $\mathbb{Q}$, completar *espaços métricos*, entre outras *estruturas uniformes* encontradas na *natureza*. Porém, dado o escopo do texto, desenvolver esse ferramental *apenas* para construir um corpo ordenado completo e, posteriormente, *fazer* Análise, seria descabido[17].

Por essas e, possivelmente, outras razões, muitos textos de Análise apenas postulam o que costumo chamar de

Axioma da Preguiça Infinita. *Existe um corpo ordenado completo.*

Esse tipo de postura torna mais evidente o problema da "unicidade", afinal de contas, tudo o que será feito dependerá de um conjunto que não foi definido em sua *extensão*, i.e., com a descrição de quem ou o quê são seus elementos, mas cuja descrição foi *intencional*: sabe-se apenas como tal objeto deve se comportar. Ainda assim, mesmo quem *constrói* um corpo ordenado completo está suscetível ao problema da "unicidade", já que há diversas construções disponíveis. Os mecanismos que revelam a inexistência desse problema são chamados de *isomorfismos*.

Definição 1.1.22. Um morfismo de anéis/corpos (ordenados) $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ é chamado de **isomorfismo** de anéis/corpos (ordenados) se existir um morfismo de anéis/corpos (ordenados) $g\colon \mathbb{K}' \to \mathbb{K}$ com $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}'}$. Em tais condições, $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ são ditos **isomorfos**. ¶

A definição de isomorfismo dada acima é bem mais geral e se aplica, naturalmente, a qualquer contexto no qual uma noção *apropriada* de morfismo estiver disponível. Em certo sentido, enquanto *morfismos* são meios pelos quais *objetos* de um mesmo *tipo* ou *categoria* se *comunicam* por *traduções*, *isomorfismos* são meios que permitem não apenas a troca mútua de informação, mas também a fidelidade nas traduções de um lado para outro. Há, porém, um modo bem mais prático de verificar isomorfismos *no presente contexto*.

Exercício 1.23. Sejam A e B anéis e $f\colon A \to B$ um morfismo de anéis.

a) Mostre que se f é bijetora, então f é um isomorfismo de anéis. Dica: a inversa, que precisa existir, deve satisfazer as condições para ser morfismo.

b) Mostre que se A e B são corpos ordenados e f é bijeção crescente, então f é um isomorfismo de corpos ordenados. Dica: pelo item anterior, f já é um isomorfismo de corpos, enquanto o Exercício 0.54 permite concluir que f^{-1} também *será* crescente. ■

[16] Leitores versados em Álgebra Comutativa devem conhecer a sensação: a construção do produto tensorial, embora bem mais simples do que a construção da reta, não contribui para a sua utilização.

[17] É a postura tomada por Bourbaki [6, 7], por exemplo. Porém, cabe a ressalva de que os textos de Bourbaki nunca almejaram servir como propostas didáticas, mas sim como fundamentação teórico-formal.

Observação 1.1.23. Apesar do que se estabeleceu acima, há outros contextos (ou *categorias*) nos quais a mera bijetividade não é suficiente para atestar o isomorfismo entre os objetos considerados. Por exemplo: na *categoria* dos *espaços topológicos*, que conheceremos superficialmente em breve, *funções contínuas* fazem o papel de morfismos, e nem toda função contínua bijetiva tem inversa contínua. △

Moralmente, dizer que A e B são anéis ou corpos (ordenados) isomorfos significa afirmar que embora A e B possam ter definições distintas, os *comportamentos* que suas estruturas modelam são os mesmos. O próximo exercício pode dar uma ideia mais clara sobre tudo isso no contexto específico dos corpos ordenados.

Exercício 1.24. Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ corpos ordenados e $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ um isomorfismo de corpos ordenados.

a) Mostre que $S \subseteq \mathbb{K}$ é limitado superiormente se, e somente se, $f[S] \subseteq \mathbb{K}'$ é limitado superiormente.

b) Mostre que $S \subseteq \mathbb{K}$ admite um supremo $\alpha \in \mathbb{K}$ se, e somente se, $f[S]$ admite supremo $\beta \in \mathbb{K}'$. Além disso, tem-se $\beta = f(\alpha)$.

c) Mostre que a equação $x^2 - 2_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ tem solução em $\mathbb{K}$ se, e somente se, a equação $x^2 - 2_{\mathbb{K}'} = 0_{\mathbb{K}'}$ tem solução em $\mathbb{K}'$. ■

Pelo que se expôs acima, um modo legítimo de resolver o problema da "unicidade" seria mostrar que quaisquer dois corpos ordenados completos são isomorfos. É precisamente isso o que será feito a seguir.

A unicidade dos corpos ordenados completos

... a menos de isomorfismo.

Lema 1.1.24. *Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados e, para cada $a \in \mathbb{A}$, considere o subconjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} := \{q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} : q_{\mathbb{A}} < a\}$. Se $\mathbb{A}$ é arquimediano e $\mathbb{K}$ é completo, então a correspondência*

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{A} &\to \mathbb{K} \\ a &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{aligned} \tag{1.2}$$

é um morfismo de corpos ordenados.

É mais fácil entender a prova do que escrevê-la. A coisa toda é bastante visual, como ilustrado a seguir.

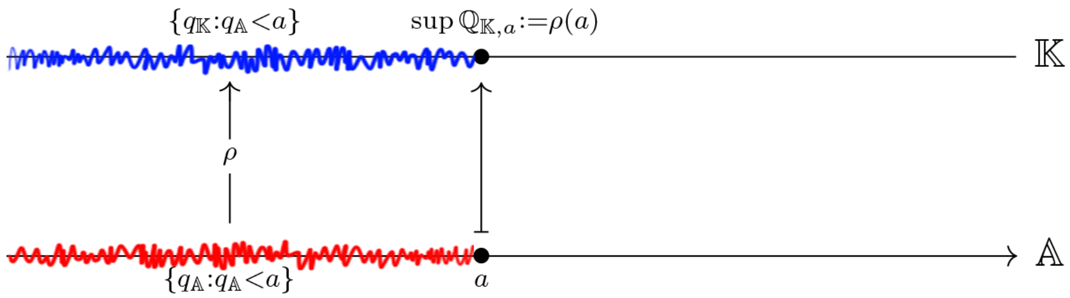


Figura 1.0: Sincronização de corpos.

Para cada $a \in \mathbb{A}$ considera-se, num primeiro momento, a coleção dos racionais (interpretados em $\mathbb{A}$) menores do que a. Ao *interpretar* tais números racionais em $\mathbb{K}$, obtém-se um conjunto limitado superiormente, que por sua vez admite um supremo em virtude da completude de $\mathbb{K}$. Finalmente, ρ apenas associa a ao supremo obtido no passo anterior. Mesmo que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ sejam *construídos* de maneiras distintas, o fato de ambos *interpretarem* cópias *densas* de $\mathbb{Q}$ permite sincronizá-los entre si.

Demonstração. É edificante observar, antes de qualquer outra coisa, que a *relação* ρ é, na verdade, uma função:

✓ a propriedade arquimediana de $\mathbb{A}$ permite mostrar tanto a não-vacuidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$ quanto a existência de um limitante superior em $\mathbb{K}$;

✓ logo, a completude de $\mathbb{K}$ assegura a existência de um único $\rho(a) \in \mathbb{K}$ digno de ser xingado como $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$.

Em outras palavras: ρ associa a cada $a \in \mathbb{A}$ um único $\rho(a) \in \mathbb{K}$, como esperado. O leitor pode cuidar dos detalhes omitidos acima[18]. Agora, mostraremos que ρ é um morfismo de corpos. Para isso, para quaisquer $a, b \in \mathbb{A}$, precisa-se verificar que

$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},1_{\mathbb{A}}} = 1_{\mathbb{K}}, \tag{1.3}$$
$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b} = \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} \tag{1.4}$$
$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},ab} = \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \cdot \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}. \tag{1.5}$$

Identidade (1.3)**.** Ela vale mais geralmente, pois $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}} = q_{\mathbb{K}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Com efeito, $q_{\mathbb{K}}$ limita $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}}$ superiormente e, se $\beta < q_{\mathbb{K}}$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ com $r_{\mathbb{A}} < q_{\mathbb{A}}$ e $\beta < r_{\mathbb{K}}$, mostrando que $q_{\mathbb{K}}$ é, legitimamente, o menor limitante superior de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}}$.

Identidade (1.4)**.** Antes de proceder com a prova, convém notar que se $A, B \subseteq \mathbb{K}$ são não-vazios e limitados superiormente, então o conjunto $A + B := \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$ é não-vazio, limitado superiormente e $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Em posse disso, (1.4) decorre da igualdade $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b} = \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$, cuja verificação será apresentada a seguir.

Por um lado, se $q := r + s$ com $r_{\mathbb{A}} < a$ e $s_{\mathbb{A}} < b$, então $r_{\mathbb{A}} + s_{\mathbb{A}} < a + b$, acarretando $q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b}$, donde a arbitrariedade de q implica em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b}$. Por outro lado, se $q_{\mathbb{A}} < a + b$, então $0_{\mathbb{A}} < a + b - q_{\mathbb{A}}$ e, pela condição arquimediana satisfeita por $\mathbb{A}$, existem $r, s \in \mathbb{Q}$ com $0_{\mathbb{A}} < r_{\mathbb{A}} < a + b - q_{\mathbb{A}}$ e $a - r_{\mathbb{A}} < s_{\mathbb{A}} < a$. Logo, $q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} < q_{\mathbb{A}} + r_{\mathbb{A}} - a < b$, com $q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$, $s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$, mostrando $q_{\mathbb{A}} = s_{\mathbb{A}} + q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$.

Identidade (1.5)**.** A verificação das possíveis variações de *sinal* se reduz ao caso em que $a, b > 0_{\mathbb{A}}$, desde que se saiba da identidade auxiliar $\rho(-a) = -a$. De fato, em posse disso, para $a < 0_{\mathbb{A}}$ e $b > 0_{\mathbb{A}}$, por exemplo, resulta

$$-\rho(ab) = \rho(-ab) = \rho((-a)b) = \rho(-a)\rho(b) = -\rho(a)\rho(b),$$

com um raciocínio análogo para o caso em que $a < 0_{\mathbb{A}}$ e $b < 0_{\mathbb{A}}$ (o caso em que $a = 0_{\mathbb{A}}$ ou $b = 0_{\mathbb{A}}$ é, em vista de (1.3), imediato). Tratemos então das identidades *suficientes*.

[18]Será essencial lembrar que as correspondências $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$ definem (únicos) morfismos de corpos da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ e $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, respectivamente.

Primeiro, observe que se $x > 0_{\mathbb{A}}$, então o conjunto $D_x := \{q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},x} : q > 0_{\mathbb{A}}\}$ é tal que $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},x} = \sup D_x$. Depois, note que se $A, B \subseteq \mathbb{K}_{>0}$ são não-vazios e limitados superiormente, então a família $A \cdot B := \{ab : a \in A \text{ e } b \in B\}$ é não-vazia, limitada superiormente e vale $\sup (A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, donde a identidade desejada segue da igualdade $D_{ab} = D_a \cdot D_b$, cuja verificação fica a cargo do leitor.

Para mostrar a identidade auxiliar $\rho(-a) = -\rho(a)$, primeiro observe que não há perda de generalidade em supor $a \notin \mathbb{Q}_{\mathbb{A}}$. Daí, note que se $q_{\mathbb{A}} < a$, então $-a < -q_{\mathbb{A}}$, donde a definição de supremo acarreta $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a} \leq -q_{\mathbb{K}}$. Logo, $q_{\mathbb{K}} \leq -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$ e, novamente pela definição, $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \leq -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$. Supondo a desigualdade estrita, a condição arquimediana garante um $p \in \mathbb{Q}$ com $\sup_{\mathbb{Q},a} < p_{\mathbb{K}} < -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, com $a > p_{\mathbb{A}}$ e, consequentemente, $-p_{\mathbb{A}} < -a$, o que implicaria em $-p_{\mathbb{K}} \leq \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, i.e., $-\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a} \leq p_{\mathbb{K}}$, uma contradição. Portanto, $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} = -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, como desejado.

A enfadonha discussão acima mostra que ρ é um morfismo de corpos. Resta a ordem: se $a \leq b$ em $\mathbb{A}$, então $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$ e, pelas propriedades típicas de supremos, segue que $\rho(a) \leq \rho(b)$. □

Exercício 1.25. Complete os detalhes da demonstração acima. Dica: pode ser útil conferir o Exercício 1.37. ■

Observação 1.1.25. Convém destacar que o morfismo de corpos ρ é *estritamente crescente*, no sentido da Observação 0.2.5. Há dois modos simples de se convencer disso:

(i) por $\mathbb{A}$ ser arquimediano, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $a < q_{\mathbb{A}} < b$ e

$$\rho(a) := \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} < q_{\mathbb{K}} < \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} := \rho(b);$$

(ii) alternativamente, como ρ é um morfismo de corpos, segue que ρ é injetor (item b) do Exercício 1.7). Logo, ρ deve ser estritamente crescente.

Embora o segundo argumento mostre que *qualquer* morfismo de corpos ordenados é estritamente crescente, o primeiro argumento será importante em breve, quando surgir o problema de estimar a cardinalidade de corpos arquimedianos. △

Teorema 1.1.26. *Se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ são corpos ordenados e completos, então o mapa $\rho \colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ definido em (1.2) é um isomorfismo de corpos ordenados.*

Demonstração. Como dessa vez o corpo $\mathbb{A}$ também é completo, o lema anterior permite conjurar *dois* morfismos de corpos ordenados, simultaneamente:

$$\begin{aligned} \rho \colon \mathbb{A} &\to \mathbb{K} \\ a &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \sigma \colon \mathbb{K} &\to \mathbb{A} \\ k &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{A},k} \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrar que um é o inverso do outro. Fixado $a \in \mathbb{A}$, tem-se

$$\sigma(\rho(a)) := \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)},$$

e busca-se verificar $\sigma(\rho(a)) = a$. Ora, dado $q_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$, tem-se $q_{\mathbb{K}} < \rho(a)$, e isso proíbe a ocorrência de $a \leq q_{\mathbb{A}}$: caso contrário, teria-se $\rho(a) \leq \rho(q_{\mathbb{A}}) = q_{\mathbb{K}}$. Agora, se $\beta \in \mathbb{A}$ é tal que $\beta < a$, então $\rho(\beta) < \rho(a)$, e existe $q \in \mathbb{Q}$ com $\rho(\beta) < q_{\mathbb{K}} < \rho(a)$, donde segue que $q_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$ com $\beta < q_{\mathbb{A}}$. Portanto, a é o menor limitante superior de $\mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$, i.e., $a = \sigma(\rho(a))$, como queríamos. Analogamente, mostra-se que $\rho(\sigma(k)) = k$ para todo $k \in \mathbb{K}$. □

Exercício 1.26. Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados, com $\mathbb{A}$ arquimediano e $\mathbb{K}$ completo.

a) Mostre que se $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ é um morfismo de corpos ordenados, então $\varphi(q_{\mathbb{A}}) = q_{\mathbb{K}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Dica: as correspondências $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$ determinam os únicos morfismos de corpos ordenados da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ e $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, respectivamente; por outro lado, a composição entre $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e φ também determina um morfismo da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$.

b) Conclua que existe um único morfismo de corpos ordenados da forma $\mathbb{A} \to \mathbb{K}$. Em particular, os isomorfismos do teorema anterior são únicos. ■

As discussões acima resolvem o problema da "unicidade" mencionado anteriormente, e tornam quase honesta a próxima

Definição 1.1.27. Denota-se por $\mathbb{R}$ *qualquer* corpo ordenado e completo, que passa a ser chamado de **conjunto dos números reais**, ou apenas de **reta real**. ¶

Devido a tal escolha de notação, perde o sentido carregar "$\mathbb{R}$" como subíndice para indicar em qual corpo ordenado e completo um determinado procedimento ocorre, postura que será aplicada também para o valor absoluto de um número real x, que será denotado por $|x|$ de agora em diante[19].

Além disso, em contextos algébricos ou *analíticos*, será inofensivo considerar como verdadeiras as inclusões próprias $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ embora, a rigor, existam apenas morfismos injetores que preservam as *estruturas algébricas e de ordem* subjacentes: se, por um lado, isso soa demasiado arbitrário, por outro, já sabemos que tais morfismos são únicos e, portanto, independem de escolhas *arbitrárias*. Em outras palavras, tanto $\mathbb{N}$, quanto $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ podem ser substituídos por suas cópias em $\mathbb{R}$, que são únicas em virtude da unicidade dos morfismos entre as estruturas. Como consequência dessas identificações, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ compartilham, a partir de agora, os mesmos elementos neutros aditivos e multiplicativos, xingados respectivamente de 0 e 1.

A cardinalidade do *continuum*

Um dos fatos mais marcantes nos desenvolvimentos iniciais da Teoria dos Conjuntos e no estudo dos infinitos foi a *constatação* de que o *tipo de infinito* de $\mathbb{R}$ é *estritamente maior* do que o *tipo de infinito* de $\mathbb{N}$. Com a linguagem apresentada no capítulo anterior, isso pode se expressar com a desigualdade

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}, \tag{1.6}$$

onde $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$ denotam os números cardinais de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente[20]. A letra $\mathfrak{c}$, no caso, faz referência ao ***continuum***, expressão latina classicamente utilizada para fazer menção à noção da reta real como uma linha *contínua* – sem buracos.

---

[19] O contexto deixará claro quando $|x|$ representa o valor absoluto do *número real* x ou a cardinalidade do *conjunto* x. De qualquer forma, o leitor incomodado pode fazer como a maioria, e pensar que *números não são conjuntos* – algo impensável para os adeptos de ZFC, mas recorrente para os praticantes do *carpe diem*: `https://mathoverflow.net/a/90945/41407`.

[20] O leitor que evitou as discussões sobre cardinalidade e números cardinais do capítulo anterior pode entender a inequação (1.6) como uma abreviação para a afirmação "existe função injetora $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mas não existe função bijetora entre ambos". Dito isso, pode ser interessante repensar seus preconceitos matemáticos e dar uma chance para ler um pouco do assunto.

Com o jargão típico dos textos básicos de Análise, (1.6) se lê como "$\mathbb{R}$ é não-enumerável". Todavia, como já foi discutido no último capítulo, esse tipo de afirmação não *localiza* a posição de $\mathfrak{c}$ na *cadeia* dos números cardinais transfinitos: isso apenas diz que $\mathfrak{c}$ não é o menor tipo de infinito. Mas poderia ser $\aleph_1$? Talvez $\aleph_5$? Voltaremos a essa pergunta no final do capítulo.

Por ora, o problema imposto por (1.6) já é demasiado profundo para o presente contexto, posto que não se apresentou um conjunto para chamar de $\mathbb{R}$: apenas postulou-se a existência de um corpo ordenado completo. Ocorre que, como será mostrado a seguir, as duas propriedades fundamentais de $\mathbb{R}$ permitem estimar razoavelmente bem a *cardinalidade* de $\mathbb{R}$:

(i) por ser um corpo arquimediano, veremos que $\mathbb{R}$ não pode ser *grande demais*;

(ii) por ser completo, veremos que $\mathbb{R}$ não pode ser *pequeno demais*.

Definição 1.1.28. Denotaremos por $2^{\aleph_0}$ o número cardinal de $\wp(\mathbb{N})$. ¶

Exercício 1.27. Convença-se de que $|\wp(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$. Dica: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ + Exercício 0.59. ■

Lema 1.1.29. *Se* $\mathbb{A}$ *é corpo arquimediano, então* $|\mathbb{A}| \leq 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Lembre-se de que a desigualdade do enunciado apenas abrevia a existência de uma função injetora $\mathbb{A} \to X$, para algum conjunto X que tenha *cardinalidade* $2^{\aleph_0}$. Ora, a correspondência

$$\begin{aligned} \partial \colon \mathbb{A} &\to \wp(\mathbb{Q}) \\ a &\mapsto \{q \in \mathbb{Q} : q_{\mathbb{A}} < a\} \end{aligned}$$

é uma injeção: se $a, b \in \mathbb{A}$ são distintos, então ocorre $a < b$ ou $b < a$, donde a condição arquimediana assegura a existência de $q \in \mathbb{Q}$ *entre* a e b, acarretando em $\partial(a) \neq \partial(b)$. Portanto, $|\mathbb{A}| \leq |\wp(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$. □

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano (por ser completo), segue que $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$. O próximo passo será mostrar a desigualdade oposta, i.e., $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$, pois daí o Teorema 0.1.28 (Cantor-Bernstein) garantirá $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Embora este lado da desigualdade possa ser demonstrado de modo mais rápido por meio da noção de *séries*, que serão tratadas no próximo capítulo, é possível maquiar os argumentos usando supremos de *séries finitas* – de qualquer forma, isso precisaria ser definido em algum momento.

Definição 1.1.30 (Operadores Σ e Π)**.** Definem-se $\sum \colon \operatorname{seq}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e $\prod \colon \operatorname{seq}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

(i) $\sum \emptyset := 0$ e $\prod \emptyset := 1$;

(ii) $\sum \langle f_i : i \leq n\rangle := \sum \langle f_i : i < n\rangle + f_n$ e $\prod \langle f_i : i \leq n\rangle := \prod \langle f_i : i < n\rangle \cdot f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f := \langle f_i : i \leq n\rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$. ¶

É comum que o primeiro contato com as *definições* acima cause desconforto. Porém, a coisa é bastante simples, e consiste tão somente de um algoritmo de repetição. No caso de

Σ, por exemplo, para $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ têm-se

$$\begin{aligned}
\sum \emptyset &:= 0;\\
\sum \langle x_0\rangle &:= \sum \emptyset + x_0 = 0 + x_0;\\
\sum \langle x_0, x_1\rangle &:= \sum \langle x_0\rangle + x_1 = x_0 + x_1;\\
\sum \langle x_0, x_1, x_2\rangle &:= \sum \langle x_0, x_1\rangle + x_2 = (x_0 + x_1) + x_2;\\
\sum \langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle &:= \ldots
\end{aligned}$$

Intuitivamente, $\sum \langle x_i : i \leq n\rangle$ expressa aquilo que se escreveria como $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Isto sugere notações bem mais práticas e *maleáveis* do que as anteriores.

Definição 1.1.31. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f := \langle f_i : i \leq n\rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(i) Tanto $\sum\limits_{i \leq n} f_i$ quanto $\sum\limits_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\sum \langle f_i : i \leq n\rangle$.

(ii) Tanto $\prod\limits_{i \leq n} f_i$ quanto $\prod\limits_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\prod \langle f_i : i \leq n\rangle$. ¶

A partir dessas definições, é relativamente simples adaptá-las a fim de dar sentido formal a variações típicas de *somatórios* e *produtórios*, como os listados a seguir:

(i) $\sum\limits_{i=j}^{m} f_i$; (ii) $\prod\limits_{i<m} a_i \sum\limits_{j=0}^{n} b_j$; (iii) $\sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j+k=i} a_j b_k c_i$

(iv) $\prod\limits_{x \in X} h(x)$ para um conjunto finito X e uma função $h\colon X \to \mathbb{R}$;

(v) $\sum F$ para um subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{R}$;

(vi) ...

O leitor provavelmente já tem familiaridade com esse tipo de notação e sabe como operá-las no dia a dia – mesmo assim, pode ser interessante consultar os enunciados do Exercício 1.38 para refrescar as ideias. Para o que faremos a seguir, é suficiente acreditar (ou resolver) o próximo

Exercício 1.28. Mostre que $\sup\left\{\sum\limits_{n \leq m} \frac{1}{10^n} : m \in \mathbb{N}\right\} = \frac{10}{9}$. Dica: observe que para cada $m \in \mathbb{N}$ vale a identidade $\sum\limits_{n \leq m} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9 \cdot 10^m}$; alternativamente, confira o Exercício 1.39. ■

Lema 1.1.32. *Para cada $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, existe o número real $\psi(f) \in \mathbb{R}$ dado por*

$$\psi(f) := \sup\left\{\sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Além disso, a correspondência $\psi\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é uma injeção.

Demonstração. Fixada $f \in 2^{\mathbb{N}}$, a ideia é usar a completude de $\mathbb{R}$ para garantir a existência de $\psi(f)$. Para tanto, é suficiente mostrar que o conjunto

$$S(f) := \left\{ \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

é não-vazio e limitado superiormente: obviamente, tem-se $S(f) \neq \emptyset$; para verificar a limitação, observe que $0 \leq f(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue que

$$\frac{1}{10^n} f(n) \leq \frac{1}{10^n} \Rightarrow \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} \leq \sum_{n \leq m} \frac{1}{10^n} \leq \frac{10}{9},$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$, onde a última desigualdade segue do exercício anterior.

Isso mostrou que $S(f) \neq \emptyset$ é limitado superiormente para cada $f \in 2^{\mathbb{N}}$. Consequentemente, a correspondência $\psi \colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ está bem definida, pois o supremo de $S(f)$ é único para cada $f \in 2^{\mathbb{N}}$. Resta apenas atestar a injetividade de ψ.

Para $p \in \mathbb{N}$ e $f \in 2^{\mathbb{N}}$ fixados, mostraremos que

$$\psi_p(f) := \sup \left\{ \sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^{n+p}} : m \in \mathbb{N} \right\} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{p-1}}. \tag{1.7}$$

De fato, já que $f(j) \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pode-se fazer

$$\sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^{n+p}} = \frac{1}{10^p} \sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^n} \leq \frac{1}{10^p} \sum_{n \leq m} \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^p} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{p-1}},$$

donde a desigualdade (1.7) segue.

O último ingrediente da prova consiste em observar que

$$\psi(f) = \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} + \psi_{m+1}(f) \tag{1.8}$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$, o que fica a cargo do leitor.

Enfim, para $g \in 2^{\mathbb{N}}$ com $f \neq g$, existe $m := \min\{j \in \mathbb{N} : f(j) \neq g(j)\}$ e, por falta de opções, não há perda de generalidade em supor $f(m) = 0$ e $g(m) = 1$. Segue então de (1.8), bem como da minimalidade de m, que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(f) = r + \psi_{m+1}(f) \text{ e } \psi(g) = r + \frac{1}{10^m} + \psi_{m+1}(g).$$

Por (1.7), finalmente, obtém-se

$$\begin{aligned} \psi(g) - \psi(f) &= \frac{1}{10^m} + \psi_{m+1}(g) - \psi_{m+1}(f) \geq \frac{1}{10^m} + 0 - \psi_{m+1}(f) \geq \\ &\geq \frac{1}{10^m} - \frac{1}{9 \cdot 10^m} = \frac{8}{9 \cdot 10^m} > 0, \end{aligned}$$

mostrando que $\psi(f) \neq \psi(g)$. □

Observação 1.1.33 (O que *realmente* está acontecendo?)**.** Secretamente, a prova acima consiste apenas em tomar sequências infinitas de 0's e 1's e interpretá-las como números reais por meio da expansão decimal. Assim, a sequência constante $\langle 1, \ldots, 1, \ldots \rangle$, por exemplo, se torna o número real que, na rua[21], xingaríamos de $1,1111\ldots$. Em todo caso, a maior dificuldade da prova foi estimar os valores dos supremos sem a tecnologia das séries, que ainda será discutida. △

Corolário 1.1.34. *$\mathbb{R}$ é não-enumerável.*

Demonstração. Dos lemas anteriores, tem-se $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$, acarretando a igualdade $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ em virtude do Teorema de Cantor-Bernstein. Como $\wp(\mathbb{N})$ é não-enumerável pelo Teorema 0.1.24 (de Cantor), o resultado segue. □

Observação 1.1.35 (Para veteranos em Análise)**.** Há outras formas de demonstrar a não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Um argumento bastante comum (e mais intuitivo) consiste em tomar *qualquer* função $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e definir um número $r := r_0, r_1 r_2 r_3 \ldots$ exigindo-se que $r_n \in \{0, \ldots, 9\} \setminus \{a_{n,n}, 1, 9\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\varphi(n) := a_{n,0}, a_{n,1} a_{n,2} \ldots a_{n,n} \ldots$$

indica a expansão de $\varphi(n)$ em *base* 10. Como $r \notin \operatorname{im}(\varphi)$, segue que φ não pode ser sobrejetora.

Evidentemente, tal argumento depende de um estudo um pouco mais cuidadoso de *séries* e *representações* decimais, o que atrasaria a *formalização* do resultado no texto. Uma alternativa comum é apelar, por exemplo, para a *compacidade* dos *intervalos fechados e limitados* de $\mathbb{R}$, disfarçada como a *propriedade dos intervalos encaixantes*. A desvantagem dessa abordagem é, justamente, o disfarce: a fim de se valer *prematuramente* de propriedades topológicas da reta real, dá-se um nome pomposo para algo que vale bem mais geralmente.

Apesar de ser mais indireta, a abordagem adotada aqui tem a vantagem de *equiparar* a cardinalidade da reta com a cardinalidade de outro conjunto conhecido, que por sua vez tem sua não-enumerabilidade verificada de modo *quase* trivial (reveja o Teorema 0.1.24).△

Exercício 1.29. Diz-se que $r \in \mathbb{R}$ é **transcendente** se não existe polinômio $p \in \mathbb{Q}[x]$ com $p(r) = 0$. Mostre que o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável[22]. Conclua que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o conjunto dos **números irracionais**, é não-enumerável. ■

Corolário 1.1.36 (*Je le vois, mais je ne le crois pas*)**.** *$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$.*

Demonstração. Segue das desigualdades

$$2^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0 \cdot n} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

que por sua vez apenas indicam a existência de funções injetivas

$$2^{\mathbb{N}} \to (2^{\mathbb{N}})^n \to 2^{\mathbb{N}^n} \to 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}},$$

que o leitor não deve ter grandes dificuldades em obter. □

[21] Talvez o leitor tenha uma surpresa ao efetuar o cálculo "$10 \div 9$", em sua calculadora, por exemplo.
[22] O leitor interessado numa *definição formal* de polinômios pode consultar o Exercício 1.40.

Exercício 1.30. Complete a demonstração anterior. Dica: lembre-se de que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$; também pode ser útil relembrar alguns truques de *potenciação cardinal*, como os que foram apresentados nos Exercícios 0.60 e 0.70. $\blacksquare$

Observação 1.1.37 ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$?)**.** As discussões acima estabelecem $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ e, portanto, $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$. Uma pergunta bastante natural a se fazer daí é a seguinte: a última desigualdade é estrita ou, *na verdade*, é uma igualdade?

Essa pergunta, feita originalmente pelo próprio Cantor, ficou por muito tempo sem resposta, o que levou a *identidade* "$\aleph_1 = \mathfrak{c}$" a ser conhecida como **Hipótese do Contínuo** (**CH**), já que $\mathfrak{c}$ *representa* a cardinalidade do *continuum*.

Dito isso, eis a resposta para a pergunta: existem *modelos* para ZFC nos quais CH é verificável, e outros *modelos* para ZFC nos quais a *negação* de CH é verificável. Em outras palavras, há modelos em que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, mas também há modelos em que $\aleph_2 = \mathfrak{c}$, $\aleph_{42} = \mathfrak{c}$ e por aí vai[23], o que se resume em dizer que ZFC não *pode decidir* o *status* da Hipótese do Contínuo.

Isto é menos chocante do que parece: note que os axiomas da Teoria de Corpos, por exemplo, não decidem se a equação $x^2 + 1$ tem raiz no corpo, já que existem *modelos* de corpos nos quais não existem raízes (como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$...) e outros corpos nos quais tais raízes existem (como $\mathbb{C}$). Arrisco dizer que a estranheza com esse tipo de ocorrência em ZFC seja fruto da postura atual de se assumir a teoria (ingênua) dos conjuntos como a metalinguagem/metateoria subjacente no estudo teórico de outras áreas da Matemática, o que torna vertiginosa a experiência de utilizá-la no estudo da própria. $\triangle$

Exercícios adicionais

FALTA ARRUMAR

Adiante, $\mathbb{K}$ denota um corpo ordenado qualquer, enquanto $\mathbb{R}$ denota *a* reta real.

Exercício 1.31. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ elementos quaisquer.

a) Mostre que $\inf\{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\} = 0_{\mathbb{K}}$.

b) Conclua que se para todo $\varepsilon > 0_{\mathbb{K}}$ ocorrer $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, então $\alpha = \beta$. $\blacksquare$

Exercício 1.32. Seja $A \subseteq \{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\}$ com $A \neq \emptyset$. Mostre que A é ilimitado superiormente se, somente se, $\inf\left\{\frac{1}{a} : a \in A\right\} = 0_{\mathbb{K}}$. $\blacksquare$

Exercício 1.33. Mostre que se $\mathbb{K}$ é arquimediano, então $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 0_{\mathbb{K}}$. Dica: primeiro, mostre que $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{K}$. $\blacksquare$

Exercício 1.34. Considere $x, y \in \mathbb{K}$ quaisquer.

a) Mostre que se $x > y > 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > y^2$.

b) Mostre que se $x < y < 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 < y^2$.

c) Mostre que se $x > 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > x$ e, se $0_{\mathbb{K}} < x < 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 < x$. $\blacksquare$

[23] Mas não pode ocorrer $\aleph_\omega = \mathfrak{c}$, por razões que fogem ao escopo deste material.

Exercício 1.35. Mostre que

$$\frac{|x+y|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}}+|x+y|_{\mathbb{K}}} \leq \frac{|x|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}}+|x|_{\mathbb{K}}} + \frac{|y|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}}+|y|_{\mathbb{K}}}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$. Dica: considere separadamente os casos $|x+y|_{\mathbb{K}} \leq |x|_{\mathbb{K}}$, $|x+y|_{\mathbb{K}} \leq |y|_{\mathbb{K}}$ e $\max\{|x|_{\mathbb{K}}, |y|_{\mathbb{K}}\} \leq |x+y|_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício 1.36. Sejam $\delta \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\delta > -1_{\mathbb{K}}$ e $n > 0$, então vale a *desigualdade de Bernoulli*: $(1_{\mathbb{K}} + \delta)^n \geq 1_{\mathbb{K}} + n_{\mathbb{K}}\delta$. Dica: $1_{\mathbb{K}} + \delta > 0_{\mathbb{K}}$ e $n_{\mathbb{K}}\delta^2 \geq 0_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício 1.37. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{K}$ subconjuntos não-vazios e $r \in \mathbb{K}$. Supondo que $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ e $\sup B$ existem, mostre que:

a) se $A \subseteq B$, então $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$;

b) se $r \geq 0$, então $\inf(rA) = r \inf A$ e $\sup(rA) = r \sup A$;

c) se $r \leq 0$, então $\inf(rA) = r \sup A$ e $\sup(rA) = r \inf A$;

d) se $x \geq 0$ para todo $x \in A \cup B$, então $\inf(AB) = \inf A \inf B$ e $\sup(AB) = \sup A \sup B$;

e) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

f) Fazendo $x + B := \{x\} + B$ para $x \in \mathbb{K}$ qualquer, observe que $\sup(x+B) = x + \sup B$ e $\inf(x+B) = x + \inf B$. ■

Exercício 1.38. [tudo sobre somas finitas]

■

Exercício 1.39 (Séries disfarçadas)**.** Para $0_{\mathbb{K}} < a < 1_{\mathbb{K}}$, considere $P := \left\{\sum_{i=0}^{n} a^i : n \in \mathbb{N}\right\}$.

a) Mostre que P é limitado superiormente. Dica: note que $a^{n+1} < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Supondo que existe $S := \sup P$, mostre que $S = \dfrac{1}{1-a}$. Dica: note que as propriedades operatórias do supremo permitem escrever $aS = S - 1$, como no *migué* apresentado no Prefácio[24]. ■

Exercício 1.40 (Anéis de polinômios)**.** ■

Exercício 1.41 (Raízes vs. grau)**.** ■

Proposição 1.1.38 (Binômio de Pascal-Newton-Muitos-Outros-Antes-Deles)**.** *Sejam A um anel, $a, b \in A$ elementos de A e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j},$$

onde $\displaystyle\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

[24] A diferença é que, desta vez, sabemos porque o migué funciona.

Exercício 1.42. Demonstre a proposição acima, mas só se quiser muito. ■

Exercício 1.43 (Diferença de potências)**.** ■

Exercício 1.44 (Injetividade potências ímpares)**.** ■

Exercício 1.45. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, escreva $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Mostre que $|(a, b)| = |\mathbb{R}|$. Dica: obtenha uma bijeção entre $(0, 1)$ e $\mathbb{R}$ e outra entre $(0, 1)$ e (a, b). ■

Exercício 1.46. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, mostre que existe um número real $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ com $x < z < y$. ■

Exercício 1.47. Pense rápido: dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, qual a cardinalidade de $\mathbb{Q} \cap (a, b)$?■

Exercício 1.48. Mostre que $\varphi\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) := \dfrac{x}{1 - |x|}$ é bijetora. ■

Exercício 1.49. Mesma coisa do anterior, mas com $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em vez de $\mathbb{Q}$. ■

Exercício 1.50. Mostre que se $x^2 \leq y^2$, então $|x| \leq |y|$. ■

Exercício 1.51 (Raiz quadrada existe)**.** ■

Exercício 1.52. Mostre que se $x, y \geq 0$, então deve ocorrer $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x + y}{2}$. Dica: $\gamma^2 \geq 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.53. Com respeito ao exercício anterior: em que situações pode-se garantir a igualdade? Dica: observe que $\sqrt{x}^2 = x$ para todo $x \geq 0$. ■

Exercício 1.54. Mostre que $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.55. Mostre que se $\alpha > \beta \geq 0$, então $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta}$. ■

Observação 1.1.39. É possível demostrar a existência de β por meio de supremos e da completude de $\mathbb{R}$. Porém, será mais prático esperar a revelação da conexidade e da continuidade para definir raízes quadradas e, mais geralmente, raízes n-ésimas para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. △

Capítulo 2

Um desvio topológico

Estou hoje dividido entre a lealdade que devo
à Tabacaria do outro lado da rua, como coisa real por fora,
e à sensação de que tudo é sonho, como coisa real por dentro.

Álvaro de Campos, *a.k.a.* Fernando Pessoa[0].

Geralmente, textos de Análise costumam utilizar *sequências* como o substrato principal para *a noção fundamental de limite* em $\mathbb{R}$ – por meio da qual todas as outras formas de limite se definem[1]. Dentre os motivos que justificam tal *protagonismo*, um dos mais importantes é, discutivelmente, o fato de que sequências convergentes caracterizam a *topologia usual* da reta – e, mais geralmente, a *topologia usual* de *espaços métricos*. Porém, como o presente texto seguirá o caminho das *nets* (ou redes)[2], parece-me conveniente fazer um *desvio topológico* a fim de ampliar o escopo de algumas argumentações recorrentes e, ao mesmo tempo, reforçar o caráter unificador da abordagem adotada[3].

2.0 Espaços topológicos e onde habitam

Definição 2.0.0. Uma **topologia** num conjunto X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X satisfazendo o seguinte:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$;

(iii) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

Em tal situação, diz-se que o par $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ é um **espaço topológico**, enquanto os membros da topologia $\mathcal{T}$ são chamados de **abertos de** X com respeito à topologia $\mathcal{T}$. Quando o contexto deixa a topologia clara, diz-se apenas que X é um espaço topológico, cujos *abertos* são exatamente os membros de sua topologia. ¶

[0] Tabacaria, 1928.

[1] Confira, por exemplo: Apostol [2], Figueiredo [9], Lima [18, 19] e Rudin [27].

[2] Introduzidas no próximo capítulo.

[3] Nesse sentido, pode-se dizer que se trata de um *blend* dos textos de Rudin [27] e Beardon [5]: o primeiro utiliza explicitamente espaços métricos num texto voltado para Análise na Reta, enquanto o segundo aborda noções clássicas de limites por meio de *nets*. Neste caso, o tempero adicional do presente texto será o uso explícito de espaços topológicos em vez de métricos.

Num primeiro contato, a definição acima pode soar como uma arbitrariedade simbólica sem qualquer utilidade: ela não parece se relacionar de maneira explícita com qualquer tipo de objeto matemático que já tenha sido tratado no texto, sejam eles algébricos ou ordenados. Porém, secretamente, espaços topológicos constituem um dos ambientes mais gerais para analisar questões de *continuidade* e *convergência*, o que pode ficar mais fácil de perceber com a investigação de alguns casos particulares importantes.

2.0.0 A reta estendida e seus intervalos

Dada uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, é possível tomar elementos *artificiais*[4] distintos $p, q \notin \mathbb{P}$ e fazer $\overline{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \cup \{p, q\}$, para daí definir uma ordem parcial $\preceq$ que estende $\leq$, declarando-se $p \preceq x$ e $x \preceq q$ para qualquer $x \in \mathbb{P}$, e para $x, y \in \mathbb{P}$, $x \preceq y$ se, e somente se, $x \leq y$; em particular, obtém-se $p = \min \overline{\mathbb{P}}$ e $q = \max \overline{\mathbb{P}}$. A *reta estendida* é a ordem oriunda deste processo aplicado a $\mathbb{P} := \mathbb{R}$.

Definição 2.0.1. Denota-se por $\overline{\mathbb{R}}$ à reta real $\mathbb{R}$ acrescida dos pontos $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$, com a ordem definida acima, com $p := -\infty$ e $q := +\infty$, que passa a ser chamada de **reta estendida**. ¶

A adoção do símbolo "∞" para indicar os pontos artificiais acrescentados na reta é arbitrária. Dito isso, é importante ressaltar que, embora seja frequente se referir a tais pontos como "infinitos", seria mais correto xingá-los de *ilimitados*, posto que "infinito" costuma se referir à cardinalidade de conjuntos, enquanto "$-\infty$" e "$+\infty$" apenas denotam *extremos* artificiais da reta, algo bem mais específico[5].

Definição 2.0.2 (Intervalos abertos)**.** Para $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, os conjuntos

$$[-\infty, \beta) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < \beta\}, \tag{2.0}$$

$$(\alpha, +\infty] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \alpha < x\} \tag{2.1}$$

serão chamados de *intervalos abertos fundamentais* de $\overline{\mathbb{R}}$. Diremos que $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um **intervalo aberto** se I for interseção finita de intervalos fundamentais. ¶

Exercício 2.0. Mostre que os intervalos abertos contidos em $\mathbb{R}$ são da forma

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Em particular, note que $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são intervalos abertos contidos em $\mathbb{R}$. ■

Exercício 2.1. Para $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon > 0$, mostre que são equivalentes:

a) $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$;

b) $|x - y| < \varepsilon$;

c) $y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$. ■

É evidente que os intervalos fundamentais não são subconjuntos da reta, mas sim da reta estendida, posto que $-\infty \in [-\infty, \beta) \setminus \mathbb{R}$ e $+\infty \in (\alpha, +\infty] \setminus \mathbb{R}$. Desse modo, *não faz sentido* escrever algo como $[-\infty, 5)$ para se referir a um subconjunto de $\mathbb{R}$, mas faz sentido usar tal notação para se referir a um intervalo de $\overline{\mathbb{R}}$. Em geral, verifica-se

$$[-\infty, \beta) \cap \mathbb{R} = (-\infty, \beta) \quad \text{e} \quad (\alpha, +\infty] \cap \mathbb{R} = (\alpha, +\infty).$$

[4] Ou virtuais, fictícios, etc. Não faz diferença, dado que tudo aqui é algum tipo de ficção.

[5] Em particular, tais pontos adicionais permitem atribuir supremos e ínfimos para quaisquer subconjuntos de $\mathbb{R}$, mesmo que sejam ilimitados – ou o vazio (Exercício 2.31).

Observação 2.0.3. O Exercício 0.73 apresentou uma definição geral de intervalo, válida em ordens parciais. No caso da reta (real ou estendida), a (in) existência de supremos e ínfimos permite classificar *todos* os intervalos de $\overline{\mathbb{R}}$. Com efeito, se $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo não-vazio, então I admite ínfimo (ou supremo) em $\mathbb{R}$ a depender de sua limitação inferior em $\mathbb{R}$ (ou superior, respectivamente). Desse modo, com alguma paciência, não é difícil perceber que os intervalos *reais* (i.e., contidos em $\mathbb{R}$) assumem as seguintes formas:

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, o intervalo *aberto* e limitado de extremos a e b, caso em que o intervalo é limitado, mas seus ínfimo e supremo não pertencem ao intervalo;

(ii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, o intervalo limitado "fechado" em a e "aberto" em b, caso em que o intervalo é limitado, mas apenas o seu ínfimo pertence ao intervalo;

(iii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, o intervalo limitado "aberto" em a e "fechado" em b, análogo ao anterior;

(iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, o intervalo **fechado** e limitado de extremos a e b; caso em que o intervalo é limitado e contém tanto o ínfimo quanto o supremo;

(v) $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, o intervalo *aberto* e ilimitado inferiormente de extremo b, caso em que o intervalo é limitado apenas superiormente, mas seu supremo não pertence ao intervalo;

(vi) $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ e $[a, +\infty)$ têm nomenclaturas, definições e justificativas análogas aos anteriores.

Em geral, não se escreve (a, b) com $b \leq a$ pois, em tais situações, $(a, b) = \emptyset$. Futuramente, veremos que os intervalos de $\mathbb{R}$ são, precisamente, os seus subconjuntos *conexos*. Mas não há razão para adiantar tanto as coisas. △

O leitor não precisa se preocupar (muito?) com a natureza *ontológica* dos pontos $+\infty$ e $-\infty$, i.e., se eles *realmente* existem no mesmo sentido em que os números reais *existem*. Se, por um lado, os *pontos no infinito* não existem *fisicamente*, por outro lado, tampouco os pontos da reta *real* existem: afinal de contas, tudo o que tem sido descrito aqui são modelos abstratos baseados em certas intuições com motivações geométrico-físicas.

Definição 2.0.4. Diremos que um subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é **aberto em** $\overline{\mathbb{R}}$ (ou **de** $\overline{\mathbb{R}}$) se para todo $x \in A$ existir um intervalo aberto $I \subseteq A$ com $x \in I$. ¶

Exemplo 2.0.5. Por vacuidade, $\emptyset$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$, já que o contrário exigiria a existência de $x \in \emptyset$ (e...). Não é difícil se convencer de que $\overline{\mathbb{R}}$ também é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$. ▲

Exemplo 2.0.6. Intervalos abertos são abertos em $\overline{\mathbb{R}}$, já que eles testemunham a própria condição que deveriam satisfazer: explicitamente, para um intervalo aberto I e $x \in I$, o próprio I é um intervalo aberto satisfazendo $x \in I$ com $I \subseteq I$. ▲

Exemplo 2.0.7. Se $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ são abertos em $\overline{\mathbb{R}}$, então $A \cap B$ também é: se $A \cap B = \emptyset$, ótimo; se não, então para $x \in A \cap B$ existem intervalos abertos $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ que testemunham o fato de A e B serem abertos com $x \in A \cap B$, i.e., tais que $x \in I \cap J$, $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$; como a interseção de intervalos é intervalo (Exercício 0.73), segue em particular que a interseção de dois intervalos abertos é um intervalo aberto; da arbitrariedade do ponto x tomado, conclui-se que $A \cap B$ é aberto. ▲

Exemplo 2.0.8. Por fim, se $A_i \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$ para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$, posto que para $x \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ existe $j \in \mathcal{I}$ com $x \in A_j$, acarretando a existência de um intervalo aberto $I \subseteq A_j$ com $x \in I$ e, consequentemente, $I \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$. ▲

Exemplo 2.0.9. Intervalos *fechados* de algum lado não costumam ser *abertos* em $\overline{\mathbb{R}}$. Para $I := [0, \alpha)$, por exemplo, não existe intervalo aberto $J \subseteq I$ com $0 \in J$, já que todo intervalo aberto que contém 0 também contém um intervalo aberto da forma $(-r, r)$ para r real com $r > 0$. ▲

Com a terminologia introduzida pela Definição 2.0.0, os Exemplos 2.0.5, 2.0.7 e 2.0.8 mostram que a família

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}} := \left\{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} : \forall x \in A \, \text{existe um intervalo aberto } \; I \subseteq \overline{\mathbb{R}} \, \text{tal que } x \in I \subseteq A\right\}$$

define uma *topologia em* $\overline{\mathbb{R}}$: esta é a **topologia usual da reta estendida**. Já o Exemplo 2.0.9, por sua vez, esconde uma caracterização mais expressiva para a Definição 2.0.4.

Proposição 2.0.10. *Sejam $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ um aberto de $\overline{\mathbb{R}}$ e $a \in A$ um ponto.*

(i) *Se $a \in \mathbb{R}$, então existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subseteq A$.*

(ii) *Se $a := +\infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ tal que $(M, +\infty] \subseteq A$.*

(iii) *Se $a := -\infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ tal que $[-\infty, -M) \subseteq A$.*

Demonstração. Para o primeiro caso, existe um intervalo aberto $I \subseteq A$ com $a \in I$, onde I é uma interseção finita de intervalos abertos fundamentais. Como $a \in \mathbb{R}$, não há perda de generalidade em assumir $I = (\alpha, \beta)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$, de modo que basta tomar $r := \min\{a - \alpha, \beta - a\}$, já que qualquer $x \in (a - r, a + r)$ satisfaz $x \in (\alpha, \beta)$, dado que

$$\alpha \leq a - r < x < a + r \leq \beta.$$

Para o segundo caso, note que se $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto com $+\infty \in I$, então I é um intervalo aberto fundamental da forma $(\alpha, +\infty]$ com $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$. Logo, se $+\infty \in A$, então existe $\alpha \neq +\infty$ com $(\alpha, +\infty] \subseteq A$, de modo que qualquer $M \in \mathbb{R}$ com $M > \alpha$ satisfaz o que se pede[6]. O terceiro caso é análogo. □

Em particular, a condição (i) na proposição anterior permite definir uma noção de "aberto" em $\mathbb{R}$ que não apela para a reta estendida.

Definição 2.0.11. Diremos que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é **aberto em** $\mathbb{R}$ (ou **de** $\mathbb{R}$) se para todo $x \in A$ existir $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$. ¶

Exercício 2.2. Mostre que os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ são abertos. ■

Exercício 2.3. Mostre que a família $\tau_{\mathbb{R}}$ formada pelos subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$. ■

Definição 2.0.12. Para facilitar futuras referências: a topologia acima será chamada de **topologia usual da reta**. ¶

Exercício 2.4. Mostre que $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, existe $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ aberto em $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $B \cap \mathbb{R} = A$. ■

[6] A princípio, α poderia ser $-\infty$.

Observação 2.0.13 (**Importante**: abertos $\neq$ intervalos abertos)**.** Nem todo subconjunto aberto em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Por exemplo, o subconjunto $U := (1,3) \cup (5,7)$ é aberto em $\mathbb{R}$, mas não é um *intervalo*[7]: U é aberto por ser reunião dos (intervalos) abertos $(1,3)$ e $(5,7)$; no entanto, U não é intervalo, já que $2, 6 \in U$ com $2 < 4 < 6$ e, mesmo assim, $4 \notin U$. Evidentemente, tais ressalvas se aplicam a $\overline{\mathbb{R}}$. △

Em certo sentido, a condição de "ser aberto" tenta capturar de modo *qualitativo* um comportamento *quantitativo* fundamental apresentado pelos intervalos abertos. Dado qualquer ponto $a \in (0,1)$, por exemplo, sempre é possível obter outro intervalo *menor* em torno de a que esteja inteiramente contido em $(0,1)$: basta usar uma lupa muito boa e um lápis suficientemente afiado. Como veremos na seção sobre *continuidade*, essa abordagem generalista permite investigar problemas de convergência por meio de diferentes armas *métricas*. Por falar nelas...

2.0.1 Métricas e suas bolas

Definição 2.0.14. Dado um conjunto X, diz-se que uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é uma **métrica** se para quaisquer $x, y, z \in X$ ocorrer

(i) (positividade)[8] $d(x,y) \geq 0$,

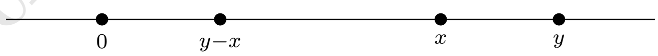
(ii) (*discernibilidade*) $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,

(iii) (simetria) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iv) (**desigualdade triangular**) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Em tal situação, diz-se que $\langle X, d\rangle$ é um **espaço métrico** – embora, geralmente, diga-se apenas que X é um espaço métrico, com a métrica d implícita pelo contexto. O número real $d(x,y)$ denota a *distância entre x e y*. ¶

Exemplo 2.0.15 (Métrica usual de $\mathbb{R}$)**.** As condições acima claramente tentam imitar o comportamento da função $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dada por $d(x,y) := |x - y|$, que ao ser interpretada geometricamente, *mede* a distância entre os números reais x e y. ▲



A métrica em $\mathbb{R}$ induzida por seu valor absoluto é caso particular de uma situação bem mais geral. Para o que segue, convém rever a Definição 1.1.11.

Definição 2.0.16. Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Diz-se que $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ é uma **norma** se para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valer

(*i*) $\|u\| \geq 0$,

(*ii*) $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0_E$,

(*iii*) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$, e

(*iv*) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

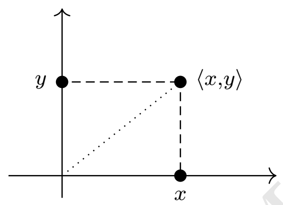
[7] No sentido da definição de intervalo! Pode ser útil conferir a Observação 2.0.3.

[8] Exigir isso é supérfluo diante dos outros axiomas: $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,y) = d(x,y)$.

Em tal situação, diz-se que $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é um **espaço normado** – embora, geralmente, diga-se apenas que E é um espaço normado, com a norma $\|\cdot\|$ implícita pelo contexto. O número real $\|x\|$ denota a *norma de* x. ¶

Sempre que $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é um espaço normado, a função $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(u, v) := \|u - v\|$ é uma métrica em E, posto que cada uma das condições acima assegura a condição correspondente na definição de métrica (verifique?). Em tal situação, diz-se que a métrica d é **induzida** pela norma $\|\cdot\|$.

Exemplo 2.0.17. A **norma euclidiana** em $\mathbb{R}^2$ é a função $\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que associa cada par $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ ao número real $\|\langle x, y\rangle\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}$. *Intuitivamente*, ela corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo determinado pelos pontos $\langle 0, 0\rangle$, $\langle x, 0\rangle$ e $\langle x, y\rangle$, como na figura abaixo.



Das exigências para ser uma norma, apenas a última[9] não é imediata: dados $u := \langle x, y\rangle$ e $v := \langle x', y'\rangle$, deve-se verificar a desigualdade $\|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$, i.e.,

$$\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x')^2 + (y')^2}. \tag{2.2}$$

Para isso, observe que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \bullet v)$, onde $u \bullet v$ *abrevia* a expressão $xx' + yy'$. Ocorre que $|u \bullet v| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$, em virtude do

Lema 2.0.18 (Cauchy-Schwarz[10])**.** *Para quaisquer* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *vale* $|u \bullet v| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$.

Demonstração. Note que para $u := \langle x, y\rangle$ e $v := \langle x', y'\rangle$, temos

$$\begin{aligned}(xy' - x'y)^2 + (x'y - xy')^2 &= x^2(y')^2 - 2xx'yy' + (x')^2y^2 + (x')^2y^2 - 2xx'yy' + x^2(y')^2 = \\ &= 2(x^2 + y^2)((x')^2 + (y')^2) - 2(xx' + yy')^2 = \\ &= 2\|u\|_2^2 \cdot \|v\|_2^2 - 2(u \bullet v)^2,\end{aligned}$$

acarretando $(u \bullet v)^2 \leq \|u\|_2^2 \cdot \|v\|_2^2$ (por quê?!). Logo, em virtude do Exercício 1.50, segue o resultado. □

De volta ao processo de demonstrar (2.2): a desigualdade de Cauchy-Schwarz permite afirmar que $\|u + v\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\|u\|_2 \cdot \|v\|_2 = (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$, donde a desigualdade desejada segue. ▲

Exemplo 2.0.19 (Outras normas em $\mathbb{R}^2$)**.** Embora a norma euclidiana seja visualmente mais agradável, ela não constitui a única forma de medir distâncias em $\mathbb{R}^2$. A **norma da soma**[11] é a função $\|\cdot\|_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que faz $\|\langle x, y\rangle\|_1 := |x| + |y|$ para cada $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. *Intuitivamente*, ela corresponde à distância percorrida para chegar de $\langle 0, 0\rangle$ até $\langle x, y\rangle$ por meio dos catetos do triângulo determinado por $\langle 0, 0\rangle$, $\langle x, 0\rangle$ e $\langle x, y\rangle$.

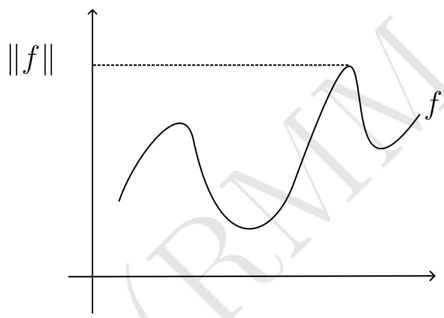
[9] *A.k.a.* desigualdade triangular para normas.
[10] Para a versão geral da desigualdade de Cauchy-Schwarz, confira o Exercício 2.32.
[11] Também xingada de *norma do táxi*.

A **norma do máximo** é a função $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que faz $\|\langle x, y\rangle\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$ para qualquer par $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. *Intuitivamente*, o maior cateto do triângulo determinado por $\langle 0, 0\rangle$, $\langle x, 0\rangle$ e $\langle x, y\rangle$ passa a representar a norma de $\langle x, y\rangle$. ▲

Exercício 2.5. Mostre que as normas da soma e do máximo são, de fato, normas em $\mathbb{R}^2$. ■

Observação 2.0.20. Evidentemente, as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são distintas entre si, no sentido de que para um mesmo vetor $u \in \mathbb{R}^2$, os números $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ e $\|u\|_\infty$ podem ser dois a dois distintos. Por exemplo, para $u := \langle 1, 1\rangle$, verifica-se $\|u\|_1 = 2$, $\|u\|_2 = \sqrt{2}$ e $\|u\|_\infty = 1$. Não obstante, todas essas normas são *topologicamente indistinguíveis*, como veremos oportunamente. △

Exemplo 2.0.21 (Adiável: norma de funções)**.** Para um conjunto X fixado, podemos considerar o conjunto $\mathcal{B}(X)$ cujos elementos são todas as *funções limitadas* da forma $X \to \mathbb{R}$, i.e., $\mathcal{B}(X) := \big\{f \in \mathbb{R}^X : \exists M > 0 \text{ com } |f(x)| \leq M \text{ para todo } x \in X\big\}$. Em particular, como a imagem de cada $f \in \mathcal{B}(X)$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ limitado (superiormente), é lícito considerar o número $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$.



A notação $\|\cdot\|_\infty$ adotada acima não é acidental, e se deve ao seguinte: $\mathcal{B}(X)$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e, mais ainda, a correspondência $f \mapsto \|f\|_\infty$ determina uma norma, muitas vezes xingada de **norma do supremo**. A primeira parte da afirmação se deve ao fato de que $f + g$, $f \cdot g \in \mathcal{B}(X)$ sempre que $f, g \in \mathcal{B}(X)$ (verifique?)[12]. Para a segunda parte: as condições (i), (ii) e (iii) na definição de norma são automáticas, ao passo que para $f, g \in \mathcal{B}(X)$, tem-se

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

para qualquer $x \in X$, mostrando que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ é limitante superior do conjunto $\{|f(x) + g(x)| : x \in X\}$ e, portanto, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ▲

Exemplo 2.0.22. No caso particular em que X é finito, digamos $X := \{b_1, \ldots, b_n\}$, as funções de $\mathcal{B}(X)$ se comportam, essencialmente, como as n-uplas de $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, a função que associa cada $f \in \mathcal{B}(X)$ à n-upla $\langle f(b_1), \ldots, f(b_n)\rangle$ é um *isomorfismo de espaços vetoriais* – o que, neste caso, significa dizer que a função é $\mathbb{R}$-linear e bijetora. Em particular, como a notação sugere, o espaço normado $\langle \mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\rangle$ é um espaço da *forma* $\langle \mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty\rangle$: basta tomar X como um conjunto com dois elementos. ▲

[12] Para leitores versados em Álgebra Linear: $\mathcal{B}(X)$, que obviamente contém a função nula, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^X$.

Observação 2.0.23. Nem toda métrica é induzida por uma norma. Primeiro: enquanto normas exigem estrutura vetorial no ambiente em que se inserem, métricas são definíveis em qualquer conjunto. Logo, enquanto uma métrica d sobre um *conjunto* X permite considerar qualquer subconjunto $Y \subseteq X$ como ***subespaço* métrico**[13], o mesmo não pode ser dito para subconjuntos de espaços normados, já que nem todo subconjunto de um espaço vetorial é um espaço vetorial.

Segundo: a métrica induzida por uma norma respeita as dilatações e contrações provocadas pela multiplicação. Com efeito, se d é a métrica num espaço vetorial E induzida por uma norma $\|\cdot\|$, então para $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, verifica-se facilmente que $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$. Em particular, $d \colon E \times E \to \mathbb{R}$ é *ilimitada*, i.e., para todo $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$, existem $x, y \in E$ tais que $d(x, y) > M$. Ocorre que nem toda métrica é ilimitada. △

Exercício 2.6. Seja $\langle E, \|\cdot\| \rangle$ um espaço normado. Defina $d_L \colon E \times E \to \mathbb{R}$ pela regra

$$d_L(u, v) := \frac{\|u - v\|}{1 + \|u - v\|},$$

e mostre que d_L é uma métrica sobre E. Tal métrica é induzida por *alguma* norma?[14] ■

Exercício 2.7. Dado um conjunto X qualquer, mostre que a função $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ que faz $d(x, y) := 0$ se $x = y$, e $d(x, y) := 1$ caso contrário, é uma métrica em X, chamada de **métrica zero-um**. Faz algum sentido perguntar se ela é induzida por uma norma? ■

Os exemplos acima devem ter ajudado a evidenciar a vasta gama de objetos que podem ser tratados como espaços métricos. O próximo passo é observar que a definição dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ pode ser feita em termos de sua métrica natural: com efeito, para (α, β) com $\alpha < \beta$, ao fazer $x := \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $r := \frac{\beta-\alpha}{2}$, resulta

$$(\alpha, \beta) = (x - r, x + r) = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) < r\}.$$

Exercício 2.8. Convença-se de que as identidades acima estão certas. ■

Uma vez que a última encarnação do intervalo aberto (α, β) usa apenas a noção de métrica presente em $\mathbb{R}$, abrem-se as portas para generalizar a noção de intervalo aberto em espaços métricos.

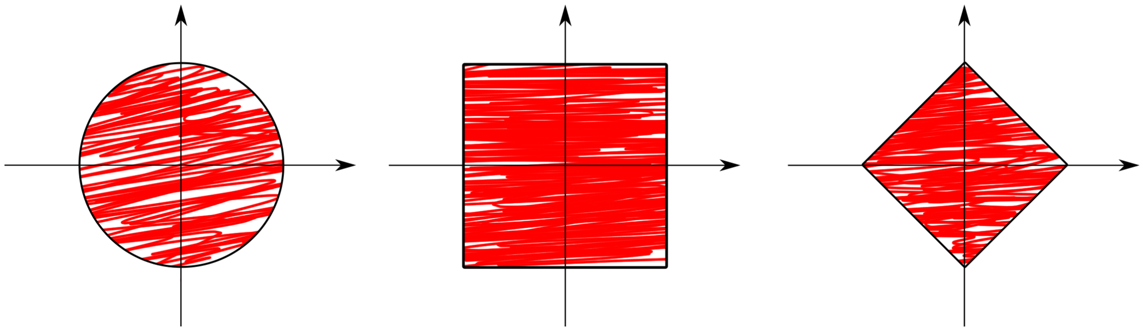
Definição 2.0.24. Dado um espaço métrico $\langle X, d \rangle$, para cada ponto $x \in X$ e número real $r > 0$, define-se a **d-bola aberta de centro x e raio r** como sendo a família $B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Quando não houver risco de confusão, o sufixo "d-" será suprimido. ¶

Exemplo 2.0.25 (Bolas em $\mathbb{R}^2$)**.** O uso da palavra "bola" é motivado pela interpretação geométrica das *bolas* definidas por meio das normas euclidianas em $\mathbb{R}^2$ (no plano) e $\mathbb{R}^3$ (no espaço[15]), como sugerido pela figura a seguir, à esquerda.

[13] Basta definir $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ fazendo $d_Y(y, y') := d(y, y')$ para qualquer par $\langle y, y' \rangle \in Y \times Y$, já que tais pares evidentemente pertencem a $X \times X$ (que é o domínio de d, por definição).

[14] Cuidado para não confundir a sua linguagem natural com as terminologias explicitamente definidas. No caso, uma métrica d é induzida por uma norma se ocorrer exatamente $d(x, y) := \|x - y\|$ para quaisquer x e y. O mero fato de se *usar* uma norma na definição de uma métrica, como na métrica d_L, não significa que a última é induzida pela primeira.

[15] Em $\mathbb{R}^3$, a norma euclidiana faz $\| \langle x, y, z \rangle \|_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Em tempo, o leitor pode ter se indagado sobre o significado do subíndice "2" em "$\|\cdot\|_2$": trata-se de um indicativo implícito à raiz quadrada. Em contextos mais avançados, é comum utilizar normas da forma $\|\cdot\|_p$, definidas em termos de potências e raízes p-ésimas.



No entanto, o leitor deve se desvincular o quanto antes da ideia de que bolas precisam ser "redondas". Chamando por d_∞ a métrica em $\mathbb{R}^2$ induzida pela norma do máximo, não é difícil perceber que $B_{d_\infty}(0,1)$ corresponde ao quadrado central na figura anterior.

Exercício 2.9. Convença-se de que as afirmações anteriores estão certas. ■

Da mesma forma, chamando por d_1 a métrica em $\mathbb{R}^2$ induzida pela norma da soma, a bola $B_{d_1}(0,1)$ corresponde ao último quadrado na figura anterior, à direita. Com efeito, deve-se ter $u := \langle x,y\rangle \in B_{d_1}(0,1)$ se, e somente se, $\|u\|_1 < 1$, i.e., $|x|+|y|<1$. Ocorre que tal desigualdade equivale a $|x|-1<y<1-|x|$, e os pontos $\langle x,y\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ com tal propriedade são, precisamente, aqueles que se encontram na interseção das duas regiões esboçadas na Figura 2.0. ▲

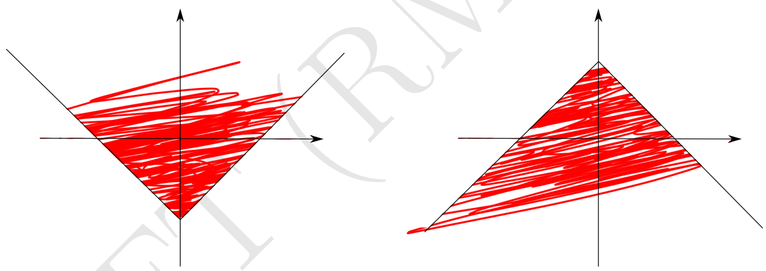
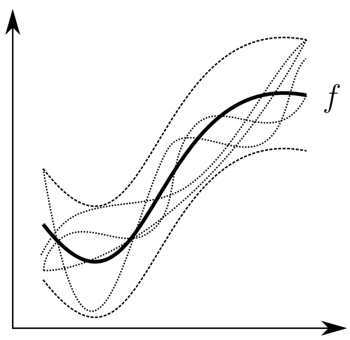


Figura 2.0: Os gráficos das inequações $|x|-1<y$ e $y<1-|x|$, respectivamente.

Exemplo 2.0.26 (Adiável: bolas em $\mathcal{B}(X)$)**.** Embora $\mathcal{B}(X)$ seja, frequentemente, um espaço vetorial com *dimensão infinita*[16], é possível interpretar graficamente o que seria uma bola em torno de uma função limitada $f\colon X\to\mathbb{R}$.



[16] A *dimensão* de um espaço vetorial é a cardinalidade de qualquer uma de suas bases, que por sua vez são subconjuntos *linearmente independentes* que geram o espaço vetorial.

Chamando por d_∞ a métrica em $\mathcal{B}(X)$ induzida pela norma do supremo, uma função limitada $g\colon X \to \mathbb{R}$ pertence à bola aberta $B_{d_\infty}(f, r)$ se $\|f - g\|_\infty < r$, o que por sua vez assegura que $|f(x) - g(x)| < r$ para todo $x \in X$. Logo, pode-se pensar em $B_{d_\infty}(f, r)$ como o conjunto das funções cujo gráfico fica inteiramente contido na "faixa" de raio r determinada *em torno* do gráfico de f. Embora não seja a interpretação mais precisa[17], ela é razoável para ajudar leitores *apegados* à intuição geométrica. ▲

Exemplo 2.0.27 (Bolas unitárias)**.** Ao considerar um conjunto X com a métrica zero-um (Exercício 2.7), têm-se apenas dois tipos de bolas abertas: para $0 < r < 1$, $B_d(x, r) = \{x\}$ para qualquer $x \in X$, enquanto $B_d(x, r) = X$ para todo $r \geq 1$. ▲

Observação 2.0.28 (Importante). Sempre que nos referirmos a alguma "bola" num espaço métrico, deve-se ter em mente que há uma métrica fixada subjacente. Assim, por exemplo, só faz sentido dizer que $\{2\}$ é uma bola aberta em $\mathbb{R}$ se estivermos considerando $\mathbb{R}$ com a métrica zero-um, uma vez que em sua métrica usual, bolas necessariamente contêm intervalos não-vazios. △

Com os intervalos abertos generalizados para espaços métricos quaisquer, definir a *topologia* de um espaço métrico se torna um evento inevitável.

Definição 2.0.29. Para um espaço métrico $\langle X, d\rangle$, diremos que um subconjunto $A \subseteq X$ é **aberto em** X (ou **de** X) se para todo $x \in A$ existir $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq A$. ¶

Exercício 2.10. Mostre que bolas abertas são abertas. ■

Na prática, a definição acima determina como abertos em X todos os subconjuntos que podem ser expressos como reuniões de bolas abertas. De fato, se A é aberto, então para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_d(x, r_x) \subseteq A$, acarretando

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B_d(x, r_x) \subseteq A.$$

Por outro lado, é claro que se $x \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_d(y_i, r_i)$, então $x \in B_d(y_j, r_j)$ para algum $j \in \mathcal{I}$, donde o exercício anterior assegura $r > 0$ com $B_d(x, r) \subseteq B_d(y_j, r_j) \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_d(y_i, r_i)$.

Proposição 2.0.30. *A família τ_d composta pelos subconjuntos abertos em X constitui uma topologia em X.*

Demonstração. A argumentação é similar à que se utilizou para mostrar que $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ é uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$, exceto pelo seguinte: enquanto a interseção de intervalos é um intervalo, a interseção de bolas abertas não precisa ser uma bola aberta. Porém, trata-se de um problema contornável: dados abertos $A, B \subseteq X$ e $x \in A \cap B$, existem $r, s > 0$ tais que $B_d(x, r) \subseteq A$ e $B_d(x, s) \subseteq B$, de modo que para $t := \min\{r, s\}$ verifica-se $B_d(x, t) \subseteq A \cap B$. O leitor fica a cargo do restante. □

A menos de menção contrária explícita, todo espaço métrico $\langle X, d\rangle$ será considerado com a topologia τ_d discutida acima, que para efeitos de referência será xingada de **topologia usual do espaço métrico** X. Claramente, a topologia usual de $\mathbb{R}$ explicitada no Exercício 2.3 é a topologia usual de $\mathbb{R}$ como espaço métrico com a métrica $d(x, y) := |x - y|$. A proposição a seguir, por outro lado, pode não ser tão clara.

[17] A rigor, $B_\infty(f, r)$ é a reunião das "faixas" de raio r' em torno do gráfico de f, para cada $r' \in (0, r)$ (por quê?).

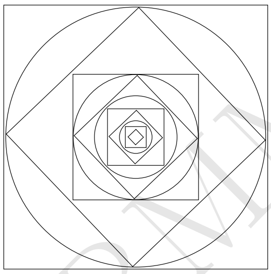
Proposição 2.0.31. *As topologias τ_1, τ_2 e τ_∞ em $\mathbb{R}^2$ induzidas pelas métricas d_1, d_2 e d_∞, respectivamente, são idênticas.*

Demonstração. É suficiente mostrar as inclusões $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $\tau_2 \subseteq \tau_\infty$ e $\tau_\infty \subseteq \tau_1$, o que é bem mais fácil entender do que escrever (vide a figura que sucede esta prova). Para a primeira inclusão, por exemplo, deve-se tomar $A \in \tau_1$ a fim de mostrar que $A \in \tau_2$: ora, para assegurar $A \in \tau_2$, para cada $u \in A$ *precisa* existir uma bola $B_{d_2}(u, r) \subseteq A$ para *algum* $r > 0$; por outro lado, por A ser aberto da topologia τ_1, tem-se garantida a existência de $s > 0$ com $B_{d_1}(u, s) \subseteq A$; chamando $u := \langle x, y\rangle$ e $v := \langle a, b\rangle$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz assegura que

$$\|u - v\|_1^2 = (|x - a| + |y - b|)^2 \leq (|x - a|^2 + |y - b|^2)(1 + 1) = 2\|u - v\|_2^2,$$

donde segue que basta tomar $r := \frac{s}{\sqrt{2}}$, pois daí $B_{d_2}(u, r) \subseteq B_{d_1}(u, s) \subseteq A$.

De modo análogo, para a segunda e terceira inclusões, basta mostrar que para quaisquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $s > 0$, existem $r > 0$ e $r' > 0$ com $B_{d_\infty}(u, r) \subseteq B_{d_2}(u, s)$ e $B_{d_1}(u, r') \subseteq B_{d_\infty}(u, s)$, tarefa que fica a cargo do leitor. □



Exercício 2.11. Complete a demonstração anterior. Dica: para a segunda inclusão, use $r := \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}$; para a terceira, observe que se $a, b, c \geq 0$ com $a + b < c$, então $a, b < c$. ■

Definição 2.0.32. Para facilitar futuras referências, diremos que a topologia em $\mathbb{R}^2$ induzida por qualquer uma das métricas d_1, d_2 ou d_∞ é a **topologia usual de** $\mathbb{R}^2$. ¶

Exercício 2.12. Mostre que se X é dotado da métrica zero-um, então todo subconjunto de X é aberto. Conclua que, ao fazer $X := \mathbb{R}$, a topologia induzida pela métrica zero-um difere da topologia usual de $\mathbb{R}$. ■

Num primeiro momento, a proposição acima parece tão clara quanto inútil: normas e métricas diferentes podem induzir a mesma topologia. A aparente irrelevância dessa informação, porém, desaparecerá no momento em que discutirmos *continuidade* e *convergência*: duas noções importantíssimas e que, secretamente, dependem unicamente da topologia de um espaço. Porém, a narrativa exige mais um subtópico antes de avançarmos.

2.0.2 Subespaços e produtos

A Observação 2.0.23 abordou, entre outras coisas, a possibilidade de utilizar a métrica de um espaço métrico $\langle X, d\rangle$ para tratar qualquer subconjunto $Y \subseteq X$ como espaço métrico: explicitamente, declara-se $d_Y(y, y') := d(y, y')$ para quaisquer $y, y' \in Y$, o que na prática significa *medir as distâncias* entre pontos num subconjunto "menor" da mesma forma que se faz no conjunto "maior". A naturalidade dessa ideia se reflete na identidade

$$B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y,$$

que o leitor não deve ter dificuldades para verificar. Consequentemente:

Proposição 2.0.33. *Nas condições acima, $A \subseteq Y$ é aberto em Y se, e somente se, existe $B \subseteq X$ aberto em X tal que $A = B \cap Y$.*

Demonstração. Se A é aberto em Y, então para cada $y \in A$ existe $r_y > 0$ satisfazendo $B_{d_Y}(y, r_y) \subseteq A$. Logo, ao fazer $B := \bigcup_{y \in Y} B_d(y, r_y)$, tem-se B aberto em X e

$$A = \bigcup_{y \in A} B_{d_Y}(y, r_y) = \bigcup_{y \in A} B_d(y, r_y) \cap Y = \left(\bigcup_{y \in A} B_d(y, r_y) \right) \cap Y = B \cap Y.$$

Por outro lado, se B é aberto em X e $A = B \cap Y$, então para $y \in A \subseteq B$ qualquer existe $r > 0$ com $B_d(y, r) \subseteq B$, de modo que

$$B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y \subseteq B \cap Y = A,$$

mostrando que A é aberto em Y. □

A proposição acima sugere como promover subconjuntos de espaços topológicos ao patamar de espaços topológicos ou, posto de outra forma, como definir os abertos de um subconjunto num espaço topológico.

Definição 2.0.34. Dado um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ e um subconjunto $Y \subseteq X$, diremos que $A \subseteq Y$ é **aberto em** Y se existir $B \subseteq X$ aberto em X satisfazendo $A = B \cap Y$. ¶

Proposição 2.0.35. *A família τ_Y dos subconjuntos abertos em Y constitui uma topologia em Y.*

Demonstração. Note que $\emptyset$ e Y são abertos em Y pois $\emptyset = \emptyset \cap Y$ e $Y = X \cap Y$. Para a interseção, observe que se $A = B \cap Y$ e $A' = B' \cap Y$, então $A \cap A' = (B \cap B') \cap Y$. Finalmente, se para cada $i \in \mathcal{I}$ tem-se $A_i = B_i \cap Y$ para $B_i \subseteq X$ aberto em X, então $B := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_i$ é aberto em X e $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = B \cap Y$. □

Observação 2.0.36 (Opcional: uso desnecessário do Axioma da Escolha)**.** Implicitamente, ao definir B, escolhemos um $B_i \subseteq X$ satisfazendo $A_i = B_i \cap Y$ para cada $i \in \mathcal{I}$, o que exige o Axioma da Escolha nas situações em que $\mathcal{I}$ é infinito. Isto pode ser evitado ~~mas a que custo?~~: basta definir $C := \{x \in X : \text{existem } i \in \mathcal{I} \text{ e } D \subseteq X \text{ aberto em } X \text{ com } x \in D \text{ e } A_i = D \cap Y\}$, que também é aberto em X e satisfaz $A = C \cap Y$. △

Definição 2.0.37. Nas condições acima, Y será chamado de **subespaço (topológico)** de X. ¶

Exemplo 2.0.38 ($\mathbb{R}$ como subespaço de $\overline{\mathbb{R}}$)**.** O Exercício 2.4 estabeleceu $\mathbb{R}$ (com sua topologia usual) como subespaço de $\overline{\mathbb{R}}$ (com sua topologia usual). ▲

Exemplo 2.0.39 (Intervalos como subespaços de $\mathbb{R}$)**.** Fixado um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, tem-se $A \subseteq I$ aberto em I se, e somente, existe um aberto $V \subseteq \mathbb{R}$ com $V \cap I = A$. Em particular, para $I := [0, 4)$, o conjunto $A := [0, 1)$ é aberto em I pois $A = I \cap (-1, 1)$. O importante a destacar, porém, é o seguinte: A não é aberto em $\mathbb{R}$! Com efeito, nenhum intervalo aberto J com $0 \in J$ está inteiramente contido em $[0, 1)$. Moral da história: para decidir se um subconjunto é aberto ou não, deve-se levar em conta o espaço *ambiente*. ▲

Exercício 2.13. Como são os abertos do intervalo $[-1, 1]$? Você já viu abertos parecidos ao longo do texto? ■

Exemplo 2.0.40 ($\mathbb{Z}$ como subespaço)**.** Para todo $z \in \mathbb{Z}$, tem-se $\{z\}$ aberto em $\mathbb{Z}$ quando este é visto como subespaço de $\mathbb{R}$: basta observar que $\{z\} = \left(z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z}$. Em particular, todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ é aberto em $\mathbb{Z}$, posto que reunião arbitrária de abertos é aberta. Por fim, observe que a topologia de $\mathbb{Z}$ enquanto subespaço de $\mathbb{R}$ é a mesma que $\mathbb{Z}$ teria como espaço métrico se a métrica considerada fosse a zero-um (confira o Exercício 2.12). ▲

Definição 2.0.41. Dizemos que um ponto p de um espaço topológico X é **isolado** (em X) se $\{p\}$ é aberto em X. O espaço é **discreto** se todos os seus pontos são isolados. ¶

Exemplo 2.0.42. *Quase* todos os pontos de $X := \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ são isolados em X, onde X é considerado com a topologia de subespaço *herdada* de $\mathbb{R}$. Com efeito, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, não é difícil encontrar $r > 0$ tal que $\left(\frac{1}{2^n} - r, \frac{1}{2^n} + r\right) \cap X = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. A exceção fica por conta do ponto 0: para qualquer $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ com $0 \in U$ se verifica $U \cap X \neq \{0\}$. Mais do que isso é verdade: para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sempre que $n \geq N$. Com isso dito, observe que nenhum ponto de X é isolado em $\mathbb{R}$, já que todo aberto não-vazio de $\mathbb{R}$ contém um intervalo não-trivial. ▲

Espaços topológicos também podem *interagir* uns com os outros em processos que geram novos espaços, e um dos métodos mais utilizados é, secretamente, sugerido pela norma/distância do máximo em $\mathbb{R}^2$: observe que para $u := \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$, vale a identidade

$$B_{d_\infty}(u, r) = (x - r, x + r) \times (y - r, y + r),$$

i.e., a bola (na norma do máximo) com centro u e raio r em $\mathbb{R}^2$ é o produto cartesiano das bolas em $\mathbb{R}$ de raio r com centros em x e y, respectivamente. Explicitamente, os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ expressos como produtos cartesianos de abertos de $\mathbb{R}$ se comportam como abertos *básicos* para a topologia de $\mathbb{R}^2$, no sentido de que todo aberto de $\mathbb{R}^2$ é reunião desses abertos básicos. Isto pode ser feito em cenários bem mais gerais.

Definição 2.0.43. Para espaços topológicos X e Y, diremos que $A \subseteq X \times Y$ é **aberto** (em $X \times Y$) se para qualquer $a \in A$ existirem subconjuntos $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ abertos (em X e Y, respectivamente) tais que $a \in U \times V$ e $U \times V \subseteq A$. ¶

Exercício 2.14. Mostre que a família $\tau_{X\times Y}$ dos subconjuntos abertos em $X \times Y$ determina uma topologia em $X \times Y$. ■

Definição 2.0.44. A topologia $\tau_{X\times Y}$ em $X \times Y$ definida pelas condições anteriores será chamada de **topologia produto**. ¶

Exercício 2.15. Para $X := Y := \mathbb{R}$, mostre que a topologia produto em $\mathbb{R}^2$ é a topologia usual de $\mathbb{R}^2$. ■

Nas situações em que X e Y são espaços métricos, também é possível dotar $X \times Y$ de uma métrica $d_{X\times Y}$ cuja topologia induzida é, precisamente, a topologia produto: basta fazer $d_{X\times Y}(\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$, que claramente satisfaz

$$B_{d_{X\times Y}}(\langle x, y\rangle, r) = B_{d_X}(x, r) \times B_{d_Y}(y, r).$$

Embora possa ser uma abordagem mais intuitiva para lidar com produtos, nem todos os espaços da forma $X \times Y$ que serão tratados no texto vêm de fábrica com métricas explícitas: o caso mais marcante será $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ e seus subespaços. A princípio, não é possível *estender* a métrica usual de $\mathbb{R}$ à uma métrica em $\overline{\mathbb{R}}$ posto que métricas têm valores limitados por definição – e gostaríamos que $d(+\infty, r) = +\infty$, por exemplo[18].

[18] Apesar de ser possível definir uma métrica *mais ou menos* artificial em $\overline{\mathbb{R}}$ (confira o Exercício 2.34), a utilização de seus intervalos abertos gera argumentos bem mais razoáveis.

Definição 2.0.45. Em particular, os seguintes subespaços de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ serão bastante importantes:

(i) $\mathcal{A}_\infty := (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{\langle -\infty, +\infty\rangle, \langle +\infty, -\infty\rangle\}$, o subconjunto dos pontos em que a adição usual de $\mathbb{R}$ pode ser *estendida* de forma *contínua*; e

(ii) $\mathcal{M}_\infty := (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{\langle -\infty, 0\rangle, \langle 0, -\infty\rangle, \langle +\infty, 0\rangle, \langle 0, +\infty\rangle\}$, o subconjuntos dos pontos em que a multiplicação usual de $\mathbb{R}$ pode ser *estendida* de forma *contínua*. ¶

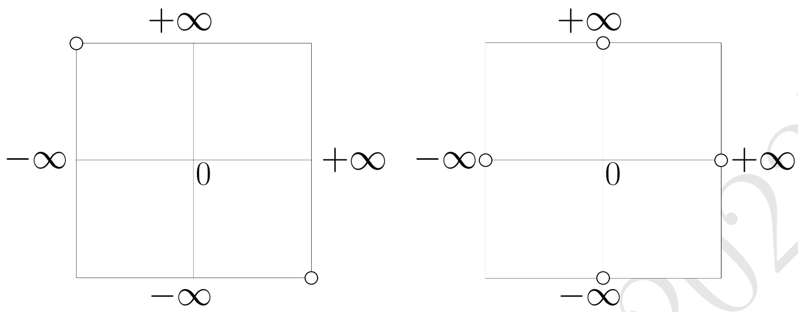


Figura 2.1: Os subconjuntos $\mathcal{A}_\infty$ (à esquerda) e $\mathcal{M}_\infty$ (à direita): os círculos nas extremidades de cada figura indicam os pontos retirados do "quadrado" $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Exemplo 2.0.46. Para $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty$, vamos definir $s(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}$ da seguinte forma:

(i) $s(\alpha, \beta) := \alpha + \beta \in \mathbb{R}$ se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(ii) $s(\alpha, \beta) := +\infty$ se $+\infty \in \{\alpha, \beta\}$;

(iii) $s(\alpha, \beta) := -\infty$ se $-\infty \in \{\alpha, \beta\}$.

Grosso modo, a função $s\colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ estende a soma usual de $\mathbb{R}$ de modo *razoável*, no seguinte sentido: para $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle \in \mathcal{A}_\infty$ fixado e $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty$ qualquer, os valores de $s(\alpha, \beta)$ se tornam *mais próximos* de $s(\alpha_0, \beta_0)$ à medida em que $\langle \alpha, \beta\rangle$ se aproxima de $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle$.

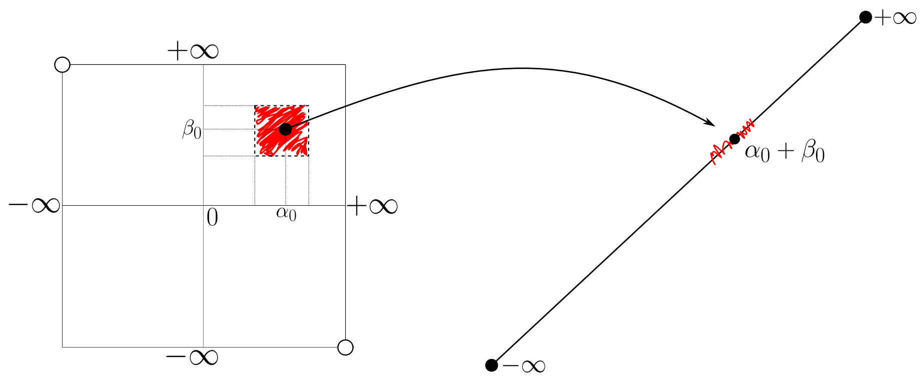
Tal afirmação não é problemática quando $s(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}$: em tal situação, deve-se ter $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, o que permite considerar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e usar a desigualdade

$$|s(\alpha_0, \beta_0) - s(\alpha, \beta)| \leq |\alpha_0 - \alpha| + |\beta_0 - \beta|$$

para tornar $s(\alpha, \beta)$ tão próximo de $s(\alpha_0, \beta_0)$ quanto desejado. Se quisermos que a distância entre ambos seja menor do que 42, por exemplo, basta que $|\alpha_0 - \alpha|, |\beta_0 - \beta| < 21$; mais geralmente, para tornar $|s(\alpha_0, \beta_0) - s(\alpha, \beta)| < \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um número real, basta considerar $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathbb{R}^2$ com

$$d_\infty(\langle \alpha_0, \beta_0\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle) := \max\{|\alpha_0 - \alpha|, |\beta_0 - \beta|\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Note que apesar da roupagem numérica, o argumento acima foi quase todo geométrico: a estimativa $|s(\alpha_0, \beta_0) - s(\alpha, \beta)| < \varepsilon$ se reduz a dizer que $s(\alpha, \beta)$ pertence ao intervalo aberto $I := (s(\alpha_0, \beta_0) - \varepsilon, s(\alpha_0, \beta_0) + \varepsilon)$, enquanto (2.3) consiste em dizer que $\langle \alpha, \beta\rangle$ pertence a um "quadrado aberto" em torno de $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle$. Assim, não espanta que o procedimento para lidar com os casos em que $s(\alpha_0, \beta_0) = \pm\infty$ seja análogo.



Se, por exemplo, $s(\alpha_0, \beta_0) := +\infty$ e I é *um* intervalo aberto em torno de $+\infty$, então *existem* intervalos abertos $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in J \times K$ e $s(\alpha, \beta) \in I$ sempre que $\langle \alpha, \beta \rangle \in (J \times K) \cap \mathcal{A}_\infty$. Com efeito, pode-se assumir $I := (M, +\infty]$ para algum $M > 0$, ao passo que α_0 ou β_0 devem ser $+\infty$:

- se ocorrer $\alpha_0 := +\infty$ e $\beta_0 \in \mathbb{R}$, então $J := (M + 1 - \beta_0, +\infty]$ e $K := (\beta_0 - 1, +\infty]$ são intervalos abertos de $\overline{\mathbb{R}}$ com $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in J \times K$ e $s(\alpha, \beta) > M$ sempre que $\langle \alpha, \beta \rangle \in J \times K$;
- o caso em que $\beta_0 := +\infty$ e $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é simétrico;
- se $\alpha_0 := \beta_0 := +\infty$, então basta fazer $I = J = K$.

Intuitivamente, quanto maior o $M > 0$, mais próximo se está de $+\infty$. Assim, ao tomar $\langle \alpha, \beta \rangle$ em $J \times K$, resulta $s(\alpha, \beta) > M$, i.e., $s(\alpha, \beta)$ tão próximo de $+\infty$ quanto o $M > 0$ tomado inicialmente (Figura 2.2).

Exercício 2.16. Mostre que se $s(\alpha_0, \beta_0) := -\infty$ e $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto com $s(\alpha_0, \beta_0) \in I$, então existem intervalos abertos $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tais que $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in J \times K$ e $s(\alpha, \beta) \in I$ sempre que $\langle \alpha, \beta \rangle \in (J \times K) \cap \mathcal{A}_\infty$. ■

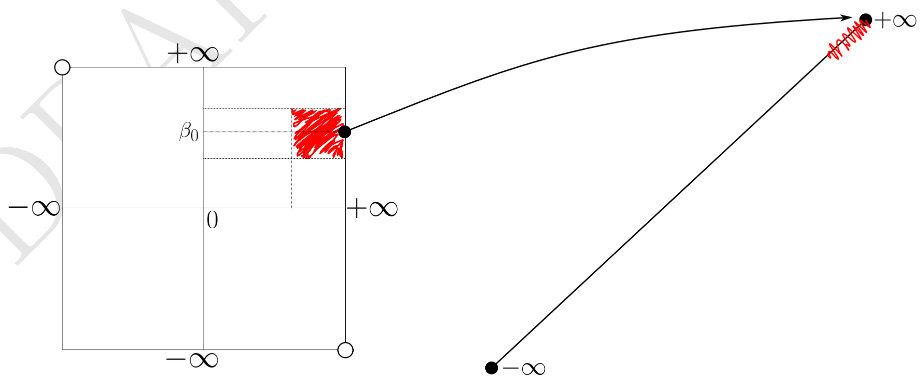


Figura 2.2: *Spoiler*: continuidade da soma em $+\infty$.

Qual a relação disso tudo com conjuntos abertos? Simples: na prática, os argumentos acima mostraram que o conjunto

$$A := \{\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{A}_\infty : s(\alpha, \beta) \in I\}$$

é aberto em $\mathcal{A}_\infty$ sempre que $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é aberto! E isto não foi acidental. ▲

Observação 2.0.47. Por que não definir $s(+\infty,-\infty)=s(-\infty,+\infty)$ como algum ponto de $\overline{\mathbb{R}}$? Afinal, há somente três tipos de candidatos: $s(+\infty,-\infty):=r\in\mathbb{R}$ para algum r, $s(+\infty,-\infty):=+\infty$ ou $s(+\infty,-\infty):=-\infty$. Resposta: nenhuma alternativa preserva a propriedade de *aproximação arbitrária*.

Exercício 2.17. Mostre que se $J,K\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ são intervalos abertos com $\langle+\infty,-\infty\rangle\in J\times K$, então para todo $r\in\mathbb{R}$ existe $\langle\alpha,\beta\rangle\in(J\times K)\cap\mathbb{R}^2$ com $\alpha+\beta=r$. ■

Logo, para qualquer escolha que se faça para $s(+\infty,-\infty)$, sempre *existe* um intervalo aberto $I\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ com $s(+\infty,-\infty)\in I$ com a seguinte propriedade: para *quaisquer* intervalos $J,K\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ com $\langle+\infty,-\infty\rangle\in J\times K$, existe um par $\langle\alpha,\beta\rangle\in J\times K$ cuja imagem por s *escapa* de I, exatamente o contrário do que se obteve nos exemplos anteriores[19]. Em resumo, e com o linguajar que será introduzido na próxima seção, não existe *função contínua* da forma $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ que estenda a soma usual em $\mathbb{R}$. △

2.1 Continuidade

Definição 2.1.0. Para espaços topológicos X e Y, uma função $f\colon X\to Y$ é **contínua** em $p\in X$ se para todo $V\subseteq Y$ aberto em Y com $f(p)\in V$ existir $U\subseteq X$ aberto em X, com $p\in U$ e $f[U]\subseteq V$. A função f é **contínua** se for contínua em todos os pontos de X.¶

Tal qual ocorreu no começo da Seção 2.0, a presente seção se inicia com uma definição pouco intuitiva e aparentemente artificial. Mas se pensarmos nos abertos em torno de $f(p)$ como graus de aproximação ou erro, a definição acima expressa apenas que $f(x)$ pode ser *arbitrariamente* aproximado de $f(p)$ desde que x seja tomado *suficientemente* próximo de p. Duvida?

Proposição 2.1.1. *Uma função $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua em $p\in\mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$ sempre que $|x-p|<\delta$.*

Demonstração. Se f é contínua em p e $\varepsilon>0$, então $V:=(f(p)-\varepsilon,f(p)+\varepsilon)$ é um (intervalo) aberto de $\mathbb{R}$ com $f(p)\in V$. Pela definição de continuidade, existe $U\subseteq\mathbb{R}$ aberto com $p\in U$ e $f[U]\subseteq V$. Ora, de acordo com a Definição 2.0.11, deve existir $\delta>0$ tal que $(p-\delta,p+\delta)\subseteq U$. Logo, se $|x-p|<\delta$, então $x\in U$ e, consequentemente, $f(x)\in V$, i.e., $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$, como desejado.

Para a recíproca, dado $V\subseteq\mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ com $f(p)\in V$, a Definição 2.0.11 assegura $\varepsilon>0$ com $(f(p)-\varepsilon,f(p)+\varepsilon)\subseteq V$. Agora, para este $\varepsilon>0$, a hipótese garante um $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$ sempre que $|x-p|<\delta$, i.e., tal que $f(x)\in(f(p)-\varepsilon,f(p)+\varepsilon)$. Logo, chamando $U:=(p-\delta,p+\delta)$, resulta $f[U]\subseteq V$, com U aberto e $p\in U$, como queríamos. □

Moral da história: uma vez fixadas topologias em X e Y, são elas as responsáveis por determinar as funções contínuas, mesmo nos casos em que uma definição aparentemente mais concreta de continuidade estiver disponível. Ao longo desta seção, veremos como a Definição 2.1.0 se desdobra em diversos subcasos importantes – e que serão usados pesadamente nos próximos capítulos.

[19] Compare os quantificadores!

2.1.0 Exemplos e propriedades elementares

Esta subseção começa com um lema que coloca os abertos de um espaço topológico como as bolas abertas de um espaço métrico. Mais precisamente:

Lema 2.1.2. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Então A é aberto se, e somente se, para cada $x \in A$ existe um aberto $B \subseteq X$ com $x \in B$ e $B \subseteq A$.*

Demonstração. Ora, se A é aberto, então basta tomar $B := A$. Para a recíproca, ao se escolher $B_x \subseteq X$ aberto para cada $x \in A$ com $B_x \subseteq A$, resulta que $A = \bigcup_{x\in A} B_x$, i.e., A é uma reunião de abertos e, portanto, A é aberto[20]. □

Proposição 2.1.3. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em todos os pontos de X se, e somente se, $f^{-1}[V] \subseteq X$ é aberto em X para todo aberto $V \subseteq Y$.*

Demonstração. Se f é contínua em todos os pontos do domínio e $V \subseteq Y$ é aberto, então de duas, uma: ou $f^{-1}[V] = \emptyset$, que é aberto em X, ou existe $x \in f^{-1}[V]$. No segundo caso, a continuidade em x garante um aberto $U \subseteq X$ com $f[U] \subseteq V$, mostrando que $U \subseteq f^{-1}[V]$. Em vista do Lema 2.1.2, segue que $f^{-1}[V]$ é aberto em X. A recíproca é evidente. □

Observação 2.1.4. É importante destacar que se f é contínua *apenas* em $p \in X$, então não se pode garantir que $f^{-1}[V]$ seja aberto em X sempre que $V \subseteq Y$ for um aberto em Y com $f(p) \in V$. Neste caso, garante-se apenas que $f^{-1}[V]$ é uma *vizinhança* de p, i.e., p ~~é ponto interior de~~ está num aberto contido em $f^{-1}[V]$. Tais pormenores serão abordados no Capítulo 4. △

Observação 2.1.5 (Importante: pré-imagens $\neq$ função inversa). Para uma função $f : X \to Y$ e um subconjunto $V \subseteq Y$ dados, define-se a *pré-imagem* de V por f, denotada por $f^{-1}[V]$, como sendo o conjunto dos elementos em X cujas imagens por f pertencem a V: explicitamente, $f^{-1}[V] := \{x \in X : f(x) \in V\}$. Evite achar que se trata da imagem direta de V pela "função inversa de f", já que apenas funções bijetivas têm inversas. △

Embora soe estranha à primeira vista, a caracterização de continuidade em termos de pré-imagens é a mais honesta no contexto topológico. De fato, topologias em X e Y carregam informação/estrutura adicional de subconjuntos chamados de abertos e, nesse sentido, funções contínuas são aquelas que *preservam* tais informações[21].

Exemplo 2.1.6. A função identidade $\mathrm{Id}_X : X \to X$ de um espaço topológico X sempre é contínua, posto que $\mathrm{Id}_X^{-1}[V] = V$ para qualquer $V \subseteq X$ (o que vale, em particular, para os abertos de X). ▲

Exemplo 2.1.7. De modo geral, funções constantes são contínuas: se $f : X \to Y$ é constante, digamos $f(x) := y_0$ para todo $x \in X$, e $V \subseteq Y$ é aberto, então $f^{-1}[V] = \emptyset$ (se $y_0 \notin V$) ou $f^{-1}[V] = X$ (se $y_0 \in V$), mostrando que a pré-imagem de abertos é aberta. ▲

[20] Alternativamente (e sem o Axioma da Escolha): a família $\mathcal{C} := \{B \subseteq X : B$ é aberto e $B \subseteq A\}$ é tal que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq A$ e, por hipótese, $A \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

[21] Tais quais morfismos de anéis (corpos, etc.) preservam as informações algébricas. Esse tipo de interpretação pode ser formalizado por meio de uma estrutura algébrica/ordenada xingada de *frame*. O leitor interessado deve procurar por *pointless topology* ou *point-free topology* (topologia sem pontos).

Exemplo 2.1.8 (Soma em $\overline{\mathbb{R}}$)**.** A função $s\colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$, definida no Exemplo 2.0.46, é contínua em todos os pontos de $\mathcal{A}_\infty$. Com efeito, a discussão apresentada lá permite mostrar que se $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto, então

$$s^{-1}[I] := \{\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty : s(\alpha,\beta) \in I\}$$

é aberto em $\mathcal{A}_\infty$. Logo, como qualquer aberto $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é reunião de intervalos abertos, digamos $V = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, resulta

$$s^{-1}[V] = s^{-1}\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right] = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} s^{-1}[I_\lambda].$$

Fica por conta do leitor explicitar os detalhes omitidos. ▲

Exemplo 2.1.9 (Soma em espaços normados)**.** Ainda no Exemplo 2.0.46, a desigualdade utilizada no caso de intervalos reais pode ser adaptada para mostrar que a função soma (*a.k.a.* adição) $+\colon E \times E \to E$ em qualquer espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é contínua. De fato, por valer

$$\|u_0 + v_0 - (u+v)\| = \|u_0 - u + v_0 - v\| \leq \|u_0 - u\| + \|v_0 - v\| \tag{2.4}$$

para quaisquer $u_0, v_0, u, v \in E$, segue que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|u_0 + v_0 - (u+v)\| < \varepsilon$ sempre que $\|u_0 - u\|, \|v_0 - v\| < \delta$: basta tomar $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Por que isto prova a continuidade da soma? Resposta: ao considerar $U := B_{\|\cdot\|}(u_0, \delta)$ e $V := B_{\|\cdot\|}(v_0, \delta)$, obtemos o aberto $U \times V$ de $E \times E$ (com respeito à topologia produto!), com $\langle u_0, v_0\rangle \in U \times V$ e $u + v \in B_{\|\cdot\|}(u_0 + v_0, \varepsilon)$ sempre que $\langle u, v\rangle \in U \times V$, o que garante a continuidade nos moldes da definição geral (verifique?). Alternativamente:

Proposição 2.1.10. *Para espaços normados E e E', uma função $f\colon E \to E'$ é contínua se, e somente se, para quaisquer $u \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(u) - f(x)\| < \varepsilon$ sempre que $\|u - x\| < \delta$.*

A rigor, no enunciado acima, o correto seria escrever algo como "$\|f(u) - f(x)\|_{E'}$" e "$\|u - x\|_E$" para indicar que as normas em E' e E não são as *mesmas*. Porém, é prática comum assumir que o leitor está ciente dessa sutileza... Com isso dito:

Demonstração. Se f é contínua em u e $\varepsilon > 0$, então $V := B_{\|\cdot\|}(f(u), \varepsilon)$ é um aberto de E' com $f(u) \in V$. Pela definição de continuidade, existe $U \subseteq E$ aberto com $u \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Ora, de acordo com a Definição 2.0.29, deve existir $\delta > 0$ tal que $B_{\|\cdot\|}(u, \delta) \subseteq U$. Logo, se $\|x - u\| < \delta$, então $x \in U$ e, consequentemente, $f(x) \in V$, i.e., $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$, como desejado.

Para a recíproca, dado $V \subseteq E'$ aberto em E' com $f(u) \in V$, a Definição 2.0.29 assegura $\varepsilon > 0$ com $B_{\|\cdot\|}(f(u), \varepsilon) \subseteq V$. Agora, para este $\varepsilon > 0$, a hipótese garante um $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x - u\| < \delta$, i.e., tal que $f(x) \in B_{\|\cdot\|}(f(u), \varepsilon)$. Logo, chamando $U := B_{\|\cdot\|}(u, \delta)$, resulta $f[U] \subseteq V$, com U aberto e $u \in U$, como queríamos. □

De volta para a soma $+\colon E \times E \to E$, a topologia produto em $E \times E$ é a mesma induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$ em $E \times E$ definida por $\|\langle u, v\rangle\|_\infty := \max\{\|u\|, \|v\|\}$ (verifique?), de modo que (2.4) implica em $\|u_0 + v_0 - (u+v)\| \leq 2\|\langle u_0, v_0\rangle - \langle u, v\rangle\|_\infty$, donde segue que a soma satisfaz o critério de continuidade via ε's e δ's. ▲

Exercício 2.18. Compare as demonstrações das Proposições 2.1.1 e 2.1.10. ■

Exemplo 2.1.11 (Multiplicação em espaços normados)**.** Ainda para um espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$, a multiplicação por escalar $\mathbb{R}\times E \to E$ é uma função contínua. Primeiro, observe que para $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ e $u_0 \in E$ fixados, deve-se ter

$$\|\alpha_0 u_0 - \alpha u\| = \|\alpha_0 u_0 + \alpha_0 u - \alpha_0 u - \alpha u\| \leq |\alpha_0|\|u_0 - u\| + |\alpha_0 - \alpha|\|u\|$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in E$. Com a Proposição 2.1.10 em mente, o que se busca é "controlar" $\|\alpha_0 u_0 - \alpha u\|$ por meio do controle de

$$\|\langle \alpha_0, u_0\rangle - \langle \alpha, u\rangle\|_\infty := \max\{|\alpha_0 - \alpha|, \|u_0 - u\|\}.$$

Porém, desta vez, a expressão que "majora" $\|\alpha_0 u - \alpha u\|$ traz *pesos* que multiplicam as parcelas controláveis: $|\alpha_0|$ e $\|u\|$. Como o primeiro é uma *constante*[22], para $\varepsilon > 0$, basta exigir (supondo $\alpha_0 \neq 0$) que $\|u_0 - u\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha_0|} := \gamma$. O problema é o fator $\|u\|$: não podemos simplesmente exigir $|\alpha_0 - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2\|u\|}$ pois u varia! Para remediar a situação, observe que $\|u\| \leq \|u_0 - u\| + \|u_0\|$, com $\|u_0\|$ constante. Logo, basta exigir que tanto $\|u_0 - u\|$ quanto $|\alpha_0 - \alpha|$ sejam menores do que $\min\left\{\gamma, \frac{\varepsilon}{2(\gamma+\|u_0\|)}\right\}$, pois daí

$$\|\alpha_0 u_0 - \alpha u\| \leq |\alpha_0|\|u_0 - u\| + |\alpha_0 - \alpha|\|u\| < |\alpha_0|\frac{\varepsilon}{2|\alpha_0|} + \frac{\varepsilon}{2(\gamma + \|u_0\|)}(\gamma + \|u_0\|) = \varepsilon.$$

Para $\alpha_0 := 0$ a coisa se simplifica: basta trocar γ por 1. ▲

Exercício 2.19. Adapte a argumentação acima para a multiplicação usual de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 2.20. Considere $\mathcal{M}_\infty$ como na Definição 2.0.45. Para $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{M}_\infty$, defina $p(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}$ da seguinte forma:

(i) $p(\alpha, \beta) := \alpha \cdot \beta$ se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(ii) $p(\alpha, \beta) := +\infty$ se $\langle \alpha, \beta\rangle \notin \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ com $\alpha, \beta < 0$ ou $\alpha, \beta > 0$;

(iii) $p(\alpha, \beta) := -\infty$ se $\langle \alpha, \beta\rangle \notin \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e $\alpha < 0 < \beta$ ou $\beta < 0 < \alpha$.

Sob tais condições, mostre que a função $p\colon \mathcal{M}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ é contínua. Dica: para um intervalo $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p(\alpha_0, \beta_0) \in I$, basta encontrar intervalos abertos $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tais que $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle \in J \times K$ e $p(\alpha, \beta) \in I$ sempre que $\langle \alpha, \beta\rangle \in (J\times K)\cap\mathcal{M}_\infty$; se ocorrer $p(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}$, basta proceder como no exemplo anterior; agora, se $p(\alpha_0, \beta_0) = +\infty$, então I pode ser tomado da forma $(M, +\infty]$ para algum número real $M > 0$, de modo que para $\alpha_0 := +\infty$ e $\beta_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ basta tomar $J := \left(\frac{2M}{\beta_0}, +\infty\right]$ e $K := \left(\frac{\beta_0}{2}, +\infty\right]$; os outros casos são análogos. ■

Observação 2.1.12 (*Keeping it real*)**.** Em contextos mais elementares, é comum evitar a escrita de coisas como "$f(x) = \pm\infty$", já que em tais situações as funções assumem apenas valores *numéricos* – e tanto $+\infty$ quanto $-\infty$ não são números. Para leitores inseridos nesses contextos, convém destacar o que significa, para uma função $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, ser contínua em $x_0 \in X$ com $f(x_0) \notin \mathbb{R}$.

[22] Lembre-se: α_0 e u_0 estão fixados desde o começo!

Se, por exemplo, tivermos $f(x_0) := +\infty$, então a condição de continuidade em x_0 é a seguinte: para todo aberto $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $+\infty \in V$, existe um aberto $U \subseteq X$ com $x_0 \in U$ tal que $f(u) \in V$ sempre que $u \in U$. Ora, pela forma como os abertos de $\overline{\mathbb{R}}$ foram definidos (confira a Definição 2.0.4 e a Proposição 2.0.10), isto significa que para qualquer número real $M > 0$ existe $U \subseteq X$ aberto com $x_0 \in U$ e $f(u) > M$ sempre que $u \in U$. Portanto, nas *proximidades* de x_0 (encarnadas pelos abertos U), a função f assume valores cada vez maiores – ou, com a simbologia que será introduzida no próximo capítulo: $\lim\limits_{u \to x_0} f(u) = +\infty$.

Uma tradução análoga pode ser feita nos casos em que se tem algo como $f : \overline{\mathbb{R}} \to Y$ com $f(+\infty) = y_0$ e f contínua em $+\infty$: explicitamente, para todo aberto $V \subseteq Y$ com $y_0 \in V$, existe um aberto $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $+\infty \in U$ e $f(u) \in V$ sempre que $u \in U$. Ou seja: existe $M > 0$ tal que $f(u) \in V$ sempre que $u > M$, que na prática significa dizer que os valores de f se tornam mais próximos de y_0 à medida em que u *aumenta*. Com a simbologia do próximo capítulo, isto se expressaria como $\lim\limits_{u \to +\infty} f(u) = y_0$.

A *moral da história*, como ficará claro oportunamente, é a seguinte: *limites* são apenas outra forma de tratar *continuidade*. Mas ainda é cedo demais para tais revelações. △

Exemplo 2.1.13 (Continuidade da inversão multiplicativa)**.** Por $\mathbb{R}$ ser corpo, para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe um único inverso multiplicativo $\frac{1}{r}$ (também denotado por r^{-1}). Veremos que a função $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ obtida de tal processo é contínua.

Primeiro, note que se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto com $0 \notin I$, então $f^{-1}[I]$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contido em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: com efeito, se $I := (\alpha, \beta)$, então a definição de intervalo aliada à hipótese de que $0 \notin I$ obriga que α e β tenham o mesmo *sinal*, donde segue que $f^{-1}[(\alpha, \beta)] = \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\right)$. Agora, se $0 \in (\alpha, \beta)$, então

$$f^{-1}[(\alpha, \beta)] = \bigcup_{\alpha < \gamma < 0} \left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha}\right) \cup \bigcup_{0 < \gamma < \beta} \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right),$$

mostrando que $f^{-1}[I]$ é aberto. O resultado então segue como no Exemplo 2.1.8. ▲

Exercício 2.21. Convença-se de que no último caso, $f^{-1}[(\alpha, \beta)] = (-\infty, \alpha^{-1}) \cup (\beta^{-1}, +\infty)$. ■

Exemplo 2.1.14. A princípio, a função f do exemplo anterior não foi definida em 0 pois $\mathbb{R}$ é um corpo e, como tal, não admite a inversão multiplicativa do zero. No entanto, é lícito perguntar se poderíamos atribuir um valor *artificial* para $f(0)$ de modo a obter uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) := x^{-1}$ para $x \neq 0$. A resposta é não: sempre que (α, β) fosse um intervalo aberto e limitado em torno de $f(0)$, teríamos $f^{-1}[(\alpha, \beta)] = A \cup \{0\}$ para algum aberto $A \subseteq \mathbb{R}$ *distante* do zero (pense a respeito).

Fazer $f(0) := +\infty$ na esperança de obter uma função contínua da forma $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ também não *adiantaria*, já que teríamos $f^{-1}\left[(\alpha, +\infty]\right] = [0, \alpha^{-1})$ para qualquer $\alpha > 0$, um intervalo de $\mathbb{R}$ muito conhecido por não ser aberto[23]. É claro que fazer $f(0) := -\infty$ é igualmente ineficaz. ▲

Exercício 2.22. É possível definir valores para $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$ de modo a obter uma função contínua $f : \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$? ■

[23] Spoiler: e nem *fechado*!

Os exemplos anteriores tornam pertinente que se discuta a noção de *descontinuidade*, i.e., quando uma função **não** é contínua num determinado ponto. Da Definição 2.1.0, a princípio, dizer que $f\colon X \to Y$ é **descontínua** em $p \in X$ equivale a dizer que existe um aberto $V \subseteq Y$ com $f(p) \in V$ de modo que *nenhum* aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ satisfaz $f[U] \subseteq V$ – ou, equivalentemente, *para todo* aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ existe pelo menos um $u \in U$ com $f(u) \notin V$.

Ao traduzir a condição acima para o caso de funções reais, por exemplo, tem-se o seguinte: *existe um* intervalo aberto I *em torno* de $f(p)$ de modo que *qualquer* intervalo aberto em torno de p possui pontos cuja imagem *escapa* de I. Se pensarmos no processo prático de "desenhar" o gráfico de f, é como se nas proximidades de $f(p)$ (determinadas pelo intervalo I) fôssemos forçados a *tirar* o lápis do papel a fim de deixar o traçado fora da faixa determinada por I.

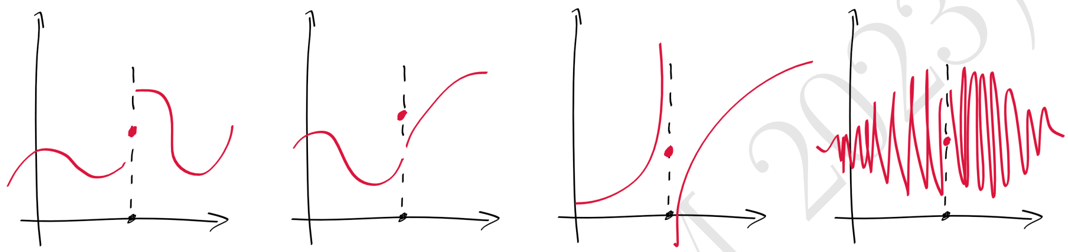


Figura 2.3: Algumas descontinuidades encontradas na natureza.

Exemplo 2.1.15 (A função de Dirichlet)**.** A função característica dos racionais é descontínua em todos os pontos. Explicitamente, a função $\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que faz $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$ e $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 1$ caso contrário, é descontínua em todos pontos. Se fosse possível desenhar o gráfico de $\chi_{\mathbb{Q}}$, seríamos obrigados a tirar o lápis do papel infinitamente, posto que entre quaisquer dois números irracionais há um número racional (e vice-versa). A rigor, note que para $x \in \mathbb{R}$ fixado, $I := (\chi_{\mathbb{Q}}(x) - 1, \chi_{\mathbb{Q}}(x) + 1)$ é um intervalo aberto em torno de $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ e para qualquer intervalo J em torno de x, existe $y \in J$ com $\chi_{\mathbb{Q}}(y) \notin I$. O leitor pode cuidar dos detalhes. ▲

Exercício 2.23. Convença-se de que se $f\colon X \to Y$ é contínua e Y é subespaço topológico de Z, então f ainda é contínua enquanto função da forma $X \to Z$. Dica: a inclusão $i\colon Y \to Z$ é contínua. ■

Exemplo 2.1.16 (Normas e métricas são contínuas)**.** A norma $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ de um espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é contínua com respeito à topologia induzida por *ela*: esta é uma das razões de ser da desigualdade

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|,$$

válida para quaisquer $u, v \in E$. Para demonstrá-la, basta observar que $\|u\| \leq \|u-v\|+\|v\|$ e $\|v\| \leq \|u - v\| + \|u\|$.

Analogamente, a métrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ de um espaço métrico $\langle X, d\rangle$ é contínua com respeito à topologia produto em $X \times X$: neste caso, a desigualdade que garante a continuidade é

$$|d(x, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b), \tag{2.5}$$

válida para quaisquer $x, y, a, b \in X$. Por que isto prova que a função é contínua? ▲

Exercício 2.24. Use a desigualdade (2.5) para mostrar que a métrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é contínua. Dica: use a definição da topologia produto em $X \times X$; alternativamente, apele para o próximo exercício. ■

Exercício 2.25 (Déjà vu)**.** Para espaços métricos X e Y, mostre que uma função $f\colon X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ sempre que $d(x, x') < \delta$. ■

2.1.1 Como manter as mãos limpas

Embora os principais resultados deste texto possam ser formulados e demonstrados por meio de ε's e δ's, as tecnologias apresentadas permitem facilitar diversas verificações. O propósito desta subseção, que encerra o capítulo, é discutir alguns desses métodos.

Proposição 2.1.17. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração. Note que se $W \subseteq Z$ é aberto, então $V := g^{-1}[W] \subseteq Y$ é aberto por g ser contínua, enquanto a continuidade de f assegura $f^{-1}[V] \subseteq X$ aberto. Logo, $f^{-1}\left[g^{-1}[W]\right]$ é aberto em X, donde o resultado segue pelo próximo exercício. □

Exercício 2.26. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções. Mostre que para qualquer $W \subseteq Z$ vale a identidade $(g \circ f)^{-1}[W] = f^{-1}\left[g^{-1}[W]\right]$. ■

Exercício 2.27. Com as notações da proposição anterior, mostre que se f é contínua em p e g é contínua em $f(p)$, então $g \circ f$ é contínua em p. ■

Exemplo 2.1.18. A função $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ que faz $g(x) := \frac{1}{|x|}$ é contínua. Com efeito, g é a composta das funções $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ do Exemplo 2.1.13, i.e., $g = |\cdot| \circ f$. Mais geralmente, sempre que X é um espaço topológico, E é um espaço normado e $h\colon X \to E$ é uma função contínua, tem-se garantida a continuidade da função

$$\begin{aligned} \|h\|\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|h(x)\| \end{aligned}$$

posto que a norma $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ é contínua e $\|h\| := \|\cdot\| \circ h$. ▲

Teorema 2.1.19. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

(*i*) *As projeções $\pi_X\colon X \times Y \to X$ e $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ são contínuas.*

(*ii*) *Uma função $f\colon Z \to X \times Y$ é contínua se, e somente se, $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ são contínuas*[24]*.*

Demonstração. A primeira afirmação segue pois $\pi_X^{-1}[U] = U \times Y$ e $\pi_Y^{-1}[V] = X \times Y$ para quaisquer $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$. Para a segunda afirmação, a *volta* segue da proposição anterior, enquanto a ida consiste em observar que pela forma como os abertos de $X \times Y$ foram definidos, basta mostrar que $f^{-1}[U \times V]$ é um aberto de Z sempre que $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ forem abertos: com efeito, se a última afirmação for conhecida, então para um aberto $W \subseteq X \times Y$ qualquer, tem-se $W = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \times V_i$ para certos abertos $U_i \subseteq X$ e $V_i \subseteq Y$, resultando em

$$f^{-1}[W] = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}[U_i \times V_i],$$

[24] É comum chamar as projeções $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ de **funções coordenadas** de f.

uma reunião de abertos. Por fim, a versão *retangular* segue pois $U \times V = \pi_X^{-1}[U] \cap \pi_Y^{-1}[V]$ e, por conseguinte, $f^{-1}[U \times V] = (\pi_X \circ f)^{-1}[U] \cap (\pi_Y \circ f)^{-1}[V]$, uma interseção de dois subconjuntos abertos de Z. $\square$

Em particular, a topologia produto torna lícito que se investigue a continuidade de funções da forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ ou ainda, mais geralmente, funções da forma $S \to Z$, onde S é subconjunto de um produto $X \times Y$.

Corolário 2.1.20. *Se $f \colon W \to X$ e $g \colon W \to Y$ são funções contínuas, então é contínua a função $\langle f, g\rangle : W \to X \times Y$ que faz $\langle f, g\rangle(w) := \langle f(w), g(w)\rangle$ para cada $w \in W$.*

Demonstração. Segue do segundo item do teorema anterior, já que $\pi_X \circ \langle f, g\rangle = f$ e $\pi_Y \circ \langle f, g\rangle = g$, ambas funções contínuas por hipótese. $\square$

Corolário 2.1.21. *A função $\Delta_X \colon X \to X \times X$, que a cada $x \in X$ associa $\langle x, x\rangle \in X \times X$, é contínua.*

Demonstração. Basta tomar $f = g = \mathrm{Id}_X$ no corolário anterior. $\square$

Corolário 2.1.22. *Sejam $f \colon W \to X$, $g \colon W \to Y$ e $\star \colon X \times Y \to Z$ funções contínuas. Então a função $f \star g \colon W \to Z$, que a cada $w \in W$ associa $f(w) \star g(w) \in Z$, é contínua.*

Demonstração. Basta observar que $f \star g = \star \circ \langle f, g\rangle$. $\square$

Exemplo 2.1.23 (Continuidade de funções polinomiais)**.** Se $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então as funções $f + g$ e $f \cdot g \colon X \to \mathbb{R}$ são contínuas: basta observar que as correspondências $x \mapsto f(x) + g(x)$ e $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ são *fruto* de composições de funções contínuas, com

$$x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle \mapsto f(x) + g(x)$$
$$x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

i.e., $f + g = + \circ \langle f, g\rangle$ e $f \cdot g = \cdot \circ \langle f, g\rangle$.

Consequentemente, *funções polinomiais*[25] em uma indeterminada são contínuas: note que a função $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é induzida pelo polinômio $p(t) := t$, de modo que funções da forma $x \mapsto \alpha x^n$ são o produto de funções contínuas, donde segue que funções polinomiais quaisquer da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são somas de funções contínuas. $\blacktriangle$

Exercício 2.28. Mostre que se $p(x, y)$ é um polinômio nas indeterminadas x e y, e $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função que faz $P(\alpha, \beta) := p(\alpha, \beta)$, então P é contínua. Dica: os polinômios $p(x, y) := x$ e $q(x, y) := y$ induzem as projeções nas primeira e segunda coordenadas de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. $\blacksquare$

Exemplo 2.1.24 (Continuidade em $\mathbb{R}^n$)**.** Para polinômios $p(x, y)$ e $q(x, y)$ nas indeterminadas x e y, a função $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(r, s) := \langle p(r, s), q(r, s)\rangle$ é contínua, já que as (funções!) coordenadas de F são contínuas: se π_0 e π_1 denotam, respectivamente, as projeções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nas 0-ésima e 1-ésima coordenadas, então $\pi_0 \circ F(r, s) = p(r, s)$ e $\pi_1 \circ F(r, s) = q(r, s)$, ambas funções contínuas da forma $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em virtude do exercício anterior. Assim, por exemplo, é contínua a função $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(r, s) := \langle r^2 + 3sr - 2, s^4 r - 5t^2\rangle$. Deve ser evidente como generalizar tais considerações para $n > 2$. $\blacktriangle$

[25] Confira o Exemplo 0.0.10.

Exemplo 2.1.25 (Quocientes)**.** Se $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e se considera $D_g := \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$, então a correspondência $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ determina uma função contínua $D_g \to \mathbb{R}$. De fato, D_g é subconjunto do domínio da função $x \mapsto x^{-1}$ (confira o Exemplo 2.1.13), donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{g}\colon D_g &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{g(x)} \end{aligned}$$

é contínua (por ser composta de funções contínuas), e daí $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ se expressa como o produto entre funções contínuas. Em particular, funções racionais (Exemplo 0.0.11) são contínuas em todos os pontos em que estão definidas. ▲

A partir do próximo capítulo, veremos como as noções de *limite* se relacionam com *continuidade*, num processo que expandirá muito o arsenal de funções contínuas – mas não mais com as mãos limpas.

Exercícios adicionais

Exercício 2.29. Para um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, mostre que $A \subseteq I$ é aberto (na topologia de subespaço) se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ com $x \in J$ e $J \cap I \subseteq A$. ■

Exercício 2.30. Para $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, com $a < b$, mostre que $x, y \in (a, b)$ se, e somente se, $|x - y| < |a - b|$. Enuncie e demonstre as versões análogas para os demais tipos de intervalos da reta real. ■

Exercício 2.31. Seja $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial.

a) Mostre que $\sup \emptyset$ existe se, e somente se, $\mathbb{P}$ tem menor elemento m e, neste caso, tem-se $\sup \emptyset = m$.

b) Mostre que $\sup \mathbb{P}$ existe se, e somente se, $\mathbb{P}$ tem maior elemento M e, neste caso, tem-se $\sup \mathbb{P} = M$.

c) Para $\mathbb{P} := \overline{\mathbb{R}}$ e $S \subseteq \mathbb{R}$, conclua que S é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\sup S < +\infty$.

d) Enuncie e demonstre os resultados duais para ínfimos. ■

Exercício 2.32 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** ■

Exercício 2.33 (Adiável/Opcional: normas em $\mathbb{R}^n$)**.** ■

Exercício 2.34. Seja $\varphi\colon X \to Y$ uma bijeção.

a) Assumindo que X tenha uma métrica d, defina uma métrica d_Y em Y que faça de φ uma bijeção contínua com inversa contínua.

b) Assumindo que X tenha uma topologia $\mathcal{T}$, defina uma topologia $\mathcal{T}_Y$ em Y que faça de φ uma bijeção contínua com inversa contínua.

c) Exiba uma bijeção entre $[-1, 1]$ e $\overline{\mathbb{R}}$ e use o item (a) para induzir uma métrica em $\overline{\mathbb{R}}$. Mostre que a topologia induzida por tal métrica é a topologia usual de $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Exercício 2.35. Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \to Y$ uma função. Mostre que se $p \in X$ é isolado, então f é contínua em p. ■

Exercício 2.36. Mostre que qualquer função da forma $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua. ■

Exercício 2.37. Quais as funções contínuas da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$? Dica: pode ser melhor esperar pelo conceito de conexidade. ■

Exercício 2.38. Mostre que $\{x \in \mathbb{R} : x^7 - 2x^2 + 2x - 1 < 0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 2.39. Para uma função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 2.40. Mostre que $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy - y^3 < 5\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. ■

Exercício 2.41. Generalize o exercício anterior. ■

Exercício 2.42. Sejam $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ um espaço normado e números reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Mostre que as correspondências $x \mapsto \alpha x$ e $y \mapsto \beta y$ determinam funções contínuas da forma $E \to E$. Dica: escreva a correspondência "$x \mapsto \alpha x$ como sendo $x \mapsto \langle \alpha, x\rangle \mapsto \alpha x$.

ii) Mostre que a função

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ \langle x, y\rangle &\mapsto \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

é contínua. Dica: a função $\langle x, y\rangle \mapsto \langle \alpha x, \beta y\rangle$ é contínua. ■

Exercício 2.43. Para um espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ e um espaço X, considere funções contínuas $f, g: X \to E$. Mostre que a função $\alpha f + \beta g: X \to E$ é contínua para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2.44. Para um espaço métrico $\langle X, d\rangle$ e um subconjunto não-vazio $A \subseteq X$, defina $d(\bullet, A): X \to \mathbb{R}$ fazendo $d(\bullet, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$, a **distância** entre o subconjunto A e o ponto x. Mostre que $d(\bullet, A)$ é contínua. Dica: manipule a desigualdade $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y)$ para $x_0, x \in X$ *fixados* e $y \in A$ qualquer. ■

Exercício 2.45. Para X e Y espaços topológicos e $Z \subseteq X$, mostre que uma função $f: Z \to Y$ é contínua em $p \in Z$ se, e somente se, para todo aberto $V \subseteq Y$ tal que $f(p) \in V$, existe um aberto $U \subseteq X$ tal que $p \in U$ e $f[U \cap Z] \subseteq V$. Dica: use a definição de continuidade num ponto aliada à definição da topologia de subespaço. ■

Exercício 2.46 (*Spoiler*)**.** Para intervalos $I, J \subseteq \mathbb{R}$, considere uma bijeção $f: I \to J$. Mostre que se f é estritamente crescente, então f é contínua. Dica: o que é a pré-imagem de uma intervalo $J' \subseteq J$ pela função f? ■

Capítulo 3

Limites

One Ring to rule them all,
One Ring to find them,
One Ring to bring them all,
and in the darkness bind them.

J. R. R. Tolkien[0].

Quem já enfrentou um curso de Cálculo I deve estar familiarizado com a notação

$$\lim_{x \to p} f(x) = L, \tag{3.0}$$

onde, por exemplo, f é uma função da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e tanto p quanto L são números reais. Neste caso, a simbologia acima abrevia o seguinte: *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x - p| < \delta$. Por sua vez, leitores que já encontraram a noção de sequência convergente num curso de Cálculo 2 (ou mesmo num primeiro curso de Análise), conhecem a notação

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L, \tag{3.1}$$

onde $x_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $L \in \mathbb{R}$. Neste caso, o que se abrevia é o seguinte: *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - L| < \varepsilon$ *sempre que* $n \geq N$.

Embora as duas definições sejam distintas, elas parecem guardar algum tipo de semelhança inquietante, como se ambas tratassem de um mesmo fenômeno descrito em ambientes sutilmente diferentes. A proposta deste capítulo é comprovar esta impressão por meio dos *limites de* nets, e ilustrar como o estudo de suas propriedades permite conhecer os principais limites da Análise.

3.0 Um limite para todos governar

Intuitivamente, tanto em "$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$" quanto em "$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$", expressa-se a ideia de que conforme elementos num conjunto de índices *avançam* numa *direção* específica ("$x \to p$" no primeiro caso e "$n \to \infty$" no segundo), as imagens indexadas se *aproximam* do limite L. Ocorre que há um *tipo de ordem* que abstrai com bastante sucesso essa ideia vaga de "direção" – para uma motivação, considere atentamente os dois próximos exemplos.

[0] *The Lord of The Rings, The Fellowship of the Ring*, 1954: Um Anel para todos governar, Um Anel para encontrá-los, Um Anel para todos trazer e na escuridão aprisioná-los.

Exemplo 3.0.0. *Existe no máximo* um *número real* $L \in \mathbb{R}$ *que satisfaz a condição abreviada por* (3.0). Mais precisamente, se $L, L' \in \mathbb{R}$ satisfazem a mesma condição, então $L = L'$. Ora, a fim de mostrar isso, basta garantir que $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ (confira o Exercício 1.31). Tendo em vista que a desigualdade triangular acarreta $|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, convém utilizar a condição satisfeita por L e L', que permite tomar $\delta, \delta' > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad 0 < |x - p| < \delta' \Rightarrow |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Certamente, existe algum $x' \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < |x' - p| < \widetilde{\delta}$, onde $\widetilde{\delta} := \min\{\delta, \delta'\}$, donde segue que $|L - L'| \leq |L - f(x')| + |f(x') - L'| < \varepsilon$, como desejado. ▲

Exemplo 3.0.1. *Existe no máximo* um *número real* $L \in \mathbb{R}$ *que satisfaz a condição abreviada por* (3.1). Mais precisamente, se $L, L' \in \mathbb{R}$ satisfazem a mesma condição, então $L = L'$. Novamente, basta assegurar que $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por um lado, para $\gamma > 0$ fixado, existe $N_L \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \gamma$ sempre que $n \geq N_L$. Por outro lado, também existe $N_{L'} \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L'| < \gamma$ sempre que $n \geq N_{L'}$, pois $x_n \to L'$. Daí, *como existe* $N \in \mathbb{N}$ com $N_L, N_{L'} \leq N$, segue que

$$|L - L'| \leq |L - x_N| + |x_N - L'| < \gamma + \gamma = 2\gamma$$

donde a afirmação original segue com $\gamma := \frac{\varepsilon}{2}$. ▲

No primeiro exemplo, o fato de podermos tomar um mesmo ponto x' cumprindo as duas exigências ($|x' - p| < \delta$ e $|x' - p| < \delta'$) permite concluir que tanto $|f(x') - L|$ quanto $|f(x') - L'|$ são *suficientemente pequenos*. Já no segundo exemplo, o número N escolhido satisfaz as duas exigências ($N \geq N_L$ e $N \geq N_{L'}$), o que permite concluir que tanto $|x_N - L|$ quanto $|x_N - L'|$ são *suficientemente pequenos*. Sem mais rodeios:

Definição 3.0.2. Sejam $\mathbb{D}$ um conjunto e $\preceq$ uma relação binária sobre $\mathbb{D}$. Diremos que $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$ é uma **pré-ordem** se $\preceq$ for reflexiva e transitiva. Diremos que $\mathbb{D} \neq \emptyset$ é um **conjunto dirigido** pela pré-ordem $\preceq$ se, adicionalmente, valer a seguinte condição de *compatibilidade*: para quaisquer $x, y \in \mathbb{D}$ existe $z \in \mathbb{D}$ com $x, y \preceq z$. ¶

Exemplo 3.0.3. Ordens totais são exemplos simples de conjuntos dirigidos, já que quaisquer dois elementos x e y do conjunto são majorados por $\max\{x, y\}$. Em particular, $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ é dirigido. ▲

Exemplo 3.0.4 (Direção por proximidade bilateral)**.** Para um ponto $p \in \mathbb{R}$ fixado, sejam $\mathbb{R}_p := \mathbb{R} \setminus \{p\}$ e a relação binária $\preceq$ em $\mathbb{R}_p$ definida da seguinte forma: para $x, y \in \mathbb{R}_p$, ocorre $x \preceq y$ se, e somente se, $|y - p| \leq |x - p|$. Não é difícil se convencer de que $\preceq$ é uma pré-ordem sobre $\mathbb{R}_p$ (verifique?). Para ver que $\langle \mathbb{R}_p, \preceq \rangle$ é dirigido, apenas note que se $x, y \in \mathbb{R}_p$, então ocorre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, já que $|x - y|$ e $|y - x|$ são elementos de um conjunto totalmente ordenado. ▲

Observação 3.0.5. Note que $\langle \mathbb{R}_p, \preceq \rangle$ não é uma ordem parcial: para $p := 0$, por exemplo, verifica-se $-r \preceq r$ e $r \preceq -r$ para qualquer $r \neq 0$, mas $r \neq -r$. △

Ao longo desta breve seção, veremos diversos exemplos de conjuntos dirigidos, cada um deles destinado a servir como instância particular da próxima

Definição 3.0.6. Uma ***net*** (ou **rede**) num espaço topológico X é uma função da forma $\mathbb{D} \to X$, onde $\mathbb{D}$ é um conjunto dirigido por alguma pré-ordem $\preceq$. *Nets* serão denotadas por $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$, $\langle x_d : d \in \mathbb{D}\rangle$ ou mesmo $\langle x_d \rangle_d$ quando o conjunto dirigido $\mathbb{D}$ for claro pelo contexto[1]. Agora, um ponto $x \in X$ será xingado de (*um*) **limite da *net*** se a seguinte condição for satisfeita: para todo aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que para qualquer $d \in \mathbb{D}$ com $d \succeq D$ ocorre $x_d \in V$. Em tal situação, também se diz que $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ **converge para** x, o que se abrevia com a notação $x_d \to x$. Dizer que a *net* é **convergente em** X apenas indica que existe $x \in X$ com $x_d \to x$. ¶

Intuitivamente, a relação $\preceq$ determina uma noção de *direção* que, por sua vez, é usada para detectar a convergência: dado um aberto $V \subseteq X$ em torno de x, existe um *momento* $D \in \mathbb{D}$ *a partir* do qual $x_d \in V$, i.e., tal que $x_d \in V$ sempre que $d \succeq D$ – que pode ser lido como *d é melhor do que D*. Na prática, cada noção particular de limite traz consigo uma noção de direção que, implicitamente, ordena os seus índices. Nesse sentido, a abordagem adotada no texto apenas explicita tais noções.

Leitores que preferirem entender como a noção de limite acima generaliza os limites clássicos da Análise podem prosseguir para a próxima subseção. Já os pragmáticos podem avançar diretamente para a Seção 3.1 – e só depois retornar para os subcasos tratados a seguir.

3.0.0 Limites de sequências

Sequência é uma *net* cujo conjunto dirigido é $\mathbb{N}$ com sua ordem usual. Mais precisamente, uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço topológico X é uma função da forma $\mathbb{N} \to X$ que faz $n \mapsto x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ao traduzir a noção de convergência expressa na Definição 3.0.6 para sequências, obtém-se a seguinte:

Definição 3.0.7. Uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço topológico X **converge** para um ponto $x \in X$ se para todo aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq N$. Diz-se também que x é (*um*) **limite da sequência**. ¶

É claro que o critério de convergência se adapta à topologia do espaço considerado.

Exemplo 3.0.8. Para $X := \mathbb{R}$ com sua topologia usual, $x_n \to x$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$: isto segue pois se $V \subseteq \mathbb{R}$ é aberto com $x \in V$, então existe $\varepsilon > 0$ com $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq V$ (Proposição 2.0.10). Nesse tipo de situação, diremos que a sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ **converge em** $\mathbb{R}$, pois *seu* limite está em $\mathbb{R}$. ▲

Exemplo 3.0.9. Para $X := \overline{\mathbb{R}}$ com sua topologia usual, $x_n \to x$ se para todo intervalo $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $x \in I$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in I$ sempre que $n \geq N$. Note que tal critério se reduz ao anterior caso ocorra $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, pode-se ter

✓ $x := +\infty$, e daí $x_n \to +\infty$ se para todo $M > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ com $x_n > M$ sempre que $n \geq N$, ou

✓ $x := -\infty$, e daí $x_n \to -\infty$ se para todo $M > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ com $x_n < -M$ sempre que $n \geq N$,

traduções que também estão embutidas na Proposição 2.0.10. Embora a Definição 3.0.6 permita a ocorrência de $x_n \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$, a maior parte das sequências consideradas no texto com limites *infinitos* terão seus termos restritos à reta real. ▲

[1] Como de costume, entende-se que x_d indica a imagem de $d \in \mathbb{D}$ pela função.

Observação 3.0.10 (*Divergência* vs. convergência em $\overline{\mathbb{R}}$). Diferente do que se faz na maioria dos textos introdutórios, uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais com $x_n \to \pm\infty$ **não** será chamada de *divergente*, mas sim de **convergente na reta estendida**. $\triangle$

Exercício 3.0. Traduza a definição de convergência para sequências tomadas em espaços métricos e normados. ■

Mais geralmente, é lícito chamar de sequência qualquer função da forma $\mathcal{N} \to X$, desde que $\mathcal{N}$ seja um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ com a ordem induzida. De fato, em tais situações, e para efeitos *práticos*, *$\mathcal{N}$ é o conjunto dos números naturais*, a menos de nomenclatura. Mais precisamente:

Proposição 3.0.11. *Para um subconjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$, são equivalentes:*

(i) $\mathcal{N}$ é infinito;

*(ii) $\mathcal{N}$ é **cofinal** em $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, i.e., para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathcal{N}$ com $m \leq n$;*

(iii) existe uma bijeção estritamente crescente $h \colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$.

Além disso, a bijeção do último item é única.

Demonstração. Se $\mathcal{N}$ é infinito e $n \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{N} \setminus \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ é não-vazio, já que o contrário implicaria a finitude de $\mathcal{N}$. Logo, existe $N \in \mathcal{N}$ com $n < N$, mostrando que $\mathcal{N}$ é cofinal em $\mathbb{N}$. Agora, supondo a segunda condição, pode-se definir $h(0) := \min \mathcal{N}$ e, supondo $h(m) \in \mathcal{N}$ definido para cada $m \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$, satisfazendo $h(i) < h(j)$ sempre que $i < j$, declara-se $h(n+1) := \min(\mathcal{N} \setminus \{h(m) : m \leq n\})$, o que faz sentido pois a *cofinalidade* de $\mathcal{N}$ em $\mathbb{N}$ garante pelo menos um $p \in \mathcal{N}$ com $h(n)+1 \leq p$. Por construção, tem-se $h(m) < h(n)$ sempre que $m < n$, mostrando que $h \colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ é estritamente crescente. Note que se h não fosse sobrejetora, então o menor k em $\mathcal{N} \setminus \mathrm{im}\,(h)$ seria tal que $h(j) = k-1$ para algum j, o que levaria a $h(j+1) = k$, uma contradição. A condição (iii) claramente implica em (i).

Por fim, por indução em $n \in \mathbb{N}$, não é difícil se convencer de que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ são bijeções crescentes, então $g(n) = h(n)$, o leitor pode cuidar dos detalhes. □

Exercício 3.1. Mostre que se $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção crescente, então $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Use isso para concluir que a função h da demonstração anterior é única. ■

Implicitamente, é a função h da proposição anterior que permite tratar restrições de sequências como se fossem sequências: em vez de $\langle x_n \rangle_{n\in\mathcal{N}}$, considera-se $\left\langle x_{h(n)} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Mais detalhes serão discutidos no Exemplo 3.1.13.

Exercício 3.2 (Para os afoitos)**.** Mostre que se $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$, então $\langle x_n \rangle_{n\in\mathcal{N}}$ também converge para x, qualquer que seja o subconjunto infinito $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$. ■

Antes de prosseguir para a próxima noção de limite capturada pelas *nets*, convém destacar que a *ordem* de $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ realmente importa no critério de convergência de uma sequência. Para ilustrar, recordemo-nos de que no Exemplo 0.0.33, $\mathcal{N} := \mathbb{N}^*$ foi munido de uma ordem parcial $\preceq$ dada pela divisão: $m \preceq n$ sempre que m divide n, i.e., se existir $k \in \mathbb{N}^*$ com $n = mk$. Ocorre que $\langle \mathcal{N}, \preceq \rangle$ é um conjunto dirigido, já que para $m, n \in \mathcal{N}$, o produto mn é tal que $m, n \preceq mn$. E daí?

Ao considerar $\mathbb{N}^*$ com sua ordem usual herdada de $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, a *sequência* $\langle (-1)^n \rangle_{n \in \mathbb{N}^*}$ *não* converge, já que para qualquer candidato a limite L é possível obter um intervalo aberto I em torno de L de forma que para todo $N \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{N+1} \notin I$. Porém, ao considerar $\mathcal{N}$ dirigido pela relação de divisão, a *net* $\langle (-1)^n \rangle_{n \in \mathcal{N}}$ converge para 1! De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $N := 2 \in \mathcal{N}$, pois se $n \succeq 2$, i.e., se 2 dividir n, então $(-1)^n = 1$ e, consequentemente, $|1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Isto ocorre pois ao ordenar $\mathcal{N}$ por meio da relação de divisão, a distribuição dos naturais deixa de ser linear e se torna *ramificada* – e, no caso, *a partir* de 2 (nesta ordem!), a *net* assume valor constante. Conferir o diagrama de Hasse de $\langle \mathbb{N}^*, \preceq \rangle$, na Observação 0.0.35, pode ajudar a entender o que *realmente* está acontecendo.

3.0.1 Limites de funções

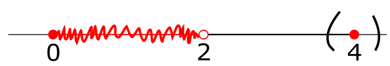
Quando X e Y são espaços topológicos e $Z \subseteq X$ é um subespaço de X, é frequente o problema de entender o *comportamento* de uma função $f : Z \to Y$ conforme os pontos de Z se *aproximam* de um ponto $p \in X$ fixado, no seguinte sentido: existe algum $y_0 \in Y$ tal que $f(z)$ se *aproxima* de y_0 conforme $z \in Z$ se *aproxima* de p? Embora se trate de uma questão *simples* de continuidade, muitos casos particulares são facilmente tratáveis por meio de *nets*. Mas primeiro, vejamos como expressar a noção de *aproximação arbitrária*.

Definição 3.0.12. Sejam X um espaço topológico, $Z \subseteq X$ um subconjunto e $p \in X$. Diz-se que p é **ponto de acumulação** de Z se $V \cap (Z \setminus \{p\}) \neq \emptyset$ para qualquer aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$. Quando $X = Z$, diz-se apenas que p é *ponto de acumulação*. ¶

Intuitivamente, os pontos de Z *se acumulam* nas proximidades de p, no sentido de que qualquer aberto *em torno* de p, não importa o quão pequeno seja, contém pontos de Z distintos do próprio p.

Exemplo 3.0.13. Fazer $X := \overline{\mathbb{R}}$ na definição anterior ajuda a entender o sentido de aproximação arbitrária que se busca capturar com pontos de acumulação – além de ilustrar a necessidade de *retirar* o próprio ponto p da interseção. Para $Z := [0, 2) \cup \{4\}$, por exemplo:

- ✓ qualquer $p \in (0, 2)$ é ponto de acumulação de Z (verifique?);
- ✓ tanto 0 quanto 2 são pontos de acumulação de Z, já que qualquer aberto em torno de um deles contém *outros* pontos de Z;
- ✓ diferente do que o primeiro item poderia sugerir, 4 não é ponto de acumulação de Z, pois existem abertos em torno de 4 que não contêm *outros* pontos de Z.



Por sua vez, acumular nos extremos da reta estendida é apenas um modo equivalente de expressar *ilimitação*. Por exemplo, note que $+\infty$ é ponto de acumulação de $Z \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se, e somente se, $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$: por um lado, se $+\infty$ é ponto de acumulação de Z, então para todo número real $M > 0$ existe $z \in (M, +\infty) \cap Z$, donde segue que $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$; por outro lado, se $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$, então para todo número real $M > 0$ existe $z \in (M, +\infty)$, mostrando que $(M, +\infty] \cap (Z \setminus \{+\infty\})$ é não-vazio. Analogamente, $-\infty$ é ponto de acumulação de $Z \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se, e somente se, $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado inferiormente em $\mathbb{R}$. ▲

Posto de outra forma, a noção de acumulação se opõe à ideia de isolamento expressa na Definição 2.0.41. Explicitamente:

Proposição 3.0.14. *$p \in X$ é ponto de acumulação se, e somente se, p não é isolado.*

Demonstração. Se $\{p\} := V$ é aberto, então $V \cap (X \setminus \{p\}) = \emptyset$, ou seja: se p é isolado, então p não é ponto de acumulação. A recíproca é análoga. □

Exercício 3.3. Mostre que num espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$, todo ponto é de acumulação. Em particular, todo $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$. Dica: observe que uma bola aberta $B_{\|\cdot\|}(p, r)$ contêm outros pontos além de p. ■

Exemplo 3.0.15 (Limites clássicos do Cálculo)**.** Para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$, com $Z \subseteq \mathbb{R}$, existem três *tipos* de limites que costumam ser investigados.

(i) $\lim\limits_{z \to p} f(z) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ quando $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de Z: significa que para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de L, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $0 < |z - p| < \delta$.

(ii) $\lim\limits_{z \to +\infty} f(z) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ quando Z é ilimitado superiormente: significa que para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de L, existe um número real $M > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $M < z$.

(iii) $\lim\limits_{z \to -\infty} f(z) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ quando Z é ilimitado inferiormente: significa que para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de L, existe um número real $M > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $z < -M$.

Em todos os casos, o *ponto* L é dito (*um*) **limite de $f(z)$ quando z tende a p**.

Note que as definições apresentadas acima compreendem tanto os *limites reais*, i.e., com $L \in \mathbb{R}$, quanto os *limites infinitos*[2]: para o primeiro caso, ao fazer $I := (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, chega-se à definição usual de limite real e, nos demais casos, a definição usual se recupera com $I := (M, +\infty]$ ou $I := [-\infty, -M)$ conforme tivermos $L := +\infty$ ou $L := -\infty$, respectivamente. Porém, mais ainda é verdade: secretamente, cada uma das noções de limite acima é uma instância de limite de *net*.

(i) Para o primeiro caso, considere $Z_p := Z \setminus \{p\}$ dirigido pela seguinte ordem: $a \preceq b$ se, e somente se, $|p - b| \leq |p - a|$. Intuitivamente, quanto *maior* a proximidade de um ponto $z \in Z_p$ com o ponto p, *melhor* ele será segundo a ordem $\preceq$.

(ii) Para o segundo caso, basta fazer $Z_{+\infty} := Z$ dirigido pela ordem usual, afinal de contas, quanto maior o número real z, mais próximo de $+\infty$ ele será.

(iii) Para o terceiro caso, inverte-se o raciocínio do item anterior: faz-se $Z_{-\infty} := Z$ dirigido pela ordem inversa, i.e., $a \preceq b \Leftrightarrow b \leq a$, já que quanto *mais à esquerda* o número z estiver na reta real, mais próximo de $-\infty$ ele estará.

[2] Atenção: é muito comum encontrar textos com a exigência de que o limite seja real, de modo que nas situações em que ocorre "$\lim\limits_{z \to p} f(z) = \pm\infty$", diz-se que o *limite não existe*. Apesar disso, a mesma simbologia é utilizada para indicar o "comportamento da função", de modo que, na prática, todo mundo lê "o limite de $f(z)$ quando z tende a p é $\pm\infty$". Soa meio hipócrita, não?

Proposição 3.0.16. *Sejam $f\colon Z \to \mathbb{R}$ uma função, com $Z \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto de acumulação de Z e $L \in \overline{\mathbb{R}}$ qualquer. Então $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$ se, e somente se, a* net $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ *converge para L.*

Demonstração. Há três casos a considerar conforme se varia entre $p \in \mathbb{R}$, $p := +\infty$ e $p := -\infty$. Para o primeiro caso, se $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$, então para qualquer intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $L \in I$, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $0 < |z - p| < \delta$. Ora, como p é ponto de acumulação de X, existe, *efetivamente*, pelo menos um $z' \in Z_p$ satisfazendo $0 < |z' - p| < \delta$. Assim, no conjunto dirigido Z_p, pode-se tomar $d := z'$, pois daí a ocorrência de $z \succeq z'$ equivale a $0 < |z - p| \leq |z' - p| < \delta$ e, portanto, $f(z) \in I$.

Por outro lado, se a *net* $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ é tal que $f(z) \to L$, então para qualquer intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $L \in I$, existe $d \in Z_p$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \succeq d$. Ora, chamando $\delta := |d - p|$, resulta que se $0 < |z - p| < \delta$, então $f(z) \in I$, i.e., $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$. Os outros casos, por serem mais simples, serão deixados a cargo do leitor. □

Exercício 3.4. Complete a demonstração anterior. Dica: lembre-se de que $+\infty$ (resp. $-\infty$) é ponto de acumulação de Z se, e somente se, Z é ilimitado superiormente (resp. inferiormente).■

Exercício 3.5. Nas condições da última proposição, mostre que $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$ se, e somente se, para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $L \in I$ existe um intervalo aberto $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p \in J$ e tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z \cap J$. ■

Uma análise cuidadosa da argumentação apresentada na última proposição pode ajudar a perceber como *adivinhar* o jeito certo de *dirigir* um conjunto de índices: dizer que uma *net* $\langle f(d)\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ converge para L significa que para qualquer aberto em torno L, *existirá* um *momento D a partir do qual* todas as $f(d)$ pertencerão ao aberto; ora, como a definição de "$\lim\limits_{z\to p}$" pede que z esteja cada vez *mais próximo* de p, são justamente as distâncias até p que serão usadas como critério para dirigir o conjunto Z_p. ▲

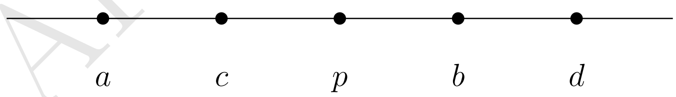


Figura 3.0: Quanto mais perto de p, *melhor*: note que $a \preceq b$ e $d \preceq c$.

Exercício 3.6 (Opcional)**.** Mostre que as pré-ordens definidas sobre Z_p nos três casos possíveis ($p \in \mathbb{R}$ ou $p := \pm\infty$) podem ser estendidas por uma única pré-ordem. Dica: para $a, b, p \in \mathbb{R}$, note que a condição "$|p - b| \leq |p - a|$" é equivalente a "$p \leq b \leq a$ ou $a \leq p \leq b \leq 2p - a$ ou $2p \leq a + b$ ou $a \leq b \leq p$"; daí, observe que tal versão se aplica a Z_p com $p \in \{+\infty, -\infty\}$ e resulta nas mesmas ordens definidas em (ii) e (iii). ■

Observação 3.0.17. Nas definições clássicas, exigir que p seja ponto de acumulação é importante para garantir a *unicidade* do limite L (e assim fazer da notação "$\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$" algo ligeiramente mais honesto). De fato, se tal condição não é satisfeita por p, então *qualquer* L é *um* limite de f quando z "tende a p".

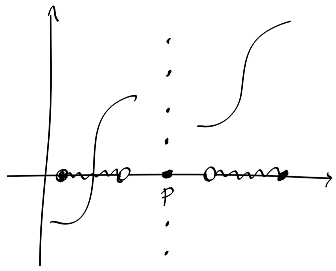


Figura 3.1: Não existem testemunhas de que algum L não seja o limite de f em p.

Porém, como o leitor atento deve ter notado no Exemplo 3.0.15, $\langle Z_p, \preceq\rangle$ é um conjunto dirigido independentemente da relação de p com Z. Ora, como veremos que o limite de *nets* também é único na maior parte das situações que interessam[3], surge uma pulga atrás da orelha: por que o limite de uma *net* do tipo $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ é único (se existir) mesmo se p não for ponto de acumulação de Z?

Enquanto, no caso clássico, qualquer L seria um limite por satisfazer a implicação "$0 < |z-p| < \delta \Rightarrow f(z) \in I$" por vacuidade (para $\delta > 0$ com $(p-\delta, p+\delta) \cap Z = \emptyset$), o mesmo L só pode ser limite da *net* $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ se existir um *índice* z' com $f(z) \in I$ sempre que $z \succeq z'$. Ou seja, não são as *distâncias* até p que importam, mas sim o modo como os *pontos* ficam *ordenados* por meio de suas distâncias até p; na prática, é como se a *net* não enxergasse o "buraco" em torno do ponto *isolado* p. No caso da figura anterior, por exemplo, o limite da *net* $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ correspondente não existe, posto que os *limites laterais* são distintos. Por falar nisso... △

Exemplo 3.0.18 (Limites laterais clássicos)**.** A ordem natural da reta permite especificar ainda mais a análise do comportamento de uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$ nas proximidades de um ponto p que esteja arbitrariamente próximo de Z, desta vez levando em conta o *lado* pelo qual a aproximação acontece.

Definição 3.0.19. Sejam $Z \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $p \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto qualquer.

(i) Diremos que p é **ponto de acumulação de Z à esquerda** se para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p \in I$ existir $z \in I \cap Z$ com $z < p$.

(ii) Diremos que p é **ponto de acumulação de Z à direita** se para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p \in I$ existir $z \in I \cap Z$ com $p < z$. ¶

A ideia das definições acima é indicar de que "lado" de p os pontos de Z se aproximam: se a aproximação ocorre pela esquerda de p, então os pontos de Z correspondentes devem ser menores do que p; analogamente, se a aproximação ocorre pela direita de p, então os pontos de Z correspondentes devem ser maiores do que p. Assim, algumas conclusões devem ser imediatas (e o leitor é livre para verificá-las, se quiser):

✓ $-\infty$ *não* pode ser ponto de acumulação de Z à esquerda;

✓ $+\infty$ *não* pode ser ponto de acumulação de Z à direita;

✓ em geral, p é ponto de acumulação de Z se, e somente se, p é ponto de acumulação de Z à esquerda *ou* à direita.

[3] Sempre que as *nets* são tomadas nos chamados *espaços de Hausdorff*, o que inclui tanto espaços métricos quanto os subconjuntos da reta estendida.

Para ilustrar, note que $+\infty$ é ponto de acumulação de Z à esquerda sempre que Z é ilimitado superiormente, enquanto $-\infty$ é ponto de acumulação de Z à direita sempre que Z é ilimitado inferiormente. Já para $Z := (0,1) \cup (1,2)$, os pontos 0 e 1 são de acumulação à direita, enquanto 1 e 2 são de acumulação à esquerda.

Isso permite refinar as noções usuais de limite para analisar o comportamento da função conforme os pontos de Z se aproximam de p por algum lado específico. Explicitamente, os **limites laterais** de $f\colon Z \to \mathbb{R}$ em p costumam ser definidos da seguinte forma:

(i) se p é ponto de acumulação de Z à esquerda e $L \in \overline{\mathbb{R}}$, escreve-se $\lim\limits_{z \to p^-} f(z) = L$ para indicar que para todo intervalo aberto I em torno de L, existe um intervalo aberto J em torno de p tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z \cap J$ com $z < p$;

(ii) se p é ponto de acumulação de Z à direita e $L \in \overline{\mathbb{R}}$, escreve-se $\lim\limits_{z \to p^+} f(z) = L$ para indicar que para todo intervalo aberto I em torno de L, existe um intervalo aberto J em torno de p tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z \cap J$ com $z > p$.

Ocorre que os limites acima – usualmente chamados **limites de** $f(z)$ **quando** z **tende a** p **pela esquerda e pela direita**, respectivamente – também são limites de *nets* particulares, e de modo bastante natural. Na prática, $\lim\limits_{z \to p^-} f(z)$ e $\lim\limits_{z \to p^+} f(z)$ são subcasos do limite usual tratado no Exemplo 3.0.15, exceto pela restrição do domínio da função f: para o limite pela esquerda, considera-se $Z_p^- := \{z \in Z_p : z < p\}$ e, para o limite pela direita, $Z_p^+ := \{z \in Z_p : p < z\}$, ambos dirigidos pela ordem de $\langle Z_p, \preceq\rangle$.

Futuramente, veremos que nas situações em que p é ponto de acumulação de Z *bilateral* (i.e., tanto pela esquerda quanto pela direita) o limite $\lim\limits_{z \to p} f(z)$ existe (em $\overline{\mathbb{R}}$) se, e somente se, ambos $\lim\limits_{z \to p^-} f(z)$ e $\lim\limits_{z \to p^-} f(z)$ existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) e coincidem. ▲

Exercício 3.7. Convença-se de que "$\lim\limits_{z \to +\infty} f(z)$" e "$\lim\limits_{z \to -\infty} f(z)$" são limites à esquerda de $+\infty$ e à direita de $-\infty$, respectivamente. ■

Evidentemente, faz sentido investigar o limite de funções da forma $Z \to Y$, com $Z \subseteq X$ e tanto X quanto Y métricos. E como esperado, tais limites também são *capturáveis* por meio de *nets*, *mutatis mutandis*. Primeiro, para $p \in X$ ponto de acumulação de Z, considera-se $Z_p := Z \setminus \{p\}$ com a ordem dada por $a \preceq b$ se, e somente se, $d(p,b) \leq d(p,a)$, o que torna lícito considerar a *net* $\langle f(z)\rangle_{z \in Z_p}$ em Y. Daí, a Definição 3.0.6, que trata de *nets* em espaços topológicos quaisquer, se traduz para o caso de Y métrico da seguinte forma: $f(z) \to y$ em Y se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $z' \in Z_p$ tal que $d(f(z), y) < \varepsilon$ para todo $z \succeq z'$. Quem preferir empurrar as *nets* para debaixo do tapete pode fazer o próximo

Exercício 3.8. Nas notações acima, mostre que $f(z) \to y$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(z), y) < \varepsilon$ sempre que $d(z,p) < \delta$. Dica: imite a prova da Proposição 3.0.16.■

O passo final na generalização dos limites de funções é, como a Definição 3.0.6 sugere, o caso em que X e Y são meramente espaços topológicos, $f\colon Z \to Y$ é uma função com $Z \subseteq X$ e $p \in X$ é um ponto de acumulação de Z. Nessa altura da vida, intuir a definição adequada não deve ser problema:

Definição 3.0.20. Nas condições acima, diremos que $y \in Y$ é (*um*) **limite de** $f(z)$ **quando** z **tende a** p se para todo aberto $V \subseteq Y$ com $y \in V$ existir um aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ e tal que $f(z) \in V$ sempre que $z \in Z \cap U \setminus \{p\}$. ¶

Exercício 3.9. Convença-se de que a noção de limite acima generaliza todos os limites de função tratados nesta subseção. ■

Se, por um lado, o exercício anterior não parece desafiador, por outro lado, a missão (autoimposta) de tratar *todos* os limites por meio de *nets* encontrou seu primeiro obstáculo técnico: sem uma métrica no domínio da função f, não há uma maneira *óbvia* de dirigir os elementos de Z conforme estes *se aproximam* de p. Ou será que há?

Exemplo 3.0.21 (Opcional: filtros disfarçados)**.** Com $p \in X$ ponto de acumulação de Z, define-se $\mathbb{D} := \{\langle z, A\rangle : A \subseteq X$ é aberto em X com $p \in A$ e $z \in Z \cap A \setminus \{p\}\}$ com a ordem dada por $\langle z, A\rangle \preceq \langle z', B\rangle$ se $B \subseteq A$, que se revela um conjunto dirigido por p ser ponto de acumulação de Z. Agora, o leitor interessado não terá dificuldades para verificar que a *net* $\langle f(z)\rangle_{\langle z,A\rangle\in\mathbb{D}}$ converge para $y \in Y$ se, e somente se, para todo aberto $U \subseteq Y$ com $y \in U$ existir $A \subseteq X$ aberto em X com $p \in A$ e $f[(A \cap Z) \setminus \{p\}] \subseteq U$, justamente o que se definiu acima. ▲

3.0.2 Integrais de Riemann (primeiro contato)

Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, xingaremos de **partição do intervalo** $[a, b]$ qualquer sequência finita de números reais $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ com $n > 0$ e $a := a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n := b$. Embora, a rigor, não sejam as mesmas *partições* introduzidas na Definição 0.1.9, há uma relação clara entre ambas: se $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ é uma partição do *intervalo* $[a, b]$, então $\mathcal{P}' := \{[a_i, a_{i+1}) : i < n\}$ é uma partição do *conjunto* $[a, b)$.

Agora, fixada uma partição $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ do intervalo $[a, b]$, uma ***tag***[4] de $\mathcal{P}$ é uma sequência $T := \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ de números reais satisfazendo $a_{i-1} \leq t_i \leq a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. A coleção dos pares $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ em que $\mathcal{P}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ e T é uma *tag* de $\mathcal{P}$ será denotada por $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a, b]$, a família das **partições de Riemann** do intervalo $[a, b]$. Leitores que já enfrentaram um bom curso de Cálculo devem saber onde isso tudo vai dar.

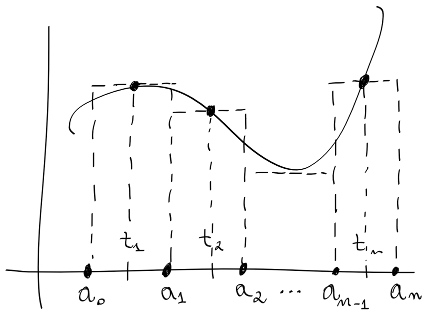
Definição 3.0.22. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ uma partição de Riemann do intervalo. A **soma de Riemann** da função f com respeito à partição $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ é o número

$$\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}),$$

onde $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ e $T := \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$. ¶

Quando a função f é não-negativa, pode-se pensar em $\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f$ como uma aproximação *tosca* do que seria a área da região plana determinada pelo gráfico de f com o eixo *horizontal*. Intuitivamente, a fim de tornar a aproximação menos *tosca*, i.e., torná-la uma aproximação *melhor* do que seria a área *real* da figura, basta *refinar* as partições, no sentido de acrescentar mais pontos a ela, processo em que se diminuem os *tamanhos* dos subintervalos da forma $[a_i, a_{i+1})$.

[4] Nacionalistas podem preferir expressões (mais longas) em português, como *marcação*, *etiqueta*, *pontilhamento*, etc. Particularmente, tenho mais apego ao tempo do que ~~à bandeira~~ ao léxico.



Para tornar mais precisas as considerações acima, vamos associar a cada partição $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ do intervalo $[a, b]$ o número

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{a_i - a_{i-1} : 1 \leq i \leq n\},$$

usualmente xingado como **norma da partição**.

Definição 3.0.23. Diremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **Riemann-integrável** se existir $L \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer partição de Riemann $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ de $[a, b]$ se tenha

$$\left| L - \sum_{\langle \mathcal{P}, T \rangle} f \right| < \varepsilon$$

sempre que $\|\mathcal{P}\| < \delta$. ¶

Em contextos que tratam unicamente do limite de sequências e funções com domínio real, a definição acima não costuma ser muito prática, posto que ela consiste numa *terceira forma de limite*[5]. Porém, as ferramentas apresentadas até agora permitem interpretar a Definição 3.0.23 como a mera exigência de que uma *net* apropriada converge.

Lema 3.0.24. *$\langle \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a, b], \preceq \rangle$ é um conjunto dirigido, onde $\langle \mathcal{P}, T \rangle \preceq \langle \mathcal{P}', T' \rangle$ se, e somente se, $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$.*

Demonstração. Primeiramente, para partições $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ e $\mathcal{P}' := \langle a'_0, \ldots, a'_m \rangle$ de $[a, b]$, vamos escrever $\mathcal{P} \sqsubseteq \mathcal{P}'$ para indicar que $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \{a'_0, \ldots, a'_m\}$, já que escrever $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ seria tremendamente imoral. Daí, não é difícil perceber que o conjunto formado pelas partições de $[a, b]$ é dirigido pela ordem $\sqsubseteq$ (verifique?).

Agora sim, vamos mostrar que $\preceq$ dirige $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a, b]$. Dado que $\preceq$ é uma pré-ordem (verifique?), tudo se resume a observar que se $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ são duas partições de $[a, b]$ com $\mathcal{Q} \sqsubseteq \mathcal{R}$, então $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$: com efeito, *se isto for demonstrado*, então para partições de Riemann $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ e $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$ de $[a, b]$, basta tomar uma partição $\mathcal{R}$ de $[a, b]$ com $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \sqsubseteq \mathcal{R}$ e uma *tag* T'' de $\mathcal{R}$ para obter $\langle \mathcal{P}, T \rangle, \langle \mathcal{P}', T' \rangle \preceq \langle \mathcal{R}, T'' \rangle$. Os detalhes ficam por conta do leitor. □

Exercício 3.10. Dadas partições $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ do intervalo $[a, b]$, mostre que se $\mathcal{Q} \sqsubseteq \mathcal{R}$, então $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$. Use isso para concluir a demonstração anterior. Dica: antes de qualquer outra coisa, faça um desenho. ■

[5]Talvez por isso seja comum substituí-la pela noção (equivalente) de *integrabilidade de Darboux*, que será abordada oportunamente neste texto.

Moralmente, a pré-ordem $\preceq$ determina que conforme as normas das partições diminuem, elas se tornam *melhores* ou mais próximas do que seria uma partição *ideal*, justamente o que se espera de um conjunto dirigido. Para facilitar futuras referências, diremos que uma partição $\mathcal{P}$ é **mais fina** do que outra partição $\mathcal{P}'$ se ocorrer $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$, nomenclatura que também será utilizada para partições de Riemann – já que as *tags* não influenciam a ordenação. Em particular, ganha-se o direito de considerar *nets* indexadas por $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]$, o que permite enunciar o próximo

Teorema 3.0.25. *Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, a* net $\left\langle \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f \right\rangle_{\langle \mathcal{P},T\rangle \in \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]}$ *converge em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Com f Riemann-integrável e $\varepsilon > 0$, para *o* número real L da definição, existe $\delta > 0$ tal que $\left|L - \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f\right| < \varepsilon$ sempre que $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Logo, para mostrar que a *net* converge, basta exibir uma partição de Riemann $\langle \mathcal{P}', T'\rangle$ para $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}'\| < \delta$, pois daí sempre que $\langle \mathcal{P}, T\rangle \succeq \langle \mathcal{P}', T'\rangle$ teremos $\left|L - \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f\right| < \varepsilon$. Ora, tomando $N \in \mathbb{N}$ com $N > \frac{b-a}{\delta}$, que existe por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, considere $\mathcal{P}' := \langle a_0, \ldots, a_N\rangle$ onde $a_j := a + j \cdot \frac{b-a}{N}$ para cada $j \leq N$, e tome T' uma *tag* qualquer em $\mathcal{P}'$, como por exemplo $T' := \langle a_1, \ldots, a_N\rangle$: por construção, $\|\mathcal{P}'\| = \frac{b-a}{N} < \delta$. Para a recíproca, com a *net* convergindo para $L \in \mathbb{R}$ e fixado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta < \|\mathcal{P}'\|$, onde $\langle \mathcal{P}', T'\rangle$ é tal que $\left|L - \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f\right| < \varepsilon$ sempre que $\langle \mathcal{P}, T\rangle \succeq \langle \mathcal{P}', T'\rangle$. $\square$

Embora pareça uma curiosidade inútil, tratar o critério de Riemann-integrabilidade como um limite de *net* permite traduzir automaticamente resultados sobre convergência de *nets* para o contexto de integrais. Em particular, fatos como

$$\int_a^b f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

ou

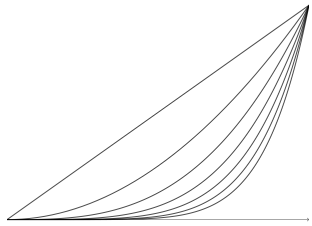
$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

se revelam casos particulares dos resultados análogos para *nets*. Apesar de tal tratamento não inutilizar completamente a abordagem de Darboux para as integrais de Riemann, o seu uso ficará restrito a considerações bem mais importantes do que a mera verificação de propriedades operatórias. Para mais detalhes, confira o Capítulo 5.

3.0.3 Adiável: convergência de funções

No vindouro Exemplo 3.1.47, veremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ sempre que $a \in \mathbb{R}$ com $|a| < 1$. Uma vez que isto vale para todo $x \in (-1,1)$, define-se de modo natural uma função $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} x^n$.

A função f acima, embora muito desinteressante (é constante $= 0$), ilustra uma situação típica: ao definir $f_n\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ como $f_n(x) := x^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (-1,1)$, obtém-se uma *sequência de funções* $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ que *parece* convergir para a função nula.



Definição 3.0.26. Sejam X um conjunto e $\langle f_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* de funções da forma $X \to \mathbb{R}$. Diremos que $\langle f_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ **converge** (**pontualmente**) para uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ se ocorrer $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} f_d(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, o que será indicado com $f_d \to f$. ¶

Exemplo 3.0.27. Com as notações da discussão anterior, mostrou-se que $f_n \to \underline{0}$, onde $\underline{0}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ é a função nula. Porém, ao substituir $(-1,1)$ por $(-1,1]$ e $f'_n\colon (-1,1] \to \mathbb{R}$ dada pela mesma expressão, a sequência $\langle f'_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ já não converge para a função nula correspondente, já que $f'_n(1) := 1^n \to 1 \neq 0$. Neste último caso, $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n$ é a função que faz $x \mapsto 0$ se $|x| < 1$ e $1 \mapsto 1$. ▲

Exercício 3.11. Para $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ a função dada por $g_n(x) := x^n$. Mostre que não existe $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Dica: qual poderia ser o valor de $g(-1)$? ■

Na prática, esse tipo de procedimento será usado para *definir* funções como limites de outras funções mais simples[6]. No entanto, há um detalhe técnico importante que passou incógnito sob o olhar de muita gente atenta[7]: se $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções *contínuas* e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n := f$ existe, então f é contínua?

Embora o exemplo anterior já contenha evidências suficientes para uma resposta negativa[8], é pedagogicamente recomendável ignorá-las a fim de *tentar* provar que a resposta é positiva. Apesar de ser um empreitada fadada ao fracasso, os *amigos feitos no caminho* ajudarão a motivar a próxima definição. Para fixar as ideias, sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais definidas em X tais que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para todo $x \in X$. Por simplicidade, vamos escrever $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada x.

Conjectura de Cauchy. *Se cada f_n é contínua em $x_0 \in X$, então f é contínua em x_0.*

"Demonstração". Com $\varepsilon > 0$ tomado arbitrariamente, precisa-se encontrar $\delta > 0$ tal que a ocorrência de $|x_0 - x| < \delta$ com $x \in X$ acarrete $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$. Ora, pela desigualdade triangular, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$ pode-se fazer

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ e cada f_n é contínua em x_0, todas as parcelas acima podem ser feitas menores do que $\frac{\varepsilon}{3}$ para n suficientemente grande e x suficientemente próximo de x_0. Portanto, f é contínua em x_0. □

[6] Situação em que se encontram as funções *trigonométricas* e a *exponenciais* – apenas para citar apenas os casos essenciais.

[7] Dentre elas, Cauchy (!). Niels Abel foi, possivelmente, o primeiro a perceber que a continuidade não se *propaga* através de limites pontuais.

[8] Cada f_n é contínua em $(-1,1]$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ é descontínua em 1, como veremos na próxima seção.

Exercício 3.12 (Importante)**.** Antes de avançar, tente encontrar o erro na "demonstração" acima. ■

Observação 3.0.28. Eis o que está acontecendo: realmente, cada parcela na última desigualdade pode ser controlada em virtude das hipóteses; porém, não há garantias de que o controle seja simultâneo! Mais precisamente, pela continuidade de f_n em x_0, encontra-se $\delta_n > 0$ de modo que $|x_0 - x| < \delta_n$ com $x \in X$ *obriga* $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Analogamente, pela convergência pontual, há $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para o qual $n \geq N_0$ acarreta $|f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Contudo, a parcela $|f_n(x) - f(x)|$ *pode* não ser controlada pelo mesmo N_0: sabemos que existe $N_x \in \mathbb{N}$ para o qual $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $n \geq N_x$, mas N_x depende de x! Isto inviabiliza a escolha de um $\delta > 0$ apropriado que dependa apenas do ponto x_0 e da constante $\varepsilon > 0$. △

O problema na argumentação acima desaparece se, na definição da convergência pontual, exigirmos que o mesmo $N \in \mathbb{N}$ ateste a convergência $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, trata-se de uma instância da próxima

Definição 3.0.29. Nas condições da Definição 3.0.26, diremos que a *net* $\langle f_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ **converge uniformemente para** f, o que será abreviado por "$f_d \to f$ unif.", se para todo $\varepsilon > 0$ existir $D \in \mathbb{D}$ tal que $|f_d(x) - f(x)| < \varepsilon$ para quaisquer $x \in X$ e $d \geq D$. ¶

Teorema 3.0.30. *Sejam X um espaço topológico, $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in X$ um ponto. Se $\langle f_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ é uma* net *de funções da forma $X \to \mathbb{R}$, todas contínuas em x_0 e $f_d \to f$ unif., então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Como acima, para quaisquer $x \in X$ e $d \in \mathbb{D}$ se verifica

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0) - f_d(x_0)| + |f_d(x_0) - f_d(x)| + |f_d(x) - f(x)|.$$

Agora, para $\varepsilon > 0$ fixado, a convergência uniforme assegura um índice $D \in \mathbb{D}$ tal que $|f_d(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para quaisquer $y \in X$ e $d \geq D$, o que em particular vale para x_0. Por sua vez, f_D é contínua em x_0, o que garante um aberto $U \subseteq X$ com $x_0 \in X$ tal que $|f_D(x_0) - f_D(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ sempre que $x \in U$. Portanto, se $x \in U$, então

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0) - f_D(x_0)| + |f_D(x_0) - f_D(x)| + |f_D(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

como desejado. □

Observação 3.0.31 (**Importante**: ordem dos quantificadores)**.** Discutivelmente, a razão principal para a confusão entre as ideias de *convergência* e *convergência uniforme* é ~~CENSURADO PELO SETOR JURÍDICO~~ que muitas pessoas não entendem corretamente como os quantificadores existencial "∃" e universal "∀" *funcionam*.

De fato, observe que as sentenças

$$\forall x \forall \varepsilon \exists D \quad \forall d\, (d \geq D \Rightarrow |f(x) - f_D(x)| < \varepsilon) \tag{3.2}$$
$$\forall \varepsilon \exists D \forall x \quad \forall d\, (d \geq D \Rightarrow |f(x) - f_D(x)| < \varepsilon) \tag{3.3}$$

expressam, respectivamente, as afirmações "$f_d \to f$" e "$f_d \to f$ unif.". Em (3.2), a existência do D que torna o restante verdadeiro é *subordinada* a x e ε, i.e., para cada x e ε basta que exista um D satisfazendo o restante; já em (3.3), cada ε exige um D capaz de funcionar com todo x.

Se ainda parecer confuso, considere $P(A, B, C)$ o *predicado* "A e B conhecem C". Neste caso, "$\forall A \forall B \exists C\ P(A, B, C)$" expressaria algo similar a "quaisquer duas pessoas conhecem pelo menos uma pessoa em comum", enquanto "$\forall A \exists C \forall B\ P(A, B, C)$" seria algo como "toda pessoa conhece alguém que todas as pessoas conhecem". Tais afirmações parecem equivalentes? △

Exercício 3.13. Mostre que se toda pessoa conhece alguém que todas as pessoas conhecem, então quaisquer duas pessoas conhecem pelo menos uma pessoa em comum. Conclua que se $f_d \to f$ unif., então $f_d \to f$ pontualmente. ■

Exemplo 3.0.32. A diferença apontada na observação acima tem natureza *linguística* (as frases foram escritas de maneiras distintas), mas poderia ser o caso de que as duas definições fossem equivalentes. Não são: considerando $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := x^n$ para cada n, já vimos que $f_n \to \underline{0}$ pontualmente; ocorre que a convergência não é uniforme. Por exemplo, para $\varepsilon := \frac{1}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existe $x \in (0,1)$ com $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$ pois, por valer $\lim\limits_{x \to 1^-} x^n = 1$, existe $\delta > 0$ para o qual

$$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow |x^n - 1| < \frac{1}{2},$$

donde em particular resulta $x^n = |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{2}$. ▲

Leitores experientes podem julgar como prematura a introdução dessas duas formas de convergência. No entanto, ambas são subcasos da convergência de *nets* num espaço topológico! A única diferença é que os pontos dos espaços em questão são funções, algo não muito diferente do que já se abordou no Exemplo 2.0.21.

No exemplo supracitado, discutiu-se como elevar o conjunto $\mathcal{B}(X)$ (das funções limitadas da forma $X \to \mathbb{R}$) ao patamar de espaço normado: basta declarar $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$. Assim, é *lícito* investigar o *limite* de uma sequência $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de *funções limitadas*, agora interpretadas como vetores num espaço normado! Explicitamente, uma função *limitada* $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *limite*[9] de $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$, ou seja, se o mesmo $N \in \mathbb{N}$ dá conta de "controlar" $|f_n(x) - f(x)|$ para cada $x \in X$.

Proposição 3.0.33. *Sejam $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequencia de funções reais, todas limitadas e definidas em X. Se existe $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ unif., então $f \in \mathcal{B}(X)$ e $f_n \to f$ como sequência do espaço métrico $\mathcal{B}(X)$. Reciprocamente, se f é limitada e $f_n \to f$ em $\mathcal{B}(X)$, então $f_n \to f$ unif.*

Demonstração. Primeiro, se $f_n \to f$ unif., então $|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|$ para quaisquer $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$; em particular, tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_N(x)| < 1$, segue que $|f(x)| \leq \|f_N\|_\infty + 1$ para todo x, mostrando que $f \in \mathcal{B}(X)$. Agora, $f_n \to f$ em $\mathcal{B}(X)$: fixado $\varepsilon > 0$ e $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon'$ para quaisquer $n \geq N$ e $y \in X$; logo, $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon' < \varepsilon$, i.e., $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$.

Reciprocamente, se $f_n, f \in \mathcal{B}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \to f$ enquanto sequência do espaço métrico $\mathcal{B}(X)$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ acarreta

$$d_\infty(f_n, f) := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

[9] Atenção: as palavras "limitada" e "limite" têm significados diferentes no presente contexto. Especificamente, "limitada" tem a ver com "cercada", no sentido de ter limitantes inferiores e superiores (em inglês, a terminologia usual é "*bounded*"), enquanto "limite" se refere a convergência.

Como $|f_n(y) - f(y)| \leq \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ para qualquer $y \in X$, mostrou-se em particular que $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ para quaisquer $n \geq N$ e $y \in X$. Em outras palavras: $f_n \to f$ unif. □

Observação 3.0.34 (Opcional: convergência uniforme de funções não-limitadas)**.** Sem assumir a limitação da função $f \colon X \to \mathbb{R}$, não se pode garantir $\sup_{x\in X} |f(x)| < +\infty$, o que impede a utilização de tal regra para definir uma *norma* sobre o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^X$ composto por *todas* as funções da forma $X \to \mathbb{R}$. Não obstante, podemos *truncar* esta regra a fim de obter uma métrica cuja *convergência induzida* é a convergência uniforme.△

Exercício 3.14 (Opcional)**.** Para $f, g \colon X \to \mathbb{R}$, seja $d_\infty(f,g) \coloneqq \min\left\{1, \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|\right\}$.

a) Mostre que d_∞ é uma métrica em $\mathbb{R}^X$.

b) Para uma sequência $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de funções da forma $X \to \mathbb{R}$, mostre que $f_n \to f$ no espaço métrico $\left\langle \mathbb{R}^X, d_\infty \right\rangle$ se, e somente se, $f_n \to f$ unif. ■

A topologia sobre $\mathbb{R}^X$ que *induz* a convergência pontual, por sua vez, é um pouco mais delicada: diferente da convergência uniforme, que é induzida por uma métrica para qualquer conjunto X, a convergência pontual em $\mathbb{R}^X$ não admite uma *métrica compatível* nas situações em que X é não-enumerável (o que será provado oportunamente).

Definição 3.0.35 (Opcional)**.** Para um subconjunto finito $S \subseteq X$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$, a **bola de Tychonoff** de *centro* f e *raio* $\langle S, r \rangle$ é o conjunto

$$B(f; S, r) \coloneqq \{g \in \mathbb{R}^X : |g(x) - f(x)| < r \text{ para todo } x \in S\}.$$

Diremos que $A \subseteq \mathbb{R}^X$ é um **aberto de Tychonoff** em $\mathbb{R}^X$ se para todo $f \in A$ existe uma bola de Tychonoff centrada em f e contida em A. ¶

Exercício 3.15 (Opcional)**.** Mostre que bolas de Tychonoff são abertos de Tychonoff. Dica: não é tão diferente de mostrar que bolas abertas são abertas na topologia de um espaço métrico. ■

Exercício 3.16 (Opcional)**.** Mostre que a família τ composta pelos abertos de Tychonoff de $\mathbb{R}^X$ define uma topologia em $\mathbb{R}^X$. ■

Teorema 3.0.36 (Opcional)**.** *Uma* net $\langle f_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *de funções de* $\mathbb{R}^X$ *converge para* $f \colon X \to \mathbb{R}$ *na topologia induzida pelos abertos de Tychonoff se, e somente se,* $f_d \to f$ *pontualmente.*

Demonstração. Se $f_d \to f$ na topologia de Tychonoff e $x \in X$, então para cada $\varepsilon > 0$ é lícito considerar a bola de Tychonoff $B(f; \{x\}, \varepsilon)$, um aberto legítimo *em torno* de f. Logo, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $f_d \in B(f, \{x\}, \varepsilon)$ sempre que $d \geq D$, i.e., tal que $|f(x) - f_d(x)| < \varepsilon$. Portanto, $f_d(x) \to f(x)$.

Reciprocamente, se $f_d \to f$ pontualmente e $B(f; S, r)$ é uma bola de Tychonoff, então para cada $s \in S$ existe $D_s \in \mathbb{D}$ tal que $d \geq d_s$ acarreta $|f(s) - f_d(s)| < r$. Ao tomar $D \in \mathbb{D}$ satisfazendo $D \geq D_s$ para todo s, segue que $f_d \in B(f; S, r)$ para todo $d \geq D$. □

Em contextos mais avançados, a topologia de Tychonoff sobre $\mathbb{R}^X$ e outros espaços ocupa papel de bastante destaque – seja sob o disfarce de "topologia fraca estrela" em Análise Funcional ou pelo seu verdadeiro nome, "topologia produto". Por aqui, sua apresentação buscou apenas reforçar a ideia de que a convergência de *nets* em espaços topológicos compreende *todos* os limites da Análise Básica.

Observação 3.0.37. Existem noções mais delicadas de convergência que não podem ser induzidas por uma topologia: a convergência "em quase todo ponto", oriunda da Teoria da Medida, é um exemplo clássico. No entanto, *espaços de convergência* fogem do escopo modesto deste texto. △

3.1 Propriedades elementares dos limites

A seção anterior ilustrou como a convergência de *nets* unifica as noções de limite, o que lastreia a presente subseção de um ponto de vista moral: vamos tratar das propriedades básicas da convergência de *nets* a fim de obter, simultaneamente, resultados acerca de limites de sequências, funções, *integrais* de Riemann, etc. Evidentemente, o leitor incomodado sempre terá a opção de traduzir os argumentos do contexto geral para os casos particulares, mas no conforto e privacidade de seu lar.

3.1.0 Unicidade

Vamos estabelecer um fato importante sobre limites de *nets*, secretamente abordado nos Exemplos 3.0.0 e 3.0.1: a unicidade dos limites é determinada pela *topologia* do espaço! Com efeito, ao revisitar os exemplos supracitados, o leitor não deve ter dificuldades em perceber o seguinte: se *os* limites L e L' fossem distintos, então a distância entre ambos seria positiva, digamos $|L - L'| = 2r > 0$; logo, os intervalos $(L - r, L + r)$ e $(L' - r, L + r)$ seriam disjuntos[10]; porém, ao repetir os argumentos apresentados com $\varepsilon := 2r$, chegaria-se à conclusão de que os intervalos não são disjuntos!

Definição 3.1.0. Um espaço topológico X é dito (de) **Hausdorff** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $x \in U$ e $y \in V$. ¶

Assim, o parágrafo que inicia esta subseção traz a prova de que $\mathbb{R}$ *é um espaço de Hausdorff* com sua topologia usual. Ao repetir o truque com a desigualdade triangular, conclui-se que *espaços normados e, mais geralmente, espaços métricos, também são de Hausdorff* com suas topologias. Finalmente, não deve ser difícil perceber que *a reta estendida também é um espaço de Hausdorff.*

Exercício 3.17. Verifique as afirmações anteriores. ■

Teorema 3.1.1 (Unicidade dos limites)**.** *Se $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ é uma* net *num espaço de Hausdorff e $x, y \in X$ são tais que $x_d \to x$ e $x_d \to y$, então $x = y$.*

Demonstração. Se $x_d \to x$ e $x_d \to y$ com $x \neq y$, então não existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $x \in U$ e $y \in V$: de fato, se $U, V \subseteq X$ são abertos com $x \in U$ e $y \in V$, então existem $D', D'' \in \mathbb{D}$ com $x_d \in U$ sempre que $d \geq D'$ e $x_d \in V$ sempre que $d \geq D''$; ora, por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $D \in \mathbb{D}$ com $D', D'' \leq D$, de modo que $x_D \in U \cap V$. Logo, X não é de Hausdorff – e o resultado segue pela contrapositiva. □

Exercício 3.18. Compare a demonstração acima com os argumentos apresentados nos Exemplos 3.0.0 e 3.0.1. ■

Corolário 3.1.2. *Todos os limites definidos na seção anterior são únicos, caso existam.*

Ficam justificadas, portanto, as notações do tipo "$\lim\limits_{n \to \infty}$", "$\lim\limits_{z \to p}$", "$\lim\limits_{z \to p^-}$" e "$\lim\limits_{z \to p^+}$" utilizadas desde o começo do capítulo: cada uma delas indica um limite de *net* num espaço de Hausdorff (a saber, $\overline{\mathbb{R}}$) e, portanto, são únicos quando existem. Também no caso em que X e Y são métricos, $Z \subseteq X$ e $p \in X$ é ponto de acumulação de Z, existe no máximo um $y \in Y$ digno de ser chamado de $\lim\limits_{z \to p} f(z)$ para uma função $f \colon Z \to Y$ (Exercício 3.8). Analogamente, pelo Teorema 3.0.25, se $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então existe um único L tal que a *net* $\left\langle \sum_{\langle \mathcal{P}, T \rangle} f \right\rangle_{\langle \mathcal{P}, T \rangle}$ converge para L, o que justifica atribuir a L um xingamento especial, bem como uma notação específica:

[10] Se $|x - L| < r$ e $|x - L'| < r$, então $|L - L'| \leq |L - x| + |x - L'| < 2r$.

Definição 3.1.3. Dada uma função Riemann-integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, a **integral de Riemann de f em $[a,b]$**, denotada por

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

é o único $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo as condições da Definição 3.0.23. ¶

Exercício 3.19. Sem apelar para *nets*, mostre que o número real $L \in \mathbb{R}$ na Definição 3.0.23, se existir, é único. Compare seus argumentos com o que se apresentou na demonstração do Teorema 3.1.1. Dica: se parecer difícil, adapte os Exemplos 3.0.0 ou 3.0.1. ■

Mais geralmente, dada uma *net* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ num espaço de Hausdorff X, vamos escrever $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d$, $\lim_{\mathbb{D}} x_d$ ou apenas $\lim x_d$ para indicar o *único* $x \in X$, caso exista, tal que $x_d \to x$, que passará a ser chamado de *o limite da* net.

Exemplo 3.1.4 (Adiável: unicidade dos limites nas convergências pontual e uniforme)**.** *Se $\langle f_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é uma* net *de funções da forma $X \to \mathbb{R}$ tal que $f_d \to f$ e $f_d \to g$ para certas funções $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, então $f = g$.* Com efeito, para cada $x \in X$, verifica-se $f_d(x) \to f(x)$ e $f_d(x) \to g(x)$, donde segue que $f(x) = g(x)$. Em particular, se $f_n \to f$ unif. e $f_n \to g$ unif., então $f = g$ (em virtude do Exercício 3.13). ▲

Observação 3.1.5 (Opcional: *nets* convergentes caracterizam a condição de Hausdorff)**.** Embora não seja evidente, exigir que *nets* não convirjam para pontos distintos assegura a condição de Hausdorff. De fato, se $x, y \in X$ são pontos distintos tais que $U \cap V \neq \emptyset$ sempre que $U, V \subseteq X$ são abertos com $x \in U$ e $y \in V$, então o conjunto

$$\mathbb{D} := \{\langle U, V \rangle : U, V \subseteq X \text{ são abertos, } x \in U \text{ e } y \in V\}$$

é dirigido pela relação binária $\leq$ dada por

$$\langle U, U' \rangle \leq \langle V, V' \rangle \Leftrightarrow V \subseteq U \text{ e } V' \subseteq U',$$

de modo que a hipótese sobre x e y permite *escolher*[11] $x_{\langle U,V\rangle} \in U \cap V$ para cada par $\langle U, V \rangle \in \mathbb{D}$. Isto define a *net* $\left\langle x_{\langle U,V\rangle} \right\rangle_{\langle U,V\rangle\in\mathbb{D}}$, que converge para x e y, por construção: se $W \subseteq X$ é um aberto com $x \in W$ (ou $y \in W$), então $x_{\langle U,V\rangle} \in W$ para todo par $\langle U, V \rangle \in \mathbb{D}$ satisfazendo $\langle U, V \rangle \geq \langle W, X \rangle$ (ou $\langle U, V \rangle \geq \langle X, W \rangle$), mostrando que $x_{\langle U,V\rangle} \to x$ e $x_{\langle U,V\rangle} \to y$, como desejado. △

3.1.1 (Des) igualdades

A seguinte linha de raciocínio é muito comum em Cálculo I:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \overset{\text{(a)}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \overset{\text{(b)}}{=} \lim_{x\to 2} x + 2 \overset{\text{(c)}}{=} 2 + 2 \overset{\text{(d)}}{=} 4.$$

Acima, a identidade (a) se deve tão somente ao *fato* de que as funções definidas pelas regras $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$ e $x \mapsto \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$ serem idênticas, posto que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Por sua vez, a identidade (c) segue das propriedades operatórias que veremos em breve, aliada ao fato de que *nets* constantes convergem para o valor de sua imagem. A identidade (d), evidentemente, resulta dos conhecimentos tacitamente assumidos de Aritmética Básica. A delicadeza está escondida na identidade (b).

[11] O Axioma da Escolha será cada vez mais presente por aqui... Com isso dito: é possível provar esta equivalência sem utilizá-lo, como bem apontado pelo Prof. João Paulo Cirineu. Todavia, isto exigiria retirar o tapete que vem cobrindo os *filtros*, algo descabido para o propósito deste texto.

Grosso modo, ao se considerar uma *expressão real* $y := f(x)$, por exemplo, entende-se que isto define uma função $f\colon \operatorname{dom}(f) \to \mathbb{R}$ em que $\operatorname{dom}(f)$ é o conjunto dos pontos x no *espaço ambiente* para os quais *faz sentido* atribuir $f(x)$ em $\mathbb{R}$. No caso, a expressão $f(x) := \frac{x^2-4}{x-2}$ é tal que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, pois $x := 2$ é o único ponto para o qual $f(x)$ não está definido. Em contrapartida, a expressão $g(x) := x + 2$ é tal que $\operatorname{dom}(g) = \mathbb{R}$. Logo, as funções f e g dadas pelas regras acima têm domínios distintos e, portanto, são distintas (Exemplo 0.0.13).

Todavia, a definição de $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ ignora *explicitamente* o valor $g(2)$, levando em conta apenas os valores $g(x)$ para x *suficientemente próximo* de 2, mas ainda assim distintos de 2 (Exemplo 3.0.15). Como f e g coincidem em todos os pontos distintos de 2, seria bastante *razoável* que seus limites fossem iguais. Isto de fato vale, e bem mais geralmente.

Proposição 3.1.6. *Sejam* $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *e* $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ nets *reais e* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. *Se existir* $D' \in \mathbb{D}$ *tal que* $x_d = y_d$ *para todo* $d \geq D'$, *então* $\lambda = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d$ *se, e somente se,* $\lambda = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d$.

Demonstração. Suponha $\lambda = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d$ e tome $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ um intervalo aberto $\lambda \in I$. Da hipótese de convergência, existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \in I$ sempre que $d \geq D$, enquanto a suposição sobre as *nets* garante $x_d = y_d$ sempre que $d \geq D'$. Por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $D'' \in \mathbb{D}$ com $D, D' \leq D''$. Logo, se $d \geq D''$, então $y_d = x_d \in I$, i.e., $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d = \lambda$. □

Exemplo 3.1.7. Para funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$, suponha que exista um (intervalo) aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ com $p \in U$ tal que $f(u) = g(u)$ para todo $u \in U \setminus \{p\}$. Em tais condições, para $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, verifica-se

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to p} g(x) = \lambda.$$

Com efeito, se $U := (p - r, p + r)$ para $r > 0$, então ao tomar $D' := p \pm r$ em $\langle \mathbb{R}_p, \preceq\rangle$ como no Exemplo 3.0.15, segue que $f(u) = g(u)$ para todo $u \succeq D'$. Logo, a equivalência decorre da proposição anterior. ▲

Exercício 3.20. Sejam $Z \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto ilimitado superiormente, $f, g\colon Z \to \mathbb{R}$ duas funções e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostre que se existir $M > 0$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z > M$, então $\lim\limits_{z\to+\infty} f(z) = \lambda$ se, e somente se, $\lim\limits_{z\to+\infty} g(z) = \lambda$. Dica: perceba que se trata de um subcaso da proposição anterior. ■

Exercício 3.21. Sejam $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ e $\langle y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathbb{R}$ e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostre que se existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = y_n$ sempre que $n \geq N$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Dica: perceba que se trata de um subcaso da proposição anterior. ■

Cofinalidade: subsequências e limites laterais

O comportamento *local* dos limites sugere que as *nets* não precisam ser definidas *globalmente* ao longo do conjunto dirigido, mas apenas num subconjunto razoavelmente *representativo*.

Definição 3.1.8. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ uma ordem parcial e $C \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto. Diz-se que C é **cofinal** em $\mathbb{P}$ se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $c \in C$ com $p \leq c$. ¶

A Proposição 3.0.11 fez o trabalho de caracterizar os subconjuntos cofinais de $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$: são precisamente os seus subconjuntos infinitos. Já para $Z \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ponto de acumulação de Z, qualquer subconjunto Z' de Z que também tiver p como ponto de acumulação será cofinal em $\langle Z_p, \preceq\rangle$: no caso de $p \in \mathbb{R}$, por exemplo, lembre-se de que o Exemplo 3.0.15 estipula $a \preceq b$ como sinônimo de $|b - p| \leq |a - p|$; logo, se p também é ponto de acumulação de $Z' \subseteq Z$ e $z \in Z_p$, então para $0 < \delta < |z - p|$ deve existir $z' \in Z'$ com $0 < |z' - p| < \delta$, mostrando que $z \preceq z'$. Mais geralmente, vale o seguinte:

Lema 3.1.9. *Sejam X um espaço métrico, $Z \subseteq X$ um subconjunto e $p \in X$ um ponto de acumulação de Z. Em tais condições, um subconjunto $Z' \subseteq Z \setminus \{p\}$ é cofinal em Z_p se, e somente se, p é ponto de acumulação de Z'.*

Demonstração. É bom recordar[12]: neste caso, $Z_p := Z \setminus \{p\}$ é dirigido pela pré-ordem $\preceq$ que declara $a \preceq b$ sempre que $d(b,p) \leq d(a,p)$. Agora, se Z' é cofinal em Z_p e $r > 0$, então por p ser ponto de acumulação de Z existe $z \in Z_p$ com $0 < d(z,p) < r$, donde a cofinalidade de Z' assegura $z' \in Z'$ com $z \preceq z'$, i.e., $0 < d(z',p) \leq d(z,p) < r$, mostrando que p é ponto de acumulação de Z'. A recíproca é análoga. □

Exercício 3.22. Dado $Z \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, mostre que $Z' \subseteq Z$ é cofinal em Z se, e somente se, Z é ilimitado superiormente. Enuncie e demonstre a versão para subconjuntos ilimitados inferiormente com a relação de ordem inversa. ■

A relação entre subconjuntos cofinais e limites de *nets* é *revelada* nos próximos resultados.

Lema 3.1.10. *Sejam $\langle \mathbb{D}, \leq \rangle$ um conjunto dirigido e $C \subseteq \mathbb{D}$ um subconjunto. Se C for cofinal em $\mathbb{D}$, então $\langle C, \leq \rangle$ é um conjunto dirigido.*

Demonstração. Dados $c, c' \in C$, por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $d \in \mathbb{D}$ com $c, c' \leq d$. Agora, pela cofinalidade de C em $\mathbb{D}$, existe $c'' \in C$ com $d \leq c''$, donde segue que $c, c' \leq c''$. □

Proposição 3.1.11. *Sejam $\langle \mathbb{D}, \leq \rangle$ um conjunto dirigido, $C \subseteq \mathbb{D}$ um subconjunto cofinal em $\mathbb{D}$, $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ uma* net *num espaço de Hausdorff X e $x \in X$ um ponto. Se $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d = x$, então $\lim\limits_{c \in C} x_c = x$.*

Demonstração. Se $V \subseteq X$ é um aberto com $x \in V$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \in V$ sempre que $d \geq D$. Como C é cofinal, existe $c' \in C$ com $D \leq c'$ e, portanto, $x_c \in V$ sempre que $c \in C$ for tal que $c \geq c' \geq D$, mostrando que $\lim\limits_{c \in C} x_c = x$. □

Corolário 3.1.12. *Sejam $\langle \mathbb{D}, \leq \rangle$ um conjunto dirigido, X um espaço de Hausdorff e $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ uma* net *em X. Se existirem subconjuntos cofinais $C, C' \subseteq \mathbb{D}$ e pontos distintos $x, x' \in X$ tais que $\lim\limits_{c \in C} x_c = x$ e $\lim\limits_{c' \in C'} x_{c'} = x'$, então a* net *$\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ não converge em X.*

Demonstração. Se existisse $L \in X$ com $x_d \to L$, então em virtude da proposição anterior deveria ocorrer $x_c \to L$ e $x_{c'} \to L$. Logo, pela condição de Hausdorff, teríamos $x = L$ e $x' = L$, i.e., $x = x'$. □

Exemplo 3.1.13 (Importante: subsequências**).** Ao aliar as Proposições 3.0.11 e 3.1.11 para uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço de Hausdorff, segue que $\lim\limits_{n \in \mathcal{N}} x_n$ existe e é x sempre que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, para qualquer subconjunto infinito $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$. Isto é *quase* a prova de que *subsequências* de sequências convergentes também convergem: a consequência só não é imediata pois a definição de *subsequência* envolve uma *reindexação*.

Definição 3.1.14. Uma sequência $\langle y_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é xingada de **subsequência** de outra sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ se existe uma função estritamente crescente $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{h(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Geralmente, escreve-se $h(k) := n_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ a fim de denotar a subsequência $\langle y_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ como $\langle x_{n_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$. ¶

[12] Quem preferir pode recordar na discussão que antecede o Exercício 3.0.20.

Para a sequência $\langle(-1)^n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, por exemplo, ao fazer $n_k := 2k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, ganha-se a *subsequência* $\left\langle(-1)^{2k}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$, que por sua vez é a sequência constante $\langle 1\rangle_{k\in\mathbb{N}}$, já que $(-1)^{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Analogamente, ao fazer $m_k := 2k+1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtém-se a subsequência $\left\langle(-1)^{2k+1}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$, que desta vez é a sequência constante $\langle -1\rangle_{k\in\mathbb{N}}$, já que $(-1)^{2k+1} = -1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

A sutileza se esconde no seguinte: a rigor, chamando $\mathcal{N} := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$, os objetos $\left\langle(-1)^{2k}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\langle(-1)^n\rangle_{n\in\mathcal{N}}$ são distintos! De fato, enquanto o primeiro é uma função da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o segundo é uma função da forma $\mathcal{N} \to \mathbb{R}$. A inquietante semelhança entre ambas é culpa da bijeção $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ que faz, justamente, $h(n) := 2n$ para cada n: com a ordem herdada de $\mathbb{N}$, o k-ésimo elemento de $\mathcal{N}$ é, precisamente, $2k$, de modo que o k-ésimo termo da sequência $\left\langle(-1)^{2k}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ coincide com o k-ésimo termo da *net* $\langle(-1)^n\rangle_{n\in\mathcal{N}}$. Como o leitor imagina, na prática, tal distinção é irrelevante:

Proposição 3.1.15. *Sejam $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência num espaço X, $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto infinito e h a única bijeção estritamente crescente de $\mathbb{N}$ para $\mathcal{N}$, dada pela Proposição 3.0.11. Então a subsequência $\left\langle x_{h(k)}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ se, e somente se, a* net *$\langle x_N\rangle_{N\in\mathcal{N}}$ converge para x.*

Demonstração. Se a subsequência $\left\langle x_{h(k)}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x e $V \subseteq X$ é um aberto com $x \in V$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{h(n)} \in V$ sempre que $n \geq k$. Note que para $K := h(k) \in \mathcal{N}$, sempre que $N \in \mathcal{N}$ com $N \geq K$ deve existir um único $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq k$ satisfazendo $h(n) = N$, já que o contrário daria $N < K$. Logo, se $N \in \mathcal{N}$ com $N \geq K$, então $x_N = x_{h(n)} \in V$, mostrando que a *net* $\langle x_N\rangle_{N\in\mathcal{N}}$ converge para x. A recíproca é análoga. □

Corolário 3.1.16. *Se uma sequência converge para x, então todas as suas subsequências também convergem para x.*

Corolário 3.1.17. *Se uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço de Hausdorff tem duas subsequências que convergem para limites distintos, então $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.*

Assim que verificarmos o fato *óbvio* de que *nets* constantes convergem para o seu termo constante, as subsequências $\left\langle(-1)^{2k}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left\langle(-1)^{2k+1}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ serão testemunhas de que a sequência $\langle(-1)^n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, como já se adiantou no final da Subseção 3.0.0. ▲

Exercício 3.23. Seja $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* em X. Mostre que se existe $x \in X$ tal que $x_d = x$ para todo d, então $x_d \to x$. ■

Exemplo 3.1.18 (Importante: limites laterais**).** Quando $Z \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de Z pela esquerda e pela direita, é lícito investigar, para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$, tanto os limites laterais $\lim\limits_{z\to p^-} f(z)$ e $\lim\limits_{z\to p^+} f(z)$ quanto o limite usual $\lim\limits_{z\to p} f(z)$. Como os conjuntos $Z_p^- := \{z \in Z_p : z < p\}$ e $Z_p^+ := \{z \in Z_p : p < z\}$ são cofinais em Z_p (em virtude do Lema 3.1.9, por exemplo), a última proposição acarreta o seguinte

Corolário 3.1.19. *Nas condições acima, se $\lim\limits_{z\to p} f(z) = \lambda$ para $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, então os limites laterais existem e $\lim\limits_{z\to p^-} f(z) = \lim\limits_{z\to p^+} f(z) = \lambda$.*

Em outras palavras, obtemos um critério para determinar a *inexistência* de limites: nas condições acima, se um dos limites $\lim\limits_{z\to p^-} f(z)$ ou $\lim\limits_{z\to p^+} f(z)$ não existe, ou se ambos existem mas são distintos, então não existe $\lim\limits_{z\to p} f(z)$. ▲

Exercício 3.24. Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$. Dica: avalie os limites laterais. ■

Exemplo 3.1.20 (Parte inteira)**.** Para cada $x\in\mathbb{R}$ com $x>0$, faz sentido considerar $N_x:=\min\{n\in\mathbb{N}:n>x\}>0$ e, com isso, definir o número *natural* $\lfloor x\rfloor:=N_x-1$, usualmente xingado de **parte inteira** de x. Por construção, $\lfloor x\rfloor$ é o único número natural para o qual pode-se escrever $x=\lfloor x\rfloor+r$ com $0\leq r<1$. Assim, por exemplo: $\left\lfloor\frac{1}{3}\right\rfloor=0$, $\left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor=2$, $\lfloor\pi\rfloor=3$, etc.

A função correspondente $\lfloor\cdot\rfloor\colon(0,+\infty)\to\mathbb{N}$ é um dos exemplos clássicos para analisar as variações de limites laterais:

(i) para $p\in(0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$, existe $r>0$ tal que $(p-r,p+r)\subseteq(\lfloor p\rfloor,\lfloor p\rfloor+1)$, de modo que $\lfloor z\rfloor=\lfloor p\rfloor$ para todo $z\in(p-r,p+r)$, acarretando $\lim\limits_{z\to p}\lfloor z\rfloor=\lfloor p\rfloor$;

(ii) já para $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, um ponto z suficientemente próximo de p verifica $\lfloor z\rfloor=\lfloor p\rfloor-1$ se $z<p$, enquanto $\lfloor z\rfloor=\lfloor p\rfloor$ se $p>z$, donde segue que $\lim\limits_{z\to p^-}\lfloor z\rfloor=\lfloor p\rfloor-1$ e $\lim\limits_{z\to p^+}\lfloor z\rfloor=\lfloor p\rfloor$.

Em particular, não existe $\lim\limits_{z\to p}\lfloor z\rfloor$ quando $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. ▲

Exercício 3.25. Decida se existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$. Dica: $1\neq -1$. ■

Leitores que enfrentaram bons cursos de Cálculo sabem que o último corolário contou apenas *metade da história*, já que a recíproca também vale, isto é: se os limites laterais existem e coincidem, então o limite existe. Com efeito, se $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$ é tanto o limite pela esquerda quanto pela direita, então para um intervalo aberto $I\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda\in I$, existem $z^-\in Z_p^-$ e $z^+\in Z_p^+$ tais que $f(z)\in I$ sempre que $z\in Z_p^-$ com $z\succeq z^-$ ou $z\in Z_p^+$ com $z\succeq z^+$. Ora, por Z_p ser dirigido, existe $z'\succeq z^-,z^+$, de modo que por valer a identidade $Z_p=Z_p^-\cup Z_p^+$, pode-se concluir que $f(z)\in I$ sempre que $z\succeq z'$ (por quê?!). Em outras palavras: $\lim\limits_{z\to p}f(z)=\lambda$. Como a argumentação buscou sugerir, isto é sintoma de um fenômeno bem mais geral.

Proposição 3.1.21. *Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma* net *num espaço X, $x\in X$ um ponto e $C,C'\subseteq\mathbb{D}$ subconjuntos cofinais em $\mathbb{D}$. Se $C\cup C'=\mathbb{D}$, então são equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}}x_d=x$;

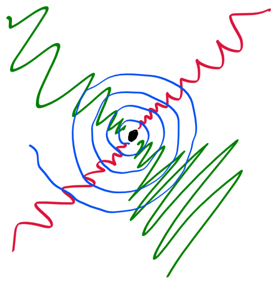
(ii) $\lim\limits_{d\in C}x_d=\lim\limits_{d\in C'}x_d=x$.

Demonstração. A Proposição 3.1.11 dá conta de (i) ⇒ (ii). Para a recíproca, fixado um aberto $V\subseteq X$ com $x\in V$, existe $c\in C$ tal que $x_d\in V$ sempre que $d\in C$ e $d\geq c$, bem como existe $c'\in C'$ tal que $x_d\in V$ sempre que $d\in C'$ e $d\geq c'$. Como $\mathbb{D}$ é dirigido, existe $D\in\mathbb{D}$ com $D\geq c,c'$, de modo que se $d\geq D$, então por $\mathbb{D}=C\cup C'$ resulta que $d\in C$ e $d\geq c$ ou $d\in C'$ e $d\geq c'$: em todo caso, $x_d\in V$. □

Corolário 3.1.22. *Se $\langle x_{n_k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\langle x_{m_k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ são subsequências de uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, com $\mathbb{N}=\{n_k:k\in\mathbb{N}\}\cup\{m_k:k\in\mathbb{N}\}$, então ocorre $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ se, e somente se, ocorrer $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}=x$.*

Exemplo 3.1.23. Se, para uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, for possível mostrar que as subsequências $\langle x_{2k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\langle x_{2k+1}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ convergem para o mesmo limite, então a sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge: de fato, tanto $\mathcal{N}:=\{2k:k\in\mathbb{N}\}$ quanto $\mathcal{N}':=\{2k+1:k\in\mathbb{N}\}$ são cofinais em $\mathbb{N}$, e vale $\mathbb{N}=\mathcal{N}\cup\mathcal{N}'$. ▲

Exemplo 3.1.24 (Opcional)**.** Para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$ com $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ e $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de Z, os análogos imediatos do que seriam "$\lim\limits_{z \to p^-} f(z)$" e "$\lim\limits_{z \to p^+} f(z)$" não são suficientes para determinar $\lim\limits_{z \to p} f(z)$, posto que em $\mathbb{R}^2$ existem infinitas direções, cada uma delas com dois sentidos possíveis.



Por exemplo, com $p := \langle 0, 0\rangle$ e $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$, a função $f\colon D \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) := \frac{y}{x}$, é *constante* em cada um dos subconjuntos $D_r := \left\{\langle x, y\rangle \in D : \frac{y}{x} = r\right\}$, todos cofinais em $\langle D, \preceq\rangle$. Todavia, as constantes *mudam*: como $\lim\limits_{\langle x,y\rangle \in D_r} f(x, y) = \lim\limits_{\langle x,y\rangle \in D_r} r = r$ para cada $r \in \mathbb{R}$, não pode existir "$\lim\limits_{\langle x,y\rangle \to \langle 0,0\rangle} f(x, y)$". Secretamente, esta "falha" se deve ao caráter "finitário" da condição de compatibilidade em conjuntos dirigidos: dado um subconjunto $\mathbb{D}' \subseteq \mathbb{D}$, garante-se a existência de $d \in \mathbb{D}$ com $d' \leq d$ para todo $d' \in \mathbb{D}$ desde que $\mathbb{D}'$ seja finito, pois em tal situação pode-se utilizar a condição de compatibilidade indutivamente. ▲

Monotonicidade: confronto e explosão

No caso particular de *nets* reais, a condição de Hausdorff aliada à ordenação de $\overline{\mathbb{R}}$ permite ainda estabelecer critérios para determinar *desigualdades* entre limites. A fim de apelar para a intuição geométrica, convém começar com o próximo

Lema 3.1.25. *Sejam $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, com $\alpha < \beta$. Se $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ são intervalos abertos, com $\alpha \in I$, $\beta \in J$ e $I \cap J = \emptyset$, então para quaisquer $x \in I$ e $y \in J$ deve ocorrer $x < y$.*

Demonstração. Se ocorresse $x \geq y$ para certos $x \in I$ e $y \in J$, então de duas uma:

✗ $\alpha < y$, e daí $y \in I$ (pois I é intervalo e $\alpha, x \in I$);

✗ $y \leq \alpha$, e daí $\alpha \in J$ (pois J é intervalo e $y, \beta \in J$),

o que contraria as hipóteses sobre I e J em ambos os casos. □

Exercício 3.26. Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* real e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ com $x_d \to \lambda$. Mostre que:

a) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são tais que $\alpha < \lambda < \beta$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $\alpha < x_d < \beta$ para todo $d \geq D$;

b) se $\lambda := +\infty$ e $\alpha > 0$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $\alpha < x_d$ para todo $d \geq D$;

c) se $\lambda := -\infty$ e $\beta < 0$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d < \beta$ para todo $d \geq D$. ■

Proposição 3.1.26 (Conservação de Sinal)**.** *Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma* net *real com $x_d \to \lambda$ e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) *Se* $\lambda > 0$, *então existe* $D \in \mathbb{D}$ *com* $x_d > 0$ *para todo* $d \geq D$.

(ii) *Se* $\lambda < 0$, *então existe* $D \in \mathbb{D}$ *com* $x_d < 0$ *para todo* $d \geq D$.

Demonstração. Em qualquer um dos casos, existem intervalos abertos e disjuntos $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$ e $0 \in J$. Por um lado, pelo Exercício 3.26, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in I$ para todo $d \geq D$. Por outro lado, se ocorrer $\lambda > 0$, então o lema anterior resulta na afirmação do item (i); se ocorrer $\lambda < 0$, então o mesmo lema resulta na afirmação do item (ii). □

No caso em que $f\colon Z \to \mathbb{R}$ é uma função e $\lim\limits_{z \to p} f(z) := \lambda \neq 0$ para algum $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ponto de acumulação de Z, a proposição anterior garante um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de p tal que $f(z)$ tem o mesmo sinal de λ sempre que $z \in Z \cap I$. Analogamente, no caso em que $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência real com $\lim\limits_{n \to \infty} x_n := \lambda \neq 0$, garante-se um $N \in \mathbb{N}$ tal que x_n tem o mesmo sinal de λ para todo $n \geq N$. Traduções semelhantes podem ser feitas para outros tipos de limites, o que será deixado a cargo da imaginação do leitor.

Proposição 3.1.27 (Monotonicidade)**.** *Sejam* $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ *e* $\langle y_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ nets *reais convergentes em* $\overline{\mathbb{R}}$. *Se existe* $D \in \mathbb{D}$ *tal que* $x_d \leq y_d$ *para todo* $d \geq D$, *então* $\lim_d x_d \leq \lim_d y_d$.

Demonstração. Supondo $\alpha := \lim_d y_d < \lim_d x_d := \beta$, existem intervalos abertos $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e disjuntos com $\alpha \in I$ e $\beta \in J$. Logo, não pode existir $D \in \mathbb{D}$ como na hipótese. De fato, se existisse, então também existiriam $D', D'' \in \mathbb{D}$ tais que $y_d \in I$ e $x_d \in J$ sempre que $d \geq D', D''$. Daí, por $\mathbb{D}$ ser dirigido, ao tomar $d \geq D, D', D''$ teríamos, simultaneamente, $x_d \leq y_d$ (pela hipótese, pois $d \geq D$) e $y_d < x_d$ (pelo lema anterior, pois $y_d \in I$ e $x_d \in J$). □

Exemplo 3.1.28 (Monotonicidade da integral de Riemann)**.** Se $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções Riemann-integráveis com $f \leq g$ e $\langle \mathcal{P}, \mathcal{T} \rangle$ é uma partição de Riemann de $[a, b]$, digamos que com $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ e $\mathcal{T} := \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$, então

$$\sum_{\langle \mathcal{P}, \mathcal{T} \rangle} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(a_i - a_{i-1}) := \sum_{\langle \mathcal{P}, \mathcal{T} \rangle} g.$$

Dada a arbitrariedade da partição tomada, a Proposição 3.1.27 acarreta a desigualdade $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. ▲

Exercício 3.27. Mostre que a recíproca da proposição anterior vale com a desigualdade estrita, i.e.: se $\lim_d x_d < \lim_d y_d$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d < y_d$ para todo $d \geq D$. Compare tal resultado com a Proposição 3.1.26. ■

Observação 3.1.29. A recíproca do exercício anterior não é verdadeira. Explicitamente: *pode-se* ter $\lim\limits_d x_d = \lim\limits_d y_d$ mesmo nas situações em que $x_d < y_d$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Um modo prático de verificar isso faz uso do seguinte

Teorema 3.1.30. *Toda* net *real e monótona*[13] *é convergente em* $\overline{\mathbb{R}}$.

Demonstração. Suponha $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ crescente e considere $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\alpha = \sup\{x_d : d \in \mathbb{D}\}$. Dado um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\alpha \in I$, existe $\beta < \alpha$ tal que $(\beta, \alpha] \subseteq I$, donde a hipótese sobre α garante *um* $D \in \mathbb{D}$ com $x_D > \beta$. Ora, pela hipótese sobre a *net*, segue que $x_d \geq x_D > \beta$ para todo $d \geq D$ e, por valer $x_d \leq \alpha$, resulta $x_d \in I$. O caso decrescente fica a cargo do leitor. □

[13] Isto é, crescente ($d \leq d' \Rightarrow x_d \leq x_{d'}$) ou decrescente ($d \leq d' \Rightarrow x_{d'} \leq x_d$). Trata-se da mesma definição apresentada no Exercício 0.54.

Exercício 3.28. Mostre que se $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* real e decrescente, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d = \inf\limits_{D\in\mathbb{D}} x_d$.■

Agora, por exemplo, para $x_n := 1 + \frac{1}{2^n}$ e $y_n := 1 - \frac{1}{2^n}$:

(i) tem-se $y_n < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) a sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, já que $n \leq m$ acarreta $2^n \leq 2^m$ e, consequentemente, $x_m := 1 + \frac{1}{2^m} \leq 1 + \frac{1}{2^n} := x_n$;

(iii) a sequência $\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, dado que $n \leq m$ acarreta $-\frac{1}{2^n} \leq -\frac{1}{2^m}$ e, consequentemente, $y_n \leq y_m$;

(iv) por sua vez, os Exercícios 1.33 e 1.37 asseguram que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 \quad \text{e} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} -\frac{1}{2^n} = 1 - \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Logo, pelo que se viu acima, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Para um exemplo mais preguiçoso, considere $x_n := 0$ e $y_n := \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. △

Exercício 3.29. Mostre que se $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência real, monótona e **limitada**, i.e., tal que existe $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ e $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. ■

De volta ao enunciado da Proposição 3.1.27, note que ao considerá-lo com três *nets* $\langle x_d \rangle_d$, $\langle y_d \rangle_d$ e $\langle z_d \rangle_d$ convergentes tais que $x_d \leq y_d \leq z_d$ para d *suficientemente bom*, asseguram-se as desigualdades $\lim_d x_d \leq \lim_d y_d \leq \lim_d z_d$. Porém, se valer $\lim_d x_d = \lim_d z_d$, então a existência de $\lim_d y_d$ passa a ser *consequência* da

Proposição 3.1.31 (Sanduíche)**.** *Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$, $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle z_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ nets reais e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} z_d = \lambda$ e existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \leq y_d \leq z_d$ para todo $d \geq D$, então $y_d \to \lambda$.*

Demonstração. Dado um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$, busca-se $D \in \mathbb{D}$ com $y_d \in I$ para todo $d \geq D$. Ora, como $x_d \to \lambda$ e $z_d \to \lambda$, existem $D', D'' \in \mathbb{D}$ tais que

$$d \geq D' \Rightarrow x_d \in I \quad \text{e} \quad d \geq D'' \Rightarrow z_d \in I.$$

Como $\mathbb{D}$ é dirigido, existe $\widetilde{D} \geq D, D', D''$. Logo, se $d \geq \widetilde{D}$, então $x_d \leq y_d \leq z_d$ com $x_d, z_d \in I$, donde o fato de I ser intervalo acarreta $y_d \in I$, como desejado. □

Exemplo 3.1.32. Um modo clássico de utilizar o resultado anterior é ilustrado na próxima

Proposição 3.1.33 (Confronto)**.** *Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ nets reais com $x_d \to 0$. Se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\{y_d : d \geq D\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, então $x_d y_d \to 0$.*

Demonstração. Pelo Exercício 3.56, tem-se $|x_d| \to 0$. Agora, para $M > 0$ com $|y_d| < M$ para todo $d \geq D$, note que $-M|x_d| \leq |x_d y_d| \leq M|x_d|$, com $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} -M|x_d| = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} M|x_d| = 0$. Logo, $x_d y_d \to 0$ pela proposição anterior. □

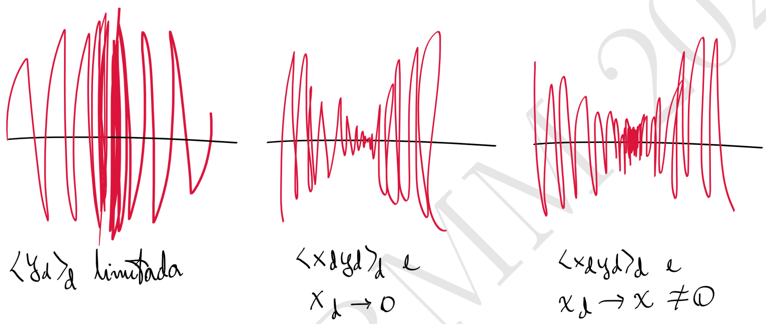
Demonstração alternativa. Pela hipótese, existe $M > 0$ tal que $|y_d| < M$ para todo $d \geq D$. Agora, fixado $\varepsilon > 0$, existe $D' \in \mathbb{D}$ com $|x_d| < \frac{\varepsilon}{M}$ para todo $d \geq D'$. Logo, para $D'' \geq D, D'$, obtém-se $|x_d y_d| < \varepsilon$ para todo $d \geq D''$, como desejado. □

No caso de sequências, se $x_n \to 0$ e $\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência *limitada*, então $x_n y_n \to 0$. Já para funções reais $f, g \colon Z \to \mathbb{R}$:

✓ se $p \in \overline{\mathbb{R}}$ é ponto de acumulação de Z, $\lim\limits_{z\to p} f(z) = 0$ e existem $\delta, M > 0$ com $|g(z)| < M$ para todo $z \in Z$ satisfazendo $|z - p| < \delta$, então $\lim\limits_{z\to p} f(z)g(z) = 0$;

✓ se p é ponto de acumulação de Z à direita, $\lim\limits_{z\to p^+} f(z) = 0$ e existem $\delta, M > 0$ com $|g(z)| < M$ para todo $z \in Z$ com $p < z < p + \delta$, então $\lim\limits_{z\to p^+} f(z)g(z) = 0\ldots$

É importante destacar que a hipótese sobre a *net* $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é menos restritiva do que exigir sua convergência: se a *net* convergisse em $\mathbb{R}$, o mesmo resultado também seguiria das propriedades operatórias dos limites, que serão discutidas na próxima seção. Nesse sentido, troca-se convergência por limitação. Porém, fica o alerta: para funcionar, é imprescindível que se tenha $x_d \to 0$. ▲



Exercício 3.30. Mostre que se $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d \neq 0$, então não se pode garantir a convergência da *net* $\langle x_d y_d \rangle_d$ na última proposição. ■

O enunciado do sanduíche proposto pela Proposição 3.1.31 permite que as fatias de pão (i.e., as *nets* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle z_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$) convirjam para os extremos da reta estendida. Porém, neste caso, bastaria uma *brusqueta*[14]:

Exercício 3.31 (Princípio da Explosão)**.** *Sejam* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets reais tais que existe um* $D \in \mathbb{D}$ *com* $x_d \leq y_d$ *para todo* $d \geq D$.

a) Mostre que se $x_d \to +\infty$, então $y_d \to +\infty$.

b) Mostre que se $y_d \to -\infty$, então $x_d \to -\infty$.

c) Enuncie as contrapositivas dos itens anteriores. ■

Nesse sentido, apesar da generalidade, a Proposição 3.1.31 só é *realmente útil* nos casos em que $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que o leitor pode se interessar por um argumento mais algébrico: dado $\varepsilon > 0$, existem $D', D'' \in \mathbb{D}$ tais que $|x_d - \lambda| < \varepsilon$ se $d \geq D'$ e $|z_d - \lambda| < \varepsilon$ se $d \geq D''$; logo, para $\widetilde{D} \geq D, D', D''$, ocorrerá $\lambda - \varepsilon < x_d \leq y_d \leq z_d < \varepsilon + \lambda$,

Observação 3.1.34 (Opcional)**.** Secretamente, o *Princípio da Explosão* também segue do *Teorema do Sanduíche*: basta tomar uma das *nets extremais fora* da reta. Por exemplo, se $x_d \to +\infty$ e $x_d \leq y_d$ para todo $d \geq D$, então $x_d \leq y_d < z_d$, onde $z_d := +\infty$ para todo $d \in \mathbb{D}$ – e, *claramente*, $z_d \to +\infty$. Em outras palavras, o Princípio da Explosão é apenas um sanduíche com uma das fatias no infinito. Fica a cargo do leitor se convencer dos detalhes. △

[14] Prato típico da culinária italiana que consiste numa fatia de pão e imaginação.

Séries (primeiro contato)

Definição 3.1.35. Fixada uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$, a *série* determinada por $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, que a princípio denotaremos por $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n\geq 0} x_n$ ou apenas $\sum x_n$, é a sequência $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ formada pelos termos $s_n := \sum_{j=0}^{n} x_j$, que costumam ser chamados de **somas parciais da série**. ¶

Intuitivamente, a série $\sum x_n$ busca representar o que seria a *soma* de <u>todos</u> os termos da sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, o que não faz sentido algébrico, mas pode fazer sentido *topológico*.

Definição 3.1.36. Diremos que a série $\sum x_n$ **converge** em E se existir $x \in E$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j$, i.e., se as somas parciais da série convergem para x. Por abuso de notação, em tais situações, o limite da série também será denotado como $\sum x_n$, que xingaremos de **soma da série** $\sum x_n$ ¶

Embora sejam apenas tipos particulares de sequências, séries costumam ser úteis na descrição de certos limites importantes, o que faz delas peças indispensáveis em qualquer discussão honesta de Análise. Por ora, elas serão usadas apenas como ilustração dos últimos resultados:

(i) para $E := \mathbb{R}$ e supondo $x_n \geq 0$ para todo n, resulta que a sequência das somas parciais é crescente e, portanto, $\sum x_n$ converge em $\overline{\mathbb{R}}$;

(ii) em particular, nas condições anteriores, $\sum x_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, o conjunto $S := \left\{\sum_{j=0}^{n} x_j : n \in \mathbb{N}\right\}$ é limitado superiormente, caso em que se verifica $\sum x_n = \sup S$ (Exercício 1.39);

(iii) ainda com $E := \mathbb{R}$, se $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo n, então $0 \leq \sum_{j\leq n} x_j \leq \sum_{j\leq n} y_j$ para todo n, resultando em $0 \leq \sum x_n \leq \sum y_n$, com as somas das séries tomadas, possivelmente, em $\overline{\mathbb{R}}$;

(iv) por fim, no item anterior, note que se $\sum y_n$ convergir em $\mathbb{R}$, então $\sum x_n$ também converge em $\mathbb{R}$, enquanto a ocorrência de $\sum x_n = +\infty$ acarreta $\sum y_n = +\infty$.

Séries serão *personagens* recorrentes a partir de agora.

3.1.2 Continuidade revisitada

Intuitivamente, a continuidade de uma função $f : X \to Y$ em $x \in X$ diz que se pode tornar $f(x')$ *próximo* de $f(x)$ desde que se tome x' *próximo* de x, enquanto a convergência de uma *net* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ em X para x assegura um momento $D \in \mathbb{D}$ a partir do qual x_d fica próximo de x. Consequentemente, para $d \geq D$, $f(x_d)$ fica próximo de $f(x)$. Em outras palavras:

Teorema 3.1.37. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma função e $x \in X$ um ponto. Se f é contínua em x, então $f(x_d) \to f(x)$ sempre que $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é uma* net *em X que converge para x.*

Demonstração. Se f é contínua em x e $\langle x_d \rangle_d$ é uma *net* com $x_d \to x$, então para um aberto $V \subseteq Y$ com $f(x) \in V$, existe um aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Como $x_d \to x$, existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \in U$ para todo $d \geq D$, mostrando que $f(x_d) \in V$ para todo $d \geq D$, como desejado. □

Corolário 3.1.38. *Para X e Y espaços de Hausdorff, se $f\colon X \to Y$ é contínua, então*

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} f(x_d) = f\left(\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d\right)$$

para qualquer net *$\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ convergente em X.*

Propriedades operatórias

Embora não seja óbvio, o corolário acima é o responsável pelas diversas propriedades operatórias que se verificam nos mais variados contextos da Análise.

Lema 3.1.39. *Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$* nets *em espaços topológicos X e Y, respectivamente. Então $\langle x_d, y_d \rangle \to \langle x, y \rangle$ em $X \times Y$ se, e somente se, $x_d \to x$ em X e $y_d \to y$ em Y.*

Demonstração. A ida segue pela continuidade das projeções $X \times Y \to X$ e $X \times Y \to Y$: pela proposição anterior, $\pi_X(x_d, y_d) \to \pi_X(x, y)$ e $\pi_Y(x_d, y_d) \to \pi_Y(x, y)$, i.e., $x_d \to x$ e $y_d \to y$. Por sua vez, a recíproca segue por $\mathbb{D}$ ser dirigido: de fato, pelo modo como a topologia produto é definida, se $W \subseteq X \times Y$ é um aberto com $\langle x, y \rangle \in W$, então existem abertos $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, com $x \in U$ e $y \in V$, respectivamente, donde a hipótese garante $d_x, d_y \in \mathbb{D}$ tais que $x_d \in U$ e $y_d \in V$ sempre que $d \geq d_x, d_y$; como $\mathbb{D}$ é dirigido, existe, de fato, um $D \in \mathbb{D}$ com $D \geq d_x, d_y$, e daí $\langle x_d, y_d \rangle \in U \times V \subseteq W$ sempre que $d \geq D$. □

Exemplo 3.1.40 (Limites em $\mathbb{R}^n$)**.** Em particular, uma *net* $\langle x_d, y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ em $\mathbb{R}^2$ converge para $\langle x, y \rangle$ se, e somente se, $x_d \to x$ e $y_d \to y$ em $\mathbb{R}$. Dada a vasta natureza das *nets*, tal conclusão tem muitas ramificações. Para citar pelo menos duas:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$;

(ii) para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}^2$ com $Z \subseteq X$ e $p \in X$ ponto de acumulação de Z, o limite $\lim\limits_{z\to p} f(z)$ existe se, e somente se, os limites $\lim\limits_{z\to p} f_0(z) = x$ e $\lim\limits_{z\to p} f_1(z) = y$ existem em $\mathbb{R}$, onde f_1 e f_2 são as funções coordenadas de f, i.e., tais que $f(z) = \langle f_0(z), f_1(z) \rangle$ para cada $z \in Z$. Além disso, $\lim\limits_{z\to p} f(z) = \langle x, y \rangle$.

Evidentemente, considerações análogas valem para $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, etc. A moral da história é que, na prática, tratar de problemas de convergência em $\mathbb{R}^n$ é a mesma coisa que tratar de n problemas de convergência em $\mathbb{R}$. ▲

Exercício 3.32. Mostre que se X e Y são de Hausdorff, então $X \times Y$ é de Hausdorff. ■

Exercício 3.33. Mostre que se $X \subseteq Y$ e Y é de Hausdorff, então X é de Hausdorff. ■

Corolário 3.1.41. *Sejam E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado, $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$, $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$* nets *em E e $\langle r_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma* net *em $\mathbb{R}$.*

(i) *Se* $x_d \to x$ *e* $y_d \to y$ *em* E*, então* $x_d + y_d \to x + y$ *em* E*.*

(ii) *Se* $x_d \to x$ *em* E *e* $r_d \to r$ *em* $\mathbb{R}$*, então* $r_d x_d \to rx$ *em* E*.*

Demonstração. Pelo lema anterior, tem-se tanto $\lim_{d\in\mathbb{D}} \langle x_d, y_d\rangle = \langle x, y\rangle$ em $E \times E$ quanto $\lim_{d\in\mathbb{D}} \langle r_d, x_d\rangle = \langle r, x\rangle$ em $\mathbb{R} \times E$. Logo, os itens (i) e (ii) seguem do corolário anterior, posto que as funções de adição e multiplicação são contínuas (Exemplos 2.1.9 e 2.1.11, respectivamente). □

Observação 3.1.42. É claro que o último corolário pode ser demonstrado diretamente, i.e., sem apelar para continuidade. Por exemplo, para $\lim_d x_d + y_d = \lim_d x_d + \lim_d y_d$, basta notar que

$$\|x + y - (x_d + y_d)\| \leq \|x - x_d\| + \|y - y_d\|,$$

para daí usar que $x_d \to x$ e $y_d \to y$ a fim de obter um $D \in \mathbb{D}$ apropriado que permita limitar a expressão acima. O ponto a observar, porém, é que o mesmo argumento prova que a função soma $\langle x, y\rangle \mapsto x + y$ é contínua (Exemplo 2.1.9). △

Exercício 3.34. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mostre que $\lim_{d\in\mathbb{D}} \alpha x_d + \beta y_d = \alpha \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + \beta \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d$ sempre que as *nets* $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ convergem num espaço normado. Dica: a função $E \times E \to E$ que faz $\langle x, y\rangle \mapsto \alpha x + \beta y$ é contínua. ■

Como $E := \mathbb{R}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado, o exercício anterior se aplica naturalmente a *nets* de números reais que convergem em $\mathbb{R}$. Um caso particular bastante importante é discutido a seguir.

Exemplo 3.1.43 (Linearidade da integral de Riemann)**.** Para funções $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integráveis e constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixadas, a função $\alpha f + \beta g$ ainda é Riemann-integrável. Com efeito, para uma partição de Riemann $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ de $[a, b]$, digamos que $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ e $T := \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} (\alpha f + \beta g) &:= \sum_{i=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(t_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(a_i - a_{i-1}) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(a_i - a_{i-1}) := \alpha \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f + \beta \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} g.\end{aligned}$$

Logo, existe a integral de Riemann de $\alpha f + \beta g$ em $[a, b]$, já que

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \beta g(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} \alpha f + \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} \beta g = \\ &= \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \left(\alpha \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f + \beta \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} g \right) = \\ &= \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} (\alpha f + \beta g) := \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

como desejado. ▲

Exercício 3.35. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que se existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, então f é Riemann-integrável e $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = c(b-a)$. Dica: para uma partição de Riemann $\langle \mathcal{P}, T\rangle$, calcule explicitamente $\displaystyle\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f$. ■

Exemplo 3.1.44 (Propriedades operatórias de séries)**.** Para séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ convergentes num espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$, deve-se ter $\sum x_n + y_n = \sum x_n + \sum y_n$. De fato, por definição,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j + y_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j + \sum_{j=0}^{n} y_j =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} y_j := \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Analogamente, mostra-se que $r\sum x_n = \sum r x_n$ sempre que $\sum x_n$ converge em E e $r \in \mathbb{R}$. No caso em que $E := \mathbb{R}$, verifica-se ainda que o *produto* de duas séries convergentes é convergente[15]. Porém, em geral, não vale que $(\sum x_n) \cdot (\sum y_n) = (\sum x_n y_n)$: afinal de contas, é muito comum ocorrer $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{n} x_n\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} y_n\right) \neq \sum_{j=0}^{n} x_n y_n$. ▲

Exemplo 3.1.45 (Teste da *divergência* e a série *harmônica*)**.** Geralmente, diz-se que uma série $\sum x_n$ num espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ **diverge** se a série não convergir em E. No caso em que $E := \mathbb{R}$, tal terminologia nos obriga a dizer que uma *série* $\sum x_n$ de números reais *diverge* mesmo quando seu limite *existe fora da reta*, num conflito claro com a postura defendida e explicitada na Observação 3.0.10. O contexto, como sempre, costuma deixar claro o sentido em que a palavra "divergência" é usada. Com isso dito, vale o seguinte:

Proposição 3.1.46 (Teste da divergência)**.** *Se $\sum x_n$ converge em E, então $x_n \to 0$.*

Demonstração. Chamando por $s_n := \displaystyle\sum_{j\leq n} x_j$, a convergência da série diz que existe $s \in E$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Como $\langle s_{n+1}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\langle s_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} = s$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0,$$

como desejado. □

Na contrapositiva, a proposição anterior dá um primeiro critério para detectar séries *divergentes*. No entanto, a mera ocorrência de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ não assegura que $\sum x_n$ seja convergente, como nos ensina a **série harmônica** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, vamos escrever $a_n := \frac{1}{n}$ e $b_n := \frac{1}{2\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor}$. Assim, $\langle b_n\rangle_{n\geq 1}$ é a *sequência* $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\rangle$, de modo que valem as relações

[15] Em virtude do exemplo anterior, o leitor pode se perguntar se o produto de funções Riemann-integráveis será Riemann-integrável. A resposta também é sim, porém a demonstração no caso da integral é bem menos elementar.

(i) $b_n \leq a_n$ para todo $n \geq 1$, com $b_n < a_n$ quando n é ímpar, e

(ii) $a_n = b_{2n-1} + b_{2n}$ para cada $n \geq 1$.

Observe então que

$$\sum_{n\geq 1} b_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} b_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{2k} b_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} b_{2j-1} + b_{2j} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j = \sum_{n\geq 1} a_n,$$

onde a segunda igualdade se deve ao fato de $\langle b_1 + \ldots + b_{2k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ ser subsequência da sequência $\langle b_1 + \ldots + b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, que converge na reta estendida – possivelmente, para $+\infty$. Agora, se ocorresse $\sum_{n\geq 1} a_n \in \mathbb{R}$, então valeria que $\sum_{n\geq 1} a_n - \sum_{n\geq 1} b_n = 0$. Porém,

$$\sum_{n\geq 1} a_n - \sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} a_n - b_n > 0,$$

já que $a_n - b_n \geq 0$ para todo n, com desigualdade estrita sempre que n é ímpar. Portanto, $\sum_{n\geq 1} a_n \notin \mathbb{R}$, i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Por outro lado, é claro que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Exercício 3.28). ▲

Exemplo 3.1.47 (Importante). *Para $a \in \mathbb{R}$ com $|a| < 1$, verifica-se* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Com efeito, se $0 \leq a \leq 1$, então a sequência $\langle a^n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada por 1, donde segue que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a^n = L$. Como a subsequência $\langle a^{n+1}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ também deve convergir para L, obtemos

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a \cdot a^n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = aL,$$

acarretando $L(1-a) = 0$ e, consequentemente, $L = 0$. Isto também resolve o caso em que $-1 \leq a \leq 0$, posto que $|a| < 1$ e daí, pelo que se observou acima, $\lim_{n\to\infty} |a^n| = 0$, donde segue que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ (em virtude do Exercício 3.56). ▲

Uma consequência bastante útil do último exemplo é a generalização da *fórmula* obtida no Exercício 1.39:

Proposição 3.1.48. *Se $a \in \mathbb{R}$ com $|a| < 1$, então $\sum a^n = \frac{1}{1-a}$.*

Demonstração. Por definição,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a^j = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} \lim_{n\to\infty} 1 - a^{n+1} = \frac{1}{1-a}. \qquad \square$$

Para $|a| = 1$, pode-se ter $a := -1$ ou $a := 1$: no primeiro caso, a sequência formada pelas somas parciais corresponde à sequência $\langle 1, 0, 1, 0, \ldots\rangle$, que não converge; no segundo caso, a sequência correspondente às somas parciais é $\langle n+1\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, cujo limite é $+\infty$. Para entender o que ocorre com $\sum a^n$ nos casos em que $|a| > 1$, convém tratar primeiro das propriedades operatórias dos limites na reta estendida. Entram em cena as funções $s\colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ e $p\colon \mathcal{M}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas no capítulo anterior.

Proposição 3.1.49. *Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$* nets *reais, bem como $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ pontos na reta estendida, com $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = x$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d = y$.*

(i) Se $\langle x,y\rangle \in \mathcal{A}_\infty$*, então* $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = s(x,y)$*, onde* $s\colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ *é tomada como no Exemplo 2.0.46.*

(ii) Se $\langle x,y\rangle \in \mathcal{M}_\infty$*, então* $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot y_d = p(x,y)$*, onde* $p\colon \mathcal{M}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ *é tomada como no Exercício 2.20.*

Demonstração. Em ambos os casos, tem-se $\langle x_d, y_d\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}_\infty \cap \mathcal{M}_\infty$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Logo, os dois casos seguem Corolário 3.1.38: para o primeiro, por exemplo, $\mathcal{A}_\infty$ é um espaço de Hausdorff no qual a *net* $\langle x_d, y_d\rangle_d$ converge para $\langle x,y\rangle$. Logo, a continuidade de s assegura que

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = \lim_{d\in\mathbb{D}} s(x_d,y_d) = s\left(\lim_{d\in\mathbb{D}} \langle x_d, y_d\rangle\right) = s(x,y),$$

como desejado. O outro caso é análogo. □

Exercício 3.36. Traduza a proposição anterior para os seus tipos favoritos de limite. ■

Nas situações em que $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2$, a proposição anterior apenas *reobtém* o Corolário 3.1.41 para $E := \mathbb{R}$. A "novidade" fica por conta dos casos em que $\langle x,y\rangle \notin \mathbb{R}^2$, de acordo com as definições de s e p. Por exemplo, se $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d = +\infty$ e $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d := y \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = s(+\infty, y) = +\infty$ e, se $y < 0$, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot y_d = p(+\infty, y) = -\infty$.

Em resumo, quando $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d := x$ e $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d := y$ são pontos na reta estendida, ficam *determinados* os limites $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = s(x,y)$ e $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot y_d = p(x,y)$ conforme $\langle x,y\rangle$ pertence a $\mathcal{A}_\infty$ ou $\mathcal{M}_\infty$, respectivamente. Como veremos mais adiante, nos demais casos não é possível *determinar* tais limites *a priori*, razão pela qual eles costumam ser xingados de *indeterminados*[16]. Em todo caso, daqui em diante, as notações $s(x,y)$ e $p(x,y)$ serão abandonadas.

Definição 3.1.50. Para pontos $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \overline{\mathbb{R}}$, vamos escrever $\alpha + \beta$ e $\alpha' \cdot \beta'$ para indicar $s(\alpha,\beta)$ e $p(\alpha',\beta')$ sempre que $\langle \alpha,\beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty$ e $\langle \alpha',\beta'\rangle \in \mathcal{M}_\infty$, respectivamente. ¶

Exemplo 3.1.51 (Limites de funções polinomiais). O distante Exemplo 2.1.23 mostrou que uma função polinomial $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induzida por um polinômio $p(t)$ na indeterminada t é contínua em cada $a \in \mathbb{R}$. Dado que qualquer $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$, resulta $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Os limites no infinito são ainda mais fáceis de se calcular, posto que bastam três informações explícitas para *determinar* o "*valor*" de $\lim\limits_{x\to\lambda} p(x)$ quando $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$. Adiante, convém escrever $\operatorname{sgn}(\lambda) := -1$ para $\lambda < 0$ e $\operatorname{sgn}(\lambda) := 1$ para $\lambda > 0$.

Proposição 3.1.52. *Sejam* $p := \alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n \in \mathbb{R}[t]$ *um polinômio de grau* $n \geq 1$ *e* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$*. Então*

$$\lim_{x\to\lambda} p(x) = \alpha_n \operatorname{sgn}(\lambda)^n \cdot (+\infty). \tag{3.4}$$

Demonstração. Para $n := 1$, tem-se $p(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t$ com $\alpha_1 \neq 0$. Com $\alpha_0 := 0$, note que:

[16] Note que isto é diferente de dizer que os limites não existem. A *determinação*, no caso, se refere à possibilidade de *determinar* os limites a partir de regras gerais.

(i) se $\alpha_1 > 0$ e $M > 0$, então para $\delta := \frac{M}{\alpha_1} > 0$ ocorrem $p(x) > M$ e $p(y) < -M$ sempre que $x > \delta$ e $y < -\delta$, mostrando que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty = \alpha_1 \mathrm{sgn}\,(+\infty)\cdot(+\infty)$ e $\lim\limits_{y\to-\infty} p(y) = -\infty = \alpha_1 \mathrm{sgn}\,(-\infty)\cdot(+\infty)$;

(ii) se $\alpha_1 < 0$ e $M > 0$, então para $\delta := \frac{-M}{\alpha_1} > 0$ ocorrem $p(x) < -M$ e $p(y) > M$ sempre que $x > \delta$ e $y < -\delta$, mostrando que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty = \alpha_1 \mathrm{sgn}\,(+\infty)\cdot(+\infty)$ e $\lim\limits_{y\to-\infty} p(y) = +\infty = \alpha_1 \mathrm{sgn}\,(-\infty)\cdot(+\infty)$.

Para $\alpha_0 \neq 0$, basta observar que $\lim\limits_{x\to\lambda} \alpha_0 = \alpha_0$ e

$$\lim_{x\to\lambda} \alpha_0 + \lim_{x\to\lambda} \alpha_1 x = \lim_{x\to\lambda} \alpha_0 + \alpha_1 x = \lim_{x\to\lambda} p(x),$$

enquanto $\alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{sgn}\,(\lambda)\cdot(+\infty) = \alpha_1 \mathrm{sgn}\,(\lambda)\cdot(+\infty)$. Isto encerra o caso $n := 1$.

Antes de assumir o passo indutivo, observe que se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função com $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x) = \lambda' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to\lambda} xg(x) = \left(\lim_{x\to\lambda} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to\lambda} g(x)\right) = \lambda\cdot\lambda'.$$

Agora, se a equação (3.4) for verdadeira para o caso de grau $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, então para $p := \alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n + \alpha_{n+1} t^{n+1}$ e $x \in \mathbb{R}$, pode-se escrever $p(x) = \alpha_0 + q(x)$, onde define-se $q(x) := \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1} = x\,(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n)$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\lambda} p(x) = \alpha_0 + \left(\lim_{x\to\lambda} x \cdot \lim_{x\to\lambda} \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n\right) &= \\ = \lambda\cdot\left(\alpha_{n+1} \mathrm{sgn}\,(\lambda)^n \cdot (+\infty)\right),&\end{aligned}$$

donde o resultado segue observando-se que $\lambda \mathrm{sgn}\,(\lambda)^n\cdot(+\infty) = \mathrm{sgn}\,(\lambda)^{n+1}\cdot(+\infty)$, já que $-\infty = (-1)\cdot(+\infty)$. □

Para $p := -19 + 11t - 5t^7$, por exemplo, é muito mais fácil determinar $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$ do que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} p(x)$, já que o primeiro é simplesmente dado pela expressão

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -5\cdot(-1)^7\cdot(+\infty) = +\infty,$$

enquanto

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} p(x) = p\left(\frac{1}{2}\right) = -19 + 11\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7,$$

que eu me recuso a calcular explicitamente. ▲

Observação 3.1.53 (Importante). As fórmulas do tipo

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d \quad \text{e} \quad \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d y_d = \left(\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d\right)\cdot\left(\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d\right)$$

exploradas acima sempre pressupõem a existência dos limites $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d$ e $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d$, e significam que os limites à esquerda existem e são dados pelas expressões à direita. Com isso dito, não se pode assegurar que os limites $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d$ e $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d$ existam a partir da existência de $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d$ ou $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d y_d$. △

Exercício 3.37. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $x_n := (-1)^n$ e $y_n := (-1)^{n+1}$.

a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = 0$.

b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -1$.

c) As sequências $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ convergem em $\mathbb{R}$? ■

Exercício 3.38. Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais. Mostre que se $x_d \to x$ e $x_d + y_d \to z$, com $x, z \in \mathbb{R}$, então $y_d \to z - x$. Dica: tente escrever y_d *usando* x_d e $x_d + y_d$. ■

O exercício acima, que permanece verdadeiro num espaço normado E, se vale implicitamente da continuidade da função $E \to E$ que faz $v \mapsto -v$ para cada $v \in E$, já que disso segue que $x_d - y_d \to x - y$ sempre que $x_d \to x$ e $y_d \to y$ em E (Exercício 3.98). A situação da multiplicação, por outro lado, é um pouco mais delicada – mesmo no caso real, já que a inversão multiplicativa não está definida para todo número real.

Lema 3.1.54. *Seja* $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *uma* net *em* $\mathbb{R}$. *Se* $y_d \to \pm\infty$, *então existe* $D \in \mathbb{D}$ *tal que* $y_d \neq 0$ *para todo* $d \geq D$ *e vale* $\lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d} = 0$, *onde o último limite é tomado com respeito ao conjunto dirigido* $\{d \in \mathbb{D} : d \geq D\}$.

Demonstração. A existência do elemento $D \in \mathbb{D}$ segue por *conservação do sinal* (Proposição 3.1.26). Agora, para um número real $\varepsilon > 0$ fixado, tem-se $M := \frac{1}{\varepsilon} > 0$, de modo que:

✓ se $y_d \to +\infty$, então existe $D' \geq D$ tal que $y_d > M$ sempre que $d \geq D'$;

✓ se $y_d \to -\infty$, então existe $D' \geq D$ tal que $y_d < -M$ sempre que $d \geq D'$.

Logo, em ambos os casos, encontrou-se $D' \geq D$ tal que $-\varepsilon < \frac{1}{y_d} < \varepsilon$ sempre que $d \geq D'$, i.e., $\lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d} = 0$. □

Observação 3.1.55. A rigor, precisa-se tomar o elemento $D \in \mathbb{D}$ como no enunciado acima apenas para garantir a boa definição do elemento $\frac{1}{y_d} \in \mathbb{R}$, que não existe se $y_d = 0$. Com isso dito, observe que redefinindo $y'_d := y_d$ caso $y_d \neq 0$ e $y'_d \neq 0$ (arbitrário!) se ocorrer $y_d = 0$, a existência do elemento $D \in \mathbb{D}$ assegura que $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y'_d} = \lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d}$ (confira o Exercício 3.55). Moral da história: nestes casos, é inofensivo ignorar os índices d's para os quais ocorre $y_d = 0$ e, justamente por isso, não é desonesto escrever "$\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d}$" para indicar "$\lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d}$", o que será feito daqui em diante. △

Embora o lema anterior vá ser usado em breve para tratar de situações mais gerais, convém refletir um pouco acerca de seus desdobramentos para os tipos particulares de *nets* que se encontram na natureza:

(i) se $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$;

(ii) se $\lim_{z\to p^+} f(z) = \pm\infty$, então $\lim_{z\to p^+} \frac{1}{f(z)} = 0$;

(iii) se $\lim_{z\to -\infty} f(z) = \pm\infty$, então $\lim_{z\to -\infty} \frac{1}{f(z)} = 0 \ldots$

Intuitivamente, quanto maior o valor absoluto de um número α, menor será o valor absoluto do quociente $\frac{1}{\alpha}$, de modo que *no limite* se chega a zero. É comum encontrar tal comportamento codificado em *pichações* do tipo "$\frac{1}{\pm\infty} = 0$", que não fazem sentido do ponto de vista algébrico (uma vez que $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$). Porém, ao pensar na função $F\colon \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ que faz $F(x) := \frac{1}{x}$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $F(\pm\infty) := 0$, segue que F é *uma* função contínua que *estende* a função contínua $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \frac{1}{x}$. Portanto, feitas as devidas ressalvas, chega-se à inevitável conclusão: pichação é arte.

Proposição 3.1.56. *Sejam* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *uma* net *num espaço normado* E *e* $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *uma* net *em* $\mathbb{R}$, *ambas convergentes, com* $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d := x \in E$ *e* $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d := y \in \overline{\mathbb{R}}$.

(*i*) *Se* $y \neq 0$, *então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d} x_d = \frac{1}{y} x$.

(*ii*) *Se* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, *então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d} x_d = 0$.

(*iii*) *Se* $x \neq 0$, $y := 0$ *e* $\mathbb{D}' := \{d \in \mathbb{D} : y_d \neq 0\}$ *é cofinal em* $\mathbb{D}$, *então* $\lim_{d\in\mathbb{D}'} \frac{\|x_d\|}{|y_d|} = +\infty$.

Demonstração. Primeiramente, note que tanto em (i) quanto em (ii) existe $D \in \mathbb{D}$ com $y_d \neq 0$ para todo $d \geq D$. Assim, em ambos os casos, resulta que $\left\langle \frac{1}{y_d} \right\rangle_{d\geq D}$ é uma *net* em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que converge em $\mathbb{R}$: para $\frac{1}{y}$ em (i) e para 0 em (ii) (pelo lema anterior). Logo, as identidades desejadas seguem da continuidade da multiplicação $\mathbb{R} \times E \to E$. O terceiro caso é mais delicado, mas não tanto.

Por valer $x \neq 0$, tem-se $\|x\| > 0$, o que permite tomar $0 < \delta < \|x\|$ de tal forma que $0 < \|x\| - \delta$. Além disso, como a própria norma $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ é contínua (Exemplo 2.1.16), o Corolário 3.1.38 assegura que $\|x_d\| \to \|x\|$ em $\mathbb{R}$, donde segue que existe $D \in \mathbb{D}$ com $\|x\| - \delta < \|x_d\| < \|x\| + \delta$ sempre que $d \geq D$. A fim de mostrar a identidade desejada, para $M > 0$, deve-se encontrar $\widetilde{D} \in \mathbb{D}'$ tal que $\frac{\|x_d\|}{|y_d|} > M$ sempre que ocorrer $d \geq \widetilde{D}$ com $d \in \mathbb{D}'$ ou, equivalentemente, tal que $|y_d| < \frac{\|x_d\|}{M}$.

Ora, como $y_d \to 0$ e $\mathbb{D}'$ é cofinal em $\mathbb{D}$, existe $D' \in \mathbb{D}'$ tal que $0 < |y_d| < \frac{\|x\|-\delta}{M}$ sempre que $d' \in \mathbb{D}$ com $d' \geq D'$. Finalmente, basta tomar $\widetilde{D} \in \mathbb{D}'$ com $D, D' \leq \widetilde{D}$ pois, com isso,

$$0 < |y_d| < \frac{\|x\| - \delta}{M} < \frac{\|x_d\|}{M}$$

sempre que $d' \in \mathbb{D}'$ com $d' \geq \widetilde{D}$, como desejado. □

Exercício 3.39. Para funções $f, g\colon Z \to \mathbb{R}$, com $Z \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ponto de acumulação de Z, mostre que se $\lim_{z\to p} f(z) \neq 0$, $\lim_{z\to p} g(z) = 0$ e existe um intervalo aberto $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p \in J$ e $g(z) \neq 0$ sempre que $z \in Z \cap J$, então $\lim_{z\to p} \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = +\infty$. ■

Observação 3.1.57 (**Importante**: restrições quocientes)**.** Ao *negar* a existência de um intervalo J com as propriedades pedidas no exercício acima, o quociente $\frac{f(z)}{g(z)}$ não seria definível para valores de z *eventualmente próximos* de p, no sentido de que qualquer intervalo aberto em torno de p conteria pontos da forma z com $g(z) = 0$. Em particular, em tal situação, *não pode existir* o limite $\lim_{z\to p} \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|$.

Em geral, para que $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d}$ seja igual a $L \in \overline{\mathbb{R}}$, é preciso que para qualquer intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $L \in I$, exista $D \in \mathbb{D}$ com $\frac{x_d}{y_d} \in I$ sempre que $d \geq D$, o que em particular exige que $\frac{x_d}{y_d}$ *exista*, i.e., $y_d \neq 0$. Assim, sempre que considerarmos limites de quocientes do tipo $\frac{x_d}{y_d}$, ficará tacitamente assumida a existência de D para o qual $y_d \neq 0$ sempre que $d \geq D$. Evidentemente, dado que $\{d \in \mathbb{D} : d \geq D\}$ é cofinal em $\mathbb{D}$ para qualquer D, a conclusão obtida no item (iii) da última proposição permanece válida, e pode ser escrita simplesmente como $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \frac{\|x_d\|}{|y_d|} = +\infty$. △

Exemplo 3.1.58. Quando $E := \mathbb{R}$, é tentador assumir que a igualdade em (iii) possa ser substituída por $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}'} \frac{x_d}{y_d} = +\infty$, i.e., sem que se tomem os valores absolutos. No entanto, ao nos restringirmos estritamente às hipóteses de (iii), há margem para que tal conjectura seja falsa. Por exemplo: apesar de valer $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ (Exercício 3.56), a sequência $\langle(-2)^n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $+\infty$, posto que suas subsequências $\left\langle(-2)^{2k}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left\langle(-2)^{2k+1}\right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ convergem para $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente.

Como o exemplo acima sugere, o *problema* reside no fato de que os "sinais" de y_d podem oscilar conforme a *net* converge para 0. Logo, para corrigir isso, basta exigir que tais oscilações não ocorram – ou pelo menos, parem de ocorrer a partir de um determinado momento. ▲

Exercício 3.40. Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais, com $x_d \to x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ e $y_d \to 0$.

a) Mostre que se existir $D \in \mathbb{D}$ com $y_d > 0$ para todo $d \geq D$, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = x \cdot (+\infty)$.

b) Mostre que se existir $D \in \mathbb{D}$ com $y_d < 0$ para todo $d \geq D$, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = x \cdot (-\infty)$. ■

Exemplo 3.1.59. Para $a \in \mathbb{R}$ com $|a| > 1$, a série $\sum a^n$ diverge em $\mathbb{R}$, mas de formas distintas. Se $a > 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$ e, pelo exercício anterior, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, donde segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}\left(1 - \lim_{n\to\infty} a^{n+1}\right) = \frac{1}{1-a}\left(1-(+\infty)\right) = +\infty.$$

Por outro lado, se $a < -1$, então $\sum a^n$ não converge nem mesmo em $\overline{\mathbb{R}}$. ▲

Exercício 3.41. Mostre que se $a \in \mathbb{R}$ com $a < -1$, então $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ não converge em $\overline{\mathbb{R}}$. Dica: investigue subsequências espertas de $\left\langle \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Indeterminações

As *regras* discutidas na subsubseção anterior evitaram, explicitamente, responder à seguinte pergunta: fixadas *nets* reais $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$, com $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d := x$ e $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d := y$, como *determinar* $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d$ ou $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot y_d$ nas situações em que $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{A}_\infty$ ou, respectivamente, $\langle x, y\rangle \notin \mathcal{M}_\infty$? O motivo da fuga é muito simples: *cada caso é um caso.*

Mais precisamente, a depender das *nets* $\langle x_d\rangle_d$ e $\langle y_d\rangle_d$ em questão, os limites procurados podem assumir qualquer um dos *valores* esperados.

	$+\infty$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}$	não existe
$+\infty + (-\infty)$	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
$\pm\infty \cdot 0$	(v)	(v)	(vi)	(vii)

A tabela acima resume as situações que podem ocorrer quando se têm *nets* f, g, h com "$f \to \pm\infty$", "$g \to \mp\infty$", "$h \to 0$" e busca-se determinar "$\lim f + g$" e "$\lim f \cdot h$" (ou "$\lim g \cdot h$"). Os números romanos indicados correspondem aos exemplos a seguir.

(i) Pelo que se observou no Exemplo 3.1.51, as funções $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) := 2x$ e $g(x) := -x$ satisfazem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Como $f(x)+g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Esta seria uma situação em que "$+\infty + (-\infty) = +\infty$".

(ii) Ao substituir f e g por $-g$ e $-f$ no item anterior, respectivamente, chegaria-se de modo análogo a "$+\infty + (-\infty) = -\infty$".

(iii) Ao utilizar $f(x) := x + r$ no item (i), o resultado seria "$+\infty + (-\infty) = r$".

(iv) Ao fazer $x_n := n$ e $y_n := -n + (-1)^n$, obtêm-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e (por explosão) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, mas $\langle x_n + y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, posto que $x_n + y_n = (-1)^n$.

(v) Ao fazer $x_n := n^2$ e $y_n := \frac{1}{n}$, chega-se a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ e, consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Portanto, este caso levaria alguém a cogitar que "$+\infty \cdot 0 = +\infty$". Para obter os outros casos, basta trocar os sinais de x_n e y_n adequadamente.

(vi) No item (v), ao fazer $y_n := \frac{r}{n^2}$, chega-se a "$\pm\infty \cdot 0 = r$". Em particular, com $r = 0$, teríamos "$\pm\infty \cdot 0 = 0$".

(vii) No item (v), ao fazer $y_n := \frac{(-1)^n}{n^2}$, a sequência $\langle x_n y_n \rangle_n$ correspondente não converge, posto que $x_n y_n = (-1)^n$, mas $x_n \to +\infty$ e $y_n \to 0$.

Portanto, não é possível *atribuir* valores em $\overline{\mathbb{R}}$ para $+\infty + (-\infty)$ ou $\pm\infty \cdot 0$ de modo a (pré)-determinar $\lim_d x_d + y_d$ ou $\lim_d x_d \cdot y_d$ nos casos correspondentes. É por este motivo que tais limites são chamados de *indeterminados* (ou *indeterminações*). Talvez por isso, limites indeterminados *tendem* a ser os mais interessantes e frutíferos da Análise: as *derivadas*, por exemplo, que serão introduzidas na última subseção deste capítulo, consistem em indeterminações do tipo "$0/0$" (já que "$1/0 = \pm\infty$" e "$0/0 = 0 \cdot (1/0)$").

Exemplo 3.1.60 (Funções racionais)**.** O distante Exemplo 2.1.25 mostrou que uma função racional da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$ é contínua em cada $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$. Uma vez que todo ponto de $\mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ (pelo Exercício 3.75), segue que $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$. Resta, portanto, analisar os casos em que $q(a) = 0$, bem como as situações em que $a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$.

(i) Com $a \in \mathbb{R}$ e $q(a) = 0$, ramificam-se dois subcasos: $p(a) \neq 0$ e $p(a) = 0$.

(a) Com $p(a) \neq 0$, retorna-se às situações descritas pelo item (iii) da Proposição 3.1.56 e pelo Exercício 3.1.56: pode-se ter $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty$ se os sinais de $q(x)$ não oscilarem nas proximidades de a, mas o limite não existirá se oscilações ocorrerem. Por exemplo: com $p(x) \coloneqq 1$ e $q(x) \coloneqq x^2$ tem-se $\lim\limits_{x\to 0} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$, mas ao substituir por $q(x) \coloneqq x^3$, chega-se a $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{p(x)}{q(x)} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$.

(b) Se ocorrer $p(a) = 0$, chega-se a indeterminações do tipo $\pm\infty \cdot 0$, e, portanto, tudo *poderia* acontecer (confira, porém, o Exercício 3.76).

(ii) Com $a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, tem-se $\lim\limits_{x\to a} q(x) = \pm\infty$ de acordo com a fórmula expressa na Proposição 3.1.52, de modo que, a princípio, $\lim\limits_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ seria uma indeterminação do tipo $\pm\infty \cdot 0$. Contudo, esta é *remediável*.

Proposição 3.1.61. *Sejam $p(t) \coloneqq a_0 + \ldots + a_n t^n$ e $q(t) \coloneqq b_0 + \ldots + b_m t^m$ polinômios reais, não-nulos, com $m, n > 0$ e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$.*

(i) *Se $n < m$, então $\lim\limits_{x\to\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$.*

(ii) *Se $n = m$, então $\lim\limits_{x\to\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$.*

(iii) *Se $n > m$, então $\lim\limits_{x\to\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \operatorname{sgn}(\lambda)^{n-m} \cdot (+\infty)$.*

Demonstração. Supondo $n \geq m$, note que

$$\lim_{x\to\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\lambda} \frac{x^{-m}p(x)}{x^{-m}q(x)} = \lim_{x\to\lambda} \frac{a_n x^{n-m} + \ldots + a_{n-m} + a_{n-m-1}x^{-1} + \ldots + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \ldots + b_0 x^{-m}} =$$
$$= \frac{1}{b_m} \cdot \lim_{x\to\lambda} a_n x^{n-m} + \ldots + a_{n-m}$$

pois $\lim\limits_{x\to\lambda} \frac{b_{m-1}}{x} = \cdots = \lim\limits_{x\to\lambda} \frac{b_0}{x^m} = \lim\limits_{x\to\lambda} \frac{a_{n-m-1}}{x} = \ldots = \lim\limits_{x\to\lambda} \frac{a_0}{x^m} = 0$. Logo, a afirmação no item (ii) segue pois $n - m = 0$ (se $n = m$), enquanto a afirmação do item (iii) decorre da Proposição 3.1.52.

Agora, se $n < m$, então

$$\lim_{x\to\lambda} a_n x^{n-m} = \lim_{x\to\lambda} a_{n-1} x^{n-1-m} = \ldots = \lim_{x\to\lambda} a_{n-m} x^{-m} = 0,$$

de modo que ao repetir o artifício de dividir numerador e denominador da expressão $\frac{p(x)}{q(x)}$ por x^m, chega-se a $\lim\limits_{x\to\lambda} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$. O leitor pode cuidar dos detalhes. □

Já sabemos que conforme x se aproxima dos *extremos* da reta, o *comportamento* de uma função polinomial é determinado pelo seu monômio de maior grau, de modo que numa divisão de funções polinomiais, "vence" o *coeficiente líder*: se o grau do denominador é maior, a função se comporta como $\frac{1}{q(x)}$ e, portanto, *vai* para zero; se o grau do numerador é maior, a função se comporta como $\frac{p(x)}{x^m}$ e, portanto, vai para um dos extremos da reta; em caso de empate, a função *vai* para a razão entre os coeficientes líderes. ▲

Mudança de variáveis

Embora esta seção tenha discutido tópicos em contextos muito variados, tudo o que se viu foram desdobramentos do Teorema 3.1.37, que garante a preservação de limites por funções contínuas: em outras palavras, se f é contínua em x e $x_d \to x$, então $f(x_d) \to f(x)$. Agora, se *outra* função g fosse contínua no ponto $f(x)$ e seu domínio contivesse os pontos da forma $f(x_d)$, então poderíamos concluir que $g(f(x_d)) \to g(f(x))$ ao reaplicar o teorema supracitado[17]. Esta é a essência da chamada *mudança de variáveis*, técnica muito útil na investigação de diversos problemas. Comecemos com o caso elementar.

Dadas funções $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: Y \to \mathbb{R}$, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$, pode-se considerar a composição $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ que faz $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para todo $x \in X$. Neste caso, se $p \in \overline{\mathbb{R}}$ é ponto de acumulação de X, faz sentido investigar a existência de $\lim\limits_{x \to p}(g \circ f)(x)$. Agora, *se* existissem $\lim\limits_{x \to p} f(x) := L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim\limits_{y \to L} g(y) := L' \in \overline{\mathbb{R}}$, a intuição nos diz não apenas que $\lim\limits_{x \to p} g(f(x))$ *deveria* existir, como também $\lim\limits_{x \to p} g(f(x)) = L'$... É quase isso.

Observação 3.1.62 (Variáveis "mudas")**.** Acima, escreveu-se $\lim\limits_{y \to L} g(y)$ pelo mesmo motivo que se poderia escrever $\lim\limits_{z \to L} g(z)$: em ambos os casos, as letras "y" e "z" são variáveis *posicionais* e indicam que o mesmo valor atribuído a y (ou a z) ao se fazer "$y \to L$" (ou "$z \to L$") deve ser utilizado em $g(y)$ (ou $g(z)$). Assim, evidentemente, também faria sentido escrever $\lim\limits_{x \to L} g(x)$. No entanto, tal desapego notacional não ajuda a intuir o que se busca fazer: a ideia é que ao usar f para determinar os valores atribuídos a y por meio de $f(x)$, determine-se o comportamento de $g(f(x))$ *conforme* $x \to p$. $\triangle$

Exceto em situações artificiais – ou naturalmente problemáticas por algum azar particular – estimar o limite de uma composição se resume a aplicar adequadamente o Exercício 2.27, que trata da continuidade de composições. O cerne da questão é o seguinte

Teorema 3.1.63. *Sejam $h: Z \to \mathbb{R}$ uma função, com $Z \subseteq \mathbb{R}$, $p, L \in \overline{\mathbb{R}}$ tais que p é ponto de acumulação de Z. São equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{z \to p} h(z) = L$;

(ii) *a função $\widehat{h}: Z \cup \{p\} \to \overline{\mathbb{R}}$ que faz $\widehat{h}(z) := h(z)$ para $z \neq p$ e $\widehat{h}(p) := L$, é contínua em p.*

Demonstração. Se vale (i) e $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto com $L \in I$, então existe um intervalo aberto $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p \in J$ e tal que $h(z) \in I$ sempre que $z \in Z \cap J$ (Exercício 3.5). Ocorre que esta é, precisamente, a definição do que significa dizer que $\widehat{h}$ é contínua em p (Exercício 2.45). A recíproca é análoga. $\square$

A função $\widehat{h}$ do teorema anterior "corrige" as situações *artificiais* em que $\lim\limits_{z \to p} h(z)$ existe mas $p \in Z$ e $h(p) \neq \lim\limits_{z \to p} h(z)$. Em particular, para $p \in \mathbb{R}$, é claro que h é contínua em p se, e somente se, $\widehat{h} = h$.

Exercício 3.42. Convença-se de que a última afirmação é verdadeira. $\blacksquare$

[17] Alternativamente, como $g \circ f$ é contínua em x quando f é contínua em x e g é contínua em $f(x)$ (Exercício 2.27), a conclusão poderia ser obtida com uma única aplicação do Teorema 3.1.37.

Nos casos em que $p \in \{+\infty, -\infty\}$, o domínio da função $\widehat{h}$ deixa de ser um subconjunto de $\mathbb{R}$ e passa a ser um subconjunto da reta estendida: por exemplo, para $p := +\infty$, $Z := \mathbb{R}$ e $h(z) := z$ para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $\widehat{h}\colon (-\infty, +\infty] \to (-\infty, +\infty]$ com $\widehat{h}(x) = x$ para todo $x \in (-\infty, +\infty]$; em particular, $\widehat{h}(+\infty) = +\infty$. Analogamente, a função $F\colon \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, na discussão que sucede a Observação 3.1.55, seria a correspondente $\widehat{f}$ da função $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \frac{1}{x}$. O que isso tudo tem a ver com o limite de compostas?

Corolário 3.1.64. *Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$ funções, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$. Se $p, L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$ são tais que*

(i) p é ponto de acumulação de X e $\lim_{x\to p} f(x) = L$,

(ii) existe um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $L \in I$ e $f(x) \neq L$ para todo $x \in (X \cap I) \setminus \{p\}$,

(iii) L é ponto de acumulação de Y e $\lim_{y\to L} g(y) = L'$,

então $\lim_{x\to p} g(f(x)) = L'$.

Demonstração. A função $\widehat{g}\colon Y \cup \{L\} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como no teorema anterior é contínua em L, enquanto $\lim_{x\to p} f(x) = L$ expressa o limite de uma *net* em Y que converge para o ponto $L \in \operatorname{dom}(\widehat{g})$. Logo, $\lim_{x\to p} \widehat{g}(f(x)) = \widehat{g}(L) = L'$. Uma vez que $\widehat{g}(f(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in X \cap I$ com $x \neq p$, o resultado segue[18]. $\square$

Observação 3.1.65 (Patologias artificiais)**.** A restrição no item (ii) do corolário acima serve para evitar situações de descontinuidade ~~tipicamente artificiais~~ que tornariam a conclusão falsa. Por exemplo, com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função constante nula e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) := 1$ para $y \neq 0$ e $g(0) := 0$, ocorre $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$, mas $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(0) = 0 \neq 1$. Neste caso, é justamente a falha da condição (ii) que permite definir uma função g *apropriadamente* descontínua para frustrar a conclusão do corolário[19].

Analogamente, com a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $f(x) := x$ para $x \in \mathbb{Q}$, e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) := 0$ para $y \neq 0$ e $g(0) := 1$, ocorre $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ sem que exista o limite $\lim_{x\to 0} g(f(x))$: para $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $f(x) = x$ e $g(f(x)) = 0$, e nos demais casos $g(f(x)) = 1$. Mais uma vez, é a falha da condição (ii) que permite definir a função g – e como sempre, o problema desaparece ao substituirmos g por $\widehat{g}$, já que $\widehat{g}(y) = 0$ para todo y. $\triangle$

Exemplo 3.1.66. Um modo alternativo de verificar $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ é observar que as funções $g(y) := \frac{1}{y}$ e $f(x) := x + 1$ são tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0$, com a condição (ii) satisfeita automaticamente[20], donde segue $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = 0$.

[18] Em caso de dúvidas, inspire-se no Exemplo 3.1.7.

[19] Convém observar que ao substituir g por sua versão *honesta* $\widehat{g}$, obtém-se $\widehat{g}(0) = 1$ e, consequentemente, $\lim_{x\to 0} \widehat{g}(f(x)) = 1$.

[20] *Spoiler*: $f(x) \in \mathbb{R}$ e $L \notin \mathbb{R}$.

A terminologia "mudança de variáveis" se deve ao seguinte: a princípio, a função $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ associa a *variável* x ao valor $\frac{1}{x+1}$; porém, ao considerar a função que associa a variável $y := x + 1$ ao valor $\frac{1}{y}$, percebe-se que a correspondência original é a composição das funções $x \mapsto y := x + 1$ e $y \mapsto \frac{1}{y}$.

Esse tipo de raciocínio costuma ser mais útil para determinar limites de funções menos elementares. Por exemplo: futuramente, para determinar $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$, a mudança de variáveis $y := 3x$ leva a

$$\lim_{x\to 0}(1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{3}{y}} = \left(\lim_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}}\right)^3 = e^3,$$

pois se "$x \to 0$", então "$y \to 0$", e $\lim\limits_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$ é uma das formas de expressar a *constante de Euler* (confira o Exercício 3.60). ▲

Em vista da generalidade do Teorema 3.1.37, o leitor já deve imaginar que tanto o Teorema 3.1.63 quanto o Corolário 3.1.64 admitam formulações mais *abrangentes*. É realmente o caso:

Teorema 3.1.67. *Sejam X e Y e Z espaços topológicos de Hausdorff, $p \in X$ um ponto de acumulação de $X' \subseteq X$, $L \in Y$ um ponto de acumulação de $Y' \subseteq Y$ e $L' \in Z$ um ponto.*

(i) *Para uma função $h\colon X' \to Y$, ocorre $\lim\limits_{x\to p} h(x) = L$ se, e somente se, é contínua em p a função $\widehat{h}\colon X' \cup \{p\} \to Y$ que faz $\widehat{h}(x) := h(x)$ para $x \neq p$ e $\widehat{h}(p) := L$.*

(ii) *Para funções $f\colon X' \to Y'$ e $g\colon Y' \to Z$, se*

- ✓ $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$,
- ✓ $\lim\limits_{y\to L} g(y) = L'$, *e*
- ✓ *existe um aberto $V \subseteq Z$ tal que $L \in V$ e $f(x) \neq L$ para todo $x \in (X' \cap V) \setminus \{p\}$,*

então $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = L'$.

Exercício 3.43. Demonstre o teorema acima. Dica: apenas imite as demonstrações do Teorema 3.1.63 e do Corolário 3.1.64. ■

Por último, mas não menos importante, convém explicitar uma caracterização de continuidade bastante útil, secretamente abordada nos Teoremas 3.1.63 e 3.1.67 e que pode ter passado despercebida aos olhos do leitor desatento:

Corolário 3.1.68. *Nas condições anteriores, se $p \in X'$, então f é contínua em p se, somente se, $\lim\limits_{x\to p} f(z) = f(p)$.*

Observação 3.1.69 (Opcional: funções contínuas comutam com limites)**.** Na verdade, a tese do Teorema 3.1.37 caracteriza continuidade de maneira irrestrita, no seguinte sentido:

Teorema 3.1.70. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma função e $x \in X$ um ponto. Se $f(x_d) \to f(x)$ sempre que $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é uma* net *em X com $x_d \to x$, então f é contínua em x.*

Demonstração. Se f não fosse contínua em x, então existiria um aberto $V \subseteq Y$ com $f(x) \in V$, $x \in f^{-1}[V]$ e tal que para nenhum aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ valeria $f[U] \subseteq V$. Equivalentemente, para cada aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ seria possível *escolher* $x_U \in U$ com $f(x_U) \notin V$. Logo, ao se considerar o conjunto $\mathbb{D} := \{U \subseteq X : U \text{ é aberto e } x \in U\}$ dirigido pela relação de inclusão inversa, $\langle x_U \rangle_{U \in \mathbb{D}}$ seria uma *net* com $x_U \to x$ e $f(x_U) \not\to f(x)$: o aberto V seria, precisamente, a testemunha de que a última convergência não ocorre. □

Nas situações em que X é ~~sequencial~~ métrico, *nets* podem ser trocadas por sequências, i.e.: *f é contínua em x se, e somente se, $f(x_n) \to f(x)$ sempre que $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência com $x_n \to x$* (verifique!). Esta é, possivelmente, uma das principais justificativas técnicas para o protagonismo das sequências em contextos introdutórios de Análise. △

Exemplo 3.1.71 (Continuidade de $\sqrt{\ }$)**.** O Exercício 1.51 mostrou como definir a função $\sqrt{\ }\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que a cada número real $\beta \geq 0$ associa o único $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = \beta$. Vamos verificar que tal função é contínua. Primeiro, para $a > 0$,

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} - \sqrt{a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a}) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{0}{2\sqrt{a}} = 0,$$

mostrando que $\sqrt{\ }$ é contínua em a. Para $a := 0$, note que para $\varepsilon > 0$, todo $x \in [0, +\infty)$ com $|x| < \varepsilon^2$ é tal que $\sqrt{x} < \varepsilon$. ▲

3.2 Derivadas (primeiro contato)

O leitor que enfrentou um curso minimamente razoável de Geometria Analítica deve se lembrar de que as retas não-verticais em $\mathbb{R}^2$ *são* os gráficos de funções da forma $t \mapsto ct + r$, onde $c \in \mathbb{R}$ é **coeficiente angular** da reta e $r \in \mathbb{R}$ indica a altura em que a reta intercepta o "eixo y". Em particular, se $t \mapsto ct + r$ é a função que descreve uma reta R que *passa* pelos pontos $\langle x, y \rangle$ e $\langle a, b \rangle$, com $x \neq a$, então $y = cx + r$, $b = ca + r$ e, consequentemente, $c = \frac{y-b}{x-a}$, donde é fácil *encontrar* o valor de r, mostrando assim que a reta R fica completamente determinada pelo pontos escolhidos.

Exercício 3.44 (Opcional)**.** Para $c \in \mathbb{R}$, convença-se de que a reta que tem c como coeficiente angular e passa pelo ponto $\langle x_0, y_0 \rangle$ é dada pela correspondência $t \mapsto c(t - x_0) + y_0$. ■

Definição 3.2.0. Para um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de X, a **derivada de** f em a é o limite

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.5}$$

se este existir. ¶

Observação 3.2.1. Alternativamente, pode-se definir

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t}, \tag{3.6}$$

essencialmente por mudança de variáveis[21]: se $f'(a)$ existe como em (3.5), então com $x := a + t$ se chega a $x \to a$ quando $t \to 0$ e, portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{a + t - a}.$$

[21] A rigor, há alguns detalhes técnicos que devem ser verificados pelo leitor cuidadoso: i) neste caso, $a \in X$ é ponto de acumulação de X; ii) a função $t \mapsto a + t$ é definida no subconjunto $X - a := \{x - a : x \in X\}$, que tem 0 como um ponto de acumulação, e sua imagem é, precisamente, X.

A recíproca, i.e., "se o limite em (3.6) existe, então o limite em (3.5) existe e coincide com (3.6)", é análoga. $\triangle$

Intuitivamente, o quociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ expressa o *coeficiente angular* da reta determinada pelos pontos $\langle x, f(x)\rangle$ e $\langle a, f(a)\rangle$, de modo que ao tomar x cada vez mais próximo de a, chega-se cada vez mais perto do coeficiente angular de uma reta *tangente* ao gráfico de f no ponto $\langle a, f(a)\rangle$. Nas situações em que a função f é contínua em a, o limite que define $f'(a)$ é uma indeterminação da forma $\pm\infty \cdot 0$, já que $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$ em virtude da continuidade de f em a, enquanto $\lim_{x\to a} x - a = 0$. Sendo assim, essencialmente três casos podem ocorrer: $f'(a)$ existir em $\mathbb{R}$, $f'(a)$ existir em $\overline{\mathbb{R}}$ ou $f'(a)$ não existir *de jeito nenhum*.

Definição 3.2.2. Nas condições da última definição, diremos que f é **diferenciável** em $a \in X$ se a derivada $f'(a)$ existir e for um número real. Uma função diferenciável em todos os seus pontos será chamada apenas de *diferenciável*. ¶

Proposição 3.2.3. *Nas condições acima, se f é diferenciável em $a \in X$, então f é contínua em a.*

Demonstração. Em virtude do Corolário 3.1.68, basta mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ou, equivalentemente, $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$. Ocorre que para $x \neq a$ no domínio de f, tem-se

$$f(x) - f(a) = (f(x) - f(a)) \cdot \frac{x-a}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a),$$

com $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $\lim_{x\to a} x - a = 0$, donde segue que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) = f'(a) \cdot 0. \qquad \square$$

Exemplo 3.2.4. Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função constante, então $f'(a) = 0$ para todo $a \in X$ (verifique?!). ▲

Exemplo 3.2.5. Com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$ e $a := 2$,

$$f'(2) := \lim_{t\to 0} \frac{(2+t)^2 - 4}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + 4t}{t} = \lim_{t\to 0} 4 + t = 4.$$

Em outras palavras, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\langle 2, f(2)\rangle$ é 4. Portanto, a reta tangente é descrita pela função $r(t) := 4(t-2) + 4$. ▲

Exemplo 3.2.6 (Clássico)**.** A função $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é derivável em 0, pois

$$|0|' := \lim_{t\to 0} \frac{|t| + 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

não existe (Exercício 3.25). ▲

Exemplo 3.2.7. Para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^n g(x)$, em que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função limitada tal que não exista $\lim_{x\to 0} g(x)$ – leitores *apressados* podem definir $g(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$ e $g(0) := 0$. Como $\lim_{x\to 0} x^n = 0$, segue por *confronto* que

$$f'(0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^n g(t)}{t} = \lim_{t\to 0} t^{n-1} g(t) = 0$$

desde que se tenha $n > 1$. ▲

Embora sejam definidas como indeterminações, derivadas apresentam comportamentos bastante previsíveis diante de certas operações algébricas. Quem não dormiu nas aulas de Cálculo deve se lembrar da próxima

Proposição 3.2.8 (Propriedades operatórias)**.** *Para $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $a \in U$, as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são diferenciáveis em a, com*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ *e*

(ii) $(f \cdot g)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$ (a.k.a. ***regra de Leibniz***).

Além disso, se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}. \tag{3.7}$$

Demonstração. A primeira identidade segue diretamente da continuidade da soma. Para a segunda, note que com $x \neq a$ tal que $x \in X$,

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) + (f(x)g(a) - f(x)g(a)) - f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= f(x) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

donde a continuidade de f em a (proposição anterior) acarreta

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

Para o quociente, com $t \neq 0$ tal que $a + t \in X$, tem-se

$$\frac{\dfrac{1}{g(a+t)} - \dfrac{1}{g(a)}}{t} = \frac{g(a) - g(a+t)}{g(a+t)g(a)} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{g(a+t) - g(a)}{t} \cdot \frac{1}{g(a+t)g(a)},$$

donde segue que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) := \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(a+t)} - \dfrac{1}{g(a)}}{t} = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2},$$

uma vez que g é contínua em a (por ser diferenciável). O caso geral segue do item (ii). □

Exercício 3.45. Para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^n$, mostre que $f'(a) = na^{n-1}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Conclua que funções polinomiais são diferenciáveis. Dica: indução + Regra de Leibniz. ■

Exercício 3.46. Para f como no exercício anterior, determine $\left(\frac{1}{f}\right)'(a)$ para cada $a \neq 0$. Conclua que para $z \in \mathbb{Z}$ fixado, a função que faz $x \mapsto x^z$ é diferenciável em todo ponto $\neq 0$, e sua derivada é a função que faz $x \mapsto zx^z$. Dica: lembre-se de que para $n > 0$, $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$. ■

Exemplo 3.2.9. A função $\sqrt{\ }\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é diferenciável em todo ponto $x > 0$. De fato, observe que para $x, t > 0$,

$$\frac{\sqrt{x+t} - \sqrt{x}}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{x+t} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+t} + \sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x+t} + \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+t} + \sqrt{x}},$$

e, como $\sqrt{x+t}+\sqrt{x} \to 2\sqrt{x} \neq 0$ quando $t \to 0$, resulta $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Note que ao escrever $x^{\frac{1}{2}} := \sqrt{x}$, a expressão acima condiz com a fórmula do exercício anterior: $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (x^{\frac{1}{2}-1}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Por outro lado, para $x := 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\sqrt{t} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty,$$

posto que $\sqrt{t} \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $\sqrt{}$ é contínua em 0, com $\sqrt{0} = 0$. Geometricamente, a reta tangente ao gráfico de $\sqrt{}$ no ponto 0 é vertical. ▲

Observação 3.2.10 (Derivadas laterais)**.** Secretamente, o exemplo anterior tangencia a noção de *derivada lateral*, que essencialmente consiste em tratar das versões laterais (i.e., à direita e à esquerda) do limite que define a derivada. Esse tipo de minúcia não será abordado no texto de forma explícita. △

Nas situações em que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *diferenciável*, a derivada $f'(a)$ existe para todo $a \in X$, o que induz uma *nova* função, agora indicada por $f'\colon X \to \mathbb{R}$, que a cada $a \in X$ associa $f'(a)$. Tal função é, muito apropriadamente, xingada de **derivada da função** f. Por ser uma função da forma $X \to \mathbb{R}$, é lícito investigar a derivada de f', denotada por f'' e chamada de **segunda derivada de** f, que se existir permite a procura de sua derivada, f''' (*a.k.a.* **terceira derivada de** f), e assim sucessivamente, *ad nauseam*.

Exemplo 3.2.11. Pelos exercícios anteriores, funções polinomiais são *infinitamente diferenciáveis*, i.e., admitem todas as derivadas iteradas. Usualmente, funções com tal propriedade são xingadas de **suaves**. ▲

Exercício 3.47. Mostre que funções racionais são suaves em seus domínios. ■

Exemplo 3.2.12. De volta ao Exemplo 3.2.7, note que ao assumir g diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função $f(x) := x^2 g(x)$ é tal que $f'(a) = 2ag(a) + a^2 g'(a)$ se $a \neq 0$, enquanto $f'(a) = 0$. Logo,

$$f''(0) := \lim_{t\to 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t\to 0} 2g(t) + t^2 g'(t),$$

que pode não existir a depender da função g escolhida: com $g(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, por exemplo, veremos que $g'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot \cos\frac{1}{t}$ para $t \neq 0$, situação em que o limite acima não existe. ▲

Observação 3.2.13 (Colapso de notações)**.** Há muitas coisas diferentes denotadas por meio de expressões perigosamente semelhantes, o que pode gerar alguns incômodos. Como diria, Jack:

(i) a *derivada de f no <u>ponto</u>* a é um limite (possivelmente em $\overline{\mathbb{R}}$), denotado por $f'(a)$;

(ii) nas situações em que $f'(a) \in \mathbb{R}$ para todo a no domínio de f, fica definida a *derivada da <u>função</u>* f, indicada por f';

(iii) chamando por $\mathcal{D}(X)$ a família das funções diferenciáveis da forma $X \to \mathbb{R}$, pode-se associar cada função $f \in \mathcal{D}(X)$ à sua derivada f', o que determina uma função $\mathrm{d}\colon \mathcal{D}(X) \to \mathbb{R}^X$ dada por $\mathrm{d}(f) := \mathrm{d}f := f'$, chamada de **derivação**.

Assim, por exemplo, $\mathrm{d}f(a)$ e $f'(a)$ indicam ~~a mesma transformação linear~~ o mesmo número real. Manter essas distinções em mente já no contexto real ajuda a entender as sutilezas das derivadas em espaços normados mais gerais, coisa que será feita *en passant* no final do capítulo. △

3.2.0 A regra da cadeia

A definição do número $f'(a)$ como um limite busca formalizar a ideia de que ao considerar *qualquer* variação *infinitesimal* ε em a, o resultado da divisão $\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ é *indistinguível* de $f'(a)$. Escrevendo $\mathrm{d}x$ em vez de ε e usando "$\approx$" para indicar essa relação de "indistinguibilidade", isso daria

$$f'(a) \approx \frac{f(a+\mathrm{d}x)-f(a)}{\mathrm{d}x}. \tag{3.8}$$

Agora, nas situações em que a imagem da função f está contida no domínio de uma função g diferenciável em $b := f(a)$, o raciocínio acima daria

$$g'(b) \approx \frac{g(b+\mathrm{d}y)-g(b)}{\mathrm{d}y}, \tag{3.9}$$

onde escrevemos $\mathrm{d}y$ em vez de $\mathrm{d}x$ apenas para indicar que a *variação infinitesimal* ocorre com respeito ao domínio de $g(y)$. Uma vez que f é contínua em a, $f(a+\mathrm{d}x)-f(a)$ também deveria ser um *infinitesimal* no domínio de g, de modo que ao chamá-lo de $\mathrm{d}y$, teríamos

$$g'(f(a)) \approx \frac{g(f(a)+\mathrm{d}y)-g(f(a))}{\mathrm{d}y} \approx \frac{g(f(a+\mathrm{d}x))-g(f(a))}{\mathrm{d}y},$$

e, *consequentemente*,

$$(g\circ f)'(a) \approx \frac{g(f(a+\mathrm{d}x))-g(f(a))}{\mathrm{d}x} \approx \frac{g(f(a+\mathrm{d}x))-g(f(a))}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} \approx g'(f(a))\cdot f'(a).$$

Para justificar os raciocínios acima, duas coisas precisariam ser feitas: definir tanto o que são infinitesimais quanto o que é a relação "$\approx$". Todavia, a condição arquimediana impede que isso seja feito em $\mathbb{R}$: essencialmente, em tais corpos, 0 é o único infinitesimal possível, o que inviabiliza todos os quocientes tomados acima. A parte embaraçosa vem agora:

Teorema 3.2.14 (Regra da cadeia)**.** *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ abertos, $f\colon X\to\mathbb{R}$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$ funções tais que $f[X]\subseteq Y$. Se f é diferenciável em $a\in X$ e g é diferenciável em $f(a)\in Y$, então $g\circ f$ é diferenciável em a, com $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$.*

Demonstração. Imitar os argumentos anteriores é a primeira ideia que vem em mente: é tentador afirmar que para $x\neq a$ seja lícito escrever

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

de modo que o argumento se encerra ao fazer "$x\to a$". Contudo, não há razões para supor $f(x)\neq f(a)$ para x *suficientemente próximo* de a. Isto se remedia com um truque sujo.

Das hipóteses de que $f'(a)$ e $g'(f(a))$ existem, faz sentido definir as funções auxiliares $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ e $\psi\colon Y\to\mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \qquad \psi(y) := \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} - g'(f(a))$$

sempre que $x\neq a$ e $y\neq f(a)$, respectivamente, com $\varphi(a) := \psi(f(a)) := 0$. Adiante, será importante notar que φ e ψ são contínuas em a e $f(a)$, respectivamente (faça isso!). Agora, substituindo y por $f(x)$ na última expressão, segue que

$$\begin{aligned} g(f(x))-g(f(a)) &= (\psi(f(x))+g'(f(a)))\cdot(f(x)-f(a)) = \\ &= (\psi(f(x))+g'(f(a)))\cdot(\varphi(x)+f'(a))\cdot(x-a), \end{aligned} \tag{3.10}$$

acarretando

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\psi(f(x))+g'(f(a))\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(\varphi(x)+f'(a)\right)=g'(f(a))\cdot f'(a),$$

pois ψ e φ são contínuas em $f(a)$ e a, respectivamente[22]. □

Exemplo 3.2.15. Para $x,t>0$, não é difícil se convencer de que

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+t}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{t}=-\frac{1}{\sqrt{x+t}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+t}+\sqrt{x})},$$

o que permite mostrar que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Ocorre que a função $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ é a composta das funções $f\colon x\mapsto\sqrt{x}$ e $g\colon y\to\frac{1}{y}$. Logo, pela regra da cadeia,

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x}},$$

exatamente o resultado esperado. ▲

Exemplo 3.2.16. Para g diferenciável em a com $g(a)\neq 0$, a Regra da Cadeia garante que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{(g(a))^2},$$

justamente a expressão obtida na demonstração da identidade (3.7). ▲

Exemplo 3.2.17 (L'Hospital – versão trivial)**.** Uma aplicação inusitada das derivadas facilita a estimativa de algumas indeterminações. Supondo $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ funções satisfazendo $f(a)=g(a)=0$, já vimos que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ tem *status* indeterminado. Porém, se f e g forem diferenciáveis em a com $g'(a)\neq 0$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

desde que o último limite exista: com efeito, neste caso,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=f'(a)\cdot\frac{1}{g'(a)}.$$

Uma vez munidos de ferramentas topológicas mais sofisticadas (no Capítulo 4), poderemos estender o resultado acima para uma gama bem mais ampla de funções. ▲

[22]A continuidade de f em a também é importante, pois ao fazer "$x\to a$", resulta "$f(x)\to f(a)$" e daí "$\psi(f(x))\to\psi(f(a))=0$".

3.2.1 Comportamentos locais

Apesar de parecer bastante adequada, a noção de continuidade de funções reais é bem mais abrangente do que aparenta: *pode-se mostrar*, por exemplo, que existe uma função contínua e sobrejetora da forma $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Se houvesse correspondência direta com a realidade, seria possível rabiscar um quadrado completamente preenchido com um lápis cujo traçado não tivesse largura[23]. Ocorre que curvas desse tipo – usualmente xingadas como *curvas de Peano* – não podem ser diferenciáveis.

Embora este texto não vá tratar dos tópicos acima, a discussão serve para ilustrar a ideia de que a diferenciabilidade elimina *patologias*, i.e., comportamentos que não esperamos de curvas reais e que, por isso, não desejamos em nossos modelos abstratos. Assim, não deve espantar que funções satisfazendo algum tipo de diferenciabilidade tenham comportamentos mais previsíveis do que funções meramente contínuas. É o caso da próxima

Proposição 3.2.18. *Sejam $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função monótona e $p \in X$ um ponto de acumulação de X. Se f é diferenciável em p, então*

(i) $f'(p) \geq 0$ *se f é crescente, e*

(ii) $f'(p) \leq 0$ *se f é decrescente.*

Demonstração. A diferenciabilidade assegura que $f'(p)$ existe e é um número real. Agora, se f é crescente em X, então
$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0$$
para qualquer $x \in X \setminus \{p\}$, pois
$$\begin{aligned} x < p \Rightarrow f(x) - f(p) \leq 0 \quad &\text{e} \quad x - p < 0 \\ p < x \Rightarrow f(x) - f(p) \geq 0 \quad &\text{e} \quad x - p > 0 \end{aligned}$$
e *pelo menos um dos casos deve ocorrer*[24], já que p é ponto de acumulação de X. Logo, a desigualdade desejada segue pela monotonicidade dos limites. Para o segundo caso, note que $-f$ é crescente sempre que f é decrescente. □

Observação 3.2.19 (**Importante**: monotonicidade estrita)**.** O leitor desatento pode pensar que se a monotonicidade de f fosse estrita, então deveria ser possível garantir $f'(p) > 0$. Contudo, já vimos que uma *net* convergente $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ pode satisfazer $x_d > a$ para todo $d \in \mathbb{D}$ e, ainda assim, ocorrer $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d = 0$: vide a sequência $\left\langle 1 + \frac{1}{2^n} \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}$, por exemplo. Para o caso de derivadas, o exemplo clássico é $f(x) := x^3$: trata-se de uma função estritamente crescente tal que $f'(0) = 0$. △

Agora, tal qual se verificou para *nets* [25], a ocorrência de uma das desigualdades estritas ($f'(p) > 0$ ou $f'(p) < 0$) interfere de modo *estrito* no comportamento dos termos da forma $\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ para pontos suficientemente próximos de p, o que garante uma recíproca moral da última proposição.

[23] O leitor pode achar o espanto descabido, já que os livros de colorir abundam. No entanto, lembre-se de que o traçado de um lápis verdadeiro tem *duas* dimensões, e não apenas uma!

[24] Leitores preciosistas podem preferir pedir que p seja ponto de acumulação *bilateral*, ou então tratar de pontos de acumulação laterais e derivadas laterais correspondentes.

[25] Proposição 3.1.26 e Exercício 3.1.26.

Exercício 3.48. Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in X$ um ponto de acumulação de X. Suponha f diferenciável em p.

a) Mostre que se $f'(p) > 0$, então existe um subconjunto $V \subseteq X$ aberto em X, tal que $p \in V$ e $f(x) < f(a) < f(y)$ para quaisquer $x, y \in V$ satisfazendo $x < a < y$.

b) Mostre que se $f'(p) < 0$, então existe um subconjunto $V \subseteq X$ aberto em X, tal que $p \in V$ e $f(x) > f(a) > f(y)$ para quaisquer $x, y \in V$ satisfazendo $x < a < y$. ■

Observação 3.2.20 (*Spoilers* trigonométricos)**.** Novamente, é tentador assumir que f deveria ser estritamente crescente (ou decrescente) na vizinhança V, mas isto não precisa ocorrer. Por exemplo, tomando $f(x) \coloneqq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, que satisfaz $f'(0) = 0$, pode-se cozinhar $g(x) \coloneqq f(x) + \frac{x}{2}$, que agora satisfaz $g'(0) = \frac{1}{2}$ mas que não é monótona em nenhum aberto em torno de 0. △

Após um estudo mais sistemático de funções trigonométricas, a ser realizado no próximo capítulo, ficará claro que a função g acima tem duas propriedades peculiares: g' assume valores positivos e negativos em pontos arbitrariamente próximos de 0 e, pior ainda, g' não é contínua em 0. Não por coincidência, no próximo capítulo, veremos que se as derivadas de uma função diferenciável sempre forem positivas, ou sempre negativas, num domínio *conexo* (i.e., num intervalo), então o sinal da derivada num ponto determina a monotonicidade da função numa *vizinhança* do ponto.

Por enquanto, o leitor deve se contentar a usar derivadas como testes: se $f'(p) < 0$, então f não pode ser crescente; se $f'(p) > 0$, então f não pode ser decrescente. Em particular, com $f'(p) \neq 0$, certamente p não poderá ser um *extremo local*.

Definição 3.2.21. Um ponto $a \in X$ é dito **máximo local** de f se existe um subconjunto $V \subseteq X$ aberto em X com $a \in V$ tal que $f(a) = \max\{f(v) : v \in V\}$. A definição de **mínimo local** é análoga, e diremos que a é **extremo local** se a for ponto de máximo ou de mínimo local. Em particular, o adjetivo "local" é trocado por "**absoluto**" se ocorrer $V = X$. ¶

Proposição 3.2.22. *Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in X$, onde p é ponto de acumulação bilateral de p. Se p é extremo local de f, então $f'(p) = 0$.*

Demonstração. Se ocorresse $f'(p) > 0$, então o exercício anterior daria um aberto $V' \subseteq X$ tal que $f(x) < f(p) < f(y)$ sempre que $x, y \in V'$ com $x < p < y$, o que contraria a hipótese de p ser extremo local. Logo, $f'(p) \leq 0$. Analogamente, $f'(p) < 0$ também levaria a uma contradição com a hipótese. Resta, portanto, $f'(p) = 0$. □

Exercício 3.49. Lembre-se de que retas paralelas ao eixo horizontal tem coeficiente angular nulo. Com isso em mente, faça ilustrações gráficas da proposição anterior. ■

Acima, a exigência de *bilateralidade* sobre a condição de acumulação não é preciosismo: é justamente isso o que garante tanto a existência de pontos à esquerda quanto à direita de p em *qualquer* vizinhança de p com as respectivas imagens acima e abaixo de $f(p)$. Note, por exemplo, que com $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \coloneqq x$, 0 é ponto de mínimo (absoluto) de f, mas $f'(0) = 1$. Evidentemente, o leitor não deve esperar por qualquer tipo de recíproca: $g(x) \coloneqq |x|$ tem mínimo absoluto em 0, e g nem chega a ser diferenciável em 0.

3.2.2 Opcional: derivadas em outros espaços

Enquanto limites podem ser tratados, de modo geral, em espaços topológicos dos mais abstratos, derivadas requerem algum tipo de aparato algébrico para serem definidas: a fim de dar sentido a algo do tipo

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t},$$

precisa-se de uma topologia ("$\lim\limits_{t\to 0}$"), de uma adição e uma multiplicação no domínio da função ("$a+t$" e "$\cdot\frac{1}{t}$"), bem como de uma adição no contradomínio da função ("$f(a+t)-f(a)$"). Além disso, existe o problema de que se o domínio e o contradomínio de f não forem subconjuntos do mesmo ambiente, todas essas operações podem ser *incompatíveis* umas com as outras.

Exemplo 3.2.23. Para uma função $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, note que não faz sentido escrever

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t},$$

pois $a, t, a+t\in\mathbb{R}^3$, $f(a+t)-f(a)\in\mathbb{R}^2$ e nem mesmo há uma multiplicação definida em $\mathbb{R}^3$ que permita dar sentido a algo como "$\frac{1}{t}$" para $t\neq\langle 0,0,0\rangle$ – e se existisse, ainda restaria o problema de multiplicar um elemento de $\mathbb{R}^3$ por outro de $\mathbb{R}^2$. ▲

Um modo bastante esperto de contornar o problema se deve a Carathéodory:

Proposição 3.2.24. *Para um subconjunto $X\subseteq\mathbb{R}$, uma função $f\colon X\to\mathbb{R}$ e $a\in X$ um ponto de acumulação de X, são equivalentes:*

(i) *f é diferenciável em a;*

(ii) *existe $L\colon X\to\mathbb{R}$ contínua em a tal que $f(x)-f(a)=L(x)(x-a)$ para todo $x\in X$.*

Em particular, $f'(a)=L(a)$.

Exercício 3.50. Demonstre a proposição acima. ■

Embora as duas formulações sejam equivalentes, a segunda é bem mais propícia a generalizações do que a primeira: a fim de estender a definição para o caso em que $S\subseteq\mathbb{R}^m$ e f é uma função da forma $S\to\mathbb{R}^n$, basta pedir que $L(x)$ seja algo capaz de "multiplicar" um vetor $x-a$ em $\mathbb{R}^m$ com um resultado em $\mathbb{R}^n$, algo tipicamente feito por *transformações lineares*! Isto, é claro, tem um custo: precisa-se perceber que a manifestação da derivada de funções reais como um número real é meramente um acidente de percurso. A Definição 1.1.11 cumpriu a tarefa de introduzir os espaços vetoriais, que têm sido utilizados na discussão dos espaços normados, mas o problema de descrever os *morfismos* correspondentes foi ignorado.

Definição 3.2.25. Uma função $f\colon X\to Y$ entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais X e Y é dita **$\mathbb{K}$-linear** (ou **transformação $\mathbb{K}$-linear**[26]) se for compatível com as operações de X e Y, i.e., se $f(\alpha u+v)=\alpha f(u)+f(v)$ para quaisquer $\alpha\in\mathbb{K}$ e $u,v\in X$. ¶

[26] E como de costume, o sufixo "$\mathbb{K}$" é abandonado nas situações em que o corpo é claro pelo contexto.

Apesar de ser um tema bastante profundo, por ora basta observar o seguinte: uma função linear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é, necessariamente, da forma $x \mapsto rx$ para algum $r \in \mathbb{R}$. Por um lado, tal lei de formação induz, claramente, uma função linear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Por outro lado, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear, então $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Formalmente, tem-se um *isomorfismo* entre $\mathbb{R}$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde o último indica o espaço (vetorial) das transformações lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (Exercício 3.96).

Portanto, a função L da proposição anterior é, *na verdade*, da forma $U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ indica o espaço das transformações lineares *contínuas* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Surge então outro problema: para exigir que esta "nova" L seja contínua, é preciso que $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tenha algum tipo de topologia. É claro (certo?) que em vista da bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, basta importar a topologia de $\mathbb{R}$ para $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Porém, a fim de generalizar a noção de derivada para funções da forma $X \to Y$, precisa-se de uma topologia em $\mathcal{L}(X, Y)$, o **espaço vetorial das transformações lineares *contínuas*** de X para Y.

Neste ponto, a depender do grau de generalidade esperado, as coisas podem se complicar, uma vez que espaços de funções admitem várias topologias razoáveis. No caso de X e Y normados, o mais comum é considerar, para $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, o número

$$\|T\| := \inf \underbrace{\{r > 0 : \forall x \in X \quad \|T(x)\| \leq r\|x\|\}}_{L_T}$$

chamado de **norma da transformação**[27]. Tal definição *faz sentido* pois, nestas condições, T é contínua se, e somente se, o conjunto L_T é não-vazio (verifique?)[28].

Exercício 3.51. Mostre que a função $\|\cdot\|: \mathcal{L}(X, Y) \to [0, +\infty)$ é uma norma que satisfaz $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para quaisquer $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $x \in X$. Dica: para o final, note que se $\|T(x)\| \leq r\|x\|$ para qualquer x, então para $x \neq 0$ ocorre $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq r$, mostrando que tais números são limitantes inferiores de L_T. ■

Observação 3.2.26. Nas situações em que $X := \mathbb{R}^m$ e $Y := \mathbb{R}^n$, mostra-se que *toda* transformação linear da forma $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua, o que permite interpretar $\mathcal{L}(X, Y)$ como sendo o espaço das *matrizes* de ordem $n \times m$. Saber disso é importante pois, como veremos oportunamente, quaisquer duas normas num espaço da forma $\mathbb{R}^k$ (para $k \in \mathbb{N}$) induzem a mesma topologia! Logo, utilizar a norma de transformações não altera as conclusões sobre continuidade em tais contextos. △

Definição 3.2.27 (Derivada à moda Carathéodory)**.** Para X e Y espaços normados e $S \subseteq X$, uma função $f: S \to Y$ é dita **diferenciável em** $a \in \operatorname{int}(S)$ se existe uma função $\Phi: S \to \mathcal{L}(X, Y)$, contínua em a, tal que $\Phi(x)(x - a) = f(x) - f(a)$ para todo $x \in S$. ¶

Acima, a função Φ costuma ser chamada de (*função de*) *inclinação de f* no ponto a, enquanto a transformação linear *contínua* (!) $\Phi(a): X \to Y$ é a **derivada** de f em a. A fim de xingar $\Phi(a)$ por um apelido mais específico, como $f'(a)$, é preciso mostrar que ela independe de Φ. Emergem daí as *derivadas direcionais*.

Proposição 3.2.28. *Nas condições acima, $\Phi(a)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ para qualquer $v \in X$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que para $t \neq 0$ suficientemente próximo de 0, o quociente $\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} := \frac{1}{t} \cdot (f(a + tv) - f(a))$ está bem definido, já que a correspondência $\mathbb{R} \to X$ dada por $t \mapsto a + tv$ é contínua e $a \in \operatorname{int}(S)$, o que garante $r > 0$ tal que $a + tv \in \operatorname{int}(S) \subseteq S$ para todo t com $|t| < r$.

[27] Também chamada de **norma de operador**.

[28] Ou espere até a Proposição 4.2.25.

Para tais valores de t, a definição de Φ assegura

$$f(a+tv)-f(a)-t\Phi(a)(v)=t\Phi(a+tv)(v)-t\Phi(a)(v),$$

pois $\Phi(a+tv)$ é linear e $a+tv-a=tv$. Logo,

$$\left|\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}-\Phi(a)(v)\right|=|\Phi(a+tv)(v)-\Phi(a)(v)|\leq\|\Phi(a+tv)-\Phi(a)\|\cdot\|v\|,$$

que por sua vez pode ser arbitrariamente controlado pela continuidade de Φ: por Φ ser contínua em a e $a\mapsto a+tv$ ser contínua em 0, existe $r'>0$ menor do que r tal que $\|\Phi(a+tv)-\Phi(a)\|<\frac{\varepsilon}{\|v\|}$ para todo $t\neq 0$ com $|t|<r'$. Em outras palavras, mostrou-se

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}-\Phi(a)(v)=0,$$

o que equivale ao que se queria demonstrar. □

Exercício 3.52. Mostre que se $f\colon S\to Y$ é diferenciável em $a\in\operatorname{int}(S)$, então f é contínua em a. Dica: $f(x)-f(a)=\Phi(x)(x-a)$ para todo $x\in S$. ■

O limite encontrado na última proposição costuma ser chamado de **derivada de f na direção de v no ponto** a, que se denota, usualmente, por $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Dessa forma, o que se demonstrou foi que uma função diferenciável num ponto admite todas as *derivadas direcionais* naquele ponto, pois $f'(a)(v)=\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Exemplo 3.2.29. A recíproca é falsa. Por exemplo, com $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(0,0):=0$ e $f(x,y):=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ para $\langle x,y\rangle\neq\langle 0,0\rangle$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial\langle 0,0\rangle}\langle 0,0\rangle:=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3a^2b}{t^3(a^2+b^2)}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

para todo $\langle a,b\rangle\neq\langle 0,0\rangle$, enquanto $\frac{\partial f}{\partial\langle 0,0\rangle}\langle 0,0\rangle=0$ vale em geral (por quê?!). Ocorre que se f fosse diferenciável em $\langle 0,0\rangle$, digamos que com função inclinação $\Phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, então $\Phi(0,0)\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ seria linear e a identidade $\Phi(0,0)(v)=\frac{\partial f}{\partial v}\langle 0,0\rangle$ valeria para todo $v\in\mathbb{R}^2$. Porém, a função $v\mapsto\frac{\partial f}{\partial v}\langle 0,0\rangle$, na verdade, faz $\langle a,b\rangle\mapsto\frac{a^2b}{a^2+b^2}$ para $\langle a,b\rangle\neq\langle 0,0\rangle$, que não é linear. ▲

De qualquer forma, se $f\colon S\to Y$ é diferenciável em $a\in\operatorname{int}(S)$, então sua derivada $f'(a)\colon X\to Y$ é uma transformação linear e, como tal, fica completamente determinada pelas imagens que assume em vetores de uma base de X fixada. Se, por exemplo, X tem uma base finita (e é, portanto, indistinguível de algum $\mathbb{R}^n$), digamos $\{e_1,\ldots,e_n\}$, então para $v\in X$ existem únicos escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ satisfazendo $v=\sum_{i\leq n}\alpha_ie_i$ e, por linearidade,

$$f'(a)(v)=\sum_{i\leq n}\alpha_if'(a)(e_i):=\sum_{i\leq n}\alpha_i\frac{\partial f}{\partial e_i}(a).$$

Agora, se Y também tem dimensão finita, digamos $Y:=\mathbb{R}^m$, então para cada $j\leq m$ tem-se $\pi_j\circ f\colon S\to\mathbb{R}$, a função que a cada $s\in S$ associa $f(s)=\langle\pi_1\circ f(s),\ldots,\pi_m\circ f(s)\rangle$. Na prática, esta observação simples permite *reduzir* o cálculo de derivadas direcionais da forma $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$ ao cálculo de m derivadas *reais* $\frac{\partial(\pi_i\circ f)}{\partial e_i}(a)$.

De fato, ao escrever $f_j := \pi_j \circ f$, a definição explícita da derivada de f na direção do vetor e_i no ponto a diz que

$$\frac{\partial f_j}{\partial e_i}(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f_j(a+te_i) - f_j(a)}{t},$$

que secretamente é um limite de função da forma $I \to \mathbb{R}$, com $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo: como na demonstração da última proposição, existe $r > 0$ tal que $a + te_i \in \operatorname{int}(S)$ sempre que $t \in (-r, r) := I$, de modo que ao definir o caminho diferenciável $\gamma\colon I \to S$ dado por $\gamma(t) := a + te_i$, resulta que

$$(f_j \circ \gamma)'(0) := \lim_{t\to 0} \frac{f_j(\gamma(t)) - f_j(\gamma(0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(a+te_i) - f(a)}{t} = \frac{\partial f_j}{\partial e_i}(a).$$

Em particular, pelo que se discutiu no Exemplo 3.1.40, ocorre

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial e_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial e_i}(a) \right\rangle.$$

Exemplo 3.2.30. A função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) := \langle x^2, y^2 \rangle$ tem como funções componentes $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que fazem $f_1(x,y) := x^2$ e $f_2(x,y) := y^2$, respectivamente. Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial e_1}\langle a,b\rangle &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{(a+t)^2 - a^2}{t}, \frac{b^2 - b^2}{t} \right\rangle = \\ &= \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{2at + t^2}{t}, \lim_{t\to 0} 0 \right\rangle = \langle 2a, 0\rangle, \end{aligned}$$

enquanto, de forma análoga, $\frac{\partial f}{\partial e_2}\langle a,b\rangle = \langle 0, 2b\rangle$: na prática, para calcular $\frac{\partial f}{\partial e_1}\langle a,b\rangle$, as funções f_1 e f_2 foram consideradas como funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ na *primeira variável*, enquanto a segunda foi tratada como constante e, de forma análoga, $\frac{\partial f}{\partial e_2}\langle a,b\rangle$ se obteve ao tratar f_1 e f_2 como funções na *segunda variável*. Em particular, a *candidata natural* a derivada de f em $\langle a,b\rangle$ é a transformação linear que associa um par $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2$ ao vetor $x(2a,0) + y(0,2b)$. A verificação de que tal transformação é, de fato, a derivada de f em $\langle a,b\rangle$ ficará facilitada após as considerações a seguir. ▲

Intuitivamente, enquanto $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ "mede" o comportamento de f ao longo da *curva* $t \mapsto a + tv$, a derivada $f'(a)\colon X \to Y$ é uma aproximação *linear* de f nas proximidades do ponto a: justamente por valer $\lim\limits_{x\to a} \|\Phi(x) - f'(a)\| = 0$, conclui-se que ao declarar $r(x) := f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ para cada $x \in S$, ocorre $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{\|x-a\|} = 0$, uma vez que $|r(x)| \leq |\Phi(x)(x-a) - f'(a)(x-a)| \leq \|\Phi(x) - f'(a)\| \cdot \|x-a\|$. Grosso modo, se v estiver próximo de 0, então ainda mais próximo de 0 estará o vetor $f(a+v) - f(a) - f'(a)(v)$ ou, em outras palavras, $f(a+v) \approx f(a) + f'(a)(v)$.

Observação 3.2.31 (Derivadas à moda Fréchet)**.** Secretamente, a discussão acima mostrou que se f é diferenciável no *sentido de Carathéodory*, então f também é diferenciável no sentido de *Fréchet*, em que se pede apenas *uma* transformação linear contínua $T\colon X \to Y$ satisfazendo

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.$$

Por sua vez, esta é a definição usual de diferenciabilidade de funções da forma $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, o que sugere uma pergunta bastante honesta: vale a recíproca? A resposta, em geral, é sim, mas aqui apenas a argumentação para o contexto euclidiano será apresentada[29]: o pulo do gato é definir $\Phi(a) := T$ e $\Phi(x) = T + \frac{1}{\|x-a\|^2} S(x)$ para $x \neq a$, onde

$$S(x)(w) := ((x-a) \bullet w) \cdot (f(x) - f(a) - T(x-a))$$

e "$u \bullet v$" denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^m$ entre vetores u e v. Ao considerar $\mathbb{R}^m$ com a norma induzida pelo produto interno usual, não é difícil concluir que Φ é uma função de inclinação de f em a: talvez a parte mais difícil seja se lembrar da desigualdade de Cauchy-Schwarz. $\triangle$

Exemplo 3.2.32. De volta ao Exemplo 3.2.30, note que fazendo $T(x,y) := \langle 2ax, 2by \rangle$, tem-se

$$\lim_{\langle x,y \rangle \to \langle a,b \rangle} \frac{\|f(x,y) - f(a,b) - T(x-a, y-b)\|}{\| \langle x-a, y-b \rangle \|} = \lim_{\langle x,y \rangle \to \langle 0,0 \rangle} \frac{\| \langle (x-a)^2, (y-b)^2 \rangle \|}{\| \langle x-a, y-b \rangle \|} = 0$$

(verifique?)[30] donde segue que $T = f'(a,b)$. $\blacktriangle$

Observação 3.2.33. Pode-se mostrar que se as derivadas parciais de $f\colon S \to Y$ existem e são contínuas numa vizinhança de $a \in \operatorname{int}(S)$, então f é diferenciável em a, o que se revela um critério bem mais prático de verificação de diferenciabilidade neste contexto. $\triangle$

Para encerrar esta breve introdução ao reino assombrado das derivadas em dimensão > 1, vamos enfrentar a versão "verdadeira" da Regra da Cadeia, em que a multiplicação das derivadas dá lugar para a composição. Porém, diferente do que se encontra na maioria dos livros-texto, isto será feito por meio da abordagem de Carathéodory[31].

Lema 3.2.34. *Para espaços normados X, Y e Z, a correspondência $\langle T, S \rangle \mapsto T \circ S$ determina uma função contínua $\circ\colon \mathcal{L}(Y,Z) \times \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(X,Z)$.*

Demonstração. Se $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(Y,Z)$ e $S_n \to S$ em $\mathcal{L}(X,Z)$, então $T_n \circ S_n \to T \circ S$, posto que

$$\begin{aligned} \|T_n(S_n(x)) - T(S(x))\| &= \|T_n(S_n(x) - S(x)) + (T_n - T)(S(x))\| \leq \\ &\leq \|T_n\|\|S_n - S\|\|x\| + \|T_n - T\|\|S\|\|x\| \end{aligned}$$

para qualquer $x \in X$, donde segue o resultado. $\square$

Teorema 3.2.35 (Regra da cadeia)**.** *Sejam X, Y e Z espaços normados, $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$ subconjuntos e $f\colon S \to Y$ e $g\colon T \to Z$ funções, com $\operatorname{im}(f) \subseteq Z$. Se f e g são diferenciáveis em $a \in \operatorname{int}(S)$ e $b := f(a) \in \operatorname{int}(T)$, respectivamente, então $g \circ f$ é diferenciável em a e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.*

[29] O caso geral entre espaços normados depende do Teorema de Hahn-Banach, resultado que foge do escopo deste texto. O leitor interessado deve conferir [3].

[30] Dica: observe que $\| \langle \alpha^2, \beta^2 \rangle \| \leq \alpha^2 + \beta^2$.

[31] O leitor interessado em mais aspectos desta definição pode conferir os trabalhos [0, 1, 3, 16], que discutem a perspectiva de Carathéodory para diferenciabilidade em diferentes contextos.

Demonstração. Se $\Phi\colon S \to \mathcal{L}(X,Y)$ e $\Psi\colon T\colon \mathcal{L}(Y,Z)$ são as funções inclinação de f e g em a e $f(a)$, respectivamente, então $\Gamma\colon U \to \mathcal{L}(X,Z)$ dada por $\Gamma(x) := \Psi(f(x)) \circ \Phi(x)$ é uma função inclinação para $g \circ f$ em a: Γ é contínua em a pois se $s_n \to a$, então $f(s_n) \to f(a)$ (por f ser contínua em a), $\Phi(s_n) \to \Phi(a) := f'(a)$ (por Φ ser contínua em a e valer $\Phi(a) := f'(a)$) e $\Psi(f(s_n)) \to \Psi(f(a)) := g'(f(a))$ (por Ψ ser contínua em $f(a)$ e valer $\Psi(f(a)) := g'(f(a))$), donde segue que $\Gamma(s_n) := \Psi(f(s_n)) \circ \Phi(s_n) \to g'(f(a)) \circ f'(a)$ (pelo lema anterior). Para o restante:

$$\Psi(f(x)) \circ \Phi(x)(x-a) := \Psi(f(x))(f(x)-f(a)) = g(f(x)) - g(f(a)). \qquad \square$$

Corolário 3.2.36. *Para $S \subseteq \mathbb{R}^n$, uma função $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $a \in \operatorname{int}(S)$ se, e somente se, $\pi_j \circ f\colon S \to \mathbb{R}$ é diferenciável em a para cada $j \leq m$.*

Demonstração. A cargo do leitor. $\square$

Exercícios adicionais

Nos exercícios a seguir, eventuais espaços topológicos arbitrários considerados devem ser assumidos com a condição de Hausdorff.

Exercício 3.53 (“$\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to+\infty}$”)**.** Para uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço topológico X, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, i.e., o limite de $\langle x_n\rangle_n$ enquanto sequência é $x \in X$ se, e somente se, o limite da função $\mathbb{N} \to X$ dada por $n \mapsto x_n$, quando n tende a $+\infty$, é $x \in X$. $\blacksquare$

Exercício 3.54. Para uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ fixado, mostre que se existir $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = x$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. $\blacksquare$

Exercício 3.55. Para uma *net* $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ num espaço X e $D \in \mathbb{D}$ fixado, mostre que se existir $\lim\limits_{d\geq D} x_d = x$, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d = x$. Dica: encare o exercício anterior até que ele te encare de volta. $\blacksquare$

Exercício 3.56. Seja $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* real. Mostre que $x_d \to 0$ se, e somente se, $|x_d| \to 0$. Dica: lembre-se de que $||x| - |y|| \leq |x-y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Exercício 3.57. Refaça o exercício anterior em espaços normados. $\blacksquare$

Exercício 3.58. É possível adaptar o exercício anterior para espaços métricos? Como? $\blacksquare$

Exercício 3.59. O Exercício 3.56 permanece válido trocando-se 0 por $x \neq 0$? $\blacksquare$

Exercício 3.60 (**Importante**: número de Euler)**.** Para o que segue, recorde a definição do fatorial $n!$ de um número natural $n \in \mathbb{N}$, na Observação 0.0.63.

a) Mostre que a série $e := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge em $\mathbb{R}$, com $2 < e < 3$. Dica: basta notar que cada parcela das somas que definem a série é limitada por 3, já que $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ para todo $n > 2$, donde o restante segue do item (ii) na página 146.

b) Mostre que a sequência $\left\langle \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o número “e” acima. Dica: apele para o binômio de Newton (pois é) a fim perceber que o termo $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ satisfaz a identidade

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \cdot \prod_{k=1}^{j+1} \frac{n-k}{n},$$

e observe que $0 < \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} < 1$ para todo $n > 1$, donde segue que $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência estritamente crescente com $x_n < \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} := s_n$ para todo $n > 2$; o restante decorre da Proposição 3.1.27 (mas veja também os Exercícios 3.70 ou 3.72). ■

Definição 3.2.37. O número e acima é chamado de **número de Euler**. ¶

Exercício 3.61 (Séries telescópicas). Seja $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Mostre que se $x_n \to 0$, então $\sum_{n=0}^{\infty} x_n - x_{n+1} = x_0$. Mostre que o resultado permanece válido em espaços normados. Dica: calcule, explicitamente, $\sum_{j\leq n} x_j - x_{j+1}$. ■

Exercício 3.62. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Dica: expresse $\frac{1}{n(n-1)}$ de um jeito esperto. ■

Exercício 3.63. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge em $\mathbb{R}$. Dica: *compare* com a série anterior. ■

Exercício 3.64. Para $m \in \mathbb{N}$, mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge num espaço normado se, e somente se, $\sum_{n\geq m} x_n$ também converge, onde $\sum_{n\geq m} x_n$ indica a série induzida pela sequência $\langle x_{m+n} \rangle_n$, chamada de **rabo da série** (a partir de m), que também costuma ser denotada por $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$. Dica: observe que, em virtude do Exercício 3.54, $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{m+k} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$; use o Exercício 3.38 para encerrar. ■

Exercício 3.65. Mostre que se $\sum x_n$ converge num espaço normado, então $\lim_{m\to\infty} \sum_{n\geq m} x_n = 0$. ■

Exercício 3.66. Mostre que se $\sum x_n$ converge em $\mathbb{R}$ e $\sum y_n$ diverge, então $\sum x_n + y_n$ diverge. ■

Exercício 3.67. Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais.

a) Suponha que exista $C > 0$ com $x_d > C$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Se $y_d \to 0$ e existe $D \in \mathbb{D}$ com $y_d > 0$ para todo $d \geq D$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = +\infty$.

b) Refaça o item anterior, trocando "$y_d > 0$" e "$+\infty$" por "$y_d < 0$" e "$-\infty$", respectivamente.

c) Mostre que se $\{x_d : d \in \mathbb{D}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = 0$. ■

Exercício 3.68. Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* em $\mathbb{R}$ e num espaço normado E, respectivamente. Mostre que $x_d y_d \to 0$ em qualquer um dos casos a seguir.

a) $x_d \to 0$ em $\mathbb{R}$ e $\{y_d : d \geq D\}$ limitado em E para algum $D \in \mathbb{D}$;

b) $y_d \to 0$ em E e $\{x_d : d \geq D\}$ limitado em $\mathbb{R}$ para algum $D \in \mathbb{D}$. ■

Exercício 3.69. Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais, com $y_d \to 0$. Mostre que se $\left\langle \frac{x_d}{y_d} \right\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ converge em $\mathbb{R}$, então $x_d \to 0$. Dica: lembre-se da Observação 3.1.57, e note que $\frac{x_d}{y_d} \cdot y_d = x_d$ sempre que $y_d \neq 0$. ■

Exercício 3.70. Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais e crescentes. Mostre que se para cada $a \in \mathbb{D}$ existir $b \geq a$ tal que $x_b \geq y_a$, então $\lim_d x_d \geq \lim_d y_d$. Dica: chamando $z := y_a$, perceba que $L := \lim_d x_d \geq z$ por conta da Proposição 3.1.27; para concluir, note que $L \geq y_d$ para todo d. ■

Exercício 3.71. Enuncie (e demonstre?) a versão dual do exercício anterior. ■

Exercício 3.72. Sejam $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ e $\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ sequências reais e crescentes tais que $x_n \leq y_n$ para todo n. Mostre que se para cada $p \in \mathbb{N}$ fixado existir um número natural $n_p > p$ com $x_{n_p} \geq y_p$, então $\lim_n x_n = \lim_n y_n$. ■

Exercício 3.73. Sejam $F \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $r \in \mathbb{R}$ um ponto. Mostre que se F é finito, então r é ponto de acumulação de $\mathbb{R} \setminus F$. ■

Exercício 3.74. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto na reta estendida.

a) Mostre que λ é ponto de acumulação de X se, e somente se, existe uma *sequência* $\langle x_n \rangle_n$ com $x_n \in X \setminus \{\lambda\}$ para todo n e tal que $x_n \to \lambda$.

b) Mostre que se X é finito, então X não admite pontos de acumulação (compare com o exercício anterior).

c) Suponha que X não tenha máximo. Mostre que se $\lambda = \sup X$, então λ é ponto de acumulação de X.

d) Suponha que X não tenha mínimo. Mostre que se $\lambda = \inf X$, então λ é ponto de acumulação de X.

e) Pense rápido: vale a volta dos dois últimos itens? ■

Observação 3.2.38. O leitor deve estar ciente de que nos enunciados acima, permite-se que λ assuma valores na reta estendida e, por isso, pode ocorrer tanto $\sup X = +\infty$ quanto $\inf X = -\infty$. Quem preferir pensar em pontos de acumulação como uma exclusividade de $\mathbb{R}$ deve acrescentar as hipóteses adequadas de limitação sobre X. △

Exercício 3.75. Sejam $q \in \mathbb{R}[t]$ um polinômio não-nulo, $X := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ e $r \in \mathbb{R}$. Mostre que r é ponto de acumulação de X. Dica: note que q tem, no máximo, $\deg q$ raízes. ■

Exercício 3.76. Para um polinômio $p(t) := a_0 + \ldots + a_n t^n$, mostre que se $p(r) = 0$ para algum $r \in \mathbb{R}$, então existem $N \in \mathbb{N}$ e um polinômio $q(t)$ tais que $p(t) = (t-a)^N q(t)$ com $q(r) \neq 0$. O número N é chamado de **multiplicidade da raiz** r. Use isso para investigar o comportamento de $\lim\limits_{x\to r} \frac{f(x)}{g(x)}$ sabendo que f e g são polinômios com raiz r. ■

Exercício 3.77. Defina de modo razoável o que significa "$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(z)$". Sugestão: use *nets*. ■

Exercício 3.78. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **par** se $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se f é par, então $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ■

Exercício 3.79. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **ímpar** se $f(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para uma função ímpar f, determine em quais situações existe $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$. ■

Exercício 3.80. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função polinomial, então $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. Dica: $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$. ■

Exercício 3.81. Para uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, suponha que as subsequências $\langle x_{3k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$, $\langle x_{3k+1} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\langle x_{3k+2} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ convirjam para o mesmo limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$. ■

Exercício 3.82. Para um conjunto dirigido $\langle \mathbb{D}, \leq \rangle$, sejam $C_0, \ldots, C_n \subseteq \mathbb{D}$ subconjuntos cofinais tais que $\mathbb{D} = \bigcup_{i \leq n} C_i$. Mostre que se $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ é uma *net* num espaço X e existe $x \in X$ tal que $\lim\limits_{c_i \in C_i} x_{c_i} = x$ para cada $i \leq n$, então $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d = x$. ■

Exercício 3.83. Sejam $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto. Mostre que se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$, então $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = \lambda$. Vale a recíproca? ■

Exercício 3.84. Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0$. ■

Exercício 3.85. Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$. Dica: depois de executar a primeira ideia que tiver, divida numerador e denominador por $\sqrt{x}$. ■

Exercício 3.86. Dados conjuntos dirigidos $\mathbb{D}_0$ e $\mathbb{D}_1$, mostre que $\mathbb{D} := \mathbb{D}_0 \times \mathbb{D}_1$ é dirigido com a relação que declara $\langle a, b \rangle \preceq \langle c, d \rangle$ em $\mathbb{D}$ se, e somente se, $a \preceq c$ em $\mathbb{D}_0$ e $b \preceq d$ em $\mathbb{D}_1$. ■

Exercício 3.87. Sejam $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}_0}$ e $\langle y_{d'} \rangle_{d' \in \mathbb{D}_1}$ *nets* nos espaços X e Y, respectivamente. Mostre que se $x_d \to x$ e $y_{d'} \to y$ em X e Y, respectivamente, então $\lim\limits_{\langle d, d' \rangle \in \mathbb{D}} \langle x_d, y_{d'} \rangle = \langle x, y \rangle$ em $X \times Y$. ■

Exercício 3.88 (*Sequências de Cauchy*)**.** Seja $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Mostre que se $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{m,n \to \infty} |x_m - x_n| = 0$, onde "$\lim\limits_{m,n \to \infty}$" indica o limite com respeito ao conjunto dirigido $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dica: desigualdade triangular + monotonicidade. ■

Exercício 3.89. Mostre que o resultado anterior permanece válido em espaços métricos. ■

Exercício 3.90. Reflita: vale a recíproca do resultado anterior? Dica: este problema tangencia a noção de completude, que será tratada no próximo capítulo. ■

Exercício 3.91 (Opcional: limite é continuidade)**.** Seja $\mathbb{N}^{\#} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Para $A \subseteq \mathbb{N}^{\#}$, diremos que A é aberto em apenas dois casos: i) $\infty \notin A$ ou ii) $\infty \in A$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \in A$ para todo $m \geq N$.

a) Mostre que os critérios acima determinam uma topologia sobre $\mathbb{N}^{\#}$ em que ∞ é o único ponto não-isolado.

b) Mostre que uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ num espaço X converge para $x \in X$ se, e somente se, é contínua a função $\varphi : \mathbb{N}^{\#} \to X$ que faz $\varphi(n) := x_n$ e $\varphi(\infty) := x$.

c) Generalize a definição de $\mathbb{N}$ para um conjunto dirigido $\mathbb{D}$ qualquer, de modo a concluir que uma *net* $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ num espaço X converge para $x \in X$ se, e somente se, é contínua a função $\varphi : \mathbb{D}^{\#} \to X$ que faz $\varphi(d) := x_d$ e $\varphi(\infty) := x$.

d) (*For fun*) Perceba que o Teorema 3.1.37 é corolário do Exercício 2.27. ■

Exercício 3.92. Sejam $x \in \mathbb{R}$ um número real, $\langle x_d \rangle_d$ uma *net* real e $\langle r_n \rangle_n$ uma sequência de números reais estritamente positivos com $r_n \to 0$. Mostre que se para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $D_n \in \mathbb{D}$ com $|x_d - x| < r_n$ para todo $d \geq D_n$, então $\lim_d x_d = x$. ■

Exercício 3.93 (**Importante**: Limites de funções monótonas)**.** Sejam $Z \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto, $p \in \mathbb{R}$ um ponto qualquer e $f : Z \to \mathbb{R}$ uma função crescente e limitada.

a) Mostre que se p é ponto de acumulação de Z à direita, então $\langle f(z) \rangle_{z \in Z_p^+}$ é decrescente, onde $x \preceq y$ para $x, y \in Z_p^+$ se, e somente se, $y \leq x$.

b) Mostre que se p é ponto de acumulação de X à esquerda, então $\langle f(z) \rangle_{z \in Z_p^-}$ é crescente, onde $x \preceq y$ para $x, y \in Z_p^-$ se, e somente se, $x \leq y$.

c) Mostre que funções crescentes e limitadas sempre admitem limites laterais (com respeito aos pontos do domínio em que o limite em questão faça sentido, caso existam).

d) Estenda o resultado anterior para funções decrescentes e limitadas.

e) (**Importante**) Nas condições anteriores, mostre que existe um conjunto enumerável T (possivelmente vazio!) tal que se $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ não existe, então $p \in T$. Dica: note que $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) \leq \lim\limits_{x\to p^+} f(x)$ para todo p e, nas situações em que a desigualdade é estrita, existe um número racional "no meio". ■

Exercício 3.94. Seja $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais estritamente positivos. Mostre que se existe $\lambda \in [0,1)$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \lambda$, então $x_n \to 0$. Dica: note que para $\mu \in (\lambda, 1)$ fixado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \mu$ para todo $n \geq N$, o que permite concluir que a subsequência $\langle x_n \rangle_{n\geq N}$ é decrescente e limitada inferiormente. ■

Exercício 3.95. Seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixado.

a) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \lim\limits_{n\to\infty} n! = \lim\limits_{n\to\infty} n^n = +\infty$.

b) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Dica: use o exercício anterior. ■

Exercício 3.96. Para $\mathbb{K}$-espaços vetoriais X e Y, mostre que $L(X,Y) := \{T : T$ é transformação linear $X \to Y\}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com a soma e produto por escalar usuais. Mostre ainda que $\mathcal{L}(X,Y)$, o subconjunto das transformações lineares contínuas, é subespaço vetorial. ■

Exercício 3.97. Para um espaço normado E, sem usar o Exercício 3.34, mostre que a função $\varphi\colon E \times E \to E$, dada por $\varphi(u,v) := u - v$, é contínua. Dica: a correspondência $\langle u,v \rangle \mapsto \langle u, -v \rangle$ determina uma função contínua da forma $E \times E \to E \times E$. ■

Exercício 3.98. Sejam $\langle G, +, 0 \rangle$ um grupo abeliano dotado de uma topologia que torna contínuas tanto a adição $+\colon G \times G \to G$ quanto a "inversão" $G \to G$ dada por $x \mapsto -x$. Mostre que a função $G \times G \to G$ que faz $\langle x,y \rangle \mapsto x - y$ é contínua. ■

Exercício 3.99 (*For fun*)**.** Sejam $\mathbb{D}$ um conjunto dirigido e $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ uma função (i.e., uma *net*), com $\operatorname{im}(f) = S$.

a) Mostre que se f é crescente (respectivamente, decrescente), então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} f(d) = \sup S$ (respectivamente, $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} f(d) = \inf S$).

b) Use os itens anteriores e as propriedades operatórias de limites para mostrar que se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ são não-vazios, então i) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, ii) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ e iii) $\sup(-A) = -\inf A$. Dica: para i), note que $\langle a,b \rangle \mapsto a+b$ determina uma *net* crescente da forma $A \times B \to \mathbb{R}$ cuja imagem é $A+B$, donde segue que $\lim\limits_{\langle a,b\rangle\in A\times B} a+b = \sup(A+B)$; por outro lado, como $a \mapsto a$ e $b \mapsto b$ também induzem *nets* crescentes $A \to \mathbb{R}$ e $B \to \mathbb{R}$, respectivamente, infere-se $\langle a,b \rangle \to \langle \sup A, \sup B \rangle$ e, finalmente, $a + b \to \sup A + \sup B$ pela continuidade da adição; os demais itens são análogos.

c) Em particular, mostre que se $A, B \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, então $\sup(AB) = \sup A \sup B$ e $\inf(AB) = \inf A \inf B$. Dica: como no item anterior, observe que a função $\langle a,b \rangle \mapsto ab$ induz uma *net* crescente da forma $A \times B \to \mathbb{R}$ cuja imagem é AB.

d) (Opcional) Mostre que os argumentos acima se aplicariam no caso de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ qualquer, *mutatis mutandis*. ■

Capítulo 4

Propriedades fundamentais da reta

O que é que tem pé de porco, orelha de porco e barriga de porco mas não é porco?
Resposta: feijoada.

Piadoca infantil de autoria desconhecida[0].

Embora tenha sido definida como um corpo ordenado completo, é enquanto espaço topológico e métrico que as propriedades mais interessantes da reta real se manifestam: *completude*, *conexidade* e *fechados-limitados sempre compactos*. Embora todas elas sejam equivalentes umas com as outras em corpos arquimedianos, elas acabam por descrever nuances distintas da reta – e, por conseguinte, cada uma delas costuma se adaptar melhor a um determinado tipo de problema. O propósito deste capítulo é explorar tais propriedades.

4.0 Completude

A definição de limite, embora efetiva, tem uma desvantagem curiosa: o próprio limite. Mais precisamente, para decidir se uma *net* $\langle x_d \rangle_d$ converge num espaço topológico, digamos $\mathbb{R}$, deve-se *encontrar* o *número* L que satisfaz a condição para ser chamado de $\lim_d x_d$. Ora, por ser uma propriedade da *net* (e não do número L), deveria ser possível decidir se uma *net* converge ou não sem, necessariamente, conhecer o seu limite. O *critério de Cauchy*, introduzido a seguir, busca fazer exatamente este trabalho – em espaços métricos.

Definição 4.0.0. Uma *net* $\langle x_d \rangle_d$ num espaço métrico $\langle X, \rho \rangle$ é **de Cauchy** em X se para todo $\varepsilon > 0$ existir D tal que $\rho(x_d, x_{d'}) < \varepsilon$ sempre que $d, d' \geq D$. ¶

Observação 4.0.1. Acima, a menção a um conjunto dirigido $\mathbb{D}$ foi omitida, postura que será mantida sempre que os conjuntos dirigidos estiverem claros pelo contexto. △

Exemplo 4.0.2. Dizer que uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ é de Cauchy num espaço métrico $\langle X, d \rangle$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N$. Em outras palavras, os termos da sequência se tornam arbitrariamente próximos uns dos outros – o que *pode indicar* que, na verdade, todos eles se aproximam de um limite. ▲

Exemplo 4.0.3. Para um subconjunto $Z \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação $p \in \overline{\mathbb{R}}$ de Z, pode-se dizer que f é de **Cauchy em torno de** p se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\widetilde{z} \in Z_p$ tal que $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ sempre que $z, z' \succeq \widetilde{z}$, i.e., se a *net* $\langle f(z) \rangle_{z \in Z_p}$ for de Cauchy. Em particular, se $p \in \mathbb{R}$, o critério se traduz como: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ sempre que $z, z' \in Z$ com $|z - z'| < \delta$ (verifique?). ▲

[0] Cuja resposta também poderia ser "porca".

Exemplo 4.0.4. Para uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, a *net* $\left\langle \sum_{\langle \mathcal{P}, T\rangle} f \right\rangle_{\langle \mathcal{P}, T\rangle}$ das somas de Riemann de f é de Cauchy se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left| \sum_{\langle \mathcal{P}, T\rangle} f - \sum_{\langle \mathcal{P}', T'\rangle} f \right| < \varepsilon$ para quaisquer partições de Riemann $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ satisfazendo $\|\mathcal{P}\|, \|\mathcal{P}'\| < \delta$. ▲

Exercício 4.0 (Confira o Exercício 3.88)**.** Mostre que uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ é de Cauchy num espaço métrico $\langle X, d\rangle$ se, e somente se, $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$. ■

Enquanto o critério usual de convergência pede que os pontos da *net* se tornem cada vez mais próximos de um ponto limite, o critério de Cauchy pede que os pontos se tornem próximos entre si. Há, de fato, semelhanças muito fortes entre os dois critérios.

Proposição 4.0.5. *Seja $\langle x_d \rangle_d$ uma* net *num espaço normado E.*

(i) Se $\langle x_d \rangle_d$ converge, então $\langle x_d \rangle_d$ é de Cauchy.

(ii) Se $\langle x_d \rangle_d$ é de Cauchy, então existem D no conjunto dirigido e $M > 0$ com $\|x_d\| < M$ para todo $d \geq D$.

(iii) Se $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência[1] *de Cauchy que tem uma subsequência convergente, então $\langle x_n \rangle_n$ converge.*

Demonstração. Para o primeiro item, basta notar que dois objetos próximos de um terceiro estão próximos entre si. Em outras palavras: para quaisquer d e d' no conjunto dirigido, vale a desigualdade

$$\|x_d - x_{d'}\| \leq \|x_d - L\| + \|x_{d'} - L\|$$

para qualquer $L \in E$; agora, se L for tal que $x_d \to L$, então para $\varepsilon > 0$ existe D tal que $\|x_d - L\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $d \geq D$, donde o resultado desejado segue.

Para a segunda afirmação, existe D tal que $\|x_d - x_{d'}\| < 1$ sempre que $d, d' \geq D$. Logo,

$$\|x_d\| = \|x_d - x_D + x_D\| \leq \|x_d - x_D\| + \|x_D\| < 1 + \|x_D\| := M$$

para todo $d \geq D$.

Por fim, no terceiro item, seja $\langle x_{n_k} \rangle_k$ subsequência de $\langle x_n \rangle_n$ convergente em E, digamos $x_{n_k} \to x$. Note que para $\varepsilon > 0$, existem

✓ N tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq N$ (critério de Cauchy), e

✓ K tal que $\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$ para qualquer $k \geq K$ (convergência da subsequência).

Como $k \mapsto n_k$ é estritamente crescente, pode-se tomar $N' \in \mathbb{N}$ com $N' \geq K$ e $n_{N'} \geq N$, donde segue que

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_{N'}}\| + \|x_{n_{N'}} - x\| < 2\varepsilon$$

para todo $n \geq N$, mostrando que $x_n \to x$, como desejado. □

Exercício 4.1. Convença-se de que os itens (i) e (iii) na proposição acima permanecem válidos para *nets* (e sequências) em espaços métricos. ■

[1] O resultado permaneceria verdadeiro para *nets* e "sub*nets*", mas isto exigiria definir sub*nets*, o que não é tão simples como no caso das subsequências.

Observação 4.0.6 (Limitação)**.** O item (ii) também é verdadeiro em espaços métricos, exceto pela noção de limitação, que demanda adaptações. Um subconjunto L de um espaço métrico $\langle X, \rho\rangle$ é **limitado** se existe $M > 0$ tal que $\rho(x, y) < M$ para quaisquer $x, y \in L$. Definindo

$$\operatorname{diam}(L) := \sup_{x,y\in L} \rho(x, y)$$

como o **diâmetro** de L, segue que L é limitado[2] se, e somente se, $\operatorname{diam}(L) < +\infty$. É com respeito a esta definição de limitação que se pode mostrar que se $\langle x_d\rangle_d$ é de Cauchy em X, então existe D no conjunto dirigido tal que $\{x_d : d \geq D\}$ é limitado. O leitor interessado pode cuidar dos detalhes. △

Exemplo 4.0.7. No caso de uma *sequência* $\langle x_n\rangle_n$ de Cauchy, pode-se mostrar que a própria é limitada: afinal de contas, como $\|x_n\| < M$ para todo $n \geq N$, restam apenas finitos termos da sequência para serem *majorados*, o que permite tomar o máximo entre as normas de tais termos e M. Note que esse tipo de raciocínio não se aplica a *nets* mais gerais. ▲

Na prática, a última proposição mostra que sequências de Cauchy são tão parecidas com sequências convergentes que basta a existência de uma subsequência convergente para assegurar a convergência da primeira. Se valesse a recíproca do item (i), o critério de Cauchy corrigiria a falha mencionada na definição de convergência, por permitir a determinação da *existência* de um limite sem a premissa de conhecê-lo. Pois bem:

Exemplo 4.0.8 (Nem toda sequência de Cauchy converge)**.** Pelo que se discutiu no Exemplo 1.1.16 e no Exercício 1.20, o conjunto $S := \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q \text{ e } q^2 < 2\}$

- ✓ tem supremo em $\mathbb{R}$, digamos α,
- ✓ $\alpha^2 = 2$ e, por isso
- ✓ $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Agora, o item (c) do Exercício 3.74 garante que α é ponto de acumulação de S, enquanto o item (a) permite conjurar uma sequência $\langle s_n\rangle_n$ em S com $s_n \to \alpha$. Como $\langle s_n\rangle_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, segue que $\langle s_n\rangle_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, e consequentemente, também é de Cauchy em $\mathbb{Q}$ (verifique?). Todavia, tal sequência não pode convergir em $\mathbb{Q}$: se convergisse, digamos que para $s \in \mathbb{Q}$, então a continuidade da inclusão daria $s_n \to s$ em $\mathbb{R}$ e, por este ser de Hausdorff, resultaria $\alpha = s$, i.e., $\alpha \in \mathbb{Q}$. ▲

Portanto, podem existir espaços métricos com sequências de Cauchy *divergentes*. A *completude*, título desta seção, é o xingamento dado aos espaços em que isso não acontece.

Definição 4.0.9. Um espaço métrico X é **completo** no *sentido de Cauchy*, assim como sua métrica é dita **completa**, se toda *sequência* de Cauchy em X converge em X. Em particular, se X é espaço vetorial e a métrica completa é induzida por uma norma, diz-se que X é um **espaço de Banach**. ¶

A definição acima pode frustrar o leitor que se empolgou com *nets*, já que o natural seria exigir que toda *net* de Cauchy fosse convergente. Ocorre que, para espaços métricos, sequências já dão conta do recado[3].

[2] Não é preciso exigir $L \neq \emptyset$, já que $\sup \emptyset = -\infty$ e $-\infty < +\infty$.

[3] Isto deixa de valer para *espaços uniformes*, animais que generalizam os espaços métricos mas que ainda vivem no reino dos espaços topológicos. O leitor interessado por essas parafernálias pode encontrar mais informações em [21].

Teorema 4.0.10. *Num espaço métrico completo,* nets *convergentes são, precisamente, as* nets *de Cauchy.*

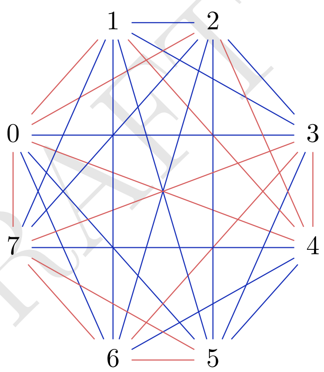
Demonstração. Sejam $\langle X, \rho\rangle$ um espaço métrico completo e $\langle x_d\rangle_d$ uma *net* de Cauchy em X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a condição de Cauchy assegura um D_n com $\rho(x_d, x_{d'}) < \frac{1}{2^n}$ para quaisquer $d, d' \geq D_n$, e a condição de compatibilidade dos conjuntos dirigidos permite supor $D_{n+1} \geq D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (verifique?). Com isso, resulta que $\langle x_{D_n}\rangle_n$ é uma *sequência* de Cauchy em X e, portanto, convergente em X (por hipótese), digamos $x_{D_n} \to x$. Em posse disso, mostraremos que $\lim_d x_d = x$.

Fixado $N \in \mathbb{N}$, a convergência de $\langle x_{D_n}\rangle_n$ como sequência assegura um $N' \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_{d_n}, x) < \frac{1}{2^{N+1}}$ para todo $n \geq N'$. Logo, tomando-se $M := \max\{N+1, N'\}$ e $D := d_M$, para $d \geq D$ deve valer: $\rho(x_D, x_d) < \frac{1}{2^{N+1}}$, pois $d, D \geq d_{N+1}$, bem como $\rho(x_D, x) < \frac{1}{2^{N+1}}$, pois $M \geq N'$. Disso, resulta $\rho(x_d, x) \leq \rho(x_d, x_D) + \rho(x_D, x) < \frac{1}{2^N}$, donde a conclusão segue por $\mathbb{R}$ ser arquimediano. □

Como o leitor já deve imaginar, a reta real é um espaço métrico completo, mas não só isso: serão completos todos os espaços da forma $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e, ainda mais geralmente, os espaços da forma $\mathcal{B}(X)$ munidos da norma do supremo, para qualquer X – e, em todos esses casos, a completude da reta será fundamental. Um resultado desse porte merece uma prova memorável.

Lema 4.0.11. *Toda sequência em* $\mathbb{R}$ *admite subsequência monótona.*

Demonstração. Dada uma sequência real $\langle x_n\rangle_n$, pode-se considerar o conjunto $[\mathbb{N}]^2$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ com precisamente dois elementos, e daí definir a função $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ que faz $c(\{m, n\}) := \mathsf{A}$ se $m < n$ e $x_m < x_n$, e $c(\{m, n\}) := \mathsf{V}$ se $m < n$ com $x_m \geq x_n$. O leitor, com certa razão, pode se perguntar: *quê?!*



$x_0 := 1$ $\quad$ $x_4 := -3$

$x_1 := -2$ $\quad$ $x_5 := 9$

$x_2 := 0$ $\quad$ $x_6 := 3$

$x_3 := 4$ $\quad$ $x_7 := 1$

Figura 4.0: Exemplo de um *subgrafo* finito do grafo descrito acima.

Intuitivamente, a construção proposta consiste em considerar o *grafo infinito* cujos vértices são <u>todos</u> os números naturais e cujas arestas são todas as possíveis ligações entre eles. Nesse sentido, a função c *pinta* uma "aresta" $m \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet n$ em que $m < n$: de Azul se ocorrer $x_m < x_n$; de Vermelho caso contrário[4].

[4] Evidentemente, A e V são apenas modos psicologicamente agradáveis de denotar 0 e 1, x e $\{x\}$ ou, mais geralmente, quaisquer dois conjuntos A e V com $A \neq V$.

Por que alguém faria isso? *Muito simples*! Um subconjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ no qual qualquer aresta ligando seus vértices tenha a mesma cor se traduz numa subsequência monótona: (estritamente) crescente se a cor for Azul; decrescente se a cor for $\mathsf{Vermelha}$. Por exemplo, se $\mathsf{c} := \mathsf{A}$, então $x_m < x_n$ sempre que $m, n \in M$ com $m < n$, ou seja: a *subsequência* $\langle x_m \rangle_{m \in M}$ é estritamente crescente. O raciocínio é análogo para $\mathsf{c} := \mathsf{V}$.

O passo fundamental na demonstração de que existe um subconjunto $M \subseteq \mathbb{N}$ com a propriedade desejada faz uso (de uma variação) do Princípio da Casa dos Pombos, como expresso no Exercício 0.40: *se X é infinito, $A, B \subseteq X$ são tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$, então A é infinito ou B é infinito.* Em particular, se $P \subseteq [\mathbb{N}]^2$ é infinito, então P é união disjunta dos subconjuntos $\{p \in P : c(p) = \mathsf{A}\}$ e $\{p \in P : c(p) = \mathsf{V}\}$, donde segue que pelo menos um deles deve ser infinito.

⌜**Afirmação.** *Fixados um subconjunto infinito $S \subseteq \mathbb{N}$ e um elemento $s \in S$, existem um subconjunto infinito $G_{S,s} \subseteq S$ e uma cor $\mathsf{c}_S \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ tal que $s < \min G_{S,s}$ e $c(\{s, n\}) = \mathsf{c}_S$ para qualquer $n \in G_{S,s}$.*

Demonstração. Em outras palavras, existe um subconjunto infinito de S cujas arestas que ligam seus elementos ao número s têm todas a mesma cor. Para se dar conta disso, note que o subconjunto $P := \{\{s, n\} : n > s \text{ e } n \in S\} \subseteq [\mathbb{N}]^2$ é infinito e, pelo argumento do parágrafo anterior, existe uma cor $\mathsf{C} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ tal que $Q := \{p \in P : c(p) = \mathsf{C}\}$ é infinito. Daí, basta tomar $G_{S,s} := (\bigcup Q) \setminus \{s\}$ e $\mathsf{c}_S := \mathsf{C}$. ⌟

Dito isso, mostraremos que existe uma sequência estritamente crescente $\langle k_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de números naturais tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\mathsf{c}_n \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $c(\{k_n, k_m\}) = \mathsf{c}_n$ para todo $m > n$. De fato, em vista da argumentação anterior, basta proceder recursivamente:

✓ $S_0 := \mathbb{N}$, $k_0 := \min S_0$ e $\mathsf{c}_0 := \mathsf{c}_{S_0}$;

✓ $S_1 := G_{S_0, k_0}$, $k_1 := \min S_1$ e $\mathsf{c}_1 := \mathsf{c}_{S_1}$;

✓ para $n \geq 1$, e supondo $S_0, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}$ definidos com $S_n \subseteq S_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq S_0$, todos infinitos, com $k_i \in S_i$ para cada $i \leq n$, faz-se $S_{n+1} := G_{S_n, k_n}$, $k_{n+1} := \min S_{n+1}$ e $\mathsf{c}_{n+1} := \mathsf{c}_{S_{n+1}}$.

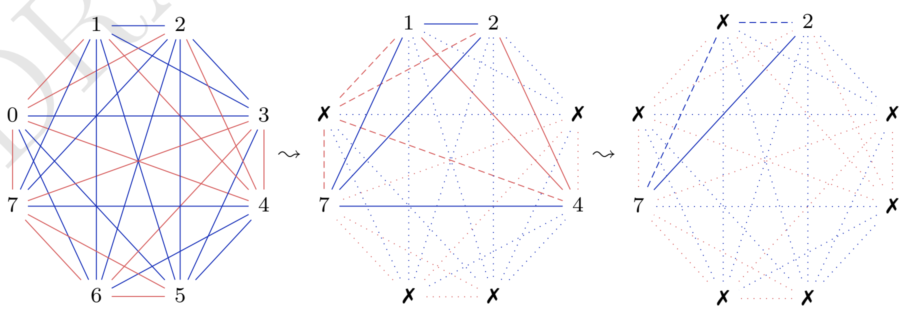


Figura 4.1: Ilustração do procedimento anterior, com $\mathsf{c}_0 := \mathsf{V}$ e $\mathsf{c}_1 := \mathsf{A}$.

Finalmente, a função $\varphi \colon \mathbb{N} \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$, que faz $\varphi(n) := \mathsf{c}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tem imagem finita, donde o Princípio da Casa dos Pombos garante um subconjunto infinito $T \subseteq \mathbb{N}$ e $\mathsf{c} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $\varphi(t) = \mathsf{c}$ para todo $t \in T$. Isto acarreta $c(\{k_s, k_t\}) = \mathsf{c}$ para quaisquer $s, t \in T$ distintos. Logo, basta fazer $M := \{k_t : t \in T\}$. $\square$

Observação 4.0.12 (Opcional: heurística do argumento)**.** Essencialmente, a sequência de subconjuntos $\langle S_n \rangle_n$ seleciona, a cada passo n, um subconjunto infinito de índices $S_{n+1} \subsetneq S_n$ cujos termos correspondentes são monótonos com respeito ao primeiro termo de S_n, mas sem afetar o tipo de monotonicidade (crescente ou decrescente) que seus termos mantêm com o primeiro termo de S_{n-1}. Com base nas ilustrações da Figura 4.1:

(i) com $\mathsf{c}_0 := \mathsf{V}$ e $S_1 := \{1, 2, 4, 7, \ldots\}$, indica-se que o conjunto de vértices S_1 é infinito e tal que todas as arestas ligando os seus vértices a 0 são vermelhas – isto é, $x_0 \geq x_s$ para todo $s \in S_1$; note que no segundo grafo restam apenas os vértices de S_1;

(ii) com $k_1 = 1$ o menor elemento de S_1, a ocorrência de $\mathsf{c}_1 := \mathsf{A}$ com $S_2 := \{2, 7, \ldots\} \subsetneq S_1$ indica que S_2 é um subconjunto infinito de vértices (de S_1!) cujas arestas que ligam seus vértices a 1 são todas azuis – ou seja, $x_1 < x_s$ para todo $s \in S_2$; note que no terceiro grafo restam apenas os vértices de S_2;

(iii) observe que por valer $S_2 \subsetneq S_1$, *ainda* se tem $x_0 \geq x_s$ para todo $s \in S_2$!

Portanto, ao encontrar um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ cujos c_n's correspondentes coincidem, assegura-se que o tipo de monotonicidade que seus termos correspondentes mantêm uns com os outros é o mesmo. △

Teorema 4.0.13. *A reta real é um espaço métrico completo com sua métrica usual.*

Exercício 4.2. Demonstre o teorema acima. Para isso, siga o breve roteiro a seguir.

a) Note que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada. Dica: confira o Exemplo 4.0.7!

b) Mostre que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ tem subsequência monótona. Dica: use o lema anterior!

c) Conclua que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge. Dica: reveja o item (iii) da Proposição 4.0.5 bem como o inócuo Exercício 3.29. ■

Como dizem os jovens: enfim, os refrescos!

Corolário 4.0.14. *Uma* net *real converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, é de Cauchy. Em particular:*

(i) *uma sequência real converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, é de Cauchy;*

(ii) *uma série $\sum a_n$ de números reais converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon$ sempre que $m \geq n \geq N$;*

(iii) *uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|\sum_{\langle \mathcal{P}, T\rangle} f - \sum_{\langle \mathcal{P}', T'\rangle} f\right| < \varepsilon$ para quaisquer partições de Riemann $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ com $\|\mathcal{P}\|, \|\mathcal{P}'\| < \delta$.*

Observação 4.0.15. O item (iii) acima será fundamental no próximo capítulo, em que as funções Riemann integráveis serão *completamente* caracterizadas pelo critério de Riemann-Lebesgue. △

Corolário 4.0.16 (Adiável)**.** *Para um conjunto X qualquer, $\langle \mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty \rangle$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. A ideia é tomar uma sequência de Cauchy $\langle f_n \rangle_n$ em $\mathcal{B}(X)$ e, por meio da completude de $\mathbb{R}$, obter $f \in \mathcal{B}(X)$ com $f_n \to f$ com respeito à norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$. Ora, como $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, segue que $\langle f_n(x) \rangle_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ (verifique?!) e, portanto, existe $y \in \mathbb{R}$ com $f_n(x) \to y$. Ao xingar $y := f(x)$, fica evidente que a função $f\colon X \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto f(x)$, é a candidata natural a limite de $\langle f_n \rangle_n$.

Para encerrar, em vista da Proposição 3.0.33, basta mostrar que $f_n \to f$ unif., i.e., que para $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$ para quaisquer $x \in X$ e $n \geq N$. Ora, pela condição de Cauchy, há $N_0 \in \mathbb{N}$ com $\|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N_0$, ao passo que para $x \in X$ fixado, existe $N_1 > N_0$ com $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ sempre que $k \geq N_1$. Logo,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{N_1}(x)| + |f_{N_1}(x) - f_n(x)| < \varepsilon + \|f_{N_1} - f_n\| \leq 2\varepsilon$$

sempre que $n \geq N_1$, como desejado. □

Exercício 4.3 (Confira a Observação 3.0.34)**.** A limitação das funções foi *realmente importante* na demonstração anterior? Ao perceber que não, conclua o seguinte[5]: uma sequência $\langle f_n \rangle_n$ de funções da forma $X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f\colon X \to \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq N$. ■

Definição 4.0.17. É comum dizer que uma sequência de funções $\langle f_n \rangle_n$ satisfazendo a condição acima é **uniformemente de Cauchy**. ¶

Corolário 4.0.18. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach com a norma do máximo.*

Observação 4.0.19 (A métrica importa)**.** Futuramente, veremos que a completude de $\mathbb{R}^n$ se verifica para *qualquer* norma. Porém, é importante mencionar que diferente da convergência, que é preservada por funções contínuas e, portanto, pode ser entendida como um *propriedade topológica*, a condição de Cauchy está atrelada à métrica do espaço – e não à sua topologia. Por exemplo:

(i) já sabemos que se $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência que converge num espaço métrico, então $\langle x_n \rangle_n$ é de Cauchy;

(ii) também já vimos que a topologia de $\overline{\mathbb{R}}$ pode ser induzida por uma métrica;

(iii) porém, qualquer sequência $\langle x_n \rangle_n$ em $\mathbb{R}$ com $x_n \to +\infty$ não será de Cauchy, pois sequências de Cauchy em $\mathbb{R}$ são limitadas;

(iv) ora, como $\langle x_n \rangle_n$ converge no espaço *métrico* $\overline{\mathbb{R}}$, ela não deveria ser de Cauchy?

Longe de ser uma contradição, a situação acima serve para lembrar a importância da métrica: a rigor, se $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ com $x_n \to +\infty$, então a condição de Cauchy da sequência se verifica com respeito à métrica que induz a topologia de $\overline{\mathbb{R}}$, e não com a métrica usual de $\mathbb{R}$! Com efeito, um dos modos de resolver o Exercício 2.34 consiste em perceber que a regra

$$\langle \alpha, \beta \rangle \mapsto d_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha, \beta) := \left| \lim_{x \to \alpha} \frac{x}{|x| + 1} - \lim_{y \to \beta} \frac{y}{|y| + 1} \right|$$

[5] Note que isto significa dizer que $\langle \mathbb{R}^X, d_\infty \rangle$ é um espaço métrico completo, pelo Exercício 3.14.

determina uma métrica $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,2]$ *compatível* com a topologia de $\overline{\mathbb{R}}$. Em particular, se $x_n \to +\infty$, então

$$d_{\overline{\mathbb{R}}}(x_m, x_n) := \left| \lim_{x \to x_m} \frac{x}{|x|+1} - \lim_{y \to x_n} \frac{y}{|y|+1} \right| = \left| \frac{x_m|x_n| + x_m - x_n|x_m| - x_n}{|x_m||x_n| + |x_m| + |x_n| + 1} \right|,$$

donde segue que $d_{\overline{\mathbb{R}}}(x_m, x_n) \to 0$ quando $m, n \to \infty$ (verifique?), o que já era esperado em vista do Exercício 3.88 – e significa, precisamente, que $\langle x_n \rangle_n$ é de Cauchy em $\langle \overline{\mathbb{R}}, d_{\overline{\mathbb{R}}} \rangle$ (Exercício 4.0). Em particular, ao restringir a métrica $d_{\overline{\mathbb{R}}}$ à reta, segue que $\langle \mathbb{R}, d_{\overline{\mathbb{R}}} \rangle$ não é um espaço métrico completo, apesar de a topologia induzida ser a usual. △

4.0.0 Séries revisitadas: convergência absoluta e uniforme

A completude (de Dedekind ou de Cauchy) é, precisamente, a propriedade que garante a existência de toda sorte de limites que *deveriam existir*. Em particular, ela é usada diariamente para determinar a convergência de séries – sem a necessidade de explicitar o valor do limite. Além do item (ii) no Corolário 4.0.14, um modo de fazer isso usa a seguinte

Definição 4.0.20. Uma série $\sum x_n$ num espaço normado E é **absolutamente convergente** (ou **converge absolutamente**) se $\sum \|x_n\|$ converge em $\mathbb{R}$. ¶

No caso particular de $E := \mathbb{R}$, por exemplo, $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge absolutamente, já que a série formada pelas normas dos termos já teve sua convergência verificada na Proposição 3.1.48. O ponto a se destacar é que não é óbvio determinar se $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge no sentido usual, devido a alternância dos sinais. Eis aí uma das maravilhas da completude.

Proposição 4.0.21. *Num espaço de Banach, toda série absolutamente convergente converge.*

Demonstração. Para uma série $\sum x_n$ num espaço normado E, tem-se

$$\left\| \sum_{j=0}^{m} x_j - \sum_{j=0}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=m}^{n} \|x_j\| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \|x_j\| := S_m \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\| := M$$

sempre que $m \leq n$. Em particular, se $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então $M < +\infty$. Ocorre que em tais condições, ao fazer "$m \to \infty$", resulta que "$S_m \to 0$" (confira o Exercício 3.65). Logo, por monotonicidade, a sequência das somas parciais que determinam a série $\sum x_n$ é de Cauchy em E. Portanto, se E for um espaço de Banach, a série $\sum x_n$ converge em E. □

Exercício 4.4 (Opcional e *for fun*)**.** Mostre que vale a recíproca, i.e.: se toda série absolutamente convergente converge, então o espaço é de Banach. ■

Observação 4.0.22. Nem toda série convergente é absolutamente convergente. Um modo relativamente rápido de cozinhar um exemplo faz uso da

Proposição 4.0.23 (Opcional)**.** *Se $\langle a_n \rangle_n$ é uma sequência decrescente de números positivos com $a_n \to 0$, então $\sum (-1)^n a_n$ converge em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Chamando $s_n := \sum_{j \leq n} (-1)^j a_j$, verificam-se sem grandes dificuldades as identidades

$$s_{2n} = s_{2n-2} - \underbrace{a_{2n-1} + a_{2n}}_{\leq 0} \quad \text{e} \quad s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0}.$$

Logo, $\langle s_{2n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente, enquanto $\langle s_{2n+1} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente. Ocorre que uma sequência limita a outra de forma apropriada: como $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{n+1}$ com $a_{n+1} \geq 0$, segue que $s_{2n+1} \leq s_{2n}$ para todo n, acarretando $s_1 \leq s_{2n}$ e $s_{2n+1} \leq s_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, existem os limites $\lim_{n \to \infty} s_{2n}$ e $\lim_{n \to \infty} s_{2n+1}$, que coincidem pois

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} s_{2n} - a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} s_{2n} - \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} s_{2n}.$$

O restante segue do que se observou no Exemplo 3.1.23. □

Para o exemplo prometido: a série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ satisfaz as hipóteses da proposição anterior e, portanto, converge; porém, ela não converge absolutamente, já que a série das normas de seus termos é a série harmônica! △

Séries convergentes que não convergem absolutamente são chamadas de **condicionalmente convergentes**. Aqui, a escolha de advérbios ("absolutamente" e "condicionalmente") pode ter chamado a atenção do leitor atento: condicionalmente com respeito a quê? Resposta: a ordenação das parcelas na soma. O leitor interessado pode conferir os Exercícios 4.71 e 4.72.

Definição 4.0.24. Classicamente, para uma sequência de funções $\langle f_n \rangle_n$ da forma $X \to \mathbb{R}$, define-se a *série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ como sendo a sequência de funções $\langle s_n \rangle_n$ em que $s_n := f_0 + \ldots + f_n$ para todo n. ¶

Em outras palavras, isto é *quase* uma série no sentido da Definição 3.1.35: a diferença se deve à exigência feita originalmente de que os termos de uma série fossem tomados num espaço *normado*, ao passo que, acima, os termos (as funções f_n's) foram tomados em $\mathbb{R}^X$, cujas topologias interessantes não provêm de normas[6]. Dada a futilidade da restrição, é lícito investigar a convergência de séries de funções da forma $X \to \mathbb{R}$ com os aparatos apresentados ao longo desta seção[7]. No entanto, como $\mathbb{R}^X$ vem de fábrica com duas noções naturais de convergência, existem, a princípio, dois modos de convergência para séries.

Definição 4.0.25. Com as notações anteriores, a série $\sum f_n$ é (**pontualmente**) **convergente** se existe $f: X \to \mathbb{R}$ tal que $\langle s_n \rangle_n \to f$ pontualmente. Se, adicionalmente, ocorrer $s_n \to f$ unif., diremos que a série $\sum f_n$ **converge uniformemente**. ¶

Exercício 4.5. Com as notações anteriores, mostre que a série $\sum f_n$ converge uniformemente se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \sum_{j=m}^{n} f_j(x) \right| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m \geq N$. Dica: você já fez isso. ■

[6] Exceto quando X é finito – ou *compacto*.

[7] E, para isso, recomenda-se uma breve revisão das discussões feitas na Subseção 3.0.3.

Quando as funções que definem a série são limitadas, passa a fazer sentido investigar a *convergência absoluta* da série no espaço $\mathcal{B}(X)$, já que este é um espaço de Banach. Em particular, neste contexto, a Proposição 4.0.21 tem um corolário que será bastante útil:

Corolário 4.0.26 (Teste M de Weierstrass)**.** *Seja $\langle f_n \rangle_n$ uma sequência de funções reais definidas em X. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ existir $M_n > 0$ com $\|f_n\| \leq M_n$ e $\sum M_n < +\infty$, então a série $\sum f_n$ converge uniformemente. Em particular, se X é espaço topológico e cada f_n é contínua, então $\sum f_n$ é uma função contínua.*

Demonstração. As desigualdades acarretam $\sum \|f_n\| \leq \sum M_n < +\infty$, mostrando que a série $\sum f_n$ converge absolutamente em $\mathcal{B}(X)$ e, portanto, converge em $\mathcal{B}(X)$. O restante é consequência do Teorema 3.0.30. $\square$

Observação 4.0.27. Acima, a convergência absoluta da série $\sum f_n$ se verificou em $\mathcal{B}(X)$, no sentido de que as próprias funções, enquanto elementos de $\mathcal{B}(X)$, constituem uma série absolutamente convergente no espaço normado, o que sugere a terminologia alternativa "*convergência uniformemente absoluta*". Em contrapartida, dada a natureza das funções, também é lícito investigar o *status* das séries $\sum |f_n(x)|$ para cada $x \in X$: em caso de convergência, pode-se dizer que $\sum f_n$ converge "pontual e absolutamente", o que inclusive faz sentido para funções ilimitadas. Em resumo, tem-se o seguinte:

$$\begin{tikzcd}
\sum \|f_n\| < +\infty \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{B}(X) \text{ é de Banach}"] \arrow[d, Rightarrow] & \sum f_n \text{ converge unif.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\forall x \quad \sum |f_n(x)| < +\infty \arrow[r, Rightarrow, "\mathbb{R} \text{ é de Banach}"'] & \sum f_n \text{ converge pont.}
\end{tikzcd}$$

Em geral, nenhuma das implicações é reversível (Exercício 4.68). Todavia, o cenário fica bem mais cômodo nas situações em que X é *compacto*. O leitor apressado pode seguir diretamente para a Seção 4.2 – embora fazer isso sem as terminologias da próxima subseção ou da Seção 4.1 possa ser problemático. △

4.0.1 Fechados (encaixantes)

Na distante Subseção 1.1.1, vimos que a completude de $\mathbb{R}$ (no sentido de Dedekind) impõe certas restrições de cardinalidade: a existência irrestrita de supremos permitiu, no Lema 1.1.32, construir uma injeção da forma $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, assegurando assim que $\mathbb{R}$ não pode ser *pequeno*. Ocorre que esta *nova* noção de completude (no sentido de Cauchy) também impõe restrições de outra natureza.

Definição 4.0.28. Um subconjunto D de um espaço topológico X é **denso** em X se $V \cap D \neq \emptyset$ para qualquer aberto não-vazio $V \subseteq X$. ¶

Moralmente, todo ponto de um espaço topológico pode ser *arbitrariamente aproximado* por elementos de um denso, o que permite pensar em tais subespaços como suficientemente bem espalhados pelo espaço[8].

Exemplo 4.0.29. O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é um típico exemplo de subespaço denso de $\mathbb{R}$: se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto não-vazio, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $(a, b) \subseteq A$ e, por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $a < q < b$, i.e., $\emptyset \neq (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq A \cap \mathbb{Q}$.

[8] O que ficará explicitado no Teorema 4.1.6 – ou, mais especificamente, no Corolário 4.1.7.

Mais geralmente, $\mathbb{Q}^n$ é subespaço denso de $\mathbb{R}^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$: qualquer aberto não-vazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ contém um produto de intervalos abertos não-vazios, digamos $R := \prod_{j=1}^{n} I_j$, com $I_j \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ para cada $j \leq n$, donde segue que $\emptyset \neq R \cap \mathbb{Q}^n \subseteq V \cap \mathbb{Q}^n$. ▲

Exemplo 4.0.30. Num espaço *discreto* X (Definição 2.0.41), o único subespaço denso é o próprio X: se $D \subsetneq X$, então para qualquer $x \notin D$ ocorre $\{x\} \cap D = \emptyset$. ▲

Exemplo 4.0.31. Se $\langle X, d\rangle$ é um espaço métrico sem pontos isolados (e com pelo menos dois elementos), então qualquer subconjunto da forma $X \setminus \{x\}$ é (aberto e) denso em X: se $V \subseteq X$ é um aberto não-vazio, então existe $y \in V \setminus \{x\}$ (pois tanto x quanto y não são isolados), mostrando que $V \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Em particular, se X for infinito, então $X \setminus F$ será denso sempre que F for um subconjunto finito de X (verifique?). ▲

Exemplo 4.0.32. De volta ao Exemplo 4.0.29, uma vez que $\mathbb{Q}$ é enumerável, existe uma bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, o que permite escrever $\mathbb{Q} = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Daí, fazendo $I_n := \left(\varphi(n) - \frac{1}{2^n}, \varphi(n) + \frac{1}{2^n}\right)$ para cada n, resulta que $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ é (aberto! e) denso em $\mathbb{R}$, uma vez que $\mathbb{Q} \subseteq A$.

Note que ao definir o *comprimento* de um intervalo I como $\ell(I) := \sup I - \inf I$, resulta $\ell(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Desse modo, *se fosse possível* definir uma noção de *medida razoável* para certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ (*Spoiler alert*: é possível), valeria algo como $m(A) \leq \sum \ell(I_n) = 4$. Em particular, para $\varepsilon > 0$ fixado, pode-se alterar a definição dos intervalos I_n's de modo a assegurar que o conjunto A correspondente satisfaça $m(A) < \varepsilon$. ▲

Exemplo 4.0.33. Em geral, se o *complementar* de um subconjunto $N \subseteq X$ contém um aberto não-vazio, então N não pode ser denso em X, justamente por ocorrer $N \cap V = \emptyset$. Desse modo, $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{R}$ por exemplo, mas seu complementar é. Em particular, note que o complementar de conjuntos densos não pode conter abertos não-vazios[9]. ▲

Os exemplos acima ajudam a ilustrar os diversos tipos de densos que podemos encontrar em contextos relativamente *ordinários*[10], principalmente no que concerne às diferentes noções de *grandeza*: de um ponto de vista *cardinal*, densos podem ser relativamente pequenos quando comparados ao seu espaço ambiente, como $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, mas também podem ser grandes, como A em $\mathbb{R}$; de um ponto de vista de *medida*, podem ser *pequenos*, como $\mathbb{Q}$ ou A em $\mathbb{R}$, mas também podem ser grandes, como $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ em $\mathbb{R}$; de um ponto de vista métrico, densos são sempre tão grandes quanto os espaços em que vivem.

Exercício 4.6. Para um espaço métrico X, mostre que $\operatorname{diam}(D) = \operatorname{diam}(X)$ para qualquer subespaço denso $D \subseteq X$. Conclua que todo denso de um espaço métrico ilimitado é ilimitado. ■

Há, porém, uma última forma de grandeza verificada pelos *abertos densos* de um espaço, que não costuma ser satisfeita por outros tipos de densos, bastante semelhante ao tipo de grandeza dos conjuntos *cofinitos*. Em geral, um subconjunto C de um conjunto infinito S é xingado de **cofinito** se $S \setminus C$ é um subconjunto infinito de S. Em certo sentido, ser um subconjunto cofinito é algo bem mais forte do que ser meramente infinito: se A e B denotam os subconjuntos dos números pares e ímpares de $\mathbb{N}$, respectivamente, então A e B são ambos infinitos, mas sua interseção é finita (na verdade, vazia). Por outro lado, se C e D são subconjuntos cofinitos de um conjunto infinito S, então $C \cap D$ ainda é cofinito: em outras palavras, são tão grandes que mesmo a interseção entre ambos é grande.

[9]Futuramente, isto será resumido dizendo que o complementar de um denso tem *interior vazio*.

[10]Mas não se engane: em espaços que não verificam a condição de Hausdorff, mesmo conjuntos unitários podem ser densos!

Exercício 4.7. Prove a última afirmação. ■

É precisamente nesse sentido que abertos densos são *grandes*:

Proposição 4.0.34. *Se $A, B \subseteq X$ são subconjuntos abertos e densos de X, então $A \cap B$ ainda é (aberto e) denso em X.*

Demonstração. Fixado um aberto não-vazio $V \subseteq X$, deve-se ter $B \cap V \neq \emptyset$ pela densidade de B. Como A também é denso, tem-se novamente $A \cap (B \cap V) \neq \emptyset$. □

Exemplo 4.0.35. Em $\mathbb{R}$, embora $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sejam densos, a interseção entre ambos é vazia. Por outro lado, como indicado implicitamente pelo Exemplo 4.0.31, a interseção finita de abertos da forma $X \setminus \{x\}$ resulta num aberto denso sempre que X é um espaço métrico infinito sem pontos isolados. ▲

Por indução, a última proposição assegura que a interseção de qualquer número finito de abertos densos ainda resulta num aberto denso. É ao extrapolar esta conclusão para interseções enumeráveis que se chega ao tipo de grandeza fundamental dos espaços métricos completos.

Exercício 4.8 (Importante)**.** Exiba uma família enumerável de abertos densos em $\mathbb{Q}$ cuja interseção seja vazia. Dica: $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\mathbb{Q} \setminus \{q\}$ é aberto denso para todo $q \in \mathbb{Q}$. ■

Exercício 4.9 (Importante)**.** Mostre que $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$ é um subespaço denso de $\mathbb{R}$. ■

A conclusão do último exercício não é mero acidente.

Teorema 4.0.36 (de Baire)**.** *Num espaço métrico completo, a interseção enumerável de abertos densos é um subespaço denso.*

Demonstração. Seja $\langle X, d\rangle$ um espaço métrico completo. Para uma sequência $\langle A_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos de X e um aberto não-vazio $V \subseteq X$, exibiremos $x \in V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. A ideia é quase simples:

✓ por A_0 ser aberto e denso, existem $x_0 \in A_0 \cap V$ e $r_0 \in (0, 1)$ com $B_d[x_0, r_0] \subseteq A_0 \cap V$;

✓ supondo escolhidos $x_j \in X$ e $r_j \in \left(0, \frac{1}{2^j}\right)$ com $B[x_{j+1}, r_{j+1}] \subseteq A_{j+1} \cap B_d(x_j, r_j)$ para todo j com $0 < j \leq n$, o fato de A_{n+1} ser aberto e denso garante que existem $x_{n+1} \in A_{n+1} \cap B_d(x_n, r_n)$ e $r_{n+1} \in \left(0, \frac{r_n}{2}\right)$ com $B_d[x_{n+1}, r_{n+1}] \subseteq A_{n+1} \cap B_d(x_n, r_n)$.

Por construção, $\langle x_n\rangle_n$ é uma sequência de Cauchy em X: para $m \geq n$, $x_m \in B(x_n, r_n)$ e assim $d(x_m, x_n) < r_n \leq \frac{1}{2^n}$. Logo, a completude garante $x \in X$ com $x_n \to x$. Por sua vez, dado que $x_j \in B_d[x_n, r_n]$ para todo $j \geq n$, segue que $\langle x_j\rangle_{j\geq n}$ é uma sequência convergente de pontos de $B[x_n, r_n]$, o que obriga seu limite x a pertencer a $B[x_n, r_n]$: de fato, como a própria métrica é contínua[11], temos

$$d(x, x_n) = d\left(\lim_{j\geq n} x_j, x_n\right) = \lim_{j \geq n} d(x_j, x_n) \leq r_n.$$

Dessa forma, $x \in B_d[x_n, r_n] \subseteq V \cap A_n$ para todo n e, portanto, $x \in V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

[11] A seguir, veremos que isto segue do fato de $B[x_n, r_n]$ ser um subconjunto *fechado* de X.

O argumento utilizado na demonstração acima ilustra um modo bastante comum de utilizar a completude: a fim de mostrar que um certo conjunto C é não-vazio, cozinha-se uma sequência de termos cada vez mais próximos uns dos outros (i.e., de Cauchy), na esperança de ter o limite da sequência dentro de C. Para mais uma ilustração (Proposição 4.0.41), convém introduzir, finalmente, a seguinte

Definição 4.0.37. Um subconjunto F de um espaço topológico X é **fechado** em X se $X \setminus F$ é aberto em X. ¶

Exemplo 4.0.38. *Em espaços métricos, bolas fechadas são fechadas.* Com efeito, para $r > 0$, não é difícil perceber que num espaço métrico $\langle X, d \rangle$,

$$X \setminus B_d[x, r] = \bigcup_{y \notin B_d[x,r]} B_d(y, d(x, y) - r),$$

mostrando que $X \setminus B_d[x, r]$ é uma reunião de abertos de X. Note que isto não foi consequência da gramática, mas sim da definição[12]. Em particular, intervalos fechados são fechados em $\mathbb{R}$. ▲

Na próxima seção exploraremos com mais calma as propriedades dos subconjuntos fechados. Por ora, basta explicitar que a parte final da demonstração do último teorema se deve ao fato de bolas fechadas serem fechadas.

Lema 4.0.39. *Se F é fechado e $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência convergente tal que $x_n \in F$ para todo n, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$. Além disso, se X é um espaço métrico, então vale a volta, i.e.: se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$ sempre que $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência convergente tomada em F, então F é fechado*[13].

Demonstração. Para a primeira parte, basta notar que se $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ não pertence a F, então a hipótese assegura que $U := X \setminus F$ é um aberto *em torno* de x, donde a convergência da sequência permite concluir que existe $N \in \mathbb{N}$ com $x_n \in U$ para todo $n \geq N$, contrariando o modo como a sequência foi tomada. Para a recíproca (com X métrico!), convém proceder pela contrapositiva: se F não é fechado, então $X \setminus F$ não é aberto, donde segue que existe um ponto $x \notin F$ tal que nenhuma bola aberta em torno de x está inteiramente contida em $X \setminus F$; em particular, *para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F$* satisfazendo $d(x_n, x) < \frac{1}{2^n}$, mostrando que $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência convergente de termos de F cujo limite *não* pertence a F. □

Observação 4.0.40 (Opcional: uso implícito do Axioma da Escolha)**.** Na parte final da demonstração anterior, mostrou-se, na verdade, que $B_n := B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \cap F \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o que a princípio assegura apenas a existência de *algum* $y \in B_n$. Embora isto se verifique para todo $n \in \mathbb{N}$, ao *fixar* $x_n \in B_n$ para cada n, o que se faz é *assumir* a existência de uma função $f : \mathbb{N} \to X$ tal que $f(n) \in B_n$ para cada n: efetivamente, f *escolhe* um elemento em cada B_n. Uma vez que não se apresentou um *método* para realizar tais escolhas, o único modo de assegurar a existência de uma função como f é apelar para o Axioma da Escolha (Subseção 0.2.0) – ou algo do tipo. △

[12] Atente-se para o seguinte: a princípio, nada impede que um subconjunto seja simultaneamente aberto e fechado. A vigília para proteger a intuição matemática do léxico usual deve ser constante!

[13] Moralmente, F é "fechado" pela "operação" $\langle x_n \rangle_n \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Proposição 4.0.41 (Fechados encaixantes – versão métrica)**.** *Seja $\langle F_n \rangle_n$ uma sequência decrescente de subconjuntos fechados de um espaço métrico X. Se X é completo e* $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$*, então existe um único ponto em* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$*.*

Demonstração. Pode-se fixar, para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $x_n \in F_n$, o que resulta numa sequência $\langle x_n \rangle_n$ em X que é de Cauchy: para $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$, tem-se $x_n \in F_n \subseteq F_m$ e $x_m \in F_m$, donde segue que $d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_m)$ e, por valer $\operatorname{diam}(F_m) \to 0$, o restante da afirmação segue. Por conta da completude, existe $x \in X$ com $x_n \to x$, ponto que deve pertencer a F_m para todo m: como no último teorema, $\langle x_n \rangle_{n\geq m}$ é uma sequência em F_m que é subsequência de $\langle x_n \rangle_n$, o que permite inferir $\lim\limits_{n\geq m} x_n = x$ (por ser subsequência!) e, por conseguinte, $x \in F_m$ (pois este é fechado!). Finalmente, se $y \in F_m$ para todo m, então $d(x, y) \leq \operatorname{diam}(F_m)$ para todo m e, portanto, $d(x, y) = 0$, i.e., $x = y$. □

Observação 4.0.42 (Importância das hipóteses)**.** Não é possível garantir o resultado anterior sem exigir que os F_n's sejam fechados ou permitindo que $\operatorname{diam}(F_n) \not\to 0$. Por exemplo, com $S_n := \left(0, \frac{1}{2^n}\right)$ para cada n, obtém-se uma sequência $\langle S_n \rangle_n$ decrescente de subconjuntos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(S_n) = 0$, mas $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \emptyset$. Analogamente, com $F_n := [n, +\infty)$ para cada n, $\langle F_n \rangle_n$ é uma sequência decrescente de fechados com $\operatorname{diam}(F_n) = +\infty$ para todo n e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. △

Exemplo 4.0.43 (Opcional: **representação decimal**)**.** Secretamente, fechados encaixantes generalizam (e em certa medida, justificam) o procedimento por meio do qual se atribuem notações decimais a números reais.

Proposição 4.0.44. *Se $\langle r_n \rangle_n$ é uma sequência de números naturais entre* 0 *e* 9*, então* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{10^n}$ *é um número real.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o intervalo $I_n := \left[r_0 + \ldots + \frac{r_n}{10^n}, r_0 + \ldots + \frac{r_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right]$ é fechado, com $\langle I_n \rangle_n$ decrescente (verifique?) e $\operatorname{diam}(I_n) = \frac{1}{10^n} \to 0$. Logo, existe um único $r \in \mathbb{R}$ em $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Daí, não é difícil perceber que $r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{10^n}$. □

O número $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{10^n}$ acima é o que geralmente se denota como "$r_0, r_1 r_2 r_3 \ldots$". Evidentemente, pelas restrições do enunciado, os números da forma acima variam entre 0 (correspondente a $0,000\ldots$) e 10 (correspondente a $9,999\ldots$). Porém, essencialmente o mesmo tipo de argumento permite estender o resultado para sequências $\langle r_n \rangle_n$ em que $r_0 \in \mathbb{Z}$ (por quê?), o que resulta em representações decimais para números reais *ao longo de toda a reta.* De fato:

Exercício 4.10. Mostre que se $r \in \mathbb{R}$, então existem $r_0 \in \mathbb{Z}$ e uma sequência $\langle r_n \rangle_{n>0}$ de números naturais entre 0 e 9 tais que $r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{10^n}$. Dica: supondo $x \geq 0$ para facilitar o raciocínio, a propriedade arquimediana assegura $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_0 \leq r < r_0 + 1$, bem como $r_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ com $r_0 + \frac{r_1}{10} \leq r < r_0 + \frac{r_1}{10} + \frac{1}{10}$, bem como $r_2 \in \{0, \ldots, 9\}$ tal que... ■

Por fim, como a identidade $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0,999\ldots$ nos ensina, a correspondência entre sequências em $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots$ e $\mathbb{R}$ não é injetora, i.e., existem números reais que admitem representações decimais distintas. Todavia, isto raramente acontece[14]. ▲

Observação 4.0.45. O leitor atento pode ter notado que os fechados encaixantes poderiam ser *substituídos* por sequências de Cauchy no exemplo anterior. Isto de fato ocorre, mas por um motivo possivelmente inesperado. △

Exercício 4.11 (Opcional)**.** Suponha que para toda sequência decrescente $\langle F_n \rangle_n$ de fechados não-vazios de X satisfazendo $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ tenha-se um único elemento na interseção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Mostre que X é completo. Dica: para uma sequência de Cauchy $\langle x_n \rangle_n$ no espaço, considere os fechados $F_n := \overline{\{x_m : m \geq n\}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Como última ilustração, vejamos um clássico – que será usado, oportunamente, para garantir a existência de soluções de certos tipos de *equações diferenciais*.

Definição 4.0.46. Para um espaço métrico X, uma função $f : X \to X$ é chamada de **contração** se existir $K \in (0,1)$ com $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y)$ para quaisquer $x, y \in X$. ¶

Teorema 4.0.47 (do ponto fixo de Banach – adiável)**.** *Sejam X um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma função. Se f é uma contração, então f admite precisamente um* ***ponto fixo****, i.e., existe um único $x \in X$ satisfazendo $f(x) = x$.*

Demonstração. Primeiro, observe que, caso exista, o ponto fixo de f é único: se *existissem* pontos fixos distintos x e y, resultaria $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y) < d(x,y)$. Agora, para a existência: fixado um ponto $y \in X$ qualquer, mostraremos que a sequência $(f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, onde $f^0(y) := y$ e $f^{n+1}(y) := f(f^n(y))$ para cada $n > 0$. Ora, temos

$$d(f^n(y), f^{n+1}(y)) \leq Kd(f^{n-1}(y), f^n(y)) \leq \ldots \leq K^n d(y, f(y)),$$

de modo que para $n, p \in \mathbb{N}$ com $p > 0$, isso nos dá

$$d(f^n(y), f^{n+p}(y)) \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} d(f^j(y), f^{j+1}(y)) \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} K^j d(y, f(y)) \leq \sum_{m\geq n} K^m d(y, f(y)).$$

Como $\sum_{m\geq n} K^m$ converge para 0 conforme $n \to \infty$ (Exercício 3.65 + Proposição 3.1.48), segue que a sequência é de Cauchy. O restante fica a cargo do leitor. □

Exercício 4.12. Complete os detalhes da demonstração acima. Dica: use a continuidade de f para concluir que o limite da sequência é ponto fixo de f. ■

4.1 Jargões básicos

Antes de trazer para a discussão as noções de *compacidade* e *conexidade* – que, futuramente, serão vistas como desdobramentos da completude (no caso de $\mathbb{R}$) –, convém introduzir o restante das terminologias topológicas elementares a fim de tirar maior proveito do que virá pela frente.

[14]Exercício 4.73.

Definição 4.1.0. Sejam X um espaço topológico, $S \subseteq X$ um subconjunto e $p \in X$ um ponto. Diremos que p é:

(i) **ponto interior** a S se existir um aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ e $V \subseteq S$;

(ii) **ponto aderente** a S se todo aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ for tal que $V \cap S \neq \emptyset$.

Quando o espaço X estiver claro pelo contexto, a coleção dos pontos interiores a S será denotada por $\operatorname{int}(S)$ e xingada de **interior de** S, ao passo que a família dos pontos aderentes a S será indicada por $\overline{S}$ e chamada de **fecho**[15] de S. Em situações mais específicas, interior e fecho serão denotados por notações que explicitem a topologia considerada. ¶

Exercício 4.13. Mostre que $\operatorname{int}(S) \subseteq S \subseteq \overline{S}$ para qualquer $S \subseteq X$. ■

Exemplo 4.1.1 (**Importante**: acumulação vs. aderência)**.** É comum confundir pontos aderentes e pontos de acumulação (Definição 3.0.12), mas as duas noções diferem: se $p \in S$, então o próprio p serve como testemunha para o critério de aderência, já que $V \cap S \neq \emptyset$ para qualquer aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$; por outro lado, *nem todo* $p \in S$ será ponto de acumulação de S, já que o critério de acumulação exige uma testemunha diferente de p. Por exemplo: para $S := [0,1] \cup \{2\}$ em $\mathbb{R}$, $2 \in \overline{S}$, mas 2 não é ponto de acumulação de S.▲

Exemplo 4.1.2 (**Importante**: $\operatorname{int}(S) \neq S$)**.** Entre principiantes costuma ser bastante comum pensar que todo elemento de um conjunto S é ponto interior a S, o que é falso. Por exemplo: $0 \in [0,1)$, mas $0 \notin \operatorname{int}([0,1))$, já que todo aberto $V \subseteq \mathbb{R}$ com $0 \in V$ também contém pontos negativos. Este é um bom momento para relembrar algo importante: por mais que as palavras usadas para nomear propriedades matemáticas tenham significados externos, deve-se sempre levar em conta a definição explícita de uma terminologia – e não o que você *acha* que a palavra significa. ▲

Exemplo 4.1.3 (Primeiras traduções métricas)**.** Em virtude da natureza dos abertos usuais de um espaço métrico, as definições de ponto interior e aderente admitem outras traduções num espaço métrico $\langle X, d\rangle$:

(i) $p \in S$ é *interior* a S se existir $r > 0$ tal que $B(p,r) \subseteq S$;

(ii) $p \in X$ é *aderente* a S se para todo $r > 0$ existir $s \in B(p,r) \cap S$.

Secretamente, isto se deve ao fato de que as bolas abertas constituem uma *base de abertos* para a topologia de um espaço métrico, mas a discussão desse tipo de tratamento pode esperar até o final da seção. ▲

Exemplo 4.1.4 (Opcional: dimensão vs. interior)**.** *Num espaço normado* $\langle E, \|\cdot\|\rangle$*, qualquer subespaço vetorial próprio* $S \neq E$ *tem, necessariamente, interior vazio.* Com efeito, se existem $x \in S$ e $r > 0$ com $B(x,r) \subseteq S$, então todo $v \in E \setminus \{0\}$ também é membro de S, pois $x + \frac{r}{2\|v\|}v \in B(x,r)$ e daí $\frac{r}{2\|v\|}v \in S$, donde segue que $v \in S$. Moralmente, os abertos não-vazios "ocupam" todas as dimensões disponíveis num espaço normado. ▲

Exemplo 4.1.5 (Aderência e sequências convergentes)**.** Sempre que $\langle x_n\rangle_n$ é uma sequência convergente num espaço X, ocorre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Por exemplo, em $\mathbb{R}$, tem-se $0 \in \overline{\left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}}$: dado qualquer aberto $V \subseteq \mathbb{R}$ com $0 \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq V$ e, por ocorrer $\frac{1}{2^n} \to 0$, deve existir $N \in \mathbb{N}$ com $\left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$, donde em particular resulta $V \cap \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} \neq \emptyset$. ▲

[15] Alternativamente: **aderência** de S.

Na verdade, quando a topologia de X é induzida por uma métrica, a recíproca é verdadeira:

Teorema 4.1.6. *Sejam X um espaço métrico e $S \subseteq X$ um subconjunto. Para $x \in X$, são equivalentes:*

(i) $x \in \overline{S}$;

(ii) *existe uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ com $x_n \to x$ e $x_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A argumentação para (i) ⇒ (ii) já está sugerida no exemplo anterior. Para a recíproca, como $x \in \overline{S}$, a definição assegura que $S \cap V \neq \emptyset$ para *qualquer* aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$. Em particular, $S_n := S \cap B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \neq \emptyset$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo, é *lícito escolher* $x_n \in S_n$ para cada n, o que evidentemente resulta em $x_n \to x$. □

Exercício 4.14. Reescreva o resultado anterior para subconjuntos de $\mathbb{R}$. Faça desenhos. ■

Assim, em espaços métricos, a definição *topológica* de ponto aderente pode ser substituída pela caracterização do último teorema, aparentemente menos abstrata e mais palpável. Um corolário bastante útil é o seguinte:

Corolário 4.1.7. *Um subconjunto D de um espaço métrico X é denso se, e somente se, para todo $x \in X$ existe uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ em D com $x_n \to x$.*

Demonstração. Basta aliar o teorema anterior ao próximo exercício. □

Exercício 4.15. Mostre que um subconjunto D de um espaço (topológico!) é denso se, e somente se, $\overline{D} = X$. ■

Exemplo 4.1.8 (Funções contínuas e densos – parte I)**.** *Se f e g são funções contínuas da forma $X \to \mathbb{R}$, com X métrico, e para um subespaço denso $D \subseteq X$ ocorre $f|_D = g|_D$, então $f = g$*: ora, cada $x \in X$ é limite de alguma sequência $\langle x_n \rangle_n$ em D, donde segue que

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(x).$$

O leitor não deve ter dificuldades para concluir que o mesmo raciocínio valeria se $\mathbb{R}$ fosse substituído por um espaço de Hausdorff qualquer. ▲

Interior e fecho se relacionam com abertos e fechados, respectivamente, no seguinte sentido: $\operatorname{int}(S)$ é o *maior* aberto contido em S, enquanto $\overline{S}$ é o *menor* fechado que contém S. Vejamos isso em detalhes:

Teorema 4.1.9. *Para um subconjunto S de um espaço topológico X, vale o seguinte:*

(i) *$\operatorname{int}(S)$ é aberto e se $V \subseteq X$ é aberto com $U \subseteq S$, então $U \subseteq \operatorname{int}(S)$;*

(ii) *$\overline{S}$ é fechado e se $F \subseteq X$ é fechado com $S \subseteq F$, então $\overline{S} \subseteq F$.*

Demonstração. Para (i), basta notar que $\operatorname{int}(S)$ é reunião dos abertos contidos em S: explicitamente, $p \in \operatorname{int}(S)$ se, e somente se, existe um aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ e $V \subseteq X$, o que por sua vez equivale a dizer que $p \in \bigcup\{V \subseteq X\colon V \text{ é aberto e } V \subseteq X\}$. De modo dual (e pelo próximo exercício), o item (ii) segue do fato de $\overline{S}$ ser a interseção dos fechados que contêm S: se $p \notin \overline{S}$, então algum aberto $V \subseteq X$ satisfaz $p \in V$ com $V \cap S = \emptyset$, mostrando que $X \setminus V$ é um fechado que contém S mas não *contém* p; reciprocamente, se $F \subseteq X$ é fechado com $S \subseteq F$ e $p \notin F$, então $V := X \setminus F$ é um aberto com $p \in V$ e $V \cap S = \emptyset$, i.e., $p \notin \overline{S}$. O leitor pode cuidar dos detalhes restantes. □

Exercício 4.16. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ a família dos subconjuntos fechados de X. Mostre que valem as seguintes afirmações:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ ($\emptyset$ e X são fechados);

(ii) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$ (a reunião de dois fechados é fechada);

(iii) se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{H} \neq \emptyset$, então $\bigcap \mathcal{H} \in \mathcal{F}$ (a interseção arbitrária de fechados é fechada).

Em particular, use o último item para concluir que $\overline{S}$ é fechado no teorema anterior. Dica: use o Lema 0.1.31. ■

Observação 4.1.10 (Máximos e mínimos disfarçados)**.** No último teorema, os itens (i) e (ii) *caracterizam* o interior e o fecho de S, respectivamente. Por exemplo, no caso do item (i), estabelece-se que $\operatorname{int}(S)$ é o maior elemento (no sentido da inclusão) da família $\mathcal{A}_S$ composta pelos abertos de X contidos em S e, como já sabemos, o maior elemento de um conjunto com respeito à uma ordem parcial é único (caso exista). Analogamente, o item (ii) explicita $\overline{S}$ como o menor elemento de uma família. △

Em resumo, para um subconjunto S,

(i) $\operatorname{int}(S)$ é

- ✓ a coleção dos pontos contidos em abertos de X que estão contidos em S,
- ✓ a reunião dos abertos de X contidos em S,
- ✓ o maior aberto de X contido em S;

(ii) $\overline{S}$ é

- ✓ a coleção dos pontos cujos abertos interceptam S;
- ✓ a interseção dos fechados de X que contêm S;
- ✓ o menor fechado de X que contém S.

Naturalmente, situações diferentes podem se adequar de maneiras diversas a cada uma das manifestações acima[16], razão pela qual recomenda-se que o leitor evite preferências. Como ilustração, vejamos a próxima

Proposição 4.1.11. *Para um subconjunto* $S \subseteq X$*, vale* $\operatorname{int}(S) = X \setminus \overline{X \setminus S}$.

Demonstração. Por meio da 1ª caracterização: se $x \in \operatorname{int}(S)$, então $x \in V$ para um aberto $V \subseteq S$, logo $V \cap (X \setminus S) = \emptyset$, mostrando que $x \notin \overline{X \setminus S}$; reciprocamente, se $x \notin \overline{X \setminus S}$, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $V \cap (X \setminus S) = \emptyset$, acarretando $V \subseteq S$ e, consequentemente, $x \in \operatorname{int}(S)$. A argumentação por meio da 2ª caracterização é análoga: o ponto chave é perceber a equivalência "$V \subseteq S \Leftrightarrow V \cap (X \setminus S) = \emptyset$".

Com a última caracterização: $\overline{X \setminus S}$ é fechado, logo $X \setminus \overline{X \setminus S}$ é aberto; $X \setminus S \subseteq \overline{X \setminus S}$, logo $X \setminus \overline{X \setminus S} \subseteq X \setminus (X \setminus S) = S$; se $V \subseteq X$ é aberto com $V \subseteq S$, então $X \setminus V$ é fechado com $X \setminus S \subseteq X \setminus V$, logo $\overline{X \setminus S} \subseteq X \setminus V$ e, por conseguinte, $V \subseteq X \setminus \overline{X \setminus S}$; portanto, $X \setminus \overline{X \setminus S}$ é o maior aberto contido em S, ou seja, $\operatorname{int}(S) = X \setminus \overline{X \setminus S}$. □

Exercício 4.17 (Opcional)**.** Demonstre a proposição acima usando explicitamente as caracterizações métricas para interior e fecho apresentadas no Exemplo 4.1.3. ■

[16] Que, aliás, não esgotam as caracterizações possíveis para fecho e interior, como sugerido pelo Exemplo 4.1.5. Isto será retomado na Observação 4.1.12 a seguir.

Assim, uma atividade tediosa, mas edificante para principiantes, consiste em traduzir argumentos escritos em termos de uma caracterização para outra. Em todo caso, no próximo exercício, o leitor é livre para escolher a abordagem que quiser.

Exercício 4.18. Sejam X um espaço topológico[17] e $S, T \subseteq X$ subconjuntos quaisquer.

a) Mostre que se $S \subseteq T$, então $\text{int}(S) \subseteq \text{int}(T)$ e $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

b) Mostre que $\text{int}(S \cap T) = \text{int}(S) \cap \text{int}(T)$ e $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.

c) Mostre que S é aberto se, e somente se, $\text{int}(S) = S$.

d) Mostre que T é fechado se, e somente se, $\overline{T} = T$. ■

Observação 4.1.12 (**Importante**: aderência e convergência)**.** O Teorema 4.1.6, que caracteriza o fecho em termos de limites de sequências para espaços métricos, também pode ser usado para resolver as partes correspondentes ao fecho nos itens (a) e (b) do exercício anterior <u>em espaços métricos</u>: por exemplo, para o item (a), se $x_n \to x$ com $x_n \in S$ para todo n, então $x_n \in T$ para todo n, mostrando que $x \in \overline{T}$. No entanto, este comportamento não é válido em geral (Exercícios 4.75 e 4.76).

Opcional: a caracterização se recupera para espaços topológicos quaisquer ao se substituir sequências por *nets*. Com efeito, assim como no Teorema 4.1.6, se $x \in \overline{S}$, então para todo aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ deve ocorrer $V \cap S \neq \emptyset$, o que permite escolher $x_V \in S \cap V$ para cada aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$, processo que resulta na *net* $\langle x_V \rangle_{V \in \mathbb{D}}$ em que $\mathbb{D} := \{V \subseteq X : V \text{ é aberto e } p \in V\}$ é dirigido pela relação de inclusão reversa $(V \preceq U \Leftrightarrow U \subseteq V)$. A recíproca fica a cargo do leitor. △

O Exemplo 4.1.1 já explicitou a diferença entre pontos de acumulação e pontos aderentes. Ao tratar pontos de acumulação por meio de sequências, chega-se na seguinte adaptação do Teorema 4.1.6.

Exercício 4.19. Sejam $\langle X, d \rangle$ um espaço métrico, $S \subseteq X$ um subconjunto e $p \in S$ um ponto. Mostre que p é ponto de acumulação de S se, e somente se, existe uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ em $S \setminus \{p\}$ com $x_n \to p$. Dica: imite a demonstração do Teorema 4.1.6 para escolher bolas abertas *encaixantes* espertas. ■

Observação 4.1.13. O restante desta subseção é **opcional**, mas **recomendado**. △

A dica para o exercício anterior esconde um tipo de animal que tem se mantido incógnito (mas ativo) desde o Capítulo 2: *bases* e *bases locais*. Para motivar as ideias, reveja o comentário que sucede o Exercício 2.10.

Definição 4.1.14. Sejam $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ um espaço topológico, $x \in X$ um ponto fixado e $\mathcal{T}_x$ a coleção dos abertos de X que contêm x.

(*i*) Uma família $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ é **base para *o* espaço**[18] X se todo aberto de $\mathcal{T}$ é reunião de abertos de $\mathcal{B}$.

(*ii*) Uma família $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{T}_x$ é **base local** em x se todo aberto de $\mathcal{T}$ que contém x também contém algum aberto de $\mathcal{C}_x$. ¶

[17]Se preferir, num primeiro momento, pode assumir $X := \mathbb{R}$, até perceber que os argumentos são idênticos aos do caso topológico.

[18]Também é comum dizer que $\mathcal{B}$ é base para a *topologia do espaço*.

Explicitamente, os abertos de uma base funcionam como *testemunhas de abertura*, no sentido de que um subconjunto A do espaço X é aberto se, e somente se, todo ponto $x \in A$ tem uma *testemunha* $B \in \mathcal{B}$ satisfazendo $x \in B$ e $B \subseteq A$.

Exemplo 4.1.15. As bolas abertas de um espaço métrico $\langle X, d\rangle$ constituem uma base para sua topologia, ao passo que para $x \in X$ fixado, $\mathcal{C}_x := \{B(x,r) : r > 0\}$ é uma base local em x. Em particular, $\mathcal{B} := \{(r,s) : r, s \in \mathbb{R} \text{ e } r < s\}$ é uma base para $\mathbb{R}$. ▲

Exemplo 4.1.16. Os intervalos abertos de $\overline{\mathbb{R}}$ (Definição 2.0.2) constituem uma base para a topologia da reta estendida. Por sua vez, $\{[-\infty, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é uma base local em $-\infty$, enquanto $\{(\alpha, +\infty] : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é uma base local em $+\infty$. Para $x \in \mathbb{R}$, recai-se essencialmente no caso anterior (por quê?). ▲

Exemplo 4.1.17. Para espaços topológicos X e Y, os *retângulos* da forma $U \times V$, com $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ abertos, constituem uma base para a topologia usual do produto $X \times Y$: com efeito, $A \subseteq X \times Y$ é aberto se, e somente se, para cada $p := \langle x, y\rangle \in A$ existem $U_p \subseteq X$ e $V_p \subseteq Y$ abertos com $\langle x, y\rangle \in U_p \times V_p \subseteq A$, donde segue que $A = \bigcup_{p \in A} U_p \times V_p$.▲

Observação 4.1.18 (Alerta). Diferente das *homônimas* bases no contexto da Álgebra Linear, um espaço topológico admite bases e bases locais com cardinalidades distintas: basta ver, por exemplo, que $\mathcal{B}' := \{(r,s) : r, s \in \mathbb{Q}\}$ é base enumerável para a topologia usual de $\mathbb{R}$, enquanto a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ sugerida no Exemplo 4.1.15 tem a mesma cardinalidade da reta real[19]. No cenário topológico, bases e bases locais se assemelham mais diretamente com a noção de *geradores*, o que se revela como um dos motivos pelos quais muitos argumentos sobre continuidade e convergência em espaços métricos podem ser elaborados usando-se apenas bolas abertas ou sequências. △

Exercício 4.20. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.

a) Se $\mathcal{B}_x$ e $\mathcal{G}_y$ são bases locais em x e $y := f(x)$, respectivamente, mostre que f é contínua em x, se e somente se, para todo $G \in \mathcal{G}_y$ existe $B \in \mathcal{B}_x$ com $f[B] \subseteq C$.

b) Se $\mathcal{G}$ é base de Y, mostre que f é contínua se, e somente se, $f^{-1}[G]$ é aberto em X para todo $G \in \mathcal{G}$.

c) Se $S \subseteq X$ e $\mathcal{B}_x$ é uma base local em x, mostre que $x \in \overline{S}$ se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}_x$ ocorre $B \cap S \neq \emptyset$. ■

Proposição 4.1.19. *Se $x \in X$ tem uma base local enumerável, então uma função $f : X \to Y$ é contínua em x se, e somente se, $f(x_n) \to f(x)$ sempre que $\langle x_n\rangle_n$ é uma sequência em X que converge para x.*

Antes de enfrentar a demonstração, recorde-se do Teorema 3.1.70, em que se mostrou que, de modo geral, f é contínua em x se $f(x_d) \to f(x)$ sempre que $x_d \to x$. No presente caso, a *vantagem* está na *suficiência* das sequências.

Demonstração. Para facilitar o restante do argumento, observe que não há perda de generalidade em assumir que uma base local enumerável para x seja, adicionalmente, decrescente: ora, se $\mathcal{B}_x := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base local em x, então $\left\{\bigcap_{j \leq n} B_j : n \in \mathbb{N}\right\}$ ainda é uma base local em x, enumerável e decrescente.

[19] Lembre-se: se S é infinito, então $|S| = |S \times S|$.

Agora, se f *não* é contínua em x, então existe um aberto $V \subseteq Y$ com $f(x) \in V$ e tal que para nenhum aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ vale $f[U] \subseteq V$. Em particular, ao aplicar tal raciocínio a cada aberto B_n da base local, pode-se *escolher* $x_n \in B_n$ tal que $f(x_n) \in V$. Para encerrar, note que $x_n \to x$ e $f(x_n) \not\to f(x)$: dado qualquer aberto W em torno de x, existe $N \in \mathbb{N}$ com $B_N \subseteq W$ e, por valer $B_n \subseteq B_N$ para todo $n \geq N$, resulta $x_n \in W$ sempre que $n \geq N$. $\square$

Todo ponto num espaço métrico tem base local enumerável: basta considerar as bolas centradas no ponto e com raios da forma $\frac{1}{2^n}$ para $n \in \mathbb{N}$, por exemplo. Como a proposição acima revela, este é o motivo pelo qual funções contínuas entre espaços métricos podem ser *caracterizadas* por meio de sequências convergentes. Apesar disso, cabe o alerta: nem todo espaço métrico tem *base enumerável*: ao considerar $\mathbb{R}$ com a métrica zero-um, por exemplo, segue que $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ é a *menor* base *possível* para a topologia discreta induzida por tal métrica. Como veremos oportunamente, em espaços métricos, bases estão intimamente relacionadas aos subespaços densos.

4.2 Compacidade

A origem da definição abstrata de continuidade revela uma intenção: abstrair em linguagem formal e sem as muletas da intuição *gráfica* o significado de "desenhar uma linha sem tirar o lápis do papel". Porém, o inferno está cheio de boas intenções ou, em outras palavras: por que a definição de continuidade modela o que se espera?

Como $\mathbb{R}$ é *nosso* modelo fundamental do *contínuo*, um modo de responder à pergunta anterior consiste em *analisar* funções contínuas da forma $X \to \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$, pois tais funções abstraem justamente os gráficos traçados no plano. Se tais funções se comportarem como os objetos empíricos que as motivaram, teremos indicativos de que a definição é razoável, no sentido de que parece modelar aquilo que se espera. Nesse sentido, a propriedade conhecida como *compacidade* dá fortes indícios de que nosso modelo é bastante acertado.

4.2.0 Cinquenta tons de compacidade

O primeiro fenômeno que analisaremos se refere à existência de *máximos* e *mínimos*, no sentido da próxima

Definição 4.2.0. Sejam X um conjunto qualquer e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função.

(i) Diz-se que $p \in X$ é um **máximo** da função f se $f(p) = \max \mathrm{im}(f)$, i.e., se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in X$.

(ii) Diz-se que $p \in X$ é um **mínimo** da função f se $f(p) = \min \mathrm{im}(f)$, i.e., se $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. ¶

Agora, fazendo $X := [0, 1]$, por exemplo, consideremos a pergunta: se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo?

Se pensarmos na função f como um gráfico desenhado numa folha de papel, é fácil perceber que a resposta terá que ser sim: como o traçado deve começar em algum ponto da linha $\{0\} \times \mathbb{R}$ e terminar em algum ponto da linha $\{1\} \times \mathbb{R}$, a *única maneira* de fazer uma função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *ilimitada* seria com a ocorrência de um ponto $p \in [0,1]$ e uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ em $[0,1]$ com $x_n \to p$ e $f(x_n) \to \pm\infty$, o que violaria a condição de continuidade, segundo a qual deve-se ter $f(x_n) \to f(p) \in \mathbb{R}$.

O argumento acima apela para a intuição geométrica de traçados contínuos em folhas de papel. Porém, no contexto abstrato, a existência do ponto p não é óbvia e *precisa* ser demonstrada. O fato de que tal demonstração existe é um dos *indicativos* de que a definição de continuidade é *boa*[20]. Em vez de fazer isso de modo artesanal, apelaremos para a tecnologia[21].

Definição 4.2.1. Fixado um espaço topológico X, uma família $\mathcal{U}$ de abertos de X é uma **cobertura aberta** para X se ocorrer $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. ¶

Exemplo 4.2.2. A família $\mathcal{U} := \{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta para $\mathbb{R}$, assim como $\mathcal{V} := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b\}$. ▲

Exemplo 4.2.3. A família $\mathcal{U} := \{[0,a) : a \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < a < 1\} \cup \{(b,1] : b \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < b < 1\}$ é uma cobertura aberta para $[0,1]$. Note que os elementos de $\mathcal{U}$ são abertos de $[0,1]$, mas não são abertos de $\mathbb{R}$. ▲

Exemplo 4.2.4. *Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura para um espaço métrico X, então $\mathcal{U}$ admite um* refinamento *por bolas abertas*. No presente contexto, um **refinamento** de uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ para um espaço é *outra* cobertura aberta $\mathcal{V}$ com a seguinte propriedade: para cada $U \in \mathcal{U}$ existe algum $V \in \mathcal{V}$ com $V \subseteq U$; se adicionalmente, ocorrer $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, diz-se que $\mathcal{V}$ é **subcobertura** de $\mathcal{U}$. Agora, para verificar a afirmação, note que para cada $x \in X$, pode-se tomar $U_x \in \mathcal{U}$ com $x \in U_x$ bem como $r_x > 0$ tais que $x \in B(x, r_x) \subseteq U_x$, donde segue que $\mathcal{V} := \{B(x, r_x) : x \in X\}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$. ▲

Exercício 4.21 (Opcional)**.** Adapte o argumento anterior para mostrar que se $\mathcal{B}$ é base para um espaço *topológico* X e $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta para X, então $\mathcal{U}$ admite um refinamento por abertos de $\mathcal{B}$. ■

Definição 4.2.5. Um espaço topológico X é **compacto** se toda cobertura aberta tem subcobertura finita. ¶

Exemplo 4.2.6. A reta real não é compacta. De fato, a cobertura $\mathcal{U}$ indicada no Exemplo 4.2.2 não admite subcobertura finita: com efeito, para $n_0, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, ao tomar $n := \max\{n_j : j \leq m\}$ verifica-se

$$\bigcup_{j \leq m} (-n_j, n_j) = (-n, n),$$

de modo que $n + 1 \in \mathbb{R} \setminus (-n, n)$. ▲

[20] Mas não é ótima pois, como veremos, a definição de continuidade ainda dá margem para comportamentos *patológicos*, no sentido de que não são replicáveis no papel. Isso não torna a definição errada ou algo do tipo, mas evidencia que modelos (abstratos) não são a mesma coisa que os objetos modelados.

[21] Amantes de uma vida simples podem consultar o Exercício 4.65.

Exemplo 4.2.7. *Um espaço discreto é compacto se, e somente se, é finito.* É claro que espaços finitos (discretos ou não) são compactos. Para a recíproca, basta notar que se X é discreto, então $\{\{x\} : x \in X\}$ é uma cobertura aberta para X, donde a adição da compacidade permite concluir que X é finito (por quê?). ▲

Exemplo 4.2.8. *Se $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência em X que converge para $x \in X$, então $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é compacto com a topologia herdada de X*: com efeito, se $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta para K, então para cada $V \in \mathcal{V}$ existe um aberto $U_V \subseteq X$ tal que $V = U_V \cap K$ e, em particular, para algum desses V's ocorre $x \in U_V$, donde a convergência da sequência assegura $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_V$ para todo $n \geq N$, de maneira que restam apenas finitos pontos em K para serem cobertos por membros de $\mathcal{V}$. Note que, na prática, poderíamos ter começado o argumento com uma coleção $\mathcal{U}$ de abertos de X satisfazendo $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. ▲

Observação 4.2.9 (Compacidade de subespaços)**.** O exemplo anterior ilustrou uma situação típica: fixados um espaço topológico X e um subespaço $Y \subseteq X$, na verificação da (possível) compacidade de Y, a rigor, deve-se tomar uma cobertura arbitrária *por abertos de Y* a fim de obter uma subcobertura finita. Todavia, tal cobertura tem por membros subconjuntos abertos em Y, que são da forma $V \cap Y$ com $V \subseteq X$ aberto. Logo, em tal cenário, a preocupação com essas interseções pode ser ignorada. △

Exercício 4.22. Seja X um espaço topológico. Mostre que um subconjunto $Y \subseteq X$ é compacto se, e somente se, para toda coleção $\mathcal{V}$ de abertos de X com $Y \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ existem $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ tais que $Y \subseteq V_0 \cup \ldots \cup V_n$. ■

Em certo sentido, espaços compactos se comportam quase tão bem quanto espaços finitos, o que frequentemente garante propriedades fundamentais.

Exemplo 4.2.10. Pode-se mostrar diretamente que intervalos *fechados* e *limitados*, i.e., da forma $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$, são compactos. Embora seja edificante fazer isso pelo menos uma vez na vida (Exercício 4.78?), para subespaços de $\mathbb{R}$ isto vale bem mais geralmente. ▲

Teorema 4.2.11 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Para um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes:*

(i) *K é compacto;*

(ii) *K é fechado e limitado;*

(iii) *todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K;*

(iv) *toda sequência de K tem subsequência que converge em K.*

Demonstração. Para mostrar que (i) ⇒ (ii), deve-se mostrar que se K é compacto, então:

✓ *K é limitado*, o que segue diretamente da definição ao se considerar cobertura aberta $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$;

✓ *K é fechado*, o que vale em geral[22].

De fato, se $x \notin K$, então para cada $y \in K$ pode-se tomar (intervalos) abertos $A_y, B_y \subseteq \mathbb{R}$ tais que $x \in A_y, y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$ (lembre-se da Definição 3.1.0!). Logo, a família $\{B_y : y \in K\}$ é uma coleção de abertos que cobre K, donde a compacidade permite tomar $y_0, \ldots, y_n \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j \leq n} B_{y_j}$. Daí, não é difícil perceber que $U := \bigcap_{j \leq n} A_{y_j}$ é um aberto com $x \in U$ e $U \subseteq \mathbb{R} \setminus K$, o que garante que $\mathbb{R} \setminus K$ é aberto (Lema 2.1.2).

[22] Para espaços de Hausdorff.

Para (ii) $\Rightarrow$ (iii), tomemos um subconjunto infinito $A \subseteq K$ e uma sequência *injetiva* $\langle x_n \rangle_n$ em A. Por K ser limitado, segue que $\langle x_n \rangle_n$ é limitada, donde o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante uma subsequência $\langle x_{n_k} \rangle_k$ que converge para algum $x \in \mathbb{R}$. Como K também é fechado, resulta que x deve pertencer a K. Finalmente, pelo modo com que a sequência foi tomada, conclui-se que x é ponto de acumulação de A (Exercício 4.19).

Para (iii) $\Rightarrow$ (iv), fixada uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ de K, dois casos podem ocorrer:

- ✓ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ pode ser finito, e daí basta tomar a subsequência constante formada por algum termo que se repete infinitamente;
- ✓ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ pode ser infinito, e daí a hipótese garante um ponto de acumulação x em K, donde é fácil obter uma subsequência convergente.

O argumento para (iv) $\Rightarrow$ (i) é o mais indireto, e depende de dois passos intermediários.

(a) *Se vale (iv), então toda coleção enumerável $\mathcal{U}$ de abertos de $\mathbb{R}$ com $K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ tem subcoleção finita que cobre K.*

Com efeito, chamando $\mathcal{U} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ e supondo que tal família não tem *subcobertura finita*, pode-se tomar $x_n \in K \setminus \bigcup_{j \leq n} U_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o que resulta numa sequência $\langle x_n \rangle_n$ que não tem subsequência convergente em K: de fato, se $x \in K$, então $x \in U_j$ para algum j, e daí $x_n \notin U_j$ para todo $n \geq j$.

(b) *Se $S \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{U}$ é uma coleção de abertos de $\mathbb{R}$ com $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, então existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.*

De fato, para cada $x \in S$, pode-se tomar um aberto $U_x \in \mathcal{U}$ e números racionais $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$ com $a_x < b_x$ e $x \in (a_x, b_x) \subseteq U_x$.

Como a família $\mathcal{B} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$ é enumerável[23], resulta que a família $\mathcal{C} := \{(a_x, b_x) : x \in S\}$ também é enumerável, já que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Reescrevendo $\mathcal{C} := \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S$ com $(a_n, b_n) \subseteq U_{x_n}$, e daí não é difícil perceber que $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{x_n}$, como desejado.

Finalmente, das duas afirmações anteriores, segue que qualquer cobertura aberta de K admite subcobertura finita: pelo segundo item, uma cobertura arbitrária deve ter uma subcobertura enumerável e, pelo primeiro item, tal subcobertura enumerável *terá* uma subcobertura finita. $\square$

Exercício 4.23 (Opcional)**.** Mostre que a mesma caracterização vale para os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Para isso, observe os pontos a seguir.

a) Note que $(i) \Rightarrow (ii)$ vale em geral, no sentido de que se X é métrico (resp. de Hausdorff) e $K \subseteq X$ é compacto, então K é limitado (resp. fechado).

b) Para $(ii) \Rightarrow (iii)$, considere $\mathbb{R}^n$ munido da *norma euclidiana*[24], de maneira que se $\langle x_m \rangle_m$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$, então $\langle x_{m_k}(i) \rangle_m$ é limitada em $\mathbb{R}$ para qualquer subsequência $\langle x_{m_k} \rangle_k$ de $\langle x_m \rangle_m$ e $i \leq n$, o que permite aplicar sucessivamente o Teorema de Bolzano-Weierstrass.

c) Mostre que os argumentos para $(iii) \Rightarrow (iv)$ valem se X for métrico.

[23] Pois $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é enumerável.

[24] Por ora. Em breve veremos que qualquer norma serve.

d) Observe que a parte (a) do argumento para $(iv) \Rightarrow (i)$ vale em geral.

e) Finalmente, a parte (b) do argumento para $(iv) \Rightarrow (i)$ também se aplica, substituindo-se $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q}^n$, que ainda é enumerável e denso em $\mathbb{R}^n$, quando este é munido da topologia induzida pela norma euclidiana. ■

A caracterização dos compactos de $\mathbb{R}$ permite obter uma demonstração muito rápida para o clássico *Teorema de Weierstrass*, que garante a existência de máximos e mínimos globais em funções contínuas definidas em compactos.

Lema 4.2.12. *Sejam K um espaço compacto $f\colon K \to Y$ uma função. Se f é contínua, então* $\operatorname{im}(f)$ *é subespaço compacto de Y.*

Demonstração. Ora, se $\mathcal{V}$ é uma coleção de abertos de Y com $\operatorname{im}(f) \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$, então $K \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}[V]$, com cada $f^{-1}[V]$ aberto em virtude da continuidade de f. Daí, por K ser compacto, existem $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j\leq n} f^{-1}[V_j]$ e, consequentemente, $\operatorname{im}(f) \subseteq V_0 \cup \ldots \cup V_n$. □

Demonstração alternativa para $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dada uma sequência $\langle y_n\rangle_n$ de pontos de $\operatorname{im}(f)$, pode-se tomar, para cada n, um ponto $x_n \in K$ com $f(x_n) = y_n$. Em virtude da compacidade de K em sua encarnação (iv) do último teorema, existe uma subsequência $\langle x_{n_k}\rangle_k$ que converge para algum $x \in K$. Logo, por f ser contínua, resulta $f(x_{n_k}) \to f(x)$, como desejado. □

Exercício 4.24 (*For fun*)**.** Tente demonstrar o lema anterior por meio das outras caracterizações de compacidade em $\mathbb{R}^n$. ■

Corolário 4.2.13 (Weierstrass)**.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f é contínua, então f tem máximo e mínimo.*

Demonstração. O domínio de f é fechado e limitado e, portanto, compacto. Logo, $\operatorname{im}(f)$ também é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (pelo lema anterior), donde segue que deve ser fechado e limitado. Por ser limitado, existem $m := \inf \operatorname{im}(f)$ e $M := \sup \operatorname{im}(f)$, enquanto a garantia de $\operatorname{im}(f)$ ser fechado permite concluir que $m, M \in \operatorname{im}(f)$, i.e., existem $x, x' \in [a,b]$ tais que $f(x) = m$ e $f(x') = M$, como desejado. □

Exercício 4.25 (Opcional)**.** Convença-se de que no corolário acima, "$[a,b]$" pode ser trocado por qualquer espaço compacto. ■

Corolário 4.2.14 (Adiável)**.** *Para qualquer espaço compacto K, $\mathcal{C}(K)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{B}(K)$. Em particular, $\mathcal{C}(K)$ é um espaço de Banach com a norma do supremo.*

Demonstração. O último exercício acarreta $\mathcal{C}(K) \subseteq \mathcal{B}(K)$. Agora, como a convergência induzida pela métrica do supremo é a convergência uniforme de funções (Proposição 3.0.33), o Teorema 3.0.30 assegura, em virtude do Lema 4.0.39, que $\mathcal{C}(K)$ é subespaço fechado de $\mathcal{B}(K)$. Logo, a conclusão decorre do Exercício 4.69. □

Observação 4.2.15. As quatro caracterizações de compacidade apresentadas no Teorema 4.2.11 não valem para *quaisquer* espaços topológicos: trata-se de uma feliz coincidência que se verifica em espaços euclidianos. É por isso que a caracterização via coberturas abertas costuma ser utiliza em contextos mais generalistas. △

Além do que se destacou acima, convém alertar que há muitas outras manifestações equivalentes para compacidade válidas em geral. Uma delas é apresentada no próximo teorema (compare com a Proposição 4.0.41):

Teorema 4.2.16. *Para um espaço topológico X, são equivalentes:*

(*i*) *X é compacto;*

(*ii*) *se $\mathcal{F}$ é uma família não-vazia de fechados de X com $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, então existem $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $F_0 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$.*

(*iii*) *(**p**ropriedade da **i**nterseção **f**inita, ou **p.i.f.**) se $\mathcal{F}$ é uma família de fechados tal que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ para qualquer subconjunto finito e não-vazio $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Primeiro, note que as afirmações (ii) e (iii) são trivialmente equivalentes entre si: uma é a contrapositiva da outra. Agora, pelas *leis* de De Morgan, para qualquer coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X deve valer

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X \Leftrightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U = \emptyset.$$

Logo, uma cobertura aberta de X, digamos $\mathcal{U}$, tem subcobertura finita se, e somente se, a família de fechados $\mathcal{F}(\mathcal{U}) := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$, cuja interseção é vazia, admite um subconjunto finito e não-vazio $\mathcal{G}$ com $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Corolário 4.2.17 (Intervalos encaixantes)**.** *Seja $\langle I_n \rangle_n$ uma sequência de intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$. Se $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. O intervalo I_0 é compacto em $\mathbb{R}$. Agora, os demais intervalos I_n para $n \geq 1$ são subespaços fechados de I_0 (Exercício 4.66). Por fim, note que a família $\mathcal{F} := \{I_n : n \geq 1\}$ satisfaz as hipóteses do item (iii) do último teorema. □

Quem comparou a caracterização anterior com a Proposição 4.0.41 pode ter se lembrado do Exercício 4.11, que usa uma propriedade de intervalos encaixantes para caracterizar a completude de espaços métricos. Em virtude disso, o próximo corolário é, praticamente, automático.

Corolário 4.2.18 (Opcional)**.** *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Uma sequência $\langle F_n \rangle_n$ de fechados satisfazendo as condições da Proposição 4.0.41 é, em particular, uma família de fechados com a p.i.f.. Logo, existe um único ponto em $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, que deve ser único pela condição de Hausdorff. □

Exercício 4.26 (Opcional)**.** Prove o corolário acima utilizando subsequências convergentes. ■

O exercício anterior dá uma pista bastante boa para caracterizar a compacidade no reino dos espaços métricos, resultado que *fecha* a subseção.

Definição 4.2.19. Diremos que um espaço métrico é **totalmente limitado** se toda sequência admitir subsequência de Cauchy. ¶

Exercício 4.27. Para um espaço métrico K (se preferir, pode supor $K \subseteq \mathbb{R}$ com a métrica induzida), mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) toda sequência em K tem subsequência convergente;

(ii) K é completo e totalmente limitado. ■

Teorema 4.2.20 (Opcional)**.** *Para um espaço métrico K, são equivalentes:*

(i) *K é compacto;*

(ii) *todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação;*

(iii) *toda sequência em K tem subsequência convergente;*

(iv) *K é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Em vista do que já se discutiu, basta provar (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iv) $\Rightarrow$ (i). A primeira implicação é simples: se $A \subseteq K$ não tem pontos de acumulação em K, então para cada $x \in K$ existe um aberto $V_x \subseteq K$ com $x \in V_x$ que testemunha o fato de A não se acumular em x, ou seja, tal que $V_x \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pela compacidade, existem $x_0, \ldots, x_n \in K$ com $K = \bigcup_{j \leq n} V_{x_j}$, mas isto obriga que A esteja contido em $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Tratemos da segunda implicação, (iv) $\Rightarrow$ (i).

Afirmação. *Se X é métrico e totalmente limitado, então para qualquer $r > 0$ existe um subconjunto finito $F_r \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x \in F_r} B[x, r]$.*

Demonstração. Se não fosse o caso, existiria $r > 0$ tal que $\{B[x, r] : x \in X\}$ não tem subcobertura finita. Em particular, para $x_0 \in X$ fixado, existe $x_1 \in X \setminus B[x_0, r]$, o que dispara a existência de $x_2 \in X \setminus B[x_0, r] \cup B[x_1, r]$, e assim sucessivamente. A sequência $\langle x_n \rangle_n$ obtida recursivamente desse processo não admite subsequências de Cauchy, já que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ deve-se ter $d(x_m, x_n) > r$.

Agora, assumindo (iv), suponha que K não seja compacto. Em vista da afirmação anterior, podemos supor que existe um subconjunto finito F_0 tal que $K = \bigcup_{x \in F_0} B[x, 1]$. Note que por K não ser compacto, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ sem subcobertura finita, donde se infere a existência de $x_0 \in F_0$ tal que $B_0 := B[x_0, 1]$ não admite subcobertura finita por abertos de $\mathcal{U}$: caso contrário, $\mathcal{U}$ teria uma subcobertura finita para K. Uma vez que limitação total é uma propriedade hereditária para subespaços (por quê?), pode-se repetir o argumento a fim de obter outra bola fechada $B_1 := B\left[x_1, \frac{1}{2}\right] \subseteq B[x_0, 1]$ que não admite cobertura finita por abertos de $\mathcal{U}$. Procedendo recursivamente, obtém-se uma sequência decrescente de fechados $\langle B_n \rangle_n$ cujo diâmetro converge para 0. Logo, a completude permite conjurar $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, o que leva a uma contradição: como existem $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$ e $r > 0$ com $B(x, r) \subseteq U$, qualquer n satisfazendo $\frac{1}{2^n} < r$ é tal que $B_{n+1} \subseteq U$, o que contraria a escolha de B_{n+1}. Portanto, K é compacto. □

Observação 4.2.21 (Taxonomia)**.** A história da *compacidade* se confunde com a própria história da Análise e da Topologia Geral. É evidente que não se começou do geral para o particular, como feito aqui, o que não é um problema, posto que não se reinventa o fogo toda vez que alguém sente frio. Dito isso, convém destacar algumas coisas.

(a) A *constatação* de que (intervalos) fechados e limitados são compactos (no sentido atual, i.e., da Definição 4.2.5), é usualmente *creditada* a Heine e Borel (por volta de 1894). De toda forma, em seus argumentos, ambos trataram apenas de coberturas enumeráveis de abertos: a versão geral, que não faz suposições acerca da cardinalidade da cobertura, costuma ser atribuída a Lebesgue (1904), razão pela qual a própria Definição 4.2.5 pode ser encontrada em alguns textos como *propriedade de Borel-Lebesgue.*

(b) As caracterizações de compacidade (ii) e (iii) do último teorema, assim como o próprio termo "compacidade", surgiram no contexto de espaços métricos, introduzidas por Fréchet em 1906. Apenas na década seguinte (1914) a equivalência com a *propriedade de Borel-Lebesgue* (das coberturas abertas) foi observada, por Hausdorff.

(c) A caracterização de compacidade em termos de fechados com a *propriedade da interseção finita* (Teorema 4.2.16), foi *registrada* pela primeira vez por Riesz (1908).

Todavia, tudo o que se fez acima foi anterior à definição atual de *espaço topológico*, que só ocorreu em 1922, com Kuratowski, mas com a influência de trabalhos anteriores, como o de Hausdorff em 1914. Isso deve alertar o leitor para a possibilidade de encontrar textos que definam compacidade por meio de outras condições equivalentes – e que enunciem a Definição 4.2.5 como uma caracterização alternativa garantida por algum teorema *com nome de gente*[25]. $\triangle$

4.2.1 Continuidade uniforme

Ainda com o pretexto de comparar espaços compactos com espaços finitos, observe que se X e Y são métricos, com X finito, e $f\colon X \to Y$ é uma função (contínua, certo?) então, a princípio, para $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sempre que $|x - y| < \delta_x$. Contudo, por X ser finito, é possível tomar $\delta := \min\{\delta_x : x \in X\}$, de modo que tal δ satisfaz o seguinte: para *quaisquer* $x, y \in X$, sempre que ocorrer $|x - y| < \delta$, também ocorrerá $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Explicitamente, o δ que testemunha o critério de continuidade de f com respeito a $\varepsilon > 0$ funciona para todo $x \in X$, de maneira *uniforme*.

Definição 4.2.22. Para espaços métricos X e Y, uma função $f\colon X \to Y$ é **uniformemente contínua** se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ sempre que $d(x, y) < \delta$, para quaisquer $x, y \in X$. ¶

Exercício 4.28. Convença-se de que funções uniformemente contínuas são contínuas. ■

A discussão inicial mostra que *toda função entre espaços métricos cujo domínio é finito é uniformemente contínua*. Pela similaridade que os espaços compactos têm com os espaços finitos, o leitor já deve imaginar que esse resultado se estenda para domínios compactos. Embora seja este o caso, ainda é cedo para apresentar a prova: pode ser psicologicamente mais agradável prolongar a discussão acerca de funções uniformemente contínuas *per se*.

Exemplo 4.2.23 (Continuidade $\not\Rightarrow$ Continuidade uniforme)**.** Em virtude de tudo o que já se discutiu até aqui, pode-se dizer que a noção de continuidade captura algo que poderia ser lido como "compatibilidade com convergência". Ocorre que isto é um fenômeno *local*, que se verifica nas *proximidades* dos pontos sob *escrutínio*.

Por outro lado, a compatibilidade propiciada pela continuidade uniforme tem um escopo *global*, i.e., ela preserva *desigualdades* com respeito às distâncias, independentemente de pontos particulares.

[25] Mais informações sobre a História da Topologia Geral podem ser encontradas nos textos de Engelking [10] e Willard [32], ou em trabalhos voltados explicitamente para a História da Análise, como a recente obra de Thomas Sonar [30]. Para uma revisão sobre a história da compacidade, o leitor pode conferir [25].

Exercício 4.29 (Opcional[26]). Para um espaço métrico Z e um número real $r > 0$, considere os conjuntos da forma $V_{Z,r} := \{\langle a, b\rangle \in Z \times Z : d(a, b) < r\}$. Com isso, mostre que $f : X \to Y$ é uniformemente contínua se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $(f \times f)[V_{X,\delta}] \subseteq V_{Y,\varepsilon}$, onde $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ faz $(f \times f)(x, x') := \langle f(x), f(x')\rangle$. ■

Um modo mais concreto de perceber tal sutileza faz uso de uma observação elementar:

Proposição 4.2.24. *Se $f : X \to Y$ é uniformemente contínua e $\langle x_n\rangle_n$ é de Cauchy em X, então $\langle f(x_n)\rangle_n$ é de Cauchy em Y.*

Demonstração. Fixado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ sempre que $d(x, y) < \delta$. Agora, por $\langle x_n\rangle_n$ ser de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \delta$ sempre que $n, m \geq N$, donde segue que $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. □

Portanto, qualquer função contínua entre espaços métricos que não preserva sequências de Cauchy tampouco pode ser uniformemente contínua. É o caso da inversão multiplicativa $\rho : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que faz $t \mapsto \frac{1}{t}$: embora seja contínua, $\rho\left(\frac{1}{2^n}\right) \to +\infty$. ▲

Exercício 4.30. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$.

a) Mostre que f leva sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.

b) Mostre que f não é uniformemente contínua. Dica: com $x, \gamma > 0$, seja $y := x + \gamma$ e observe que $|x^2 - y^2| = 2x\gamma + \gamma^2$; use isso para mostrar que, para $\varepsilon := 1$ e $\delta > 0$, sempre existem x e y com $|x - y| < \delta$ e $|x^2 - y^2| \geq 1$. ■

O caso linear

Para espaços normados X e Y e uma transformação linear *contínua* $T : X \to Y$, garante-se de maneira automática a condição adicional de continuidade uniforme. Em certo sentido, isto se deve ao fato de a continuidade se traduzir num critério de *dominância*[27] quando restrita ao caso das transformações lineares.

Exercício 4.31. Convença-se de que se $T : X \to Y$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais X e Y, então $T(0) = 0$. ■

Proposição 4.2.25 (Opcional). *Para uma transformação linear $T : X \to Y$ entre espaços normados $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ e $\langle Y, \|\cdot\|'\rangle$, são equivalentes:*

(i) *T é contínua;*

(ii) *T é contínua em 0;*

(iii) *existe $r > 0$ tal que $\|T(x)\|' \leq r\|x\|$ para todo $x \in E$;*

(iv) *T é uniformemente contínua.*

[26] Assim como funções contínuas são as funções compatíveis com as *estruturas topológicas*, as funções uniformemente contínuas são compatíveis com estruturas usualmente chamadas de *uniformidades*. No entanto, *espaços uniformes* fogem do escopo deste texto. Para saber mais, o leitor pode conferir [21].

[27] No sentido de ordem. Especificamente, para funções $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$, é comum dizer que ψ *domina* φ se ocorrer $|\varphi| \leq \psi$, onde a última desigualdade abrevia a ocorrência de $|\varphi(x)| \leq \psi(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. As implicações (i) ⇒ (ii) e (iv) ⇒ (i) são automáticas. Para (ii) ⇒ (iii), note que para $\varepsilon := 1$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(0)\|' = \|T(x)\|' < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$, de modo que basta tomar $r := \frac{2}{\delta}$: para $x \neq 0$,

$$\|T(x)\|' = \left\|\frac{2\|x\|}{\delta} T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\|' \leq \frac{2}{\delta}\|x\|,$$

posto que $\left\|\frac{\delta}{2\|x\|}x\right\| < \delta$. Finalmente, (iii) ⇒ (iv): por conta de (iii), para quaisquer $u, v \in X$ ocorre $\|T(u) - T(v)\|' = \|T(u - v)\|' \leq r\|u - v\|$, donde o restante segue. □

Narrativamente, este é um excelente momento para abordar, finalmente, a *equivalência* entre as normas de $\mathbb{R}^n$, algo que já foi pincelado discretamente em diversos pontos do texto: quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ induzem a mesma topologia.

Lema 4.2.26 (Opcional)**.** *Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ num espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem $r, R > 0$ tais que $r\|x\| \leq \|x\|' \leq R\|x\|$ para qualquer $x \in E$. Em particular, se $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ forem equivalentes, então $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é de Banach se, e somente se, $\langle E, \|\cdot\|'\rangle$ é de Banach.*

Demonstração. Primeiro, observe que para topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sobre um conjunto X, a ocorrência de $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ equivale à continuidade da função $I_X\colon \langle X, \mathcal{T}'\rangle \to \langle X, \mathcal{T}\rangle$ dada por $I_X(x) := x$, já que I_X é contínua se, e somente se, $V = I_X^{-1}[V] \in \mathcal{T}'$ sempre que $V \in \mathcal{T}$. Logo, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ se, e somente se, tanto I_X quanto I_X^{-1} são contínuas.

Agora, no caso específico do enunciado, a proposição anterior assegura que a função $I_E\colon \langle E, \|\cdot\|\rangle \to \langle E, \|\cdot\|'\rangle$ é contínua se, e somente se, existe $R > 0$ com $\|x\|' \leq R\|x\|$ para todo $x \in E$, enquanto a continuidade da inversa I_E^{-1} equivale à existência de $s > 0$ satisfazendo $\|x\| \leq s\|x\|'$ para todo $x \in E$, de modo que basta tomar $r := \frac{1}{s}$.

Para a parte final, a desigualdade satisfeita pelas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ garante que uma sequência $\langle x_n\rangle_n$ é de Cauchy em $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ se, e somente se, é de Cauchy em $\langle E, \|\cdot\|'\rangle$ (por quê?), de modo que se existir $x \in E$ tal que $x_n \to x$ com respeito a alguma das normas, então $x_n \to x$ com respeito à outra, pois tanto I_E quanto I_E^{-1} são contínuas. □

Exercício 4.32 (Opcional)**.** Mostre que a equivalência entre normas é, *verdadeiramente*, uma relação de equivalência no conjunto das normas definidas sobre um espaço vetorial. ■

Teorema 4.2.27 (Opcional)**.** *Quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes. Em particular, $\langle \mathbb{R}^n, \|\cdot\|\rangle$ é um espaço de Banach para qualquer norma $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$.*

Demonstração. Pelas observações acima, basta mostrar que qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ é equivalente à norma euclidiana (Exercício 2.33). Por simplicidade, vamos escrever "E" para indicar o espaço $\mathbb{R}^n$ dotado de uma norma $\|\cdot\|$ qualquer, enquanto "$\mathbb{R}^n$" indicará tal espaço com a norma $\|\cdot\|_2$. Sejam $T\colon \mathbb{R}^n \to E$ a função que faz $T(x) := x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $B := \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, no sentido usual da Álgebra Linear. Uma vez que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existem únicos escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com $x = \sum_{i \leq n} a_i e_i$, resulta

$$\|T(x)\| \leq \sum_{i \leq n} |a_i|\|T(e_i)\| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i \leq n} |a_i|^2}}_{\|x\|_2} \underbrace{\sqrt{\sum_{i \leq n} \|T(e_i)\|^2}}_{R},$$

posto que $\langle \alpha_i\rangle_i \bullet \langle \beta_i\rangle_i := \sum_{i \leq n} \alpha_i \beta_i$ é o produto interno que induz a norma $\|\cdot\|_2$ em $\mathbb{R}^n$ (Exercício 2.32). Isto mostra que T é contínua.

Para a continuidade da inversa de T, note que $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^n} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ é subespaço compacto de $\langle \mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2 \rangle$: é fechado por ser a pré-imagem de $\{1\}$ pela função contínua $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, e é limitado na norma euclidiana por definição (certo?!). Agora, a função $\varphi := \|\cdot\| \circ T \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é contínua e, pelo Teorema de Weierstrass, deve assumir mínimo em $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$, i.e., existe $u \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $0 < \|T(u)\| \leq \|T(v)\|$ para todo $v \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$. Logo, se $x \in E$ e $x \neq 0$, então $v := \frac{x}{\|x\|_2} \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$ e

$$\|T(x)\| = \|x\|_2 \|T(v)\| \geq \|x\|_2 \|T(u)\|,$$

mostrando que basta tomar $r := \|T(u)\|$. □

Exercício 4.33. Complete os detalhes da demonstração anterior. Em particular: por que $\|T(u)\| > 0$? ■

Uma consequência bastante particular da *unicidade topológica* de $\mathbb{R}^n$ pode soar inesperada para o leitor: a continuidade automática de transformações lineares cujos domínios têm dimensão finita. Isto se deve ao seguinte

Teorema 4.2.28 (Opcional). *Um funcional linear $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ é contínuo se, e somente se, o núcleo $\ker \varphi := \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$ é fechado em E.*

Demonstração. Como $\ker \varphi = \varphi^{-1}[\{0\}]$, a ida segue por $\{0\}$ ser fechado em $\mathbb{R}$. Para a recíproca, basta proceder pela contrapositiva, com a suposição nada problemática de que existe $y \in E \setminus \ker \varphi$: como φ não é contínua, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ com $|\varphi(x_n)| > 2^n \|x_n\|$; daí, não é difícil perceber que $y_n := y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_n)} \cdot x_n$ é tal que $y_n \in \ker \varphi$ para todo n e $y_n \to y$, mostrando que $\ker \varphi$ não é fechado (Lema 4.0.39). □

Corolário 4.2.29 (Opcional). *Sejam X e Y espaços normados e $T \colon X \to Y$ uma transformação linear. Se $\dim X$ é finita, então T é contínua.*

Demonstração. Primeiro, para $Y := \mathbb{R}$, note que T é contínua se, e somente se, $\ker T$ é subespaço fechado de X. Ocorre que por X ter dimensão finita, $\ker T$ também tem dimensão finita[28] e, consequentemente, é isomorfo a algum $\mathbb{R}^n$ com alguma norma. Logo, $\ker T$ é um subespaço de Banach de X e, portanto, é fechado (Exercício 4.69).

Agora, para Y qualquer, se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases de X e Y, respectivamente, com $\mathcal{B}$ finito, então para cada $b \in \mathcal{B}$ existe um subconjunto finito $\mathcal{C}_b \subseteq \mathcal{C}$ de tal forma que $T(b)$ é combinação linear dos vetores em $\mathcal{C}_b$ donde, por linearidade, segue que $\mathcal{C}' := \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_b$ é uma base finita para $\operatorname{im}(T)$. Note que para $c \in \mathcal{C}$, a projeção $p_c \colon Y \to \mathbb{R}$ que associa cada $y \in Y$ à sua "c-ésima coordenada" $\alpha_c \in \mathbb{R}$ é linear, o que faz de $\varphi_c := p_c \circ T \colon X \to \mathbb{R}$ um funcional linear, contínuo pelo que se discutiu no parágrafo anterior. Por fim, ao fazer $\mu_c \colon \mathbb{R} \to Y$ a função contínua que multiplica cada $r \in \mathbb{R}$ pelo vetor $c \in \mathcal{C}$ fixado, não é difícil perceber que T é combinação linear das transformações lineares contínuas da forma $T_c := \mu_c \circ \varphi_c \colon X \to Y$ conforme c percorre $\mathcal{C}'$. Os detalhes ficam por conta do leitor. □

Os resultados acima, possivelmente, apenas corroboram um fenômeno que o leitor atento certamente já notou ao longo da vida: a relativa simplicidade das funções lineares. Começando com as funções lineares da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, que devem ser do tipo $t \mapsto t \cdot v$ para vetores v de $\mathbb{R}^n$ – e que são contínuas em virtude da continuidade da multiplicação

[28] Na verdade, $\ker T$ tem *codimensão* 1 sempre que $T \neq 0$, i.e., $\dim \ker T + 1 = \dim X$.

por escalar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ –, não é difícil intuir que uma transformação linear $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ qualquer é da forma

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \mapsto \left\langle \sum_{j=1}^{m} \beta_{1,j}\alpha_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} \beta_{n,j}\alpha_j \right\rangle$$

para certos $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$ e, por conseguinte, é também uma função contínua (por ser contínua em cada coordenada). A surpresa, talvez, fique pela sugestão implícita de que tal bom comportamento se perde em dimensão infinita.

Exemplo 4.2.30 (Opcional: funcionais descontínuos)**.** Para um espaço normado $\langle E, \|\cdot\| \rangle$ com dimensão infinita, existe um subconjunto infinito $\mathcal{B} := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ linearmente independente, o que permite definir um funcional linear $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ satisfazendo a identidade $\varphi(b_n) = \|b_n\| 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que não pode ser contínuo em 0: ao fazer $x_n := \frac{1}{2^n \|b_n\|} b_n$ para cada n, resulta que $x_n \to 0$, mas $\varphi(x_n) = 1$ para todo n. ▲

Extensão de funções uniformemente contínuas

O leitor interessado prioritariamente em Análise na **Reta** pode ter aproveitado pouco a subsubseção anterior, o que justifica *estender* a discussão sobre funções uniformemente contínuas. Por falar nisso...

Teorema 4.2.31. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é uniformemente contínua, então existe uma única função uniformemente contínua $F \colon \overline{X} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, i.e., f tem uma única extensão contínua.*

Demonstração. Primeiro, note que a unicidade decorre do que se discutiu no Exemplo 4.1.8. Agora, para cada $z \in \overline{X}$ existe $\langle z_n \rangle_n$ em X com $z_n \to z$, donde a continuidade uniforme de f garante que $\langle f(z_n) \rangle_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto, convergente para algum ponto, que muito apropriadamente será chamado de $F(z)$. Note que de um ponto de vista formal, isto já define uma função $F \colon \overline{X} \to \mathbb{R}$, de modo que resta apenas mostrar sua continuidade uniforme: ora, fixado $\varepsilon > 0$, há $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon' < \varepsilon$ sempre que $x, y \in X$ satisfazem $|x - y| < 3\delta$; logo, se $z, z' \in \overline{X}$ satisfazem $|z - z'| < \delta$, então para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande deve-se ter

$$|z_N - z'_N| \leq |z_N - z| + |z - z|' + |z'_N - z'| < 3\delta,$$

acarretando $|f(z_N) - f(z'_N)| < \varepsilon'$ e, pela continuidade do valor absoluto $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ aliada à monotonicidade dos limites (Proposição 3.1.27),

$$|F(z) - F(z')| = \left| \lim_{n\to\infty} f(z_n) - \lim_{n\to\infty} f(z'_n) \right| = \lim_{n\to\infty} |f(z_n) - f(z'_n)| \leq \varepsilon' < \varepsilon,$$

como desejado. □

Observação 4.2.32 (Opcional: excesso de zelo)**.** O argumento acima mostrou que a família $P_z := \{y \in \mathbb{R} : \exists \langle z_n \rangle_n$ em X tal que $z_n \to z$ e $f(z_n) \to y\}$ é não-vazia para cada $z \in \overline{X}$, o que permitiu apelar para o Axioma da Escolha a fim de *conjurar* $F \colon \overline{X} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $F(z) \in P_z$ para todo z. Contudo, alguns autores gostam de destacar que o Axioma da Escolha é supérfluo aqui, pois P_z tem apenas um elemento: se $z_n \to z$, $z'_n \to z$ e $y, y' \in \mathbb{R}$ são tais que $f(z_n) \to y$ e $f(z'_n) \to y'$, então $|y - y'| \leq |y - f(z_n)| + |f(z_n) - f(z'_n)| + |f(z'_n) - y'|$, que pode ser controlado por f ser uniformemente contínua. Tal preciosismo, no entanto, é desnecessário em contextos que assumem o Axioma da Escolha. △

Exercício 4.34 (Opcional, mas nem tanto)**.** Mostre que o teorema anterior permanece válido para funções entre espaços métricos se tanto o espaço que contém X quanto o codomínio da função forem completos. Dica: repita a demonstração, lembrando apenas que a própria métrica é contínua. ■

Uma pergunta natural a se fazer depois de encarar os dois resultados acima é a seguinte: *e daí?* A habilidade de estender funções uniformemente contínuas não parece tão apelativa num cenário em que, até agora, funções lineares parecem ser as protagonistas. A percepção, como sempre, prega peças.

Oportunamente, veremos que toda função contínua da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável. Isto permitirá, entre outras coisas, definir uma norma $\|\cdot\|_1$ em $\mathcal{C}([a,b])$, o espaço das funções reais contínuas em $[a,b]$, por meio da regra

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Justificativa. No momento certo, os argumentos a seguir serão elaborados com mais cuidado.

(i) O Exercício 3.35 assegura $\|0\|_1 = 0$ e, para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo $\|f\|_1 = 0$, necessariamente deve-se ter $f = 0$ (o contrário permitiria, por *conservação de sinal* em funções contínuas, definir g com $g \leq |f|$ e $\|g\|_1 > 0$).

(ii) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, deve ocorrer $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1$ pela linearidade da integral de Riemann (Exemplo 3.1.43).

(iii) Finalmente, a desigualdade triangular $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ segue tanto da linearidade quanto da monotonicidade da integral de Riemann (Exemplo 3.1.28). □

Com isso, a própria *integral* $\displaystyle\int_a^b \colon \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ se revela um *funcional linear contínuo* com respeito à norma $\|\cdot\|_1$, já que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t := \|f\|_1$: da desigualdade $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ para todo $t \in [a,b]$, resulta $-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, donde a desigualdade desejada segue[29] e, pela Proposição 4.2.25, o funcional deve ser contínuo.

Embora tudo possa parecer muito bonito, o espaço $\langle \mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_1\rangle$ apresenta uma *deficiência*: a existência de sequências (de funções!) que satisfazem a condição de Cauchy mas que não convergem! Explicitamente: há sequências da forma $\langle f_n \rangle_n$, onde cada $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, tais que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $\|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N$, mas tal que nenhuma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0.$$

[29] É um bom momento para não esquecer que $|\alpha| \leq \beta$ se, e somente se, $-\beta \leq \alpha \leq \beta$.

A surpresa, talvez, seja o seguinte: espaços normados admitem *completamentos*, i.e., todo espaço normado E pode ser *enxergado* como subespaço *denso* de um *único*[30] espaço de Banach X; logo, se $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ for um funcional linear contínuo (e, por conseguinte, uniformemente contínuo), torna-se lícito estendê-lo a um funcional linear contínuo[31] $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$. No caso, o completamento de $\langle \mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_1 \rangle$ é *realizado* pelo espaço das funções *Lebesgue mensuráveis*, enquanto a extensão da integral de Riemann é a *integral de Lebesgue*. Evidentemente, nada disso será tratado aqui – mas deve servir como propaganda para leitores interessados em questões mais sofisticadas de Análise.

O Teorema de Heine-Cantor e integrais de Riemann

Sem mais delongas, vamos ao teorema prometido no começo desta subseção.

Teorema 4.2.33 (Heine-Cantor)**.** *Sejam X e Y espaços métricos, com $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Se X é compacto, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Quem preferir pode supor $X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y := \mathbb{R}$, pois isto não interfere no argumento. O cerne da ideia é simples: para $\varepsilon > 0$, em torno de cada $x \in X$ pode-se encontrar uma bola aberta $B_x := B(x, \delta_x)$ de raio $\delta_x > 0$ tal que $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$ sempre que $z \in B_x$, o que torna irresistível usar a compacidade a fim de tomar uma subcobertura finita de $\{B_x : x \in X\}$ para daí escolher δ como o menor dos δ_x's correspondentes.

Há um problema: o próximo passo seria mostrar que se z e z' são pontos quaisquer de X com $d(z, z') < \delta$, então $d(f(z), f(z')) < 2\varepsilon$; porém, para assegurar isso, seria preciso ter z e z' numa *mesma* bola da forma B_x, pois daí resultaria a desigualdade

$$d(f(z), f(z')) \leq d(f(z), f(x)) + d(f(x), f(z')) < 2\varepsilon.$$

Ocorre que sabemos apenas da existência de x e x', possivelmente distintos, com $z \in B_x$ e $z' \in B_{x'}$, de modo que

$$d(z, x') \leq d(z, z') + d(z', x') < \delta + \delta_{x'} \leq 2\delta_{x'}.$$

Ao encarar atentamente a desigualdade acima, percebe-se o que fazer para salvar o argumento: dividir por 2 os raios da forma δ_x! Explicitamente: como $\left\{B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) : x \in X\right\}$ cobre X e este é compacto, existe um subconjunto finito $F \subseteq X$ com $X = \bigcup_{x\in F} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$, o que permite tomar $\delta := \min\left\{\frac{\delta_x}{2} : x \in F\right\}$, de tal maneira que se $z, z' \in X$ satisfazem $d(z, z') < \delta$, então existe um mesmo $x \in X$ com $z, z' \in B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) \subseteq B_x$ e, portanto, $d(f(z), f(z')) < 2\varepsilon$. $\square$

Corolário 4.2.34. *Toda função contínua da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Corolário 4.2.35 (Adiável)**.** *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é Riemann-integrável.*

[30] A menos de *isomorfismo isométrico*, i.e., um isomorfismo de espaços vetoriais que preserva as distâncias.

[31] A princípio, Φ seria apenas uniformemente contínua, mas a linearidade segue pelas propriedades operatórias de limites: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y \in X$, então exstem sequências $\langle x_n \rangle_n$ e $\langle y_n \rangle_n$ em E com $x_n \to x$ e $y_n \to y$, de modo que $\Phi(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha\varphi(x_n) + \beta\varphi(y_n) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$. Os detalhes ficam por conta do leitor.

Demonstração. Pela completude de $\mathbb{R}$, basta mostrar que a *net* $\left\langle\sum_{\langle\mathcal{P},T\rangle} f\right\rangle_{\langle\mathcal{P},T\rangle}$ é de Cauchy (item (iii) do Corolário 4.0.14). Para isso, a continuidade uniforme de $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, assegurada pelo corolário anterior, será fundamental: fixado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ sempre que $x,y\in[a,b]$ satisfazem $|x-y|<\delta$; a ideia é utilizar tal δ para determinar um valor para as normas das partições capaz de garantir a desigualdade de Cauchy correspondente ao ε fixado.

Por exemplo: note que se $T:=\langle t_1,\ldots,t_n\rangle$ e $T':=\langle t'_1,\ldots,t'_n\rangle$ são duas *tags* de uma partição $\mathcal{P}:=\langle a_0,\ldots,a_n\rangle$ que satisfaz $\|\mathcal{P}\|<\delta$, então

$$\left|\sum_{\langle\mathcal{P},T\rangle} f-\sum_{\langle\mathcal{P},T'\rangle} f\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)-f(t'_i))(a_i-a_{i-1})\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t'_i)|(a_i-a_{i-1})<\varepsilon(b-a),$$

pois $|t_i-t'_i|\leq|a_i-a_{i-1}|<\delta$.

O problema, portanto, consiste em ajustar o argumento para que se atendam as exigências do critério de Cauchy. Para fazer isso, pode ser útil recordar a definição da relação "$\sqsubseteq$" entre partições, introduzida na demonstração do Lema 3.0.24.

⌜**Afirmação.** *Nas presentes condições, existe $\delta>0$ tal que se $\langle\mathcal{P},T\rangle$ é um partição com $\|\mathcal{P}\|<\delta$ e $\langle\mathcal{Q},T'\rangle$ é outra partição com $\mathcal{P}\sqsubseteq\mathcal{Q}$, então $\left|\sum_{\langle\mathcal{P},T\rangle} f-\sum_{\langle\mathcal{Q},T'\rangle} f\right|<\varepsilon$.*

Demonstração. Primeiro, para $\mathcal{P}:=\langle p_0,\ldots,p_n\rangle$ e $\mathcal{Q}:=\langle q_0,\ldots,q_m\rangle$, a relação $\mathcal{P}\sqsubseteq\mathcal{Q}$ apenas indica $\{p_0,\ldots,p_n\}\subseteq\{q_0,\ldots,q_m\}$. Agora, pela continuidade uniforme de f em $[a,b]$, existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ sempre que $|x-y|<\delta$, e é justamente este o δ procurado. Com efeito, se $\langle\mathcal{P},T\rangle$ satisfaz $\|\mathcal{P}\|<\delta$ e $\mathcal{P}\sqsubseteq\mathcal{Q}$, então cada p_i da partição $\mathcal{P}$ corresponde (de maneira estritamente crescente) a um q_{j_i} da partição $\mathcal{Q}$, de tal forma que

$$\sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} q_s-q_{s-1}=p_{i+1}-p_i,$$

para $i\in\{0,\ldots,n\}$. Em particular, $q_{j_0}=q_0=p_0=a$, $q_{j_n}=q_m=p_n=b$ e, mais geralmente,

$$\mathcal{Q}=\langle\underbrace{q_{j_0}}_{q_0=p_0=a},q_{j_0+1},\ldots,\underbrace{q_{j_1}}_{p_1},q_{j_1+1},\ldots,\underbrace{q_{j_{n-1}}}_{p_{n-1}},\ldots,\underbrace{q_{j_n}}_{q_m=p_n=b}\rangle.$$

Logo, para $T':=\langle t'_1,\ldots,t'_m\rangle$ uma *tag* de $\mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\langle\mathcal{P},T\rangle} f-\sum_{\langle\mathcal{Q},T'\rangle} f\right|&=\left|\sum_{i=1}^{n}f(t_i)(p_i-p_{i-1})-\sum_{j=1}^{m}f(t'_j)(q_j-q_{j-1})\right|=\\&=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=j_{i-1}+1}^{j_i}f(t_i)(q_s-q_{s-1})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=j_{i-1}+1}^{i_j}f(t'_s)(q_s-q_{s-1})\right|=\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=j_{i-1}+1}^{j_i}|f(t_i)-f(t'_s)||q_s-q_{s-1}|<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon,\end{aligned}$$

pois $|t_i-t_s|<\delta$ para quaisquer i entre 1 e n e s entre $j_{i-1}+1$ e j_i. ⌟

Para encerrar, com o δ da afirmação referente a $\frac{\varepsilon}{2}$, note que se $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ e $\langle \mathcal{P}', T'\rangle$ são partições com $\|\mathcal{P}\|, \|\mathcal{P}'\| < \delta$, então para a partição $\mathcal{Q}$ obtida por meio da reunião dos pontos de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, e qualquer *tag* T'' para $\mathcal{Q}$, resulta

$$\left|\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f - \sum_{\langle \mathcal{P}',T'\rangle} f\right| \leq \left|\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f - \sum_{\langle \mathcal{Q},T''\rangle} f\right| + \left|\sum_{\langle \mathcal{Q},T''\rangle} f - \sum_{\langle \mathcal{P}',T'\rangle} f\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que a *net* $\left\langle \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f \right\rangle_{\langle \mathcal{P},T\rangle}$ é de Cauchy, como desejado. □

Este é o primeiro passo realmente importante dado no texto rumo às noções de integração, tema do próximo capítulo: embora ainda não tenhamos discutido *métodos* para *calcular* integrais *efetivamente*, agora temos a garantia de que para funções *contínuas* da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, necessariamente existe um (único) número real digno de ser chamado de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Porém, por se tratar do limite de uma *net*, é suficiente conhecer o limite da *net* correspondente a qualquer subconjunto cofinal na família das partições de Riemann (Proposição 3.1.11).

Exercício 4.35. Mostre que se $\langle\langle \mathcal{P}_n, T_n\rangle\rangle_n$ é uma sequência de partições de Riemann de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$, então $\{\langle \mathcal{P}_n, T_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ é cofinal em $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a, b]$ e

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{\langle \mathcal{P}_n,T_n\rangle} f$$

para qualquer função Riemann-integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dica: a Proposição 3.1.11 não foi provada à toa. ■

Exemplo 4.2.36 (Uma integral no braço)**.** Como a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$ é contínua, existe $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$. Vamos calcular este número!

Pelo exercício anterior, basta encontrar uma sequência $\langle\langle \mathcal{P}_n, T_n\rangle\rangle_n$ de partições apropriadas e calcular o limite da sequência $\left\langle \sum_{\langle \mathcal{P}_n,T_n\rangle} f \right\rangle_n$ correspondente. Para $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, sejam $\mathcal{P}_n := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ e $T_n := \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ definidos por $a_i = t_i = \frac{i}{n}$ para cada $i \leq n$. Como $\|\mathcal{P}_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, é lícito prosseguir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\langle \mathcal{P}_n,T_n\rangle} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

pois $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$ (verifique?). ▲

Apesar de não ser algo tremendamente complicado, futuramente faremos apenas $F(t) := \frac{t^3}{3}$ e

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = F(1) - F(0) = \frac{1}{3},$$

essencialmente por valer $F'(t) = f(t)$ para todo t. Esta, por sua vez, é uma das consequências do *Teorema Fundamental do Cálculo*, que relaciona derivadas com *integrais bem comportadas*. Para abordá-lo, precisamos de mais alguns resultados sobre derivadas que dependem de *conexidade*.

Adiável: compacidade em espaços de funções

Observação 4.2.37. Leitores afoitos para aprender sobre conexidade e suas relações com derivadas podem adiar a leitura da presente subsubseção e avançar para a próxima. Contudo, a discussão anterior sobre continuidade uniforme torna muito pertinente abordar a noção de *equicontinuidade* e sua relação com compacidade. $\triangle$

A ênfase dada à integração de Riemann na subseção anterior pode ter ofuscado outra importante norma *admissível* sobre $\mathcal{C}(X)$ quando X é um espaço compacto de Hausdorff: a norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$. Apenas para aquecer os motores, pode ser útil mencionar que a *integral* é contínua com respeito a esta norma.

Proposição 4.2.38. *Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a função $\int_a^b : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ é contínua quando se considera $\mathcal{C}([a,b])$ com a norma do supremo.*

Demonstração. Como $-\|f\|_\infty \leq f(t) \leq \|f\|_\infty$ para todo $t \in [a,b]$ e $f \in \mathcal{C}([a,b])$, verifica-se

$$-\|f\|_\infty(b-a) = \int_a^b \|f\|_\infty \,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|f\|_\infty \,\mathrm{d}t = (b-a)\|f\|_\infty,$$

i.e., $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\cdot\|f\|_\infty$, donde a continuidade segue da Proposição 4.2.25, posto que a integral de Riemann é linear (Exemplo 3.1.43). $\square$

Exercício 4.36. Mostre que se $\langle f_n \rangle_n$ é uma sequência de funções contínuas da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente, então f é Riemann-integrável e $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$. $\blacksquare$

Em particular, se $K \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ for uma família compacta de funções, então as integrais das funções em K atingem um máximo e um mínimo, o que traz à principal pergunta desta subsubseção: o que significa dizer que uma família de funções em $\mathcal{C}([a,b])$ é compacta?

Para o que segue, não haverá benefícios psicológicos ou didáticos em restringir os domínios das funções a intervalos compactos de $\mathbb{R}$, o que permite tratar de famílias de funções da forma $X \to \mathbb{R}$, para X métrico, compacto de Hausdorff. Dito isso, o leitor não deve esperar que o próprio $\mathcal{C}(X)$ seja compacto, posto que $\mathcal{C}(X)$ é um espaço vetorial normado não-trivial, e a própria norma é uma função contínua e ilimitada.

Exercício 4.37. Mostre que não existe espaço vetorial normado não-trivial que seja compacto. $\blacksquare$

Agora, por $\mathcal{C}(X)$ ser um espaço métrico, sabemos que uma família de funções $K \subseteq \mathcal{C}(X)$ será compacta com respeito à topologia induzida pela norma do supremo se, e somente se, o próprio K for completo e totalmente limitado. Posto que $\mathcal{C}(X)$ já é completo, isto se resume a pedir que K seja *fechado* e totalmente limitado (Exercício 4.69), o que, na prática, nos deixa com o dilema de investigar os subconjuntos *totalmente limitados* de $\mathcal{C}(X)$, uma vez que o fecho de tais conjuntos ainda é totalmente limitado.

Exercício 4.38. Num espaço métrico $\langle M, d\rangle$, mostre que $\overline{L}$ é totalmente limitado sempre que $L \subseteq M$ for totalmente limitado. Dica: tome uma sequência $\langle z_n \rangle_n$ em $\overline{L}$ e, para cada n, fixe uma sequência $\langle x_{n,m} \rangle_m$ em L satisfazendo $x_{n,m} \to z_n$; escolhendo termos x_{n,m_n} de maneira esperta para cada n, use uma subsequência de Cauchy de $\langle x_{n,m_n} \rangle_n$ para obter uma subsequência de Cauchy de $\langle z_n \rangle_n$. $\blacksquare$

Este é um bom momento para uma pergunta verdadeiramente capciosa: em geral, qual a diferença entre *limitação total* e *limitação usual*? Em vista do pouco que se discutiu até agora, seria razoável imaginar que pudesse se tratar de uma condição essencialmente idêntica à limitação, certo? Errado: limitação total implica limitação, posto que reunião finita de subconjuntos limitados é limitada (verifique?); o problema está na recíproca.

Teorema 4.2.39 (*A.k.a.* Lema de Riesz)**.** *Sejam $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ um espaço normado e $S \subseteq E$ um subespaço vetorial com $\overline{S} \neq E$. Para cada $\alpha \in (0,1)$ existe $x \in E$ com $\|x\| = 1$ e $\|s - x\| \geq \alpha$ para todo $s \in S$.*

Demonstração. Para $x_0 \in E \setminus \overline{S}$, seja $R := d(x_0, S)$, que satisfaz $R > 0$ pelo Exercício 4.67. Como $R < \frac{R}{\alpha}$, existe $x_1 \in S$ com $\|x_0 - x_1\| \leq \frac{R}{\alpha}$, e daí basta fazer $x := \frac{1}{\|x_0 - x_1\|}(x_0 - x_1)$. □

Corolário 4.2.40. *Se um espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ tem dimensão infinita, então a bola fechada e limitada $B[0,1] := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ não é compacta.*

Demonstração. Fixado $x_0 \in E$ com $\|x_0\| = 1$, pode-se fazer $S := [x_0]$ o subespaço de E gerado por x_0, que satisfaz $\overline{S} = S \neq E$ em virtude da suposição sobre a dimensão de E. Logo, o teorema anterior assegura $x_1 \in E \setminus S$ com $\|x_1\| = 1$ e $\|x_0 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Como $[x_0, x_1]$ ainda tem dimensão finita, pode-se repetir o argumento de modo a obter $x_2 \in E \setminus [x_0, x_1]$ com $\|x_2\| = 1$ e $\|x_i - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ para $i \in \{0, 1\}$. Como $[x_0, x_1, x_2]$ tem dimensão finita... Recursivamente, conclui-se que $B[0,1]$ admite uma sequência sem subsequência de Cauchy e, portanto, não pode ser compacto em vista do Teorema 4.2.20. □

Exemplo 4.2.41 (Dimensão de $\mathcal{C}(X)$)**.** Quando X é um espaço *discreto* finito, digamos que com n elementos, $\mathcal{C}(X)$ é indistinguível de $\mathbb{R}^n$. Agora, para X infinito, $\mathcal{C}(X)$ *costuma* ter dimensão infinita. Para X métrico (e infinito!) por exemplo, $\mathcal{C}(X)$ admite subconjuntos finitos e linearmente independentes arbitrariamente grandes

Com efeito, para um subconjunto finito $F \subseteq X$ fixado e um ponto $y \in X$, a função $\rho_y \colon X \to [0, +\infty)$ que faz $\rho_y(x) := d(x, F \setminus \{y\})$ é contínua e satisfaz $\rho_y(y) > 0$ e $\rho_y(x) = 0$ para todo $x \in F \setminus \{y\}$. Logo, se

$$\sum_{y \in F} \alpha_y \rho_y = 0,$$

(uma igualdade enquanto funções!) então $\alpha_y \rho_y(y) = 0$, acarretando $\alpha_y = 0$ para todo $y \in F$. Como $|\{\rho_y : y \in F\}| = |F|$ e X admite subconjuntos finitos de cardinalidade arbitrariamente alta, resulta que $\dim \mathcal{C}(X)$ é infinita. ▲

Observação 4.2.42 (Opcional: infinito *quanto?*)**.** Uma vez que a dimensão de um espaço vetorial corresponde à cardinalidade de qualquer uma de suas bases algébricas, pode-se perguntar o *quão infinita* é uma base de $\mathcal{C}(X)$ ou, pelo menos, se ela pode ser enumerável ou se necessariamente é não-enumerável. Nas situações em que X é um espaço métrico compacto e infinito, a resposta é, necessariamente, a segunda opção.

Teorema 4.2.43. *Espaços normados com dimensão infinita enumerável não são de Banach.*

Demonstração. Se E tem uma base infinita enumerável, digamos $\mathcal{B} := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n := [x_0, \ldots, x_n]$ é um subespaço vetorial próprio de E que, pela discussão do Exemplo 4.1.4, deve ter interior vazio. Como S_n é um espaço de Banach com *qualquer* norma, pode-se usar o Exercício 4.69 para assegurar que S_n também é fechado em E para cada n. Tem-se então $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, i.e., E é uma reunião enumerável de fechados com interior vazio. Logo, pelo Teorema 4.0.36 (de Baire), o espaço métrico $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ não pode ser completo. □

Em particular, com X métrico, compacto e infinito, não há família enumerável $\mathcal{N}$ de funções contínuas da forma $X \to \mathbb{R}$ por meio da qual seja possível descrever *qualquer* função contínua como combinação linear finita de funções em $\mathcal{N}$, já que $\mathcal{C}(X)$ é de Banach com dimensão infinita. Por razão análoga, nenhuma norma sobre o espaço $\mathcal{P}[a,b]$ das funções polinomiais da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$ faz dele um espaço de Banach (Exercício 4.80).$\triangle$

Consequentemente, quando X é espaço métrico, compacto e infinito, $\mathcal{C}(X)$ admite conjuntos limitados que não são totalmente limitados: se $B[0,1] := \{f \in \mathcal{C}(X) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ fosse totalmente limitado, então seria compacto (por já ser completo), o que violaria o Lema de Riesz.

De volta ao problema de caracterizar os subespaços totalmente limitados de $\mathcal{C}(X)$: certamente são subconjuntos limitados segundo a norma $\|\cdot\|_\infty$, mas a questão é perceber qual condição adicional deve ser imposta para recuperar a limitação total. Observe que se $K \subseteq \mathcal{C}(X)$ é totalmente limitado, então para qualquer $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ pode-se encontrar um aberto $V \subseteq X$ em torno de x tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in V$ e toda $f \in K$:

- ✓ pela afirmação estabelecida ao longo da demonstração do Teorema 4.2.20, existem $f_0, \ldots, f_n \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j \leq n} B[f_j, \varepsilon]$;
- ✓ a continuidade de cada f_j permite encontrar um aberto $V \subseteq X$ em torno de x satisfazendo $|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in V$ e *todo* $j \leq n$;
- ✓ ajustando os ε's e lembrando que $f \in B[f_j, r]$ se, e somente se, $\|f - f_j\|_\infty \leq r$, o resultado segue.

Exercício 4.39. Complete o argumento anterior. ■

Em certo sentido, a condição verificada acima indica que a *continuidade* das funções em K *independe* da função considerada, no sentido de que o aberto em torno de x por meio do qual se controla a função é o mesmo para toda $f \in K$.

Definição 4.2.44. Diz-se que $K \subseteq \mathcal{C}(X)$ é **equicontínua no ponto** x se para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para quaisquer $y \in V$ e $f \in K$. A menção ao ponto costuma ser suprimida se K for equicontínua em *todos* os pontos. ¶

Exemplo 4.2.45. Há exemplos banais de famílias equicontínuas:

(i) $K := \{f\}$ para alguma f contínua;

(ii) $K := K' \cup K''$, com K' e K'' equicontínuas;

(iii) $K \subseteq K'$ com K' equicontínua.

Para um caso menos preguiçoso, mas não tanto: fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$ e para cada $t \in [0, \alpha)$, seja $f_t \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função dada por $f_t(x) := tx$; em tais condições, $K_\alpha := \{f_t : t \in [0, \alpha)\}$ é equicontínua. De fato, para $\varepsilon > 0$ fixado, basta tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{\alpha}$, pois se $x, y \in [0,1]$ satisfazem $|x - y| < \delta$, então $|f_t(x) - f_t(y)| \leq t|x - y| < \varepsilon$; em particular, note que o δ escolhido também independe do ponto x fixado, caso em que se diz que a família é **uniformemente equicontínua**. ▲

Exercício 4.40. Mostre que se X é métrico compacto e $K \subseteq \mathcal{C}(X)$ é uma família equicontínua de funções, então K é uniformemente equicontínua. Dica: imite a demonstração do Teorema de Heine-Cantor. ■

É justamente ao adicionar equicontinuidade à noção usual de limitação que se recupera a limitação total.

Teorema 4.2.46 (Arzelà-Ascoli)**.** *Para X métrico e compacto, uma família $K \subseteq \mathcal{C}(X)$ é totalmente limitada se, e somente se, é limitada e equicontínua.*

Demonstração. As discussões anteriores já deram conta da "ida". Tratemos da "volta". Como X também é totalmente limitado, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto finito $F_n \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x \in F_n} B_X\left[x, \frac{1}{2^n}\right]$, o que resulta num subconjunto enumerável (e denso, certo?) $F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, que pode ser reescrito como $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. O truque agora é aplicar um argumento de diagonalização à moda de Cantor a fim de obter uma subsequência de Cauchy de uma sequência $\langle f_n \rangle_n$ de funções tomadas em K.

Como a família K é limitada com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$, segue que para qualquer $x \in X$, $\langle f_n(x) \rangle_n$ é uma sequência limitada de números reais. Em particular, $\langle f_n(x_0) \rangle_n$ é limitada e, portanto, admite uma subsequência convergente $\langle f_{n,0}(x_0) \rangle_n$. Novamente, $\langle f_{n,0}(x) \rangle_n$ é limitada para todo $x \in X$ e, em particular, para $x := x_1$, $\langle f_{n,0}(x_1) \rangle_n$ tem uma subsequência convergente $\langle f_{n,1}(x_1) \rangle_n$. Procedendo desta forma, obtêm-se sequências $\langle f_{n,k} \rangle_n$ para cada $k \in \mathbb{N}$, de tal forma que $\langle f_{n,k+1} \rangle_n$ é subsequência de $\langle f_{n,k} \rangle_n$ e $\langle f_{n,k}(x_k) \rangle_n$ converge em $\mathbb{R}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Para encerrar, basta mostrar que $\langle f_{k,k} \rangle_k$ é subsequência de Cauchy de $\langle f_n \rangle_n$.

Primeiro, note que $\langle f_{k,k} \rangle_k$ é, de fato, uma subsequência de $\langle f_n \rangle_n$ (certo?)[32]. Além disso, como $\{f_{k,k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ com K equicontínuo, segue que $\{f_{k,k} : k \in \mathbb{N}\}$ também é equicontínua – e mais ainda: por X ser compacto, o exercício anterior assegura que a equicontinuidade é uniforme. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_{k,k}(x) - f_{k,k}(y)| < \varepsilon$ para quaisquer $x, y \in X$ com $d(x,y) < \frac{1}{2^N}$.

Após se convencer de que $\langle f_{k,k} \rangle_{k \geq k'}$ é subsequência de $\langle f_{n,k'} \rangle_n$ para todo $k' \in \mathbb{N}$, não será difícil perceber que $\langle f_{k,k}(z) \rangle_k$ converge em $\mathbb{R}$ para todo $z \in F_N$: tal z é $x_{k'}$ para algum k', e $\langle f_{n,k'}(x_{k'}) \rangle_n$ converge em $\mathbb{R}$. Logo, por F_N ser finito e $\langle f_{k,k}(z) \rangle_k$ ser de Cauchy para cada $z \in F_N$, existe um índice $M \in \mathbb{N}$ com $|f_{k,k}(z) - f_{l,l}(z)| < \varepsilon$ para quaisquer $k, l \geq M$ e $z \in F_N$.

Acabou: para $x \in X$ qualquer, existe pelo menos um $z \in F_N$ com $d(x,z) < \frac{1}{2^N}$, de modo que para $k, l \geq M$,

$$|f_{k,k}(x) - f_{l,l}(x)| \leq |f_{k,k}(x) - f_{k,k}(z)| + |f_{k,k}(z) - f_{l,l}(z)| + |f_{l,l}(z) - f_{l,l}(z)| < 3\varepsilon,$$

donde a arbitrariedade do x tomado acarreta $\|f_{k,k} - f_{l,l}\|_\infty \leq 3\varepsilon$. □

Exercício 4.41. Ajuste os ε's na argumentação anterior e conclua a demonstração. ■

Corolário 4.2.47 (Forma clássica de Arzelà-Ascoli)**.** *Se $\langle f_n \rangle_n$ é uma sequência de funções contínuas da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\langle f_n \rangle_n$ é limitada na norma do supremo e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua, então $\langle f_n \rangle_n$ admite uma subsequência que converge uniformemente para uma função contínua.*

Demonstração. Segue do teorema anterior, posto que $\overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ será fechado e totalmente limitado e, portanto, um espaço métrico compacto. □

[32] Em caso de dúvidas, escreva $\langle f_{n,k} \rangle_n = \langle f_{h_k(n)} \rangle_n$, com $h_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente para todo k e tal que $f_{h_{k+1}(n)} = f_{h_k(h_{k+1}(n))}$. Note que dessa forma, $\langle f_{k,k} \rangle_k$ corresponde à subsequência induzida pela função crescente $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que faz $k \mapsto h_0(h_1(h_2(\ldots(h_k(k)))))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Formalizar tal aberração recursiva é um bom exercício para o leitor preciosista.

Moralmente, o Teorema de Arzelà-Ascoli deve ser encarado como uma versão do Teorema de Heine-Borel-Lebesgue que caracteriza os compactos de $\mathbb{R}^n$: no caso euclidiano clássico, os compactos são caracterizados pela *dobradinha* "fechado+limitado", enquanto que para espaços de funções, Arzelà-Ascoli apenas acrescenta a condição de equicontinuidade. Nesse sentido, as aplicações usuais são análogas: garantir a existência de subsequências convergentes a fim de encontrar soluções de equações.

Exemplo 4.2.48. Considere o problema de mostrar que *toda função polinomial é fechada*, i.e., se $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é polinomial e $F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado, então $p[F]$ é fechado. Ora, na prática, isto consiste em tomar $y \in \overline{p[F]}$ e mostrar que existe $x \in F$ com $p(x) = y$, ou seja: precisamos solucionar a equação "$p(x) = y$". Certamente existe $\langle x_n \rangle_n$ em F com $p(x_n) \to y$, de modo que se $\langle x_n \rangle_n$ convergisse ou, pelo menos, tivesse uma subsequência convergente, a continuidade de p asseguraria uma solução para a equação: se $x_{n_k} \to x$, então $x \in F$ (pois F é fechado) e $p(x_{n_k}) \to p(x)$. O problema é que $\langle x_n \rangle_n$ poderia ilimitada, certo? Errado: se fosse, então haveria uma subsequência $\left\langle x_{n_j} \right\rangle_j$ convergindo para $\pm\infty$ e, por p ser polinomial, resultaria $p(x_{n_j}) \not\to y$. Portanto (e este é o ponto importante!), $\langle x_n \rangle_n$ tem uma subsequência convergente, justamente pela caracterização de compacidade em $\mathbb{R}$.

Se em vez de $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tivéssemos uma função da forma $P\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, por exemplo, e procurássemos uma função g num subconjunto K satisfazendo $P(g) = f$, teríamos uma equação envolvendo funções. Neste caso, se P fosse contínua e K fosse compacto, poderíamos apelar para subsequências de forma semelhante ao que se fez no parágrafo anterior – e, justamente em tais contextos funcionais, costuma ser mais simples verificar limitação e equicontinuidade. ▲

4.3 Conexidade

Última propriedade topológica fundamental da reta a ser abordada no texto, a *conexidade* abstrai a noção de ser formado por um único pedaço, essencialmente a motivação geométrica da reta real como um segmento sem *buracos*.

Definição 4.3.0. Um espaço topológico X é **desconexo** se existem abertos não-vazios de X, digamos U e V, tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$. Diremos que X é **conexo** se X não for desconexo. ¶

Exemplo 4.3.1. $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ com a topologia herdada de $\mathbb{R}$ é desconexo. Analogamente, $\mathbb{Q}$ é desconexo, já que $\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q})$. Mais geralmente, *qualquer* subconjunto de $\mathbb{Q}$ com pelo menos dois pontos é desconexo, o que ficará evidente após alguma musculação com a definição de conexidade, propiciada pela próxima caracterização. ▲

Proposição 4.3.2 (Opcional, mas nem tanto)**.** *Para um espaço topológico X, são equivalentes:*

(i) *X é conexo;*

(ii) *se $F, G \subseteq X$ são fechados não-vazios tais que $X = F \cup G$, então $F \cap G \neq \emptyset$;*

(iii) *se $A \subseteq X$ é aberto e fechado, i.e., **faberto**, então $A \in \{\emptyset, X\}$;*

(iv) *toda função contínua $f\colon X \to \{0,1\}$ é constante*[33].

[33] *Naturalmente*, $\{0,1\}$ é assumido com a topologia discreta.

Demonstração. Todas as implicações serão provadas pela contrapositiva, a começar com (i) $\Rightarrow$ (ii). Se $F, G \subseteq X$ são fechados disjuntos com $X = F \cup G$, então para $U := X \setminus F$ e $V := X \setminus G$ têm-se $X = F \cup G = (X \setminus G) \cup (X \setminus F) = V \cup U \subseteq X$, com U e V abertos disjuntos não-vazios, i.e., X não é conexo. Agora, se $A \subseteq X$ é faberto, com $A \notin \{\emptyset, X\}$, então X se expressa como a reunião disjunta $A \cup (X \setminus A)$, com A e $X \setminus A$ fechados disjuntos não-vazios. Portanto, vale (ii) $\Rightarrow$ (iii). Por sua vez, se $f : X \to \{0, 1\}$ é contínua e não-constante, então $f^{-1}[\{0\}] \neq \emptyset$ e $f^{-1}[\{0\}] \neq X$. Mas $\{0, 1\}$ é discreto e $\{0\}$ é *faberto*, donde a continuidade de f garante que $f^{-1}[\{0\}]$ também é faberto, resultando em (iii) $\Rightarrow$ (iv). Finalmente, se X não é conexo, então existem abertos não-vazios e disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $X = U \cup V$. Daí, tomando-se $f : X \to \{0, 1\}$ como a função característica de U, tem-se f contínua e não-constante. □

Exercício 4.42 (Opcional)**.** Mostre que qualquer espaço métrico enumerável é desconexo. Dica: o conjunto das possíveis distâncias entre pontos do espaço é enumerável, enquanto o conjunto das distâncias disponíveis numa métrica tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$. ■

A razão de ser da condição de conexidade é dada pelo antecipado

Teorema 4.3.3. *Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ é conexo se, somente se, C é intervalo.*

Demonstração. Se C é um intervalo desconexo, então existe um aberto não-vazio $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $W := C \cap V \neq \emptyset$, com $C \setminus W \neq \emptyset$ também aberto em C. Tomando $x \in W$ e $y \in C \setminus W$, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $x < y$. Agora, o subconjunto $B := W \cap (-\infty, y) = \{w \in W : w < y\}$ é não-vazio e limitado superiormente, o que permite tomar $\beta \in \mathbb{R}$ com $\beta := \sup B$, que pertence a C por este ser intervalo (e $x \leq \beta \leq y$). A pergunta a se fazer então é: onde, especificamente, está β?

- ✗ Se $\beta \in W$, então $\beta < y$, donde segue que existe $c \in \mathbb{R}$ com $\beta < c < y$. Por outro lado, $\beta \in V$, o que dá $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\beta \in (\alpha, \gamma) \subseteq V$, e novamente pode-se tomar $d \in \mathbb{R}$ com $\beta < d < \gamma$. Fazendo $e := \min\{c, d\} < y \in C$, segue que $e \in C$ e, consequentemente, $e \in B$ com $\beta < e$, contrariando sua escolha como supremo de B. Portanto, $\beta \notin W$.

- ✗ Logo, resta apenas a opção $\beta \in C \setminus W$. Neste caso, por $C \setminus W$ ser aberto em C, existe $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto com $C \cap U = C \setminus W$ e, por conseguinte, existem $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ com $\beta \in (\alpha, \gamma) \subseteq U$. Ora, como todo $c \in C$ no intervalo (α, γ) deve pertencer a $C \setminus W$, segue que α é um limitante superior de B (verifique?) estritamente menor do que β, contrariando sua escolha como supremo.

Reciprocamente, se C não é intervalo, então existem $a, b \in C$ e $c \in \mathbb{R} \setminus C$ tais que $a < c < b$, donde segue que $U := C \cap (-\infty, c)$ e $V := C \cap (c, +\infty)$ são abertos de C (na topologia induzida de subespaço), disjuntos e tais que $C = U \cup V$, mostrando que C não é conexo. □

Embora os conexos de outros espaços tendam a ser mais selvagens, a conexidade dos intervalos se coloca como uma espécie de arquétipo em virtude do poderosíssimo

Teorema 4.3.4. *Imagem contínua de espaços conexos é conexa.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma sobrejeção contínua. Se X é conexo e $g : Y \to \{0, 1\}$ é contínua, então $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ também é contínua e, consequentemente, constante. Logo, g é constante, donde segue que Y é conexo. □

Demonstração alternativa. Seja $f: X \to Y$ como no argumento anterior. Se $U, V \subseteq Y$ são abertos não-vazios e disjuntos com $Y = U \cup V$, então $X = f^{-1}[Y] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$, com $f^{-1}[U], f^{-1}[V]$ abertos, não-vazios e disjuntos, mostrando que X não é conexo. □

Corolário 4.3.5 (*A.k.a.* **T**eorema do **V**alor **I**ntermediário, T.V.I.)**.** *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ é contínua, então* $\mathrm{im}\,(f)$ *é intervalo. Explicitamente: se $f(x), f(y) \in \mathrm{im}\,(f)$ e γ está entre $f(x)$ e $f(y)$, então existe $z \in I$ entre x e y com $f(z) = \gamma$.*

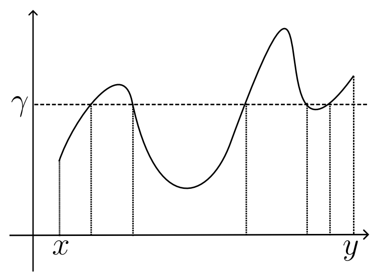


Figura 4.2: Sem tirar o lápis do papel, não se pode traçar o gráfico de f sem passar pelo menos uma vez pela linha pontilhada na altura γ, que está entre $f(x)$ e $f(y)$.

Exercício 4.43. Convença-se de que o corolário anterior é consequência direta dos últimos teoremas. ■

Exemplo 4.3.6 (**Importante**: raízes n-ésimas)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, a função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) := x^n$ é contínua. Ocorre que,

(i) se n é par, então $\mathrm{im}\,(\varphi) = [0, +\infty)$ e,

(ii) se n é ímpar, então $\mathrm{im}\,(\varphi) = \mathbb{R}$.

Com efeito, para o primeiro caso, basta notar que $\varphi(0) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$: de fato, por $\mathrm{im}\,(\varphi)$ ser intervalo e para qualquer $M > 0$ existir $x > 0$ com $\varphi(x) > M$, resulta que $0 < M < \varphi(x)$ e, portanto, $M \in \mathrm{im}\,(\varphi)$. Por sua vez, para n ímpar, tem-se tanto $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$ quanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, de modo que uma simples adaptação do argumento anterior permite mostrar que qualquer $r \in \mathbb{R}$ pertence ao intervalo $\mathrm{im}\,(\varphi)$.

No caso de n par, a restrição de φ ao intervalo $[0, +\infty)$ resulta numa função injetora: como uma desigualdade do tipo $x < y$ acarreta $x^n < y^n$, segue que φ é estritamente crescente e, pelo Exercício 0.55, injetora[34]. Dado que o mesmo argumento mostra a injetividade de $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no caso de n ímpar, fica justificada a introdução das funções raízes n-ésimas como *inversas* das "potências". ▲

Definição 4.3.7. Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Para n par e $\alpha \geq 0$, a raiz n-**ésima** de α é o único $\beta \geq 0$ tal que $\alpha^n = \beta$, denotado por $\sqrt[n]{\alpha}$.

(ii) Para n ímpar e $\alpha \in \mathbb{R}$, a raiz n-**ésima** de α é o único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^n = \beta$, também denotado por $\sqrt[n]{\alpha}$. ¶

[34] Alternativamente, é gratificante notar que $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$, igualdade que também permite garantir a injetividade de $x \mapsto x^n$ nos dois casos.

Exemplo 4.3.8 (**Importante**: adivinhando raízes)**.** O T.V.I. constitui um dispositivo bastante prático para *detectar* a presença de raízes de funções reais contínuas definidas em intervalos: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, por exemplo, e $f(a)\cdot f(b) < 0$, então necessariamente 0 está entre $f(a)$ e $f(b)$, o que obriga a existência de um ponto $c \in [a,b]$ satisfazendo $f(c) = 0$. ▲

Exercício 4.44. Mostre que se p é polinômio de grau ímpar, então existe $r \in \mathbb{R}$ com $p(r) = 0$. ■

Exemplo 4.3.9 (**Importante**: caminhos)**.** Tipicamente, um **caminho** é uma função contínua da forma $\gamma\colon [0,1] \to X$, em que $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ são os pontos *inicial* e *final* do caminho. Note que pelos últimos resultados, a imagem de um caminho é um subespaço conexo e compacto de X. Futuramente, este será o método preferido para mostrar que $\mathbb{S}^1 := \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é subespaço conexo e compacto de $\mathbb{R}^2$. ▲

Antes de explorar os impactos que a conexidade traz para o estudo das funções reais e suas derivadas, pode ser instrutivo tratar da noção de *componente conexa*, a fim de obter uma espécie de caracterização alternativa para os abertos da reta. Primeiro, um lema inócuo:

Lema 4.3.10 (Opcional, mas nem tanto)**.** *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{X}$ uma família de subespaços conexos de X tal que $X = \bigcup \mathcal{X}$. Se existir $x \in \bigcap \mathcal{X}$, então X é conexo.*

Demonstração. Mostraremos que X satisfaz a condição (iv). Ora, dada uma função contínua $f\colon X \to \{0,1\}$, para concluir que f é constante basta tomar $y \in X \setminus \{x\}$ e verificar que $f(y) = f(x)$. Por hipótese, existe $Y \in \mathcal{X}$ tal que $y \in Y$. Daí, como a restrição $f|_Y := f_Y\colon Y \to \{0,1\}$ é contínua e Y é conexo, f_Y deve ser constante, donde se obtém $f(y) = f(x)$, como queríamos. □

Exercício 4.45 (Para quem optou por ignorar o lema)**.** Demonstre a versão do lema anterior para subconjuntos de $\mathbb{R}$, i.e.: mostre que se $\mathcal{X}$ é uma família de intervalos que têm um ponto em comum, então $\bigcup \mathcal{X}$ é um intervalo. ■

O lema anterior justifica a próxima

Definição 4.3.11. Dado um espaço topológico X e um ponto $x \in X$, a **componente conexa** de x é o *maior* subespaço conexo $A \subseteq X$ tal que $x \in A$. ¶

É importante notar que a definição faz sentido: de fato, note que x pertence a cada membro da família $\mathcal{F} := \{A \subseteq X : x \in A \text{ e } A \text{ é conexo}\}$, mostrando que $x \in \bigcap \mathcal{F}$, donde o Lema 4.3.10 garante que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq X$ é um subespaço conexo de X que contém x.

Exercício 4.46. Mostre que as componentes conexas de X constituem uma partição para X. Dica: note que $\sim$ dada por "$x \sim y$ se, e somente se, existe conexo $C \subseteq X$ com $x, y \in C$", é uma relação de equivalência, e que $\overline{x}$ é a componente conexa de x. ■

Proposição 4.3.12. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subespaço não-vazio. Se A é aberto, então existe uma única família $\mathcal{C}$ de intervalos abertos, não-vazios e dois-a-dois disjuntos, tal que $A = \bigcup \mathcal{C}$. Além disso, $\mathcal{C}$ é enumerável.*

Demonstração. Para cada $x \in A$ consideremos $\mathrm{CC}_{x,A}$, a componente conexa de x em A, i.e., o maior subconjunto conexo de A que contém x. Como a conexidade é *intrínseca*[35], segue que $\mathrm{CC}_{x,A}$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, que mostraremos ser aberto: ora, se $y \in \mathrm{CC}_{x,A}$, então $y \in A$ e, por A ser aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in I := (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq A$; como $C := \mathrm{CC}_{x,A} \cup I$ é um subespaço conexo de A que contém x, resulta que $\mathrm{CC}_{x,A} \cup I = \mathrm{CC}_{x,A}$, o que equivale a $I \subseteq \mathrm{CC}_{x,A}$. Como $\mathcal{C} := \{\mathrm{CC}_{x,A} : x \in A\}$ é uma partição de A, existe uma classe de representantes $\mathcal{R} \subseteq A$ tal que $\mathcal{C} = \{\mathrm{CC}_{r,A} : r \in \mathcal{R}\}$ e $\mathrm{CC}_{r,A} \cap \mathrm{CC}_{r',A} = \emptyset$ sempre que $r, r' \in \mathcal{R}$ com $r \neq r'$.

A unicidade de $\mathcal{C}$ decorre de um truque sujo: se $\mathcal{D}$ é *outra* família de intervalos abertos não-vazios e dois-a-dois disjuntos tal que $\bigcup \mathcal{D} = A$, então para cada $D \in \mathcal{D}$ deve-se ter

$$D = D \cap A = D \cap \left(\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathrm{CC}_{r,A} \right) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} D \cap \mathrm{CC}_{r,A},$$

donde a conexidade de D *obriga* que exista um único $r \in \mathcal{R}$ tal que $D \cap \mathrm{CC}_{r,A} \neq \emptyset$ (por quê?!), acarretando $D \cap \mathrm{CC}_{r,A} = D$ e, por conseguinte, $D \subseteq \mathrm{CC}_{r,A}$; ao se repetir o argumento num espelho, obtém-se $D = \mathrm{CC}_{r,A}$ e, portanto, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$; analogamente, mostra-se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Em particular, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, deve-se ter $\mathcal{C}$ enumerável: para cada $C \in \mathcal{C}$ existe $q_C \in \mathbb{Q} \cap C$, o que define uma injeção $\mathcal{C} \to \mathbb{Q}$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

4.3.0 Funções contínuas monótonas

A forte relação entre a conexidade dos intervalos de $\mathbb{R}$ e sua ordem natural manifestada pelo Teorema 4.3.3 sugere que existam relações entre continuidade e monotonicidade. Isto de fato acontece.

Teorema 4.3.13. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função injetora, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. Se f é contínua, então f é estritamente monótona.*

A argumentação típica para o teorema anterior consiste em negar a monotonicidade da função e, por meio do T.V.I., encontrar pontos que testemunhem contra sua injetividade.

Exercício 4.47. Demonstre o teorema anterior. ■

Há, no entanto, um roteiro bem mais divertido – pelo menos para quem gosta de se aventurar em $\mathbb{R}^2$.

Definição 4.3.14. Um subconjunto C de um espaço normado E é dito **convexo** se para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$ valer que $tx + (1 - t)y \in C$. ¶

A convexidade significa que o "segmento de reta" $[x, y] := \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$ entre quaisquer dois pontos x e y de C está contido em C. Com isso em mente, a próxima conclusão é quase irresistível:

Lema 4.3.15. *Subconjuntos convexos são conexos.*

Demonstração. Se C é convexo e $x \in C$, então para qualquer y se verifica $y \in [x, y] \subseteq C$, onde o último é subconjunto conexo de C por ser imagem da função contínua $[0, 1] \to C$ que faz $t \mapsto tx + (1 - t)y$. Logo, C é a componente conexa de x em C, i.e., C é conexo. □

[35] No sentido de não ser relativa a outros espaços. Mais precisamente: se X é subespaço de Y que é subespaço de Z, então X é subespaço *conexo* de Y se, e somente se, é subespaço *conexo* de Z.

Lema 4.3.16. *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, então $M := \{\langle x, y\rangle \in I \times I : x < y\}$ é convexo.*

Demonstração. Precisa-se mostrar que $t\langle x, y\rangle + (1-t)\langle a, b\rangle \in M$ para quaisquer pontos $\langle x, y\rangle, \langle a, b\rangle \in M$ e $t \in [0, 1]$. O resultado é óbvio para $t \in \{0, 1\}$. Para $0 < t < 1$, note que por valer $x < y$ e $a < b$, deve-se ter $tx < ty$ e $(1-t)a < (1-t)b$, acarretando $tx + (1-t)a < ty + (1-t)b$. Resta verificar que $tx + (1-t)a, ty + (1-t)b \in I$. Ora: se $x \leq a$, então $tx \leq ta$ e $(1-t)x \leq (1-t)a$, desigualdades que resultam em $x \leq tx + (1-t)a \leq a$, donde o fato de I ser intervalo assegura a pertinência desejada; os demais casos são análogos. □

Demonstração do Teorema 4.3.13. A função $g\colon M \to \mathbb{R}$ que faz $g(x, y) := f(x) - f(y)$ é contínua. Como M é conexo (por ser convexo), o Teorema 4.3.4 garante que $\mathrm{im}\,(g)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, que não pode conter 0 por f ser injetora (verifique?!). Logo, $\mathrm{im}\,(g) \subseteq (-\infty, 0)$ ou $\mathrm{im}\,(g) \subseteq (0, +\infty)$, o que resulta em f ser estritamente crescente ou estritamente decrescente, respectivamente. □

Observação 4.3.17. Importante destacar que a recíproca do Teorema 4.3.13 é falsa, i.e.: há funções descontínuas e monótonas definidas em intervalos, como o leitor certamente é capaz de intuir por meio de gráficos simples. No entanto, são "poucos" os pontos em que f é descontínua, como já se discutiu no Exercício 3.93. △

O teorema demonstrado acima é mais um dos indicativos de que a reformulação metodológica promovida pela Análise cumpre bem o papel de modelar as noções intuitivas do Cálculo: na prática, para desenhar o gráfico de uma função sem tirar o lápis do papel e sem repetir valores na imagem, não é possível alternar o padrão de crescimento/decrescimento da função, já que isso forçaria o gráfico a repetir valores assumidos anteriormente. Mas tal resultado não se presta somente a isso.

Corolário 4.3.18. *Sejam I um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva. Se J denota a imagem de f, então a inversa $f^{-1}\colon J \to I$ é contínua.*

Demonstração. Primeiro, note que o T.V.I. assegura que J é intervalo, enquanto o último teorema garante que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Agora, o restante da prova consiste em perceber se f é estritamente crescente, então f leva intervalos de um tipo a intervalos do mesmo tipo[36]: por exemplo, para $\alpha, \beta \in I$ com $\alpha < \beta$, tem-se $f[[\alpha, \beta)] = [f(\alpha), f(\beta))$ pois

$$\begin{aligned} \alpha \leq x < \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(x) < f(\beta) &\qquad \text{por ser estritamente crescente} \\ f(\alpha) \leq \gamma < f(\beta) \Rightarrow \exists x \in [\alpha, \beta) \text{ tal que } f(x) = \gamma &\qquad \text{pelo T.V.I.} \end{aligned}$$

Analogamente, $f[(\alpha, \beta)] = (f(\alpha), f(\beta))$ e $f((\alpha, \beta]] = (f(\alpha), f(\beta)]$. Daí, como vale a identidade $(f^{-1})^{-1}[K] = f[K]$ para qualquer subconjunto $K \subseteq I$, conclui-se que as pré-imagens de abertos básicos de I por f^{-1} são abertos básicos de J. □

Corolário 4.3.19. *Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a função $\sqrt[n]{\cdot}$ é contínua.*

Exercício 4.48. Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ se n for ímpar. ■

[36] Para lidar com o caso estritamente decrescente, basta notar que em tal situação, $-f$ é estritamente crescente.

Exemplo 4.3.20 (**Importante**: bijeções sem inversas contínuas)**.** O Corolário 4.3.18 pode trazer a impressão de que funções contínuas têm o mesmo comportamento dos morfismos algébricos no que se refere às inversas: no caso de transformações lineares, por exemplo, não é difícil provar que a inversa de qualquer transformação linear bijetora ainda é linear[37]. Da mesma forma, pelo corolário supracitado, a inversa de qualquer bijeção contínua entre intervalos tem inversa contínua. Infelizmente, isto não vale em geral.

Por exemplo, a função $f\colon [0,1)\cup[2,3)\to[0,2)$, que faz $f(x) := x$ para $x\in[0,1)$ e $f(x) := x-1$ para $x\in[2,3)$, é contínua em todos os pontos de seu domínio, mas sua inversa não é contínua. Num primeiro momento, o leitor pode resistir a este exemplo, argumentando que o próprio domínio de f tem um salto, o que nos traz novamente ao mantra: não trate intuições ou analogias ("ah! mas é que função contínua é aquela que eu não tiro o lápis do papel para desenhar!!!") como se fossem as definições!

No caso, o domínio de f é o subconjunto $X := [0,1)\cup[2,3)$ com a topologia de subespaço herdada de $\mathbb{R}$, que tem como abertos todos os subconjuntos de X que são da forma $A\cap X$ para algum $A\subseteq\mathbb{R}$ aberto. Assim, o leitor não deve ter problemas para acreditar que f é contínua para todo $x\in[0,1)\cup(2,3)$. A confusão pode ocorrer no ponto 2, mas isto se resolve rápido:

(i) via ε's-δ's, note que para $\varepsilon>0$, qualquer $x\in X$ com $|x-2|<\min\{\varepsilon,1\}$ satisfaz $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$, pois da desigualdade $|x-2|<1$ resulta $x\in[2,3)$, e daí $|f(x)-f(2)| = |x-1-1| = |x-2| < \varepsilon$;

(ii) via pré-imagens de intervalos abertos, note que $f^{-1}[(1-\varepsilon,1+\varepsilon)] = (1-\varepsilon,1)\cup[2,2+\varepsilon)$, que é um aberto de X.

Por outro lado, $f^{-1}\colon[0,2)\to[0,1)\cup[2,3)$ não tem *qualquer* chance de ser contínua em todos os pontos, já que $[0,2)$ é conexo enquanto $[0,1)\cup[2,3)$ não é. O leitor que preferir pode verificar que f é descontínua, precisamente, em 1. ▲

4.3.1 O Teorema do Valor Médio

Ao combinar a conexidade dos intervalos com a compacidade dos subconjuntos fechados e limitados, chega-se no seguinte

Teorema 4.3.21 (Rolle)**.** *Para $a,b\in\mathbb{R}$ com $a<b$ e uma função contínua $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, diferenciável em todo o intervalo (a,b) e tal que $f(a)=f(b)$, existe $c\in(a,b)$ com $f'(c)=0$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, f admite um ponto de máximo e um ponto de mínimo. Se tais pontos coincidirem com os extremos do intervalo, então f é constante e, portanto, tem derivada nula. Se, porém, algum desses pontos pertencer a (a,b), então será um ponto de acumulação bilateral de $[a,b]$, extremo *local* de f em que a função é diferenciável. Logo, pela Proposição 3.2.22, a derivada neste ponto será nula. □

Corolário 4.3.22 (*A.k.a.* **T**eorema do **V**alor **M**édio, T.V.M.)**.** *Para $a,b\in\mathbb{R}$ com $a<b$ e uma função contínua $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ diferenciável no intervalo (a,b), existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

[37] Em particular, pelo Corolário 4.2.29, toda bijeção linear $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tem inversa contínua. Apesar disso, fica o alerta: tal regularidade se perde em dimensão infinita!

Demonstração. A ideia é manipular f para obter uma função g satisfazendo as hipóteses do Teorema de Rolle, de modo que a partir da identidade $g'(c) = 0$ se possa concluir $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ou seja: precisa-se que $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Um modo razoável de fazer isso consiste em definir $g(x) \coloneqq f(x) - \gamma x$, onde $\gamma \coloneqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: tem-se g contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e tal que $g(a) = g(b)$ (verifique?!). □

O T.V.M. tem diversas consequências que merecem ser exploradas com atenção

Comportamentos locais revisitados

Antiderivadas

Opcional: derivadas parciais

ANCORA

4.4 Opcional: principais encarnações da reta real

Como toda sequência convergente em $\mathbb{K}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, corpos Cauchy completos são aqueles nos quais toda sequência que tem *uma chance de convergir*, de fato, converge. Assim, o exemplo anterior mostra que $\mathbb{Q}$ não é Cauchy completo, posto que admite sequências que poderiam convergir, mas não convergem em $\mathbb{Q}$. Em particular, o fato de que a sequência exibida converge em $\mathbb{R}$ não foi acidental, mas sim um sintoma de que $\mathbb{R}$ é Cauchy completo[38].

Lema 4.4.0. *Seja $\langle x_n \rangle_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Se $\langle x_n \rangle_n$ tem uma subsequência convergente em $\mathbb{K}$, então $\langle x_n \rangle_n$ é convergente em $\mathbb{K}$*

Demonstração. Seja $\langle x_{n_k} \rangle_k$ subsequência de $\langle x_n \rangle_n$, convergente em $\mathbb{K}$, digamos $x_{n_k} \to x$ para $x \in \mathbb{K}$. Para $\varepsilon \in \mathbb{K}$ com $\varepsilon > 0_{\mathbb{K}}$, existem

✓ $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m|_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq N$, e

✓ $K \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_k} - x|_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ para qualquer $k \geq K$.

Como $k \mapsto n_k$ é estritamente crescente, pode-se tomar $N' \in \mathbb{N}$ com $N' \geq K$ e $n_{N'} \geq N$, donde segue que

$$|x_n - x|_{\mathbb{K}} \leq |x_n - x_{n_{N'}}|_{\mathbb{K}} + |x_{n_{N'}} - x|_{\mathbb{K}} < 2_{\mathbb{K}}\varepsilon$$

para todo $n \geq N$, mostrando que $x_n \to x$, como desejado. □

Em certo sentido, a completude no sentido de Cauchy também expressa que $\mathbb{R}$ não tem buracos. Porém, em vez de atestar a ausência de cortes não triviais (Definição 1.1.15 e Exercício 1.21), a completude de Cauchy evita sequências que convirjam para *buracos*. Desse modo, é legítimo perguntar o que ocorreria se, na definição de corpo ordenado completo, utilizássemos a última completude – e não a primeira, no sentido de Dedekind.

Definição 4.4.1. Um corpo totalmente ordenado $\mathbb{K}$ é...

(c_i) **Monotonicamente completo** se toda sequência monótona e limitada em $\mathbb{K}$ converge em $\mathbb{K}$.

(c_{ii}) **Bolzano-Weierstrass completo** se toda sequência limitada em $\mathbb{K}$ tem subsequência convergente em $\mathbb{K}$.

(c_{iii}) **Bolzano completo** se todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{K}$ tem ponto de acumulação em $\mathbb{K}$

(c_{iv}) **Cauchy completo** se toda sequência de Cauchy converge em $\mathbb{K}$

(c_v) **Dedekind completo** se todo subconjunto não-vazio limitado superiormente tem supremo em $\mathbb{K}$. ¶

Teorema 4.4.2. *As definições acima são equivalentes entre si para corpos arquimedianos.*

[38] Na verdade, $\mathbb{R}$ é o *completamento* de Cauchy de $\mathbb{Q}$, num sentido que será esmiuçado no Epílogo deste livro.

Demonstração. A estrutura da prova é bem simples: mostrar as implicações

$$(c_i) \Rightarrow (c_{ii}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (c_v) \Rightarrow (c_i),$$

sendo que $(c_i) \Rightarrow (c_{ii})$ e $(c_v) \Rightarrow (c_i)$ já foram provadas no Corolário **??** e no Exercício 3.29, respectivamente. Por simplicidade, o subíndice "$\mathbb{K}$" será abandonado nos argumentos a seguir.

$(c_{ii}) \Rightarrow (c_{iii})$. Se $A \subseteq \mathbb{K}$ é infinito e limitado, então existe uma sequência injetiva $\langle x_n \rangle_n$ de elementos de A, que tem uma subsequência convergente por hipótese. O Exercício 3.74 então prova que o limite dessa subsequência é ponto de acumulação de A.

$(c_{iii}) \Rightarrow (c_{iv})$. Em vista do Lema 4.4.0, basta mostrar que toda sequência de Cauchy $\langle x_n \rangle_n$ tem subsequência convergente: ora, se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for um conjunto finito, então o problema está resolvido (por quê?!); se não, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um ponto de acumulação por hipótese, já que sequências de Cauchy são limitadas, donde ~~é fácil~~ não é difícil construir uma subsequência convergente.

$(c_{iv}) \Rightarrow (c_v)$. Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado superiormente, digamos que por $M_0 \in \mathbb{K}$ com $M_0 > 0$. Fixado $x_0 \in S$, define-se $p_0 := \frac{1}{2}(x_0 + M_0)$. Daí:

(i) se p_0 for limitante superior de S, faz-se $a_0 := x_0$ e $b_0 := p_0$;

(ii) se não, faz-se $a_0 := p_0$ e $b_0 := M_0$.

Supondo definidos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ e $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que

$(\star_i)$ para todo $j \leq n$, $b_j - a_j = \dfrac{b_0 - a_0}{2^j}$ e $a_j \leq b_j$,

$(\star_{ii})$ para todo $j < n$, $[a_{j+1}, b_{j+1}] \subseteq [a_j, b_j]$, e

$(\star_{iii})$ para todo $j \leq n$, b_j limita S superiormente e existe $s \in S$ com $a_j \leq s$,

define-se $p_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Daí:

(i) se p_{n+1} for limitante superior de S, faz-se $a_{n+1} := a_n$ e $b_{n+1} := p_{n+1}$;

(ii) se não, faz-se $a_{n+1} := p_{n+1}$ e $b_{n+1} := b_n$,

de modo que as sequências finitas $\langle a_j \rangle_{j \leq n+1}$ e $\langle b_j \rangle_{j \leq n+1}$ satisfazem as condições $(\star_i)$, $(\star_{ii})$ e $(\star_{iii})$ anteriores.

Ao se considerarem as sequências $\langle a_n \rangle_n$ e $\langle b_n \rangle_n$ obtidas pelo procedimento recursivo acima, a condição $(\star_{ii})$ garante que a primeira é crescente, enquanto a segunda é decrescente. Por sua vez, a condição $(\star_i)$ assegura que ambas são de Cauchy, donde a hipótese implica que ambas convergem em $\mathbb{K}$, digamos que para $a, b \in \mathbb{K}$, respectivamente. Aplicando-se então, novamente, a condição (i), verifica-se que $a = b$. Por fim, da condição $(\star_{iii})$, segue que $b = \sup S$: como $s \leq b_n$ para quaisquer $s \in S$ e $n \in \mathbb{N}$, resulta $s \leq \lim_n b_n = b$, mostrando que b limita S superiormente; se $x \in \mathbb{K}$ é limitante superior de S, então $a_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e daí $a = \lim_n a_n \leq x$, mostrando que $a = b$ é o menor limitante superior de S, o que encerra a prova. $\square$

Exercício 4.49. Complete os detalhes da demonstração anterior. Em particular: em que parte da prova de (c$_{iv}$) $\Rightarrow$ (c$_v$) utilizou-se a hipótese de $\mathbb{K}$ ser arquimediano? ■

Ao longo das próximas (sub) seções, veremos como as diversas manifestações da completude de $\mathbb{R}$ se traduzem *topologicamente* e, mais importante: como utilizá-las na demonstração de resultados fundamentais para a Análise, como o *Teorema de Weierstrass* (*a.k.a.* valor máximo) e o *Teorema do Valor Intermediário.*

Exercícios adicionais

Exercício 4.50. Seja $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ uma pré-ordem. Mostre que se $\preceq$ for total, então $\mathbb{T}$ é um conjunto dirigido. ■

Exercício 4.51. Seja $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma pré-ordem. Mostre que se $\mathbb{P}$ tem máximo, então $\mathbb{P}$ é dirigido. ■

Exercício 4.52. Reflita: o resultado anterior se manteria válido se em vez de elemento "máximo" fosse elemento "maximal"? ■

Exercício 4.53. Sejam $\langle x_d \rangle_d$ uma *net* real convergente em $\mathbb{R}$. Mostre que existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\{x_d : d \geq D\}$ é limitado. Interprete o resultado para limites de funções. ■

Exercício 4.54. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ com $A \neq \emptyset$.

a) Mostre que $\sup A = \lim\limits_{x \in \mathbb{D}} x$ (em $\overline{\mathbb{R}}$), onde $\mathbb{D}$ denota o conjunto A dirigido pela ordem $\leq$ de $\mathbb{R}$.

b) Mostre que $\inf A = \lim\limits_{x \in \mathbb{E}} x$ (em $\overline{\mathbb{R}}$), onde $\mathbb{E}$ denota o conjunto A dirigido pela ordem (inversa) $\geq$ de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 4.55. Sejam $Y \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio, $g\colon Y \to \mathbb{R}$ uma função e $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ pontos na reta estendida, com λ ponto de acumulação de Y. Mostre que $\lim\limits_{y \to \lambda} g(y) = \mu$ se, e somente se, para todo intervalo aberto $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\mu \in K$ existe um intervalo aberto $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in J$ e tal que $g(y) \in K$ para todo $y \in J \cap (Y \setminus \{\lambda\})$. ■

Exercício 4.56. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, $\langle x_n \rangle_n$ uma sequência em $\mathbb{K}$ e $x \in \mathbb{K}$.

a) Mostre que se $\langle x_n \rangle_n$ é crescente com $x_n \to x$, então $x = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ em $\mathbb{K}$.

b) Mostre que se $\langle x_n \rangle_n$ é decrescente com $x_n \to x$, então $x = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ em $\mathbb{K}$. ■

Exercício 4.57. Sejam X um espaço topológico e $S, F \subseteq X$, com F fechado e $S \subseteq F$. Mostre que $\overline{S} \subseteq F$. Conclua que se $C \subseteq X$ é um fechado tal que $S \subseteq C$ e $C \subseteq \overline{S}$, então $\overline{S} = C$. ■

Exercício 4.58. Caso não lhe pareça óbvio, refaça o exercício anterior trocando X por $\mathbb{R}$ com sua topologia usual. ■

Exercício 4.59. Mostre que se $F \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto finito, então $\mathbb{R} \setminus F$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 4.60. Determine o fecho dos seguintes subconjuntos.

Exercício 4.61 (interior em função do fecho)**.** ■

Exercício 4.62. Determine o interior dos seguintes subconjuntos.

Exercício 4.63. Mostre que todo ponto de acumulação de S é ponto aderente a S. Mostre que a recíproca não vale em geral. $\blacksquare$

Exercício 4.64. Mostre que $\overline{S} = S \cup S^{\mathrm{d}}$, onde S^{d} denota o **conjunto derivado de** S, explicitamente a família dos pontos de acumulação de S. $\blacksquare$

Exercício 4.65. [Teorema de Weierstrass – prova crua]

$\blacksquare$

Exercício 4.66. Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subconjunto qualquer.

a) Mostre que $G \subseteq S$ é fechado em S se, e somente se, existe um subconjunto $F \subseteq X$ fechado em X com $G = S \cap F$.

b) Mostre que se S é fechado, então $G \subseteq S$ é fechado em S se, e somente se, é fechado em X.

c) Mostre que se S é aberto, então $H \subseteq S$ é aberto em S se, e somente se, é aberto em X. $\blacksquare$

Exercício 4.67 (Confira o Exercício 2.44)**.** Para um espaço métrico $\langle X, d\rangle$ e um subconjunto $A \subseteq X$, mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(x, A)$. Dica: lembre-se de que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $\langle x_n\rangle_n$ em A com $x_n \to x$; também pode ser útil usar o fato de que a função $x \mapsto d(x, A)$ é contínua. $\blacksquare$

Exercício 4.68. Mostre que nenhuma das implicações na Observação 4.0.27 é reversível em geral.

a) (contraexemplo)

b) (contraexemplo)

c) (contraexemplo)

d) (contraexemplo) $\blacksquare$

Exercício 4.69. Seja S um subconjunto de um espaço métrico $\langle X, d\rangle$.

a) Mostre que se S é completo com a métrica induzida, então S é fechado em X.

b) Mostre que se X é completo e S é fechado, então S é completo com a métrica induzida. $\blacksquare$

Exercício 4.70. Seja $\sum x_n$ uma série condicionalmente convergente em $\mathbb{R}$.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $x_n^+ := \max\{a_n, 0\}$ e $x_n^- := \min\{a_n, 0\}$. Convença-se de que $\sum x_n = \sum x_n^+ + \sum x_n^-$.

b) Mostre que se $\sum x_n^+$ ou $\sum x_n^-$ convergissem em $\mathbb{R}$, então $\sum x_n$ seria absolutamente convergente. $\blacksquare$

Exercício 4.71. Para $X \subseteq [0, +\infty)$, defina $\sum X := \left\{\sum_{x \in F} x : F \subseteq X \text{ com } \emptyset \neq F \text{ finito}\right\}$. Por fim, seja $A := \{x \in X : x > 0\}$.

a) Mostre que se A é não-enumerável, então $\sum X = +\infty$. Dica: perceba que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde $A_n := \{x \in X : x > \frac{1}{n}\}$ e use o Princípio da Casa dos Pombos para garantir a não-enumerabilidade de pelo menos um A_n.

b) Mostre que se A é enumerável, então $\sum X = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ para qualquer bijeção $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dica: note que para qualquer $F \subseteq X$ finito existe $m \in \mathbb{N}$ com $F \cap A \subseteq \{\varphi(j) : j \leq m\}$. $\blacksquare$

Exercício 4.72. Seja $\sum x_n$ uma série num espaço de Banach E.

a) Mostre que se $\sum x_n$ converge absolutamente, então $\sum x_{\varphi(n)} = \sum x_n$ para qualquer bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dica: note que a convergência absoluta de $\sum x_{\varphi(n)}$ segue da convergência absoluta de $\sum x_n$ em virtude do exercício anterior.

b) (*A.k.a.* Teorema do Rearranjo de Riemann) Com $E := \mathbb{R}$, mostre que se $\sum x_n$ é condicionalmente convergente e $r \in \mathbb{R}$, então existe uma bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum x_{\varphi(n)} = r$. Dica: note que o Exercício 4.70 assegura $\sum x_n^+ = +\infty$ e $\sum x_n^- = -\infty$, o que permite selecionar alternadamente parcelas à direita e à esquerda de r. ■

Exercício 4.73. Mostre que se $x \in \mathbb{R}$ admite representações decimais distintas, então x é da forma $\dfrac{n}{10^k}$ para certos $n, k \in \mathbb{Z}$. Dica: se $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{10^n}$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{10^n} = 0$. ■

Exercício 4.74 (Opcional: bases como tijolos)**.** Bases permitem descrever uma topologia já conhecida dentro de um certo contexto. Alternativamente, é possível *construir* topologias que tenham certas famílias como bases, desde que se assegurem certas restrições. Fixado um conjunto X, uma família $\mathcal{B} \neq \emptyset$ de subconjuntos de X será chamada de **base para *uma* topologia** em X se

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$, i.e., para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$, e

(ii) para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in X$, se $x \in A \cap B$, então existe $C \in \mathcal{B}$ com $x \in C$ e $C \subseteq A \cap B$.

Com isso em mente, mostre que se $\mathcal{B}$ é base para *alguma* topologia em X, então existe uma única topologia $\mathcal{T}$ em X tal que $\mathcal{B}$ é base para $\mathcal{T}$. ■

Exercício 4.75 (Opcional)**.** Para um conjunto X não-enumerável (por exemplo, $X := \mathbb{R}$), fixe $p \in X$ e considere $\mathcal{T}$ a família dos subconjuntos $A \subseteq X$ que satisfazem uma das duas condições a seguir:

(i) $p \notin A$;

(ii) $p \in A$ e $X \setminus A$ é enumerável.

Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia de Hausdorff em X com a seguinte propriedade: para qualquer subconjunto enumerável $N \subseteq X$, $X \setminus N$ é um aberto de X que contém p. Conclua que $p \in \overline{X \setminus \{p\}}$ mas não existe sequência $\langle x_n \rangle_n$ em $X \setminus \{p\}$ tal que $x_n \to p$. ■

Exercício 4.76 (Opcional)**.** Considere $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o espaço das funções da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a topologia introduzida na Definição 3.0.35. Agora, sejam

$$A := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \operatorname{im}(f) \subseteq \{0, 1\} \text{ com } \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \text{ enumerável}\} \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

e a função $\underline{0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que os elementos de A são as funções características dos subconjuntos cofinitos de $\mathbb{R}$.

a) Mostre que $\underline{0} \in \overline{A}$.

b) Dada uma sequência $\langle f_n \rangle_n$ em A, mostre $\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to \underline{0}(x)\}$ é enumerável.

c) Conclua que não existe sequência $\langle f_n \rangle_n$ em A com $f_n \to \underline{0}$. ■

Exercício 4.77. Uma função f entre espaços métricos X e Y é **de Lipschitz**[39] se existe uma constante $K > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) \leq K d(x, x')$ para quaisquer $x, x' \in X$. Convença-se de que uma transformação linear é contínua se, e somente se, é de Lipschitz. ■

[39] Ou *lipschitziana* para quem gosta de trava-línguas.

Exercício 4.78. Sem apelar para as caracterizações de compacidade demonstradas ao longo do texto, mostre que $[a, b]$ é subespaço compacto de $\mathbb{R}$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Dica: para uma coleção $\mathcal{U}$ de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $[a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, considere o subconjunto $A := \{x \in [a, b] : [a, x]$ admite uma subcobertura finita de $\mathcal{U}\}$; mostre que $A \neq \emptyset$ é limitado superiormente, daí observe que $\sup A \in A$ e, finalmente, $\sup A = b$. ■

Exercício 4.79. Mostre que se X e Y são conexos, então $X \times Y$ é conexo. Dica: mostre que $U_x := (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \cup Y)$ é um subespaço conexo de $X \times Y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$ fixados; depois, mostre que $X \times Y = \bigcup_{x \in X} U_x$. ■

Exercício 4.80 (Opcional)**.** Mostre que *qualquer* norma sobre o espaço das funções polinomiais da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$ é incompleta. ■

old

Exercício 4.81. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função Cauchy-integrável, então $\displaystyle\sum_{\mathcal{P}} f(t) \to \fint_a^b f\,\mathrm{d}t$, com $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[[a, b]]$ dirigido pela ordem da inclusão. ■

Exercício 4.82. Vale a recíproca do exercício anterior? Observação: não faço ideia. ■

Teorema 4.4.3. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções diferenciáveis definidas em $[a, b]$ que converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se a sequência $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ das derivadas também converge uniformemente, então f é diferenciável. Além disso, $f' = \lim_{n \to +\infty} f_n'$.*

Demonstração. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a função para a qual a sequência $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente. Começamos a prova pelo caso “fácil”, no qual cada derivada é contínua.

Neste cenário, os resultados anteriores nos dizem que g, tal qual as derivadas f_n', é Riemann-integrável – na verdade, g é contínua! Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^x f_n' = f_n(x) - f_n(a) \Rightarrow f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n',$$

que converge uniformemente para $f(a) + \displaystyle\int_a^x g$ pelo exercício anterior. Como também temos $f_n \to f$, a unicidade dos limites nos dá

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g$$

para cada $x \in [a, b]$. Novamente aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo, segundo o qual a igualdade acima permite aferir que f é uma primitiva de g, i.e., $f' = g$.

No caso geral, fixamos $\alpha \in [a, b]$ e definimos $\varphi_n(t)$ e $\varphi(t)$ por

$$\varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(\alpha)}{t - \alpha} \quad \text{e} \quad \varphi(t) := \frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha}$$

se $t \neq \alpha$, e $\varphi_n(\alpha) := f_n'(\alpha)$ e $\varphi(\alpha) := g(\alpha)$. Note que cada φ_n é contínua em $[a, b]$ (por quê?!) e, por construção, $\varphi_n \to \varphi$ pontualmente. Afirmamos que esta última convergência é uniforme.

Para isso, vamos nos valer do fato provado na seção anterior de que $\mathcal{B}[a, b]$, o espaço das funções limitadas definidas em $[a, b]$, é de Cauchy com a métrica do supremo[40]. Note que para $n, m \in \mathbb{N}$, temos

$$\varphi_m(x) - \varphi_n(x) = \frac{f_m(x) - f_m(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{f_n(x) - f_n(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(\alpha) - f_n(\alpha))}{x - \alpha}.$$

Como $f_m - f_n$ é diferenciável, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, que nos dá ϑ entre x e t satisfazendo

$$\frac{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(\alpha) - f_n(\alpha))}{x - \alpha} = f'_m(\vartheta) - f'_n(\vartheta).$$

Por termos a convergência $f'_n \to g$ uniforme, fixado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica em $|f'_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in [a, b]$. Logo $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para $m, n \geq N$ e, consequentemente,

$$|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = |f'_m(\vartheta) - f'_n(\vartheta)| < \varepsilon$$

mostrando que a sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{B}[a, b]$. Logo, existe $\psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada com $\varphi_n \to \psi$ uniformemente – na verdade, como cada φ_n é contínua, temos ψ contínua. Enfim, a unicidade de limites nos leva a concluir que $\psi = \varphi$. E daí? Ora

$$f'(\alpha) := \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x\to\alpha} \varphi(x) = \varphi(\alpha) = g(\alpha),$$

donde o resultado segue da arbitrariedade do α tomado. □

Exercício 4.83. Escreva um roteiro curto da demonstração acima, destacando os pontos chave. ■

Observação 4.4.4. A versão "fácil" que provamos acima pode ser afrouxada, como feita pelo Elon: se cada f'_n é contínua, então basta que exista $c \in [a, b]$ com $f_n(c) \to \gamma$ para algum γ. Daí, basta observarmos que $f_n(x) = f_n(c) + \displaystyle\int_c^x f'_n$ e repetir a demonstração, mutatis mutandis. △

Assim, a convergência uniforme é apelativa por si só. Nesse sentido, o próximo teorema, apesar de simples, é tremendamente impactante.

Teorema 4.4.5 (Dini)**.** *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas e f uma função contínua, todas definidas no subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, o qual assumimos compacto. Se $f_n \to f$ com $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monótona para cada $x \in X$, então $f_n \to f$ uniformemente.*

Demonstração. Nesta prova, que adaptamos *do Elon*, usaremos fortemente a compacidade de X.

Primeiro, afirmamos que se $\mathcal{F} := \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família de *fechados* de X com $F_n \supset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_N = \emptyset$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, o subconjunto $X \setminus F_n$ é um *aberto* de $\mathbb{R}$, de modo que devemos ter

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus F_n,$$

[40] Um jeito de evitar terminologia de espaços métricos é provar que "se $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções limitadas uniformemente de Cauchy – no sentido de que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon$ para quaisquer $n, m \geq N$ e $x \in X$ –, então existe g tal que $g_n \to g$ uniformemente". Isto é precisamente o que provamos na seção anterior, sem a roupagem de espaços métricos.

donde a compacidade de X nos dá $N \in \mathbb{N}$ com $X = \bigcup_{n=1}^{N} X \setminus F_n$ e, consequentemente,

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{N} F_n = F_N,$$

como queríamos.

O próximo passo é usar as hipóteses sobre f_n e f a fim de obter uma família $\mathcal{F}$ marota de fechados que nos permita concluir o resultado desejado. Para $\varepsilon > 0$ fixado e $n \in \mathbb{N}$ qualquer, fazemos

$$F_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

o qual é um fechado de X pois F_n é pré-imagem do fechado $[\varepsilon, +\infty)$ pela função contínua $|f_n - f|$. Agora, a monotonicidade de $(f_n)_n$ garante que $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De fato, se, por exemplo, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é não-decrescente, então $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, donde segue que $f(x) - f_n(x) \geq 0$ para todo n e, consequentemente,

$$|f_{n+1}(x) - f(x)| = f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x) = |f_n(x) - f(x)|.$$

Tal desigualdade garante que $F_n \supset F_{n+1}$ para cada n. Logo, pelo que discutimos acima, existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_N = \emptyset$ (por quê?!), o que se traduz precisamente na condição de convergência uniforme desejada. $\square$

Capítulo 5

Integração

[ainda falta editar]

Neste segundo curso de Análise, vamos prosseguir com a fundamentação dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, de modo que, mais uma vez, as protagonistas serão as funções reais. No primeiro terço do curso, nossa atenção se voltará (principalmente) para funções da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, sobre as quais estudaremos a noção de integral.

5.0 Uma abordagem axiomática para integração

A ideia básica da integração consiste no seguinte: dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq b$, desejamos associar um número real $\displaystyle\int_a^b f$ (frequentemente também denotado como $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, entre outras notações), que costuma ser chamado de **integral definida de** f em $[a, b]$. Quando ocorre $f \geq 0$ (o que abrevia $f(x) \geq 0$ para todo x no domínio de f), a intuição que temos do número $\displaystyle\int_a^b f$ diz que ele deveria representar a área da região limitada pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ e $y = 0$. Contudo, tal intuição não é minimamente razoável para definir qualquer coisa matematicamente[0].

Um pouco mais rigorosamente, para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, buscamos definir uma função

$$\int_a^b : \mathcal{I}[a, b] \to \mathbb{R},$$

onde $\mathcal{I}[a, b]$ é algum conjunto razoável de funções da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, que a cada $f \in \mathcal{I}[a, b]$ associa o número $\displaystyle\int_a^b f \in \mathbb{R}$. Dadas as intuições geométricas, bem como as exigências da vida, esperamos que a correspondência $\displaystyle\int_a^b$ satisfaça as seguintes condições:

(i) se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f \in \mathcal{I}[a, b]$;

(ii) se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f \in \mathcal{I}[a, b]$, então f é limitada;

[0] A menos que estejamos no contexto da Teoria da Medida, cuja motivação inicial reside, precisamente, em formalizar as noções de *medida* que podemos associar a *certos* subespaços. Este não é o nosso caso.

(iii) se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função constante, digamos $f = c$, então $f \in \mathcal{I}[a,b]$ e

$$\int_a^b c = c(b-a); \tag{5.0}$$

(iv) se $f_1, f_2 \in \mathcal{I}[a,b]$ e $f_1 \leq f_2$, então

$$\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2; \tag{5.1}$$

(v) dadas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c \in [a,b]$, temos $f \in \mathcal{I}[a,b]$ se, e somente se, $f \in \mathcal{I}[a,c]$ e $f \in \mathcal{I}[c,b]$;

(vi) se $f \in \mathcal{I}[a,b]$ e $c \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{5.2}$$

Mas afinal, o que é $\displaystyle\int_a^b f$? A resposta é: ainda não sabemos.

A lista acima apenas elenca as propriedades que gostaríamos que uma definição de integral possuísse. Uma vez dada uma definição *efetiva* de integral, digamos $\mathbf{D}$, o conjunto $\mathcal{I}[a,b]$ passa a ser xingado de **conjunto das funções D-integráveis**. Como nossa abordagem sugere, há diversos tipos de integrais que satisfazem os axiomas acima, do mesmo modo que existem diversos tipos de grupos, espaços vetoriais, etc. A depender do contexto, um tipo de integração pode se adequar melhor do que outro.

Desse modo, as exigências (i) e (ii) acima se traduzem em dizer que "toda função contínua é integrável" e "toda função integrável é limitada", respectivamente. A condição (iii) pede que "funções constantes sejam integráveis", enquanto a condição (v) pede que "para qualquer $c \in [a,b]$, f é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, f é integrável[1] em $[a,c]$ e $[c,b]$".

Muito em breve vamos nos preocupar com o problema de dar *uma* definição de integração – a saber, a integral de Riemann – mas, por enquanto, vamos explorar o que pode ser feito segundo essa abordagem axiomática. Para aquecer, sugerimos o próximo

Exercício 5.0. Mostre que se $f \in \mathcal{I}[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^a f = 0$. ■

5.0.0 O teorema fundamental do Cálculo – mas já?

Como veremos a seguir, o teorema fundamental do Cálculo não é mérito de alguma definição arbitrária de integral, mas sim uma consequência inevitável de qualquer integração razoável. No que segue, assumimos que para cada $a \leq b$ existe uma correspondência $\displaystyle\int_a^b \colon \mathcal{I}[a,b] \to \mathbb{R}$ como definida acima.

Teorema 5.0.0 (Fundamental do Cálculo)**.** *Seja $f \in \mathcal{I}[a,b]$ e, para cada $x \in [a,b]$, defina*

$$F(x) := \int_a^x f.$$

[1]Embora, a rigor, devêssemos escrever "... $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis". Mas a vida é curta.

(a) A função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pela correspondência acima é contínua em cada $c \in [a,b]$.

(b) Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então F é diferenciável em c, e $F'(c) = f(c)$.

(c) Se f é contínua e $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaz $G'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Demonstração. Começamos provando o item (a). Como o axioma (ii) sobre $\displaystyle\int_a^b$ nos diz que toda função em $\mathcal{I}[a,b]$ é limitada, sabemos que existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Se ocorrer $M = 0$, acabou (por quê?!). Por isso, vamos supor $M > 0$.

Para $c \in [a,b]$, queremos mostrar que F é contínua em c. Para tanto, fixado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que para $x \in [a,b]$, $|x-c| < \delta$ acarrete $|F(x) - F(c)| < \varepsilon$. Por isso, vamos manipular a *expressão* $F(x) - F(c)$ marotamente.

Graças ao axioma (vi), para $x \geq c$ podemos afirmar que $F(x) - F(c) = \displaystyle\int_c^x f$, pois

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f - \int_a^c f = \int_a^c f + \int_c^x f - \int_a^c f = \int_c^x f.$$

Analogamente, se $x \leq c$, então $F(x) - F(c) = -\displaystyle\int_x^c f$ (por quê?!).

Agora, se $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, então a desigualdade $-M \leq f(w) \leq M$ permanece válida para qualquer $w \in [\alpha, \beta]$. Logo, os axiomas (iii) e (iv) garantem que

$$-M(\beta - \alpha) = \int_\alpha^\beta -M \leq \int_\alpha^\beta f \leq \int_\alpha^\beta M = M(\beta - \alpha),$$

donde segue que $\left|\displaystyle\int_\alpha^\beta f\right| \leq M(\beta - \alpha)$. Consequentemente, deve ocorrer

$$|F(x) - F(c)| \leq M|x - c|,$$

(por quê?!)[2] donde segue que basta tomarmos $\delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$ a fim de obter a desigualdade desejada, provando o item (a).

Provemos o item (b). Supondo a continuidade de f em $c \in [a,b]$, desejamos mostrar que o limite

$$F'(c) := \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}$$

existe e, mais ainda, ocorre $F'(c) = f(c)$. Ora, pela continuidade de f em c, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual $0 < |x - c| < \delta$ com $x \in [a,b]$ implicam em

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Logo, para $x > c$ com $|x - c| < \delta$, os axiomas (iii) e (iv) nos dão

$$(f(c) - \varepsilon)(x - c) = \int_c^x (f(c) - \varepsilon) \leq \int_c^x f \leq \int_c^x (f(c) + \varepsilon) = (f(c) + \varepsilon)(x - c),$$

[2] Dica: lembre-se de que pode ocorrer $x \geq c$ ou $x \leq c$.

donde segue que

$$f(c) - \varepsilon \le \frac{1}{x-c}\int_c^x f \le f(c) + \varepsilon.$$

Como, neste caso, $F(x) - F(c) = \displaystyle\int_c^x f$, a desigualdade acima se traduz em

$$\left|\frac{F(x) - F(c)}{x-c} - f(c)\right| < \varepsilon,$$

como queríamos. Deixamos o caso "$x < c$" como exercício.

Finalmente, provemos (c). Pela parte (b), sabemos que F é *uma* antiderivada de f. Logo, pelo Teorema do Valor Médio[3], existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x)+C$ para todo $x \in [a,b]$. Consequentemente,

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f,$$

como desejado. □

Nossa argumentação mostra que, uma vez definida uma noção de integração satisfazendo os axiomas (i), ..., (vi), teremos o Teorema Fundamental do Cálculo para a noção de integral em questão. Em particular, independentemente da definição adotada, o item (c) do Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que

$$\int_a^b f = G(b) - G(a),$$

qualquer que seja a antiderivada G de f – ao passo que o item (b) nos diz que uma antiderivada necessariamente deve existir. Assim, a menos de mostrar a *existência* de uma integração, já sabemos qual o único valor possível para a integral de uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Exercício 5.1. Seja $\displaystyle\int$ uma noção de integral tal que $\displaystyle\int_a^b$ satisfaz os axiomas (i), ..., (vi) para cada par $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$.

(*a*) Mostre que se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, então

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(*b*) Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(*c*) Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $|f|$ é contínua e

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

■

[3] O que já deveria ter sido visto em Análise I, certo?!

5.0.1 Para saber mais

- A exposição acima foi baseada no material *Honors Calculus*, de Pete L. Clark, disponível em http://math.uga.edu/~pete/2400full.pdf. Na prática, os axiomas que listamos visam elencar o mínimo necessário para se ter o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse sentido, convém notar que o axioma (ii), que pede a limitação das funções integráveis, pode ser eliminado se, no enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo, exigirmos que a função f seja limitada.

- Uma abordagem semelhante é apresentada no (excelente) *Undergraduate Analysis*, de Serge Lang.

- Dada a natureza axiomática de nossa argumentação, qualquer outro livro de Análise também deve apresentar uma demonstração semelhante para o Teorema Fundamental do Cálculo. Inclusive, os livros do Elon dão conta do recado.

5.1 A integral de Riemann – crua

Vamos determinar um *procedimento* que associa a *certas* funções da forma $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, um único número L, que será denotado por $\displaystyle\int_a^b f$. Uma vez feito isso, mostraremos que tal noção de integral satisfaz os axiomas elencados na última aula.

5.1.0 Uma digressão topológica: redes

A Riemann-integrabilidade é irresistivelmente parecida com a definição de sequência convergente, certamente vista no curso de Análise I. Se, por um momento, pudéssemos interpretar a noção anterior em termos de sequências convergentes, certas consequências seriam imediatas.

- Lembre-se de que buscamos definir uma *função* $\displaystyle\int_a^b : \mathcal{I}[a,b] \to \mathbb{R}$. Desse modo, é preciso garantir a unicidade do número $L \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\displaystyle\int_a^b f = L$. Se o número L na definição de integrabilidade fosse o limite de uma sequência, teríamos a unicidade automática!

- Já sabemos que se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências convergentes com $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n.$$
Logo, se a definição de integrabilidade fosse dada como o limite de uma sequência, teríamos automaticamente
$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2.$$

- Analogamente, das propriedades operatórias dos limites de sequências, resultaria que se f e g fossem integráveis, então $\alpha f + \beta g$ seriam integráveis para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

A vida, no entanto, não é justa, e a definição de integrabilidade que apresentamos não é equivalente à definição de uma sequência convergente. Ainda assim, o destino colocou esta disciplina nas mãos de um topólogo geral – e somos uma espécie com muitos truques na manga.

Pergunta. Por que só estudar a convergência de sequências da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$?

Alternativamente: o que há de tão especial em $\mathbb{N}$ para que nos preocupemos apenas com a convergência de sequências indexadas por naturais?

Resposta[4]. O conjunto $\mathbb{N}$, munido de sua ordem usual, constitui um "molde de convergência": os pontos de $\mathbb{N}$ "*convergem*" *naturalmente* para $+\infty$, quanto maior o $n \in \mathbb{N}$, mais próximo ele está de $+\infty$ (o fato de que eles nunca atingirão $+\infty$ é apenas uma tragédia da vida). Nesse sentido, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ nada mais é do que um modo abstrato de comparar pontos da reta com os pontos de $\mathbb{N}$: quando a sequência converge para um ponto $x \in \mathbb{R}$, significa que x faz precisamente o papel de $+\infty$.

[4] A rigor: uma das respostas possíveis.

Qual a importância disso? Ora, segundo tal perspectiva, $\mathbb{N}$ não é mais útil do que qualquer outra pré-ordem dirigida.

5.1.1 A integral de Riemann - grelhada

Os lemas anteriores mostram que, para efeitos práticos, redes convergentes se comportam tão bem quanto sequências convergentes. Embora isso seja interessante por si só, temos uma *agenda* em toda essa digressão: a definição de Riemann-integrabilidade é, precisamente, a exigência de que uma rede específica convirja!

De fato, fixado o intervalo fechado $[a, b]$, o conjunto

$$\mathbb{P} := \{(\mathcal{P}, t) : (\mathcal{P}, t) \text{ é uma partição marcada de } [a, b]\}$$

é dirigido pela relação

$$(\mathcal{P}, t) \preceq (\mathcal{Q}, q) \Leftrightarrow \|\mathcal{Q}\| \leq \|\mathcal{P}\|.$$

De fato, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são duas partições de $[a, b]$, então $\mathcal{R} := \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ determina uma partição de $[a, b]$ que necessariamente satisfaz $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{P}\|$ e $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$. Embora seja intuitivamente óbvio, é moralmente edificante apresentarmos alguma argumentação: note que se $a < c < b$ e $c \notin \mathcal{Q}$, então $\|\mathcal{Q} \cup \{c\}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$, donde facilmente segue, por indução, que para qualquer partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ deve-se obter $\|\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$; por simetria, também deve ocorrer $\|\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}\| \leq \|\mathcal{P}\|$, como queríamos.

Logo, $(\mathcal{P}, t), (\mathcal{Q}, q) \preceq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, r)$, quaisquer que sejam as *tags* associadas às respectivas partições, mostrando que $\mathbb{P}$ é um conjunto dirigido. Desse modo, para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a correspondência $\sum f : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ que faz

$$(\mathcal{P}, t) \mapsto \sum_{(\mathcal{P},t)} f$$

é uma rede em $\mathbb{R}$! Pela definição que apresentamos, um número $L \in \mathbb{R}$ satisfaz $L = \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} f$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição $(\mathcal{Q}, q)$ de $[a, b]$ tal que se $(\mathcal{P}, t) \succeq (\mathcal{Q}, q)$, então

$$\left| \sum_{(\mathcal{P},t)} f - L \right| < \varepsilon,$$

o que é naturalmente equivalente à definição de integrabilidade que demos inicialmente[5].

Corolário 5.1.0. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então existe um único número $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo a definição de integrabilidade.*

Demonstração. Evidentemente, tal resultado segue pois L é o limite de uma rede. □

Dada a unicidade garantida acima, escrevemos $\int_a^b f$ para indicar o único número L na definição de integrabilidade, o qual passa a ser chamado de **a integral** (de Riemann) da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

[5]Pois, dado $\delta > 0$, podemos sempre obter uma partição $\mathcal{Q}$ de $[a, b]$ com $\|\mathcal{Q}\| < \delta$.

Corolário 5.1.1. *Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções Riemann-integráveis, tais que $f \leq g$, então*
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demonstração. Basta notar que a desigualdade $f \leq g$ nos dá $\sum\limits_{(\mathcal{P},t)} f \leq \sum\limits_{(\mathcal{P},t)} g$ para qualquer partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a,b]$. □

Corolário 5.1.2. *Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são Riemann-integráveis, então $\alpha f + \beta g$ é Riemann-integrável, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e vale*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Demonstração. Por hipótese, os limites $\displaystyle\int_a^b f := \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} f$ e $\displaystyle\int_a^b g := \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} g$ existem. Como a função $\psi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x,y) := \alpha x + \beta y$ é contínua, temos
$$\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g := \psi\left(\int_a^b f, \int_a^b g\right) = \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \psi\left(\sum_{(\mathcal{P},t)} f, \sum_{(\mathcal{P},t)} g\right) = \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} (\alpha f + \beta g),$$
onde a última igualdade se deve pois
$$\begin{aligned}\psi\left(\sum_{(\mathcal{P},t)} f, \sum_{(\mathcal{P},t)} g\right) &= \alpha \sum_{(\mathcal{P},t)} f + \beta \sum_{(\mathcal{P},t)} g = \alpha \sum_{i=1}^n f(t_i)(a_i - a_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^n g(t_i)(a_i - a_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(a_i - a_{i-1}) := \sum_{(\mathcal{P},t)} (\alpha f + \beta g).\end{aligned}$$

Como o último limite corresponde, precisamente, à integral de $\alpha f + \beta g$, o resultado segue. □

Corolário 5.1.3. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, então f é integrável e $\displaystyle\int_a^b c = c(b-a)$.*

Demonstração. Para qualquer partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a,b]$, temos $\sum\limits_{(\mathcal{P},t)} f = c(b-a)$. Como redes constantes são obviamente convergentes, o resultado segue. □

Observação 5.1.4. Um modo mais ~~pomposo~~ profissional de enunciar os dois últimos corolários é dizer que o conjunto $\mathcal{R}[a,b]$, das funções Riemann-integráveis, é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$, onde o último denota o espaço vetorial das funções da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$. △

A fim de nos convencermos de que temos em mãos uma noção razoável de integração, precisamos mostrar ainda que

- se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é Riemann-integrável,

- se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é limitada,
- para uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f é Riemann-integrável se, e somente se, f é Riemann-integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$, para qualquer $c \in [a,b]$, e ainda
- se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $c \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Na próxima aula vamos nos ocupar dos itens acima, a menos do segundo: como ele pode ser provado de modo relativamente simples sem o recurso de redes convergentes, ele será o

Exercício 5.2. Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é limitada. ■

5.1.2 Para saber mais

- A exposição acima foi baseada na discussão sobre integrais de Riemann generalizadas, apresentada no livro *Handbook of Analysis and its Foundations* (de agora em diante, HAF), de Eric Schechter, com pitadas do livro *Limits*, de Alan Beardon.
- Classicamente, os livros de Análise costumam atrasar a apresentação da integral de Riemann. Em vez disso, eles tratam o problema de integração por meio de uma abordagem (sem redes) que usa o supremo e o ínfimo de certas somas de Riemann. A rigor, isso define a chamada **integral de Darboux** – e não a *integral de Riemann.*
- Isso não caracteriza um problema pois, como pode-se provar, uma função é Riemann-integrável se, e somente se, é Darboux-integrável – e o valor das integrais coincide! Conjecturo que tal desvio seja frequentemente tomado pois há quem acredite que seja mais fácil trabalhar com supremos e ínfimos do que com redes.
- Partindo da premissa de que “conhecimento é poder”, abordaremos em tempo oportuno[6] as noções de integrabilidade segundo Darboux, mas sem grande ênfase, dado que obteremos os resultados importantes por caminhos mais diretos.
- O leitor apressado e que tem interesse em aprender a integração segundo Darboux pode consultar, por exemplo, os livros de Análise do Elon.

[6] Mais precisamente: no final da próxima aula!

5.2 Critérios de Riemann-integrabilidade: Riemann-Darboux

Na aula anterior, definimos a classe $\mathcal{R}[a,b]$ das funções Riemann-integráveis em $[a,b]$, que consiste precisamente das funções da forma $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que existe

$$\int_a^b f := \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} f,$$

onde $\mathbb{P}$ é o conjunto das partições marcadas de $[a,b]$, dirigido pela relação $\prec$ que faz $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ se, e somente se, $\|\mathcal{Q}\| < \|\mathcal{P}\|$. Em particular, o Lema 5 da aula anterior, o qual afirma que uma rede $(\rho_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $\mathbb{R}$ converge se, e somente se, for de Cauchy, nos dá um critério para verificar se uma função é Riemann-integrável ou não.

Lema 5.2.0 (critério de Cauchy)**.** *Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer partições marcadas $(\mathcal{P},t)$ e $(\mathcal{Q},q)$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\|, \|\mathcal{Q}\| < \delta$ ocorre*

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f\right| < \varepsilon$$

Demonstração. Isso é exatamente pedir que a rede $\left(\sum_{(\mathcal{P},t)} f\right)_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}}$ seja de Cauchy. □

A importância desse tipo de critério está no fato de que nem sempre é óbvio estimar o valor de uma integral (mesmo com o Teorema Fundamental do Cálculo!), de modo que ele nos permite decidir se uma função é Riemann-integrável sem, necessariamente, conhecer o valor de sua integral. Nesse sentido, há um critério de integrabilidade absurdamente mais rápido que provaremos a seguir – antes, porém, vamos obter uma versão um pouco mais amigável do lema anterior. Note que já não precisamos do recurso das redes!

Proposição 5.2.1 (critério de Riemann-Darboux)**.** *Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ tal que*

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f\right| < \varepsilon$$

para quaisquer tags t e q associadas à partição $\mathcal{P}$.

Demonstração. A ida é trivial (certo?!). Para a recíproca, dado $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ satisfazendo a tese do Lema 5.2.0. Para isso, fixamos $M > 0$ satisfazendo $|f| < M$ e uma partição $\mathcal{S} := (s_0, \ldots, s_n)$ como no enunciado para $\frac{\varepsilon}{4}$. Vamos usar o artifício de Darboux, e considerar os números

$$U(f,\mathcal{S}) := \sum_{i=1}^{n} M_i(s_i - s_{i-1}) \quad \text{e} \quad L(f,\mathcal{S}) := \sum_{i=1}^{n} m_i(s_i - s_{i-1}),$$

onde $M_i := \sup\{f(x) : x \in [s_{i-1}, s_i]\}$ e $m_i := \inf\{f(x) : x \in [s_{i-1}, s_i]\}$, os quais existem pois f é limitada. Pela definição de supremo e ínfimo, note que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos tomar $u_i, l_i \in [s_{i-1}, s_i]$ tais que

$$M_i - \frac{\varepsilon}{8(b-a)} < f(u_i) \quad \text{e} \quad m_i + \frac{\varepsilon}{8(b-a)} > f(l_i),$$

donde segue que

$$U(f, \mathcal{S}) < \sum_{(\mathcal{S},u)} f + \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{e} \quad -L(f, \mathcal{S}) < -\sum_{(\mathcal{S},l)} f + \frac{\varepsilon}{8},$$

e, consequentemente,

$$U(f, \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{S}) < \sum_{(\mathcal{S},u)} f - \sum_{(\mathcal{S},l)} f + \frac{\varepsilon}{4} \leq \left| \sum_{(\mathcal{S},u)} f - \sum_{(\mathcal{S},l)} f \right| + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $u := (u_1, \ldots, u_n)$ e $l := (l_1, \ldots, l_n)$. A desigualdade acima será útil quando mostrarmos que $\delta := \dfrac{\varepsilon}{8Mm}$ faz o serviço desejado, onde, por comodidade, $m := n + 1$ denota a cardinalidade da partição fixada $\mathcal{S}$. Começamos observando que para partições $(\mathcal{P}, t)$ e $(\mathcal{Q}, q)$ de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\|, \|\mathcal{Q}\| < \delta$, deve ocorrer

$$\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{Q}),$$

onde $U(f, \mathcal{P})$ e $L(f, \mathcal{Q})$ são definidos como acima. Há agora dois pontos importantes a observarmos:

- o primeiro é que a escolha do δ garante

$$U(f, \mathcal{P}) - U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{4};$$

- já o segundo, que discutiremos com calma em breve, consiste em se convencer de que

$$U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \leq U(f, \mathcal{S}) \quad \text{e} \quad -L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) \leq -L(f, \mathcal{S}).$$

Feito isso[7], note que

$$\begin{aligned}
\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{Q}) = \\
&= U(f, \mathcal{P}) - U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) + U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) + L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{Q}) < \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + U(f, \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{S}) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

de modo que ao repetirmos o argumento trocando os papéis de $(\mathcal{P}, t)$ e $(\mathcal{Q}, q)$, teremos a desigualdade desejada. □

Embora útil de uma perspectiva quantitativa, dificilmente um critério será mais estarrecedor do que o próximo, que em certo sentido caracteriza as funções Riemann-integráveis qualitativamente. Para enunciá-lo, precisamos de uma brevíssima digressão sobre medida: dizemos que um subconjunto $N \subset \mathbb{R}$ tem **medida nula** (**zero**) se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma coleção $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos, tais que $N \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} m(I_n) < \varepsilon$, onde $m(I_n) := \sup I_n - \inf I_n$.

[7] A prova do primeiro item está na Seção 5.4.0. Já a prova do segundo item está na Seção 5.3.1.

Exercício 5.3. Dado $x \in \mathbb{R}$, mostre que $\{x\}$ tem medida nula. ■

Exercício 5.4. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenha-se $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de medida nula. Mostre que $\mathcal{M} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n$ tem medida nula. ■

Exercício 5.5. Mostre que se $N \subset \mathbb{R}$ é enumerável, então N tem medida nula. ■

5.2.0 Para saber mais

A exposição acima foi costurada de vários materiais.

- O critério de Cauchy para integrabilidade é mera tradução do mesmo critério para convergência de redes, e foi sugerido no HAF de Schechter (e, possivelmente, em muitas outras fontes).

- Por sua vez, a demonstração do critério de Riemann-Darboux foi uma adaptação de uma discussão realizada por Tom Apostol em seu clássico *Mathematical Analysis*[8]: secretamente, a argumentação apresentada permite trocar a exigência "existe $\delta > 0$ tal que $\|\mathcal{P}\| < \delta$ implica..." por "existe uma partição $\mathcal{Q}$ de $[a, b]$ tal que se $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$, então...". Para a nossa exposição baseada em redes, o critério que usa inclusões em vez de normas de partições daria algumas demonstrações mais simples – mas pecaríamos de um ponto de vista histórico-cultural.

[8]Exercício 7.4, página 174. Apesar disso, nossa prova se baseou na exposição de Charles Pugh, no livro *Real Mathematical Analysis*.

5.3 O critério de Lebesgue para Riemann-integrabilidade

Teorema 5.3.0 (critério de Lebesgue)**.** *Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, f é limitada e o conjunto*

$$N := \{x \in [a,b] : f \text{ é descontínua em } x\}$$

tem medida nula.

Demonstração. Por ora, vamos nos preocupar apenas com a recíproca, devido a sua urgência. Fixemos números reais $M > 0$ e $\alpha > 0$, onde $|f| \leq M$ e α deve satisfazer uma condição que ainda vamos determinar. Para cada $s \in (a,b) \setminus N$, a continuidade de f em s nos dá um intervalo aberto $(u_s, v_s) \subset (a,b)$ em torno de s tal que a desigualdade $|f(x) - f(y)| < \alpha$ ocorre para quaisquer $x, y \in (u_s, v_s)$ (por quê?!)[9]. Por outro lado, como $N \cup \{a,b\}$ tem medida nula, existe uma coleção de intervalos abertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$N \cup \{a,b\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} m(I_n) < \alpha.$$

Logo, para $\mathcal{V} := \{(u_s, v_s) : s \in (a,b) \setminus N\} \cup \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, temos

$$[a,b] \subset \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V,$$

donde a compacidade de $[a,b]$ nos permite tomar $V_0, \ldots, V_k \in \mathcal{V}$ tais que $[a,b] \subset V_0 \cup \ldots \cup V_k$. Como cada V_j é da forma (α_j, β_j), podemos considerar a partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ formada pelos pontos a, b e pelos extremos α_j e β_j que estão contidos em (a,b) (certamente algum $\alpha_i < a$, bem como algum $\beta_j > b$, pois existem V_i e V_j com $a \in V_i$ e $b \in V_j$). Por simplicidade, vamos indicar $\mathcal{P} := \{x_0, \ldots, x_l\}$, com $a := x_0 < x_1 < \ldots < x_l := b$. Agora, para tags t e q associadas à partição $\mathcal{P}$, temos

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f\right| = \left|\sum_{i=1}^{l} (f(t_i) - f(q_i))(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{l} |f(t_i) - f(q_i)| \cdot |x_i - x_{i-1}|.$$

Naturalmente, um subintervalo $I := (x_{i-1}, x_i)$ pode ou não estar contido em algum dos (u_s, v_s): se estiver, então $|f(x) - f(y)| < \alpha$ ocorre para quaisquer $x, y \in I$; se não estiver, então certamente $I \subset I_j$ para algum j. Logo, a soma dos comprimentos dos intervalos que não estão contidos em intervalos da forma (u_s, v_s) é menor do que α.

Disso tudo, inferimos (por quê?!)

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f\right| \leq \sum_{i=1}^{l} |f(t_i) - f(q_i)| \cdot |x_i - x_{i-1}| \leq 2M\alpha + \alpha(b-a) = \alpha(2M + b - a).$$

Portanto, para $\varepsilon > 0$ tomado arbitrariamente, ao escolhermos $\alpha < \dfrac{\varepsilon}{2M + b - a}$ resulta que a partição $\mathcal{P}$ obtida como acima satisfaz o critério de Riemann-Darboux e, consequentemente, f é integrável. □

Exercício 5.6. Prove a ida do teorema anterior, ou seja: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é limitada e o conjunto N dos pontos de $[a,b]$ nos quais f é descontínua tem medida nula. ■

Dica. Estude a *oscilação* de f (veja o roteiro no final desta nota de aula). □

[9] Dica: use a continuidade em s com $\dfrac{\alpha}{2}$.

5.3.0 Verificando os axiomas de integral

Vamos provar que a integral de Riemann satisfaz o restante dos axiomas que estipulamos em nossa primeira aula. Note que, como consequência imediata, teremos a validade do Teorema Fundamental do Cálculo para tal noção de integração.

Corolário 5.3.1. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é Riemann-integrável.*

Corolário 5.3.2. *Dados $c \in [a,b]$ e uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f é Riemann-integrável em $[a,b]$ se, e somente se, f é Riemann-integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$.*

Demonstração. Se f é Riemann-integrável em $[a,b]$, então f é limitada e o conjunto $N \subset [a,b]$ dos pontos de descontinuidade tem medida nula. Logo, f é limitada em $[a,c]$ e $[c,b]$ e, naturalmente, os conjuntos $N \cap [a,c]$ e $N \cap [c,b]$ têm medida nula, mostrando que f é Riemann-integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$. Reciprocamente, a Riemann-integrabilidade de f nos intervalos $[a,c]$ e $[c,b]$ garante que f é limitada em $[a,b]$, bem como o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula (por ser reunião de dois conjuntos de medida nula). □

Exercício 5.7. Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funções Riemann-integráveis. Mostre que $fg\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável. ■

Exercício 5.8. Sejam $a \le c \le d \le b$ e $\chi_{[c,d]}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a função que faz $\chi_{[c,d]}(x) = 0$ para $x \notin [c,d]$ e $\chi_{[c,d]}(x) = 1$ caso contrário. Mostre que $\chi_{[c,d]}$ é Riemann-integrável. ■

Lema 5.3.3. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $a \le c \le d \le b$, então*

$$\int_c^d f = \int_a^b f\chi_{[c,d]}.$$

Demonstração. Naturalmente, não há prejuízo em supor $a < c \le d < b$. Agora, pelo corolário anterior, $\displaystyle\int_c^d f$ deve existir, enquanto os dois últimos exercícios nos dizem o mesmo sobre o número $L := \displaystyle\int_a^b f\chi_{[c,d]}$. Vamos mostrar que $L = \displaystyle\int_c^d f$. Fixado $\varepsilon > 0$, pelo modo como tomamos L, existe $\delta > 0$ tal que se $(\mathcal{P}, t)$ é uma partição marcada de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f\chi_{[c,d]} - L\right| < \varepsilon.$$

Ora, qualquer que seja a partição $(\mathcal{Q}, q)$ de $[c,d]$ com $\|\mathcal{Q}\| < \delta$, ~~a partição $\mathcal{P} := \mathcal{Q} \cup \{a,b\}$~~ podemos adicionar tantos pontos quantos forem necessários a $\mathcal{Q}$ de modo a obter uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, com $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ e $\|\mathcal{P}\| \le \|\mathcal{Q}\| < \delta$ (por quê?). Logo, para qualquer tag t de $\mathcal{P}$ com $q \subset t$, temos

$$\left|\sum_{(\mathcal{Q},q)} f - L\right| = \left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f\chi_{[c,d]} - L\right| < \varepsilon,$$

pois $f\chi_{[c,d]}(x) = f\chi_{[c,d]}(x) = 0$ para $x \in [a,c) \cup (d,b]$. □

Corolário 5.3.4. *Se* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *é Riemann-integrável e* $c \in [a,b]$, *então*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demonstração. Suponha $f(c) = 0$. Note que $f = f\chi_{[a,c]} + f\chi_{[c,b]}$. Como $f\chi_{[a,c]}$ e $f\chi_{[c,b]}$ são Riemann-integráveis, resulta

$$\int_a^b f = \int_a^b (f\chi_{[a,c]} + f\chi_{[c,b]}) = \int_a^b f\chi_{[a,c]} + \int_a^b f\chi_{[c,b]},$$

donde o resultado segue do lema anterior. Para o caso geral, veja a Seção 5.4.1. □

Exercício 5.9. Sejam $f\colon [a,b] \to [c,d]$ e $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ funções. Mostre que se φ é contínua e f é Riemann-integrável, então $\varphi \circ f$ é Riemann-integrável. ■

Exercício 5.10. Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então $|f|$ é Riemann-integrável. ■

5.3.1 Digressão: A integral de Darboux

A integral de Darboux apareceu implicitamente em nossa demonstração do critério de integrabilidade de Riemann-Darboux – e não apenas no nome do critério! De fato, para uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição $\mathcal{P} := \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$, as **somas de Darboux** são ~~precisamente as somas de Riemann~~ as somas

$$U(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1}) \quad \text{e} \quad L(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1}),$$

onde ~~u e l são, respectivamente, as tags associadas a $\mathcal{P}$ tais que~~

$$M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

As letras U e L acima fazem referência à terminologia estrangeira: $U(f,\mathcal{P})$ é a **soma superior**[10] **de Darboux** da partição $\mathcal{P}$, enquanto $L(f,\mathcal{P})$ é a **soma inferior**[11] **de Darboux** da partição. Evidentemente, qualquer que seja a tag t associada à partição $\mathcal{P}$, deve-se ter

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \sum_{(\mathcal{P},t)} f \leq U(f,\mathcal{P}).$$

Uma vez que, para $m := \inf_{[a,b]} f$ e $M := \sup_{[a,b]} f$ deve ocorrer

$$m(b-a) \leq L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) \leq M(b-a),$$

resulta que existem

$$\underline{\mathcal{I}}_a^b f := \sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}\} \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{I}}_a^b := \inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}\},$$

chamadas respectivamente de **integral inferior** de Darboux e **integral superior** de Darboux da função f. Note que em geral, sempre ocorre $\underline{\mathcal{I}}_a^b f \leq \overline{\mathcal{I}}_a^b f$.

[10] *Upper.*
[11] *Lower.*

Isso não é inteiramente óbvio. A desigualdade acima segue de uma observação importante – e que implicitamente já foi usada: se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são partições de $[a,b]$, então

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{Q}).$$

De fato, se $c \notin \mathcal{P}$, então existe um único i tal que $a_{i-1} < c < a_{i+1}$, com $a_{i-1}, a_i \in \mathcal{P}$ e, por termos $[a_{i-1}, c], [c, a_i] \subset [a_{i-1}, a_i]$, resulta que

$$\inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x) \leq \inf_{x\in[a_{i-1},c]} f(x), \inf_{x\in[c,a_i]} f(x),$$

donde segue que $L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}\cup\{c\})$. Analogamente, mostra-se que $U(f,\mathcal{P}\cup\{c\}) \leq U(f,\mathcal{P})$. O caso geral segue da argumentação acima, por indução.

Exercício 5.11. Prove que, de fato, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, então $\underline{\mathcal{I}}_a^b f \leq \overline{\mathcal{I}}_a^b f$. ■

Finalmente, dizemos que f é **Darboux-integrável** se ocorrer $\underline{\mathcal{I}}_a^b f = \overline{\mathcal{I}}_a^b f$. Nossas dívidas para com os possíveis fãs de Darboux se pagam no próximo

Teorema 5.3.5. *Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, é Darboux-integrável.*

Demonstração. Suponha f Darboux-integrável e xingue por I o valor idêntico das integrais inferiores e superiores de Darboux. Das definições de supremo e ínfimo, para $\varepsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ tais que

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{P}) \leq I \leq U(f,\mathcal{Q}) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{Q}) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

donde segue (por quê?!) $|L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) - U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})| < \varepsilon$. Como $L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq \sum_{(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},t)} f \leq U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})$ para qualquer tag t de $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, segue que

$$\left|\sum_{(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},t)} f - \sum_{(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},q)} f\right| < \varepsilon,$$

para quaisquer tags t e q de $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, mostrando assim que a partição $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ satisfaz o critério de Riemann-Darboux para $\varepsilon > 0$. Da arbitrariedade do ε tomado, concluímos que f é Riemann-integrável.

Reciprocamente, supondo f Riemann-integrável, o critério de Riemann-Darboux nos diz que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ tal que

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para quaisquer tags t e q associadas à partição $\mathcal{P}$ – em particular, $|U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})| < \varepsilon$ (por quê?!). Por termos $\overline{\mathcal{I}}_a^b f \leq U(f,\mathcal{P})$ e $L(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{I}}_a^b f$, resulta que

$$\overline{\mathcal{I}}_a^b f - \underline{\mathcal{I}}_a^b f \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

donde a arbitrariedade do ε nos permite garantir que $\overline{\mathcal{I}}_a^b f \leq \underline{\mathcal{I}}_a^b f$, como queríamos. □

Em particular, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então

$$\underline{\mathcal{I}}_a^b f = \int_a^b f = \overline{\mathcal{I}}_a^b f,$$

isto é: as três noções de integral coincidem. A justificativa está na Seção 5.4.2.

5.3.2 Para saber mais

A exposição acima foi costurada de vários materiais.

- A demonstração da recíproca do critério de Riemann-integrabilidade de Lebesgue foi adaptado do texto disponível em `https://math.stackexchange.com/a/163409/128988`, que curiosamente trata do problema no contexto dos *espaços de Banach*.

- A demonstração para a ida do critério mencionado acima pode seguir o seguinte roteiro, adaptado do livro *Real Mathematical Analysis*, de Charles Pugh.

  (i) Defina a **oscilação** de uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ em $x \in [a,b]$ como
  $$o_x(f) := \inf\{o_f(x-\delta, x+\delta) : \delta > 0\}$$
  onde $o_f(A) := \sup_{s,t\in A} |f(s) - f(t)|$.

  (ii) Prove que f é contínua em x se, e somente se, $o_x(f) = 0$.

  (iii) Como $o_x(f) \geq 0$ para todo x, segue que f é descontínua em x se, e somente se, $o_x(f) > 0$.

  (iv) Mostre que o conjunto $N \subset [a,b]$ dos pontos de descontinuidade de f é reunião dos conjuntos N_k, onde $N_k := \{x \in [a,b] : o_x(f) > \frac{1}{k}\}$, para $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

  (v) Como já vimos (Problema 1) que funções Riemann-integráveis são limitadas, para concluir a ida do critério de Lebesgue basta mostrar que se f é Riemann-integrável, então N_k tem medida nula, para cada $k \in \mathbb{N}$ (por quê?!).

  (vi) Note que se $N_k \cap [c,d] \neq \emptyset$, então $\sup_{[c,d]} f - \inf_{[c,d]} f \geq \frac{1}{k}$.

  (vii) Dada uma partição $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ tal que $|U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})| < \frac{\varepsilon}{2k}$, e indicando por J a coleção dos índices i tais que $[a_{i-1}, a_i] \cap N_k \neq \emptyset$, resulta que
  $$\frac{1}{k}\sum_{i\in J}(a_i - a_{i-i}) \leq \sum_{i\in J}(\sup_{[a_{i-1},a_i]} f - \inf_{[a_{i-1},a_i]} f)(a_i - a_{i-1}) \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2k}$$
  donde segue que, exceto possivelmente pelos pontos $a_0, \ldots, a_n$ (que podem ou não pertencer a N_k), a soma dos comprimentos dos intervalos $[a_{i-1}, a_i]$, com $i \in J$, é menor do que ε.

  (viii) Conclua que N_k tem medida nula.

- A digressão sobre integrais de Darboux foi uma mescla das discussões apresentadas nos livros *Limits*, de Alan Beardon, e *Theories of Integration*, de Kurtz & Swartz. De modo geral, qualquer livro minimamente razoável dá conta de uma boa exposição sobre isso – o que inclui os livros do Elon.

5.4 Outros comentários

5.4.0 Justificativa para a desigualdade da Proposição 5.2.1

Queríamos nos convencer do seguinte: fixada uma partição $\mathcal{S} = \{s_0, \ldots, s_n\}$ de $[a,b]$, com $m := n+1$ elementos, se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \dfrac{\varepsilon}{8Mm}$, então

$$U(f,\mathcal{P}) - U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{S}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad L(f,\mathcal{Q}\cup\mathcal{S}) - L(f,\mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Isso segue do próximo lema geral.

Lema 5.4.0. *Fixada uma partição $\mathcal{P} := \{a_0, \ldots, a_n\}$ de $[a,b]$, chame por $\mathcal{P}_1$ uma partição de $[a,b]$ obtida com o acréscimo de um único ponto a $\mathcal{P}$. Então, para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada por $M > 0$, temos*

$$L(f,\mathcal{P}_1) \le L(f,\mathcal{P}) + 2M\|\mathcal{P}\| \quad e \quad U(f,\mathcal{P}_1) \ge U(f,\mathcal{P}) - 2M\|\mathcal{P}\|.$$

Demonstração. Seja $z \in [a,b]$ com $z \notin \mathcal{P}$ e chame $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P}\cup\{z\}$. Por $\mathcal{P}$ ser uma partição de $[a,b]$, existe um único $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_{k-1} < z < a_k$. Agora, chame por

$$m := \inf\{f(x) : x \in [a_{k-1}, z]\},$$

$$m' := \inf\{f(x) : x \in [z, a_k]\}, \text{ e}$$

$$\gamma_i := \inf\{f(x) : x \in [a_{i-1}, a_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note que

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}_1) - L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_k(a_k - a_{k-1}) + m(z - a_{k-1}) + m'(a_k - z) + \sum_{j=k+1}^{n} \gamma_j(a_j - a_{j-1}) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(a_i - a_{i-1}) = \\ &= m(z - a_{k-1}) + m'(a_k - z) - \gamma_k(a_k - a_{k-1}) \le M(z - a_{k-1}) + M(a_k - z) + M(a_k - a_{k-1}) \\ &= M(z - a_{k-1} + a_k - z + a_k - a_{k-1}) = 2M(a_k - a_{k-1}) \le 2M\|\mathcal{P}\|, \end{aligned}$$

mostrando a primeira desigualdade. A segunda desigualdade é análoga. □

Corolário 5.4.1. *Fixada uma partição $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$, chame por $\mathcal{P}_m$ uma partição de $[a,b]$ obtida com o acréscimo de m pontos. Então, para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada por $M > 0$, temos*

$$L(f,\mathcal{P}_m) \le L(f,\mathcal{P}) + 2Mm\|\mathcal{P}\| \quad e \quad U(f,\mathcal{P}_m) \ge U(f,\mathcal{P}) - 2Mm\|\mathcal{P}\|.$$

Demonstração. Lema 1 + indução. □

Finalmente, basta notar que na desigualdade proposta em aula, $\mathcal{P}\cup\mathcal{S}$ é obtida a partir de $\mathcal{P}$ com o acréscimo de, no máximo, m pontos, já que $\mathcal{S}$ tem cardinalidade m.

5.4.1 Justificativa para a aditividade da integral

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $(c, d] \subseteq [a, b]$. A função $\chi_{(c,d]} \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, que faz $\chi_{(c,d]}(x) = 0$ se $x \notin (c, d]$ e $\chi_{(c,d]}(x) = 1$ caso contrário, é Riemann-integrável pois é limitada e descontínua apenas em c e d. Logo, se $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então $f\chi_{(c,d]}$ é Riemann-integrável. Como na prova do Lema 5.3.3, deve valer

$$\int_c^d f = \int_a^b f\chi_{(c,d]}.$$

Disso segue que se $c \in [a, b]$, então $f = f\chi_{[a,c]} + f\chi_{(c,b]}$ e, consequentemente

$$\int_a^b f = \int_a^b (f\chi_{[a,c]} + f\chi_{(c,b]}) = \int_a^b f\chi_{[a,c]} + \int_a^b f\chi_{(c,b]} = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

5.4.2 Igualdade das integrais

Aquele argumento da convergência de redes estava zoado. Melhor fazer desse outro jeito.

Supondo que $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, sabemos que f também deve ser Darboux-integrável, vice-versa, donde segue que existem $R, D \in \mathbb{R}$ tais que R é o valor da integral segundo Riemann e D é a integral segundo Darboux. Agora, note que para qualquer partição marcada $(\mathcal{Q}, q)$ de $[a, b]$ temos

$$|R - D| \leq \left| R - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \right| + \left| \sum_{(\mathcal{Q},q)} f - D \right|.$$

Por f ser Darboux-integrável, deve existir uma partição $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$ satisfazendo

$$D - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}') < D + \frac{\varepsilon}{2},$$

e por f ser Riemann-integrável, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{(\mathcal{P},t)} f - R \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para qualquer partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Logo, se tomarmos a partição $\mathcal{Q} := \mathcal{P}' \cup \Delta$, onde Δ é qualquer partição de $[a, b]$ com $\|\Delta\| < \delta$, teremos $\|\mathcal{Q}\| < \delta$ e, além disso, para qualquer tag q de $\mathcal{Q}$, teremos

$$D - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \mathcal{P}') \leq L(f, \mathcal{Q}) \leq \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \leq U(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P}') < D + \frac{\varepsilon}{2},$$

mostrando que

$$\left| \sum_{(\mathcal{Q},q)} f - D \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De tudo o que vimos acima, resulta que $|R - D| < \varepsilon$. Logo, $R = D$.

5.4.3 Digressão: o teorema de Heine-Borel (em $\mathbb{R}$)

Na demonstração do critério de Lebesgue, usamos implicitamente o fato de que se $\mathcal{V}$ é uma coleção de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ tal que

$$(\star) \qquad [a,b] \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V,$$

então existem $V_0, \ldots, V_k \in \mathcal{V}$ tais que $[a,b] \subset V_0 \cup \ldots \cup V_k$. Profissionais costumam se referir a tal fenômeno dizendo que "$[a,b]$ é compacto". Por desencargo de consciência, apresentamos a seguir uma prova de tal fato[12].

Teorema 5.4.2 (Heine-Borel)**.** *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, o intervalo $[a,b]$ é compacto.*

Demonstração. Fixe $\mathcal{V}$ uma coleção de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $(\star)$, e considere o subconjunto

$$A := \left\{ x \in [a,b] : \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \text{ finito tal que } [a,x] \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ pois $a \in A$. Como todo $x \in A$ satisfaz $a \leq x \leq b$, a completude de $\mathbb{R}$ garante a existência de $\sup A \in \mathbb{R}$ com $a \leq \sup A \leq b$. O plano para concluir o teorema é o seguinte: 1) mostrar que, necessariamente, ocorre $\sup A \in A$ e 2) mostrar que $\sup A = b$. Se fizermos isso, seguirá que $b \in A$ e, portanto, existem $V_0, \ldots, V_k \in \mathcal{V}$ tais que $[a,b] \subset V_0 \cup \ldots \cup V_k$, como queríamos.

- $\sup A \in A$: ou seja, precisamos mostrar que existe um subconjunto finito de $\mathcal{V}$ que recobre o intervalo $[a, \sup A]$. Ora, como $\sup A \in [a,b]$, existe $V := (\alpha, \beta) \in \mathcal{V}$ com $\sup A \in (\alpha, \beta)$. Tomando $\gamma \in [a,b]$ com $\alpha < \gamma < \sup A$, a definição de supremo nos garante $x \in A$ com $\gamma < x$ e, por sua vez, a definição de A exige que existam $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{V}$ tais que $[a,x] \subset U_0 \cup \ldots \cup U_n$. Logo, $[a, \sup A] \subset U_0 \cup \ldots \cup U_n \cup V$, mostrando que $\sup A \in A$, como afirmamos.

- $\sup A = b$: como temos $\sup A \leq b$, basta mostrarmos que não pode ocorrer $\sup A < b$. Se ocorresse $\sup A < b$, poderíamos tomar $\delta \in [a,b]$ com $\sup A < \delta < \beta$, donde seguiria que $\delta \in A$, contrariando o fato de $\sup A$ ser o supremo de A! $\square$

Nesta segunda parte do curso de Análise II, extrapolamos as considerações feitas para sequências e séries de números reais ao generalizar parte de tais resultados para sequências e séries de funções. Tal salto marca, secretamente, o começo da Topologia Geral – ou da necessidade por considerações de caráter qualitativo sobre a natureza das noções de convergência.

[12] Mais geralmente, pode-se provar que uma *ordem total* é compacta se, e somente se, todo subconjunto da ordem tem supremo. No entanto, isso foge do escopo da disciplina.

5.5 Integrando e derivando no limite uniforme

Na seção anterior, cuja leitura é opcional, vimos entre outras coisas, que se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções limitadas definidas em X que converge uniformemente para f, então f é limitada. Apesar do contexto geral no qual obtivemos isso, o resultado é simples o suficiente para ser feito "no braço": por valer $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$ para quaisquer $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, a convergência uniforme nos permite tomar um n particular que faça $|f(x) - f_n(x)| < 1$ e daí, por existir $M_n > 0$ com $|f_n(x)| < M_n$ para todo $x \in X$, resulta que $|f| < M_n + 1$.

Se, além de limitadas, cada f_n é descontínua apenas em um conjunto de medida nula $D(f_n) \subset X$, então f também é descontínua apenas em um conjunto de medida nula: se cada f_n é contínua em x, então f é contínua em x, mostrando que o conjunto $D(f)$ dos pontos de descontinuidade de f está contido em $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(f_n)$. Ao fazermos $X := [a, b]$, obtemos o importante

Corolário 5.5.0. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Riemann-integráveis definidas em $[a, b]$. Se $f_n \to f$ uniformemente, então f é Riemann-integrável e*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f.$$

Demonstração. A discussão anterior já nos garante que f é Riemann-integrável. A igualdade das integrais segue pois $|f(u) - f_n(u)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)|$ para todo $u \in [a, b]$. Mais precisamente:

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b f - f_n\right| \underbrace{\leq}_{(*)} \int_a^b |f - f_n| \leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)|(b-a)$$

onde $(*)$ segue do exercício a seguir. Como $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \to 0$ quando $n \to +\infty$ (pela convergência uniforme), o resultado desejado segue. □

Exercício 5.12. Mostre que se $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então $\left|\int_a^b g\right| \leq \int_a^b |g|$. ■

Exercício 5.13. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Riemann-integráveis definidas em $[a, b]$ que converge uniformemente para $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Considere então as funções $F_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ e $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$F_n(x) := \int_a^x f_n \quad \text{e} \quad F(x) := \int_a^x f.$$

Mostre que $F_n \to F$ uniformemente. ■

Em outras palavras, o exercício acima estende o corolário anterior ao mostrar que as integrais indefinidas também convergem. Ele será útil no próximo

5.5.0 Tretas

As hipóteses nos teoremas de convergência anteriores são importantes.

No caso da integração, o exemplo clássico é obtido a partir de uma enumeração de racionais. Fixada uma enumeração $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ de todos os números racionais pertencentes ao intervalo $[0,1]$, segue que a função $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := 0$ se $x \notin \{r_0, \dots, r_n\}$ e $f_n(x) := 1$ caso contrário, é Riemann-integrável para cada n: a função constante 0 é integrável, e f_n difere de 0 em precisamente n pontos, donde segue pelo Exercício 17 da Lista 1 que f_n é Riemann-integrável com $\int_0^1 f_n = 0$. Temos $f_n \to f$ pontualmente, onde f é a função característica de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, mas f não é integrável.

Mesmo quando ocorre $f_n \to f$, com f_n e f Riemann-integráveis, a convergência das integrais não está garantida sem a garantia da uniformidade da convergência $f_n \to f$. Por exemplo, fazendo $f_n(x) := nx^n(1 - x^n)$, garante-se a convergência pontual $f_n \to 0$. No entanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2},$$

enquanto $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$.

Observação 5.5.1. O problema acima se remedia se existir $K > 0$ tal que $|f_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resultado conhecido como Teorema da Convergência Dominada de Arzelà. No entanto, a hipótese de que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ seja Riemann-integrável a priori não pode ser retirado, como nos ensinou o primeiro exemplo sobre $\mathbb{Q}$. Essa é uma das vantagens da integração desenvolvida por Lebesgue, que permite garantir a integrabilidade do limite desde que as funções f_n sejam limitadas.

Apenas como curiosidade, a função característica de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ é Lebesgue-integrável, e sua integral é, graças a Deus, 0. $\triangle$

Finalmente, no caso da diferenciação, é importante pedir a convergência uniforme das derivadas. Note que $f_n \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformemente para $f \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \sqrt{x^2} = |x|$ (Dini). Cada f_n é diferenciável em $[-1,1]$, mas f não é diferenciável em 0.

5.5.1 Séries

Ao tratarmos de uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções reais definidas em X, faz sentido considerar a sequência induzida pelas somas parciais $\left(\sum_{j\le n} f_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo análogo ao que se faz com sequências de números reais. Denotamos por[13]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

a função f obtida pontualmente como o limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(x)$, i.e.,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(x).$$

[13] Quem preferir começar por $n = 1$, tudo bem...

É claro que, para fazer sentido, é preciso que para cada $x \in X$ a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ seja convergente. Desse modo, séries também admitem as variações de convergência vistas na seção anterior: dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

- converge pontualmente (para f) se a convergência $\sum_{j=0}^{n} f_j \to f$ for pontual, e
- converge uniformemente (para f) se a convergência $\sum_{j=0}^{n} f_j \to f$ for uniforme.

Logo, os próximos resultados são corolários automáticos.

Corolário 5.5.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais definidas em $[a,b]$, e suponha que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ convirja uniformemente.*

(*a*) *Se cada f_n é contínua em $x \in [a,b]$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é contínua em x.*

(*b*) *Se cada f_n é Riemann-integrável, então $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é Riemann-integrável e*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

(*c*) *Se cada f_n é diferenciável e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente, então $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é diferenciável e*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Demonstração. Tudo segue dos teoremas anteriores aplicados à sequência das somas parciais da série. □

A relevância do Teorema de Dini se dá, portanto, na garantia de convergência uniforme para séries de funções não-negativas.

Proposição 5.5.3. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas não-negativas definidas em $[a,b]$. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge pontualmente para uma função contínua, então a convergência é uniforme e vale*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstração. Como cada f_n é não-negativa, resulta que a convergência da sequência $(\sum_{j=0}^{n} f_j)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona, logo uniforme pelo Teorema de Dini. O restante segue do corolário anterior. □

Tal qual ocorre com séries de números reais, temos ainda a convergência absoluta: a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ converge. Em particular, é claro que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge absolutamente } \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge pontualmente.} \tag{5.3}$$

Contudo, no caso em que cada f_n é contínua, o Teorema de Dini nos permite melhorar a implicação acima.

Corolário 5.5.4. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas. Se X é compacto e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge absolutamente, então $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente.*

Demonstração. A convergência absoluta de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ se traduz na convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ de funções contínuas e não-negativas, e daí o mesmo argumento da proposição anterior se aplica. □

Como acontece com séries numéricas, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge pontualmente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais é *pontualmente de Cauchy*, i.e., se para cada $x \in X$, a sequência $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. O mesmo se verifica para a convergência uniforme, trocando as palavras certas. Mais precisamente:

5.5.2 Um ε sobre séries de potências

Possivelmente as séries de funções mais utilizadas ocorrerem para $f_n(x) := a_n(x - x_0)^n$, para certos $a_n \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. No que segue, é inofensivo considerar $x_0 = 0$ – e o caso geral se recupera com uma típica mudança de variável.

Evidentemente, a convergência de uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ depende da escolha dos coeficientes a_n de cada parcela da série. A análise dos termos $\sqrt[n]{|a_n|}$ ajuda a decidir sobre isso.

- Se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, então a série converge apenas para $x = 0$: se $x \neq 0$, então $|x|\sqrt[n]{|a_n|} \not\to 0$ e, consequentemente, o termo geral da série não converge para 0.
- Se, por outro lado, a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então

$$R := \left\{\rho > 0 : \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} \text{ para } n \gg 0\right\}$$

  é um intervalo não-vazio de $\mathbb{R}$, da forma $(0, r)$, $(0, r]$ ou $(0, +\infty)$, onde $r := \sup R$. O número r é chamado de **raio de convergência** da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, nome que faz sentido em vista do próximo

Teorema 5.5.5. *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com* $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ *limitada. Então* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge em* $(-r, r)$*, onde* r *é o raio de convergência da série. Além disso, a série diverge em* $\mathbb{R} \setminus [-r, r]$*.*

Demonstração. A primeira parte segue pelo teste da raiz (a.k.a. teste de Cauchy). Mais precisamente, se $\rho \in R$ e $|x| < \rho$, então para $n \gg 0$ temos

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{|x|}{\rho} < 1,$$

donde segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge. Para a segunda parte, termos $x \notin R$ nos garante que o termo geral da série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ não converge para 0. $\square$

Observação 5.5.6. Acima, a convergência da série para $x \in \{-r, r\}$ varia de acordo com o caso. $\triangle$

Exercício 5.14. Nas hipóteses e notações do teorema anterior, mostre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absoluta e uniformemente em $[-\rho, \rho]$ para todo ρ tal que $0 < \rho < r$. Conclua que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é contínua em $(-r, r)$. Dica: teste M de Weierstrass. $\blacksquare$

Exercícios adicionais

Exercício 5.15. Para $a := 0$ e $b := 10$, considere $\mathcal{P} := \langle 0, 5, 10\rangle$ e $\mathcal{Q} := \langle 0, 3, 6, 10\rangle$.

a) Mostre que $\mathcal{P} \not\sqsubseteq \mathcal{Q}$ mas $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$.

b) Conclua que as relações $\sqsubseteq$ e $\preceq$ são distintas. $\blacksquare$

Epílogo: a *existência* da reta

5.5.3 Opcional: infinitesimais

Ao manipular as "$\approx$-identidades" em (3.8) e (3.9), com $\mathrm{d}y = f(a + \mathrm{d}x) - f(a)$, chega-se a

$$g(f(a + \mathrm{d}x)) - g(f(a)) \approx g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot \mathrm{d}x,$$

essencialmente o que se fez na demonstração acima: para formalizar o argumento, o *infinitesimal* dx foi substituído por uma função real que tende a zero nas proximidades de a (a saber, $x \mapsto x - a$). Ora, como algo *errado* pôde levar a conclusões *certas*?

No caso específico dos argumentos com *infinitesimais*, o leitor deve levar em conta que apesar do nome, a reta *real* não é *real*: trata-se tão somente de um objeto abstrato cujas propriedades imitam o que esperaríamos de uma reta *concreta*. Em particular, ao *tampar* os "buracos" do modelo de reta por meio da completude (existência de supremos), ganha-se um *modelo* para a reta que não admite elementos *infinitesimais*. Isto não invalida os argumentos por *infinitesimais*, mas apenas os torna incompatíveis com a noção de reta real como um corpo ordenado completo – algo similar à existência de "raízes quadradas" complexas para números negativos[0]. Pode ser um bom momento para fazer a próxima

Definição 5.5.7. Dado um corpo ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$, diremos que $x \in \mathbb{K}$ é **infinitesimal** em $\mathbb{K}$, ou é um **infinitésimo**, se para todo $n \in \mathbb{N}$ valer $|nx| < 1$. Analogamente, $x \in \mathbb{K}$ é **ilimitado**[1] em $\mathbb{K}$ se para todo $n \in \mathbb{N}$ valer $n < |x|$. ¶

É claro que $0 \in \mathbb{K}$ é infinitesimal em $\mathbb{K}$. Por outro lado, $x \neq 0$ é infinitesimal em $\mathbb{K}$ se, e somente se, $\frac{1}{x}$ é ilimitado em $\mathbb{K}$. Logo, $\mathbb{K}$ tem infinitésimos não-nulos se, e somente se, $\mathbb{K}$ tem elementos ilimitados. Portanto, corpos arquimedianos são precisamente aqueles nos quais *não* existem infinitésimos não-nulos, o que sugere a pergunta: há algum corpo ordenado não-arquimediano?

Proposição 5.5.8. *Se $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$ é um* domínio ordenado[2]*, então seu corpo de frações* $\mathbb{K} := \mathrm{Frac}\,(\mathbb{D})$ *admite uma relação de ordem total $\sqsubseteq$, compatível com a ordem de $\mathbb{D}$ e que faz de $\mathbb{K}$ um corpo ordenado.*

Demonstração. A ideia é imitar a relação entre a ordem de $\mathbb{Q}$ e a ordem de $\mathbb{Z}$. Por ser o corpo de *frações* de $\mathbb{D}$, sabe-se[3] que todos os elementos de $\mathbb{K}$ são frações da forma $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$. Daí, para $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{K}$ com $b, d \succ 0$, declara-se

$$\frac{a}{b} \preceq_* \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \preceq bc,$$

[0] Trata-se apenas de um abuso terminológico, já que a *função raiz quadrada* só assume valores reais.

[1] Na Wikipedia o leitor encontrará tais números xingados como "*infinitos*", mas tal terminologia não é adequada, por confundir noções de ordem e cardinalidade.

[2] Cuja definição é a mesma dos corpos ordenados, *mutatis mutandis*.

[3] A menos de detalhes técnicos, o corpo de frações de um domínio é o anel K que se obtém de D ao se repetir a *construção* de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$. O leitor pode cuidar dos detalhes.

e o leitor não deve ter dificuldades para verificar que $\preceq_*$ faz de $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. □

Portanto, a fim de obter um corpo ordenado dotado de infinitésimos, basta encontrar um domínio ordenado $\mathbb{D}$ dotado de um elemento ilimitado x, pois daí seu inverso multiplicativo x^{-1} (no corpo de frações $\mathbb{K}$) será um infinitésimo não-trivial.

Exercício 5.16 (Opcional)**.** Para um domínio ordenado $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$, considere o *anel de polinômios* na indeterminada x e coeficientes em $\mathbb{D}$, denotado por $\mathbb{D}[x]$.

a) Mostre que $\mathbb{D}[x]$ é um domínio legítimo. Dica: avalie o grau de um produto de polinômios.

b) Dados $p, q \in \mathbb{D}[x]$, declare $p \sqsubseteq q$ se, e somente se, $p = q$ ou o coeficiente líder de $q - p$ é (estritamente!) maior do que $0 \in \mathbb{D}$. Mostre que tal relação faz de $\mathbb{D}[x]$ um domínio ordenado em que x é ilimitado.

c) Conclua que $\mathbb{D}(x)$, o corpo de frações do domínio $\mathbb{D}[x]$, é um corpo ordenado que contém infinitésimos. ■

Definição 5.5.9. Diremos que um corpo ordenado não-arquimediano $\langle \mathbb{H}, \leq \rangle$ é uma **reta hiper-real** se existir um *subcorpo ordenado e completo* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$: explicitamente, isto significa que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ e a inclusão $i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ é um morfismo de corpos ordenados. Os elementos de $\mathbb{H}$ serão chamados de **números hiper-reais**. ¶

Ao fazer $\mathbb{D} := \mathbb{R}$ no exercício anterior, segue que $\mathbb{R}(x)$ é *uma* reta hiper-real. De modo análogo, $\mathbb{R}(x, y)$, o corpo de frações de $\mathbb{R}[x, y]$, também pode ser considerado como *outra* reta hiper-real. Diferente da caracterização de $\mathbb{R}$, hiper-retas não gozam de unicidade a menos de isomorfismo, mas isto não chega a ser um problema.

Exercício 5.17 (Opcional)**.** Mostre que $\mathcal{I}(\mathbb{H}) := \{x \in \mathbb{H} : x \text{ é infinitesimal}\}$ é um subconjunto não-vazio e limitado, mas que não admite supremo nem ínfimo em $\mathbb{H}$. Dica: pode ser útil observar que se $x, y \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$, então $x + y \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$. ■

Para efeitos psicológicos, pode-se imaginar uma reta hiper-real $\mathbb{H}$ como a reta real $\mathbb{R}$ *salpicada* de pontos *limitados* e pontos ilimitados, com os primeiros *aglutinados em torno* dos elementos de $\mathbb{R}$. Mais precisamente, dado um hiper-real $h \in \mathbb{H}$, diremos que $h \in \mathbb{H}$ é **limitado** se existir $r \in \mathbb{R}$ com $|h| \leq |r|$, o que equivale a dizer que h não é ilimitado. Para economizar caracteres, vamos indicar por $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ o subconjunto formado pelos hiper-reais limitados de $\mathbb{H}$.

Proposição 5.5.10 (Opcional)**.** *Nas condições acima, se $h \in \mathbb{H}$ é limitado, então existem únicos $r \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$ tais que $h = r + \varepsilon$.*

Demonstração. De fato, os conjuntos $L(h) := \{s \in \mathbb{R} : s < h\}$ e $U(h) := \{s \in \mathbb{R} : h < s\}$ são não-vazios, com $L(h)$ limitado superiormente e $U(h)$ limitado inferiormente, donde segue, por completude (de $\mathbb{R}$!), que existe $l := \sup L(h)$ e $u := \inf U(h)$. Daí, por l ser limitante inferior de $U(h)$ e u ser limitante superior de $L(h)$, resulta $u \leq l$ e $l \leq u$, acarretando $u = l$. Com isso, não é difícil mostrar que $|u - h| < \frac{1}{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Logo, basta fazer $r := u$ e $\varepsilon := u - h$, os únicos que satisfazem $h = r + \varepsilon$. □

Definição 5.5.11. O (único) número real r obtido na proposição anterior será chamado de **parte real**[4] de h, que denotaremos por $\Re(h)$. ¶

[4]Geralmente chamada de *parte standard*, em alusão à *Análise Não-Standard*, nicho em que esse tipo de bruxaria é praticada.

Números hiper-reais ilimitados se comportam como funções que *tendem a infinito*, enquanto infinitésimos capturam a noção de *tender a zero*. Neste cenário, as indeterminações discutidas na subseção anterior se traduzem de modo bastante natural em $\mathbb{H}$. Explicitamente, dados um infinitésimo $\varepsilon \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$ e um número ilimitado $U \in \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{H})$, o produto $\varepsilon \cdot U$ pode pertencer a qualquer um dos conjunto $\mathcal{I}(\mathbb{H})$, $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ ou $\mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{H})$: note que com $\mathbb{H} := \mathbb{R}(x)$, têm-se $\frac{1}{x} \cdot x \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, $\frac{1}{x^2} \cdot x \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$ e $\frac{1}{x} \cdot x^2 \in \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{H})$.

Mas nem tudo é festa. Suponha que se queira utilizar argumentos infinitesimais para mostrar que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$ é *contínua* em 2, i.e., que pontos *arbitrariamente próximos* de 2 são levados por f a pontos *arbitrariamente próximos* de $f(2) = 4$. Com a terminologia infinitesimal, isto consistiria em observar que $\Re(f(2+\varepsilon)) = \Re(4) = 4$, o que de fato *parece* acontecer, já que $(2+\varepsilon)^2 = 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$ e $4\varepsilon + \varepsilon^2 \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$. No entanto, há um problema: se ε for um infinitésimo não nulo, então $2 + \varepsilon \notin \mathbb{R}$, de modo que, a rigor, a função f não *sabe* o que é $f(2+\varepsilon)$.

Portanto, o uso *honesto* de argumentos infinitesimais impõe como primeira exigência a *extensão* do domínio das funções reais, o que pode parecer fácil para funções polinomiais, mas que soa bem pouco trivial para funções mais delicadas, como as trigonométricas. A segunda exigência é fruto da primeira: dado que se analisam as extensões de funções reais e não as próprias funções reais, o que garante que os resultados obtidos sejam válidos para as funções originais?

Todas essas perguntas são respondidas pela *Análise Não-Standard*, desenvolvida por Abraham Robinson através de técnicas de *Teoria dos Modelos*[5] com o propósito de formalizar o Cálculo Infinitesimal vislumbrado por Leibniz séculos atrás. Leitores interessados numa introdução amigável podem conferir [14].

[5]Não tem a ver com *Modelagem Matemática*, da Matemática Aplicada, mas sim com Lógica Matemática.

Lista de símbolos e siglas

Referências Bibliográficas

[0] E. Acosta. Differentiability in topological groups. *Soochow Journal of Mathematics*, 22(1):39–48, 1996.

[1] E. Acosta and G. Delgado. Fréchet vs. Carathéodory. *American Mathematical Monthly*, 101:332–338, 1994.

[2] T. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, 2 edition, 1981.

[3] S. ARORA, H. BROWNE, and D. DANERS. An alternative approach to frÉchet derivatives. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 111(2):202–220, 2021.

[4] J. Barrow-Green, J. Gray, and R. Wilson. *The History of Mathematics: A Source-Based Approach*, volume 1. MAA Press, 2019.

[5] A. F. Beardon. *Limits: a new approach to real analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[6] N. Bourbaki. *General Topology, part 1.* Addison-Wesley, London, 1966.

[7] N. Bourbaki. *General Topology, part 2.* Addison-Wesley, London, 1966.

[8] L. Bukovský. *The structure of the real line.* Monografie Matematyczne 71. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2011.

[9] D. G. de Figueiredo. *Análise I.* LTC, 2 edition, 1996.

[10] R. Engelking. *General Topology: Revised and completed edition.* Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[11] J. Ferreirós. *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics.* Birkhäuser Basel, 2ª edition, 2007.

[12] J. F. Hall. *Completeness of Ordered Fields.* California Polytechnic State University, 2010. Monografia de graduação.

[13] V. J. Katz and K. H. Parshall. *Taming the Unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century.* Princeton University Press, 2014.

[14] H. Keisler. *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach.* Dover, 2 edition, 2000.

[15] J. L. Kelley. *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1955.

[16] S. Kuhn. The derivative á la Carathéodory. *The American Mathematical Monthly*, 98(1):40–44, 1991.

[17] E. L. Lima. *Espaços métricos*. Projeto Euclides. IMPA, 2 ed. edition, 1983.

[18] E. L. Lima. *Análise Real, Volume 1: Funções de uma Variável*. IMPA, 2006.

[19] E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 1*. IMPA, 14 edition, 2017.

[20] P. Maddy. *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Oxford University Press, USA, 2011.

[21] R. M. Mezabarba. Fundamentos de Topologia Geral, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/Fund_Top_Geral.

[22] R. M. Mezabarba. Teoria maliciosa dos conjuntos, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/MaliciousSetTheory.

[23] E. H. Moore and H. L. Smith. A General Theory of Limits. *American Journal of Mathematics*, 44(2):102–121, 1922.

[24] E. A. Ok. *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University, 2007.

[25] M. Raman-Sundström. A pedagogical history of compactness. *The American Mathematical Monthly*, 122(7):619–635, 2015.

[26] T. Roque. *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Zahar, 2012.

[27] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 3 edition, 1976.

[28] E. Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. Academic Press, 1996.

[29] R. Shakarchi. *Problems and solutions for undergraduate analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1 edition, 1998.

[30] T. Sonar. *3000 Years of Analysis: Mathematics in History and Culture*. Birkhäuser, 2021.

[31] T. Tao. *Analysis I*. Texts and Readings in Mathematics. Springer, 3 edition, 2016.

[32] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, New York, 1970. Reprinted in 2004 by Dover.

Índice Remissivo