Um curso fechado e limitado de Análise na Reta

© 2023 por Renan M. Mezabarba[0]

Última Atualização: 28 de abril de 2023.

A preguiça é a locomotiva do progresso.

Sasha Ananin.

Sumário

Prefácio

Desceu a chuva, vieram as torrentes, sopraram os ventos e bateram com ímpeto contra aquela casa, e ela caiu: e foi grande a sua ruína.

Lucas *et al.* (*circa* 60 d.E.C.).

Um dos princípios básicos da engenharia civil consiste em estabelecer fundações firmes sobre as quais aquilo que se deseja construir será erguido, algo certamente já conhecido muito antes que Lucas de Antioquia[0] escrevesse sobre parábolas e outras *cônicas*. Como a Matemática não é um prédio, isso frequentemente foi ignorado ao longo da História – e sem grandes prejuízos, haja vista que a Matemática existia antes que os *Fundamentos da Matemática* fossem estabelecidos ou mesmo percebidos como algo *necessário*.

Na verdade, embora seja reducionista, costuma parecer mais apropriado considerar a Matemática como uma *linguagem* ou *idioma*, onde cada área faz o papel de *dialeto* ou coisa do tipo. Inclusive, sob tal perspectiva, o caminho usual do aprendizado matemático ganha contornos quase indistinguíveis do que se verifica no caso das linguagens:

- ✓ primeiro se aprende a falar,
- ✓ depois, possivelmente, aprende-se tanto a ler quanto a escrever,
- ✓ e só então, por sorte ou azar, estudam-se os mecanismos de linguagem, de fala, de escrita, etc[1].

Nesse sentido, este livro se destina prioritariamente a quem já aprendeu a *falar* e tem algumas noções básicas de *leitura* e *escrita*, isso tudo com respeito à Matemática: na prática, isto significa que o *leitor*[2] já deve ter cursado alguma disciplina de Matemática do Ensino Superior, em que *demonstrações* e outros jargões comuns já tenham sido mencionados, mesmo que superficialmente. Em outras palavras, um curso de Cálculo I minimamente bem feito já é mais do que suficiente, dado que o dialeto a ser explorado é a *Análise na Reta*, que em certo sentido constitui os *fundamentos* do Cálculo.

Mais precisamente, a parte da Análise que discutiremos se ocupa de justificar ou validar os métodos utilizados em Cálculo, o que em certo sentido se aproxima do que se faz em Direito: a partir de um código de leis e um conjunto de evidências, articula-se um argumento a fim de provar uma tese. No nosso caso, discutir quais os possíveis códigos de leis – *axiomas* – também faz parte do processo, que pode ser tão profundo quanto quisermos: a própria gramática do idioma no qual as leis se escrevem é passível de investigação, por exemplo.

[0]Grande romancista do Século I, entre outras coisas – a depender das crenças de quem estiver lendo. Cabe ainda destacar: eu sou ateu.

[1]Epifania de Gabriel Luchini, numa conversa de corredor que tivemos em 2019, sobre o ensino de Cálculo.

[2]Ou leitora, naturalmente. Ao longo do texto, o uso do substantivo "leitor" deve ser entendido com o gênero neutro, de modo a se aplicar a qualquer pessoa. O mesmo deve ser entendido para casos afins.

Embora discussões com tal nível de profundidade sejam extremamente pertinentes de um ponto de vista epistemológico, realizá-las nessa etapa da vida é uma tarefa tão árdua quanto infrutífera: seria como estudar metalinguagem e sintaxe ao mesmo tempo em que se aprendem as técnicas disponíveis de comunicação (fala, sinais, etc.) na infância. Portanto, é comum que textos voltados para Análise na Reta assumam um *background* linguístico mínimo sem muito alarde, numa postura pragmática quase sempre justificável. Este texto não será diferente, a menos do alarde.

É exatamente por isso que escrevo este prefácio como quem pisa em ovos, dado que o ensino de Análise Real *básica* no Brasil segue uma postura não só pragmática, mas quase dogmática. *Com efeito*, um texto que, em seu prefácio, afirma

> "*A teoria é apresentada desde o começo. Não se faz uso de resultados que não sejam estabelecidos no texto*" [15]

sugere que um *começo* existe, está bem estabelecido e é *único*. Logo, *sob tal ótica*, qualquer coisa que busque fundamentar tal "começo" só pode ser julgada como perfumaria. Porém, a segunda afirmação é mais *grave*: é evidente que o texto supracitado contém e faz uso de resultados implícitos, principalmente no que se refere a procedimentos recursivos, que na prática são *assumidos* como senso comum – o *Axioma da Escolha*, como não poderia deixar de ser, nem chega a ser citado, apesar de estar presente em diversas passagens fundamentais.

Por um lado, a última crítica poderia ser rebatida tanto pela observação de que Lima, deliberadamente, adota uma abordagem *ingênua* para os fundamentos, quanto pela própria postura que defendi acima, de que questões mais profundas podem (e devem) ser discutidas num segundo momento. Todavia, nenhuma dessas réplicas justifica a afirmação de que se faria o contrário. Isto não apenas confunde leitores inexperientes, como também ajuda a cristalizar a ideia de que a intuição não é debatível em Matemática – ou que os axiomas matemáticos são *verdades absolutas*, seja lá o que isso signifique.

Então, como resposta a um equívoco epistemológico, eu decidi escrever um livro de Análise? ~~Talvez~~[3] Não. Tampouco penso que as observações acima desmereçam os inúmeros méritos *históricos* do *Curso de Análise* [15]: num contexto em que simplesmente havia quase nenhuma bibliografia nacional sobre o assunto, o *Curso de Análise* e as outras obras do Prof. Elon foram fundamentais para a formação matemática brasileira[4]. Apesar disso, da mesma forma que linguagens são objetos em constante construção e adaptação, a Matemática e seus dialetos *hoje* já não são como nos anos 70. Surgem, pelo menos, duas alternativas:

a) ensinar os conteúdos *básicos*[5] de acordo com os cânones;

b) modernizar os cânones.

Acima, a modernização não se refere apenas aos recursos tipográficos propiciados pelo LaTeX, mas principalmente aos diversos conceitos matemáticos *popularizados* nos últimos cinquenta anos. Assim, fica *fácil ver* que o apoio irrestrito à opção (a) significa, na prática, dificultar o acesso aos novos avanços da área[6], inclusive daqueles que potencialmente facilitariam o tratamento de assuntos clássicos.

[3] Sim, o traçado é proposital. Eu tenho um senso de humor controverso.

[4] Os meus primeiros passos no aprendizado de Análise foram justamente com livros do Prof. Elon: o "Elão" [15] e o magnífico ~~mas resumível ou *reorganizável*~~ *Espaços Métricos* [13].

[5] Digamos, Análise, Álgebra e Geometria.

[6] Para extrapolar: daqui 100 anos, as graduações brasileiras em Matemática, se existirem, ainda não terão Teoria de Categorias em suas grades?

Com isso dito, o presente texto se propõe a apresentar um curso de Análise na Reta que seja um pouco mais cuidadoso com aspectos lógico-fundamentais, ao mesmo tempo em que moderniza a discussão de alguns temas. Posto de outra forma, busca-se: discutir o *máximo possível* de Análise na Reta (será *fechado*), mas de forma *honesta* (será *limitado*) e com o *mínimo possível* de esforço (será *compacto*)[7]. Entre outras coisas, isso acarreta que

a teoria será apresentada desde *um* começo.

Tal começo será uma discussão breve sobre Teoria dos Conjuntos, tão ingênua quanto minha consciência permite: notações usuais, operações básicas e suas propriedades, noções de cardinalidade, boa ordenação e *escolhas*. Os mais dogmáticos certamente protestarão pela abordagem escolhida para discutir os Axiomas de (Dedekind!)-Peano, que *descrevem* os naturais e constituem o clássico começo do *Elinho* [14]. Contudo, eu escrevo principalmente para pessoas não-convertidas e, por isso, não consigo me importar. Numa provocação deliberada, tudo isso constitui o Capítulo 0.

Os assuntos seguintes se organizam quase totalmente de acordo com o cânone [15], embora certos tópicos sejam abordados de modo distinto. A diferença mais marcante será o emprego de *nets*[8] no lugar de sequências para o estudo de convergência e continuidade, uma generalização natural e *bastante recente* de sequências: foram introduzidas por Moore e Smith [19] em 1922 e popularizadas por Kelley [12] nos anos 50 (!). Embora, *topologicamente*, não exista ganho em usar *nets* na reta real, a generalidade delas permite tratar simultaneamente diversos tipos de limites com uma única abordagem: portanto, ganha-se tempo e escopo! Outra peculiaridade será o tratamento de espaços de funções, que ocorrerá antes da introdução de derivadas.

Alguns resultados serão demonstrados por meio da generalização de certos conceitos da reta para o contexto de *espaços topológicos* ou *métricos*, a fim de explicitar as hipóteses realmente importantes e economizar o uso de épsilons e deltas tanto quanto possível[9]. Apesar dessas pequenas incursões, não haverá ênfase sobre pormenores de natureza topológica ou *patológica*, de modo que o texto se manterá fiel ao escopo euclidiano de dimensão finita, majoritariamente 1.

Certamente, muitos dentre os *eventuais* leitores deste material desaprovarão a abordagem adotada ou encontrarão equívocos que julgarão grotescos. Três coisas me consolam: a primeira é acreditar que qualquer exposição pode ser melhorada, o que inclusive costuma se perceber por meio das críticas; a segunda é o alívio em saber que a redação deste texto (e eventual publicação) não inviabiliza a existência (e utilização!) de outras obras – trata-se tão somente de uma alternativa; a terceira é o meu filtro de SPAMs.

Renan M. Mezabarba

Ilhéus-BA, 28 de abril de 2023.[10]

[7] Esta é uma piada que o leitor entenderá, possivelmente, depois do Capítulo 5.

[8] Redes, para os nacionalistas.

[9] Cabe destacar que a ênfase da exposição será qualitativa: proposições de natureza quantitativa que não contribuam para o desenrolar da teoria, como estimativas muito específicas ou desigualdades enfadonhas, serão relegadas a exemplos breves ou exercícios dirigidos – ou sumariamente ignoradas.

[10] Convém ressaltar que a redação começou em 16 de abril de 2021.

Prólogo: Análise para quê?

Os números naturais foram criados por Deus, todo o resto é trabalho da humanidade.

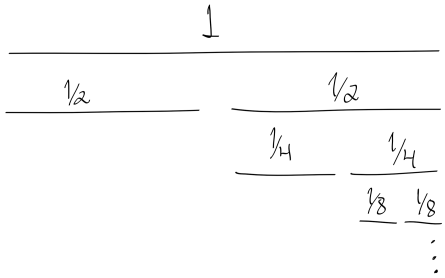
Leopold Kronecker (1886).

Faz parte do folclore matemático atribuir a frase anterior ao algebrista Leopold Kronecker (1823-1891), como uma síntese de seu ceticismo perante os diversos métodos *infinitários* e não-construtivos que se propagaram na Matemática a partir da segunda metade do Século XIX [9]. Longe de ser uma mera declaração teológica, ela expressa a confiabilidade que temos diante dos *métodos aritméticos* usuais, explicitamente ancorados na (aparente?) realidade imediata, em contraponto aos argumentos do *Cálculo*, que frequentemente dependem de suposições incomuns ao nosso cotidiano intrinsecamente *finito*, como no caso das *séries*.

Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

que manifesta a ideia de somar iteradamente parcelas da forma $\frac{1}{2^n}$ conforme toma-se n cada vez maior. Embora possa parecer artificial, esse tipo de animal surge naturalmente em problemas que envolvem o *cálculo* de áreas *curvilíneas*, por meio do chamado *método da exaustão*[0]. O ponto a chamar atenção, porém, é o seguinte: embora cada estágio finito desse processo seja facilmente calculável, não é completamente óbvio o que poderia *significar* realizar uma soma com infinitas parcelas.



Com argumentos aritmético-geométricos (do tipo ilustrado na figura acima), é razoável *convencionar* que o valor para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (seja lá qual for) deve corresponder ao número (segmento) para o qual as *somas parciais* se *dirigem*: no caso, tal número *deveria* ser 1, já que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \ldots$ Ainda assim, trata-se de uma convenção: não há vida suficiente para efetuar *todas* as somas e verificar uma igualdade legítima.

[0]O que será revisto quando tratarmos de integração.

Agora, o que significa dizer que tais somas parciais se dirigem para algum valor? Uma vez respondida essa pergunta: o que impediria que certas somas se dirigissem para números diferentes? Mais uma: como determinar os valores de tais somas infinitas?

Evidentemente, nada impede que tais perguntas sejam respondidas de forma vaga e intuitiva – ou apenas ignoradas. No caso da série proposta, por exemplo, um argumento muito comum para justificar as estimativas sem muito esforço (abanando as mãos) é o seguinte: ao escrever $S \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, chega-se a

$$2S = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + S$$

e, consequentemente, $S = 1$, justamente o que o raciocínio intuitivo geométrico sugeria!

Não é difícil adaptar o *método* para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ e, mais geralmente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{m-1}$ sempre que $m > 1$, identidades compatíveis com suas respectivas interpretações geométricas. O que acontece, porém, ao aplicar tal "metodologia" na determinação do valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$? Como antes, ao escrever $T \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, chega-se a

$$2T = 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{n+1} + \ldots \Rightarrow 2T + 2 = 2 + 4 + 8 + \ldots = T \Rightarrow T = -2,$$

resultado que, desta vez, não parece *certo*, por discordar do que a interpretação geométrica sugere.

Finalmente encontramos uma pergunta mais inescapável do que as feitas um pouco acima: *por que o truque algébrico preguiçoso pareceu funcionar nos primeiros casos mas falhou no último?*

Responder a esse tipo de pergunta é, pelo menos historicamente, um dos papéis da Análise: pode-se dizer que ela surgiu do processo natural de revisão metodológica, típico do *modus operandi* científico, no contexto do *Cálculo* de Leibniz-Newton; embora, a princípio, tratasse-se de um movimento voltado a justificar (e expandir) os resultados da área com base em conceitos geométricos menos vagos, seus praticantes não tardaram a empregar a *linguagem de conjuntos* no processo de retraduzir e *sintetizar* o Cálculo a partir de noções aparentemente tão sólidas quanto os números criados pelo Deus de Kronecker.

Nos capítulos que se seguem, as perguntas feitas acima serão respondidas de forma tão honesta quanto possível, o que (in) felizmente exige algum grau de tergiversão para que se discutam as suposições implícitas nas respostas – e assim explicitar a subjetividade inerente. Uma vez que a parcela pragmática dos leitores em potencial[1] costuma se entendiar com tais discussões, para não piorar ainda mais a situação, evitarei apresentar (diversas) motivações de caráter histórico[2].

[1]Que acredito ser majoritária entre praticantes de Matemática.

[2]A quem se interessar pelo assunto, minhas sinceras desculpas, bem como as sugestões de leitura a seguir: Ferreirós [9] (para História da Teoria dos Conjuntos), Tatiana Roque [20] (para História da Matemática *geral*) e Thomas Sonar [24] (para História da Análise).

Capítulo 0

Sobre os “fundamentos”

... Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.

David Hilbert (1926)[0].

Intuitivamente, a *reta real* é um objeto geométrico: um *segmento retilíneo sem saltos*, i.e., *contínuo*. Por outro lado, como segmentos dessa reta podem ser *somados* (copiados e justapostos) e *multiplicados*[1], segue que a reta também é um objeto *algébrico*. Daí, uma pergunta natural a se fazer é: como conciliar as duas noções a fim de *descrever*, matematicamente, a reta real?

A resposta usual faz uso da *linguagem de conjuntos*: a reta real será definida como *um conjunto* (de pontos), cujos *aspectos geométricos* desejados serão abstraídos por uma *relação de ordem* que deverá capturar, de alguma forma, as noções de *linearidade* e *continuidade*; os *aspectos algébricos*, por sua vez, serão descritos por meio de *operações binárias* que imitarão as operações usuais que aprendemos na *escola*. Nesse sentido, a Seção 0.0 cumpre o *ingênuo* papel de relembrar as terminologias conjuntistas, bem como suas principais propriedades, que serão utilizadas no próximo capítulo a fim de descrever a reta real. Fica por conta da Seção 0.1 introduzir o ferramental básico usado na comparação entre *cardinalidades* (quantidade de elementos) de conjuntos *infinitos*, por meio do qual seremos capazes de determinar, oportunamente, a cardinalidade da reta real. Por fim, a Seção 0.2 irá escancarar os problemas da abordagem ingênua adotada (deliberadamente) ao longo do capítulo e, mais importante, sugerir como remediá-los por meio de uma *axiomática* mais restritiva – no entanto, dado o escopo do texto, isto será feito de maneira relativamente superficial.

0.0 O Paraíso de Cantor

A palavra “conjunto” é uma daquelas típicas expressões (*atômicas*) que não se explicam por meio de outras expressões mais simples, como *tempo*, *espaço*, *ser*, etc. Costuma ficar a cargo da (vida em) sociedade ensinar o significado dessas coisas: no caso, conjuntos podem ser entendidos como *agrupamentos de objetos* ou *coleções de indivíduos* que partilham algum tipo de característica comum num certo contexto. Inclusive, nesse sentido, conjuntos são mais *primitivos* do que os números utilizados para *quantificar* seus *elementos* (como veremos na Seção 0.1).

[0]Tradução livre da tradução apresentada por Ferreirós [9].
[1]Pergunte para Descartes – ou, na falta de uma prancheta Ouija, para Tatiana Roque [20].

O uso desse tipo de aparato linguístico em contexto matemático costuma mimetizar o raciocínio binário já bastante difundido com a popularização dos computadores: uma afirmação é `verdadeira` ou `falsa`; o transistor está `On` ou `Off`; o *bit* é 0 ou 1, etc. No caso, dados x e A, pode-se ter apenas “$x \in A$” (lido como “x pertence a A”, “x é elemento de A” ou “x é membro de A”) ou o contrário, indicado por “$x \notin A$” (lido como “x não pertence a A”, “x não é elemento de A” ou “x não é membro de A”). Porém, como não se define explicitamente o que significa *ser* conjunto e, muito menos, o que é a relação de pertinência “$\in$”, precisa-se, pelo menos, indicar quais comportamentos esperamos que eles *apresentem* – inclusive no que se refere à igualdade: afinal, como decidir se duas *manifestações* se referem a um mesmo objeto se *nem* sabemos definir o que significa ser o objeto em questão?

Definição 0.0.0. Para conjuntos A e B:

(i) escreveremos “$A \subseteq B$” para abreviar a afirmação “para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$”, lida como “A é **subconjunto** de B”, ou “A **está contido em** B”;

(ii) escreveremos “$A \nsubseteq B$” para abreviar a negação de “$A \subseteq B$”, i.e., para indicar que “existe $x \in A$ tal que $x \notin B$”;

(iii) escreveremos “$A \subsetneq B$” para abreviar “$A \subseteq B$ e $A \neq B$” e, em tais situações, diremos que A é **subconjunto próprio** de B. ¶

Axioma da Extensão. *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos. Em notação mais econômica:* $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)$ *e* $(B \subseteq A)$.

O axioma acima manifesta a ideia de que são os elementos de um conjunto, e apenas eles, que o caracterizam. Este axioma poderia não ser útil se, por exemplo, quiséssemos distinguir conjuntos não apenas por seus elementos, mas também pela cor da fonte em que eles são grafados: se fosse o caso, então os conjuntos $\{L, L'\}$ e $\{L, L'\}$ seriam distintos, mesmo com ambos sendo *compostos* pelos mesmos elementos. Da mesma forma, ao pensar em *conjuntos* como *pastas* de arquivos num computador, duas pastas distintas podem ter exatamente os mesmos arquivos (duplicados), revelando um *modelo* em que o Axioma da Extensão não é satisfeito.

Observação 0.0.1. No contexto matemático *contemporâneo*, *axiomas* não são *verdades absolutas* ou *inquestionáveis*, mas apenas suposições (convenções?) estabelecidas a fim de embasar deduções posteriores. Eles podem ser debatidos, mas *fora* do panorama discursivo regido por eles. Costuma ser útil pensar em axiomas como regras de um jogo: elas se discutem antes ou depois de uma partida, mas não durante. Inclusive, é lícito buscar por regras que respeitem alguma noção de *verdade*, o que evidentemente exige debate – que ocorre fora do jogo. △

Podemos agora nos dedicar a problemas mais emocionantes, como a *formação de conjuntos*. Intuitivamente, sempre que se tem algum tipo de *propriedade matemática*[2], é razoável considerar o conjunto das *coisas* que possuem tal propriedade. Em vista do Axioma da Extensão, para uma propriedade $\mathcal{P}$ fixada, é único, *caso exista*, o conjunto de *todos* os elementos que possuem a propriedade $\mathcal{P}$: ora, se tanto A quanto B têm como elementos precisamente aqueles com a propriedade $\mathcal{P}$, então “$x \in A \Leftrightarrow x \in B$”, acarretando $A = B$.

[2]Aqui, “propriedade matemática” é meramente uma *fórmula* escrita na *linguagem* da Teoria dos Conjuntos, possivelmente com *variáveis livres*. Porém, tais pormenores não serão discutidos.

Com isso em mente, para uma propriedade $\mathcal{P}$ dada, ao escrever $\mathcal{P}(y)$ para indicar que y possui a propriedade $\mathcal{P}$ e $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ para denotar a coleção dos elementos com a propriedade $\mathcal{P}$, i.e., tal que $y \in \{x : \mathcal{P}(x)\}$ se, e somente se, $\mathcal{P}(y)$, a intuição clássica diz que deveria valer o seguinte

***Princípio* da Abstração.** *Para toda propriedade $\mathcal{P}$ existe o conjunto $\{x : \mathcal{P}(x)\}$.*

Exemplo 0.0.2. Ao escrever $\{n : n \in \mathbb{N}$ e n é par$\}$, por exemplo, a condição "$n \in \mathbb{N}$ e n é par" é o critério usado para decidir quais elementos serão considerados membros do conjunto. Assim, como a afirmação "$6 \in \mathbb{N}$ e 6 é par" é verdadeira, tem-se $6 \in \{n : n \in \mathbb{N}$ e n é par$\}$, ao passo que $7 \notin \{n : n \in \mathbb{N}$ e n é par$\}$, posto que a afirmação "$7 \in \mathbb{N}$ e 7 é par" é falsa (embora $7 \in \mathbb{N}$, não é verdade que 7 seja par). Evidentemente, não faria diferença escrever $\{x : x \in \mathbb{N}$ e x é par$\}$: tanto no primeiro caso quanto no segundo, "n" e "x" são variáveis, de modo que a opção por uma das letras se deve apenas a fatores estético-psicológicos. ▲

Exemplo 0.0.3 (Pares, triplas, etc. não ordenadas)**.** Para a e b fixados, "ser a ou b" é uma propriedade possuída apenas por a e b. Desse modo, o Princípio da Abstração assegura a existência do conjunto $\{x : x = a$ ou $x = b\}$, cujos elementos são todos aqueles que são a ou b, ou seja: $y \in \{x : x = a$ ou $x = b\}$ se, e somente se, $y = a$ ou $y = b$. Posto de outra forma: a e b são os únicos elementos de $\{x : x = a$ ou $x = b\}$. Por comodidade, costuma-se abreviar a notação desse tipo de conjunto:

Definição 0.0.4. Escreve-se $\{a, b\}$ para denotar o conjunto cujos únicos elementos são a e b, que será chamado de **par não-ordenado** de a e b. ¶

Fica assim justificada a grafia mais *comum* para conjuntos, em que seus membros são listados entre os símbolos "{" e "}". Evidentemente, considerações análogas se aplicam a coisas como $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, etc. Cabe destacar que a expressão "não-ordenado" se refere ao fato de que a ordem com que se grafam "a" e "b" em "$\{a, b\}$" é irrelevante: por definição, $x \in \{a, b\}$ se, e somente se, "$x = a$ ou $x = b$" $(\star)$, enquanto $x \in \{b, a\}$ se, e somente se, "$x = b$ ou $x = a$" $(\star\star)$, com $(\star)$ e $(\star\star)$ equivalentes entre si. ▲

Supondo a validade do Princípio da Abstração *momentaneamente*[3], é possível justificar a maioria das construções *conjuntistas* com as quais o leitor já teve o desprazer de esbarrar. A fim de fixar as notações, elas serão listadas adiante e discutidas MUITO brevemente. No que segue, a notação "$A := B$" busca destacar que a igualdade $A = B$ é imposta por definição ou, em outras palavras, o símbolo B é *definido* como um *nome* alternativo para o conjunto A.

Definição 0.0.5.

(i) Denota-se por $\emptyset := \{x : x \neq x\}$ a *coleção* que será chamada de **conjunto vazio**, por razões *óbvias*: não existe x com $x \in \emptyset$, já que o contrário daria $x \neq x$.

(ii) Para X e Y conjuntos, considera-se $X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\}$, que denota a **diferença** entre X e Y, também chamada de **complementar de** Y **em** X.

(iii) O (**conjunto**) **unitário** de x é $\{x\} := \{x, x\}$, que tem x como único elemento.

[3]Como veremos na última seção, tal princípio é "problemático". O modo que usaremos para contornar os problemas será exigir a existência de um conjunto *prévio* para realizar a *abstração*: assim, em vez de criar o *conjunto* $\{x : \mathcal{P}(x)\}$, teremos apenas *subconjuntos* $\{x \in A : \mathcal{P}(x)\}$ para cada conjunto A dado.

(iv) Para conjuntos A e B, $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ e $A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ denotam os conjuntos chamados, respectivamente, de **interseção** e (**re**) **união** dos conjuntos A e B. Em particular, A e B são **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$. ¶

Observação 0.0.6. É comum haver confusão com o uso dos conectivos "e" e "ou" entre principiantes. Na linguagem comum, "e" funciona como um *agregador*, enquanto "ou" indica *alternativa*: por exemplo, os pontos da reta nos intervalos $(-\infty, 1)$ *e* $(3, +\infty)$ constituem a solução da inequação $x^2 - 4x + 3 > 0$, o que em linguagem conjuntista se expressa por meio da reunião $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. No entanto, **não** faz sentido dizer que tal reunião é composta por todo x tal que $x \in (-\infty, 1)$ **e** $x \in (3, +\infty)$, pois este "e" (da linguagem matemática usual) indica simultaneidade – e não há x com as duas propriedades *ao mesmo tempo*: o correto é dizer que $x \in (-\infty, 1)$ **ou** $x \in (3, +\infty)$. Cabe ainda destacar que o "ou" matemático não é exclusivo: sempre que dissermos "$x \in A$ ou $x \in B$", deve-se entender que *pelo menos* um dos casos deve ocorrer, o que não inviabiliza a ocorrência de ambos (confira o item (i) do Exercício 0.1). △

Proposição 0.0.7. *Para todo conjunto A ocorre $\emptyset \subseteq A$.*

Demonstração. Dado x qualquer, a implicação "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" é verdadeira por *vacuidade*, já que "$x \in \emptyset$" é falso. Alternativamente: se a *inclusão* fosse falsa, deveria existir $x \in \emptyset$ com $x \notin A$, mas não existe $x \in \emptyset$, absurdo[4]. □

Observação 0.0.8 (Contido vs. pertence)**.** O leitor deve tomar cuidado para não confundir *pertinência* e *continência*:

- "$x \in y$" significa que "x" é um dos elementos de "y";
- "$x \subseteq y$" significa que "todo elemento de x é também elemento de y".

Assim, embora $\emptyset \subseteq A$ ocorra para qualquer conjunto A, nem sempre ocorre $\emptyset \in A$. Na verdade, fora de contextos mais formais, é raro que se tenha $\emptyset \in A$. Veja que, por exemplo, $\emptyset \notin \emptyset$, já que o contrário é dizer que $\emptyset$ tem um elemento. Mesmo assim, $\emptyset \subseteq \emptyset$. A raiz dessa confusão é, possivelmente, oriunda do fato de que muitas vezes se diz "y contém x" a fim de expressar "$x \in y$". △

Exercício 0.0. Convença-se de que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. ■

Exercício 0.1. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre as identidades, inclusões, equivalências e implicações a seguir.

a) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

d) $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

f) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

g) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$.

h) $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

i) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. ■

[4] Por exemplo: a sentença "todas as piscinas da minha casa são olímpicas" é verdadeira se a minha casa não tiver piscinas.

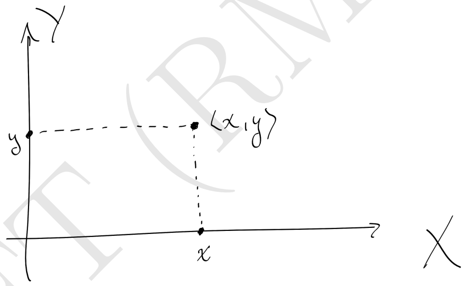
0.0.0 Pares ordenados e funções

O advento das *funções*, seja por invenção ou descoberta, deflagrou uma das maiores mudanças de paradigma na Matemática por permitir incorporar as noções de movimento e variação aos *modelos* que, até então, tratavam apenas de situações estáticas e posicionais. Embora hoje se apresente como um conceito simples, alguns séculos separam as primeiras menções explícitas às funções da "definição" apresentada por Dedekind na segunda metade do Século XIX:

Conceito de função. *Uma função é uma regra f que associa cada elemento x de um conjunto X a um único elemento $f(x)$ de um conjunto Y.*

Se, por um lado, a conceituação acima parece englobar os casos clássicos aprendidos na infância (funções *polinomiais*, *trigonométricas*, etc.), por outro lado ela empurra para debaixo do tapete a definição de "regra". Um modo mais honesto consiste em apelar para *pares ordenados*.

Diferente do que ocorre no caso não-ordenado, em que $\{a, b\} = \{b, a\}$ mesmo com $a \neq b$, pode-se *convencionar* escrever $\langle a, b\rangle$ com o intuito de ter o seguinte comportamento: $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Com tal *dispositivo*, usualmente xingado de **par ordenado**, passa a fazer sentido definir o **produto cartesiano** $X \times Y := \{\langle x, y\rangle : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ entre os conjuntos X e Y, cujos membros são todos os pares ordenados da forma $\langle x, y\rangle$ com $x \in X$ e $y \in Y$: noutras palavras, $X \times Y$ apenas abstrai um típico plano *cartesiano*.



Dado que um par ordenado $\langle x, y\rangle$ pode ser interpretado como uma *mini-regra* que faz sua *primeira coordenada* x corresponder à sua *segunda coordenada* y, é natural pensar em *regras* que associam elementos de X a Y como subconjuntos de $X \times Y$. Logo:

Definição 0.0.9 (Bourbaki, 1939)**.** Uma **função** (ou **mapa** ou **aplicação**) **de** X **em** Y é um subconjunto $f \subseteq X \times Y$ tal que:

(i) para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ com $\langle x, y\rangle \in f$ (cada x se associa a pelo menos um y);

(ii) se $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in f$, então $y = z$ (o y associado a x é único).

Escreve-se $f\colon X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ para indicar que f é uma função de X em Y. ¶

Acima, o conjunto X costuma ser chamado de **domínio** da função f, enquanto Y é o seu **codomínio** (também chamado de *contradomínio*). Uma vez que a cada $x \in X$ corresponde um único $y \in Y$ com $\langle x, y\rangle \in f$, faz sentido atribuir a y uma notação que remeta ao elemento x: no caso, faz-se $y := f(x)$ (ou ainda $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$), e xinga-se $f(x)$ de **imagem de** x pela função f. Por sua vez, o subconjunto de Y formado por todos os elementos da forma $f(x)$, conforme x *varia* em X, é chamado de **imagem da função**, e denotado por $\text{im}(f)$. Em símbolos: $\text{im}(f) := \{f(x) : x \in X\}$.

Exemplo 0.0.10 (Funções polinomiais)**.** Futuramente, depois que já *soubermos* quem são $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, poderemos considerar *polinômios na indeterminada* t, i.e., *expressões* da forma $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, onde t indica apenas um símbolo *indeterminado*. Chamando por $p(t)$ tal polinômio, passa a fazer sentido substituir cada ocorrência de "t" na expressão $p(t)$ por um $x \in \mathbb{R}$ fixado, o que *produz* o *número real*

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Dessa forma, pode-se dizer que $p := \{\langle x, p(x)\rangle : x \in \mathbb{R}\}$ relaciona cada $x \in \mathbb{R}$ ao número $p(x) \in \mathbb{R}$. Uma vez que tal associação é claramente *funcional*[5], ganha-se uma função $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto p(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Funções desse tipo são ditas **polinomiais**. ▲

Exemplo 0.0.11 (Funções racionais)**.** Mais geralmente, e ainda no cenário futuro do exemplo anterior, é lícito considerar expressões da forma $r(t) := \dfrac{p(t)}{q(t)}$ em que ambos $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios na indeterminada t. Desta vez, só faz *sentido* substituir as ocorrências de "t" em $r(t)$ por um número real $x \in \mathbb{R}$ fixado nas situações em que se garantir $q(x) \neq 0$, pois a divisão por 0 não é realizável em *corpos*. Assim,a expressão $r(t)$ induz uma função r cujo domínio é $\operatorname{dom}(r) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$, e que faz $r(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ para cada $x \in \operatorname{dom}(r)$. Funções desse tipo costumam ser chamadas de **racionais**. ▲

Como sugerido no último exemplo, nem sempre o domínio ou o codomínio de uma função ficam óbvios pelo contexto. Tendo em vista tais situações, convém estender parcialmente a definição de função:

Definição 0.0.12. Uma **função** f é um conjunto de pares ordenados tal que $y = z$ sempre que $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in f$. Neste caso, definem-se ainda

(i) o **domínio de** f, $\operatorname{dom}(f) := \{x : \langle x, y\rangle \in f\}$, e

(ii) a **imagem de** f, $\operatorname{im}(f) := \{f(x) : x \in \operatorname{dom}(f)\}$. ¶

É claro que uma função f como na definição acima determina uma função como na Definição 0.0.9, i.e., da forma $f\colon \operatorname{dom}(f) \to \operatorname{im}(f)$. Na verdade, é legítimo escrever $f\colon \operatorname{dom}(f) \to Y$ para qualquer conjunto Y com $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$. Por sua vez, a uma função $g\colon X \to Y$ associa-se o conjunto

$$\operatorname{graf}(g\colon X \to Y) := \{\langle x, g(x)\rangle : x \in X\} \subseteq X \times Y,$$

chamado de **gráfico** da função $g\colon X \to Y$. Note que o gráfico de $g\colon X \to Y$ é a *própria função* g no sentido da Definição 0.0.12.

Exemplo 0.0.13 (Igualdade entre funções)**.** De um jeito ou de outro, funções foram definidas como conjuntos, de modo que, a princípio o critério para determinar quando duas funções são iguais deriva daquele utilizado para conjuntos. No entanto, a sutil diferença entre as duas definições costuma causar alguma confusão.

[5] No sentido de que se $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in p$, então $y = z$.

(i) Na Definição 0.0.9, os conjuntos X e Y fazem parte do que significa dizer que $f \subseteq X \times Y$ é uma "função de X em Y". Na prática, é como se pensássemos em "$f : X \to Y$" como um modo elegante de abreviar "$\langle X, Y, f \rangle$ é tal que...". Logo, se $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ são funções iguais, então deve-se ter $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

(ii) Por sua vez, a Definição 0.0.12 não explicita domínios ou codomínios, de modo que duas funções f e g desse tipo são iguais se, e somente se, ocorrer $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, tal qual ocorre com conjuntos. Na prática, significa que $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g)$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$.

Isso dá margem para situações estranhas. Por exemplo, para um conjunto X, é fácil ver que $\mathrm{Id}_X := \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$ é uma função, chamada de **identidade** de X. Pode-se expressar a função Id_X como uma função de X em X, uma vez que se verifica $X = \operatorname{dom}(\mathrm{Id}_X) = \operatorname{im}(\mathrm{Id}_X)$. Contudo, se Y é um conjunto com $X \subseteq Y$, então também faz sentido definir a **inclusão** $i : X \to Y$ dada por $i(x) := x$ para cada $x \in X$. Agora, se ocorrer $X \subsetneq Y$, então as funções $\mathrm{Id}_X : X \to X$ e $i : X \to Y$ são formalmente distintas, embora ambas sejam definidas pela *mesma regra*, i.e.,

$$\mathrm{Id}_X(x) := x =: i(x)$$

para todo $x \in X$. ▲

Apesar dos inconvenientes apontados pelo último exemplo, o contexto costuma deixar o contradomínio das funções consideradas fixado. O modo mais prático de fazer isso consiste em definir

$$Y^X := \{f : f \subseteq X \times Y \text{ é função de } X \text{ em } Y\},$$

explicitamente o conjunto de todas as funções da forma $X \to Y$. Em tais situações, deixa de ser perigoso se referir à função $f : X \to Y$ apenas pela letra "f".

Observação 0.0.14. Uma das vantagens em considerar funções como membros bem definidos de um conjunto fixado virá quando passarmos a *enxergar* funções como *vetores* no tratamento de sequências e séries... de funções. △

Embora seja um conceito incrivelmente maleável, nem sempre as *relações* estabelecidas entre elementos de certos conjuntos são exprimíveis por uma função. Apesar disso, o aparato para tratar delas matematicamente já está pronto:

Definição 0.0.15. Dados conjuntos X e Y, uma **relação** (**binária**) R entre X e Y é um subconjunto de $X \times Y$.

(i) Para um par $\langle x, y \rangle \in X \times Y$, costuma-se escrever $x \mathrel{R} y$ para indicar que o par $\langle x, y \rangle$ é membro da relação R, situação em que diremos que x e y estão R-**relacionados**. A ocorrência de $\langle x, y \rangle \notin R$ será indicada por $x \not\mathrel{R} y$.

(ii) O **domínio** da relação R é o conjunto $\operatorname{dom}(R) := \{x : \text{existe } y \in Y \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

(iii) A **imagem** da relação R é o conjunto $\operatorname{im}(R) := \{y : \text{existe } x \in X \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

Quando $X = Y$, diz-se apenas que R é uma relação em X. ¶

Exemplo 0.0.16 (Relação de igualdade)**.** Fixado um conjunto X, pode-se considerar $\Delta_X := \{\langle x, y\rangle \in X \times X : x = y\}$, a *relação de igualdade* em X. Daí, de acordo com a definição anterior, pode-se escrever $x\,\Delta_X\,y$ para indicar que $\langle x, y\rangle \in \Delta_X$, i.e., $x = y$. Note que Δ_X é o gráfico da função $\mathrm{Id}_X : X \to X$. ▲

Exemplo 0.0.17 (Partes e inclusão)**.** Fixado um conjunto X, faz sentido considerar a *coleção* de *todos os subconjuntos de* X, denotada por $\wp(X)$ e chamada de **conjunto das partes de** X, simbolicamente: $\wp(X) := \{A : A \subseteq X\}$. Por exemplo:

(i) para $X := \emptyset$, $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, já que $\emptyset$ é o único subconjunto de $\emptyset$;

(ii) para $X := \{0, 2\}$, $\wp(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}\}$, pois $\emptyset$ e X sempre são subconjuntos de X e, no caso, os demais subconjuntos possíveis são $\{0\}$ e $\{2\}$;

(iii) para $X := \mathbb{N}$, ocorre $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, bem como $\{n : n$ é par$\}$, $\{n : n$ é ímpar$\}$, $\{n : n$ é primo$\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, além dos típicos $\emptyset, \mathbb{N} \in \wp(\mathbb{N})$. TODO subconjunto de $\mathbb{N}$ é, por definição, membro de $\wp(\mathbb{N})$; oportunamente, veremos que se trata de um conjunto bem grande.

De qualquer forma, para X fixado, a relação de inclusão entre subconjuntos de X define, como a frase sugere, uma relação binária $\subseteq$ na *família*[6] $\wp(X)$ de todos os subconjuntos de X: explicitamente, $\subseteq := \{\langle A, B\rangle : A \subseteq B \subseteq X\}$. ▲

Exemplo 0.0.18 (*Curvas* e gráficos)**.** Em posse de *estruturas algébricas*, é possível utilizar expressões algébricas a fim de *relacionar variáveis*. Por exemplo, a *expressão polinomial* $x^2 + y^2 = 1$ induz a relação binária $S := \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Quando se representa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ graficamente como o plano cartesiano usual, o subconjunto S *passa a corresponder* aos pontos do plano que *distam* precisamente 1 da origem $\langle 0, 0\rangle$.

Em particular, S *não* determina uma função da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pois para um mesmo $x \in \mathrm{dom}\,(S)$ existem $y, y' \in \mathrm{im}\,(S)$ distintos e relacionados a x: explicitamente, se $x^2 + y^2 = 1$, então $y^2 = x^2 - 1$ e, como veremos, em tal situação pode-se concluir apenas que $|y| = \sqrt{x^2 - 1}$, o que dá margem a $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y' = -\sqrt{x^2 - 1}$, ambos relacionados ao mesmo x. ▲

Definição 0.0.19. Dada uma relação binária R, a **relação inversa** de R, denotada por R^{-1}, é a relação $R^{-1} := \{\langle y, x\rangle : x\,R\,y\}$. ¶

Exercício 0.2. Para uma relação binária R, mostre que:

a) para quaisquer x e y vale $x\,R\,y \Leftrightarrow y\,R^{-1}\,x$;

b) $\mathrm{dom}\,(R) = \mathrm{im}\,(R^{-1})$;

c) $\mathrm{im}\,(R) = \mathrm{dom}\,(R^{-1})$; e

d) $(R^{-1})^{-1} = R$. ■

Exercício 0.3. Supondo que $X = Y$ e $R \subseteq X \times X$, interprete geometricamente a definição de R^{-1} como sendo a “rotação” de R em torno da diagonal Δ_X. ■

Agora, se f é uma função, então é razoável perguntar: quando f^{-1} é uma função? Como a resposta para essa pergunta depende, em algum grau, da definição adotada para função, vamos nos restringir ao caso que será mais utilizado ao longo do texto:

[6] Não custa frisar: neste texto, “conjunto”, “coleção” e “família” são tratados como sinônimos!

Definição 0.0.20. A função $f\colon X \to Y$ será dita:

(i) **injetora** (ou *injetiva*, *injeção*, etc.) se para quaisquer $x, x' \in X$, a ocorrência de $f(x) = f(x')$ acarretar $x = x'$;

(ii) **sobrejetora** (ou *sobrejetiva*, *sobrejeção*, *sobre* Y, etc.) se $\operatorname{im}(f) = Y$ e

(iii) **bijetora** (ou *bijetiva*, *bijeção*, etc.) se $f\colon X \to Y$ for injetora e sobrejetora. ¶

Proposição 0.0.21. *Uma função $f\colon X \to Y$ é bijetora se, e somente se, a relação inversa f^{-1} é uma função de Y em X.*

Demonstração. Primeiro, note que as identidades e inclusões $\operatorname{dom}(f^{-1}) = \operatorname{im}(f) \subseteq Y$ e $\operatorname{im}(f^{-1}) = \operatorname{dom}(f) = X$ valem para qualquer função $f\colon X \to Y$. Agora, observe que a condição de injetividade para f diz que para $x, x' \in \operatorname{dom}(f)$ e $y \in \operatorname{im}(f)$ deve valer "$x\ f\ y$ e $x'\ f\ y \Rightarrow x = x'$" ou, equivalentemente, "$y\ f^{-1}\ x$ e $y\ f^{-1}\ x' \Rightarrow x = x'$", que por sua vez significa dizer que f^{-1} é função de $\operatorname{im}(f)$ em $\operatorname{dom}(f) = X$. Logo, o resultado segue pois f é sobrejetora se, e somente se, $\operatorname{im}(f) = Y$. Os detalhes ficam por conta do leitor. □

Corolário 0.0.22. *Se $f\colon X \to Y$ é uma função bijetora, então $f^{-1}\colon Y \to X$ é bijetora.*

Demonstração. Já vimos que $f^{-1}\colon Y \to X$ é função. Como $(f^{-1})^{-1} = f$ é uma função de X em Y, o resultado segue da proposição anterior. □

Restam apenas duas definições sobre funções que devem ser mencionadas antes de avançarmos para o estudo das *ordens*.

Definição 0.0.23. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são funções, então fica *bem definida* uma função $g \circ f\colon X \to Z$ dada pela identidade

$$(g \circ f)(x) := g \circ f(x) := g(f(x)),$$

para todo $x \in X$, chamada de (função) **composta** entre f e g, em geral denotada apenas por $g \circ f$. ¶

A definição acima faz sentido pois $f(x) \in Y$ para todo $x \in X$ e $Y = \operatorname{dom}(g)$, de modo que g *sabe* o que *fazer* com $f(x)$.

Exercício 0.4. Sejam $f\colon W \to X$, $g\colon X \to Y$ e $h\colon Y \to Z$ funções. Mostre que as funções $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são iguais. ■

Exercício 0.5. Mostre que $f\colon X \to Y$ é bijetora se, e somente se, existe uma função $g\colon Y \to X$ satisfazendo $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Em particular, a função g é, necessariamente, a inversa de f. Dica: use a Proposição 0.0.21. ■

Definição 0.0.24. Para uma função $f\colon X \to Y$ e um subconjunto $W \subseteq X$, a **restrição** da função f ao subconjunto W é a função $f|_W\colon W \to Y$ definida por $f|_W(w) := f(w)$ para todo $w \in W$. Dizemos que $g\colon Z \to Y$ **estende** f se $X \subseteq Z$ e $g|_X = f$. Mais ainda, para subconjuntos $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ fixados, consideram-se:

(i) a **imagem direta** de A por f, definida como $f[A] := \{f(a) : a \in A\}$;

(ii) a **pré-imagem** de B por f, definida como $f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$. ¶

Observação 0.0.25 (IMPORTANTE)**.** Explicitamente, $y \in f[A]$ se, e somente se, existe *algum* $a \in A$ com $f(a) = y$, enquanto $x \in f^{-1}[B]$ se, e somente se, $f(x) \in B$. Embora a pressa possa fazer o leitor pensar o contrário, ao escrever “$f^{-1}[B]$”, **não se supõe** que a função f seja *invertível*/bijetora: “f^{-1}” se refere à **relação** inversa de f, que pode não ser uma função, como as discussões acima escancaram. Na dúvida, use a definição dada para a notação – e não a sua intuição para o que a notação deveria ser. △

Exercício 0.6. Leia a observação anterior novamente, mas preste atenção desta vez. ■

Exemplo 0.0.26. Supondo conhecidos os *números inteiros* e a *potenciação usual*, para $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) := x^2$ e $C := \{0, 1, 4\}$ tem-se

$$f[C] = \{0, 1, 16\} \text{ e } f^{-1}[C] = \{0, -1, 1, -2, 2\}.$$

Para $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(x) := x^2 + 1$ ocorre

$$(f \circ g)(x) := f(x^2+1) = (x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1 \text{ e } (g \circ f)(x) := g(f(x)) = (x^2)^2+1 = x^4+1.$$

O leitor certamente deve conhecer exemplos menos artificiais. De qualquer forma, os capítulos posteriores estarão fartos de casos mais desafiadores. ▲

Observação 0.0.27 (Opcional: pares ordenados *honestos*)**.** Embora a abordagem sugerida acima para funções e relações tenha permitido tratá-las como conjuntos, isto só foi possível por meio da introdução de outro tipo de animal: os pares ordenados. Da forma como se fez, pares ordenados seguem tão *misteriosos quanto conjuntos*, já que não foram definidos, mas apenas tiveram seu comportamento descrito. Isto se corrige, por exemplo, com a definição dada por Kuratowski no começo do século passado:

Definição 0.0.28. O **par ordenado** de x e y é o conjunto $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. ¶

Parece estranha? Bastante. Mas ela cumpre o que se pede:

Proposição 0.0.29. *Para quaisquer a, b, c e d ocorre $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.*

Demonstração. Se $a = b$, então $\langle a, a\rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$, de modo que a igualdade $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ acarreta $\{c\} = \{a\} = \{c, d\}$ e, por conseguinte, $a = c$ e $b = d$. Se $a \neq b$, então a hipótese $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ leva a $\{a\} = \{c\}$ ou $\{a\} = \{c, d\}$, bem como $\{a, b\} = \{c\}$ ou $\{a, b\} = \{c, d\}$: se não ocorresse $a = c$, então $\{a\} = \{c, d\}$ implicaria em $c = d$, de modo que a primeira parte do argumento acarretaria $a = b$; analogamente, se $b \neq d$, então restaria apenas $\{a, b\} = \{c\}$ e, novamente, $a = b$. □

Uma definição explícita para o par ordenado $\langle x, y\rangle$, embora importante por razões técnicas, não é *relevante* para o dia a dia matemático. Dito de outra forma: o leitor não deve se preocupar muito com a *construção* do par ordenado, mas sim com seu comportamento; o que realmente importa é saber que ao se escrever $\langle a, b\rangle$, manifesta-se a intenção de declarar “a” como *primeira coordenada* e “b” como segunda coordenada[7]. △

Observação 0.0.30 (Notação)**.** Quem preferir *pode* escrever (x, y) em vez de $\langle x, y\rangle$. *Porém*, a adoção desses *brackets* angulados aqui busca apenas evitar futuras ambiguidades com a notação para *intervalos abertos*, que será feita com parênteses. A alternativa usual para intervalos abertos, a saber “$]\alpha, \beta[$”, ficaria visualmente desagradável ao ser combinada com a notação “$f[A]$” adotada neste texto para indicar a *imagem direta* de um subconjunto A por uma *função* f. △

[7] “`Neo`: *I just have never...* `Rama Kandra`: *... heard a program speak of love?* `Neo`: *It's a... human emotion.* `Rama Kandra`: *No, it is a word. What matters is the connection the word implies.*” (*The Matrix Revolutions*, 2003).

0.0.1 Questão de ordem

O aparato das relações binárias apresentado na subseção anterior permite abstrair o nosso entendimento de *ordenação*, que será usado posteriormente tanto na descrição da reta real quanto no tratamento das *nets*. Intuitivamente, os pontos da reta são *ordenados*, no sentido de que há uma *noção* de *antes* e *depois*, como em 3 que antecede 7 e 7 que antecede 9 (note que de nossa experiência diária, 3 também antecede 9). Mais do que isso, a *reta* está ordenada em forma de linha, no sentido de que dados dois pontos nela, algum deles deve anteceder o outro. Tais ideias se formalizam na próxima

Definição 0.0.31. Uma relação binária R num conjunto $\mathbb{X}$ é dita uma **relação de ordem** (**parcial**) se R for

(i) **reflexiva**, i.e., se para todo $x \in \mathbb{X}$ ocorrer $x\ R\ x$,

(ii) **antissimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência simultânea de $x\ R\ y$ e $y\ R\ x$ acarretar $x = y$, e

(iii) **transitiva**, i.e., se para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{X}$, a ocorrência simultânea de $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$ acarretar $x\ R\ z$.

Escreve-se $\langle \mathbb{X}, R \rangle$ quando se busca enfatizar que o conjunto $\mathbb{X}$ é considerado com a ordem R, caso em que $\mathbb{X}$ é dito ser (**parcialmente**) **ordenado** pela ordem (parcial) R.¶

Dada a óbvia inspiração nas ordenações usuais entre números, costuma-se utilizar símbolos como "$\preceq$", "$\sqsubseteq$" ou mesmo "$\leq$" para denotar ordens parciais – o que sugere uma generalização alternativa, desta vez com base em "$<$".

Definição 0.0.32. Diz-se que $\prec$ é uma **relação de ordem estrita** em $\mathbb{X}$ se $\prec$ for transitiva mas, em vez de reflexiva e antissimétrica, for

(i) **irreflexiva**, i.e., se para todo $x \in \mathbb{X}$ ocorrer $x \nprec x$, e

(ii) **assimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência de $x \prec y$ acarretar $y \nprec x$.

Como no caso parcial, escreve-se $\langle \mathbb{X}, \prec \rangle$ para indicar que $\mathbb{X}$ *está* (**estritamente**) **ordenado** pela ordem (estrita) $\prec$. ¶

Contudo, a diferença entre (relações de) *ordens parciais* e *estritas* é meramente virtual, no seguinte sentido:

✓ se $\langle \mathbb{S}, \prec \rangle$ é uma ordem estrita, então a relação $\preceq$ definida por

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \neq y \text{ e } x \prec y) \text{ ou } x = y$$

é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{S}$;

✓ se $\langle \mathbb{P}, \sqsubseteq \rangle$ é uma ordem parcial, então a relação $\sqsubset$ definida por

$$x \sqsubset y \Leftrightarrow x \neq y \text{ e } x \sqsubseteq y$$

é uma relação de ordem estrita em $\mathbb{P}$.

Exercício 0.7. Convença-se de que as afirmações acima estão certas. ■

É claro que ao aplicar o primeiro procedimento à ordem estrita $\sqsubset$, retorna-se à ordem parcial original $\sqsubseteq$, enquanto o segundo procedimento aplicado à ordem parcial $\preceq$ resulta na ordem estrita original $\prec$. Assim, tem-se o direito de chamar tanto $\langle \mathbb{S}, \prec\rangle$ quanto $\langle \mathbb{P}, \sqsubseteq\rangle$ de **ordens**. Em tais situações, ficam implicitamente definidas a ordem parcial $\preceq$ e a ordem estrita $\sqsubset$ induzidas por $\prec$ e $\sqsubseteq$, respectivamente.

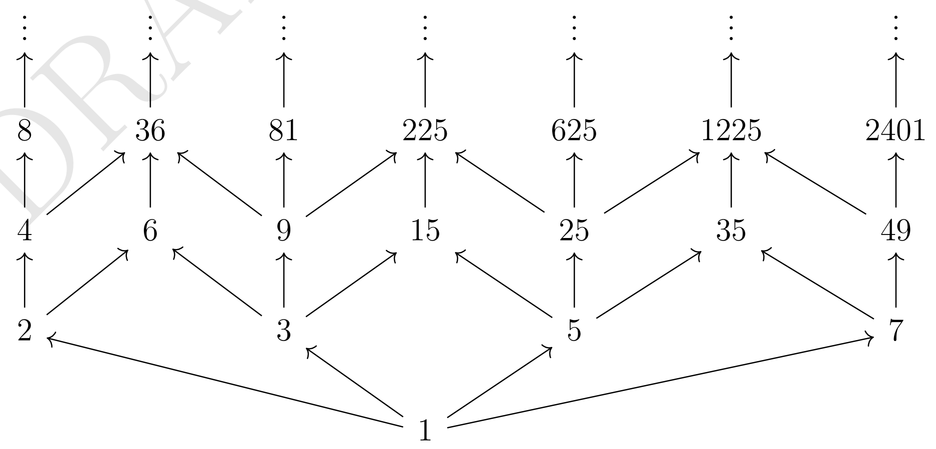
Exemplo 0.0.33. Leitores já familiarizados com conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.) devem ter em mente as formas usuais de ordenação em tais cenários como exemplos de ordens. Apesar disso, é importante saber que mesmo conjuntos *ordinários* admitem ordenações incomuns.

Por exemplo, em $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (que será discutido na próxima seção), pode-se declarar $m \preceq n$ sempre que m for um divisor de n. Embora tal relação defina uma ordem parcial sobre $\mathbb{N}^*$ (verifique?), ela é bastante diferente de sua ordenação usual: note que $2 \npreceq 3$ e $3 \npreceq 2$, já que ambos são primos. Portanto, $\langle \mathbb{N}^*, \preceq\rangle$ é uma ordem em que podem haver elementos *não-comparáveis* entre si, comportamento bem mais comum do que parece. ▲

Exemplo 0.0.34. A relação de inclusão $\subseteq$ sobre os membros de $\wp(X)$, para algum conjunto X fixado, faz de $\langle \wp(X), \subseteq\rangle$ uma ordem, já que: $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implicam $A = B$ e $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implicam $A \subseteq C$, para quaisquer $A, B, C \in \wp(X)$. Como no caso anterior, podem existir $A, B \in \wp(X)$ não-comparáveis: para $X := \mathbb{N}$ por exemplo, $A := \{0, 1, 2\}$ e $B := \{0, 1, 3\}$ não são comparáveis, já que $A \nsubseteq B$ (pois $2 \in A \setminus B$) e $B \nsubseteq A$ (pois $3 \in B \setminus A$). ▲

Observação 0.0.35 (Diagramas de Hasse)**.** Um modo bastante prático de *entender* certas ordens (ou *partes* delas) consiste em considerar seus *diagramas de Hasse*. A ideia é muito simples: a ocorrência de $x < y$ em $\mathbb{P}$ é representada por uma seta $(x \to y)$ que liga o vértice anterior (*menor*) x ao posterior (*maior*) y; quando $y < z$ e, por conseguinte, $x < z$, não se grafa uma seta entre ambos, pois subentende-se que as duas setas (entre x e y e entre y e z) compõem a seta entre x e z.

Assim, por exemplo, o diagrama de Hasse de $\langle \mathbb{N}^*, \preceq\rangle$ com a ordem do Exemplo 0.0.33 poderia *começar* com



Evidentemente, *diversos* (*infinitos*!) números foram omitidos, como 12 (que deveria estar acima de 4 e 3), 10 (que deveria estar acima de 5 e 2), 11 (que deveria estar acima de 1 apenas), 13... Já para o caso de $X := \{a, b, c\}$ e $\langle \wp(X), \subseteq\rangle$, o diagrama é mais simples, embora ainda intrincado.

$$\begin{tikzcd}
 & \{a,b,c\} & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagramas desse tipo ajudam a perceber que a ocorrência de elementos não-comparáveis se traduz em bifurcações. Uma vez que pretendemos usar ordens para capturar o comportamento das retas, é razoável considerar aquelas em que quaisquer dois elementos sejam comparáveis, condição usualmente chamada de *tricotomia*.

Definição 0.0.36. Uma ordem $\langle \mathbb{X}, < \rangle$ é **total** se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorrer somente um dos três casos a seguir: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$. Se a ordem de $\mathbb{X}$ for parcial, basta dizer que para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorre $x \leq y$ ou $y \leq x$. ¶

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

Como o diagrama acima sugere, ordens totais[8] se comportam como linhas precisamente por não terem elementos incomparáveis (bifurcações). Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ com suas ordenações usuais são exemplos típicos de ordens totais. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ também, mas seus diagramas são mais desonestos em virtude da *densidade* de suas ordens: dado que entre quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x < y$ existe $z \in \mathbb{Q}$ com $x < z < y$, torna-se *impossível* representar *fielmente*, por meio de um diagrama de Hasse, o comportamento linear de tais ordens. Na prática, a alternativa honesta de representação gráfica nesses casos é, justamente... uma linha reta. △

Em geral, costuma-se ler uma expressão do tipo “$x \preceq y$” como “x é **menor do que ou igual** a y”, enquanto “$x \prec y$” é lida como “x é (**estritamente**) **menor** do que y” – a menos que o contexto sugira uma terminologia própria para os símbolos. *Alternativamente*, lê-se “$x \preceq y$” como “y é **maior do que ou igual** a x”, o que esconde um fato que será importante: escrevendo “$a \succeq b$” para indicar que $b \preceq a$, segue que $\succeq$ também é uma relação de ordem sobre o conjunto em questão: explicitamente, $\succeq$ é apenas a *relação inversa* de $\preceq$. Embora pareça banal, tal observação será útil adiante, quando explorarmos o *princípio da dualidade*.

Exercício 0.8. Já sabe né: verifique as afirmações anteriores. ■

[8] Que com muita razão também são chamadas de ordens *lineares*.

No que segue, fixam-se uma ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e elementos $a \in A$ e $p \in \mathbb{P}$. A cada *conceito* a ser definido na ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ a seguir, *corresponderá* um conceito *dual* em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, ou *co-conceito*, que consiste em reescrever o conceito original na ordem inversa $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$. Na prática, substituem-se as ocorrências dos símbolos $<$ e $\leq$ por $>$ e $\geq$, respectivamente. O leitor provavelmente já conhece algumas das definições na próxima tabela.

Conceito	**Co-conceito**
$a \in A$ é **elemento minimal de** A se não existe $x \in A$ com $x < a$	$a \in A$ é **elemento maximal** de A se não existe $x \in A$ com $a < x$
a é *um* **menor elemento** (ou **mínimo**) de A se $a \leq x$ ocorrer para todo $x \in A$	a é *um* **maior elemento** (ou **máximo**) de A se $x \leq a$ ocorrer para todo $x \in A$
p é um **limitante inferior** de A se $p \leq x$ para todo $x \in A$	p é um **limitante superior** de A se $x \leq p$ para todo $x \in A$
p é *um* **ínfimo** de A se p for *um* maior elemento do conjunto dos limitantes inferiores de A	p é *um* **supremo** de A se p for *um* menor elemento do conjunto dos limitante superiores de A
A é **limitado** se A é limitado inferiormente e superiormente	

Na tabela acima, escreve-se *um mínimo* (e *um máximo*) por puro preciosismo: se $a, a' \in A$ são mínimos de A, então ocorre $a \leq a'$ e $a' \leq a$, donde a antissimetria de $\leq$ acarreta $a = a'$. Como um máximo de A em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é um mínimo de A em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$, segue que máximos (quando existem) também são únicos. Em particular, supremos e ínfimos, quando existem, são únicos.

Exercício 0.9. Convença-se das afirmações acima. Dica: encare o parágrafo anterior até que ele te encare de volta. ■

Definição 0.0.37. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem e $A \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto. Adotaremos as seguintes notações:

(i) o menor elemento de A (caso exista) é denotado $\min\limits_{a \in A} a$, $\min_{\leq} A$ ou apenas $\min A$;

(ii) o maior elemento de A (caso exista) é denotado por $\max\limits_{a \in A} a$, $\max_{\leq} A$ ou apenas $\max A$;

(iii) o ínfimo de A (caso exista) é denotado por $\inf\limits_{a \in A} a$, $\inf_{\leq} A$ ou apenas $\inf A$;

(iv) o supremo de A (caso exista) é denotado por $\sup_{a \in A} a$, $\sup_{\leq} A$ ou apenas $\sup A$. ¶

Observação 0.0.38 (Dualidade)**.** A importância do argumento sugerido (implicitamente) para o Exercício 0.9 me obriga a mastigá-lo para o leitor desatento. Antes de qualquer outra coisa, dado que os símbolos “$\leq$” e “$\geq$” são carregados de significados que trazemos das ruas, convém reescrever a *frase* “$a \in A$ é mínimo de A” com respeito à uma ordem parcial $\langle \mathbb{X}, R \rangle$: explicitamente, para todo $x \in A$ deve ocorrer $a \, R \, x$.

Ora, $a \in A$ é mínimo de A com respeito à ordem $R := \geq$ em $\mathbb{P}$ se, e somente se, $a \geq x$ para todo $x \in A$ (compare com o final do parágrafo anterior!), o que equivale a dizer que $x \leq a$ para todo $x \in A$, i.e., $a \in A$ é máximo de A com respeito à ordem $R^{-1} := \leq$. Logo, se A só pode ter um mínimo em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$, então A só pode ter um máximo em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$. Em último caso, se a argumentação parecer confusa, pode-se provar diretamente a afirmação “*se* $a, a' \in A$ *são máximos de* A*, então* $a = a'$”: como tanto a quanto a' pertencem ao conjunto A, deve-se ter $a' \leq a$ e $a \leq a'$, donde a antissimetria acarreta $a = a'$. Em outras palavras, trata-se do mesmo argumento usado para mínimos, exceto pela troca das ocorrências de “$\leq$” por “$\geq$”. Vejamos outro exemplo:

Proposição 0.0.39. *Sejam* $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ *uma ordem e* $A, B \subseteq \mathbb{P}$ *subconjuntos de* $\mathbb{P}$.

(i) *Se* $\sup A$ *e* $\sup B$ *existem e para todo* $a \in A$ *existe* $b \in B$ *com* $a \leq b$*, então*

$$\sup A \leq \sup B.$$

(ii) *Se* $\inf A$ *e* $\inf B$ *existem e para todo* $a \in A$ *existe* $b \in B$ *com* $a \geq b$*, então*

$$\inf A \geq \inf B.$$

Demonstração. Para provar (i), note que $b \leq \sup B$ para todo $b \in B$, de modo que por cada $a \in A$ *ter* um $b' \in B$ testemunhando $a \leq b'$, resulta $a \leq \sup B$ para qualquer $a \in A$, i.e., $\sup B$ é um limitante superior de A, donde a desigualdade $\sup A \leq \sup B$ segue por $\sup A$ ser o menor limitante superior de A.

Agora, para (ii), note que $\alpha = \inf_{\leq} A$ (i.e., em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$) se, e somente se, $\alpha = \sup_{\geq} A$ (i.e., em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$) (verifique!). Feito isso, a tradução da afirmação (ii) em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$ é "se $\sup_{\geq} A$ e $\sup_{\geq} B$ existem e para todo $a \in A$ existe $b \in B$ com $a \geq b$, então $\sup_{\geq} A \geq \sup_{\geq} B$", que já foi provada para uma ordem parcial qualquer – em particular, deve ser válida para $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$. Logo, ao *retraduzir de volta* para $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, obtém-se precisamente a afirmação (ii) que se pretendia provar. □

Exercício 0.10. Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Exercício 0.11. Mostre que se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{P}$ são não-vazios e ambos $\sup A$ e $\sup B$ existem, então $\sup A \leq \sup B$. Enuncie (e demonstre?) a versão dual para ínfimos. ■

O leitor pode preferir demonstrar "no braço" as diversas versões duais das afirmações de ordem que encontraremos pelo caminho, o que inclusive constitui um bom exercício de fixação e adaptação – além de comprovar, na prática, o *princípio da dualidade*. △

Exemplo 0.0.40. Dado um conjunto X e subconjuntos $A, B \subseteq X$, existem $\sup\{A, B\}$ e $\inf\{A, B\}$ em $\langle \wp(X), \subseteq \rangle$? Se sim, quem são? Vejamos:

(i) se existir, $\sup\{A, B\}$ deve limitar superiormente o conjunto $\{A, B\}$, acarretando $A, B \subseteq \sup\{A, B\}$ e, além disso, se C for um subconjunto de X com $A, B \subseteq C$, também deverá ocorrer $\sup\{A, B\} \subseteq C$ (o supremo de um conjunto é o seu *menor* limitante superior!);

(ii) analogamente, se existir $\inf\{A, B\}$, este deverá não apenas limitar inferiormente $\{A, B\}$ (i.e., $\inf\{A, B\} \subseteq A, B$), como também satisfazer $D \subseteq \inf\{A, B\}$ para qualquer subconjunto D de X com $D \subseteq A, B$ (o ínfimo de um conjunto é o seu *maior* limitante inferior!).

Parece familiar, não? Explicitamente, $\sup\{A, B\}$ deve ser o menor subconjunto de X a conter tanto A quanto B, e já conhecemos um subconjunto que faz isso: $A \cup B$! E, de fato, tem-se $\sup\{A, B\} = A \cup B$:

✓ $A \cup B$ limita $\{A, B\}$ superiormente, pois ocorre $A, B \subseteq A \cup B$;

✓ $A \cup B$ é o menor limitante superior de $\{A, B\}$, já que $A \cup B \subseteq C$ sempre que $A, B \subseteq C$.

O leitor que se depara com isso pela primeira pode se perguntar: como é possível que as linhas de argumentação acima tenham provado a identidade "$\sup\{A, B\} = A \cup B$", uma vez que a expressão "$\sup\{A, B\}$" nem sequer apareceu? Resposta: as condições verificadas acima são a *definição de supremo* que, quando existe, é único; assim, ao mostrar que $A \cup B$ tem as propriedades que $\sup\{A, B\}$ deveria ter, conclui-se que $A \cup B$ *é* o supremo procurado. ▲

Exercício 0.12. Mostre que $A \cap B = \inf\{A, B\}$ em $\wp(X)$. ■

Exemplo 0.0.41. Enquanto a verificação de que um certo elemento $p \in \mathbb{P}$ é supremo (ou ínfimo) de um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ consiste em mostrar que p satisfaz certas condições, as situações em que se busca justificar a *inexistência* de supremos (ou ínfimos) envolvem provar que nenhum elemento de $\mathbb{P}$ tem as propriedades que os caracterizam.

Por exemplo: veremos, oportunamente, que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não tem supremo no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pois $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, i.e., seu conjunto de limitantes superiores em $\mathbb{R}$ é vazio, de modo que não há como existir o *menor* limitante superior (em $\mathbb{R}$). Mesmo nas situações em que um conjunto admite limitantes superiores, não se garante em geral que exista um menor limitante superior: veremos, oportunamente, que o conjunto $A := \{q : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q^2 < 2\}$ é limitado superiormente mas, para qualquer limitante superior $\beta \in \mathbb{Q}$ de A, existe *outro* limitante superior $\beta' \in \mathbb{Q}$ de A com $\beta' < \beta$, mostrando assim que A não tem um *menor limitante superior* em $\mathbb{Q}$. ▲

Observação 0.0.42 (IMPORTANTE). No último caso do exemplo anterior, a restrição "em $\mathbb{Q}$" é necessária, já que ao se considerar o mesmo conjunto A como subconjunto de $\mathbb{R}$, *A terá* $\sqrt{2}$ como supremo. Ter ou não ter supremos/ínfimos é algo que não depende apenas do subconjunto analisado, mas também da ordem em que ele se insere como subconjunto. Leitores que se sentirem confusos devem adotar as notações alternativas "$\sup_{\mathbb{P}} A$" e "$\inf_{\mathbb{P}} A$" até que se sintam confortáveis com as mudanças súbitas de contexto: neste caso, o próximo capítulo mostrará que não existe $\sup_{\mathbb{Q}} A$, ao passo que $\sup_{\mathbb{R}} A = \sqrt{2}$. △

Exemplo 0.0.43 (Adiável)**.** Elementos minimais e maximais não costumam ser explorados em contextos introdutórios de Análise pois as ordens consideradas *geralmente* são totais – e, em tais casos, as definições coincidem.

Proposição 0.0.44. *Sejam $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ uma ordem, $A \subseteq \mathbb{T}$ um subconjunto e $a \in A$ um elemento qualquer.*

(i) *Se $a = \min A$, então a é minimal.*

(ii) *Se $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ é uma ordem total, então vale a recíproca do item anterior.*

Demonstração. Para a primeira parte, não pode existir $x \neq a$ com $x < a$, pois por a ser mínimo deve-se ter $a \leq x$ (lembre-se: ordens estritas são assimétricas!). Para a segunda parte: a princípio, por a ser minimal, para nenhum $x \in \mathbb{T}$ *ocorre* $x < a$ e, como x e a são comparáveis por hipótese, *resta* apenas $a \leq x$. Logo, $a = \min A$. □

Exercício 0.13. Enuncie e demonstre a versão dual da proposição anterior. ■

Com isso dito, o leitor curioso pode retornar para as ordens não-totais da Observação 0.0.35: no caso de $\wp(X)$, por exemplo, $A := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ é tal que todos os seus elementos são minimais em $\wp(X)$ (e nenhum deles é mínimo!), comportamento similar ao dos números primos em $\langle \mathbb{N}^*, \preceq \rangle$. Alguma delas apresenta subconjuntos com elementos maximais que não são máximos? ▲

Antes de avançar para o *próximo* assunto na *fila*, é conveniente destacar os modos com que podemos detectar supremos e ínfimos de subconjuntos de ordens, principalmente no subcaso das ordens totais, que será o tipo mais utilizado no texto. Primeiro, para fixar as ideias, tratemos dos ínfimos.

Exercício 0.14. Para uma ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ e um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$, suponha que exista $\alpha := \min A$. Mostre que $\alpha = \inf A$. ■

Explicitamente, o exercício indica que o mínimo de um subconjunto A, quando existe, tem as propriedades do ínfimo, ou seja: limita A inferiormente e é maior do que todos os demais limitantes inferiores de A. Nesse sentido, a grande diferença entre ínfimos e mínimos é que os ínfimos fazem o papel de mínimo na ausência destes, uma vez que mínimos precisam pertencer aos seus respectivos conjuntos.

Exemplo 0.0.45. Para quem já está familiarizado com os racionais e sua ordenação usual, o subconjunto $A := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ não tem menor elemento: dado qualquer $q \in A$, tem-se $\frac{q}{2} \in A$ com $\frac{q}{2} < q$, mostrando que nenhum dos elementos de A pode tomar para si o papel de ser *o menor*. O problema, como o leitor já deve ter percebido, é a ausência de 0 em A: se ocorresse $0 \in A$, então 0 seria, trivialmente, o menor elemento de A. Este é o indício de que 0, embora não seja o menor elemento de A, é o seu ínfimo! ▲

Formalmente, a afirmação final do exemplo anterior pode se justificar com as seguintes observações:

✓ 0 é limitante inferior de A pela definição de A;

✓ se $s \in \mathbb{Q}$ e $s \leq q$ para todo $q \in A$, i.e., se s é limitante inferior de A, então $s \leq 0$, posto que *o contrário obriga* a ocorrência de $0 < s$, donde segue que $\frac{s}{2} \in A$ com $\frac{s}{2} < s$, contrariando a suposição de s limitar A inferiormente.

Note que só foi possível concluir "$s > 0$" pois a totalidade da ordem impõe a ocorrência de "$s < 0$", "$s = 0$" ou "$s > 0$", de modo que a negação das duas primeiras forçou a validade da última. Noutras palavras, mostrou-se que nenhum $s > 0$ pode limitar A inferiormente, de modo que pela tricotomia, limitantes inferiores de A devem estar *abaixo* de 0. O fenômeno vale em geral.

Teorema 0.0.46. *Fixadas uma ordem total $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$, um subconjunto $A \subseteq \mathbb{T}$ e um $\alpha \in \mathbb{T}$ limitante inferior de A, são equivalentes:*

(i) $\alpha = \inf A$*;*

(ii) *para todo $\beta \in \mathbb{T}$, se ocorrer $\beta > \alpha$, então existe $a \in A$ com $a < \beta$.*

Demonstração. Se vale (i), então $\alpha = \max\{l \in \mathbb{T} : l \text{ é limitante inferior de } A\}$, donde segue que se $\beta > \alpha$, então β não pode ser limitante inferior de A, i.e., tem que existir $a \in A$ com $b \nleq a$, donde a tricotomia acarreta $a < b$, como desejado. Reciprocamente, se vale (ii), então nenhum $\beta > \alpha$ limita A inferiormente ou, equivalentemente (graças à tricotomia), todo limitante inferior de A satisfaz $\beta \leq \alpha$, donde o restante segue pois α é limitante inferior de A (por hipótese). □

Exercício 0.15. Dualize o teorema anterior, i.e., enuncie (e demonstre?) a versão para supremos. Dica: explicitamente, "se α é limitante superior de A, então $\alpha = \sup A$ se, e somente se, para todo $\beta < \alpha$ existir $a \in A$ com $\beta < a$". ■

0.0.2 Boa ordenação e os números naturais

A discussão anterior sobre ordens torna bastante apropriado apresentar ao leitor a importantíssima ideia de *boa ordenação*:

Definição 0.0.47. Uma ordem $\leq$ (ou $<$) sobre um conjunto $\mathbb{B}$ é chamada de **boa ordem** se todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$ admite menor elemento. Diz-se também que $\mathbb{B}$ está **bem ordenado** pela (boa) ordem $\leq$. ¶

Moralmente, um conjunto está bem ordenado quando seus elementos podem ser *enfileirados* por meio da ordem $\leq$: há o *primeiro* elemento, digamos $b_0 := \min \mathbb{B}$, em seguida o seu *sucessor*, digamos $b_1 := \min(\mathbb{B} \setminus \{b_0\})$, em seguida... Como os índices "0" e "1" sugerem, parece haver alguma ligação com os *números naturais* que já conhecemos de longa data, o que suscita uma pergunta deliberadamente evitada até agora: *o que são números (e o que poderiam ser)?*[9]

$$b_0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow b_4 \longrightarrow \cdots$$

Evidentemente, esse tipo de pergunta não se refere ao símbolo utilizado para *denotar* um número, mas sim ao próprio número: por exemplo, qual o significado do "três" nas sentenças "A Argentina venceu três Copas do Mundo" e "Neymar rolou por três metros ao simular uma falta"? Quais as diferenças de significado, e quais as semelhanças?

Exercício 0.16. Reflita (por pelo menos *três* minutos) sobre as questões acima. ■

Apesar da sugestão numérica anterior, é possível evitar o emprego explícito de números no entendimento das boas ordens – o que inclusive será útil quando voltarmos a discutir a *natureza* dos números. A grande sacada para fazer isso está escondida na seguinte

Proposição 0.0.48. *Sejam $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem e $b \in \mathbb{B}$. Se existir $c \in \mathbb{B}$ com $c > b$, então existe $b' \in \mathbb{B}$ com as seguintes propriedades:*

(i) $b < b'$;

(ii) *se $d \in \mathbb{B}$ e $d > b$, então $b' \leq d$.*

Demonstração. É mais simples do que parece: a existência de c com $c > b$ garante que $\mathbb{B}_{>b} := \{d \in \mathbb{B} : d > b\}$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$, justamente por ter c como elemento. Logo, a boa ordenação garante a existência de $\min \mathbb{B}_{>b}$, de modo que basta tomar $b' := \min \mathbb{B}_{>b}$. □

Definição 0.0.49. Nas condições da proposição anterior, vamos denotar b' por $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, o **sucessor** de b na boa ordem $\mathbb{B}$. ¶

Assim como ocorre com sucessores nos diversos campos da vida real, o sucessor de b numa boa ordem $\mathbb{B}$, caso exista, é o primeiro elemento da ordem a ser maior do que b, o que em particular impede a existência de elementos *intermediários*. O próximo exercício deve esclarecer a ideia.

Exercício 0.17. Seja $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem. Mostre que se $b \in \mathbb{B}$ e existe $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, então não existe $c \in \mathbb{B}$ tal que $b < c < \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. Dica: releia a definição de $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. ■

[9] Referência ao clássico "*Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*", de Richard Dedekind, em que *Ele* apresenta Sua construção para (o que hoje chamamos de) um corpo ordenado completo [9].

Exemplo 0.0.50. Por mais sem graça que pareça, $\mathbb{B} := \emptyset$ pode ser considerado como um conjunto bem ordenado: no caso, sua boa ordem $\leq$ é o único subconjunto de $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$, a saber, $\emptyset$! Apesar de sua simplicidade, $\emptyset$ é o gatilho de uma importante reação em cadeia, como veremos adiante. ▲

Definição 0.0.51. Fixada uma boa ordem $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$, diremos que $u \in \mathbb{B}$ é o **último elemento** de $\mathbb{B}$ se $u = \max \mathbb{B}$. ¶

Proposição 0.0.52. *Se $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é uma boa ordem e $u' \notin \mathbb{B}$, então existe uma boa ordem $\langle \mathbb{B}', \leq' \rangle$ tal que*

(i) $\mathbb{B} \subsetneq \mathbb{B}'$,

(ii) $x \leq y \Leftrightarrow x \leq' y$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{B}$, *e*

(iii) u' *é o último elemento de* $\mathbb{B}'$.

Demonstração. Basta definir $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\}$ e, para quaisquer $x, y \in \mathbb{B}'$, escrever $x \leq' y$ para indicar a ocorrência de "$x, y \in \mathbb{B}$ e $x \leq y$" ou "$y = u'$". Na prática, $\leq'$ apenas *estende* a definição de $\leq$ sobre $\mathbb{B}' \times \mathbb{B}'$ ao declarar $x \leq u'$ para todo $x \in \mathbb{B}'$, o que torna quase imediata a verificação das propriedades desejadas – o que fica por conta do leitor. □

Exemplo 0.0.53. Fixado qualquer objeto u', tem-se por definição que $u' \notin \emptyset$, o que permite empregar a última proposição a fim de estender a boa ordem $\mathbb{B}$ do Exemplo 0.0.50: faz-se $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\} = \{u'\}$, que tem u' como seu último (e único!) elemento. Ora, por que parar? Certamente existe $u'' \neq u'$, donde a proposição anterior garante a boa ordem $\mathbb{B}'' := \mathbb{B}' \cup \{u''\}$, com $u' < u''$ e u'' como último elemento. Em particular, u'' é sucessor de u', mas u'' não tem sucessores em $\mathbb{B}''$. Ora, por que parar? Certamente existe $u''' \notin \{u', u''\}$, donde a proposição anterior garante... ▲

Como os exemplos acima sugerem, a noção de sucessor numa boa ordem torna supérfluo o uso explícito de números *alienígenas* para descrever o seu enfileiramento. Na verdade, mais do que isso, o comportamento dos sucessores é tão parecido com o da *progressão* esperada dos números naturais que chega a ser tentador utilizar a noção de boa ordenação para *descrever* o que os números *poderiam ser*. No entanto, quem já tem experiência com números naturais sabe que não se vive só de sucessão, mas também de *indução*. Não seja por isso:

Teorema 0.0.54 (Indução numa boa ordem)**.** *Seja $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem. Suponha que X seja um subconjunto de $\mathbb{B}$ com a seguinte propriedade:*

sempre que ocorre $b \in X$ para todo $b < c$, também ocorre $c \in X$.

Em tais condições, $\mathbb{B} = X$.

Demonstração. Nada precisa ser feito se ocorrer $\mathbb{B} = \emptyset$. Agora, se $\mathbb{B} \neq \emptyset$ e existir $b \in \mathbb{B}$ com $b \notin X$, então o conjunto $T := \{b \in \mathbb{B} : b \notin X\}$ é não-vazio e, pela boa ordenação, deve existir $t := \min T$; em particular, $t \in T$. Ora, isto impede que X tenha a propriedade do enunciado: com efeito, por t ser o menor elemento em T, todo $b < t$ deve ser membro de X, de modo que se X tivesse a propriedade, concluiríamos que $t \in X$, mas $t \in T := \mathbb{B} \setminus X$. □

Na prática, o subconjunto X costuma ser formado pelos elementos de $\mathbb{B}$ que têm alguma propriedade $\mathcal{P}$ fixada, de modo que a exigência feita sobre X se traduz na seguinte condição: *sempre que vale $\mathcal{P}(b)$ para todo $b < c$, também vale $\mathcal{P}(c)$*. Note que em tal situação, o conjunto $X := \{x : x \in \mathbb{B} \text{ e vale } \mathcal{P}(x)\}$ satisfaz a condição imposta pelo teorema anterior, de modo que deve-se ter $X = \mathbb{B}$, i.e., $\mathcal{P}(b)$ vale para todo $b \in \mathbb{B}$.

Em todo caso, o cerne do argumento indutivo consiste em usar a *boa estruturação* de um conjunto bem ordenado para, em vez de verificar *individualmente* se "$b \in X$" para cada $b \in \mathbb{B}$, fazer a verificação de uma única afirmação condicional do tipo

"para todo c, $\mathcal{H}(c) \Rightarrow \mathcal{T}(c)$",

onde a **$\mathcal{H}$ipótese indutiva**, $\mathcal{H}(c)$, é "$b \in X$ para todo $b < c$", e a $\mathcal{T}$ese, $\mathcal{T}(c)$, é "$c \in X$". Em certo sentido, assegurar esta simples condicional dispara um efeito dominó:

✓ se $\mathbb{B} \neq \emptyset$, então existe $w := \min \mathbb{B}$ e, por não existirem elementos menores do que w, a hipótese indutiva $\mathcal{H}(w)$ torna-se verdadeira por vacuidade (para que fosse falsa, deveria existir $b < w$ com $b \notin X$, mas não há $b < w$), donde se conclui que vale a tese, i.e., $w \in X$;

✓ se existir $w' := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(w)$, então w é o único elemento de $\mathbb{B}$ estritamente menor do que w', e já sabemos que vale $w \in X$, o que garante a hipótese indutiva $\mathcal{H}(w')$ e, portanto, deve-se ter $w' \in X$

✓ se existir $w'' := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(w')$, então...

Esse arquétipo de efeito dominó é equivalente ao que foi apresentado no teorema anterior, mas somente nas boas ordens em que todos os elementos, exceto o menor, são sucessores de *alguém*[10].

Corolário 0.0.55 (Indução "clássica")**.** *Sejam $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem com $\mathbb{B} \neq \emptyset$, considere $p := \min \mathbb{B}$ e suponha que para todo $b' \in \mathbb{B} \setminus \{p\}$ exista $b \in \mathbb{B}$ tal que $b' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. Em tais condições, se $X \subseteq \mathbb{B}$ for tal que*

✓ *$p \in X$, e*

✓ *$\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$ sempre que $b \in X$,*

então $\mathbb{B} = X$.

Demonstração. Basta verificar que X tem a propriedade do teorema anterior, i.e., que para qualquer $c \in \mathbb{B}$, tenha-se a ocorrência de $c \in X$ sempre que $b \in X$ para todo $b < c$: ora, se $c := p$, então $p \in X$ por hipótese; se $c > p$ e $b \in X$ para todo $b < c$, então em particular para $b \in \mathbb{B}$ com $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ (que existe pela hipótese sobre $\mathbb{B}$), deve-se ter $b < c$, donde segue que $b \in X$ e, pela hipótese sobre X, $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$, como desejado. □

Exercício 0.18. Prove o corolário anterior diretamente. Dica: suponha $\mathbb{B} \setminus X \neq \emptyset$ e note que seu menor elemento *deveria* ser da forma $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ para algum $b \in X$. ■

Como *último* passo antes de revelar as verdadeiras intenções de toda essa discussão:

Proposição 0.0.56. *Seja $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ uma boa ordem com $\mathbb{B} \neq \emptyset$. Se todo $b \in \mathbb{B}$ tem sucessor, então a função $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}} \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ é injetora.*

[10] Cuidado: ter sucessor $\neq$ ser sucessor. O exemplo óbvio é o menor elemento de uma boa ordem com pelo menos *dois* elementos. Exemplos menos óbvios serão discutidos em breve.

Demonstração. Explicitamente, deve-se mostrar que se $b, b' \in \mathbb{B}$ são distintos, então $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b) \neq \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b')$. Uma vez que toda boa ordem é também total (Exercício 0.56), a ocorrência de $b \neq b'$ acarreta $b < b'$ ou $b' < b'$, de modo que mostraremos algo *mais forte*: se $b < b'$, então $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b) < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b')$. Como? Por indução!

Vamos mostrar que cada $c \in \mathbb{B}$ tem a seguinte propriedade: para todo $x \in \mathbb{B}$, se $x < c$, então $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c)$. Para tanto, fixado $c \in \mathbb{B}$, suponha que todo $b < c$ tenha a *mesma* propriedade, i.e.: se $x < b$, então $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. Agora, tudo se resume a considerar as situações que podem acometer o elemento c.

- ✓ Se $c = \min \mathbb{B}$, então a implicação "$x < c \Rightarrow \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c)$" vale por vacuidade, já que não existe $x < c$;
- ✓ Se $c > \min \mathbb{B}$, então:
  - ✓ *pode ser* que exista $b \in \mathbb{B}$ com $c = \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, donde segue que $b < c$ e, por conseguinte, todo $x < c$ é tal que $x < b$ (caso em que $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b) = c$ e $c < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c)$) ou $x = b$ (caso em que $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) = c < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c)$), já que a ocorrência de $b < x$ violaria o Exercício 0.17;
  - ✓ mas *pode ser que não*, i.e., pode não existir $b \in \mathbb{B}$ com $c = \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, o que pela definição de sucessor se traduz em afirmar que todo $x < c$ admite $x' < c$ com $x < x'$, donde segue que $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) < c$ para todo $x < c$ (já que $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) = c$ contraria a hipótese, enquanto $c < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x)$ viola o Exercício 0.17) e, portanto, $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c)$. □

A última parte do argumento anterior certamente soou estranha: um elemento maior do que o primeiro mas que não é sucessor de ninguém; ao pensar nos elementos de $\mathbb{B}$ como números naturais, seria como admitir um número maior do que *infinitos* antes dele!

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow ?$$

O problema é que, a rigor, $\mathbb{B}$ não é o conjunto dos naturais, mas apenas uma boa ordem em que todo elemento tem sucessor. Então, o que aconteceria se *impuséssemos* sobre $\mathbb{B}$ a condição de que todo $b \neq \min \mathbb{B}$ é sucessor de algúem?

Teorema 0.0.57. *Se $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é uma boa ordem com $\mathbb{B} \neq \emptyset$ tal que*

(*i*) $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ *existe para todo* $b \in \mathbb{B}$,

(*ii*) *para todo* $b' \in \mathbb{B} \setminus \{\min \mathbb{B}\}$ *existe* $b \in \mathbb{B}$ *com* $b' = \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$,

então a função $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *satisfaz os seguintes "axiomas":*

(DP_i) $\mathbb{B} \setminus \mathrm{im}(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}) = \{\min \mathbb{B}\}$;

(DP_{ii}) *a função* $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *é injetora; e*

(DP_{iii}) *se* $X \subseteq \mathbb{B}$ *for tal que* $\min \mathbb{B} \in X$ *e* $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$ *sempre que* $b \in X$, *então* $X = \mathbb{B}$.

Demonstração. As condições (i) e (ii) asseguram $\mathbb{B} \setminus \{\min \mathbb{B}\} = \mathrm{im}(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}})$, donde segue o primeiro axioma. Os axiomas restantes decorrem, respectivamente, da Proposição 0.0.56 e do Corolário 0.0.55. □

Os axiomas (DP$_i$), (DP$_{ii}$) e (DP$_{iii}$), elaborados independentemente por Dedekind e Peano, buscam capturar o *mínimo* que se espera dos *números naturais* dentro de um cenário regido por conjuntos. Em certo sentido, eles funcionam como os axiomas que descrevem os *grupos*, que por sua vez buscam capturar as propriedades básicas das noções de simetria. Com isso em mente, faz sentido a próxima

Definição 0.0.58. Diremos que $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ é um **sistema natural** se $\mathcal{N}$ for um conjunto, i for um elemento de $\mathcal{N}$ e $s\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ for uma função com as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{N} \setminus \operatorname{im}(s) = \{i\}$;

(ii) s é injetora; e

(iii) se um subconjunto $X \subseteq \mathcal{N}$ for tal que

(C.I.) $i \in X$, e

(H.I.) $s(n) \in X$ sempre que $n \in X$,

então $X = \mathcal{N}$. ¶

Com tal terminologia, o teorema anterior se transforma no

Corolário 0.0.59. *Se $\langle \mathbb{B}, \leq\rangle$ é uma boa ordem com $\mathbb{B} \neq \emptyset$ tal que*

(i) $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ *existe para todo* $b \in \mathbb{B}$,

(ii) para todo $b' \in \mathbb{B} \setminus \{\min \mathbb{B}\}$ *existe* $b \in \mathbb{B}$ *com* $b' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$,

então $\langle \mathbb{B}, \min \mathbb{B}, \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}\rangle$ *é um sistema natural.*

Equivalentemente, ao *se* começar com um sistema natural $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$, pode-se definir uma boa ordem $\leq$ sobre $\mathcal{N}$ que tenha i como menor elemento e tal que $\operatorname{suc}_{\mathcal{N}}(n) = s(n)$ para todo $n \in \mathcal{N}$: chamando um subconjunto $I \subseteq \mathcal{N}$ de *indutivo* se ocorrer $s(u) \in I$ sempre que $u \in I$, basta declarar $m \leq n$ se para todo subconjunto indutivo I de $\mathcal{N}$, valer que $n \in I$ sempre que $m \in I$.

Exercício 0.19 (Opcional)**.** Demonstre a última afirmação. Comentário: note que nas argumentações anteriores, a partir de uma boa ordem satisfazendo certas condições, *cozinhou-se* um sistema natural; desta vez, deve-se definir uma boa ordem a partir de um sistema natural dado – e por isso a descrição da ordem precisa usar informações desse sistema. ■

Definição 0.0.60. O exercício anterior torna lícito chamar de **boa ordem natural** às boas ordens que cumprem as exigências do Teorema 0.0.57. ¶

Portanto, existe uma boa ordem natural se, e somente se, existe um sistema natural. Agora: *existe* algum desses animais? A resposta pode ser mais delicada do que parece pois, como veremos na próxima seção, um conjunto dotado de uma injeção sobre uma parte própria (como ocorre com a função sucessor) é, necessariamente, *infinito*, o que revela um primeiro ponto de distinção metodológica: vamos admitir conjuntos *infinitos*?

A pergunta acima é mais delicada do que parece: como o Exemplo 0.0.53 ilustrou, o processo de acrescentar um último elemento à uma fila *previamente* dada é inesgotável, pelo menos enquanto experimento mental. Assim, é bastante razoável aceitar, intuitivamente, que o *universo* de todos os objetos *disponíveis* seja *infinito*.

Porém, o que se coloca acima é diferente de assumir a possibilidade de coletar *infinitos* elementos num mesmo conjunto simultaneamente: seja por razões pessoais (por exemplo, a crença de que os objetos matemáticos devem algum tipo de satisfação perante a realidade material, que aparenta ser finita), técnicas (por exemplo, a restrição de que os objetos matemáticos tratados sejam replicáveis num computador[11]) ou de qualquer outra natureza, a subjetividade da questão impede que se descartem sumariamente os posicionamentos contrários aos conjuntos *infinitos*. Contudo, isto não significa que devamos nos guiar por tais restrições: é igualmente lícito, a princípio, aceitar que conjuntos *infinitos* possam *existir*. E será esta a postura adotada no texto.

Assim, fica um pouco mais fácil responder à primeira pergunta, sobre a existência de sistemas naturais: pelo menos intuitivamente, *deveria* existir um sistema natural, justamente aquele formado pelos *números naturais verdadeiros*, i.e., o conjunto formado efetivamente pelos objetos que entendemos como sendo os números naturais. A fim de tornar essa certeza parte do aparato formal que estamos *construindo*, é razoável postular mais um axioma.

Axioma de Dedekind-Peano. *Existe um sistema natural.*

Deste ponto em diante, é prática comum fixar *algum* sistema natural e, por meio de *argumentações indutivas*, construir *recursivamente* as operações de *adição* e *multiplicação* de forma precisa e verificar todas as propriedades operatórias esperadas, num árduo, doloroso e ~~gratificante?~~ demorado processo que, na prática, *recria* a Aritmética Básica. É nesse sentido que se costuma dizer que os Axiomas de Dedekind-Peano capturam o básico dos *naturais*: a partir deles e das construções conjuntistas (!)[12], recuperam-se todos os dispositivos aritméticos usuais e, *a posteriori*, todos os outros conjuntos numéricos! Há, porém, um elefante na sala: o vermelho que eu vejo é tão vermelho quanto o que você vê?

Explicitamente, o Axioma de Dedekind-Peano não assegura *o* sistema natural, mas apenas *um* sistema natural. Poderia haver vários? Se sim, então os processos descritos acima dependem do sistema natural escolhido? Cada sistema natural tem sua própria Aritmética? Será que essas preocupações realmente fazem sentido?

Comecemos pela última: a rigor, os questionamentos são pertinentes. Por exemplo: assim como um *grupo* é um conjunto dotado de funções que satisfazem certos axiomas, sistemas naturais também são conjuntos dotados de funções que satisfazem certos axiomas; ora, dado que existem grupos definitivamente *incompatíveis* entre si, há precedente para questionar a possibilidade de sistemas naturais *incompatíveis* em algum sentido. Feita a ressalva, o leitor pode se tranquilizar: embora existam (*infinitos*!) sistemas naturais distintos, todos eles são *rigorosamente* compatíveis entre si, o que na prática garante que a Aritmética desenvolvida em um seja *indistinguível* da Aritmética desenvolvida em outro.

Teorema 0.0.61 (Dedekind)**.** *Se* $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ *e* $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$ *são sistemas naturais, então existe uma única bijeção* $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *tal que* $\varphi(i) = j$ *e* $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ *para todo* $n \in \mathcal{N}$.

[11] Caso em que inclusive faria sentido supor que existe um *último número natural*, como reflexo das limitações de memória que um computador factível sofre. O leitor interessado pode pesquisar pela posição filosófica chamada de *ultrafinitismo*.

[12] É relativamente comum encontrar quem propague máximas como "os Axiomas de (Dedekind-) Peano permitem construir a Matemática!", num indicativo claro de amnésia, já que os axiomas usados na descrição de sistemas naturais descrevem apenas tais sistemas. Por exemplo, se $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ é um sistema natural, não são os seus axiomas que *permitem* construir o conjunto $\mathcal{N} \times (\mathcal{N} \setminus \{i\})$ a partir do qual se obtém os *inteiros*, mas sim as suposições tácitas (axiomas!) de que tais procedimentos podem ser realizados entre conjuntos – e o plural em "axiomas!" não foi um equívoco, como veremos na última seção.

$$(A)\qquad 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} \cdots$$

$$(B)\qquad \bullet \xrightarrow{+\bullet} \bullet\bullet \xrightarrow{+\bullet} \bullet\bullet\bullet \xrightarrow{+\bullet} \bullet\bullet\bullet\bullet \xrightarrow{+\bullet} \cdots$$

$$(C)\qquad | \xrightarrow{+|} || \xrightarrow{+|} ||| \xrightarrow{+|} |||| \xrightarrow{+|} \cdots$$

$$(D)\qquad i \xrightarrow{s} s(i) \xrightarrow{s} s(s(i)) \xrightarrow{s} s(s(s(i))) \xrightarrow{s} \cdots$$

$$(E)\qquad \emptyset \xrightarrow{\{\}} \{\emptyset\} \xrightarrow{\{\}} \{\{\emptyset\}\} \xrightarrow{\{\}} \{\{\{\emptyset\}\}\} \xrightarrow{\{\}} \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
(F) & \emptyset \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \cdots \\
(G) & 0 \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[r, "+1"] & 3 \arrow[r, "+1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figura 0.0: Vários sistemas naturais.

Demonstração. Primeiro, note que *se existir* uma função com as propriedades impostas, então ela é única: com efeito, se $\psi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ satisfaz as mesmas condições, então o subconjunto $X := \{n \in \mathcal{N} : \varphi(n) = \psi(n)\}$ é tal que

- ✓ $i \in X$, pois $\varphi(i) = j = \psi(i)$, e
- ✓ se $n \in X$, então $s(n) \in X$, já que $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(\psi(n)) = \psi(s(n))$,

donde a suposição de $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ ser um sistema natural assegura $X = \mathcal{N}$. Na prática, o que se fez foi um argumento indutivo nos moldes da indução clássica descrita no Corolário 0.0.55: provou-se o caso inicial ($i \in X$) e, supondo-se que $n \in X$ (hipótese indutiva), concluiu-se que $s(n) \in X$ (e $s(n)$ é o sucessor de n na boa ordem induzida pela função sucessor, como indicado no Exercício 0.19). O restante da prova consiste em fazer uma série de argumentações semelhantes, que não ficarão a cargo do leitor!

Supondo que exista uma função φ satisfazendo $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$, provaremos que ela deve ser bijetora.

- ✓ É sobrejetora pois $Y := \{m \in \mathcal{M} : \text{existe } n \in \mathcal{N} \text{ com } \varphi(n) = m\}$ é tal que $j \in Y$ (pois $\varphi(i) = j$) e $t(m) \in Y$ sempre que $m \in Y$ (pois se $n \in \mathcal{N}$ é tal que $\varphi(n) = m$, então $s(n) \in \mathcal{N}$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(m)$), donde segue que $Y = \mathcal{M}$ (já que $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$ é um sistema natural).
- ✓ Para verificar a injetividade, a ideia é mostrar que se $n \neq n'$, então $\varphi(n) \neq \varphi(n')$. Em outras palavras, para $n \in \mathcal{N}$ fixado, busca-se provar que

$$D_n := \{n' \in \mathcal{N} : n' \neq n \Rightarrow \varphi(n') \neq \varphi(n)\}$$

satisfaz $D_n = \mathcal{N}$. Tem início a *primeira indução*: mostraremos que $D_i = \mathcal{N}$ (Caso Inicial) bem como $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$ (Hipótese Indutiva). Ocorre que para mostrar $D_i = \mathcal{N}$, também precisa-se argumentar por indução! Tem início a segunda indução:

✓ $i \in D_i$ (já que a implicação "$i \neq i \Rightarrow \varphi(i) \neq \varphi(i)$" é verdadeira[13]);

✓ se $n \in D_i$ para algum $n \in \mathcal{N}$ então $n = i$ ou $n \neq i$; no primeiro caso, $s(i) \neq i$ (por $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ ser sistema natural) e $\varphi(s(i)) = t(\varphi(i)) = t(j) \neq j$ (pelas condições satisfeitas por φ e por $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$ ser sistema natural); no segundo caso, dado que $n \in D_i$ e $n \neq i$, existe $n' \in \mathcal{N}$ com $s(n') = n$ (pois $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ é sistema natural) e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(\varphi(s(n'))) = t(t(\varphi(n'))) \neq j$ (pois $t(m) \neq j$ para todo $m \in \mathcal{M} \setminus \{j\}$), mostrando que $s(n) \in D_i$.

O argumento acima encerra a segunda indução, mas não a primeira: mostrou-se apenas que $D_i = \mathcal{N}$; falta provar a segunda parte, i.e., que $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$! E para surpresa de ninguém, tal igualdade será mostrada... na terceira indução:

✓ como antes, tem-se $s(n) \in D_{s(n)}$ por conta da igualdade $s(n) = s(n)$;

✓ agora, se $k \in D_{s(n)}$, deve-se provar que $s(k) \in D_{s(n)}$; se ocorrer $s(k) = s(n)$, nada precisa ser feito; se $s(k) \neq s(n)$, então a injetividade de s assegura $k \neq n$, enquanto o modo como tomamos n, i.e., satisfazendo $D_n = \mathcal{N}$, garante que $\varphi(k) \neq \varphi(n)$, donde finalmente a injetividade de t atesta $t(\varphi(k)) \neq t(\varphi(n))$, com a suposição sobre φ encerrando o trabalho, já que $\varphi(s(k)) = t(\varphi(k))$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$.

Portanto, mostrou-se que $D_i = \mathcal{N}$ (C.I.) e $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$ (H.I.), ou seja, $\{n \in \mathcal{N} : D_n = \mathcal{N}\} = \mathcal{N}$, exatamente o que se desejava.

Falta apenas provar que *existe* uma função $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ satisfazendo $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$. Isto não é evidente? Veja: defina $\varphi(i) \coloneqq j$, $\varphi(s(i)) \coloneqq t(j)$, $\varphi(s(s(i))) \coloneqq t(t(j))$ e *assim por diante*. Problema resolvido! $\square$

Observação 0.0.62 (Adiável: recursão (e reuniões arbitrárias)). O modo como a demonstração acima terminou é típico dos textos que evitam discutir *recursão*, que se baseia na ideia de que funções podem ser definidas a partir de aplicações sucessivas de certos passos pré-estabelecidos. Embora seja uma proposta intuitivamente razoável, há margem para dúvidas: explicitamente, uma função $f\colon X \to Y$ "*é* um subconjunto de $X \times Y$ com certas propriedades" – algo diferente de "*será* um subconjunto... com certas propriedades".

Por exemplo, uma vez em posse definitiva do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, definiremos a função fatorial $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa cada $n \in \mathbb{N}$ ao número $n!$, de acordo com os seguintes critérios: $0! \coloneqq 1$ e $(n+1)! \coloneqq (n+1) \cdot n!$. Da forma como está posta, é como se a função F fosse usada em sua própria definição, algo circular e que poderia trazer dor de cabeça.

Porém, secretamente, a função F acima é a *colagem* de uma *família de funções* cuja existência é demonstrada por indução: prova-se que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função

$$F_n\colon \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\} \to \mathbb{N}$$

[13]Posto que o seu *antecedente* é falso. Lembre-se de que afirmações do tipo "se P, então Q" só são falsas na ocorrência de *premissas* (P) verdadeiras com *conclusões* (Q) falsas.

de tal forma que F_{n+1} estende F_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, para *colar* todas as F_n's numa única F, faz-se $F(m) := F_n(m)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $m < n$, o que torna F uma função pois, nas inevitáveis ocorrências de $n, n' > m$ com $n \neq n'$, ou F_n estende $F_{n'}$ (caso $n > n'$) ou $F_{n'}$ estende F_n (caso $n' > n$) e, portanto, $F_n(m) = F_{n'}(m)$. Implicitamente, F é a *reunião* de *todas* as F_n's.

Definição 0.0.63. Para um conjunto $\mathcal{S}$, define-se $\bigcup \mathcal{S} := \{x : \text{existe } S \in \mathcal{S} \text{ com } x \in S\}$, a **reunião da família** $\mathcal{S}$. Também é comum escrever $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ ou, nas ocasiões em que $\mathcal{S} := \{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto $\mathcal{I}$ fixado, $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} S_i$. ¶

O dispositivo acima apenas cria um modo bastante esperto de evitar abominações notacionais como “$S_0 \cup S_1 \cup \ldots$” quando se quer expressar uma reunião (possivelmente) *infinita* de conjuntos. Fora isso, ela não traz novidades: note, por exemplo, que para $\mathcal{S} := \{X, Y\}$, tem-se $\bigcup \mathcal{S} = X \cup Y$. De volta ao tema da colagem:

Lema 0.0.64. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções. Se, para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}$ valer que $f(x) = g(x)$ sempre que $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$, então $F := \bigcup \mathcal{F}$ é uma função cujo domínio é $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{dom}(f)$. Em particular, $F(x) = f(x)$ para qualquer $f \in \mathcal{F}$ com $x \in \operatorname{dom}(f)$.*

Exercício 0.20. Demonstre o lema acima. Dica: perceba que todo elemento de $\bigcup \mathcal{F}$ é um par ordenado; depois, para $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in \bigcup \mathcal{F}$, note que devem existir $f, g \in \mathcal{F}$ com $\langle x, y\rangle \in f$ e $\langle x, z\rangle \in g$, acarretando $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$; conclua que $y = z$. ■

Dado que usaremos diversas funções definidas recursivamente ao longo do texto, a preguiça exige que se demonstre um único teorema que dê conta de todos casos que estão por vir.

Teorema 0.0.65 (Recursão)**.** *Sejam $\langle \mathbb{B}, \leq\rangle$ uma boa ordem natural, X um conjunto qualquer e $R \colon \mathbb{B} \times X \to X$ uma função*[14]*. Para cada $x \in X$ fixado, existe uma única função $R_x \colon \mathbb{B} \to X$ tal que $R_x(\min \mathbb{B}) = x$ e $R_x(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = R(b, R_x(b))$ para cada $b \in \mathbb{B}$.*

Antes de provar o teorema acima, convém observar como ele permite construir funções *na prática*.

(i) No Teorema de Dedekind, por exemplo, substitui-se $\mathbb{B}$ pelo sistema natural $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ com a boa ordem descrita no Exercício 0.19, toma-se $X := \mathcal{M}$, $x := j$ e faz-se $R_x \colon \mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ a função dada por $R(n, m) := t(m)$. Logo, $R_x(i) = j$ e $R_x(s(n)) = R(n, R_x(n)) = t(R_x(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$, mostrando que a função φ procurada é, tão somente, R_x.

(ii) Para o caso do fatorial, uma vez em posse dos naturais $\mathbb{N}$ e da operação de multiplicação $\cdot \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tomam-se $\mathbb{B} := X := \mathbb{N}$, $R \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $R(n, m) := (n+1) \cdot m$ e $x := 1$. Note então que a função $R_x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ correspondente é tal que $R_x(0) = 1$ e $R_x(n+1) = (n+1) \cdot R_x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., R_x é a função que faz $n \mapsto n!$, como desejado.

Demonstração. Para cada $b \in \mathbb{B}$, seja $\mathbb{B}_{<b} := \{c \in \mathbb{B} : c < b\}$. Vamos dizer que uma função $f \colon \mathbb{B}_{<b} \to X$ é *R-recursiva em b* se $b = \min \mathbb{B}$ ou se $b > \min \mathbb{B}$ com $f(\min \mathbb{B}) = x$ e $f(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)) = R(c, f(c))$ para cada $c < b$ com $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c) < b$. Observe que para cada

[14]Nesse tipo de situação, escreveremos $R(b, x)$ em vez de $R(\langle b, x\rangle)$.

elemento $b > \min \mathbb{B}$, existe no máximo uma função R-recursiva em b: se tanto f quanto g são R-recursivas em b, então não pode haver $c < b$ com $f(c) \neq g(c)$, posto que o contrário permitiria tomar $c'' := \min\{c : c < b \text{ e } f(c) \neq g(c)\}$, com $c'' > \min \mathbb{B}$ por valer $f(\min \mathbb{B}) = g(\min \mathbb{B})$; se ocorresse $c'' = \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(\min \mathbb{B})$, a R-recursividade daria $f(c'') = R(\min \mathbb{B}, x) = g(c'')$; logo, existe $c' < c''$ com $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c') = c''$ e, consequentemente,

$$f(c'') = f(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c')) = R(c', f(c')) = R(c', g(c')) = g(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c')) = g(c''),$$

absurdo. Em particular, como uma função R-recursiva em b' é também R-recursiva em $b \leq b'$, segue que se f e g forem R-recursivas em b e b', respectivamente, então g estende f.

Agora, provaremos que para cada $b \in \mathbb{B}$ *existe* uma função R-recursiva em b.

✓ (C.I.) Para $b := \min \mathbb{B}$, a função R-recursiva em b é $\emptyset$.

✓ (H.I.) Supondo que existe uma função R-recursiva em b, mostraremos que existe função R-recursiva em $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$:

  ✓ caso $b := \min \mathbb{B}$, tem-se $\mathbb{B}_{<\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)} = \{b\}$ e, assim, basta tomar $f \colon \{b\} \to X$ com $f(b) := x$;

  ✓ caso $b > \min\{\mathbb{B}\}$, existe $c < b$ com $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c) = b$, de modo que $\mathbb{B}_{<b} = \mathbb{B}_{<c} \cup \{c\}$ e $\mathbb{B}_{<\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)} = \mathbb{B}_{<c} \cup \{c, b\}$; daí, se $f \colon \mathbb{B}_{<b} \to X$ é a função R-recursiva existente por hipótese, basta definir $g \colon \mathbb{B}_{<\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)} \to X$ fazendo $g(d) := f(d)$ se $d < b$ (i.e., $d \leq c$), e $g(b) := R(c, f(c))$.

Ao aliar a indução acima com a argumentação do primeiro parágrafo, resulta que para todo $b \in \mathbb{B}$ existe uma única função R-recursiva em b, digamos f_b, de tal forma que $f_{b'}$ estende f_b sempre que $b \leq b'$. Isso *permite considerar a família de funções* $\mathcal{F} := \{f_b : b \in \mathbb{B}\}$, que satisfaz as exigências do Lema 0.0.64. Logo, $R_x := \bigcup_{b \in \mathbb{B}} f_b$ é uma função cujo domínio é $\bigcup_{b \in \mathbb{B}} \mathbb{B}_{<b} = \mathbb{B}$ (verifique!), que tem X como codomínio e tal que $R_x(\min \mathbb{B}) = x$ e $R_x(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = f_c(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b))$ para algum $c > b$, acarretando

$$R_x(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = R(b, f_c(b)) = R(b, R_x(b)),$$

como desejado. Nesta altura do campeonato, o leitor já deve saber como provar que R_x é a única com tal propriedade. □

Embora existam versões ainda mais gerais do teorema acima, esta será suficiente para dar cabo de todas as recursões utilizadas no texto. Evidentemente, utilizá-la para justificar as eventuais passagens do tipo "e assim por diante" será um trabalho deixado a cargo do leitor zeloso – mas só a partir da próxima seção. △

O Teorema 0.0.61 (de Dedekind) estabelece, portanto, a *irrelevância* de se apegar a um começo particular na descrição de um sistema natural: o importante é que exista um começo. Também fica implicitamente justificada a tranquilidade com que matemáticos profissionais *escolhem* um sistema natural arbitrário para desenvolver Aritmética, com a certeza de que os resultados obtidos valerão em qualquer outro sistema.

Exemplo 0.0.66. Fixados sistemas naturais $\langle \mathcal{N}, i, s\rangle$ e $\langle \mathcal{M}, j, t\rangle$, suponha que seja verdadeira a asserção "não existe $n \in \mathcal{N}$ tal que $s(n) = n$". Neste caso, também deverá valer que "não existe $m \in \mathcal{M}$ tal que $t(m) = m$": de fato, se existisse m com $t(m) = m$, então ao tomar o único $n \in \mathcal{N}$ com $\varphi(n) = m$, teria-se $t(\varphi(n)) = \varphi(s(n)) = \varphi(n)$, donde a injetividade de φ garantiria $s(n) = n$. ▲

Observação 0.0.67. O argumento acima se vale da *compatibilidade* da bijeção φ com as funções sucessoras de cada sistema. Assim, a preservação dos resultados considera apenas afirmações expressas em termos das funções sucessoras. $\triangle$

Acredito que a longa discussão anterior deslegitime os eventuais protestos que poderão ser feitos à próxima

Definição 0.0.68. Vamos denotar por $\mathbb{N}$ *um* sistema natural dado pelo Axioma de Dedekind-Peano, cujos elementos serão chamados de *números naturais*. Além disso:

- $0 := \min \mathbb{N}$;
- $1 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(0)$;
- $2 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(1)$;
- $3 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(2)$;
- $4 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(3)$;
- $5 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(4)$;
- $6 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(5)$;
- $7 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(6)$;
- $8 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(7)$;
- $9 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(8)$;

e assim por diante[15]. ¶

As operações de adição e multiplicação se definem recursivamente.

(+) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $+_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que faz $+m(0) = m$ e $+_m(\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n)) = \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(+_m(n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, defina $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $+(m, n) := +_m(n)$, que por simplicidade será denotado por $m + n$.

($\cdot$) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $\cdot_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que faz $\cdot_m(0) = 0$ e $\cdot_m(\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n)) = \cdot_m(n) + m$. Daí, defina $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $\cdot(m, n) := \cdot_m(n)$, que por simplicidade será denotado por $m \cdot n$.

Exercício 0.21. Use o Teorema 0.0.65 (da Recursão) para garantir a existência das funções acima. Dica: para $+_m$, tome $\mathbb{B} = X = \mathbb{N}$ no enunciado original, com $R := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $R(n, y) := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(y)$, $x := m$ e perceba que $+_m = R_m$; para $\cdot_m$, faça $R(n, y) := y + m$ (que existe pelo passo anterior!), tome $x := 0$ e perceba que, desta vez, $\cdot_m = R_m$. ■

A rigor, as funções anteriores são regras arbitrárias que descrevem diferentes formas de iterar a função sucessor de $\mathbb{N}$. Porém, uma vez investigadas as propriedades de tais operações, percebe-se que elas agem de acordo com a experiência empírica. Por exemplo:

Proposição 0.0.69. *Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $m + n = n + m$.*

Demonstração. Primeiro, tem-se $0 + n = n + 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$: por definição, $n + 0 = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por outro lado, $0 + 0 = 0$ e, se ocorrer $0 + n = n$, então $0 + \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n) = \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(0 + n) = \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n)$, donde segue, por indução, que $0 + n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, se para $m \in \mathbb{N}$ fixado ocorrer $m + n = n + m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então o mesmo valerá para $\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(m)$... □

Exercício 0.22. Complete a demonstração anterior. ■

[15] Em posse das operações de adição, multiplicação e *potenciação*, definem-se rigorosamente os sistemas de representação numérica posicional. Em particular, o sistema em base 10 permite descrever todos os números naturais a partir dos números fixados acima.

Embora seja edificante investir algum período da vida na verificação rigorosa das propriedades aritméticas a partir das definições anteriores, trata-se de algo mais pertinente a um curso de Aritmética ou de (Introdução a) Teoria dos Números do que a um curso de Análise *na Reta*. Por isso, todo o arcabouçou básico de Aritmética será assumido como conhecido – e, apenas por preciosismo, a verificação de algumas propriedades será sugerida na seção de exercícios adicionais do capítulo. Em particular: $\mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(n) := n + 1$ de agora em diante.

Observação 0.0.70 (Opcional: sobre a *natureza* do Zero)**.** É comum haver certo debate acerca da corretude de se assumir que $0 \in \mathbb{N}$. Embora, como a narrativa da seção buscou salientar, trate-se apenas de um símbolo utilizado para indicar o menor elemento de $\mathbb{N}$, as definições recursivas adotadas para a soma e a multiplicação escondem um *viés* ideológico: *naturalizar* o *vazio* (confira o Exercício 0.73).

Mais precisamente, na próxima seção, em que a noção de *cardinalidade* entre conjuntos arbitrários será, finalmente, apresentada, os elementos de $\mathbb{N}$ serão usados como *parâmetros* de finitude, num procedimento formal que apenas imita a noção de contagem. E é justamente aí que começa o problema: como contar os elementos do vazio?

- ✗ Quem defende "$0 \notin \mathbb{N}$" argumenta que ao *contar* os elementos em $\{a, b, c\}$, escolhe-se o *primeiro*, o *segundo* e, finalmente, o *terceiro*, de modo que ao término do processo se chega ao *número de elementos do conjunto*: 3. Há também quem apele a fatores históricos e etimológicos, já que a "noção do zero" ocorreu de maneira relativamente tardia, justificando assim que não se trate de uma ideia *natural*.

- ✓ Já quem defende "$0 \in \mathbb{N}$" costuma pensar nos números naturais mais como *registradores* do processo de contagem: ao se iniciar a indexação a partir do 0, o *número de elementos do conjunto* será o menor número maior que os índices utilizados na indexação. Assim, por exemplo, como nem se começa a contagem dos elementos do vazio, o conjunto vazio deve ter $\min\{n \in \mathbb{N} : n > x \text{ para todo } x \in \emptyset\} = 0$ elementos (pense a respeito!). Já no caso de $\{a, b, c\}$, tem-se o 0-ésimo elemento, o 1-ésimo elemento e, finalmente, o 2-ésimo elemento, de modo que $\{a, b, c\}$ terá $\min\{n \in \mathbb{N} : n > 0, n > 1 \text{ e } n > 2\} = 3$ elementos.

Certamente, a postura "$0 \notin \mathbb{N}$" tem a vantagem de ser conceitualmente mais simples, talvez por sua proximidade com a experiência empírica. No entanto, ela é tecnicamente limitada: fica relativamente mais custoso descrever, por exemplo, o sistema numérico posicional utilizado corriqueiramente para dar sentido a coisas como "19", essencialmente pela *ausência* de um *neutro* aditivo que *anule* a multiplicação; também ao expressar fórmulas de *cardinalidade*, como $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ para conjuntos finitos A e B, por exemplo, precisa-se excluir os casos que envolvem o conjunto vazio, já que não se define $|\emptyset|$ como um número *digno* de ser operado com os *naturais*.

Porém, acredito que o argumento mais forte em favor de se adotar $0 \in \mathbb{N}$ seja o da *azeitona*[16]. Como o leitor pode verificar por indução, para todo $n \in \mathbb{N}$ (com 0 incluso), existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<n} := \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\}$ e $\mathbb{N}_{<n+1} \setminus \{0\}$, o que na prática significa o que o leitor sempre soube: "contar de 1 até n e gritar n" é equivalente a "contar de 0 até $n - 1$ e gritar n". Em outras palavras: se não quiser a azeitona na pizza, basta tirá-la da sua fatia e, se quiser depois, basta pegá-la de volta! Inclusive, isto será feito com frequência ao longo do texto. $\triangle$

[16] Há outros, relativamente mais abstratos. O leitor interessado pode conferir, por exemplo, o Exercício 0.57 e a Observação 0.2.6 subsequente. A última seção também traz a construção de von Neumann para os ~~ordinais~~ naturais como outro motivo (estético?) para adotar 0 como número natural.

0.1 Ao infinito e além

Independentemente das preferências metodológicas de *contagem* (começar de 0 ou 1), ao dizer que uma certa coleção A de objetos tem, digamos, "5 elementos", expressa-se tacitamente a ideia de que qualquer outra coleção B com "5 elementos" terá a *mesma quantidade de elementos* de A. Trata-se de uma abstração magnífica, provavelmente motivada pelo que hoje chamaríamos de trocas comerciais entre agrupamentos de pessoas nos princípios das civilizações humanas [2]: em vez de apenas comparar as coleções A e B entre si (para a realização de uma troca justa, por exemplo), elas são comparadas à uma terceira coleção (dedos da mão, traços num símbolo socialmente importante, etc.) que tem, por convenção, *cinco* elementos . Assim, embora soe circular, a palavra "*cinco*" representa ou faz referência à *coisa inefável* que é comum a todas as coleções dotadas de exatamente *cinco* elementos[17].

Nesse sentido, é curioso que, justamente ao abandonar os números para determinar se dois conjuntos têm *a mesma quantidade de elementos*, sejamos capazes de tornar a circularidade da "*definição*" anterior bem menos intragável.

Definição 0.1.0. Diremos que dois conjuntos **têm a mesma cardinalidade** ("quantidade de elementos") se existir uma bijeção entre os dois. ¶

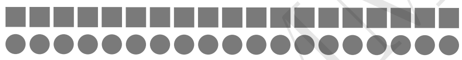


Figura 0.1: É evidente que há tantos círculos quanto quadrados, mesmo sem saber *quantos*.

Proposição 0.1.1. *Sejam A, B e C conjuntos.*

(i) *Existe uma bijeção de A para A.*

(ii) *Se existe uma bijeção de A para B, então existe uma bijeção de B para A.*

(iii) *Se existe uma bijeção de A para B e outra bijeção de B para C, então existe uma bijeção de A para C.*

Demonstração. O primeiro item segue por Id_A ser bijeção, enquanto o terceiro item decorre do fato de que a composição de bijeções é bijeção (Exercício 0.46). O segundo item é o Corolário 0.0.22. □

Intuitivamente, a proposição acima diz que ao fazer

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{existe bijeção } A \to B,$$

define-se uma *relação binária entre conjuntos* que se comporta, essencialmente, como a relação de igualdade: $A \approx A$, $B \approx A$ sempre que $A \approx B$ e $A \approx C$ sempre que $A \approx B$ e $B \approx C$. Esse tipo de coisa tem um nome: ~~gambiarra~~

[17]De um ponto de vista gramatical, é quase como se a palavra "cinco" funcionasse como um adjetivo.

0.1.0 Relações de equivalência

Definição 0.1.2. Uma relação binária $\sim$ num conjunto X é dita uma **relação de equivalência** se $\sim$ for reflexiva, transitiva e, além disso, **simétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in X$, a ocorrência de $x \sim y$ acarretar $y \sim x$. Diremos também que x e y são **$\sim$-equivalentes** sempre que ocorrer $x \sim y$, com a omissão do sufixo "$\sim$" quando a relação estiver clara pelo contexto. ¶

Em certo sentido, uma relação de equivalência $\sim$ estabelece um critério por meio do qual objetos a princípio distintos podem ser vistos como iguais, ao mesmo tempo em que separa outros objetos distintos pelo mesmo critério. Dessa forma, não espanta que a *relação de igualdade* ($x \sim y$ se, e somente se, $x = y$) seja o exemplo óbvio de equivalência.

Exemplo 0.1.3 (Horóscopo)**.** Frequentemente, praticantes da (pseudociência chamada de) `Astrologia` fazem uso implícito das relações de equivalência. De fato, de um ponto de vista informal, signos determinam uma "relação de equivalência" no "conjunto" de todas as pessoas:

✓ toda pessoa tem o mesmo signo que si mesma;

✓ se P tem o mesmo signo de P', então P' tem o mesmo signo de P;

✓ se P tem o mesmo signo de P' e esta tem o mesmo signo de P'', então P e P'' têm o mesmo signo.

Se a coisa parasse por aí, a `Astrologia` seria inofensiva. No entanto, é comum encontrar asserções do tipo "o comportamento X é característico do signo Y", o que sugere duas alternativas: ou a afirmação é falsa, ou *toda pessoa* do signo Y apresenta o comportamento X. Esse tipo de máxima ajuda a entender um dos usos mais comuns das relações de equivalência: a simplificação. Com efeito, se tais afirmações *astrológicas* fossem verdadeiras, então para entender os padrões comportamentais de *toda a humanidade* bastaria estudar os comportamentos de doze *representantes*, um de cada signo, algo bem mais simples do que estimar o comportamento individual dos oito bilhões de habitantes do planeta. Por *sorte*, signos estimam tão somente as datas de nascimento de seus portadores. ▲

Exemplo 0.1.4 (Paridade)**.** Recordemo-nos de que os números naturais podem ser classificados como *pares* ou *ímpares*: **pares** são os múltiplos de dois, **ímpares** são os outros. Isso pode ser usado para determinar uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$: $m, n \in \mathbb{N}$ serão ditos $\sim$-equivalentes se tiverem a mesma *paridade*. Assim, $0, 2, 4, 6, \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, $1, 3, 5, 7 \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, enquanto 0 e 1 não são $\sim$-equivalentes, por exemplo. Agora, há certos comportamentos *algébricos* que não dependem dos números escolhidos, e sim de suas paridades: a soma de *quaisquer* dois *ímpares* é *par*, o produto entre quaisquer *ímpares* é *ímpar*, etc. Isto sugere a possibilidade de realizar operações diretamente com as *classes* dos pares e dos ímpares em vez de lidar com seus infinitos representantes. O leitor interessado encontrará uma discussão mais demorada na seção de exercícios. ▲

Exemplo 0.1.5 (Restos da divisão por n)**.** Para generalizar o exemplo anterior, pode-se considerar a seguinte relação binária: para $n \in \mathbb{N}$ fixado e $x, y \in \mathbb{N}$, escreveremos $x \sim_n y$ a fim de indicar que x e y têm o mesmo *resto* na *divisão* por n. Verificar que tal relação $\sim_n$ é reflexiva, simétrica e transitiva é um bom exercício para quem se lembra de como fazer divisões. Ocorre que, como antes, certos comportamentos algébricos não dependem dos representantes escolhidos: por exemplo, a soma de quaisquer dois números com resto 2 na divisão por 3 terá resto 1, enquanto o produto de quaisquer dois números com resto 1 na divisão por 3 ainda terá resto 1. ▲

Um efeito colateral inevitável das relações de equivalência é a segregação dos elementos do conjunto em *classes de equivalência*[18]. Mais precisamente:

Definição 0.1.6. Para uma relação de equivalência $\sim$ sobre um conjunto X, diremos que o conjunto $\{y : x \sim y\}$ é a **$\sim$-classe de equivalência de** x. ¶

Com *relação* aos exemplos anteriores:

(i) a classe de equivalência de uma pessoa P com respeito aos signos astrológicos seria a coleção de todas as pessoas que têm o mesmo signo de P, consequentemente, existem apenas doze classes de equivalência (correspondentes aos signos possíveis);

(ii) a classe de equivalência de um número $n \in \mathbb{N}$ com respeito à paridade é a coleção dos naturais que têm a mesma paridade de n, logo, existem apenas duas classes, a dos pares e a dos ímpares;

(iii) a classe de equivalência de um número $p \in \mathbb{N}$ com respeito aos restos da divisão por n é a coleção dos números naturais que têm o mesmo resto na divisão, o que leva à conclusão de que existem precisamente n classes de equivalência (correspondentes aos restos possíveis na divisão por n).

Observação 0.1.7. A notação para a classe de equivalência de x varia de acordo com o contexto. Frequentemente, escreve-se $\overline{x}$ para denotá-la. Apesar disso, para a discussão a seguir, pode ser menos traumático escrever C_x em vez de $\overline{x}$. △

Proposição 0.1.8. *Sejam X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Então:*

(i) $X = \bigcup_{x \in X} C_x$*, i.e., para todo* $y \in X$*, existe* $x \in X$ *com* $y \in C_x$*;*

(ii) para quaisquer $x, y \in X$ *ocorre* $C_x = C_y$ *ou* $C_x \cap C_y = \emptyset$*;*

(iii) para quaisquer $x, y \in X$*,* $C_x = C_y$ *se, e somente se,* $x \sim y$*.*

Demonstração. O primeiro item decorre da reflexividade de $\sim$: como $x \sim x$, segue que $x \in C_x$ e, portanto, $X \subseteq \bigcup_{x \in X} C_x$, com a inclusão oposta automática em virtude da definição de cada C_x. Os dois itens seguintes ficam a cargo do leitor (confira o exercício a seguir). □

Exercício 0.23. Sejam $\sim$ uma relação binária em X e $x, y \in X$ elementos quaisquer.

a) Mostre que se $\sim$ é transitiva, então “$x \sim y \Rightarrow C_x \subseteq C_y$”.

[18] Conotações políticas ficam a cargo do leitor.

b) Mostre que se $\sim$ é simétrica e transitiva, então "$x \sim y \Rightarrow C_x = C_y$".

c) Mostre que se $\sim$ é reflexiva, então "$C_x \subseteq C_y \Rightarrow x \sim y$".

d) Conclua que valem as condições (ii) e (iii) da proposição anterior. Dica: para (ii), o que ocorre com C_z se $z \in C_x \cap C_y$? ■

A última proposição mostra que $X/\!\sim\, := \{C_x : x \in X\}$, chamado de **quociente** de X por $\sim$, é uma família de subconjuntos de X que se enquadra como exemplo de *partição.*

Definição 0.1.9. Uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos não-vazios de X é uma **partição** de X se valerem as seguintes condições:

(i) $X = \bigcup \mathcal{P}$; e

(ii) [19] se $P, Q \in \mathcal{P}$ e $P \neq Q$, então $P \cap Q = \emptyset$. ¶

Exercício 0.24. Mostre que se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X, então $X/\!\sim$ é uma partição de X. ■

Como o nome sugere, uma partição de X *particiona* o conjunto X em *partes* ou blocos *dois a dois disjuntos*, de modo que cada elemento de X está precisamente em apenas um membro de $\mathcal{P}$. Assim, faz sentido dizer que dois elementos de X são $\mathcal{P}$*-equivalentes* se pertencerem ao mesmo membro de $\mathcal{P}$. Como o leitor atento certamente suspeita, isto define uma relação de equivalência legítima.

Proposição 0.1.10. *Se $\mathcal{P}$ for uma partição de X, então a relação $\sim_{\mathcal{P}}$ definida por*

$$u \sim_{\mathcal{P}} v \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } \{u, v\} \subseteq P$$

é uma relação de equivalência em X. Além disso, $\mathcal{P} = X/\!\sim_{\mathcal{P}}$.

Demonstração. A relação $\sim_{\mathcal{P}}$ é

✓ reflexiva, pois dado $x \in X$ existe $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$, e daí $\{x\} = \{x, x\} \subseteq P$,

✓ simétrica, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, então $\{x, y\} = \{y, x\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, e

✓ transitiva, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$ e $\{y, z\} \subseteq P' \in \mathcal{P}$, então $P \cap P' \neq \emptyset$, acarretando $P = P'$ e, por conseguinte, $\{x, z\} \subseteq \{x, y\} \cup \{y, z\} \subseteq P \in \mathcal{P}$.

A igualdade $\mathcal{P} = X/\!\sim_{\mathcal{P}}$ segue pois $P = [x]_{\sim_{\mathcal{P}}}$ para quaisquer x e P com $x \in P \in \mathcal{P}$. □

Exemplo 0.1.11. Para a relação $\sim_n$ do Exemplo 0.1.5, as classes de equivalência correspondem precisamente a todos os possíveis restos pela divisão por n. Assim, chamando por R_i a coleção dos naturais que têm resto i na divisão por n, segue que $\mathbb{N}/\!\sim_n \,= \{R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}\}$. Dito isso, observe que ao chamar por $\overline{i}$ a *classe* de equivalência de i, verifica-se $\overline{i} = R_i$. Desse modo, seria lícito escrever, por exemplo, $\mathbb{N}/\!\sim_2 \,= \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}$, ou ainda $\mathbb{N}/\!\sim_2 \,= \left\{\overline{12}, \overline{13}\right\}$, já que $\overline{0} = \overline{12}$ na relação $\sim_2$ (0 e 12 são divisíveis por 2) e $\overline{1} = \overline{13}$ (1 e 13 têm resto 1 na divisão por 2). Como o leitor deve suspeitar, trata-se de um fenômeno mais geral. ▲

Definição 0.1.12. Um subconjunto $R \subseteq X$ é uma **classe de representantes** de uma

[19] Costuma-se expressar a condição (ii) como "os membros de $\mathcal{P}$ são dois a dois disjuntos".

(*i*) relação de equivalência $\sim$ se para todo $x \in X$ existe um único $r \in R$ tal que $x \sim r$,

(*ii*) partição $\mathcal{P}$ de X se R for classe de representantes da relação $\sim_{\mathcal{P}}$, i.e., se para cada $P \in \mathcal{P}$ existe um único $r \in R$ tal que $r \in P$. ¶

Exercício 0.25. Nas condições anteriores, mostre que $X/\!\sim\, = \{C_r : r \in R\}$, onde R é uma classe de representantes de $\sim$. ■

Agora parece um bom momento para uma pergunta ardilosa: quais partições (ou relações de equivalência) sobre *um conjunto* não-vazio admitem classes de representantes? Certamente, se X é tal conjunto e $\mathcal{P}$ é uma de suas partições, então cada $P \in \mathcal{P}$ é um subconjunto não-vazio de X, o que permite *escolher* um desses desses elementos de $x_P \in P$ para então considerar o conjunto $\{x_P : P \in \mathcal{P}\}$. Dado que para $P, P' \in \mathcal{P}$ distintos ocorre $P \cap P' = \emptyset$, deve-se ter $x_P \neq x_{P'}$ sempre que $P \neq P'$. Em outras palavras, $\mathcal{R} := \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$ é uma classe de representantes para $\mathcal{P}$. Se tal argumentação for honesta, significa que provamos o

Teorema 0.1.13 (©)**.** *Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto, então existe uma classe de representantes para $\sim$.*

Exercício 0.26. A argumentação acima foi *honesta*? Se esta for a primeira vez que você se deparou com tal pergunta, pense nela pelo resto do dia. Até amanhã! ■

0.1.1 Cardinalidades: como classes de equivalência

Observação 0.1.14 (Alerta)**.** Ao longo do capítulo, o Princípio da Abstração tem sido utilizado despreocupadamente para justificar todos os conjuntos e *operações* introduzidas, no que se pode chamar de abordagem *ingênua*. No entanto, como veremos na última seção, tal princípio traz consigo alguns problemas graves, o que exigirá substituí-lo por outros axiomas. Apesar disso, na prática, tudo o que se fez anteriormente permanece válido com pouquíssimas alterações, razão pela qual a introdução foi feita de modo *ingênuo*. Com isso dito, a presente subseção introduzirá algumas ideias que, *a posteriori*, exigirão grandes alterações a fim de serem justificadas. O símbolo “†” será usado para demarcá-las. △

Ao combinar as considerações da subseção anterior com a Proposição 0.1.1, parece evidente que “ter a mesma cardinalidade” define uma relação de equivalência entre conjuntos, o que sugere a próxima *definição*.

Definição 0.1.15 (†)**.** Denota-se como $\mathbb{V} := \{x : x = x\}$ o *conjunto de todos os conjuntos*, (provisoriamente) chamado de **conjunto universo**. Agora, para $A, B \in \mathbb{V}$, vamos escrever “$A \approx B$” para indicar que existe bijeção da forma $A \to B$. ¶

Corolário 0.1.16 (da Proposição 0.1.1, †)**.** *A relação binária $\approx$ definida acima é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{V}$.*

Todo esse aparato permite reescrever de modo *preciso* o que se tentou expressar na introdução desta seção (página 43):

Definição 0.1.17 (†)**.** Para um conjunto X, denotaremos por $\#X$ a *classe* de equivalência de X com respeito à relação $\approx$, i.e., $\#X := \{Y : X \approx Y\}$, que será chamada de **cardinalidade** de X. ¶

Dessa forma, $\#X$ *materializa* a propriedade "ter a mesma cardinalidade de X", o que *pode* ser encarado como uma *definição* de *número cardinal* (†). Isto não deve ser confundido com o problema da *representação* dos números: as diferentes maneiras por meio das quais se decide representar, por exemplo, $\#\{a, b, c, d, e\}$, não mudam o fato de que $\#\{a, b, c, d, e\} = \#\{a', b', c', d', e'\}$. Nesse processo de *representação*, a primeira etapa depende da *escolha* de uma *classe* de representantes $\mathcal{R}$ para a relação de equivalência $\approx$, afinal de contas, o símbolo "5" só passa a ter sua *interpretação* usual depois que se convenciona o significado de "ter cinco elementos" (†).

É nesse sentido que os números naturais serão utilizados como representantes canônicos dos números cardinais de conjuntos *finitos*.

Definição 0.1.18. Diremos que um conjunto X é **finito** se para algum $n \in \mathbb{N}$ existir bijeção entre X e $\mathbb{N}_{<n} := \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\}$. Conjuntos *não*-finitos serão xingados de **infinitos**. ¶

Note que pela definição acima, $\emptyset$ é finito, posto que $\mathbb{N}_{<0} = \emptyset$. Também são finitos os conjuntos unitários, i.e., da forma $\{x\}$, por estarem em bijeção com $\mathbb{N}_{<1} = \{0\}$, bem como os conjuntos da forma $\{x, y\}$ com $x \neq y$, por estarem em bijeção com $\mathbb{N}_{<2} = \{0, 1\}$, etc. Como os casos iniciais sugerem, se X é finito, então o número $n \in \mathbb{N}$ na definição de *finitude* é único, precisamente o tipo de comportamento esperado dos representantes de uma relação de equivalência.

Teorema 0.1.19. *Se X é finito, então existe um único $n \in \mathbb{N}$ com $X \approx \mathbb{N}_{<n}$.*

Demonstração. A definição garante a existência do número natural n. Para provar sua unicidade, considere $m, n \in \mathbb{N}$ com $X \approx \mathbb{N}_{<m}$ e $X \approx \mathbb{N}_{<n}$. Como a *relação* $\approx$ é simétrica e transitiva, resulta que $\mathbb{N}_{<m} \approx \mathbb{N}_{<n}$. Logo, basta argumentar pela contrapositiva: vamos supor $m \neq n$ a fim de concluir que não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<m}$ e $\mathbb{N}_{<n}$. Isto encerrará a prova, posto que pela observação inicial, a ocorrência de $X \approx \mathbb{N}_{<m}$ e $X \approx \mathbb{N}_{<n}$ acarretará $m = n$, como desejado.

⌜**Afirmação.** *Se $X \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$, então não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e X.*

Demonstração. O argumento será feito por indução em n, com o caso $n := 0$ imediato (certo?). Supondo a afirmação verdadeira para $n \in \mathbb{N}$ fixado, veremos que a existência de uma bijeção φ entre $\mathbb{N}_{<n+1} = \mathbb{N}_{<n} \cup \{n\}$ e $X \subsetneq \mathbb{N}_{<n+1}$ resultaria numa bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e um subconjunto próprio de $\mathbb{N}_{<n}$, contrariando a *hipótese de indução*[20]:

✓ se $n \notin X$, então $X \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$ e, portanto, a restrição de φ a $\mathbb{N}_{<n}$ seria uma bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e $Y := X \setminus \{\varphi(n)\}$, um subconjunto próprio de $\mathbb{N}_{<n}$;

✓ se $n \in X$, então existe $k \leq n$ com $\varphi(k) = n$, de modo que a função $g\colon \mathbb{N}_{<n} \to X \setminus \{n\}$, que faz $g(i) := \varphi(i)$ para $i \neq k$ e $g(k) := \varphi(n)$ caso $k < n$, é uma bijeção. ⌟

Agora, note que por $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ser uma boa ordem, não há perda de generalidade em supor $m < n$, já que a ordem é total. Daí, $\mathbb{N}_{<m} \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$, o que segue pois $m \in \mathbb{N}_{<n} \setminus \mathbb{N}_{<m}$ (e todo $k < m$ também satisfaz $k < n$, pela transitividade da ordem). Logo, pela afirmação, não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<m}$ e $\mathbb{N}_{<n}$, como queríamos. □

[20] Em outras palavras, trata-se do passo indutivo usual, porém escrito na contrapositiva: "se **não** vale o caso $n + 1$, então também **não** vale o caso n".

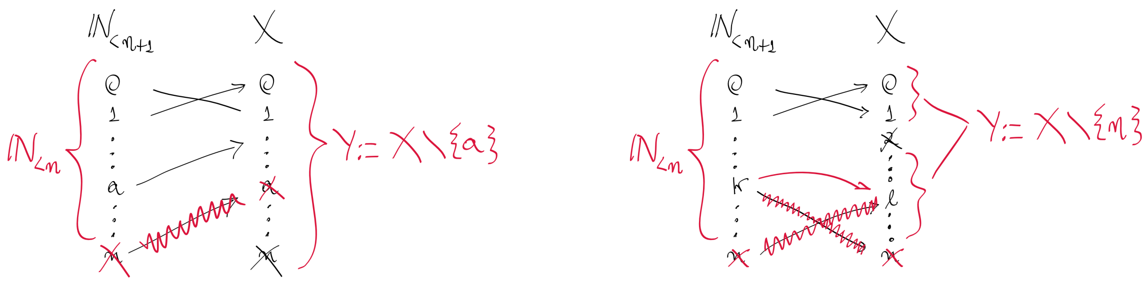


Figura 0.2: A demonstração anterior, em cores.

Definição 0.1.20. Dado um conjunto X finito, indicaremos por “$|X|$” o único número natural em bijeção com X, que será chamado de **número cardinal de** X. ¶

Observação 0.1.21 (Alerta)**.** É comum encontrar obras que utilizam “$\#X$” para indicar o número cardinal de X. Por isso, é importante reforçar: neste texto, “$\#X$” denota a *classe* de todos os conjuntos que têm a mesma cardinalidade de X (†), enquanto “$|X|$” é o seu *número cardinal*, i.e., um representante escolhido em $\#X$. △

Portanto, como prometido, os números naturais cumprem o papel de representantes (das cardinalidades) dos conjuntos finitos, por meio de bijeções que abstraem os processos de contagem. Como efeito colateral, todas as *ferramentas* típicas de $\mathbb{N}$, desde suas operações até as argumentações por indução, ficam disponíveis para analisar questões que envolvam a cardinalidade de conjuntos finitos[21].

Exercício 0.27. Demonstre as seguintes afirmações.

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ ocorre $|\mathbb{N}_{<n}| = n$.

b) Se X é finito e $x \notin X$, então $|X \cup \{x\}| = |X| + 1$.

c) Se $X \subseteq Y$ e Y é finito, então X é finito e $|X| \leq |Y|$. Dica: indução em $|Y|$ + item anterior.

d) Se X e Y são finitos, então $X \cup Y$ é finito e $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$. Dica: indução em $|X|$ + item (b) para o subcaso do passo indutivo em que $X \not\subseteq Y$.

e) Se X e Y são finitos e disjuntos, então $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

f) Se $\mathcal{F}$ é finito e todo $F \in \mathcal{F}$ é finito, então $\bigcup \mathcal{F}$ é finito. Dica: indução em $|\mathcal{F}|$.

g) Se X e Y são finitos, então $X \times Y$ é finito e $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. Dica: $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$.

h) Se X é finito e $f \colon X \to Y$ é uma função, então $\operatorname{im}(f)$ é finito e $|\operatorname{im}(f)| \leq |X|$. Dica: indução em $|X|$.

i) Se $X \times Y$ é finito, então X e Y são finitos.

j) Se X é finito, então $\wp(X)$ é finito e $|\wp(X)| = 2^{|X|}$. Dica: combine o próximo item com o Exercício 0.74.

k) Se X e Y são finitos, então Y^X é finito e $|Y^X| = |Y|^{|X|}$. ■

Além de firmar a posição dos números naturais como os cardinais de conjuntos finitos, a demonstração do último teorema também sugere, sem alarde, um critério para decidir se um conjunto é infinito.

[21] Que por sua vez é uma das formas de introduzir a *Análise Combinatória*.

Corolário 0.1.22 (da demonstração do Teorema 0.1.19)**.** *Se X admite bijeção com um subconjunto próprio $Y \subsetneq X$, então X é infinito.*

Demonstração. Se existisse uma bijeção $\varphi\colon X \to \mathbb{N}_{<n}$ para *algum* $n \in \mathbb{N}$, então existiria uma bijeção entre $\varphi[Y] \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$ e $\mathbb{N}_{<n}$, contrariando a afirmação provada ao longo da demonstração do Teorema 0.1.19. □

Corolário 0.1.23. $\mathbb{N}$ *é infinito.*

Demonstração. A correspondência $n \mapsto n+1$ define uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

A constatação de que existe um conjunto infinito cria um problema *momentâneo* na definição dos números cardinais: como nenhum número natural serve para representar a *cardinalidade* de $\mathbb{N}$, não parece haver uma noção natural de número que mereça ser xingada de "$|\mathbb{N}|$". *Mas isto não deveria ser um problema, já que apenas os conjuntos infinitos ficaram sem cardinais e todos eles têm a mesma cardinalidade, justamente por serem infinitos... certo? Não bastaria fazer $|\mathbb{N}| := \infty$?* A situação não é tão simples.

Teorema 0.1.24 (Cantor)**.** *Dado um conjunto X, não existe sobrejeção $X \to \wp(X)$.*

Demonstração. Para uma função $\varphi\colon X \to \wp(X)$, o conjunto $T := \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$ atesta a não-sobrejetividade de φ: se ocorresse $\varphi(t) = T$ para algum $t \in X$, a definição de T daria "$t \in T \Leftrightarrow t \notin \varphi(t) = T$", uma contradição. Logo, não há sobrejeção $X \to \wp(X)$. □

Exercício 0.28. Mostre que se existe função injetora $\mathbb{N} \to Y$, então Y é infinito. Dica: $\mathbb{N}$ está em bijeção com um subconjunto de Y; o que ocorreria com tal subconjunto se Y fosse finito? ■

Corolário 0.1.25. *Se X é infinito, então $\wp(X)$ é infinito e $X \not\approx \wp(X)$.*

Demonstração. Como a correspondência $x \mapsto \{x\}$ define uma função injetora $X \to \wp(X)$, segue que uma injeção $\mathbb{N} \to X$ induz uma função injetora $\mathbb{N} \to \wp(X)$. O restante segue do Teorema de Cantor. □

Em particular, $\mathbb{N}$ e $\wp(\mathbb{N})$ são conjuntos infinitos que *não* têm a mesma cardinalidade, ou seja: existem cardinalidades infinitas distintas entre si, o que mostra a inefetividade de se escrever "$|X| = \infty$" para representar os números cardinais de conjuntos infinitos[22]. A próxima subseção apresentará um modo simples de contornar o problema, que será retomado na última seção.

0.1.2 Cardinalidades: sem cardinais

Apesar da aparente dificuldade em representar as cardinalidades infinitas, a observação de alguns *fatos* elementares pode ajudar a estabelecer alternativas metodológicas para analisá-las sem apelar explicitamente para números cardinais.

Proposição 0.1.26. *Para conjuntos finitos X e Y, são equivalentes:*

(i) $|X| \leq |Y|$;

(ii) *existe função injetora $X \to Y$;*

(iii) *existe função sobrejetora $Y \to X$.*

[22] Pelo menos se a intenção for fazer tal atribuição com o mínimo de decência.

Demonstração. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|X| := m$ e $|Y| := n$. Se $m \leq n$, então $\mathbb{N}_{<m} \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, de modo que a inclusão $i \colon \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ induz uma injeção $\psi^{-1} \circ i \circ \varphi \colon X \to Y$, onde $\varphi \colon X \to \mathbb{N}_{<m}$ e $\psi \colon Y \to \mathbb{N}_{<n}$ são bijeções existentes por hipótese. Esse truque de compor com bijeções permite supor, sem perda de generalidade, que $X := \mathbb{N}_{<m}$ e $Y := \mathbb{N}_{<n}$, o que será feito nas etapas restantes da demonstração.

Agora, se $f \colon \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ é injetora, então $\mathbb{N}_{<m} \subseteq \mathbb{N}_{<n}$: se tal inclusão não ocorresse, a tricotomia da ordem de $\mathbb{N}$ acarretaria $\mathbb{N}_{<n} \subsetneq \mathbb{N}_{<m}$, o que levaria à conclusão de que $\mathbb{N}_{<m}$ admite bijeção com parte própria – em particular, note que $m \leq n$. Daí, com $\mathbb{N}_{<m} \subseteq \mathbb{N}_{<n}$, não é difícil obter uma função sobrejetora da forma $g \colon \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<m}$.

Por fim, se existe uma função sobrejetora $h \colon \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<m}$, então para cada $c < m$, o subconjunto $h^{-1}[\{c\}] := \{d : h(d) = c\}$ é não-vazio, o que permite *escolher* o número $d_c := \min h^{-1}[\{c\}]$. Secretamente, isto define a injeção $h' \colon \mathbb{N}_{<m} \to \mathbb{N}_{<n}$ que faz $h'(c) := d_c$ para cada $c < m$: se $h'(a) = d_a$ e $h'(b) = d_b$ com $d_a = d_b$, então $a = h(d_a) = h(d_b) = b$. $\square$

Portanto, pelo menos no contexto finito, é lícito usar funções injetoras e sobrejetoras para comparar as *cardinalidades* entre conjuntos. Dado que o cenário infinito *parece* ser desprovido de uma noção apropriada de *número*, o uso de funções se coloca como uma alternativa razoável de generalização.

Definição 0.1.27. Para conjuntos X e Y, vamos fixar as seguintes notações:

(i) "$X \precsim Y$" será usada para indicar a existência de injeção $X \to Y$;

(ii) "$X \prec Y$" será usada para indicar "$X \precsim Y$" e "$X \not\approx Y$";

(iii) "$Y \succsim X$" será usada para indicar a existência de sobrejeção $Y \to X$;

(iv) "$Y \succ X$" será usada para indicar "$Y \succsim X$" e "$X \not\approx Y$". ¶

A ideia da definição acima é generalizar a *ordenação natural* dos números cardinais *finitos* a fim de *ordenar* as *cardinalidades* entre conjuntos quaisquer. Assim, espera-se que $\precsim$ seja uma relação no universo $\mathbb{V}$ capaz de *induzir* uma ordem parcial entre as próprias cardinalidades, com $\prec$ sua versão estrita, enquanto $\succsim$ e $\succ$ são as respectivas inversas (†). A escolha do verbo "induzir" não se deve a excesso de zelo: embora $\precsim$ seja claramente reflexiva e transitiva (certo?!), ela não tem chances de ser antissimétrica!

Exercício 0.29. Exiba conjuntos X e Y tais que $X \precsim Y$, $Y \precsim X$ e $X \neq Y$. Dica: Joãozinho tem duas maçãs, enquanto Maria tem duas laranjas. ■

Desse modo, escrevendo "$\#X \preceq \#Y$" para expressar a ocorrência de $X \precsim Y$, a única forma plausível de antissimetria se dá por meio de algo como "$\#X = \#Y$ sempre que $\#X \preceq \#Y$ e $\#Y \preceq \#X$ (†)" ou, explicitamente:

Teorema 0.1.28 (Cantor-Bernstein)**.** *Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$, então $X \approx Y$, i.e., se existem injeções da forma $X \to Y$ e $Y \to X$, então existe bijeção $X \to Y$.*

Observação 0.1.29. O resultado acima é uma banalidade nas situações em que X e Y são finitos. De fato, pela última proposição, a ocorrência simultânea de $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ acarreta $|X| = |Y|$. Apesar de tal igualdade já garantir a existência de uma bijeção entre X e Y, há um resultado subjacente ainda mais rígido: para qualquer $n \in \mathbb{N}$, uma função $f \colon \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<n}$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Exercício 0.30. Prove a última afirmação. ■

Com isso dito, o ponto que merece destaque é o seguinte: o fenômeno acima deixa de valer no caso de conjuntos infinitos. Observe, por exemplo, que as correspondências $n \mapsto n+1$ e $2n+k \mapsto n$ (para $k \in \{0,1\}$) induzem uma injeção e uma sobrejeção da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, respectivamente, com ambas não bijetivas. $\triangle$

Em vista do que se observou acima, o leitor não deve esperar que a demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein envolva a prova de que as injeções são sobrejetivas: a ideia é *construir* uma "nova" função (bijetora) a partir das injeções dadas. Embora a coisa seja mais simples do que parece, alguns ingredientes preliminares devem ser introduzidos.

Definição 0.1.30. Para um conjunto $\mathcal{S}$, define-se $\bigcap \mathcal{S} := \{x : x \in S \text{ para todo } S \in \mathcal{S}\}$, a **interseção da família** $\mathcal{S}$. Também é comum escrever $\displaystyle\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$ ou, nas ocasiões em que $\mathcal{S} := \{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto $\mathcal{I}$ fixado, $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathcal{I}} S_i$. ¶

O dispositivo acima apenas cria um modo bastante esperto de evitar abominações notacionais como "$S_0 \cap S_1 \cap \ldots$" quando se quer expressar uma interseção (possivelmente) infinita de conjuntos. Fora isso, ela *quase* não traz novidades: note, por exemplo, que para $\mathcal{S} := \{X, Y\}$, tem-se $\bigcap \mathcal{S} = X \cap Y$.

Exercício 0.31 (†)**.** Mostre que $\bigcap \emptyset = \mathbb{V}$. ■

Lema 0.1.31 (Leis de De Morgan)**.** *Sejam X e $\mathcal{Y}$ conjuntos, com $\mathcal{Y} \neq \emptyset$.*

(i) $\displaystyle\bigcap_{B\in\mathcal{Y}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B.$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{B\in\mathcal{Y}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B.$

Demonstração. Se $x \in \bigcap_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus B)$, então para todo $B \in \mathcal{Y}$ tem-se $x \in X \setminus B$, donde segue que $x \in X$ e não existe $B \in \mathcal{Y}$ tal que $x \in B$, i.e., $x \in X$ e $x \notin \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B$, precisamente $x \in X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B$. Pela arbitrariedade do x tomado, segue que $\bigcap_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus B) \subseteq X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{Y}} B$. A recíproca é análoga.

Para provar o segundo item, note que se $x \in \bigcup_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus B)$, então existe $B' \in \mathcal{Y}$ com $x \in X \setminus B'$, i.e., $x \in X$ e $x \notin B'$ para algum $B' \in \mathcal{Y}$, donde se infere que $x \notin \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B$ e, por conseguinte, $x \in X \setminus \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B$. Logo, $\bigcup_{B\in\mathcal{Y}}(X \setminus \mathcal{Y}) \subseteq X \setminus \bigcap_{B\in\mathcal{Y}} B$. Novamente, a recíproca é análoga. □

Exercício 0.32. Para conjuntos A, B e C, mostre que $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ e $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. ■

Lema 0.1.32. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma função e considere famílias $\mathcal{U} \subseteq \wp(X)$ e $\mathcal{V} \subseteq \wp(Y)$. Então:*

(i) $\displaystyle f\left[\bigcup \mathcal{U}\right] = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} f[U]$ *e* $\displaystyle f\left[\bigcap \mathcal{U}\right] \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{U}} f[U]$*, com igualdade garantida no último caso se f for injetora;*

(ii) $\displaystyle f^{-1}\left[\bigcup \mathcal{V}\right] = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}[V]$ *e* $\displaystyle f^{-1}\left[\bigcap \mathcal{V}\right] = \bigcap_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}[V].$

Exercício 0.33. Demonstre o lema anterior. ■

Demonstração do Teorema 0.1.28. Fixadas funções injetoras $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$, vamos obter partições $\{S, S'\}$ e $\{T, T'\}$ de X e Y, respectivamente, tais que $f[S] = T$ e $g[T'] = S'$ pois, se isso for feito, o teorema estará demonstrado (confira o Exercício 0.34). Para obter tal partição, note que qualquer subconjunto $S \subseteq X$ induz tanto uma partição em X quanto uma partição em Y: basta definir $S' := X \setminus S$, $T := f[S]$ e $T' := Y \setminus T$. Isso resolve *metade* do problema, dado que ainda é preciso garantir a identidade $g[T'] = S'$, essencial para definir a bijeção h. Ao se reescrever a igualdade $g[T'] = S'$ em *função* de S, obtém-se a identidade $g[Y \setminus f[S]] = X \setminus S$, equivalentemente exprimível como $S = X \setminus g[Y \setminus f[S]]$. Como obter tal S?

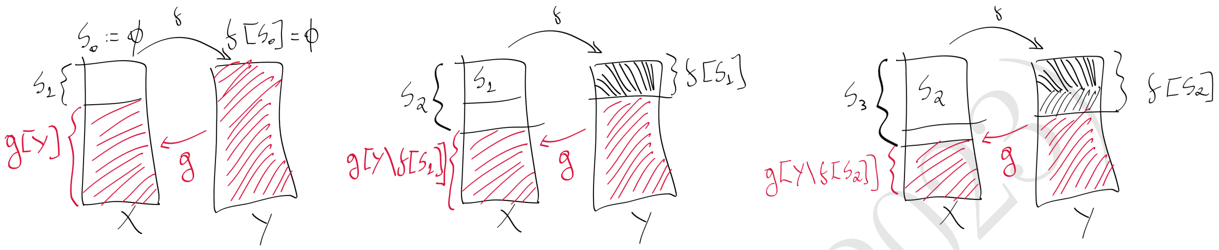


Figura 0.3: Heurística da construção recursiva do conjunto S.

Chamando $S_0 := \emptyset$ e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} := X \setminus g\left[Y \setminus f[S_n]\right], \tag{0.0}$$

o subconjunto $S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ satisfaz a identidade desejada, pois

$$S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus g\left[Y \setminus f[S_n]\right]) = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g\left[Y \setminus f[S_n]\right] \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} X \setminus g\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Y \setminus f[S_n])\right] = X \setminus g\left[Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[S_n]\right] = X \setminus g\left[Y \setminus f\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right]\right] =$$

$$= X \setminus g\left[Y \setminus f\left[S\right]\right],$$

onde a igualdade $(*)$ decorre da injetividade de g (lema anterior), enquanto as outras seguem das leis de De Morgan. □

Exercício 0.34. Mostre que se $F\colon A \to B$ e $G\colon C \to D$ são bijeções com $A \cap C = B \cap D = \emptyset$, então $F \cup G$ é uma bijeção da forma $A \cup C \to B \cup D$. Use isto para obter a bijeção procurada no teorema anterior. Dica: faça $A := S$, $B := f[S]$, $C := T'$ e $D := g[T']$, com $F := f|_S$ e $G := (g|_{T'})^{-1}$. ■

Portanto, a fim de estabelecer a *existência* de uma bijeção entre conjuntos X e Y, basta exibir injeções $X \to Y$ e $Y \to X$, sem a necessidade de explicitar uma bijeção particular. Isto será feito, por exemplo, no próximo capítulo, em que provaremos a *não-enumerabilidade* de $\mathbb{R}$ por meio de uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\wp(\mathbb{N})$, cuja *existência* será garantida por meio de funções injetoras da forma $\mathbb{R} \to \wp(\mathbb{N})$ e $\wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$. Aliás, este é um bom momento para introduzir uma das terminologias mais preguiçosas na História da Matemática.

Definição 0.1.33. Diremos que X é **enumerável** se existir função injetora da forma $X \to \mathbb{N}$. Nas situações em que se puder garantir a existência de bijeção (e isto precisar ser explicitado), X será dito *infinito enumerável*. Por fim, diremos que X é **não-enumerável** se X *não for* enumerável, i.e., se não existir injeção $X \to \mathbb{N}$. ¶

Proposição 0.1.34. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é (infinito!) enumerável.*

Demonstração. A função $n \mapsto \langle 0, n\rangle$ define uma injeção $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por outro lado, como leitores versados em Aritmética devem saber, a correspondência $\langle m, n\rangle \mapsto 2^m 3^n$ define uma função injetora $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Logo, o resultado segue do Teorema de Cantor-Bernstein. □

Os primeiros contatos com esse tipo de resultado costumam ser estranhos, já que parece ser claro que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deveria ter bem mais elementos do que $\mathbb{N}$: com efeito, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{n\}$, i.e., é uma *reunião* enumerável de conjuntos enumeráveis dois a dois disjuntos e, mesmo assim, sua cardinalidade não excede a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Contudo, uma simples ilustração ajuda a tornar a coisa toda mais palatável.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
0 & \langle 0,0\rangle \arrow[r] & \langle 1,0\rangle \arrow[dl] & \langle 2,0\rangle \arrow[d] & \langle 3,0\rangle \arrow[r] & \langle 4,0\rangle \arrow[d] & \\
1 & \langle 0,1\rangle \arrow[r] & \langle 1,1\rangle \arrow[ur] & \langle 2,1\rangle \arrow[dl] & \langle 3,1\rangle \arrow[u] & \langle 4,1\rangle \arrow[dl] & \\
2 & \langle 0,2\rangle \arrow[d] & \langle 1,2\rangle \arrow[l] & \langle 2,2\rangle \arrow[ur] & \langle 3,2\rangle \arrow[dl] & & \\
3 & \langle 0,3\rangle \arrow[r] & \langle 1,3\rangle \arrow[ur] & \langle 2,3\rangle \arrow[dl] & & & \\
4 & \langle 0,4\rangle \arrow[d] & \langle 1,4\rangle \arrow[l] & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Como o diagrama acima sugere, pode-se determinar uma bijeção da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ao *percorrer* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ num zigue-zague maroto. O mesmo tipo de *percurso* também ajuda a perceber que o *conjunto dos números racionais* é infinito enumerável: a única diferença é que precisa-se evitar representações *equivalentes* de um mesmo número racional já *percorrido*, pois sem isso a injetividade se perde. Ou será que não?

Teorema 0.1.35 (©). *Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora se, e somente se, existe uma injeção $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Em particular, $Y \precsim X$ se, e somente se, $X \succsim Y$.*

Demonstração. Se a função g existe como no enunciado, então a sobrejetividade de f segue do Exercício 0.47 (a menos da ordem das letras). A parte delicada é a recíproca: como cozinhar uma função $g : Y \to X$ satisfazendo $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$? Note que a identidade procurada se traduz em pedir $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Na prática, isto significa dizer que $g(y) \in X$ é *algum* elemento de X que é *levado* até y por f.

Certamente, *algum* $x \in X$ satisfaz $f(x) = y$, posto que f é sobrejetora por hipótese, o que garante $P_y := f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$. Ocorre que $\mathcal{P} := \{P_y : y \in Y\}$ é uma partição de X (certo?!), de tal maneira que o *insuspeito* Teorema 0.1.13 assegura uma classe de representantes para $\mathcal{P}$, digamos $\mathcal{R}$. Com isso, basta definir $g(y) := r$, onde r é o único elemento de $\mathcal{R}$ pertencente a $\mathcal{P}_y$, que satisfaz a identidade $f(g(y)) = y$ por *construção.* □

Exercício 0.35. Compare o enunciado do teorema anterior com o Exercício 0.49 e com a argumentação empregada acima com a parte final da demonstração da Proposição 0.1.26 ■

Corolário 0.1.36 (Ⓒ)**.** *Se f é uma função, então* $|\operatorname{im}(f)| \leq |\operatorname{dom}(f)|$.

Corolário 0.1.37 (Ⓒ)**.** *Seja* $\mathcal{X} := \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *uma família de conjuntos enumeráveis. Então* $\bigcup \mathcal{X}$ *é enumerável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\operatorname{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$, das funções sobrejetoras da forma $\mathbb{N} \to X_n$, é não-vazio, o que *permite escolher* uma função $f_n \in \operatorname{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (como na demonstração do Teorema 0.1.13). Com isso, pode-se definir $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ a função que faz $\langle m, n\rangle \mapsto f_m(n)$. Note que se $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, então existe $m \in \mathbb{N}$ com $x \in X_m$, bem como $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(n) = x$, i.e., $f(m, n) = x$. Logo, f é sobrejetora, acarretando $\bigcup \mathcal{X} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. □

Exemplo 0.1.38 (Opcional: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$)**.** Um dos modos de *motivar* a *introdução* dos números inteiros é dar *significado* a expressões como "$5 - 7$", que não têm sentido no contexto natural: tipicamente, uma expressão da forma "$m - n$" em $\mathbb{N}$ corresponde à cardinalidade resultante de um conjunto com m elementos após a exclusão de n elementos; logo, se $m < n$, então não se pode realizar tal procedimento. Todavia, como os Bancos nos ensinam desde tempos imemoriais, é possível registrar "quanto falta": no caso, faz-se "$7 - 5 = 2$", e escreve-se "$5 - 7 = -2$" para indicar a natureza "negativa" do resultado[23].

Para *descrever* o nosso entendimento do que os inteiros *deveriam* ser dentro do cenário formal que se desenrola, pode-se observar o seguinte: embora coisas como "$5 - 7$" e "$3 - 5$" (que deveriam resultar em -2) não tenham significado em $\mathbb{N}$, a *informação* transmitida por tais expressões pode ser *codificada* em $\mathbb{N}$: em vez de escrever $5 - 7 = 3 - 5$, redistribuem-se as parcelas de modo a se obter uma igualdade entre somas positivas, i.e., $5 + 5 = 7 + 3$. Em outras palavras, duas *expressões* $a - b$ e $c - d$ são iguais (no que gostaríamos que fosse $\mathbb{Z}$) se, e somente se, $a + d$ e $b + c$ são iguais em $\mathbb{N}$. Em linguajar técnico:

Exercício 0.36. Sobre $Z := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, considere a relação $\sim$ que declara $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $a + d = b + c$.

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Dica: para a transitividade, use a *lei do cancelamento*, i.e., "$a = b$ sempre que $a + c = b + c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$".

b) Mostre que se $\langle a, b\rangle \sim \langle a', b'\rangle$ e $\langle c, d\rangle \sim \langle c', d'\rangle$, então $\langle a + c, b + d\rangle \sim \langle a' + c', b' + d'\rangle$.

c) Mostre que ao definir $\overline{\langle a, b\rangle} +' \overline{\langle c, d\rangle} := \overline{\langle a + c, b + d\rangle}$, o resultado *independe da escolha de representantes*. Dica: encare o item anterior até que ele te encare de volta[24] ■

Definição 0.1.39. O quociente $Z/{\sim}$ do exercício acima será denotado por $\mathbb{Z}$ e xingado de **conjunto dos números inteiros**. ¶

No caso, a classe de equivalência $\overline{\langle a, b\rangle}$ representa o que gostaríamos de escrever como $a - b$, razão pela qual vamos escrever assim! Desse modo, a *operação* $+'$ definida no exercício anterior apenas estipula

$$(a - b) +' (c - d) := (a + c) - (b + d),$$

tal qual aprendemos na escola.

[23] A aceitação dos números negativos pela comunidade matemática foi relativamente tardia – ainda no Século XIX havia quem encrencasse com eles. O leitor interessado em aspectos históricos pode conferir [20].

[24] Por exemplo: por um lado, $\overline{\langle 1, 2\rangle} +' \overline{\langle 2, 5\rangle} = \overline{\langle 3, 7\rangle}$, enquanto $\overline{\langle 2, 3\rangle} +' \overline{\langle 3, 6\rangle} = \overline{\langle 5, 9\rangle}$ e, de fato, $\overline{\langle 3, 7\rangle} = \overline{\langle 5, 9\rangle}$, já que $3+9 = 7+5$. Elaborar exemplos particulares para entender afirmações aparentemente abstratas é algo que o leitor deve se acostumar a fazer por conta própria.

Exercício 0.37. Verifique as propriedades usuais da soma de números inteiros. ■

O "exercício" acima empurra para debaixo do tapete a verificação de diversas propriedades importantes do conjunto $\mathbb{Z}$ como construído aqui, mas que essencialmente permitem tratá-lo como já estamos acostumados – em particular, o apóstrofo empregado no símbolo de adição já pode ser abandonado. De maneira similar, ao definir

$$(a - b) \cdot' (c - d) := (ac + bd) - (ad + bc),$$

verifica-se que o resultado da expressão acima (a rigor, uma classe de equivalência em $Z/\sim$), não depende da escolha dos representantes das classes, essencialmente como no caso da adição "$+'$". Após verificar que tal operação $\cdot'$ tem o comportamento que se esperaria da multiplicação em $\mathbb{Z}$, a construção de $\mathbb{Q}$ se torna inevitável.

Exercício 0.38. Sobre $Q := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, considere a relação $\sim$ que declara $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$ se, e somente se, $ad = bc$.

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

b) Chamando por $\dfrac{a}{b}$ a classe de equivalência de um par $\langle a, b\rangle$, mostre que $Q/\sim$ se comporta, essencialmente, como o ***conjunto* dos números racionais** que conhecemos na escola, e que passará a ser denotado por $\mathbb{Q}$. Em particular, defina as operações de adição e multiplicação e verifique suas propriedades usuais. ■

Com $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ *formalmente* apresentados ao leitor, já é possível determinar suas *cardinalidades* por meio dos resultados vistos no capítulo (entre outros exercícios elementares propostos no final do capítulo):

(i) como existem funções injetoras $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, resulta que $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z} \precsim \mathbb{Q}$;

(ii) por construção, $\mathbb{Q}$ vem de fábrica com uma sobrejeção da forma $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, mostrando que $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

(iii) em geral, se $A \approx A'$ e $B \approx B'$, então $A \times B \approx A' \times B'$, de modo que por valer $\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, resulta $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(iv) finalmente, $\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{-n, n\}$, com $\{-n, n\} \precsim \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resultando em $\mathbb{Z} \precsim \mathbb{N}$ (logo, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$) e, como acima, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Em suma:

$$\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z} \precsim \mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{N},$$

donde o Teorema de Cantor-Bernstein assegura as clássicas *identidades* $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$, i.e., tanto $\mathbb{Z}$ quanto $\mathbb{Q}$ são enumeráveis. ▲

Num primeiro contato, pode chamar a atenção do leitor que conjuntos infinitos aparentemente tão distintos possam ter a mesma cardinalidade infinita e, mais ainda, que esta cardinalidade seja, precisamente, a dos números naturais. Por um lado, isto se deve ao fato de a *construção* dos conjuntos em questão ter sido feita por meio de métodos que não *aumentam* cardinalidades infinitas (Proposição 0.1.34 e Corolário 0.1.34). Por outro lado, a *menor* cardinalidade infinita é a de $\mathbb{N}$, no seguinte sentido:

Teorema 0.1.40 (Ⓒ)**.** *Se X é infinito, então $\mathbb{N} \precsim X$.*

Demonstração. A ideia é simples: por X ser infinito, não existe $n \in \mathbb{N}$ com uma bijeção $\mathbb{N}_{<n} \to X$; logo, se $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \colon \mathbb{N}_{<n} \to X$ for uma função injetora, então $X \setminus \operatorname{im}(\varphi)$ é não-vazio, o que permite *escolher*, *recursivamente*, sequências finitas *cada vez maiores* de modo a obter uma injeção $\mathbb{N} \to X$. Parece honesto, certo? □

Exercício 0.39. Para um conjunto X, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) o conjunto X é infinito (não existe $n \in \mathbb{N}$ com uma bijeção $\mathbb{N}_{<n} \to X$);

b) existe uma função injetora $\mathbb{N} \to X$;

c) existe uma função bijetora $X \to Y$, com $Y \subsetneq X$. ■

Saber que $\#\mathbb{N}$ é *a menor cardinalidade infinita* (†) sugere a pergunta *natural*: qual é a *próxima* cardinalidade? Certamente, aplicações sucessivas do Teorema de Cantor resultam em diversas cardinalidades não-enumeráveis: $\mathbb{N} \prec \wp(\mathbb{N}) \prec \wp(\wp(\mathbb{N})) \prec \ldots$, o que não responde a pergunta, já que *poderia existir* X com $\mathbb{N} \prec X \prec \wp(\mathbb{N})$, caso em que $\#\wp(\mathbb{N})$ não seria a “*próxima*”[25]. Em todo caso, resta apenas um fato inócuo sobre conjuntos não-enumeráveis para ser apresentado – e, devido à sua simplicidade, a verificação ficará a cargo do leitor.

Exercício 0.40 (Princípio da Casa dos Pombos)**.** Sejam X um conjunto não-enumerável e $A, B \subseteq X$ subconjuntos disjuntos satisfazendo $X = A \cup B$. Mostre que deve ocorrer $\mathbb{N} \prec A$ ou $\mathbb{N} \prec B$, i.e., (pelo menos) um deles deve ser não-enumerável. Dica: suponha que não. ■

0.2 Não era amor, era cilada

As duas seções anteriores completaram o cansativo trabalho de ilustrar (brevemente) os procedimentos por meio dos quais *conjuntos* podem ser utilizados como *Fundamentos* para a Matemática ou, pelo menos, para a Análise Clássica. Exceto pelos elementos de $\mathbb{N}$, cuja *natureza* não se discutiu em virtude de sua introdução pragmática com o Axioma de Dedekind-Peano, todas as coisas foram descritas/construídas a partir de noções conjuntistas, desde pares ordenados até a noção geral de cardinalidade: tudo garantido pelo Princípio da Abstração. Suspiro.

Paradoxo de Russell. O Princípio da Abstração torna lícito considerar o conjunto $R := \{x : x \notin x\}$, cujos elementos são todos aqueles que não pertencem a si próprios. Ocorre que por R ser um conjunto, podemos nos perguntar se $R \in R$ ou $R \notin R$: se valer o primeiro caso, i.e., $R \in R$, então R deve ser um dos objetos do *universo* que não pertencem a si próprios e, portanto, $R \notin R$; se valer o segundo caso, i.e., $R \notin R$, então R é um dos objetos do *universo* que não pertencem a si próprios e, portanto, $R \in R$.

Assim, de um ponto de vista metodológico, não é razoável insistir no Princípio da Abstração da forma como este foi postulado, pois o contrário tornaria todo o empreendimento realizado aqui moralmente indistinguível dos argumentos malandros apresentados no Prólogo – e, se fosse para proceder de tal forma, não faria sentido cogitar uma revisão metodológica. Mas este não é o único problema.

[25] Em particular fica o **alerta**: afirmações do tipo “X e Y são não-enumeráveis” não significam, *a priori*, que X e Y têm a mesma cardinalidade, mas apenas que ambas as cardinalidades são *maiores* do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$; em certo sentido, é tão preciso quanto dizer que dois números são maiores do que zero.

Por mais que tenhamos firmado o *compromisso* de *aceitar* conjuntos infinitos, as ferramentas que temos para compreendê-los são *finitárias*: a vida, os símbolos, o papel, a paciência... são recursos indiscutivelmente finitos, o que leva à exigência (bastante) razoável de que *demonstrações* também devem ser *finitas* em algum sentido. Certamente, dado que textos empregam, invariavelmente, apenas finitos caracteres, a noção de finitude que se espera de uma demonstração não deve ser pensada textualmente, mas *computacionalmente*.

Exemplo 0.2.0 (Fundamental)**.** Para ilustrar, considere a demonstração do Teorema 0.1.40. Secretamente, o argumento *sugere* como definir, recursivamente, uma injeção da forma $\mathbb{N} \to X$ sempre que X for infinito:

✓ por X ser infinito, tem-se $X \neq \emptyset$, o que permite *escolher* $x_0 \in X$;

✓ por X ser infinito, tem-se $X \neq \{x_0\}$, o que permite *escolher* $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$;

✓ por X ser infinito...

Implicitamente, o raciocínio acima descreve um processo de construção *infinitamente arbitrário*: cada novo passo *exige* um `input`, uma escolha *indeterminada* que deve ser feita por quem executa a demonstração. Para ilustrar uma situação que não sofre deste problema, suponha que X seja bem ordenado: neste caso, bastaria definir $x_0 \coloneqq \min X$, $x_1 \coloneqq \min X \setminus \{x_0\}$, *e assim por diante*. Pode parecer a mesma coisa, mas não é: no último caso, o argumento explicita que a escolha deve ser feita por meio da boa ordem nativa de X, tomando-se *o* menor dentre os elementos ainda não escolhidos, o que independe de quem executa a demonstração[26]. ▲

Revelados os problemas, o propósito desta seção é apresentar brevemente (e sem muita pompa) uma das soluções (*aparentes*) mais utilizadas pela comunidade matemática: o sistema de axiomas conhecido como *Zermelo-Fraenkel-Choice*, ou...

0.2.0 ZFC (para os íntimos)

Na tentativa de resolver o primeiro problema da *lista de exercícios* proposta por David Hilbert em 1900, Zermelo *demonstrou*, em 1904, o que ficou conhecido como

Teorema 0.2.1 (da Boa Ordenação)**.** *Todo conjunto admite uma boa ordem.*

Mais precisamente, qualquer *conjunto* X admite pelo menos uma relação binária $\preceq$ que faz de $\langle X, \preceq \rangle$ uma boa ordem[27]. O problema de Hilbert em questão era a *Hipótese do Contínuo*, que consiste em saber se existe (ou não) um conjunto infinito X com $\mathbb{N} \prec X \prec \wp(\mathbb{N})$: no caso, a relação com a noção de boa ordem se dá por um resultado de Cantor que estabelece o conjunto das boas ordens de $\mathbb{N}$ (a menos de *isomorfismo*) como um representante da *primeira cardinalidade* maior do que $\#\mathbb{N}$. No entanto, o que interessa para a presente discussão é o fato de Zermelo ter usado, explicitamente, uma suposição que ele julgou razoável o bastante a ponto de chamar de

[26] Trata-se de uma versão menos divertida da *anedota das meias*, criada por Russell para ilustrar o uso do Axioma da Escolha: numa coleção infinita de pares de meias, a fim de tomar uma meia de cada par, precisa-se escolher arbitrariamente uma meia de cada par (já que meias de um mesmo par costumam ser indistinguíveis); já para uma coleção infinita de pares de sapato, basta escolher o pé esquerdo de cada par.

[27] Tal ordem não tem qualquer tipo de comprometimento com *outras ordens* previamente existentes em X: no caso de $\mathbb{Z}$, por exemplo, poderia ocorrer $3 = \min_{\preceq} \mathbb{Z}$, $-1 = \mathrm{suc}_{\preceq}(3)$, $19 = \mathrm{suc}_{\preceq}(-1)$, etc.

Axioma da Escolha[28]**.** *Para uma família não-vazia $\mathcal{A}$ de conjuntos não-vazios, existe uma função $f\colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

Embora exista quem aponte tal axioma como incompatível com posturas finitárias, pode-se argumentar que foi justamente o comprometimento com tais posturas que levou à percepção de que escolhas infinitas não podem ser realizadas de maneira *construtiva*. Nesse sentido, em vez de banir os resultados que dependem de tais processos, Zermelo propôs aceitar a *existência* de *escolhas completas* sem a limitação de descrevê-las ou construí-las, algo bem mais *honesto*.

Em todo caso, foi com o propósito de rebater as críticas feitas à sua demonstração de 1904 que Zermelo propôs, em 1908, a primeira versão de um sistema de axiomas para teoria dos conjuntos que, além de incluir o Axioma da Escolha como peça fundamental, eliminou o paradoxo de Russell. Mas não sem custo: no lugar do poderoso Princípio da Abstração, deve-se considerar o

Axioma da Separação. *Para toda propriedade $\mathcal{P}$ e todo conjunto A dado, existe o conjunto $\{x \in A : \mathcal{P}(x)\}$.*

Acima, a notação “$\{x \in A : \mathcal{P}(x)\}$” indica o que anteriormente escreveríamos como “$\{x : x \in A$ e $\mathcal{P}(x)\}$”: neste caso, a alteração visa enfatizar que os elementos considerados não são tomados no *universo*, mas apenas no conjunto A previamente dado. Em outras palavras, em vez de supor que qualquer propriedade determina um conjunto de forma irrestrita, exige-se algum conjunto previamente conhecido para servir de substrato para a construção do *subconjunto*. Isto elimina o paradoxo de Russell pelo seguinte motivo: em vez de definir $R := \{x : x \notin x\}$, pode-se apenas tomar $R_A := \{x \in A : x \notin x\}$, para algum conjunto A pré-existente; agora, como no caso original, não pode ocorrer $R_A \in R_A$, já que isto daria $R_A \notin R_A$; porém, desta vez, a ocorrência de $R_A \notin R_A$ não acarreta sua negação, mas sim $R_A \notin A$! Evidentemente, se algum conjunto A fosse tal que $x \in A$ para todo x, retornaríamos ao paradoxo de Russell. Logo, uma consequência indireta do Axioma da Separação é o

Teorema 0.2.2. *Não existe conjunto universo.*

Mais precisamente, o teorema acima estabelece a não existência de um *conjunto* com a propriedade de conter todos os *conjuntos* como elementos. Isto é diferente de dizer que não existe *universo*: em certo sentido, é como afirmar que $\mathbb{N}$ não é um número natural, ou que $\mathbb{Z}$ não é um número inteiro, ou seja, as coisas que entendemos como conjuntos não constituem uma totalidade que possa ser tratada como um dos objetos que entendemos como conjunto.

Ocorre que num cenário regido apenas pelos Axiomas da Extensão, Dedekind-Peano, Separação e Escolha, não há como garantir todas as *construções* realizadas nas seções anteriores, que foram conjuradas por meio do poder criativo do Princípio da Abstração. É por isso que se acrescentam outros axiomas.

Axioma do par: dados a e b, existe $\{a, b\}$.

Axioma da reunião: dada uma família $\mathcal{F}$, existe $\bigcup \mathcal{F}$.

Axioma das partes: dado um conjunto X, existe $\wp(X)$.

[28] A rigor, em 1904, Zermelo tratou a suposição apenas como tal; foi só em 1908 que ele propôs uma axiomatização para a teoria de conjuntos que englobasse sua suposição como um dos axiomas.

Axioma da substituição: se para todo x num conjunto X existe um único p_x *associado* a x de alguma *forma bem determinada*, então existe o conjunto $p[X] := \{p_x : x \in X\}$.

Dos quatro axiomas acima, apenas o último carece de alguma discussão adicional, mas que não chega a ser profunda: essencialmente, trata-se da ideia de que se algum procedimento se comporta como *se fosse* uma função sobre um *domínio* conhecido, então existe um conjunto apto a ser o contradomínio desta (agora sim) função. Por exemplo: ao definir $P_0 := \emptyset$ e $P_{n+1} := \wp(P_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal axioma estabelece a existência da família $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 0.41. Revise o parágrafo final da demonstração apresentada para o Teorema 0.0.65. ■

Exercício 0.42. Convença-se de que os axiomas anteriores permitem definir pares ordenados e produtos cartesianos. Conclua que relações binárias como ordens, relações de equivalência e funções estão salvas. Dica: para $\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ com $a \in X$ e $b \in Y$, note que $\langle a, b\rangle \in \wp(\wp(X \cup Y))$. ■

Observação 0.2.3 (Naturais de von Neumann)**.** Atualmente, também é comum substituir o Axioma de Dedekind-Peano pelo

Axioma do infinito: existe $\mathcal{I}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{I}$ e $x \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ sempre que $x \in \mathcal{I}$.

Embora não se descrevam *todos* os elementos de $\mathcal{I}$, o *caso inicial* "$\emptyset \in \mathcal{I}$" e a validade da *hipótese indutiva* garantem que $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots \in \mathcal{I}$, o que permite fazer $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, etc. Se, por um lado, pode parecer estranho *definir* os números naturais como conjuntos, por outro lado, foram conjuntos definidos (essencialmente) dessa forma que serviram como *modelos* de finitude: note que $\mathbb{N}_{<4} = \{0, 1, 2, 3\}$, enquanto que com a definição apresentada aqui, $4 := \{0, 1, 2, 3\}$. Não me parece algo insuportável, mas cabe ao (senso estético-moral do) leitor decidir o que prefere. De qualquer forma, em tal cenário, $\mathbb{N}$ passa a ser definido como um subconjunto apropriado de $\mathcal{I}$, definido por meio do Axioma da Separação[29]. △

A lista de axiomas para o que se chama, atualmente, de (sistema de axiomas, axiomática, etc.) **Zermelo-Fraenkel-Choice**[30] (abreviado com ZFC) se encerra com o

Axioma da fundação: para todo X existe $x \in X$ com $x \cap X = \emptyset$,

cujas aplicações fogem do escopo deste texto – mas que, grosso modo, ajudam a *estruturar* o *universo* dos conjuntos.

O problema de decidir se tais axiomas capturam ou não alguma noção *transcendental* de *verdade* acerca dos *conjuntos* é algo que não será abordado neste texto, por ser uma discussão bem mais profunda e delicada, o que exige maturidade tanto de quem escreve quanto de quem lê[31]. Quem se incomodar pode assumir a postura pragmática de pensar nos resultados que serão provados ao longo do texto não como revelações matemáticas sobre as leis que regem o *universo*, mas apenas como a análise de afirmações condicionais ("se... então"), o que permite adiar (ou ignorar) debates mais calorosos sobre as noções de "verdade". Diga-se de passagem, esta é a minha postura padrão.

[29] Faz-se $\mathbb{N} := \{x \in \mathcal{I} : x \in J$ para todo J indutivo$\}$, onde J é dito *indutivo* se $\emptyset \in J$ e $x \cup \{x\} \in J$ para todo $x \in J$.

[30] Fraenkel foi um dos muitos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do sistema em seus estágios iniciais, enquanto *Choice* se refere ao Axioma da Escolha. Para mais detalhes históricos acerca do desenvolvimento de ZFC, o leitor pode conferir [9].

[31] O leitor interessado pode conferir o texto de Penelope Maddy [16].

0.2.1 Como corrigir os erros no caminho

Antes de encerrar o capítulo, é importante mencionar como corrigir (quando possível) as considerações feitas de modo (deliberadamente) equivocado ao longo do capítulo.

As ocorrências marcadas com “(†)” são irrecuperáveis, pois elas dependem explicitamente do tratamento do universo como conjunto, o que viola o último teorema. Em particular, só faz sentido definir $\bigcap \mathcal{F}$ para $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Por fim, revela-se como *impossível* tratar a noção de *cardinalidade* rigorosamente como uma classe de equivalência no universo.

Exercício 0.43. Mostre que se $X \neq \emptyset$, então $\#X$ não é um conjunto. Dica: mostre que não pode existir um conjunto Z tal que $Y \in Z$ sempre que Y tiver bijeção com X; para isso, suponha que exista e observe que, daí, $\bigcup Z$ seria o universo. ■

Não obstante, é possível definir *números cardinais* em ZFC: existe um meio *canônico* de determinar conjuntos que codificam todas as *formas imagináveis* de boa ordenação, por meio das quais definem-se os números cardinais, que por sua vez funcionam como gostaríamos, no sentido de se comportarem como se fossem os representantes das cardinalidades (vistas como classes de equivalência). É nesse processo que surgem os clássicos *números cardinais transfinitos* “$\aleph_0$”, “$\aleph_1$”, “$\aleph_2$”,... que descrevem a ordenação das *cardinalidades* infinitas[32]. Em particular, tais considerações *permitem* atribuir a cada conjunto X (finito ou infinito) um desses *objetos*, indicado por $|X|$, que se comporta como o **número cardinal** de X, i.e., para o qual uma igualdade da forma $|X| = |Y|$ ocorre se, e somente se, $X \approx Y$. Por esta razão, as notações introduzidas na Definição 0.1.27 serão abandonadas e substituídas da maneira *natural*: ao encontrar afirmações do tipo “$|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{Q})|$” ou “$|X| < |\wp(X)|$”, por exemplo, o leitor deve entendê-las como abreviações para “$\mathbb{R} \approx \wp(\mathbb{Q})$” e “$X \prec \wp(X)$”, respectivamente.

As ocorrências destacadas com “©”, por sua vez, indicam apenas o uso implícito do Axioma da Escolha, de modo que não constituem erros propriamente ditos, mas apenas pontos de atenção.

- ✓ No Teorema 0.1.13, a classe de representantes se obtém por meio do Axioma da Escolha ao considerar $\mathcal{A}$ como a família das classes de equivalência da relação (ou como a própria partição, a depender do caso), i.e., basta tomar $\mathcal{R} := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$;

- ✓ O Teorema 0.1.35, por sua vez, utilizou o teorema anterior; o Corolário 0.1.36 foi apenas uma consequência.

- ✓ Para o Corolário 0.1.37, o Axioma da Substituição garante a existência da família $\mathcal{B} := \{\operatorname{Sob}(\mathbb{N}, X_n) : n \in \mathbb{N}\}$, enquanto o Axioma da Escolha *assegura* uma função $f \colon \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{B}$ com $f(n) \in \operatorname{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (por quê?).

- ✓ Finalmente, para o Teorema 0.1.40, com $\mathcal{A} := \wp(X) \setminus \{\emptyset\}$, o Axioma da Escolha dá uma função $f \colon \mathcal{A} \to X$ com $f(A) \in A$ para todo A, de modo que ao chamar por $\operatorname{seq}(X)$ a família das funções da forma $\mathbb{N}_{<n} \to X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pode-se definir a função $\mathcal{O} \colon \operatorname{seq}(X) \to X$ que faz $\mathcal{O}(s) := f(X \setminus \operatorname{im}(s))$, que explicitamente *escolhe* um elemento em X não pertencente à imagem da sequência $s \in \operatorname{seq}(X)$. Adaptando-se a ideia da demonstração do Teorema 0.0.65, mostra-se que existe uma (única) função $\psi \colon \mathbb{N} \to X$ tal que $\psi(n) = \mathcal{O}(\langle \psi(m) : m < n \rangle)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que pelo modo com que a função $\mathcal{O}$ foi tomada, deve ser injetora.

[32] O leitor interessado deve procurar pelos chamados *números ordinais* no contexto de ZFC – o que pode ser feito, por exemplo, em [18].

Exercícios adicionais

Exercício 0.44. Mostre que se $\mathcal{F} \neq \emptyset$, então

$$\bigcap \mathcal{F} = \left\{x \in \bigcup \mathcal{F} : \exists F \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in F\right\}.$$

Conclua que seria legítimo *definir* $\bigcap \mathcal{F}$ por meio da identidade acima. ■

Observação 0.2.4. A identidade anterior tem a vantagem de dar sentido a $\bigcap \mathcal{F}$ mesmo nas situações em que $\mathcal{F} = \emptyset$. Porém, ela é incompatível com a implicação

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A},$$

válida sempre que $\mathcal{A} \neq \emptyset$: como $\emptyset \subseteq \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B}$, *seria natural* esperar que $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \emptyset$, o que não é compatível com a proposta do último exercício, que daria $\bigcap \emptyset = \emptyset$. Em certo sentido, isso mostra a artificialidade da definição: para leitores versados em frações, seria como introduzir a notação $\frac{1}{0} := 0$ em $\mathbb{Z}$, apenas para dar sentido a expressões do tipo $\frac{a}{b}$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$; embora tal definição não seja errada por si só, ela não é compatível com as propriedades operatórias das operações usuais de $\mathbb{Q}$. △

Exercício 0.45. Para uma função $h\colon X \to Y$, mostre que $\mathrm{Id}_Y \circ h = h = h \circ \mathrm{Id}_X$. ■

Exercício 0.46. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se g e f são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

b) Mostre que se g e f são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

c) Mostre que se g e f são bijetoras, então $g \circ f$ é bijetora.

d) Determine a inversa de $g \circ f$. ■

Exercício 0.47. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

b) Mostre que se $g \circ f$ é sobre, então g é sobre.

c) Mostre que se $g \circ f$ é bijetora, então f é injetora e g é sobrejetora. ■

Exercício 0.48. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ funções. Mostre que se $g \circ f$ e $f \circ g$ são bijeções, então f e g são bijeções. Adicionalmente, se $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ ou $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, então $g = f^{-1}$. ■

Exercício 0.49. Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre que a função f é injetora se, e somente se, existe uma (sobrejeção) $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. ■

Exercício 0.50. Seja $f\colon X \to Y$ uma função.

a) Mostre que $f[A] \subseteq f[A']$ e $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[B']$ sempre que $A \subseteq A' \subseteq X$ e $B \subseteq B' \subseteq Y$, respectivamente.

b) Mostre que $f[\emptyset] = \emptyset$ e $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

c) Mostre que $f^{-1}[Y] = X$.

d) Para $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ quaisquer, mostre que valem as inclusões $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ e $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$, com as igualdades garantidas se f for injetora (para o primeiro caso) ou sobrejetora (para o segundo caso). ■

Exercício 0.51 (Indução a partir de k)**.** Mostre que se $\mathcal{P}(x)$ for uma propriedade verificada para algum $k \in \mathbb{N}$ e, para todo $m \geq k$ valer que $\mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$, então $\mathcal{P}(n)$ vale para todo $n \geq k$. ■

Exercício 0.52. Mostre que para $m, n \in \mathbb{N}$ ocorre $n^{m+1} = n^m \cdot m$. Dica: proceda por indução em m. ■

Exercício 0.53 (Recursão "paramétrica")**.** Para funções $a \colon P \to X$ e $g \colon \mathbb{N} \times P \times X \to X$ fixadas, mostre que existe uma única função $h \colon \mathbb{N} \times P \to X$ satisfazendo as condições

(i) $h(0, p) = a(p)$ para todo $p \in P$, e

(ii) $h(n+1, p) = g(n, p, h(n, p))$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $p \in P$.

Dica: para cada $p \in P$, obtenha $h_p \colon \mathbb{N} \to X$ adequada; daí defina $H \colon P \to X^{\mathbb{N}}$ da maneira *óbvia* e a utilize para cozinhar a função h desejada. ■

Exercício 0.54. Sejam $\langle \mathbb{S}, \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ ordens parciais. Uma função $f \colon \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ é:

(i) **crescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \leq f(s')$;

(ii) **decrescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \geq f(s')$;

(iii) **monótona** se f for crescente ou decrescente.

Sabendo disso, suponha que a ordem de $\mathbb{S}$ seja total.

a) Mostre que se f é crescente e $f(s) < f(s')$, então $s < s'$.

b) Mostre que se f é decrescente e $f(s) < f(s')$, então $s > s'$.

c) Conclua que se f for monótona e bijetora, então a inversa $f^{-1} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{S}$ também será monótona[33]. ■

Observação 0.2.5. Uma função crescente e injetora satisfaz a implicação *estrita*

$$s < s' \Rightarrow f(s) < f(s'),$$

já que deve ocorrer $f(s) \leq f(s')$, enquanto a injetividade proíbe $f(s) = f(s')$. Uma função em tal condição será chamada de **estritamente crescente**. A definição para funções **estritamente decrescentes** é análoga[34]. △

Exercício 0.55. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial, $A \subseteq \mathbb{P}$ e $a \in \mathbb{P}$.

a) Mostre que $a = \min_{\leq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ se, e somente se, $a = \max_{\geq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$.

b) Mostre que A é limitado inferiormente em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ se, e somente se, A é limitado superiormente em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$.

c) Mostre que $a = \inf_{\leq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ se, e somente se, $a = \sup_{\geq} A$ em $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$. ■

Exercício 0.56. Mostre que se $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é uma boa ordem, então $\langle \mathbb{B}, \leq \rangle$ é ordem total. Dica: se $x, y \in \mathbb{B}$, então $\{x, y\}$ é subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$. ■

[33] Na verdade, f é crescente/decrescente se, e somente se, f^{-1} é crescente/decrescente.

[34] A literatura também costuma xingar de *não-decrescente* as coisas que aqui foram chamadas de *crescentes*. Em tais textos, o adjetivo *crescente* se reserva para as situações de desigualdade estrita. Um comentário análogo é válido para funções *não-crescentes*.

Exercício 0.57. Numa ordem $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, mostre que $\mathbb{P}$ tem máximo se, e somente se, existe $\inf \emptyset$, com $\max \mathbb{P} = \inf \emptyset$. ■

Observação 0.2.6. O último exercício pode ajudar na *motivação* dos números (*ordinais*) *infinitos*, pelo menos quando se utiliza a metodologia de contagem de quem adota $0 \in \mathbb{N}$ (como na Observação 0.0.70). Por exemplo, para *contar* a quantidade de elementos de $\mathbb{N}$, o processo de indexação de $\mathbb{N}$ necessário esgotaria $\mathbb{N}$, de modo que nos veríamos forçados a tomar o menor elemento do conjunto vazio, que nem mesmo tem elementos. Porém, se *aceitássemos* o ínfimo, chegaríamos à conclusão de que $\mathbb{N}$ deveria ter $\inf \emptyset$ elementos!

Embora $\inf \emptyset$ também não exista em $\mathbb{N}$, o exercício anterior sugere que poderíamos acrescentar um *novo* elemento *acima* dos naturais (um *último elemento*), não para ser usado na indexação, mas apenas para registrar a contagem, i.e., a indexação já realizada! Esta é justamente a ideia que subjaz a definição do *ordinal* ω. △

Exercício 0.58. Mostre que se $|A| = |B|$, então $|\wp(A)| = |\wp(B)|$. ■

Exercício 0.59. Sejam A, B, C e D conjuntos com $|A| \leq |C|$ e $|B| \leq |D|$. Mostre que $|A^B| \leq |C^D|$. ■

Exercício 0.60. Mostre que se $|A| = |C|$ e $|B| = |D|$, então $|A^B| = |C^D|$. ■

Observação 0.2.7. Note que o exercício anterior justifica definir potenciação entre cardinalidades/números cardinais: $|X|^{|Y|} := |X^Y|$. △

Observação 0.2.8. Independentemente do que será discutido nos próximos capítulos a cerca das chamadas *indeterminações*, a definição acima obriga que se tenha $0^0 = 1$, o que está de acordo com o fato de que existe uma única função da forma $\emptyset \to \emptyset$. △

Exercício 0.61. Mostre que se $f : X \to Y$ é sobrejetora, então $|Y| \leq |X|$. ■

Exercício 0.62. Pense rápido: se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função sobrejetora, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}[\{n\}]$ é finito? ■

Exercício 0.63. Seja $f : X \to Y$ uma função.

a) Mostre que $|\operatorname{im}(f)| \leq |X|$.

b) Mostre que $\mathcal{P} := \{f^{-1}[\{y\}] : y \in \operatorname{im}(f)\}$ é uma partição de X. ■

Exercício 0.64. Seja $f : X \to Y$ uma função, com Y enumerável e X não-enumerável. Mostre que existe $y \in Y$ tal que $X' := \{x \in X : f(x) = y\}$ é não-enumerável. ■

Exercício 0.65. Seja $\psi : X \to Y$ uma função bijetora. Mostre que se $\mathcal{P}$ é uma partição de X, então $\psi(\mathcal{P}) := \{\psi[P] : P \in \mathcal{P}\}$ é uma partição de Y. Em particular, tem-se $|\mathcal{P}| = |\psi(\mathcal{P})|$. ■

Exercício 0.66. Seja X um conjunto infinito enumerável. Chame por $\mathcal{F}_X$ a família de todos os subconjuntos **finitos** de X, i.e., $\mathcal{F}_X := \{F \subseteq X : F \text{ é finito}\}$. Mostre que $|\mathcal{F}_X| = |X|$. Dica: pode ser útil mostrar, primeiro, que $|\operatorname{seq}(X)| = |X|$. ■

Exercício 0.67. Assuma o seguinte: se X é infinito, então $|X| = |X \times X|$. Com tal suposição, mostre que o resultado do exercício anterior permanece válido para qualquer X infinito (enumerável ou não). ■

Observação 0.2.9. Sempre que for preciso, o leitor tem o direito de assumir a hipótese do exercício anterior, i.e., que $|X| = |X \times X|$ se X for infinito. Tal liberdade se deve ao fato de tal afirmação ser *equivalente* ao Axioma da Escolha. △

Exercício 0.68. Mostre que existe uma partição $\mathcal{P} := \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ com cada P_n infinito. Enuncie e demonstre uma generalização adequada para X infinito qualquer. Dica: considere a função $\pi_0 \colon X \times X \to X$ que faz $\pi(x, y) := x$ para cada par $\langle x, y\rangle \in X \times X$. ■

Observação 0.2.10. A função π_0 acima é frequentemente chamada de **projeção**. O leitor deve estar preparado para mudanças *arbitrárias* de nomes de acordo com o contexto. Analogamente, a função $\pi_1 \colon X \times X \to X$ que faz $\pi_1(x, y) := y$, também é chamada de projeção. Não é difícil perceber que projeções podem ser definidas, mais geralmente, para produtos cartesianos da forma $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. △

Exercício 0.69 (Veja a Observação 0.2.7)**.** Para conjuntos X, Y e Z *quaisquer*, mostre que $\left(|X|^{|Y|}\right)^{|Z|} = |X|^{|Y|\cdot|Z|}$. Dica: exiba uma bijeção entre $(X^Y)^Z$ e $X^{Y\times Z}$. ■

Exercício 0.70. Se você fez o exercício acima apenas para os casos em que X, Y e Z são finitos, volte e faça de novo, para **conjuntos quaisquer**: a hipótese de finitude é irrelevante para a solução do exercício. ■

Observação 0.2.11. De modo geral, só assuma que os conjuntos são finitos quando isso for explicitamente indicado. △

Exercício 0.71. Para X fixado, sejam $\mathrm{Eqv}(X) := \{R \subseteq X \times X : R$ é rel. de equivalência$\}$ e $\mathrm{Part}(X) := \{\mathcal{P} \subseteq \wp(X) : \mathcal{P}$ é partição de $X\}$. Mostre que as *regras* $R \mapsto X/R$ e $\mathcal{P} \mapsto \sim_{\mathcal{P}}$ definem funções da forma $\mathrm{Eqv}(X) \to \mathrm{Part}(X)$ e $\mathrm{Part}(X) \to \mathrm{Eqv}(X)$, respectivamente, que são inversas uma da outra. ■

Exercício 0.72. Seja $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ uma ordem parcial. Dizemos que um subconjunto $I \subseteq \mathbb{P}$ é um **intervalo** se para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{P}$ valer que $c \in I$ sempre que $a \leq c \leq b$ com $a, b \in I$. Seja então $\mathcal{I}$ uma família não-vazia de intervalos de $\mathbb{P}$. Mostre que $\bigcap \mathcal{I}$ é um intervalo de $\mathbb{P}$. ■

Exercício 0.73. Suponha que você tenha que dar um curso de Análise em que $0 \notin \mathbb{N}$. Como definir, recursivamente, as operações de soma e multiplicação em $\mathbb{N}$? ■

Exercício 0.74. Para um conjunto X qualquer (possivelmente infinito!), exiba uma bijeção entre $\wp(X)$ e $\{0, 1\}^X$. Dica: para um subconjunto $A \subseteq X$, associe uma função "óbvia" da forma $X \to \{0, 1\}$; para facilitar, comece com X finito para daí generalizar. ■

Exercício 0.75. Mostre que $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. Dica: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \wp(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. ■

Capítulo 1

Álgebra e ordem

In real life, I assure you, there is no such thing as algebra.

Frase geralmente atribuída a Fran Lebowitz[0].

Neste capítulo, usaremos os ferramentais discutidos anteriormente a fim de *descrever* a reta real como um objeto simultaneamente *algébrico* e *ordenado*: explicitamente, definiremos a reta como (*um*) *corpo ordenado completo*. Para isso, a primeira seção tratará brevemente da parte *algébrica* de tais objetos (*corpo*), a segunda seção discutirá o significado da *ordenação completa* e, finalmente, a terceira seção mostrará a *razoabilidade* da definição *intencional* da reta. Mais precisamente, veremos que a definição é *honesta*, no sentido de que quaisquer dois corpos ordenados completos são *indistinguíveis*.

1.0 Um nanocurso de Álgebra

Fixado um conjunto X, uma função $*\colon X \times X \to X$ é chamada de **operação binária** em X. Porém, como não trataremos explicitamente de outras *aridades*, não há risco em chamar $*$ simplesmente de operação. Para $x, y \in X$, costuma-se escrever $x * y$ em vez de $*(x, y)$, em alusão às notações já bem estabelecidas para *adição* e *multiplicação*.

Naturalmente, a definição da operação $*$ determina o que é $x * y$ em X. Independentemente disso, como $x * y \in X$, é legítimo operar tal elemento com algum $z \in X$, situação em que se escreve $(x * y) * z$. Os parênteses são necessários pois, a princípio, poderia ocorrer $(x * y) * z \neq x * (y * z)$, entre outros comportamentos *indesejados*.

Exemplo 1.0.0. Seja $\star\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a operação dada pela regra $m \star n := m^n$, em que m^n indica a *potência* de m por n, que o leitor já deve conhecer em suas andanças por Aritmética. Observe que $(2 \star 1) \star 2 := (2^1 \star 2) := 2^2 = 4$, enquanto $2 \star (1 \star 2) := 2 \star 1^2 := 2^1 = 2$. Também é fácil ver que, em geral, não vale $m \star n = n \star m$. Finalmente, embora $m \star 1 = m$ ocorra para todo $m \in \mathbb{N}$, não há $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $e \star m = m$. ▲

1.0.0 Um pouco da fauna algébrica

Operações e conjuntos munidos de operações, bem como elementos desses conjuntos, recebem terminologias especiais a depender de condições adicionais satisfeitas por eles. Embora os protagonistas desta seção sejam objetos chamados de *corpos*, convém definir certos tipos de *estruturas* que compõem a definição principal.

[0] Na vida real, eu te garanto, não há existe essa tal de Álgebra (tradução livre).

Definição 1.0.1. Seja $*\colon X \times X \to X$ uma operação num conjunto X.

(i) Diremos que a operação $*$ é **associativa** se para quaisquer $x, y, z \in X$ ocorrer $(x * y) * z = x * (y * z)$, o que na prática significa que pode-se escrever $x * y * z$ em vez de $(x * y) * z$ ou $x * (y * z)$.

(ii) Diremos que a operação $*$ é **comutativa** se para quaisquer $x, y \in X$ valer a identidade $x * y = y * x$.

(iii) Diremos que $e \in X$ é **elemento neutro**[1] da operação $*$ se para qualquer $x \in X$ ocorrer $e * x = x = x * e$. ¶

Como muitos leitores já devem saber, um elemento neutro de uma operação $*$, caso exista, é único, o que permite o uso da expressão "o elemento neutro" da operação. Para aquecer os motores, convém destacar isso.

Lema 1.0.2. *Uma operação admite, no máximo, um único elemento neutro.*

Demonstração. Se $e, e' \in X$ são ambos elementos neutros da operação, então $e = e * e'$ por e' ser elemento neutro, enquanto $e * e' = e'$ por e ser elemento neutro. □

Definição 1.0.3. Diremos que $y \in X$ é um **$*$-inverso à direita** de x se valer $x * y = e$. Analogamente, y será dito um **$*$-inverso à esquerda** de x se ocorrer $y * x = e$. Se y for simultaneamente $*$-inverso à direita e à esquerda de x, diremos simplesmente que y é um **$*$-inverso**[2] de x. ¶

Observação 1.0.4. Naturalmente, o *prefixo* "$*$-" nas definições acima será abandonado sempre que o contexto permitir. △

Dito isso, se $*$ for uma operação associativa dotada de um elemento neutro e, então um $*$-inverso de x, caso exista, é único.

Lema 1.0.5. *Sejam X um conjunto e $*$ uma operação em X. Se $*$ é associativa e tem elemento neutro, então cada $x \in X$ admite, no máximo, um $*$-inverso.*

Demonstração. Sejam $y, y' \in X$ $*$-inversos de x. Então

$$y = y * e = y * (x * y') = (y * x) * y' = e * y' = y',$$

pois y' é $*$-inverso (à esquerda) de x e y é $*$inverso (à direita) de x. □

Colecionadores de terminologias já podem acrescentar diversas figurinhas ao álbum:

- um **semigrupo** é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa;
- um **monóide** é um semigrupo com elemento neutro;
- um **grupo** é um monóide em que todo elemento tem um inverso;
- finalmente, um **grupo abeliano** é um grupo cuja operação é comutativa.

[1]Também chamado de **zero** ou **unidade** a depender do contexto.
[2]Ou oposto, simétrico, etc. Tudo depende do contexto.

Frequentemente, quando se busca algum tipo de precisão linguística exagerada, escreve-se algo como $\langle G; * \rangle$ para indicar que $*$ é uma operação em G, de modo que afirmações do tipo "$\langle G; * \rangle$ *é um semigrupo*" abreviam a tediosa frase "$*\colon G \times G \to G$ é uma operação que faz de G um semigrupo". Além disso, é lícito escrever $\langle G; *; e \rangle$ para destacar, caso exista, o elemento neutro $e \in G$ da operação. Na maior parte dos casos, porém, diremos apenas coisas como "G é um monóide" ou "G é um grupo abeliano", pois o tempo é curto e o contexto, quase sempre, é claro.

Exemplo 1.0.6 (Grupos simétricos)**.** Fixado um conjunto Z, pode-se considerar a família Z^Z de todas as funções da forma $Z \to Z$. Como a composição de duas funções em Z^Z resulta numa função em Z^Z, segue que a composição $\circ$ define uma operação em Z^Z. A associatividade de $\circ$, então, traduz a afirmação "Z^Z é um semigrupo", enquanto a função identidade Id_Z promove tal objeto ao patamar de monóide: na terminologia pomposa estabelecida acima, $\left\langle Z^Z; \circ; \mathrm{Id}_Z \right\rangle$ é um monóide. Não se pode afirmar, porém, que Z^Z seja um grupo com tal operação, já que as únicas funções de $Z \to Z$ que admitem inversas são (precisamente) as bijeções.

Dessa observação, segue que $\mathbb{S}(Z) := \left\{ f \in Z^Z : f \text{ é bijeção} \right\}$ é um grupo (com a operação $\circ$), chamado de **grupo simétrico** de $|Z|$ elementos. ▲

Exemplo 1.0.7. As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ constituem exemplos elementares das estruturas definidas acima, embora isso não tenha sido sempre óbvio[3].

- ✓ $\langle \mathbb{N}; +; 0 \rangle$ é um monóide comutativo, mas não é um grupo: não há, por exemplo, $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n + 1 = 0$.
- ✓ $\langle \mathbb{Z}; +; 0 \rangle$ e $\langle \mathbb{Q}; +; 0 \rangle$ são grupos abelianos.
- ✓ $\langle \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \cdot; 1 \rangle$ é um monóide comutativo, mas não é um grupo.
- ✓ $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot; 1 \rangle$ é um grupo abeliano.

Naturalmente, tais proposições só podem ser justificadas rigorosamente num cenário em que se tenha uma *construção* ou, pelo menos, uma definição explícita dos conjuntos e operações envolvidos. O leitor interessado pode conferir o Exemplo 0.1.38. ▲

Observação 1.0.8 (Contexto e notação)**.** Praticamente todas as operações elementares consideradas ao longo do texto serão comutativas – a exceção mais marcante é a composição de funções, que em geral não será considerada do ponto de vista estrutural. Apesar disso, no contexto que se aproxima, teremos que lidar com duas operações simultaneamente, que serão denotadas pelos símbolos $+$ e $\cdot$.

Em ambos os casos, as operações serão associativas, comutativas e dotadas de elemento neutro. No caso da operação $+$, o elemento neutro será denotado por 0, e o inverso de um elemento x, único em virtude do Lema 1.0.5, será denotado por $-x$ e chamado de **inverso aditivo** ou **simétrico**. Para a operação $\cdot$, o elemento neutro será denotado por 1, e o inverso de um elemento x, se existir, será denotado por x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$, caso em que x será dito **invertível**[4]. △

[3]Historicamente, grupos de permutações foram os primeiros a dar as caras, entre as últimas décadas do século XVIII e as primeiras décadas do século XIX. Depois do aparecimento dessas estruturas, *percebeu-se* que entidades cotidianas compostas *números* também constituíam *modelos* de grupos [11].

[4]O verbo é "inverter" e não "inverser".

Proposição 1.0.9. *Sejam* $\langle G; \cdot; 1\rangle$ *um monóide e* $x \in G$. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *defina* $x^n \in G$ *recursivamente, fazendo* $x^0 := 1$ *e* $x^{n+1} := x^n \cdot x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* x *admitir inverso, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *com* $n > 0$ *defina ainda* $x^{-n} := (x^{-1})^n$. *Então, vale o seguinte:*

(*i*) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$;

(*ii*) $x^{mn} = (x^m)^n$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$;

(*iii*) *se* x *admite inverso, então as identidades anteriores valem para* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. O argumento é indutivo e depende das *estruturas* de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Por exemplo: para $m \in \mathbb{N}$ fixado, tem-se:

✓ $x^{m+0} = x^m = x^m \cdot 1 = x^m \cdot x^0$;

✓ se $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então

$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} := x^{(m+n)} \cdot x = (x^m \cdot x^n) \cdot x = x^m \cdot (x^n \cdot x) := x^m \cdot x^{n+1},$$

donde a validade do primeiro item segue por indução.

Para o segundo item, o pulo do gato é notar que

$$x^{m(n+1)} = x^{mn+m} = x^{mn} \cdot x^m = (x^m)^n \cdot x^m := (x^m)^{n+1}.$$

A parte final segue, dentre outras coisas, de se observar que $x^{-n} = (x^n)^{-1}$. O leitor interessado pode cuidar dos detalhes. □

Exercício 1.0. Complete a demonstração da proposição anterior. Dica: além do que já foi mencionado, pode ser útil observar que $x^{n+1} = x \cdot x^n$. ■

Observação 1.0.10. Será cada vez mais comum utilizar o mesmo símbolo com significados que variam de acordo com o contexto. Na proposição anterior, por exemplo, o símbolo "1" em "$\langle G; \cdot; 1\rangle$" denota o elemento neutro da operação "$\cdot$" de G. Já em "$x^{n+1} := x^n \cdot x$", o expoente "$n + 1$" indica o sucessor de n em $\mathbb{N}$. Esta é a chamada *notação multiplicativa*, em que o *histórico* das iterações é registrado no expoente.

Alternativamente, quando a operação de G é denotada com o símbolo "+", seu elemento neutro é indicado por "0" (caso exista), enquanto o *histórico das iterações* é registrado à esquerda, como explicitado no próximo corolário – esta é a chamada *notação aditiva*. Note que, a seguir, o símbolo "0" em "$0x := 0$" também assume *dupla função*. △

Corolário 1.0.11. *Sejam* $\langle G; +; 0\rangle$ *um grupo e* $x \in G$. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *defina* $nx \in G$ *recursivamente, fazendo* $0x := 0$ *e* $(n + 1)x := nx + x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.*Além disso, defina* $(-n)x := n(-x)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Então para quaisquer* $m, n \in \mathbb{Z}$ *valem as identidades* $(m + n)x = mx + nx$ *e* $m(nx) = (mn)x$.

Definição 1.0.12. Um **anel** consiste de um conjunto $A \neq \emptyset$ munido de duas operações, $+$ e $\cdot$, e elementos $0, 1 \in A$, onde

(i) $\langle A; +; 0\rangle$ é um grupo abeliano, cuja operação $+$ é chamada de *adição*,

(ii) $\langle A; \cdot; 1\rangle$ é um monóide comutativo, cuja operação é chamada de *multiplicação*, e

(iii) as operações $+$ e $\cdot$ *comutam* entre si, i.e., para quaisquer $a, b, c \in A$ valem as identidades $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$. ¶

É comum denotar o anel A como a *estrutura algébrica* $\langle A; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$. No entanto, quase sempre iremos nos referir simplesmente *ao anel* A, deixando as operações subentendidas no contexto.

Observação 1.0.13. A rigor, os anéis definidos acima deveriam ser chamados de *anéis comutativos com unidade*, dado que existem contextos que não exigem a comutatividade da multiplicação e tampouco a existência de elemento neutro (a unidade). △

Exemplo 1.0.14. Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são anéis quando munidos das operações usuais, enquanto $\mathbb{N}$ não é anel, posto que a adição não define uma estrutura de grupo. ▲

Exercício 1.1 (Opcional: um anel não-numérico)**.** Seja X um conjunto.

a) Mostre que $\langle \wp(X); \cup; \emptyset\rangle$ e $\langle \wp(X); \cap; X\rangle$ são monoides comutativos.

b) Responda rápido: $\langle \wp(X); \cup, \cap; \emptyset, X\rangle$ é um anel?

c) Mostre que $\langle \wp(X); \Delta, \cap; \emptyset, X\rangle$ é um anel, onde Δ é a operação que a cada par de subconjuntos $A, B \subseteq X$ associa o conjunto

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

chamado de **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B.

d) Quem é o oposto aditivo (i.e., Δ-inverso) de $A \in \wp(X)$ no último anel? ■

Exemplo 1.0.15. Se X é um conjunto e A é um anel, então o conjunto A^X das funções da forma $X \to A$ tem uma estrutura natural de anel com as operações herdadas de A em cada coordenada. Mais precisamente, para $f, g \in A^X$, definem-se $f + g, f \cdot g \in A^X$ por

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

para cada $x \in X$. ▲

Muitas propriedades operatórias com as quais estamos acostumados no cenário aritmético ainda são válidas no contexto de anéis[5].

Proposição 1.0.16. *Sejam A um anel e $a \in A$ um elemento qualquer. Então valem as seguintes identidades:*

(i) $0 \cdot a = 0$*;*

(ii) $-a = (-1) \cdot a$.

Demonstração. Tais identidades relacionando as operações $+$ e $\cdot$ decorrem diretamente da distributividade exigida na definição de anel. De fato,

$$a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = (a\cdot 0)+(a\cdot 0) \Rightarrow 0 = (a\cdot 0)+(-(a\cdot 0)) = (a\cdot 0)+(a\cdot 0)+(-(a\cdot 0)) = a\cdot 0,$$

ao passo que

$$a + ((-1)\cdot a) = (1 + (-1))\cdot a = 0 \cdot a = 0,$$

donde a igualdade $(-1)\cdot a = -a$ segue da unicidade do *oposto aditivo* de a. □

[5]E aqui cabe uma ressalva, possivelmente óbvia para alguns leitores, mas que ainda assim merece ser feita. O comportamento que se observa nos números do "dia a dia" não é decorrências dos axiomas utilizados para *formalizá-los*, pelo contrário: os axiomas postulados para formalizar os números são "bons" justamente por reproduzirem os *comportamentos* observados.

Observação 1.0.17. Em particular, como o inverso de $-a$ é a, segue que

$$(-1)\cdot(-a) = -(-a) = a,$$

identidade que será utilizada daqui em diante sem menções especiais. $\triangle$

Ao longo do texto, usaremos simultaneamente a Proposição 1.0.9 e o Corolário 1.0.11: a primeira com respeito à multiplicação do anel, e o segundo com respeito à adição do anel. Assim, se A é um anel, $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$, então ma^n indica o que, intuitivamente, seria escrito como

$$\underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ vezes}} + \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ vezes}} + \ldots + \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ vezes}}}_{m \text{ vezes}},$$

com uma interpretação análoga para $m \in \mathbb{Z}$ e, se a for invertível, para $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.0.18. Daqui em diante, como de costume, "ab" também será usado para denotar "$a \cdot b$", o produto entre a e b num anel A. Como o tempo é curto, "$a - b$" abreviará a expressão "$a + (-b)$". $\triangle$

Definição 1.0.19. Um anel A é chamado de **corpo** se $1 \neq 0$ e todo $a \in A \setminus \{0\}$ é invertível, i.e, se existir $b \in A \setminus \{0\}$ com $ab = 1$. ¶

Exemplo 1.0.20. O primeiro corpo com o qual nos deparamos *explicitamente* é $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais com suas operações usuais. A reta real $\mathbb{R}$, protagonista deste livro, também é um corpo. Estes não são os únicos corpos que existem: a Álgebra Comutativa é repleta de tais entidades. Porém, em contextos *introdutórios* de Análise, não costuma ser importante saber disso[6]. ▲

Há uma vastidão de classes de estruturas algébricas que habitam entre anéis e corpos. Uma dessas classes é composta pelos **domínios**: anéis *não-triviais*, i.e., em que $1 \neq 0$, e para os quais uma identidade do tipo $xy = 0$ só é possível com $x = 0$ ou $y = 0$. A terminologia algébrica costuma chamar de **divisor de zero** num anel qualquer elemento $x \neq 0$ para o qual exista $y \neq 0$ com $xy = 0$. Assim, domínios são anéis sem divisores de zero[7].

Em outras palavras, domínios são anéis não-triviais nos quais vale a *lei do cancelamento* para multiplicação: se D é um domínio e $x, y, z \in D$, com $x \neq 0$, então $xy = xz$ se, e somente se, $y = x$, o que segue pois a identidade $xy = xz$ é equivalente à identidade $x(y - z) = 0$. O fato de tal *lei* ser válida em corpos é então decorrência da simples

Proposição 1.0.21. *Se K é um corpo, então K é domínio.*

Demonstração. Se $x, y \in K$ com $xy = 0$ e $x \neq 0$, então $y = x^{-1}xy = x^{-1}0 = 0$. $\square$

A recíproca, porém é falsa, e $\mathbb{Z}$ é o exemplo *perfeito*: dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq 2$, tem-se a desigualdade $mn > n$, e daí é fácil concluir que os únicos elementos de $\mathbb{Z}$ que admitem inversos multiplicativos são 1 e -1.

[6] O leitor iniciante não deve se enganar: a Análise é intrinsecamente dependente da Álgebra, embora a recíproca seja falsa – exceto pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*, que ainda é importante em *algumas áreas* da Álgebra, mas está longe de ser ao menos relevante em *todas as áreas* da Álgebra.

[7] Seria uma imbecilidade incluir no escopo de tal terminologia o caso em que $x = 0$, posto que $0 \cdot a = 0$ para qualquer elemento a de um anel.

Observação 1.0.22. Antes de encerrar esta subseção, cabe uma ressalva acerca da divisibilidade por zero, cuja *polêmica* só se justifica pela falta de discussão: não há lei universal ou *mandamento* vindo das colinas que proíba dividir por zero em absolutamente qualquer contexto – o ponto é que fazer isso em anéis é, na prática, inútil.

De fato, uma identidade do tipo $\dfrac{\alpha}{0} = \beta$ num anel A depende, implicitamente, de se admitir a existência de $z := \dfrac{1}{0} \in A$, i.e., um elemento $z \in A$ que satisfaz $0 \cdot z = 1$. Ora, como também deve ocorrer $0 \cdot z = 0$, resulta que $0 = 1$ e, consequentemente, $0 \cdot x = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in A$, ou seja, $A = \{0\}$.

Algebricamente isto não é crime: um conjunto dotado de um único elemento admite tanto uma adição quanto uma multiplicação que o tornam um anel. O *problema* é que ao se modelar axiomaticamente os números naturais, inteiros, etc., *espera-se* que ocorra $0 \neq 1$ (vide o Lema 1.1.2), situação em que dividir por zero se torna inviável.

Essa é uma das razões pelas quais identidades do tipo

$$\frac{1}{0} = +\infty$$

nem chegam a fazer sentido (*Not even wrong*), embora sirvam como mantra. No próximo capítulo, veremos com calma o que alguém poderia querer expressar com uma identidade dessas. △

1.0.1 Como anéis conversam entre si?

Resta somente um conceito, tipicamente algébrico, que será bastante útil neste capítulo: a noção de *morfismos*.

Definição 1.0.23. Dados anéis A e B, uma função $f : A \to B$ é chamada de **morfismo** *de anéis* (ou *de corpos* quando ambos forem corpos) se

(i) $f(1_A) = 1_B$,

(ii) $f(a + a') = f(a) + f(a')$, e

(iii) $f(aa') = f(a)f(a')$. ¶

Observação 1.0.24. Acima, por preciosismo, os elementos neutros multiplicativos de A e B foram distinguidos como 1_A e 1_B, respectivamente. Porém, ainda mais precisão poderia ser dada às notações: note que em "$f(a + a') = f(a) + f(a')$", por exemplo o símbolo "+" em "$a + a$" indica a adição do anel A, enquanto o mesmo símbolo em "$f(a) + f(a')$" indica a adição em B. Analogamente, a ausência de símbolos operacionais na última cláusula indica as multiplicações em A e B, respectivamente. △

Em certo sentido, um morfismo de anéis $f : A \to B$ permite que A *manifeste* informações de natureza algébrica em B por meio de f. Por exemplo, se $a \in A$ é tal que $a^2 = 1$ em A, então o mesmo deve ocorrer com $f(a)$ em B, i.e., $f(a)^2 = 1_B$: de fato, deve-se ter

$$1_B = f(1_A) = f(a^2) = f(a)f(a) = f(a)^2.$$

No presente contexto, um tipo muito particular de morfismo de anéis será fundamental:

Proposição 1.0.25. *Para todo anel A existe um único morfismo de anéis $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$.*

Demonstração. Fazendo $\langle G; +; 0\rangle := \langle A; +; 0_A\rangle$ e $x := 1_A$ no Corolário 1.0.11, segue que a função $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ que faz $\zeta_A(n) := n \cdot 1_A$ e $\zeta(-n) := -(n \cdot 1_A)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é um morfismo de anéis. O leitor não deve ter dificuldades para verificar, por indução, que qualquer *outro* morfismo $\psi : \mathbb{Z} \to A$ deve ser tal que $\psi = \zeta_A$. □

Exercício 1.2. Complete a demonstração acima. Dica: deve-se ter $\psi(1) = 1_A = \zeta_A(1)$, $\psi(1+1) = 1_A + 1_A = \zeta_A(2)$, ... ■

Definição 1.0.26. Ao longo deste capítulo, fixados um anel A e um número inteiro $z \in \mathbb{Z}$, a notação z_A indicará a imagem de z pelo morfismo ζ_A da última proposição, a **interpretação** de z em A. ¶

Exercício 1.3. Mostre que para $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$, o elemento $za \in A$ (como definido no Corolário 1.0.11) é tal que $za = z_A a$. Conclua que para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in \mathbb{Z}$ deve-se ter $m(a + b) = ma + mb$. ■

Exemplo 1.0.27. No Exercício 1.1, o anel $A := \wp(X)$ tem como elementos neutros $0_A := \emptyset$ e $1_A := X$. Para tal anel, o morfismo $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ da proposição anterior faz

✓ $\zeta_A(0) = \emptyset$;

✓ $\zeta_A(1) = \emptyset \,\Delta\, X = X$;

✓ $\zeta_A(2) = X \,\Delta X = \emptyset$;

✓ $\zeta_A(3) = \emptyset \,\Delta\, X = X$...

Mais geralmente, $\chi_A(2z) = 0_A$ e $\chi_A(2z + 1) = 1_A$ para qualquer $z \in \mathbb{Z}$. Moralmente, as regras recursivas que definem $\mathbb{Z}$, quando realizadas com a unidade de A, resultam num conjunto que tem apenas dois elementos. ▲

Exemplo 1.0.28. Para $A := \mathbb{Q}$, o morfismo $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ é, meramente, a inclusão. ▲

Exemplo 1.0.29 (Matrizes)**.** O leitor familiarizado com *matrizes* não deve ter dificuldades para notar que se A denota o *anel das matrizes de ordem* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $\zeta_A : \mathbb{Z} \to A$ associa cada inteiro $z \in \mathbb{Z}$ à matriz diagonal $(z\delta_{ij})$. ▲

Exercício 1.4. Seja $f : A \to B$ um morfismo de anéis.

a) Mostre que $f(0_A) = 0_B$.

b) Mostre que $f(ma) = mf(a)$ para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$.

c) Mostre que $f(-a) = -f(a)$ para qualquer $a \in A$.

d) Mostre que $f(a^m) = f(a)^m$ para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $a \in A$. ■

Os últimos comentários, frequentemente úteis, seguem destacados nos próximos exercícios.

Exercício 1.5. Dado um anel A, mostre que $\mathrm{Id}_A : A \to A$ é um morfismo de anéis. ■

Exercício 1.6. Mostre que a composição de morfismos de anéis é um morfismo de anéis. ■

Exercício 1.7 (Núcleo e injetividade)**.** Para um morfismo de anéis $f : A \to B$, chama-se de **núcleo** de f ao conjunto $\ker f := \{a \in A : f(a) = 0_B\}$.

a) Mostre que f é injetora se, e somente se, seu núcleo é *trivial*, i.e., se $\ker f = \{0_A\}$.

b) Mostre que se A e B são corpos, então f é injetora. ■

1.1 Corpos (totalmente) ordenados

Recordemo-nos de que uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ consiste de um conjunto $\mathbb{P}$ munido de uma relação binária $\leq$ reflexiva, antissimétrica e transitiva; se, adicionalmente, valer a *tricotomia*, diz-se que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ é uma ordem total[8].

Definição 1.1.0. Um corpo $\mathbb{K}$ munido de uma relação de ordem total $\leq$ é chamado de **corpo ordenado** se $\leq$ for compatível com sua estrutura algébrica, i.e.,

$$(\mathrm{CO_i})\ \forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$

$$(\mathrm{CO_{ii}})\ \forall a, b \in \mathbb{K} \quad a > 0_{\mathbb{K}} \text{ e } b > 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow ab > 0_{\mathbb{K}}.$$ ¶

Exercício 1.8 (Caracterização alternativa – cones)**.** Mostre que $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado se, e somente se, existir um subconjunto $P \subseteq \mathbb{K}$ com $x + y, xy \in P$ sempre que $x, y \in P$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{K}$, ocorra um, e somente um, dos seguintes casos: $x = 0_{\mathbb{K}}$, $x \in P$ ou $-x \in P$. Dica: faça $P := \{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\}$. ■

Exemplo 1.1.1. O corpo dos números racionais é ordenado por sua ordem usual. ▲

Lema 1.1.2 (Fundamental)**.** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, então $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração. O contrário daria $0_{\mathbb{K}} > 1_{\mathbb{K}}$, posto que a ordem é total e $\mathbb{K}$ é corpo. Logo, a condição $(\mathrm{CO_i})$, com $c := -1_{\mathbb{K}}$, acarretaria $-1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ e, consequentemente, teria-se $0_{\mathbb{K}} > 1_{\mathbb{K}} = (-1_{\mathbb{K}})(-1_{\mathbb{K}}) > 0_{\mathbb{K}}$ em virtude da condição $(\mathrm{CO_{ii}})$, uma contradição. □

Teorema 1.1.3. *Se $\mathbb{K}$ é corpo ordenado, então existe um único morfismo injetor de anéis $\rho \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$.*

Demonstração. Observe que o lema anterior garante que $n_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

- ✓ como $\mathbb{K}$ é corpo, tem-se $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$;
- ✓ supondo $n_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ para algum $n \geq 1$, tem-se $(n+1)_{\mathbb{K}} := n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, onde a última desigualdade decorre da condição $(\mathrm{CO_i})$.

Logo, $z_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ para todo $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Agora, se $\sigma \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ for *um* morfismo de anéis, então $\sigma|_{\mathbb{Z}} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ também é um morfismo de anéis, donde a Proposição 1.0.25 obriga que se tenha $\sigma(z) = z_{\mathbb{K}}$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, da identidade

$$\sigma\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a}\right) = \sigma(a) \cdot \sigma\left(\frac{1}{a}\right),$$

não é difícil concluir que $\sigma\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\sigma(a)}$ para todo $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e, por conseguinte,

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} := \left(\frac{m}{n}\right)_{\mathbb{K}}$$

deve valer para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Portanto, tudo se resume a observar que a regra acima define, de fato, um morfismo de anéis da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, que será injetor por ter núcleo trivial. □

Exercício 1.9. Complete os detalhes da demonstração acima. Onde a hipótese de $\mathbb{K}$ ser ordenado é importante? ■

[8] Definições 0.0.31 e 0.0.36.

Observação 1.1.4. Moralmente, o elemento $q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ descrito recursivamente na demonstração anterior *representa* ou *interpreta* o número racional $q \in \mathbb{Q}$. Para leitores avessos à definição de morfismo, pode-se pensar em $\mathbb{K}$ como um *ambiente virtual* no qual é possível *implementar* os números racionais: nesse sentido, a demonstração apenas descreve e justifica o algoritmo de implementação. Indicaremos por $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ o subcorpo de $\mathbb{K}$ isomorfo a $\mathbb{Q}$, i.e., $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} := \{q_{\mathbb{K}} : q \in \mathbb{Q}\}$. △

Exercício 1.10 (Opcional)**.** Mostre que se K é um corpo finito, então não existe ordem total $\leq$ sobre K segundo a qual $\langle K, \leq\rangle$ seja um corpo ordenado. ■

Muitas propriedades operatórias corriqueiras dos números reais são, na verdade, comuns a qualquer corpo ordenado. As mais *úteis* seguem listadas na próxima

Proposição 1.1.5. *Sejam $\langle \mathbb{K}, \leq\rangle$ um corpo ordenado e $x, y, z \in \mathbb{K}$ elementos quaisquer. Então:*

(i) $x > 0_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $-x < 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) se $x > 0_{\mathbb{K}}$ e $y < z$, então $xy < xz$;

(iii) se $x < 0_{\mathbb{K}}$ e $y < z$, então $xy > xz$;

(iv) $x > 0_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $x^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$;

(v) se $x \neq 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > 0_{\mathbb{K}}$;

(vi) se $0_{\mathbb{K}} < x < y$, então $0_{\mathbb{K}} < y^{-1} < x^{-1}$.

Demonstração. Se $x > 0_{\mathbb{K}}$, então $0_{\mathbb{K}} = x - x > 0_{\mathbb{K}} - x = -x$ por conta da condição (CO_i), i.e., $-x < 0_{\mathbb{K}}$. Analogamente mostra-se a recíproca. Os itens (ii) e (iii) seguem de (CO_{ii}) ao se observar que $y < z$ equivale a $y - z < 0_{\mathbb{K}}$. Para o item (iv), note que se $x > 0_{\mathbb{K}}$ e $x^{-1} < 0_{\mathbb{K}}$, então pelo item anterior resultaria $-1_{\mathbb{K}} = (-x)x^{-1} > -x0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, contrariando o fato de que $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$; a recíproca é automática, posto que $(x^{-1})^{-1} = x$. O quinto item também segue da condição (CO_{ii}) para $x > 0_{\mathbb{K}}$; para $x < 0_{\mathbb{K}}$, o mesmo raciocínio dá $(-x)^2 > 0_{\mathbb{K}}$, enquanto $(-x)^2 = (-1_{\mathbb{K}})^2 x^2 = x^2$. O último é o mais divertido e, por tal razão, será deixado para o leitor. □

Exercício 1.11. Complete a demonstração anterior. Dica: para o item (vi), note que $x^{-1}y^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$; daí, use a condição ($CO_{ii}$). ■

Exercício 1.12. Nas condições anteriores, mostre que se $a < c$ e $b < d$ para certos $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, então $a + b < c + d$. ■

Exercício 1.13. Mostre que para quaisquer $p, q \in \mathbb{Q}$ vale a implicação

$$p < q \Rightarrow p_{\mathbb{K}} < q_{\mathbb{K}}.$$

Usando fato de que as ordens de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{K}$ são totais, conclua que vale a recíproca. Dica: use o Exercício 0.54 com a função $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$. ■

Definição 1.1.6. Dados corpos ordenados $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$, diremos que uma função $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ é um **morfismo de corpos ordenados** se f for simultaneamente um morfismo de corpos e uma função crescente[9]. ¶

[9]Como definido no Exercício 0.54.

Exemplo 1.1.7 (Complexos)**.** O leitor familiarizado com *números complexos* pode se perguntar se existe uma ordem total $\leq$ sobre $\mathbb{C}$ que torne $\langle \mathbb{C}, \leq \rangle$ um corpo ordenado. A resposta é não: releia o enunciado da última proposição até perceber o problema que ocorre com $\mathbb{C}$ ou, mais geralmente, em qualquer anel que admita *raiz* para o polinômio $x^2 + 1$. ▲

Definição 1.1.8. Seja $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ um corpo ordenado. O **valor absoluto** em $\mathbb{K}$ é a função $|\cdot|_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que associa cada $x \in \mathbb{K}$ ao elemento $|x|_{\mathbb{K}} := \max\{x, -x\}$. ¶

O valor absoluto constitui uma *maneira uniforme* de "medir" elementos de $\mathbb{K}$, por meio da *comparação* com os habitantes de seu **cone positivo**, i.e., do subconjunto $\mathbb{K}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{K} : x \geq 0_{\mathbb{K}}\}$, posto que $|x|_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Essa "*maneira uniforme*" se refere, entre outras coisas, ao fato de que o valor absoluto é compatível tanto com a estrutura algébrica quanto com a ordem de $\mathbb{K}$, no seguinte sentido.

Proposição 1.1.9. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x, y \in \mathbb{K}$. Então:*

(i) $|x|_{\mathbb{K}} \geq 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) $|x|_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $x = 0_{\mathbb{K}}$;

(iii) $|xy|_{\mathbb{K}} = |x|_{\mathbb{K}} |y|_{\mathbb{K}}$;

(iv) $|x + y|_{\mathbb{K}} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$.

Exercício 1.14. Prove a proposição acima. ■

A desigualdade (iv) acima, chamada de **desigualdade triangular**, será extremamente recorrente no texto. Por tal motivo, convém demonstrá-la aqui[10]: como $-x \leq |x|_{\mathbb{K}}$ e $-y \leq |y|_{\mathbb{K}}$, tem-se $-(x + y) \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$; como também ocorre $x + y \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$, conclui-se que $|x + y|_{\mathbb{K}} := \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$.

Exercício 1.15. Para $x, y \in \mathbb{K}$, com $\mathbb{K}$ corpo ordenado, mostre que são equivalentes:

(i) $-y \leq x \leq y$;

(ii) $x \leq y$ e $-x \leq y$;

(iii) $|x|_{\mathbb{K}} \leq y$.

Conclua que $|x - y| \leq z$ se, e somente se, $y - z \leq x \leq y + z$. ■

A relação de ordem em $\mathbb{K}$ pode ser estendida, em certo sentido, para funções da forma $X \to \mathbb{K}$, onde X é um conjunto qualquer.

Definição 1.1.10. Fixados um conjunto X, para funções $f, g \in \mathbb{K}^X$, escreveremos $f \leq g$ a fim de indicar a ocorrência de $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. ¶

Exercício 1.16. Mostre que $\langle \mathbb{K}^X, \leq \rangle$ é uma ordem parcial. A ordem é total? ■

As considerações feitas no Exemplo 1.0.15 já denunciam que o conjunto $\mathbb{K}^X$ é digno de ser chamado de anel. Porém, além de multiplicar funções umas com as outras, é possível multiplicá-las por *escalares*, i.e., elementos de $\mathbb{K}$: para $k \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathbb{K}^X$, faz-se

$$\begin{aligned} kf \colon X &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto k \cdot f(x) \end{aligned}$$

o que nada mais é do que fazer $kf := \underline{k} \cdot f$, onde $\underline{k} \colon X \to \mathbb{K}$ é a **função constante** k, i.e., tal que $\underline{k}(x) := k$ para todo $x \in X$.

[10] O leitor pode comparar com sua própria demonstração.

Definição 1.1.11. Um grupo abeliano $\langle V; +; 0\rangle$ é chamado de $\mathbb{K}$-**espaço vetorial** se existir uma função

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\mapsto V \\ \langle k, v\rangle &\mapsto kv \end{aligned}$$

chamada de *multiplicação* (ou *ação*), satisfazendo as seguintes condições:

(i) $1_{\mathbb{K}} v = v$ para todo $v \in V$;

(ii) $(\alpha + \beta)v = (\alpha v) + (\beta v)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$;

(iii) $k(u + v) = (ku) + (kv)$ para quaisquer $u, v \in V$ e $k \in \mathbb{K}$. ¶

Em tal contexto, os elementos de V são chamados de *vetores*, enquanto os membros de $\mathbb{K}$ são xingados de *escalares*.

Exercício 1.17. Mostre que $\mathbb{K}^X$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com a multiplicação $\langle k, f\rangle \mapsto kf$ definida anteriormente. ■

Observação 1.1.12. A definição de espaço vetorial, por si só, não depende da hipótese de $\mathbb{K}$ ser corpo ordenado. Em geral, a mesma definição se aplicaria com um anel A fazendo o papel do conjunto de escalares. Porém, em tais situações, em vez de "A-espaço vetorial", xinga-se a coisa de A-*módulo*. Nesse sentido, o leitor não deve ter dificuldades para observar que todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo: a função $\mathbb{Z} \times A \to A$ que faz $\langle z, a\rangle \mapsto za = z_A a$ é quem faz o papel da multiplicação. △

Exercício 1.18. Para $f \in \mathbb{K}^X$, defina $|f|_{\mathbb{K}} := |\cdot|_{\mathbb{K}} \circ f$. Mostre que para quaisquer $f, g \in \mathbb{K}^X$ e $k \in \mathbb{K}$ valem as (des) igualdades a seguir.

a) $|f|_{\mathbb{K}} \geq \underline{0_{\mathbb{K}}}$.

b) $|kf|_{\mathbb{K}} = |k|_{\mathbb{K}} |f|_{\mathbb{K}}$.

c) $|f + g|_{\mathbb{K}} \leq |f|_{\mathbb{K}} + |g|_{\mathbb{K}}$. ■

A partir do próximo capítulo, espaços da forma $\mathbb{K}^X$ serão tão importantes quanto o próprio $\mathbb{K}$, que então será chamado de $\mathbb{R}$. Em particular, para $X := \mathbb{N}$, escreve-se $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ para indicar funções em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, que passam a ser chamadas de **sequências**[11].

1.1.0 Completude e a condição arquimediana

Graficamente, ordens totais abstraem o comportamento de objetos *encadeados* ao longo de uma *corrente* (confira a Observação 0.0.35 bem como a Definição 0.0.35). Por sua vez, corpos ordenados adicionam a possibilidade de operar os elementos da corrente. No entanto, tais condições ainda não capturam a ideia de *continuidade* ou *ausência de buracos* que os nossos sentidos falhos atribuem aos *segmentos de reta*.

Definição 1.1.13. Uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ é dita **completa**[12] se todo subconjunto de $\mathbb{P}$, não-vazio e limitado superiormente admite um supremo[13]. Em particular, $\mathbb{K}$ é **corpo ordenado completo** se sua ordem total for completa no sentido anterior. ¶

[11] O leitor pode preferir chamá-las de *sequências infinitas*, a fim de distingui-las das funções da forma $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$, desde que tenha em mente que a *infinitude* se refere ao domínio e não, necessariamente, à sua imagem. Em todo caso, sequências serão retomadas no próximo capítulo.

[12] Também chamada de *Dedekind completa* ou *Bolzano completa* a depender da referência.

[13] O leitor desconfortável com as terminologias empregadas pode conferir a Subseção 0.0.1.

Proposição 1.1.14 (Aquecimento: caracterização via ínfimos)**.** *Dada uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, são equivalentes:*

(i) *todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente admite supremo;*

(ii) *todo subconjunto não-vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.*

Demonstração. Assumindo (i), para um subconjunto não-vazio $B \subseteq \mathbb{P}$ limitado inferiormente, mostraremos que existe $\beta \in \mathbb{P}$ tal que $\beta = \inf B$. Para isso, consideremos o subconjunto $L := \{p \in \mathbb{P} : p \text{ limita } B \text{ inferiormente}\}$. Como $B \neq \emptyset$ é limitado inferiormente, segue que $L \neq \emptyset$ é limitado superiormente (por qualquer elemento de B). Logo, pela hipótese, existe $\beta := \sup L \in \mathbb{P}$, o menor limitante superior de L. Agora, basta observar que β é o maior limitante inferior de B:

✓ como qualquer $b \in B$ limita L superiormente, segue que $\beta \leq b$ para todo $b \in B$;

✓ se $l \leq b$ para todo $b \in B$, então $l \in L$ e, como $\beta = \sup L$, deve-se ter $l \leq \beta$.

Portanto, (i) $\Rightarrow$ (ii). Repetindo a demonstração acima num espelho[14], mostra-se que (ii) $\Rightarrow$ (i). □

Exercício 1.19. Sejam $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma ordem parcial e $B \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto não-vazio.

a) Mostre que se o conjunto dos limitantes inferiores de B é não-vazio e admite um supremo β, então β é o ínfimo de B. Dica: apenas repita a demonstração anterior.

b) Enuncie e demonstre a versão dual do item anterior. ■

É muito natural perguntar por que a definição de completude de fato captura a noção de continuidade ou ausência de *buracos*, o que evidentemente depende do que se entende por "buraco".

Definição 1.1.15. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Um **corte** em $\mathbb{K}$ é um par $\langle A, B \rangle$ de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{K}$ tais que

(i) $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{K}$,

(ii) para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$ ocorre $a < b$. ¶

Intuitivamente, os subconjuntos A e B na definição do corte $\langle A, B \rangle$ correspondem aos dois pedaços que se obteriam de $\mathbb{K}$ se este fosse *cortado* num determinado ponto de $\mathbb{K}$. Note que para $p \in \mathbb{K}$, há dois modos *triviais* de cortar $\mathbb{K}$ no ponto p e obter um corte $\langle A, B \rangle$:

✓ $A := \{x \in \mathbb{K} : x \leq p\}$ e $B := \{x \in \mathbb{K} : p < x\}$;

✓ $A := \{x \in \mathbb{K} : x < p\}$ e $B := \{x \in \mathbb{K} : p \leq x\}$.

Convém chamar atenção para o seguinte: no primeiro caso, p é trivialmente o supremo de A, e o exercício anterior garante a igualdade $p = \inf B$; no segundo caso, p é trivialmente o ínfimo de B, e novamente o mesmo exercício acarreta $p = \sup A$ (por quê?!). Porém, isto não significa que todo corte seja dessa forma.

[14] Ou aplicando o mesmo resultado para a ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \geq \rangle$ (vide o Exercício 0.55).

Exemplo 1.1.16 (Um corte racional clássico)**.** Fixado um corpo totalmente ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$, os subconjuntos

$$A := \{x \in \mathbb{K} : x < 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } 0_{\mathbb{K}} \leq x^2 < 2_{\mathbb{K}}\} \text{ e } B := \{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}} \text{ e } x^2 \geq 2_{\mathbb{K}}\}$$

determinam um corte $\langle A, B \rangle$ em $\mathbb{K}$.

✓ $A \neq \emptyset$ pois $0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}} \in A$ e $B \neq \emptyset$ pois $2_{\mathbb{K}} \in B$.

✓ A tricotomia da ordem de $\mathbb{K}$ acarreta tanto $A \cap B = \emptyset$ quanto $A \cup B = \mathbb{K}$.

✓ Finalmente, se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$: isto é evidente para $a < 0_{\mathbb{K}}$; se ocorresse $a \geq 0_{\mathbb{K}}$ com $a \geq b$, teria-se $a^2 \geq ab \geq b^2 \geq 2_{\mathbb{K}}$, acarretando em $a \notin A$.

Pergunta-se: tal corte é, necessariamente, induzido por algum $\alpha \in \mathbb{K}$? Como a discussão anterior sugere, isto equivale a perguntar sobre a existência de supremo para A (ou ínfimo para B).

Lema 1.1.17. *Se existir $\alpha \in \mathbb{K}$ com $\alpha = \sup A$, então $\alpha^2 = 2_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração. Com

$$\beta := \alpha - \frac{\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}}}{\alpha + 2_{\mathbb{K}}} = \frac{2_{\mathbb{K}}\alpha + 2_{\mathbb{K}}}{\alpha + 2_{\mathbb{K}}}, \tag{1.0}$$

segue que

$$\beta^2 - 2_{\mathbb{K}} = \frac{2_{\mathbb{K}}(\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}})}{(\alpha + 2_{\mathbb{K}})^2}. \tag{1.1}$$

Note que por valer $1_{\mathbb{K}} \in A$, deve-se ter $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}} \leq \alpha$ e $\beta > 0_{\mathbb{K}}$ (o contrário daria $\alpha \leq -1_{\mathbb{K}}$). Assim, supondo $\alpha^2 \neq 2_{\mathbb{K}}$, restam dois casos.

✗ Se $\alpha^2 < 2_{\mathbb{K}}$, então $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$, donde (1.0) acarreta $\beta > \alpha > 0_{\mathbb{K}}$, ao passo que (1.1) implica em $\beta \in A$, contrariando a hipótese de que α limita A superiormente.

✗ Se $\alpha^2 > 2_{\mathbb{K}}$, então $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, donde (1.0) acarreta $0_{\mathbb{K}} < \beta < \alpha$, ao passo que (1.1) implica em $\beta^2 > 2_{\mathbb{K}}$, i.e., $\beta \in B$ e, portanto, β é limitante superior de A, contrariando a suposição de que α é o menor de tais limitantes superiores.

Portanto, $\alpha^2 = 2_{\mathbb{K}}$ é a única relação possível. □

Uma vez que tal argumento é válido em *qualquer* corpo ordenado, segue que para $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, o corte $\langle A, B \rangle$ acima não é induzido por qualquer $\alpha \in \mathbb{Q}$, posto que não existe número racional q satisfazendo $q^2 = 2$. ▲

Exercício 1.20 (Clássico?)**.** Mostre que não existe $q \in \mathbb{Q}$ com $q^2 = 2$. ■

É no sentido do exemplo acima que se costuma entender a afirmação de que o corpo dos números racionais tem buracos: explicitamente, trata-se da existência de cortes $\langle A, B \rangle$ em $\mathbb{Q}$ para os quais não existem $\sup A$ ou $\inf B$. É justamente esse o tipo de lacuna eliminada pela completude.

Exercício 1.21. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $\langle A, B \rangle$ um corte em $\mathbb{K}$. Mostre que se $\mathbb{K}$ é completo, então A tem máximo ou B tem mínimo. ■

A completude também traz outra consequência fundamental.

Teorema 1.1.18. *Se $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ é um corpo ordenado e completo, então o subconjunto*

$$\mathbb{N}_{\mathbb{K}} := \{n_{\mathbb{K}} : n \in \mathbb{N}\}$$

não é limitado superiormente, i.e., para qualquer $x \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_{\mathbb{K}}$.

Demonstração. Se $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ fosse limitado superiormente, existiria $\alpha := \sup \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$. Como $\alpha - 1_{\mathbb{K}} < \alpha$, a minimalidade de α como limitante superior de $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ acarreta a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1_{\mathbb{K}} < n_{\mathbb{K}}$. Mas daí $\alpha < n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$, uma contradição. □

Definição 1.1.19. Um corpo ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ satisfazendo a tese do teorema acima é chamado de (corpo) **arquimediano**. ¶

Que grande porcaria a propriedade arquimediana, não é mesmo? O conjunto dos naturais é ilimitado?! O que de útil poderia decorrer de uma afirmação tão *trivial*? Resposta:

Proposição 1.1.20. *Dado um corpo ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$, são equivalentes:*

(i) ($\mathbb{K}$ é arquimediano) *$\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{K}$;*

(ii) (ausência de "ilimitados") *não existe $x \in \mathbb{K}$ com $n_{\mathbb{K}} < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) (ausência de "infinitésimos") *não existe $x \in \mathbb{K}$ com $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ satisfazendo*

$$|x|_{\mathbb{K}} < \frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(iv) ($\mathbb{Q}$ é "denso" em $\mathbb{K}$) *se $x, y \in \mathbb{K}$ e $x < y$, então existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q_{\mathbb{K}} < y$.*

Demonstração. Os três primeiros itens são claramente equivalentes entre si. Agora, supondo que $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ seja arquimediano e $x < y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0_{\mathbb{K}} < (y - x)^{-1} < n_{\mathbb{K}}$, donde segue que

$$y - x > \frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} \Rightarrow n_{\mathbb{K}} y > n_{\mathbb{K}} x + 1_{\mathbb{K}}.$$

Novamente, usando o fato de $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ ser arquimediano, toma-se[15] $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} \leq n_{\mathbb{K}} x < m_{\mathbb{K}},$$

acarretando

$$n_{\mathbb{K}} x < m_{\mathbb{K}} \leq n_{\mathbb{K}} x + 1_{\mathbb{K}} < n_{\mathbb{K}} y \Rightarrow x < \frac{m_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} < y,$$

com $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Logo, vale (iv). Finalmente, supondo (iv) e tomando $x > 0_{\mathbb{K}}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $0_{\mathbb{K}} < q_{\mathbb{K}} < x$. Ora, como $q = \frac{m}{n}$ para certos $m, n \in \mathbb{N}$, resulta

$$\frac{1}{n} < \frac{m}{n},$$

mostrando que vale (iii). □

[15] Para se convencer de que tal m existe, pode ser útil supor $0_{\mathbb{K}} \leq x < y$, pois o caso $x < y \leq 0_{\mathbb{K}}$ segue deste (e $x < 0_{\mathbb{K}} < y$ é trivial).

Exercício 1.22. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo arquimediano e $x, y \in \mathbb{K}$. Mostre que se $x, y > 0_{\mathbb{K}}$, então existe $N \in \mathbb{N}$ com $Nx > y$. ■

Exemplo 1.1.21 (Nem todo corpo arquimediano é completo)**.** A proposição acima estabelece que para um corpo ordenado $\mathbb{K}$ fixado, são as cópias de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{K}$ que codificam a informação necessária para decidir se $\mathbb{K}$ é arquimediano ou não. Em particular, é de se esperar que o próprio corpo ordenado $\mathbb{Q}$ seja arquimediano, o que de fato ocorre: dados $p, q \in \mathbb{Q}$ distintos, não é difícil perceber que $s := p + r$ é tal que $p < s < q$, onde $r = \frac{|p-q|}{2}$. Em particular, por $\mathbb{Q}$ ter subconjuntos não-vazios, limitados superiormente e sem supremo, resulta que a condição arquimediana não garante completude. ▲

1.1.1 O Axioma da Preguiça Infinita

Enquanto a seção anterior estabeleceu os significados dos termos "corpo", "ordenado" e "completo", a atual seção lidará com as tecnicalidades legais envolvidas na escolha de *corpos ordenados completos* como *o* modelo abstrato-formal da reta. A princípio, existem dois pontos fracos que carecem de atenção.

(i) *Existência.* Por que o ambiente formal utilizado, ZFC, permite afirmar que existe pelo menos um corpo ordenado completo?

(ii) *"Unicidade".* A Análise na $\mathbb{R}$eta depende do (*modelo* de) $\mathbb{R}$ escolhido?

O primeiro ponto pode ser resolvido de diversas formas.

✓ *Cortes de Dedekind.* Considera-se a família

$$\mathcal{C} := \{\langle A, B\rangle \in \wp(\mathbb{Q}) \times \wp(\mathbb{Q}) : \langle A, B\rangle \text{ é corte de } \mathbb{Q} \text{ e } A \text{ não tem máximo}\},$$

conjunto que é munido de uma estrutura de corpo ordenado completo – mas não sem dor.

✓ *Sequências de Cauchy racionais.* Considera-se a família

$$\mathcal{S} := \{\langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \langle q_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \text{ é de Cauchy}\},$$

onde "ser de Cauchy" significa, *grosso modo*, que os termos da sequência se tornam arbitrariamente próximos uns dos outros. Daí, com uma relação de equivalência $\sim$ apropriada sobre $\mathcal{S}$, definem-se sobre $\mathcal{S}/\sim$ operações de adição e multiplicação, bem como uma ordem, que fazem de $\mathcal{S}/\sim$ um corpo ordenado completo.

✓ *Completamento uniforme.* Apela-se para a *teoria de espaços uniformes* e seus teoremas de *completamento*, que englobam tipos de estruturas chamadas de *grupos topológicos*, reino em que habita o grupo aditivo $\langle \mathbb{Q}; +; 0\rangle$. Em tal cenário, mostra-se que o completamento uniforme de $\mathbb{Q}$ pode ser promovido ao patamar de corpo ordenado (completo).

Tecnicamente, o primeiro método é o menos exigente do ponto de vista terminológico: já temos, inclusive, bagagem suficiente para realizar a construção. Todavia, os meandros envolvidos nessa *implementação* não costumam contribuir para a prática da Análise no dia a dia[16]. Nesse sentido, o segundo método tem a vantagem de utilizar *ecos* de definições que serão importantes *após* a construção, como as *sequências de Cauchy*. Mesmo assim, as enfadonhas verificações de que as *estruturas* definidas satisfazem as condições desejadas só servem para o contexto da construção da reta: no futuro, quando o leitor *precisar* de *espaços métricos completos*, tudo deverá ser refeito.

O terceiro método não tem essa desvantagem: um único teorema de *completamento* de *espaços uniformes* dá conta de *completar* $\mathbb{Q}$, completar *espaços métricos*, entre outras *estruturas uniformes* encontradas na *natureza*. Porém, dado o escopo do texto, desenvolver esse ferramental *apenas* para construir um corpo ordenado completo e, posteriormente, *fazer* Análise, seria descabido[17].

Por essas e, possivelmente, outras razões, muitos textos de Análise apenas postulam o que costumo chamar de

Axioma da Preguiça Infinita. *Existe um corpo ordenado completo.*

Esse tipo de postura torna mais evidente o problema da "unicidade", afinal de contas, tudo o que será feito dependerá de um conjunto que não foi definido em sua *extensão*, i.e., com a descrição de quem ou o quê são seus elementos, mas cuja descrição foi *intencional*: sabe-se apenas como tal objeto deve se comportar. Ainda assim, mesmo quem *constrói* um corpo ordenado completo está suscetível ao problema da "unicidade", já que há diversas construções disponíveis. Os mecanismos que resolvem o problema, no sentido de mostrarem que não existem problemas, são os *isomorfismos*.

Definição 1.1.22. Um morfismo de anéis/corpos (ordenados) $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ é chamado de **isomorfismo** de anéis/corpos (ordenados) se existir um morfismo de anéis/corpos (ordenados) $g\colon \mathbb{K}' \to \mathbb{K}$ com $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}'}$. Em tais condições, $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ são ditos **isomorfos**. ¶

A definição de isomorfismo dada acima é bem mais geral e se aplica, naturalmente, a qualquer contexto no qual uma noção *apropriada* de morfismo estiver disponível. Em certo sentido, enquanto *morfismos* são meios pelos quais *objetos* de um mesmo *tipo* ou *categoria* se *comunicam* por *traduções*, *isomorfismos* são meios que permitem não apenas a troca mútua de informação, mas também a fidelidade nas traduções de um lado para outro. Há, porém, um modo bem mais prático de verificar isomorfismos *no presente contexto*.

Exercício 1.23. Sejam A e B anéis e $f\colon A \to B$ um morfismo de anéis.

a) Mostre que se f é bijetora, então f é um isomorfismo de anéis. Dica: a inversa, que precisa existir, deve satisfazer as condições para ser morfismo.

b) Mostre que se A e B são corpos ordenados e f é bijeção crescente, então f é um isomorfismo de corpos ordenados. Dica: pelo item anterior, f já é um isomorfismo de corpos, enquanto o Exercício 0.54 permite concluir que f^{-1} também *será* crescente. ■

[16] Leitores versados em Álgebra Comutativa devem conhecer a sensação: a construção do produto tensorial, embora bem mais simples do que a construção da reta, não contribui para a sua utilização.

[17] É a postura tomada por Bourbaki [4, 5], por exemplo. Porém, cabe a ressalva de que os textos de Bourbaki nunca almejaram servir como propostas didáticas, mas sim como fundamentação teórico-formal.

Observação 1.1.23. Apesar do que se estabeleceu acima, há outros contextos (ou *categorias*) nos quais a mera bijetividade não é suficiente para atestar o isomorfismo entre os objetos considerados. Por exemplo: na *categoria* dos *espaços topológicos*, que conheceremos superficialmente em breve, *funções contínuas* fazem o papel de morfismos, e nem toda função contínua bijetiva tem inversa contínua. $\triangle$

Moralmente, dizer que A e B são anéis ou corpos (ordenados) isomorfos significa afirmar que embora A e B possam ter definições distintas, os *comportamentos* que suas estruturas modelam são os mesmos. O próximo exercício pode dar uma ideia mais clara sobre tudo isso no contexto específico dos corpos ordenados.

Exercício 1.24. Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ corpos ordenados e $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ um isomorfismo de corpos ordenados.

a) Mostre que $S \subseteq \mathbb{K}$ é limitado superiormente se, e somente se, $f[S] \subseteq \mathbb{K}'$ é limitado superiormente.

b) Mostre que $S \subseteq \mathbb{K}$ admite um supremo $\alpha \in \mathbb{K}$ se, e somente se, $f[S]$ admite supremo $\beta \in \mathbb{K}'$. Além disso, tem-se $\beta = f(\alpha)$.

c) Mostre que a equação $x^2 - 2_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ tem solução em $\mathbb{K}$ se, e somente se, a equação $x^2 - 2_{\mathbb{K}'} = 0_{\mathbb{K}'}$ tem solução em $\mathbb{K}'$. $\blacksquare$

Pelo que se expôs acima, um modo legítimo de resolver o problema da "unicidade" seria mostrar que quaisquer dois corpos ordenados completos são isomorfos. É precisamente isso o que será feito a seguir.

A unicidade dos corpos ordenados completos

... a menos de isomorfismo.

Lema 1.1.24. *Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados e, para cada $a \in \mathbb{A}$, considere o subconjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} := \{q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} : q_{\mathbb{A}} < a\}$. Se $\mathbb{A}$ é arquimediano e $\mathbb{K}$ é completo, então a correspondência*

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{A} &\to \mathbb{K} \\ a &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{aligned} \tag{1.2}$$

é um morfismo de corpos ordenados.

É mais fácil entender a prova do que escrevê-la. A coisa toda é bastante visual, como ilustrado a seguir.

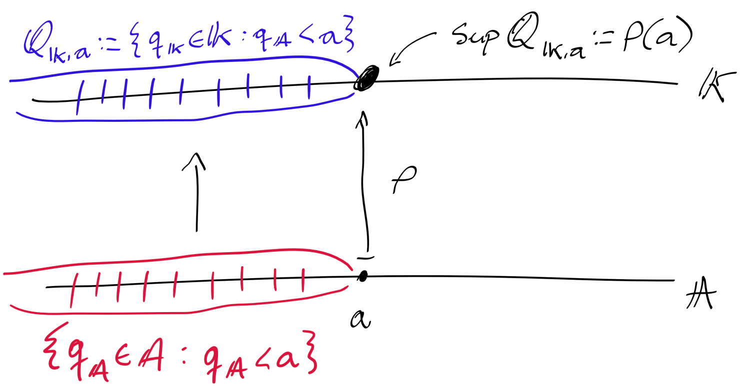


Figura 1.0: Sincronização de corpos.

Para cada $a \in \mathbb{A}$ considera-se, num primeiro momento, a coleção dos racionais (interpretados em $\mathbb{A}$) menores do que a. Ao *interpretar* tais números racionais em $\mathbb{K}$, obtém-se um conjunto limitado superiormente, que por sua vez admite um supremo em virtude da completude de $\mathbb{K}$. Finalmente, ρ apenas associa a ao supremo obtido no passo anterior. Mesmo que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ sejam *construídos* de maneiras distintas, o fato de ambos *interpretarem* cópias *densas* de $\mathbb{Q}$ permite sincronizá-los entre si.

Demonstração. É edificante observar, antes de qualquer outra coisa, que a *relação* ρ é, na verdade, uma função:

✓ a propriedade arquimediana de $\mathbb{A}$ permite mostrar tanto a não-vacuidade de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$ quanto a existência de um limitante superior em $\mathbb{K}$;

✓ logo, a completude de $\mathbb{K}$ assegura a existência de um único $\rho(a) \in \mathbb{K}$ digno de ser xingado como $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$.

Em outras palavras: ρ associa a cada $a \in \mathbb{A}$ um único $\rho(a) \in \mathbb{K}$, como esperado. O leitor pode cuidar dos detalhes omitidos acima[18]. Agora, mostraremos que ρ é um morfismo de corpos. Para isso, para quaisquer $a, b \in \mathbb{A}$, precisa-se verificar que

$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},1_{\mathbb{A}}} = 1_{\mathbb{K}}, \tag{1.3}$$
$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b} = \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} \tag{1.4}$$
$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},ab} = \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \cdot \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}. \tag{1.5}$$

Identidade (1.3). Ela vale mais geralmente, pois $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}} = q_{\mathbb{K}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Com efeito, $q_{\mathbb{K}}$ limita $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}}$ superiormente e, se $\beta < q_{\mathbb{K}}$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ com $r_{\mathbb{A}} < q_{\mathbb{A}}$ e $\beta < r_{\mathbb{K}}$, mostrando que $q_{\mathbb{K}}$ é, legitimamente, o menor limitante superior de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}}$.

Identidade (1.4). Antes de proceder com a prova, convém notar que se $A, B \subseteq \mathbb{K}$ são não-vazios e limitados superiormente, então o conjunto $A + B := \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$ é não-vazio, limitado superiormente e $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Em posse disso, (1.4) decorre da igualdade $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b} = \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$, cuja verificação será apresentada a seguir.

Por um lado, se $q := r + s$ com $r_{\mathbb{A}} < a$ e $s_{\mathbb{A}} < b$, então $r_{\mathbb{A}} + s_{\mathbb{A}} < a + b$, acarretando $q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b}$, donde a arbitrariedade de q implica em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b}$. Por outro lado, se $q_{\mathbb{A}} < a+b$, então $0_{\mathbb{A}} < a+b-q_{\mathbb{A}}$ e, pela condição arquimediana satisfeita por $\mathbb{A}$, existem $r, s \in \mathbb{Q}$ com $0_{\mathbb{A}} < r_{\mathbb{A}} < a + b - q_{\mathbb{A}}$ e $a - r_{\mathbb{A}} < s_{\mathbb{A}} < a$. Logo, $q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} < q_{\mathbb{A}} + r_{\mathbb{A}} - a < b$, com $q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$, $s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$, mostrando $q_{\mathbb{A}} = s_{\mathbb{A}} + q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$.

Identidade (1.5). A verificação das possíveis variações de *sinal* se reduz ao caso em que $a, b > 0_{\mathbb{A}}$, desde que se saiba da identidade auxiliar $\rho(-a) = -a$. De fato, em posse disso, para $a < 0_{\mathbb{A}}$ e $b > 0_{\mathbb{A}}$, por exemplo, resulta

$$-\rho(ab) = \rho(-ab) = \rho((-a)b) = \rho(-a)\rho(b) = -\rho(a)\rho(b),$$

com um raciocínio análogo para o caso em que $a < 0_{\mathbb{A}}$ e $b < 0_{\mathbb{A}}$ (o caso em que $a = 0_{\mathbb{A}}$ ou $b = 0_{\mathbb{A}}$ é, em vista de (1.3), imediato). Tratemos então das identidades *suficientes*.

[18] Será essencial lembrar que as correspondências $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$ definem (únicos) morfismos de corpos da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ e $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, respectivamente.

Primeiro, observe que se $x > 0_{\mathbb{A}}$, então o conjunto $D_x := \{q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},x} : q > 0_{\mathbb{A}}\}$ é tal que $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},x} = \sup D_x$. Depois, note que se $A, B \subseteq \mathbb{K}_{>0}$ são não-vazios e limitados superiormente, então a família $A \cdot B := \{ab : a \in A \text{ e } b \in B\}$ é não-vazia, limitada superiormente e vale $\sup (A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, donde a identidade desejada segue da igualdade $D_{ab} = D_a \cdot D_b$, cuja verificação fica a cargo do leitor.

Para mostrar a identidade auxiliar $\rho(-a) = -\rho(a)$, primeiro observe que não há perda de generalidade em supor $a \notin \mathbb{Q}_{\mathbb{A}}$. Daí, note que se $q_{\mathbb{A}} < a$, então $-a < -q_{\mathbb{A}}$, donde a definição de supremo acarreta $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a} \leq -q_{\mathbb{K}}$. Logo, $q_{\mathbb{K}} \leq -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$ e, novamente pela definição, $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \leq -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$. Supondo a desigualdade estrita, a condição arquimediana garante um $p \in \mathbb{Q}$ com $\sup_{\mathbb{Q},a} < p_{\mathbb{K}} < -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, com $a > p_{\mathbb{A}}$ e, consequentemente, $-p_{\mathbb{A}} < -a$, o que implicaria em $-p_{\mathbb{K}} \leq \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, i.e., $-\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a} \leq p_{\mathbb{K}}$, uma contradição. Portanto, $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} = -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, como desejado.

A enfadonha discussão acima mostra que ρ é um morfismo de corpos. Resta a ordem: se $a \leq b$ em $\mathbb{A}$, então $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$ e, pelas propriedades típicas de supremos, segue que $\rho(a) \leq \rho(b)$. □

Exercício 1.25. Complete os detalhes da demonstração acima. Dica: pode ser útil conferir o Exercício 1.37. ■

Observação 1.1.25. Convém destacar que o morfismo de corpos ρ é *estritamente crescente*, no sentido da Observação 0.2.5. Há dois modos simples de se convencer disso:

(i) por $\mathbb{A}$ ser arquimediano, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $a < q_{\mathbb{A}} < b$ e

$$\rho(a) := \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} < q_{\mathbb{K}} < \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} := \rho(b);$$

(ii) alternativamente, como ρ é um morfismo de corpos, segue que ρ é injetor (item b) do Exercício 1.7). Logo, ρ deve ser estritamente crescente.

Embora o segundo argumento mostre que *qualquer* morfismo de corpos ordenados é estritamente
problema de estimar a cardinalidade de corpos arquimedianos. △

Teorema 1.1.26. *Se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ são corpos ordenados e completos, então o mapa $\rho\colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ definido em (1.2) é um isomorfismo de corpos ordenados.*

Demonstração. Como dessa vez o corpo $\mathbb{A}$ também é completo, o lema anterior permite conjurar *dois* morfismos de corpos ordenados, simultaneamente:

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{A} &\to \mathbb{K} \\ a &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \sigma\colon \mathbb{K} &\to \mathbb{A} \\ k &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{A},k} \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrar que um é o inverso do outro. Fixado $a \in \mathbb{A}$, tem-se

$$\sigma(\rho(a)) := \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)},$$

e busca-se verificar $\sigma(\rho(a)) = a$. Ora, dado $q_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$, tem-se $q_{\mathbb{K}} < \rho(a)$, e isso proíbe a ocorrência de $a \leq q_{\mathbb{A}}$: caso contrário, teria-se $\rho(a) \leq \rho(q_{\mathbb{A}}) = q_{\mathbb{K}}$. Agora, se $\beta \in \mathbb{A}$ é tal que $\beta < a$, então $\rho(\beta) < \rho(a)$, e existe $q \in \mathbb{Q}$ com $\rho(\beta) < q_{\mathbb{K}} < \rho(a)$, donde segue que $q_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$ com $\beta < q_{\mathbb{A}}$. Portanto, a é o menor limitante superior de $\mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$, i.e., $a = \sigma(\rho(a))$, como queríamos. Analogamente, mostra-se que $\rho(\sigma(k)) = k$ para todo $k \in \mathbb{K}$. □

Exercício 1.26. Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados, com $\mathbb{A}$ arquimediano e $\mathbb{K}$ completo.

a) Mostre que se $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ é um morfismo de corpos ordenados, então $\varphi(q_{\mathbb{A}}) = q_{\mathbb{K}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Dica: as correspondências $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$ determinam os únicos morfismos de corpos ordenados da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ e $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, respectivamente; por outro lado, a composição entre $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e φ também determina um morfismo da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$.

b) Conclua que existe um único morfismo de corpos ordenados da forma $\mathbb{A} \to \mathbb{K}$. Em particular, os isomorfismos do teorema anterior são únicos. ■

As discussões acima resolvem o problema da "unicidade" mencionado anteriormente, e tornam quase honesta a próxima

Definição 1.1.27. Denota-se por $\mathbb{R}$ *qualquer* corpo ordenado e completo, que passa a ser chamado de **conjunto dos números reais**, ou apenas de **reta real**. ¶

Devido a tal escolha de notação, perde o sentido carregar "$\mathbb{R}$" como subíndice para indicar em qual corpo ordenado e completo um determinado procedimento ocorre, postura que será aplicada também para o valor absoluto de um número real x, que será denotado por $|x|$ de agora em diante[19].

Além disso, em contextos algébricos ou *analíticos*, será inofensivo considerar como verdadeiras as inclusões próprias $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ embora, a rigor, existam apenas morfismos injetores que preservam as *estruturas algébricas e de ordem* subjacentes: se, por um lado, isso soa demasiado arbitrário, por outro, já sabemos que tais morfismos são únicos e, portanto, independem de escolhas *arbitrárias*. Em outras palavras, tanto $\mathbb{N}$, quanto $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ podem ser substituídos por suas cópias em $\mathbb{R}$, que são únicas em virtude da unicidade dos morfismos entre as estruturas. Como consequência dessas identificações, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ compartilham, a partir de agora, os mesmos elementos neutros aditivos e multiplicativos, xingados respectivamente de 0 e 1.

A cardinalidade do *continuum*

Um dos fatos mais marcantes nos desenvolvimentos iniciais da Teoria dos Conjuntos e no estudo dos infinitos foi a *constatação* de que o *tipo de infinito* de $\mathbb{R}$ é *estritamente maior* do que o *tipo de infinito* de $\mathbb{N}$. Com a linguagem apresentada no capítulo anterior, isso pode se expressar com a desigualdade

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}, \tag{1.6}$$

onde $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$ denotam os números cardinais de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente[20]. A letra $\mathfrak{c}$, no caso, faz referência ao ***continuum***, expressão latina classicamente utilizada para fazer menção à noção da reta real como uma linha *contínua* – sem buracos.

[19] O contexto deixará claro quando $|x|$ representa o valor absoluto do *número real* x ou a cardinalidade do *conjunto* x. De qualquer forma, o leitor incomodado pode fazer como a maioria, e pensar que *números não são conjuntos* – algo impensável para os adeptos de ZFC, mas recorrente para os praticantes do *carpe diem*: `https://mathoverflow.net/a/90945/41407`.

[20] O leitor que evitou as discussões sobre cardinalidade e números cardinais do capítulo anterior pode entender a inequação (1.6) como uma abreviação para a afirmação "existe função injetora $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mas não existe função bijetora entre ambos". Dito isso, pode ser interessante repensar seus preconceitos matemáticos e dar uma chance para ler um pouco do assunto.

Com o jargão típico dos textos básicos de Análise, (1.6) se lê como "$\mathbb{R}$ é não-enumerável". Todavia, como já foi discutido no último capítulo, esse tipo de afirmação não *localiza* a posição de $\mathfrak{c}$ na *cadeia* dos números cardinais transfinitos: isso apenas diz que $\mathfrak{c}$ não é o menor tipo de infinito. Mas poderia ser $\aleph_1$? Talvez $\aleph_5$? Voltaremos a essa pergunta no final do capítulo.

Por ora, o problema imposto por (1.6) já é demasiado profundo para o presente contexto, posto que não se apresentou um conjunto para chamar de $\mathbb{R}$: apenas postulou-se a existência de um corpo ordenado completo. Ocorre que, como será mostrado a seguir, as duas propriedades fundamentais de $\mathbb{R}$ permitem estimar razoavelmente bem a *cardinalidade* de $\mathbb{R}$:

(i) por ser um corpo arquimediano, veremos que $\mathbb{R}$ não pode ser *grande demais*;

(ii) por ser completo, veremos que $\mathbb{R}$ não pode ser *pequeno demais*.

Definição 1.1.28. Denotaremos por $2^{\aleph_0}$ o número cardinal de $\wp(\mathbb{N})$. ¶

Exercício 1.27. Convença-se de que $|\wp(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$. Dica: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ + Exercício 0.58. ■

Lema 1.1.29. *Se $\mathbb{A}$ é corpo arquimediano, então $|\mathbb{A}| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Lembre-se de que a desigualdade do enunciado apenas abrevia a existência de uma função injetora $\mathbb{A} \to X$, para algum conjunto X que tenha *cardinalidade* $2^{\aleph_0}$. Ora, a correspondência

$$\begin{aligned} \partial \colon \mathbb{A} &\to \wp(\mathbb{Q}) \\ a &\mapsto \{q \in \mathbb{Q} : q_{\mathbb{A}} < a\} \end{aligned}$$

é uma injeção: se $a, b \in \mathbb{A}$ são distintos, então ocorre $a < b$ ou $b < a$, donde a condição arquimediana assegura a existência de $q \in \mathbb{Q}$ *entre* a e b, acarretando em $\partial(a) \neq \partial(b)$. Portanto, $|\mathbb{A}| \leq |\wp(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$. □

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano (por ser completo), segue que $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$. O próximo passo será mostrar a desigualdade oposta, i.e., $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$, pois daí o Teorema 0.1.28 (Cantor-Bernstein) garantirá $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Embora este lado da desigualdade possa ser demonstrado de modo mais rápido por meio da noção de *séries*, que serão tratadas no próximo capítulo, é possível maquiar os argumentos usando supremos de *séries finitas* – de qualquer forma, isso precisaria ser definido em algum momento.

Definição 1.1.30 (Operadores Σ e Π)**.** Definem-se $\sum\colon \operatorname{seq}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e $\prod\colon \operatorname{seq}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

(i) $\sum \emptyset := 0$ e $\prod \emptyset := 1$;

(ii) $\sum \langle f_i : i \leq n\rangle := \sum \langle f_i : i < n\rangle + f_n$ e $\prod \langle f_i : i \leq n\rangle := \prod \langle f_i : i < n\rangle \cdot f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f := \langle f_i : i \leq n\rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$. ¶

É comum que o primeiro contato com as *definições* acima cause desconforto. Porém, a coisa é bastante simples, e consiste tão somente de um algoritmo de repetição. No caso de

Σ, por exemplo, para $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ têm-se

$$\begin{aligned}
\sum \emptyset &:= 0;\\
\sum \langle x_0\rangle &:= \sum \emptyset + x_0 = 0 + x_0;\\
\sum \langle x_0, x_1\rangle &:= \sum \langle x_0\rangle + x_1 = x_0 + x_1;\\
\sum \langle x_0, x_1, x_2\rangle &:= \sum \langle x_0, x_1\rangle + x_2 = (x_0 + x_1) + x_2;\\
\sum \langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle &:= \ldots
\end{aligned}$$

Intuitivamente, $\sum \langle x_i : i \leq n\rangle$ expressa aquilo que se escreveria como $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Isto sugere notações bem mais práticas e *maleáveis* do que as anteriores.

Definição 1.1.31. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f := \langle f_i : i \leq n\rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(i) Tanto $\displaystyle\sum_{i\leq n} f_i$ quanto $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\sum \langle f_i : i \leq n\rangle$.

(ii) Tanto $\displaystyle\prod_{i\leq n} f_i$ quanto $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\prod \langle f_i : i \leq n\rangle$. ¶

A partir dessas definições, é relativamente simples adaptá-las a fim de dar sentido formal a variações típicas de *somatórios* e *produtórios*, como os listados a seguir:

(i) $\displaystyle\sum_{i=j}^{m} f_i$; (ii) $\displaystyle\prod_{i<m} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$; (iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \sum_{j+k=i} a_j b_k c_i$

(iv) $\displaystyle\prod_{x\in X} h(x)$ para um conjunto finito X e uma função $h\colon X \to \mathbb{R}$;

(v) $\sum F$ para um subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{R}$;

(vi) ...

O leitor provavelmente já tem familiaridade com esse tipo de notação e sabe como operá-las no dia a dia – mesmo assim, pode ser interessante consultar os enunciados do Exercício 1.38 para refrescar as ideias. Para o que faremos a seguir, é suficiente acreditar (ou resolver) o próximo

Exercício 1.28. Mostre que $\displaystyle\sup\left\{\sum_{n\leq m} \frac{1}{10^n} : m \in \mathbb{N}\right\} = \frac{10}{9}$. Dica: observe que para cada $m \in \mathbb{N}$ vale a identidade $\displaystyle\sum_{n\leq m} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9\cdot 10^m}$; alternativamente, confira o Exercício 1.39. ■

Lema 1.1.32. *Para cada $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, existe o número real $\psi(f) \in \mathbb{R}$ dado por*

$$\psi(f) := \sup\left\{\sum_{n\leq m} \frac{f(n)}{10^n} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Além disso, a correspondência $\psi\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é uma injeção.

Demonstração. Fixada $f \in 2^{\mathbb{N}}$, a ideia é usar a completude de $\mathbb{R}$ para garantir a existência de $\psi(f)$. Para tanto, é suficiente mostrar que o conjunto

$$S(f) := \left\{ \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

é não-vazio e limitado superiormente: obviamente, tem-se $S(f) \neq \emptyset$; para verificar a limitação, observe que $0 \leq f(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue que

$$\frac{1}{10^n} f(n) \leq \frac{1}{10^n} \Rightarrow \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} \leq \sum_{n \leq m} \frac{1}{10^n} \leq \frac{10}{9},$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$, onde a última desigualdade segue do exercício anterior.

Isso mostrou que $S(f) \neq \emptyset$ é limitado superiormente para cada $f \in 2^{\mathbb{N}}$. Consequentemente, a correspondência $\psi \colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ está bem definida, pois o supremo de $S(f)$ é único para cada $f \in 2^{\mathbb{N}}$. Resta apenas atestar a injetividade de ψ.

Para $p \in \mathbb{N}$ e $f \in 2^{\mathbb{N}}$ fixados, mostraremos que

$$\psi_p(f) := \sup \left\{ \sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^{n+p}} : m \in \mathbb{N} \right\} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{p-1}}. \tag{1.7}$$

De fato, já que $f(j) \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pode-se fazer

$$\sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^{n+p}} = \frac{1}{10^p} \sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^n} \leq \frac{1}{10^p} \sum_{n \leq m} \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^p} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{p-1}},$$

donde a desigualdade (1.7) segue.

O último ingrediente da prova consiste em observar que

$$\psi(f) = \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} + \psi_{m+1}(f) \tag{1.8}$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$, o que fica a cargo do leitor.

Enfim, para $g \in 2^{\mathbb{N}}$ com $f \neq g$, existe $m := \min\{j \in \mathbb{N} : f(j) \neq g(j)\}$ e, por falta de opções, não há perda de generalidade em supor $f(m) = 0$ e $g(m) = 1$. Segue então de (1.8), bem como da minimalidade de m, que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(f) = r + \psi_{m+1}(f) \text{ e } \psi(g) = r + \frac{1}{10^m} + \psi_{m+1}(g).$$

Por (1.7), finalmente, obtém-se

$$\begin{aligned} \psi(g) - \psi(f) = \frac{1}{10^m} + \psi_{m+1}(g) - \psi_{m+1}(f) \geq \frac{1}{10^m} + 0 - \psi_{m+1}(f) \geq \\ \geq \frac{1}{10^m} - \frac{1}{9 \cdot 10^m} = \frac{8}{9 \cdot 10^m} > 0, \end{aligned}$$

mostrando que $\psi(f) \neq \psi(g)$. □

Observação 1.1.33 (O que *realmente* está acontecendo?)**.** Secretamente, a prova acima consiste apenas em tomar sequências infinitas de 0's e 1's e interpretá-las como números reais por meio da expansão decimal. Assim, a sequência constante $\langle 1, \ldots, 1, \ldots \rangle$, por exemplo, se torna o número real que, na rua, xingaríamos de $1,1111\ldots$[21]. Em todo caso, a maior dificuldade da prova foi estimar os valores dos supremos sem a tecnologia das séries, que ainda será discutida. △

Corolário 1.1.34. $\mathbb{R}$ *é não-enumerável.*

Demonstração. Dos lemas anteriores, tem-se $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$, acarretando a igualdade $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ em virtude do Teorema de Cantor-Bernstein. Como $\wp(\mathbb{N})$ é não-enumerável pelo Teorema 0.1.24 (de Cantor), o resultado segue. □

Observação 1.1.35 (Para veteranos em Análise)**.** Há outras formas de demonstrar a não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Um argumento bastante comum (e mais intuitivo) consiste em tomar *qualquer* função $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e definir um número $r := r_0, r_1 r_2 r_3 \ldots$ exigindo-se que $r_n \in \{0, \ldots, 9\} \setminus \{a_{n,n}, 1, 9\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\varphi(n) := a_{n,0}, a_{n,1} a_{n,2} \ldots a_{n,n} \ldots$$

indica a expansão de $\varphi(n)$ em *base* 10. Como $r \notin \operatorname{im}(\varphi)$, segue que φ não pode ser sobrejetora.

Evidentemente, tal argumento depende de um estudo um pouco mais cuidadoso de *séries* e *representações* decimais, o que atrasaria a *formalização* do resultado no texto. Uma alternativa comum é apelar, por exemplo, para a *compacidade* dos *intervalos fechados e limitados* de $\mathbb{R}$, disfarçada como a *propriedade dos intervalos encaixantes*. A desvantagem dessa abordagem é, justamente, o disfarce: a fim de se valer *prematuramente* de propriedades topológicas da reta real, dá-se um nome pomposo para algo que vale bem mais geralmente.

Apesar de ser mais indireta, a abordagem adotada aqui tem a vantagem de *equiparar* a cardinalidade da reta com a cardinalidade de outro conjunto conhecido, que por sua vez tem sua não-enumerabilidade verificada de modo *quase* trivial (reveja o Teorema 0.1.24).△

Exercício 1.29. Diz-se que $r \in \mathbb{R}$ é **transcendente** se não existe polinômio $p \in \mathbb{Q}[x]$ com $p(r) = 0$. Mostre que o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável[22]. Conclua que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o conjunto dos **números irracionais**, é não-enumerável. ■

Corolário 1.1.36 (*Je le vois, mais je ne le crois pas*)**.** $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *com* $n > 0$.

Demonstração. Segue das desigualdades

$$2^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0 \cdot n} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

que por sua vez apenas indicam a existência de funções injetivas

$$2^{\mathbb{N}} \to (2^{\mathbb{N}})^n \to 2^{\mathbb{N}^n} \to 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}},$$

que o leitor não deve ter grandes dificuldades em obter. □

[21] Talvez o leitor tenha uma surpresa ao efetuar o cálculo "$10 \div 9$", em sua calculadora, por exemplo.
[22] O leitor interessado numa *definição formal* de polinômios pode consultar o Exercício 1.40.

Exercício 1.30. Complete a demonstração anterior. Dica: lembre-se de que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$; também pode ser útil relembrar alguns truques de *potenciação cardinal*, como os que foram apresentados nos Exercícios 0.59 e 0.69. ■

Observação 1.1.37 ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$?)**.** As discussões acima estabelecem $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ e, portanto, $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$. Uma pergunta bastante natural a se fazer daí é a seguinte: a última desigualdade é estrita ou, *na verdade*, é uma igualdade?

Essa pergunta, feita originalmente pelo próprio Cantor, ficou por muito tempo sem resposta, o que levou a *identidade* "$\aleph_1 = \mathfrak{c}$" a ser conhecida como **Hipótese do Contínuo** (**CH**), já que $\mathfrak{c}$ *representa* a cardinalidade do *continuum*.

Dito isso, eis a resposta para a pergunta: existem *modelos* para ZFC nos quais CH é verificável, e outros *modelos* para ZFC nos quais a *negação* de CH é verificável. Em outras palavras, há modelos em que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, mas também há modelos em que $\aleph_2 = \mathfrak{c}$, $\aleph_{42} = \mathfrak{c}$ e por aí vai[23], o que se resume em dizer que ZFC não *pode decidir* o *status* da Hipótese do Contínuo.

Isto é menos chocante do que parece: note que os axiomas da Teoria de Corpos, por exemplo, não decidem se a equação $x^2 + 1$ tem raiz no corpo, já que existem *modelos* de corpos nos quais não existem raízes (como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$...) e outros corpos nos quais tais raízes existem (como $\mathbb{C}$). Arrisco dizer que a estranheza com esse tipo de ocorrência em ZFC seja fruto da postura atual de se assumir a teoria (ingênua) dos conjuntos como a metalinguagem/metateoria subjacente no estudo teórico de outras áreas da Matemática, o que torna vertiginosa a experiência de utilizá-la no estudo da própria. △

Exercícios adicionais

FALTA ARRUMAR

Adiante, $\mathbb{K}$ denota um corpo ordenado qualquer, enquanto $\mathbb{R}$ denota *a* reta real.

Exercício 1.31. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ elementos quaisquer.

a) Mostre que $\inf\{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\} = 0_{\mathbb{K}}$.

b) Conclua que se para todo $\varepsilon > 0_{\mathbb{K}}$ ocorrer $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, então $\alpha = \beta$. ■

Exercício 1.32. Seja $A \subseteq \{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\}$ com $A \neq \emptyset$. Mostre que A é ilimitado superiormente se, somente se, $\inf\left\{\frac{1}{a} : a \in A\right\} = 0_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício 1.33. Mostre que se $\mathbb{K}$ é arquimediano, então $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 0_{\mathbb{K}}$. Dica: primeiro, mostre que $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{K}$. ■

Exercício 1.34. Considere $x, y \in \mathbb{K}$ quaisquer.

a) Mostre que se $x > y > 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > y^2$.

b) Mostre que se $x < y < 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 < y^2$.

c) Mostre que se $x > 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > x$ e, se $0_{\mathbb{K}} < x < 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 < x$. ■

[23] Mas não pode ocorrer $\aleph_\omega = \mathfrak{c}$, por razões que fogem ao escopo deste material.

Exercício 1.35. Mostre que

$$\frac{|x+y|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}}+|x+y|_{\mathbb{K}}} \leq \frac{|x|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}}+|x|_{\mathbb{K}}} + \frac{|y|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}}+|y|_{\mathbb{K}}}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$. Dica: considere separadamente os casos $|x+y|_{\mathbb{K}} \leq |x|_{\mathbb{K}}$, $|x+y|_{\mathbb{K}} \leq |y|_{\mathbb{K}}$ e $\max\{|x|_{\mathbb{K}}, |y|_{\mathbb{K}}\} \leq |x+y|_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício 1.36. Sejam $\delta \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\delta > -1_{\mathbb{K}}$ e $n > 0$, então vale a *desigualdade de Bernoulli*: $(1_{\mathbb{K}} + \delta)^n \geq 1_{\mathbb{K}} + n_{\mathbb{K}}\delta$. Dica: $1_{\mathbb{K}} + \delta > 0_{\mathbb{K}}$ e $n_{\mathbb{K}}\delta^2 \geq 0_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício 1.37. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{K}$ subconjuntos não-vazios e $r \in \mathbb{K}$. Supondo que $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ e $\sup B$ existem, mostre que:

a) se $A \subseteq B$, então $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$;

b) se $r \geq 0$, então $\inf(rA) = r \inf A$ e $\sup(rA) = r \sup A$;

c) se $r \leq 0$, então $\inf(rA) = r \sup A$ e $\sup(rA) = r \inf A$;

d) se $x \geq 0$ para todo $x \in A \cup B$, então $\inf(AB) = \inf A \inf B$ e $\sup(AB) = \sup A \sup B$;

e) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

f) Fazendo $x + B := \{x\} + B$ para $x \in \mathbb{K}$ qualquer, observe que $\sup(x + B) = x + \sup B$ e $\inf(x + B) = x + \inf B$. ■

Exercício 1.38. [tudo sobre somas finitas]

■

Exercício 1.39 (Séries disfarçadas)**.** Para $0_{\mathbb{K}} < a < 1_{\mathbb{K}}$, considere $P := \left\{\sum_{i=0}^{n} a^i : n \in \mathbb{N}\right\}$.

a) Mostre que P é limitado superiormente. Dica: note que $a^{n+1} < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Supondo que existe $S := \sup P$, mostre que $S = \dfrac{1}{1-a}$. Dica: note que as propriedades operatórias do supremo permitem escrever $aS = S - 1$, como no *migué* apresentado no Prefácio[24]. ■

Exercício 1.40 (Anéis de polinômios)**.** ■

Exercício 1.41 (Raízes vs. grau)**.** ■

Proposição 1.1.38 (Binômio de Pascal-Newton-Muitos-Outros-Antes-Deles)**.** *Sejam A um anel, $a, b \in A$ elementos de A e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j},$$

onde $\displaystyle\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j!)}$.

[24] A diferença é que, desta vez, sabemos porque o migué funciona.

Exercício 1.42. Demonstre a proposição acima, mas só se quiser muito. ■

Exercício 1.43 (Diferença de potências)**.** ■

Exercício 1.44 (Injetividade potências ímpares)**.** ■

Exercício 1.45. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, escreva $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Mostre que $|(a, b)| = |\mathbb{R}|$. Dica: obtenha uma bijeção entre $(0, 1)$ e $\mathbb{R}$ e outra entre $(0, 1)$ e (a, b). ■

Exercício 1.46. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, mostre que existe um número real $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ com $x < z < y$. ■

Exercício 1.47. Pense rápido: dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, qual a cardinalidade de $\mathbb{Q} \cap (a, b)$?■

Exercício 1.48. Mesma coisa do anterior, mas com $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em vez de $\mathbb{Q}$. ■

Exercício 1.49. Mostre que se $x^2 \leq y^2$, então $|x| \leq |y|$. ■

Exercício 1.50 (Raiz quadrada existe)**.** ■

Exercício 1.51. Mostre que se $x, y \geq 0$, então deve ocorrer $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$. Dica: $\gamma^2 \geq 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.52. Com respeito ao exercício anterior: em que situações pode-se garantir a igualdade? Dica: observe que $\sqrt{x}^2 = x$ para todo $x \geq 0$. ■

Exercício 1.53. Mostre que $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.54. Mostre que se $\alpha > \beta \geq 0$, então $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta}$. ■

Observação 1.1.39. É possível demostrar a existência de β por meio de supremos e da completude de $\mathbb{R}$. Porém, será mais prático esperar a revelação da conexidade e da continuidade para definir raízes quadradas e, mais geralmente, raízes n-ésimas para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. △

Capítulo 2

Um desvio topológico

Estou hoje dividido entre a lealdade que devo
à Tabacaria do outro lado da rua, como coisa real por fora,
e à sensação de que tudo é sonho, como coisa real por dentro.

Álvaro de Campos, *a.k.a.* Fernando Pessoa[0].

Geralmente, textos de Análise costumam utilizar *sequências* como o substrato principal para *a noção fundamental de limite* em $\mathbb{R}$ – por meio da qual todas as outras formas de limite se definem[1]. Dentre os motivos que justificam tal *protagonismo*, um dos mais importantes é, discutivelmente, o fato de que sequências convergentes caracterizam a *topologia usual* da reta – e, mais geralmente, a *topologia usual* de *espaços métricos*. Porém, como o presente texto seguirá o caminho das *nets* (ou redes)[2], parece-me conveniente fazer um *desvio topológico* a fim de ampliar o escopo de algumas argumentações recorrentes e, ao mesmo tempo, reforçar o caráter unificador da abordagem adotada[3].

2.0 Espaços topológicos e onde habitam

Definição 2.0.0. Uma **topologia** num conjunto X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X satisfazendo o seguinte:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$;

(iii) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

Em tal situação, diz-se que o par $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ é um **espaço topológico**, enquanto os membros da topologia $\mathcal{T}$ são chamados de **abertos de** X com respeito à topologia $\mathcal{T}$. Quando o contexto deixa a topologia clara, diz-se apenas que X é um espaço topológico, cujos *abertos* são exatamente os membros de sua topologia. ¶

[0] Tabacaria, 1928.

[1] Confira, por exemplo: Apostol [1], Figueiredo [7], Lima [14, 15], e Rudin [21] (embora os dois últimos o façam no contexto de *espaços métricos*).

[2] Introduzidas no próximo capítulo.

[3] Nesse sentido, pode-se dizer que se trata de um *blend* dos textos de Rudin [21] e Beardon [3]: o primeiro utiliza explicitamente espaços métricos num texto voltado para Análise na Reta, enquanto o segundo aborda noções clássicas de limites por meio de *nets*. Neste caso, o tempero adicional do presente texto será o uso explícito de espaços topológicos em vez de métricos.

Num primeiro contato, a definição acima pode soar como uma arbitrariedade simbólica sem qualquer utilidade: ela não parece se relacionar de maneira explícita com qualquer tipo de objeto matemático que já tenha sido tratado no texto, sejam eles algébricos ou ordenados. Porém, secretamente, espaços topológicos constituem um dos ambientes mais gerais para analisar questões de *continuidade* e *convergência*, o que pode ficar mais fácil de perceber com a investigação de alguns casos particulares importantes.

2.0.0 A reta estendida e seus intervalos

Dada uma ordem parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, é possível tomar elementos *artificiais*[4] distintos $p, q \notin \mathbb{P}$ e fazer $\overline{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \cup \{p, q\}$, para daí definir uma ordem parcial $\preceq$ que estende $\leq$, declarando-se $p \preceq x$ e $x \preceq q$ para qualquer $x \in \mathbb{P}$, e para $x, y \in \mathbb{P}$, $x \preceq y$ se, e somente se, $x \leq y$; em particular, obtém-se $p = \min \overline{\mathbb{P}}$ e $q = \max \overline{\mathbb{P}}$. A *reta estendida* é a ordem oriunda deste processo aplicado a $\mathbb{P} := \mathbb{R}$.

Definição 2.0.1. Denota-se por $\overline{\mathbb{R}}$ à reta real $\mathbb{R}$ acrescida dos pontos $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$, com a ordem definida acima, com $p := -\infty$ e $q := +\infty$, que passa a ser chamada de **reta estendida**. ¶

A adoção do símbolo "∞" para indicar os pontos artificiais acrescentados na reta é arbitrária. Dito isso, é importante ressaltar que, embora seja frequente se referir a tais pontos como "infinitos", seria mais correto xingá-los de *ilimitados*, posto que "infinito" costuma se referir à cardinalidade de conjuntos, enquanto "$-\infty$" e "$+\infty$" apenas denotam *extremos* artificiais da reta, algo bem mais específico[5].

Definição 2.0.2 (Intervalos abertos)**.** Para $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, os conjuntos

$$[-\infty, \beta) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < \beta\}, \tag{2.0}$$

$$(\alpha, +\infty] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \alpha < x\} \tag{2.1}$$

serão chamados de *intervalos abertos fundamentais* de $\overline{\mathbb{R}}$. Diremos que $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um **intervalo aberto** se I for interseção finita de intervalos fundamentais. ¶

Exercício 2.0. Mostre que os intervalos abertos contidos em $\mathbb{R}$ são da forma

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Em particular, note que $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são intervalos abertos contidos em $\mathbb{R}$. ■

Exercício 2.1. Para $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon > 0$, mostre que são equivalentes:

a) $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$;

b) $|x - y| < \varepsilon$;

c) $y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$. ■

É evidente que os intervalos fundamentais não são subconjuntos da reta, mas sim da reta estendida, posto que $-\infty \in [-\infty, \beta) \setminus \mathbb{R}$ e $+\infty \in (\alpha, +\infty] \setminus \mathbb{R}$. Desse modo, *não faz sentido* escrever algo como $[-\infty, 5)$ para se referir a um subconjunto de $\mathbb{R}$, mas faz sentido usar tal notação para se referir a um intervalo de $\overline{\mathbb{R}}$. Em geral, verifica-se

$$[-\infty, \beta) \cap \mathbb{R} = (-\infty, \beta) \quad \text{e} \quad (\alpha, +\infty] \cap \mathbb{R} = (\alpha, +\infty).$$

[4] Ou virtuais, fictícios, etc. Não faz diferença, dado que tudo aqui é algum tipo de ficção.

[5] Em particular, tais pontos adicionais permitem atribuir supremos e ínfimos para quaisquer subconjuntos de $\mathbb{R}$, mesmo que sejam ilimitados – ou o vazio (Exercício 3.46).

Observação 2.0.3. O Exercício 0.72 apresentou uma definição geral de intervalo, válida em ordens parciais. No caso da reta (real ou estendida), a (in) existência de supremos e ínfimos permite classificar *todos* os intervalos de $\mathbb{R}$. Com efeito, se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo não-vazio, então I admite ínfimo (ou supremo) em $\mathbb{R}$ a depender de sua limitação inferior em $\mathbb{R}$ (ou superior, respectivamente). Desse modo, com alguma paciência, não é difícil perceber que os intervalos *reais* (i.e., contidos em $\mathbb{R}$) assumem as seguintes formas:

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, o intervalo *aberto* e limitado de extremos a e b, caso em que o intervalo é limitado, mas seus ínfimo e supremo não pertencem ao intervalo;

(ii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, o intervalo limitado "fechado" em a e "aberto" em b, caso em que o intervalo é limitado, mas apenas o seu ínfimo pertence ao intervalo;

(iii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, o intervalo limitado "aberto" em a e "fechado" em b, análogo ao anterior;

(iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, o intervalo **fechado** e limitado de extremos a e b; caso em que o intervalo é limitado e contém tanto o ínfimo quanto o supremo;

(v) $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, o intervalo *aberto* e ilimitado inferiormente de extremo b, caso em que o intervalo é limitado apenas superiormente, mas seu supremo não pertence ao intervalo;

(vi) $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ e $[a, +\infty)$ têm nomenclaturas, definições e justificativas análogas aos anteriores.

Em geral, não se escreve (a, b) com $b \leq a$ pois, em tais situações, $(a, b) = \emptyset$. Futuramente, veremos que os intervalos de $\mathbb{R}$ são, precisamente, os seus subconjuntos *conexos*. Mas não há razão para adiantar tanto as coisas. △

O leitor não precisa se preocupar (muito?) com a natureza *ontológica* dos pontos $+\infty$ e $-\infty$, i.e., se eles *realmente* existem no mesmo sentido em que os números reais *existem*. Se, por um lado, os *pontos no infinito* não existem *fisicamente*, por outro lado, tampouco os pontos da reta *real* existem: afinal de contas, tudo o que tem sido descrito aqui são modelos abstratos baseados em certas intuições com motivações geométrico-físicas.

Definição 2.0.4. Diremos que um subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é **aberto em** $\overline{\mathbb{R}}$ (ou **de** $\overline{\mathbb{R}}$) se para todo $x \in A$ existir um intervalo aberto $I \subseteq A$ com $x \in I$. ¶

Exemplo 2.0.5. Por vacuidade, $\emptyset$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$, já que o contrário exigiria a existência de $x \in \emptyset$ (e...). Analogamente, $\overline{\mathbb{R}}$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$. ▲

Exemplo 2.0.6. Intervalos abertos são abertos em $\overline{\mathbb{R}}$, já que eles testemunham a própria condição que deveriam satisfazer: explicitamente, para um intervalo aberto I e $x \in I$, o próprio I é um intervalo aberto satisfazendo $x \in I$ com $I \subseteq I$. ▲

Exemplo 2.0.7. Se $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ são abertos em $\overline{\mathbb{R}}$, então $A \cap B$ também é: se $A \cap B = \emptyset$, ótimo; se não, então para $x \in A \cap B$ existem intervalos abertos $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ que testemunham o fato de A e B serem abertos com $x \in A \cap B$, i.e., tais que $x \in I \cap J$, $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$; como a interseção de intervalos é intervalo (Exercício 0.72), segue em particular que a interseção de dois intervalos abertos é um intervalo aberto; da arbitrariedade do ponto x tomado, conclui-se que $A \cap B$ é aberto. ▲

Exemplo 2.0.8. Por fim, se $A_i \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$ para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ é aberto em $\overline{\mathbb{R}}$, posto que para $x \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ existe $j \in \mathcal{I}$ com $x \in A_j$, acarretando a existência de um intervalo aberto $I \subseteq A_j$ com $x \in I$ e, consequentemente, $I \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$. ▲

Exemplo 2.0.9. Intervalos *fechados* de algum lado não costumam ser *abertos* em $\overline{\mathbb{R}}$. Para $I := [0, \alpha)$, por exemplo, não existe intervalo aberto $J \subseteq I$ com $0 \in J$, já que todo intervalo aberto que contém 0 também contém um intervalo aberto da forma $(-r, r)$ para r real com $r > 0$. ▲

Com a terminologia introduzida pela Definição 2.0.0, os Exemplos 2.0.5, 2.0.7 e 2.0.8 mostram que a família

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}} := \left\{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} : \forall x \in A \text{ existe um intervalo aberto } I \subseteq \overline{\mathbb{R}} \text{ tal que } x \in I \subseteq A\right\}$$

define uma *topologia em* $\overline{\mathbb{R}}$: esta é a **topologia usual da reta estendida**. Já o Exemplo 2.0.9, por sua vez, esconde uma caracterização mais expressiva para a Definição 2.0.4.

Proposição 2.0.10. *Sejam $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ um aberto de $\overline{\mathbb{R}}$ e $a \in A$ um ponto.*

(i) *Se $a \in \mathbb{R}$, então existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subseteq A$.*

(ii) *Se $a := +\infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ tal que $(M, +\infty] \subseteq A$.*

(iii) *Se $a := -\infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ tal que $[-\infty, -M) \subseteq A$.*

Demonstração. Para o primeiro caso, existe um intervalo aberto $I \subseteq A$ com $a \in I$, onde I é uma interseção finita de intervalos abertos fundamentais. Como $a \in \mathbb{R}$, não há perda de generalidade em assumir $I = (\alpha, \beta)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$, de modo que basta tomar $r := \min\{a - \alpha, \beta - a\}$, já que qualquer $x \in (a - r, a + r)$ satisfaz $x \in (\alpha, \beta)$, dado que

$$\alpha \leq a - r < x < a + r \leq \beta.$$

Para o segundo caso, note que se $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto com $+\infty \in I$, então I é um intervalo aberto fundamental da forma $(\alpha, +\infty]$ com $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$. Logo, se $+\infty \in A$, então existe $\alpha \neq \infty$ com $(\alpha, +\infty] \subseteq A$, de modo que qualquer $M \in \mathbb{R}$ com $M > \alpha$ satisfaz o que se pede. O terceiro caso é análogo. □

Em particular, a condição (i) na proposição anterior permite definir uma noção de “aberto” em $\mathbb{R}$ que não apela para a reta estendida.

Definição 2.0.11. Diremos que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é **aberto em** $\mathbb{R}$ (ou **de** $\mathbb{R}$) se para todo $x \in A$ existir $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$. ¶

Exercício 2.2. Mostre que os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ são abertos. ■

Exercício 2.3. Mostre que a família $\tau_{\mathbb{R}}$ formada pelos subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$. ■

Definição 2.0.12. Para facilitar futuras referências: a topologia acima será chamada de **topologia usual da reta**. ¶

Exercício 2.4. Mostre que $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, existe $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ aberto em $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $B \cap \mathbb{R} = A$. ■

Observação 2.0.13 (IMPORTANTE: abertos $\neq$ intervalos abertos)**.** Nem todo subconjunto aberto em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Por exemplo, o subconjunto $U := (1,3) \cup (5,7)$ é aberto em $\mathbb{R}$, mas não é um *intervalo*[6]: U é aberto por ser reunião dos (intervalos) abertos $(1,3)$ e $(5,7)$; no entanto, U não é intervalo, já que $2,6 \in U$ com $2 < 4 < 6$ e, mesmo assim, $4 \notin U$. Evidentemente, tais ressalvas se aplicam a $\overline{\mathbb{R}}$. △

Em certo sentido, a condição de "ser aberto" tenta capturar de modo *qualitativo* um comportamento *quantitativo* fundamental apresentado pelos intervalos abertos. Dado qualquer ponto $a \in (0,1)$, por exemplo, sempre é possível obter outro intervalo *menor* em torno de a que esteja inteiramente contido em $(0,1)$: basta usar uma lupa muito boa e um lápis suficientemente afiado. Como veremos na seção sobre *continuidade*, essa abordagem generalista permite investigar problemas de convergência por meio de diferentes armas *métricas*. Por falar nelas...

2.0.1 Métricas e suas bolas

Definição 2.0.14. Dado um conjunto X, diz-se que uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é uma **métrica** se para quaisquer $x, y, z \in X$ ocorrer

(i) (positividade)[7] $d(x,y) \geq 0$,

(ii) (*discernibilidade*) $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,

(iii) (simetria) $d(x,y) = d(y,x)$,

(iv) (**desigualdade triangular**) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Em tal situação, diz-se que $\langle X, d\rangle$ é um **espaço métrico** – embora, geralmente, diga-se apenas que X é um espaço métrico, com a métrica d implícita pelo contexto. O número real $d(x,y)$ denota a *distância entre x e y.* ¶

Exemplo 2.0.15 (Métrica usual de $\mathbb{R}$)**.** As condições acima claramente tentam imitar o comportamento da função $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ dada por $d(x,y) := |x-y|$, que ao ser interpretada geometricamente, *mede* a distância entre os números reais x e y. ▲

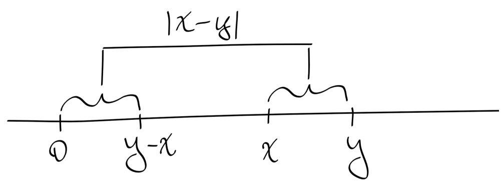


Figura 2.0: Por um lado, $|r|$ mede o "tamanho" do número real r. Por outro lado, $y - x$ é, algebricamente, o que "falta" somar a x para obter y.

A métrica em $\mathbb{R}$ induzida por seu valor absoluto é caso particular de uma situação bem mais geral.

Definição 2.0.16. Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Diz-se que $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ é uma **norma** se para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ valer

[6] No sentido da definição de intervalo! Note que a Observação 2.0.3 já classificou todos os tipos de intervalos de $\mathbb{R}$.

[7] Exigir isso é supérfluo diante dos outros axiomas: $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,y) = d(x,y)$.

(*i*) $\|u\| \geq 0$,

(*ii*) $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0_E$,

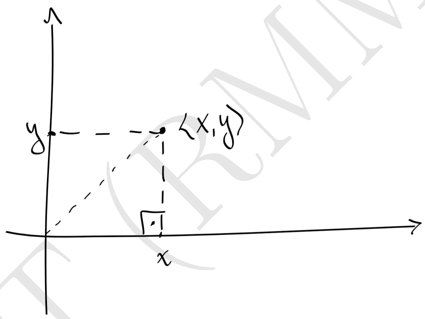
(*iii*) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$, e

(*iv*) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Em tal situação, diz-se que $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é um **espaço normado** – embora, geralmente, diga-se apenas que E é um espaço normado, com a norma $\|\cdot\|$ implícita pelo contexto. O número real $\|x\|$ denota a *norma de* x. ¶

Sempre que $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é um espaço normado, a função $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(u, v) := \|u - v\|$ é uma métrica em E, posto que cada uma das condições acima assegura a condição correspondente na definição de métrica (verifique?). Em tal situação, diz-se que a métrica d é **induzida** pela norma $\|\cdot\|$.

Exemplo 2.0.17. A **norma euclidiana** em $\mathbb{R}^2$ é a função $\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que associa cada par $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ ao número real $\|\langle x, y\rangle\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}$. *Intuitivamente*, ela corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo determinado pelos pontos $\langle 0, 0\rangle$, $\langle x, 0\rangle$ e $\langle x, y\rangle$, como na figura abaixo.



Das exigências para ser uma norma, apenas a última[8] não é imediata: dados $u := \langle x, y\rangle$ e $v := \langle x', y'\rangle$, deve-se verificar a desigualdade $\|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$, i.e.,

$$\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x')^2 + (y')^2}. \tag{2.2}$$

Para isso, observe que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \bullet v)$, onde $u \bullet v$ *abrevia* a expressão $xx' + yy'$. Ocorre que $|u \bullet v| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$, em virtude do

Lema 2.0.18 (Cauchy-Schwarz[9])**.** *Para quaisquer* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *vale* $|u \bullet v| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$.

Demonstração. Note que para $u := \langle x, y\rangle$ e $v := \langle x', y'\rangle$, temos

$$\begin{aligned}(xy' - x'y)^2 + (x'y - xy')^2 &= x^2(y')^2 - 2xx'yy' + (x')^2y^2 + (x')^2y^2 - 2xx'yy' + x^2(y')^2 = \\ &= 2(x^2 + y^2)((x')^2 + (y')^2) - 2(xx' + yy')^2 = \\ &= 2\|u\|_2^2 \cdot \|v\|_2^2 - 2(u \bullet v)^2,\end{aligned}$$

acarretando $(u \bullet v)^2 \leq \|u\|_2^2 \cdot \|v\|_2^2$ (por quê?!). Logo, em virtude do Exercício 1.49, segue o resultado. □

[8] *A.k.a.* desigualdade triangular para normas.

[9] Para a versão geral da desigualdade de Cauchy-Schwarz, confira o Exercício 2.29.

De volta ao processo de demonstrar (2.2): a desigualdade de Cauchy-Schwarz permite afirmar que $\|u+v\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\|u\|_2 \cdot \|v\|_2 = (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$, donde a desigualdade desejada segue. ▲

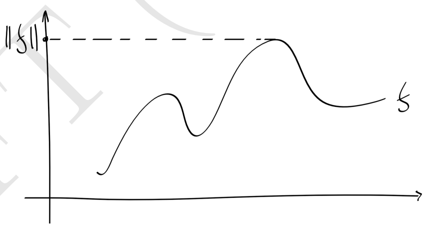
Exemplo 2.0.19 (Outras normas em $\mathbb{R}^2$)**.** Embora a norma euclidiana seja visualmente mais agradável, ela não constitui a única forma de medir distâncias em $\mathbb{R}^2$. A **norma da soma**[10] é a função $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que faz $\|\langle x, y\rangle\|_1 := |x| + |y|$ para cada $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. *Intuitivamente*, ela corresponde à distância percorrida para chegar de $\langle 0, 0\rangle$ até $\langle x, y\rangle$ por meio dos catetos do triângulo determinado por $\langle 0, 0\rangle$, $\langle x, 0\rangle$ e $\langle x, y\rangle$.

Por sua vez, a **norma do máximo** é a função $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que faz $\|\langle x, y\rangle\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$ para qualquer par $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$. *Intuitivamente*, o maior cateto do triângulo determinado por $\langle 0, 0\rangle$, $\langle x, 0\rangle$ e $\langle x, y\rangle$ passa a representar a norma de $\langle x, y\rangle$. ▲

Exercício 2.5. Mostre que as normas da soma e do máximo são, de fato, normas em $\mathbb{R}^2$. ■

Observação 2.0.20. Evidentemente, as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são distintas entre si, no sentido de que para um mesmo vetor $u \in \mathbb{R}^2$, os números $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ e $\|u\|_\infty$ podem ser dois a dois distintos. Por exemplo, para $u := \langle 1, 1\rangle$, verifica-se $\|u\|_1 = 2$, $\|u\|_2 = \sqrt{2}$ e $\|u\|_\infty = 1$. Não obstante, todas essas normas são *topologicamente indistinguíveis*, como veremos oportunamente. △

Exemplo 2.0.21 (Adiável: norma de funções)**.** Para um conjunto X fixado, podemos considerar o conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ cujos elementos são todas as *funções limitadas* da forma $X \to \mathbb{R}$, i.e., $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) := \left\{f \in \mathbb{R}^X : \exists M > 0 \text{ com } |f(x)| \leq M \text{ para todo } x \in X\right\}$. Em particular, como a imagem de cada $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ limitado (superiormente), é lícito considerar o número $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$.



A notação $\|\cdot\|_\infty$ adotada acima não é acidental, e se deve ao seguinte: $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e, mais ainda, a correspondência $f \mapsto \|f\|_\infty$ determina uma norma, muitas vezes xingada de **norma do supremo**. A primeira parte da afirmação se deve ao fato de que $f + g$, $f \cdot g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ sempre que $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ (verifique?)[11]. Para a segunda parte: as condições (i), (ii) e (iii) na definição de norma são automáticas, ao passo que para $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, tem-se

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

para qualquer $x \in X$, mostrando que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ é limitante superior do conjunto $\{|f(x) + g(x)| : x \in X\}$ e, portanto, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ▲

[10] Também xingada de *norma do táxi*.

[11] Para leitores versados em Álgebra Linear: $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, que obviamente contém a função nula, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^X$.

Exemplo 2.0.22. No caso particular em que X é finito, digamos $X := \{b_1, \ldots, b_n\}$, as funções de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ se comportam, essencialmente, como as n-uplas de $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, a função que associa cada $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ à n-upla $\langle f(b_1), \ldots, f(b_n)\rangle$ é um *isomorfismo de espaços vetoriais*, i.e., é uma função $\mathbb{R}$-linear bijetora. Em particular, como a notação sugere, o espaço normado $\langle \mathbb{R}_2, \|\cdot\|_\infty\rangle$ é caso particular de $\langle \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\rangle$: basta tomar X como um conjunto com dois elementos. ▲

Observação 2.0.23. Nem toda métrica é induzida por uma norma. Primeiro: enquanto normas exigem estrutura vetorial no ambiente em que se inserem, métricas são definíveis em qualquer conjunto. Logo, enquanto uma métrica d sobre um *conjunto* X permite considerar qualquer subconjunto $Y \subseteq X$ como ***subespaço* métrico**[12], o mesmo não pode ser dito para subconjuntos de espaços normados, já que nem todo subconjunto de um espaço vetorial é um espaço vetorial.

Segundo: a métrica induzida por uma norma respeita as dilatações e contrações provocadas pela multiplicação. Com efeito, se d é a métrica num espaço vetorial E induzida por uma norma $\|\cdot\|$, então para $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, verifica-se facilmente que $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$. Em particular, $d \colon E \times E \to \mathbb{R}$ é *ilimitada*, i.e., para todo $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$, existem $x, y \in E$ tais que $d(x, y) > M$. Ocorre que nem toda métrica é ilimitada. △

Exercício 2.6. Seja $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ um espaço normado. Defina $d_L \colon E \times E \to \mathbb{R}$ pela regra

$$d_L(u, v) := \frac{\|u - v\|}{1 + \|u - v\|},$$

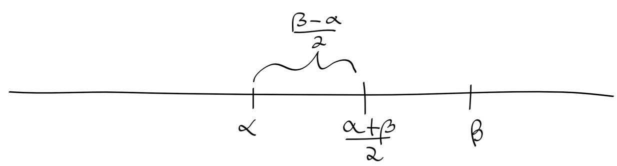
e mostre que d_L é uma métrica sobre E. Tal métrica é induzida por *alguma* norma?[13] ■

Exercício 2.7. Dado um conjunto X qualquer, mostre que a função $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ que faz $d(x, y) := 0$ se $x = y$, e $d(x, y) := 1$ caso contrário, é uma métrica em X, chamada de **métrica zero-um**. Faz algum sentido perguntar se ela é induzida por uma norma? ■

Os exemplos acima devem ter ajudado a evidenciar a vasta gama de objetos que podem ser tratados como espaços métricos. O próximo passo é observar que a definição dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ pode ser feita em termos de sua métrica natural: com efeito, para (α, β) com $\alpha < \beta$, ao fazer $x := \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ e $r := \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, resulta

$$(\alpha, \beta) = (x - r, x + r) = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) < r\}.$$

Exercício 2.8. Convença-se de que as identidades acima estão certas. ■



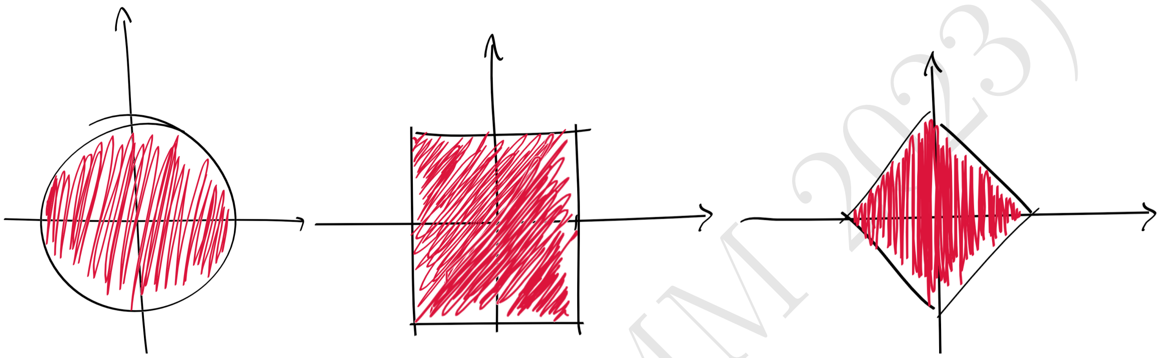
[12]Basta definir $d_Y \colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ fazendo $d_Y(y, y') := d(y, y')$ para qualquer par $\langle y, y'\rangle \in Y \times Y$, já que tais pares evidentemente pertencem a $X \times X$ (que é o domínio de d, por definição).

[13]Cuidado para não confundir a sua linguagem natural com as terminologias explicitamente definidas. No caso, uma métrica d é induzida por uma norma se ocorrer exatamente $d(x, y) := \|x - y\|$ para quaisquer x e y. O mero fato de se *usar* uma norma na definição de uma métrica, como na métrica d_L, não significa que a última é induzida pela primeira.

Uma vez que a última encarnação do intervalo aberto (α, β) usa apenas a noção de métrica presente em $\mathbb{R}$, abrem-se as portas para generalizar a noção de intervalo aberto em espaços métricos.

Definição 2.0.24. Dado um espaço métrico $\langle X, d\rangle$, para cada ponto $x \in X$ e número real $r > 0$, define-se a d-**bola aberta de centro** x **e raio** r como sendo a família $B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Quando não houver risco de confusão, o sufixo "d-" será suprimido. ¶

Exemplo 2.0.25 (Bolas em $\mathbb{R}^2$)**.** O uso da palavra "bola" é motivado pela interpretação geométrica das *bolas* definidas por meio das normas euclidianas em $\mathbb{R}^2$ (no plano) e $\mathbb{R}^3$ (no espaço[14]), como sugerido pela figura a seguir, à esquerda.



No entanto, o leitor deve se desvincular o quanto antes da ideia de que bolas precisam ser "redondas". Chamando por d_∞ a métrica em $\mathbb{R}^2$ induzida pela norma do máximo e indicando por 0 a "origem" do plano, não é difícil perceber que $B_{d_\infty}(0, 1)$ corresponde ao quadrado central na figura anterior.

Exercício 2.9. Convença-se de que as afirmações anteriores estão certas. ■

Da mesma forma, chamando por d_1 a métrica em $\mathbb{R}^2$ induzida pela norma da soma, a bola $B_{d_1}(0, 1)$ corresponde ao último quadrado na figura anterior, à direita. Com efeito, deve-se ter $u := \langle x, y\rangle \in B_{d_1}(0, 1)$ se, e somente se, $\|u\|_1 < 1$, i.e., $|x| + |y| < 1$. Ocorre que tal desigualdade equivale a $|x| - 1 < y < 1 - |x|$, e os pontos $\langle x, y\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ com tal propriedade são, precisamente, aqueles que se encontram na interseção das duas regiões esboçadas na Figura 2.1. ▲

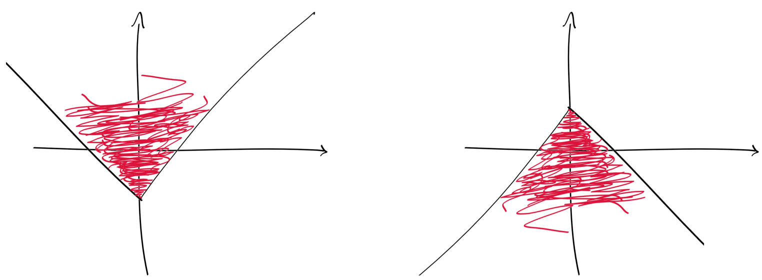
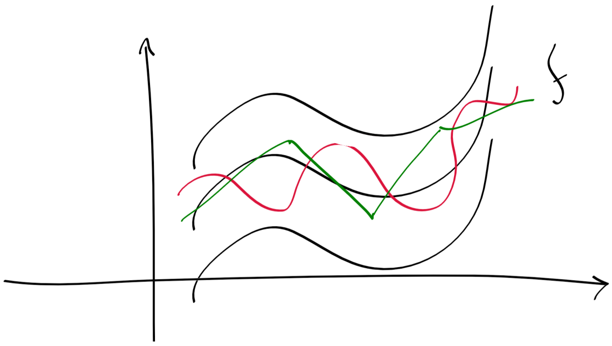


Figura 2.1: Os gráficos das inequações $|x| - 1 < y$ e $y < 1 - |x|$, respectivamente.

[14] Em $\mathbb{R}^3$, a norma euclidiana faz $\|\langle x, y, z\rangle\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Em tempo, o leitor pode ter se indagado sobre o significado do subíndice "2" em "$\|\cdot\|_2$": trata-se de um indicativo implícito à raiz quadrada. Em contextos mais avançados, é comum utilizar normas da forma $\|\cdot\|_p$, definidas em termos de potências e raízes p-ésimas.

Exemplo 2.0.26 (Adiável: bolas em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$)**.** Embora $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ seja frequentemente um espaço vetorial com *dimensão infinita*[15], é possível interpretar graficamente o que seria uma bola em torno de uma função limitada $f: X \to \mathbb{R}$.



Chamando por d_∞ a métrica em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ induzida pela norma do supremo, uma função limitada $g: X \to \mathbb{R}$ pertence à bola aberta $B_{d_\infty}(f, r)$ se $\|f - g\|_\infty < r$, o que por sua vez assegura que $|f(x) - g(x)| < r$ para todo $x \in X$. Logo, pode-se pensar em $B_{d_\infty}(f, r)$ como o conjunto das funções cujo gráfico fica inteiramente contido na "faixa" de raio r determinada *em torno* do gráfico de f. Embora não seja a interpretação mais precisa[16], ela é razoável para ajudar leitores dependentes de intuição geométrica. ▲

Exemplo 2.0.27 (Bolas unitárias)**.** Ao considerar um conjunto X com a métrica zero-um (Exercício 2.7), têm-se apenas dois tipos de bolas abertas: para $0 < r < 1$, $B_d(x, r) = \{x\}$ para qualquer $x \in X$, enquanto $B_d(x, r) = X$ para todo $r \geq 1$. ▲

Com os intervalos abertos generalizados para espaços métricos quaisquer, definir a *topologia* de um espaço métrico se torna um evento inevitável.

Definição 2.0.28. Para um espaço métrico $\langle X, d\rangle$, diremos que um subconjunto $A \subseteq X$ é **aberto em** X (ou **de** X) se para todo $x \in A$ existir $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq A$. ¶

Exercício 2.10. Mostre que bolas abertas são abertas. ■

Na prática, a definição acima determina como abertos em X todos os subconjuntos que podem ser expressos como reuniões de bolas abertas. De fato, se A é aberto e $r_x > 0$ é tal que $B_d(x, r_x) \subseteq A$ para cada $x \in A$, então $A = \bigcup_{x \in A}\{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B_d(x, r_x) \subseteq A$; por outro lado, é claro que se $x \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_d(y_i, r_i)$, então $x \in B_d(y_j, r_j)$ para algum $j \in \mathcal{I}$, donde o exercício anterior assegura $r > 0$ com $B_d(x, r) \subseteq B_d(y_j, r_j) \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} B_d(y_i, r_i)$.

Proposição 2.0.29. *A família τ_d composta pelos subconjuntos abertos em X constitui uma topologia em X.*

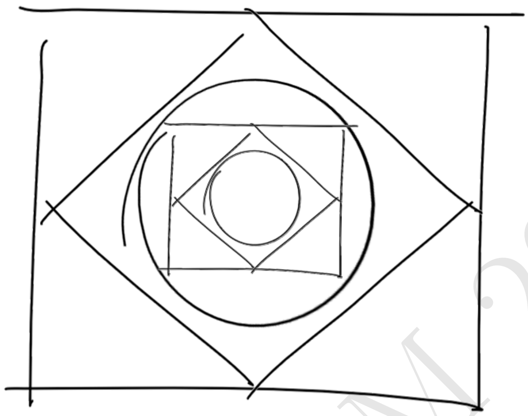
Demonstração. A argumentação é similar à que se utilizou para mostrar que $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ é uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$, exceto pelo seguinte: enquanto a interseção de intervalos é um intervalo, a interseção de bolas abertas não precisa ser uma bola aberta. Porém, trata-se de um problema contornável: dados abertos $A, B \subseteq X$ e $x \in A \cap B$, existem $r, s > 0$ tais que $B_d(x, r) \subseteq A$ e $B_d(x, s) \subseteq B$, de modo que para $t := \min\{r, s\}$ verifica-se $B_d(x, t) \subseteq A \cap B$. O leitor fica a cargo do restante. □

[15] A *dimensão* de um espaço vetorial é a cardinalidade de qualquer uma de suas bases, que por sua vez são subconjuntos *linearmente independentes* que geram o espaço vetorial.

[16] A rigor, $B_\infty(f, r)$ é a reunião das "faixas" de raio r' em torno do gráfico de f, para cada $r' \in (0, r)$ (por quê?).

A menos de menção contrária explícita, todo espaço métrico $\langle X, d\rangle$ será considerado com a topologia τ_d discutida acima, que para efeitos de referência será xingada de **topologia usual do espaço métrico** X. Claramente, a topologia usual de $\mathbb{R}$ explicitada no Exercício 2.3 é a topologia usual de $\mathbb{R}$ como espaço métrico com a métrica $d(x, y) := |x - y|$. A proposição a seguir, por outro lado, pode não ser tão clara.

Proposição 2.0.30. *As topologias τ_1, τ_2 e τ_∞ em $\mathbb{R}^2$ induzidas pelas métricas d_1, d_2 e d_∞, respectivamente, são idênticas.*



Demonstração. É suficiente mostrar as inclusões $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $\tau_2 \subseteq \tau_\infty$ e $\tau_\infty \subseteq \tau_1$, o que é bem mais fácil entender do que escrever (vide a figura anterior). Para a primeira inclusão, por exemplo, deve-se tomar $A \in \tau_1$ a fim de mostrar que $A \in \tau_2$: ora, para assegurar $A \in \tau_2$, para cada $u \in A$ *precisa* existir uma bola $B_{d_2}(u, r) \subseteq A$ para *algum* $r > 0$; por outro lado, por A ser aberto da topologia τ_1, tem-se garantida a existência de $s > 0$ com $B_{d_1}(u, s) \subseteq A$; chamando $u := \langle x, y\rangle$ e $v := \langle a, b\rangle$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz assegura que

$$\|u - v\|_1^2 = (|x - a| + |y - b|)^2 \leq (|x - a|^2 + |y - b|^2)(1 + 1) = 2\|u - v\|_2^2,$$

donde segue que basta tomar $r := \dfrac{s}{\sqrt{2}}$, pois daí $B_{d_2}(u, r) \subseteq B_{d_1}(u, s) \subseteq A$.

De modo análogo, para a segunda e terceira inclusões, basta mostrar que para quaisquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $s > 0$, existem $r > 0$ e $r' > 0$ com $B_{d_\infty}(u, r) \subseteq B_{d_2}(u, s)$ e $B_{d_1}(u, r') \subseteq B_{d_\infty}(u, s)$, tarefa que fica a cargo do leitor. □

Exercício 2.11. Complete a demonstração anterior. Dica: para a segunda inclusão, use $r := \dfrac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}$; para a terceira, observe que se $a, b, c \geq 0$ com $a + b < c$, então $a, b < c$. ■

Definição 2.0.31. Para facilitar futuras referências, diremos que a topologia em $\mathbb{R}^2$ induzida por qualquer uma das métricas d_1, d_2 ou d_∞ é a **topologia usual de** $\mathbb{R}^2$. ¶

Exercício 2.12. Mostre que se X é dotado da métrica zero-um, então todo subconjunto de X é aberto. Conclua que, ao fazer $X := \mathbb{R}$, a topologia induzida pela métrica zero-um difere da topologia usual de $\mathbb{R}$. ■

Num primeiro momento, a proposição acima parece tão clara quanto inútil: normas e métricas diferentes podem induzir a mesma topologia. A aparente irrelevância dessa informação, porém, desaparecerá no momento em que discutirmos *continuidade* e *convergência*: duas noções importantíssimas e que, secretamente, dependem unicamente da topologia de um espaço. Porém, a narrativa exige mais um subtópico antes de avançarmos.

2.0.2 Subespaços e produtos

A Observação 2.0.23 abordou, entre outras coisas, a possibilidade de utilizar a métrica de um espaço métrico $\langle X, d\rangle$ para tratar qualquer subconjunto $Y \subseteq X$ como espaço métrico: explicitamente, declara-se $d_Y(y, y') := d(y, y')$ para quaisquer $y, y' \in Y$, o que na prática significa *medir as distâncias* entre pontos num subconjunto "menor" da mesma forma que se faz no conjunto "maior". A naturalidade dessa ideia se reflete na identidade

$$B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y,$$

que o leitor não deve ter dificuldades para verificar. Consequentemente:

Proposição 2.0.32. *Nas condições acima, $A \subseteq Y$ é aberto em Y se, e somente se, existe $B \subseteq X$ aberto em X tal que $A = B \cap Y$.*

Demonstração. Se A é aberto em Y, então para cada $y \in A$ existe $r_y > 0$ satisfazendo $B_{d_Y}(y, r_y) \subseteq A$. Logo, ao fazer $B := \bigcup_{y\in Y} B_d(y, r_y)$, tem-se B aberto em X e

$$A = \bigcup_{y\in A} B_{d_Y}(y, r_y) = \bigcup_{y\in A} B_d(y, r_y) \cap Y = \left(\bigcup_{y\in A} B_d(y, r_y)\right) \cap Y = B \cap Y.$$

Por outro lado, se B é aberto em X e $A = B \cap Y$, então para $y \in A \subseteq B$ qualquer existe $r > 0$ com $B_d(y, r) \subseteq B$, de modo que

$$B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y \subseteq B \cap Y = A,$$

mostrando que A é aberto em Y. □

A proposição acima sugere como promover subconjuntos de espaços topológicos ao patamar de espaços topológicos ou, posto de outra forma, como definir os abertos de um subconjunto num espaço topológico.

Definição 2.0.33. Dado um espaço topológico $\langle X, \tau\rangle$ e um subconjunto $Y \subseteq X$, diremos que $A \subseteq Y$ é **aberto em** Y se existir $B \subseteq X$ aberto em X satisfazendo $A = B \cap Y$. ¶

Proposição 2.0.34. *A família τ_Y dos subconjuntos abertos em Y constitui uma topologia em Y.*

Demonstração. Note que $\emptyset$ e Y são abertos em Y pois $\emptyset = \emptyset \cap Y$ e $Y = X \cap Y$. Para a interseção, observe que se $A = B \cap Y$ e $A' = B' \cap Y$, então $A \cap A' = (B \cap B') \cap Y$. Finalmente, se para cada $i \in \mathcal{I}$ tem-se $A_i = B_i \cap Y$ para $B_i \subseteq X$ aberto em X, então $B := \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$ é aberto em X e $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i = B \cap Y$. □

Observação 2.0.35 (Opcional: uso desnecessário do Axioma da Escolha)**.** Implicitamente, ao definir B, escolhemos um $B_i \subseteq X$ satisfazendo $A_i = B_i \cap Y$ para cada $i \in \mathcal{I}$, o que exige o Axioma da Escolha nas situações em que $\mathcal{I}$ é infinito. Isto pode ser evitado ~~mas a que custo?~~: basta definir $C := \{x \in X : \text{existem } i \in \mathcal{I} \text{ e } D \subseteq X \text{ aberto em } X \text{ com } x \in D \text{ e } A_i = D \cap Y\}$, que também é aberto em X e satisfaz $A = C \cap Y$. △

Definição 2.0.36. Nas condições acima, Y será chamado de **subespaço** (**topológico**) de X. ¶

Exemplo 2.0.37 ($\mathbb{R}$ como subespaço de $\overline{\mathbb{R}}$)**.** O Exercício 2.4 estabeleceu $\mathbb{R}$ (com sua topologia usual) como subespaço de $\overline{\mathbb{R}}$ (com sua topologia usual). ▲

Exemplo 2.0.38 (Intervalos como subespaços de $\mathbb{R}$)**.** Fixado um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, tem-se $A \subseteq I$ aberto em I se, e somente, para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ com $x \in J$ e $J \cap I \subseteq A$. Em particular, para $I := [0, 4)$, o conjunto $A := [0, 1)$ é aberto em I: se $x \in [0, 1)$ e $x \neq 0$, então basta tomar $J := (0, 1)$; para $x := 0$, note que $J := (-1, 1)$ é aberto <u>em $\mathbb{R}$</u>, $0 \in J$ e $J \cap I \subseteq A$.

O importante a destacar, porém, é o seguinte: A não é aberto em $\mathbb{R}$! Com efeito, nenhum intervalo aberto J com $0 \in J$ está inteiramente contido em $[0, 1)$. Moral da história: para decidir se um subconjunto é aberto ou não, deve-se levar em conta o espaço topológico em que ele está inserido. ▲

Exercício 2.13. Como são os abertos do intervalo $[-1, 1]$? Você já viu abertos parecidos ao longo do texto? ■

Exemplo 2.0.39 ($\mathbb{Z}$ como subespaço)**.** Para todo $z \in \mathbb{Z}$, tem-se $\{z\}$ aberto em $\mathbb{Z}$ quando este é visto como subespaço de $\mathbb{R}$: basta observar que $\{z\} = \left(z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z}$. Em particular, todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ é aberto em $\mathbb{Z}$, posto que reunião arbitrária de abertos é aberta. Por fim, observe que a topologia de $\mathbb{Z}$ enquanto subespaço de $\mathbb{R}$ é a mesma que $\mathbb{Z}$ teria como espaço métrico se a métrica considerada fosse a zero-um (confira o Exercício 2.12). ▲

Definição 2.0.40. Dizemos que um ponto p de um espaço topológico X é **isolado** (em X) se $\{p\}$ é aberto em X. ¶

Exemplo 2.0.41. *Quase* todos os pontos de $X := \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ são isolados em X, onde X é considerado com a topologia de subespaço *herdada* de $\mathbb{R}$. Com efeito, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, não é difícil encontrar $r > 0$ tal que $\left(\frac{1}{2^n} - r, \frac{1}{2^n} + r\right) \cap X = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. A exceção fica por conta do ponto 0: para qualquer $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ com $0 \in U$ se verifica $U \cap X \neq \{0\}$. Mais do que isso é verdade: para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sempre que $n \geq N$. Com isso dito, observe que nenhum ponto de X é isolado <u>em $\mathbb{R}$</u>, já que todo aberto de $\mathbb{R}$ contém um intervalo não-trivial. ▲

Espaços topológicos também podem *interagir* uns com os outros em processos que geram novos espaços, e um dos métodos mais utilizados é, secretamente, sugerido pela norma/distância do máximo em $\mathbb{R}^2$: observe que para $u := \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$, vale a identidade

$$B_{d_\infty}(u, r) = (x - r, x + r) \times (y - r, y + r),$$

i.e., a bola (na norma do máximo) com centro u e raio r em $\mathbb{R}^2$ é o produto cartesiano das bolas em $\mathbb{R}$ de raio r com centros em x e y, respectivamente. Explicitamente, os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ expressos como produtos cartesianos de abertos de $\mathbb{R}$ se comportam como abertos *básicos* para a topologia de $\mathbb{R}^2$, no sentido de que todo aberto de $\mathbb{R}^2$ é reunião desses abertos básicos. Isto pode ser feito em cenários bem mais gerais.

Definição 2.0.42. Para espaços topológicos X e Y, diremos que $A \subseteq X \times Y$ é **aberto** (em $X \times Y$) se para qualquer $a \in A$ existirem subconjuntos $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ abertos (em X e Y, respectivamente) tais que $a \in U \times V$ e $U \times V \subseteq A$. ¶

Exercício 2.14. Mostre que a família $\tau_{X\times Y}$ dos subconjuntos abertos em $X \times Y$ determina uma topologia em $X \times Y$. ■

Definição 2.0.43. A topologia $\tau_{X\times Y}$ em $X \times Y$ definida pelas condições anteriores será chamada de **topologia produto**. ¶

Exercício 2.15. Para $X := Y := \mathbb{R}$, mostre que a topologia produto em $\mathbb{R}^2$ é a topologia usual de $\mathbb{R}^2$. ■

Nas situações em que X e Y são espaços métricos, também é possível dotar $X \times Y$ de uma métrica $d_{X\times Y}$ cuja topologia induzida é, precisamente, a topologia produto: basta fazer $d_{X\times Y}(\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$, que claramente satisfaz

$$B_{d_{X\times Y}}(\langle x, y\rangle, r) = B_{d_X}(x, r) \times B_{d_Y}(y, r).$$

Embora possa ser uma abordagem mais intuitiva para lidar com produtos, nem todos os espaços da forma $X \times Y$ que serão tratados no texto vêm de fábrica com métricas explícitas: o caso mais marcante será $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ e seus subespaços. A princípio, não é possível *estender* a métrica usual de $\mathbb{R}$ à uma métrica em $\overline{\mathbb{R}}$ posto que métricas têm valores limitados por definição – e gostaríamos que $d(+\infty, r) = +\infty$, por exemplo[17].

Definição 2.0.44. Em particular, os seguintes subespaços de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ serão bastante importantes:

(i) $\mathcal{A}_\infty := (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{\langle -\infty, +\infty\rangle, \langle +\infty, -\infty\rangle\}$, o subconjunto dos pontos em que a adição usual de $\mathbb{R}$ pode ser *estendida* de forma *contínua*; e

(ii) $\mathcal{M}_\infty := (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{\langle -\infty, 0\rangle, \langle 0, -\infty\rangle, \langle +\infty, 0\rangle, \langle 0, +\infty\rangle\}$, o subconjuntos dos pontos em que a multiplicação usual de $\mathbb{R}$ pode ser *estendida* de forma *contínua*. ¶

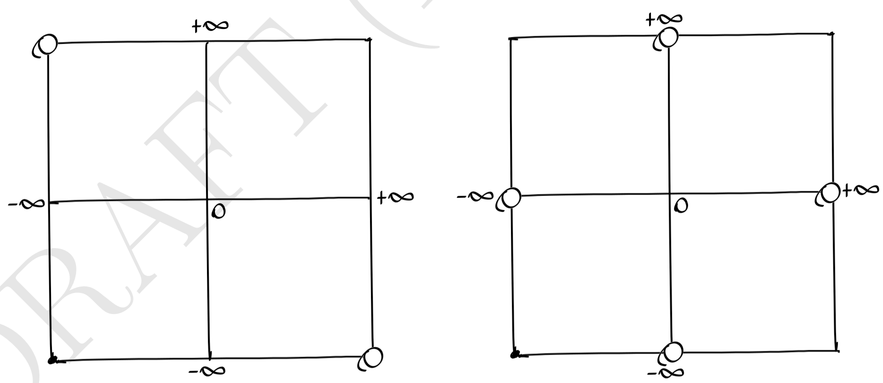


Figura 2.2: Os subconjuntos $\mathcal{A}_\infty$ (à esquerda) e $\mathcal{M}_\infty$ (à direita): os círculos nas extremidades de cada figura indicam os pontos retirados do "quadrado" $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Exemplo 2.0.45. Para $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty$, vamos definir $s(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}$ da seguinte forma:

(i) $s(\alpha, \beta) := \alpha + \beta \in \mathbb{R}$ se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(ii) $s(\alpha, \beta) := +\infty$ se $+\infty \in \{\alpha, \beta\}$;

(iii) $s(\alpha, \beta) := -\infty$ se $-\infty \in \{\alpha, \beta\}$.

[17] Apesar de ser possível definir uma métrica *mais ou menos* artificial em $\overline{\mathbb{R}}$ (confira o Exercício 2.30), a utilização de seus intervalos abertos gera argumentos bem mais razoáveis.

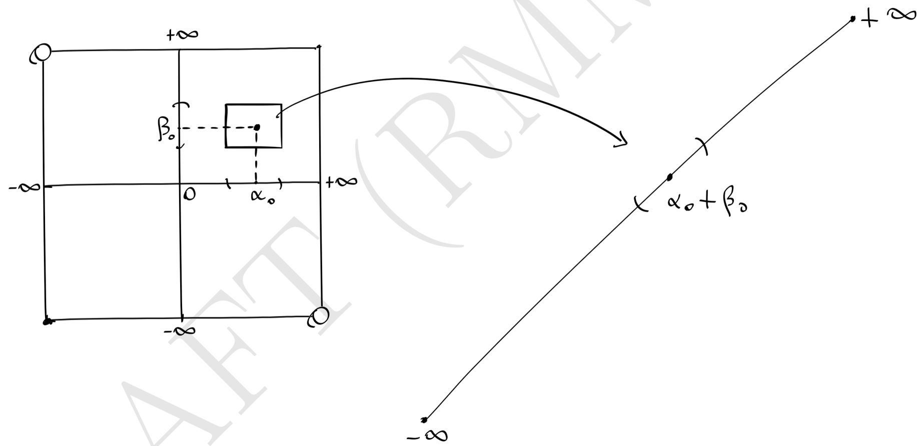
Grosso modo, a função $s\colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ estende a soma usual de $\mathbb{R}$ de modo *razoável*, no seguinte sentido: para $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle \in \mathcal{A}_\infty$ fixado e $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty$ qualquer, os valores de $s(\alpha, \beta)$ se tornam *mais próximos* de $s(\alpha_0, \beta_0)$ à medida em que $\langle \alpha, \beta\rangle$ se aproxima de $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle$. Tal afirmação não é problemática quando $s(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}$: em tal situação, deve-se ter $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, o que permite considerar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e usar a desigualdade

$$|s(\alpha_0, \beta_0) - s(\alpha, \beta)| \leq |\alpha_0 - \alpha| + |\beta_0 - \beta|$$

para tornar $s(\alpha, \beta)$ tão próximo de $s(\alpha_0, \beta_0)$ quanto desejado. Se quisermos que a distância entre ambos seja menor do que 42, por exemplo, basta que $|\alpha_0 - \alpha|, |\beta_0 - \beta| < 21$; mais geralmente, para tornar $|s(\alpha_0, \beta_0) - s(\alpha, \beta)| < \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um número real, basta considerar $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathbb{R}^2$ com

$$d_\infty(\langle \alpha_0, \beta_0\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle) := \max\{|\alpha_0 - \alpha|, |\beta_0 - \beta|\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Note que apesar da roupagem numérica, o argumento acima foi quase todo geométrico: a estimativa $|s(\alpha_0, \beta_0) - s(\alpha, \beta)| < \varepsilon$ se reduz a dizer que $s(\alpha, \beta)$ pertence ao intervalo aberto $I := (s(\alpha_0, \beta_0) - \varepsilon, s(\alpha_0, \beta_0) + \varepsilon)$, enquanto (2.3) consiste em dizer que $\langle \alpha, \beta\rangle$ pertence a um "quadrado aberto" em torno de $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle$. Assim, não espanta que o procedimento para lidar com os casos em que $s(\alpha_0, \beta_0) = \pm\infty$ seja análogo.



Se, por exemplo, $s(\alpha_0, \beta_0) := +\infty$ e I é *um* intervalo aberto em torno de $+\infty$, então *existem* intervalos abertos $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle \in J \times K$ e $s(\alpha, \beta) \in I$ sempre que $\langle \alpha, \beta\rangle \in (J \times K) \cap \mathcal{A}_\infty$. Com efeito, pode-se assumir $I := (M, +\infty]$ para algum $M > 0$, ao passo que α_0 ou β_0 devem ser $+\infty$:

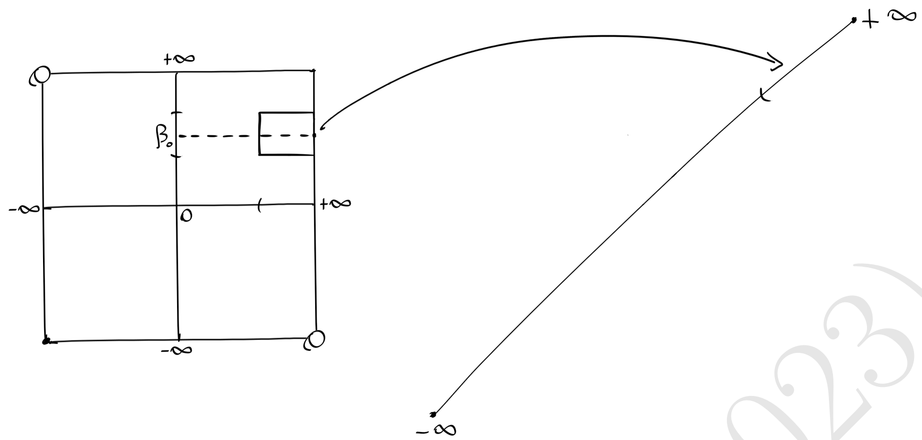
- se ocorrer $\alpha_0 := +\infty$ e $\beta_0 \in \mathbb{R}$, então $J := (M + 1 - \beta_0, +\infty]$ e $K := (\beta_0 - 1, +\infty]$ são intervalos abertos de $\overline{\mathbb{R}}$ com $\langle \alpha_0, \beta_0\rangle \in J \times K$ e $s(\alpha, \beta) > M$ sempre que $\langle \alpha, \beta\rangle \in J \times K$;

- o caso em que $\beta_0 := +\infty$ e $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ é simétrico;

- se $\alpha_0 := \beta_0 := +\infty$, então basta fazer $I = J = K$.

Intuitivamente, quanto maior o $M > 0$, mais próximo se está de $+\infty$. Assim, ao tomar $\langle \alpha, \beta\rangle$ em $J \times K$, resulta $s(\alpha, \beta) > M$, i.e., $s(\alpha, \beta)$ tão próximo de $+\infty$ quanto o $M > 0$ tomado inicialmente.

Exercício 2.16. Mostre que se $s(\alpha_0, \beta_0) := -\infty$ e $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto com $s(\alpha_0, \beta_0) \in I$, então existem intervalos abertos $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tais que $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in J \times K$ e $s(\alpha, \beta) \in I$ sempre que $\langle \alpha, \beta \rangle \in (J \times K) \cap \mathcal{A}_\infty$. ■



Qual a relação disso tudo com conjuntos abertos? Simples: na prática, os argumentos acima mostraram que o conjunto

$$A := \{\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{A}_\infty : s(\alpha, \beta) \in I\}$$

é aberto em $\mathcal{A}_\infty$ sempre que $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é aberto! E isto não foi acidental. ▲

Observação 2.0.46. Por que não definir $s(+\infty, -\infty) = s(-\infty, +\infty)$ como algum ponto de $\overline{\mathbb{R}}$? afinal, há somente três tipos de candidatos: $s(+\infty, -\infty) := r \in \mathbb{R}$ para algum r, $s(+\infty, -\infty) := +\infty$ ou $s(+\infty, -\infty) := -\infty$. Resposta: nenhuma alternativa preserva a propriedade de *aproximação arbitrária*.

Exercício 2.17. Mostre que se $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ são intervalos abertos com $\langle +\infty, -\infty \rangle \in J \times K$, então para todo $r \in \mathbb{R}$ existe $\langle \alpha, \beta \rangle \in (J \times K) \cap \mathbb{R}^2$ com $\alpha + \beta = r$. ■

Logo, para qualquer escolha que se faça para $s(+\infty, -\infty)$, sempre *existe* um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $s(+\infty, -\infty) \in I$ com a seguinte propriedade: para *quaisquer* intervalos $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\langle +\infty, -\infty \rangle \in J \times K$, existe um par $\langle \alpha, \beta \rangle \in J \times K$ cuja imagem por s *escapa* de I, exatamente o contrário do que se obteve nos exemplos anteriores[18]. Em resumo, e com o linguajar que será introduzido na próxima seção, não existe *função contínua* da forma $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ que estenda a soma usual em $\mathbb{R}$. △

2.1 Continuidade

Definição 2.1.0. Para espaços topológicos X e Y, uma função $f \colon X \to Y$ é **contínua** em $p \in X$ se para todo $V \subseteq Y$ aberto em Y com $f(p) \in V$ existir $U \subseteq X$ aberto em X, com $p \in U$ e $f[U] \subseteq V$. A função f é **contínua** se for contínua em todos os pontos de X.¶

Tal qual ocorreu no começo da Seção 2.0, a presente seção se inicia com uma definição pouco intuitiva e aparentemente artificial. Mas se pensarmos nos abertos em torno de $f(p)$ como graus de aproximação ou erro, a definição acima expressa apenas que $f(x)$ pode ser *arbitrariamente* aproximado de $f(p)$ desde que x seja tomado *suficientemente* próximo de p. Duvida?

[18] Compare os quantificadores!

Proposição 2.1.1. *Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $p \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $|x - p| < \delta$.*

Demonstração. Se f é contínua em p e $\varepsilon > 0$, então $V := (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ é um (intervalo) aberto de $\mathbb{R}$ com $f(p) \in V$. Pela definição de continuidade, existe $U \subseteq \mathbb{R}$ aberto com $p \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Ora, de acordo com a Definição 2.0.11, deve existir $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta) \subseteq U$. Logo, se $|x - p| < \delta$, então $x \in U$ e, consequentemente, $f(x) \in V$, i.e., $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$, como desejado.

Para a recíproca, dado $V \subseteq \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ com $f(p) \in V$, a Definição 2.0.11 assegura $\varepsilon > 0$ com $(f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \subseteq V$. Agora, para este $\varepsilon > 0$, a hipótese garante um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $|x - p| < \delta$, i.e., tal que $f(x) \in (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$. Logo, chamando $U := (p - \delta, p + \delta)$, resulta $f[U] \subseteq V$, com U aberto e $p \in U$, como queríamos. □

Moral da história: uma vez fixadas topologias em X e Y, são elas as responsáveis por determinar as funções contínuas, mesmo nos casos em que uma definição aparentemente mais concreta de continuidade estiver disponível. Ao longo desta seção, veremos como a Definição 2.1.0 se desdobra em diversos subcasos importantes – e que serão usados pesadamente nos próximos capítulos.

2.1.0 Exemplos e propriedades elementares

Esta subseção começa com um lema que coloca os abertos de um espaço topológico como as bolas abertas de um espaço métrico. Mais precisamente:

Lema 2.1.2. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Então A é aberto se, e somente se, para cada $x \in A$ existe um aberto $B \subseteq X$ com $x \in B$ e $B \subseteq A$.*

Demonstração. Ora, se A é aberto, então basta tomar $B := A$. Para a recíproca, ao se escolher $B_x \subseteq X$ aberto para cada $x \in A$ com $B_x \subseteq A$, resulta que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, i.e., A é uma reunião de abertos e, portanto, A é aberto[19]. □

Proposição 2.1.3. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f\colon X \to Y$ é contínua em todos os pontos de X se, e somente se, $f^{-1}[V] \subseteq X$ é aberto em X para todo aberto $V \subseteq Y$.*

Demonstração. Se f é contínua em todos os pontos do domínio e $V \subseteq Y$ é aberto, então de duas, uma: ou $f^{-1}[V] = \emptyset$, que é aberto em X, ou existe $x \in f^{-1}[V]$. No segundo caso, a continuidade em x garante um aberto $U \subseteq X$ com $f[U] \subseteq V$, mostrando que $U \subseteq f^{-1}[V]$. Em vista do Lema 2.1.2, segue que $f^{-1}[V]$ é aberto em X. A recíproca é evidente. □

Observação 2.1.4. É importante destacar que se f é contínua *apenas* em $p \in X$, então não se pode garantir que $f^{-1}[V]$ seja aberto em X sempre que $V \subseteq Y$ for um aberto em Y com $f(p) \in V$. Neste caso, garante-se apenas que $f^{-1}[V]$ é uma *vizinhança* de p, i.e., p ~~é ponto interior de~~ está num aberto contido em $f^{-1}[V]$. Tais pormenores serão abordados no Capítulo 5. △

[19] Alternativamente (e sem o Axioma da Escolha): a família $\mathcal{C} := \{B \subseteq X : B \text{ é aberto e } B \subseteq A\}$ é tal que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq A$ e, por hipótese, $A \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Observação 2.1.5 (IMPORTANTE: pré-imagens $\neq$ função inversa)**.** Para uma função $f\colon X \to Y$ e um subconjunto $V \subseteq Y$ dados, define-se a *pré-imagem* de V por f, denotada por $f^{-1}[V]$, como sendo o conjunto dos elementos em X cujas imagens por f pertencem a V: explicitamente, $f^{-1}[V] := \{x \in X : f(x) \in V\}$. Evite achar que se trata da imagem direta de f pela "função inversa de f", já que apenas funções bijetivas têm inversas. $\triangle$

Embora soe estranha à primeira vista, a caracterização de continuidade em termos de pré-imagens é a mais honesta no contexto topológico. De fato, topologias em X e Y carregam informação/estrutura adicional de subconjuntos chamados de abertos e, nesse sentido, funções contínuas são aquelas que *preservam* tais informações[20].

Exemplo 2.1.6. A função identidade $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ de um espaço topológico X sempre é contínua, posto que $\mathrm{Id}_X^{-1}[V] = V$ para qualquer $V \subseteq X$ (o que vale, em particular, para os abertos de X). $\blacktriangle$

Exemplo 2.1.7. De modo geral, funções constantes são contínuas: se $f\colon X \to Y$ é constante, digamos $f(x) := y_0$ para todo $x \in X$, e $V \subseteq Y$ é aberto, então $f^{-1}[V] = \emptyset$ (se $y_0 \notin V$) ou $f^{-1}[V] = X$ (se $y_0 \in V$), mostrando que a pré-imagem de abertos é aberta. $\blacktriangle$

Exemplo 2.1.8 (Soma em $\overline{\mathbb{R}}$)**.** A função $s\colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$, definida no Exemplo 2.0.45, é contínua em todos os pontos de $\mathcal{A}_\infty$. Com efeito, a discussão apresentada lá permite mostrar que se $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto, então

$$s^{-1}[I] := \{\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty : s(\alpha,\beta) \in I\}$$

é aberto em $\mathcal{A}_\infty$. Logo, como qualquer aberto $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é reunião de intervalos abertos, digamos $V = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, resulta

$$s^{-1}[V] = s^{-1}\left[\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right] = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} s^{-1}[I_\lambda].$$

Fica por conta do leitor explicitar os detalhes omitidos. $\blacktriangle$

Exemplo 2.1.9 (Soma em espaços normados)**.** Ainda no Exemplo 2.0.45, a desigualdade utilizada no caso de intervalos reais pode ser adaptada para mostrar que a função soma (*a.k.a.* adição) $+\colon E \times E \to E$ em qualquer espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é contínua. De fato, por valer

$$\|u_0 + v_0 - (u+v)\| = \|u_0 - u + v_0 - v\| \leq \|u_0 - u\| + \|v_0 - v\| \tag{2.4}$$

para quaisquer $u_0, v_0, u, v \in E$, segue que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|u_0 + v_0 - (u+v)\| < \varepsilon$ sempre que $\|u_0 - u\|, \|v_0 - v\| < \delta$: basta tomar $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por que isto prova a continuidade da soma? Resposta: ao considerar $U := B_{\|\cdot\|}(u_0, \delta)$ e $V := B_{\|\cdot\|}(v_0, \delta)$, obtemos o aberto $U \times V$ de $E \times E$ (com respeito à topologia produto!), com $\langle u_0, v_0\rangle \in U \times V$ e $u + v \in B_{\|\cdot\|}(u_0 + v_0, \varepsilon)$ sempre que $\langle u, v\rangle \in U \times V$, o que garante a continuidade nos moldes da definição geral (verifique?). Alternativamente:

[20] Tais quais morfismos de anéis (corpos, etc.) preservam as informações algébricas. Esse tipo de interpretação pode ser formalizado por meio de uma estrutura algébrica/ordenada xingada de *frame*. O leitor interessado deve procurar por *pointless topology* ou *point-free topology* (topologia sem pontos).

Proposição 2.1.10. *Para espaços normados E e E', uma função $f\colon E \to E'$ é contínua se, e somente se, para quaisquer $u \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(u) - f(x)\| < \varepsilon$ sempre que $\|u - x\| < \delta$.*

A rigor, no enunciado acima, o correto seria escrever algo como "$\|f(u) - f(x)\|_{E'}$" e "$\|u - x\|_E$" para indicar que as normas em E' e E não são as *mesmas*. Porém, é prática comum assumir que o leitor está ciente dessa sutileza... Com isso dito:

Demonstração. Se f é contínua em u e $\varepsilon > 0$, então $V := B_{\|\cdot\|}(f(u), \varepsilon)$ é um (a bola) aberto de E' com $f(u) \in V$. Pela definição de continuidade, existe $U \subseteq E$ aberto com $u \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Ora, de acordo com a Definição 2.0.28, deve existir $\delta > 0$ tal que $B_{\|\cdot\|}(u, \delta) \subseteq U$. Logo, se $\|x - u\| < \delta$, então $x \in U$ e, consequentemente, $f(x) \in V$, i.e., $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$, como desejado.

Para a recíproca, dado $V \subseteq E'$ aberto em E' com $f(u) \in V$, a Definição 2.0.28 assegura $\varepsilon > 0$ com $B_{\|\cdot\|}(f(u), \varepsilon) \subseteq V$. Agora, para este $\varepsilon > 0$, a hipótese garante um $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(u)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x - u\| < \delta$, i.e., tal que $f(x) \in B_{\|\cdot\|}(f(u), \varepsilon)$. Logo, chamando $U := B_{\|\cdot\|}(u, \delta)$, resulta $f[U] \subseteq V$, com U aberto e $u \in U$, como queríamos. □

De volta para a soma $+\colon E \times E \to E$, a topologia produto em $E \times E$ é a mesma induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$ em $E \times E$ definida por $\| \langle u, v\rangle \|_\infty := \max\{\|u\|, \|v\|\}$ (verifique?), de modo que (2.4) implica em $\|u_0 + v_0 - (u + v)\| \leq 2\| \langle u_0, v_0\rangle - \langle u, v\rangle \|_\infty$, donde segue que a soma satisfaz o critério de continuidade via ε's e δ's. ▲

Exercício 2.18. Compare as demonstrações das Proposições 2.1.1 e 2.1.10. ■

Exemplo 2.1.11 (Multiplicação em espaços normados)**.** Ainda para um espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$, a multiplicação por escalar $\mathbb{R} \times E \to E$ é uma função contínua. Primeiro, observe que para $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ e $u_0 \in E$ fixados, deve-se ter

$$\|\alpha_0 u_0 - \alpha u\| = \|\alpha_0 u_0 + \alpha_0 u - \alpha_0 u - \alpha u\| \leq |\alpha_0|\|u_0 - u\| + |\alpha_0 - \alpha|\|u\|$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in E$. Com a Proposição 2.1.10 em mente, o que se busca é "controlar" $\|\alpha_0 u_0 - \alpha u\|$ por meio do controle de

$$\| \langle \alpha_0, u_0\rangle - \langle \alpha, u\rangle \|_\infty := \max\{|\alpha_0 - \alpha|, \|u_0 - u\|\}.$$

Porém, desta vez, a expressão que "majora" $\|\alpha_0 u - \alpha u\|$ traz *pesos* que multiplicam as parcelas controláveis: $|\alpha_0|$ e $\|u\|$. Como o primeiro é uma *constante*[21], para $\varepsilon > 0$, basta exigir (supondo $\alpha_0 \neq 0$) que $\|u_0 - u\| < \dfrac{\varepsilon}{2|\alpha_0|} := \gamma$. O problema é o fator $\|u\|$: não podemos simplesmente exigir $|\alpha_0 - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2\|u\|}$ pois u varia! Para remediar a situação, observe que $\|u\| \leq \|u_0 - u\| + \|u_0\|$, com $\|u_0\|$ constante. Logo, basta exigir que tanto $\|u_0 - u\|$ quanto $|\alpha_0 - \alpha|$ sejam menores do que $\min\left\{\gamma, \dfrac{\varepsilon}{2(\gamma + \|u_0\|)}\right\}$, pois daí

$$\|\alpha_0 u_0 - \alpha u\| \leq |\alpha_0|\|u_0 - u\| + |\alpha_0 - \alpha|\|u\| < |\alpha_0|\frac{\varepsilon}{2|\alpha_0|} + \frac{\varepsilon}{2(\gamma + \|u_0\|)}(\gamma + \|u_0\|) = \varepsilon.$$

Para $\alpha_0 := 0$ a coisa se simplifica: basta trocar γ por 1. ▲

Exercício 2.19. Adapte a argumentação acima para a multiplicação usual de $\mathbb{R}$. ■

[21] Lembre-se: α_0 e u_0 estão fixados desde o começo!

Exercício 2.20. Considere $\mathcal{M}_\infty$ como na Definição 2.0.44. Para $\langle\alpha,\beta\rangle \in \mathcal{M}_\infty$, defina $p(\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{R}}$ da seguinte forma:

(i) $p(\alpha,\beta) := \alpha\cdot\beta$ se $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$;

(ii) $p(\alpha,\beta) := +\infty$ se $\langle\alpha,\beta\rangle \notin \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ com $\alpha,\beta < 0$ ou $\alpha,\beta > 0$;

(iii) $p(\alpha,\beta) := -\infty$ se $\langle\alpha,\beta\rangle \notin \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e $\alpha < 0 < \beta$ ou $\beta < 0 < \alpha$.

Sob tais condições, mostre que a função $p\colon \mathcal{M}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ é contínua. Dica: para um intervalo $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p(\alpha_0,\beta_0) \in I$, basta encontrar intervalos abertos $J, K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tais que $\langle\alpha_0,\beta_0\rangle \in J\times K$ e $p(\alpha,\beta) \in I$ sempre que $\langle\alpha,\beta\rangle \in (J\times K)\cap\mathcal{M}_\infty$; se ocorrer $p(\alpha_0,\beta_0) \in \mathbb{R}$, basta proceder como no exemplo anterior; agora, se $p(\alpha_0,\beta_0) = +\infty$, então I pode ser tomado da forma $(M,+\infty]$ para algum número real $M > 0$, de modo que para $\alpha_0 := +\infty$ e $\beta_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ basta tomar $J := \left(\dfrac{2M}{\beta_0}, +\infty\right]$ e $K := \left(\dfrac{\beta_0}{2}, +\infty\right]$; os outros casos são análogos. ■

Observação 2.1.12 (*Keeping it real*)**.** Em contextos mais elementares, é comum evitar a escrita de coisas como "$f(x) = \pm\infty$", já que em tais situações as funções assumem apenas valores *numéricos* – e tanto $+\infty$ quanto $-\infty$ não são números. Para leitores inseridos nesses contextos, convém destacar o que significa, para uma função $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, ser contínua em $x_0 \in X$ com $f(x_0) \notin \mathbb{R}$.

Se, por exemplo, tivermos $f(x_0) := +\infty$, então a condição de continuidade em x_0 é a seguinte: para todo aberto $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $+\infty \in V$, existe um aberto $U \subseteq X$ com $x_0 \in U$ tal que $f(u) \in V$ sempre que $u \in U$. Ora, pela forma como os abertos de $\overline{\mathbb{R}}$ foram definidos (confira a Definição 2.0.4 e a Proposição 2.0.10), isto significa que para qualquer número real $M > 0$ existe $U \subseteq X$ aberto com $x_0 \in U$ e $f(u) > M$ sempre que $u \in U$. Portanto, nas *proximidades* de x_0 (encarnadas pelos abertos U), a função f assume valores cada vez maiores – ou, com a simbologia que será introduzida no próximo capítulo: $\lim\limits_{u\to x_0} f(u) = +\infty$.

Uma tradução análoga pode ser feita nos casos em que se tem algo como $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to Y$ com $f(+\infty) = y_0$ e f contínua em $+\infty$: explicitamente, para todo aberto $V \subseteq Y$ com $y_0 \in V$, existe um aberto $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $+\infty \in U$ e $f(u) \in V$ sempre que $u \in U$. Ou seja: existe $M > 0$ tal que $f(u) \in V$ sempre que $u > M$, que na prática significa dizer que os valores de f se tornam mais próximos de y_0 à medida em que u *aumenta*. Com a simbologia do próximo capítulo, isto se expressaria como $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = y_0$.

A *moral da história*, como ficará claro oportunamente, é a seguinte: *limites* são apenas outra forma de tratar *continuidade*. Mas ainda é cedo demais para tais revelações. △

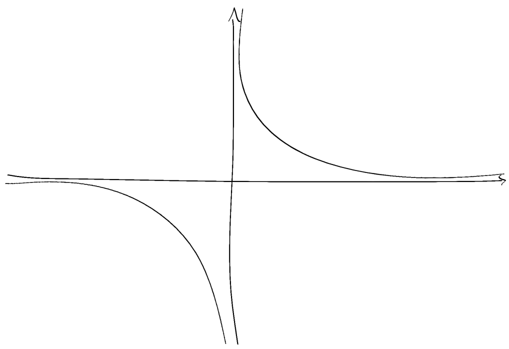
Exemplo 2.1.13 (Continuidade da inversão multiplicativa)**.** Por $\mathbb{R}$ ser corpo, para cada $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ existe um único inverso multiplicativo $\dfrac{1}{r}$ (também denotado por r^{-1}). Veremos que a função $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ obtida de tal processo é contínua.

Primeiro, note que se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto com $0 \notin I$, então $f^{-1}[I]$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contido em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: com efeito, se $I := (\alpha,\beta)$, então a condição imposta obriga que α e β tenham o mesmo *sinal*, donde segue que $f^{-1}[(\alpha,\beta)] = \left(\dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\alpha}\right)$. Agora, se $0 \in (\alpha,\beta)$, então

$$f^{-1}[(\alpha,\beta)] = \bigcup_{\alpha<\gamma<0}\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha}\right) \cup \bigcup_{0<\gamma<\beta}\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right),$$

mostrando que $f^{-1}[I]$ é aberto. O resultado então segue como no Exemplo 2.1.8. ▲

Exercício 2.21. Convença-se de que no último caso, $f^{-1}[(\alpha, \beta)] = (-\infty, \alpha^{-1}) \cup (\beta^{-1}, +\infty)$. ■



Exemplo 2.1.14. A princípio, a função f do exemplo anterior não foi definida em 0 pois $\mathbb{R}$ é um corpo e, como tal, não admite a inversão multiplicativa do zero. No entanto, é lícito perguntar se poderíamos atribuir um valor *artificial* para $f(0)$ de modo a obter uma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \coloneqq x^{-1}$ para $x \neq 0$. A resposta é não: sempre que (α, β) fosse um intervalo aberto e limitado em torno de $f(0)$, teríamos $f^{-1}[(\alpha, \beta)] = A \cup \{0\}$ para algum aberto $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que não é aberto em $\mathbb{R}$ justamente por conter o ponto 0.

Fazer $f(0) \coloneqq +\infty$ na esperança de obter uma função contínua da forma $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ também não *adiantaria*, já que teríamos $f^{-1}\left[(\alpha, +\infty]\right] = [0, \alpha^{-1})$ para qualquer $\alpha > 0$, um intervalo de $\mathbb{R}$ muito conhecido por não ser aberto[22]. É claro que fazer $f(0) \coloneqq -\infty$ é igualmente ineficaz. ▲

Exercício 2.22. É possível definir valores para $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$ de modo a obter uma função contínua $f\colon \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$? ■

Os exemplos anteriores tornam pertinente que se discuta a noção de *descontinuidade*, i.e., quando uma função **não** é contínua num determinado ponto. Da Definição 2.1.0, a princípio, dizer que $f\colon X \to Y$ é **descontínua** em $p \in X$ equivale a dizer que existe um aberto $V \subseteq Y$ com $f(p) \in V$ de modo que *nenhum* aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ satisfaz $f[U] \subseteq V$ – ou, equivalentemente, *para todo* aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ existe pelo menos um $u \in U$ com $f(u) \notin V$.

Ao traduzir a condição acima para o caso de funções reais, por exemplo, tem-se o seguinte: *existe um* intervalo aberto I *em torno* de $f(p)$ de modo que *qualquer* intervalo aberto em torno de p possui pontos cuja imagem *escapa* de I. Se pensarmos no processo prático de "desenhar" o gráfico de f, é como se nas proximidades de $f(p)$ (determinadas pelo intervalo I) fôssemos forçados a *tirar* o lápis do papel a fim de deixar o traçado fora da faixa determinada por I.

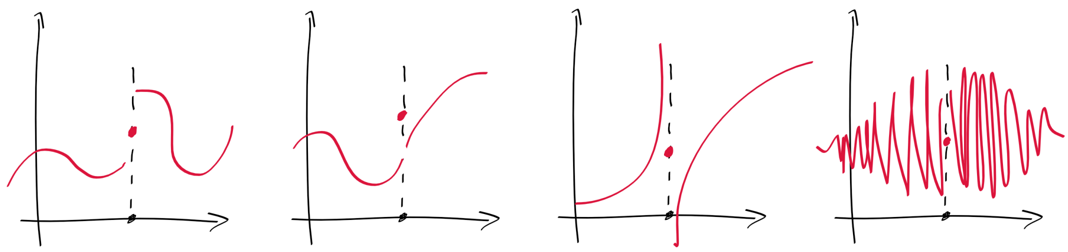


Figura 2.3: Algumas descontinuidades encontradas na natureza.

[22]Spoiler: e nem fechado!

Exemplo 2.1.15 (A função de Dirichlet)**.** A função característica dos racionais é descontínua em todos os pontos. Explicitamente, a função $\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que faz $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$ e $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 1$ caso contrário, é descontínua em todos pontos. Se fosse possível desenhar o gráfico de $\chi_{\mathbb{Q}}$, seríamos obrigados a tirar o lápis do papel infinitamente, posto que entre quaisquer dois números irracionais há um número racional (e vice-versa). A rigor, note que para $x \in \mathbb{R}$ fixado, $I := (\chi_{\mathbb{Q}}(x) - 1, \chi_{\mathbb{Q}}(x) + 1)$ é um intervalo aberto em torno de $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ e para qualquer intervalo J em torno de x, existe $y \in J$ com $\chi_{\mathbb{Q}}(y) \notin I$. O leitor pode cuidar dos detalhes. ▲

Exercício 2.23. Convença-se de que se $f\colon X \to Y$ é contínua e Y é subespaço topológico de Z, então f ainda é contínua enquanto função da forma $X \to Z$. Dica: a inclusão $i\colon Y \to Z$ é contínua. ■

Exemplo 2.1.16 (Normas e métricas são contínuas)**.** A norma $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ de um espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é contínua com respeito à topologia induzida por *ela*: esta é uma das razões de ser da desigualdade

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|,$$

válida para quaisquer $u, v \in E$. Para demonstrá-la, basta observar que $\|u\| \leq \|u-v\|+\|v\|$ e $\|v\| \leq \|u - v\| + \|u\|$.

Analogamente, a métrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ de um espaço métrico $\langle X, d\rangle$ é contínua com respeito à topologia produto em $X \times X$: neste caso, a desigualdade que garante a continuidade é

$$|d(x, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b), \tag{2.5}$$

válida para quaisquer $x, y, a, b \in X$. Por que isto prova que a função é contínua? ▲

Exercício 2.24. Use a desigualdade (2.5) para mostrar que a métrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é contínua. Dica: use a definição da topologia produto em $X \times X$; alternativamente, apele para o próximo exercício. ■

Exercício 2.25 (Déjà vu)**.** Para espaços métricos X e Y, mostre que uma função $f\colon X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ sempre que $d(x, x') < \delta$. ■

2.1.1 Como manter as mãos limpas

Embora os principais resultados deste texto possam ser formulados e demonstrados por meio de ε's e δ's, as tecnologias apresentadas permitem facilitar diversas verificações. O propósito desta subseção, que encerra o capítulo, é discutir alguns desses métodos.

Proposição 2.1.17. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração. Note que se $W \subseteq Z$ é aberto, então $V := g^{-1}[W] \subseteq Y$ é aberto por g ser contínua, enquanto a continuidade de f assegura $f^{-1}[V] \subseteq X$ aberto. Logo, $f^{-1}\left[g^{-1}[W]\right]$ é aberto em X, donde o resultado segue pelo próximo exercício. □

Exercício 2.26. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções. Mostre que para qualquer $W \subseteq Z$ vale a identidade $(g \circ f)^{-1}[W] = f^{-1}\left[g^{-1}[W]\right]$. ■

Exercício 2.27. Com as notações da proposição anterior, mostre que se f é contínua em p e g é contínua em $f(p)$, então $g \circ f$ é contínua em p. ■

Exemplo 2.1.18. A função $g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ que faz $g(x) := \dfrac{1}{|x|}$ é contínua. Com efeito, g é a composta das funções $|\cdot|\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ do Exemplo 2.1.13, i.e., $g = |\cdot|\circ f$. Mais geralmente, sempre que X é um espaço topológico, E é um espaço normado e $h\colon X\to E$ é uma função contínua, tem-se garantida a continuidade da função

$$\begin{aligned}\|h\|\colon X &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \|h(x)\|\end{aligned}$$

posto que a norma $\|\cdot\|\colon E\to\mathbb{R}$ é contínua e $\|h\| := \|\cdot\|\circ h$. ▲

Teorema 2.1.19. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

(i) *As projeções $\pi_X\colon X\times Y\to X$ e $\pi_Y\colon X\times Y\to Y$ são contínuas.*

(ii) *Uma função $f\colon Z\to X\times Y$ é contínua se, e somente se, $\pi_X\circ f$ e $\pi_Y\circ f$ são contínuas*[23].

Demonstração. A primeira afirmação segue pois $\pi_X^{-1}[U] = U\times Y$ e $\pi_Y^{-1}[V] = X\times Y$ para quaisquer $U\subseteq X$ e $V\subseteq Y$. Para a segunda afirmação, a *volta* segue da proposição anterior, enquanto a ida consiste em observar que pela forma como os abertos de $X\times Y$ foram definidos, basta mostrar que $f^{-1}[U\times V]$ é um aberto de Z sempre que $U\subseteq X$ e $V\subseteq Y$ forem abertos: com efeito, se a última afirmação for conhecida, então para um aberto $W\subseteq X\times Y$ qualquer, tem-se $W = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i\times V_i$ para certos abertos $U_i\subseteq X$ e $V_i\subseteq Y$, resultando em

$$f^{-1}[W] = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}[U_i\times V_i],$$

uma reunião de abertos. Por fim, a versão *retangular* segue pois $U\times V = \pi_X^{-1}[U]\cap\pi_Y^{-1}[V]$ e, por conseguinte, $f^{-1}[U\times V] = (\pi_X\circ f)^{-1}[U]\cap(\pi_Y\circ f)^{-1}[V]$, uma interseção de dois subconjuntos abertos de Z. □

Em particular, a topologia produto torna lícito que se investigue a continuidade de funções da forma $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ ou ainda, mais geralmente, funções da forma $S\to Z$, onde S é subconjunto de um produto $X\times Y$.

Corolário 2.1.20. *Se $f\colon W\to X$ e $g\colon W\to Y$ são funções contínuas, então é contínua a função $\langle f,g\rangle : W\to X\times Y$ que faz $\langle f,g\rangle(w) := \langle f(w), g(w)\rangle$ para cada $w\in W$.*

Demonstração. Segue do segundo item do teorema anterior, já que $\pi_X\circ\langle f,g\rangle = f$ e $\pi_Y\circ\langle f,g\rangle = g$, ambas funções contínuas por hipótese. □

Corolário 2.1.21. *A função $\Delta_X\colon X\to X\times X$, que a cada $x\in X$ associa $\langle x,x\rangle\in X\times X$, é contínua.*

Demonstração. Basta tomar $f = g = \mathrm{Id}_X$ no corolário anterior. □

Corolário 2.1.22. *Sejam $f\colon W\to X$, $g\colon W\to Y$ e $\star\colon X\times Y\to Z$ funções contínuas. Então a função $f\star g\colon W\to Z$, que a cada $w\in W$ associa $f(w)\star g(w)\in Z$, é contínua.*

Demonstração. Basta observar que $f\star g = \star\circ\langle f,g\rangle$. □

[23] É comum chamar as projeções $\pi_X\circ f$ e $\pi_Y\circ f$ de **funções coordenadas** de f.

Exemplo 2.1.23 (Continuidade de funções polinomiais)**.** Se $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então as funções $f + g$ e $f \cdot g\colon X \to \mathbb{R}$ são contínuas: basta observar que as correspondências $x \mapsto f(x) + g(x)$ e $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ são *fruto* de composições de funções contínuas, com

$$x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle \mapsto f(x) + g(x)$$
$$x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

i.e., $f + g = + \circ \langle f, g\rangle$ e $f \cdot g = \cdot \circ \langle f, g\rangle$.

Consequentemente, *funções polinomiais*[24] em uma indeterminada são contínuas: note que a função $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é induzida pelo polinômio $p(t) := t$, de modo que funções da forma $x \mapsto \alpha x^n$ são o produto de funções contínuas, donde segue que funções polinomiais quaisquer da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são somas de funções contínuas. ▲

Exercício 2.28. Mostre que se $p(x, y)$ é um polinômio nas indeterminadas x e y, e $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função que faz $P(\alpha, \beta) := p(\alpha, \beta)$, então P é contínua. Dica: os polinômios $p(x, y) := x$ e $q(x, y) := y$ induzem as projeções nas primeira e segunda coordenadas de $\mathbb{R}^2$, respectivamente.■

Exemplo 2.1.24 (Quocientes)**.** Se $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então a correspondência $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ determina uma função contínua da forma $D_g \to \mathbb{R}$, onde $D_g := \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$. De fato, D_g é subconjunto do domínio da função $x \mapsto x^{-1}$ (confira o Exemplo 2.1.13), donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{g}\colon D_g &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{g(x)} \end{aligned}$$

é contínua (por ser composta de funções contínuas), e daí $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ se expressa como o produto entre funções contínuas. ▲

A partir do próximo capítulo, veremos como as noções de *limite* se relacionam com *continuidade*, num processo que expandirá muito o arsenal de funções contínuas – mas não mais com as mãos limpas.

Exercícios adicionais

Falta arrumar!

Exercício 2.29 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** ■

Exercício 2.30. ■

Exercício 2.31. Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre que se $p \in X$ é isolado, então f é contínua em p. ■

Exercício 2.32. Mostre que qualquer função da forma $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua. ■

[24] Confira o Exemplo 0.0.10.

Exercício 2.33. Quais as funções contínuas da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$? ■

Exercício 2.34. Sejam $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ um espaço normado e números reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Mostre que as correspondências $x \mapsto \alpha x$ e $y \mapsto \beta y$ determinam funções contínuas da forma $E \to E$. Dica: escreva a correspondência "$x \mapsto \alpha x$ como sendo $x \mapsto \langle \alpha, x\rangle \mapsto \alpha x$.

ii) Mostre que a função

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ \langle x, y\rangle &\mapsto \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

é contínua. Dica: a função $\langle x, y\rangle \mapsto \langle \alpha x, \beta y\rangle$ é contínua. ■

Exercício 2.35. Para um espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ e um espaço X, considere funções contínuas $f, g\colon X \to E$. Mostre que a função $\alpha f + \beta g\colon X \to E$ é contínua para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Capítulo 3

Limites

One Ring to rule them all,
One Ring to find them,
One Ring to bring them all,
and in the darkness bind them.

J. R. R. Tolkien[0].

Quem já enfrentou um curso de Cálculo I deve estar familiarizado com a notação

$$\lim_{x\to p} f(x) = L, \tag{3.0}$$

onde, por exemplo, f é uma função da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e tanto p quanto L são números reais. Neste caso, a simbologia acima abrevia o seguinte: *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x - p| < \delta$. Por sua vez, leitores que já encontraram a noção de sequência convergente num curso de Cálculo 2 (ou mesmo num primeiro curso de Análise), conhecem a notação

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L, \tag{3.1}$$

onde $x_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $L \in \mathbb{R}$. Neste caso, o que se abrevia é o seguinte: *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - L| < \varepsilon$ *sempre que* $n \geq N$.

Embora as duas definições sejam distintas, elas parecem guardar algum tipo de semelhança inquietante, como se ambas tratassem de um mesmo fenômeno descrito em ambientes sutilmente diferentes. A proposta deste capítulo é comprovar esta impressão por meio dos *limites de* nets, e ilustrar como o estudo de suas propriedades permite conhecer os principais limites da Análise.

3.0 Um limite para todos governar

Intuitivamente, tanto em "$\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$" quanto em "$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$", expressa-se a ideia de que conforme elementos num conjunto de índices *avançam* numa *direção* específica ("$x \to p$" no primeiro caso e "$n \to \infty$" no segundo), as imagens indexadas se *aproximam* do limite L. Ocorre que há um *tipo de ordem* que abstrai com bastante sucesso essa ideia vaga de "direção" – para uma motivação, considere atentamente os dois próximos exemplos.

[0] *The Lord of The Rings, The Fellowship of the Ring*, 1954: Um Anel para todos governar, Um Anel para encontrá-los, Um Anel para todos trazer e na escuridão aprisioná-los.

Exemplo 3.0.0. *Existe no máximo* um *número real* $L \in \mathbb{R}$ *que satisfaz a condição abreviada por* (3.0). Mais precisamente, se $L, L' \in \mathbb{R}$ satisfazem a mesma condição, então $L = L'$. Ora, a fim de mostrar isso, basta garantir que $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ (confira o Exercício 1.31). Tendo em vista que a desigualdade triangular acarreta $|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, convém utilizar a condição satisfeita por L e L', que permite tomar $\delta, \delta' > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad 0 < |x - p| < \delta' \Rightarrow |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Certamente, existe algum $x' \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < |x' - p| < \widetilde{\delta}$, onde $\widetilde{\delta} := \min\{\delta, \delta'\}$, donde segue que $|L - L'| \leq |L - f(x')| + |f(x') - L'| < \varepsilon$, como desejado. ▲

Exemplo 3.0.1. *Existe no máximo* um *número real* $L \in \mathbb{R}$ *que satisfaz a condição abreviada por* (3.1). Mais precisamente, se $L, L' \in \mathbb{R}$ satisfazem a mesma condição, então $L = L'$. Novamente, basta assegurar que $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por um lado, para $\gamma > 0$ fixado, existe $N_L \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \gamma$ sempre que $n \geq N_L$. Por outro lado, também existe $N_{L'} \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L'| < \gamma$ sempre que $n \geq N_{L'}$, pois $x_n \to L'$. Daí, *como existe* $N \in \mathbb{N}$ com $N_L, N_{L'} \leq N$, segue que

$$|L - L'| \leq |L - x_N| + |x_N - L'| < \gamma + \gamma = 2\gamma$$

donde a afirmação original segue com $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$. ▲

No primeiro exemplo, o fato de podermos tomar um mesmo ponto x' cumprindo as duas exigências ($|x' - p| < \delta$ e $|x' - p| < \delta'$) permite concluir que tanto $|f(x') - L|$ quanto $|f(x') - L'|$ são *suficientemente pequenos*. Já no segundo exemplo, o número N escolhido satisfaz as duas exigências ($N \geq N_L$ e $N \geq N_{L'}$), o que permite concluir que tanto $|x_N - L|$ quanto $|x_N - L'|$ são *suficientemente pequenos*. Sem mais rodeios:

Definição 3.0.2. Sejam $\mathbb{D}$ um conjunto e $\preceq$ uma relação binária sobre $\mathbb{D}$. Diremos que $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$ é uma **pré-ordem** se $\preceq$ for reflexiva e transitiva. Diremos que $\mathbb{D} \neq \emptyset$ é um **conjunto dirigido** pela pré-ordem $\preceq$ se, adicionalmente, valer a seguinte condição de *compatibilidade*: para quaisquer $x, y \in \mathbb{D}$ existe $z \in \mathbb{D}$ com $x, y \preceq z$. ¶

Exemplo 3.0.3. Ordens totais são exemplos simples de conjuntos dirigidos, já que quaisquer dois elementos x e y do conjunto são majorados por $\max\{x, y\}$. Em particular, $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ é dirigido. ▲

Exemplo 3.0.4 (Direção por proximidade bilateral)**.** Para um ponto $p \in \mathbb{R}$ fixado, sejam $\mathbb{R}_p := \mathbb{R} \setminus \{p\}$ e a relação binária $\preceq$ em $\mathbb{R}_p$ definida da seguinte forma: para $x, y \in \mathbb{R}_p$, ocorre $x \preceq y$ se, e somente se, $|y - p| \leq |x - p|$. Não é difícil se convencer de que $\preceq$ é uma pré-ordem sobre $\mathbb{R}_p$ (verifique?). Para ver que $\langle \mathbb{R}_p, \preceq \rangle$ é dirigido, apenas note que se $x, y \in \mathbb{R}_p$, então ocorre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, já que $|x - y|$ e $|y - x|$ são elementos de um conjunto totalmente ordenado. ▲

Observação 3.0.5. Note que $\langle \mathbb{R}_p, \preceq \rangle$ não é uma ordem parcial: para $p := 0$, por exemplo, verifica-se $-r \preceq r$ e $r \preceq -r$ para qualquer $r \neq 0$, mas $r \neq -r$. △

Ao longo desta breve seção, veremos diversos exemplos de conjuntos dirigidos, cada um deles destinado a servir como instância particular da próxima

Definição 3.0.6. Uma ***net*** (ou **rede**) num espaço topológico X é uma função da forma $\mathbb{D} \to X$, onde $\mathbb{D}$ é um conjunto dirigido por alguma pré-ordem $\leq$. *Nets* serão denotadas por $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$, $\langle x_d : d \in \mathbb{D} \rangle$ ou mesmo $\langle x_d \rangle_d$ quando o conjunto dirigido $\mathbb{D}$ for claro pelo contexto[1]. Agora, um ponto $x \in X$ será xingado de (*um*) **limite da *net*** se a seguinte condição for satisfeita: para todo aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que para qualquer $d \in \mathbb{D}$ com $d \geq D$ ocorre $x_d \in V$. Em tal situação, também se diz que $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ **converge para** x, o que se abrevia com a notação $x_d \to x$. Dizer que a *net* é **convergente em** X apenas indica que existe $x \in X$ com $x_d \to x$. ¶

Intuitivamente, a relação $\preceq$ determina uma noção de *direção* que, por sua vez, é usada para detectar a convergência: dado um aberto $V \subseteq X$ em torno de x, existe um *momento* $d' \in \mathbb{D}$ *a partir* do qual $x_d \in V$, i.e., tal que $x_d \in V$ sempre que $d \geq d'$ – que pode ser lido como *d é melhor do que d'*. Na prática, cada noção particular de limite traz consigo uma noção de direção que, implicitamente, ordena os seus índices. Nesse sentido, a abordagem adotada no texto apenas explicita tais noções.

Leitores que preferirem entender como a noção de limite acima generaliza os limites clássicos da Análise podem prosseguir para a próxima seção. Já os pragmáticos podem avançar diretamente para a Seção 3.1 – e só depois retornar para os subcasos tratados a seguir.

3.0.0 Limites de sequências

Sequência é uma *net* cujo conjunto dirigido é $\mathbb{N}$ com sua ordem usual. Mais precisamente, uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço topológico X é uma função da forma $\mathbb{N} \to X$ que faz $n \mapsto x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ao traduzir a noção de convergência expressa na Definição 3.0.6 para sequências, obtém-se a seguinte:

Definição 3.0.7. Uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço topológico X **converge** para um ponto $x \in X$ se para todo aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq N$. Diz-se também que x é (*um*) **limite da sequência**. ¶

É claro que o critério de convergência se adapta à topologia do espaço considerado.

Exemplo 3.0.8. Para $X := \mathbb{R}$ com sua topologia usual, $x_n \to x$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $|x_n - x| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$: isto segue pois se $V \subseteq \mathbb{R}$ é aberto com $x \in V$, então existe $\varepsilon > 0$ com $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq V$ (Proposição 2.0.10). Nesse tipo de situação, diremos que a sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ **converge em** $\mathbb{R}$, pois *seu* limite está em $\mathbb{R}$. ▲

Exemplo 3.0.9. Para $X := \overline{\mathbb{R}}$ com sua topologia usual, $x_n \to x$ se para todo intervalo $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $x \in I$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in I$ sempre que $n \geq N$. Note que tal critério se reduz ao anterior caso ocorra $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, pode-se ter

✓ $x := +\infty$, e daí $x_n \to +\infty$ se para todo $M > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ com $x_n > M$ sempre que $n \geq N$, ou

✓ $x := -\infty$, e daí $x_n \to -\infty$ se para todo $M > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ com $x_n < -M$ sempre que $n \geq N$,

traduções que também estão embutidas na Proposição 2.0.10. Embora a Definição 3.0.6 permita a ocorrência de $x_n \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$, a maior parte das sequências consideradas no texto com limites *infinitos* terão seus termos restritos à reta real. ▲

[1] Como de costume, entende-se que x_d indica a imagem de $d \in \mathbb{D}$ pela função.

Observação 3.0.10 (*Divergência* vs. convergência em $\overline{\mathbb{R}}$)**.** Diferente do que se faz na maioria dos textos introdutórios, uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais com $x_n \to \pm\infty$ **não** será chamada de *divergente*, mas sim de **convergente na reta estendida**. △

Exercício 3.0. Traduza a definição de convergência para sequências tomadas em espaços métricos e normados. ■

Mais geralmente, é lícito chamar de sequência qualquer função da forma $\mathcal{N} \to X$, desde que $\mathcal{N}$ seja um subconjunto infinito de $\mathcal{N}$ com a ordem induzida. De fato, em tais situações, e para efeitos *práticos*, $\mathcal{N}$ *é o conjunto dos números naturais*, a menos de nomenclatura. Mais precisamente:

Proposição 3.0.11. *Para um subconjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$, são equivalentes:*

(i) $\mathcal{N}$ é infinito;

*(ii) $\mathcal{N}$ é **cofinal** em $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, i.e., para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathcal{N}$ com $m \leq n$;*

(iii) existe uma bijeção estritamente crescente $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$.

Além disso, a bijeção do último item é única.

Demonstração. Se $\mathcal{N}$ é infinito e $n \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{N} \setminus \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ é não-vazio, já que o contrário implicaria a finitude de $\mathcal{N}$. Logo, existe $N \in \mathcal{N}$ com $n < N$, mostrando que $\mathcal{N}$ é cofinal em $\mathbb{N}$. Agora, supondo a segunda condição, pode-se definir $h(0) := \min \mathcal{N}$ e, supondo $h(m) \in \mathcal{N}$ definido para cada $m \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$, satisfazendo $h(i) < h(j)$ sempre que $i < j$, declara-se $h(n+1) := \min(\mathcal{N} \setminus \{h(m) : m \leq n\})$, o que faz sentido pois a *cofinalidade* de $\mathcal{N}$ em $\mathbb{N}$ garante pelo menos um $p \in \mathcal{N}$ com $h(n)+1 \leq p$. Por construção, tem-se $h(m) < h(n)$ sempre que $m < n$, mostrando que $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ é estritamente crescente. Note que se h não fosse sobrejetora, então o menor k em $\mathcal{N} \setminus \operatorname{im}(h)$ seria tal que $h(j) = k-1$ para algum j, o que levaria a $h(j+1) = k$, uma contradição. A condição (iii) claramente implica em (i).

Por fim, por indução em $n \in \mathbb{N}$, não é difícil se convencer de que se $g, h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ são bijeções crescentes, então $g(n) = h(n)$, o leitor pode cuidar dos detalhes. □

Exercício 3.1. Mostre que se $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção crescente, então $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Use isso para concluir que a função h da demonstração anterior é única. ■

Implicitamente, é a função h da proposição anterior que permite tratar restrições de sequências como se fossem sequências: em vez de $\langle x_n \rangle_{n\in\mathcal{N}}$, considera-se $\left\langle x_{h(n)} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Mais detalhes serão discutidos no Exemplo 3.1.12.

Exercício 3.2 (Para os afoitos)**.** Mostre que se $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$, então $\langle x_n \rangle_{n\in\mathcal{N}}$ também converge para x, qualquer que seja o subconjunto infinito $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$. ■

Antes de prosseguir para a próxima noção de limite capturada pelas *nets*, convém destacar que a *ordem* de $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ realmente importa no critério de convergência de uma sequência. Para ilustrar, recordemo-nos de que no Exemplo 0.0.33, $\mathcal{N} := \mathbb{N}^*$ foi munido de uma ordem parcial $\preceq$ dada pela divisão: $m \preceq n$ sempre que m divide n, i.e., se existir $k \in \mathbb{N}^*$ com $n = mk$. Ocorre que $\langle \mathcal{N}, \preceq \rangle$ é um conjunto dirigido, já que para $m, n \in \mathcal{N}$, o produto mn é tal que $m, n \preceq mn$. E daí?

Ao considerar $\mathbb{N}^*$ com sua ordem usual herdada de $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, a *sequência* $\langle (-1)^n \rangle_{n \in \mathbb{N}^*}$ *não* converge, já que para qualquer candidato a limite L é possível obter um intervalo aberto I em torno de L de forma que para todo $N \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{N+1} \notin I$. Porém, ao considerar $\mathcal{N}$ dirigido pela relação de divisão, a *net* $\langle (-1)^n \rangle_{n \in \mathcal{N}}$ converge para 1! De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $N := 2 \in \mathcal{N}$, pois se $n \succeq 2$, i.e., se 2 dividir n, então $(-1)^n = 1$ e, consequentemente, $|1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Isto ocorre pois ao ordenar $\mathcal{N}$ por meio da relação de divisão, a distribuição dos naturais deixa de ser linear e se torna *ramificada* – e, no caso, *a partir* de 2 (nesta ordem!), a *net* assume valor constante. Conferir o diagrama de Hasse de $\langle \mathbb{N}^*, \preceq \rangle$, na Observação 0.0.35, pode ajudar a entender o que *realmente* está acontecendo.

3.0.1 Limites de funções

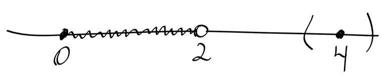
Quando X e Y são espaços topológicos e $Z \subseteq X$ é um subespaço de X, é frequente o problema de entender o *comportamento* de uma função $f : Z \to Y$ conforme os pontos de Z se *aproximam* de um ponto $p \in X$ fixado, no seguinte sentido: existe algum $y_0 \in Y$ tal que $f(z)$ se *aproxima* de y_0 conforme $z \in Z$ se *aproxima* de p? Embora se trate de uma questão *simples* de continuidade, muitos casos particulares são facilmente tratáveis por meio de *nets*. Mas primeiro, vejamos como expressar a noção de *aproximação arbitrária*.

Definição 3.0.12. Sejam X um espaço topológico, $Z \subseteq X$ um subconjunto e $p \in X$. Diz-se que p é **ponto de acumulação** de Z se $V \cap (Z \setminus \{p\}) \neq \emptyset$ para qualquer aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$. Quando $X = Z$, diz-se apenas que p é *ponto de acumulação*. ¶

Intuitivamente, os pontos de Z *se acumulam* nas proximidades de p, no sentido de que qualquer aberto *em torno* de p, não importa o quão pequeno seja, contém pontos de Z distintos do próprio p.

Exemplo 3.0.13. Fazer $X := \overline{\mathbb{R}}$ na definição anterior ajuda a entender o sentido de aproximação arbitrária que se busca capturar com pontos de acumulação – além de ilustrar a necessidade de *retirar* o próprio ponto p da interseção. Para $Z := [0, 2) \cup \{4\}$, por exemplo:

- ✓ qualquer $p \in (0, 2)$ é ponto de acumulação de Z (verifique?);
- ✓ tanto 0 quanto 2 são pontos de acumulação de Z, já que qualquer aberto em torno de um deles contém *outros* pontos de Z;
- ✓ diferente do que o primeiro item poderia sugerir, 4 não é ponto de acumulação de Z, pois existem abertos em torno de 4 que não contêm *outros* pontos de Z.



Por sua vez, acumular nos extremos da reta estendida é apenas um modo equivalente de expressar *ilimitação*. Por exemplo, note que $+\infty$ é ponto de acumulação de $Z \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se, e somente se, $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$: por um lado, se $+\infty$ é ponto de acumulação de Z, então para todo número real $M > 0$, existe $z \in (M, +\infty) \cap Z$, donde segue que $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$; por outro lado, se $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$, então para todo número real $M > 0$ existe $z \in (M, +\infty)$, mostrando que $(M, +\infty] \cap (Z \setminus \{+\infty\})$ é não-vazio. Analogamente, $-\infty$ é ponto de acumulação de $Z \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se, e somente se, $Z \cap \mathbb{R}$ é ilimitado inferiormente em $\mathbb{R}$. ▲

Posto de outra forma, a noção de acumulação se opõe à ideia de isolamento expressa na Definição 2.0.40. Explicitamente:

Proposição 3.0.14. *$p \in X$ é ponto de acumulação se, e somente se, p não é isolado.*

Demonstração. Se $\{p\} := V$ é aberto, então $V \cap (X \setminus \{p\}) = \emptyset$, ou seja: se p é isolado, então p não é ponto de acumulação. A recíproca é análoga. □

Exercício 3.3. Mostre que num espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$, todo ponto é de acumulação. Em particular, todo $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$. Dica: observe que uma bola aberta $B_{\|\cdot\|}(p, r)$ contêm outros pontos além de p. ■

Exemplo 3.0.15 (Limites clássicos do Cálculo)**.** Para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$, com $Z \subseteq \mathbb{R}$, existem três *tipos* de limites que costumam ser investigados.

(i) $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ quando $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de Z: significa que para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de L, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $0 < |z - p| < \delta$.

(ii) $\lim\limits_{z\to +\infty} f(z) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ quando Z é ilimitado superiormente: significa que para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de L, existe um número real $M > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $M < z$.

(iii) $\lim\limits_{z\to -\infty} f(z) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ quando Z é ilimitado inferiormente: significa que para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de L, existe um número real $M > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $z < -M$.

Em todos os casos, o *ponto* L é dito (*um*) **limite de $f(z)$ quando z tende a p.**

Note que as definições apresentadas acima compreendem tanto os *limites reais*, i.e., com $L \in \mathbb{R}$, quanto os *limites infinitos*[2]: para o primeiro caso, ao fazer $I := (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, chega-se à definição usual de limite real e, nos demais casos, a definição usual se recupera com $I := (M, +\infty]$ ou $I := [-\infty, -M)$ conforme tivermos $L := +\infty$ ou $L := -\infty$, respectivamente. Porém, mais ainda é verdade: secretamente, cada uma das noções de limite acima é uma instância de limite de *net*.

(i) Para o primeiro caso, considere $Z_p := Z \setminus \{p\}$ dirigido pela seguinte ordem: $a \preceq b$ se, e somente se, $|p - b| \leq |p - a|$. Intuitivamente, quanto *maior* a proximidade de um ponto $z \in Z_p$ com o ponto p, *melhor* ele será segundo a ordem $\preceq$.

(ii) Para o segundo caso, basta fazer $Z_{+\infty} := Z$ dirigido pela ordem usual, afinal de contas, quanto maior o número real z, mais próximo de $+\infty$ ele será.

(iii) Para o terceiro caso, inverte-se o raciocínio do item anterior: faz-se $Z_{-\infty} := Z$ dirigido pela ordem inversa, i.e., $a \preceq b \Leftrightarrow b \leq a$, já que quanto *mais à esquerda* o número z estiver na reta real, mais próximo de $-\infty$ ele estará.

[2] Atenção: é muito comum encontrar textos com a exigência de que o limite seja real, de modo que nas situações em que ocorre "$\lim\limits_{z\to p} f(z) = \pm\infty$", diz-se que o *limite não existe*. Apesar disso, a mesma simbologia é utilizada para indicar o "comportamento da função", de modo que, na prática, todo mundo lê "o limite de $f(z)$ quando z tende a p *é* $\pm\infty$". Soa meio hipócrita, não?

Proposição 3.0.16. *Sejam $f\colon Z \to \mathbb{R}$ uma função, com $Z \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto de acumulação de Z e $L \in \overline{\mathbb{R}}$ qualquer. Então $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$ se, e somente se, a* net $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ *converge para L.*

Demonstração. Há três casos a considerar conforme se varia entre $p \in \mathbb{R}$, $p := +\infty$ e $p := -\infty$. Para o primeiro caso, se $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$, então para qualquer intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $L \in I$, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ e $0 < |z - p| < \delta$. Ora, como p é ponto de acumulação de X, existe, *efetivamente*, pelo menos um $z' \in Z_p$ satisfazendo $0 < |z' - p| < \delta$. Assim, no conjunto dirigido Z_p, pode-se tomar $d := z'$, pois daí a ocorrência de $z \succeq z'$ equivale a $0 < |z - p| \leq |z' - p| < \delta$ e, portanto, $f(z) \in I$.

Por outro lado, se a *net* $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ é tal que $f(z) \to L$, então para qualquer intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $L \in I$, existe $d \in Z_p$ tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \succeq d$. Ora, chamando $\delta := |d - p|$, resulta que se $0 < |z - p| < \delta$, então $f(z) \in I$, i.e., $\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$. Os outros casos, por serem mais simples, serão deixados a cargo do leitor. □

Exercício 3.4. Complete a demonstração da proposição anterior. Dica: lembre-se de que $+\infty$ (resp. $-\infty$) é ponto de acumulação de Z se, e somente se, Z é ilimitado superiormente (resp. inferiormente). ■

Uma análise cuidadosa da argumentação apresentada na última proposição pode ajudar a perceber como *adivinhar* o jeito certo de *dirigir* um conjunto de índices: dizer que uma *net* $\langle f(d)\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ converge para L significa que para qualquer aberto em torno L, *existirá* um *momento d' a partir do qual* todas as $f(d)$ pertencerão ao aberto; ora, como a definição de "$\lim\limits_{z\to p}$" pede que z esteja cada vez *mais próximo* de p, são justamente as distâncias até p que serão usadas como critério para dirigir o conjunto Z_p. ▲

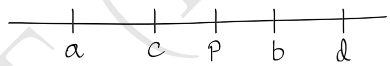


Figura 3.0: Quanto mais perto de p, *melhor*: note que $a \preceq b$ e $d \preceq c$.

Exercício 3.5 (Opcional)**.** Mostre que as pré-ordens definidas sobre Z_p nos três casos possíveis ($p \in \mathbb{R}$ ou $p := \pm\infty$) podem ser estendidas por uma única pré-ordem. Dica: para $a, b, p \in \mathbb{R}$, note que a condição "$|p - b| \leq |p - a|$" é equivalente a "$p \leq b \leq a$ ou $a \leq p \leq b \leq 2p - a$ ou $2p \leq a + b$ ou $a \leq b \leq p$"; daí, observe que tal versão se aplica a Z_p com $p \in \{+\infty, -\infty\}$ e resulta nas mesmas ordens definidas em (ii) e (iii). ■

Observação 3.0.17. Nas definições clássicas, exigir que p seja ponto de acumulação é importante para garantir a *unicidade* do limite L (e assim fazer da notação "$\lim\limits_{z\to p} f(z) = L$" algo ligeiramente mais honesto). De fato, se tal condição não é satisfeita por p, então *qualquer* L é *um* limite de f quando z "tende a p".

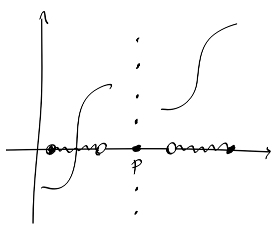


Figura 3.1: Para que algum L *não* fosse limite de f em p, testemunhas de Z arbitrariamente próximas de p deveriam existir – mas tais testemunhas não existem neste caso.

Porém, como o leitor atento deve ter notado no Exemplo 3.0.15, $\langle Z_p, \preceq\rangle$ é um conjunto dirigido independentemente da relação de p com Z. Ora, como veremos que o limite de *nets* também é único na maior parte das situações que interessam[3], surge uma pulga atrás da orelha: por que o limite de uma *net* do tipo $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ é único (se existir) mesmo se p não for ponto de acumulação de Z?

Enquanto, no caso clássico, qualquer L seria um limite por satisfazer a implicação

$$0 < |z-p| < \delta \Rightarrow f(z) \in I$$

por vacuidade (para $\delta > 0$ com $(p-\delta, p+\delta)\cap Z = \emptyset$), o mesmo L só pode ser limite da *net* $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ se existir um *índice* z' com $f(z) \in I$ sempre que $z \succeq z'$. Ou seja, não são as *distâncias* até p que importam, mas sim o modo como os *pontos* ficam *ordenados* por meio de suas distâncias até p; na prática, é como se a *net* não enxergasse o "buraco" em torno do ponto *isolado* p. No caso da figura anterior, por exemplo, o limite da *net* $\langle f(z)\rangle_{z\in Z_p}$ correspondente não existe, posto que os *limites laterais* são distintos. Por falar nisso... △

Exemplo 3.0.18 (Limites laterais clássicos)**.** A ordem natural da reta permite especificar ainda mais a análise do comportamento de uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$ nas proximidades de um ponto p que esteja arbitrariamente próximo de Z, desta vez levando em conta o *lado* pelo qual a aproximação acontece.

Definição 3.0.19. Sejam $Z \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $p \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto qualquer.

(i) Diremos que p é **ponto de acumulação de Z à esquerda** se para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p \in I$ existir $z \in I \cap Z$ com $z < p$.

(ii) Diremos que p é **ponto de acumulação de Z à direita** se para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $p \in I$ existir $z \in I \cap Z$ com $p < z$. ¶

A ideia das definições acima é indicar de que "lado" de p os pontos de Z se aproximam: se a aproximação ocorre pela esquerda de p, então os pontos de Z correspondentes devem ser menores do que p; analogamente, se a aproximação ocorre pela direita de p, então os pontos de Z correspondentes devem ser maiores do que p. Assim, algumas conclusões devem ser imediatas (e o leitor é livre para verificá-las, se quiser):

✓ $-\infty$ *não* pode ser ponto de acumulação de Z à esquerda;

✓ $+\infty$ *não* pode ser ponto de acumulação de Z à direita;

✓ em geral, p é ponto de acumulação de Z se, e somente se, p é ponto de acumulação de Z à esquerda *ou* à direita.

Para ilustrar, note que $+\infty$ é ponto de acumulação de Z à esquerda sempre que Z é ilimitado superiormente, enquanto $-\infty$ é ponto de acumulação de Z à direita sempre que Z é ilimitado inferiormente. Já para $Z := (0,1)\cup(1,2)$, os pontos 0 e 1 são de acumulação à direita, enquanto 1 e 2 são de acumulação à esquerda.

Isso permite refinar as noções usuais de limite para analisar o comportamento da função conforme os pontos de Z se aproximam de p por algum lado específico. Explicitamente, os **limites laterais** de $f\colon Z \to \mathbb{R}$ em p costumam ser definidos da seguinte forma:

[3]Sempre que as *nets* são tomadas nos chamados *espaços de Hausdorff*, o que inclui tanto espaços métricos quanto os subconjuntos da reta estendida.

(i) se p é ponto de acumulação de Z à esquerda e $L \in \overline{\mathbb{R}}$, escreve-se $\lim\limits_{z \to p^-} f(z) = L$ para indicar que para todo intervalo aberto I em torno de L, existe um intervalo aberto J em torno de p tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z \cap J$ com $z < p$;

(ii) se p é ponto de acumulação de Z à direita e $L \in \overline{\mathbb{R}}$, escreve-se $\lim\limits_{z \to p^+} f(z) = L$ para indicar que para todo intervalo aberto I em torno de L, existe um intervalo aberto J em torno de p tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z \cap J$ com $z > p$.

Ocorre que os limites acima – usualmente chamados **limites de $f(z)$ quando z tende a p pela esquerda e pela direita**, respectivamente – também são limites de *nets* particulares, e de modo bastante natural. Na prática, $\lim\limits_{z \to p^-} f(z)$ e $\lim\limits_{z \to p^+} f(z)$ são subcasos do limite usual tratado no Exemplo 3.0.15, exceto pela restrição do domínio da função f: para o limite pela esquerda, considera-se $Z_p^- := \{z \in Z_p : z < p\}$ e, para o limite pela direita, $Z_p^+ := \{z \in Z_p : p < z\}$, ambos dirigidos pela ordem de $\langle Z_p, \preceq \rangle$.

Futuramente, veremos que nas situações em que p é ponto de acumulação de Z *bilateral* (i.e., tanto pela esquerda quanto pela direita) o limite $\lim\limits_{z \to p} f(z)$ existe (em $\overline{\mathbb{R}}$) se, e somente se, ambos $\lim\limits_{z \to p^-} f(z)$ e $\lim\limits_{z \to p^-} f(z)$ existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) e coincidem. ▲

Exercício 3.6. Convença-se de que "$\lim\limits_{z \to +\infty} f(z)$" e "$\lim\limits_{z \to -\infty} f(z)$" são limites à esquerda de $+\infty$ e à direita de $-\infty$, respectivamente. ■

Evidentemente, faz sentido investigar o limite de funções da forma $Z \to Y$, com $Z \subseteq X$ e tanto X quanto Y métricos. E como esperado, tais limites também são *capturáveis* por meio de *nets*, *mutatis mutandis*. Primeiro, para $p \in X$ ponto de acumulação de Z, considera-se $Z_p := Z \setminus \{p\}$ com a ordem dada por $a \preceq b$ se, e somente se, $d(p, b) \leq d(p, a)$, o que torna lícito considerar a *net* $\langle f(z) \rangle_{z \in Z_p}$ em Y. Daí, a Definição 3.0.6, que trata de *nets* em espaços topológicos quaisquer, se traduz para o caso de Y métrico da seguinte forma: $f(z) \to y$ em Y se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $z' \in Z_p$ tal que $d(f(z), y) < \varepsilon$ para todo $z \succeq z'$. Quem preferir empurrar as *nets* para debaixo do tapete pode fazer o próximo

Exercício 3.7. Nas notações acima, mostre que $f(z) \to y$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(z), y) < \varepsilon$ sempre que $d(z, p) < \delta$. Dica: imite a prova da Proposição 3.0.16. ■

Exemplo 3.0.20 (Adiável: funções como limites)**.** O Exemplo 3.33 ensinou como elevar o conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ (das funções limitadas da forma $X \to \mathbb{R}$) ao patamar de espaço normado: basta declarar $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$. Logo, em vista do que se observou acima[4], é lícito investigar o *limite* de uma sequência $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de *funções limitadas*, agora interpretadas como vetores num espaço normado! Explicitamente, uma função *limitada* $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *limite*[5] de $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$, ou seja, se o mesmo $N \in \mathbb{N}$ dá conta de "controlar" $|f_n(x) - f(x)|$ para cada $x \in X$. ▲

O passo final na generalização dos limites de funções é, como a Definição 3.0.6 sugere, o caso em que X e Y são meramente espaços topológicos, $f\colon Z \to Y$ é uma função com $Z \subseteq X$ e $p \in X$ é um ponto de acumulação de Z. Nessa altura da vida, intuir a definição adequada não deve ser problema:

[4] Veja também o Exercício 3.33.

[5] Atenção: as palavras "limitada" e "limite" têm significados diferentes no presente contexto. Especificamente, "limitada" tem a ver com "cercada", no sentido de ter limitantes inferiores e superiores (em inglês, a terminologia usual é "*bounded*"), enquanto "limite" se refere a convergência.

Definição 3.0.21. Nas condições acima, diremos que $y \in Y$ é (*um*) **limite de** $f(z)$ **quando** z **tende a** p se para todo aberto $V \subseteq Y$ com $y \in V$ existir um aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ e tal que $f(z) \in V$ sempre que $z \in Z \cap U \setminus \{p\}$. ¶

Exercício 3.8. Convença-se de que a noção de limite acima generaliza todos os limites de função tratados nesta subseção. ■

Se, por um lado, o exercício anterior não parece desafiador, por outro lado, a missão (autoimposta) de tratar *todos* os limites por meio de *nets* encontrou seu primeiro obstáculo técnico: sem uma métrica no domínio da função f, não há uma maneira *óbvia* de dirigir os elementos de Z conforme estes *se aproximam* de p. Ou será que há?

Exemplo 3.0.22 (Opcional: filtros disfarçados)**.** Com $p \in X$ ponto de acumulação de Z, define-se $\mathbb{D} := \{\langle z, A\rangle : A \subseteq X \text{ é aberto em } X \text{ com } p \in A \text{ e } z \in Z \cap A \setminus \{p\}\}$ com a ordem dada por $\langle z, A\rangle \preceq \langle z', B\rangle$ se $B \subseteq A$, que se revela um conjunto dirigido por p ser ponto de acumulação de Z. Agora, o leitor interessado não terá dificuldades para verificar que a *net* $\langle f(z)\rangle_{\langle z,A\rangle \in \mathbb{D}}$ converge para $y \in Y$ se, e somente se, para todo aberto $U \subseteq Y$ com $y \in U$ existir $A \subseteq X$ aberto em X com $p \in A$ e $f[(A \cap Z) \setminus \{p\}] \subseteq U$, justamente o que se definiu acima. ▲

3.0.2 Integrais de Riemann (primeiro contato)

Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, xingaremos de **partição do intervalo** $[a, b]$ qualquer sequência finita de números reais $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ com $n > 0$ e $a := a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n := b$. Embora, a rigor, não sejam as mesmas *partições* introduzidas na Definição 0.1.9, há uma relação clara entre ambas: se $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ é uma partição do *intervalo* $[a, b]$, então $\mathcal{P}' := \{[a_i, a_{i+1}) : i < n\}$ é uma partição do *conjunto* $[a, b)$.

Agora, fixada uma partição $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ do intervalo $[a, b]$, uma ***tag***[6] de $\mathcal{P}$ é uma sequência $T := \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ de números reais satisfazendo $a_{i-1} \leq t_i \leq a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. A coleção dos pares $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ em que $\mathcal{P}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ e T é uma *tag* de $\mathcal{P}$ será denotada por $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a, b]$, a família das **partições de Riemann** do intervalo $[a, b]$. Leitores que já enfrentaram um bom curso de Cálculo devem saber onde isso tudo vai dar.

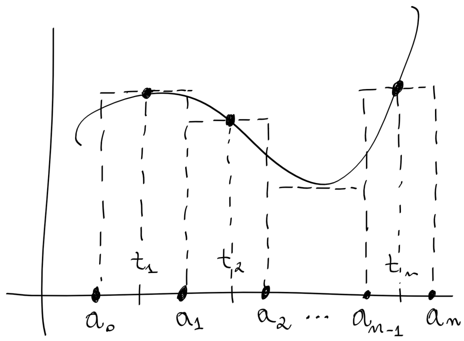
Definição 3.0.23. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ uma partição de Riemann do intervalo. A **soma de Riemann** da função f com respeito à partição $\langle \mathcal{P}, T\rangle$ é o número

$$\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}),$$

onde $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ e $T := \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$. ¶

Quando a função f é não-negativa, pode-se pensar em $\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f$ como uma aproximação *tosca* do que seria a área da região plana determinada pelo gráfico de f com o eixo *horizontal*. Intuitivamente, a fim de tornar a aproximação menos *tosca*, i.e., torná-la uma aproximação *melhor* do que seria a área *real* da figura, basta *refinar* as partições, no sentido de acrescentar mais pontos a ela, processo em que se diminuem os *tamanhos* dos subintervalos da forma $[a_i, a_{i+1})$.

[6]Nacionalistas podem preferir expressões (mais longas) em português, como *marcação*, *etiqueta*, *pontilhamento*, etc. Particularmente, tenho mais apego ao tempo do que ~~à bandeira~~ ao léxico.



Para tornar mais precisas as considerações acima, vamos associar a cada partição $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ do intervalo $[a, b]$ o número

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{a_i - a_{i-1} : 1 \leq i \leq n\},$$

usualmente xingado como **norma da partição**.

Definição 3.0.24. Diremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **Riemann-integrável** se existir $L \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer partição de Riemann $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ de $[a, b]$ se tenha

$$\left| L - \sum_{\langle \mathcal{P}, T \rangle} f \right| < \varepsilon$$

sempre que $\|\mathcal{P}\| < \delta$. ¶

Em contextos que tratam unicamente do limite de sequências e funções com domínio real, a definição acima não costuma ser muito prática, posto que ela consiste numa *terceira forma de limite*[7]. Porém, as ferramentas apresentadas até agora permitem interpretar a Definição 3.0.24 como a mera exigência de que uma *net* apropriada converge.

Lema 3.0.25. *$\langle \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a, b], \preceq \rangle$ é um conjunto dirigido, onde $\langle \mathcal{P}, T \rangle \preceq \langle \mathcal{P}', T' \rangle$ se, e somente se, $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$.*

Demonstração. Primeiramente, para partições $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ e $\mathcal{P}' := \langle a'_0, \ldots, a'_m \rangle$ de $[a, b]$, vamos escrever $\mathcal{P} \sqsubseteq \mathcal{P}'$ para indicar que $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \{a'_0, \ldots, a'_m\}$, já que escrever $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ seria tremendamente imoral. Daí, não é difícil perceber que o conjunto formado pelas partições de $[a, b]$ é dirigido pela ordem $\sqsubseteq$ (verifique?).

Agora sim, vamos mostrar que $\preceq$ dirige $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a, b]$. Dado que $\preceq$ é uma pré-ordem (verifique?), tudo se resume a observar que se $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ são duas partições de $[a, b]$ com $\mathcal{Q} \sqsubseteq \mathcal{R}$, então $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$: com efeito, *se isto for demonstrado*, então para partições de Riemann $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ e $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$ de $[a, b]$, basta tomar uma partição $\mathcal{R}$ de $[a, b]$ com $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \sqsubseteq \mathcal{R}$ e uma *tag* T'' de $\mathcal{R}$ para obter $\langle \mathcal{P}, T \rangle, \langle \mathcal{P}', T' \rangle \preceq \langle \mathcal{R}, T'' \rangle$. Os detalhes ficam por conta do leitor. □

Exercício 3.9. Dadas partições $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ do intervalo $[a, b]$, mostre que se $\mathcal{Q} \sqsubseteq \mathcal{R}$, então $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$. Use isso para concluir a demonstração anterior. Dica: antes de qualquer outra coisa, faça um desenho. ■

[7] Talvez por isso seja comum substituí-la pela noção (equivalente) de *integrabilidade de Darboux*, que será abordada oportunamente neste texto.

Moralmente, a pré-ordem $\preceq$ determina que conforme as normas das partições diminuem, elas se tornam *melhores* ou mais próximas do que seria uma partição *ideal*, justamente o que se espera de um conjunto dirigido. Para facilitar futuras referências, diremos que uma partição $\mathcal{P}$ é **mais fina** do que outra partição $\mathcal{P}'$ se ocorrer $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$, nomenclatura que também será utilizada para partições de Riemann – já que as *tags* não influenciam a ordenação. Em particular, ganha-se o direito de considerar *nets* indexadas por $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]$, o que permite enunciar o próximo

Teorema 3.0.26. *Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, a* net $\left\langle \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f \right\rangle_{\langle \mathcal{P},T\rangle \in \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]}$ *converge em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Com f Riemann-integrável e $\varepsilon > 0$, para *o* número real L da definição, existe $\delta > 0$ tal que $\left|L - \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f\right| < \varepsilon$ sempre que $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Logo, para mostrar que a *net* converge, basta exibir uma partição de Riemann $\langle \mathcal{P}', T'\rangle$ para $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}'\| < \delta$, pois daí sempre que $\langle \mathcal{P}, T\rangle \succeq \langle \mathcal{P}', T'\rangle$ teremos $\left|L - \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f\right| < \varepsilon$. Ora, tomando $N \in \mathbb{N}$ com $N > \dfrac{b-a}{\delta}$, que existe por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, considere $\mathcal{P}' := \langle a_0, \ldots, a_N\rangle$ onde $a_j := a + j \cdot \dfrac{b-a}{N}$ para cada $j \leq N$, e tome T' uma *tag* qualquer em $\mathcal{P}'$, como por exemplo $T' := \langle a_1, \ldots, a_N\rangle$: por construção, $\|\mathcal{P}'\| = \dfrac{b-a}{N} < \delta$. Para a recíproca, com a *net* convergindo para $L \in \mathbb{R}$ e fixado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta < \|\mathcal{P}'\|$, onde $\langle \mathcal{P}', T'\rangle$ é tal que $\left|L - \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f\right| < \varepsilon$ sempre que $\langle \mathcal{P}, T\rangle \succeq \langle \mathcal{P}', T'\rangle$. $\square$

Embora pareça uma curiosidade inútil, tratar o critério de Riemann-integrabilidade como um limite de *net* permite traduzir automaticamente resultados sobre convergência de *nets* para o contexto de integrais. Em particular, fatos como

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

ou

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

se revelam casos particulares dos resultados análogos para *nets*. Apesar de tal tratamento não inutilizar completamente a abordagem de Darboux para as integrais de Riemann, o seu uso ficará restrito a considerações bem mais importantes do que a mera verificação de propriedades operatórias. Para mais detalhes, confira o Capítulo 8.

3.1 Propriedades elementares dos limites

A seção anterior ilustrou como a convergência de *nets* unifica as noções de limite, o que lastreia a presente subseção de um ponto de vista moral: vamos tratar das propriedades básicas da convergência de *nets* a fim de obter, simultaneamente, resultados acerca de limites de sequências, funções, *integrais* de Riemann, etc. Evidentemente, o leitor incomodado sempre terá a opção de traduzir os argumentos do contexto geral para os casos particulares, mas no conforto e privacidade de seu lar.

3.1.0 Unicidade dos limites

Vamos estabelecer um fato importante sobre limites de *nets*, secretamente abordado nos Exemplos 3.0.0 e 3.0.1: a unicidade dos limites é determinada pela *topologia* do espaço! Com efeito, ao revisitar os exemplos supracitados, o leitor não deve ter dificuldades em perceber o seguinte: se *os* limites L e L' fossem distintos, então a distância entre ambos seria positiva, digamos $|L - L'| = 2r > 0$; logo, os intervalos $(L - r, L + r)$ e $(L' - r, L + r)$ seriam disjuntos[8]; porém, ao repetir os argumentos apresentados com $\varepsilon := 2r$, chegaria-se à conclusão de que os intervalos não são disjuntos!

Definição 3.1.0. Um espaço topológico X é dito (de) **Hausdorff** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $x \in U$ e $y \in V$. ¶

Assim, o parágrafo que inicia esta subseção traz a prova de que $\mathbb{R}$ *é um espaço de Hausdorff* com sua topologia usual. Ao repetir o truque com a desigualdade triangular, conclui-se que *espaços normados e, mais geralmente, espaços métricos, também são de Hausdorff* com suas topologias. Finalmente, não deve ser difícil perceber que *a reta estendida também é um espaço de Hausdorff.*

Exercício 3.10. Verifique as afirmações anteriores. ■

Teorema 3.1.1 (Unicidade dos limites)**.** *Se $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ é uma* net *num espaço de Hausdorff e $x, y \in X$ são tais que $x_d \to x$ e $x_d \to y$, então $x = y$.*

Demonstração. Se $x_d \to x$ e $x_d \to y$ com $x \neq y$, então não existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $x \in U$ e $y \in V$: de fato, se $U, V \subseteq X$ são abertos com $x \in U$ e $y \in V$, então existem $D', D'' \in \mathbb{D}$ com $x_d \in U$ sempre que $d \geq D'$ e $x_d \in V$ sempre que $d \geq D''$; ora, por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $D \in \mathbb{D}$ com $D', D'' \leq D$, de modo que $x_D \in U \cap V$. Logo, X não é de Hausdorff – e o resultado segue pela contrapositiva. □

Exercício 3.11. Compare a demonstração acima com os argumentos apresentados nos Exemplos 3.0.0 e 3.0.1. ■

Corolário 3.1.2. *Todos os limites definidos na seção anterior são únicos, caso existam.*

Ficam justificadas, portanto, as notações do tipo "$\lim\limits_{n \to \infty}$", "$\lim\limits_{z \to p}$", "$\lim\limits_{z \to p^-}$" e "$\lim\limits_{z \to p^+}$" utilizadas desde o começo do capítulo: cada uma delas indica um limite de *net* num espaço de Hausdorff (a saber, $\overline{\mathbb{R}}$) e, portanto, são únicos quando existem. Também no caso em que X e Y são métricos, $Z \subseteq X$ e $p \in X$ é ponto de acumulação de Z, existe no máximo um $y \in Y$ digno de ser chamado de $\lim\limits_{z \to p} f(z)$ para uma função $f \colon Z \to Y$ (Exercício 3.7). Analogamente, pelo Teorema 3.0.26, se $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então existe um único L tal que a *net* $\left\langle \sum_{\langle \mathcal{P}, T \rangle} f \right\rangle_{\langle \mathcal{P}, T \rangle}$ converge para L, o que justifica atribuir a L um xingamento especial, bem como uma notação específica:

Definição 3.1.3. Dada uma função Riemann-integrável $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, a **integral de Riemann de f em** $[a, b]$, denotada por

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x,$$

é o único $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo as condições da Definição 3.0.24. ¶

[8] Se $|x - L| < r$ e $|x - L'| < r$, então $|L - L'| \leq |L - x| + |x - L'| < 2r$.

Exercício 3.12. Sem apelar para *nets*, mostre que o número real $L \in \mathbb{R}$ na Definição 3.0.24, se existir, é único. Compare seus argumentos com o que se apresentou na demonstração do Teorema 3.1.1. Dica: se parecer difícil, adapte os Exemplos 3.0.0 ou 3.0.1. ■

Mais geralmente, dada uma *net* $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ num espaço de Hausdorff X, vamos escrever $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d$, $\lim_{\mathbb{D}} x_d$ ou apenas $\lim x_d$ para indicar o *único* $x \in X$, caso exista, tal que $x_d \to x$, que passará a ser chamado de *o limite da* net.

Observação 3.1.4 (Opcional: *nets* convergentes caracterizam a condição de Hausdorff)**.** Embora não seja evidente, exigir que *nets* não convirjam para pontos distintos assegura a condição de Hausdorff. De fato, se $x, y \in X$ são pontos distintos tais que $U \cap V \neq \emptyset$ sempre que $U, V \subseteq X$ *forem* abertos com $x \in U$ e $y \in V$, então o conjunto

$$\mathbb{D} := \{\langle U, V \rangle : U, V \subseteq X \text{ são abertos}, x \in U \text{ e } y \in V\}$$

é dirigido pela relação binária $\leq$ dada por

$$\langle U, U' \rangle \leq \langle V, V' \rangle \Leftrightarrow V \subseteq U \text{ e } V' \subseteq U',$$

de modo que a hipótese sobre x e y permite *escolher*[9] $x_{\langle U,V \rangle} \in U \cap V$ para cada par $\langle U, V \rangle \in \mathbb{D}$. Isto define a *net* $\left\langle x_{\langle U,V \rangle} \right\rangle_{\langle U,V \rangle \in \mathbb{D}}$, que converge para x e y, por construção: se $W \subseteq X$ é um aberto com $x \in W$ (ou $y \in W$), então $x_{\langle U,V \rangle} \in W$ para todo par $\langle U, V \rangle \in \mathbb{D}$ satisfazendo $\langle U, V \rangle \geq \langle W, X \rangle$ (ou $\langle U, V \rangle \geq \langle X, W \rangle$), mostrando que $x_{\langle U,V \rangle} \to x$ e $x_{\langle U,V \rangle} \to y$, como desejado. △

3.1.1 Igualdade entre limites

A seguinte linha de raciocínio é muito comum em Cálculo I:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \overset{(a)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \overset{(b)}{=} \lim_{x \to 2} x + 2 \overset{(c)}{=} 2 + 2 \overset{(d)}{=} 4.$$

Acima, a identidade (a) se deve tão somente ao *fato* de que as funções definidas pelas regras $x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ e $x \mapsto \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$ serem idênticas, posto que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Por sua vez, a identidade (c) segue das propriedades operatórias que veremos em breve, aliada ao fato de que *nets* constantes convergem para o valor de sua imagem. A identidade (d), evidentemente, resulta dos conhecimentos tacitamente assumidos de Aritmética Básica. A delicadeza está escondida na identidade (b).

Grosso modo, ao se considerar uma *expressão real* $y := f(x)$, por exemplo, entende-se que isto define uma função $f\colon \operatorname{dom}(f) \to \mathbb{R}$ em que $\operatorname{dom}(f)$ é o conjunto dos pontos x no *espaço ambiente* para os quais *faz sentido* atribuir $f(x)$ em $\mathbb{R}$. No caso, a expressão $f(x) := \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ é tal que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, pois $x := 2$ é o único ponto para o qual $f(x)$ não está definido. Em contrapartida, a expressão $g(x) := x + 2$ é tal que $\operatorname{dom}(g) = \mathbb{R}$. Logo, as funções f e g dadas pelas regras acima têm domínios distintos e, portanto, são distintas (Exemplo 0.0.13).

[9] O Axioma da Escolha será cada vez mais presente por aqui... Com isso dito: é possível provar esta equivalência sem apelar para o Axioma da Escolha, como bem apontado pelo Prof. João Paulo Cirineu. Todavia, isto exigiria retirar o tapete que vem cobrindo os *filtros*, algo descabido para o propósito deste texto.

Todavia, a definição de $\lim_{x\to 2} g(x)$ ignora *explicitamente* o valor $g(2)$, levando em conta apenas os valores $g(x)$ para x *suficientemente próximo* de 2, mas ainda assim distintos de 2 (Exemplo 3.0.15). Como f e g coincidem em todos os pontos distintos de 2, seria bastante *razoável* que seus limites fossem iguais. Isto de fato vale, e bem mais geralmente.

Proposição 3.1.5. *Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ nets reais e $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$. Se existir $D'\in\mathbb{D}$ tal que $x_d = y_d$ para todo $d\geq D'$, então $\lambda = \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d$ se, e somente se, $\lambda = \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d$.*

Demonstração. Suponha $\lambda = \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d$ e tome $I\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ um intervalo aberto $\lambda\in I$. Da hipótese de convergência, existe $D\in\mathbb{D}$ com $x_d\in I$ sempre que $d\geq D$, enquanto a suposição sobre as *nets* garante $x_d = y_d$ sempre que $d\geq D'$. Por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $D''\in\mathbb{D}$ com $D, D'\leq D''$. Logo, se $d\geq D''$, então $y_d = x_d\in I$, i.e., $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d = \lambda$. □

Exemplo 3.1.6. Para funções $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $p\in\mathbb{R}$, suponha que exista um (intervalo) aberto $U\subseteq\mathbb{R}$ com $p\in U$ tal que $f(u) = g(u)$ para todo $u\in U\setminus\{p\}$. Em tais condições, para $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$, verifica-se

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to p} g(x) = \lambda.$$

Com efeito, se $U := (p-r, p+r)$ para $r>0$, então ao tomar $D' := p-r$ em $\langle\mathbb{R}_p, \preceq\rangle$ como no Exemplo 3.0.15, segue que $f(u) = g(u)$ para todo $u\succeq D'$. Logo, a equivalência decorre da proposição anterior. ▲

Exercício 3.13. Sejam $Z\subseteq\mathbb{R}$ um subconjunto ilimitado superiormente, $f, g\colon Z\to\mathbb{R}$ duas funções e $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$. Mostre que se existir $M>0$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z>M$, então $\lim_{z\to+\infty} f(z) = \lambda$ se, e somente se, $\lim_{z\to+\infty} g(z) = \lambda$. Dica: perceba que se trata de um subcaso da proposição anterior. ■

Exercício 3.14. Sejam $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ e $\langle y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathbb{R}$ e $\lambda\in\overline{\mathbb{R}}$. Mostre que se existir $N\in\mathbb{N}$ tal que $x_n = y_n$ sempre que $n\geq N$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} y_n$. Dica: perceba que se trata de um subcaso da proposição anterior. ■

Exercício 3.15 (Opcional?)**.** Adapte a demonstração da última proposição para espaços topológicos quaisquer. Observação: ■

O comportamento *local* dos limites sugere que as *nets* não precisam ser definidas *globalmente* ao longo do conjunto dirigido, mas apenas num subconjunto razoavelmente *representativo*.

Definição 3.1.7. Sejam $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ uma ordem parcial e $C\subseteq\mathbb{P}$ um subconjunto. Diz-se que C é **cofinal** em $\mathbb{P}$ se para todo $p\in\mathbb{P}$ existe $c\in C$ com $p\leq c$. ¶

A Proposição 3.0.11 fez o trabalho de caracterizar os subconjuntos cofinais de $\langle\mathbb{N}, \leq\rangle$: são precisamente os seus subconjuntos infinitos. Já para $Z\subseteq\mathbb{R}$ e $p\in\overline{\mathbb{R}}$ ponto de acumulação de Z, qualquer subconjunto Z' de Z que também tiver p como ponto de acumulação será cofinal em $\langle Z_p, \preceq\rangle$: no caso de $p\in\mathbb{R}$, por exemplo, lembre-se de que o Exemplo 3.0.15 estipula $a\preceq b$ como sinônimo de $|b-p|\leq|a-p|$; logo, se p também é ponto de acumulação de $Z'\subseteq Z$ e $z\in Z_p$, então para $0<\delta<|z-p|$ deve existir $z'\in Z'$ com $0<|z'-p|<\delta$, mostrando que $z\preceq z'$. Mais geralmente, vale o seguinte:

Lema 3.1.8. *Sejam X um espaço métrico, $Z\subseteq X$ um subconjunto e $p\in X$ um ponto de acumulação de Z. Em tais condições, um subconjunto $Z'\subseteq Z\setminus\{p\}$ é cofinal em Z_p se, e somente se, p é ponto de acumulação de Z'.*

Demonstração. É bom recordar[10]: neste caso, $Z_p := Z \setminus \{p\}$ é dirigido pela pré-ordem $\preceq$ que declara $a \preceq b$ sempre que $d(b,p) \leq d(a,p)$. Agora, se Z' é cofinal em Z_p e $r > 0$, então por p ser ponto de acumulação de Z existe $z \in Z_p$ com $0 < d(z,p) < r$, donde a cofinalidade de Z' assegura $z' \in Z'$ com $z \preceq z'$, i.e., $0 < d(z',p) \leq d(z,p) < r$, mostrando que p é ponto de acumulação de Z'. A recíproca é análoga. □

Exercício 3.16. Dado $Z \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, mostre que $Z' \subseteq Z$ é cofinal em Z se, e somente se, Z é ilimitado superiormente. Enuncie e demonstre a versão para subconjuntos ilimitados inferiormente com a relação de ordem inversa. ■

A relação entre subconjuntos cofinais e limites de *nets* é *revelada* nos próximos resultados.

Lema 3.1.9. *Sejam $\langle \mathbb{D}, \leq \rangle$ um conjunto dirigido e $C \subseteq \mathbb{D}$ um subconjunto. Se C for cofinal em $\mathbb{D}$, então $\langle C, \leq \rangle$ é um conjunto dirigido.*

Demonstração. Dados $c, c' \in C$, por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $d \in \mathbb{D}$ com $c, c' \leq d$. Agora, pela cofinalidade de C em $\mathbb{D}$, existe $c'' \in C$ com $d \leq c''$, donde segue que $c, c' \leq c''$. □

Proposição 3.1.10. *Sejam $\langle \mathbb{D}, \leq \rangle$ um conjunto dirigido, $C \subseteq \mathbb{D}$ um subconjunto cofinal em $\mathbb{D}$, $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ uma* net *num espaço de Hausdorff X e $x \in X$ um ponto. Se $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d = x$, então $\lim\limits_{c \in C} x_c = x$.*

Demonstração. Se $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d = x$ e $V \subseteq X$ é um aberto com $x \in V$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \in V$ sempre que $d \geq D$. Como C é cofinal, existe $c' \in C$ com $D \leq c'$ e, portanto, $x_c \in V$ sempre que $c \in C$ for tal que $c \geq c' \geq D$, mostrando que $\lim\limits_{c \in C} x_c = x$. □

Corolário 3.1.11. *Sejam $\langle \mathbb{D}, \leq \rangle$ um conjunto dirigido, X um espaço de Hausdorff e $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ uma* net *em X. Se existirem subconjuntos cofinais $C, C' \subseteq \mathbb{D}$ e pontos distintos $x, x' \in X$ tais que $\lim\limits_{c \in C} x_c = x$ e $\lim\limits_{c' \in C'} x_{c'} = x'$, então a* net *$\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ não converge em X.*

Demonstração. Se existisse $L \in X$ com $x_d \to L$, então em virtude da proposição anterior deveria ocorrer $x_c \to L$ e $x_{c'} \to L$. Logo, pela condição de Hausdorff, teríamos $x = L$ e $x' = L$, i.e., $x = x'$. □

Exemplo 3.1.12 (Importante: subsequências)**.** Ao aliar as Proposições 3.0.11 e 3.1.10 para uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço de Hausdorff, segue que $\lim\limits_{n \in \mathcal{N}} x_n$ existe e é x sempre que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, para qualquer subconjunto infinito $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$. Isto é *quase* a prova de que *subsequências* de sequências convergentes também convergem: a consequência só não é imediata pois a definição de *subsequência* envolve uma *reindexação*.

Definição 3.1.13. Uma sequência $\langle y_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é xingada de **subsequência** de outra sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ se existe uma função estritamente crescente $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{h(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Geralmente, escreve-se $h(k) := n_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ a fim de denotar a subsequência $\langle y_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ como $\langle x_{n_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$. ¶

Para a sequência $\langle (-1)^n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, por exemplo, ao fazer $n_k := 2k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, ganha-se a *subsequência* $\left\langle (-1)^{2k} \right\rangle_{k \in \mathbb{N}}$, que por sua vez é a sequência constante $\langle 1 \rangle_{k \in \mathbb{N}}$, já que $(-1)^{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Analogamente, ao fazer $m_k := 2k+1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtém-se a subsequência $\left\langle (-1)^{2k+1} \right\rangle_{k \in \mathbb{N}}$, que desta vez é a sequência constante $\langle -1 \rangle_{k \in \mathbb{N}}$, já que $(-1)^{2k+1} = -1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

[10] Quem preferir pode recordar na discussão que antecede o Exercício 3.0.21.

A sutileza se esconde no seguinte: a rigor, chamando $\mathcal{N} := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$, os objetos $\left\langle (-1)^{2k} \right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\langle (-1)^n \rangle_{n\in\mathcal{N}}$ são distintos! De fato, enquanto o primeiro é uma função da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o segundo é uma função da forma $\mathcal{N} \to \mathbb{R}$. A inquietante semelhança entre ambos é culpa da bijeção $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ que faz, justamente, $h(n) := 2n$ para cada n: com a ordem herdada de $\mathbb{N}$, o k-ésimo elemento de $\mathcal{N}$ é, precisamente, $2k$, de modo que o k-ésimo termo da sequência $\left\langle (-1)^{2k} \right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ coincide com o k-ésimo termo da *net* $\langle (-1)^n \rangle_{n\in\mathcal{N}}$. Como o leitor imagina, na prática, tal distinção é irrelevante:

Proposição 3.1.14. *Sejam $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência num espaço X, $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto infinito e h a única bijeção estritamente crescente de $\mathbb{N}$ para $\mathcal{N}$, dada pela Proposição 3.0.11. Então a subsequência $\left\langle x_{h(k)} \right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ se, e somente se, a* net *$\langle x_N \rangle_{N\in\mathcal{N}}$ converge para x.*

Demonstração. Se a subsequência $\left\langle x_{h(k)} \right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x e $V \subseteq X$ é um aberto com $x \in V$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{h(n)} \in V$ sempre que $n \geq k$. Note que para $K := h(k) \in \mathcal{N}$, sempre que $N \in \mathcal{N}$ com $N \geq K$ deve existir um único $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq k$ satisfazendo $h(n) = N$, já que o contrário daria $N < K$. Logo, se $N \in \mathcal{N}$ com $N \geq K$, então $x_N = x_{h(n)} \in V$, mostrando que a *net* $\langle x_N \rangle_{N\in\mathcal{N}}$ converge para x. A recíproca é análoga. □

Corolário 3.1.15. *Se uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, então toda subsequência $\langle x_{n_k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ também converge para x.*

Corolário 3.1.16. *Se uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço de Hausdorff tem duas subsequências que convergem para limites distintos, então $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.*

Assim que verificarmos o fato *óbvio* de que *nets* constantes convergem para o seu termo constante, as subsequências $\left\langle (-1)^{2k} \right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left\langle (-1)^{2k+1} \right\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ serão testemunhas de que a sequência $\langle (-1)^n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, como já se adiantou no final da Subseção 3.0.0. ▲

Exercício 3.17. Seja $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* em X. Mostre que existe se $x \in X$ tal que $x_d = x$ para todo d, então $x_d \to x$. ■

Exemplo 3.1.17 (Importante: limites laterais)**.** Quando $Z \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de Z pela esquerda e pela direita, é lícito investigar, para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$, tanto os limites laterais $\lim\limits_{z\to p^-} f(z)$ e $\lim\limits_{z\to p^+} f(z)$ quanto o limite usual $\lim\limits_{z\to p} f(z)$. Como os conjuntos $Z_p^- := \{z \in Z_p : z < p\}$ e $Z_p^+ := \{z \in Z_p : p < z\}$ são cofinais em Z_p (em virtude do Lema 3.1.8, por exemplo), a última proposição acarreta o seguinte

Corolário 3.1.18. *Nas condições acima, se $\lim\limits_{z\to p} f(z) = \lambda$ para $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, então os limites laterais existem e $\lim\limits_{z\to p^-} f(z) = \lim\limits_{z\to p^+} f(z) = \lambda$.*

Em outras palavras, obtemos um critério para determinar a *inexistência* de limites: nas condições acima, se um dos limites $\lim\limits_{z\to p^-} f(z)$ ou $\lim\limits_{z\to p^+} f(z)$ não existe, ou se ambos existem mas são distintos, então não existe $\lim\limits_{z\to p} f(z)$. ▲

Exercício 3.18. Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$. Dica: avalie os limites laterais. ■

Exemplo 3.1.19 (Parte inteira)**.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ com $x > 0$, faz sentido considerar $N_x := \min\{n \in \mathbb{N} : n > x\} > 0$ e, com isso, definir o número *natural* $\lfloor x \rfloor := N_x - 1$, usualmente xingado de **parte inteira** de x. Por construção, $\lfloor x \rfloor$ é o único número natural para o qual pode-se escrever $x = \lfloor x \rfloor + r$ com $0 \leq r < 1$. Assim, por exemplo: $\left\lfloor \dfrac{1}{3} \right\rfloor = 0$, $\left\lfloor \dfrac{5}{2} \right\rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, etc.

A função correspondente $\lfloor \cdot \rfloor : (0, +\infty) \to \mathbb{N}$ é um dos exemplos clássicos para analisar as variações de limites laterais:

(i) para $p \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, existe $r > 0$ tal que $(p - r, p + r) \subseteq (\lfloor p \rfloor, \lfloor p \rfloor + 1)$, de modo que $\lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor$ para todo $z \in (p - r, p + r)$, acarretando $\lim\limits_{z \to p} \lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor$;

(ii) já para $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, um ponto z suficientemente próximo de p verifica $\lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor - 1$ se $z < p$, enquanto $\lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor$ se $p > z$, donde segue que $\lim\limits_{z \to p^-} \lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor - 1$ e $\lim\limits_{z \to p^+} \lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor$.

Em particular, não existe $\lim\limits_{z \to p} \lfloor z \rfloor$ quando $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ▲

Leitores que enfrentaram bons cursos de Cálculo sabem que o último corolário contou apenas *metade da história*, já que a recíproca também vale, isto é: se os limites laterais existem e coincidem, então o limite existe. Com efeito, se $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ é tanto o limite pela esquerda quanto pela direita, então para um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$, existem $z^- \in Z_p^-$ e $z^+ \in Z_p^+$ tais que $f(z) \in I$ sempre que $z \in Z_p^-$ com $z \succeq z^-$ ou $z \in Z_p^+$ com $z \succeq z^+$. Ora, por Z_p ser dirigido, existe $z' \succeq z^-, z^+$, de modo que por valer a identidade $Z_p = Z_p^- \cup Z_p^+$, pode-se concluir que $f(z) \in I$ sempre que $z \succeq z'$ (por quê?!). Em outras palavras: $\lim\limits_{z \to p} f(z) = \lambda$. Como a argumentação buscou sugerir, isto é sintoma de um fenômeno bem mais geral.

Proposição 3.1.20. *Sejam $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ uma* net *num espaço X, $x \in X$ um ponto e $C, C' \subseteq \mathbb{D}$ subconjuntos cofinais em $\mathbb{D}$. Se $C \cup C' = \mathbb{D}$, então são equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d = x$;

(ii) $\lim\limits_{d \in C} x_d = \lim\limits_{d \in C'} x_d = x$.

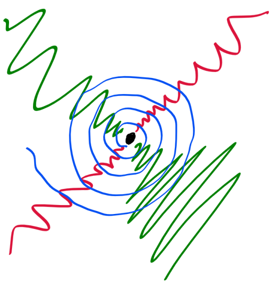
Demonstração. A Proposição 3.1.10 dá conta de (i) ⇒ (ii). Para a recíproca, fixado um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$, existe $c \in C$ tal que $x_d \in V$ sempre que $d \in C$ e $d \geq c$, bem como existe $c' \in C'$ tal que $x_d \in V$ sempre que $d \in C'$ e $d \geq c'$. Como $\mathbb{D}$ é dirigido, existe $D \in \mathbb{D}$ com $D \geq c, c'$, de modo que se $d \geq D$, então por $\mathbb{D} = C \cup C'$ resulta que $d \in C$ e $d \geq c$ ou $d \in C'$ e $d \geq c'$: em todo caso, $x_d \in V$. □

Corolário 3.1.21. *Vale a recíproca do Corolário 3.1.18.*

Corolário 3.1.22. *Se $\langle x_{n_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ e $\langle x_{m_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ são subsequências de uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, com $\mathbb{N} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\}$, então ocorre $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ se, e somente se, ocorrer $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{m_k} = x$.*

Exemplo 3.1.23. Se, para uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, for possível mostrar que as subsequências $\langle x_{2k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\langle x_{2k+1} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ convergem para o mesmo limite, então a sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ converge: de fato, tanto $\mathcal{N} := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ quanto $\mathcal{N}' := \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ são cofinais em $\mathbb{N}$, e vale $\mathbb{N} = \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$. ▲

Exemplo 3.1.24 (Opcional: aproximação arbitrária em dimensões maiores)**.** Para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}$ com $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ e $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto de acumulação de Z, os análogos imediatos do que seriam "$\lim\limits_{z\to p^-} f(z)$" e "$\lim\limits_{z\to p^+} f(z)$" não são suficientes para determinar $\lim\limits_{z\to p} f(z)$, posto que em $\mathbb{R}^2$ existem infinitas direções, cada uma delas com dois sentidos possíveis.



Por exemplo, com $p := \langle 0,0 \rangle$, a função $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) := \dfrac{y}{x}$, é *constante* em cada um dos subconjuntos $D_r := \left\{\langle x,y \rangle \in D : \dfrac{y}{x} = r\right\}$, todos cofinais em $\left\langle \mathbb{R}^2_p, \preceq \right\rangle$. Todavia, as constantes não são as *mesmas*: como $\lim\limits_{\langle x,y\rangle\in D_r} f(x,y) = \lim\limits_{\langle x,y\rangle\in D_r} r = r$ para cada $r \in \mathbb{R}$, não pode existir "$\lim\limits_{\langle x,y\rangle\to\langle 0,0\rangle} f(x,y)$". Secretamente, esta "falha" se deve ao caráter "finitário" da condição de compatibilidade em conjuntos dirigidos: dado um subconjunto $\mathbb{D}' \subseteq \mathbb{D}$, garante-se a existência de $d \in \mathbb{D}$ com $d' \leq d$ para todo $d' \in \mathbb{D}$ desde que $\mathbb{D}'$ seja finito, pois em tal situação pode-se utilizar a condição de compatibilidade indutivamente. ▲

No caso particular de *nets* reais, a condição de Hausdorff aliada à ordenação de $\overline{\mathbb{R}}$ permite ainda estabelecer critérios para determinar *desigualdades* entre limites. A fim de apelar para a intuição geométrica, convém começar com o próximo

Lema 3.1.25. *Sejam $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, com $\alpha < \beta$. Se $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ são intervalos abertos, com $\alpha \in I$, $\beta \in J$ e $I \cap J = \emptyset$, então para quaisquer $x \in I$ e $y \in J$ deve ocorrer $x < y$.*

Demonstração. Se ocorresse $x \geq y$ para certos $x \in I$ e $y \in J$, então de duas uma:

✗ $\alpha < y$, e daí $y \in I$ (pois I é intervalo e $\alpha, x \in I$);

✗ $y \leq \alpha$, e daí $\alpha \in J$ (pois J é intervalo e $y, \beta \in J$),

o que contraria as hipóteses sobre I e J em ambos os casos. □

Exercício 3.19. Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* real e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ com $x_d \to \lambda$. Mostre que:

a) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são tais que $\alpha < \lambda < \beta$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $\alpha < x_d < \beta$ para todo $d \geq D$;

b) se $\lambda := +\infty$ e $\alpha > 0$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $\alpha < x_d$ para todo $d \geq D$;

c) se $\lambda := -\infty$ e $\beta < 0$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d < \beta$ para todo $d \geq D$. ■

Proposição 3.1.26 (Conservação de Sinal)**.** *Sejam* $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ *uma* net *real com* $x_d \to \lambda$ *e* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

(*i*) *Se* $\lambda > 0$*, então existe* $D \in \mathbb{D}$ *com* $x_d > 0$ *para todo* $d \geq D$.

(*ii*) *Se* $\lambda < 0$*, então existe* $D \in \mathbb{D}$ *com* $x_d < 0$ *para todo* $d \geq D$.

Demonstração. Em qualquer um dos casos, existem intervalos abertos e disjuntos $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$ e $0 \in J$. Por um lado, pelo Exercício 3.19, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in I$ para todo $d \geq D$. Por outro lado, se ocorrer $\lambda > 0$, então o lema anterior resulta na afirmação do item (i); se ocorrer $\lambda < 0$, então o mesmo lema resulta na afirmação do item (ii). □

No caso em que $f \colon Z \to \mathbb{R}$ é uma função e $\lim\limits_{z \to p} f(z) := \lambda \neq 0$ para algum $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ponto de acumulação de Z, a proposição anterior garante um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ em torno de p tal que $f(z)$ tem o mesmo sinal de λ sempre que $z \in Z \cap I$. Analogamente, no caso em que $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência real com $\lim\limits_{n \to \infty} x_n := \lambda \neq 0$, garante-se um $N \in \mathbb{N}$ tal que x_n tem o mesmo sinal de λ para todo $n \geq N$. Traduções semelhantes podem ser feitas para outros tipos de limites, o que será deixado a cargo da imaginação do leitor.

Proposição 3.1.27 (Monotonicidade)**.** *Sejam* $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ *e* $\langle y_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ nets *reais convergentes em* $\overline{\mathbb{R}}$*. Se existe* $D \in \mathbb{D}$ *tal que* $x_d \leq y_d$ *para todo* $d \geq D$*, então* $\lim_d x_d \leq \lim_d y_d$.

Demonstração. Supondo $\alpha := \lim_d y_d < \lim_d x_d := \beta$, existem intervalos abertos $I, J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e disjuntos com $\alpha \in I$ e $\beta \in J$. Logo, não pode existir $D \in \mathbb{D}$ como na hipótese. De fato, se existisse, então também existiriam $D', D'' \in \mathbb{D}$ tais que $y_d \in I$ e $x_d \in J$ sempre que $d \geq D', D''$. Daí, por $\mathbb{D}$ ser dirigido, ao tomar $d \geq D, D', D''$ teríamos, simultaneamente, $x_d \leq y_d$ (pela hipótese, pois $d \geq D$) e $y_d < x_d$ (pelo lema anterior, pois $y_d \in I$ e $x_d \in J$). □

Exemplo 3.1.28 (Monotonicidade da integral de Riemann)**.** Se $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções Riemann-integráveis com $f \leq g$ e $\langle \mathcal{P}, \mathcal{T} \rangle$ é uma partição de Riemann de $[a, b]$, digamos que com $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ e $\mathcal{T} := \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$, então

$$\sum_{\langle \mathcal{P}, \mathcal{T} \rangle} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(a_i - a_{i-1}) := \sum_{\langle \mathcal{P}, \mathcal{T} \rangle} g.$$

Dada a arbitrariedade da partição tomada, a Proposição 3.1.27 acarreta a desigualdade $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. ▲

Exercício 3.20. Mostre que a recíproca da proposição anterior vale com a desigualdade estrita, i.e.: se $\lim_d x_d < \lim_d y_d$, então existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d < y_d$ para todo $d \geq D$. Compare tal resultado com a Proposição 3.1.26. ■

Observação 3.1.29. A recíproca do exercício anterior não é verdadeira. Explicitamente: *pode-se* ter $\lim\limits_{d} x_d = \lim\limits_{d} y_d$ mesmo nas situações em que $x_d < y_d$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Um modo prático de verificar isso faz uso do seguinte

Teorema 3.1.30. *Toda* net *real e monótona*[11] *é convergente em* $\overline{\mathbb{R}}$.

[11]Isto é, crescente ($d \leq d' \Rightarrow x_d \leq x_{d'}$) ou decrescente ($d \leq d' \Rightarrow x_{d'} \leq x_d$). Trata-se da mesma definição apresentada no Exercício 0.54.

Demonstração. Suponha $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ crescente e considere $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\alpha = \sup\{x_d : d \in \mathbb{D}\}$. Dado um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\alpha \in I$, existe $\beta < \alpha$ tal que $(\beta, \alpha] \subseteq I$, donde a hipótese sobre α garante *um* $D \in \mathbb{D}$ com $x_D > \beta$. Ora, pela hipótese sobre a *net*, segue que $x_d \geq x_D > \beta$ para todo $d \geq D$ e, por valer $x_d \leq \alpha$, resulta $x_d \in I$. O caso decrescente fica a cargo do leitor. □

Exercício 3.21. Mostre que se $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* real e decrescente, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d = \inf\limits_{D\in\mathbb{D}} x_d$. ■

Agora, por exemplo, para $x_n := 1 + \dfrac{1}{2^n}$ e $y_n := 1 - \dfrac{1}{2^n}$:

(i) tem-se $y_n < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) a sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, já que $n \leq m$ acarreta $2^n \leq 2^m$ e, consequentemente, $x_m := 1 + \dfrac{1}{2^m} \leq 1 + \dfrac{1}{2^n} := x_n$;

(iii) a sequência $\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, dado que $n \geq m$ acarreta $-\dfrac{1}{2^n} \leq -\dfrac{1}{2^m}$ e, consequentemente, $y_n \leq y_m$;

(iv) por sua vez, os Exercícios 1.33 e 1.37 asseguram que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 \quad \text{e} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} -\frac{1}{2^n} = 1 - \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Logo, pelo que se viu no teorema anterior, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. △

Exercício 3.22. Mostre que se $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência real, monótona e **limitada**, i.e., tal que existe $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ e $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$. ■

De volta ao enunciado da Proposição 3.1.27, note que ao considerá-lo com três *nets* $\langle x_d \rangle_d$, $\langle y_d \rangle_d$ e $\langle z_d \rangle_d$ convergentes tais que $x_d \leq y_d \leq z_d$ para *d suficientemente bom*, asseguram-se as desigualdades $\lim_d x_d \leq \lim_d y_d \leq \lim_d z_d$. Se, adicionalmente, valer $\lim_d x_d = \lim_d z_d$, chega-se a um dos métodos de estimativa favoritos dos analistas.

Proposição 3.1.31 (Sanduíche). *Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$, $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle z_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$* nets *reais e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} z_d = \lambda$ e existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \leq y_d \leq z_d$ para todo $d \geq D$, então $y_d \to \lambda$.*

Demonstração. Dado um intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$, busca-se $D \in \mathbb{D}$ com $y_d \in I$ para todo $d \geq D$. Ora, como $x_d \to \lambda$ e $z_d \to \lambda$, existem $D', D'' \in \mathbb{D}$ tais que

$$d \geq D' \Rightarrow x_d \in I \quad \text{e} \quad d \geq D'' \Rightarrow z_d \in I.$$

Como $\mathbb{D}$ é dirigido, existe $\widetilde{D} \geq D, D', D''$. Logo, se $d \geq \widetilde{D}$, então $x_d \leq y_d \leq z_d$ com $x_d, z_d \in I$, donde o fato de I ser intervalo acarreta $y_d \in I$, como desejado. □

Exemplo 3.1.32. Um modo clássico de utilizar o resultado anterior é ilustrado na próxima

Proposição 3.1.33. *Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$* nets *reais com $x_d \to 0$. Se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\{y_d : d \geq D\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, então $x_d y_d \to 0$.*

Demonstração. Pelo Exercício 3.41, tem-se $|x_d| \to 0$. Agora, para $M > 0$ com $|y_d| < M$ para todo $d \geq D$, note que $-M|x_d| \leq |x_d y_d| \leq M|x_d|$, com $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} -M|x_d| = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} M|x_d| = 0$. Logo, $x_d y_d \to 0$ pela proposição anterior. □

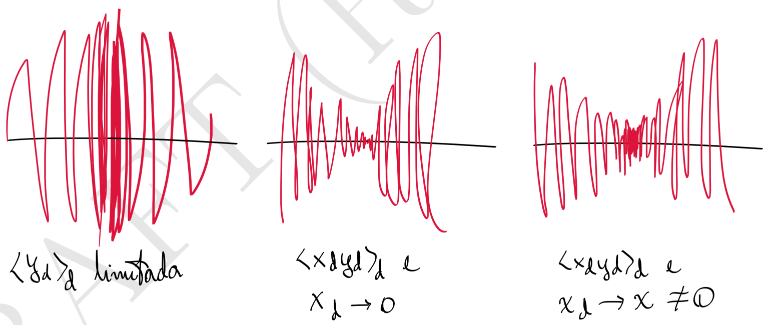
Demonstração alternativa. Pela hipótese, existe $M > 0$ tal que $|y_d| < M$ para todo $d \geq D$. Agora, fixado $\varepsilon > 0$, existe $D' \in \mathbb{D}$ com $|x_d| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ para todo $d \geq D'$. Logo, para $D'' \geq D, D'$, obtém-se $|x_d y_d| < \varepsilon$ para todo $d \geq D''$, como desejado. □

No caso de sequências, se $x_n \to 0$ e $\langle y_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência *limitada*, então $x_n y_n \to 0$. Já para funções reais $f, g\colon Z \to \mathbb{R}$:

✓ se $p \in \overline{\mathbb{R}}$ é ponto de acumulação de Z, $\lim\limits_{z\to p} f(z) = 0$ e existem $\delta, M > 0$ com $|g(z)| < M$ para todo $z \in Z$ satisfazendo $|z - p| < \delta$, então $\lim\limits_{z\to p} f(z)g(z) = 0$;

✓ se p é ponto de acumulação de Z à direita, $\lim\limits_{z\to p^+} f(z) = 0$ e existem $\delta, M > 0$ com $|g(z)| < M$ para todo $z \in Z$ com $p < z < p + \delta$, então $\lim\limits_{z\to p^+} f(z)g(z) = 0 \ldots$

É importante destacar que a hipótese sobre a *net* $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é menos restritiva do que exigir sua convergência: se a *net* convergisse em $\mathbb{R}$, o mesmo resultado também seguiria das propriedades operatórias dos limites, que serão discutidas na próxima seção. Nesse sentido, troca-se convergência por limitação. Porém, fica o alerta: para funcionar, é imprescindível que se tenha $x_d \to 0$. ▲



Exercício 3.23. Mostre que se $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d \neq 0$, então não se pode garantir a convergência da *net* $\langle x_d y_d \rangle_d$ na última proposição. ■

O enunciado do sanduíche proposto pela Proposição 3.1.31 permite que as fatias de pão (i.e., as *nets* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle z_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$) convirjam para os extremos da reta estendida. Porém, neste caso, bastaria uma *brusqueta*[12]:

Exercício 3.24 (Princípio da Explosão). Sejam $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais tais que existe um $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \leq y_d$ para todo $d \geq D$.

a) Mostre que se $x_d \to +\infty$, então $y_d \to +\infty$.

b) Mostre que se $y_d \to -\infty$, então $x_d \to -\infty$.

c) Enuncie as contrapositivas dos itens anteriores. ■

[12] Prato típico da culinária italiana que consiste numa fatia de pão e imaginação.

Nesse sentido, apesar da generalidade, a Proposição 3.1.31 só é *realmente útil* nos casos em que $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que o leitor pode se interessar por um argumento mais algébrico: dado $\varepsilon > 0$, existem $D', D'' \in \mathbb{D}$ tais que $|x_d - \lambda| < \varepsilon$ se $d \geq D'$ e $|z_d - \lambda| < \varepsilon$ se $d \geq D''$; logo, para $\widetilde{D} \geq D, D', D''$, ocorrerá $\lambda - \varepsilon < x_d \leq y_d \leq z_d < \varepsilon + \lambda$,

Observação 3.1.34 (Opcional)**.** Secretamente, o *Princípio da Explosão* também segue do *Teorema do Sanduíche*: basta tomar uma das *nets extremais fora* da reta. Por exemplo, se $x_d \to +\infty$ e $x_d \leq y_d$ para todo $d \geq D$, então $x_d \leq y_d < z_d$, onde $z_d := +\infty$ para todo $d \in \mathbb{D}$ – e,*claramente*, $z_d \to +\infty$. Em outras palavras, o Princípio da Explosão é apenas um sanduíche com uma das fatias no infinito. Fica a cargo do leitor se convencer dos detalhes. △

Exemplo 3.1.35 (**Importante:** séries)**.** Fixada uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço normado $\langle E, \| \cdot \| \rangle$, a *série* determinada por $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, que a princípio denotaremos por $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ ou apenas $\sum x_n$, é a sequência $\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ formada pelos termos $s_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$, que costumam ser chamados de **somas parciais da série**.

Intuitivamente, a série $\sum x_n$ busca representar o que seria a *soma* de <u>todos</u> os termos da sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, o que não faz sentido algébrico, mas pode fazer sentido *topológico*.

Definição 3.1.36. Diremos que a série $\sum x_n$ **converge** em E se existir $x \in E$ tal que $x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} x_i$, i.e., se as somas parciais da série convergem para x. Por abuso de notação, em tais situações, o limite da série também será denotado como $\sum x_n$, que xingaremos de **soma da série** $\sum x_n$ ¶

Embora sejam apenas tipos particulares de sequências, séries costumam ser úteis na descrição de certos limites importantes, o que faz delas peças indispensáveis em qualquer discussão honesta de Análise. Por ora, elas serão usadas apenas como ilustração dos últimos resultados:

(i) para $E := \mathbb{R}$ e supondo $x_n \geq 0$ para todo n, resulta que a sequência das somas parciais é crescente e, portanto, $\sum x_n$ converge em $\overline{\mathbb{R}}$;

(ii) em particular, nas condições anteriores, $\sum x_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, o conjunto $S := \left\{ \sum_{i=0}^{n} x_n : n \in \mathbb{N} \right\}$ é limitado superiormente, caso em que se verifica $\sum x_n = \sup S$ (Exercício 1.39);

(iii) ainda com $E := \mathbb{R}$, se $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo n, então $0 \leq \sum_{i \leq n} x_n \leq \sum_{i \leq n} y_n$ para todo n, resultando em $0 \leq \sum x_n \leq \sum y_n$, com as somas das séries tomadas, possivelmente, em $\overline{\mathbb{R}}$;

(iv) por fim, no item anterior, note que se $\sum y_n$ convergir em $\mathbb{R}$, então $\sum x_n$ também converge em $\mathbb{R}$, enquanto a ocorrência de $\sum x_n = +\infty$ acarreta $\sum y_n = +\infty$.

Séries serão *personagens* recorrentes a partir de agora. ▲

3.1.2 Continuidade revisitada (e propriedades operatórias)

Intuitivamente, a continuidade de uma função $f\colon X \to Y$ em $x \in X$ diz que se pode tornar $f(x')$ *próximo* de $f(x)$ desde que se tome x' *próximo* de x, enquanto a convergência de uma *net* $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ em X para x assegura um momento $D \in \mathbb{D}$ a partir do qual x_d fica próximo de x. Consequentemente, para $d \geq D$, $f(x_d)$ fica próximo de $f(x)$. Em outras palavras:

Teorema 3.1.37. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma função e $x \in X$ um ponto. Se f é contínua em x, então $f(x_d) \to f(x)$ sempre que $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é uma* net *em X que converge para x.*

Demonstração. Se f é contínua em x e $\langle x_d\rangle_d$ é uma *net* com $x_d \to x$, então para um aberto $V \subseteq Y$ com $f(x) \in V$, existe um aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Como $x_d \to x$, existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \in U$ para todo $d \geq D$, mostrando que $f(x_d) \in V$ para todo $d \geq D$, como desejado. □

Corolário 3.1.38. *Para X e Y espaços de Hausdorff, se $f\colon X \to Y$ é contínua, então*

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} f(x_d) = f\left(\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d\right)$$

para qualquer net *$\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ convergente em X.*

Embora não seja óbvio, o corolário acima é o responsável pelas diversas propriedades operatórias que se verificam nos mais variados contextos da Análise.

Lema 3.1.39. *Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$* nets *em espaços topológicos X e Y, respectivamente. Então $\langle x_d, y_d\rangle \to \langle x, y\rangle$ em $X \times Y$ se, e somente se, $x_d \to x$ em X e $y_d \to y$ em Y.*

Demonstração. A ida segue pela continuidade das projeções $X \times Y \to X$ e $X \times Y \to Y$: pela proposição anterior, $\pi_X(x_d, y_d) \to \pi_X(x, y)$ e $\pi_Y(x_d, y_d) \to \pi_Y(x, y)$, i.e., $x_d \to x$ e $y_d \to y$. Por sua vez, a recíproca segue por $\mathbb{D}$ ser dirigido: de fato, pelo modo como a topologia produto é definida, se $W \subseteq X \times Y$ é um aberto com $\langle x, y\rangle \in W$, então existem abertos $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, com $x \in U$ e $y \in V$, donde a hipótese garante $d_x, d_y \in \mathbb{D}$ tais que $x_d \in U$ e $y_d \in V$ sempre que $d \geq d_x, d_y$; como $\mathbb{D}$ é dirigido, existe, de fato, um $D \in \mathbb{D}$ com $D \geq d_x, d_y$, e daí $\langle x_d, y_d\rangle \in U \times V \subseteq W$ sempre que $d \geq D$. □

Exemplo 3.1.40 (Limites em $\mathbb{R}^n$)**.** Em particular, uma *net* $\langle x_d, y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ em $\mathbb{R}^2$ converge para $\langle x, y\rangle$ se, e somente se, $x_d \to x$ e $y_d \to y$ em $\mathbb{R}$. Dada a vasta natureza das *nets*, tal conclusão tem muitas ramificações. Para citar pelo menos duas:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$;

(ii) para uma função $f\colon Z \to \mathbb{R}^2$ com $Z \subseteq X$ e $p \in X$ ponto de acumulação de Z, o limite $\lim\limits_{z\to p} f(z)$ existe se, e somente se, os limites $\lim\limits_{z\to p} f_0(z) = x$ e $\lim\limits_{z\to p} f_1(z) = y$ existem em $\mathbb{R}$, onde f_1 e f_2 são as funções coordenadas de f, i.e., tais que $f(z) = \langle f_0(z), f_1(z)\rangle$ para cada $z \in Z$. Além disso, $\lim\limits_{z\to p} f(z) = \langle x, y\rangle$.

Evidentemente, considerações análogas valem para $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, etc. A moral da história é que, na prática, tratar de problemas de convergência em $\mathbb{R}^n$ é a mesma coisa que tratar de n problemas de convergência em $\mathbb{R}$. ▲

Exercício 3.25. Mostre que se X e Y são de Hausdorff, então $X \times Y$ é de Hausdorff. ■

Exercício 3.26. Mostre que se $X \subseteq Y$ e Y é de Hausdorff, então X é de Hausdorff. ■

Corolário 3.1.41. *Sejam E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado, $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$, $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$* nets *em E e $\langle r_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma* net *em $\mathbb{R}$.*

(i) *Se $x_d \to x$ e $y_d \to y$ em E, então $x_d + y_d \to x + y$ em E.*

(ii) *Se $x_d \to x$ em E e $r_d \to r$ em $\mathbb{R}$, então $r_d x_d \to rx$ em E.*

Demonstração. Pelo lema anterior, tem-se tanto $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \langle x_d, y_d \rangle = \langle x, y \rangle$ em $E \times E$ quanto $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \langle r_d, x_d \rangle = \langle r, x \rangle$ em $\mathbb{R} \times E$. Logo, os itens (i) e (ii) seguem do corolário anterior, posto que as funções de adição e multiplicação são contínuas (Exemplos 2.1.9 e 2.1.11, respectivamente). □

Observação 3.1.42. É claro que o último corolário pode ser demonstrado diretamente, i.e., sem apelar para continuidade. Por exemplo, para $\lim_d x_d + y_d = \lim_d x_d + \lim_d y_d$, basta notar que

$$\|x + y - (x_d + y_d)\| \leq \|x - x_d\| + \|y - y_d\|,$$

para daí usar que $x_d \to x$ e $y_d \to y$ a fim de obter um $D \in \mathbb{D}$ apropriado que permita limitar a expressão acima. O ponto a observar, porém, é que o mesmo argumento prova que a função soma $\langle x, y \rangle \mapsto x + y$ é contínua (Exemplo 2.1.9). △

Exercício 3.27. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mostre que $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \alpha x_d + \beta y_d = \alpha \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d + \beta \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d$ sempre que as *nets* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ convergem num espaço normado. Dica: a função $E \times E \to E$ que faz $\langle x, y \rangle \mapsto \alpha x + \beta y$ é contínua. ■

Como $E := \mathbb{R}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado, o exercício anterior se aplica naturalmente a *nets* de números reais que convergem em $\mathbb{R}$. Um caso particular bastante importante é discutido a seguir.

Exemplo 3.1.43 (Linearidade da integral de Riemann)**.** Para funções $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integráveis e constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixadas, a função $\alpha f + \beta g$ ainda é Riemann-integrável. Com efeito, para uma partição de Riemann $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ de $[a, b]$, digamos que $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ e $T := \langle t_1, \ldots, t_n \rangle$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} (\alpha f + \beta g) &:= \sum_{i=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(t_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(a_i - a_{i-1}) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(a_i - a_{i-1}) := \alpha \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f + \beta \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} g.\end{aligned}$$

Logo, existe a integral de Riemann de $\alpha f + \beta g$ em $[a, b]$, já que

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \beta g(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} \alpha f + \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} \beta g = \\ &= \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \left(\alpha \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f + \beta \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} g \right) = \\ &= \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]} \sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} (\alpha f + \beta g) := \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

como desejado. ▲

Exercício 3.28. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que se existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, então f é Riemann-integrável e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)$. Dica: Para uma partição de Riemann $\langle \mathcal{P}, T\rangle$, calcule explicitamente $\displaystyle\sum_{\langle \mathcal{P},T\rangle} f$. ■

Exemplo 3.1.44 (Propriedades operatórias de séries)**.** Para séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ convergentes num espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$, deve-se ter $\sum x_n + y_n = \sum x_n + \sum y_n$. De fato, por definição,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j + y_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j + \sum_{j=0}^{n} y_j =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} y_j := \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Analogamente, mostra-se que $r\sum x_n = \sum r x_n$ sempre que $\sum x_n$ converge em E e $r \in \mathbb{R}$. No caso em que $E := \mathbb{R}$, mostra-se ainda que o *produto* de duas séries convergentes é convergente[13]. Porém, em geral, não vale que $(\sum x_n) \cdot (\sum y_n) = (\sum x_n y_n)$: afinal de contas, é muito comum ocorrer $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{n} x_n\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} y_n\right) \neq \sum_{j=0}^{n} x_n y_n$. ▲

Exemplo 3.1.45 (Teste da *divergência* e a série *harmônica*)**.** Geralmente, diz-se que uma série $\sum x_n$ num espaço normado $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ **diverge** se a série não convergir em E. No caso em que $E := \mathbb{R}$, tal terminologia nos obriga a dizer que uma *série* $\sum x_n$ de números reais *diverge* mesmo quando seu limite *existe fora da reta*, num conflito claro com a postura defendida e explicitada na Observação 3.0.10. O contexto, como sempre, costuma deixar claro o sentido em que a palavra "divergência" é usada. Com isso dito, vale o seguinte:

Proposição 3.1.46. *Se a série $\sum x_n$ converge em E, então $x_n \to 0$.*

Demonstração. Chamando por $s_n := \sum_{j\le n} x_j$, a convergência da série diz que existe $s \in E$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Agora, como $\langle s_{n+1}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\langle s_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} = s$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0,$$

como desejado. □

Na contrapositiva, a proposição anterior dá um primeiro critério para detectar séries *divergentes*. No entanto, a mera ocorrência de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ não assegura que $\sum x_n$ seja convergente, como nos ensina a **série harmônica** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, vamos escrever $a_n := \dfrac{1}{n}$ e $b_n := \dfrac{1}{2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$. Assim, $\langle b_n\rangle_{n\ge 1}$ é a *sequência* $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots \right\rangle$, de modo que valem as relações

[13] Em virtude do exemplo anterior, o leitor pode se perguntar se o produto de funções Riemann-integráveis será Riemann-integrável. A resposta também é sim, porém a demonstração no caso da integral é bem menos elementar.

(i) $b_n \le a_n$ para todo $n \ge 1$, com $b_n < a_n$ quando n é ímpar, e

(ii) $a_n = b_{2n-1} + b_{2n}$ para cada $n \ge 1$.

Observe então que

$$\sum_{n\ge 1} b_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} b_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{2k} b_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} b_{2j-1} + b_{2j} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j = \sum_{n\ge 1} a_n,$$

onde a segunda igualdade se deve ao fato de $\langle b_1 + \ldots + b_{2k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ ser subsequência da sequência $\langle b_1 + \ldots + b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, que converge na reta estendida – possivelmente, para $+\infty$. Agora, se ocorresse $\sum\limits_{n\ge 1} a_n \in \mathbb{R}$, então valeria que $\sum\limits_{n\ge 1} a_n - \sum\limits_{n\ge 1} b_n = 0$. Porém,

$$\sum_{n\ge 1} a_n - \sum_{n\ge 1} b_n = \sum_{n\ge 1} a_n - b_n > 0,$$

já que $a_n - b_n \ge 0$ para todo n, com desigualdade estrita sempre que n é ímpar. Portanto, $\sum\limits_{n\ge 1} a_n \notin \mathbb{R}$, i.e., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Por outro lado, é claro que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Exercício 3.21). ▲

Exemplo 3.1.47 (Sequências e séries de potências)**.** *Para* $a \in \mathbb{R}$ *com* $|a| < 1$*, verifica-se* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Com efeito, se $0 \le a \le 1$, então a sequência $\langle a^n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada por 1, donde segue que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = L$. Como a subsequência $\langle a^{n+1}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ também deve convergir para L, obtemos

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a \cdot a^n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = aL,$$

acarretando $L(1-a) = 0$ e, consequentemente, $L = 0$. Isto também resolve o caso em que $-1 \le a \le 0$, posto que $|a| < 1$ e daí, pelo que se observou acima, $\lim\limits_{n\to\infty} |a^n| = 0$, donde segue que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ (em virtude do Exercício 3.41). ▲

Uma consequência bastante útil do último exemplo é a generalização da *fórmula* obtida no Exercício 1.39:

Proposição 3.1.48. *Se* $a \in \mathbb{R}$ *com* $|a| < 1$*, então* $\sum a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

Demonstração. Por definição,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a^j = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} \lim_{n\to\infty} 1 - a^{n+1} = \frac{1}{1-a}. \qquad \square$$

Para $|a| = 1$, pode-se ter $a := -1$ ou $a := -1$: no primeiro caso, a sequência formada pelas somas parciais corresponde à sequência $\langle 1, 0, 1, 0, \ldots\rangle$, que não converge; no segundo caso, a sequência correspondente às somas parciais é $\langle n+1\rangle_{n\in\mathbb{N}}$, cujo limite é $+\infty$. Para entender o que ocorre com $\sum a^n$ nos casos em que $|a| > 1$, convém tratar primeiro das propriedades operatórias dos limites na reta estendida. Entram em cena as funções $s\colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ e $p\colon \mathcal{M}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ definidas no capítulo anterior.

Proposição 3.1.49. *Sejam* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *e* $\langle y_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ nets *reais, bem como* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ *pontos na reta estendida, com* $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = x$ *e* $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d = y$*.*

(i) Se $\langle x, y\rangle \in \mathcal{A}_\infty$*, então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = s(x, y)$*, onde* $s \colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ *é tomada como no Exemplo 2.0.45.*

(ii) Se $\langle x, y\rangle \in \mathcal{M}_\infty$*, então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot y_d = p(x, y)$*, onde* $p \colon \mathcal{M}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ *é tomada como no Exercício 2.20.*

Demonstração. Em ambos os casos, tem-se $\langle x_d, y_d\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}_\infty \cap \mathcal{M}_\infty$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Logo, os dois casos seguem Corolário 3.1.38: para o primeiro, por exemplo, $\mathcal{A}_\infty$ é um espaço de Hausdorff no qual a *net* $\langle x_d, y_d\rangle_d$ converge para $\langle x, y\rangle$, donde a continuidade de s assegura que

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = \lim_{d\in\mathbb{D}} s(x_d, y_d) = s\left(\lim_{d\in\mathbb{D}} \langle x_d, y_d\rangle\right) = s(x, y),$$

como desejado. O outro caso é análogo. □

Exercício 3.29. Traduza a proposição anterior para os seus tipos favoritos de limites ("$\lim_{z\to p^-}$", "$\lim_{z\to+\infty}$", etc.). ■

Nas situações em que $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$, a proposição anterior apenas *reobtém* o Corolário 3.1.41 para $E := \mathbb{R}$. A "novidade" fica por conta dos casos em que $\langle x, y\rangle \notin \mathbb{R}^2$, de acordo com as definições de s e p. Por exemplo, se $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = +\infty$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d := y \in \mathbb{R}$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = s(+\infty, y) = +\infty$ e, se $y < 0$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot y_d = p(+\infty, y) = -\infty$.

Em resumo, quando $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d := x$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d := y$ são pontos na reta estendida, ficam *determinados* a priori os limites $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = s(x, y)$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot y_d = p(x, y)$ conforme $\langle x, y\rangle$ pertence a $\mathcal{A}_\infty$ ou $\mathcal{M}_\infty$, respectivamente. Como veremos mais adiante, nos demais casos, não é possível *determinar* tais limites *a priori*, razão pela qual eles costumam ser xingados de *indeterminados*[14]. Em todo caso, daqui em diante, as notações $s(x, y)$ e $p(x, y)$ serão abandonadas.

Definição 3.1.50. Para pontos $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \overline{\mathbb{R}}$, vamos escrever $\alpha + \beta$ e $\alpha' \cdot \beta'$ para indicar $s(\alpha, \beta)$ e $p(\alpha', \beta')$ sempre que $\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathcal{A}_\infty$ e $\langle \alpha', \beta'\rangle \in \mathcal{M}_\infty$, respectivamente. ¶

Exemplo 3.1.51 (Limites de funções polinomiais)**.** O distante Exemplo 2.1.23 mostrou que uma função polinomial $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induzida por um polinômio $p(t)$ na indeterminada t é contínua em cada $a \in \mathbb{R}$. Dado que qualquer $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$, resulta

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Os limites no infinito são ainda mais fáceis de se calcular, posto que bastam três informações explícitas para *determinar* o "*valor*" de $\lim_{x\to\lambda} p(x)$ quando $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$. Adiante, convém escrever $\operatorname{sgn}(\lambda) := -1$ para $\lambda < 0$ e $\operatorname{sgn}(\lambda) := 1$ para $\lambda > 0$.

[14]Note que isto é diferente de dizer que os limites não existem. A *determinação*, no caso, se refere à possibilidade de *determinar* os limites a partir de regras gerais.

Proposição 3.1.52. *Sejam $p := \alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n \in \mathbb{R}[t]$ um polinômio de grau $n \geq 1$ e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$. Então*

$$\lim_{x \to \lambda} p(x) = \alpha_n \operatorname{sgn}(\lambda)^n \cdot (+\infty). \tag{3.2}$$

Demonstração. Para $n := 1$, tem-se $p(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t$ com $\alpha_1 \neq 0$. Com $\alpha_0 := 0$, note que:

(i) se $\alpha_1 > 0$ e $M > 0$, então para $\delta := \dfrac{M}{\alpha_1} > 0$ ocorrem $p(x) > M$ e $p(y) < -M$ sempre que $x > \delta$ e $y < -\delta$, mostrando que $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty = \alpha_1 \operatorname{sgn}(+\infty) \cdot (+\infty)$ e $\lim_{y \to -\infty} p(y) = -\infty = \alpha_1 \operatorname{sgn}(-\infty) \cdot (+\infty)$;

(ii) se $\alpha_1 < 0$ e $M > 0$, então para $\delta := \dfrac{-M}{\alpha_1} > 0$ ocorrem $p(x) < -M$ e $p(y) > M$ sempre que $x > \delta$ e $y < -\delta$, mostrando que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty = \alpha_1 \operatorname{sgn}(+\infty) \cdot (+\infty)$ e $\lim_{y \to -\infty} p(y) = +\infty = \alpha_1 \operatorname{sgn}(-\infty) \cdot (+\infty)$.

Para $\alpha_0 \neq 0$, basta observar que $\lim_{x \to \lambda} \alpha_0 = \alpha_0$ e

$$\lim_{x \to \lambda} \alpha_0 + \lim_{x \to \lambda} \alpha_1 x = \lim_{x \to \lambda} \alpha_0 + \alpha_1 x = \lim_{x \to \lambda} p(x),$$

enquanto $\alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sgn}(\lambda) \cdot (+\infty) = \alpha_1 \operatorname{sgn}(\lambda) \cdot (+\infty)$. Isto encerra o caso $n := 1$.

Antes de assumir o passo indutivo, observe que se $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função com $\lim_{x \to \lambda} g(x) = \lambda' \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \to \lambda} x g(x) = \left(\lim_{x \to \lambda} x \right) \cdot \left(\lim_{x \to \lambda} g(x) \right) = \lambda \cdot \lambda'.$$

Agora, se a equação (3.2) for verdadeira para o caso de grau $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, então para $p := \alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n + \alpha_{n+1} t^{n+1}$ e $x \in \mathbb{R}$, pode-se escrever $p(x) = \alpha_0 + q(x)$, onde define-se $q(x) := \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1} = x \left(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n \right)$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \lambda} p(x) = \alpha_0 + \left(\lim_{x \to \lambda} x \cdot \lim_{x \to \lambda} \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n \right) = \\ = \lambda \cdot \left(\alpha_{n+1} \operatorname{sgn}(\lambda)^n \cdot (+\infty) \right),\end{aligned}$$

donde o resultado segue observando-se que $\lambda \operatorname{sgn}(\lambda)^n \cdot (+\infty) = \operatorname{sgn}(\lambda)^{n+1} \cdot (+\infty)$, já que $-\infty = (-1) \cdot (+\infty)$. □

Para $p := -19 + 11t - 5t^7$, por exemplo, é muito mais fácil determinar $\lim_{x \to -\infty} p(x)$ do que $\lim_{x \to \frac{1}{2}} p(x)$, já que o primeiro é simplesmente dado pela expressão

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -5 \cdot (-1)^7 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

enquanto

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} p(x) = p\left(\frac{1}{2}\right) = -19 + 11 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7,$$

que eu me recuso a calcular explicitamente. ▲

Observação 3.1.53 (**Importante**)**.** As fórmulas do tipo

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d = \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d \quad \text{e} \quad \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d y_d = \left(\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d\right)\cdot\left(\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d\right)$$

exploradas acima sempre pressupõem a existência dos limites $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d$, e significam que os limites à esquerda existem e são dados pelas expressões à direita. Com isso dito, não se pode assegurar que os limites $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d$ existam a partir da existência de $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d + y_d$ ou $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d y_d$. △

Exercício 3.30. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $x_n := (-1)^n$ e $y_n := (-1)^{n+1}$.

a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = 0$.

b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -1$.

c) As sequências $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\langle y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ convergem em $\mathbb{R}$? ■

Exercício 3.31. Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais. Mostre que se $x_d \to x$ e $x_d + y_d \to z$, com $x, z \in \mathbb{R}$, então $y_d \to z - x$. Dica: tente escrever y_d *usando* x_d e $x_d + y_d$. ■

O exercício acima, que permanece verdadeiro num espaço normado E, se vale implicitamente da continuidade da função $E \to E$ que faz $v \mapsto -v$ para cada $v \in E$, já que disso segue que $x_d - y_d \to x - y$ sempre que $x_d \to x$ e $y_d \to y$ em E (Exercício 3.38). A situação da multiplicação, por outro lado, é um pouco mais delicada – mesmo no caso real, já que a inversão multiplicativa não está definida para todo número real.

Lema 3.1.54. *Seja* $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *uma* net *em* $\mathbb{R}$. *Se* $y_d \to \pm\infty$, *então existe* $D \in \mathbb{D}$ *tal que* $y_d \neq 0$ *para todo* $d \geq D$ *e vale* $\lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d} = 0$, *onde o último limite é tomado com respeito ao conjunto dirigido* $\{d \in \mathbb{D} : d \geq D\}$.

Demonstração. A existência do elemento $D \in \mathbb{D}$ segue por *conservação do sinal* (Proposição 3.1.26). Agora, para um número real $\varepsilon > 0$ fixado, tem-se $M := \frac{1}{\varepsilon} > 0$, de modo que:

✓ se $y_d \to +\infty$, então existe $D' \geq D$ tal que $y_d > M$ sempre que $d \geq D'$;

✓ se $y_d \to -\infty$, então existe $D' \geq D$ tal que $y_d < -M$ sempre que $d \geq D'$.

Logo, em ambos os casos, encontrou-se $D' \geq D$ tal que $-\varepsilon < \frac{1}{y_d} < \varepsilon$ sempre que $d \geq D'$, i.e., $\lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d} = 0$. □

Observação 3.1.55. A rigor, precisa-se tomar o elemento $D \in \mathbb{D}$ como no enunciado acima apenas para garantir a boa definição do elemento $\frac{1}{y_d} \in \mathbb{R}$, que não existe se $y_d = 0$. Com isso dito, observe que redefinindo $y'_d := y_d$ caso $y_d \neq 0$ e $y'_d \neq 0$ (arbitrário!) se ocorrer $y_d = 0$, a existência do elemento $D \in \mathbb{D}$ assegura que $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y'_d} = \lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d}$ (confira o Exercício 3.40). Moral da história: nestes casos, é inofensivo ignorar os índices d's para os quais ocorre $y_d = 0$ e, justamente por isso, não é desonesto escrever "$\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d}$" para indicar "$\lim_{d\geq D} \frac{1}{y_d}$", o que será feito daqui em diante. △

Embora o lema anterior vá ser usado em breve para tratar de situações mais gerais, convém refletir um pouco acerca de seus desdobramentos para os tipos particulares de *nets* que se encontram na natureza:

(i) se $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$;

(ii) se $\lim_{z\to p^+} f(z) = \pm\infty$, então $\lim_{z\to p^+} \frac{1}{f(z)} = 0$;

(iii) se $\lim_{z\to-\infty} f(z) = \pm\infty$, então $\lim_{z\to-\infty} f(z) = 0 \ldots$

Intuitivamente, quanto maior o valor absoluto de um número α, menor será o valor absoluto do quociente $\frac{1}{\alpha}$, de modo que *no limite* se chega a zero. É comum encontrar tal comportamento codificado em *pichações* do tipo "$\frac{1}{\pm\infty} = 0$", que não fazem sentido do ponto de vista algébrico (uma vez que $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$). Porém, ao pensar na função $F\colon \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ que faz $F(x) := \frac{1}{x}$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $F(\pm\infty) := 0$, segue que F é uma função contínua que *estende* a função contínua $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \frac{1}{x}$. Portanto, feitas as devidas ressalvas, chega-se à inevitável conclusão: pichação é arte.

Proposição 3.1.56. *Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma* net *num espaço normado E e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma* net *em $\mathbb{R}$, ambas convergentes, com $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d := x \in E$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d := y \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Se $y \neq 0$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d} x_d = \frac{1}{y} x$.

(ii) Se $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d} x_d = 0$.

(iii) Se $x \neq 0$, $y = 0$ e o subconjunto $\mathbb{D}' := \{d \in \mathbb{D} : y_d \neq 0\}$ é cofinal em $\mathbb{D}$, então

$$\lim_{d\in\mathbb{D}'} \frac{\|x_d\|}{|y_d|} = +\infty.$$

Demonstração. Primeiramente, note que tanto em (i) quanto em (ii) existe $D \in \mathbb{D}$ com $y_d \neq 0$ para todo $d \geq D$. Assim, em ambos os casos, resulta que $\left\langle \frac{1}{y_d} \right\rangle_{d\geq D}$ é uma *net* em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que converge em $\mathbb{R}$: para $\frac{1}{y}$ em (i) e para 0 em (ii) (pelo lema anterior). Logo, as identidades desejadas seguem da continuidade da multiplicação $\mathbb{R} \times E \to E$. O terceiro caso é mais delicado, mas não tanto.

Por valer $x \neq 0$, tem-se $\|x\| > 0$, o que permite tomar $0 < \delta < \|x\|$ de tal forma que $0 < \|x\| - \delta$. Além disso, como a própria norma $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ é contínua (Exemplo 2.1.16), o Corolário 3.1.38 assegura que $\|x_d\| \to \|x\|$ em $\mathbb{R}$, donde segue que existe $D \in \mathbb{D}$ com $\|x\| - \delta < \|x_d\| < \|x\| + \delta$ sempre que $d \geq D$. A fim de mostrar a identidade desejada, para $M > 0$, deve-se encontrar $\widetilde{D} \in \mathbb{D}'$ tal que $\frac{\|x_d\|}{|y_d|} > M$ sempre que ocorrer $d \geq \widetilde{D}$ com $d \in \mathbb{D}'$ ou, equivalentemente, tal que $|y_d| < \frac{\|x_d\|}{M}$.

Ora, como $y_d \to 0$ e $\mathbb{D}'$ é cofinal em $\mathbb{D}$, existe $D' \in \mathbb{D}'$ tal que $0 < |y_d| < \dfrac{\|x\| - \delta}{M}$ sempre que $d' \in \mathbb{D}$ com $d' \geq D'$. Finalmente, basta tomar $\widetilde{D} \in \mathbb{D}'$ com $D, D' \leq \widetilde{D}$ pois, com isso,

$$0 < |y_d| < \frac{\|x\| - \delta}{M} < \frac{\|x_d\|}{M}$$

sempre que $d' \in \mathbb{D}'$ com $d' \geq \widetilde{D}$, como desejado. □

Exemplo 3.1.57. Quando $E \coloneqq \mathbb{R}$, é tentador assumir que a igualdade em (iii) possa ser substituída por

$$\lim_{d \in \mathbb{D}'} \frac{x_d}{y_d} = +\infty,$$

i.e., sem que se tomem os valores absolutos. No entanto, ao nos restringirmos estritamente às hipóteses de (iii), há margem para que tal conjectura seja falsa. Por exemplo: apesar de valer $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ (Exercício 3.41), a sequência $\langle (-2)^n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para $+\infty$, posto que suas subsequências $\left\langle (-2)^{2k} \right\rangle_{k \in \mathbb{N}}$ e $\left\langle (-2)^{2k+1} \right\rangle_{k \in \mathbb{N}}$ convergem para $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente.

Como o exemplo acima sugere, o *problema* reside no fato de que os "sinais" de y_d podem oscilar conforme a *net* converge para 0. Logo, para corrigir isso, basta exigir que tais oscilações não ocorram – ou pelo menos, parem de ocorrer a partir de um determinado momento. ▲

Exercício 3.32. Sejam $\langle x_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ e $\langle y_d \rangle_{d \in \mathbb{D}}$ *nets* reais, com $x_d \to x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ e $y_d \to 0$.

a) Mostre que se existir $D \in \mathbb{D}$ com $y_d > 0$ para todo $d \geq D$, então $\displaystyle\lim_{d \in \mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = x \cdot (+\infty)$.

b) Mostre que se existir $D \in \mathbb{D}$ com $y_d < 0$ para todo $d \geq D$, então $\displaystyle\lim_{d \in \mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = x \cdot (-\infty)$. ■

Exemplo 3.1.58. Para $a \in \mathbb{R}$ com $|a| > 1$, a série $\sum a^n$ diverge em $\mathbb{R}$, mas de formas distintas. Se $a > 1$, então $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a^n} = 0$ e, pelo exercício anterior, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$, donde segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}\left(1 - \lim_{n \to \infty} a^{n+1}\right) = \frac{1}{1 - a}(1 - (+\infty)) = +\infty.$$

Por outro lado, se $a < -1$, então $\sum a^n$ não converge nem mesmo em $\overline{\mathbb{R}}$: [expandir] ▲

Observação 3.1.59 (**Importante**: indeterminações)**.** De modo geral, as regras obtidas anteriormente não trataram do problema de *determinar* $\displaystyle\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d y_d$ nas situações em que $\displaystyle\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d = 0$ e $\displaystyle\lim_{d \in \mathbb{D}} y_d \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$. A razão para isso é muito simples: não há, de modo geral, uma regra que permita *determinar* o comportamento de tais limites – ou, em outras palavras, *cada caso é um caso*. É por este motivo que tais limites são chamados de *indeterminados* (ou *indeterminações*).

	$+\infty$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}$	não existe
$+\infty - \infty$	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
$\pm\infty \cdot 0$	(v)	(vi)	(vii)	(viii)

A tabela acima resume as situações que podem ocorrer quando se têm *nets*/funções f, g, h com $f \to \pm\infty$, $g \to \mp\infty$, $h \to 0$ e busca-se determinar $f + g \to ?$ e $f \cdot h \to ?$. Os números romanos indicados correspondem aos exemplos a seguir.

(i) As funções $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) := 2x$ e $g(x) := -x$ são tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Como $f(x) + g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

(ii) Troque f e g por $-f$ e $-g$ no item anterior, respectivamente.

(iii) No item (i), use $f(x) := x + r$.

(iv) *Spoiler*[15]: no item (i), faça $f(x) := x$ e $g(x) := -x - \operatorname{sen} x$.

(v) Considere as sequências $\langle x_n \rangle_n := \langle n \rangle_n$, $\langle y_n \rangle_n := \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle_n$ e note que $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ e $x_n y_n \to +\infty$.

(vi) No item anterior, multiplique x_n por -1.

(vii) No item (v), faça $y_n := \frac{r}{n}$.

(viii) No item (v), faça $y_n := \frac{(-1)^n}{n}$. $\triangle$

$\triangle$

Exercícios adicionais

Nos exercícios a seguir, os espaços considerados são assumidos com a condição de Hausdorff.

Exercício 3.33 ("$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to+\infty}$")**.** Para uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço topológico X, mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n$, i.e., o limite de $\langle x_n \rangle_n$ enquanto sequência é $x \in X$ se, e somente se, o limite da função $\mathbb{N} \to X$ que $n \mapsto x_n$, quando x tende a $+\infty$, é $x \in X$. $\blacksquare$

Exercício 3.34. Para uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, suponha que as subsequências $\langle x_{3k} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$, $\langle x_{3k+1} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ e $\langle x_{3k+2} \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ convirjam para o mesmo limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$. $\blacksquare$

Exercício 3.35. Para um conjunto dirigido $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$, sejam $C_0, \ldots, C_n \subseteq \mathbb{D}$ subconjuntos cofinais tais que $\mathbb{D} = \bigcup_{i\leq n} C_i$. Mostre que se $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* num espaço X e existe $x \in X$ tal que $\lim_{c_i\in C_i} x_{c_i} = x$ para cada $i \leq n$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = x$. $\blacksquare$

Exercício 3.36. Sejam $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$, então $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lambda$. Vale a recíproca? $\blacksquare$

Exercício 3.37. Para um espaço normado E, sem usar o Exercício 3.27, mostre que a função $\varphi\colon E \times E \to E$, dada por $\varphi(u, v) := u - v$, é contínua. Dica: a correspondência $\langle u, v \rangle \mapsto \langle u, -v \rangle$ determina uma função contínua da forma $E \times E \to E \times E$. $\blacksquare$

[15] Embora o leitor possivelmente conheça as funções trigonométricas, soa desonesto utilizá-las antes de definí-las propriamente, o que será feito bem mais adiante.

Exercício 3.38. Sejam $\langle G, +, 0\rangle$ um grupo abeliano dotado de uma topologia que torna contínuas tanto a adição $+ : G \times G \to G$ quanto a "inversão" $G \to G$ dada por $x \mapsto -x$. Mostre que a função $G \times G \to G$ que faz $\langle x, y\rangle \mapsto x - y$ é contínua. ■

Exercício 3.39. Para uma sequência $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ fixado, mostre que se existir $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = x$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. ■

Exercício 3.40. Para uma *net* $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ num espaço X e $D \in \mathbb{D}$ fixado, mostre que se existir $\lim_{d\geq D} x_d = x$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = x$. Dica: encare o exercício anterior até que ele te encare de volta. ■

Exercício 3.41. Seja $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* real. Mostre que $x_d \to 0$ se, e somente se, $|x_d| \to 0$. Dica: lembre-se de que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3.42. Refaça o exercício anterior em espaços normados. ■

Exercício 3.43. É possível adaptar o exercício anterior para espaços métricos? Como? ■

Exercício 3.44. O Exercício 3.41 permanece válido trocando-se 0 por $x \neq 0$? ■

Exercício 3.45. Sejam $\langle x_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e $\langle y_d\rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *nets* reais.

a) Suponha que exista $C > 0$ com $x_d > C$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Se $y_d \to 0$ e existe $D \in \mathbb{D}$ com $y_d > 0$ para todo $d \geq D$, então $\lim_{d\geq D} \frac{x_d}{y_d} = +\infty$.

b) Refaça o item anterior, trocando "$y_d > 0$" e "$+\infty$" por "$y_d < 0$" e "$-\infty$", respectivamente.

c) Mostre que se $\{x_d : d \in \mathbb{D}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, então $\lim_{d\geq D} \frac{x_d}{y_d} = 0$ para algum $D \in \mathbb{D}$. ■

Exercício 3.46. Seja $\langle \mathbb{P}, \leq\rangle$ uma ordem parcial.

a) Mostre que $\sup \emptyset$ existe se, e somente se, $\mathbb{P}$ tem menor elemento m e, neste caso, tem-se $\sup \emptyset = m$.

b) Mostre que $\sup \mathbb{P}$ existe se, e somente se, $\mathbb{P}$ tem maior elemento M e, neste caso, tem-se $\sup \mathbb{P} = M$.

c) Para $\mathbb{P} := \overline{\mathbb{R}}$ e $S \subseteq \mathbb{R}$, conclua que S é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\sup S < +\infty$.

d) Enuncie e demonstre os resultados duais para ínfimos. ■

Exercício 3.47 (limite racional no infinito)**.** ■

Exercício 3.48 (arrumar o enunciado)**.** Para um conjunto dirigido $\mathbb{D}$, consideremos um *objeto* $\infty \notin \mathbb{D}$, e chamemos por $\mathbb{D}^{\#} := \mathbb{D} \cup \{\infty\}$. Agora, sobre o conjunto $\mathbb{D}^{\#}$, definamos a seguinte topologia: $A \subseteq \mathbb{D}^{\#}$ é aberto se, e somente se, $\infty \notin A$ ou existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\{d \in \mathbb{D} : d \geq D\} \cup \{\infty\} \subseteq A$. Essencialmente, os pontos de $\mathbb{D}$ se mantêm isolados enquanto os subconjuntos da forma

$$\{d \in \mathbb{D} : d \geq D\} \cup \{\infty\}$$

são declarados abertos básicos *em torno de* ∞. Sejam X um espaço topológico, $\langle x_d\rangle_d$ uma *net* em X e $x \in X$ um ponto. Então $x_d \to x$ se, e somente se, é contínua a função $\varphi : \mathbb{D}^{\#} \to X$ definida por

$$\varphi(d) := x_d \text{ para cada } d \in \mathbb{D} \text{ e } \varphi(\infty) := x.$$

Exercício 3.49. Sejam $x \in \mathbb{R}$ um número real, $\langle x_d \rangle_d$ uma *net* real e $\langle r_n \rangle_n$ uma sequência de números reais estritamente positivos com $r_n \to 0$. Mostre que se para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $D_n \in \mathbb{D}$ com $|x_d - x| < r_n$ para todo $d \geq D_n$, então $\lim_d x_d = x$. ■

Exercício 3.50. Revise a Seção 3 e verifique quais definições, exemplos, propriedades operatórias e de monotonicidade podem ser adaptadas para corpos ordenados *quaisquer*. Dica: argumentos que dependem da existência de supremos *costumam* depender da completude; já argumentos que utilizam a convergência $\frac{1}{n} \to 0$ só são possíveis pela propriedade arquimediana; em particular, é perfeitamente razoável *estender* corpos ordenados tal qual se fez com a reta, i.e., pode-se considerar $\overline{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$ como feito na Definição 2.0.1. ■

[Transforme em exercício!]

Exemplo 3.1.60. Considere $X := \mathbb{R}$ e $p := 0$ na definição do conjunto dirigido X_p feita no Exemplo 3.0.15. Neste caso, a *net* $\left\langle \frac{1}{|x|} \right\rangle_{x \in X_p}$ é estritamente crescente! De fato, se $x \preceq y$ nesta ordem, então $|y| \leq |x|$ e, consequentemente, $\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|y|}$. Logo, essa *net* converge para o supremo de sua imagem, que o leitor não deve ter dificuldades para verificar ser $+\infty$. ▲

Exercício 3.51. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto, $p \in \mathbb{R}$ um ponto qualquer e $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função crescente e limitada.

a) Mostre que se p é ponto de acumulação de X à direita, então $\langle f(x) \rangle_{x \in X_p^+}$ é decrescente, onde $x \preceq y$ para $x, y \in X_p^+$ se, e somente se, $y \leq x$.

b) Mostre que se p é ponto de acumulação de X à esquerda, então $\langle f(x) \rangle_{x \in X_p^-}$ é crescente, onde $x \preceq y$ para $x, y \in X_p^-$ se, e somente se, $x \leq y$.

c) Conclua que funções monótonas e limitadas sempre admitem limites laterais (com respeito aos pontos do domínio em que o limite em questão faça sentido, caso existam). ■

Capítulo 4

Truques úteis

4.0 Exemplos e situações clássicas

4.0.0 Funções polinomiais e racionais

Um *polinômio*[0] $p \in \mathbb{R}[t]$ na indeterminada t induz de maneira muito natural uma função da forma $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $p(x) \in \mathbb{R}$: se $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, x \in \mathbb{R}$ e $p := \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, então $p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$. Em outras palavras: $p(x)$ se obtém com a substituição[1] das ocorrências da indeterminada t no polinômio p pelo número real x.

Agora, dados polinômios $p, q \in \mathbb{R}[t]$, para cada $x \in \mathbb{R}$ com $q(x) \neq 0$ fica bem definido o número real $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

Definição 4.0.0. Para $X \subseteq \mathbb{R}$, diz-se que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma **função racional** se existem polinômios $p, q \in \mathbb{R}[t]$ tais que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ para todo $x \in X$. ¶

Apesar da definição acima, o mais comum é encontrar funções racionais dadas apenas por suas leis de formação. Em tais situações, digamos $f(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$, assume-se tacitamente que o domínio de f é $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Daí, como polinômios reais (em uma indeterminada!) tem, no máximo, finitas raízes (Exercício 1.41), segue que o domínio de funções racionais é *exprimível* como reunião finita de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Tal observação pode ser útil na resolução do

Exercício 4.0. Sejam $q \in \mathbb{R}[t]$ um polinômio não-nulo, $X := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Mostre que β é ponto de acumulação de X. ■

O exercício acima permite investigar, para uma função racional f, a existência (ou não) de $\lim_{x \to \beta} f(x)$ para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$. Se $f(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ para certos polinômios $p, q \in \mathbb{R}[t]$, então:

✓ se $q(\beta) \neq 0$, então $\lim_{x \to \beta} f(x) = f(\beta)$;

[0] Exercício 1.40.

[1] Profissionais dizem que $p(x)$ é o resultado da *avaliação* do polinômio p no número real x.

✗ se $q(\beta) = 0$, então a determinação de $\lim_{x \to \beta} f(x)$ depende tanto do comportamento de $q(x)$ para x suficientemente próximo de β, quanto do valor de $p(\beta)$.

Com efeito, se $p(\beta) \neq 0$, então recai-se no cenário da Proposição 3.32: se existir $\delta > 0$ com $q(x) > 0$ sempre que $|x - \beta| < \delta$, então $\lim_{x \to \beta} f(x) = +\infty$; se existir $\delta > 0$ com $q(x) < 0$ sempre que $|x - \beta| < \delta$, então $\lim_{x \to \beta} f(x) = -\infty$; se tal $\delta > 0$ não existir, então também não existirá $\lim_{x \to \beta} f(x)$.

Por outro lado, se $p(\beta) = 0$, então *tudo* pode acontecer, posto que neste caso, na melhor das situações teríamos algo do tipo $0 \cdot (\pm\infty)$, uma indeterminação clássica.

Já o comportamento das funções racionais na reta estendida pode ser facilmente determinado em termos dos graus dos polinômios e, possivelmente, de seus coeficientes líderes. O leitor interessado pode consultar o Exercício 3.47.

4.0.1 Estimativas úteis

É bastante frequente se deparar com o problema de determinar o limite de uma *net* da forma $\langle x_d y_d \rangle_d$, onde $\langle x_d \rangle_d$ e $\langle y_d \rangle_d$ são *nets* reais, mas apenas o limite da primeira seja conhecido a priori. Se $x_d \to \pm\infty$, os itens (iii) e (iv) da Proposição 4.2.29 mostram que mesmo sem conhecer (caso exista) o limite de $\langle y_d \rangle_d$, ocorrerá $\lim_d x_d y_d = \pm\infty$ a depender do bom comportamento do sinal dos termos y_d. Ocorre um fenômeno *dual* caso $x_d \to 0$.

Outra situação típica de determinação indireta é ilustrada na próxima

Lema 4.0.1. *Seja $\langle x_n \rangle_n$ uma sequência de números reais estritamente positivos. Se existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \lambda$, então $x_n \to 0$.*

Demonstração. Pelo Exercício 3.20, para $\mu \in (\lambda, 1)$ fixado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \mu$ para todo $n \geq N$. Logo,

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot x_n < \mu x_n < x_n$$

para todo $n \geq N$, mostrando simultaneamente que a subsequência $\langle x_n \rangle_{n \geq N}$ é decrescente e limitada inferiormente, donde segue que $x_n \to \alpha$ para algum $\alpha \geq 0$ (por quê?!). Por fim, como vale $x_{n+1} < \mu x_n$ para todo $n \geq N$, a monotonicidade dos limites resulta em $\alpha \leq \mu\alpha$ e, consequentemente, $\alpha = 0$. □

Agora, seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixado.

(i) $\lim_{n \to \infty} n^k = +\infty$: segue, por exemplo, por $\mathbb{N}$ ser cofinal em $\mathbb{R}$ (Exemplo 3.36) e $\lim_{x \to +\infty} x^k = 1^k \cdot (+\infty)$, pela Proposição 3.1.52.

(ii) $\lim_{n \to \infty} n! = +\infty$: segue, por exemplo, pela "crescência" da sequência $\langle n! \rangle_n$, que deve convergir para o supremo de sua imagem, que é $+\infty$.

(iii) $\lim_{n \to \infty} n^n = +\infty$: segue, por exemplo, pelo Princípio da Explosão, pois $n! < n^n$ para todo $n > 1$ e $n! \to +\infty$ pelo item anterior.

Assim, quando o assunto é convergir para $+\infty$, as três sequências acima *parecem* indistinguíveis da sequência $\langle a^n \rangle_n$, onde $a \in \mathbb{R}$ é um número real fixado com $a > 1$. Porém, tal conclusão desconsidera a *velocidade* com que os termos das sequências se tornam grandes. Um modo de recuperar tal informação e, em certo sentido, distinguir as sequências, é observar as identidades:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Pelo que se destacou acima, todos os limites anteriores são do *tipo* $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ e, portanto, não podem ser determinados pelas regras operatórias já estabelecidas. Porém, o último lema permite verificar as convergências propostas quase trivialmente:

(i) chamando $x_n \coloneqq \dfrac{n^k}{a^n}$ para todo n, resulta

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \frac{(n+1)^k}{a \cdot a^n} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \frac{(n+1)^k}{an^k} = \frac{1}{an^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{k-i} =$$
$$= \frac{1}{a} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{-i} = \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \to \frac{1}{a}$$

quando $n \to \infty$, com $\dfrac{1}{a} < 1$, mostrando que $x_n \to 0$;

(ii) chamando $x_n \coloneqq \dfrac{a^n}{n!}$, tem-se

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a \cdot a^n}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0,$$

donde mais uma vez se conclui $x_n \to 0$;

(iii) chamando $x_n \coloneqq \dfrac{n!}{n^n}$, obtém-se

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

e, como será mostrado oportunamente, $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \to e$, onde $e > 1$ denota o *número de Euler*, donde segue que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{1}{e} < 1$ e, portanto, $x_n \to 0$.

Moralmente, esse tipo de comportamento mostra que a sequência no denominador converge *mais rapidamente* para $+\infty$ do que a sequência no numerador. Explicitamente, se $\langle x_d \rangle_d$ e $\langle y_d \rangle_d$ são *nets* reais com $x_d \to +\infty$, $y_d \to +\infty$ e $\dfrac{x_d}{y_d} \to 0$, então para todo $M > 0$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $Mx_d < y_d$, mostrando que o crescimento de $\langle y_d \rangle_d$ dá conta de superar o crescimento de $\langle x_d \rangle_d$ *com folga*. É evidente que a mesma interpretação se aplica ao caso de limites de funções.

4.0.2 Mudança de variáveis

Dadas funções $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$, pode-se considerar a composição $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ que faz $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para todo $x \in X$. Neste caso, se $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X, faz sentido investigar a existência de $\lim\limits_{x\to p}(g \circ f)(x)$. Isso por si só não traz novidades, já que a definição de limite de uma função independe da natureza da função. Porém, se existirem $\lim\limits_{x\to p} f(x) := \lambda$ e $\lim\limits_{y\to\lambda} g(y)$, pode ser interessante procurar por alguma relação com $\lim\limits_{x\to p} g(f(x))$.

Observação 4.0.2 (Variáveis "mudas")**.** Acima, escreveu-se $\lim\limits_{y\to\lambda} g(y)$ pelo mesmo motivo que se poderia escrever $\lim\limits_{z\to\lambda} g(z)$: em ambos os casos, as letras "y" e "z" são variáveis *posicionais* e indicam que o mesmo valor atribuído a y (ou a z) ao se fazer $y \to \lambda$ (ou $z \to \lambda$) deve ser utilizado em $g(y)$ (ou $g(z)$). Assim, evidentemente, também faria sentido escrever $\lim\limits_{x\to\lambda} g(x)$. No entanto, tal desapego notacional não ajuda a intuir o que se busca fazer: a ideia é que ao usar f para determinar os valores atribuídos a y por meio de $f(x)$, determine-se o comportamento de $g(f(x))$ conforme $x \to p$. △

Exceto em situações artificiais – ou naturalmente problemáticas por algum azar particular – estimar o limite de uma composição se resume a aplicar adequadamente o Exercício 2.27, que trata da continuidade de composições. O cerne da questão é o seguinte

Teorema 4.0.3. *Sejam $h\colon Z \to \mathbb{R}$ uma função, com $Z \subseteq \mathbb{R}$, $q, \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, com q um ponto de acumulação de Z. São equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{z\to q} h(z) = \eta$*;*

(ii) a função $\widehat{h}\colon Z \cup \{q\} \to \overline{\mathbb{R}}$ que faz $\widehat{h}(z) := h(z)$ para $z \neq q$ e $\widehat{h}(q) := \eta$, é contínua em q.

Demonstração. Se vale (i) e $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um intervalo aberto com $\eta \in I$, então existe um intervalo aberto $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $q \in J$ e tal que $h(z) \in I$ sempre que $z \in Z \cap J$: a depender da natureza de q, i.e., se $q \in \mathbb{R}$ ou $q \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, o significado correspondente de $\lim\limits_{z\to q} h(z) = \eta$ garante o intervalo J; por exemplo, para $q \in \mathbb{R}$, basta tomar $J := (q - \delta, q + \delta)$, onde $\delta > 0$ é tal que $h(z) \in I$ sempre que $z \in Z$ satisfaz $|z - q| < \delta$. Ocorre que esta é, precisamente, a definição do que significa dizer que $\widehat{h}$ é contínua em q. A recíproca é análoga. □

A função $\widehat{h}$ do teorema anterior "corrige" as situações *artificiais* em que $\lim\limits_{z\to q} h(z)$ existe mas $q \in Z$ com $h(q) \neq \lim\limits_{z\to q} h(z)$. Em particular, h é contínua em q se, e somente se, $\widehat{h} = h$. Note ainda que nos casos em que $q \in \{+\infty, -\infty\}$, a função $\widehat{h}$ tem explicitamente esse ponto em seu domínio: por exemplo, para $q := +\infty$, $Z := \mathbb{R}$ e $h(z) := z$ para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $\widehat{h}\colon (-\infty, +\infty] \to (-\infty, +\infty]$ com $h(x) = x$ para todo $x \in (-\infty, +\infty]$. O que isso tudo tem a ver com o limite de compostas?

Corolário 4.0.4. *Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$ funções, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$. Se $p, \lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ são tais que*

(i) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lambda$*,*

(ii) λ *é ponto de acumulação de* Y, *e*

(iii) $\lim_{y\to\lambda} g(y) = \mu$,

então $\lim_{x\to p} \widehat{g}\left(\widehat{f}(x)\right) = \mu$. *Em particular, se* $\lambda \in Y$ *e* g *é contínua em* λ, *então vale a identidade* $\lim_{x\to p} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to p} f(x)\right)$.

Demonstração. A primeira parte segue pois $\widehat{f}$ é contínua em p e $\widehat{g}$ é contínua em $\widehat{f}(p) \coloneqq \lambda$. Em vista disso, a segunda parte é automática. □

O corolário acima também ajuda a perceber as situações em que avaliar o limite de $g \circ f$ pode se tornar um problema: caso ocorra $f(x) = \lambda$ para $x \neq p$, deve-se ter $\widehat{f}(x) = f(x) = \lambda$, e daí $\widehat{g}(f(x)) = \widehat{g}(\lambda) \coloneqq \mu$, enquanto pode-se ter $g(\lambda) \neq \mu$ caso $\lambda \in \operatorname{dom}(g)$.

Exemplo 4.0.5. Com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função constante nula e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) \coloneqq 1$ para $x \neq 0$ e $g(0) \coloneqq 0$, ocorre $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0$, mas $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$; note que tal exemplo se enquadra no cenário acima, com $p \coloneqq \lambda \coloneqq 0$ e $\mu \coloneqq 1$. Em particular, o problema desaparece com $\widehat{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, já que $\widehat{g}(y) \coloneqq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Analogamente, a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) \coloneqq 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $f(x) \coloneqq x$ para $x \in \mathbb{Q}$, e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) \coloneqq 0$ para $y \neq 0$ e $g(0) \coloneqq 1$, ocorre $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, mas não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$; novamente, $\widehat{g}$ resolve o problema. ▲

Portanto, exceto nas situações *artificialmente* descontínuas, a mudança de variáveis se traduz na boa e velha composição de funções contínuas: se $f(x) \to \lambda$ quando $x \to p$ e $g(y) \to \mu$ quando $y \to \lambda$, então $x \to p$ implica $g(f(x)) \to \mu$, como manda o "bom senso".

4.1 Sequências como protagonistas

A utilização de *nets* na seção anterior visou unificar as justificativas teóricas para os métodos clássicos envolvidos no cálculo de limites, sejam de funções, sequências ou outras *nets*, como as integrais[2]. Isto não significa, porém, que as sequências sejam irrelevantes, *au contraire*: *nets* constituem uma tentativa de capturar, tanto quanto possível, o bom comportamento das sequências convergentes, que perdem boa parte do seu poder descritivo em ambientes mais gerais.

Porém, em $\mathbb{R}$ e, mais geralmente, em *espaços métricos*, sequências são protagonistas naturais, como ilustra a próxima

Proposição 4.1.0. *Sejam* $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ *uma* net *real e* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ *um ponto na reta estendida com* $x_d \to \lambda$. *Então existe uma função crescente* $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ *tal que* $x_{\rho(n)} \to \lambda$ *como sequência.*

Observação 4.1.1. Moralmente, *todo tipo* de convergência em espaços métricos é *testemunhado* por uma sequência convergente, o que justifica a postura predominante de estabelecer as propriedades operatórias dos limites de sequências para daí *derivar* propriedades análogas para limites mais gerais. $\triangle$

A proposição acima se prova de modo muito simples, desde que se tenha a ferramenta certa.

Lema 4.1.2. *Se* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, *então existe uma sequência* $\mathcal{B}_\lambda := \langle I_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ *de intervalos abertos de* $\overline{\mathbb{R}}$ *tais que*

(*i*) *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in I_n$,

(*ii*) *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ *e*

(*iii*) *se* $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *é um intervalo aberto com* $\lambda \in J$, *então existe* $n \in \mathbb{N}$ *com* $I_n \subseteq J$.

Demonstração. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, basta fazer $I_n := \left(\lambda - \frac{1}{2^n}, \lambda + \frac{1}{2^n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para os pontos no infinito, pode-se fazer $I_n := (2^n, +\infty]$ para todo n, ou $I_n := [-\infty, -2^n)$ para todo n, a depender do caso. Nas três situações, a condição (iii) segue da propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$. $\square$

Exercício 4.1. Complete os detalhes da demonstração anterior. $\blacksquare$

Demonstração da Proposição 4.1.0. Fixando $\langle I_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ como no lema anterior, pode-se tomar, para cada $n \in \mathbb{N}$, um $d_n \in \mathbb{D}$ tal que $x_{d_n} \in I_n$ para todo $d \geq d_n$. Daí, basta definir $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ recursivamente, escolhendo-se $\rho(0) := d_0$ e $\rho(n+1) \geq \rho(n), d_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É a condição (iii) satisfeita pela sequência de intervalos o que garante a convergência da sequência $\langle x_{\rho(n)} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$: dado um intervalo aberto $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in J$, existe $N \in \mathbb{N}$ com $I_N \subseteq J$, e daí $x_{\rho(n)} \in I_n \subseteq I_N \subseteq J$ para todo $n \geq N$, pois $\rho(n) \geq d_n$. $\square$

Exercício 4.2 (Aquecimento)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ um ponto na reta estendida.

a) Mostre que λ é ponto de acumulação de X se, e somente se, existe uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ com $x_n \in X \setminus \{\lambda\}$ para todo n e tal que $x_n \to \lambda$.

[2] O uso da *integral de Cauchy* em vez da *integral de Riemann* como exemplo de aplicação teve como principal objetivo evitar *spoilers*: integrais de Riemann serão tratadas, oportunamente, no Capítulo 8.

b) Mostre que se X é finito, então X não admite pontos de acumulação.

c) Suponha que X não tenha máximo. Mostre que se $\lambda = \sup X$, então λ é ponto de acumulação de X.

d) Suponha que X não tenha mínimo. Mostre que se $\lambda = \inf X$, então λ é ponto de acumulação de X.

e) Pense rápido: vale a volta dos dois últimos itens? ■

Observação 4.1.3. O leitor deve estar ciente de que nos enunciados acima, permite-se que λ assuma valores na reta estendida e, por isso, pode ocorrer tanto $\sup X = +\infty$ quanto $\inf X = -\infty$. Quem preferir pensar em pontos de acumulação como uma exclusividade de $\mathbb{R}$ deve acrescentar as hipóteses adequadas de limitação sobre X. △

Como os resultados acima ilustram, sequências reais convergentes parecem traduzir certas propriedades definidas por meio da ordem de $\mathbb{R}$. Até o final desta seção, veremos que não se trata de uma mera impressão.

Lema 4.1.4. *Toda sequência em $\mathbb{R}$ admite subsequência monótona.*

Demonstração. Dada uma sequência real $\langle x_n \rangle_n$, pode-se considerar o conjunto $[\mathbb{N}]^2$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ com precisamente dois elementos, e daí definir a função $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ que faz $c(\{m, n\}) := \mathsf{A}$ se $m < n$ e $x_m < x_n$, e $c(\{m, n\}) := \mathsf{V}$ se $m < n$ com $x_m \geq x_n$. O leitor, com certa razão, pode se perguntar: *quê?!*

Intuitivamente, a construção acima consiste em considerar o *grafo infinito* cujos vértices são todos os números naturais e cujas arestas são todas as possíveis ligações entre eles. Nesse sentido, a função *c pinta* a aresta $m < n$ de Azul se ocorrer $x_m < x_n$, ou de Vermelho caso contrário[3]. Por que alguém faria isso? *Muito simples*! Um subconjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ no qual qualquer aresta ligando seus vértices tenha a mesma cor se traduz numa subsequência monótona: (estritamente) crescente se a cor for Azul; decrescente se a cor for Vermelha[4].

O passo fundamental na demonstração de que existe um subconjunto $M \subseteq \mathbb{N}$ com a propriedade desejada faz uso (de uma variação) do Princípio da Casa dos Pombos, como expresso no Exercício 0.40: *se X é infinito, $A, B \subseteq X$ são tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$, então A é infinito ou B é infinito.* Em particular, se $P \subseteq [\mathbb{N}]^2$ é infinito, então P é união disjunta dos subconjuntos $\{p \in P : c(p) = \mathsf{A}\}$ e $\{p \in P : c(p) = \mathsf{V}\}$, donde segue que pelo menos um deles deve ser infinito.

Katzensprung. *Fixados um subconjunto infinito $A \subseteq \mathbb{N}$ e um elemento $a \in A$, existe um subconjunto infinito $G_{A,a} \subseteq A$ tal que $a < \min G_{A,a}$ e $c(\{a, n\}) = c(\{a, m\})$ para quaisquer elementos $m, n \in G_{A,a}$.*

Demonstração. Em outras palavras, existe um subconjunto infinito de A cujas arestas que ligam seus elementos ao número a têm todas a mesma cor. Para se dar conta disso, note que o subconjunto $P := \{\{a, n\} : n > a \text{ e } n \in A\} \subseteq [\mathbb{N}]^2$ é infinito e, pelo argumento do parágrafo anterior, existe uma cor $\mathsf{C} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ tal que $Q := \{p \in P : c(p) = \mathsf{C}\}$ é infinito. Daí, basta tomar $G_{A,a} := (\bigcup Q) \setminus \{a\}$. □

[3]Evidentemente, A e V são apenas modos psicologicamente agradáveis de denotar 0 e 1, x e $\{x\}$ ou, mais geralmente, quaisquer dois conjuntos A e V com $A \neq V$.

[4]Por exemplo, se $\mathsf{c} := \mathsf{A}$, então $x_m < x_n$ sempre que $m, n \in M$ com $m < n$, ou seja: a subsequência $\langle x_m \rangle_{m \in M}$ é estritamente crescente. O raciocínio é análogo para $\mathsf{c} := \mathsf{V}$.

Dito isso, mostraremos que existe uma sequência estritamente crescente $\langle k_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturais tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\mathsf{c}_n \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $c(\{k_n, k_m\}) = \mathsf{c}_n$ para todo $m > n$. De fato, em vista da argumentação anterior, basta proceder recursivamente:

✓ $A_0 := \mathbb{N}$ e $k_0 := \min A_0$;

✓ $A_1 := G_{A_0,k_0}$ e $k_1 := \min A_1$;

✓ para $n \geq 1$, e supondo $A_0, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}$ definidos com $A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq A_0$, todos infinitos, com $k_i \in A_i$ para cada $i \leq n$, faz-se $A_{n+1} := G_{A_n,k_n}$ e $k_{n+1} := \min A_{n+1}$.

Finalmente, a função $\varphi \colon \mathbb{N} \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$, que faz $\varphi(n) := \mathsf{c}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tem imagem finita, donde o Princípio da Casa dos Pombos garante um subconjunto infinito $T \subseteq \mathbb{N}$ e $\mathsf{c} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $\varphi(t) = \mathsf{c}$ para todo $t \in T$. Ora, isto significa, precisamente, que $c(\{k_s, k_t\}) = \mathsf{c}$ para quaisquer $s, t \in T$ distintos. Logo, basta fazer $M := \{k_t : t \in T\}$. □

Exercício 4.3. Complete os detalhes da demonstração acima. ■

Corolário 4.1.5. *Seja $\langle x_n \rangle_n$ uma sequência em $\mathbb{R}$.*

(i) (Bolzano-Weierstrass). *Se $\langle x_n \rangle_n$ é limitada, então $\langle x_n \rangle_n$ tem subsequência que converge em $\mathbb{R}$.*

(ii) Se $\langle x_n \rangle_n$ é ilimitada, então $\langle x_n \rangle_n$ tem subsequência que converge para $+\infty$ ou $-\infty$.

Demonstração. Pelo lema anterior, $\langle x_n \rangle_n$ tem subsequência monótona, digamos $\langle x_{n_k} \rangle_k$. Pelo Exercício 3.22, tal subsequência converge para $\alpha := \sup_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k}$ ou $\beta := \inf_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k}$ a depender do tipo de monotonicidade. Em particular, se $\langle x_n \rangle_n$ é limitada, então $\langle x_{n_k} \rangle_k$ também é limitada e, consequentemente, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

A afirmação (i) no corolário acima, conhecida como Teorema de Bolzano-Weierstrass, manifesta uma das encarnações do que significa ser *compacto* em $\mathbb{R}$. De um ponto de vista geometricamente ingênuo, o conteúdo de seu enunciado parece óbvio: se infinitos pontos são *distribuídos* numa região limitada, então *certamente* alguma parte desses pontos *acumula* em algum lugar. Nesse sentido, o teorema acima cumpre a difícil tarefa de *justificar* dentro da teoria um fenômeno esperado fora dela – não por acaso, diversos resultados clássicos da Análise são consequência do Teorema de Bolzano-Weierstrass, mesmo que secretamente.

4.1.0 O critério de Cauchy

A definição de limite, embora efetiva, tem uma desvantagem curiosa: o limite. Mais precisamente, para decidir se uma *net* $\langle x_d \rangle_d$ converge em $\mathbb{R}$, deve-se *encontrar* o número L que satisfaz a condição para ser chamado de $\lim_d x_d$. Ora, por ser uma propriedade da *net* (e não do número L), deveria ser possível decidir se uma *net* converge ou não sem, necessariamente, conhecer o seu limite. O *critério de Cauchy*, introduzido a seguir, faz exatamente este trabalho.

Definição 4.1.6. Uma *net* $\langle x_d \rangle_d$ de números reais é **de Cauchy** em $\mathbb{R}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - x_{d'}| < \varepsilon$ sempre que $d, d' \geq D$. ¶

Exercício 4.4. Traduza o que significa ser de Cauchy para o caso de sequências, funções, somas de Cauchy (Exemplo 4.2.16), etc. ■

Proposição 4.1.7. *Seja* $\langle x_d \rangle_d$ *uma* net *real.*

(*i*) *Se* $\langle x_d \rangle_d$ *converge em* $\mathbb{R}$*, então* $\langle x_d \rangle_d$ *é de Cauchy.*

(*ii*) *Se* $\langle x_d \rangle_d$ *é de Cauchy, então existe* $D \in \mathbb{D}$ *tal que* $\{x_d : d \geq D\}$ *é limitado.*

Demonstração. Para o primeiro item, note que para $d, d' \in \mathbb{D}$ vale a desigualdade

$$|x_d - x_{d'}| \leq |x_d - L| + |x_{d'} - L|$$

para qualquer $L \in \mathbb{R}$. Logo, se $x_d \to L$ e $\varepsilon > 0$, então basta tomar $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $d \geq D$.

Para a segunda afirmação, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - x_{d'}| < 1$ para quaisquer $d, d' \in \mathbb{D}$ com $d, d' \geq D$. Logo,

$$|x_d| = |x_d - x_D + x_D| \leq |x_d - x_D| + |x_D| < 1 + |x_D| := M$$

para todo $d \geq D$, mostrando que $\{x_d : d \geq D\}$ está contido no intervalo $[-M, M]$. □

Exercício 4.5. Mostre que se $\langle x_n \rangle_n$ é uma *sequência* de Cauchy em $\mathbb{R}$, então $\langle x_n \rangle_n$ é limitada. Dica: o lema anterior já garante que $\{x_n : n \geq N\}$ é limitado para *algum* $N \in \mathbb{N}$; o que fazer com $x_0, \ldots, x_{N-1}$? ■

As definições de convergência em $\mathbb{R}$, bem como o critério de Cauchy, podem ser feitas, mais geralmente, em corpos ordenados, e não é difícil perceber que os resultados permanecem válidos nesse cenário mais geral (pense nisso). Porém, a depender do corpo $\mathbb{K}$, podem existir sequências de Cauchy que não convergem em $\mathbb{K}$.

Exemplo 4.1.8. Pelo que se discutiu no Exemplo 1.1.16 e no Exercício 1.20, o conjunto $S := \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q \text{ e } q^2 < 2\}$

- ✓ tem supremo em $\mathbb{R}$, digamos α,
- ✓ $\alpha^2 = 2$ e, por isso
- ✓ $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Agora, o item (c) do Exercício 4.2 garante que α é ponto de acumulação de S, enquanto o item (a) permite conjurar uma sequência $\langle s_n \rangle_n$ em S com $s_n \to \alpha$. Como $\langle s_n \rangle_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, segue que $\langle s_n \rangle_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, e não é difícil perceber que $\langle s_n \rangle_n$ também será de Cauchy em $\mathbb{Q}$. Todavia, tal sequência não pode convergir em $\mathbb{Q}$, posto que o limite de sequências é único (veja o exercício a seguir). ▲

Exercício 4.6. Seja $\langle q_n \rangle_n$ uma sequência em $\mathbb{Q}$.

a) Mostre que se $\langle q_n \rangle_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, então $\langle q_n \rangle_n$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

b) Mostre que se $q \in \mathbb{Q}$ é tal que $q_n \to q$ como sequência em $\mathbb{Q}$, então $q_n \to q$ como sequência real[5]. ■

Definição 4.1.9. Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito **Cauchy completo** se toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ converge em $\mathbb{K}$. ¶

[5]Para leitores perdidos: uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ em $\mathbb{K}$ **converge em** $\mathbb{K}$ se existe $x \in \mathbb{K}$ tal que para todo $\varepsilon \in \mathbb{K}$ com $\varepsilon > 0_{\mathbb{K}}$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $|x_n - x|_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. O critério de Cauchy em $\mathbb{K}$ se define de maneira análoga.

Como toda sequência convergente em $\mathbb{K}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, corpos Cauchy completos são aqueles nos quais toda sequência que tem *uma chance de convergir*, de fato, converge. Assim, o exemplo anterior mostra que $\mathbb{Q}$ não é Cauchy completo, posto que admite sequências que poderiam convergir, mas não convergem em $\mathbb{Q}$. Em particular, o fato de que a sequência exibida converge em $\mathbb{R}$ não foi acidental, mas sim um sintoma de que $\mathbb{R}$ é Cauchy completo[6].

Lema 4.1.10. *Seja $\langle x_n \rangle_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Se $\langle x_n \rangle_n$ tem uma subsequência convergente em $\mathbb{K}$, então $\langle x_n \rangle_n$ é convergente em $\mathbb{K}$*

Demonstração. Seja $\langle x_{n_k} \rangle_k$ subsequência de $\langle x_n \rangle_n$, convergente em $\mathbb{K}$, digamos $x_{n_k} \to x$ para $x \in \mathbb{K}$. Para $\varepsilon \in \mathbb{K}$ com $\varepsilon > 0_{\mathbb{K}}$, existem

✓ $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m|_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq N$, e

✓ $K \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_k} - x|_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ para qualquer $k \geq K$.

Como $k \mapsto n_k$ é estritamente crescente, pode-se tomar $N' \in \mathbb{N}$ com $N' \geq K$ e $n_{N'} \geq N$, donde segue que

$$|x_n - x|_{\mathbb{K}} \leq |x_n - x_{n_{N'}}|_{\mathbb{K}} + |x_{n_{N'}} - x|_{\mathbb{K}} < 2_{\mathbb{K}}\varepsilon$$

para todo $n \geq N$, mostrando que $x_n \to x$, como desejado. □

Teorema 4.1.11. $\mathbb{R}$ *é Cauchy completo.*

Demonstração. Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, sequências de Cauchy tem subsequências convergentes em $\mathbb{R}$. Portanto, o resultado segue do último lema. □

Corolário 4.1.12. *Uma* net $\langle x_d \rangle_d$ *de números reais converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\langle x_d \rangle_d$ uma *net* de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a condição de Cauchy assegura um $D_n \in \mathbb{D}$ com $|x_d - x_{d'}| < \frac{1}{2^n}$ para quaisquer $d, d' \geq D_n$, enquanto o fato de $\mathbb{D}$ ser dirigido permite assumir $D_{n+1} \geq D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (veja a prova da Proposição 4.1.0 para ter uma ideia de como fazer isso). Pelo modo como os D_n's foram tomados, resulta que $\langle x_{D_n} \rangle_n$ é uma *sequência* de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto, convergente em $\mathbb{R}$ (por hipótese), digamos $x_{D_n} \to x$. Em posse disso, mostraremos que $\lim_d x_d = x$.

Fixado $N \in \mathbb{N}$, a convergência de $x_{D_n} \to x$ como sequência assegura um $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{d_n} - x| < \frac{1}{2^{N+1}}$ para todo $n \geq N'$. Logo, tomando-se $M := \max\{N+1, N'\}$ e $D := d_M$, para $d \geq D$ deve valer: $|x_D - x_d| < \frac{1}{2^{N+1}}$, pois $d, D \geq d_{N+1}$, bem como $|x_D - x| < \frac{1}{2^{N+1}}$, pois $M \geq N'$. Disso, resulta $|x_d - x| \leq |x_d - x_D| + |x_D - x| < \frac{1}{2^N}$, donde a conclusão segue do próximo exercício. □

Portanto, o critério de Cauchy caracteriza a convergência em $\mathbb{R}$ de *qualquer* tipo de *net*, o que permite determinar se uma certa *net* converge sem que para isso seja preciso conhecer o seu limite.

[6]Na verdade, $\mathbb{R}$ é o *completamento* de Cauchy de $\mathbb{Q}$, num sentido que será esmiuçado no Epílogo deste livro.

Exemplo 4.1.13 (Critério de Cauchy para funções). ▲

Exemplo 4.1.14 (Critério de Cauchy para séries). ▲

Exemplo 4.1.15 (Critério de Cauchy para integrais... de Cauchy). ▲

Exemplo 4.1.16 (Critério de Cauchy no infinito?). ▲

Exemplo 4.1.17 (Critério de Cauchy para espaços métricos). ▲

4.1.1 Completude revisitada (opcional)

Em certo sentido, a completude no sentido de Cauchy também expressa que $\mathbb{R}$ não tem buracos. Porém, em vez de atestar a ausência de cortes não triviais (Definição 1.1.15 e Exercício 1.21), a completude de Cauchy evita sequências que convirjam para *buracos*. Desse modo, é legítimo perguntar o que ocorreria se, na definição de corpo ordenado completo, utilizássemos a última completude – e não a primeira, no sentido de Dedekind.

Definição 4.1.18. Um corpo totalmente ordenado $\mathbb{K}$ é...

(c_i) **Monotonicamente completo** se toda sequência monótona e limitada em $\mathbb{K}$ converge em $\mathbb{K}$.

(c_{ii}) **Bolzano-Weierstrass completo** se toda sequência limitada em $\mathbb{K}$ tem subsequência convergente em $\mathbb{K}$.

(c_{iii}) **Bolzano completo** se todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{K}$ tem ponto de acumulação em $\mathbb{K}$

(c_{iv}) **Cauchy completo** se toda sequência de Cauchy converge em $\mathbb{K}$

(c_v) **Dedekind completo** se todo subconjunto não-vazio limitado superiormente tem supremo em $\mathbb{K}$. ¶

Teorema 4.1.19. *As definições acima são equivalentes entre si para corpos arquimedianos.*

Demonstração. A estrutura da prova é bem simples: mostrar as implicações

$$(c_i) \Rightarrow (c_{ii}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (c_v) \Rightarrow (c_i),$$

sendo que $(c_i) \Rightarrow (c_{ii})$ e $(c_v) \Rightarrow (c_i)$ já foram provadas no Corolário 4.1.5 e no Exercício 3.22, respectivamente. Por simplicidade, o subíndice "$\mathbb{K}$" será abandonado nos argumentos a seguir.

$(c_{ii}) \Rightarrow (c_{iii})$. Se $A \subseteq \mathbb{K}$ é infinito e limitado, então existe uma sequência injetiva $\langle x_n \rangle_n$ de elementos de A, que tem uma subsequência convergente por hipótese. O Exercício 4.2 então prova que o limite dessa subsequência é ponto de acumulação de A.

(c_{iii}) ⇒ (c_{iv}). Em vista do Lema 4.1.10, basta mostrar que toda sequência de Cauchy $\langle x_n \rangle_n$ tem subsequência convergente: ora, se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for um conjunto finito, então o problema está resolvido (por quê?!); se não, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um ponto de acumulação por hipótese, já que sequências de Cauchy são limitadas, donde ~~é fácil~~ não é difícil construir uma subsequência convergente.

(c_{iv}) ⇒ (c_v). Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado superiormente, digamos que por $M_0 \in \mathbb{K}$ com $M_0 > 0$. Fixado $x_0 \in S$, define-se $p_0 := \frac{1}{2}(x_0 + M_0)$. Daí:

(i) se p_0 for limitante superior de S, faz-se $a_0 := x_0$ e $b_0 := p_0$;

(ii) se não, faz-se $a_0 := p_0$ e $b_0 := M_0$.

Supondo definidos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ e $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que

($\star_i$) para todo $j \leq n$, $b_j - a_j = \dfrac{b_0 - a_0}{2^j}$ e $a_j \leq b_j$,

($\star_{ii}$) para todo $j < n$, $[a_{j+1}, b_{j+1}] \subseteq [a_j, b_j]$, e

($\star_{iii}$) para todo $j \leq n$, b_j limita S superiormente e existe $s \in S$ com $a_j \leq s$,

define-se $p_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Daí:

(i) se p_{n+1} for limitante superior de S, faz-se $a_{n+1} := a_n$ e $b_{n+1} := p_{n+1}$;

(ii) se não, faz-se $a_{n+1} := p_{n+1}$ e $b_{n+1} := b_n$,

de modo que as sequências finitas $\langle a_j \rangle_{j \leq n+1}$ e $\langle b_j \rangle_{j \leq n+1}$ satisfazem as condições ($\star_i$), ($\star_{ii}$) e ($\star_{iii}$) anteriores.

Ao se considerarem as sequências $\langle a_n \rangle_n$ e $\langle b_n \rangle_n$ obtidas pelo procedimento recursivo acima, a condição ($\star_{ii}$) garante que a primeira é crescente, enquanto a segunda é decrescente. Por sua vez, a condição ($\star_i$) assegura que ambas são de Cauchy, donde a hipótese implica que ambas convergem em $\mathbb{K}$, digamos que para $a, b \in \mathbb{K}$, respectivamente. Aplicando-se então, novamente, a condição (i), verifica-se que $a = b$. Por fim, da condição ($\star_{iii}$), segue que $b = \sup S$: como $s \leq b_n$ para quaisquer $s \in S$ e $n \in \mathbb{N}$, resulta $s \leq \lim_n b_n = b$, mostrando que b limita S superiormente; se $x \in \mathbb{K}$ é limitante superior de S, então $a_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e daí $a = \lim_n a_n \leq x$, mostrando que $a = b$ é o menor limitante superior de S, o que encerra a prova. □

Exercício 4.7. Complete os detalhes da demonstração anterior. Em particular: em que parte da prova de (c_{iv}) ⇒ (c_v) utilizou-se a hipótese de $\mathbb{K}$ ser arquimediano? Dica: pode ser edificante refletir acerca do Exercício 3.50. ■

Ao longo das próximas (sub) seções, veremos como as diversas manifestações da completude de $\mathbb{R}$ se traduzem *topologicamente* e, mais importante: como utilizá-las na demonstração de resultados fundamentais para a Análise, como o *Teorema de Weierstrass* (*a.k.a.* valor máximo) e o *Teorema do Valor Intermediário.*

4.2 On hold: trechos desordenados do texto antigo

Há dois modos naturais e bastante úteis de tornar $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]$ num conjunto dirigido.

Direção da Inclusão. Dadas partições $\mathcal{P},\mathcal{Q}\in\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]$, escreveremos $\mathcal{P}\sqsubseteq\mathcal{Q}$ para indicar que $\mathrm{im}\,(\mathcal{P})\subseteq\mathrm{im}\,(\mathcal{Q})$. Por exemplo, para $a\coloneqq 0$ e $b\coloneqq 10$, as partições de Cauchy $\mathcal{P}\coloneqq\langle 0,3,7,9,10\rangle$, $\mathcal{Q}\coloneqq\langle 0,2,5,10\rangle$ e $\mathcal{R}\coloneqq\langle 0,2,3,5,7,9,10\rangle$ verificam

- ✗ $\mathcal{P}\not\sqsubseteq\mathcal{Q}$,
- ✗ $\mathcal{Q}\not\sqsubseteq\mathcal{P}$, e
- ✓ $\mathcal{P},\mathcal{Q}\sqsubseteq\mathcal{R}$.

O leitor não deve ter dificuldades em se convencer de que $\langle\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b],\sqsubseteq\rangle$ é, de fato, um conjunto dirigido.

Direção da *norma*[7]. Para cada partição de Cauchy $\mathcal{P}\coloneqq\langle a_i : i\leq n\rangle$ de $[a,b]$, faz sentido considerar o número

$$\|\mathcal{P}\|\coloneqq\max\{a_i-a_{i-1}:1\leq i\leq n\},$$

que será chamado de . Daí, para duas partições de Cauchy $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ do intervalo $[a,b]$, diremos que $\mathcal{Q}$ é **mais fina** do que $\mathcal{P}$, o que indicaremos por $\mathcal{P}\preceq\mathcal{Q}$, se ocorrer $\|\mathcal{Q}\|\leq\|\mathcal{P}\|$. Intuitivamente, $\mathcal{Q}$ é mais fina do que $\mathcal{P}$ se os subintervalos determinados por $\mathcal{Q}$ são *menores* do que os subintervalos determinados por $\mathcal{P}$.

Em vista do exercício acima, é fácil concluir que $\langle\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b],\preceq\rangle$ é um conjunto dirigido: de fato, se $\mathcal{P},\mathcal{Q}\in\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]$, então existe $\mathcal{R}\in\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]$ com $\mathcal{P},\mathcal{Q}\sqsubseteq\mathcal{R}$ e, consequentemente, $\mathcal{P},\mathcal{Q}\preceq\mathcal{R}$. Tanto a relação $\sqsubseteq$ quanto a relação $\preceq$ classificam as partições de Cauchy como *melhores*[8] à medida em que particionam o intervalo $[a,b]$ em subintervalos cada vez menores (ou mais finos). Porém, enquanto a primeira exige certa compatibilidade entre os *pontos* das partições, a segunda apenas se importa com os tamanhos das partições.

Exercício 4.8. Para $a\coloneqq 0$ e $b\coloneqq 10$, considere $\mathcal{P}\coloneqq\langle 0,5,10\rangle$ e $\mathcal{Q}\coloneqq\langle 0,3,6,10\rangle$.

a) Mostre que $\mathcal{P}\not\sqsubseteq\mathcal{Q}$ mas $\mathcal{P}\preceq\mathcal{Q}$.

b) Conclua que as relações $\sqsubseteq$ e $\preceq$ são distintas. ■

As duas relações acima serão importantes quando estudarmos problemas relacionados a *integração* de funções limitadas da forma $[a,b]\to\mathbb{R}$. Em particular, a expressão "partição de Cauchy" faz referência ao fato de que tais partições serão usadas para definir a *integral de Cauchy* e, mais adiante, a *integral de Riemann*.

Observação 4.2.0. Eventualmente, *nets* da forma $\langle x_d\rangle_d$ com $x_d\in\mathbb{R}$ para todo $d\in\mathbb{D}$ serão chamadas de *nets* **reais**, enquanto aquelas com $x_d\in\overline{\mathbb{R}}$ para algum $d\in\mathbb{D}$ serão chamadas de *nets* **na reta estendida**. Porém, na maioria das vezes, elas serão chamadas apenas de *nets*. △

A fim de motivar as ideias, convém esquecer por um momento o ferramental topológico apresentado na seção anterior. Em vez disso, vamos fingir, brevemente, que este seja um texto clássico de Análise na Reta.

---

[7] O termo "norma" empregado aqui nada tem a ver com normas em espaços vetoriais. No caso, a ideia é apenas atribuir um número que mensure, em certo sentido, a partição.

[8] *Maiores na relação.*

Definição 4.2.1. Uma **sequência real**, ou **sequência em** $\mathbb{R}$, é uma função $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Aqui, denotaremos ψ por $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ ou mesmo $\langle x_n \rangle_n$, onde entende-se que x_n indica a imagem de $n \in \mathbb{N}$ pela função ψ, i.e., $\psi(n) := x_n$. ¶

Observação 4.2.2. O leitor não deve confundir a sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ com sua imagem $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$: enquanto uma sequência é uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que, por sua vez, é definida como o conjunto infinito de pares ordenados $\{\langle n, x_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$, a coleção $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem como elemento qualquer $y \in \mathbb{R}$ para o qual exista *algum* $n \in \mathbb{N}$ com $y = x_n$, e nada impede que existam n's diversos satisfazendo a mesma condição. △

Exemplo 4.2.3. Fixado $c \in \mathbb{R}$, a **sequência constante** $\langle c \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, i.e., que faz $n \mapsto c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{c\}$. Por outro lado, a sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} := \langle n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. ▲

Exemplo 4.2.4. Também é comum escrever $\langle x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle$ para indicar uma sequência da forma $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Em tais situações, entende-se que a descrição explícita dos primeiros termos indique o algoritmo ou a fórmula por meio da qual o n-ésimo termo da sequência pode ser obtido. A expressão $\langle 1, -1, 1, -1, \ldots\rangle$ costuma indicar, por exemplo, a sequência $\langle (-1)^n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. ▲

Definição 4.2.5. Fixadas uma sequência real $\langle x_n \rangle_n$ e um número real $L \in \mathbb{R}$, diz-se que $\langle x_n \rangle_n$ **converge** para L, o que se abrevia com a notação $x_n \to L$, se a seguinte condição for satisfeita: para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq N$ ocorre $|x_n - L| < \varepsilon$. Em tais situações, a sequência $\langle x_n \rangle_n$ é dita **convergente em** $\mathbb{R}$, enquanto L é *um* **limite da sequência**. ¶

Intuitivamente, uma sequência convergente em $\mathbb{R}$ é uma *sucessão* de pontos da reta que se tornam *cada vez mais próximos* de um número L: a arbitrariedade do $\varepsilon > 0$ na definição expressa que a proximidade exigida com respeito ao ponto L pode ser feita tão boa quanto desejado, pois o índice N existente pela hipótese garante que, para todos os termos x_n *seguintes*, a *distância* entre x_n e L estará dentro do escopo ε estabelecido. Note que o número N *depende* do ε.

Exemplo 4.2.6. A sequência $\left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$: de fato, ocorre $\frac{1}{2^n} \to 0$. Isto pode ser verificado observando-se que o subconjunto $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado em $\mathbb{R}$, o que segue pois $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{R}$ (por $\mathbb{R}$ ser arquimediano) e $2^n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < 2^N$. Como $n \geq N$ implica em $2^n \geq 2^N$, resulta que

$$\left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$, mostrando a convergência desejada. ▲

Exemplo 4.2.7. A sequência $\langle (-1)^n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente em $\mathbb{R}$. Dado $r \in \mathbb{R}$, é fácil encontrar algum $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $n > N$ com $|(-1)^n - r| \geq \varepsilon$, justamente a negação do que seria $(-1)^n \to r$. ▲

Leitores que já passaram por Cálculo I, pelo menos, devem achar a definição de convergência de sequências bastante parecida com a definição de limite de função. Em vista do que virá pela frente, convém relembrar tais definições.

Definição 4.2.8. Dado um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, diz-se que um ponto $p \in \mathbb{R}$ é **ponto de acumulação** de X se para todo $r > 0$ existir $x \in X$ com $x \neq p$ e $|x - p| < r$. ¶

Exemplo 4.2.9. Seja $(0, 2) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$. Note que tanto 0 quanto 1 são pontos de acumulação do conjunto $X := (0, 2) \cup \{5\}$, enquanto 5 não é ponto de acumulação de X, posto que para $\varepsilon := 2$ não existe ponto $x \in X$ com $x \neq 5$ satisfazendo $|x - 5| < 2$. Note ainda que $0 \notin X$, enquanto $1 \in X$. ▲

Definição 4.2.10 (Limite de função, em Cálculo I)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X, que pode ou não pertencer ao conjunto X. Diz-se que o **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** p é $L \in \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - p| < \delta$. ¶

Intuitivamente, os pontos da forma $f(x)$ se tornam *cada vez mais próximos* de um número L à medida em que x se torna *cada vez mais próximo* de p: a arbitrariedade do $\varepsilon > 0$ na definição expressa que a proximidade exigida com respeito ao ponto L pode ser feita tão boa quanto desejado, pois o *raio* $\delta > 0$ existente pela hipótese garante que a *distância* entre $f(x)$ e L estará dentro do escopo ε estabelecido desde que a *distância* entre x e p seja menor do que δ. Note que o número $\delta > 0$ *depende* do ε.

Bons cursos de Cálculo I costumam frisar que a exigência sobre p ser ponto de acumulação do domínio da função é feita a fim de garantir a unicidade do limite da função, caso exista, no seguinte sentido.

Observação 4.2.11. A menção ao Exercício 1.31 não precisa ser feita, explicitamente, em toda demonstração desse tipo. Desta vez, destacou-se o resultado apenas por questões pedagógicas. △

Definição 4.2.12. É por conta de tal unicidade que fica *bem definida* a clássica notação para *o* único número L (caso exista) satisfazendo a condição de ser limite de f quando x tende a p: $L := \lim\limits_{x \to p} f(x)$. ¶

Parece natural supor que um resultado *análogo* se verifique para sequências convergentes. De fato:

Definição 4.2.13. Em particular, fica bem definida a notação

$$L := \lim_{n \to \infty} x_n$$

para indicar *o* limite L, em $\mathbb{R}$, de uma sequência $\langle x_n \rangle_n$, caso tal limite exista. ¶

Deixando as recordações e traumas de lado, o *ponto* a se chamar a atenção aqui é: por que as demonstrações das Proposições 3.0.0 e 3.0.1 são tão parecidas e ao mesmo tempo tão diferentes?

(i) Em $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$, conforme $n \in \mathbb{N}$ se tornar *maior*, *menor será* o número $|x_n - L|$;

(ii) Em $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, conforme $|x - p|$ se tornar *menor*, *menor será* o número $|f(x) - L|$.

Como o leitor pode perceber após uma breve reflexão, a diferença qualitativa entre as duas interpretações ocorre no comportamento dos elementos do domínio: enquanto em sequências buscam-se números naturais cada vez *maiores*, em funções buscam-se pontos com distâncias cada vez *menores*. Ocorre que é possível conciliá-las, observando que, na verdade, quanto *menor* o número $|x-p|$, *maior* será a proximidade entre x e p. Moralmente, é como se ∞ e p fizessem o papel de *direcionar* ou *dirigir* os elementos de $\mathbb{N}$ e $\mathrm{dom}\,(f)$, respectivamente.

Observação 4.2.14. O leitor com alguma experiência em Análise pode pensar que a semelhança entre as duas definições se deve ao

Teorema 4.2.15. *Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Para $L \in \mathbb{R}$ qualquer, são equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$;

(ii) *toda sequência $\langle x_n\rangle_n \in X^{\mathbb{N}}$ com $x_n \to p$ é tal que $f(x_n) \to L$.*

Exercício 4.9. Demonstre o teorema acima, mas só se estiver com pressa: em breve ele será provado num contexto um pouco mais geral. ■

Porém, em vez de explicitar as semelhanças entre “$\lim\limits_{x\to p}$” e “$\lim\limits_{n\to\infty}$”, o teorema acima costuma ser usado como justificativa para *reduzir* o estudo de limites de funções ao estudo de limites de sequências. Se, por um lado, esta postura é *legítima*[9] e tecnicamente eficaz, por outro ela desestimula indagações sobre a heurística das definições. O mecanismo que usaremos a seguir não sofre desta desvantagem. △

é claro que toda sequência real é um caso particular de *net*[10]. Analogamente, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função e $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X, então f induz uma *net* sobre o conjunto dirigido X_p do Exemplo 3.0.15, fazendo-se $\langle f(x)\rangle_{x\in X_p}$. A coisa não para por aí.

Exemplo 4.2.16 (Somas de Cauchy como *nets*)**.** Fixada uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição de Cauchy $\mathcal{P} := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle \in \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]$, define-se o número

$$\sum_{\mathcal{P}} f := \sum_{i<n} f(a_i)(a_{i+1}-a_i),$$

chamado de **soma de Cauchy**[11] de f sobre a partição $\mathcal{P}$. Como $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]$ pode ser dirigido tanto por $\sqsubseteq$ quanto por $\preceq$, faz sentido considerar a *net* $\sum f\colon \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{P} \mapsto \sum_{\mathcal{P}} f$, explicitamente, a função que associa cada partição de Cauchy de $[a,b]$ à sua soma de Cauchy. ▲

Por se tratar de um texto destinado a Análise na Reta, convém destacar uma definição de convergência de *nets* que se aplique mais especificamente aos principais tipos de limite que investigaremos.

[9]Secretamente, o teorema mostra que a *topologia de* $\mathbb{R}$ é *sequencial*, no sentido de que é capturada completamente pela convergência de sequências.

[10]Mas não vale a recíproca: como regra de ouro, a expressão “$\langle x_n\rangle_n$ é uma sequência” se reserva para *nets* cujo conjunto dirigido $\mathbb{D}$ é $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ ou, *a posteriori*, um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ com a ordem usual (vide as discussões futuras sobre *subsequências*).

[11]As *somas de Riemann*, que aparecerão em breve, são diferentes.

Definição 4.2.17. Fixadas uma *net* real $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ e um *ponto* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, diz-se que $\langle x_d \rangle_d$ **converge** para λ, o que se abrevia com a notação $x_d \to \lambda$, se a seguinte condição for satisfeita: para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in I$ para todo $d \geq D$. Em tais situações, a *net* $\langle x_d \rangle$ será dita **convergente**:

(i) **em** $\mathbb{R}$, se $\lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) **para** $+\infty$, se $\lambda := +\infty$

(iii) **para** $-\infty$, se $\lambda := -\infty$. ¶

Explicitamente (e após alguma reflexão):

(i) $x_d \to \lambda \in \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - x| < \varepsilon$ sempre que $d \geq D$, já que todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$ contém intervalos da forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$;

(ii) $x_d \to +\infty$ se para todo $M > 1$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d > M$ sempre que $d \geq D$, já que todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $+\infty \in I$ contém intervalos (fundamentais) da forma $(M, +\infty]$;

(iii) $x_d \to -\infty$ se para todo $M < 1$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d < M$ sempre que $d \geq D$, já que todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $-\infty \in I$ contém intervalos (fundamentais) da forma $[-\infty, M)$.

Exercício 4.10. Mostre que se X é um espaço topológico de Hausdorff, então qualquer $Y \subseteq X$ também é de Hausdorff com a topologia de subespaço. ■

Corolário 4.2.18. *Sejam X um espaço topológico e $\langle x_d \rangle_d$ uma* net *em X. Se $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ou X é metrizável, então existe, no máximo, um $x \in X$ com $x_d \to x$.*

Demonstração. Em vista do teorema e do exercício anteriores, isto consiste em mostrar que as topologias de $\overline{\mathbb{R}}$ e de espaços métricos são de Hausdorff. Para o caso métrico, basta notar que se $x \neq y$ e d é a métrica de X, então $B_d(x, r)$ e $B_d(y, r)$ são abertos disjuntos com $x \in B_d(x, r)$ e $y \in B_d(y, r)$, onde $d(x, y) = 2r > 0$.

Para a reta estendida: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, basta fazer $I := (\alpha - r, \alpha + r)$ e $J := (\beta - r, \beta + r)$, onde $2r = |\alpha - \beta|$. Se $\alpha := -\infty$ e $\beta := +\infty$, basta fazer $I := [-\infty, 0)$ e $J := (0, +\infty]$. Os demais casos são análogos e ficam a cargo do leitor. □

Exercício 4.11. Reflita sobre as semelhanças entre a demonstração anterior e as provas para as Proposições 3.0.0 e 3.0.1. ■

Os próximos exemplos enfatizam os casos particulares que terão maior atenção ao longo do texto.

Exemplo 4.2.19 (Limites de sequências, revisitados)**.** Pela definição da topologia de $\mathbb{R}$, uma *net* real $\langle x_d \rangle_{d\in\mathbb{D}}$ converge para $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $D \in \mathbb{D}$ com $|x_d - x| < \varepsilon$ para todo $d \geq D$, i.e., com $x_d \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Note que no caso em que o conjunto dirigido é $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, o critério acima se torna, efetivamente, a Definição 4.2.5 de limite de uma sequência real. Analogamente, uma sequência real $\langle x_n \rangle_n$ converge para $+\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $x_n > M$ sempre que $n > N$, que por sua vez é a definição para $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ em qualquer livro de Análise. O mesmo vale para o caso do ponto $-\infty$, *mutatis mutandis*. ▲

Observação 4.2.20 (Convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ vs. divergência)**.** Adiante, veremos que a sequência $\langle 2^n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $2^n \to +\infty$, como era de se esperar, já que 2^n se torna cada vez maior à medida em que n aumenta. No entanto, a depender do autor, é comum dizer que a sequência $\langle 2^n \rangle_n$ não tem limite, embora exista uma *tendência de comportamento* que permite escrever algo como "$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$". Parece incongruente, não?

Definição 4.2.21. Uma *net* $\langle x_d \rangle_d$ em $\mathbb{R}$ é dita **limitada** se sua *imagem* $\{x_d : d \in \mathbb{D}\}$ for limitada[12]. A definição de *nets* **ilimitadas** (inferiormente e superiormente) é análoga. ¶

Exercício 4.12. Mostre que se $\langle x_n \rangle_n$ é uma sequência convergente em $\mathbb{R}$, então $\langle x_n \rangle_n$ é limitada. ■

As sequências $\langle 2^n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ e $\langle (1 + (-1)^n)2^{n-1} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ são ambas ilimitadas e, portanto, não podem convergir *em* $\mathbb{R}$. Contudo, o comportamento da primeira é bem diferente do comportamento da segunda: enquanto $\langle 2^n \rangle_n$ é uma sequência estritamente crescente, os termos da segunda se anulam em todos os índices ímpares.

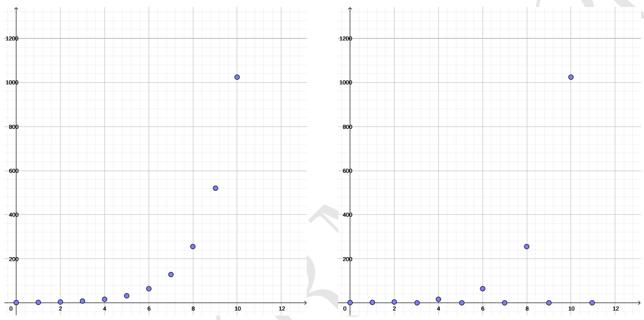


Figura 4.0: Quando a convergência fala mais alto que a gramática.

Assim, não parece razoável classificar as duas sequências como *divergentes*, já que uma delas claramente se torna arbitrariamente próxima de um ponto: não em $\mathbb{R}$, mas em $\overline{\mathbb{R}}$. Ocorre que textos introdutórios costumam colapsar a *noção intuitiva* de reta real com a *própria* reta real, o que torna *ontologicamente inaceitável* tratar de coisas como a reta estendida $[-\infty, +\infty]$. Logo, para que um limite *exista*, ele tem que existir enquanto objeto palpável da reta real, ou seja, deve pertencer ao conjunto $\mathbb{R}$. A diferença da presente abordagem é a falta de comprometimento religioso: definiu-se o que significa ser um limite em espaços topológicos, que por definição são entes abstratos e, nesse sentido, $\mathbb{R}$ é tão legítimo quanto $\overline{\mathbb{R}}$.

É claro que, de um ponto de vista conciliatório, pode-se dizer que uma *net* $\langle x_d \rangle_d$ num espaço topológico X é **divergente** se não existe $x \in X$ com $x_d \to x$. Com tal terminologia, faz sentido dizer que $\langle 2^n \rangle_n$ é divergente em $\mathbb{R}$ e convergente em $\overline{\mathbb{R}}$. Porém, de um ponto de vista prático, parece mais razoável escrever "... converge em X" para enfatizar que o limite sob escrutínio pertence a (seja lá o que for) X, enquanto "... *diverge*" indica um comportamento efetivamente não-convergente/oscilatório que não pode ser corrigido pela mera adição de um ponto no infinito. O leitor, evidentemente, pode discordar... mas a que custo? △

[12] No sentido de ordem: i.e., deve ser limitado inferiormente e superiormente. Não confunda "ser limitado" com "ter limite": a *limitação* no sentido de ordem remete ao inglês *bounded*, que indica o tipo de limitação associado a *confinamento*, enquanto os *limites* de *nets* indicam *convergência*.

Exemplo 4.2.22 (Limites do Cálculo I, revisitados)**.** Como já se mencionou nesta seção, sempre que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função com $p \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de X, induz-se uma *net* $\langle f(x)\rangle_{x \in X_p}$ tomando-se X_p como no Exemplo 3.0.15. Tem-se então a seguinte

Proposição 4.2.23. *Nas condições acima, para $L \in \mathbb{R}$, são equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ *(definição do Cálculo I);*

(ii) $f(x) \to L$*, i.e., a* net $\langle f(x)\rangle_{x \in X_p}$ *converge para* L*.*

Demonstração. □

Exercício 4.13. Para f e p como acima, a definição clássica para $\lim\limits_{x \to p} f(x) = +\infty$ é: para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - p| < \delta$, então $f(x) > M$. Nesse sentido, mostre que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = +\infty$ se, e somente se, a *net* $\langle f(x)\rangle_{x \in X_p}$ converge para $+\infty$. Faça o mesmo para o caso de $-\infty$, *mutatis mutandis.* ■

De modo análogo, outros limites do Cálculo I podem ser reinterpretados como limites de *nets adequadas*, como o leitor pode verificar no próximo exercício. ▲

Exercício 4.14. Use *nets* para dar sentido a expressões do tipo $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x)$ para funções reais definidas em subconjuntos ilimitados (superior e inferiormente) de $\mathbb{R}$. ■

Exemplo 4.2.24 (Integral de Cauchy[13])**.** Uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é **Cauchy-integrável** se a *net* $\sum f\colon \langle \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a, b], \preceq\rangle \to \mathbb{R}$ definida no Exemplo 4.2.16 *convergir* para um número $L \in \mathbb{R}$. Explicitamente: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\sum_{\mathcal{P}} f - L| < \varepsilon$ sempre que $\mathcal{P}$ é uma partição com $\|\mathcal{P}\| < \delta$.

Nos próximos capítulos, munidos de *nets de Cauchy* e *continuidade uniforme*, veremos que toda função contínua da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$ é Cauchy-integrável. No entanto, a fim de obter uma noção de *integrabilidade* adequada para funções descontínuas, as somas de Cauchy serão substituídas pelas *somas de Riemann*: a diferença fundamental é que na segunda, em vez de somar parcelas da forma $f(a_i)(a_{i+1} - a_i)$, somam-se parcelas da forma $f(t_i)(a_{i+1} - a_i)$, onde t_i é algum ponto do subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$. ▲

Observação 4.2.25 (Opcional: vale a volta)**.** Se f não é contínua em x, então existe um aberto $V \subseteq Y$ com $f(x) \in V$, $x \in f^{-1}[V]$ e tal que não existe aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Equivalentemente, para cada aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ pode-se *escolher* $x_U \in U$ com $f(x_U) \notin V$. Logo, ao se considerar o conjunto $\mathbb{D} := \{U \subseteq X : U$ é aberto e $x \in U\}$ dirigido pela relação de inclusão inversa, obtém-se uma *net* $\langle x_U\rangle_{U \in \mathbb{D}}$ com $x_U \to x$ e $f(x_U) \not\to f(x)$: o aberto V é, precisamente, a testemunha de que a última convergência não ocorre. △

O leitor incomodado com a aparente abstração do teorema anterior deve se alegrar com sua instância métrica, onde *nets* podem ser trocadas por sequências ou, para os mais saudosistas, por εpsilons e δeltas.

Teorema 4.2.26. *Sejam $\langle X, \rho\rangle$ e $\langle Y, \sigma\rangle$ espaços métricos. Para uma função $f\colon X \to Y$ e um ponto $x \in X$, são equivalentes:*

(i) f é contínua em x;

[13]Trata-se de um caso particular, mais restritivo, das *integrais de Riemann*.

(*ii*) *se* $\langle x_d \rangle_d$ *é uma* net *em* X *com* $x_d \to x$, *então* $\lim_d f(x_d) = f(x)$;

(*iii*) *se* $\langle x_n \rangle_n$ *é sequência em* X *com* $x_n \to x$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$;

(*iv*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in X,\ \rho(x, x') < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Demonstração. A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) é uma instância do último teorema, enquanto (ii) $\Rightarrow$ (iii) é imediato. Para (iii) $\Rightarrow$ (iv), é mais fácil proceder pela contrapositiva: se $\varepsilon > 0$ é uma testemunha da negação da condição (iv), então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ com $\rho(x, x_n) < \dfrac{1}{2^n}$ e $\sigma(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$, donde não é difícil perceber que $x_n \to x$ enquanto $f(x_n) \not\to f(x)$. Por fim, se vale (iv) e $V \subseteq Y$ é um aberto com $f(x) \in V$, então existe $\varepsilon > 0$ com $B := B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subseteq V$, para o qual a hipótese dá um $\delta > 0$ com $f(x') \in B$ para todo $x' \in U := B_\rho(x, \delta)$, i.e., f é contínua em x. □

Exercício 4.15. Enuncie e demonstre as versões globais dos teoremas acima, i.e., para quando $f\colon X \to Y$ é contínua em todos os pontos de X. ■

Observação 4.2.27 (Opcional: continuidade disfarçada)**.** Na verdade, os resultados acima são instâncias bastante particulares do pouco que já se discutiu acerca de continuidade. Por exemplo, o Teorema 3.1.37 é uma consequência da Proposição 2.1.17, sobre a composta de funções contínuas! Por sua vez, o último lema é apenas uma reencarnação da caracterização das funções contínuas da forma $Z \to X \times Y$ (item (ii) do Teorema 2.1.19). Em ambos os casos, tudo depende de atribuir uma topologia adequada ao conjunto $\mathbb{D}^\# := \mathbb{D} \cup \{\infty\}$, segundo a qual ocorre $x_d \to x$ se, e somente se, a função $\mathbb{D}^\# \to X$ que faz $d \mapsto x_d$ e $\infty \mapsto x$ é contínua. O leitor encontrará os detalhes no Exercício 3.48. △

Exemplo 4.2.28. No caso de sequências, o item (i) da última proposição garante que se $y_n \to L \in \mathbb{R}$ com $L \neq 0$, então o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0\}$ é infinito: como existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \neq 0$ para todo $n \geq N$, resulta que $\{n \in \mathbb{N} : y_n = 0\} \subseteq \{m \in \mathbb{N} : m < N\}$. Analogamente, a ocorrência de $\lim\limits_{x\to p} f(x) \neq 0$ garante um $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ sempre que $x \in X$ satisfaz $|x - p| < \delta$. ▲

Proposição 4.2.29. *Sejam* $\langle x_d \rangle_d$ *e* $\langle y_d \rangle_d$ nets *reais, com* $x_d \to \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$.

(*i*) *Se* $\alpha := +\infty$ *e* $\{y_d : d \in \mathbb{D}\}$ *é limitado inferiormente, então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} (x_d + y_d) = +\infty$.

(*ii*) *Se* $\alpha := -\infty$ *e* $\{y_d : d \in \mathbb{D}\}$ *é limitado superiormente, então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} (x_d + y_d) = -\infty$.

(*iii*) *Se* $\alpha := +\infty$ *e existem* $c > 0$ *e* $D \in \mathbb{D}$ *tais que* $y_d > c$ *para todo* $d \geq D$, *então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} (x_d \cdot y_d) = +\infty$.

(*iv*) *Se* $\alpha := +\infty$ *e existem* $c > 0$ *e* $D \in \mathbb{D}$ *tais que* $y_d < -c$ *para todo* $d \geq D$, *então* $\lim_{d\in\mathbb{D}} (x_d \cdot y_d) = -\infty$.

Por fim, a afirmação feita no último corolário segue pois $\{\beta^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado superiormente sempre que $\beta > 1$. Uma instância dessa afirmação já foi verificada no Exemplo 4.2.6. No caso geral, $\delta := \beta - 1 > 0$, e para $n \geq 1$ deve-se ter

$$\beta^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta,$$

onde a desigualdade acima segue por indução[14]. Daí, pelo Princípio da Explosão (Exercício 3.24), segue que $\beta^n \to +\infty$, já que $1 + n\delta \to 1 + \delta \cdot (+\infty) = +\infty$.

[14] Usualmente xingada de *Desigualdade de Bernoulli* (Exercício 1.36).

Analogamente, *se* $b > 1$, *então* $\lim_{n\to\infty} b^n = +\infty$: segue pois $a := \dfrac{1}{b}$ é tal que $0 < a < 1$ e, por conseguinte, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, donde segue que $b^n \to +\infty$ já que $b^n = \dfrac{1}{a^n}$ e $a^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (item (i) da Proposição 3.32).

Exercício 4.16. Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função Cauchy-integrável, então $\sum_{\mathcal{P}} f(t) \to \oint_a^b f\,\mathrm{d}t$, com $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[[a,b]]$ dirigido pela ordem da inclusão. ■

Exercício 4.17. Vale a recíproca do exercício anterior? Observação: não faço ideia. ■

Capítulo 5

Topologia da Reta

A origem da definição abstrata de continuidade revela uma intenção: abstrair em linguagem formal e sem as muletas da intuição *gráfica* o significado de "desenhar uma linha sem tirar o lápis do papel". Porém, o inferno está cheio de boas intenções ou, em outras palavras: por que a definição de continuidade modela o que se espera?

Como $\mathbb{R}$ é *nosso* modelo fundamental do *contínuo*, um modo de responder à pergunta anterior consiste em *analisar* funções contínuas da forma $X \to \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$, pois tais funções abstraem justamente os gráficos traçados no plano. Se tais funções se comportarem como os objetos empíricos que as motivaram, teremos indicativos de que a definição é razoável, no sentido de que parece modelar aquilo que se espera.

5.0 Jargões topológicos "básicos"

[arrumar]

Todas as topologias definidas acima são instâncias do seguinte arquétipo:

Definição 5.0.0. Seja X um conjunto. Uma família $\mathcal{B} \neq \emptyset$ de subconjuntos de X é chamada de **base para *alguma* topologia** em X se

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$, i.e., para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$, e

(ii) para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in X$, se $x \in A \cap B$, então existe $C \in \mathcal{B}$ com $x \in C$ e $C \subseteq A \cap B$. ¶

A nomenclatura acima se justifica pela próxima

Proposição 5.0.1. *Se $\mathcal{B}$ é base para alguma topologia em X, então existe uma única topologia $\mathcal{T}$ em X tal que $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ com $A = \bigcup \mathcal{C}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{B}$ tem as propriedades enunciadas, então a família

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

é uma topologia. De fato:

✓ a condição $\bigcup \mathcal{B} = X$ resulta em $X \in \mathcal{T}$ e, tomando-se $\mathcal{G} = \emptyset$, obtém-se $\emptyset \in \mathcal{T}$;

✓ dados $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$ e $x \in (\bigcup \mathcal{G}) \cap (\bigcup \mathcal{H}) := V$, existem $A_x \in \mathcal{G}, B_x \in \mathcal{H}$ tais que $x \in A_x \cap B_x$, donde por hipótese se obtém $C_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C_x \subseteq A_x \cap B_x$; como isso vale para todo $x \in V$, resulta

$$\left(\bigcup \mathcal{G}\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{H}\right) \subseteq \bigcup_{x \in V} C_x \subseteq \bigcup_{x \in V} (A_x \cap B_x) \subseteq \left(\bigcup \mathcal{G}\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{H}\right),$$

donde segue que $(\bigcup \mathcal{G}) \cap (\bigcup \mathcal{H}) \in \mathcal{T}$;

✓ finalmente, se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, então $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ por definição. □

Exemplo 5.0.2. Todas as topologias anteriores foram definidas por bases:

(i) no caso da topologia usual de $\mathbb{R}$, pode-se tomar $\mathcal{B}$ como sendo a família dos intervalos abertos (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) no caso da topologia de um espaço métrico $\langle X, d\rangle$, pode-se tomar $\mathcal{B}$ como sendo a família das bolas abertas $B_d(x, r)$, com $x \in X$ e $r > 0$;

(iii) em particular, a família dos subconjuntos da forma $(a, b) \times (c, d)$ constitui uma base para a topologia usual do plano

(iv) no caso da topologia de uma ordem total $\langle \mathbb{T}, \leq\rangle$, pode-se tomar $\mathcal{B}$ como sendo a família dos intervalos abertos da forma $(\leftarrow, b)$, $(a, \rightarrow)$ e (a, b), com $a, b \in \mathbb{T}$.

Para verificar as definições acima, não é preciso checar as cláusulas da Definição 5.0.0, mas algo mais simples:

Exercício 5.0. Sejam $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ um espaço topológico e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ uma família de abertos. Mostre que se para todo $A \in \mathcal{T}$ existir $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ com $A = \bigcup \mathcal{C}$, então $\mathcal{B}$ é base para *alguma* topologia. Observe que tal topologia é, necessariamente, $\mathcal{T}$. ■

Cabe ainda um alerta: diferente das *homônimas* bases no contexto da Álgebra Linear, um espaço topológico admite bases com cardinalidades distintas: basta ver, por exemplo, que $\mathcal{C} := \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q}\}$ é base enumerável para a topologia usual de $\mathbb{R}$, enquanto a base $\mathcal{B}$ sugerida no item (i) acima tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. ▲

Em situações como as do exercício anterior, diz-se que $\mathcal{B}$ é base *da* topologia $\mathcal{T}$ ou mesmo uma *base do espaço* X, enquanto os membros de $\mathcal{B}$ são chamados de **abertos básicos**. Bases constituem o meio mais comum de traduzir as definições topológicas gerais para os contextos mundanos de $\mathbb{R}$ e afins.

Proposição 5.0.3. *Sejam X um espaço topológico, $S \subseteq X$ um subconjunto e $p \in X$ um ponto. Se $\mathcal{B}$ é uma base do espaço X, então p é ponto de acumulação de S se, e somente se, para todo aberto básico $B \in \mathcal{B}$ ocorrer $B \cap (S \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Como todo aberto básico é um aberto, uma direção é automática. Para a outra, fixando-se um aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B$ e $B \subseteq V$. Logo, existe $y \in B \cap S$ com $y \neq p$, acarretando $y \in V$ e, consequentemente, $V \cap (S \setminus \{p\}) \neq \emptyset$. □

Exercício 5.1. Convença-se de que a Definição 4.2.8 e o Exercício 5.14 são compatíveis com a última definição de ponto de acumulação. ■

Naturalmente, uma *net* $\langle x_d \rangle_d$ num espaço topológico X é uma função $\psi\colon \mathbb{D} \to X$, onde $\mathbb{D}$ é um conjunto dirigido por uma pré-ordem $\leq$ e $\psi(d) := x_d$ para todo d. Com isso dito...

Proposição 5.0.4. *Sejam X um espaço topológico, $\langle x_d \rangle_d$ uma* net *em X e $x \in X$ um ponto. Se $\mathcal{B}$ é uma base do espaço X, então $x_d \to x$ se, e somente se, para todo aberto básico $B \in \mathcal{B}$ existir $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \in B$ para todo $d \geq D$.*

Exercício 5.2. Demonstre a proposição acima. Dica: imite a prova da Proposição 5.0.3, *mutatis mutandis.* ■

Esta breve exposição deve ter ilustrado bem como as diversas noções de convergência em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$ são manifestações dos mesmos fenômenos topológicos. Em breve, o mesmo ocorrerá com as antecipadas noções de continuidade e, mais adiante, com as propriedades de compacidade e conexidade. Porém, mais um pouco de terminologia deve ser introduzida.

Definição 5.0.5. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $F \subseteq X$ é chamado de **fechado** se seu complementar $X \setminus F$ é um aberto de X. ¶

Observação 5.0.6 (IMPORTANTE: fechados $\neq$ intervalos fechados)**.** Numa ordem total $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$, os intervalos da forma

$$(\leftarrow, b] := \{x \in \mathbb{T} : x \leq b\}, \quad [a, \to) := \{x \in \mathbb{T} : a \leq x\} \quad \text{e} \quad [a, b] := [a, \to) \cap (\leftarrow, b]$$

são chamados de **intervalos fechados**. Coincidentemente, e não por conta da gramática, intervalos fechados são subconjuntos fechados com respeito à topologia da ordem: basta notar, por exemplo, que $A := (\leftarrow, a) \cup (b, \to)$ é um aberto de $\mathbb{T}$, por ser reunião de abertos, com $[a, b] = \mathbb{T} \setminus A$. No entanto, nem todo fechado de $\mathbb{T}$ é um intervalo fechado: basta observar que em $\mathbb{R}$, por exemplo, o subconjunto $\{0, 1\}$ é fechado. △

Observação 5.0.7 (IMPORTANTE: conjuntos não são portas)**.** Nesta altura da vida, o leitor provavelmente já percebeu que as terminologias técnicas em Matemática não são subordinadas epistemologicamente ao léxico do idioma: conjuntos e grupos não são sinônimos; magmas não queimam; anéis não são joias; corpos não são orgânicos; polinômios separáveis não são peças de lego; sequências monótonas não são tediosas; potências não têm poder, bolas não são redondas, etc[0]. Dito isso: conjuntos não são portas ou, em outras palavras, ser fechado não é o contrário de ser aberto.

Mais precisamente, o fato de um certo subconjunto G de um espaço topológico X não ser fechado não permite concluir que o mesmo seja aberto, e *vice-versa*: em breve, veremos que o subconjunto $\mathbb{Q}$ não é aberto e nem fechado em $\mathbb{R}$. Mais ainda: nada impede que um subconjunto seja aberto E fechado ao mesmo tempo. De novo: conjuntos não são portas. O leitor deve se atentar às definições atreladas aos termos utilizados e, sempre que possível, tomar cuidado para não ser enganado pela gramática. △

Proposição 5.0.8. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ a família dos subconjuntos fechados de X. Então*

(*i*) *$\emptyset, X \in \mathcal{F}$ ($\emptyset$ e X são fechados);*

[0]Mesmo assim, há quem ainda apele para a *estranheza* do conceito de zero a fim de negar seu *status* como número *natural*, mesmo com todas as vantagens técnicas oriundas em assumí-lo em $\mathbb{N}$: "Ah, mas o zero não é uma ideia natural". No entanto, essas mesmas pessoas não enxergam problema em "$0 \in \mathbb{Z}$", como se fosse *natural* pensar em zero como algo *inteiro*...

(*ii*) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$ (*a reunião de dois fechados é fechada*);

(*iii*) *se* $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ *e* $\mathcal{H} \neq \emptyset$, *então* $\bigcap \mathcal{H} \in \mathcal{F}$ (*a interseção arbitrária de fechados é fechada*).

Exercício 5.3. Demonstre a proposição acima. Dica: use o Lema 0.1.31. ■

Embora seja útil e bem aplicável a diversos contextos, a definição de fechados enquanto complementares de abertos nada parece dizer a respeito dos fechados em si. Apesar de incômoda, esta impressão se remedia facilmente com um pouco de reflexão acerca do comportamento dos subconjuntos abertos.

Definição 5.0.9. Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subconjunto. Diremos que $p \in X$ é um **ponto aderente** a S se todo aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ for tal que $V \cap S \neq \emptyset$. Denotaremos por $\overline{S}$ a coleção de todos os pontos aderentes a S, que será chamado de **fecho (topológico) de** S. ¶

Proposição 5.0.10. *Sejam X um espaço topológico e $S, T \subseteq X$ subconjuntos quaisquer. Então:*

(*i*) $S \subseteq \overline{S}$;

(*ii*) $S \subseteq T \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$;

(*iii*) $\overline{S}$ *é um subconjunto fechado;*

(*iv*) T *é fechado se, e somente se,* $\overline{T} = T$.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) são quase imediatos: para o primeiro, note que todo ponto de S satisfaz a condição para ser xingado de aderente a S, enquanto a inclusão $S \subseteq T$ garante que se p é aderente a S, então p é aderente a T. Tratemos do terceiro item.

Deve-se mostrar que $X \setminus \overline{S}$ é aberto, afinal de contas esta é a única definição de "fechado" até o momento. Ora, se $x \in X \setminus \overline{S}$, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $V \cap S = \emptyset$, uma vez que x não é aderente a S. Note que se $y \in V$, então $y \notin \overline{S}$, pois o próprio V é um aberto de X que contém y e verifica $V \cap F = \emptyset$. Portanto, $x \in V \subseteq X \setminus \overline{S}$. Em vista do lema anterior, segue que $X \setminus \overline{S}$ é aberto.

Enfim, vejamos o item (iv). Por um lado, se T é fechado e $x \notin T$, então $V := X \setminus T$ é um aberto (pois T é fechado por hipótese!) com $x \in V$ e $V \cap T = \emptyset$, o que mostra $X \setminus T \subseteq X \setminus \overline{T}$ ou, equivalentemente, $\overline{T} \subseteq T$. Como a outra inclusão vale em geral (pelo item (i)), a igualdade desejada segue. A recíproca decorre do item anterior. □

Exercício 5.4. Sejam X um espaço topológico, $S \subseteq X$ um subconjunto e $p \in X$ um ponto. Se $\mathcal{B}$ é base do espaço X, então p é ponto aderente a S se, e somente se, para todo aberto básico $B \in \mathcal{B}$ ocorrer $B \cap S \neq \emptyset$. Dica: imite a prova da Proposição 5.0.3. ■

Exemplo 5.0.11. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Segue pois $\mathbb{R}$ é arquimediano: se $V \neq \emptyset$ é um aberto não-vazio, então existe um intervalo aberto não-vazio $(a, b) \subseteq V$ e, pela propriedade arquimediana, $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Em outras palavras, $\mathbb{Q}$ é *denso* em $\mathbb{R}$, no sentido da próxima definição.

Definição 5.0.12. Seja X um espaço topológico. Diz-se que um subconjunto $D \subseteq X$ é **denso** se $\overline{D} = X$. ¶

Exercício 5.5. Mostre que $D \subseteq X$ é denso se, e somente se, $D \cap V \neq \emptyset$ para todo aberto não-vazio $V \subseteq X$. ■

O leitor não deve ter dificuldades para notar que $\mathbb{Q}$ também é denso em $\overline{\mathbb{R}}$. Analogamente, o subconjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com respeito à topologia usual do plano ▲

Em particular, $\mathbb{Q}$ não é fechado. Tampouco $\mathbb{Q}$ é aberto, já que *não existem intervalos abertos contidos* em $\mathbb{Q}$. Esta observação suscita a próxima

Definição 5.0.13. Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subconjunto. Diremos que $p \in X$ é **ponto interior** a S se existir um aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ e $V \subseteq S$. Denotaremos por $\operatorname{int}(S)$ a coleção de todos os pontos interiores a S, que será chamado de **interior** (**topológico**) de S. ¶

Exercício 5.6. Sejam X um espaço topológico e $S, T \subseteq X$ subconjuntos quaisquer.

a) Mostre que $\operatorname{int}(S) \subseteq S$.

b) Mostre que se $S \subseteq T$, então $\operatorname{int}(S) \subseteq \operatorname{int}(T)$.

c) Mostre que $\operatorname{int}(S)$ é um subconjunto aberto.

d) Mostre que S é aberto se, e somente se, $S = \operatorname{int}(S)$. ■

Observação 5.0.14 (IMPORTANTE: interior $\neq$ pertinência)**.** Analogias geométricas e gramaticais costumam levar leitores inexperientes a pensarem que se $x \in S$, então x está no *interior* de S, já que em tais situações $S = \{x, y, \ldots\}$ e daí x está escrito no interior "literal" de S. Porém, aqui a palavra "interior" tem sentido preciso: é o que está expresso na definição anterior. Assim, fica o alerta de que pode ocorrer $x \in S$ e, ainda assim, $x \notin \operatorname{int}(S)$: note, por exemplo, que $0 \in [0, 1)$, mas $0 \notin \operatorname{int}([0, 1))$. △

Todas as descrições dos pontos especiais acima (de acumulação, aderência e interior) são válidas em espaços topológicos quaisquer. Porém, o contexto métrico da Análise Básica em que o presente texto se insere permite caracterizações equivalentes – e, como sugere o escopo desta seção, por meio de sequências convergentes.

Teorema 5.0.15. *Sejam $\langle X, d\rangle$ um espaço métrico, $S \subseteq X$ um subconjunto e $p \in S$ um ponto.*

(*i*) *p é ponto de acumulação de S se, e somente se, existe uma sequência $\langle x_n\rangle_n$ em $S \setminus \{p\}$ com $x_n \to p$.*

(*ii*) *p é ponto aderente a S se, e somente se, existe uma sequência $\langle x_n\rangle_n$ em S com $x_n \to p$.*

(*iii*) *p é ponto interior de S se, e somente se, para toda sequência $\langle x_n\rangle_n$ em X com $x_n \to p$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $x_n \in S$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração. Seja $\langle r_n\rangle_n$ uma sequência decrescente de números reais estritamente positivos com $r_n \to 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $B_n := B_d(p, r_n)$. Note que para todo aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $p \in B_d(p, r_n) \subseteq V$. Procedamos então com a verificação dos itens.

(i) Se p é ponto de acumulação de S, então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_d(p, r_n) \setminus \{p\}$, donde a condição satisfeita pela sequências de bolas $\langle B_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ permite mostrar que $x_n \to p$. A recíproca é clara: se $V \subseteq X$ é aberto com $p \in V$, então os termos da sequência testemunham que $V \cap (S \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

(ii) Análogo ao anterior[1].

(iii) Se p é ponto interior de S, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ e $V \subseteq S$, donde a direção $\Rightarrow$ segue automática. Para a recíproca, note que se p não é ponto interior de S, então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_n \setminus S$, mostrando que a sequência $\langle x_n \rangle_n$ é tal que $x_n \to p$ (por quê?) e, mesmo assim, não há $N \in \mathbb{N}$ com $x_n \in S$. $\square$

Observação 5.0.16. O leitor não deve ter dificuldades em notar como os argumentos acima se traduzem na reta real. O que talvez não salte aos olhos seja o quão fundamental foi a sequência de abertos $\langle B_n \rangle_n$: com efeito, a métrica de $\langle X, d \rangle$ foi utilizada tão somente para *construir* os abertos B_n's, que daí bastaram para *resolver* o problema. Nem todo espaço topológico tem abertos tão bem comportados ao redor de seus pontos – mas quando têm, o argumento acima se aplica sem alterações[2]. $\triangle$

Exercício 5.7. Sejam X um espaço topológico e $p \in X$ um ponto.

a) Suponha que exista uma sequência $\subseteq$-decrescente $\langle B_n \rangle_n$ de abertos de X tal que $p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ e para todo aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ exista $N \in \mathbb{N}$ com $B_N \subseteq V$. Mostre que em tais condições, valem as equivalências do último teorema.

b) Mostre que $\overline{\mathbb{R}}$ satisfaz a hipótese do item anterior para todo $p \in \overline{\mathbb{R}}$.

c) (*For fun*) Seja $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$ um corpo ordenado. Mostre que $\mathbb{K}$ é arquimediano se, e somente se, $0_{\mathbb{K}}$ tem uma sequência $\langle B_n \rangle_n$ de intervalos abertos satisfazendo a hipótese do primeiro item, com $p := 0_{\mathbb{K}}$. $\blacksquare$

Exemplo 5.0.17 (Abertos de um intervalo)**.** Considere $S := [0, 2]$. Embora o subconjunto $[0, 1)$ não seja um aberto <u>da reta</u>, $[0, 1)$ é um aberto de S, pois $[0, 1) = (-1, 1) \cap S$. Portanto, a propriedade de "ser aberto em" depende do subespaço considerado. $\blacktriangle$

Exemplo 5.0.18 (Compatibilidade)**.** A topologia usual de $\mathbb{R}$ é a topologia de $\mathbb{R}$ enquanto subespaço de $\overline{\mathbb{R}}$ (por quê?!). Porém, *poderia* não ser o caso.

Se $\langle X, d \rangle$ é um espaço métrico e $S \subseteq X$ é um subconjunto qualquer, então a restrição

$$\begin{aligned} d' := d|_{S \times S} \colon S \times S &\to \mathbb{R} \\ \langle x, y \rangle &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

é uma métrica em S, cuja topologia induzida coincide com a topologia de subespaço de S *herdada* de X: de fato, basta notar que, neste caso, verifica-se

$$B_d(x, r) \cap S = B_{d'}(x, r)$$

para quaisquer $x \in S$ e $r > 0$.

Por outro lado, se $\langle T, \leq \rangle$ é uma ordem total e $S \subseteq \mathbb{T}$ é um subconjunto qualquer, então a topologia em S induzida pela (restrição) da ordem $\leq$ pode não coincidir com a topologia de S enquanto subespaço topológico de $\mathbb{T}$. Por exemplo, para $\mathbb{T} := \mathbb{R}$ e $S := [0, 2] \cup (3, 4]$, o subconjunto $(1, 2]$ é aberto em S (com a topologia de subespaço), porém, o mesmo subconjunto não é aberto em S com a topologia da ordem, posto que qualquer intervalo aberto $I \subseteq S$ com $2 \in I$ deve conter pontos $t \in S$ com $t > 3$: como S *não conhece* os pontos em $(2, 3]$, é como se *depois* do ponto 2 viessem *imediatamente* os pontos maiores do que 3.

[1] A única diferença entre pontos de acumulação e pontos aderentes é que os últimos podem servir como testemunhas de sua condição, enquanto os primeiros necessariamente devem estar *próximos* de pontos distintos de si mesmos (Exercício 5.28).

[2] No caso de espaços topológicos quaisquer, não se podem *caracterizar* pontos de acumulação e afins por meio de sequências convergentes – é preciso substituí-las por *nets*.

Porém, em muitos casos típicos, a distinção inexiste, como ilustra o próximo

Exercício 5.8. Sejam $\mathbb{T}$ uma ordem total e $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{T}$ um intervalo. Mostre que a topologia de $\mathbb{I}$ como subespaço de $\mathbb{T}$ coincide com sua topologia da ordem. ■

Por via das dúvidas, convencionemos o seguinte: subconjuntos de ordens totais serão dotados da topologia de subespaço, a menos de menção contrária explícita. ▲

Exemplo 5.0.19 (Subespaços discretos)**.** Um ponto $p \in X$ de um espaço topológico X é chamado de **isolado** se $\{p\}$ é aberto em X, e X é dito **discreto** se todos os seus pontos são isolados.

Em contextos topológicos mais elementares, como o atual, espaços discretos costumam emergir como subespaços de espaços maiores que não têm pontos isolados. Por exemplo, tanto $\mathbb{Z}$ quanto $\mathbb{N}$ são discretos em $\mathbb{R}$: fixado $x \in \mathbb{Z}$, o aberto $V_x := (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$ é tal que $V_x \cap \mathbb{Z} = \{x\}$. Por outro lado, $\mathbb{Q}$ não é discreto, já que todo aberto de $\mathbb{R}$ contém infinitos números racionais. Mais geralmente, vale o seguinte teorema, cuja demonstração será deixada como aquecimento para o leitor interessado. ▲

Teorema 5.0.20. *Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ é discreto e fechado em $\mathbb{R}$ se, e somente se, S não tem pontos de acumulação.*

Exercício 5.9. Demonstre o teorema acima. O resultado vale em espaços topológicos quaisquer? Dica: para a ida, use a identidade $\overline{S} = S \cup S^{\mathrm{d}}$, onde S^{d} denota a família dos pontos de acumulação de S (Exercício 5.29); para a volta, note que um ponto isolado em S não pode ser de acumulação em S. ■

5.0.0 Análise *sem* limites (opcional)

As tradições pedagógicas no ensino da Matemática Abstrata são curiosas: mesmo neste texto, que busca abordar Análise por meio de perspectivas um pouco mais generalistas, foi irresistível tratar da noção de convergência ANTES da noção de continuidade. Por incrível que pareça, este ato de covardia de minha parte teve por objetivo evitar uma ruptura muito agressiva com o cânone da área, que poderia atrapalhar estudantes que utilizassem referências bibliográficas complementares.

Ainda assim, seria desonesto de minha parte não revelar o seguinte segredo: *limites são apenas casos particulares de continuidade.* E isto não é *façon de parler.*

Exemplo 5.0.21. Para $\mathbb{D} := \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{\#}$ consiste do conjunto dos números naturais acrescido de um ponto ∞. Os abertos que *contêm* o ponto ∞ (como elemento) são todos os subconjuntos de $\mathbb{N}^{\#}$ que contêm subconjuntos da forma $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\} \cup \{\infty\}$ para $N \in \mathbb{N}$. ▲

Exemplo 5.0.22. Para $\mathbb{D} := X_p$, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X, pode-se pensar em $\mathbb{D}^{\#} := X \cup \{p\}$. Porém, seus abertos não são os mesmos de $\mathbb{R}$: subconjuntos de $\mathbb{D}^{\#}$ que não contêm p são abertos, enquanto aqueles que o contêm são abertos se, e somente se, contêm intervalos abertos centrados em p (pense a respeito). ▲

Com isso em mente, tem-se a seguinte

Exemplo 5.0.23. Nas condições do exemplo anterior, para uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ ocorre $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, com $L \in \mathbb{R}$, se e somente se, for contínua em p a função $\varphi\colon X \cup \{p\} \to \mathbb{R}$ que faz $\varphi(x) := f(x)$ para $x \in X \setminus \{p\}$ e $\varphi(p) := L$. Em particular, pelo Teorema 4.2.26, segue que são equivalentes as condições

(i) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, e

(ii) toda sequência $\langle x_n \rangle_n \in X^{\mathbb{N}}$ com $x_n \to p$ é tal que $f(x_n) \to L$,

tal qual se prometeu no distante Teorema 4.2.15. ▲

Isso justifica a ausência de capítulos especiais sobre *limites* em livros mais avançados de Topologia Geral, ao mesmo tempo em que sugere a possibilidade de extirpar tais capítulos daqui para frente: afinal de contas, a continuidade é a propriedade fundamental em contextos topológicos.

5.1 Compacidade e o Teorema de Weierstrass

O primeiro fenômeno que analisaremos se refere à existência de *máximos* e *mínimos*, no sentido da próxima

Definição 5.1.0. Sejam X um conjunto qualquer e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função.

(i) Diz-se que $p \in X$ é um **máximo** da função f se $f(p) = \max \operatorname{im}(f)$, i.e., se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in X$.

(ii) Diz-se que $p \in X$ é um **mínimo** da função f se $f(p) = \min \operatorname{im}(f)$, i.e., se $f(p) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. ¶

Agora, fazendo $X := [0, 1]$, por exemplo, consideremos a pergunta: se $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo?

Se pensarmos na função f como um gráfico desenhado numa folha de papel, é fácil perceber que a resposta terá que ser sim: como o traçado deve começar em algum ponto da linha $\{0\} \times \mathbb{R}$ e terminar em algum ponto da linha $\{1\} \times \mathbb{R}$, a *única maneira* de fazer uma função $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ *ilimitada* seria com a ocorrência de um ponto $p \in [0, 1]$ e uma sequência $\langle x_n \rangle_n$ em $[0, 1]$ com $x_n \to p$ e $f(x_n) \to \pm\infty$, o que violaria a condição de continuidade, segundo a qual deve-se ter $f(x_n) \to f(p) \in \mathbb{R}$.

O argumento acima apela para a intuição geométrica de traçados contínuos em folhas de papel. Porém, no contexto abstrato, a existência do ponto p não é óbvia e *precisa* ser demonstrada. O fato de que tal demonstração existe é um dos indicativos de que a definição de continuidade é *boa*[3]. Em vez de fazer isso de modo artesanal, apelaremos para a tecnologia[4].

Definição 5.1.1. Fixado um espaço topológico X, uma família $\mathcal{U}$ de abertos de X é uma **cobertura aberta** para X se ocorrer $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = X$. ¶

[3]Mas não é ótima pois, como veremos, a definição de continuidade ainda dá margem para comportamentos *patológicos*, no sentido de que não são replicáveis no papel. Isso não torna a definição errada ou algo do tipo, mas evidencia que modelos (abstratos) não são a mesma coisa que os objetos modelados.

[4]Amantes de uma vida simples podem consultar o Exercício 5.30.

Exemplo 5.1.2. A família $\mathcal{U} := \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta para $\mathbb{R}$, assim como $\mathcal{V} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b\}$. ▲

Exemplo 5.1.3. A família $\mathcal{U} := \{[0, a) : a \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < a < 1\} \cup \{(b, 1] : b \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < b < 1\}$ é uma cobertura aberta para $[0, 1]$. Note que os elementos de $\mathcal{U}$ são abertos de $[0, 1]$, mas não são abertos de $\mathbb{R}$. ▲

Definição 5.1.4. Um espaço topológico X é **compacto** se toda cobertura aberta tem subconjunto finito que ainda é cobertura aberta para o espaço, o que será abreviado dizendo-se que a cobertura *tem subcobertura finita* ¶

Exemplo 5.1.5. A reta real $\mathbb{R}$ não é compacta. De fato, a cobertura $\mathcal{U}$ indicada no Exemplo 5.1.2 não admite subcobertura finita: de fato, se $n_0, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, então para $n := \max\{n_j : j \leq m\}$ verifica-se

$$\bigcup_{j \leq m} (-n_j, n_j) = (-n, n),$$

de modo que $n + 1 \in \mathbb{R} \setminus (-n, n)$. ▲

A rigor, para um espaço topológico X e um subespaço $Y \subseteq X$, na verificação da (possível) compacidade de Y deve-se tomar uma cobertura arbitrária por abertos de Y a fim de obter uma subcobertura finita. Ora, uma tal cobertura tem por membros subconjuntos abertos em Y, que são da forma $V \cap Y$ com $V \subseteq X$ aberto. Daí, não é difícil perceber que, em tal cenário, a preocupação com essas interseções pode ser ignorada, no sentido do seguinte

Lema 5.1.6. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é compacto se, e somente se, para toda coleção $\mathcal{V}$ de abertos de X com $Y \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ existem $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ tais que $Y \subseteq V_0 \cup \ldots \cup V_n$.*

Exercício 5.10. Prove o lema acima. Dica: se achar demasiado abstrato, faça primeiro para $X := \mathbb{R}$ e perceba que o apego à reta é puramente psicológico. ■

Exemplo 5.1.7. Pode-se mostrar diretamente que intervalos *fechados* e *limitados*, i.e., da forma $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$, são compactos. Embora seja edificante fazer isso pelo menos uma vez na vida, para subespaços de $\mathbb{R}$ isto vale bem mais geralmente. ▲

Teorema 5.1.8 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Para um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes:*

(*i*) *K é compacto;*

(*ii*) *K é fechado e limitado;*

(*iii*) *todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K;*

(*iv*) *toda sequência de K tem subsequência que converge em K.*

Demonstração. Para mostrar que (i) ⇒ (ii), deve-se mostrar que se K é compacto, então

✓ *K é limitado*, o que segue do lema anterior com a coleção $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$, e

✓ *K é fechado*, o que vale em geral[5].

De fato, se $x \notin K$, então para cada $y \in K$ pode-se tomar (intervalos) abertos $A_x, B_x \subseteq \mathbb{R}$ tais que $x \in A_y, y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$ (Lema 4.2.18 se estiver pensando em $\mathbb{R}$). Logo, a família $\{B_y : y \in K\}$ é uma coleção de abertos que cobre K, donde a compacidade permite tomar $y_0, \ldots, y_n \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j \leq n} B_{y_j}$. Daí, não é difícil perceber que $U := \bigcap_{j \leq n} A_{y_j}$ é um aberto com $x \in U$ e $U \subseteq \mathbb{R} \setminus K$, o que garante que $\mathbb{R} \setminus K$ é aberto (Lema 2.1.2).

Para (ii) $\Rightarrow$ (iii), tomemos um subconjunto infinito $A \subseteq K$ e uma sequência *injetiva* $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ em A. Por K ser limitado, segue que $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, donde o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante uma subsequência $\langle x_{n_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para algum $x \in \mathbb{R}$. Como K também é fechado, resulta que tal x deve pertencer a K (Proposição 5.0.10 + item (ii) do Teorema 5.0.15). Finalmente, o modo como a sequência foi tomada garante que x é ponto de acumulação de A (item (i) do Teorema 5.0.15).

Para (iii) $\Rightarrow$ (iv), fixada uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de K, dois casos podem ocorrer:

✓ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ pode ser finito, e daí basta tomar a subsequência constante formada por algum termo que se repete infinitamente;

✓ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ pode ser infinito, e daí a hipótese garante um ponto de acumulação x em K, donde é fácil obter uma subsequência convergente.

O argumento para (iv) $\Rightarrow$ (i) é o mais indireto, e depende de dois passos intermediários.

(a) *Se vale (iv), então toda coleção enumerável $\mathcal{U}$ de abertos de $\mathbb{R}$ com $K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ tem subcobertura finita.*

Com efeito, chamando $\mathcal{U} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ e supondo que tal família não tem *subcobertura finita*, pode-se tomar $x_n \in K \setminus \bigcup_{j \leq n} U_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o que resulta numa sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ que não tem subsequência convergente em K: de fato, se $x \in K$, então $x \in U_j$ para algum j, e daí $x_n \notin U_j$ para todo $n \geq j$.

(b) *Se $S \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{U}$ é uma coleção de abertos de $\mathbb{R}$ com $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, então existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.*

De fato, para cada $x \in S$, pode-se tomar um aberto $U_x \in \mathcal{U}$ e números racionais $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$ com $a_x < b_x$ e

$$x \in (a_x, b_x) \subseteq U_x.$$

Como a família $\mathcal{B} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$ é enumerável[6], resulta que a família $\mathcal{C} := \{(a_x, b_x) : x \in S\}$ também é enumerável, já que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Reescrevendo $\mathcal{C} := \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S$ com $(a_n, b_n) \subseteq U_{x_n}$, e daí não é difícil perceber que $S \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{x_n}$, como desejado.

Finalmente, das duas afirmações anteriores, segue que qualquer cobertura por abertos de K admite subcobertura finita: pelo segundo item, uma cobertura arbitrária deve ter uma subcobertura enumerável e, pelo primeiro item, tal subcobertura enumerável *terá* uma subcobertura finita. □

[5] Para espaços de Hausdorff.

[6] Pois $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é enumerável.

Observação 5.1.9 (Taxonomia)**.** A história da *compacidade* se confunde com a própria história da Análise e da Topologia Geral. É evidente que não se começou do geral para o particular, como feito aqui, o que não é um problema, posto que não se reinventa o fogo toda vez que alguém sente frio. Dito isso, convém destacar algumas coisas.

(a) A *constatação* de que intervalos fechados são compactos (no sentido atual, i.e., da Definição 5.1.4), é usualmente *creditada* a Heine e Borel (por volta de 1894), mas em sua forma generalizada (item (ii) do último teorema). De toda forma, em seus argumentos, ambos trataram apenas de coberturas enumeráveis de abertos: a versão geral, que não faz suposições acerca da cardinalidade da cobertura, costuma ser atribuída a Lebesgue (1904), razão pela qual a própria Definição 5.1.4 pode ser encontrada em alguns textos como *propriedade de Borel-Lebesgue*.

(b) As caracterizações de compacidade (iii) e (iv), assim como o próprio termo "compacidade", surgiram no contexto de espaços métricos, introduzidas por Fréchet em 1906. Apenas na década seguinte (1914) a equivalência com a *propriedade de Borel-Lebesgue* (das coberturas abertas) foi observada, por Hausdorff – e será demonstrada aqui, na última subsubseção deste capítulo.

(c) A caracterização de compacidade em termos de fechados com a *propriedade da interseção finita* (Teorema 5.1.13, a seguir), foi *registrada* pela primeira vez por Riesz (1908).

Todavia, tudo o que se fez acima foi anterior à definição atual de *espaço topológico*, que só ocorreu em 1922, com Kuratowski, mas com a influência de trabalhos anteriores, como o de Hausdorff em 1914. Isso deve alertar o leitor para a possibilidade de encontrar textos que definam compacidade por meio de outras condições equivalentes – e que enunciem a Definição 5.1.4 como uma caracterização alternativa garantida por algum teorema *com nome de gente*[7]. $\triangle$

A caracterização dos compactos de $\mathbb{R}$ permite obter uma demonstração muito rápida para o clássico *Teorema de Weierstrass*, que garante a existência de máximos e mínimos globais em funções contínuas definidas em compactos.

Lema 5.1.10. *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $f\colon K \to \mathbb{R}$ uma função. Se K é compacto e f é contínua, então $\operatorname{im}(f)$ é compacto.*

Demonstração. Ora, se $\mathcal{V}$ é uma coleção de abertos de $\mathbb{R}$ com $\operatorname{im}(f) \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$, então $K \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}[V]$, com cada $f^{-1}[V]$ aberto em virtude da continuidade de f. Daí, por K ser compacto, existem $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j\leq n} f^{-1}[V_j]$ e, consequentemente, $\operatorname{im}(f) \subseteq V_0 \cup \ldots \cup V_n$. $\square$

Corolário 5.1.11 (Weierstrass)**.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f é contínua, então f tem máximo e mínimo.*

Demonstração. O domínio de f é fechado e limitado e, portanto, compacto. Logo, $\operatorname{im}(f)$ também é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (pelo lema anterior), donde segue que deve ser fechado e limitado. Por ser limitado, existem $m := \inf \operatorname{im}(f)$ e $M := \sup \operatorname{im}(f)$, enquanto a garantia de $\operatorname{im}(f)$ ser fechado permite concluir que $m, M \in \operatorname{im}(f)$, i.e., existem $x, x' \in [a,b]$ tais que $f(x) = m$ e $f(x') = M$, como desejado. $\square$

[7]Mais informações sobre a História da Topologia Geral podem ser encontradas nos textos de Engelking [8] e Willard [26], ou em trabalhos voltados explicitamente para a História da Análise, como a recente obra de Thomas Sonar [24].

Observação 5.1.12 (Compactos de $\mathbb{R}^m$ (opcional))**.** Para $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pode-se proceder recursivamente a fim de dotar $\mathbb{R}^m$ com a topologia produto oriunda da topologia usual de $\mathbb{R}$. Neste contexto, uma sequência $\langle v_n \rangle_n$ em $\mathbb{R}^m$ converge para uma m-upla de $\mathbb{R}^m$, digamos $v := \langle x_j \rangle_{j<m} := \langle x_0, \ldots, x_{m-1} \rangle$ se, e somente se, $v_n(j) \to x_j$ para cada $j < m$: isto segue, por exemplo, da observação de que $v_n \to v$ se, e somente se, é contínua a função $\varphi \colon \mathbb{N}^{\#} \to \mathbb{R}^m$ que faz $\varphi(n) := v_n$ e $\varphi(\infty) := v$ (como na Proposição 3.48), juntamente com o item (ii) do Teorema 2.1.19, o que não impede que o leitor prove diretamente usando a definição da topologia produto.

Desse modo, não é difícil perceber que o Teorema 5.1.8 permanece válido como caracterização dos compactos de $\mathbb{R}^m$: (i) $\Rightarrow$ (ii) segue idêntica[8]; para (ii) $\Rightarrow$ (iii) é suficiente se convencer de que o Teorema de Bolzano-Weierstrass vale em $\mathbb{R}^m$, o que pode ser feito *coordenada a coordenada* por meio do que se observou no parágrafo anterior; (iii) $\Rightarrow$ (iv) é idêntico e (iv) $\Rightarrow$ (i) segue com o mesmo truque, mas usando $\mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}^m$ em vez de $\mathbb{Q}^2$. O leitor interessado pode cuidar dos detalhes. $\triangle$

Antes de avançar para o próximo *pilar* da Análise, convém gastar umas linhas com a famosa *propriedade dos intervalos encaixantes*, evitada até aqui por princípios estéticos: ela é *apenas* a manifestação da compacidade em termos de fechados.

Teorema 5.1.13. *Para um espaço topológico X, são equivalentes:*

(*i*) *X é compacto;*

(*ii*) *se $\mathcal{F}$ é uma família não-vazia de fechados de X com $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, então existem $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, com $F_0 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$.*

(*iii*) (***propriedade da interseção finita***) *se $\mathcal{F}$ é uma família de fechados tal que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ para qualquer subconjunto finito e não-vazio $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, então $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Primeiro, note que as afirmações (ii) e (iii) são trivialmente equivalentes entre si: uma é a contrapositiva da outra. Agora, pelas *leis* de De Morgan, para qualquer coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X deve valer

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X \Leftrightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U = \emptyset.$$

Logo, uma cobertura por abertos de X, digamos $\mathcal{U}$, tem subcobertura finita se, e somente se, a família de fechados $\mathcal{F}(\mathcal{U}) := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$, cuja interseção é vazia, admite um subconjunto finito e não-vazio $\mathcal{G}$ com $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. $\square$

Corolário 5.1.14 (Intervalos encaixantes)**.** *Seja $\langle I_n \rangle_n$ uma sequência de intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$. Se $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. O intervalo I_0 é compacto em $\mathbb{R}$ por ser fechado e limitado. Agora, os demais intervalos I_n para $n \geq 1$ são subespaços fechados de I_0 (Exercício 5.31). Como a família $\mathcal{F} := \{I_n : n \geq 1\}$ satisfaz as hipóteses do item (iii) do último teorema, o resultado segue. $\square$

[8] A prova de que K é limitado usou apenas a métrica, enquanto a condição sobre ser fechado dependeu da propriedade de Hausdorff. Não é difícil adaptar a métrica $d_{\sup}$ do Exercício , definida inicialmente para $\mathbb{R}^2$, a fim de perceber que a topologia produto em $\mathbb{R}^m$ também é induzida por uma métrica.

Em certo sentido, essa propriedade traduz topologicamente a ideia de que sequências infinitas de números naturais podem ser usadas para representar números reais, a menos de sinal: a sequência $\langle \alpha_n \rangle_n$ de números naturais na representação decimal, digamos, de $r := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, indica que

$$\alpha_0 \leq r \leq \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{10^i} := \beta_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, o que em outros termos significa dizer que $r \in [\alpha_0, \beta_n]$ para todo n. O leitor interessado numa discussão mais prolongada pode consultar [7] ou [25]. Aqui, essa observação serve como motivação para o seguinte teorema, que contradiz a provocação anterior de que a propriedade dos intervalos encaixantes é *apenas* uma manifestação da compacidade: ela é isso, mas não *só* isso.

Teorema 5.1.15 (opcional)**.** *Para um corpo arquimediano $\mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$\mathbb{K}$ é Dedekind completo;*

(ii) *toda família enumerável $\mathcal{I} := \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos fechados e limitados com $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. Indiretamente, a completude de Dedekind permitiu resolver o Exercício 3.22, que por sua vez foi um dos ingredientes principais do Teorema de Bolzano-Weierstrass (item (i) do Corolário 4.1.5), que finalmente garantiu a compacidade dos intervalos fechados e limitados, donde a afirmação (ii) segue como manifestação da compacidade. Para a recíproca, basta adaptar a prova da implicação $(c_{iv}) \Rightarrow (c_v)$ no Teorema 4.1.19, observando que os intervalos lá construídos são *encaixantes*. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

5.2 Conexidade e o Teorema do Valor Intermediário

Definição 5.2.0. Um espaço topológico X é **desconexo** se existem abertos não-vazios de X, digamos U e V, tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$. Diremos que X é **conexo** se X não for desconexo. ¶

Observação 5.2.1. Equivalentemente, X é conexo se para quaisquer abertos disjuntos e não-vazios $U, V \subseteq X$ ocorrer $U \cup V \neq X$. Ou ainda: X é conexo se, e somente se, para quaisquer abertos $U, V \subseteq X$ satisfazendo $U \cup V = X$ necessariamente ocorrer $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$. △

Exemplo 5.2.2. O espaço $X := (0, 1] \cup (2, 3)$ é desconexo com a topologia herdada de $\mathbb{R}$, pois $(0, 1] := U$ é um aberto de X, $V := (2, 3)$ é um aberto de X e ocorre $X = U \cup V$ com $U \cap V = \emptyset$. ▲

A *conexidade* é a propriedade topológica por trás do *Teorema do Valor Intermediário.* A constatação disso depende de dois fatos.

Teorema 5.2.3. *Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, C é um intervalo.*

Observação 5.2.4 (Os intervalos de $\mathbb{R}$)**.** Explicitamente... [definição de intervalo] △

Demonstração do Teorema 5.2.3. Feita em aula. □

Teorema 5.2.5. *Sejam $C \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $f\colon C \to \mathbb{R}$ uma função. Se C é conexo e f é contínua, então* $\operatorname{im}(f)$ *é conexa.*

Demonstração. Feita em aula. $\square$

Corolário 5.2.6 (Teorema do Valor Intermediário)**.**

Descontinuidade (opcional, mas nem tanto)

Compacidade em espaços métricos (adiável)

Observação 5.2.7. Esta subsubseção tem como único objetivo apresentar *algumas* caracterizações para os subespaços compactos de espaços métricos. Entretanto, ela só será (moralmente) útil no próximo capítulo, em que se mostrará que o *Teorema de Arzelà-Ascoli* caracteriza os subespaços compactos de certos *espaços de funções*. △

Uma leitura atenta à demonstração do Teorema 5.1.8 revela instâncias de cada uma das condições a seguir.

Definição 5.2.8. Diz-se que um espaço topológico é:

(i) **sequencialmente compacto** se toda sequência tem subsequência convergente;

(ii) **enumeravelmente compacto** se toda cobertura enumerável por abertos tem subcobertura finita;

(iii) **limite compacto** se todo subconjunto infinito tem ponto de acumulação;

(iv) (**de**) **Lindelöf** se toda cobertura por abertos tem subcobertura enumerável;

(v) **separável**[9] se tem um subconjunto denso enumerável. ¶

Vamos mostrar que as condições (i), (ii) e (iii) acima são todas equivalentes à condição de compacidade em espaços métricos – as outras duas propriedades foram introduzidas por razões técnicas que ficarão claras a seguir. O roteiro da demonstração depende de alguns lemas intermediários, alguns menos fáceis do que outros:

(I) *todo espaço sequencialmente compacto é enumeravelmente compacto*;

(II) *todo espaço enumeravelmente compacto é limite compacto;*

(III) *todo espaço métrico limite compacto é sequencialmente compacto*;

(IV) *todo espaço métrico sequencialmente compacto é separável*;

(V) *todo espaço métrico e separável é de Lindelöf*;

(VI) *um espaço é compacto se, e somente se, é de Lindelöf e enumeravelmente compacto.*

Em posse disso, demonstra-se o

Teorema 5.2.9. *Para um espaço métrico $\langle X, d\rangle$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *X é compacto;*

(ii) *X é enumeravelmente compacto;*

(iii) *X é limite-compacto;*

(iv) *X é sequencialmente compacto.*

Exercício 5.11. Convença-se de que o teorema segue, de fato, das seis afirmações anteriores. ■

[9]Não se deixe enganar pela gramática: a *definição* de separabilidade nada tem a ver com a condição de Hausdorff.

Dos itens acima, o sexto é o mais imediato, razão pela qual será deixado como

Exercício 5.12. Demonstre a afirmação (VI). ■

Agora, como diria Jack...

(I). Se uma cobertura enumerável por abertos de X, digamos $\mathcal{U} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, não tem subcobertura finita, então X não é sequencialmente compacto. Para verificar isso, tomemos $x_n \in X \setminus \bigcup_{j \le n} U_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e consideremos a sequência $\langle x_n \rangle_n$. Note que para qualquer $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ com $x \in U_n$ e, por *construção*, $x_m \notin U_n$ para todo $m \ge n$. Logo, $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente.

(II). Se $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ é infinito e não tem pontos de acumulação, então todo subconjunto de A é fechado em X: se algum subconjunto de A não fosse fechado em X, digamos B, existiria $x \in \overline{B} \setminus B$, mostrando que x é ponto de acumulação de A. Ora, fazendo então $U_n := X \setminus \{a_m : m \ge n\}$, teria-se $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ e nenhuma subcoleção finita de U_n's pode cobrir X.

Exercício 5.13. Demonstre a afirmação (III). Dica: se a imagem da sequência $\langle x_n \rangle_n$ for finita, ótimo; se não, então a imagem tem um ponto de acumulação, daí em diante a métrica pode ser útil. ■

(IV). A *ideia* da primeira parte da prova é bastante simples: fixados $\delta > 0$ e $x_0 \in X$, escolhe-se $x_1 \in X$ com $d(x_0, x_1) \ge 2\delta$ *caso algum* x_1 *com tal propriedade exista*; daí escolhe-se $x_2 \in X$ com $d(x_0, x_2), d(x_1, x_2) \ge 2\delta$ *se tal* x_2 *existir*, e *assim por diante*. Agora, se $\langle X, d \rangle$ for sequencialmente compacto (justamente a hipótese de (IV)), então o processo acima *precisa parar num passo finito*: se não fosse o caso, existiria uma sequência cujos pontos distam pelo menos 2δ uns dos outros, impedindo a existência de subsequências convergentes para algum ponto x, já que a bola $B_d(x, \delta)$ contém, no máximo, um ponto da sequência.

Observação 5.2.10 (Como formalizar a recursão acima? (opcional))**.** Para $\delta > 0$ e $f \in \operatorname{seq}(X)$ com $\operatorname{dom}(f) := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$ e $n > 0$, considere:

(i) $S_f := \{x \in X : \forall i < n \quad d(x, f(i)) \ge 2\delta\}$, que explicitamente coleta todos os pontos $x \in X$ satisfazendo a desigualdade $d(x, f(j)) \ge 2\delta$ para todo $j < n$;

(ii) $R_f := \langle f(n-1) \rangle\}$, i.e., R_f contém apenas o último termo da sequência f;

(iii) $C_f := S_f$ se $S_f \ne \emptyset$ e $C_f := R_f$ caso contrário.

Fazendo $C_\emptyset := \{\langle \widetilde{x} \rangle\}$ para algum $\widetilde{x} \in X$ fixado, tem-se $C_f \ne \emptyset$ para todo $f \in \operatorname{seq}(X)$, donde o Axioma da Escolha garante uma upla $\mathcal{O} \in \prod_{f \in \operatorname{seq}(X)} C_f$, i.e., uma função que a cada $f := \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \in \operatorname{seq}(X)$ associa um ponto $\mathcal{O}(f) \in C_f$ tal que: $d(\mathcal{O}(f), x_i) \ge 2\delta$ para todo $i \le n$ se $S_f \ne \emptyset$, caso contrário $\mathcal{O}(f) := x_n$. Em particular, note que $\mathcal{O} \colon \operatorname{seq}(X) \to X$ é uma *função oráculo*, e daí o Teorema da Recursão assegura uma função $\psi \colon \mathbb{N} \to X$ satisfazendo $\psi(n) = \mathcal{O}(\langle \psi(m) : m < n \rangle)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desse modo, a função ψ formaliza a ideia se tomar $x_0, x_1, \ldots$ distando pelo menos $2\delta > 0$ um dos outros *enquanto isto for possível* – e a partir do momento em que tal *escolha* não pode ser feita, ψ repete o seu último valor *indefinidamente*. △

Afirmação. *Se* $\langle X, d \rangle$ *é sequencialmente compacto, então exite* $N \in \mathbb{N}$ *satisfazendo* $\psi(N) = \psi(N+1)$ *e, por conseguinte,* $\psi(N) = \psi(n)$ *para todo* $n \ge N$.

Demonstração. Com efeito, se não for o caso, então a sequência $\langle\psi(n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente: dado $x \in X$ e $m, n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $d(\psi(m), \psi(n)) \geq 2\delta$ e, portanto, $\psi(m)$ e $\psi(n)$ não podem pertencer simultaneamente à bola $B_d(x, \delta)$ em virtude da desigualdade triangular. □

Os argumentos acima permitem tomar $N_\delta \in \mathbb{N}$ e pontos $x_{\delta,j} := \psi(j) \in X$, com $j \in \mathbb{N}$ e $j \leq N_\delta$, tais que $d(x_i, x_j) \geq 2\delta$ sempre que $i, j \leq N_\delta$ com $i \neq j$. *Naturalmente*, N_δ pode ser tomado como o menor com tal propriedade. Agora sim, faremos δ variar.

Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, chamemos $\delta_n := \frac{1}{2^{n+1}}$ e

$$D_n := \{x_{\delta_n,j} : j \leq N_{\delta_n}\}$$

que se obtém com a *construção* anterior ao se tomar $\delta := \delta_n$ – em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ há uma sequência ψ_n fixada. Note que a definição N_{δ_n} com respeito à sequência ψ_n garante que $X = \bigcup_{j\leq N_{\delta_n}} B_d(x_{\delta_n,j}, 2\delta_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por fim, como cada D_n é finito, tem-se $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ enumerável, de modo que a tese de (IV) estará demonstrada se provarmos que D é denso, o que é quase evidente: dados $x \in X$ e $r > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $2\delta_n < r$, donde segue que algum $x_{\delta_n,j} \in B_d(x, r)$.

(V). Fixado $D \subseteq X$ um denso enumerável e uma cobertura $\mathcal{U}$ de X por abertos, observa-se que

$$\mathcal{V} := \{B(d, q) : d \in D, q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ e existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } B(d, q) \subseteq U\}$$

é uma cobertura enumerável de X. De fato, dado $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$ e, por sua vez, existe um racional $q > 0$ tal que $B(x, 2q) \subseteq U$. Como D é denso, existe $d \in D$ com $d \in B(x, q)$, e não é difícil ver que $x \in B(d, q) \subseteq U$. Para cada $B \in \mathcal{V}$, tomemos um $U_B \in \mathcal{U}$ com $B \subseteq U_B$ – o qual tem que existir pelo modo como $\mathcal{V}$ foi construída. Finalmente, note que $\{U_B : B \in \mathcal{V}\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$, como desejado.

Q.E.D.

Observação 5.2.11 (Nem tudo é $\mathbb{R}^n$)**.** É tema dos cursos e textos de Topologia Geral[10] investigar contraexemplos para as recíprocas fora dos cenários metrizáveis. Ainda assim, fica um primeiro alerta: as equivalências desta subsubseção não valem em geral, mesmo que algumas sejam verificáveis em espaços não-metrizáveis.

O segundo alerta é inútil, pois todos estão fadados a cometer este erro uma vez na vida: subconjuntos fechados e limitados de espaços métricos nem sempre são compactos!

Lema 5.2.12 (de Riesz)**.** *Se $\langle E, \|\cdot\|\rangle$ é um espaço normado e $S \subseteq E$ é um subespaço vetorial com $\overline{S} \neq E$, então para todo $\alpha \in (0, 1)$ existe $x \in E$ com $\|x\| = 1$ e $\|s - x\| \geq \alpha$ para todo $s \in S$.*

Demonstração. Tome $x_0 \in E \setminus \overline{S}$, chame $R := \inf_{s\in S} \|s - x_0\|$ e note que $R > 0$ (é menos trivial do que parece, mas não é horrível). Agora, fixado qualquer[11] $x_1 \in S$ satisfazendo a desigualdade $\|x_0 - x_1\| \leq \dfrac{R}{\alpha}$, basta fazer $x := \dfrac{1}{\|x_0 - x_1\|}(x_0 - x_1)$. O leitor interessado pode completar os detalhes. □

[10] Como o catatau [17].

[11] Algum certamente existe, pois $R < \dfrac{R}{\alpha}$ e R é o ínfimo de tais números.

Ocorre que *se o espaço E no Lema de Riesz tem dimensão infinita*, pode-se mostrar que a *bola unitária* fechada $B_{\|\cdot\|}[0,1] := \{v \in E : \|v\| \leq 1\}$ *não é compacta*: fixado $\alpha := \frac{1}{2}$, o Lema de Riesz permite tomar uma sequência $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ com $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\|x_n - x_m\| \geq \dfrac{1}{2}$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, mostrando que $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subsequências convergentes. Logo, $B_{\|\cdot\|}[0,1]$ não é sequencialmente compacto ou, equivalentemente, $B_{\|\cdot\|}[0,1]$ não é compacto, em virtude das caracterizações desta subsubseção. △

Exercícios adicionais

Exercício 5.14. Dados um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ e um ponto $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, diga que λ é **ponto de acumulação de** X se para todo intervalo aberto $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in I$ existir $x \in X \cap (I \setminus \{\lambda\})$. Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$, então esta definição coincide com a Definição 4.2.8. ■

Exercício 5.15. Seja $\langle \mathbb{T}, \leq \rangle$ uma pré-ordem. Mostre que se $\preceq$ for total, então $\mathbb{T}$ é um conjunto dirigido. ■

Exercício 5.16. Seja $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ uma pré-ordem. Mostre que se $\mathbb{P}$ tem máximo, então $\mathbb{P}$ é dirigido.■

Exercício 5.17. Reflita: o resultado anterior se manteria válido se em vez de elemento "máximo" fosse elemento "maximal"? ■

Exercício 5.18. Sejam $\langle x_d \rangle_d$ uma *net* real convergente em $\mathbb{R}$. Mostre que existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\{x_d : d \geq D\}$ é limitado. Interprete o resultado para limites de funções. ■

Exercício 5.19. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ com $A \neq \emptyset$.

a) Mostre que $\sup A = \lim\limits_{x\in\mathbb{D}} x$ (em $\overline{\mathbb{R}}$), onde $\mathbb{D}$ denota o conjunto A dirigido pela ordem $\leq$ de $\mathbb{R}$.

b) Mostre que $\inf A = \lim\limits_{x\in\mathbb{E}} x$ (em $\overline{\mathbb{R}}$), onde $\mathbb{E}$ denota o conjunto A dirigido pela ordem (inversa) $\geq$ de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 5.20. Sejam $Y \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio, $g \colon Y \to \mathbb{R}$ uma função e $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{R}}$ pontos na reta estendida, com λ ponto de acumulação de Y. Mostre que $\lim\limits_{y\to\lambda} g(y) = \mu$ se, e somente se, para todo intervalo aberto $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\mu \in K$ existe um intervalo aberto $J \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ com $\lambda \in J$ e tal que $g(y) \in K$ para todo $y \in J \cap (Y \setminus \{\lambda\})$. ■

Exercício 5.21. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, $\langle x_n \rangle_n$ uma sequência em $\mathbb{K}$ e $x \in \mathbb{K}$.

a) Mostre que se $\langle x_n \rangle_n$ é crescente com $x_n \to x$, então $x = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ em $\mathbb{K}$.

b) Mostre que se $\langle x_n \rangle_n$ é decrescente com $x_n \to x$, então $x = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ em $\mathbb{K}$. ■

Exercício 5.22. Sejam X um espaço topológico e $S, F \subseteq X$, com F fechado e $S \subseteq F$. Mostre que $\overline{S} \subseteq F$. Conclua que se $C \subseteq X$ é um fechado tal que $S \subseteq C$ e $C \subseteq \overline{S}$, então $\overline{S} = C$. ■

Exercício 5.23. Caso não lhe pareça óbvio, refaça o exercício anterior trocando X por $\mathbb{R}$ com sua topologia usual. ■

Exercício 5.24. Mostre que se $F \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto finito, então $\mathbb{R} \setminus F$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 5.25. Determine o fecho dos seguintes subconjuntos.

Exercício 5.26 (interior em função do fecho)**.** ■

Exercício 5.27. Determine o interior dos seguintes subconjuntos.

Exercício 5.28. Mostre que todo ponto de acumulação de S é ponto aderente a S. Mostre que a recíproca não vale em geral. ■

Exercício 5.29. Mostre que $\overline{S} = S \cup S^{\mathrm{d}}$, onde S^{d} denota o **conjunto derivado de** S, explicitamente a família dos pontos de acumulação de S. ■

Exercício 5.30. [Teorema de Weierstrass – prova crua]

■

Exercício 5.31. Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subconjunto qualquer.

a) Mostre que $G \subseteq S$ é fechado em S se, e somente se, existe um subconjunto $F \subseteq X$ fechado em X com $G = S \cap F$.

b) Mostre que se S é fechado, então $G \subseteq S$ é fechado em S se, e somente se, é fechado em X.

c) Mostre que se S é aberto, então $H \subseteq S$ é aberto em S se, e somente se, é aberto em X.■

Capítulo 6

Uniformidade e espaços de funções

Nesta última parte do curso, passamos a tratar das funções contínuas pela perspectiva dos espaços de funções. O primeiro tópico, da aproximação de Weierstrass, aborda o surpreendente fato de que funções contínuas definidas em intervalos da forma $[a, b]$ podem ser uniformemente aproximadas por polinômios. Já o segundo tópico[0] dá um critério de compacidade para espaços de funções.

6.0 Continuidade uniforme

6.1 Convergência (s) em espaços de funções

Vistas de maneira isolada, as convergências pontual e uniforme podem parecer um tanto quanto artificiais. O propósito desta seção é, precisamente, mostrar parte do panorama geral no qual tais noções surgem naturalmente. Começamos pela convergência uniforme.

Fixado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, podemos considerar a família

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ é limitada}\}$$

das funções limitadas – o "$\mathcal{B}$" aqui faz alusão a *bounded*, do inglês, que significa *limitado*.

O conjunto $\mathcal{B}(X)$ é dotado de maneira natural de uma estrutura de espaço vetorial real: para $f, g \in \mathcal{B}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $f + g : X \to \mathbb{R}$ e $\lambda f : X \to \mathbb{R}$ pelas regras

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

para cada $x \in X$. Convém notar que $f + g, \lambda f \in \mathcal{B}(X)$ sempre que $f, g \in \mathcal{B}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pelo modo como tomamos os habitantes de $\mathcal{B}(X)$, para cada $f \in \mathcal{B}(X)$ podemos associar o número

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

o qual satisfaz as condições típicas de uma *norma*. Mais precisamente, ao fazermos cada $f \in \mathcal{B}(X)$ corresponder ao número $\|f\|_{\sup}$, obtemos uma função $\|\cdot\|_{\sup} : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty)$ tal que

- $\|f\|_{\sup} = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in X$,
- $\|\lambda f\|_{\sup} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\sup}$ para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{B}(X)$, e

[0]Que oficialmente não faz parte da ementa do curso.

- $\|f+g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(X)$.

Em geral, um espaço vetorial V munido de uma função $\|\cdot\|\colon V \to [0,+\infty)$ com as propriedades acima é xingado de **espaço** (vetorial) **normado**. Muito do que se faz em Análise na reta pode ser mimetizado em espaços normados ao substituirmos as ocorrências do valor absoluto (módulo) de $\mathbb{R}$ pela norma.

Por exemplo, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de vetores de V e $x \in V$, dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, e escrevemos $x_n \to x$, se para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Note que ao trocarmos as ocorrências de "$\|\cdot\|$" por "$|\cdot|$" recuperamos a definição clássica da Análise Real. Isso pode ser um pouco mais generalizado.

Um conjunto M munido de uma função $d\colon M \times M \to [0,+\infty)$ é chamado de **espaço métrico** se a função d tem as seguintes propriedades:

- $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,
- $d(x,y) = d(y,x)$ para quaisquer $x, y \in M$ e
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para quaisquer $x, y, z \in M$.

Intuitivamente, num espaço métrico M, a função d estabelece uma noção de *distância* entre os pontos de M, razão pela qual ela é chamada de métrica. Em $\mathbb{R}$, ao fazermos

$$d(x,y) := |x-y|,$$

obtemos a métrica típica por meio da qual determina-se a distância entre os números reais x e y. Como a discussão inicial sobre normas sugere, o mesmo pode ser feito em espaços normados: se V é um espaço normado cuja norma é $\|\cdot\|$, obtemos uma métrica ao declararmos

$$d(u,v) := \|u-v\|$$

para $u, v \in V$. Em particular, $\mathcal{B}(X)$ torna-se um espaço métrico ao considerarmos

$$d(f,g) := \|f-g\|_{\sup} := \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|.$$

Embora um espaço métrico não tenha, necessariamente, uma estrutura algébrica[1], ainda podemos mimetizar muito do que se faz em Análise Real. Exemplificamos isso, mais uma vez, por meio de sequências convergentes.

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de um espaço métrico M e $x \in M$, dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, o que indicamos por $x_n \to x$, se para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. Ao trocarmos "$d(x_n,x)$" por "$\|x_n - x\|$", recuperamos a definição de convergência anterior.

Dito isso, a primeira coisa que queremos destacar nesta seção é que a convergência uniforme de funções que definimos anteriormente é meramente a convergência usual de uma sequência de pontos num espaço métrico adequado. Mais precisamente, temos a

Proposição 6.1.0. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de funções reais e f uma função real, todas limitadas e definidas em X. Então $f_n \to f$ uniformemente se, e somente se, $f_n \to f$ como sequência do espaço métrico $\mathcal{B}(X)$.*

[1] Algo que permita somar ou multiplicar seus elementos por escalares de um corpo, como num espaço vetorial.

Demonstração. Pelas hipóteses, temos $f_n, f \in \mathcal{B}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Agora, se $f_n \to f$ enquanto sequência do espaço métrico $\mathcal{B}(X)$, temos o seguinte: para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ acarreta

$$d(f_n, f) := \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Como $|f_n(y)-f(y)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$ para qualquer $y \in X$, mostramos em particular que $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ para quaisquer $n \geq N$ e $y \in X$. Em outras palavras: $f_n \to f$ uniformemente.

Reciprocamente, se $f_n \to f$ uniformemente, então para $\varepsilon > 0$ fixado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(y)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para quaisquer $n \geq N$ e $y \in X$. Logo, $\sup_{x\in X} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, i.e., $d(f_n, f) < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. □

Nesse contexto, torna-se natural e pertinente mais um adendo, dessa vez sobre completude e os típicos critérios de Cauchy. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de um espaço métrico, faz sentido dizer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência de Cauchy** se, para $\varepsilon > 0$ fixado arbitrariamente, existir $N \in \mathbb{N}$ para o qual ocorra $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq N$. Essa é exatamente a definição conhecida da Análise Real, agora adaptada para espaços métricos.

Da mesma forma que se verifica em $\mathbb{R}$, toda sequência convergente de um espaço métrico é necessariamente de Cauchy: tomando-se $N \in \mathbb{N}$ para o qual ocorra $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, resulta que $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$ para quaisquer $n, m \geq N$. A recíproca, porém, é falsa em geral: existem espaços métricos com sequências de Cauchy que não convergem. Desse modo, espaços métricos nos quais a recíproca é verdadeira, i.e., nos quais toda sequência de Cauchy convergem, merecem algum tipo de nomenclatura especial: eles são chamados de **espaços métricos completos**.

A reta real $\mathbb{R}$ é o exemplo fundamental de espaço métrico completo: sua construção como corpo ordenado completo garante precisamente a convergência de todas as sequências de Cauchy. Assim como ocorre em $\mathbb{R}$, de modo geral, ter a garantia de que toda sequência de Cauchy converge nos dá a vantagem de saber que um determinado processo iterativo converge, sem a obrigação moral de saber qual é o limite. Por isso, a seguinte proposição tem relevância não-trivial.

Proposição 6.1.1. *$\mathcal{B}(X)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Fixada uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em $\mathcal{B}(X)$, vamos cozinhar $f \in \mathcal{B}(X)$ com $f_n \to f$ uniformemente – o que pela proposição anterior, equivale a mostrar que $f_n \to f$ como sequência de $\mathcal{B}(X)$. Observe que para $y \in X$ fixado, a sequência $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, o que segue da desigualdade

$$|f_n(y) - f_m(y)| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Logo, por $\mathbb{R}$ ser completo, existe um único $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ com $f_n(y) \to \tilde{y}$. Definimos $f\colon X \to \mathbb{R}$ fazendo $f(y) := \tilde{y}$. Note que, por construção, já temos $f_n \to f$ pontualmente.

Agora, a fim de mostrar a convergência uniforme, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n, m \geq N$ (podemos pela condição de Cauchy) e, para cada $x \in X$, tomamos $N_x \in \mathbb{N}$ com $N_x \geq N$ tal que $n \geq N_x$ implique

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

o que podemos fazer pois $f_n \to f$ pontualmente. Disso segue que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{N_x}(x)| + |f_{N_x}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Resta ver que f é limitada. Note que $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela convergência uniforme, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ de modo a fazer $|f(x) - f_n(x)| < 1$ para qualquer x, ao passo que f_n é limitada por hipótese. □

Observação 6.1.2. A proposição acima tem um efeito colateral interessante. Para $f \in \mathcal{B}(X)$, seja $D(f)$ o conjunto dos pontos de X nos quais f é descontínua, e considere

$$\mathcal{R}(X) := \{f \in \mathcal{B}(X) : D(f) \text{ tem medida nula }\}.$$

Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $\mathcal{R}(X)$ que converge (uniformemente) para uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$, então $f \in \mathcal{R}(X)$: por um lado, $f \in \mathcal{B}(X)$ pois $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{B}(X)$ e, consequentemente, seu limite f deve morar em $\mathcal{B}(X)$; por outro lado, se $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(f_n)$, então cada f_n é contínua em x e, como no Corolário 8.5.2, segue que f é contínua em x, mostrando que $D(f) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(f_n)$ e, portanto, $D(f)$ tem medida nula. Em outras palavras... △

Corolário 6.1.3. *$\mathcal{R}(X)$ é subespaço fechado de $\mathcal{B}(X)$.*

O grande mérito da observação anterior se revela ao substituirmos X por $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Neste caso, o Teorema de Riemann-Lebesgue nos diz que $\mathcal{R}[a, b]$ é, precisamente, o conjunto das funções reais definidas em $[a, b]$ que são Riemann-integráveis, enquanto o corolário acima se traduz no seguinte

Corolário 6.1.4. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções Riemann-integráveis definidas em $[a, b]$ tais que $f_n \to f$ uniformemente, então f é Riemann-integrável.*

Esta é a parte "qualitativa" do que foi prometido em (8.3). Embora a parte "quantitativa" agora possa ser justificada numa linha, deixaremos isso para a próxima seção. Por ora, vamos tratar de revelar o contexto no qual a convergência pontual surge naturalmente.

Para isso, precisamos dar um passo mais longe e tratar de espaços topológicos. Uma **topologia** sobre um conjunto X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
- $U \cap V \in \mathcal{T}$ sempre que $U, V \in \mathcal{T}$; e
- se $U_i \in \mathcal{T}$ para todo i pertencente a algum conjunto de índices I, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de **espaço topológico**, mas quando a topologia $\mathcal{T}$ estiver clara pelo contexto, diremos apenas que X é espaço topológico. Tipicamente, os elementos da topologia são chamados de **abertos**.

O exemplo clássico de espaço topológico[2] são os espaços métricos. Fixado um espaço métrico M de métrica d, consideramos os conjuntos da forma $B(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$, as chamadas bolas abertas. Embora a família de todas as bolas abertas não constitua uma topologia em M – pois a reunião de bolas abertas não precisa ser uma bola aberta –, a família $\mathcal{T}$ dos subconjuntos A de M que são reunião de bolas abertas é uma topologia.

[2]Embora nesse caso fosse mais correto dizer topologizável.

O ambiente topológico é classicamente[3] o mais amplo no qual pode-se falar em continuidade. Uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y é contínua se $f^{-1}[V]$ for aberto em X sempre que $V \subset Y$ for aberto. Isso condiz com a continuidade em contextos métricos via ε's e δ's – a mesma que utilizamos em Análise.

[3]Há espaços um pouco mais gerais que fogem ainda mais do escopo da disciplina.

De fato, se M e N são métricos e $f\colon M \to N$ é contínua, então para $V \subset N$ aberto e $x \in M$ com $f(x) \in V$, o fato de V ser aberto nos diz que existe $\varepsilon > 0$ com $B(f(x), \varepsilon) \subset V$, enquanto a continuidade de f nos dá $\delta_x > 0$ com $f(w) \in B(f(x), \varepsilon)$ sempre que $w \in B(x, \delta_x)$. Isso mostra que $f^{-1}[V]$ é reunião das bolas da forma $B(x, \delta)$ conforme x percorre $f^{-1}[V]$. A recíproca segue de expandir o que significa dizer que V e $f^{-1}[V]$ são abertos em N e M, respectivamente.

Também podemos falar de convergência de sequências em espaços topológicos: dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se para todo aberto U com $x \in U$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ sempre que $n \geq n_0$. Como ocorre em Análise e Espaços Métricos, funções contínuas preservam sequências convergentes. Mais precisamente, se $x_n \to x$ e $f\colon X \to Y$ é contínua, então $f(x_n) \to f(x)$: pois se V é aberto de Y com $f(x) \in V$, então $f^{-1}[V]$ é aberto de X que contém x, e daí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $x_n \in f^{-1}[V]$ sempre que $n \geq n_0$, i.e., $f(x_n) \in V$ sempre que $n \geq n_0$.

Agora, dados dois espaços topológicos X e Y, com topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$, respectivamente, gostaríamos de formar uma topologia em $X \times Y$ que fosse natural. O mais imediato seria considerar como abertos em $X \times Y$ os subconjuntos da forma $U \times V$, com $U \subset X$ aberto e $V \subset Y$ aberto. Infelizmente, isso não resulta numa topologia por um motivo de fácil interpretação geométrica: embora a interseção de retângulos seja um retângulo, a reunião de retângulos não precisa ser – compare com o parágrafo anterior.

Como no parágrafo anterior, sanamos esse problema declarando que $W \subset X \times Y$ é aberto se W se escreve como reunião de conjuntos da forma $U \times V$, com $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos em seus respectivos espaços. Tal topologia é chamada de topologia produto em $X \times Y$, e vem de fábrica com um bônus: as projeções $\pi_X\colon X \times Y \to X$ e $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ são contínuas.

E daí? Bem, com tal topologia, uma sequência $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $X \times Y$ converge para $(x, y) \in X \times Y$ se, e somente se, $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Em outras palavras, a convergência em $X \times Y$ é pontual.

A topologia obtida em $X \times Y$ pode ser generalizada para produtos da forma $\prod_{i\in I} X_i$, onde X_i é espaço topológico para cada i num conjunto de índices I – mesmo que I seja infinito! Tal topologia é tomada como a menor possível a garantir que as projeções $\pi_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ sejam contínuas para cada $j \in I$. Do mesmo modo que ocorre em $X \times Y$, uma sequência $((x_i^n)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ de I-uplas[4] converge para uma I-upla $(x_i)_{i\in I}$ se, e somente se, para cada $i \in I$ ocorrer $x_i^n \to x_i$.

Em particular, se $I := \mathbb{R}$ e $X_i := \mathbb{R}$ para cada $i \in I$, então $\prod_{i\in I} X_i$ nada mais é do que o conjunto de todas as funções reais definidas em $\mathbb{R}$, geralmente denotado por $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Desse modo, a convergência pontual vista na seção anterior é a convergência obtida ao dotarmos $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ da topologia mencionada acima.

[4]Um elemento de $\prod_{i\in I} X_i$ é uma função que faz corresponder cada $i \in I$ a um $x_i \in X_i$, da mesma forma que uma 3-upla $(x_0, x_1, x_2) \in X_0 \times X_1 \times X_2$ faz corresponder a cada $i \in \{0, 1, 2\}$ um $x_i \in X_i$. Daí o termo I-upla.

6.1.0 Convergência pontual

6.1.1 Convergência uniforme

A aproximação de Weierstrass

Classicamente, o Teorema da Aproximação de Weierstrass afirma que se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções polinomiais tal que, em $[a,b]$, $p_n \to f$ uniformemente. Nestas notas, provaremos uma versão um pouco mais geral de tal resultado:

Teorema 6.1.5 (Stone-Weierstrass). *Seja X um espaço compacto. Se $\mathcal{A} \subset C(X,\mathbb{R})$ é uma álgebra fechada por convergência uniforme e que separa pontos, então $\mathcal{A} = C(X,\mathbb{R})$.*

Convém destacar o significado de algumas terminologias utilizadas no enunciado acima:

- um espaço topológico X é compacto se para toda coleção $\mathcal{U}$ de abertos de X satisfazendo $X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ existirem finitos $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $X = U_0 \cup \ldots \cup U_n$;
- uma família $\mathcal{A}$ de funções da forma $X \to \mathbb{R}$ é chamada de **álgebra** se $\mathcal{A}$ contém todas as funções constantes e, para quaisquer $f, g \in \mathcal{A}$ ocorrer $f + g \in \mathcal{A}$ e $f \cdot g \in \mathcal{A}$;
- dizemos que $\mathcal{A}$ **separa pontos** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existe $h \in \mathcal{A}$ satisfazendo $h(x) \neq h(y)$;
- finalmente, $\mathcal{A}$ é fechada por convergência uniforme se $f \in \mathcal{A}$ sempre que existir uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $f_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $f_n \to f$ uniformemente;

Em particular, a última condição consiste em dizer que $\mathcal{A}$ é um subespaço fechado de $C(X,\mathbb{R})$ quando este é munido da métrica do supremo.

Antes de procedermos com a prova do teorema, convém destacarmos porque ele generaliza a Aproximação de Weierstrass:

Lema 6.1.6. *Se $\mathcal{A} \subset C(X,\mathbb{R})$ é uma álgebra de funções limitadas, então*

$$\mathcal{B} := \{f \in C(X,\mathbb{R}) : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \text{ tal que } f_n \to f \text{ unif.}\}$$

é uma álgebra de funções.

Demonstração. É claro que $\mathcal{B}$ contém todas as funções constantes. Agora, se $f, g \in \mathcal{B}$, então $f + g$ e $f \cdot g$ pertencem a $\mathcal{B}$: de fato, existem sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$, com $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente; como $f_n + g_n, f_n \cdot g_n \in \mathcal{A}$ e $f_n + g_n \to f + g$ e $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente, o resultado segue. □

Usando tal observação, não é difícil se convencer de que a família dos limites uniformes de funções polinomiais definidas em $[a,b]$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass (veja a Questão 2 da Lista Final, que está por vir).

Curiosamente, para provar a versão geral que apresentamos acima, precisamos de uma instância muito particular da Aproximação de Weiertrass:

Lema 6.1.7. *Existe uma sequência $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de polinômios tal que $w_n(x) \to \sqrt{x}$ uniformemente em $[0,1]$.*

Demonstração. Fazemos $w_0(x) := 0$, $w_1(x) := w_0(x) + \frac{1}{2}(x - w_0^2(t))$ e, mais geralmente, supondo o polinômio $w_n(x)$ definido para $n > 0$, fazemos

$$w_{n+1}(x) := w_n(x) + \frac{1}{2}(x - w_n^2(x)). \tag{6.0}$$

Começamos afirmando que $w_n(x) \leq \sqrt{x}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$. Isto é claro para $n = 0$. Supondo a afirmação válida para $n > 0$, note que

$$\sqrt{x} - w_{n+1}(x) = \sqrt{x} - w_n(x) - \frac{1}{2}(x - w_n^2(x)) = \sqrt{x} - w_n(x) - \frac{1}{2}(\sqrt{x} - w_n(x))(\sqrt{x} + w_n(x)) =$$

$$= (\sqrt{x} - w_n(x))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + w_n(x))\right).$$

Como $0 \leq x \leq 1$, temos $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, donde a hipótese de indução nos dá tanto $\sqrt{x} - w_n(x) \geq 0$ quanto $\sqrt{x} + w_n(x) \leq 2$ e, consequentemente, $1 - \dfrac{1}{2}(\sqrt{x} + w_n(x)) \geq 0$. Logo, $\sqrt{x} - w_{n+1}(x) \geq 0 \cdot 0 = 0$, mostrando que $w_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ em $[0,1]$, como afirmamos.

Isso garante que $x - w_n^2(x) \geq 0$ para todo n e, por conseguinte, nos garante, para cada ponto $x \in [0,1]$, que a sequência $(w_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona e não-decrescente. Por Bolzano-Weierstrass, existe $f(x) \in [0,1]$ com $w_n(x) \to f(x)$. Fazendo $n \to +\infty$ em (6.0), obtemos

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x - f^2(x)) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}(x - f^2(x)) \Rightarrow f^2(x) = x \Rightarrow f(x) = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{x}.$$

A uniformidade da convergência segue então pelo Teorema de Dini. □

Lema 6.1.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de funções limitadas definidas em X. Se $\mathcal{A}$ é fechada por convergência uniforme, então $\max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{A}$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. O primeiro *Katzensprung*[5] consiste em notar que

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \quad \text{e} \quad \max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|).$$

Por conta disso, é suficiente mostrar que $|f| \in \mathcal{A}$ se $f \in \mathcal{A}$. O segundo *Katzensprung* é ainda mais legal: podemos supor $|f| \leq 1$. De fato, se não ocorre $|f| \leq 1$, a suposição de que as funções de $\mathcal{A}$ são limitadas nos dão $c > 0$ com $|f| \leq c$, de modo que se soubermos que $\frac{1}{c}f \in \mathcal{A}$, então $f = c \cdot \frac{1}{c}f \in \mathcal{A}$. Finalmente, o terceiro *Katzensprung* usa o lema anterior: como $|f| \leq 1$ e $f \in \mathcal{A}$, temos $f^2 \in \mathcal{A}$ e $w_n \circ f \in \mathcal{A}$, com $w_n \circ f^2 \to \sqrt{f^2} = |f|$ uniformemente, donde a pertinência $|f| \in \mathcal{A}$ segue por $\mathcal{A}$ ser fechada por convergência uniforme. Os detalhes fazem parte da Questão 1 da Lista Final. □

Demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass. Pela hipótese de $\mathcal{A}$ ser fechada por convergência uniforme, basta mostrarmos que, para $f \colon X \to \mathbb{R}$ contínua e $\varepsilon > 0$ fixado, existe $f_\varepsilon \in \mathcal{A}$ com $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. De fato, se tal resultado for conhecido, basta considerarmos $g_n := f_{\frac{1}{2^n}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pois daí teremos $g_n \to f$ uniformemente. Destrinchando a desigualdade desejada, queremos que f_ε satisfaça

$$f(x) - \varepsilon < f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon$$

[5] Pulo do gato alemão. Créditos a @nettooos.

para todo $x \in X$. Prossigamos.

Fixados $a, b \in X$ distintos, a hipótese de que $\mathcal{A}$ separa pontos nos dá $h \in \mathcal{A}$ com $h(a) \neq h(b)$. Agora, fazemos $g := \frac{1}{h(b)-h(a)}(h(x) - h(a))$, função que pertence a $\mathcal{A}$ por esta ser uma álgebra. Note que $g(a) = 0$ e $g(b) = 1$. Finalmente, fazemos $f_{a,b} := (f(b) - f(a))g + f(a)$, função que também pertence a $\mathcal{A}$ pois $g \in \mathcal{A}$ e tanto $f(b) - f(a)$ quanto $f(a)$ são constantes. O modo como tomamos $f_{a,b}$ nos dá $f_{a,b}(a) = f(a)$ e $f_{a,b}(b) = f(b)$, donde segue que os abertos

$$U_{a,b} := \{x \in X : f_{a,b}(x) < f(x) + \varepsilon\} \quad \text{e} \quad V_{a,b} := \{x \in X : f_{a,b}(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

são tais que $a, b \in U_{a,b} \cap V_{a,b}$. Em certo sentido, a função $f_{a,b}$ faz em $U_{a,b} \cap V_{a,b}$ o que gostaríamos que f_ε fizesse em todo o X. O truque agora é usar a compacidade para cozinhar a f_ε a partir das $f_{a,b}$'s.

Primeiro, para $b \in X$ fixado, a família $\{U_{a,b} : a \in X \setminus \{b\}\}$ é uma cobertura por abertos para X. Logo, a compacidade de X nos dá $a_0, \ldots, a_n \in X$ tais que

$$X = U_{a_0,b} \cup \ldots \cup U_{a_n,b}.$$

Por X ser compacto e as funções de $\mathcal{A}$ serem contínuas, segue que todas são limitadas. O lema anterior nos garante, por indução, que

$$f_b := \min(f_{a_0,b}, \ldots, f_{a_n,b}) \in \mathcal{A}.$$

Note que para $x \in X$ qualquer, existe $i \leq n$ com $x \in U_{a_i,b}$, e daí

$$f_b(x) \leq f_{a_i,b}(x) < f(x) + \varepsilon,$$

"metade" da desigualdade que buscamos satisfazer. Por sua vez, temos $b \in \bigcap_{i \leq n} V_{a_i,b} := V_b$ e, para cada $y \in V_b$ temos $f(y) - \varepsilon < f_{a_i,b}(y)$, donde segue que $f(y) - \varepsilon < f_b(y)$. Nossos problemas estariam resolvidos se $V_b = X$, mas ainda podemos remediar isso, usando a compacidade mais uma vez.

Repetindo o procedimento acima para cada $b \in X$, segue que a coleção de abertos $\{V_b : b \in X\}$ recobre X e, por conseguinte, existem $b_0, \ldots, b_m \in X$ tais que $X = V_{b_0} \cup \ldots \cup V_{b_m}$. Usando o lema anterior novamente, afirmamos que $f_\varepsilon := \max(f_{b_0}, \ldots, f_{b_m})$ cumpre nossas exigências. De fato, por termos $f_{b_i}(x) < f(x) + \varepsilon$ para cada $i \leq m$, deve ocorrer $f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon$. Por outro lado, dado $x \in X$ qualquer, existe b_j com $x \in V_{b_j}$, e daí

$$f(x) - \varepsilon < f_{b_j}(x) \leq f_\varepsilon(x),$$

como queríamos. □

Outro modo de enunciar o Teorema de Stone-Weiertrass consiste em dizer que uma álgebra $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ que separa pontos de X é densa em $C(X, \mathbb{R})$ quando este tem a métrica do supremo, i.e., $\overline{\mathcal{A}} = C(X, \mathbb{R})$. Para se convencer disso, basta usar o Lema 6.1.6. Neste último caso, é importante observar que a compacidade é indispensável para garantir a convergência uniforme (a Questão 3 da Lista Final trata de um contraexemplo) – embora isso possa ser relaxado se quisermos apenas convergência pontual (como sugere a Questão 4 da Lista Final).

O teorema de Arzelà-Ascoli

Em Análise Elementar, aprendemos dois resultados muito importantes sobre compacidade:

- (Bolzano-Weierstrass) $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência tem subsequência convergente;
- (Heine-Borel) $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.

Como as experiências da infância costumam moldar nossa vida adulta, é comum que busquemos resultados análogos aos mencionados acima para os contextos mais avançados da Análise. Nesse sentido, Bolzano-Weierstrass admite uma generalização importante (e mais difícil do que parece)

Teorema 6.1.9. *Um espaço métrico (X, d) é compacto se, e somente se, toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X admite subsequência convergente.*

Por sua vez, Heine-Borel é bem mais delicado: ao considerarmos $X := C([0,1], \mathbb{R})$ com a métrica do supremo, por exemplo, a família $B := \left\{f \in X : \sup_{a\in[0,1]} |f(a)| \leq 1\right\}$, a.k.a. a bola fechada unitária, não é compacta, embora seja fechada e limitada! De fato, já vimos que $f_n(x) := x^n$ converge pontualmente para uma função não-contínua, donde segue que não pode existir uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convirja (uniformemente!) para alguma função contínua. Como X é métrico, o teorema anterior nos diz que X não é compacto.

Longe de ser uma coincidência, o fenômeno acima é efeito colateral do

Teorema 6.1.10 (Lema de Riesz)**.** *Um espaço vetorial normado $(V, \|\cdot\|)$ tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada $\{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ é compacta.*

Assim, embora todo subespaço compacto seja necessariamente fechado e limitado, a recíproca não é verdadeira em espaços mais gerais. Nesse sentido, o Teorema de Arzelà-Ascoli nos diz o que devemos acrescentar para recuperar a recíproca – para espaços da forma $C(X, \mathbb{R})$ com a métrica do supremo e X *compacto Hausdorff*. No entanto, diferente do que fizemos na seção anterior, desta vez não há ganho de clareza em provarmos uma versão mais geral, de modo que nos focaremos no caso em que $X = [a, b]$.

Dada uma família $\mathcal{E}$ de funções contínuas definidas em X, dizemos que $\mathcal{E}$ é **equicontínua** se, para cada $\varepsilon > 0$ e cada $x \in X$, existir $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \text{ com y} \in \text{X } \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

qualquer que seja $f \in \mathcal{E}$. Se pudermos garantir que o δ da definição acima independe do ponto x escolhido, dizemos que $\mathcal{E}$ é **uniformemente equicontínua**. Em particular, se $\mathcal{E} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de funções contínuas definidas em X, dizemos que $\mathcal{E}$ é uniformemente equicontínua se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \text{ com } s, t \in X \Rightarrow |f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 6.0. Apenas como aquecimento, convença-se do seguinte.

0. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ e $\mathcal{E}$ é (unif.) equicontínua, então $\mathcal{A}$ também é (unif.) equicontínua.
1. Se $\mathcal{E}$ é unif. equicontínua, então cada $f \in \mathcal{E}$ é unif. contínua.

2. Se $\mathcal{E}$ é finita, então $\mathcal{E}$ é unif. equicontínua se, e somente se, cada $f \in \mathcal{E}$ é unif. contínua.

■

Teorema 6.1.11 (Arzelà-Ascoli)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas definidas em $[a,b]$, uniformemente limitadas, i.e., tal que existe $M > 0$ com $|f_n| \leq M$ para todo n. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente equicontínua, então existe uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente.*

Demonstração. A demonstração consiste de uma diagonalização esperta.

Vamos escrever $[a,b] \cap \mathbb{Q} := \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $|f_n(x)| \leq M$ para quaisquer $x \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $|f_n(d_0)| \leq M$ para todo n. Logo, existe uma subsequência $(f_{0,n}(d_0))_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n(d_0))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um certo $y_0 \in \mathbb{R}$. Embora seja uma subsequência de pontos de $\mathbb{R}$, cada ponto $f_{0,n}(d_0)$ nos dá também a função $f_{0,n}$, que podemos aplicar no ponto d_1: dessa vez, a sequência $(f_{0,n}(d_1))_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada por M e, por conseguinte, existe uma subsequência $(f_{1,n}(d_1))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para algum número real y_1. Note que a sequência de funções $(f_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(f_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ e, como tal deve ocorrer $f_{1,n}(d_0) \to d_0$.

Procedendo recursivamente, para cada m obtemos uma sequência $(f_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de funções tal que

- $(f_{m+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(f_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$, e
- existe uma sequência $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de pontos de $\mathbb{R}$ tais que $f_{m,n}(d_j) \to d_j$ para cada $j \leq m$ – em particular, $f_{m,n} \to d_m$.

Para cada m, tomamos $k(m) \geq m$ grande o suficiente para garantir que

$$|f_{m,k}(d_j) - y_j| < \frac{1}{2^m}$$

para todo $j \leq m$ e todo $k \geq k(m)$.

Tal $k(m)$ existe pois, como $f_{m,n}(d_j) \to y_j$ para todo $j \leq m$, para cada j existe $N_j \geq m$ tal que $k \geq N_j$ implica em $|f_{m,k}(d_j) - y_j| < \frac{1}{2^m}$, de modo que basta tomarmos $k(m) := \max_{j\leq m} N_j$. Fazemos então $g_m := f_{m,k(m)}$ para cada m, e afirmamos que $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com a propriedade desejada.

Primeiramente, observamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(d_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$: de fato, fixado $\varepsilon > 0$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ com $j \leq m$ e $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$; a escolha dos $k(n)$'s nos garante que se $n \geq k(m)$, então

$$|g_n(d_j) - y_j| = |f_{n,k(n)}(d_j) - y_j| < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^m} \leq \varepsilon,$$

i.e., $g_n(d_j) \to y_j$, como queríamos[6]. Vamos então *propagar* a convergência de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para todo $[a,b]$, de modo uniforme. Mais precisamente: mostraremos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy.

Fixado $\varepsilon > 0$, a equicontinuidade uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (logo, de $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$) nos dá $\delta > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta \text{ com } s,t \in [a,b] \Rightarrow |g_m(s) - g_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

[6]A escolha dos $k(n)$'s visou uniformizar, em certo sentido, os *instantes* a partir dos quais as subsequências se tornam menores do que um número pequeno conhecido.

Agora, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $[a,b] \subset \bigcup_{j\leq J}(d_j - \delta, d_j + \delta)$ (veja a Questão 5 da Lista Final). Como cada $(g_m(d_j))_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $l, m \geq N$ e $j \leq J$, então

$$|g_m(d_j) - g_l(d_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, o N acima atesta que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy: se $x \in [a,b]$, existe $j \leq J$ com $x \in (d_j - \delta, d_j + \delta)$, de modo que para $l, m \geq N$, temos

$$|g_l(x) - g_m(x)| \leq |g_l(x) - g_l(d_j)| + |g_l(d_j) - g_m(d_j)| + |g_m(d_j) - g_m(x)| < \varepsilon,$$

como queríamos. □

Corolário 6.1.12 (da Propagação de Arzelà-Ascoli)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em $[a,b]$ uniformemente equicontínua. Se $(f_n(d))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para cada ponto d num denso D de $[a,b]$, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.*

Demonstração. É a parte final da demonstração anterior. □

Corolário 6.1.13. *Suponha $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sequência de funções diferenciáveis, cujas derivadas são uniformemente limitadas. Se $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada para algum $x_0 \in [a,b]$, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração. Basta mostrar que a sequência é uniformemente equicontínua e uniformemente limitada. Para tanto, observamos que para $s, t \in [a,b]$ distintos, existe $\vartheta \in (s,t)$ com

$$|f_n(s) - f_n(t)| \leq |f'(\vartheta)||s - t| \leq M|s - t|,$$

onde M é o limitante uniforme das derivadas. Logo, para $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Isso garante a equicontinuidade uniforme.

Agora, para $x \in [a,b]$ qualquer, note que

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0)| \leq M|x - x_0| + C \leq M(b - a) + C,$$

onde C é a constante que limita a sequência $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. □

Corolário 6.1.14 (Heine-Borel para espaço de funções)**.** *Considere $C([a,b],\mathbb{R})$ com a métrica do supremo. Um subconjunto $\mathcal{E} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ é compacto se, e somente se, é fechado, uniformemente limitado e uniformemente equicontínuo.*

Demonstração. Todo subespaço compacto de um espaço métrico é fechado e limitado. Em particular, como a limitação é com respeito à métrica do supremo, temos a limitação uniforme. Agora, fixado $\varepsilon > 0$, as bolas $B(f) := \left\{g \in C([a,b],\mathbb{R}) : \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ cobrem $\mathcal{E}$ e, devido a compacidade, existem $f_0, \ldots, f_n \in C([a,b],\mathbb{R})$ tais que $\mathcal{E} \subset B(f_0) \cup \ldots \cup B(f_n)$. Por sua vez, a compacidade de $[a,b]$ nos diz que cada f_k é uniformemente contínua e, por conseguinte, existe $\delta_k > 0$ tal que

$$|s - t| < \delta_k \Rightarrow |f_k(s) - f_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, $\delta := \min_{k\leq n} \delta_k$ atesta a equicontinuidade uniforme de $\mathcal{E}$: para $f \in \mathcal{E}$, existe $k \leq n$ com $f \in B(f_k)$, de modo que se $|s - t| < \delta$, então

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f_k(s)| + |f_k(s) - f_k(t)| + |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Para a recíproca, notamos que se $\mathcal{E}$ for fechado, uniformemente limitado e uniformemente equicontínuo, então, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, toda sequência de $\mathcal{E}$ tem subsequência uniformemente convergente. Logo, pelo Teorema 5, $\mathcal{E}$ é compacto. □

Capítulo 7

Diferenciabilidade

Capítulo 8

Integração à moda de Riemann

[ainda falta editar]

Neste segundo curso de Análise, vamos prosseguir com a fundamentação dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, de modo que, mais uma vez, as protagonistas serão as funções reais. No primeiro terço do curso, nossa atenção se voltará (principalmente) para funções da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, sobre as quais estudaremos a noção de integral.

8.0 Uma abordagem axiomática para integração

A ideia básica da integração consiste no seguinte: dada uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq b$, desejamos associar um número real $\displaystyle\int_a^b f$ (frequentemente também denotado como $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, entre outras notações), que costuma ser chamado de **integral definida de** f em $[a, b]$. Quando ocorre $f \geq 0$ (o que abrevia $f(x) \geq 0$ para todo x no domínio de f), a intuição que temos do número $\displaystyle\int_a^b f$ diz que ele deveria representar a área da região limitada pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ e $y = 0$. Contudo, tal intuição não é minimamente razoável para definir qualquer coisa matematicamente[0].

Um pouco mais rigorosamente, para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, buscamos definir uma função

$$\int_a^b : \mathcal{I}[a, b] \to \mathbb{R},$$

onde $\mathcal{I}[a, b]$ é algum conjunto razoável de funções da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, que a cada $f \in \mathcal{I}[a, b]$ associa o número $\displaystyle\int_a^b f \in \mathbb{R}$. Dadas as intuições geométricas, bem como as exigências da vida, esperamos que a correspondência $\displaystyle\int_a^b$ satisfaça as seguintes condições:

(i) se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f \in \mathcal{I}[a, b]$;

(ii) se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f \in \mathcal{I}[a, b]$, então f é limitada;

[0] A menos que estejamos no contexto da Teoria da Medida, cuja motivação inicial reside, precisamente, em formalizar as noções de *medida* que podemos associar a *certos* subespaços. Este não é o nosso caso.

(iii) se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função constante, digamos $f = c$, então $f \in \mathcal{I}[a,b]$ e

$$\int_a^b c = c(b-a); \tag{8.0}$$

(iv) se $f_1, f_2 \in \mathcal{I}[a,b]$ e $f_1 \leq f_2$, então

$$\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2; \tag{8.1}$$

(v) dadas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c \in [a,b]$, temos $f \in \mathcal{I}[a,b]$ se, e somente se, $f \in \mathcal{I}[a,c]$ e $f \in \mathcal{I}[c,b]$;

(vi) se $f \in \mathcal{I}[a,b]$ e $c \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{8.2}$$

Mas afinal, o que é $\displaystyle\int_a^b f$? A resposta é: ainda não sabemos.

A lista acima apenas elenca as propriedades que gostaríamos que uma definição de integral possuísse. Uma vez dada uma definição *efetiva* de integral, digamos **D**, o conjunto $\mathcal{I}[a,b]$ passa a ser xingado de **conjunto das funções D-integráveis**. Como nossa abordagem sugere, há diversos tipos de integrais que satisfazem os axiomas acima, do mesmo modo que existem diversos tipos de grupos, espaços vetoriais, etc. A depender do contexto, um tipo de integração pode se adequar melhor do que outro.

Desse modo, as exigências (i) e (ii) acima se traduzem em dizer que "toda função contínua é integrável" e "toda função integrável é limitada", respectivamente. A condição (iii) pede que "funções constantes sejam integráveis", enquanto a condição (v) pede que "para qualquer $c \in [a,b]$, f é integrável em $[a,b]$ se, e somente se, f é integrável[1] em $[a,c]$ e $[c,b]$".

Muito em breve vamos nos preocupar com o problema de dar *uma* definição de integração – a saber, a integral de Riemann – mas, por enquanto, vamos explorar o que pode ser feito segundo essa abordagem axiomática. Para aquecer, sugerimos o próximo

Exercício 8.0. Mostre que se $f \in \mathcal{I}[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^a f = 0$. ■

8.0.0 O teorema fundamental do Cálculo – mas já?

Como veremos a seguir, o teorema fundamental do Cálculo não é mérito de alguma definição arbitrária de integral, mas sim uma consequência inevitável de qualquer integração razoável. No que segue, assumimos que para cada $a \leq b$ existe uma correspondência $\displaystyle\int_a^b : \mathcal{I}[a,b] \to \mathbb{R}$ como definida acima.

Teorema 8.0.0 (Fundamental do Cálculo)**.** *Seja $f \in \mathcal{I}[a,b]$ e, para cada $x \in [a,b]$, defina*

$$F(x) := \int_a^x f.$$

[1] Embora, a rigor, devêssemos escrever "... $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis". Mas a vida é curta.

(a) A função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pela correspondência acima é contínua em cada $c \in [a,b]$.

(b) Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então F é diferenciável em c, e $F'(c) = f(c)$.

(c) Se f é contínua e $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaz $G'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Demonstração. Começamos provando o item (a). Como o axioma (ii) sobre $\int_a^b$ nos diz que toda função em $\mathcal{I}[a,b]$ é limitada, sabemos que existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$. Se ocorrer $M = 0$, acabou (por quê?!). Por isso, vamos supor $M > 0$.

Para $c \in [a,b]$, queremos mostrar que F é contínua em c. Para tanto, fixado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que para $x \in [a,b]$, $|x - c| < \delta$ acarrete $|F(x) - F(c)| < \varepsilon$. Por isso, vamos manipular a *expressão* $F(x) - F(c)$ marotamente.

Graças ao axioma (vi), para $x \geq c$ podemos afirmar que $F(x) - F(c) = \int_c^x f$, pois

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f - \int_a^c f = \int_a^c f + \int_c^x f - \int_a^c f = \int_c^x f.$$

Analogamente, se $x \leq c$, então $F(x) - F(c) = -\int_x^c f$ (por quê?!).

Agora, se $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, então a desigualdade $-M \leq f(w) \leq M$ permanece válida para qualquer $w \in [\alpha, \beta]$. Logo, os axiomas (iii) e (iv) garantem que

$$-M(\beta - \alpha) = \int_\alpha^\beta -M \leq \int_\alpha^\beta f \leq \int_\alpha^\beta M = M(\beta - \alpha),$$

donde segue que $\left|\int_\alpha^\beta f\right| \leq M(\beta - \alpha)$. Consequentemente, deve ocorrer

$$|F(x) - F(c)| \leq M|x - c|,$$

(por quê?!)[2] donde segue que basta tomarmos $\delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$ a fim de obter a desigualdade desejada, provando o item (a).

Provemos o item (b). Supondo a continuidade de f em $c \in [a,b]$, desejamos mostrar que o limite

$$F'(c) := \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c}$$

existe e, mais ainda, ocorre $F'(c) = f(c)$. Ora, pela continuidade de f em c, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ para o qual $0 < |x - c| < \delta$ com $x \in [a,b]$ implicam em

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Logo, para $x > c$ com $|x - c| < \delta$, os axiomas (iii) e (iv) nos dão

$$(f(c) - \varepsilon)(x - c) = \int_c^x (f(c) - \varepsilon) \leq \int_c^x f \leq \int_c^x (f(c) + \varepsilon) = (f(c) + \varepsilon)(x - c),$$

[2]Dica: lembre-se de que pode ocorrer $x \geq c$ ou $x \leq c$.

donde segue que

$$f(c)-\varepsilon \le \frac{1}{x-c}\int_c^x f \le f(c)+\varepsilon.$$

Como, neste caso, $F(x)-F(c)=\displaystyle\int_c^x f$, a desigualdade acima se traduz em

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)\right|<\varepsilon,$$

como queríamos. Deixamos o caso "$x<c$" como exercício.

Finalmente, provemos (c). Pela parte (b), sabemos que F é *uma* antiderivada de f. Logo, pelo Teorema do Valor Médio[3], existe uma constante $C\in\mathbb{R}$ tal que $G(x)=F(x)+C$ para todo $x\in[a,b]$. Consequentemente,

$$G(b)-G(a)=(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a)=\int_a^b f-\int_a^a f=\int_a^b f,$$

como desejado. $\square$

Nossa argumentação mostra que, uma vez definida uma noção de integração satisfazendo os axiomas (i), ..., (vi), teremos o Teorema Fundamental do Cálculo para a noção de integral em questão. Em particular, independentemente da definição adotada, o item (c) do Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que

$$\int_a^b f = G(b)-G(a),$$

qualquer que seja a antiderivada G de f – ao passo que o item (b) nos diz que uma antiderivada necessariamente deve existir. Assim, a menos de mostrar a *existência* de uma integração, já sabemos qual o único valor possível para a integral de uma função contínua $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$.

Exercício 8.1. Seja $\displaystyle\int$ uma noção de integral tal que $\displaystyle\int_a^b$ satisfaz os axiomas (i), ..., (vi) para cada par $a,b\in\mathbb{R}$ com $a\le b$.

(*a*) Mostre que se $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ são contínuas, então

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

(*b*) Mostre que se $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e $\alpha\in\mathbb{R}$, então

$$\int_a^b \alpha f=\alpha\int_a^b f.$$

(*c*) Mostre que se $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, então $|f|$ é contínua e

$$\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b |f|.$$

$\blacksquare$

[3]O que já deveria ter sido visto em Análise I, certo?!

8.0.1 Para saber mais

- A exposição acima foi baseada no material *Honors Calculus*, de Pete L. Clark, disponível em http://math.uga.edu/~pete/2400full.pdf. Na prática, os axiomas que listamos visam elencar o mínimo necessário para se ter o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse sentido, convém notar que o axioma (ii), que pede a limitação das funções integráveis, pode ser eliminado se, no enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo, exigirmos que a função f seja limitada.

- Uma abordagem semelhante é apresentada no (excelente) *Undergraduate Analysis*, de Serge Lang.

- Dada a natureza axiomática de nossa argumentação, qualquer outro livro de Análise também deve apresentar uma demonstração semelhante para o Teorema Fundamental do Cálculo. Inclusive, os livros do Elon dão conta do recado.

8.1 A integral de Riemann – crua

Vamos determinar um *procedimento* que associa a *certas* funções da forma $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, um único número L, que será denotado por $\displaystyle\int_a^b f$. Uma vez feito isso, mostraremos que tal noção de integral satisfaz os axiomas elencados na última aula.

8.1.0 Uma digressão topológica: redes

A Riemann-integrabilidade é irresistivelmente parecida com a definição de sequência convergente, certamente vista no curso de Análise I. Se, por um momento, pudéssemos interpretar a noção anterior em termos de sequências convergentes, certas consequências seriam imediatas.

- Lembre-se de que buscamos definir uma *função* $\displaystyle\int_a^b : \mathcal{I}[a,b] \to \mathbb{R}$. Desse modo, é preciso garantir a unicidade do número $L \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\displaystyle\int_a^b f = L$. Se o número L na definição de integrabilidade fosse o limite de uma sequência, teríamos a unicidade automática!

- Já sabemos que se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências convergentes com $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n.$$
Logo, se a definição de integrabilidade fosse dada como o limite de uma sequência, teríamos automaticamente
$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2.$$

- Analogamente, das propriedades operatórias dos limites de sequências, resultaria que se f e g fossem integráveis, então $\alpha f + \beta g$ seriam integráveis para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

A vida, no entanto, não é justa, e a definição de integrabilidade que apresentamos não é equivalente à definição de uma sequência convergente. Ainda assim, o destino colocou esta disciplina nas mãos de um topólogo geral – e somos uma espécie com muitos truques na manga.

Pergunta. Por que só estudar a convergência de sequências da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$?

Alternativamente: o que há de tão especial em $\mathbb{N}$ para que nos preocupemos apenas com a convergência de sequências indexadas por naturais?

Resposta[4]**.** O conjunto $\mathbb{N}$, munido de sua ordem usual, constitui um "molde de convergência": os pontos de $\mathbb{N}$ "*convergem*" *naturalmente* para $+\infty$, quanto maior o $n \in \mathbb{N}$, mais próximo ele está de $+\infty$ (o fato de que eles nunca atingirão $+\infty$ é apenas uma tragédia da vida). Nesse sentido, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ nada mais é do que um modo abstrato de comparar pontos da reta com os pontos de $\mathbb{N}$: quando a sequência converge para um ponto $x \in \mathbb{R}$, significa que x faz precisamente o papel de $+\infty$.

[4] A rigor: uma das respostas possíveis.

Qual a importância disso? Ora, segundo tal perspectiva, $\mathbb{N}$ não é mais útil do que qualquer outra pré-ordem dirigida.

8.1.1 A integral de Riemann - grelhada

Os lemas anteriores mostram que, para efeitos práticos, redes convergentes se comportam tão bem quanto sequências convergentes. Embora isso seja interessante por si só, temos uma *agenda* em toda essa digressão: a definição de Riemann-integrabilidade é, precisamente, a exigência de que uma rede específica convirja!

De fato, fixado o intervalo fechado $[a, b]$, o conjunto

$$\mathbb{P} := \{(\mathcal{P}, t) : (\mathcal{P}, t) \text{ é uma partição marcada de } [a, b]\}$$

é dirigido pela relação

$$(\mathcal{P}, t) \preceq (\mathcal{Q}, q) \Leftrightarrow \|\mathcal{Q}\| \leq \|\mathcal{P}\|.$$

De fato, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são duas partições de $[a, b]$, então $\mathcal{R} := \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ determina uma partição de $[a, b]$ que necessariamente satisfaz $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{P}\|$ e $\|\mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$. Embora seja intuitivamente óbvio, é moralmente edificante apresentarmos alguma argumentação: note que se $a < c < b$ e $c \notin \mathcal{Q}$, então $\|\mathcal{Q} \cup \{c\}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$, donde facilmente segue, por indução, que para qualquer partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ deve-se obter $\|\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$; por simetria, também deve ocorrer $\|\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}\| \leq \|\mathcal{P}\|$, como queríamos.

Logo, $(\mathcal{P}, t), (\mathcal{Q}, q) \preceq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, r)$, quaisquer que sejam as *tags* associadas às respectivas partições, mostrando que $\mathbb{P}$ é um conjunto dirigido. Desse modo, para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a correspondência $\sum f : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ que faz

$$(\mathcal{P}, t) \mapsto \sum_{(\mathcal{P},t)} f$$

é uma rede em $\mathbb{R}$! Pela definição que apresentamos, um número $L \in \mathbb{R}$ satisfaz $L = \lim\limits_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum\limits_{(\mathcal{P},t)} f$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição $(\mathcal{Q}, q)$ de $[a, b]$ tal que se $(\mathcal{P}, t) \succeq (\mathcal{Q}, q)$, então

$$\left| \sum_{(\mathcal{P},t)} f - L \right| < \varepsilon,$$

o que é naturalmente equivalente à definição de integrabilidade que demos inicialmente[5].

Corolário 8.1.0. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então existe um único número $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo a definição de integrabilidade.*

Demonstração. Evidentemente, tal resultado segue pois L é o limite de uma rede. □

Dada a unicidade garantida acima, escrevemos $\displaystyle\int_a^b f$ para indicar o único número L na definição de integrabilidade, o qual passa a ser chamado de **a integral** (de Riemann) da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

[5]Pois, dado $\delta > 0$, podemos sempre obter uma partição $\mathcal{Q}$ de $[a, b]$ com $\|\mathcal{Q}\| < \delta$.

Corolário 8.1.1. *Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções Riemann-integráveis, tais que $f \leq g$, então*
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demonstração. Basta notar que a desigualdade $f \leq g$ nos dá $\sum\limits_{(\mathcal{P},t)} f \leq \sum\limits_{(\mathcal{P},t)} g$ para qualquer partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a,b]$. □

Corolário 8.1.2. *Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são Riemann-integráveis, então $\alpha f + \beta g$ é Riemann-integrável, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e vale*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Demonstração. Por hipótese, os limites $\displaystyle\int_a^b f := \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} f$ e $\displaystyle\int_a^b g := \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} g$ existem. Como a função $\psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x,y) := \alpha x + \beta y$ é contínua, temos

$$\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g := \psi\left(\int_a^b f, \int_a^b g\right) = \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \psi\left(\sum_{(\mathcal{P},t)} f, \sum_{(\mathcal{P},t)} g\right) = \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} (\alpha f + \beta g),$$

onde a última igualdade se deve pois

$$\begin{aligned}\psi\left(\sum_{(\mathcal{P},t)} f, \sum_{(\mathcal{P},t)} g\right) &= \alpha \sum_{(\mathcal{P},t)} f + \beta \sum_{(\mathcal{P},t)} g = \alpha \sum_{i=1}^n f(t_i)(a_i - a_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^n g(t_i)(a_i - a_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(a_i - a_{i-1}) := \sum_{(\mathcal{P},t)} (\alpha f + \beta g).\end{aligned}$$

Como o último limite corresponde, precisamente, à integral de $\alpha f + \beta g$, o resultado segue. □

Corolário 8.1.3. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, então f é integrável e $\displaystyle\int_a^b c = c(b-a)$.*

Demonstração. Para qualquer partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a,b]$, temos $\sum\limits_{(\mathcal{P},t)} f = c(b-a)$. Como redes constantes são obviamente convergentes, o resultado segue. □

Observação 8.1.4. Um modo mais ~~pomposo~~ profissional de enunciar os dois últimos corolários é dizer que o conjunto $\mathcal{R}[a,b]$, das funções Riemann-integráveis, é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$, onde o último denota o espaço vetorial das funções da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$. △

A fim de nos convencermos de que temos em mãos uma noção razoável de integração, precisamos mostrar ainda que

- se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é Riemann-integrável,

- se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é limitada,
- para uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f é Riemann-integrável se, e somente se, f é Riemann-integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$, para qualquer $c \in [a,b]$, e ainda
- se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $c \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Na próxima aula vamos nos ocupar dos itens acima, a menos do segundo: como ele pode ser provado de modo relativamente simples sem o recurso de redes convergentes, ele será o

Exercício 8.2. Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é limitada. ■

8.1.2 Para saber mais

- A exposição acima foi baseada na discussão sobre integrais de Riemann generalizadas, apresentada no livro *Handbook of Analysis and its Foundations* (de agora em diante, HAF), de Eric Schechter, com pitadas do livro *Limits*, de Alan Beardon.
- Classicamente, os livros de Análise costumam atrasar a apresentação da integral de Riemann. Em vez disso, eles tratam o problema de integração por meio de uma abordagem (sem redes) que usa o supremo e o ínfimo de certas somas de Riemann. A rigor, isso define a chamada **integral de Darboux** – e não a *integral de Riemann*.
- Isso não caracteriza um problema pois, como pode-se provar, uma função é Riemann-integrável se, e somente se, é Darboux-integrável – e o valor das integrais coincide! Conjecturo que tal desvio seja frequentemente tomado pois há quem acredite que seja mais fácil trabalhar com supremos e ínfimos do que com redes.
- Partindo da premissa de que "conhecimento é poder", abordaremos em tempo oportuno[6] as noções de integrabilidade segundo Darboux, mas sem grande ênfase, dado que obteremos os resultados importantes por caminhos mais diretos.
- O leitor apressado e que tem interesse em aprender a integração segundo Darboux pode consultar, por exemplo, os livros de Análise do Elon.

[6] Mais precisamente: no final da próxima aula!

8.2 Critérios de Riemann-integrabilidade: Riemann-Darboux

Na aula anterior, definimos a classe $\mathcal{R}[a,b]$ das funções Riemann-integráveis em $[a,b]$, que consiste precisamente das funções da forma $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que existe

$$\int_a^b f := \lim_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}} \sum_{(\mathcal{P},t)} f,$$

onde $\mathbb{P}$ é o conjunto das partições marcadas de $[a,b]$, dirigido pela relação $\prec$ que faz $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ se, e somente se, $\|\mathcal{Q}\| < \|\mathcal{P}\|$. Em particular, o Lema 5 da aula anterior, o qual afirma que uma rede $(\rho_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $\mathbb{R}$ converge se, e somente se, for de Cauchy, nos dá um critério para verificar se uma função é Riemann-integrável ou não.

Lema 8.2.0 (critério de Cauchy)**.** *Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer partições marcadas $(\mathcal{P},t)$ e $(\mathcal{Q},q)$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\|, \|\mathcal{Q}\| < \delta$ ocorre*

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f\right| < \varepsilon$$

Demonstração. Isso é exatamente pedir que a rede $\left(\sum_{(\mathcal{P},t)} f\right)_{(\mathcal{P},t)\in\mathbb{P}}$ seja de Cauchy. □

A importância desse tipo de critério está no fato de que nem sempre é óbvio estimar o valor de uma integral (mesmo com o Teorema Fundamental do Cálculo!), de modo que ele nos permite decidir se uma função é Riemann-integrável sem, necessariamente, conhecer o valor de sua integral. Nesse sentido, há um critério de integrabilidade absurdamente mais rápido que provaremos a seguir – antes, porém, vamos obter uma versão um pouco mais amigável do lema anterior. Note que já não precisamos do recurso das redes!

Proposição 8.2.1 (critério de Riemann-Darboux)**.** *Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ tal que*

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f\right| < \varepsilon$$

para quaisquer tags t e q associadas à partição $\mathcal{P}$.

Demonstração. A ida é trivial (certo?!). Para a recíproca, dado $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ satisfazendo a tese do Lema 8.2.0. Para isso, fixamos $M > 0$ satisfazendo $|f| < M$ e uma partição $\mathcal{S} := (s_0, \ldots, s_n)$ como no enunciado para $\frac{\varepsilon}{4}$. Vamos usar o artifício de Darboux, e considerar os números

$$U(f,\mathcal{S}) := \sum_{i=1}^{n} M_i(s_i - s_{i-1}) \quad \text{e} \quad L(f,\mathcal{S}) := \sum_{i=1}^{n} m_i(s_i - s_{i-1}),$$

onde $M_i := \sup\{f(x) : x \in [s_{i-1}, s_i]\}$ e $m_i := \inf\{f(x) : x \in [s_{i-1}, s_i]\}$, os quais existem pois f é limitada. Pela definição de supremo e ínfimo, note que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos tomar $u_i, l_i \in [s_{i-1}, s_i]$ tais que

$$M_i - \frac{\varepsilon}{8(b-a)} < f(u_i) \quad \text{e} \quad m_i + \frac{\varepsilon}{8(b-a)} > f(l_i),$$

donde segue que

$$U(f, \mathcal{S}) < \sum_{(\mathcal{S},u)} f + \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{e} \quad -L(f, \mathcal{S}) < -\sum_{(\mathcal{S},l)} f + \frac{\varepsilon}{8},$$

e, consequentemente,

$$U(f, \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{S}) < \sum_{(\mathcal{S},u)} f - \sum_{(\mathcal{S},l)} f + \frac{\varepsilon}{4} \leq \left| \sum_{(\mathcal{S},u)} f - \sum_{(\mathcal{S},l)} f \right| + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $u := (u_1, \ldots, u_n)$ e $l := (l_1, \ldots, l_n)$. A desigualdade acima será útil quando mostrarmos que $\delta := \dfrac{\varepsilon}{8Mm}$ faz o serviço desejado, onde, por comodidade, $m := n + 1$ denota a cardinalidade da partição fixada $\mathcal{S}$. Começamos observando que para partições $(\mathcal{P}, t)$ e $(\mathcal{Q}, q)$ de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\|, \|\mathcal{Q}\| < \delta$, deve ocorrer

$$\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{Q}),$$

onde $U(f, \mathcal{P})$ e $L(f, \mathcal{Q})$ são definidos como acima. Há agora dois pontos importantes a observarmos:

- o primeiro é que a escolha do δ garante

$$U(f, \mathcal{P}) - U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{4};$$

- já o segundo, que discutiremos com calma em breve, consiste em se convencer de que

$$U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) \leq U(f, \mathcal{S}) \quad \text{e} \quad -L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) \leq -L(f, \mathcal{S}).$$

Feito isso[7], note que

$$\begin{aligned}
\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{Q}) = \\
&= U(f, \mathcal{P}) - U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) + U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) + L(f, \mathcal{Q} \cup \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{Q}) < \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + U(f, \mathcal{S}) - L(f, \mathcal{S}) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

de modo que ao repetirmos o argumento trocando os papéis de $(\mathcal{P}, t)$ e $(\mathcal{Q}, q)$, teremos a desigualdade desejada. □

Embora útil de uma perspectiva quantitativa, dificilmente um critério será mais estarrecedor do que o próximo, que em certo sentido caracteriza as funções Riemann-integráveis qualitativamente. Para enunciá-lo, precisamos de uma brevíssima digressão sobre medida: dizemos que um subconjunto $N \subset \mathbb{R}$ tem **medida nula** (**zero**) se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma coleção $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos, tais que $N \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} m(I_n) < \varepsilon$, onde $m(I_n) := \sup I_n - \inf I_n$.

[7]A prova do primeiro item está na Seção 8.4.0. Já a prova do segundo item está na Seção 8.3.1.

Exercício 8.3. Dado $x \in \mathbb{R}$, mostre que $\{x\}$ tem medida nula. ■

Exercício 8.4. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenha-se $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de medida nula. Mostre que $\mathcal{M} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n$ tem medida nula. ■

Exercício 8.5. Mostre que se $N \subset \mathbb{R}$ é enumerável, então N tem medida nula. ■

8.2.0 Para saber mais

A exposição acima foi costurada de vários materiais.

- O critério de Cauchy para integrabilidade é mera tradução do mesmo critério para convergência de redes, e foi sugerido no HAF de Schechter (e, possivelmente, em muitas outras fontes).

- Por sua vez, a demonstração do critério de Riemann-Darboux foi uma adaptação de uma discussão realizada por Tom Apostol em seu clássico *Mathematical Analysis*[8]: secretamente, a argumentação apresentada permite trocar a exigência "existe $\delta > 0$ tal que $\|\mathcal{P}\| < \delta$ implica..." por "existe uma partição $\mathcal{Q}$ de $[a, b]$ tal que se $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$, então...". Para a nossa exposição baseada em redes, o critério que usa inclusões em vez de normas de partições daria algumas demonstrações mais simples – mas pecaríamos de um ponto de vista histórico-cultural.

[8] Exercício 7.4, página 174. Apesar disso, nossa prova se baseou na exposição de Charles Pugh, no livro *Real Mathematical Analysis*.

8.3 O critério de Lebesgue para Riemann-integrabilidade

Teorema 8.3.0 (critério de Lebesgue). *Uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, f é limitada e o conjunto*

$$N := \{x \in [a,b] : f \text{ é descontínua em } x\}$$

tem medida nula.

Demonstração. Por ora, vamos nos preocupar apenas com a recíproca, devido a sua urgência. Fixemos números reais $M > 0$ e $\alpha > 0$, onde $|f| \leq M$ e α deve satisfazer uma condição que ainda vamos determinar. Para cada $s \in (a,b) \setminus N$, a continuidade de f em s nos dá um intervalo aberto $(u_s, v_s) \subset (a,b)$ em torno de s tal que a desigualdade $|f(x) - f(y)| < \alpha$ ocorre para quaisquer $x, y \in (u_s, v_s)$ (por quê?!)[9]. Por outro lado, como $N \cup \{a,b\}$ tem medida nula, existe uma coleção de intervalos abertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$N \cup \{a,b\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} m(I_n) < \alpha.$$

Logo, para $\mathcal{V} := \{(u_s, v_s) : s \in (a,b) \setminus N\} \cup \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, temos

$$[a,b] \subset \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V,$$

donde a compacidade de $[a,b]$ nos permite tomar $V_0, \ldots, V_k \in \mathcal{V}$ tais que $[a,b] \subset V_0 \cup \ldots \cup V_k$. Como cada V_j é da forma (α_j, β_j), podemos considerar a partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ formada pelos pontos a, b e pelos extremos α_j e β_j que estão contidos em (a,b) (certamente algum $\alpha_i < a$, bem como algum $\beta_j > b$, pois existem V_i e V_j com $a \in V_i$ e $b \in V_j$). Por simplicidade, vamos indicar $\mathcal{P} := \{x_0, \ldots, x_l\}$, com $a := x_0 < x_1 < \ldots < x_l := b$. Agora, para tags t e q associadas à partição $\mathcal{P}$, temos

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f\right| = \left|\sum_{i=1}^{l} (f(t_i) - f(q_i))(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{l} |f(t_i) - f(q_i)| \cdot |x_i - x_{i-1}|.$$

Naturalmente, um subintervalo $I := (x_{i-1}, x_i)$ pode ou não estar contido em algum dos (u_s, v_s): se estiver, então $|f(x) - f(y)| < \alpha$ ocorre para quaisquer $x, y \in I$; se não estiver, então certamente $I \subset I_j$ para algum j. Logo, a soma dos comprimentos dos intervalos que não estão contidos em intervalos da forma (u_s, v_s) é menor do que α.

Disso tudo, inferimos (por quê?!)

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f\right| \leq \sum_{i=1}^{l} |f(t_i) - f(q_i)| \cdot |x_i - x_{i-1}| \leq 2M\alpha + \alpha(b-a) = \alpha(2M + b - a).$$

Portanto, para $\varepsilon > 0$ tomado arbitrariamente, ao escolhermos $\alpha < \dfrac{\varepsilon}{2M + b - a}$ resulta que a partição $\mathcal{P}$ obtida como acima satisfaz o critério de Riemann-Darboux e, consequentemente, f é integrável. □

Exercício 8.6. Prove a ida do teorema anterior, ou seja: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é limitada e o conjunto N dos pontos de $[a,b]$ nos quais f é descontínua tem medida nula. ■

Dica. Estude a *oscilação* de f (veja o roteiro no final desta nota de aula). □

[9] Dica: use a continuidade em s com $\dfrac{\alpha}{2}$.

8.3.0 Verificando os axiomas de integral

Vamos provar que a integral de Riemann satisfaz o restante dos axiomas que estipulamos em nossa primeira aula. Note que, como consequência imediata, teremos a validade do Teorema Fundamental do Cálculo para tal noção de integração.

Corolário 8.3.1. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é Riemann-integrável.*

Corolário 8.3.2. *Dados $c \in [a,b]$ e uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f é Riemann-integrável em $[a,b]$ se, e somente se, f é Riemann-integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$.*

Demonstração. Se f é Riemann-integrável em $[a,b]$, então f é limitada e o conjunto $N \subset [a,b]$ dos pontos de descontinuidade tem medida nula. Logo, f é limitada em $[a,c]$ e $[c,b]$ e, naturalmente, os conjuntos $N \cap [a,c]$ e $N \cap [c,b]$ têm medida nula, mostrando que f é Riemann-integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$. Reciprocamente, a Riemann-integrabilidade de f nos intervalos $[a,c]$ e $[c,b]$ garante que f é limitada em $[a,b]$, bem como o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula (por ser reunião de dois conjuntos de medida nula). □

Exercício 8.7. Sejam $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funções Riemann-integráveis. Mostre que $fg\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável. ■

Exercício 8.8. Sejam $a \le c \le d \le b$ e $\chi_{[c,d]}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a função que faz $\chi_{[c,d]}(x) = 0$ para $x \notin [c,d]$ e $\chi_{[c,d]}(x) = 1$ caso contrário. Mostre que $\chi_{[c,d]}$ é Riemann-integrável. ■

Lema 8.3.3. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $a \le c \le d \le b$, então*

$$\int_c^d f = \int_a^b f\chi_{[c,d]}.$$

Demonstração. Naturalmente, não há prejuízo em supor $a < c \le d < b$. Agora, pelo corolário anterior, $\displaystyle\int_c^d f$ deve existir, enquanto os dois últimos exercícios nos dizem o mesmo sobre o número $L := \displaystyle\int_a^b f\chi_{[c,d]}$. Vamos mostrar que $L = \displaystyle\int_c^d f$. Fixado $\varepsilon > 0$, pelo modo como tomamos L, existe $\delta > 0$ tal que se $(\mathcal{P},t)$ é uma partição marcada de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$\left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f\chi_{[c,d]} - L\right| < \varepsilon.$$

Ora, qualquer que seja a partição $(\mathcal{Q},q)$ de $[c,d]$ com $\|\mathcal{Q}\| < \delta$, ~~a partição $\mathcal{P} := \mathcal{Q} \cup \{a,b\}$~~ podemos adicionar tantos pontos quantos forem necessários a $\mathcal{Q}$ de modo a obter uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$, com $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ e $\|\mathcal{P}\| \le \|\mathcal{Q}\| < \delta$ (por quê?). Logo, para qualquer tag t de $\mathcal{P}$ com $q \subset t$, temos

$$\left|\sum_{(\mathcal{Q},q)} f - L\right| = \left|\sum_{(\mathcal{P},t)} f\chi_{[c,d]} - L\right| < \varepsilon,$$

pois $f\chi_{[c,d]}(x) = f\chi_{[c,d]}(x) = 0$ para $x \in [a,c) \cup (d,b]$. □

Corolário 8.3.4. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $c \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demonstração. Suponha $f(c) = 0$. Note que $f = f\chi_{[a,c]} + f\chi_{[c,b]}$. Como $f\chi_{[a,c]}$ e $f\chi_{[c,b]}$ são Riemann-integráveis, resulta

$$\int_a^b f = \int_a^b (f\chi_{[a,c]} + f\chi_{[c,b]}) = \int_a^b f\chi_{[a,c]} + \int_a^b f\chi_{[c,b]},$$

donde o resultado segue do lema anterior. Para o caso geral, veja a Seção 8.4.1. □

Exercício 8.9. Sejam $f\colon [a,b] \to [c,d]$ e $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ funções. Mostre que se φ é contínua e f é Riemann-integrável, então $\varphi \circ f$ é Riemann-integrável. ■

Exercício 8.10. Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então $|f|$ é Riemann-integrável. ■

8.3.1 Digressão: A integral de Darboux

A integral de Darboux apareceu implicitamente em nossa demonstração do critério de integrabilidade de Riemann-Darboux – e não apenas no nome do critério! De fato, para uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição $\mathcal{P} := \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$, as **somas de Darboux** são ~~precisamente as somas de Riemann~~ as somas

$$U(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n M_i(a_i - a_{i-1}) \quad \text{e} \quad L(f,\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n m_i(a_i - a_{i-1}),$$

onde ~~u e l são, respectivamente, as tags associadas a $\mathcal{P}$ tais que~~

$$M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

As letras U e L acima fazem referência à terminologia estrangeira: $U(f,\mathcal{P})$ é a **soma superior**[10] **de Darboux** da partição $\mathcal{P}$, enquanto $L(f,\mathcal{P})$ é a **soma inferior**[11] **de Darboux** da partição. Evidentemente, qualquer que seja a tag t associada à partição $\mathcal{P}$, deve-se ter

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \sum_{(\mathcal{P},t)} f \leq U(f,\mathcal{P}).$$

Uma vez que, para $m := \inf_{[a,b]} f$ e $M := \sup_{[a,b]} f$ deve ocorrer

$$m(b-a) \leq L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) \leq M(b-a),$$

resulta que existem

$$\underline{\mathcal{I}}_a^b f := \sup\{L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}\} \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{I}}_a^b := \inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}\},$$

chamadas respectivamente de **integral inferior** de Darboux e **integral superior** de Darboux da função f. Note que em geral, sempre ocorre $\underline{\mathcal{I}}_a^b f \leq \overline{\mathcal{I}}_a^b f$.

[10] *Upper.*
[11] *Lower.*

Isso não é inteiramente óbvio. A desigualdade acima segue de uma observação importante – e que implicitamente já foi usada: se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são partições de $[a,b]$, então

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{Q}).$$

De fato, se $c \notin \mathcal{P}$, então existe um único i tal que $a_{i-1} < c < a_{i+1}$, com $a_{i-1}, a_i \in \mathcal{P}$ e, por termos $[a_{i-1},c],[c,a_i] \subset [a_{i-1},a_i]$, resulta que

$$\inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x) \leq \inf_{x\in[a_{i-1},c]} f(x), \inf_{x\in[c,a_i]} f(x),$$

donde segue que $L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}\cup\{c\})$. Analogamente, mostra-se que $U(f,\mathcal{P}\cup\{c\}) \leq U(f,\mathcal{P})$. O caso geral segue da argumentação acima, por indução.

Exercício 8.11. Prove que, de fato, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, então $\underline{\mathcal{I}}_a^b f \leq \overline{\mathcal{I}}_a^b f$. ■

Finalmente, dizemos que f é **Darboux-integrável** se ocorrer $\underline{\mathcal{I}}_a^b f = \overline{\mathcal{I}}_a^b f$. Nossas dívidas para com os possíveis fãs de Darboux se pagam no próximo

Teorema 8.3.5. *Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, é Darboux-integrável.*

Demonstração. Suponha f Darboux-integrável e xingue por I o valor idêntico das integrais inferiores e superiores de Darboux. Das definições de supremo e ínfimo, para $\varepsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ tais que

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{P}) \leq I \leq U(f,\mathcal{Q}) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{P}) \leq L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{Q}) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

donde segue (por quê?!) $|L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) - U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})| < \varepsilon$. Como $L(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq \sum_{(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},t)} f \leq U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})$ para qualquer tag t de $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, segue que

$$\left| \sum_{(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},t)} f - \sum_{(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q},q)} f \right| < \varepsilon,$$

para quaisquer tags t e q de $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, mostrando assim que a partição $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ de $[a,b]$ satisfaz o critério de Riemann-Darboux para $\varepsilon > 0$. Da arbitrariedade do ε tomado, concluímos que f é Riemann-integrável.

Reciprocamente, supondo f Riemann-integrável, o critério de Riemann-Darboux nos diz que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ tal que

$$\left| \sum_{(\mathcal{P},t)} f - \sum_{(\mathcal{P},q)} f \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para quaisquer tags t e q associadas à partição $\mathcal{P}$ – em particular, $|U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})| < \varepsilon$ (por quê?!). Por termos $\overline{\mathcal{I}}_a^b f \leq U(f,\mathcal{P})$ e $L(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\mathcal{I}}_a^b f$, resulta que

$$\overline{\mathcal{I}}_a^b f - \underline{\mathcal{I}}_a^b f \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

donde a arbitrariedade do ε nos permite garantir que $\overline{\mathcal{I}}_a^b f \leq \underline{\mathcal{I}}_a^b f$, como queríamos. □

Em particular, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então

$$\underline{\mathcal{I}}_a^b f = \int_a^b f = \overline{\mathcal{I}}_a^b f,$$

isto é: as três noções de integral coincidem. A justificativa está na Seção 8.4.2.

8.3.2 Para saber mais

A exposição acima foi costurada de vários materiais.

- A demonstração da recíproca do critério de Riemann-integrabilidade de Lebesgue foi adaptado do texto disponível em `https://math.stackexchange.com/a/163409/128988`, que curiosamente trata do problema no contexto dos *espaços de Banach*.

- A demonstração para a ida do critério mencionado acima pode seguir o seguinte roteiro, adaptado do livro *Real Mathematical Analysis*, de Charles Pugh.

  (i) Defina a **oscilação** de uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ em $x \in [a,b]$ como

  $$o_x(f) := \inf\{o_f(x-\delta, x+\delta) : \delta > 0\}$$

  onde $o_f(A) := \sup_{s,t\in A} |f(s) - f(t)|$.

  (ii) Prove que f é contínua em x se, e somente se, $o_x(f) = 0$.

  (iii) Como $o_x(f) \geq 0$ para todo x, segue que f é descontínua em x se, e somente se, $o_x(f) > 0$.

  (iv) Mostre que o conjunto $N \subset [a,b]$ dos pontos de descontinuidade de f é reunião dos conjuntos N_k, onde $N_k := \{x \in [a,b] : o_x(f) > \frac{1}{k}\}$, para $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

  (v) Como já vimos (Problema 1) que funções Riemann-integráveis são limitadas, para concluir a ida do critério de Lebesgue basta mostrar que se f é Riemann-integrável, então N_k tem medida nula, para cada $k \in \mathbb{N}$ (por quê?!).

  (vi) Note que se $N_k \cap [c,d] \neq \emptyset$, então $\sup_{[c,d]} f - \inf_{[c,d]} f \geq \frac{1}{k}$.

  (vii) Dada uma partição $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ tal que $|U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})| < \frac{\varepsilon}{2k}$, e indicando por J a coleção dos índices i tais que $[a_{i-1}, a_i] \cap N_k \neq \emptyset$, resulta que

  $$\frac{1}{k}\sum_{i\in J}(a_i - a_{i-i}) \leq \sum_{i\in J}(\sup_{[a_{i-1},a_i]} f - \inf_{[a_{i-1},a_i]} f)(a_i - a_{i-1}) \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

  donde segue que, exceto possivelmente pelos pontos $a_0, \ldots, a_n$ (que podem ou não pertencer a N_k), a soma dos comprimentos dos intervalos $[a_{i-1}, a_i]$, com $i \in J$, é menor do que ε.

  (viii) Conclua que N_k tem medida nula.

- A digressão sobre integrais de Darboux foi uma mescla das discussões apresentadas nos livros *Limits*, de Alan Beardon, e *Theories of Integration*, de Kurtz & Swartz. De modo geral, qualquer livro minimamente razoável dá conta de uma boa exposição sobre isso – o que inclui os livros do Elon.

8.4 Outros comentários

8.4.0 Justificativa para a desigualdade da Proposição 8.2.1

Queríamos nos convencer do seguinte: fixada uma partição $\mathcal{S} = \{s_0, \dots, s_n\}$ de $[a,b]$, com $m := n+1$ elementos, se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \dfrac{\varepsilon}{8Mm}$, então

$$U(f,\mathcal{P}) - U(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{S}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad L(f,\mathcal{Q}\cup\mathcal{S}) - L(f,\mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Isso segue do próximo lema geral.

Lema 8.4.0. *Fixada uma partição $\mathcal{P} := \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$, chame por $\mathcal{P}_1$ uma partição de $[a,b]$ obtida com o acréscimo de um único ponto a $\mathcal{P}$. Então, para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada por $M > 0$, temos*

$$L(f,\mathcal{P}_1) \leq L(f,\mathcal{P}) + 2M\|\mathcal{P}\| \quad e \quad U(f,\mathcal{P}_1) \geq U(f,\mathcal{P}) - 2M\|\mathcal{P}\|.$$

Demonstração. Seja $z \in [a,b]$ com $z \notin \mathcal{P}$ e chame $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P} \cup \{z\}$. Por $\mathcal{P}$ ser uma partição de $[a,b]$, existe um único $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{k-1} < z < a_k$. Agora, chame por

$$m := \inf\{f(x) : x \in [a_{k-1}, z]\},$$

$$m' := \inf\{f(x) : x \in [z, a_k]\}, \text{ e}$$

$$\gamma_i := \inf\{f(x) : x \in [a_{i-1}, a_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Note que

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}_1) - L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_k(a_k - a_{k-1}) + m(z - a_{k-1}) + m'(a_k - z) + \sum_{j=k+1}^{n} \gamma_j(a_j - a_{j-1}) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(a_i - a_{i-1}) = \\ &= m(z - a_{k-1}) + m'(a_k - z) - \gamma_k(a_k - a_{k-1}) \leq M(z - a_{k-1}) + M(a_k - z) + M(a_k - a_{k-1}) \\ &= M(z - a_{k-1} + a_k - z + a_k - a_{k-1}) = 2M(a_k - a_{k-1}) \leq 2M\|\mathcal{P}\|, \end{aligned}$$

mostrando a primeira desigualdade. A segunda desigualdade é análoga. □

Corolário 8.4.1. *Fixada uma partição $\mathcal{P} := (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$, chame por $\mathcal{P}_m$ uma partição de $[a,b]$ obtida com o acréscimo de m pontos. Então, para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada por $M > 0$, temos*

$$L(f,\mathcal{P}_m) \leq L(f,\mathcal{P}) + 2Mm\|\mathcal{P}\| \quad e \quad U(f,\mathcal{P}_m) \geq U(f,\mathcal{P}) - 2Mm\|\mathcal{P}\|.$$

Demonstração. Lema 1 + indução. □

Finalmente, basta notar que na desigualdade proposta em aula, $\mathcal{P}\cup\mathcal{S}$ é obtida a partir de $\mathcal{P}$ com o acréscimo de, no máximo, m pontos, já que $\mathcal{S}$ tem cardinalidade m.

8.4.1 Justificativa para a aditividade da integral

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $(c, d] \subseteq [a, b]$. A função $\chi_{(c,d]} \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, que faz $\chi_{(c,d]}(x) = 0$ se $x \notin (c, d]$ e $\chi_{(c,d]}(x) = 1$ caso contrário, é Riemann-integrável pois é limitada e descontínua apenas em c e d. Logo, se $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então $f\chi_{(c,d]}$ é Riemann-integrável. Como na prova do Lema 8.3.3, deve valer

$$\int_c^d f = \int_a^b f\chi_{(c,d]}.$$

Disso segue que se $c \in [a, b]$, então $f = f\chi_{[a,c]} + f\chi_{(c,b]}$ e, consequentemente

$$\int_a^b f = \int_a^b (f\chi_{[a,c]} + f\chi_{(c,b]}) = \int_a^b f\chi_{[a,c]} + \int_a^b f\chi_{(c,b]} = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

8.4.2 Igualdade das integrais

Aquele argumento da convergência de redes estava zoado. Melhor fazer desse outro jeito.

Supondo que $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, sabemos que f também deve ser Darboux-integrável, vice-versa, donde segue que existem $R, D \in \mathbb{R}$ tais que R é o valor da integral segundo Riemann e D é a integral segundo Darboux. Agora, note que para qualquer partição marcada $(\mathcal{Q}, q)$ de $[a, b]$ temos

$$|R - D| \leq \left| R - \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \right| + \left| \sum_{(\mathcal{Q},q)} f - D \right|.$$

Por f ser Darboux-integrável, deve existir uma partição $\mathcal{P}'$ de $[a, b]$ satisfazendo

$$D - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}') < D + \frac{\varepsilon}{2},$$

e por f ser Riemann-integrável, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{(\mathcal{P},t)} f - R \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para qualquer partição marcada $(\mathcal{P}, t)$ de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Logo, se tomarmos a partição $\mathcal{Q} := \mathcal{P}' \cup \Delta$, onde Δ é qualquer partição de $[a, b]$ com $\|\Delta\| < \delta$, teremos $\|\mathcal{Q}\| < \delta$ e, além disso, para qualquer tag q de $\mathcal{Q}$, teremos

$$D - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \mathcal{P}') \leq L(f, \mathcal{Q}) \leq \sum_{(\mathcal{Q},q)} f \leq U(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P}') < D + \frac{\varepsilon}{2},$$

mostrando que

$$\left| \sum_{(\mathcal{Q},q)} f - D \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De tudo o que vimos acima, resulta que $|R - D| < \varepsilon$. Logo, $R = D$.

8.4.3 Digressão: o teorema de Heine-Borel (em $\mathbb{R}$)

Na demonstração do critério de Lebesgue, usamos implicitamente o fato de que se $\mathcal{V}$ é uma coleção de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ tal que

$$(\star) \qquad [a,b] \subset \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V,$$

então existem $V_0,\ldots,V_k \in \mathcal{V}$ tais que $[a,b] \subset V_0 \cup \ldots \cup V_k$. Profissionais costumam se referir a tal fenômeno dizendo que "$[a,b]$ é compacto". Por desencargo de consciência, apresentamos a seguir uma prova de tal fato[12].

Teorema 8.4.2 (Heine-Borel)**.** *Dados $a,b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, o intervalo $[a,b]$ é compacto.*

Demonstração. Fixe $\mathcal{V}$ uma coleção de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ satisfazendo $(\star)$, e considere o subconjunto

$$A := \left\{ x \in [a,b] : \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \text{ finito tal que } [a,x] \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \right\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ pois $a \in A$. Como todo $x \in A$ satisfaz $a \leq x \leq b$, a completude de $\mathbb{R}$ garante a existência de $\sup A \in \mathbb{R}$ com $a \leq \sup A \leq b$. O plano para concluir o teorema é o seguinte: 1) mostrar que, necessariamente, ocorre $\sup A \in A$ e 2) mostrar que $\sup A = b$. Se fizermos isso, seguirá que $b \in A$ e, portanto, existem $V_0,\ldots,V_k \in \mathcal{V}$ tais que $[a,b] \subset V_0 \cup \ldots \cup V_k$, como queríamos.

- $\sup A \in A$: ou seja, precisamos mostrar que existe um subconjunto finito de $\mathcal{V}$ que recobre o intervalo $[a, \sup A]$. Ora, como $\sup A \in [a,b]$, existe $V := (\alpha,\beta) \in \mathcal{V}$ com $\sup A \in (\alpha,\beta)$. Tomando $\gamma \in [a,b]$ com $\alpha < \gamma < \sup A$, a definição de supremo nos garante $x \in A$ com $\gamma < x$ e, por sua vez, a definição de A exige que existam $U_0,\ldots,U_n \in \mathcal{V}$ tais que $[a,x] \subset U_0 \cup \ldots \cup U_n$. Logo, $[a,\sup A] \subset U_0 \cup \ldots \cup U_n \cup V$, mostrando que $\sup A \in A$, como afirmamos.

- $\sup A = b$: como temos $\sup A \leq b$, basta mostrarmos que não pode ocorrer $\sup A < b$. Se ocorresse $\sup A < b$, poderíamos tomar $\delta \in [a,b]$ com $\sup A < \delta < \beta$, donde seguiria que $\delta \in A$, contrariando o fato de $\sup A$ ser o supremo de A! $\square$

Nesta segunda parte do curso de Análise II, extrapolamos as considerações feitas para sequências e séries de números reais ao generalizar parte de tais resultados para sequências e séries de funções. Tal salto marca, secretamente, o começo da Topologia Geral – ou da necessidade por considerações de caráter qualitativo sobre a natureza das noções de convergência.

8.5 Convergência simples vs. convergência uniforme

Fixado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma função $f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Agora, para uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$, faz sentido nos perguntarmos se a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f?

[12] Mais geralmente, pode-se provar que uma *ordem total* é compacta se, e somente se, todo subconjunto da ordem tem supremo. No entanto, isso foge do escopo da disciplina.

Exemplo 8.5.0. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ com $a_n \to a$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função, então ao tomarmos $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) := a_n g(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ por $f(x) := ag(x)$, segue que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$f_n(x) \to f(x)$$

para cada $x \in X$. ▲

Em situações como a ocorrida acima, dizemos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplesmente** (ou **pontualmente**) para f, o que simbolizamos por $f_n \to f$. Explicitamente: $f_n \to f$ se, para cada $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $N := N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

O termo "pontualmente" faz referência ao fato de que, acima, o índice N a partir do qual conseguimos controlar $|f_n(x) - f(x)|$ depende não apenas do $\varepsilon > 0$ tomado, mas também do ponto $x \in X$ no qual estamos avaliando a convergência.

Exercício 8.12. Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em X. Mostre que se $f_n \to f$ e $f_n \to g$, então $f = g$. ■

Exemplo 8.5.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := x^n$. Como, para $x \in [0,1)$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(1) = 1$, segue que $f_n \to f$, onde $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é a função que faz $f(x) := 0$ se $x \in [0,1)$ e $f(1) := 1$. ▲

Exercício 8.13. Considere $f_n\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := \cos(nx)$. Então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge pontualmente. ■

No exemplo anterior, vimos uma sequência de funções **contínuas** convergir para uma função descontínua: a função f lá obtida é descontínua em 1. Contudo, se retiramos o ponto 1 da *jogada*, encontramos uma sequência de funções contínuas (agora definidas em $[0,1)$) que converge pontualmente para uma função contínua. Que hipótese poderíamos usar para garantir a continuidade de um limite pontual?

Vamos considerar uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções reais definidas em X, de modo que ocorra $f_n \to f$ para uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$. Supondo que cada f_n é contínua em $x \in X$, poderíamos tentar mostrar que f é contínua em x da seguinte maneira: dado $\varepsilon > 0$ tomado arbitrariamente, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que a ocorrência de $|x - y| < \delta$ com $y \in X$ acarrete $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pela desigualdade triangular, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y \in X$ podemos fazer

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Note que, pela continuidade de f_n, podemos encontrar $\delta_n > 0$ de modo que $|x - y| < \delta_n$ com $y \in X$ force $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Analogamente, pela convergência pontual, há $N_x \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para o qual $n \geq N_x$ nos dá $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Contudo, a terceira parcela $|f_y(y) - f(y)|$ pode não ser controlada pelo mesmo N_x: sabemos que existe $N_y \in \mathbb{N}$ para o qual $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, mas N_y depende de y! Isso inviabiliza a escolha de um $\delta > 0$ apropriado dependendo apenas do ponto x e da constante $\varepsilon > 0$.

O problema na argumentação acima desaparece se, na definição da convergência pontual, exigirmos que o mesmo $N \in \mathbb{N}$ ateste a convergência $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$. Mais precisamente, acabamos de esbarrar na definição de *convergência uniforme*.

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais e f uma função real, todas definidas no subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f_n **converge uniformemente para** f, o que podemos abreviar escrevendo $f_n \to f$ unif[13]., se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$, $n \geq N$ implica em $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Segue diretamente da definição e da discussão anterior o próximo

Corolário 8.5.2. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas em $x \in X$ e f uma função, todas definidas em X. Se $f_n \to f$ uniformemente, então f é contínua em x.*

Como geralmente ocorre na vida, a recíproca não é verdadeira, no seguinte sentido: uma sequência de funções contínuas pode convergir pontualmente para uma função contínua sem que a convergência seja uniforme. Exemplo? As funções da forma x^n, que já discutimos.

Exemplo 8.5.3. Considerando $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := x^n$ para cada n. Já vimos que $f_n \to 0$ pontualmente. Afirmamos que a convergência não é uniforme. Por exemplo, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ existe $x \in (0,1)$ com $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$ pois, por valer $\lim\limits_{x\to 1^-} x^n = 1$, segue que existe $\delta > 0$ para o qual

$$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow |x^n - 1| < \frac{1}{2},$$

donde em particular resulta $x^n > \frac{1}{2}$, e $x^n = |f_n(x) - f(x)|$. ▲

Observação 8.5.4. Graficamente, dizer que $f_n \to f$ uniformemente consiste em dizer que para cada $\varepsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ para o qual o gráfico de f_n está inteiramente contido na “faixa” de largura 2ε centrada em f, sempre que $n \geq N$. △

O apelo da convergência uniforme, porém, não se encontra na mera preservação de continuidade. Em breve, veremos que se $f_n \to f$ uniformemente, com cada f_n Riemann-integrável, então além de valer que f é Riemann-integrável, também teremos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_a^b f, \tag{8.3}$$

ou, verbalmente: o limite uniforme de funções Riemann-integráveis é Riemann-integrável, e a integral comuta com o limite.

[13] Há quem faça $f_n \rightrightarrows f$, $\lim\mathrm{unif}_{n\to+\infty} f_n$, $f_n \xrightarrow{u} f$ e até $f_n \Rightarrow f$...

Assim, a convergência uniforme é apelativa por si só. Nesse sentido, o próximo teorema, apesar de simples, é tremendamente impactante.

Teorema 8.5.5 (Dini). *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas e f uma função contínua, todas definidas no subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, o qual assumimos compacto. Se $f_n \to f$ com $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monótona para cada $x \in X$, então $f_n \to f$ uniformemente.*

Demonstração. Nesta prova, que adaptamos *do Elon*, usaremos fortemente a compacidade de X.

Primeiro, afirmamos que se $\mathcal{F} := \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família de *fechados* de X com $F_n \supset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_N = \emptyset$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, o subconjunto $X \setminus F_n$ é um *aberto* de $\mathbb{R}$, de modo que devemos ter

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus F_n,$$

donde a compacidade de X nos dá $N \in \mathbb{N}$ com $X = \bigcup_{n=1}^{N} X \setminus F_n$ e, consequentemente,

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{N} F_n = F_N,$$

como queríamos.

O próximo passo é usar as hipóteses sobre f_n e f a fim de obter uma família $\mathcal{F}$ marota de fechados que nos permita concluir o resultado desejado. Para $\varepsilon > 0$ fixado e $n \in \mathbb{N}$ qualquer, fazemos

$$F_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

o qual é um fechado de X pois F_n é pré-imagem do fechado $[\varepsilon, +\infty)$ pela função contínua $|f_n - f|$. Agora, a monotonicidade de $(f_n)_n$ garante que $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De fato, se, por exemplo, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é não-decrescente, então $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, donde segue que $f(x) - f_n(x) \geq 0$ para todo n e, consequentemente,

$$|f_{n+1}(x) - f(x)| = f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x) = |f_n(x) - f(x)|.$$

Tal desigualdade garante que $F_n \supset F_{n+1}$ para cada n. Logo, pelo que discutimos acima, existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_N = \emptyset$ (por quê?!), o que se traduz precisamente na condição de convergência uniforme desejada. □

8.6 Revelando o *iceberg* (leitura opcional)

8.7 Integrando e derivando no limite uniforme

Na seção anterior, cuja leitura é opcional, vimos entre outras coisas, que se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções limitadas definidas em X que converge uniformemente para f, então f é limitada. Apesar do contexto geral no qual obtivemos isso, o resultado é simples o suficiente para ser feito "no braço": por valer $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$ para quaisquer $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, a convergência uniforme nos permite tomar um n particular que faça $|f(x) - f_n(x)| < 1$ e daí, por existir $M_n > 0$ com $|f_n(x)| < M_n$ para todo $x \in X$, resulta que $|f| < M_n + 1$.

Se, além de limitadas, cada f_n é descontínua apenas em um conjunto de medida nula $D(f_n) \subset X$, então f também é descontínua apenas em um conjunto de medida nula: se cada f_n é contínua em x, então f é contínua em x, mostrando que o conjunto $D(f)$ dos pontos de descontinuidade de f está contido em $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(f_n)$. Ao fazermos $X := [a,b]$, obtemos o importante

Corolário 8.7.0. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Riemann-integráveis definidas em $[a,b]$. Se $f_n \to f$ uniformemente, então f é Riemann-integrável e*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f.$$

Demonstração. A discussão anterior já nos garante que f é Riemann-integrável. A igualdade das integrais segue pois $|f(u) - f_n(u)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)|$ para todo $u \in [a,b]$. Mais precisamente:

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b f - f_n\right| \underbrace{\leq}_{(*)} \int_a^b |f-f_n| \leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_n(x)|(b-a)$$

onde $(*)$ segue do exercício a seguir. Como $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \to 0$ quando $n \to +\infty$ (pela convergência uniforme), o resultado desejado segue. $\square$

Exercício 8.14. Mostre que se $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então $\left|\int_a^b g\right| \leq \int_a^b |g|$. $\blacksquare$

Exercício 8.15. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Riemann-integráveis definidas em $[a,b]$ que converge uniformemente para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Considere então as funções $F_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$F_n(x) := \int_a^x f_n \quad \text{e} \quad F(x) := \int_a^x f.$$

Mostre que $F_n \to F$ uniformemente. $\blacksquare$

Em outras palavras, o exercício acima estende o corolário anterior ao mostrar que as integrais indefinidas também convergem. Ele será útil no próximo

Teorema 8.7.1. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções diferenciáveis definidas em $[a,b]$ que converge uniformemente para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se a sequência $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ das derivadas também converge uniformemente, então f é diferenciável. Além disso, $f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$.*

Demonstração. Seja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a função para a qual a sequência $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Começamos a prova pelo caso "fácil", no qual cada derivada é contínua.

Neste cenário, os resultados anteriores nos dizem que g, tal qual as derivadas f_n', é Riemann-integrável – na verdade, g é contínua! Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^x f_n' = f_n(x) - f_n(a) \Rightarrow f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n',$$

que converge uniformemente para $f(a) + \int_a^x g$ pelo exercício anterior. Como também temos $f_n \to f$, a unicidade dos limites nos dá

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g$$

para cada $x \in [a,b]$. Novamente aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo, segundo o qual a igualdade acima permite aferir que f é uma primitiva de g, i.e., $f' = g$.

No caso geral, fixamos $\alpha \in [a,b]$ e definimos $\varphi_n(t)$ e $\varphi(t)$ por

$$\varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(\alpha)}{t - \alpha} \quad \text{e} \quad \varphi(t) := \frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha}$$

se $t \neq \alpha$, e $\varphi_n(\alpha) := f_n'(\alpha)$ e $\varphi(\alpha) := g(\alpha)$. Note que cada φ_n é contínua em $[a,b]$ (por quê?!) e, por construção, $\varphi_n \to \varphi$ pontualmente. Afirmamos que esta última convergência é uniforme.

Para isso, vamos nos valer do fato provado na seção anterior de que $\mathcal{B}[a,b]$, o espaço das funções limitadas definidas em $[a,b]$, é de Cauchy com a métrica do supremo[14]. Note que para $n, m \in \mathbb{N}$, temos

$$\varphi_m(x) - \varphi_n(x) = \frac{f_m(x) - f_m(\alpha)}{x - \alpha} - \frac{f_n(x) - f_n(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(\alpha) - f_n(\alpha))}{x - \alpha}.$$

Como $f_m - f_n$ é diferenciável, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, que nos dá ϑ entre x e t satisfazendo

$$\frac{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(\alpha) - f_n(\alpha))}{x - \alpha} = f_m'(\vartheta) - f_n'(\vartheta).$$

Por termos a convergência $f_n' \to g$ uniforme, fixado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica em $|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in [a,b]$. Logo $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para $m, n \geq N$ e, consequentemente,

$$|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = |f_m'(\vartheta) - f_n'(\vartheta)| < \varepsilon$$

mostrando que a sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{B}[a,b]$. Logo, existe $\psi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada com $\varphi_n \to \psi$ uniformemente – na verdade, como cada φ_n é contínua, temos ψ contínua. Enfim, a unicidade de limites nos leva a concluir que $\psi = \varphi$. E daí? Ora

$$f'(\alpha) := \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \varphi(x) = \varphi(\alpha) = g(\alpha),$$

donde o resultado segue da arbitrariedade do α tomado. □

Exercício 8.16. Escreva um roteiro curto da demonstração acima, destacando os pontos chave. ■

Observação 8.7.2. A versão "fácil" que provamos acima pode ser afrouxada, como feita pelo Elon: se cada f_n' é contínua, então basta que exista $c \in [a,b]$ com $f_n(c) \to \gamma$ para algum γ. Daí, basta observarmos que $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'$ e repetir a demonstração, mutatis mutandis. △

[14] Um jeito de evitar terminologia de espaços métricos é provar que "se $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções limitadas uniformemente de Cauchy – no sentido de que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ com $|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon$ para quaisquer $n, m \geq N$ e $x \in X$ –, então existe g tal que $g_n \to g$ uniformemente". Isto é precisamente o que provamos na seção anterior, sem a roupagem de espaços métricos.

8.7.0 Tretas

As hipóteses nos teoremas de convergência anteriores são importantes.

No caso da integração, o exemplo clássico é obtido a partir de uma enumeração de racionais. Fixada uma enumeração $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ de todos os números racionais pertencentes ao intervalo $[0,1]$, segue que a função $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := 0$ se $x \notin \{r_0, \ldots, r_n\}$ e $f_n(x) := 1$ caso contrário, é Riemann-integrável para cada n: a função constante 0 é integrável, e f_n difere de 0 em precisamente n pontos, donde segue pelo Exercício 17 da Lista 1 que f_n é Riemann-integrável com $\displaystyle\int_0^1 f_n = 0$. Temos $f_n \to f$ pontualmente, onde f é a função característica de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, mas f não é integrável.

Mesmo quando ocorre $f_n \to f$, com f_n e f Riemann-integráveis, a convergência das integrais não está garantida sem a garantia da uniformidade da convergência $f_n \to f$. Por exemplo, fazendo $f_n(x) := nx^n(1-x^n)$, garante-se a convergência pontual $f_n \to 0$. No entanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2},$$

enquanto $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$.

Observação 8.7.3. O problema acima se remedia se existir $K > 0$ tal que $|f_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resultado conhecido como Teorema da Convergência Dominada de Arzelà. No entanto, a hipótese de que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ seja Riemann-integrável a priori não pode ser retirado, como nos ensinou o primeiro exemplo sobre $\mathbb{Q}$. Essa é uma das vantagens da integração desenvolvida por Lebesgue, que permite garantir a integrabilidade do limite desde que as funções f_n sejam limitadas.

Apenas como curiosidade, a função característica de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ é Lebesgue-integrável, e sua integral é, graças a Deus, 0. $\triangle$

Finalmente, no caso da diferenciação, é importante pedir a convergência uniforme das derivadas. Note que $f_n \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformemente para $f \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \sqrt{x^2} = |x|$ (Dini). Cada f_n é diferenciável em $[-1,1]$, mas f não é diferenciável em 0.

8.7.1 Séries

Ao tratarmos de uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções reais definidas em X, faz sentido considerar a sequência induzida pelas somas parciais $\left(\sum_{j\leq n} f_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo análogo ao que se faz com sequências de números reais. Denotamos por[15]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

a função f obtida pontualmente como o limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} f_j(x)$, i.e.,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(x).$$

[15] Quem preferir começar por $n = 1$, tudo bem...

É claro que, para fazer sentido, é preciso que para cada $x \in X$ a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ seja convergente. Desse modo, séries também admitem as variações de convergência vistas na seção anterior: dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

- converge pontualmente (para f) se a convergência $\sum_{j=0}^{n} f_j \to f$ for pontual, e
- converge uniformemente (para f) se a convergência $\sum_{j=0}^{n} f_j \to f$ for uniforme.

Logo, os próximos resultados são corolários automáticos.

Corolário 8.7.4. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais definidas em $[a,b]$, e suponha que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ convirja uniformemente.*

(a) Se cada f_n é contínua em $x \in [a,b]$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é contínua em x.

(b) Se cada f_n é Riemann-integrável, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é Riemann-integrável e

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

(c) Se cada f_n é diferenciável e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é diferenciável e

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Demonstração. Tudo segue dos teoremas anteriores aplicados à sequência das somas parciais da série. □

A relevância do Teorema de Dini se dá, portanto, na garantia de convergência uniforme para séries de funções não-negativas.

Proposição 8.7.5. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas não-negativas definidas em $[a,b]$. Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge pontualmente para uma função contínua, então a convergência é uniforme e vale*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstração. Como cada f_n é não-negativa, resulta que a convergência da sequência $(\sum_{j=0}^{n} f_j)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona, logo uniforme pelo Teorema de Dini. O restante segue do corolário anterior. □

Tal qual ocorre com séries de números reais, temos ainda a convergência absoluta: a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ converge. Em particular, é claro que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge absolutamente } \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge pontualmente.} \tag{8.4}$$

Contudo, no caso em que cada f_n é contínua, o Teorema de Dini nos permite melhorar a implicação acima.

Corolário 8.7.6. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas. Se X é compacto e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge absolutamente, então $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente.*

Demonstração. A convergência absoluta de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ se traduz na convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ de funções contínuas e não-negativas, e daí o mesmo argumento da proposição anterior se aplica. □

Como acontece com séries numéricas, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge pontualmente se, e somente se, a sequência de suas somas parciais é *pontualmente de Cauchy*, i.e., se para cada $x \in X$, a sequência $\left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. O mesmo se verifica para a convergência uniforme, trocando as palavras certas. Mais precisamente:

Exercício 8.17. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais definidas em X. Mostre que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in X$ e para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ com $m > n \geq N$. ■

Observação 8.7.7. Secretamente – e nos casos que interessam – o resultado acima é mero reflexo de que $\mathcal{B}(X)$, o espaço das funções limitadas definidas em X com a norma do supremo, é um espaço métrico completo. △

Proposição 8.7.8 (Teste M de Weierstrass)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em X. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$, exista $M_n > 0$ tal que $|f_n| \leq M_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty$. Então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniforme e absolutamente.*

Demonstração. Basta notar que

$$\left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{m} M_n \to 0$$

conforme $n, m \to +\infty$, e daí usar o exercício anterior. □

8.7.2 Um ε sobre séries de potências

Possivelmente as séries de funções mais utilizadas ocorrerem para $f_n(x) := a_n(x - x_0)^n$, para certos $a_n \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. No que segue, é inofensivo considerar $x_0 = 0$ – e o caso geral se recupera com uma típica mudança de variável.

Evidentemente, a convergência de uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ depende da escolha dos coeficientes a_n de cada parcela da série. A análise dos termos $\sqrt[n]{|a_n|}$ ajuda a decidir sobre isso.

- Se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, então a série converge apenas para $x = 0$: se $x \neq 0$, então $|x|\sqrt[n]{|a_n|} \not\to 0$ e, consequentemente, o termo geral da série não converge para 0.
- Se, por outro lado, a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então

$$R := \left\{\rho > 0 : \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} \text{ para } n \gg 0\right\}$$

é um intervalo não-vazio de $\mathbb{R}$, da forma $(0, r)$, $(0, r]$ ou $(0, +\infty)$, onde $r := \sup R$. O número r é chamado de **raio de convergência** da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, nome que faz sentido em vista do próximo

Teorema 8.7.9. *Seja* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com* $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ *limitada. Então* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *converge em* $(-r, r)$*, onde* r *é o raio de convergência da série. Além disso, a série diverge em* $\mathbb{R} \setminus [-r, r]$*.*

Demonstração. A primeira parte segue pelo teste da raiz (a.k.a. teste de Cauchy). Mais precisamente, se $\rho \in R$ e $|x| < \rho$, então para $n \gg 0$ temos

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{|x|}{\rho} < 1,$$

donde segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge. Para a segunda parte, termos $x \notin R$ nos garante que o termo geral da série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ não converge para 0. □

Observação 8.7.10. Acima, a convergência da série para $x \in \{-r, r\}$ varia de acordo com o caso. △

Exercício 8.18. Nas hipóteses e notações do teorema anterior, mostre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absoluta e uniformemente em $[-\rho, \rho]$ para todo ρ tal que $0 < \rho < r$. Conclua que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é contínua em $(-r, r)$. Dica: teste M de Weierstrass. ■

Epílogo: a *existência* da reta

8.8 Opcional: infinitesimais na ausência de Arquimedes

É muito comum encontrar a condição (iii) da Proposição 1.1.20 enunciada de modo mais econômico, por meio da identidade

$$0_{\mathbb{K}} = \inf\left\{\frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

Na prática, isso diz que corpos arquimedianos não possuem *infinitesimais* não-nulos, no seguinte sentido.

Definição 8.8.0. Dado um corpo ordenado $\langle \mathbb{K}, \leq \rangle$, diremos que $x \in \mathbb{K}$ é **infinitesimal** em $\mathbb{K}$, ou é um **infinitésimo**, se para todo $n \in \mathbb{N}$ valer $|n_{\mathbb{K}} x|_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$. Analogamente, $x \in \mathbb{K}$ é **ilimitado**[0] em $\mathbb{K}$ se para todo $n \in \mathbb{N}$ valer $n_{\mathbb{K}} < |x|_{\mathbb{K}}$. ¶

É claro que $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ é infinitesimal em $\mathbb{K}$. Por outro lado, $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ é infinitesimal em $\mathbb{K}$ se, e somente se, $\dfrac{1}{x}$ é ilimitado em $\mathbb{K}$. Logo, $\mathbb{K}$ tem infinitésimos não-nulos se, e somente se, $\mathbb{K}$ tem elementos ilimitados. Portanto, corpos arquimedianos são precisamente aqueles nos quais *não* existem infinitésimos não-nulos, o que sugere a pergunta: há algum corpo ordenado não-arquimediano?

Proposição 8.8.1. *Se* $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$ *é um* domínio ordenado[1]*, então seu corpo de frações* $\mathbb{K} := \mathrm{Frac}\,(\mathbb{D})$ *admite uma relação de ordem total* $\sqsubseteq$*, compatível com a ordem de* $\mathbb{D}$ *e que faz de* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado.*

Demonstração. A ideia é imitar a relação entre a ordem de $\mathbb{Q}$ e a ordem de $\mathbb{Z}$. Por ser o corpo de *frações* de $\mathbb{D}$, sabe-se[2] que todos os elementos de $\mathbb{K}$ são frações da forma $\dfrac{a}{b}$ com $b \neq 0$. Daí, para $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{K}$ com $b, d \succ 0$, declara-se

$$\frac{a}{b} \preceq_* \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \preceq bc,$$

e o leitor não deve ter dificuldades para verificar que $\preceq_*$ faz de $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. □

[0] Na Wikipedia o leitor encontrará tais números xingados como "*infinitos*", mas tal terminologia não é adequada, por confundir noções de ordem e cardinalidade.

[1] Cuja definição é a mesma dos corpos ordenados, *mutatis mutandis*.

[2] A menos de detalhes técnicos, o corpo de frações de um domínio é o anel K que se obtém de D ao se repetir a *construção* de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$. O leitor pode cuidar dos detalhes.

Portanto, a fim de obter um corpo ordenado dotado de infinitésimos, basta encontrar um domínio ordenado $\mathbb{D}$ dotado de um elemento ilimitado x, pois daí seu inverso multiplicativo x^{-1} (no corpo de frações $\mathbb{K}$) será um infinitésimo não-trivial. Isso é mais fácil do que parece.

Exemplo 8.8.2. Se $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$ é um domínio ordenado, então o *anel de polinômios* na indeterminada x e coeficientes em $\mathbb{D}$, denotado por $\mathbb{D}[x]$, é um domínio legítimo, sobre o qual se define uma ordem total $\sqsubseteq$ segundo a qual o monômio x *será* ilimitado[3]. Explicitamente, dados $p, q \in \mathbb{D}[x]$, declara-se $p \sqsubseteq q$ se, e somente se, $p = q$ ou o coeficiente líder de $q - p$ é (estritamente!) maior do que $0_{\mathbb{D}} \in \mathbb{D}$. A relação $\sqsubseteq$ satisfaz as condições impostas.

- ✓ A relação $\sqsubseteq$ é, claramente, reflexiva.
- ✓ Se $p \sqsubseteq q$ com $p \neq q$, então o coeficiente líder de $q - p$, digamos l, satisfaz $l \succ 0_{\mathbb{D}}$ e, consequentemente, $-l \prec 0_{\mathbb{D}}$, o que proíbe a ocorrência de $q \sqsubseteq p$, garantindo assim a antissimetria.
- ✓ A transitividade é um pouco mais manhosa. Se $p, q, r \in \mathbb{D}[x]$ são dois-a-dois distintos, têm o mesmo grau e satisfazem $p \sqsubseteq q$ e $q \sqsubseteq r$, então o coeficiente líder de $r - p$ é estritamente maior do que $0_{\mathbb{D}}$ por ser a soma dos coeficientes líderes de $q - p$ e $r - q$, ambos estritamente maiores do que $0_{\mathbb{D}}$. O leitor fica a cargo dos outros casos.
- ✓ A ordem é total pois, se $p \neq q$, então $q - p$ tem um coeficiente líder diferente de $0_{\mathbb{D}}$, o qual deve ser estritamente maior ou estritamente menor do que $0_{\mathbb{D}}$ uma vez que a ordem $\preceq$ é total em $\mathbb{D}$.
- ✓ A ordem é compatível com a estrutura algébrica de $\mathbb{D}$, no sentido de ($\mathrm{CO_i}$) e ($\mathrm{CO_{ii}}$): se $p, q, r \in \mathbb{D}[x]$ e $p \sqsubset q$, então o coeficiente líder de $(r + q) - (r + p) = q - p$ é estritamente maior do que $0_{\mathbb{D}}$, mostrando que $p + r \sqsubset q + r$; se $p, q \in \mathbb{D}[x]$ satisfazem $p \sqsupset 0_{\mathbb{D}}$ e $q \sqsupset 0_{\mathbb{D}}$, então os coeficientes líderes de p e q são maiores do que $0_{\mathbb{D}}$, donde segue que o coeficiente de pq é maior do que $0_{\mathbb{D}}$ e, por conseguinte, $pq \sqsupset 0_{\mathbb{D}}$.
- ✓ Finalmente, se $a, b \in \mathbb{D}$, então $a \sqsubseteq b$ se, e somente se, $a = b$ ou $b - a \succ 0_{\mathbb{D}}$, i.e., $a \preceq b$.

A ideia subjacente na definição de $\sqsubseteq$ consiste em tornar a indeterminada $x \in \mathbb{D}[x]$ maior do que todos os elementos de $\mathbb{D}$, i.e., $d \sqsubset x$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Ora, como se espera que $\mathbb{D}[x]$ satisfaça ($\mathrm{CO_{ii}}$), somos *obrigados* a estipular $dx \sqsubset x^2$, $dx^2 < x^3$ e, de modo geral, $dx^n < x^{n+1}$ para quaisquer $d \in \mathbb{D}$ e $n \in \mathbb{N}$. Daí, a exigência de que ($\mathrm{CO_i}$) ocorra nos leva, *irresistivelmente*, à definição dada para $\sqsubseteq$. ▲

Logo, se $\langle \mathbb{D}, \preceq \rangle$ é um domínio ordenado, então $\langle \mathbb{D}[x], \sqsubseteq \rangle$ é um domínio ordenado que contém $\mathbb{D}$ e, por sua vez, seu corpo de frações $\mathbb{D}(x)$ admite uma ordem total $\sqsubseteq_*$ compatível com sua estrutura algébrica e que estende a ordem de $\mathbb{D}$. Em particular, o modo como se definiu $\sqsubseteq_*$ aliado ao fato de x ser ilimitado em $\mathbb{D}[x]$ garante que $\dfrac{1}{x}$ é um infinitésimo não-trivial de $\mathbb{D}(x)$.

Definição 8.8.3. Diremos que um corpo ordenado não-arquimediano $\langle \mathbb{H}, \leq \rangle$ é uma **reta hiper-real** se existir um *subcorpo ordenado e completo* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}$: explicitamente, isto significa que a inclusão $i \colon \mathbb{K} \to \mathbb{H}$ é um morfismo de corpos ordenados. Os elementos de $\mathbb{H}$ serão chamados de **números hiper-reais**. ¶

[3] O leitor interessado numa *definição formal* de anéis de polinômios pode consultar o Exercício 1.40.

Como corpos completos são arquimedianos, resulta que nenhuma reta hiper-real é completa. Isso pode ser aferido explicitamente ao se considerar, por exemplo, a coleção $\mathcal{I}(\mathbb{H}) := \{x \in \mathbb{H} : x \text{ é infinitesimal}\}$, um subconjunto não-vazio e limitado superiormente por qualquer $k \in \mathbb{K}$ com $k > 0_{\mathbb{K}}$, mas que não admite supremo.

Para efeitos psicológicos, pode-se imaginar uma reta hiper-real $\mathbb{H}$ como ~~a reta real~~ um corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ *salpicado* de pontos *limitados* e pontos ilimitados, com os primeiros *aglutinados em torno* dos elementos de $\mathbb{K}$. Mais precisamente, dado um hiper-real $h \in \mathbb{H}$, diremos que $h \in \mathbb{H}$ é **limitado** se existir $k \in \mathbb{K}$ com $|h|_{\mathbb{H}} \leq |k|_{\mathbb{K}}$, o que equivale a dizer que h não é ilimitado.

Proposição 8.8.4. *Nas condições acima, se $h \in \mathbb{H}$ é limitado, então existem únicos $k \in \mathbb{K}$ e $\varepsilon \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$ tais que $h = k + \varepsilon$.*

Demonstração. De fato, os conjuntos $L(h) := \{s \in \mathbb{K} : s < h\}$ e $U(h) := \{s \in \mathbb{K} : h < s\}$ são não-vazios, com $L(h)$ limitado superiormente e $U(h)$ limitado inferiormente, donde segue, por completude, que existe $l := \sup L(h)$ e $u := \inf U(h)$. Daí, por l ser limitante inferior de $U(h)$ e u ser limitante superior de $L(h)$, resulta $u \leq l$ e $l \leq u$, acarretando $u = l$. Com isso, é fácil mostrar que $|u - h|_{\mathbb{H}} < \dfrac{1}{n_{\mathbb{H}}}$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Logo, basta fazer $k := u$ e $\varepsilon := u - h$, os quais são os únicos que satisfazem $h = k + \varepsilon$. □

Secretamente, a unicidade acima segue do fato de que $\varepsilon' - \varepsilon$ é um infinitésimo sempre que ε e ε' também são, o que por sua vez é sintoma de algo mais geral: a família $\mathcal{I}(\mathbb{H})$, dos infinitesimais de $\mathbb{H}$ é, na verdade, um *ideal maximal* do *subanel*

$$\mathcal{B}(\mathbb{H}) := \{h \in \mathbb{H} : h \text{ é limitado}\},$$

onde este herda sua estrutura algébrica de $\mathbb{H}$.

Números hiper-reais ilimitados mimetizam o comportamento de algo que *tende a infinito*, enquanto infinitésimos capturam a noção de *tender a zero*, ambas do Cálculo *Standard*, do qual se ocupa a Análise Real. Neste cenário, as famosas indeterminações do Cálculo, que veremos no próximo capítulo, se traduzem de modo bastante natural em $\mathbb{H}$. Por exemplo, dados um infinitésimo $\varepsilon \in \mathcal{I}(\mathbb{H})$ e um número ilimitado $U \in \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{H})$, o produto $\varepsilon \cdot U$ pode pertencer a qualquer um dos conjunto $\mathcal{I}(\mathbb{H})$, $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ ou $\mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{H})$.

Exemplo 8.8.5. Fixado *um* corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ e fazendo $\mathbb{H} := \mathbb{K}(x)$, o corpo de frações de $\mathbb{K}[x]$, com a ordem induzida como na Proposição 8.8.1 e no Exemplo 8.8.2, têm-se

$$\frac{1}{x} \cdot x \in \mathcal{B}(\mathbb{H}), \frac{1}{x^2} \cdot x \in \mathcal{I}(\mathbb{H}) \text{ e } \frac{1}{x} \cdot x^2 \in \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{H}).$$

As *indeterminações* com respeito à adição de números ilimitados se justificam de forma análoga. ▲

Embora seja possível discutir mais propriedades acerca de uma hiper-reta $\mathbb{H}$, devemos nos ater à motivação inicial: estudar a reta. E, nesse sentido, o mero conhecimento da existência de uma hiper-reta é irrelevante. Se, por exemplo, quisermos utilizar infinitésimos para dar sentido à afirmação de que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$ leva pontos *arbitrariamente próximos* de 2 a pontos *arbitrariamente próximos* de 4, precisamos ser capazes de estender o domínio de f de modo a incluir os infinitésimos não-triviais de $\mathbb{H}$. Se isso fosse possível, o problema estaria resolvido: um ponto arbitrariamente próximo de 2 é da forma $2 + \varepsilon$, com ε infinitesimal, daí

$$f(2 + \varepsilon) := 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2,$$

que por sua vez é arbitrariamente próximo de 4 já que $4\varepsilon + \varepsilon^2$ é um infinitésimo.

Essa habilidade de extensão foi vislumbrada por Leibniz em seus desenvolvimentos do Cálculo, mas somente séculos depois, com a *Análise Não-Standard* desenvolvida por Abraham Robinson, elucidaram-se os meios para construir hiper-retas com tal propriedade *de transferência*. Os métodos apresentados neste livro seguem a vertente responsável por *extirpar* os infinitésimos e que, por questões de prioridade histórica e inércia, constituem a chamada metodologia *standard*.

Lista de símbolos e siglas

Referências Bibliográficas

[0] T. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 2 edition, 1981.

[1] J. Barrow-Green, J. Gray, and R. Wilson. *The History of Mathematics: A Source-Based Approach*, volume 1. MAA Press, 2019.

[2] A. F. Beardon. *Limits: a new approach to real analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[3] N. Bourbaki. *General Topology, part 1*. Addison-Wesley, London, 1966.

[4] N. Bourbaki. *General Topology, part 2*. Addison-Wesley, London, 1966.

[5] L. Bukovský. *The structure of the real line*. Monografie Matematyczne 71. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2011.

[6] D. G. de Figueiredo. *Análise I*. LTC, 2 edition, 1996.

[7] R. Engelking. *General Topology: Revised and completed edition*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] J. Ferreirós. *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics*. Birkhäuser Basel, 2ª edition, 2007.

[9] J. F. Hall. *Completeness of Ordered Fields*. California Polytechnic State University, 2010. Monografia de graduação.

[10] V. J. Katz and K. H. Parshall. *Taming the Unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century*. Princeton University Press, 2014.

[11] J. L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1955.

[12] E. L. Lima. *Espaços métricos*. Projeto Euclides. IMPA, 2 ed. edition, 1983.

[13] E. L. Lima. *Análise Real, Volume 1: Funções de uma Variável*. IMPA, 2006.

[14] E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 1*. IMPA, 14 edition, 2017.

[15] P. Maddy. *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Oxford University Press, USA, 2011.

[16] R. M. Mezabarba. Fundamentos de Topologia Geral, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/Fund_Top_Geral.

[17] R. M. Mezabarba. Teoria maliciosa dos conjuntos, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/MaliciousSetTheory.

[18] E. H. Moore and H. L. Smith. A General Theory of Limits. *American Journal of Mathematics*, 44(2):102–121, 1922.

[19] T. Roque. *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas.* Zahar, 2012.

[20] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw Hill, 3 edition, 1976.

[21] E. Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations.* Academic Press, 1996.

[22] R. Shakarchi. *Problems and solutions for undergraduate analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1 edition, 1998.

[23] T. Sonar. *3000 Years of Analysis: Mathematics in History and Culture.* Birkhäuser, 2021.

[24] T. Tao. *Analysis I.* Texts and Readings in Mathematics. Springer, 3 edition, 2016.

[25] S. Willard. *General Topology.* Addison-Wesley, New York, 1970. Reprinted in 2004 by Dover.

Índice Remissivo