Análise I – DEX 001114
Notas de aula

Renan M. Mezabarba

Última atualização: 18 de outubro de 2024.

Quis custodiet ipsos custodes?[0]

Juvenal, Sátiras, VI, linha 347.

[0] Quem vigia os vigilantes?

Sumário

Prefácio (É PRA LER!)

O presente material é uma versão reformulada (de partes) do texto "`Um curso fechado e limitado de Análise Real`" [15], que comecei a escrever tempos atrás, mas cuja narrativa não é apropriada para, efetivamente, acompanhar um curso de Análise, por diversos motivos[0]. Por isso, aqui você encontrará os assuntos distribuídos de forma diferente e mais amigável.

Cada capítulo corresponde a um terço do curso, enquanto as seções correspondem aos conteúdos das aulas . Tais seções serão divididas em duas partes: a subseção "`Essencial`" apresenta o que será abordado em aula (num cenário utópico[1]), enquanto a subseção "`Extras`" contêm discussões adicionais, cuja leitura é opcional (mas recomendada)[2]. Exercícios serão propostos tanto ao longo do texto quanto em subseções específicas para atividades ("`Exercícios adicionais`"). Por falar nos exercícios, eles serão classificados em três tipos principais ($\star$, $^{\star}_{\star}$ e $^{\star}_{\star\star}$) descritos a seguir.

($\star$) Verificações (que deveriam ser) corriqueiras. Embora nem todos os exercícios nesta classe sejam imediatos, a maioria consiste em "abrir" as definições e fazer as "contas" naturais ao contexto em questão. Não é o tipo de problema que "cai em prova", mas são bons aquecimentos caso você ainda não tenha prática em escrever demonstrações mais complicadas.

($^{\star}_{\star}$) Exercícios típicos de listas e provas. Consistem em aplicar resultados previamente demonstrados (tanto em aula quanto em questões anteriores), ou reciclar ideias vistas anteriormente a fim de testar o seu entendimento do assunto: quanto maior sua familiaridade, mais fácil será para você fazer os malabarismos necessários.

($^{\star}_{\star\star}$) Estes geralmente são mais difíceis ou elaborados e não costumam fazer parte de listas ou provas (exceto, possivelmente, como questões bônus). Eles "testam" não apenas a familiaridade com o assunto, mas também dão a oportunidade de exercitar um pouco mais a criatividade.

Comentários do tipo "(verifique!)$^{\star}_{\star}$", "(por quê?)*"e afins também devem ser encarados como propostas implícitas de exercício – e os expoentes apenas classificam o exercício de acordo com os critérios acima. Tente fazer exercícios de todos os tipos: fazer os fáceis te ajudará a ganhar ritmo para fazer os médios, e ao fazer alguns difíceis você *pode* aprender técnicas para transformar os exercícios médios em fáceis. Outra dica: se já souber EXATAMENTE como fazer um exercício, pule para o próximo. Mais uma: se ficar muito tempo num exercício sem conseguir resolvê-lo, pule para o próximo e volte mais tarde!

Por fim, uma sugestão: sempre que possível, estude (ou ao menos leia) o "essencial" da aula antes da aula, pois isto tornará ~~possivelmente~~ as aulas bem mais proveitosas para você – e para mim.

[0] A principal razão é o propósito: [15] se destina a estudantes que pretendem estudar (!) o assunto de maneira independente, sem vínculo com o cronograma de uma disciplina de graduação. A quantidade monstruosa de erros também colaborou...

[1] Por utopia, entende-se um cenário em que a turma estudou o conteúdo da aula antes da aula... Como, na prática, isto não acontece, há algumas exceções que devem ser levadas em conta num cronograma de aulas: as Subseções 0.4.0 e 0.10.0 requerem duas aulas cada, pelo menos se os detalhes forem discutidos em sala; a Subseção 1.2.0 precisa de três aulas, enquanto a Subseção 1.3.0 carece de duas aulas, uma aula para cada subsubseção.

[2] Algumas discussões realizadas nas seções extras serão importantes para o desenrolar de outras seções essenciais. Tais ocorrências serão devidamente indicadas, não se preocupe.

Capítulo 0

A reta real

Intuitivamente, a *reta real* é um objeto geométrico: um *segmento retilíneo sem saltos*, i.e., *contínuo*. Por outro lado, como segmentos dessa reta podem ser *somados* (copiados e justapostos) e *multiplicados*[0], segue que a reta também é um objeto *algébrico*. Daí, uma pergunta natural a se fazer é: como conciliar as duas noções a fim de *descrever*, matematicamente, a reta real?

A resposta usual faz uso da *linguagem de conjuntos*: a reta real será definida como *um conjunto* (de pontos), cujos *aspectos geométricos* desejados serão abstraídos por uma *relação de ordem* que deverá capturar, de alguma forma, as noções de *linearidade* e *continuidade*; os *aspectos algébricos*, por sua vez, serão descritos por meio de *operações binárias* que imitarão as operações usuais que aprendemos na *escola*. Nesta parte do curso lidaremos com todos esses aspectos, a fim de entender a definição matemática da reta real.

0.0 Linguagem: revisão de conjuntos e funções

0.0.0 Essencial

Conjuntos

A palavra "conjunto" é uma daquelas típicas expressões (*atômicas*) que não se explicam por meio de outras expressões mais simples, como *tempo*, *espaço*, *ser*, etc. Costuma ficar a cargo da (vida em) sociedade ensinar o significado dessas coisas: no caso, conjuntos podem ser entendidos como *agrupamentos de objetos* ou *coleções de indivíduos* que partilham algum tipo de característica comum num certo contexto. **Exemplos**: conjunto das pessoas numa sala, conjunto dos torcedores de um time, conjunto dos times de algum esporte coletivo num campeonato, conjunto dos campeonatos desse esporte coletivo, etc. Porém, usaremos tais noções em contexto matemático, e trataremos apenas de conjuntos formados por objetos de natureza matemática.

Dados *objetos matemáticos* x e A, vamos assumir que apenas dois casos podem ocorrer (e necessariamente um deles ocorrerá): "$x \in A$" (lido como "x pertence a A", "x é elemento de A" ou "x é membro de A") ou o contrário, indicado por "$x \notin A$" (lido como "x não pertence a A", "x não é elemento de A" ou "x não é membro de A"). **Porém, como não se define explicitamente o que significa *ser* conjunto** e, muito menos, o que é a relação de pertinência "$\in$", precisa-se, pelo menos, indicar os comportamentos esperados.

[0]Como feito por Descartes na infância da Geometria Analítica. Para saber mais, confira a obra de Tatiana Roque [19].

Definição 0.0.0. Para conjuntos A e B:

(i) escreveremos "$A \subseteq B$" para abreviar a afirmação "para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$", lida como "A é **subconjunto** de B", ou "A **está contido em** B";

(ii) escreveremos "$A \nsubseteq B$" para abreviar a negação de "$A \subseteq B$", i.e., para indicar que "existe $x \in A$ tal que $x \notin B$";

(iii) escreveremos "$A \subsetneq B$" para abreviar "$A \subseteq B$ e $A \neq B$" e, em tais situações, diremos que A é **subconjunto próprio** de B. ¶

Axioma da Extensão. *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos. Em notação mais econômica:* $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)$ *e* $(B \subseteq A)$.

Exercício 0.0 ($\star$)**.** Sejam A o conjunto dos números inteiros pares, B o conjunto dos números inteiros múltiplos de 3 e C o conjunto dos números inteiros múltiplos de 6. Determine as relações de inclusão entre A, B e C. ■

Entre outras coisas, o exercício acima indica que precisamos de um modo mais prático para *descrever* conjuntos. A seguir, listam-se modos comuns de descrever o conjunto A do exercício anterior:

- $A = \{x : x \in \mathbb{Z}$ e x é par$\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} : x$ é par$\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} :$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2n\}$;
- $A = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$.

Em geral, ao descrever um conjunto no formato

$$\underbrace{\{\ldots}_{1^{\text{a}}\text{ parte}} : \underbrace{\ldots\}}_{2^{\text{a}}\text{ parte}}$$

entende-se que o conjunto considerado é formado pelos elementos que satisfazem o que se escreve na primeira parte, **tais que** as condições impostas na segunda parte são satisfeitas. Assim, na primeira descrição de A, entende-se que seus elementos são todas as coisas (já que não há restrições) que são números inteiros pares (a condição imposta na segunda parte). Analogamente, na segunda descrição, A é descrito como a coleção de todos os números inteiros (como imposto na primeira parte) que são pares (já que está é a condição da segunda parte).

Exercício 0.1 ($\star$)**.** Descreva os conjuntos B e C do exercício anterior nos formatos acima. ■

Observação 0.0.1. É comum encontrar a notação "$\{\ldots | \ldots\}$" em vez de "$\{\ldots : \ldots\}$". Você pode usá-la em seus exercícios, desde que não implique com a minha forma de escrever, padrão nos textos de Teoria dos Conjuntos, e que será adotada aqui. $\triangle$

Outra alternativa prática de descrição, geralmente utilizada para conjuntos *finitos*[1], consiste em listar os elementos do conjunto. Por exemplo: para $S := \{a, 4, \triangle\}$, temos $a \in S$, $4 \in S$ e $\triangle \in S$, enquanto $0 \notin S$, $\nabla \notin S$ etc. Importante destacar o uso do símbolo "$:=$" acima: a ideia é usá-lo para indicar que S foi "definido" ou "declarado" como o conjunto escrito após o símbolo "$:=$". Para ilustrar, observe que no próximo exercício faz sentido usar "$=$" pois S já foi declarado acima.

[1] Finitude é um tópico que será discutido ainda neste capítulo.

Exercício 0.2 ($\star$)**.** Mostre que $S = \{\triangle, 4, a\}$. $\blacksquare$

Preciosismos à parte[2], o exercício acima indica que a ordem em que os elementos de um conjunto são descritos é irrelevante. É por essa razão que conjuntos do tipo $\{a, b\}$ são chamados de **pares não-ordenados**.

Exercício 0.3 ($\star$)**.** Mostre que $\{x, x\} = \{x\}$ para qualquer x. **Observação**: por conta deste resultado, é de "bom tom" não grafar duas vezes o mesmo elemento ao descrever um conjunto com a notação "$\{\ldots\}$". $\blacksquare$

Exercício 0.4 ($\star$)**.** Descreva o conjunto $\{0, 1\}$ por meio da notação $\{\ldots : \ldots\}$. $\blacksquare$

A fim de encerrar esta primeira parte da revisão, a próxima definição trás o restante das notações e operações usuais entre conjuntos.

Definição 0.0.2.

(i) Denota-se $\emptyset := \{x : x \neq x\}$, *coleção* que será chamada de **conjunto vazio** por razões *óbvias*: não existe x com $x \in \emptyset$, já que o contrário daria $x \neq x$.

(ii) Para X e Y conjuntos, considera-se $X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\}$, que denota a **diferença** entre X e Y, também chamada de **complementar de** Y **em** X.

(iii) Para conjuntos A e B, $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ e $A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ denotam os conjuntos chamados, respectivamente, de **interseção** e (**re**) **união** dos conjuntos A e B. Em particular, A e B são **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$. ¶

Observação 0.0.3. Lembre-se: na linguagem comum, "e" funciona como um *agregador*, enquanto "ou" indica *alternativa*: por exemplo, os pontos da reta nos intervalos $(-\infty, 1)$ *e* $(3, +\infty)$ constituem a solução da inequação $x^2 - 4x + 3 > 0$, o que em linguagem de conjuntos se expressa por meio da reunião $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. No entanto, **não** faz sentido dizer que tal reunião é composta por todo x tal que $x \in (-\infty, 1)$ **e** $x \in (3, +\infty)$, pois este "e" (da linguagem matemática usual) indica *simultaneidade* – e não há x com as duas propriedades *ao mesmo tempo*: o correto é dizer que $x \in (-\infty, 1)$ **ou** $x \in (3, +\infty)$. Cabe ainda destacar que o "ou" matemático não é exclusivo: sempre que dissermos "$x \in A$ ou $x \in B$", deve-se entender que *pelo menos* um dos casos deve ocorrer, o que não inviabiliza a ocorrência de ambos. $\triangle$

Proposição 0.0.4. *Para todo conjunto A ocorre $\emptyset \subseteq A$.*

Demonstração. Dado x qualquer, a implicação "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" é verdadeira por *vacuidade*, já que "$x \in \emptyset$" é falso. Alternativamente: se a *inclusão* fosse falsa, deveria existir $x \in \emptyset$ com $x \notin A$, mas não existe $x \in \emptyset$, absurdo[3]. $\square$

Observação 0.0.5 (Contido vs. pertence)**.** Cuidado para não confundir *pertinência* e *continência*:

- "$x \in y$" significa que "x" é um dos elementos de "y";
- "$x \subseteq y$" significa que "todo elemento de x é também elemento de y".

[2] Ninguém reprovará na matéria por escrever "=" em vez de ":=". CALMA.

[3] Por exemplo: a sentença "todas as piscinas da minha casa são olímpicas" é verdadeira se a minha casa não tiver piscinas.

Assim, embora $\emptyset \subseteq A$ ocorra para qualquer conjunto A, nem sempre ocorre $\emptyset \in A$. Na verdade, fora de contextos mais formais, é raro que se tenha $\emptyset \in A$. Veja que, por exemplo, $\emptyset \notin \emptyset$, já que o contrário é dizer que $\emptyset$ tem um elemento. Mesmo assim, $\emptyset \subseteq \emptyset$. A raiz dessa confusão é, possivelmente, oriunda do fato de que muitas vezes se diz "y contém x" a fim de expressar "$x \in y$". △

Exercício 0.5 ($\star$)**.** Convença-se de que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. ■

Observação 0.0.6. Não escreva "{ }" para representar o conjunto vazio. Em um mundo onde impressoras falham e cada vez mais pessoas lidam com TDAH, quem lê pode se perguntar se foi erro de impressão ou distração de quem escreveu. Já "$\emptyset$" é claro e sem margem para dúvida. Não insista nisso.) △

Exercício 0.6 ($\star$)**.** Sejam A, B e C conjuntos. Mostre as identidades, inclusões, equivalências e implicações a seguir.

a) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

d) $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

f) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

g) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$.

h) $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

i) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. ■

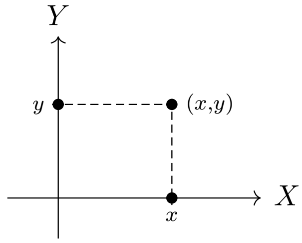
Funções

O advento das *funções*, seja por invenção ou descoberta, deflagrou uma das maiores mudanças de paradigma na Matemática por permitir incorporar as noções de movimento e variação aos *modelos* que, até então, tratavam apenas de situações estáticas e posicionais. Embora hoje se apresente como um conceito simples, alguns séculos separam as primeiras menções explícitas às funções da "definição" apresentada por Dedekind na segunda metade do Século XIX:

Conceito de função. *Uma função é uma regra f que associa cada elemento x de um conjunto X a um único elemento $f(x)$ de um conjunto Y.*

Se, por um lado, a conceituação acima parece englobar os casos clássicos aprendidos na infância (funções *polinomiais*, *trigonométricas*, etc.), por outro lado ela empurra para debaixo do tapete a definição de "regra". Um modo mais honesto consiste em apelar para *pares ordenados*.

Diferente do que ocorre no caso não-ordenado, em que $\{a, b\} = \{b, a\}$ mesmo com $a \neq b$, pode-se *convencionar* escrever (a, b) com o intuito de ter o seguinte comportamento: $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Com tal *dispositivo*, usualmente xingado de **par ordenado**, passa a fazer sentido definir o **produto cartesiano** $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ entre os conjuntos X e Y, cujos membros são todos os pares ordenados da forma (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$: noutras palavras, $X \times Y$ apenas abstrai um típico plano *cartesiano*.



Dado que um par ordenado (x, y) pode ser interpretado como uma *mini-regra* que faz sua *primeira coordenada* x corresponder à sua *segunda coordenada* y, é natural pensar em *regras* que associam elementos de X a Y como subconjuntos de $X \times Y$.

Definição 0.0.7 (Bourbaki, 1939)**.** Uma **função** (ou **mapa** ou **aplicação**) **de** X **em** Y é um subconjunto $f \subseteq X \times Y$ tal que:

(i) para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ com $(x, y) \in f$ (cada x se associa a pelo menos um y);

(ii) se $(x, y), (x, z) \in f$, então $y = z$ (o y associado a x é único).

Escreve-se $f\colon X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ para indicar que f é uma função de X em Y. ¶

Acima, o conjunto X costuma ser chamado de **domínio** da função f, enquanto Y é o seu **codomínio** (também chamado de *contradomínio*). Uma vez que a cada $x \in X$ corresponde um único $y \in Y$ com $(x, y) \in f$, faz sentido atribuir a y uma notação que remeta ao elemento x: no caso, faz-se $y := f(x)$ (ou ainda $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$), e xinga-se $f(x)$ de **imagem de** x pela função f. Por sua vez, o subconjunto de Y formado por todos os elementos da forma $f(x)$, conforme x *varia* em X, é chamado de **imagem da função**, e denotado por $\operatorname{im}(f)$. Em símbolos: $\operatorname{im}(f) := \{f(x) : x \in X\}$.

Exemplo 0.0.8 (Funções polinomiais)**.** Dado um *polinômio na indeterminada* t, i.e., uma *expressão* da forma $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e *números reais*[4] $a_0, \ldots, a_n$, onde t indica apenas um símbolo *indeterminado*, que abreviaremos com $p(t)$, passa a fazer sentido substituir cada ocorrência de "t" na expressão $p(t)$ por um *número real* x fixado, o que *produz* o *número real*

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Dessa forma, pode-se dizer que $p := \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ relaciona cada $x \in \mathbb{R}$ ao número $p(x) \in \mathbb{R}$. Uma vez que tal associação é claramente *funcional*[5], ganha-se uma função $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto p(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Funções desse tipo são chamadas de (funções) **polinomiais**. ▲

Exemplo 0.0.9 (Funções racionais)**.** Mais geralmente, consideram-se expressões da forma $r(t) := \frac{p(t)}{q(t)}$ em que ambos $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios na indeterminada t. Desta vez, só faz *sentido* substituir "t" em $r(t)$ por um número real x fixado nas situações em que se garantir $q(x) \neq 0$, pois a divisão por 0 não é realizável em *corpos*. Assim, a expressão $r(t)$ induz uma função r cujo domínio é $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$, e que faz $r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ para cada x no domínio de r. Funções assim costumam ser chamadas de (funções) **racionais**. ▲

[4]Formalmente ainda não definimos o que é um número real. No entanto, você já fez Cálculo I. De modo geral, os exemplos farão uso de informações que nós já sabemos como são, embora ainda não estejam implementadas formalmente na disciplina. O Elon faz isso e ninguém reclama, então não é agora que isso vai virar um problema, certo?

[5]No sentido de que se $(x, y), (x, z) \in p$, então $y = z$.

Exercício 0.7 ($\star$)**.** Para funções f e g de X em Y, mostre que $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. ■

Definição 0.0.10. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são funções, então fica *bem definida* uma função $g \circ f : X \to Z$ dada pela identidade

$$(g \circ f)(x) \coloneqq g \circ f(x) \coloneqq g(f(x)),$$

para todo $x \in X$, chamada de (função) **composta** (ou **composição**) entre f e g, em geral denotada apenas por $g \circ f$. ¶

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] & f(x) & y \arrow[r, mapsto] & g(y) \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[rrr, bend right, "g\circ f"'] & & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
x \arrow[rrr, mapsto] & & & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Figura 0.0: Esquematicamente, f vem antes de g, já que as setas costumam sair da direita para esquerda, no sentido de nossa escrita. Por outro lado, para descrever a regra da composição, precisamos escrever g primeiro, já que os cálculos são feitos "de dentro para fora": primeiro calcula-se $f(x)$, para daí calcular $g(f(x))$. Note que, apesar disso, as duas notações indicam a mesma coisa.

A definição acima faz sentido pois $f(x) \in Y$ para todo $x \in X$ e $Y = \operatorname{dom}(g)$, de modo que g *sabe* o que *fazer* com $f(x)$. Um pouco mais formalmente, podemos definir

$$g \circ f \coloneqq \{(x, z) \in X \times Z : g(f(x)) = z\},$$

que satisfaz as condições para ser uma função do tipo $X \to Z$:

✓ para cada $x \in X$ existe $z \in Z$ tal que $(x, z) \in g \circ f$, basta tomar $z \coloneqq g(f(x))$;

✓ se $(x, z), (x, z') \in g \circ f$, então $z = z'$ já que $z = g(f(x)) = z'$.

Exercício 0.8 ($\star$)**.** Sejam $f : W \to X$, $g : X \to Y$ e $h : Y \to Z$ funções. Mostre que as funções $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são iguais. ■

Exercício 0.9 ($\star$)**.** Para um conjunto X, escreve-se $\mathrm{Id}_X : X \to X$ para denotar a **função identidade de** X, definida por $\mathrm{Id}_X(x) \coloneqq x$ para cada x em X. Mostre que $f \circ \mathrm{Id}_X = f$ para qualquer função f cujo domínio é X e $\mathrm{Id}_X \circ g = g$ para qualquer função g cujo codomínio é X.■

0.0.1 Extras

Análise para quê?

Os números naturais foram criados por Deus, todo o resto é trabalho da humanidade.

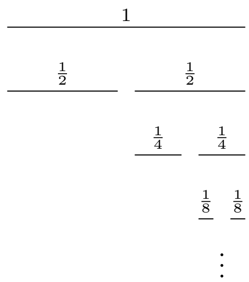
Leopold Kronecker (1886).

Faz parte do folclore matemático atribuir a frase anterior ao algebrista Leopold Kronecker (1823-1891), como uma síntese de seu ceticismo perante os diversos métodos *infinitários* e não-construtivos que se propagaram na Matemática a partir da segunda metade do Século XIX [5]. Longe de ser uma mera declaração teológica, ela expressa a confiabilidade que temos diante dos *métodos aritméticos* usuais, explicitamente ancorados na (aparente?) realidade imediata, em contraponto aos argumentos do *Cálculo*, que frequentemente dependem de suposições incomuns ao nosso cotidiano intrinsecamente *finito*, como no caso das *séries*.

Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \qquad (\dagger)$$

que manifesta a ideia de somar iteradamente parcelas da forma $\frac{1}{2^n}$ conforme toma-se n cada vez maior. Embora possa parecer artificial, esse tipo de animal surge naturalmente em problemas que envolvem o *cálculo* de áreas *curvilíneas*, por meio do chamado *método da exaustão*[6]. O ponto a chamar atenção, porém, é o seguinte: embora cada estágio finito desse processo seja facilmente calculável, não é completamente óbvio o que poderia *significar* realizar uma soma com infinitas parcelas.



Com argumentos aritmético-geométricos do tipo ilustrado acima, é razoável *convencionar* que o valor para (†) (seja lá qual for) deve corresponder ao *número* para o qual as *somas parciais* se *dirigem*: no caso, tal número *deveria* ser 1, já que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \cdots$ Ainda assim, trata-se de uma convenção ou definição: não há vida suficiente para efetuar *todas* as somas e verificar uma igualdade legítima.

Agora, o que significa dizer que tais somas parciais se dirigem para algum valor? Além disso, o que impediria que certas somas se dirigissem para números diferentes? Mais ainda, como determinar os valores de tais somas infinitas?

Evidentemente, nada impede que tais perguntas sejam respondidas de forma vaga e intuitiva – ou apenas ignoradas. No caso da série proposta, por exemplo, um argumento muito comum para justificar as estimativas sem muito esforço (abanando as mãos) é o seguinte: ao escrever $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, chega-se a

$$2S = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + S$$

e, consequentemente, $S = 1$, justamente o que o raciocínio intuitivo geométrico sugeria!

Não é difícil adaptar o *método* para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ e, mais geralmente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} = \frac{m}{1-m}$ sempre que $m > 1$, identidades compatíveis com suas respectivas interpretações geométricas. O que acontece, porém, ao aplicar tal "metodologia" na determinação do valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$? Como antes, ao escrever $T := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, chega-se a

$$2T = 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{n+1} + \ldots \Rightarrow 2T + 2 = 2 + 4 + 8 + \ldots = T \Rightarrow T = -2,$$

resultado que, desta vez, não parece *certo*, por discordar do que a interpretação geométrica sugere.

Finalmente encontramos uma pergunta mais inescapável do que as feitas um pouco acima: *por que o truque algébrico preguiçoso pareceu funcionar nos primeiros casos mas falhou no último?*

Responder a esse tipo de pergunta é, pelo menos historicamente, um dos papéis da Análise. Pode-se dizer que ela surgiu do processo natural de revisão metodológica, típico do *modus operandi* científico, no contexto do *Cálculo* de Leibniz-Newton. Embora, a princípio, tratasse-se de um movimento voltado a justificar (e expandir) os resultados da área com base em conceitos geométricos menos vagos, seus praticantes não tardaram a empregar a *linguagem de conjuntos* no processo de retraduzir e *sintetizar* o Cálculo a partir de noções aparentemente tão sólidas quanto os números criados pelo deus de Kronecker.

[6] É o que está por trás das ideias de *integração* que você estudou em Cálculo I.

Fundamentos debaixo do tapete

Conjuntos e, mais geralmente, *objetos matemáticos*, não existem da mesma forma que as entidades físicas existem. Por mais que você procure na sua casa ou em qualquer outro lugar, você nunca encontrará *o número 2*, por exemplo. É claro que você pode encontrar símbolos, desenhos ou pinturas que remetam ao *número 2*, mas nunca *o* próprio número 2, já que este é uma ideia, a abstração de um conceito. Dessa forma, diferente de alguém na Biologia ou na Geologia, cujos objetos de estudo são palpáveis e facilmente detectáveis, na Matemática é preciso tomar mais cuidado.

Conforme a Matemática se desenvolveu e amadureceu ao longo dos milênios, chegou-se ao consenso de utilizar *o método axiomático*. Na prática, isto consiste em assumir como válidas algumas afirmações básicas que parecem razoáveis o bastante para serem entendidas como "verdadeiras", e a partir delas deduzir "todo o resto". Como a discussão anterior indicou, isto é relativamente desnecessário para questões matemáticas corriqueiras, mas se torna indispensável quando problemas menos usuais entram em cena. Concomitantemente, a adaptabilidade dos conjuntos favoreceu o seu uso em praticamente todas as áreas da Matemática. Mas, novamente: conjuntos não existem.

Nesse sentido, há basicamente dois axiomas sobre conjuntos que as pessoas utilizam em seus primeiros contatos com o tema: o Axioma da Extensão, já postulado no começo da seção, e o Axioma da Abstração. Este último é usado implicitamente sempre que se emprega a notação $\{\ldots : \ldots\}$. Grosso modo, postula-se o seguinte: dada uma *propriedade* $\mathcal{P}$, existe o conjunto $\{x : x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$. É claro que isto deixa o problema de explicar o que é *propriedade*, mas a intuição basta para a discussão: tudo o que se definiu na seção anterior poderia ser justificado por meio desses dois axiomas, até mesmo pares ordenados!

Exercício 0.10 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Para x e y quaisquer, <u>defina</u> $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mostre que para a, b, c e d quaisquer, $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. ■

Com um pouco mais de paciência, não seria difícil ver que funções podem ser interpretadas como conjuntos. Mais adiante, veremos que números também podem ser "definidos" via conjuntos, de modo que chega-se à conclusão inevitável: é razoável assumir, para propósitos formais, que tudo é conjunto. Do ponto de vista metodológico mencionado na página anterior, esta seria uma vitória enorme: a partir de dois axiomas básicos, *seríamos* capazes de justificar e reconstruir uma quantidade monumental de *fatos* matemáticos, o que tornaria bastante razoável aceitar as consequências menos intuitivas que encontrássemos pelo caminho. Contudo, há um problema.

Exercício 0.11 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Considere $R := \{x : x \notin x\}$. Mostre que $R \in R$ se, e somente se, $R \notin R$. ■

O Axioma da Abstração diz que R deveria *existir*. Porém, se R existir, chega-se a uma contradição, pois tanto $R \in R$ quanto sua negação devem ocorrer simultaneamente.

Uma das soluções encontradas para resolver tal problema, conhecido como Paradoxo de Russell, foi abandonar o Axioma da Abstração e, em seu lugar, assumir o Axioma da Separação que, grosso modo, postula o seguinte: dada uma *propriedade* $\mathcal{P}$ e um conjunto A, existe o conjunto $\{x \in A : x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$. Assim, em vez de assumir a habilidade irrestrita de definir conjuntos, supõe-se apenas a capacidade de determinar *subconjuntos* de conjuntos previamente conhecidos. O preço disso é que a lista de axiomas precisou ser estendida. Contudo, tais axiomas não serão abordados aqui – com exceção do Axioma da Escolha. Para saber mais, você pode conferir a referência [14].

0.1 Injeções, sobrejeções e a noção de cardinalidade

0.1.0 Essencial

Revisão: funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Definição 0.1.0. Uma função $f : X \to Y$ será dita:

(i) **injetora** (ou *injetiva*, *injeção*, etc.) se para quaisquer $x, x' \in X$, a ocorrência de $f(x) = f(x')$ acarretar $x = x'$;

(ii) **sobrejetora** (ou *sobrejetiva*, *sobrejeção*, *sobre* Y, etc.) se $\operatorname{im}(f) = Y$ e

(iii) **bijetora** (ou *bijetiva*, *bijeção*, etc.) se $f : X \to Y$ for injetora e sobrejetora. ¶

Para aquecer, você pode começar com o próximo

Exercício 0.12 ($\star\star$)**.** Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se g e f são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

b) Mostre que se g e f são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

c) Conclua que se g e f são bijetoras, então $g \circ f$ é bijetora.

Bijeções estão intimamente ligadas com a noção de *invertibilidade*[7] para funções.

Definição 0.1.1. Dizemos que uma função $g : Y \to X$ é *uma* **inversa** de $f : X \to Y$ se $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. A função f é **invertível** se tem uma inversa. ¶

Observação 0.1.2. Na prática, dizer que g é *uma* inversa de f equivale a dizer que $g : Y \to X$ satisfaz o seguinte

$$\text{para quaisquer } x \in X \text{ e } y \in Y,\ g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y. \tag{0.0}$$

De fato, se g é *uma* inversa de f, então a condição acima é satisfeita: por um lado, se $g(y) = x$, então $f(g(y)) = f(x)$, com $f(g(y)) = y$ pois $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ vale por hipótese; por outro lado, se $f(x) = y$, então $g(f(x)) = g(y)$, com $g(f(x)) = x$ pois $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ vale por hipótese. Reciprocamente, se $g : Y \to X$ satisfaz a condição (0.0), então valem as identidades $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$: para a primeira, note que se $f(x) = y$, então (0.0) assegura $g(y) = g(f(x)) = x$; a segunda é *análoga*[8]. △

Em outras palavras, *uma* inversa de g desfaz tudo o que f faz. Como consequência:

Exercício 0.13 ($\star$)**.** Mostre que uma inversa, se existir, é única, ou seja: se g e g' são inversas de f, então $g = g'$. ■

Em certo sentido, o resultado acima diz que a inversa de uma função f fica completamente determinada por f (caso exista). Por isso, é comum indicá-la de modo a fazer alusão à função f: neste caso, a notação mais comum para a inversa de f é f^{-1}.

Exemplo 0.1.3. A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(z) := z + 1$ tem inversa dada por $g(z) := z - 1$. De fato,

$$g(f(z)) = f(z) - 1 = z + 1 - 1 = z \quad \text{e} \quad f(g(z)) = g(z) + 1 = z - 1 + 1 = z.$$

Futuramente, veremos que a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tem a função logaritmo $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como inversa: de suas aulas de Cálculo I, você deve se lembrar de que $e^x = y$ se, e somente se, $\ln(y) = x$. Compare isso com a condição (0.0). ▲

Exemplo 0.1.4. A função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $h(z) := z^2$ não é invertível: por valer $h(-1) = h(1) = 1$, não pode haver g satisfazendo (0.0), pois $g(1)$ seria simultaneamente igual a -1 e 1. Em particular, note que h não é injetora e nem sobrejetora. ▲

O que tudo isso tem a ver com bijeções?

Proposição 0.1.5. *Uma função $f : X \to Y$ é bijetora se, e somente se, é invertível.*

[7] O verbo é "inverter" e não "inverser".

[8] Afirmações dessa natureza devem ser encaradas como exercícios do tipo ($\star$).

Demonstração. Assumindo que f é bijetora, vamos definir uma função $g\colon Y \to X$ que provaremos ser a inversa de f. Não há muito o que fazer: vamos definir

$$g := \{(y, x) \in Y \times X : f(x) = y\}.$$

Por f ser sobrejetora, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $(y, x) \in g$. Agora, se $(y, x), (y, x') \in g$, então $f(x) = f(x')$ (por quê?)*, donde a injetividade de f assegura $x = x'$. Isto mostra que g é função de $Y \to X$. Para verificar que g é a inversa de f, basta notar que g satisfaz a condição (0.0) da Observação 0.1.2 por construção.

A recíproca, isto é, "se $f\colon X \to Y$ é invertível, então f é bijetora", é consequência do próximo exercício. □

Exercício 0.14 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

b) Mostre que se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

c) Conclua que se $Z := X$ e $g := f^{-1}$, então f é bijetora. ■

Corolário 0.1.6. *Se $f\colon X \to Y$ é bijeção, então $f^{-1}\colon Y \to X$ é bijeção.*

A noção de cardinalidade

Os tipos de função discutidos no começo da seção permitem comparar o *tamanho* dos conjuntos de modo bastante prático.

Definição 0.1.7. Diremos que dois conjuntos **têm a mesma cardinalidade** ("quantidade de elementos") se existir uma bijeção entre os dois. ¶

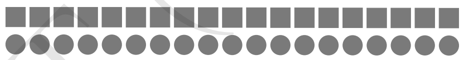


Figura 0.1: É evidente que há tantos círculos quanto quadrados, mesmo sem saber *quantos*.

Proposição 0.1.8. *Sejam A, B e C conjuntos.*

(i) *Existe uma bijeção de A para A.*

(ii) *Se existe uma bijeção de A para B, então existe uma bijeção de B para A.*

(iii) *Se existe uma bijeção de A para B e outra bijeção de B para C, então existe uma bijeção de A para C.*

Demonstração. O primeiro item segue por Id_A ser bijeção, enquanto o terceiro item decorre do fato de que a composição de bijeções é bijeção (Exercício 0.12). O segundo item é o Corolário 0.1.6. □

Intuitivamente, a proposição acima diz que ao escrever

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{existe bijeção } A \to B,$$

define-se uma *relação binária*[9] entre conjuntos que se comporta, essencialmente, como a relação de igualdade: $A \approx A$, $B \approx A$ sempre que $A \approx B$ e $A \approx C$ sempre que $A \approx B$ e $B \approx C$. Esse tipo de coisa tem um nome: trata-se de uma *relação de equivalência*[10].

[9] Primeiro tópico da Subseção 0.1.1.

[10] Segundo tópico da Subseção 0.1.1.

Em vez de determinar quando dois conjuntos *têm* a mesma cardinalidade, podemos usar funções para detectar quando um conjunto tem *mais elementos* do que outro.

Definição 0.1.9. Para conjuntos X e Y, vamos fixar as seguintes notações:

(i) "$X \precsim Y$" será usada para indicar a existência de injeção $X \to Y$;

(ii) "$X \prec Y$" será usada para indicar "$X \precsim Y$" e "$X \not\approx Y$";

(iii) "$Y \succsim X$" será usada para indicar a existência de sobrejeção $Y \to X$;

(iv) "$Y \succ X$" será usada para indicar "$Y \succsim X$" e "$X \not\approx Y$". ¶

A semelhança com os símbolos "$\leq$" e "$<$" usualmente empregados no contexto de ordenação numérica é intencional: ela serve para nos lembrar que as propriedades de $\precsim$ e $\prec$ se parecem com as propriedades de $\leq$ e $<$, respectivamente. E de fato, tais relações realmente comparam as *cardinalidades* dos conjuntos.

Exercício 0.15 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para conjuntos X, Y e Z, mostre que

a) $X \precsim X$;

b) se $X \precsim Y$ e $Y \precsim Z$, então $X \precsim Z$;

c) se $X \approx Y$, então $X \precsim Z$ se, e somente se, $Y \precsim Z$.

Faça o mesmo trocando $\precsim$ por $\prec$, $\succsim$ e $\succ$. ■

Formalmente, tais relações remetem às ordens que serão abordadas na próxima seção. Todavia, com a terminologia que será utilizada, $\precsim$ não pode satisfazer a *antissimetria* para conjuntos: existem conjuntos X e Y com $X \neq Y$ tais que $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ (dê exemplos)*. Isto ocorre pois $\precsim$ é uma ordem não sobre os conjuntos, mas sobre suas *cardinalidades*.

Teorema 0.1.10 (Cantor-Bernstein)**.** *Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$, então $X \approx Y$, i.e., se existem injeções da forma $X \to Y$ e $Y \to X$, então existe bijeção $X \to Y$.*

O resultado acima é uma banalidade nas situações em que X e Y são *finitos*: como veremos, em tais situações, $X \precsim Y$ se, e somente se, o *número de elementos de* X, digamos m, é menor do que ou igual ao *número de elementos de* Y, digamos n, de modo que a ocorrência simultânea de $Y \precsim X$ acarreta a desigualdade oposta $n \leq m$, resultando em $m = n$. Com isso dito, note que o enunciado não menciona números ou *finitude*, que ainda não foram formalmente introduzidos. O fato de ser possível demonstrá-lo no contexto que se desenrola pode ser interpretado como um indicativo de que as definições adotadas cumprem bem o papel de abstrair a noção de cardinalidade. Sua demonstração, porém, será postergada (cf. Subseção 0.4.1): há questões mais urgentes a serem discutidas.

Exercício 0.16 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Usando o Teorema de Cantor-Bernstein, mostre que $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

0.1.1 Extras

Relações binárias e inversas

Definição 0.1.11. Dados conjuntos X e Y, uma **relação** (**binária**) R entre X e Y é um subconjunto de $X \times Y$.

(i) Para um par $(x, y) \in X \times Y$, escreve-se $x \mathrel{R} y$ para indicar que o par (x, y) é membro da relação R, enquanto x e y são ditos R-**relacionados**. A ocorrência de $(x, y) \notin R$ será indicada por $x \not\mathrel{R} y$.

(ii) O **domínio** da relação R é o conjunto $\operatorname{dom}(R) := \{x : \text{existe } y \in Y \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

(iii) A **imagem** da relação R é o conjunto $\operatorname{im}(R) := \{y : \text{existe } x \in X \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

Quando $X = Y$, diz-se apenas que R é uma relação em X. ¶

Exemplo 0.1.12 (Relação de igualdade)**.** Fixado um conjunto X, $\Delta_X := \{(x,y) \in X \times X : x = y\}$ é chamada de *relação de igualdade* em X. Daí, de acordo com a definição anterior, pode-se escrever $x\,\Delta_X\,y$ para indicar que $(x,y) \in \Delta_X$, i.e., $x = y$. ▲

Exemplo 0.1.13 (Partes e inclusão)**.** Fixado um conjunto X, faz sentido considerar a *coleção* de *todos os subconjuntos de* X, denotada por $\wp(X)$ e chamada de **conjunto das partes de** X, simbolicamente: $\wp(X) := \{A : A \subseteq X\}$. Por exemplo:

(i) para $X := \emptyset$, $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, já que $\emptyset$ é o único subconjunto de $\emptyset$;

(ii) para $X := \{0,2\}$, $\wp(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}\}$, pois $\emptyset$ e X sempre são subconjuntos de X e, no caso, os demais subconjuntos possíveis são $\{0\}$ e $\{2\}$;

(iii) para $X := \mathbb{N}$, ocorre $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, bem como $\{n : n \text{ é par}\}$, $\{n : n \text{ é ímpar}\}$, $\{n : n \text{ é primo}\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, além dos típicos $\emptyset, \mathbb{N} \in \wp(\mathbb{N})$. TODO subconjunto de $\mathbb{N}$ é, por definição, membro de $\wp(\mathbb{N})$; oportunamente, veremos que se trata de um conjunto bem grande.

De qualquer forma, para X fixado, a relação de inclusão entre subconjuntos de X define, como a frase sugere, uma relação binária $\subseteq$ na *família*[11] $\wp(X)$ de todos os subconjuntos de X: explicitamente, $\subseteq := \{(A,B) : A \subseteq B \subseteq X\}$. ▲

Exemplo 0.1.14 (*Curvas* e gráficos)**.** Em posse de *estruturas algébricas*, é possível utilizar expressões algébricas a fim de *relacionar variáveis*. Por exemplo, a *expressão polinomial* $x^2 + y^2 = 1$ induz a relação binária $S := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Quando se representa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ graficamente como o plano cartesiano usual, o subconjunto S *passa a corresponder* aos pontos do plano que *distam* precisamente 1 da origem $(0,0)$.

Em particular, S *não* determina uma função da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pois para um mesmo $x \in \operatorname{dom}(S)$ existem $y, y' \in \operatorname{im}(S)$ distintos e relacionados a x: explicitamente, se $x^2 + y^2 = 1$, então $y^2 = x^2 - 1$ e, como veremos, em tal situação pode-se concluir apenas que $|y| = \sqrt{x^2 - 1}$, o que dá margem a $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y' = -\sqrt{x^2 - 1}$, ambos relacionados ao mesmo x. ▲

Definição 0.1.15. Dada uma relação binária R, a **relação inversa** de R, denotada por R^{-1}, é a relação $R^{-1} := \{(y,x) : x\,R\,y\}$. ¶

Exercício 0.17 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para uma relação binária R, mostre que:

a) $x\,R\,y \Leftrightarrow y\,R^{-1}\,x$ para quaisquer x e y;

b) $\operatorname{dom}(R) = \operatorname{im}\left(R^{-1}\right)$;

c) $\operatorname{im}(R) = \operatorname{dom}\left(R^{-1}\right)$; e

d) $(R^{-1})^{-1} = R$. ■

Exercício 0.18 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Supondo que $X = Y$ e $R \subseteq X \times X$, interprete geometricamente a definição de R^{-1} como sendo a "rotação" de R em torno da "diagonal" Δ_X. ■

Esta discussão permite revisar a noção de função inversa. Como toda função é uma relação binária, vemos que toda função $f\colon X \to Y$ admite uma *relação inversa* f^{-1}. Assim, a Proposição 0.1.5 estabelece critérios para que tal relação inversa seja uma função (no sentido de Bourbaki).

Relações de equivalência, partições e cardinais

Definição 0.1.16. Uma relação binária $\sim$ num conjunto X é dita uma **relação de equivalência** se $\sim$ for

(i) **reflexiva**, i.e., se para todo $x \in X$ ocorrer $x \sim x$,

(ii) **simétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in X$, a ocorrência de $x \sim y$ acarretar $y \sim x$, e

(iii) **transitiva**, i.e., se para quaisquer $x, y, z \in X$, a ocorrência simultânea de $x \sim y$ e $y \sim z$ acarretar $x \sim z$.

Diremos também que x e y são **$\sim$-equivalentes** sempre que ocorrer $x \sim y$, com a omissão do sufixo "$\sim$" quando a relação estiver clara pelo contexto. ¶

[11] Não custa frisar: neste texto, "**conjunto**", "**coleção**" e "**família**" são tratados como sinônimos!

Uma relação de equivalência $\sim$ estabelece um critério por meio do qual objetos a princípio distintos podem ser vistos como iguais, ao mesmo tempo em que separa outros objetos distintos pelo mesmo critério. Dessa forma, não espanta que a *relação de igualdade* ($x \sim y$ se, e somente se, $x = y$) seja o exemplo óbvio de equivalência.

Exemplo 0.1.17 (Horóscopo)**.** Frequentemente, praticantes da (pseudociência chamada de) `Astrologia` fazem uso implícito das relações de equivalência. De fato, de um ponto de vista informal, signos determinam uma "relação de equivalência" no "conjunto" de todas as pessoas:

✓ toda pessoa tem o mesmo signo de si mesma;

✓ se P tem o mesmo signo de P', então P' tem o mesmo signo de P;

✓ se P tem o mesmo signo de P' e esta tem o mesmo signo de P'', então P e P'' têm o mesmo signo.

Se a coisa parasse por aí, a `Astrologia` seria inofensiva. No entanto, é comum encontrar asserções do tipo "o comportamento X é característico do signo Y", o que sugere duas alternativas: ou a afirmação é falsa, ou *toda pessoa* do signo Y apresenta o comportamento X. Esse tipo de máxima ajuda a entender um dos usos mais comuns das relações de equivalência: a simplificação. Com efeito, se tais afirmações *astrológicas* fossem verdadeiras, então para entender os padrões comportamentais de *toda a humanidade* bastaria estudar os comportamentos de doze *representantes*, um de cada signo, algo bem mais simples do que estimar o comportamento individual dos oito bilhões de habitantes do planeta. Por *sorte*, signos estimam tão somente as datas de nascimento de seus portadores. ▲

Exemplo 0.1.18 (Paridade)**.** Recordemo-nos de que os números naturais podem ser classificados como *pares* ou *ímpares*: **pares** são os múltiplos de dois, **ímpares** são os outros. Isso pode ser usado para determinar uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$: $m, n \in \mathbb{N}$ serão ditos $\sim$-equivalentes se tiverem a mesma *paridade*. Assim, $0, 2, 4, 6, \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, $1, 3, 5, 7 \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, enquanto 0 e 1 não são $\sim$-equivalentes, por exemplo. Note que há certos comportamentos *algébricos* que não dependem dos números escolhidos, e sim de suas paridades: a soma de *quaisquer* dois *ímpares* é *par*, o produto entre quaisquer *ímpares* é *ímpar*, etc. Isto sugere a possibilidade de realizar operações diretamente com as *classes* dos pares e dos ímpares em vez de lidar com seus *infinitos* representantes. ▲

Exemplo 0.1.19 (Restos da divisão por n)**.** Para generalizar o exemplo anterior, pode-se considerar a seguinte relação binária: para $n \in \mathbb{N}$ fixado e $x, y \in \mathbb{N}$, escreveremos $x \sim_n y$ a fim de indicar que x e y têm o mesmo *resto* na *divisão* por n. Verificar que tal relação $\sim_n$ é reflexiva, simétrica e transitiva é um bom exercício para quem se lembra de como fazer divisões. Ocorre que, como antes, certos comportamentos algébricos não dependem dos representantes escolhidos: por exemplo, a soma de quaisquer dois números com resto 2 na divisão por 3 terá resto 1, enquanto o produto de quaisquer dois números com resto 1 na divisão por 3 ainda terá resto 1. ▲

Um efeito colateral inevitável das relações de equivalência é a segregação dos elementos do conjunto em *classes de equivalência*. Mais precisamente:

Definição 0.1.20. Para uma relação de equivalência $\sim$ sobre um conjunto X, diremos que o conjunto $\{y : x \sim y\}$ é a **$\sim$-classe de equivalência de** x. A notação varia com o contexto: é comum escrever $[x]$, $[x]_\sim$, $\pi(x)$, $\overline{x}$, etc. Na dúvida, convêm explicitar a notação que será usada no começo das discussões. ¶

Com *relação* aos exemplos anteriores:

(i) a classe de equivalência de uma pessoa P com respeito aos signos astrológicos seria a coleção de todas as pessoas que têm o mesmo signo de P, consequentemente, existem apenas doze classes de equivalência (correspondentes aos signos possíveis);

(ii) a classe de equivalência de um número $n \in \mathbb{N}$ com respeito à paridade é a coleção dos naturais que têm a mesma paridade de n; logo, existem apenas duas classes, a dos pares e a dos ímpares;

(iii) a classe de equivalência de um número $p \in \mathbb{N}$ com respeito aos restos da divisão por n é a coleção dos números naturais que têm o mesmo resto na divisão, o que leva à conclusão de que existem precisamente n classes de equivalência (correspondentes aos restos possíveis na divisão por n).

Para facilitar a discussão de como uma relação de equivalência *particiona* o seu domínio, vamos introduzir brevemente a generalização do conceito de reunião.

Definição 0.1.21. Para um conjunto $\mathcal{S}$, define-se $\bigcup \mathcal{S} := \{x : \text{existe } S \in \mathcal{S} \text{ com } x \in S\}$, a **reunião da família** $\mathcal{S}$. Nas ocasiões em que $\mathcal{S} := \{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto $\mathcal{I}$ fixado, também é comum escrever $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_i$ ou $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} S_i$. ¶

O dispositivo acima apenas cria um modo bastante esperto de evitar abominações notacionais como "$S_0 \cup S_1 \cup \ldots$" quando se quer expressar uma reunião (possivelmente) *infinita* de conjuntos. Fora isso, ela não traz novidades: note, por exemplo, que para $\mathcal{S} := \{X, Y\}$, tem-se $\bigcup \mathcal{S} = X \cup Y$.

Exercício 0.19 $(\star)$**.** Note mesmo, isto é: verifique! ■

Proposição 0.1.22. *Sejam X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Ao denotar por C_x a $\sim$-classe de equivalência de x para cada $x \in X$, valem as afirmações:*

(*i*) *para todo $y \in X$, existe $x \in X$ com $y \in C_x$ (i.e., $X = \bigcup_{x\in X} C_x$);*

(*ii*) *para quaisquer $x, y \in X$ ocorre $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$;*

(*iii*) *para quaisquer $x, y \in X$, $C_x = C_y$ se, e somente se, $x \sim y$.*

Demonstração. O primeiro item decorre da reflexividade de $\sim$: como $y \sim y$, tem-se $y \in C_y$. Os dois itens seguintes seguem do próximo exercício. □

Exercício 0.20 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $\sim$ uma relação binária em X e $x, y \in X$ elementos quaisquer.

a) Mostre que se $\sim$ é transitiva, então "$x \sim y \Rightarrow C_y \subseteq C_x$".

b) Mostre que se $\sim$ é simétrica e transitiva, então "$x \sim y \Rightarrow C_x = C_y$".

c) Mostre que se $\sim$ é reflexiva, então "$C_x \subseteq C_y \Rightarrow x \sim y$".

d) Conclua que valem as condições (ii) e (iii) da proposição anterior. Dica: para (ii), o que ocorre com C_z se $z \in C_x \cap C_y$? ■

A última proposição mostra que $X/{\sim} := \{C_x : x \in X\}$, chamado de **quociente** de X por $\sim$, é uma família de subconjuntos de X que se enquadra como exemplo de *partição*.

Definição 0.1.23. Uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos não-vazios de X é uma **partição** de X se valerem as seguintes condições:

(i) para todo $x \in X$ existe $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$ (i.e., $X = \bigcup \mathcal{P}$); e

(ii) [12] se $P, Q \in \mathcal{P}$ e $P \neq Q$, então $P \cap Q = \emptyset$. ¶

Exercício 0.21 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X, então $X/{\sim}$ é uma partição de X. ■

Como o nome sugere, uma partição de X *particiona* o conjunto X em *partes* ou blocos *dois a dois disjuntos*, de modo que cada elemento de X está precisamente em apenas um membro de $\mathcal{P}$. Assim, faz sentido dizer que dois elementos de X são *$\mathcal{P}$-equivalentes* se pertencerem ao mesmo membro de $\mathcal{P}$. Como você deve ter suspeitado, isto define uma relação de equivalência legítima.

Proposição 0.1.24. *Se $\mathcal{P}$ for uma partição de X, então a relação $\sim_{\mathcal{P}}$ definida por*

$$u \sim_{\mathcal{P}} v \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } \{u, v\} \subseteq P$$

é uma relação de equivalência em X. Além disso, $\mathcal{P} = X/{\sim_{\mathcal{P}}}$.

Demonstração. A relação $\sim_{\mathcal{P}}$ é

✓ reflexiva, pois dado $x \in X$ existe $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$, e daí $\{x\} = \{x, x\} \subseteq P$,

✓ simétrica, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, então $\{x, y\} = \{y, x\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, e

[12] Costuma-se expressar a condição (ii) como "os membros de $\mathcal{P}$ são dois a dois disjuntos".

✓ transitiva, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$ e $\{y, z\} \subseteq P' \in \mathcal{P}$, então $P \cap P' \neq \emptyset$, acarretando $P = P'$ e, por conseguinte, $\{x, z\} \subseteq \{x, y\} \cup \{y, z\} \subseteq P \in \mathcal{P}$.

A igualdade $\mathcal{P} = X/{\sim_{\mathcal{P}}}$ segue pois $P = [x]_{\sim_{\mathcal{P}}}$ para quaisquer x e P com $x \in P \in \mathcal{P}$. □

Exemplo 0.1.25. Para a relação $\sim_n$ do Exemplo 0.1.19, as classes de equivalência correspondem precisamente a todos os possíveis restos pela divisão por n. Assim, chamando por R_i a coleção dos naturais que têm resto i na divisão por n, segue que $\mathbb{N}/{\sim_n} = \{R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}\}$. Dito isso, observe que ao chamar por $\bar{i}$ a *classe* de equivalência de i, verifica-se $\bar{i} = R_i$. Desse modo, seria lícito escrever, por exemplo, $\mathbb{N}/{\sim_2} = \left\{\bar{0}, \bar{1}\right\}$, ou ainda $\mathbb{N}/{\sim_2} = \left\{\overline{12}, \overline{13}\right\}$, já que $\bar{0} = \overline{12}$ na relação $\sim_2$ (0 e 12 são divisíveis por 2) e $\bar{1} = \overline{13}$ (1 e 13 têm resto 1 na divisão por 2). Como você já deve ter imaginado, trata-se de um fenômeno mais geral. ▲

Definição 0.1.26. Um subconjunto $R \subseteq X$ é uma **classe de representantes** de uma

(i) relação de equivalência $\sim$ se para todo $x \in X$ existe um único $r \in R$ tal que $x \sim r$,

(ii) partição $\mathcal{P}$ de X se R for classe de representantes da relação $\sim_{\mathcal{P}}$, i.e., se para cada $P \in \mathcal{P}$ existe um único $r \in R$ tal que $r \in P$. ¶

Exercício 0.22 ($\star$)**.** Nas condições anteriores, mostre que $X/{\sim} = \{C_r : r \in R\}$, onde R é uma classe de representantes de $\sim$ e C_r indica a $\sim$-classe de equivalência de $r \in R$. ■

Agora parece um bom momento para uma pergunta ardilosa: quais partições (ou relações de equivalência) sobre *um conjunto* não-vazio admitem classes de representantes? Certamente, se X é tal conjunto e $\mathcal{P}$ é uma de suas partições, então cada $P \in \mathcal{P}$ é um subconjunto não-vazio de X, o que permite *escolher* um desses elementos $x_P \in P$ para então considerar o conjunto $\{x_P : P \in \mathcal{P}\}$. Dado que para $P, P' \in \mathcal{P}$ distintos ocorre $P \cap P' = \emptyset$, deve-se ter $x_P \neq x_{P'}$ sempre que $P \neq P'$. Em outras palavras, $\mathcal{R} := \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$ é uma classe de representantes para $\mathcal{P}$. Se tal argumentação for honesta, significa que provamos o

Teorema 0.1.27 (©)**.** *Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto, então existe uma classe de representantes para $\sim$.*

Exercício 0.23 ((?))**.** A argumentação acima foi *honesta*? Se esta for a primeira vez que você se deparou com tal pergunta, pense nela pelo resto do seu dia. ■

As considerações acima ajudam a elucidar o que se *quis dizer* na discussão que sucedeu a Proposição 0.1.8. Para fixar notações:

Definição 0.1.28 (®)**.** Vamos denotar por $\mathbb{V}$ o *conjunto de todos os conjuntos*[13], (provisoriamente) chamado de **conjunto universo**. ¶

Com a terminologia acima, a Proposição 0.1.8 *demonstra* que ao escrever "$A \approx B$" para indicar que existe bijeção da forma $A \to B$, obtém-se uma relação de equivalência em $\mathbb{V}$.

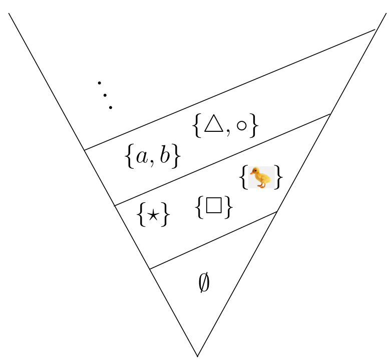


Figura 0.2: Cada $\approx$-classe de equivalência corresponde a uma noção de cardinalidade.

[13]Poderíamos defini-lo como $\mathbb{V} := \{x : x = x\}$, já que *todas as coisas são iguais a si mesmas*. Sim, isto é problemático de um ponto de vista formal, mas vamos ignorar essa treta por enquanto.

Portanto, na prática, uma das noções mais corriqueiras da matemática cotidiana é, na verdade, um dispositivo muito sofisticado: números são representantes de classes de equivalência! Ao dizer que $A := \{x, y\}$ e $B := \{a, b\}$ têm 2 elementos, por exemplo, o símbolo "2" codifica a classe de *todas as coisas com a mesma quantidade de elementos de A* (ou de B, ou de qualquer coisa que tenha... *dois elementos*). Nesse sentido, o que faremos nas próximas seções é encontrar um conjunto "canônico" para representar as cardinalidades dos conjuntos finitos: estes serão os *números naturais*.

0.2 Ordens, boas ordens e indução

0.2.0 Essencial

Ordens

O aparato das relações binárias (Subseção 0.1.1) permite abstrair o nosso entendimento de *ordenação*, que será usado posteriormente tanto na descrição da reta real quanto no tratamento das redes. Intuitivamente, os pontos da reta são *ordenados*, no sentido de que há uma *noção* de *antes* e *depois*, como em 3 que antecede 7 e 7 que antecede 9 (note que de nossa experiência diária, 3 também antecede 9). Mais do que isso, a *reta* está ordenada em forma de linha, no sentido de que dados dois pontos nela, algum deles deve anteceder o outro. Tais ideias se formalizam na próxima

Definição 0.2.0. Uma relação binária R num conjunto $\mathbb{X}$ é dita uma **relação de ordem (parcial)** se R for reflexiva, transitiva e, além disso, **antissimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência simultânea de $x \; R \; y$ e $y \; R \; x$ acarretar $x = y$, e Escreve-se $(\mathbb{X}, R)$ quando se busca enfatizar que o conjunto $\mathbb{X}$ é considerado com a ordem R, caso em que $\mathbb{X}$ é dito ser (**parcialmente**) **ordenado** pela ordem (parcial) R. ¶

Dada a óbvia inspiração nas ordenações usuais entre números, costuma-se utilizar símbolos como "$\preceq$", "$\sqsubseteq$" ou mesmo "$\leq$" para denotar ordens parciais – o que sugere uma generalização alternativa, desta vez com base em "$<$".

Definição 0.2.1. Diz-se que $\prec$ é uma **relação de ordem estrita** em $\mathbb{X}$ se $\prec$ for transitiva mas, em vez de reflexiva e antissimétrica, for

(i) **irreflexiva**, i.e., se para todo $x \in \mathbb{X}$ ocorrer $x \not\prec x$, e

(ii) **assimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência de $x \prec y$ acarretar $y \not\prec x$.

Como no caso parcial, escreve-se $(\mathbb{X}, \prec)$ para indicar que $\mathbb{X}$ *está* (**estritamente**) **ordenado** pela ordem (estrita) $\prec$. ¶

Observação 0.2.2. Na prática, podemos chamar ordens parciais e ordens estritas simplesmente de *ordens*. De fato:

✓ se $(\mathbb{S}, \prec)$ é uma ordem estrita, então a relação $\preceq$ definida por

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \neq y \text{ e } x \prec y) \text{ ou } x = y$$

é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{S}$;

✓ se $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ é uma ordem parcial, então a relação $\sqsubset$ definida por

$$x \sqsubset y \Leftrightarrow x \neq y \text{ e } x \sqsubseteq y$$

é uma relação de ordem estrita em $\mathbb{P}$.

Exercício 0.24 ($\star$)**.** Verifique as afirmações anteriores. ■

É claro que ao aplicar o primeiro procedimento à ordem estrita $\sqsubset$, retorna-se à ordem parcial original $\sqsubseteq$, enquanto o segundo procedimento aplicado à ordem parcial $\preceq$ resulta na ordem estrita original $\prec$. Assim, tem-se o direito de chamar tanto $(\mathbb{S}, \prec)$ quanto $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ de **ordens**. Em tais situações, ficam implicitamente definidas a ordem parcial $\preceq$ e a ordem estrita $\sqsubset$ induzidas por $\prec$ e $\sqsubseteq$, respectivamente[14]. △

Exemplo 0.2.3. Quem já tem familiaridade com conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.) deve ter em mente as formas usuais de ordenação em tais cenários como exemplos de ordens. Apesar disso, é importante saber que mesmo conjuntos *ordinários* admitem ordenações incomuns.

Por exemplo, em $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (que será discutido na próxima seção), pode-se declarar $m \preceq n$ sempre que m for um divisor de n. Embora tal relação defina uma ordem parcial sobre $\mathbb{N}^*$ (verifique?)*, ela é bastante diferente de sua ordenação usual: note que $2 \npreceq 3$ e $3 \npreceq 2$, já que ambos são primos. Portanto, $(\mathbb{N}^*, \preceq)$ é uma ordem em que podem haver elementos *não-comparáveis* entre si, comportamento bem mais comum do que parece. ▲

Exemplo 0.2.4 (Confira o Exemplo 0.1.13)**.** A relação de inclusão $\subseteq$ sobre os membros de $\wp(X)$, para algum conjunto X fixado, faz de $(\wp(X), \subseteq)$ uma ordem, já que: $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implicam $A = B$ e $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implicam $A \subseteq C$, para quaisquer $A, B, C \in \wp(X)$. Como no caso anterior, podem existir $A, B \in \wp(X)$ não-comparáveis: para $X := \mathbb{N}$ por exemplo, $A := \{0, 1, 2\}$ e $B := \{0, 1, 3\}$ não são comparáveis, já que $A \nsubseteq B$ (pois $2 \in A \setminus B$) e $B \nsubseteq A$ (pois $3 \in B \setminus A$). ▲

Observação 0.2.5 (Diagramas de Hasse)**.** Um modo bastante prático de *entender* certas ordens (ou *partes* delas) consiste em considerar seus *diagramas de Hasse*. A ideia é muito simples: a ocorrência de $x < y$ em $\mathbb{P}$ é representada por uma seta $(x \to y)$ que liga o vértice anterior (*menor*) x ao posterior (*maior*) y; quando $y < z$ e, por conseguinte, $x < z$, não se grafa uma seta entre ambos, pois subentende-se que as duas setas (entre x e y e entre y e z) compõem a seta entre x e z.

Assim, por exemplo, o diagrama de Hasse de $(\mathbb{N}^*, \preceq)$ com a ordem do Exemplo 0.2.3 poderia *começar* com

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
8 \arrow[u] & 36 \arrow[u] & 81 \arrow[u] & 225 \arrow[u] & 625 \arrow[u] & 1225 \arrow[u] & 2401 \arrow[u] \\
4 \arrow[u] \arrow[ur] & 6 \arrow[u] & 9 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & 15 \arrow[u] & 25 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & 35 \arrow[u] & 49 \arrow[ul] \arrow[u] \\
2 \arrow[u] \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & 5 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & 7 \arrow[ul] \arrow[u] \\
& & & 1 \arrow[ulll] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

[14] Há uma exceção que será adotada neste texto: a inclusão estrita ainda será denotada por "$\subsetneq$" e não por "$\subset$". O motivo é muito simples: o uso do símbolo "$\subset$" para indicar a inclusão parcial está demasiado difundido, o que poderia causar confusão.

Evidentemente, *diversos* (*infinitos*!) números foram omitidos, como 12 (que deveria estar acima de 4 e 3), 10 (que deveria estar acima de 5 e 2), 11 (que deveria estar acima de 1 apenas), 13... Já para o caso de $X := \{a,b,c\}$ e $(\wp(X), \subseteq)$, o diagrama é mais simples, embora ainda intrincado.

$$\begin{tikzcd}
 & \{a,b,c\} & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagramas desse tipo ajudam a perceber que a ocorrência de elementos não-comparáveis se traduz em bifurcações. Uma vez que pretendemos usar ordens para capturar o comportamento das retas, é razoável considerar aquelas em que quaisquer dois elementos sejam comparáveis, condição usualmente chamada de *tricotomia*.

Definição 0.2.6. Uma ordem $(\mathbb{X}, <)$ é **total** se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorrer somente um dos três casos a seguir: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$. Se a ordem de $\mathbb{X}$ for parcial, basta dizer que para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorre $x \leq y$ ou $y \leq x$. ¶

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

Como o diagrama acima sugere, ordens totais[15] se comportam como linhas precisamente por não terem elementos incomparáveis (bifurcações). Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ com suas ordenações usuais são exemplos típicos de ordens totais. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ também, mas seus diagramas são mais desonestos em virtude da *densidade* de suas ordens: dado que entre quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x < y$ existe $z \in \mathbb{Q}$ com $x < z < y$, torna-se *impossível* representar *fielmente*, por meio de um diagrama de Hasse, o comportamento linear de tais ordens. Na prática, a alternativa honesta de representação gráfica nesses casos é, justamente... uma linha reta. △

Em geral, costuma-se ler uma expressão do tipo "$x \preceq y$" como "x é **menor do que ou igual** a y", enquanto "$x \prec y$" é lida como "x é (**estritamente**) **menor** do que y" – a menos que o contexto sugira uma terminologia própria para os símbolos. *Alternativamente*, lê-se "$x \preceq y$" como "y é **maior do que ou igual** a x", o que esconde um fato que será importante: escrevendo "$a \succeq b$" para indicar que $b \preceq a$, segue que $\succeq$ também é uma relação de ordem sobre o conjunto em questão: explicitamente, $\succeq$ é apenas a *relação inversa* de $\preceq$ (Definição 0.1.15). Embora pareça banal, tal observação pode ser útil para quem se aventurar na exploração dos princípios de dualidade (Subseção 0.2.1).

Exercício 0.25 ($\star$)**.** Mostre que $(\mathbb{P}, \succeq)$ é ordem parcial sempre que $(\mathbb{P}, \preceq)$ é ordem parcial. ■

[15] Que com muita razão também são chamadas de ordens *lineares*.

Boas ordens e indução

Definição 0.2.7. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $a \in A$, diremos que a é *um* **menor elemento** (ou **mínimo**) de A se $a \leq x$ ocorrer para todo $x \in A$. No caso de uma ordem estrita $<$, pede-se $a < x$ para todo $x \in A$ tal que $x \neq a$. ¶

Acima, o uso do artigo indefinido "um" foi puro preciosismo, já que um mínimo, quando existe, é único: se $a, a' \in A$ são mínimos de A, então ocorre $a \leq a'$ e $a' \leq a$, donde a antissimetria de $\leq$ acarreta $a = a'$. Isto justifica introduzir uma notação para indicar os mínimos: caso exista, o menor elemento de A será denotado $\min\limits_{a \in A} a$, $\min_{\leq} A$ ou apenas $\min A$.

Definição 0.2.8. Uma ordem $\leq$ (ou $<$) sobre um conjunto $\mathbb{B}$ é chamada de **boa ordem** se todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$ admite menor elemento. Diz-se também que $\mathbb{B}$ está **bem ordenado** pela (boa) ordem $\leq$, ou ainda que $(\mathbb{B}, \leq)$ é uma boa ordem. ¶

Exemplo 0.2.9. Alguns conjuntos numéricos clássicos que você já viu na escola (ou em Cálculo I) não são bem ordenados: é o caso de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (por quê?)*. A situação de $\mathbb{C}$ é um pouco pior, mas ainda é cedo para discutir isso. Por outro lado, $\mathbb{N}$ é o exemplo típico de boa ordem, o que não é mero acidente, como veremos em breve. ▲

Moralmente, um conjunto está bem ordenado quando seus elementos podem ser *enfileirados* por meio da ordem $\leq$: há o *primeiro* elemento, digamos $b_0 := \min \mathbb{B}$, em seguida o seu *sucessor*, digamos $b_1 := \min(\mathbb{B} \setminus \{b_0\})$, em seguida... Como os índices "0" e "1" sugerem, parece haver alguma ligação com os *números naturais* que já conhecemos de longa data, o que suscita uma pergunta deliberadamente evitada até agora (pelo menos para quem pulou a Subseção 0.1.1: *o que são números* (*e o que poderiam ser*)*?*[16]

$$b_0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow b_4 \longrightarrow \cdots$$

Evidentemente, esse tipo de pergunta não se refere ao símbolo utilizado para *denotar* um número, mas sim ao próprio número: por exemplo, qual o significado de "três" nas sentenças "A Argentina venceu três Copas do Mundo" e "Neymar rolou por três metros ao simular uma falta"? Quais as diferenças de significado, e quais as semelhanças?

Exercício 0.26 ((?))**.** Reflita (por pelo menos *três* minutos) sobre as questões acima. ■

Apesar da sugestão numérica anterior, é possível evitar o emprego explícito de números no entendimento das boas ordens – o que inclusive será útil quando voltarmos a discutir a *natureza* dos números. A grande sacada para fazer isso está escondida na seguinte

Proposição 0.2.10. *Sejam* $(\mathbb{B}, \leq)$ *uma boa ordem e* $b \in \mathbb{B}$*. Se existir* $c \in \mathbb{B}$ *com* $c > b$*, então existe* $b' \in \mathbb{B}$ *com as seguintes propriedades:*

(*i*) $b < b'$*;*

(*ii*) *se* $d \in \mathbb{B}$ *e* $d > b$*, então* $b' \leq d$*.*

[16] Referência ao clássico "*Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*", de Richard Dedekind, em que *Ele* apresenta Sua construção para (o que hoje chamamos de) um corpo ordenado completo [5].

Demonstração. É mais simples do que parece: a existência de c com $c > b$ garante que $\mathbb{B}_{>b} := \{d \in \mathbb{B} : d > b\}$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$, justamente por ter c como elemento. Logo, a boa ordenação garante a existência de $\min \mathbb{B}_{>b}$, de modo que basta tomar $b' := \min \mathbb{B}_{>b}$. □

Definição 0.2.11. Nas condições da proposição anterior, vamos denotar b' por $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, o **sucessor** de b na boa ordem $\mathbb{B}$. ¶

Assim como ocorre com sucessores nos diversos campos da vida real, o sucessor de b numa boa ordem $\mathbb{B}$, caso exista, é o primeiro elemento da ordem a ser maior do que b, o que em particular impede a existência de elementos *intermediários*. O próximo exercício deve esclarecer a ideia.

Exercício 0.27 ($\star$). Seja $(\mathbb{B}, \leq)$ uma boa ordem. Mostre que se $b \in \mathbb{B}$ e existe $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, então não existe $c \in \mathbb{B}$ tal que $b < c < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. Dica: releia a definição de $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. ■

Exercício 0.28 ($^{\star}_{\star\star}$). Seja $(\mathbb{B}, \leq)$ uma boa ordem. Mostre que se $x, y \in \mathbb{B}$ têm sucessores e $x \leq y$, então $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) \leq \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(y)$. Dica: mostre antes que se $\emptyset \neq Y \subseteq X \subseteq \mathbb{B}$, então $\min X \leq \min Y$. ■

Observação 0.2.12 (Sucessores nem sempre existem)**.** Para quem tem familiaridade com os números racionais, por exemplo, note que não faz sentido perguntar qual o sucessor de 0 em $\mathbb{Q}$, já que não existe o *primeiro racional* maior do que 0: sempre que $q > 0$, existe outro q' com $0 < q' < q$. Em particular, a relação de ordem usual sobre $\mathbb{Q}$ não é uma boa ordem. △

Exemplo 0.2.13. Por mais sem graça que pareça, $\mathbb{B} := \emptyset$ pode ser considerado como um conjunto bem ordenado: no caso, sua boa ordem $\leq$ é o único subconjunto de $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$, a saber, $\emptyset$! Apesar de sua simplicidade, $\emptyset$ é o gatilho de uma importante reação em cadeia, como veremos adiante. ▲

Definição 0.2.14. Fixada uma boa ordem $(\mathbb{B}, \leq)$, diremos que $u \in \mathbb{B}$ é o **último elemento** de $\mathbb{B}$ se $u = \max \mathbb{B}$. ¶

Proposição 0.2.15. *Se* $(\mathbb{B}, \leq)$ *é uma boa ordem e* $u' \notin \mathbb{B}$*, então existe uma boa ordem* $(\mathbb{B}', \leq')$ *tal que*

(i) $\mathbb{B} \subsetneq \mathbb{B}'$,

(ii) $x \leq y \Leftrightarrow x \leq' y$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{B}$, *e*

(iii) u' *é o último elemento de* $\mathbb{B}'$.

Demonstração. Basta definir $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\}$ e, para quaisquer $x, y \in \mathbb{B}'$, escrever $x \leq' y$ para indicar a ocorrência de "$x, y \in \mathbb{B}$ e $x \leq y$" ou "$y = u'$". Na prática, $\leq'$ apenas *estende* a definição de $\leq$ sobre $\mathbb{B}' \times \mathbb{B}'$ ao declarar $x \leq' u'$ para todo $x \in \mathbb{B}'$, o que torna quase imediata a verificação das propriedades desejadas. □

Exercício 0.29 ($^{\star}_{\star}$). Complete a demonstração. ■

Exemplo 0.2.16. Fixado qualquer objeto u', tem-se por definição que $u' \notin \emptyset$, o que permite empregar a última proposição a fim de estender a boa ordem $\mathbb{B}$ do Exemplo 0.2.13: faz-se $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\} = \{u'\}$, que tem u' como seu último (e único!) elemento. Ora, por que parar? Certamente existe $u'' \neq u'$, donde a proposição anterior garante a boa ordem $\mathbb{B}'' := \mathbb{B}' \cup \{u''\}$, com $u' < u''$ e u'' como último elemento. Em particular, u'' é sucessor de u', mas u'' não tem sucessores em $\mathbb{B}''$. Ora, por que parar? Certamente existe $u''' \notin \{u', u''\}$, donde a proposição anterior garante... ▲

Como os exemplos acima sugerem, a noção de sucessor numa boa ordem torna supérfluo o uso explícito de números *alienígenas* para descrever o seu enfileiramento. Na verdade, mais do que isso, o comportamento dos sucessores é tão parecido com o da *progressão* esperada dos números naturais que chega a ser tentador utilizar a noção de boa ordenação para *descrever* o que os números *poderiam ser*. Para agravar ainda mais o sentimento:

Teorema 0.2.17 (Indução numa boa ordem)**.** *Seja* $(\mathbb{B}, \leq)$ *uma boa ordem. Suponha que* X *seja um subconjunto de* $\mathbb{B}$ *com a seguinte propriedade para qualquer* $c \in \mathbb{B}$*:*

sempre que ocorre $b \in X$ *para todo* $b < c$*, também ocorre* $c \in X$*.*

Em tais condições, $\mathbb{B} = X$*.*

Demonstração. Nada precisa ser feito se ocorrer $\mathbb{B} = \emptyset$. Agora, se $\mathbb{B} \neq \emptyset$ e existir $b \in \mathbb{B}$ com $b \notin X$, então o conjunto $T := \{b \in \mathbb{B} : b \notin X\}$ é não-vazio e, pela boa ordenação, deve existir $t := \min T$; em particular, $t \in T$. Ora, isto impede que X tenha a propriedade do enunciado: com efeito, por t ser o menor elemento em T, todo $b < t$ deve ser membro de X, de modo que se X tivesse a propriedade, concluiríamos que $t \in X$, mas $t \in T := \mathbb{B} \setminus X$. □

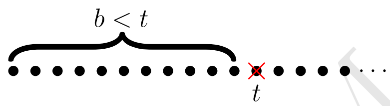


Figura 0.3: Se t fosse o *primeiro* tal que $t \notin X$, então todo $b < t$ pertenceria a X. Logo, $t \in X$!

No dia a dia, o subconjunto X costuma ser formado pelos elementos de $\mathbb{B}$ que têm alguma propriedade $\mathcal{P}$ fixada, i.e., $X := \{x \in \mathbb{B} : \text{vale } \mathcal{P}(x)\}$, de modo que a exigência feita sobre X se traduz na seguinte condição:

sempre que vale $\mathcal{P}(b)$ ***para todo*** $b < c$*, também vale* $\mathcal{P}(c)$*.*

Muito provavelmente você já se deparou com tal formulação do *Princípio da Indução* em alguma disciplina introdutória de Teoria dos Números ou Álgebra – neste caso, é comum dizer que esta é a "segunda forma da indução" [10, 11]. Como sempre, o intuito é provar que todo elemento c de $\mathbb{B}$ tem a propriedade $\mathcal{P}(c)$ e, nesse sentido, o Teorema 0.2.17 assegura que não precisamos provar $\mathcal{P}(c)$ *diretamente*, mas podemos fazer isso com o auxílio de uma *hipótese indutiva* (a parte em negrito na frase destacada acima): se conseguirmos garantir que $\mathcal{P}(c)$ vale sempre que se assumir a validade de $\mathcal{P}(b)$ para todo $b < c$, então todo c da boa ordem tem a propriedade em questão[17].

Note que o raciocínio da demonstração pode ser usado para provar que *cada* elemento de uma boa ordem não-vazia $\mathbb{B}$ pertence a X se a hipótese for satisfeita: como não existe $b < \min \mathbb{B}$, a hipótese indutiva é verdadeira (todo $b < \min \mathbb{B}$ pertence a X, por vacuidade!), logo $\min \mathbb{B} \in X$; se $\min \mathbb{B}$ tem sucessor, digamos c, então $c \in X$, pois no passo anterior verificou-se que todo $b < c$ pertence a X; se c tem sucessor...

Esse arquétipo de efeito dominó é equivalente ao que foi apresentado no teorema anterior, mas somente nas boas ordens em que todos os elementos, exceto o menor, são sucessores de *alguém*[18]. *Naturalmente*, isto será discutido depois. Para encerrar, faça o seguinte

Exercício 0.30 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Mostre que se $(\mathbb{B}, \leq)$ é boa ordem, então $(\mathbb{B}, \leq)$ é ordem total. ■

[17] "*Ah, mas não estaríamos supondo o que queremos provar?!*" Calma: ninguém está supondo que vale $\mathcal{P}(c)$, mas sim que $\mathcal{P}(b)$ vale para todo $b < c$!

[18] Cuidado: ter sucessor $\neq$ ser sucessor. O exemplo óbvio é o menor elemento de uma boa ordem com pelo menos *dois* elementos.

0.2.1 Extras

Elementos minimais e maximais

Definição 0.2.18. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $a \in A$, diremos que $a \in A$ é **elemento minimal de** A se não existe $x \in A$ com $x < a$. De modo *dual*, diremos que $a \in A$ é **elemento maximal** de A se não existe $x \in A$ com $a < x$. ¶

Elementos minimais e maximais não costumam ser explorados em contextos introdutórios de Análise pois as ordens consideradas *geralmente* são totais – e, em tais casos, as definições coincidem com as noções de mínimos e *máximos*.

Proposição 0.2.19. *Sejam $(\mathbb{T}, \leq)$ uma ordem, $A \subseteq \mathbb{T}$ um subconjunto e $a \in A$ um elemento qualquer.*

(i) *Se $a = \min A$, então a é minimal.*

(ii) *Se $(\mathbb{T}, \leq)$ é uma ordem total, então vale a recíproca do item anterior.*

Demonstração. Para a primeira parte, não pode existir $x \neq a$ com $x < a$ e $x \in A$, pois por a ser mínimo deve-se ter $a \leq x$ (lembre-se: ordens estritas são assimétricas!). Para a segunda parte: a princípio, por a ser minimal, para nenhum $x \in A$ *ocorre* $x < a$ e, como x e a são comparáveis pela hipótese de tricotomia, *resta* apenas $a \leq x$. Logo, $a = \min A$. □

Exercício 0.31 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Enuncie e demonstre a versão da proposição anterior para elementos maximais. **Observação:** neste caso, você também precisará da definição de *maior elemento* (ou *máximo*)[19], apresentada um pouco mais abaixo (mas não é difícil adivinhar qual é). ■

Com isso dito, retorne para as ordens não-totais da Observação 0.2.5: no caso de $\wp(X)$, por exemplo, $A := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ é tal que todos os seus elementos são minimais em $\wp(X)$ (e nenhum deles é mínimo!), comportamento similar ao dos números primos em $(\mathbb{N}^*, \preceq)$. Alguma delas apresenta subconjuntos com elementos maximais que não são máximos?

Dualidade

Considere $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem (parcial). O fato de $(\mathbb{P}, \geq)$ ainda ser uma ordem parcial traz uma consequência curiosa: sempre que você tiver um resultado acerca de um conceito definível em ordens parciais $(\leq)$, você ganha automaticamente outro resultado acerca da versão *dual* do conceito, isto é, onde o conceito é reescrito com a ordem inversa $(\geq)$.

Por exemplo: caso não tenha *adivinhado* a definição de máximo, ela se faz assim.

Definição 0.2.20. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $a \in A$, diremos que a é *um* **maior elemento** (ou **máximo**) de A se $x \leq a$ ocorrer para todo $x \in A$. No caso de uma ordem estrita $<$, pede-se $x < a$ para todo $x \in A$ tal que $x \neq a$. ¶

Agora, esqueça a definição acima e considere $(\mathbb{P}, \geq)$, onde $\geq$ é a inversa de $\leq$. O que significa dizer que $a \in A$ é menor elemento de A com respeito à ordem $\geq$? Checando a Definição 0.2.7, deve-se ter o seguinte: $a \geq x$ ocorre para todo $x \in A$. Como "$a \geq x$" significa "$x \leq a$", resulta que a é máximo de A com respeito à ordem $\leq$. Neste caso, as definições de máximo e mínimo são ditas duais.

Exercício 0.32 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que as definições de elementos minimais e maximais são duais. ■

Uma das vantagens desse tipo de abordagem é reciclar demonstrações. Por exemplo: como já sabemos que mínimos em ordens parciais são únicos quando existem, resulta que máximos em ordens parciais também são únicos quando existem, simplesmente por eles podem ser expressos como mínimos nas ordens inversas. Se você duvida, faça o próximo exercício, e perceba que, na prática, você precisa apenas trocar todas as ocorrências de "$<$" e "$\leq$" na demonstração da Proposição 0.2.19 por "$>$" e "$\geq$", respectivamente. Abaixo, $\max A$ indica o máximo de A, caso exista.

Exercício 0.33 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $(\mathbb{T}, \leq)$ uma ordem, $A \subseteq \mathbb{T}$ um subconjunto e $a \in A$ um elemento qualquer.

(i) Mostre que se $a = \max A$, então a é maximal.

(ii) Mostre que se $(\mathbb{T}, \leq)$ é uma ordem total, então vale a recíproca do item anterior. ■

[19] Note que máximos, assim como mínimos, quando existem, são únicos $(\star)$.

0.3 Os axiomas de Dedekind-Peano

0.3.0 Essencial: boas ordens naturais

Na última seção discutiu-se uma forma de indução válida em boas ordens quaisquer. Agora, vamos nos restringir às boas ordens que remetem diretamente ao entendimento que temos dos *números naturais*, a começar com o

Corolário 0.3.0 (Indução "clássica"). *Sejam* $(\mathbb{B}, \leq)$ *uma boa ordem com* $\mathbb{B} \neq \emptyset$*, considere* $p := \min \mathbb{B}$ *e suponha que para todo* $b' \in \mathbb{B} \setminus \{p\}$ *exista* $b \in \mathbb{B}$ *tal que* $b' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$*. Em tais condições, se* $X \subseteq \mathbb{B}$ *for tal que*

✓ $p \in X$*, e*

✓ $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$ *sempre que* $b \in X$*,*

então $\mathbb{B} = X$*.*

Demonstração. Basta verificar que X tem a propriedade do Teorema 0.2.17, i.e., que para qualquer $c \in \mathbb{B}$, tenha-se a ocorrência de $c \in X$ sempre que $b \in X$ para todo $b < c$: ora, se $c := p$, então $p \in X$ por hipótese; se $c > p$ e $b \in X$ para todo $b < c$, então em particular para $b \in \mathbb{B}$ com $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ (que existe pela hipótese sobre $\mathbb{B}$), deve-se ter $b < c$, donde segue que $b \in X$ e, pela hipótese sobre X, $c = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$, como desejado. □

Exercício 0.34 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Prove o corolário anterior sem apelar para o Teorema 0.2.17. Dica: suponha $\mathbb{B} \setminus X \neq \emptyset$ e note que seu menor elemento *deveria* ser da forma $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ para algum $b \in X$. ■

O corolário acima mostra que se $\mathbb{B}$ é uma boa ordem em que todo elemento maior do que $\min \mathbb{B}$ é sucessor de *alguém*, então vale o *princípio da indução* em sua forma convencional. Tal propriedade de fato remete aos naturais, mas não completamente: com $\mathbb{B} := \{a, a', a'', a'''\}$, por exemplo, obtemos uma boa ordem ao declarar $a < a' < a'' < a'''$ onde $a = \min \mathbb{B}$, $a' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(a)$, $a'' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(a')$ e $a''' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(a'')$, ou seja, todo elemento diferente de $\min \mathbb{B}$ é sucessor de alguém. Porém, $\mathbb{B}$ não é o que esperaríamos de $\mathbb{N}$, pois ainda faltam sucessores: deveria haver $a'''' := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(a''')$, $a''''' := \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(a'''')$ e *assim por diante*. Pois bem:

Definição 0.3.1. Diremos que uma boa ordem $(\mathbb{B}, \leq)$ é **natural** se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$ existe para todo $b \in \mathbb{B}$,

(ii) para todo $b' \in \mathbb{B} \setminus \{\min \mathbb{B}\}$ existe $b \in \mathbb{B}$ com $b' = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. ¶

A expressão "natural" acima faz, finalmente, alusão ao *conjunto dos números naturais*, frequentemente denotado por $\mathbb{N}$, que você certamente conhece de sua vida fora da disciplina. Veremos que, para efeitos práticos, qualquer boa ordem natural pode fazer o *papel* de $\mathbb{N}$.

Definição 0.3.2. Diremos que $(\mathcal{N}, i, s)$ é um **sistema natural**[20] se $\mathcal{N}$ for um conjunto, i for um elemento de $\mathcal{N}$ e $s \colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ for uma função satisfazendo os seguintes axiomas:

[20] Nos cânones brasileiros de Análise Real redigidos por Lima [10, 11], diz-se apenas que "$\mathbb{N}$ é um conjunto dotado de uma função s tal que...", onde as retiscências repetem as condições (i), (ii) e (iii) apresentadas para sistemas naturais. Aqui, o emprego do artigo indefinido (um) em vez do definido (o) visa chamar sua atenção para o seguinte: a princípio, nada impede que existam diversos sistemas naturais *diferentes*.

(DP$_i$) $\mathcal{N} \setminus \mathrm{im}\,(s) = \{i\}$;

(DP$_{ii}$) s é injetora; e

(DP$_{iii}$) (*indutivo*) se um subconjunto $X \subseteq \mathcal{N}$ for tal que

(C.I.) $i \in X$, e

(H.I.) $s(n) \in X$ sempre que $n \in X$,

então $X = \mathcal{N}$. ¶

Os axiomas (DP$_i$), (DP$_{ii}$) e (DP$_{iii}$), elaborados independentemente por Dedekind e Peano, buscam capturar o *mínimo* que se espera dos *números naturais* dentro de um cenário regido por conjuntos[21]. Nesse sentido, boas ordens naturais cumprem bem o papel.

Teorema 0.3.3. *Se* $(\mathbb{B}, \leq)$ *é uma boa ordem natural, então* $(\mathbb{B}, \min \mathbb{B}, \mathrm{suc}_{\mathbb{B}})$ *é um sistema natural, ou seja:*

(i) $\mathbb{B} \setminus \mathrm{im}\,(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}) = \{\min \mathbb{B}\}$*;*

(ii) *a função* $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}} \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *é injetora; e*

(iii) *se* $X \subseteq \mathbb{B}$ *for tal que* $\min \mathbb{B} \in X$ *e* $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b) \in X$ *sempre que* $b \in X$*, então* $X = \mathbb{B}$.

Demonstração. A verificação do axioma (DP$_i$) fica por sua conta ($\star$). O axioma indutivo (DP$_{iii}$), por sua vez, já foi demonstrado (confira o Corolário 0.3.0 em caso de dúvida). Resta apenas verificar a validade de (DP$_{ii}$), i.e., que a função $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}} \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ é injetora.

Explicitamente, deve-se mostrar que se $x, y \in \mathbb{B}$ são distintos, então $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) \neq \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(y)$. Como toda boa ordem é total (Exercício 0.30), a ocorrência de $x \neq y$ acarreta $x < y$ ou $y < x$, de modo que basta mostrar o seguinte: se $x < y$, então $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(y)$. Ora, pelo Exercício 0.28, já sabemos que $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) \leq \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(y)$. Se tal desigualdade não fosse estrita, teríamos $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x) = \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(y)$, resultando em

$$x < y < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(y) = \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(x),$$

o que viola o Exercício 0.27. □

Há quem não goste da abordagem via boas ordens pois ela demanda *mais estrutura* para capturar parte do comportamento dos sistemas naturais. Todavia, um sistema natural $(\mathcal{N}, i, s)$ vem de fábrica com uma boa ordem natural[22] que tem i como menor elemento e cuja função sucessor é, precisamente, a função s. Caso tenha se interessado, confira o Exercício 0.73. Assim, toda essa discussão traz a seguinte conclusão:

existe uma boa ordem natural se, e somente se, existe um sistema natural.

E daí a grande questão: existe?

Intuitivamente, a resposta é sim. Porém, *demonstrar* que a resposta é sim envolveria construir uma boa ordem natural *infinita*, o que poderia ser problemático num contexto em que as demonstrações precisam ser *finitas*. O que se faz então é *postular* a existência de ao menos uma boa ordem natural (ou sistema natural, se preferir):

[21] Em certo sentido, eles funcionam como os axiomas que descrevem os *grupos*, que por sua vez buscam capturar as propriedades básicas das noções de simetria. A ideia é que se tal mínimo for satisfeito, então todos os resultados de Aritmética Básica podem ser recuperados via dedução, paciência e um pouco de conjuntos.

[22] Que inclusive precisa ser explicitada em algum momento mesmo por quem opta pelos sistemas naturais, vide [10, 11] por exemplo.

Axioma de Dedekind-Peano. *Existe um sistema natural.*

Deste ponto em diante, é prática comum fixar *algum* sistema natural e, por meio de *argumentações indutivas*, construir *recursivamente* as operações de *adição* e *multiplicação* de forma precisa e verificar todas as propriedades operatórias esperadas, num árduo, doloroso e ~~gratificante?~~ demorado processo que, na prática, *recria* a Aritmética Básica. É nesse sentido que se costuma dizer que os Axiomas de Dedekind-Peano capturam o básico dos *naturais*: a partir deles e das construções conjuntistas (!)[23], recuperam-se todos os dispositivos aritméticos usuais e, *a posteriori*, todos os outros conjuntos numéricos! Há, porém, um elefante na sala: o vermelho que eu vejo é tão vermelho quanto o que você vê?

Explicitamente, o Axioma de Dedekind-Peano não assegura *o* sistema natural, mas apenas *um* sistema natural. Poderia haver vários? Se sim, então os processos descritos acima dependem do sistema natural escolhido? Cada sistema natural tem sua própria Aritmética? Será que essas preocupações realmente fazem sentido?

Comecemos pela última: a rigor, os questionamentos são pertinentes. Por exemplo: assim como um *grupo* é um conjunto dotado de funções que satisfazem certos axiomas, sistemas naturais também são conjuntos dotados de funções que satisfazem certos axiomas. Dado que existem grupos definitivamente *incompatíveis* entre si, há precedente para questionar a possibilidade de sistemas naturais *incompatíveis* em algum sentido. Feita a ressalva, não se preocupe: embora existam (*infinitos*!) sistemas naturais distintos, todos eles são *rigorosamente* compatíveis entre si, o que na prática garante que a Aritmética desenvolvida em um seja *indistinguível* da Aritmética desenvolvida em outro.

$$
\begin{tikzcd}
(A) & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[r, "+1"] & 3 \arrow[r, "+1"] & 4 \arrow[r, "+1"] & \cdots \\
(B) & \bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \bullet\bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \bullet\bullet\bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \bullet\bullet\bullet\bullet \arrow[r, "+\bullet"] & \cdots \\
(C) & | \arrow[r, "+|"] & || \arrow[r, "+|"] & ||| \arrow[r, "+|"] & |||| \arrow[r, "+|"] & \cdots \\
(D) & i \arrow[r, "s"] & s(i) \arrow[r, "s"] & s(s(i)) \arrow[r, "s"] & s(s(s(i))) \arrow[r, "s"] & \cdots \\
(E) & \emptyset \arrow[r, "\{\}"] & \{\emptyset\} \arrow[r, "\{\}"] & \{\{\emptyset\}\} \arrow[r, "\{\}"] & \{\{\{\emptyset\}\}\} \arrow[r, "\{\}"] & \cdots \\
(F) & \emptyset \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset,\{\emptyset\}\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \arrow[r, "x\mapsto x\cup\{x\}"] \arrow[d, equal, "."] & \cdots \\
(G) & 0 \arrow[r, "+1"] & 1 \arrow[r, "+1"] & 2 \arrow[r, "+1"] & 3 \arrow[r, "+1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Figura 0.4: Vários sistemas naturais.

[23]É relativamente comum encontrar quem propague máximas como “os Axiomas de (Dedekind-) Peano permitem construir a Matemática!”, num indicativo claro de amnésia, já que os axiomas usados na descrição de sistemas naturais descrevem apenas tais sistemas. Por exemplo, se $(\mathcal{N}, i, s)$ é um sistema natural, não são os seus axiomas que *permitem* construir o conjunto $\mathcal{N} \times (\mathcal{N} \setminus \{i\})$ a partir do qual se obtém os *inteiros*, mas sim as suposições tácitas (axiomas acerca de conjuntos!) de que tais procedimentos podem ser realizados. Para mais detalhes, confira [14].

Teorema 0.3.4 (Dedekind)**.** *Se $(\mathcal{N}, i, s)$ e $(\mathcal{M}, j, t)$ são sistemas naturais, então existe uma única bijeção $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ tal que $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$.*

O teorema acima[24] mostra, entre outras coisas, a *irrelevância* de se apegar a um começo particular na descrição de um sistema natural: o importante é que exista *algum* começo. Também fica justificada a tranquilidade com que profissionais em Matemática *escolhem* um sistema natural arbitrário para desenvolver Aritmética com a certeza de que os resultados obtidos valerão em qualquer outro sistema[25]. É lícito, portanto, fazer a seguinte

Definição 0.3.5. Vamos denotar por $\mathbb{N}$ *um* sistema natural dado pelo Axioma de Dedekind-Peano, cujos elementos serão chamados de *números naturais*. Além disso:

- $0 := \min \mathbb{N}$;
- $1 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(0)$;
- $2 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(1)$;
- $3 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(2)$;
- $4 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(3)$;
- $5 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(4)$;
- $6 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(5)$;
- $7 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(6)$;
- $8 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(7)$;
- $9 := \operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(8)$;

e assim por diante[26]. ¶

O método usado para justificar o Teorema 0.3.4 (chamado de recursão) permite definir de maneira rigorosa as operações usuais de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$, bem como verificar suas propriedades principais por indução. Embora seja edificante investir algum período da vida na verificação rigorosa dessas coisas, trata-se de algo mais pertinente a um curso de Aritmética ou de (Introdução a) Teoria dos Números do que a um curso de Análise *Real*. Por isso, todo o arcabouçou básico de Aritmética será assumido como conhecido – e, apenas por preciosismo, a verificação de algumas propriedades será sugerida na Subseção "Extras", a seguir. Em particular: $\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(n) := n + 1$ de agora em diante.

0.3.1 Extras

Recursão

De acordo com a suposição feita no final da subseção anterior, nós já *sabemos* somar e multiplicar números naturais, o que formalmente consiste em assumir conhecidas funções $(+)\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $(\cdot)\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com as propriedades *operatórias* que aprendemos na escola. Com isso em mente, suponha que agora quiséssemos definir a famosa função **fatorial** $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que associa cada $n \in \mathbb{N}$ ao número $n!$, de acordo com os seguintes critérios: $0! := 1$ e $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$. Da forma como está posta, é como se a função F fosse usada em sua própria definição, já que

$$F(n+1) = (n+1) \cdot F(n),$$

algo circular e que poderia trazer dor de cabeça.

[24] Cuja demonstração será apresentada na próxima Subseção "Extras".

[25] Por exemplo, fixados sistemas naturais $(\mathcal{N}, i, s)$ e $(\mathcal{M}, j, t)$, suponha que seja verdadeira a asserção "não existe $n \in \mathcal{N}$ tal que $s(n) = n$". Neste caso, também deverá valer que "não existe $m \in \mathcal{M}$ tal que $t(m) = m$": de fato, se existisse m com $t(m) = m$, então ao tomar o único $n \in \mathcal{N}$ com $\varphi(n) = m$, teria-se $t(m) = t(\varphi(n)) = \varphi(s(n))$ e $t(m) = m = \varphi(n)$, donde a injetividade de φ garantiria $s(n) = n$.

[26] Em posse das operações de adição, multiplicação e *potenciação*, definem-se rigorosamente os sistemas de representação numérica posicional. Em particular, o sistema em base 10 permite descrever todos os números naturais a partir dos números fixados acima.

Porém, secretamente, a função F acima é a *colagem* de uma *família de funções* cuja *existência* é demonstrada por indução: prova-se que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função

$$F_n \colon \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\} \to \mathbb{N}$$

de tal forma que F_{n+1} *estende* F_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, para *colar* todas as F_n's numa única F, faz-se $F(m) := F_n(m)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $m < n$, o que torna F uma função pois, nas inevitáveis ocorrências de $n, n' > m$ com $n \neq n'$, ou F_n estende $F_{n'}$ (caso $n > n'$) ou $F_{n'}$ estende F_n (caso $n' > n$) e, portanto, $F_n(m) = F_{n'}(m)$. Implicitamente, F é a *reunião* de *todas* as F_n's.

Observação 0.3.6 (Funções revisitadas)**.** Seguindo a Definição 0.0.7 à risca, a descrição de uma função exige que sejam informados domínio e codomínio. No entanto, pode-se relaxar isso: é lícito dizer que uma **função** é meramente um conjunto de pares ordenados com a seguinte propriedade: $y = y'$ sempre que $(x, y), (x, y') \in f$. Em posse de uma função segundo tais critérios, recupera-se uma função no sentido da Definição 0.0.7 fazendo $\operatorname{dom}(f) := \{x : \text{existe } y \text{ tal que } (x, y) \in f\}$ e $\operatorname{im}(f) := \{y : \text{existe } x \text{ tal que } (x, y) \in f\}$, pois assim f se revela uma função do tipo $\operatorname{dom}(f) \to \operatorname{im}(f)$. A vantagem dessa reformulação é puramente técnica: ela permite falar de conjuntos de funções sem que precisemos explicitar o domínio de cada uma delas, o que deixa a escrita mais limpa. $\triangle$

Definição 0.3.7. Dadas funções f e g, diz-se que g **estende** f, ou g é uma **extensão** de f, se ocorrer $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$. ¶

A seguir, a notação $\bigcup \mathcal{F}$ indica a *reunião* da *família* $\mathcal{F}$, introduzida na Definição 0.1.21.

Lema 0.3.8. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções. Se, para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}$ valer que $f(x) = g(x)$ sempre que $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$, então $F := \bigcup \mathcal{F}$ é uma função cujo domínio é $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{dom}(f)$. Em particular, $F(x) = f(x)$ para qualquer $f \in \mathcal{F}$ com $x \in \operatorname{dom}(f)$.*

Exercício 0.35 $(^{\star}_{\star})$**.** Demonstre o lema acima. Dica: perceba que todo elemento de $\bigcup \mathcal{F}$ é um par ordenado; depois, para $(x, y), (x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$, note que devem existir $f, g \in \mathcal{F}$ com $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in g$, acarretando $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$; conclua que $y = z$. ■

Teorema 0.3.9 (Recursão)**.** *Sejam $(\mathbb{B}, \leq)$ uma boa ordem natural, X um conjunto e $R \colon \mathbb{B} \times X \to X$ uma função*[27]*. Para cada $x \in X$ fixado, existe uma única função $R_x \colon \mathbb{B} \to X$ tal que $R_x(\min \mathbb{B}) = x$ e $R_x(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = R(b, R_x(b))$ para cada $b \in \mathbb{B}$.*

Antes de provar o teorema acima, convém observar como ele permite construir funções *na prática*. Para o caso do fatorial, uma vez em posse dos naturais $\mathbb{N}$ e da operação de multiplicação $\cdot \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tomam-se $\mathbb{B} := X := \mathbb{N}$, $R \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $R(n, m) := (n + 1) \cdot m$ e $x := 1$. Note então que a função $R_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ correspondente é tal que $R_1(0) = 1$ e $R_1(n + 1) = (n + 1) \cdot R_1(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., R_1 é a função que faz $n \mapsto n!$, como desejado.

Demonstração. Para cada $b \in \mathbb{B}$, seja $\mathbb{B}_{<b} := \{c \in \mathbb{B} : c < b\}$. Vamos dizer que uma função $f \colon \mathbb{B}_{<b} \to X$ é *R_x-recursiva em b* se:

- $b = \min \mathbb{B}$, ou
- $b > \min \mathbb{B}$, $f(\min \mathbb{B}) = x$ e $f(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c)) = R(c, f(c))$ para cada $c < b$ tal que $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c) < b$.

Observe que para cada elemento $b > \min \mathbb{B}$, existe no máximo uma função R_x-recursiva em b: se tanto f quanto g são R_x-recursivas em b e $c < b$ é tal que $f(c) \neq g(c)$, então existe

$$c'' := \min\{c : c < b \text{ e } f(c) \neq g(c)\},$$

com $c'' > \min \mathbb{B}$ (pois $f(\min \mathbb{B}) = g(\min \mathbb{B})$); logo, existe $c' < c''$ com $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c') = c''$ e, consequentemente,

$$f(c'') = f(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c')) = R(c', f(c')) = R(c', g(c')) = g(\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(c')) = g(c'').$$

Em particular, como uma função R_x-recursiva em b' é também R_x-recursiva em $b \leq b'$ (por quê?!)$^{\star}_{\star}$, segue que se f e g forem R_x-recursivas em b e b', respectivamente, então g estende f. Agora, provaremos que para cada $b \in \mathbb{B}$ *existe* uma função R_x-recursiva em b.

[27] Nesse tipo de situação, escreveremos $R(b, x)$ em vez de $R((b, x))$.

✓ (C.I.) Para $b := \min \mathbb{B}$, a função R_x-recursiva em b é $\emptyset$.

✓ (H.I.) Supondo que existe uma função R_x-recursiva em b, mostraremos que existe função R_x-recursiva em $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$:

  ✓ se $b := \min \mathbb{B}$, então $\mathbb{B}_{<\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)} = \{b\}$ e, assim, basta definir $f(b) := x$;

  ✓ se $b > \min\{\mathbb{B}\}$, então existe $c < b$ com $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(c) = b$, de modo que $\mathbb{B}_{<b} = \mathbb{B}_{<c} \cup \{c\}$ e $\mathbb{B}_{<\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)} = \mathbb{B}_{<c} \cup \{c, b\}$; daí, se $f : \mathbb{B}_{<b} \to X$ é a função R_x-recursiva existente por hipótese, basta definir $g : \mathbb{B}_{<\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)} \to X$ fazendo $g(d) := f(d)$ se $d < b$ (i.e., $d \leq c$) e $g(b) := R(c, f(c))$.

Ao aliar a indução acima com a argumentação do primeiro parágrafo, resulta que para todo $b \in \mathbb{B}$ existe uma única função R_x-recursiva em b, digamos f_b, de tal forma que $f_{b'}$ estende f_b sempre que $b \leq b'$. Isso *permite considerar a família de funções* $\mathcal{F} := \{f_b : b \in \mathbb{B}\}$, que satisfaz as exigências do Lema 0.3.8. Logo, $R_x := \bigcup_{b\in\mathbb{B}} f_b$ é uma função da forma $\mathbb{B} \to X$ (verifique!)[28] tal que $R_x(\min \mathbb{B}) = x$ e $R_x(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = f_c(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b))$ para *qualquer* $c > b$, acarretando

$$R_x(\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)) = R(b, f_c(b)) = R(b, R_x(b)),$$

como desejado. Nesta altura do campeonato, você já deve saber como provar que R_x é a única com tal propriedade, certo? □

Exercício 0.36 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Complete a demonstração. ■

Para ilustrar um pouco mais o método da recursão (e tornar este texto mais honesto), vamos ver como definir as operações de adição e multiplicação precisamente – e sem as abanações de mão cometidas em [10, 11].

(+) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $+_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que faz $+m(0) = m$ e $+_m(\mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(n)) = \mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(+_m(n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, defina $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $+(m, n) := +_m(n)$, que por simplicidade será denotado por $m + n$.

($\cdot$) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $\cdot_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que faz $\cdot_m(0) = 0$ e $\cdot_m(\mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(n)) = \cdot_m(n) + m$. Daí, defina $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $\cdot(m, n) := \cdot_m(n)$, que por simplicidade será denotado por $m \cdot n$.

Exercício 0.37 ($^{\star}_{\star}$)**.** Use o Teorema 0.3.9 para garantir a existência das funções acima. Dica: para $+_m$, tome $\mathbb{B} = X = \mathbb{N}$ no enunciado original, com $R : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $R(n, y) := \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(y)$ e $x := m$; para $\cdot_m$, faça $R(n, y) := y + m$ (que existe pelo passo anterior!) e tome $x := 0$. ■

A rigor, as funções anteriores são regras arbitrárias que descrevem diferentes formas de iterar a função sucessor de $\mathbb{N}$. Porém, uma vez investigadas as propriedades de tais operações, percebe-se que elas agem de acordo com a experiência empírica. Por exemplo:

Proposição 0.3.10. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$*, tem-se* $m + n = n + m$*.*

Demonstração. Primeiro, tem-se $0 + n = n + 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$: por definição, $n + 0 = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por outro lado, $0 + 0 = 0$ e, se ocorrer $0 + n = n$, então $0 + \mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(n) = \mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(0 + n) = \mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(n)$, donde segue, por indução, que $0 + n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, se para $m \in \mathbb{N}$ fixado ocorrer $m + n = n + m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então o mesmo valerá para $\mathrm{suc}_{\mathbb{N}}(m)$, pois... □

Exercício 0.38 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Complete a demonstração anterior. ■

Exercício 0.39 ($^{\star}_{\star}\star^{\star}_{\star}$)**.** Se estiver com paciência, reconstrua a Aritmética. ■

Observação 0.3.11. Sim, foram cinco estrelas: estas se reservam a exercícios que devem ser feitos no máximo uma vez na vida. △

[28] ($^{\star}_{\star\star}$): será útil notar que $\bigcup_{b\in\mathbb{B}} \mathbb{B}_{<b} = \mathbb{B}$.

Recursão mais uma vez: demonstração do Teorema 0.3.4

Há pelo menos duas formas de demonstrar o Teorema 0.3.4 (de Dedekind): a primeira, braçal e honesta, e a segunda, rápida e malandra.

Demonstração braçal. Primeiro, note que *se existir* uma função com as propriedades impostas, então ela é única: com efeito, se $\psi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ satisfaz as mesmas condições, então $X := \{n \in \mathcal{N} : \varphi(n) = \psi(n)\}$ é tal que

✓ $i \in X$, pois $\varphi(i) = j = \psi(i)$, e

✓ se $n \in X$, então $s(n) \in X$, já que $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(\psi(n)) = \psi(s(n))$,

donde a suposição de $(\mathcal{N}, i, s)$ ser um sistema natural assegura $X = \mathcal{N}$.[29] O restante da prova consiste em fazer uma série de argumentações semelhantes.

Supondo que exista uma função φ satisfazendo $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$, provaremos que ela deve ser bijetora.

✓ É sobrejetora pois $Y := \{m \in \mathcal{M} : \text{existe } n \in \mathcal{N} \text{ com } \varphi(n) = m\}$ é tal que $j \in Y$ (pois $\varphi(i) = j$) e $t(m) \in Y$ sempre que $m \in Y$ (pois se $n \in \mathcal{N}$ é tal que $\varphi(n) = m$, então $s(n) \in \mathcal{N}$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(m)$), donde segue que $Y = \mathcal{M}$ (já que $(\mathcal{M}, j, t)$ é um sistema natural).

✓ Para verificar a injetividade, a ideia é mostrar que se $n \neq n'$, então $\varphi(n) \neq \varphi(n')$.

Em outras palavras, para $n \in \mathcal{N}$ fixado, busca-se provar que $D_n := \{n' \in \mathcal{N} : n' \neq n \Rightarrow \varphi(n') \neq \varphi(n)\}$ satisfaz $D_n = \mathcal{N}$. Tem início a ***primeira indução***: mostraremos que $D_i = \mathcal{N}$ (Caso Inicial) bem como $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$ (Hipótese Indutiva). Ocorre que para mostrar $D_i = \mathcal{N}$, também precisa-se argumentar por indução! Tem início a segunda indução:

✓ $i \in D_i$ (já que a implicação "$i \neq i \Rightarrow \varphi(i) \neq \varphi(i)$" é verdadeira[30]);

✓ se $n \in D_i$ para algum $n \in \mathcal{N}$, pode-se ter $n = i$ ou $n \neq i$; no primeiro caso, $s(i) \neq i$ (certo?) e $\varphi(s(i)) = t(\varphi(i)) = t(j) \neq j$ (por quê?!), mostrando que $s(i) \in D_i$; no segundo caso, existe $n' \in \mathcal{N}$ com $s(n') = n$ (pois $(\mathcal{N}, i, s)$ é sistema natural) e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n)) = t(\varphi(s(n'))) = t(t(\varphi(n'))) \neq j$ (pois $t(m) \neq j$ para todo $m \in \mathcal{M} \setminus \{j\}$), mostrando que $s(n) \in D_i$.

O argumento acima encerra a segunda indução, mas não a primeira: mostrou-se apenas que $D_i = \mathcal{N}$; falta provar a segunda parte, i.e., que $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$! E para surpresa de ninguém, tal igualdade será mostrada... na terceira indução:

✓ como antes, tem-se $s(n) \in D_{s(n)}$ por conta da igualdade $s(n) = s(n)$;

✓ agora, se $k \in D_{s(n)}$, deve-se provar que $s(k) \in D_{s(n)}$; se ocorrer $s(k) = s(n)$, nada precisa ser feito; se $s(k) \neq s(n)$, então $k \neq n$ (pois s é função!), enquanto o modo como tomamos n, i.e., satisfazendo $D_n = \mathcal{N}$, garante que $\varphi(k) \neq \varphi(n)$, donde finalmente a injetividade de t atesta $t(\varphi(k)) \neq t(\varphi(n))$, com a suposição sobre φ encerrando o trabalho, já que $\varphi(s(k)) = t(\varphi(k))$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$.

Portanto, mostrou-se que $D_i = \mathcal{N}$ (C.I.) e $D_{s(n)} = \mathcal{N}$ sempre que $D_n = \mathcal{N}$ (H.I.), exatamente o que se desejava. Falta apenas provar que *existe* uma função $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ satisfazendo $\varphi(i) = j$ e $\varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$ para todo $n \in \mathcal{N}$. Isto se faz via recursão: no enunciado do Teorema da Recursão, substitui-se $\mathbb{B}$ pelo sistema natural $(\mathcal{N}, i, s)$ com a boa ordem descrita no Exercício 0.73, toma-se $X := \mathcal{M}$, $x := j$ e faz-se $R_j\colon \mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ a função dada por $R(n, m) := t(m)$. Logo, $R_j(i) = j$ e

$$R_j(s(n)) = R(n, R_j(n)) = t(R_j(n))$$

para todo $n \in \mathcal{N}$, mostrando que a função φ procurada é, tão somente, R_j. □

A demonstração "rápida e malandra", por sua vez, apenas extrapola o uso do Exercício 0.73 na demonstração anterior: já que sistemas naturais podem ser substituídos por boas ordens naturais, basta provar a "versão bem ordenada" do Teorema de Dedekind.

[29] Na prática, o que se fez foi um argumento indutivo nos moldes da indução clássica descrita no Corolário 0.3.0, porém adaptada para sistemas naturais: provou-se o caso inicial ($i \in X$) e, supondo-se que $n \in X$ (hipótese indutiva), concluiu-se que $s(n) \in X$.

[30] Posto que o seu *antecedente* é falso. Lembre-se de que afirmações do tipo "se P, então Q" só são falsas na ocorrência de *premissas* (P) verdadeiras com *conclusões* (Q) falsas.

Teorema 0.3.12 (de Dedekind, para boas ordens)**.** *Quaisquer duas boas ordens naturais são* <u>*isomorfas*</u>*. Além disso, o isomorfismo é único.*

As expressões "isomorfas" e "isomorfismo", que aparecerão no texto com certa frequência, têm definições bem gerais. Porém, por ora, basta saber que, <u>no contexto acima</u>, significam *bijeção crescente*. Mais precisamente, um **isomorfismo entre boas ordens** $(\mathbb{A}, \leq)$ e $(\mathbb{B}, \leq)$ é uma bijeção $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$. Moralmente, a única diferença entre boas ordens isomorfas são os nomes de seus elementos, e o isomorfismo faz justamente o processo de *transliteração*[31].

Demonstração. Como de costume, convém começar a prova pela unicidade: se $\varphi, \psi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ fossem isomorfismos distintos, então o conjunto

$$T := \{a \in \mathbb{A} : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$$

seria não-vazio e, portanto, existiria $t := \min T$. A pergunta é: quem é t? Note que t não pode ser o menor elemento de $\mathbb{A}$, pois $\varphi(\min \mathbb{A}) = \min \mathbb{B}$ e $\psi(\min \mathbb{A}) = \min \mathbb{B}$ (por quê?)*. Logo, por $\mathbb{A}$ ser boa ordem natural, existe $s \in \mathbb{A}$ tal que $t = \operatorname{suc}_{\mathbb{A}}(s)$. Agora, por minimalidade, deve-se ter $s \notin T$ e, por conseguinte, $\varphi(s) = \psi(s)$. Qual o problema? Este: por φ ser isomorfismo, $\varphi(\operatorname{suc}_{\mathbb{A}}(s)) = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(\varphi(s))$ (verifique)$^{\star}_{\star}$ e, pela mesma razão, $\psi(\operatorname{suc}_{\mathbb{A}}(s)) = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(\psi(s))$, ou seja, $\varphi(t) = \psi(t)$.

Resta assim exibir um isomorfismo, o que é bem simples: pelo Teorema da Recursão, a função

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathbb{A} \times \mathbb{B} &\to \mathbb{B} \\ (a, b) &\mapsto \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b) \end{aligned}$$

induz uma única função $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que $\varphi(\min \mathbb{A}) = \min \mathbb{B}$ e $\varphi(\operatorname{suc}_{\mathbb{A}}(a)) = \operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(\varphi(a))$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Onde está a rapidez e malandragem? Resposta: veja abaixo. □

Exercício 0.40 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que a função φ acima é uma bijeção crescente. ■

Boas ordens não-naturais

Exercício 0.41 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que a função sucessor $\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ é injetora em qualquer boa ordem $(\mathbb{B}, \leq)$ em que todo elemento tenha sucessor. ■

A sutileza do exercício anterior é notar que na parte final da demonstração do Teorema 0.3.3, utilizou-se apenas o fato de todo elemento de $\mathbb{B}$ ter sucessor – e não a suposição de que todo elemento $\neq \min \mathbb{B}$ é sucessor de alguém. Isto levanta a pergunta: existem boas ordens satisfazendo a primeira condição mas não a segunda? Certamente!

Exemplo 0.3.13. Embora tenhamos pouca informação acerca de $\mathbb{N}$ (assumimos apenas que se trata de uma boa ordem/sistema natural), parace razoável dizer que existe $u' \notin \mathbb{N}$. Acontece que em posse disso, a Proposição 0.2.15 nos diz que $\mathbb{N}' := \mathbb{N} \cup \{u'\}$ admite uma boa ordem que tem u' como último elemento! É claro que, agora, nem todo elemento de $\mathbb{N}'$ tem sucessor: justamente por u' ser o último elemento, *ninguém* está acima dele. Porém, note que curioso: u' também não é sucessor (imediato) de ninguém! De fato, se $x \in \mathbb{N}'$ é tal que $x < u'$, então $x \in \mathbb{N}$ e, dessa forma, $\operatorname{suc}_{\mathbb{N}}(x) := x + 1 \in \mathbb{N}$ e, por isso, $x + 1 < u'$ (reveja a Definição 0.2.11 ou o Exercício 0.27 caso tenha se esquecido do que *significa* ser sucessor). ▲

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n+1 \longrightarrow \cdots \qquad u'$$

Figura 0.5: Se uma boa ordem não tem último elemento, basta acrescentá-lo.

Embora pareça artificial, o cenário acima é bem comum na verdade: ao encontrar *sequências convergentes em* $\mathbb{R}$, por exemplo, podemos pensar nos termos da sequência *ordenados* por $\mathbb{N}$, de modo que o ponto adicional acrescentado acima faz meramente o papel de *limite*.

Por que parar? Chamando $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_1 := \mathbb{N} \cup \{u'\}$, ainda parece razoável a existência de algum objeto $u'' \notin \mathbb{N}_1$, o que permite definir $\mathbb{N}_2 := \mathbb{N}_1 \cup \{u''\}$. Analogamente, parecece razoável definir $\mathbb{N}_3$, $\mathbb{N}_4$... Ao repetir esse processo para todo $n \in \mathbb{N}$, chega-se a uma boa ordem $\mathbb{B}$ em que todo elemento tem sucessor, mas tal que $\mathbb{B}$ não é natural! Caso tenha achado interessante, confira [14] para mais detalhes.

[31] Como na Figura 0.4 da página 32.

Afinal, zero é natural?

É comum haver certo debate acerca da corretude de se assumir que $0 \in \mathbb{N}$. Embora se trate apenas de um símbolo utilizado para indicar o menor elemento de $\mathbb{N}$, as definições recursivas adotadas para a soma e a multiplicação escondem um *viés* ideológico: *naturalizar* o *vazio* (confira o Exercício 0.75).

Mais precisamente, na próxima seção, em que a noção de *cardinalidade* entre conjuntos arbitrários será, finalmente, apresentada, os elementos de $\mathbb{N}$ serão usados como *parâmetros* de finitude, num procedimento formal que apenas imita a noção de contagem. E é justamente aí que começa o problema: como contar os elementos do vazio?

✗ Quem defende "$0 \notin \mathbb{N}$" argumenta que ao *contar* os elementos em $\{a, b, c\}$, escolhe-se o *primeiro*, o *segundo* e, finalmente, o *terceiro*, de modo que ao término do processo se chega ao *número de elementos do conjunto*: 3. Há também quem apele a fatores históricos e etimológicos, já que a "noção do zero" ocorreu de maneira relativamente tardia, justificando assim que não se trate de uma ideia *natural*. Moral da história: não se contam os elementos de $\emptyset$.

✓ Já quem defende "$0 \in \mathbb{N}$" costuma pensar nos números naturais mais como *registradores* do processo de contagem: ao se iniciar a indexação a partir do 0, o *número de elementos do conjunto* será o menor número maior que os índices utilizados na indexação. Assim, por exemplo, como nem se começa a contagem dos elementos do vazio, o conjunto vazio deve ter $\min\{n \in \mathbb{N} : n > x \text{ para todo } x \in \emptyset\} = 0$ elementos (pense a respeito!). Já no caso de $\{a, b, c\}$, tem-se o 0-ésimo elemento, o 1-ésimo elemento e, finalmente, o 2-ésimo elemento, de modo que $\{a, b, c\}$ terá $\min\{n \in \mathbb{N} : n > 2\} = 3$ elementos.

Certamente, a postura "$0 \notin \mathbb{N}$" tem a vantagem de ser conceitualmente mais simples, talvez por sua proximidade com a experiência empírica. No entanto, ela é tecnicamente limitada: fica relativamente mais custoso descrever, por exemplo, o sistema numérico posicional utilizado corriqueiramente para dar sentido a coisas como "109", essencialmente pela *ausência* de um *neutro* aditivo que *anule* a multiplicação; também ao expressar fórmulas de *cardinalidade*, como $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ para conjuntos finitos A e B, por exemplo, precisa-se excluir os casos que envolvem o conjunto vazio, já que não se define $|\emptyset|$ como um número *digno* de ser operado com os *naturais*.

Porém, acredito que o argumento mais forte em favor de se adotar $0 \in \mathbb{N}$ seja o da *azeitona*[32]. Como você pode verificar por indução, para todo $n \in \mathbb{N}$ (com 0 incluso), existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<n} := \{m : m \in \mathbb{N} \text{ e } m < n\}$ e $\mathbb{N}_{<n+1} \setminus \{0\}$, o que na prática significa o que você sempre soube: "contar de 1 até n e gritar n" é equivalente a "contar de 0 até $n - 1$ e gritar n". Em outras palavras: se não quiser a azeitona na pizza, basta tirá-la da sua fatia e, se quiser depois, basta pegá-la de volta! Inclusive, isto será feito com frequência ao longo do texto.

0.4 Ao infinito e além

0.4.0 Essencial

Conjuntos finitos

O final da discussão realizada na Subseção 0.1.1 sugeriu definir *número cardinal* como um tipo de *representante* da relação $\approx$ que declara dois conjuntos A e B como equivalentes quando existe uma bijeção entre eles. Aqui, vamos executar esta ideia – pelo menos para conjuntos *finitos*. Por falar neles:

Definição 0.4.0. Diremos que um conjunto X é **finito** se para algum $n \in \mathbb{N}$ existir bijeção entre X e $\mathbb{N}_{<n} := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$. Conjuntos *não*-finitos serão xingados de **infinitos**. ¶

Exercício 0.42 ($\star$)**.** Sejam X e Y conjuntos tais que $X \approx Y$. Mostre que X é finito se, e somente se, Y é finito. ■

[32] Há outros, relativamente mais abstratos que fogem ao escopo deste material.

Note que pela definição acima, $\emptyset$ é finito, posto que $\mathbb{N}_{<0} = \emptyset$. Também são finitos os conjuntos unitários, i.e., da forma $\{x\}$, por estarem em bijeção com $\mathbb{N}_{<1} = \{0\}$, bem como os conjuntos da forma $\{x, y\}$ com $x \neq y$, por estarem em bijeção com $\mathbb{N}_{<2} = \{0, 1\}$, etc. Como os casos iniciais sugerem, se X é finito, então o número $n \in \mathbb{N}$ na definição de *finitude* é único, precisamente o tipo de comportamento esperado dos representantes de uma relação de equivalência.

Teorema 0.4.1. *Se X é finito, então existe um único $n \in \mathbb{N}$ com $X \approx \mathbb{N}_{<n}$.*

Demonstração. A definição garante a existência do número natural n. Para provar sua unicidade, considere $m, n \in \mathbb{N}$ com $X \approx \mathbb{N}_{<m}$ e $X \approx \mathbb{N}_{<n}$. Como a *relação* $\approx$ é simétrica e transitiva, resulta que $\mathbb{N}_{<m} \approx \mathbb{N}_{<n}$. Logo, basta argumentar pela contrapositiva: vamos supor $m \neq n$ a fim de concluir que não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<m}$ e $\mathbb{N}_{<n}$. Isto encerrará a prova, posto que pela observação inicial, a ocorrência de $X \approx \mathbb{N}_{<m}$ e $X \approx \mathbb{N}_{<n}$ *acarretará* $m = n$, como desejado.

⌜**Afirmação.** *Se $Y \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$, então não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e Y.*

Demonstração. O argumento será feito por indução em n, com o caso $n := 0$ imediato (certo?). Supondo a afirmação verdadeira para $n \in \mathbb{N}$ fixado, veremos que a existência de uma bijeção φ entre $\mathbb{N}_{<n+1} = \mathbb{N}_{<n} \cup \{n\}$ e $Y \subsetneq \mathbb{N}_{<n+1}$ resultaria numa bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e um subconjunto próprio de $\mathbb{N}_{<n}$, contrariando a *hipótese de indução*[33]:

✓ se $n \notin Y$, então $Y \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$ e, portanto, a restrição de φ a $\mathbb{N}_{<n}$ seria uma bijeção entre $\mathbb{N}_{<n}$ e $Y' := Y \setminus \{\varphi(n)\}$, um subconjunto próprio de $\mathbb{N}_{<n}$;

✓ se $n \in Y$, então existe $k \leq n$ com $\varphi(k) = n$, de modo que a função $g\colon \mathbb{N}_{<n} \to Y \setminus \{n\}$, que faz $g(i) := \varphi(i)$ para $i \neq k$ e $g(k) := \varphi(n)$ caso $k < n$, é uma bijeção – e $Y \setminus \{n\} \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$. ⌟

Agora, note que por $(\mathbb{N}, \leq)$ ser uma boa ordem, não há perda de generalidade em supor $m < n$, já que a ordem é total. Daí, $\mathbb{N}_{<m} \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$, o que segue pois $m \in \mathbb{N}_{<n} \setminus \mathbb{N}_{<m}$ (e todo $k < m$ também satisfaz $k < n$, pela transitividade da ordem). Logo, pela afirmação, não existe bijeção entre $\mathbb{N}_{<m}$ e $\mathbb{N}_{<n}$, como queríamos. □

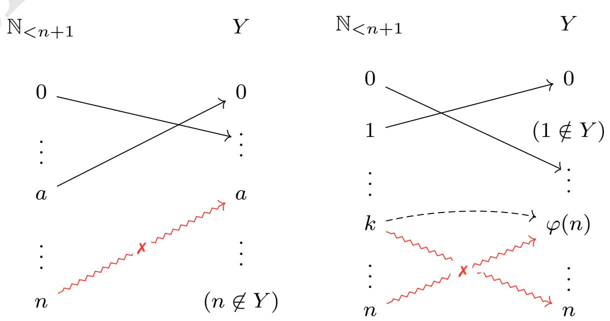


Figura 0.6: A demonstração anterior, em cores.

Definição 0.4.2. Dado um conjunto X finito, indicaremos por $|X|$ o único número natural em bijeção com X, que será chamado de **número cardinal de** X. ¶

[33] Em outras palavras, trata-se do passo indutivo usual, porém escrito na contrapositiva: “se **não** vale o caso $n + 1$, então também **não** vale o caso n”.

Observação 0.4.3 (Alerta)**.** É comum encontrar obras que utilizam "$\#X$" para indicar o número cardinal de X. Porém, isto não será feito aqui – mas você é livre para escrever assim se preferir[34]. $\triangle$

Portanto, como prometido, os números naturais cumprem o papel de representantes (das cardinalidades) dos conjuntos finitos, por meio de bijeções que abstraem os processos de contagem. Como efeito colateral, todas as *ferramentas* típicas de $\mathbb{N}$, desde suas operações até as argumentações por indução, ficam disponíveis para analisar questões que envolvam a cardinalidade de conjuntos finitos. Para praticar, confira o Exercício 0.63.

Conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis

Além de firmar a posição dos números naturais como os cardinais de conjuntos finitos, a demonstração do último teorema também sugere, sem alarde, um critério para decidir se um conjunto é infinito. A seguir, $\varphi[Y] := \{\varphi(y) : y \in Y\}$ indica a *imagem de um subconjunto* $Y \subseteq X$ por uma função φ que tem X como domínio[35].

Corolário 0.4.4 (da demonstração do Teorema 0.4.1)**.** *Se X admite bijeção com um subconjunto próprio $Y \subsetneq X$, então X é infinito.*

Demonstração. O diagrama a seguir resume a ideia:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\text{bijeção}"] \arrow[d, shift right, "\varphi|_Y"'] & & X \arrow[d, "\varphi"] \\
\varphi[Y] \arrow[u, bend right, "(\varphi|_Y)^{-1}"'] & \subsetneq & \mathbb{N}_{<n}
\end{tikzcd}$$

Se existisse uma bijeção $\varphi\colon X \to \mathbb{N}_{<n}$ para *algum* $n \in \mathbb{N}$, então existiria uma bijeção entre $\varphi[Y] \subsetneq \mathbb{N}_{<n}$ e $\mathbb{N}_{<n}$, contrariando a afirmação provada ao longo da demonstração do Teorema 0.4.1. Os detalhes ficam por sua conta ($\star$). $\square$

Corolário 0.4.5. $\mathbb{N}$ *é infinito.*

Demonstração. A correspondência $n \mapsto n+1$ define uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\square$

A constatação de que existe um conjunto infinito cria um problema *momentâneo* na definição dos números cardinais: como nenhum número natural serve para representar a *cardinalidade* de $\mathbb{N}$, não parece haver uma noção natural de número que mereça ser xingada de $|\mathbb{N}|$. *Mas isto não deveria ser um problema, já que apenas os conjuntos infinitos ficaram sem cardinais e todos eles têm a mesma cardinalidade, justamente por serem infinitos... certo? Não bastaria fazer $|\mathbb{N}| := \infty$?* A situação não é tão simples.

Teorema 0.4.6 (Cantor)**.** *Dado um conjunto X, não existe sobrejeção $X \to \wp(X)$.*

Demonstração. Para uma função $\varphi\colon X \to \wp(X)$, o conjunto $T := \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$ atesta a não-sobrejetividade de φ: se ocorresse $\varphi(t) = T$ para algum $t \in X$, a definição de T daria "$t \in T \Leftrightarrow t \notin \varphi(t) = T$", uma contradição. Logo, não há sobrejeção $X \to \wp(X)$. $\square$

[34] Eu ficarei triste? Sim. Mas vou sobreviver.

[35] Caso precise revisar esse assunto, confira o Exercício 0.54.

Exercício 0.43 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Mostre que se $X \subseteq Y$ e Y é finito, então X é finito. Observação: este é o terceiro item do Exercício 0.63. ■

Corolário 0.4.7. *Se X é infinito, então $\wp(X)$ é infinito e $X \not\approx \wp(X)$.*

Demonstração. Como a correspondência $x \mapsto \{x\}$ define uma função injetora $X \to \wp(X)$, segue que se $\wp(X)$ fosse finito, então X estaria em bijeção com um subconjunto (finito!) de $\wp(X)$ e, portanto, X seria finito. O restante segue do Teorema de Cantor. □

Em particular, $\mathbb{N}$ e $\wp(\mathbb{N})$ são conjuntos infinitos que *não* têm a mesma cardinalidade, ou seja: existem cardinalidades infinitas distintas entre si, o que mostra a inefetividade de se escrever "$|X| = \infty$" para representar os números cardinais de conjuntos infinitos[36]. Para contornar o problema, costuma-se fazer o seguinte.

Definição 0.4.8. Diremos que X é **enumerável** se existir função injetora da forma $X \to \mathbb{N}$. Nas situações em que se puder garantir a existência de bijeção $X \to \mathbb{N}$ (e isto precisar ser explicitado), X será dito **infinito enumerável**. Por fim, diremos que X é **não-enumerável** se X *não for* enumerável, i.e., se não existir injeção $X \to \mathbb{N}$. ¶

Exercício 0.44 ($\star$)**.** Mostre que se X é não-enumerável, então X é infinito. ■

Proposição 0.4.9. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é (infinito!) enumerável.*

Demonstração. A função $n \mapsto (0, n)$ define uma injeção $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por outro lado, como você deve saber de suas aulas de Aritmética (ou afins), a correspondência $(m, n) \mapsto 2^m 3^n$ define uma função injetora $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Logo, o resultado segue do Teorema de Cantor-Bernstein. □

Os primeiros contatos com esse tipo de resultado costumam ser estranhos, já que parece ser claro que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deveria ter bem mais elementos do que $\mathbb{N}$: com efeito, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{n\}$, i.e., é uma *reunião* enumerável de conjuntos enumeráveis dois a dois disjuntos e, mesmo assim, sua cardinalidade não excede a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Contudo, uma simples ilustração ajuda a tornar a coisa toda mais palatável.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
0 & (0,0) \arrow[r] & (1,0) \arrow[dl] & (2,0) \arrow[d] & (3,0) \arrow[r] & (4,0) \arrow[d] & \\
1 & (0,1) \arrow[r] & (1,1) \arrow[ur] & (2,1) \arrow[dl] & (3,1) \arrow[u] & (4,1) \arrow[dl] & \\
2 & (0,2) \arrow[d] & (1,2) \arrow[l] & (2,2) \arrow[ur] & (3,2) \arrow[dl] & & \\
3 & (0,3) \arrow[r] & (1,3) \arrow[ur] & (2,3) \arrow[dl] & & & \\
4 & (0,4) \arrow[d] & (1,4) \arrow[l] & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{tikzcd}$$

[36]Pelo menos se a intenção for fazer tal atribuição com o mínimo de decência.

Como o diagrama acima sugere, pode-se determinar uma bijeção da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ao *percorrer* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ num zigue-zague maroto. O mesmo tipo de *percurso* também ajuda a perceber que o *conjunto dos números racionais* é infinito enumerável: a única diferença é que precisa-se evitar representações *equivalentes* de um mesmo número racional já *percorrido*, pois sem isso a injetividade se perde. Mas isto não é um problema, na verdade.

Teorema 0.4.10 (©). *Uma função $f\colon X \to Y$ é sobrejetora se, e somente se, existe uma injeção $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Em particular, $Y \precsim X$ se, e somente se, $X \succsim Y$.*

Demonstração. Se a função g existe como no enunciado, então a sobrejetividade de f segue do Exercício 0.14 (a menos da ordem das letras). A parte delicada é a recíproca: como cozinhar uma função $g\colon Y \to X$ satisfazendo $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$? Note que a identidade procurada se traduz em pedir $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Na prática, isto significa dizer que $g(y) \in X$ é *algum* elemento de X que é *levado* até y por f.

Algum $x \in X$ satisfaz $f(x) = y$, posto que f é sobrejetora por hipótese, o que garante $P_y := f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$. Ocorre que $\mathcal{P} := \{P_y : y \in Y\}$ é uma partição de X (certo?!)*, de tal maneira que o *insuspeito* Teorema 0.1.27 assegura uma classe de representantes para $\mathcal{P}$, digamos $\mathcal{R}$. Com isso, basta definir $g(y) := r$, onde r é o único elemento de $\mathcal{R}$ pertencente a $\mathcal{P}_y$, que satisfaz a identidade $f(g(y)) = y$ por *construção*. □

Corolário 0.4.11 (©). *Se $f\colon X \to Y$ é sobrejetora, então $Y \precsim X$.*

Corolário 0.4.12 (©). *Seja $\mathcal{X} := \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de conjuntos enumeráveis. Então $\bigcup \mathcal{X}$ é enumerável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathrm{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$ o conjunto das funções sobrejetoras da forma $\mathbb{N} \to X_n$. Como $\mathrm{Sob}(\mathbb{N}, X_n) \neq \emptyset$, podemos *escolher* $f_n \in \mathrm{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (como na demonstração do Teorema 0.1.27). Com isso, pode-se definir $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ a função que faz $(m, n) \mapsto f_m(n)$. Note que se $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, então existe $m \in \mathbb{N}$ com $x \in X_m$, bem como $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(n) = x$, i.e., $f(m, n) = x$. Logo, f é sobrejetora, acarretando $\bigcup \mathcal{X} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. □

Tais resultados podem ser usados para mostrar que os típicos conjuntos $\mathbb{Z}$ (dos números inteiros) e $\mathbb{Q}$ (dos números racionais), embora infinitos, têm a mesma caradinalidade de $\mathbb{N}$, o que pode parecer muito estranho. Por um lado, isto se deve ao fato de a *construção* dos conjuntos em questão ter sido feita por meio de métodos que não *aumentam* cardinalidades infinitas (vide Proposição 0.4.9). Por outro lado, a *menor* cardinalidade infinita é a de $\mathbb{N}$, no seguinte sentido:

Teorema 0.4.13 (©). *Se X é infinito, então $\mathbb{N} \precsim X$.*

Demonstração. A ideia é simples: por X ser infinito, não existe $n \in \mathbb{N}$ com uma bijeção $\mathbb{N}_{<n} \to X$; logo, se $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi\colon \mathbb{N}_{<n} \to X$ for uma função injetora, então $X \setminus \mathrm{im}(\varphi)$ é não-vazio, o que permite *escolher*, *recursivamente*, sequências finitas *cada vez maiores* de modo a obter uma injeção $\mathbb{N} \to X$. Parece honesto, certo? □

Exercício 0.45 ($^\star_\star$). Para um conjunto X, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) o conjunto X é infinito (não existe $n \in \mathbb{N}$ com uma bijeção $\mathbb{N}_{<n} \to X$);

b) existe uma função injetora $\mathbb{N} \to X$;

c) existe uma função bijetora $X \to Y$, com $Y \subsetneq X$. ■

Saber que $\mathbb{N}$ tem "*a menor cardinalidade infinita*" sugere a pergunta *natural*: qual é a *próxima* cardinalidade? Certamente, aplicações sucessivas do Teorema de Cantor resultam em diversas cardinalidades não-enumeráveis: $\mathbb{N} \prec \wp(\mathbb{N}) \prec \wp(\wp(\mathbb{N})) \prec \ldots$, o que não responde a pergunta, já que *poderia existir* X com $\mathbb{N} \prec X \prec \wp(\mathbb{N})$, caso em que a cardinalidade de $\wp(\mathbb{N})$ não seria a "*próxima*"[37]. Voltaremos a isso, mas não agora. Em todo caso, resta apenas um fato inócuo sobre conjuntos não-enumeráveis para ser apresentado – e, devido à sua simplicidade, a verificação ficará por sua conta.

Exercício 0.46 (Princípio da Casa dos Pombos $(^\star_\star)$)**.** Sejam X um conjunto não-enumerável e $A, B \subseteq X$ subconjuntos disjuntos satisfazendo $X = A \cup B$. Mostre que deve ocorrer $\mathbb{N} \prec A$ ou $\mathbb{N} \prec B$, i.e., (pelo menos) um deles deve ser não-enumerável. Dica: suponha que não. ■

0.4.1 Extras

Uma demonstração para o Teorema de Cantor-Bernstein

É importante ter em mente que a demonstração que veremos não é terrivelmente difícil e muito menos feia – ela é belíssima. No entanto, ela requer atenção e tempo, e o segundo recurso costuma ser escasso nas disciplinas de Análise. Recordemo-nos de seu enunciado:

Teorema de Cantor-Bernstein. Se existem funções injetoras $X \to Y$ e $Y \to X$, então existe bijeção $X \to Y$.

Você não deve esperar que a demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein envolva a prova de que as injeções são sobrejetivas[38]: a ideia é *construir* uma "nova" função (bijetora) a partir das injeções dadas. Embora a coisa seja mais simples do que parece, alguns ingredientes preliminares devem ser introduzidos.

Definição 0.4.14. Para um conjunto $\mathcal{S}$, define-se $\bigcap \mathcal{S} := \{x : x \in S \text{ para todo } S \in \mathcal{S}\}$, a **interseção da família** $\mathcal{S}$. Nas ocasiões em que $\mathcal{S} := \{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto $\mathcal{I}$ fixado, também é comum escrever $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathcal{I}} S_i$ ou $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} S_i$. ¶

O dispositivo acima apenas cria um modo bastante esperto de evitar abominações notacionais como "$S_0 \cap S_1 \cap \ldots$" quando se quer expressar uma interseção (possivelmente) infinita de conjuntos. Fora isso, ela *quase* não traz novidades: note, por exemplo, que para $\mathcal{S} := \{X, Y\}$, tem-se $\bigcap \mathcal{S} = X \cap Y$.

Lema 0.4.15 (Leis de De Morgan)**.** *Sejam X e $\mathcal{Y}$ conjuntos, com $\mathcal{Y} \neq \emptyset$.*

(i) $\displaystyle\bigcap_{B \in \mathcal{Y}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{Y}} B.$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{Y}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcap_{B \in \mathcal{Y}} B.$

Demonstração. Se $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{Y}} (X \setminus B)$, então para todo $B \in \mathcal{Y}$ tem-se $x \in X \setminus B$, donde segue que $x \in X$ e não existe $B \in \mathcal{Y}$ tal que $x \in B$, i.e., $x \in X$ e $x \notin \bigcup_{B \in \mathcal{Y}} B$, precisamente $x \in X \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{Y}} B$. Pela arbitrariedade do x tomado, segue que $\bigcap_{B \in \mathcal{Y}} (X \setminus B) \subseteq X \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{Y}} B$. A recíproca é análoga (faça!)$^\star_\star$.

Para provar o segundo item, note que se $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{Y}} (X \setminus B)$, então existe $B' \in \mathcal{Y}$ com $x \in X \setminus B'$, i.e., $x \in X$ e $x \notin B'$ para algum $B' \in \mathcal{Y}$, donde se infere que $x \notin \bigcap_{B \in \mathcal{Y}} B$ e, por conseguinte, $x \in X \setminus \bigcap_{B \in \mathcal{Y}} B$. Logo, $\bigcup_{B \in \mathcal{Y}} (X \setminus \mathcal{Y}) \subseteq X \setminus \bigcap_{B \in \mathcal{Y}} B$. Novamente, a recíproca é análoga (já sabe né?)$^\star_\star$. □

Exercício 0.47 $(\star)$**.** Para conjuntos A, B e C, mostre que $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ e $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. ■

[37] Em particular fica o **alerta**: afirmações do tipo "X e Y são não-enumeráveis" não significam, *a priori*, que X e Y tenham a mesma cardinalidade, mas apenas que ambas as cardinalidades são *maiores* do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$.

[38] Lembre-se da função sucessor!

Lema 0.4.16. *Sejam $f: X \to Y$ uma função e considere famílias $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X e de Y, respectivamente. Então:*

(i) *$f\left[\bigcup \mathcal{U}\right] = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f[U]$ e $f\left[\bigcap \mathcal{U}\right] \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} f[U]$, com igualdade garantida no último caso se f for injetora;*

(ii) *$f^{-1}\left[\bigcup \mathcal{V}\right] = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}[V]$ e $f^{-1}\left[\bigcap \mathcal{V}\right] = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}[V]$.*

Exercício 0.48 ($^\star_\star$)**.** Demonstre o lema anterior. ■

Demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein. Fixadas funções injetoras $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$, vamos obter partições $\{S, S'\}$ e $\{T, T'\}$ de X e Y, respectivamente, tais que $f[S] = T$ e $g[T'] = S'$ pois, se isso for feito, o teorema estará demonstrado (confira o Exercício 0.49). Para obter tal partição, note que qualquer subconjunto $S \subseteq X$ induz tanto uma partição em X quanto uma partição em Y: basta definir $S' := X \setminus S$, $T := f[S]$ e $T' := Y \setminus T$. Isso resolve *metade* do problema, dado que ainda é preciso garantir a identidade $g[T'] = S'$, essencial para definir a bijeção h. Ao se reescrever a igualdade $g[T'] = S'$ em *função* de S, obtém-se a identidade $g\left[Y \setminus f[S]\right] = X \setminus S$, equivalentemente exprimível como $S = X \setminus g\left[Y \setminus f[S]\right]$. Como obter tal S?

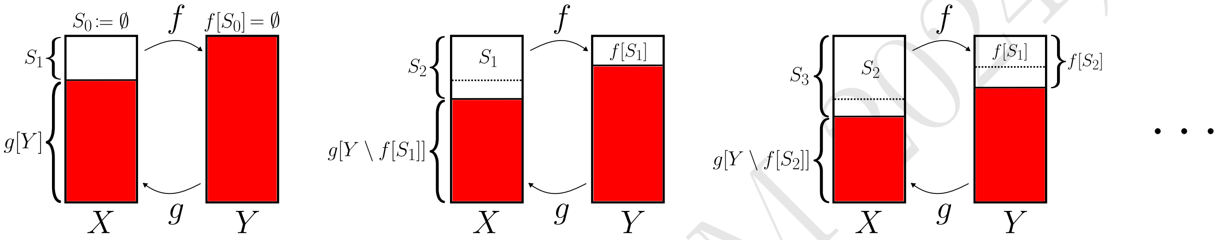


Figura 0.7: Heurística da construção recursiva do conjunto S.

Seja $S_0 := \emptyset$ e, para $n \in \mathbb{N}$ qualquer, $S_{n+1} := X \setminus g\left[Y \setminus f[S_n]\right]$. O subconjunto $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ satisfaz a identidade desejada, pois

$$
\begin{aligned}
S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(X \setminus g\left[Y \setminus f[S_n]\right]\right) = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g\left[Y \setminus f[S_n]\right] \overset{*}{=} \\
\overset{*}{=} X \setminus g\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(Y \setminus f[S_n]\right)\right] = X \setminus g\left[Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f[S_n]\right] = X \setminus g\left[Y \setminus f\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right]\right] = \\
= X \setminus g\left[Y \setminus f[S]\right],
\end{aligned}
$$

onde a igualdade $(*)$ decorre da injetividade de g (lema anterior), enquanto as outras seguem das leis de De Morgan. □

Exercício 0.49 ($^\star_\star$)**.** Mostre que se $F: A \to B$ e $G: C \to D$ são bijeções com $A \cap C = B \cap D = \emptyset$, então $F \cup G$ é uma bijeção da forma $A \cup C \to B \cup D$. Use isto para obter a bijeção procurada no teorema anterior. Dica: faça $A := S$, $B := f[S]$, $C := g[T']$ e $D := T'$, com $F := f|_S$ e $G := (g|_{T'})^{-1}$. ■

Portanto, a fim de estabelecer a *existência* de uma bijeção entre conjuntos X e Y, basta exibir injeções $X \to Y$ e $Y \to X$, sem a necessidade de explicitar uma bijeção particular. Isto será feito, por exemplo, quando provarmos a *não-enumerabilidade* de $\mathbb{R}$ por meio de uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\wp(\mathbb{N})$, cuja *existência* será garantida por funções injetoras da forma $\mathbb{R} \to \wp(\mathbb{N})$ e $\wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$.

Construção dos inteiros e dos racionais

Um dos modos de *motivar* a *introdução* dos números inteiros é dar *significado* a expressões como "$5 - 7$", que não têm sentido no contexto natural: tipicamente, uma expressão da forma "$m - n$" em $\mathbb{N}$ corresponde à cardinalidade resultante de um conjunto com m elementos após a exclusão de n elementos; logo, se $m < n$, então não se pode realizar tal procedimento. Todavia, como os Bancos nos ensinam desde tempos imemoriais, é possível registrar "quanto falta": no caso, faz-se "$7 - 5 = 2$", e escreve-se "$5 - 7 = -2$" para indicar a natureza "negativa" do resultado[39].

[39] A aceitação dos números negativos pela comunidade matemática foi relativamente tardia – ainda no Século XIX havia quem encrencasse com eles. Quem gostar de aspectos históricos pode conferir [19].

Para *descrever* o nosso entendimento do que os inteiros *deveriam* ser dentro do cenário formal que se desenrola, pode-se observar o seguinte: embora coisas como “$5 - 7$” e “$3 - 5$” (que deveriam resultar em -2) não tenham significado em $\mathbb{N}$, a *informação* transmitida por tais expressões pode ser *codificada* em $\mathbb{N}$: em vez de escrever $5 - 7 = 3 - 5$, redistribuem-se as parcelas de modo a se obter uma igualdade entre somas positivas, i.e., $5 + 5 = 7 + 3$. Em outras palavras, duas *expressões* $a - b$ e $c - d$ são iguais (no que gostaríamos que fosse $\mathbb{Z}$) se, e somente se, $a + d$ e $b + c$ são iguais em $\mathbb{N}$. Em linguajar técnico:

Exercício 0.50 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sobre $Z := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, considere a relação $\sim$ que declara $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, $a + d = b + c$.

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Dica: para a transitividade, use a *lei do cancelamento*, i.e., “$a = b$ sempre que $a + c = b + c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$”.

b) Mostre que se $(a, b) \sim (a', b')$ e $(c, d) \sim (c', d')$, então $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$.

c) Mostre que ao definir $\overline{(a, b)} +' \overline{(c, d)} := \overline{(a + c, b + d)}$, o resultado *independe da escolha de representantes*. Dica: encare o item anterior até que ele te encare de volta[40]. ■

Definição 0.4.17. O quociente $Z/\sim$ do exercício acima será denotado por $\mathbb{Z}$ e xingado de **conjunto dos números inteiros**. ¶

No caso, a classe de equivalência $\overline{(a, b)}$ representa o que gostaríamos de escrever como $a - b$, razão pela qual vamos escrever assim! Desse modo, a *operação* $+'$ definida no exercício anterior apenas estipula

$$(a - b) +' (c - d) := (a + c) - (b + d),$$

tal qual aprendemos na escola.

Exercício 0.51 $({}^{\star}_{\star}\star{}^{\star}_{\star})$**.** Verifique as propriedades usuais da soma de números inteiros. ■

O “exercício” acima empurra para debaixo do tapete a verificação de diversas propriedades importantes do conjunto $\mathbb{Z}$ como construído aqui, mas que essencialmente permitem tratá-lo como já estamos acostumados – em particular, o apóstrofo empregado no símbolo de adição já pode ser abandonado. De maneira similar, ao definir

$$(a - b) \cdot' (c - d) := (ac + bd) - (ad + bc),$$

verifica-se que o resultado da expressão acima (a rigor, uma classe de equivalência em $Z/\sim$), não depende da escolha dos representantes das classes, essencialmente como no caso da adição “$+'$”. Após verificar que tal operação $\cdot'$ tem o comportamento que se esperaria da multiplicação em $\mathbb{Z}$, a construção de $\mathbb{Q}$ se torna inevitável.

Exercício 0.52 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sobre $Q := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, considere a relação $\sim$ que declara $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, $ad = bc$.

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

b) Chamando por $\frac{a}{b}$ a classe de equivalência de um par (a, b), mostre que $Q/\sim$ se comporta, essencialmente, como o ***conjunto* dos números racionais** que conhecemos na escola, e que passará a ser denotado por $\mathbb{Q}$. Em particular, defina as operações de adição e multiplicação e verifique suas propriedades usuais. ■

Com $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ *formalmente* apresentados, já é possível determinar suas *cardinalidades* por meio dos resultados vistos na subseção anterior (entre outros exercícios elementares propostos no final do capítulo):

(i) como existem funções injetoras $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, resulta que $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z} \precsim \mathbb{Q}$;

(ii) por construção, $\mathbb{Q}$ vem de fábrica com uma sobrejeção da forma $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, mostrando que $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

[40] Por exemplo: por um lado, $\overline{(1, 2)} +' \overline{(2, 5)} = \overline{(3, 7)}$, enquanto $\overline{(2, 3)} +' \overline{(3, 6)} = \overline{(5, 9)}$ e, de fato, $\overline{(3, 7)} = \overline{(5, 9)}$, já que $3 + 9 = 7 + 5$. Elaborar exemplos particulares para entender afirmações aparentemente abstratas é algo que você deve se acostumar a fazer por conta própria.

(iii) em geral, se $A \approx A'$ e $B \approx B'$, então $A \times B \approx A' \times B'$, de modo que por valer $\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, resulta $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(iv) finalmente, $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\}$, com $\{-n, n\} \precsim \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resultando em $\mathbb{Z} \precsim \mathbb{N}$ (logo, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$) e, como acima, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Em suma:

$$\mathbb{N} \precsim \mathbb{Z} \precsim \mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{N},$$

donde o Teorema de Cantor-Bernstein assegura as clássicas *identidades* $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$, i.e., tanto $\mathbb{Z}$ quanto $\mathbb{Q}$ são enumeráveis.

O problema da escolha e o sentido da existência

Talvez você tenha notado o símbolo "©" perdido em alguns pontos do texto. Caso tenha passado batido, sua primeira ocorrência foi no Teorema 0.1.27. *Será que tal teorema está protegido por direitos autorais?* Resposta: não. A ideia foi marcar no texto os pontos em que *fomos* displicentes com os *problemas de escolha* – e, em inglês, "escolha" se escreve "*choice*" (©hoice).

Por mais que tenhamos firmado o *compromisso* de *aceitar* conjuntos infinitos, as ferramentas que temos para compreendê-los são *finitárias*: a vida, os símbolos, o papel, a paciência... são recursos indiscutivelmente finitos, o que leva à exigência (bastante) razoável de que *demonstrações* também devem ser *finitas* em algum sentido. Certamente, dado que textos empregam, invariavelmente, apenas finitos caracteres, a noção de finitude que se espera de uma demonstração não deve ser pensada apenas textualmente, mas *computacionalmente*.

Exemplo 0.4.18 (Fundamental)**.** Para ilustrar, considere a demonstração do Teorema 0.4.13. Secretamente, o argumento *sugere* como definir, recursivamente, uma injeção da forma $\mathbb{N} \to X$ sempre que X for infinito:

✓ por X ser infinito, tem-se $X \neq \emptyset$, o que permite *escolher* $x_0 \in X$;

✓ por X ser infinito, tem-se $X \neq \{x_0\}$, o que permite *escolher* $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$;

✓ por X ser infinito...

✓ por fim, a função $\mathbb{N} \to X$ que faz $n \mapsto x_n$ é injetora.

Implicitamente, o raciocínio acima descreve um processo de construção *infinitamente arbitrário*: cada novo passo *exige* um `input`, uma escolha *indeterminada* que deve ser feita por quem executa a demonstração. Para ilustrar uma situação que não sofre deste problema, suponha que X seja bem ordenado: neste caso, bastaria definir $x_0 := \min X$, $x_1 := \min X \setminus \{x_0\}$, *e assim sucessivamente*. Pode parecer a mesma coisa, mas não é: no último caso, o argumento explicita que a escolha deve ser feita por meio da boa ordem nativa de X, tomando-se *o* menor dentre os elementos ainda não escolhidos, o que independe de quem executa a demonstração[41]. ▲

O que fazer diante disso? Infelizmente, não há resposta *filosoficamente* fácil, uma vez que o questionamento atinge diretamente a *ontologia matemática*: afinal, quando usamos o verbo "existir" numa sentença matemática, como em "existe solução para a equação $x^2 + 1 = 0$", qual o sentido da palavra "existe"?

Exemplo 0.4.19. Futuramente, veremos que o tipo de objeto que se convenciona chamar de reta real, $\mathbb{R}$, é não-enumerável e, além disso, pode ser escrito como $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$, onde $\mathbb{A}$ é a coleção dos números reais que são raízes de polinômios cujos coeficientes são racionais[42], e $\mathbb{T} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$. Com alguma paciência, pode-se mostrar que $\mathbb{A}$ é enumerável, ao que você provavelmente se pergunta: e daí? Como $\mathbb{R}$ é não-enumerável, conclui-se que $\mathbb{T}$, além de ser não-vazio, deve ser não-enumerável, pois o contrário acarretaria a enumerabilidade de $\mathbb{R}$, violando o Princípio da Casa dos Pombos (Exercício 0.46). Portanto, sem exibir ao menos um elemento de $\mathbb{T}$, provou-se que $\mathbb{T} \neq \emptyset$. ▲

[41] Trata-se de uma versão menos divertida da *anedota das meias*, criada por Russell para ilustrar o uso do Axioma da Escolha: numa coleção infinita de pares de meias, a fim de tomar uma meia de cada par, precisa-se escolher arbitrariamente uma meia de cada par (já que meias de um mesmo par costumam ser indistinguíveis); já para uma coleção infinita de pares de sapato, basta escolher o pé esquerdo de cada par.

[42] Como $\sqrt{2}$, raiz do polinômio $x^2 - 2$.

A aceitação desse tipo de argumento não é unanimidade entre a comunidade matemática: há quem defenda que por mais abstratas que sejam, as entidades matemáticas devem ser *exibidas*. Para essas pessoas, não basta provar que a inexistência de algo leva a uma contradição, é preciso argumentar diretamente a fim de justificar a *existência*. Porém, tal postura construtivista não é predominante: o mais comum, na verdade, é encarar *existência* como *ausência de contradições* perante algum sistema axiomático fixado, o que não resolve o problema ontológico[43], mas pelo menos possibilita um sono tranquilo para quem pratica Matemática.

De volta ao problema da escolha: como aprendi com Hugo C. Botós,

"para quem só *sabe* martelo, todo parafuso é prego".

Aqui, martelo é o modo finitário por meio do qual argumentamos, enquanto os parafusos são os conjuntos infinitos. É para tratá-los (minimamente) como ~~pregos~~ conjuntos finitos que se postula o

Axioma da Escolha. *Para uma família não-vazia $\mathcal{A}$ de conjuntos não-vazios, existe uma função $f\colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

Observação 0.4.20 (Um pouco de contexto, mas não muito)**.** Na tentativa de resolver o primeiro problema da *lista de exercícios* proposta por David Hilbert em 1900, um jovem chamado Ernst Zermelo *demonstrou*, em 1904, o que ficou conhecido como

Teorema 0.4.21 (da Boa Ordenação (©))**.** *Todo conjunto admite uma boa ordem.*

Mais precisamente, qualquer *conjunto* X admite pelo menos uma relação binária $\preceq$ que faz de $(X, \preceq)$ uma boa ordem[44]. O problema de Hilbert em questão era a *Hipótese do Contínuo*, que consiste em saber se existe (ou não) um conjunto infinito X com $\mathbb{N} \prec X \prec \wp(\mathbb{N})$: no caso, a relação com a noção de boa ordem se dá por um resultado de Cantor que estabelece o conjunto das boas ordens de $\mathbb{N}$ (a menos de *isomorfismo*) como um representante da *primeira* cardinalidade *maior* do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$. No entanto, o que interessa para a presente discussão é o fato de Zermelo ter explicitado, pela primeira vez até então, a suposição de que escolhas arbitrárias poderiam ser feitas, i.e., o Axioma da Escolha[45]. △

Embora exista quem aponte tal axioma como incompatível com posturas finitárias, pode-se argumentar que foi justamente o comprometimento com tais posturas que levou à percepção de que escolhas infinitas não podem ser realizadas de maneira *construtiva*. Nesse sentido, em vez de banir os resultados que dependem de tais processos, Zermelo propôs aceitar a *existência* de *escolhas completas* sem a limitação de descrevê-las ou construí-las, algo bem mais *honesto*.

Enfim, vejamos esboços de como justificar as passagens marcadas com © (exceto pelo Teorema da Boa Ordenação, cuja demonstração foge do escopo deste trabalho)[46].

- ✓ No Teorema 0.1.27, a classe de representantes se obtém por meio do Axioma da Escolha ao considerar $\mathcal{A}$ como a família das classes de equivalência da relação (ou como a própria partição, a depender do caso), i.e., basta tomar $\mathcal{R} := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$.
- ✓ O Teorema 0.4.10 e seu Corolário 0.4.11 apenas utilizaram o teorema anterior.
- ✓ Para o Corolário 0.4.12, ao fazer $\mathcal{B} := \{\mathrm{Sob}(\mathbb{N}, X_n) : n \in \mathbb{N}\}$, o Axioma da Escolha *assegura* uma função $f\colon \mathbb{N} \to \bigcup \mathcal{B}$ com $f(n) \in \mathrm{Sob}(\mathbb{N}, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (por quê?)$^{\star}_{\star\star}$.

[43]Por exemplo: o sistema axiomático fixado descreve entidades que existem de forma independente (num *universo platônico*) ou tudo não passa de um jogo artificial sofisticado? Eu não tenho uma resposta definitiva. Se quiser se aprofundar nesse tipo de discussão para tentar formular a sua própria resposta, você pode conferir o tratado [23] ou a envolvente discussão de Penelope Maddy [12] – se preferir algo mais modesto, o texto de Joel D. Hamkins [7] também é uma boa pedida.

[44]Tal ordem não tem qualquer tipo de comprometimento com *outras ordens* previamente existentes em X: no caso de $\mathbb{Z}$, por exemplo, poderia ocorrer $3 = \min_{\preceq} \mathbb{Z}$, $-1 = \mathrm{suc}_{\preceq}(3)$, $19 = \mathrm{suc}_{\preceq}(-1)$, etc.

[45]A rigor, em 1904, Zermelo tratou o Axioma da Escolha como mera suposição; foi apenas em 1908 que ele propôs uma axiomatização para a teoria de conjuntos que englobasse sua suposição como um dos axiomas.

[46]Para mais detalhes, confira [14].

✓ Finalmente, para o Teorema 0.4.13, com $\mathcal{A} := \wp(X) \setminus \{\emptyset\}$, o Axioma da Escolha dá uma função $f\colon \mathcal{A} \to X$ com $f(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$, de modo que ao chamar por $\operatorname{seq}(X)$ a família das funções da forma $\mathbb{N}_{<n} \to X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pode-se definir a função $\mathcal{O}\colon \operatorname{seq}(X) \to X$ que faz $\mathcal{O}(s) := f(X \setminus \operatorname{im}(s))$, que explicitamente *escolhe* um elemento em X não pertencente à imagem da *sequência finita* $s \in \operatorname{seq}(X)$. Adaptando-se a ideia da demonstração do Teorema 0.3.9, mostra-se que existe uma (única) função $\psi\colon \mathbb{N} \to X$ tal que $\psi(n) = \mathcal{O}((\psi(m) : m < n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que pelo modo com que a função $\mathcal{O}$ foi tomada, deve ser injetora.

Exercício 0.53 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Surpreendentemente, a demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein não usou o Axioma da Escolha. Por quê? ■

Ocasionalmente mencionaremos o uso do Axioma da Escolha ao longo do texto, mas você não precisa se preocupar com isso nesta etapa da sua vida.

Como representar os infinitos?

Outro símbolo foi empregado despretensiosamente no texto: "®". Sua ocorrência foi única, na Definição 0.1.28, mas não sem importância: ela indica que a definição está *condenada* pelo Paradoxo de ®ussell (Exercício 0.11). De fato, como se discutiu na subseção em questão, um dos modos de eliminar o Paradoxo de Russell consiste em substituir o Axioma da Abstração pelo Axioma da Separação: dada uma propriedade $\mathcal{P}$ e um conjunto A, existe $\{x \in A : x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$. Uma consequência disso foi propositalmente omitida:

Teorema 0.4.22. *Não existe conjunto V para o qual se tenha $x \in V$ para todo x.*

Demonstração. Se existisse, então o Axioma da Separação permitiria definir $R := \{x \in V : x \notin x\}$, que traria novamente o Paradoxo de Russell. □

Observação 0.4.23. A inexistência de um conjunto universo é menos problemática do que parece. Ao estudar Teoria dos Números, por exemplo, $\mathbb{Z}$ é o universo dos objetos estudados (os números!), e ninguém reclama de "$\mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$", i.e., $\mathbb{Z}$ não é um número inteiro. Da mesma forma, aqui, $\mathbb{V} \notin \mathbb{V}$, i.e., o universo dos conjuntos não é um conjunto. △

Apesar da observação acima, a impossibilidade de tratar $\mathbb{V}$ como conjunto atrapalha o tratamento que se faz das noções de cardinalidade, principalmente dos conjuntos infinitos: no caso de conjuntos finitos, os números naturais servem precisamente como representantes, mas nada foi apresentado aqui para cumprir tal papel no caso de conjuntos infinitos. O modo usual para resolver o problema faz uso dos chamados *ordinais de von Neumann.*

A ideia é quase simples: define-se $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0,1\}$, $3 := \{0,1,2\}$, etc. Mais geralmente, um **ordinal** é um conjunto α com duas propriedades peculiares: α é *transitivo*, no sentido de que $x \subseteq \alpha$ sempre que $x \in \alpha$, e $(\alpha, \in_\alpha)$ é uma boa ordem (estrita), onde $\in_\alpha$ é a relação de ordem (estrita) em α dada por $x \in_\alpha y$ se, e somente se, $x \in y$. Com paciência, mostra-se que $0, 1, 2, 3, \ldots$ definidos como acima são ordinais, mas não só isso: ao considerar a coleção de todos os números naturais implementados dessa forma, ganha-se um conjunto ω que também é um ordinal. Ao repetir o processo de sucessão acima e definir $\omega + 1 := \omega \cup \{\omega\}$, ganha-se novamente um ordinal, e ao definir $\omega + 2 := \omega + 1 \cup \{\omega + 1\}$... Os *números cardinais* desejados *surgem* então como ordinais especiais: um ordinal α é **cardinal** se não existe $\beta \in \alpha$ que admita bijeção com α.

Ao desenvolver as ideias acima com tempo (num curso de Teoria dos Conjuntos, por exemplo), prova-se que todo número natural é um cardinal, assim como ω, que passa a ser chamado de $\aleph_0$, o primeiro cardinal infinito. Depois de argumentar um pouco mais, chega-se à conclusão de que deve existir $\aleph_1$, o primeiro cardinal maior do que $\aleph_0$, bem como $\aleph_2$, o primeiro cardinal maior do que $\aleph_1$, bem como $\aleph_3$, o primeiro... Após chegar a $\aleph_\omega$ (o primeiro cardinal maior do que $\aleph_n$ para todo n natural), chega-se à conclusão de que deve existir $\aleph_{\omega+1}$, o primeiro... Você pegou a ideia, certo? Para mais detalhes, confira [14].

Observação 0.4.24. No caso em que X é um conjunto finito, a expressão "$|X|$" indica o seu número cardinal. Agora, pelo que se discutiu acima, é lícito adotar a mesma notação para X infinito, mesmo que não tenhamos discutido cardinais em detalhes. Se isso te incomodar, ao encontrar expressões como "$|\mathbb{R}| \leq |\wp(\mathbb{N})|$", por exemplo, pense que se trata de uma abreviação estilosa para a afirmação "existe função injetora do tipo $\mathbb{R} \to \wp(\mathbb{N})$". Analogamente, "$|A| = |B|$" abreviа "existe bijeção entre A e B" e assim por diante. △

0.5 Exercícios adicionais

Importante: nos exercícios desta seção e pelo restante do texto, as notações para cardinalidades seguem o que se discutiu na Observação 0.4.24.

Exercício 0.54 (Imagens, pré-imagens, restrições, etc. ($\star$))**.** Para uma função $f\colon X \to Y$ e um subconjunto $W \subseteq X$, a **restrição** da função f ao subconjunto W é a função $f|_W\colon W \to Y$ definida por $f|_W(w) := f(w)$ para todo $w \in W$. Dizemos que $g\colon Z \to Y$ **estende** f se $X \subseteq Z$ e $g|_X = f$. Mais ainda, para subconjuntos $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ fixados, consideram-se:

(i) a **imagem direta** de A por f, definida como $f[A] := \{f(a) : a \in A\}$;

(ii) a **pré-imagem** de B por f, definida como $f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Com base nas definições acima, faça o que se pede a seguir.

a) Mostre que $\operatorname{im}(f|_A) = f[A]$ para qualquer $A \subseteq X$.

b) Mostre que $f[A] \subseteq f[A']$ e $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[B']$ sempre que $A \subseteq A' \subseteq X$ e $B \subseteq B' \subseteq Y$, respectivamente.

c) Mostre que $f[\emptyset] = \emptyset$ e $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

d) Mostre que $f^{-1}[Y] = X$.

e) Para $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ quaisquer, mostre que valem as inclusões $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ e $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$, com as igualdades garantidas se f for injetora (para o primeiro caso) ou sobrejetora (para o segundo caso). $\blacksquare$

Observação 0.5.0 (Importante). Explicitamente, $y \in f[A]$ se, e somente se, existe *algum* $a \in A$ com $f(a) = y$, enquanto $x \in f^{-1}[B]$ se, e somente se, $f(x) \in B$. Embora a pressa possa fazer você pensar o contrário, ao escrever "$f^{-1}[B]$", **não se supõe** que a função f seja *invertível*/bijetora: "f^{-1}" se refere à *relação inversa* de f, que pode não ser uma função (confira a discussão na Subseção 0.1.1). Na dúvida, use a definição dada para a notação – e não a sua intuição para o que a notação deveria ser. $\triangle$

Exercício 0.55 ((!))**.** Leia a observação anterior novamente, mas preste atenção desta vez. $\blacksquare$

Definição 0.5.1. Para conjuntos X e Y, denotaremos por Y^X a família de todas as funções da forma $X \to Y$.[47] ¶

Exercício 0.56 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Para um conjunto X qualquer (possivelmente infinito!), exiba uma bijeção entre $\wp(X)$ e $\{0,1\}^X$. Dica: para um subconjunto $A \subseteq X$, associe uma função "óbvia" da forma $X \to \{0,1\}$; para facilitar, comece com X finito para daí generalizar. $\blacksquare$

Exercício 0.57 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Mostre que se $|A| = |B|$, então $|\wp(A)| = |\wp(B)|$. $\blacksquare$

Exercício 0.58 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Sejam A, B, C e D conjuntos. Mostre que se $|A| \leq |C|$ e $|B| \leq |D|$, então $|A^B| \leq |C^D|$. $\blacksquare$

Exercício 0.59 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Mostre que se $|A| = |C|$ e $|B| = |D|$, então $|A^B| = |C^D|$. $\blacksquare$

Observação 0.5.2. Note que o exercício anterior justifica definir potenciação entre cardinalidades/números cardinais: $|X|^{|Y|} := |X^Y|$. $\triangle$

Observação 0.5.3. Independentemente do que será discutido nos próximos capítulos a cerca das chamadas *indeterminações*, a definição acima obriga que se tenha $0^0 = 1$, o que está de acordo com o fato de que existe uma única função da forma $\emptyset \to \emptyset$. $\triangle$

[47] O motivo da notação exponencial é sugerido, implicitamente, pelo último item do Exercício 0.63.

Exercício 0.60 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Para conjuntos X, Y e Z *quaisquer*, exiba uma bijeção entre $(X^Y)^Z$ e $X^{Y\times Z}$. Qual a interpretação cardinal disso? ■

Exercício 0.61 ((!))**.** Se você fez o exercício acima apenas para os casos em que X, Y e Z são finitos, volte e faça de novo, para **conjuntos quaisquer**: a hipótese de finitude é irrelevante para a solução do exercício[48]. ■

Exercício 0.62 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre que $\mathcal{P} := \{f^{-1}[\{y\}] : y \in \operatorname{im}(f)\}$ é uma partição de X. ■

Exercício 0.63 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Demonstre as seguintes afirmações.

a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ ocorre $|\mathbb{N}_{<n}| = n$.

b) Se X é finito e $x \notin X$, então $|X \cup \{x\}| = |X| + 1$.

c) Se $X \subseteq Y$ e Y é finito, então X é finito e $|X| \leq |Y|$. Dica: indução em $|Y|$ + item anterior.

d) Se X e Y são finitos, então $X \cup Y$ é finito e $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$. Dica: indução em $|X|$ + item (b) para o subcaso do passo indutivo em que $X \nsubseteq Y$.

e) Se X e Y são finitos e disjuntos, então $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

f) Se $\mathcal{F}$ é finito e todo $F \in \mathcal{F}$ é finito, então $\bigcup \mathcal{F}$ é finito. Dica: indução em $|\mathcal{F}|$.

g) Se X e Y são finitos, então $X \times Y$ é finito e $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. Dica: $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$.

h) Se X é finito e $f\colon X \to Y$ é uma função, então $\operatorname{im}(f)$ é finito e $|\operatorname{im}(f)| \leq |X|$.

i) Se $X \times Y$ é finito, então X e Y são finitos.

j) Se X é finito, então $\wp(X)$ é finito e $|\wp(X)| = 2^{|X|}$. Dica: combine o próximo item com o Exercício 0.56.

k) Se X e Y são finitos, então Y^X é finito e $|Y^X| = |Y|^{|X|}$. ■

Exercício 0.64 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Mostre que para $n \in \mathbb{N}$, uma função $f\colon \mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{N}_{<n}$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora. ■

Exercício 0.65 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Mostre que para X finito, uma função $f\colon X \to X$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora. ■

Exercício 0.66 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** O resultado acima permanece válido para X infinito? ■

Exercício 0.67 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Pense rápido: se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função sobrejetora, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}[\{n\}]$ é finito? ■

Exercício 0.68 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Seja $f\colon X \to Y$ uma função, com Y enumerável e X não-enumerável. Mostre que existe $y \in Y$ tal que $X' := \{x \in X : f(x) = y\}$ é não-enumerável. ■

Exercício 0.69 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Seja $\psi\colon X \to Y$ uma função bijetora. Mostre que se $\mathcal{P}$ é uma partição de X, então $\psi(\mathcal{P}) := \{\psi[P] : P \in \mathcal{P}\}$ é uma partição de Y. Em particular, tem-se $|\mathcal{P}| = |\psi(\mathcal{P})|$. ■

Exercício 0.70 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Mostre que existe uma partição infinita $\mathcal{P} := \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ com cada P_n infinito. Dica: arrume uma função sobrejetora $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esperta – ou apele para Teoria dos Números. ■

[48] De modo geral, só assuma que os conjuntos são finitos quando isso for explicitamente indicado.

Exercício 0.71 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Sejam $(\mathbb{S}, \leq)$ e $(\mathbb{T}, \leq)$ ordens parciais. Uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ é:

(i) **crescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \leq f(s')$;

(ii) **decrescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \geq f(s')$;

(iii) **monótona** se f for crescente ou decrescente.

Sabendo disso, suponha que a ordem de $\mathbb{S}$ seja total.

a) Mostre que se f é crescente e $f(s) < f(s')$, então $s < s'$.

b) Mostre que se f é decrescente e $f(s) < f(s')$, então $s > s'$.

c) Conclua que se f for monótona e bijetora, então a inversa $f^{-1}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{S}$ também será monótona[49]. ■

Observação 0.5.4. Uma função crescente e injetora satisfaz a implicação *estrita*

$$s < s' \Rightarrow f(s) < f(s'),$$

já que deve ocorrer $f(s) \leq f(s')$, enquanto a injetividade proíbe $f(s) = f(s')$. Uma função em tal condição será chamada de **estritamente crescente**. A definição para funções **estritamente decrescentes** é análoga[50]. △

Exercício 0.72 $(\star)$**.** Convença-se de que funções estritamente monótonas são injetoras. ■

Exercício 0.73 $\left(\substack{\star\star\\\star\star}\right)$**.** Seja $(\mathcal{N}, i, s)$ um sistema natural. Diremos que $I \subseteq \mathcal{N}$ é **indutivo** se $s(n) \in I$ sempre que $n \in I$. Agora, para $m, n \in \mathcal{N}$, vamos escrever "$m \preceq n$" a fim de indicar que "n pertence a todo conjunto indutivo que contém m". O propósito deste exercício é mostrar que $(\mathcal{N}, \preceq)$ é uma boa ordem natural cujo sistema natural induzido é $(\mathcal{N}, i, s)$.

a) Convença-se de que $\preceq$ é reflexiva e transitiva.

b) Mostre que se $I \subseteq \mathcal{N}$ é indutivo, então $s[I]$ também é.

c) Mostre que se $m, n \in \mathcal{N}$ e $m \npreceq n$, então $s(m) \npreceq s(n)$ e $s(m) \npreceq n$. Dica: pela definição de $\preceq$, deve existir um subconjunto indutivo I satisfazendo $m \in I$ com $n \notin I$; use o item anterior para concluir.

d) Mostre que para todo $n \in \mathcal{N}$ ocorre $n \preceq s(n)$ e $s(n) \npreceq n$. Dica: para a segunda parte, com $X := \{n \in \mathcal{N} : s(n) \npreceq n\}$, note que $i \in X$ e $s(n) \in X$ sempre que $n \in X$.

e) Mostre que $(\mathcal{N}, \preceq)$ é uma ordem parcial. Sugestão: verifique a antissimetria pela contrapositiva, i.e., mostre que se $m \neq n$, então $m \npreceq n$ ou $n \npreceq m$, o que pode ser feito por *indução* como no item anterior.

f) Mostre que se $m \preceq n$, então $s(m) \preceq s(n)$.

g) Mostre que se $I \subseteq \mathcal{N}$ é indutivo, então $s^{-1}[I]$ é indutivo.

h) Definindo "$m \prec n$" como abreviação para "$m \preceq n$ e $m \neq n$", mostre que se $s(m) \prec s(n)$, então $m \prec n$. Dica: use o item anterior.

[49]Na verdade, f é crescente/decrescente se, e somente se, f^{-1} é crescente/decrescente.

[50]A literatura também costuma xingar de *não-decrescente* as coisas que aqui foram chamadas de *crescentes*. Em tais textos, o adjetivo *crescente* se reserva para as situações de desigualdade estrita. Um comentário análogo é válido para funções *não-crescentes*.

i) Mostre que $m < s(n)$ se, e somente se, $m \leq n$. Dica: primeiro, observe que se $m < s(i)$, então $m = i$; depois, note que se a tese valer para $n \in \mathcal{N}$ e ocorrer $s(k) < s(s(n))$ para algum k, então $k < s(n)$ em virtude do item anterior; conclua por *indução*.

j) Suponha que $X \subseteq \mathcal{N}$ tenha a seguinte propriedade: para todo $n \in \mathcal{N}$, a ocorrência de $m \in X$ para todo $m < n$ acarreta $n \in X$. Mostre que $X = \mathcal{N}$. Dica: considere $Y := \{n \in \mathcal{N} : \forall m \in \mathcal{N}\ m < n \Rightarrow m \in X\}$ e mostre por indução que $Y = \mathcal{N}$, ponto em que o item anterior será essencial; para concluir, lembre-se de que $n < s(n)$ para todo n.

k) Mostre que $(\mathcal{N}, \leq)$ é uma boa ordem. Dica: tome $S \subseteq \mathcal{N}$ sem menor elemento e use o item anterior para concluir que $\mathcal{N} \setminus S = \mathcal{N}$, i.e., $S = \emptyset$.

l) Mostre que $i = \min \mathcal{N}$ e $\mathrm{suc}_{\mathcal{N}}(n) = s(n)$ para todo $n \in \mathcal{N}$. ■

Observação 0.5.5. Sim. Foram quatro estrelas: estas se reservam a exercícios que devem ser feitos ao menos uma vez na vida. É o caso dos próximos exercícios. △

Exercício 0.74 $(^{\star\star}_{\star\star})$**.** Para $m, n \in \mathbb{N}$, mostre que $m < n$ se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + (c + 1)$. Dica: você precisará da definição recursiva de adição (cf. Exercício 0.37). ■

Exercício 0.75 $(^{\star\star}_{\star\star})$**.** Suponha que você ministre um curso de Análise em que $0 \notin \mathbb{N}$. Como definir, recursivamente (cf. Exercício 0.37), as operações de soma e multiplicação em $\mathbb{N}$? ■

0.6 Linguagem: breve revisão de estruturas algébricas

0.6.0 Essencial

Operações binárias e elementos especiais

Definição 0.6.0. Uma função $*\colon X \times X \to X$ é chamada de **operação binária** em X. Porém, como não trataremos explicitamente de outras *aridades*, não há risco em chamar $*$ simplesmente de operação. Para $x, y \in X$, costuma-se escrever $x * y$ em vez de $*(x, y)$, em alusão às notações já bem estabelecidas para *adição* e *multiplicação*. ¶

A operação $*$ determina o que é $x * y$ em X. Independentemente disso, como $x * y \in X$, é legítimo operar tal elemento com algum $z \in X$, situação em que se escreve $(x * y) * z$. Os parênteses são necessários pois, a princípio, poderia ocorrer $(x * y) * z \neq x * (y * z)$, entre outros comportamentos *indesejados*. Porém, como o tempo é curto, vamos nos focar nos casos que interessam a este curso.

Definição 0.6.1. Seja $*\colon X \times X \to X$ uma operação num conjunto X.

(i) Diremos que a operação $*$ é **associativa** se para quaisquer $x, y, z \in X$ ocorrer $(x * y) * z = x * (y * z)$, o que na prática significa que pode-se escrever $x * y * z$ em vez de $(x * y) * z$ ou $x * (y * z)$.

(ii) Diremos que a operação $*$ é **comutativa** se para quaisquer $x, y \in X$ valer a identidade $x * y = y * x$.

(iii) Diremos que $e \in X$ é **elemento neutro**[51] da operação $*$ se para qualquer $x \in X$ ocorrer $e * x = x = x * e$. ¶

[51] Também chamado de **zero** ou **unidade** a depender do contexto.

Como você já deve saber, um elemento neutro de uma operação $*$, se existir, é único, o que permite o uso da expressão "o elemento neutro" da operação. Para aquecer os motores, convém destacar isso.

Lema 0.6.2. *Uma operação admite, no máximo, um único elemento neutro.*

Demonstração. Se $e, e' \in X$ são ambos elementos neutros da operação, então $e = e * e'$ por e' ser elemento neutro, enquanto $e * e' = e'$ por e ser elemento neutro. □

Definição 0.6.3. Diremos que $y \in X$ é um **$*$-inverso à direita** de x se valer $x * y = e$. Analogamente, y será dito um **$*$-inverso à esquerda** de x se ocorrer $y * x = e$. Se y for simultaneamente $*$-inverso à direita e à esquerda de x, diremos simplesmente que y é um **$*$-inverso**[52] de x. Naturalmente, o *prefixo* "$*$-" será abandonado sempre que o contexto permitir. ¶

Exercício 0.76 ($\star$)**.** Sejam X um conjunto e $*$ uma operação em X. Mostre que se $*$ é associativa e tem elemento neutro, então cada $x \in X$ admite, <u>no máximo</u>, um $*$-inverso. ■

Para quem gosta de colecionar terminologias, as próximas são um prato cheio:

- um **semigrupo** é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa;
- um **monóide** é um semigrupo com elemento neutro;
- um **grupo** é um monóide em que todo elemento tem um inverso;
- finalmente, um **grupo abeliano** é um grupo cuja operação é comutativa.

Observação 0.6.4. Tal qual se faz com ordens, quando se busca algum tipo de precisão exagerada, escreve-se algo como $(G, *, e)$ para indicar que $*$ é uma operação em G que tem e como elemento neutro, de modo que afirmações do tipo "$(G, *, e)$ *é um grupo abeliano*" abreviam a tediosa frase "$*\colon G \times G \to G$ é uma operação que faz de G um grupo comutativo cujo elemento neutro é e". △

Exemplo 0.6.5. As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ constituem exemplos elementares das estruturas definidas acima, embora isso não tenha sido sempre óbvio[53].

✓ $(\mathbb{N}, +, 0)$ é um monóide comutativo, mas não é um grupo: não há, por exemplo, $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n + 1 = 0$.

✓ $(\mathbb{Z}, +, 0)$ e $(\mathbb{Q}, +, 0)$ são grupos abelianos.

✓ $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ é um monóide comutativo, mas não é um grupo.

✓ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ é um grupo abeliano.

Naturalmente, tais proposições só podem ser justificadas rigorosamente num cenário em que se tenha uma *construção* ou, pelo menos, uma definição explícita dos conjuntos e operações envolvidos. Se for de seu interesse verificar essas coisas, confira as construções de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ na Subseção 0.4.1. ▲

[52] Ou oposto, simétrico, etc. Tudo depende do contexto.

[53] Historicamente, grupos de *permutações* foram os primeiros a dar as caras, entre as últimas décadas do século XVIII e as primeiras décadas do século XIX. Depois do aparecimento dessas estruturas, *percebeu-se* que entidades cotidianas compostas por *números* também constituíam *modelos* de grupos [8].

Praticamente todas as operações elementares consideradas ao longo do texto serão comutativas – a exceção mais marcante é a composição de funções, que em geral não será considerada do ponto de vista algébrico-estrutural. Apesar disso, no contexto que se aproxima, teremos que lidar com duas operações simultaneamente, que serão denotadas pelos símbolos $+$ e $\cdot$.

Em ambos os casos, as operações serão associativas, comutativas e dotadas de elemento neutro. No caso da operação $+$, o elemento neutro será denotado por 0, e o inverso de um elemento x, único em virtude do Lema 0.76, será denotado por $-x$ e chamado de **inverso aditivo** ou **simétrico**. Para a operação $\cdot$, o elemento neutro será denotado por 1, e o inverso de um elemento x, se existir, será denotado por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$, caso em que x será dito **invertível**[54].

Proposição 0.6.6. *Sejam $(G, \cdot, 1)$ um monóide e $x \in G$. Para $n \in \mathbb{N}$, defina $x^n \in G$ recursivamente, fazendo $x^0 := 1$ e $x^{n+1} := x^n \cdot x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se x admitir inverso, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$ defina ainda $x^{-n} := (x^{-1})^n$. Então, vale o seguinte:*

(i) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) $x^{mn} = (x^m)^n$ *para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) se x admite inverso, então as identidades anteriores valem para $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. O argumento é indutivo e depende das propriedades operatórias de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Por exemplo: para $m \in \mathbb{N}$ fixado, tem-se:

✓ $x^{m+0} = x^m = x^m \cdot 1 = x^m \cdot x^0$;

✓ se $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então
$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} := x^{(m+n)} \cdot x = (x^m \cdot x^n) \cdot x = x^m \cdot (x^n \cdot x) := x^m \cdot x^{n+1},$$
donde a validade do primeiro item segue por indução.

Para o segundo item, o pulo do gato é notar que
$$x^{m(n+1)} = x^{mn+m} = x^{mn} \cdot x^m = (x^m)^n \cdot x^m := (x^m)^{n+1}.$$

A parte final segue, dentre outras coisas, de se observar que $x^{-n} = (x^n)^{-1}$. Os detalhes ficam por sua conta. □

Exercício 0.77 ($^{\star}_{\star}$)**.** Complete a demonstração da proposição anterior. Dica: além do que já foi mencionado, pode ser útil observar que $x^{n+1} = x \cdot x^n$. ■

Observação 0.6.7. Será cada vez mais comum utilizar o mesmo símbolo com significados que variam de acordo com o contexto. Na proposição anterior, por exemplo, o símbolo "1" em "$(G, \cdot, 1)$" denota o elemento neutro da operação "$\cdot$" de G. Já em "$x^{n+1} := x^n \cdot x$", o expoente "$n + 1$" indica o sucessor de n em $\mathbb{N}$. Esta é a chamada *notação multiplicativa*, em que o *histórico* das iterações é registrado no expoente.

Alternativamente, quando a operação de G é denotada com o símbolo "$+$", seu elemento neutro é indicado por "0" (caso exista), enquanto o *histórico das iterações* é registrado à esquerda, como explicitado no próximo corolário – esta é a chamada *notação aditiva*. Note que, a seguir, o símbolo "0" em "$0x := 0$" também assume *dupla função*. △

Corolário 0.6.8. *Sejam $(G, +, 0)$ um grupo (abeliano) e $x \in G$. Para $n \in \mathbb{N}$, defina $nx \in G$ recursivamente, fazendo $0x := 0$ e $(n + 1)x := nx + x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, defina $(-n)x := n(-x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ valem as identidades $(m + n)x = mx + nx$ e $m(nx) = (mn)x$.*

[54] Como sempre, lembre-se: o verbo é "inverter" e não "inverser".

Anéis e corpos

Definição 0.6.9. Um **anel** consiste de um conjunto $A \neq \emptyset$ munido de duas operações, $+$ e $\cdot$, e elementos $0, 1 \in A$, onde

(i) $(A, +, 0)$ é um grupo abeliano, cuja operação $+$ é chamada de *adição*,

(ii) $(A, \cdot, 1)$ é um monóide comutativo, cuja operação $\cdot$ é chamada de *multiplicação*, e

(iii) as operações $+$ e $\cdot$ *comutam* entre si, i.e., para quaisquer $a, b, c \in A$ valem as identidades $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$. ¶

Costuma-se denotar o anel A como a *estrutura algébrica* $(A, +, \cdot, 0, 1)$. No entanto, quase sempre iremos nos referir simplesmente *ao anel* A, deixando as operações subentendidas no contexto.

Observação 0.6.10. A rigor, os anéis definidos acima deveriam ser chamados de *anéis comutativos com unidade*, dado que existem contextos que não exigem a comutatividade da multiplicação e tampouco a existência de elemento neutro multiplicativo. △

Exemplo 0.6.11. Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são anéis quando munidos das operações usuais, enquanto $\mathbb{N}$ não é anel, posto que a adição não define uma estrutura de grupo. ▲

Muitas propriedades operatórias com as quais estamos acostumados no cenário aritmético ainda são válidas no contexto de anéis[55].

Proposição 0.6.12. *Sejam A um anel e $a \in A$ um elemento qualquer. Então valem as seguintes identidades:*

(i) $0 \cdot a = 0$*;*

(ii) $-a = (-1) \cdot a$.

Demonstração. Tais identidades relacionando as operações $+$ e $\cdot$ decorrem diretamente da distributividade exigida na definição de anel. De fato,

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0) \Rightarrow 0 = (a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) = a \cdot 0,$$

ao passo que

$$a + ((-1) \cdot a) = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0,$$

donde a igualdade $(-1) \cdot a = -a$ segue da unicidade do *oposto aditivo* de a. □

Observação 0.6.13. Em particular, como o inverso de $-a$ é a, segue que

$$(-1) \cdot (-a) = -(-a) = a,$$

identidade que será utilizada daqui em diante sem menções especiais. △

[55] E aqui cabe uma ressalva, possivelmente óbvia, mas que ainda assim merece ser feita. O comportamento que se observa nos números do "dia a dia" não decorre dos axiomas utilizados para *formalizá-los*, pelo contrário: os axiomas postulados para formalizar os números são "bons" justamente por reproduzirem os *comportamentos* observados.

Ao longo do texto, usaremos simultaneamente a Proposição 0.6.6 e o Corolário 0.6.8: a primeira com respeito à multiplicação do anel, e o segundo com respeito à adição do anel. Assim, se A é um anel, $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$, então ma^n indica o que, intuitivamente, seria escrito como

$$\underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} + \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}} + \ldots + \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}}_{m \text{ vezes}},$$

com uma interpretação análoga para $m \in \mathbb{Z}$ e, se a for invertível, para $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 0.6.14. Daqui em diante, como de costume, "ab" também será usado para denotar "$a \cdot b$", o produto entre a e b num anel A. Como o tempo é curto, "$a - b$" abreviará a expressão "$a + (-b)$". △

Definição 0.6.15. Um anel A é chamado de **corpo** se $1 \neq 0$ e todo $a \in A \setminus \{0\}$ é invertível, i.e, se existir $b \in A \setminus \{0\}$ com $ab = 1$. ¶

Exemplo 0.6.16. O primeiro corpo com o qual nos deparamos *explicitamente* é $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais com suas operações usuais. A reta real $\mathbb{R}$, protagonista deste curso, também é um corpo. Estes não são os únicos corpos que existem: a Álgebra Comutativa é repleta de tais entidades. Porém, em contextos *introdutórios* de Análise, não costuma ser importante saber disso[56]. ▲

Proposição 0.6.17 (Cancelamento para multiplicação[57])**.** *Se A é corpo e $\alpha, x, y \in A$ são tais que $\alpha x = \alpha y$ com $\alpha \neq 0_A$, então $x = y$.*

Demonstração. Basta multiplicar α^{-1} dos dois lados da igualdade $\alpha x = \alpha y$. □

Antes de encerrar esta subseção, cabe uma ressalva acerca da divisibilidade por zero, cuja *polêmica* só se justifica pela falta de discussão adequada: não há lei universal ou *mandamento* vindo das colinas que proíba dividir por zero em absolutamente qualquer contexto – o ponto é que fazer isso em anéis é, na prática, inútil.

De fato, uma identidade do tipo $\frac{\alpha}{0} = \beta$ num anel A depende, implicitamente, de se admitir a existência de $z := \frac{1}{0} \in A$, i.e., um elemento $z \in A$ que satisfaz $0 \cdot z = 1$. Ora, como também deve ocorrer $0 \cdot z = 0$, resulta que $0 = 1$ e, consequentemente, $0 = x$ para todo $x \in A$, ou seja, $A = \{0\}$. Algebricamente isto não é crime: um conjunto dotado de um único elemento admite tanto uma adição quanto uma multiplicação que o tornam um anel (verifique?)*. O *problema* é que ao se modelar axiomaticamente os números naturais, inteiros, etc., *espera-se* que ocorra $0 \neq 1$ (vide o Lema 0.7.2).

0.6.1 Extras

(Adiável) morfismos entre anéis

Definição 0.6.18. Dados anéis A e B, uma função $f : A \to B$ é chamada de **morfismo** *de anéis* (ou *de corpos* quando ambos forem corpos) se

(i) $f(1_A) = 1_B$,

(ii) $f(a + a') = f(a) + f(a')$, e

(iii) $f(aa') = f(a)f(a')$. ¶

---

[56] Não se engane: a Análise é intrinsecamente dependente da Álgebra, embora a recíproca seja falsa – exceto pelo *Teorema* (não tão) *Fundamental da Álgebra*, que *ainda* é importante em *algumas áreas*.

[57] Ou "Lema da Academia": corpo é *domínio*. Trata-se de uma piadoca do Prof. Eduardo Tengan.

Acima, por preciosismo, os elementos neutros multiplicativos de A e B foram distinguidos como 1_A e 1_B, respectivamente. Porém, ainda mais precisão poderia ser dada às notações: note que em "$f(a+a') = f(a)+f(a')$", por exemplo o símbolo "$+$" em "$a+a$" indica a adição do anel A, enquanto o mesmo símbolo em "$f(a)+f(a')$" indica a adição em B. Analogamente, a ausência de símbolos operacionais na última cláusula indica as multiplicações em A e B, respectivamente.

Em certo sentido, um morfismo de anéis $f\colon A \to B$ permite que A *manifeste* informações de natureza algébrica em B por meio de f. Por exemplo, se $a \in A$ é tal que $a^2 = 1$ em A, então o mesmo deve ocorrer com $f(a)$ em B, i.e., $f(a)^2 = 1_B$: de fato, deve-se ter

$$1_B = f(1_A) = f(a^2) = f(a)f(a) = f(a)^2.$$

No presente contexto, um tipo muito particular de morfismo de anéis será fundamental:

Proposição 0.6.19. *Para todo anel A existe um único morfismo de anéis $\zeta_A\colon \mathbb{Z} \to A$.*

Demonstração. Fazendo $(G,+,0) := (A,+,0_A)$ e $x := 1_A$ no Corolário 0.6.8, resulta que a função $\zeta_A\colon \mathbb{Z} \to A$, dada por $\zeta_A(n) := n \cdot 1_A$ e $\zeta(-n) := -(n \cdot 1_A)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é um morfismo de anéis. Fica por sua conta verificar, por indução, que qualquer *outro* morfismo $\psi\colon \mathbb{Z} \to A$ deve ser tal que $\psi = \zeta_A$. □

Exercício 0.78 $\binom{\star}{\star}$**.** Complete a demonstração acima. Dica: deve-se ter $\psi(1) = 1_A = \zeta_A(1)$, $\psi(1+1) = 1_A + 1_A = \zeta_A(2)$, ... ■

Ao longo deste capítulo, fixados um anel A e um número inteiro $z \in \mathbb{Z}$, a notação z_A indicará a imagem de z pelo morfismo ζ_A da última proposição, a **interpretação** de z em A. Na prática,

$$z_A = \underbrace{1_A + \ldots + 1_A}_{z \text{ vezes}} \text{ se } z > 0, \text{ enquanto } z_A = \underbrace{-1_A + \ldots + (-1_A)}_{z \text{ vezes}} \text{ se } z < 0.$$

Exercício 0.79 $\binom{\star}{\star}$**.** Mostre que para $z \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$, o elemento $za \in A$ (como definido no Corolário 0.6.8) é tal que $za = z_A a$. Conclua que para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in \mathbb{Z}$ deve-se ter $m(a+b) = ma + mb$. ■

Exemplo 0.6.20. Para $A := \mathbb{Q}$, o morfismo $\zeta_A\colon \mathbb{Z} \to A$ é, meramente, a inclusão. ▲

Exemplo 0.6.21 (Matrizes)**.** Se você tiver familiaridade com *matrizes*, note que se A denota o *anel das matrizes de ordem* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (e coeficientes *reais*, por exemplo), então $\zeta_A\colon \mathbb{Z} \to A$ associa cada inteiro $z \in \mathbb{Z}$ à matriz diagonal $(z\delta_{ij})$. ▲

Exercício 0.80 $(\star)$**.** Seja $f\colon A \to B$ um morfismo de anéis.

a) Mostre que $f(0_A) = 0_B$.

b) Mostre que $f(ma) = mf(a)$ para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$.

c) Mostre que $f(-a) = -f(a)$ para qualquer $a \in A$.

d) Mostre que $f(a^m) = f(a)^m$ para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $a \in A$. ■

Os últimos comentários, frequentemente úteis, seguem destacados nos próximos exercícios.

Exercício 0.81 $(\star)$**.** Dado um anel A, mostre que $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ é um morfismo de anéis. ■

Exercício 0.82 $(\star)$**.** Mostre que a composição de morfismos de anéis é um morfismo de anéis. ■

Exercício 0.83 (Núcleo e injetividade, $\binom{\star}{\star}$)**.** Para um morfismo de anéis $f\colon A \to B$, chama-se de **núcleo** de f ao conjunto $\ker f := \{a \in A : f(a) = 0_B\}$.

a) Mostre que f é injetora se, e somente se, seu núcleo é *trivial*, i.e., se $\ker f = \{0_A\}$.

b) Mostre que se A e B são corpos, então f é injetora. ■

(Adiável) espaços vetoriais e transformações lineares

Se você já estudou Álgebra Linear ou, pelo menos, Geometria Analítica, já deve ter visto *espaços vetoriais*. Grosso modo, trata-se de um conjunto cujos elementos interpretamos como se fossem pontos/vetores *num espaço* em que algum sistema de coordenadas permite que façamos contas com esses pontos.

O exemplo clássico é $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, o conjunto das n-uplas de *números reais* – e Geometria Analítica consiste, essencialmente, em estudar os casos em que $n \leq 3$. Como tais n-uplas são da forma $(a_1, \ldots, a_n)$, com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, é *possível* tanto somá-las umas com as outras quanto multiplicá-las entre si. Formalmente, definem-se operações

$$\begin{aligned} (+)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) &\longmapsto (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} (\cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) &\longmapsto (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n) \end{aligned}$$

No entanto, embora as duas operações sejam razoáveis de um ponto de vista puramente algébrico, apenas a soma tem uma interpretação geométrica clara: a saber, a translação. Ao fazer a multiplicação com a regra acima, verificam-se comportamentos inesperados incompatíveis com a multiplicação usual[58]. Apesar disso, recupera-se alguma intuição geométrica se, em vez de multiplicar vetores com a segunda regra, multiplicarmos apenas *escalares* por vetores, fazendo $\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$. Ao considerar $\mathbb{R}^n$ com a soma $(+)$ e com essa multiplicação por escalares, tem-se um dos principais exemplos de *espaço vetorial*.

Definição 0.6.22. Fixado um corpo K, dizemos que um grupo abeliano $(V, +, 0)$ é um K-**espaço vetorial** se existir uma função

$$\begin{aligned} K \times V &\mapsto V \\ (k, v) &\mapsto kv \end{aligned}$$

chamada de *multiplicação* (ou *ação*), satisfazendo as seguintes condições:

(i) $1_K v = v$ para todo $v \in V$;

(ii) $(\alpha + \beta)v = (\alpha v) + (\beta v)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ e $v \in V$;

(iii) $k(u + v) = (ku) + (kv)$ para quaisquer $u, v \in V$ e $k \in K$. ¶

Em tal contexto, os elementos de V são chamados de *vetores*, enquanto os membros de K são xingados de *escalares*.

Após introduzirmos $\mathbb{R}$ como *um* corpo ordenado completo, as discussões acima servirão para entender $\mathbb{R}^n$ como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Naturalmente, como $\mathbb{Q}$ é corpo, os mesmos argumentos já podem ser usados para justificar que $\mathbb{Q}^n$ é $\mathbb{Q}$-espaço vetorial. De modo geral, K^n é K-espaço vetorial, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e corpo K. Na verdade, pode-se extrapolar mais.

Exemplo 0.6.23. Se X é um conjunto e K é um corpo, então o conjunto K^X das funções da forma $X \to K$ tem uma estrutura natural de K-espaço vetorial com as operações herdadas de K em cada "coordenada". Mais precisamente, para $f, g \in K^X$ e $\lambda \in K$, definem-se $f + g, \lambda \cdot g \in K^X$ por

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\lambda \cdot g)(x) := \lambda \cdot g(x)$$

para cada $x \in X$. Caso nunca tenha verificado que se trata de um espaço vetorial, faça isso $(\star)$. ▲

Espaços vetoriais aparecem com bastante frequência em cursos de Análise Real – embora geralmente sejam mantidos sob disfarce para turmas iniciantes. Aqui, os principais espaços vetoriais considerados serão o *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e o *espaço das funções contínuas de* $X \subseteq \mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, denotado por $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$, ambos intrinsecamente ligados a questões sobre a reta real. Para finalizar esta breve e bem-intencionada introdução aos espaços vetoriais, convém apresentar as funções que fazem o papel de *morfismos*:

Definição 0.6.24. Uma função $f\colon X \to Y$ entre K-espaços vetoriais X e Y é dita K-**linear** (ou **transformação** K-**linear**[59]) se for compatível com as operações de X e Y, i.e., se $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$ para quaisquer $\alpha \in K$ e $u, v \in X$. ¶

[58] Como $u \cdot v = (0, \ldots, 0)$ para $u, v \neq (0, \ldots, 0)$. Há outros problemas de natureza geométrica que não convêm tratar aqui, mas você pode conferir em https://math.stackexchange.com/questions/185888.

[59] E como de costume, o sufixo "K" é abandonado nas situações em que o corpo é claro pelo contexto.

Exercício 0.84 ($\star_\star$)**.** Mostre que os seguintes resultados para morfismos de anéis permanecem válidos para transformações lineares:

a) itens (a) e (c) do Exercício 0.80;

b) item (b) do Exercício 0.80, para $m \in K$;

c) os Exercícios 0.81 e 0.82;

d) item (a) do Exercício 0.83. ■

0.7 Corpos ordenados

0.7.0 Essencial

Corpos ordenados

Definição 0.7.0. Um corpo $\mathbb{K}$ munido de uma relação de ordem (estrita) total $<$ é chamado de **corpo ordenado** se $<$ for compatível com sua estrutura algébrica, i.e.,

($\mathrm{CO_i}$) $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$,

($\mathrm{CO_{ii}}$) $\forall a, b \in \mathbb{K} \quad a > 0_\mathbb{K}$ e $b > 0_\mathbb{K} \Rightarrow ab > 0_\mathbb{K}$. ¶

Exercício 0.85 (Caracterização alternativa via cones ($\star_\star$))**.** Dado um corpo $\mathbb{K}$, mostre que $\mathbb{K}$ admite uma ordem $<$ que torna $(\mathbb{K}, <)$ um corpo ordenado se, e somente se, existir um subconjunto $P \subseteq \mathbb{K}$ com $x + y, xy \in P$ sempre que $x, y \in P$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{K}$, ocorra um, e somente um, dos seguintes casos: $x = 0_\mathbb{K}$, $x \in P$ ou $-x \in P$. Dica: com a ordem em mãos, faça $P := \{x \in \mathbb{K} : x > 0_\mathbb{K}\}$ e note que $x < y$ se, e somente se, $y - x \in P$; com P em mãos, use o passo anterior para definir a ordem em $\mathbb{K}$ de modo adequado. ■

Exemplo 0.7.1. O corpo dos números racionais é um corpo ordenado com sua ordem usual. Caso não se lembre: basta definir $P := \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : ab > 0\right\}$, que satisfaz as condições do exercício anterior (verifique!)$^\star_\star$, de modo que

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\beta\delta} \in P \Leftrightarrow \beta\delta(\beta\gamma - \alpha\delta) > 0$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ com $\beta, \delta \neq 0$. Em particular, assumindo $\beta, \delta > 0$ como de costume, resulta que

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta < \beta\gamma,$$

e fica por sua conta testar alguns exemplos com números "de verdade". ▲

Lema 0.7.2 (Fundamental)**.** *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, então $0_\mathbb{K} < 1_\mathbb{K}$.*

Demonstração. O contrário daria $0_\mathbb{K} > 1_\mathbb{K}$, posto que a ordem é total e $\mathbb{K}$ é corpo. Logo, a condição ($\mathrm{CO_i}$), com $c := -1_\mathbb{K}$, acarretaria $-1_\mathbb{K} > 0_\mathbb{K}$ e, consequentemente, teria-se $0_\mathbb{K} > 1_\mathbb{K} = (-1_\mathbb{K})(-1_\mathbb{K}) > 0_\mathbb{K}$ em virtude da condição ($\mathrm{CO_{ii}}$), uma contradição. □

Para o que se discutirá a seguir, é recomendável saber o que é um morfismo de anéis[60] (cf. Subseção 0.6.1).

[60] Se preferir ignorar o conselho: pense que $\rho\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ é uma função que permite interpretar cada número racional q como um elemento de $\rho(q) \in \mathbb{K}$, de forma a respeitar as operações de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{K}$: assim, $\rho(q + q') = \rho(q) + \rho(q')$, etc.

Teorema 0.7.3. *Se $\mathbb{K}$ é corpo ordenado, então existe um único morfismo injetor de anéis $\rho\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$.*

Demonstração. Observe que o lema anterior garante que $n_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

- ✓ como $\mathbb{K}$ é corpo, tem-se $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$;
- ✓ supondo $n_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ para algum $n \geq 1$, tem-se $(n+1)_{\mathbb{K}} := n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, onde a última desigualdade decorre da condição $(\mathrm{CO_i})$.

Logo, $z_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ para todo $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Agora, se $\sigma\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ for *um* morfismo de anéis, então $\sigma|_{\mathbb{Z}}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ também é um morfismo de anéis, donde a Proposição 0.6.19 obriga que se tenha $\sigma(z) = z_{\mathbb{K}}$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, da identidade

$$\sigma\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a}\right) = \sigma(a) \cdot \sigma\left(\frac{1}{a}\right),$$

não é difícil concluir que $\sigma\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\sigma(a)}$ para todo $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e, por conseguinte,

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} := \left(\frac{m}{n}\right)_{\mathbb{K}}$$

deve valer para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Portanto, tudo se resume a observar que a regra acima define, de fato, um morfismo de anéis da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, que será injetor por ter *núcleo trivial.* □

Exercício 0.86 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Complete os detalhes. ■

Moralmente, o elemento $q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ descrito recursivamente na demonstração anterior *representa* ou *interpreta* o número racional $q \in \mathbb{Q}$. Para quem tem aversão à Álgebra ~~melhore!~~, pode-se pensar em $\mathbb{K}$ como um *ambiente virtual* no qual é possível *implementar* os números racionais: nesse sentido, a demonstração apenas descreve e justifica o algoritmo de implementação. Se ainda parecer abstrato demais: todo corpo ordenado contém uma *cópia* de $\mathbb{Q}$!

Definição 0.7.4. $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} := \{q_{\mathbb{K}} : q \in \mathbb{Q}\}$. ¶

Muitas propriedades operatórias corriqueiras dos números *reais* que introduziremos em breve são, na verdade, comuns a qualquer corpo ordenado. As mais *úteis* seguem listadas na próxima

Proposição 0.7.5. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x, y, z \in \mathbb{K}$ elementos quaisquer. Então:*

(i) $x > 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $-x < 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) *se* $x > 0_{\mathbb{K}}$ *e* $y < z$, *então* $xy < xz$;

(iii) *se* $x < 0_{\mathbb{K}}$ *e* $y < z$, *então* $xy > xz$;

(iv) $x > 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $x^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$;

(v) *se* $x \neq 0_{\mathbb{K}}$, *então* $x^2 > 0_{\mathbb{K}}$;

(vi) *se* $0_{\mathbb{K}} < x < y$, *então* $0_{\mathbb{K}} < y^{-1} < x^{-1}$.

Demonstração. Se $x > 0_{\mathbb{K}}$, então $0_{\mathbb{K}} = x - x > 0_{\mathbb{K}} - x = -x$ por conta da condição $(\mathrm{CO_i})$, i.e., $-x < 0_{\mathbb{K}}$. Analogamente mostra-se a recíproca. Os itens (ii) e (iii) seguem de $(\mathrm{CO_{ii}})$ ao se observar que $y < z$ equivale a $y - z < 0_{\mathbb{K}}$. Para o item (iv), note que se $x > 0_{\mathbb{K}}$ e $x^{-1} < 0_{\mathbb{K}}$, então pelo item anterior resultaria $-1_{\mathbb{K}} = (-x)x^{-1} > -x0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, contrariando o fato de que $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$; a recíproca segue da identidade $(x^{-1})^{-1} = x$. O quinto item decorre da condição $(\mathrm{CO_{ii}})$ para $x > 0_{\mathbb{K}}$; para $x < 0_{\mathbb{K}}$, o mesmo raciocínio dá $(-x)^2 > 0_{\mathbb{K}}$, enquanto $(-x)^2 = (-1_{\mathbb{K}})^2 x^2 = x^2$. O último é o mais divertido e, por tal razão, ficará por sua conta. □

Exercício 0.87 ($^{\star}_{\star}$)**.** Complete a demonstração anterior. Dica: para o item (vi), note que $x^{-1}y^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$; daí, use a condição ($\mathrm{CO}_{\mathrm{ii}}$). ■

Exercício 0.88 ($\star$)**.** Nas condições anteriores, mostre que se $a < c$ e $b < d$ para certos $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, então $a + b < c + d$. ■

Valor absoluto e a desigualdade triangular

Definição 0.7.6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. O **valor absoluto** em $\mathbb{K}$ é a função $|\cdot|_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que associa cada $x \in \mathbb{K}$ ao elemento $|x|_{\mathbb{K}} \coloneqq \max\{x, -x\}$. ¶

O valor absoluto constitui uma *maneira uniforme* de "medir" elementos de $\mathbb{K}$ por meio da *comparação* com os habitantes de seu **cone positivo**, i.e., do subconjunto $\mathbb{K}_{\geq 0} \coloneqq \{x \in \mathbb{K} : x \geq 0_{\mathbb{K}}\}$, posto que $|x|_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Essa "*maneira uniforme*" se refere, entre outras coisas, ao fato de que o valor absoluto é compatível tanto com a estrutura algébrica quanto com a ordem de $\mathbb{K}$, no seguinte sentido.

Proposição 0.7.7. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x, y \in \mathbb{K}$. Então:*

(i) $|x|_{\mathbb{K}} \geq 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) $|x|_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $x = 0_{\mathbb{K}}$;

(iii) $|xy|_{\mathbb{K}} = |x|_{\mathbb{K}}|y|_{\mathbb{K}}$;

(iv) $|x + y|_{\mathbb{K}} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$.

Demonstração. Os três primeiros itens ficam por sua conta ($^{\star}_{\star}$). Como a desigualdade (iv) acima, chamada de **desigualdade triangular**, será extremamente recorrente no texto, convém demonstrá-la aqui: como $-x \leq |x|_{\mathbb{K}}$ e $-y \leq |y|_{\mathbb{K}}$, tem-se $-(x + y) \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$; como também ocorre $x + y \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$, conclui-se que

$$|x + y|_{\mathbb{K}} = \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}.$$ □

Exercício 0.89 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para $x, y \in \mathbb{K}$, com $\mathbb{K}$ corpo ordenado, mostre que são equivalentes:

(i) $-y \leq x \leq y$;

(ii) $x \leq y$ e $-x \leq y$;

(iii) $|x|_{\mathbb{K}} \leq y$.

Conclua que $|x - y|_{\mathbb{K}} \leq z$ se, e somente se, $y - z \leq x \leq y + z$. ■

Observação 0.7.8. O exercício acima permanece válido ao trocarmos "$\leq$" por "$<$" (verifique!)*. △

Teorema 0.7.9 (Truque fundamental da Análise)**.** *Para α e β elementos de um corpo ordenado $\mathbb{K}$, são equivalentes:*

(i) $\alpha = \beta$;

(ii) $|\alpha - \beta|_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon \in \mathbb{K}$ *com* $\varepsilon > 0_{\mathbb{K}}$.

Demonstração. A direção (i) $\Rightarrow$ (ii) é clara. Para a recíproca, se ocorresse $\alpha \neq \beta$, teríamos $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$ e, consequentemente, $\beta - \alpha > 0_{\mathbb{K}}$ ou $\alpha - \beta > 0_{\mathbb{K}}$ (respectivamente), de modo que

$$|\alpha - \beta|_{\mathbb{K}} = \max\{\alpha - \beta, \beta - \alpha\} \coloneqq \varepsilon > 0_{\mathbb{K}},$$

provando o resultado pela contrapositiva. □

Exercício 0.90 ($^{\star}_{\star}$)**.** Considere $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x, y \in \mathbb{K}$ quaisquer.

a) Mostre que se $x > y > 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > y^2$.

b) Mostre que se $x < y < 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > y^2$.

c) Mostre que se $x > 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > x$ e, se $0_{\mathbb{K}} < x < 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 < x$. ■

0.7.1 Extras

Espaços vetoriais ordenados

Corpos não são as únicas estruturas algébricas que podem aparecer acompanhadas de uma ordem compatível. Um exemplo que será importante é o seguinte: fixados um corpo ordenado $\mathbb{K}$ e um conjunto X, diremos que uma função $f\colon X \to \mathbb{K}$ é **limitada** se existir $M \in \mathbb{K}$ com $M > 0_{\mathbb{K}}$ tal que $|f(x)|_{\mathbb{K}} \leq M$ para todo $x \in X$. Ao considerar $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ a coleção de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{K}$, obtém-se um legítimo $\mathbb{K}$-espaço vetorial[61] com as operações usuais para espaços de funções (cf. Exemplo 0.6.23):

- ✓ se $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, então $f + g \in \mathbb{K}$ pois, para $M, N \in \mathbb{K}_{>0}$ tais que $|f(x)|_{\mathbb{K}} \leq M$ e $|g(x)|_{\mathbb{K}} \leq N$ para todo $x \in X$, tem-se

$$|f(x) + g(x)|_{\mathbb{K}} \leq |f(x)|_{\mathbb{K}} + |g(x)|_{\mathbb{K}} \leq M + N;$$

- ✓ a função constante nula $\underline{0}\colon X \to \mathbb{K}$ que associa $\underline{0}(x) := 0_{\mathbb{K}}$ para todo x é, claramente, limitada;
- ✓ se $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então para $M \in \mathbb{K}_{>0}$ satisfazendo $|f(x)|_{\mathbb{K}} \leq M$ para todo x se verifica

$$|\lambda f(x)|_{\mathbb{K}} = |\lambda|_{\mathbb{K}} |f(x)|_{\mathbb{K}} \leq |\lambda|_{\mathbb{K}} M.$$

A rigor, os pontos acima apenas mostram que obtemos operações legítimas em $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ao restringir as operações usuais de $\mathbb{K}^X$ a funções limitadas. No entanto, como as condições operatórias necessárias para elevar $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ao patamar de espaço vetorial já são satisfeitas em $\mathbb{K}^X$, segue que $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ é, de fato, um espaço vetorial[62]. Mas não só isso: para $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, podemos declarar

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in X,$$

que se revela uma ordem (parcial) em $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ com as seguintes propriedades:

(i) $f \leq g \Rightarrow f + h \leq g + h$ para quaisquer $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$;

(ii) $f \leq g \Rightarrow rf \leq rg$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ e $r \in \mathbb{K}_{\geq 0}$.

Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V com uma ordem parcial $\leq$ satisfazendo condições análogas costuma ser chamado de **espaço vetorial ordenado**. É claro que assim como $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ é espaço vetorial ordenado, o próprio $\mathbb{K}^X$ também é: o uso de $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ como exemplo inicial foi apenas uma desculpa para mostrar valores absolutos em ação.

Exercício 0.91 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Por que a ordem em $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ não é total? ■

Observação 0.7.10 (Cuidado com a desigualdade estrita)**.** Por definição, escrever "$f < g$" para funções f e g em $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ (ou em $\mathbb{K}^X$) abrevia "$f \leq g$ e $f \neq g$". Portanto, trata-se uma afirmação que não é equivalente a "$f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$". Reflita. △

Corpos não-ordenáveis

Exercício 0.92 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se K é um corpo finito, então não existe ordem total $<$ sobre K segundo a qual $(K, <)$ seja um corpo ordenado. ■

O exercício acima mostra que existem corpos nos quais é *impossível* definir uma relação de ordem compatível com suas operações. Outro caso típico é $\mathbb{C}$, o **corpo dos números complexos**. Trata-se essencialmente do plano $\mathbb{R}^2$ com uma *multiplicação entre vetores* que torna $\mathbb{R}^2$ num corpo. Tipicamente, escreve-se $a + bi \in \mathbb{C}$ em vez de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, de modo que o produto entre dois elementos de $\mathbb{C}$ é feito de tal forma a valer $i^2 = -1$. Explicitamente:

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

O problema é que, se $\mathbb{C}$ admitisse uma ordem compatível com suas operações, deveria ocorrer $i^2 > 0$. No entanto, $i^2 = -1$, e a desigualdade $-1 < 0$ vale em qualquer corpo ordenado.

[61] No futuro, trataremos apenas do caso $\mathbb{K} := \mathbb{R}$. Assim, você pode assumir que $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ se preferir.

[62] A terminologia correta é "$\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ é subespaço vetorial de $\mathbb{K}^X$".

0.8 Supremos e ínfimos

0.8.0 Essencial

Definição e exemplos

Já temos quase todo o ferramental necessário para *entender* definição da reta real que será apresentada: $\mathbb{R}$ será definido como um corpo ordenado *completo*. É para discutir completude que precisamos voltar alguns passos e introduzir *supremos e ínfimos*.

Definição 0.8.0. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $p \in \mathbb{P}$, diremos que p é um **limitante superior** (ou **majorante**)[63] de A se $x \leq p$ ocorrer para todo $x \in A$. Adicionalmente, dizemos que p é o **supremo** de A se p é *o menor limitante superior* de A. Notação: $\sup A$ ou $\sup_{a \in A} a$. ¶

Observação 0.8.1. Não confunda sup com suc: o primeiro, que indica o supremo, é composto pelas letras **s**, **u**, **p**, enquanto o segundo, que indica o sucessor, é composto pelas letras **s**, **u**, **c**. △

Dualizando a definição de supremo (cf. Subseção 0.2.1), chega-se à noção de *ínfimo*.

Definição 0.8.2. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $p \in \mathbb{P}$, diremos que p é um **limitante inferior** (ou **minorante**)[64] de A se $p \leq x$ ocorrer para todo $x \in A$. Adicionalmente, dizemos que p é o **ínfimo** de A se p é *o maior limitante inferior* de A. Notação: $\inf A$ ou $\inf_{a \in A} a$. ¶

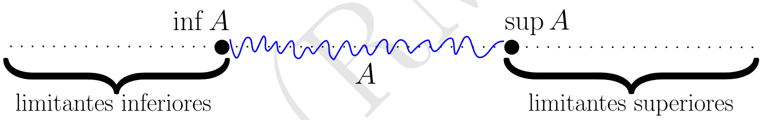


Figura 0.8: O supremo de um conjunto, quando existe, é o *melhor* limitante superior do conjunto. Analogamente, o ínfimo, se existir, é o *melhor* limitante inferior do conjunto.

Exemplo 0.8.3. Máximos são supremos, enquanto mínimos são ínfimos. De fato, se $A \subseteq \mathbb{P}$ tem máximo α, então:

- ✓ α é limitante superior de A por definição;
- ✓ se $\beta \in \mathbb{P}$ é algum outro limitante superior de A, então $a \leq \beta$ vale para todo $a \in A$ e, em particular, vale para α já que $\alpha \in A$.

O caso de mínimos é análogo. ▲

Exercício 0.93 ($\star$)**.** Para uma ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ e um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$, suponha que exista $\alpha := \min A$. Mostre que $\alpha = \inf A$. Dica: você pode imitar o argumento anterior ou apelar diretamente para "dualidade" (cf. Subseção 0.2.1). ■

Exemplo 0.8.4 (A recíproca é falsa!)**.** Em $\mathbb{Q}$, o subconjunto $A := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ não tem menor elemento: dado qualquer $q \in A$, tem-se $\frac{q}{2} \in A$ com $\frac{q}{2} < q$ (por quê?!)*, mostrando que nenhum dos elementos de A pode tomar para si o papel de ser *o menor*. O "problema", como o você já deve ter percebido, é a ausência de 0 em A: se ocorresse $0 \in A$, então 0 seria, trivialmente, o menor elemento de A. Este é o indício de que 0, embora não seja o menor elemento de A, é o seu ínfimo! ▲

[63] Ou ainda **cota superior**.
[64] Ou ainda **cota inferior**.

Formalmente, a afirmação final do exemplo anterior pode se justificar com as seguintes observações:

✓ 0 é limitante inferior de A pela definição de A;

✓ se $s \in \mathbb{Q}$ e $s \leq q$ para todo $q \in A$, i.e., se s é limitante inferior de A, então $s \leq 0$, posto que *o contrário levaria a concluir* que $0 < s$, donde seguiria $\frac{s}{2} \in A$ com $\frac{s}{2} < s$, contrariando a suposição de s limitar A inferiormente.

Note que só foi possível concluir "$s > 0$" pois a totalidade da ordem impõe a ocorrência de "$s < 0$", "$s = 0$" ou "$s > 0$", de modo que a negação das duas primeiras forçou a validade da última. Noutras palavras, mostrou-se que nenhum $s > 0$ pode limitar A inferiormente, de modo que pela tricotomia, limitantes inferiores de A devem estar *abaixo* de 0. O fenômeno vale em geral.

Teorema 0.8.5. *Fixadas uma ordem total $(\mathbb{T}, \leq)$, um subconjunto $A \subseteq \mathbb{T}$ e $\alpha \in \mathbb{T}$ um limitante inferior de A, são equivalentes:*

(i) $\alpha = \inf A$*;*

(ii) *para todo $\beta \in \mathbb{T}$, se ocorrer $\beta > \alpha$, então existe $a \in A$ com $a < \beta$.*

Demonstração. Se vale (i), então $\alpha = \max\{l \in \mathbb{T} : l \text{ é limitante inferior de } A\}$, donde segue que se $\beta > \alpha$, então β não pode ser limitante inferior de A, i.e., tem que existir $a \in A$ com $b \nleq a$, donde a tricotomia acarreta $a < b$, como desejado. Reciprocamente, se vale (ii), então nenhum $\beta > \alpha$ limita A inferiormente ou, equivalentemente (graças à tricotomia), todo β limitante inferior de A satisfaz $\beta \leq \alpha$, donde o restante segue por α ser limitante inferior de A (por hipótese). □

Exercício 0.94 $(\substack{\star\\\star})$**.** Dualize o teorema anterior, i.e., enuncie (e demonstre) a versão para supremos. Dica: explicitamente, "se α é limitante superior de A, então $\alpha = \sup A$ se, e somente se, para todo $\beta < \alpha$ existir $a \in A$ com $\beta < a$". ■

Supremos e ínfimos em corpos ordenados

Feita esta primeira apresentação, vamos nos ater ao caso em que os supremos e ínfimos são tomados em corpos ordenados. Para aquecer os motores:

Exercício 0.95 $(\star)$**.** Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, mostre que $0_{\mathbb{K}} = \inf\{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\}$. ■

É bem provável que sua solução para o exercício prove, na verdade, a identidade

$$k = \inf\{x \in \mathbb{K} : x > k\}$$

para qualquer $k \in \mathbb{K}$, o que está absolutamente correto. O ponto é que há mais coisas escondidas aí.

Definição 0.8.6. Para subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{K}$ e $x \in \mathbb{K}$, definimos:

(i) $A + B := \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$ e $A + x := \{a + x : a \in A\}$;

(ii) $AB := \{ab : a \in A \text{ e } b \in B\}$ e $xA := \{xa : a \in A\}$;

(iii) $-A := \{-a : a \in A\}$. ¶

Exercício 0.96 ($\star$)**.** Pratique!

a) Mostre que $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$, $A + \emptyset = \emptyset$ e $A \cdot \emptyset = \emptyset$.

b) Mostre que $\{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\} + k = \{x \in \mathbb{K} : x > k\}$ para qualquer $k \in \mathbb{K}$.

c) Mostre que $0_{\mathbb{K}}A = \{0_{\mathbb{K}}\}$ e $xyA = x(yA)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$.

d) Para $A \coloneqq \{x \in \mathbb{K} : |x|_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}\}$, mostre que $-A = A$.

e) Mostre que se $A, B \subseteq \mathbb{K}_{>0}$ (i.e., se $x \in A$ ou $x \in B$, então $x > 0_{\mathbb{K}}$), então $AB \subseteq \mathbb{K}_{>0}$. $\blacksquare$

Teorema 0.8.7. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{K}$ subconjuntos não-vazios e $r \in \mathbb{K}$. Supondo que todos os ínfimos e supremos abaixo existam, valem as seguintes afirmações:*

(i) *se $A \subseteq B$, então $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$;*

(ii) *se $r \geq 0$, então $\inf(rA) = r \inf A$ e $\sup(rA) = r \sup A$;*

(iii) *se $r \leq 0$, então $\inf(rA) = r \sup A$ e $\sup(rA) = r \inf A$;*

(iv) *se $x \geq 0$ para todo $x \in A \cup B$, então $\inf(AB) = \inf A \inf B$ e $\sup(AB) = \sup A \sup B$;*

(v) *$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.*

Demonstração. Como diria Jack...

(i) Note que se l é limitante inferior de B, então l também é limitante inferior de A (por quê?)*. Logo, se $\beta \coloneqq \inf B$, então $\beta \in \{L' : L' \text{ é limitante inferior de } A\} \coloneqq C$ e, por valer $\inf A \coloneqq \max C$, segue que $\beta \leq \inf A$.

(ii) Note que o resultado é automático para $r \coloneqq 0_{\mathbb{K}}$. Com $r > 0_{\mathbb{K}}$, e chamando $\alpha \coloneqq \sup A$, temos $x \leq \alpha$ para todo $x \in A$ (pois α limita A superiormente). Logo, se $y \in rA$, então $y = rx$ para algum $x \in A$, acarretando em $y = rx \leq r\alpha$, donde a arbitrariedade de y mostra que $r\alpha$ limita rA superiormente. Logo, $\sup(rA) \leq r\alpha$. Por outro lado, com $\beta \coloneqq \sup(rA)$ e tomando $x \in A$ qualquer, obtemos $rx \leq \beta$ e, por conseguinte, $x \leq \frac{\beta}{r}$, donde segue que $\sup A \leq \frac{\beta}{r}$. Logo, $r \sup A \leq \beta$.

(iii) Nada precisa ser feito para $r \coloneqq 0_{\mathbb{K}}$. Supondo $r < 0_{\mathbb{K}}$ e fazendo $\delta \coloneqq \sup A$, mostra-se (como no item anterior) que $r\delta$ é limitante inferior de rA e, por isso, $r\delta \leq \inf(rA)$. Analogamente, com $\varepsilon \coloneqq \inf(rA)$, mostra-se que $\frac{\varepsilon}{r}$ é limitante superior de A, acarretando $\sup A \leq \frac{\varepsilon}{r}$ e, consequentemente, $r \sup A \geq \varepsilon$.

(iv) Primeiro, observe que sob as condições dadas, $AB = \{0_{\mathbb{K}}\}$ se, e somente se, $A = \{0_{\mathbb{K}}\}$ ou $\mathbb{B} = \{0_{\mathbb{K}}\}$, casos em que as identidades são triviais. Assim, podemos assumir que ambos A e B contêm elementos maiores do que $0_{\mathbb{K}}$. Agora, chamando $\alpha \coloneqq \sup A$, $\beta \coloneqq \sup B$ e $\gamma \coloneqq \sup AB$, mostraremos que $\gamma \leq \alpha\beta$ e $\alpha\beta \leq \gamma$. A primeira desigualdade segue pois $x \leq \alpha$ e $y \leq \beta$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, e daí $xy \leq \alpha\beta$ em virtude da hipótese sobre os *sinais*. Para a segunda desigualdade:

- ✓ fixado $y \in B$ com $y > 0_{\mathbb{K}}$, temos $xy \leq \gamma$ para todo $x \in A$, o que assegura $x \leq \frac{\gamma}{y}$ e, consequentemente, $\alpha \leq \frac{\gamma}{y}$;
- ✓ dado que $0_{\mathbb{K}} < \alpha$ (por quê?!)*, resulta $y \leq \frac{\gamma}{\alpha}$ e, como isto vale para qualquer $y' \in B$ com $y' > 0_{\mathbb{K}}$, conclui-se que $\beta \leq \frac{\gamma}{\alpha}$ e, portanto, $\alpha\beta \leq \gamma$.

(v) Novamente, façamos $\alpha := \inf A$, $\beta := \inf B$ e $\gamma := \inf(A+B)$. Como $\alpha \leq x$ e $\beta \leq y$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, resulta $\alpha + \beta \leq x + y$ e, consequentemente, $\alpha + \beta \leq \gamma$. Para a desigualdade restante, observe que $x \leq \gamma - y$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, o que resulta em $\alpha \leq \gamma - y$ e, consequentemente, $\beta \leq \gamma - \alpha$. □

Exercício 0.97 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Complete a demonstração do teorema anterior. ■

A demonstração do teorema anterior foi simplificada por uma hipótese preguiçosa: a suposição de que os supremos e ínfimos considerados *sempre* existem. Sem ela, os enunciados ficariam um pouco mais complicados. Por exemplo, no caso de (ii), para o supremo, seria preferível escrever "se $\sup A$ existe, então rA tem supremo e $\sup(rA) = r \sup A$ para qualquer $r \geq 0$": neste caso, seria necessário observar que rA é limitado superiormente para daí provar que $r \sup A$ é o menor limitante superior de rA. Após reler com atenção a demonstração, você perceberá que, no fundo, foi isso o que provamos – então, na prática, nada se perdeu[65]. Tais ressalvas se aplicam também a (iii), (iv) e (v). O item (i), como veremos, é mais delicado, e só se resolve com a hipótese de *completude* (cf. Exercício 0.130).

0.8.1 Extras

Supremos e ínfimos em ordens parciais

Supremos e ínfimos não são exclusividade de ordens totais. Porém, a vida sem tricotomia é um pouco menos óbvia: sem a tricotomia, o Teorema 0.8.5 não se aplica, por exemplo. Ainda assim, tais animais estão em todo lugar.

Exemplo 0.8.8. Dado um conjunto X e subconjuntos $A, B \subseteq X$, existem $\sup\{A, B\}$ e $\inf\{A, B\}$ em $(\wp(X), \subseteq)$? Se sim, quem são? Vejamos:

(i) se existir, $\sup\{A, B\}$ deve limitar superiormente o conjunto $\{A, B\}$, acarretando $A, B \subseteq \sup\{A, B\}$ e, além disso, se C for um subconjunto de X com $A, B \subseteq C$, também deverá ocorrer $\sup\{A, B\} \subseteq C$ (o supremo de um conjunto é o seu *menor* limitante superior!);

(ii) analogamente, se existir $\inf\{A, B\}$, este deverá não apenas limitar inferiormente $\{A, B\}$ (i.e., $\inf\{A, B\} \subseteq A, B$), como também satisfazer $D \subseteq \inf\{A, B\}$ para qualquer subconjunto D de X com $D \subseteq A, B$ (o ínfimo de um conjunto é o seu *maior* limitante inferior!).

Parece familiar, não? Explicitamente, $\sup\{A, B\}$ deve ser o menor subconjunto de X a conter tanto A quanto B, e já conhecemos um subconjunto que faz isso: $A \cup B$! E, de fato, tem-se $\sup\{A, B\} = A \cup B$:

✓ $A \cup B$ limita $\{A, B\}$ superiormente, pois ocorre $A, B \subseteq A \cup B$;

✓ $A \cup B$ é o menor limitante superior de $\{A, B\}$, já que $A \cup B \subseteq C$ sempre que $A, B \subseteq C$.

Talvez você possa estar se perguntando: como é possível que as linhas de argumentação acima tenham provado a identidade "$\sup\{A, B\} = A \cup B$", dado que a expressão "$\sup\{A, B\}$" nem sequer apareceu? Resposta: as condições verificadas acima são a *definição de supremo* que, quando existe, é único; assim, ao mostrar que $A \cup B$ tem as propriedades que $\sup\{A, B\}$ deveria ter, conclui-se que $A \cup B$ *é* o supremo procurado. ▲

Exercício 0.98 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que $A \cap B = \inf\{A, B\}$ em $\wp(X)$. ■

Após a introdução de corpos completos na próxima seção, será prática comum tomar supremos e ínfimos apenas de subconjuntos não-vazios e limitados. No entanto, a definição não proíbe tais casos, o que traz a pergunta: o que seriam $\sup_{\mathbb{P}} \emptyset$ e $\inf_{\mathbb{P}} \emptyset$ numa ordem $(\mathbb{P}, \leq)$?

[65] Explicitamente: se $\sup A$ existe, então $rx \leq r \sup A$ para todo $x \in A$, mostrando que $r \sup A$ limita rA superiormente; agora, se $rx \leq \mu$ para todo $x \in A$, então $x \leq \frac{\mu}{r}$, donde segue que $\sup A \leq \frac{\mu}{r}$ e, por conseguinte, $r \sup A \leq \mu$, mostrando que $r \sup A$ é o menor limitante superior de rA. Faça adaptações análogas para os itens (iii), (iv) e (v)! $({}^{\star}_{\star\star})$.

Explicitamente, $\sup_{\mathbb{P}} \emptyset$ é o menor dos limitantes inferiores de $\emptyset$. Agora, leia com calma: como todo elemento de $\mathbb{P}$ é limitante superior de $\emptyset$ (por vacuidade!), segue que $\emptyset$ tem supremo em $\mathbb{P}$ se, e somente se, $\mathbb{P}$ tem mínimo e, neste caso, $\sup_{\mathbb{P}} \emptyset = \min \mathbb{P}$. Analogamente, $\emptyset$ tem ínfimo em $\mathbb{P}$ se, e somente se, $\mathbb{P}$ tem máximo, e vale $\inf_{\mathbb{P}} \emptyset = \max \mathbb{P}$. É por isso que em corpos ordenados, não existem $\sup \emptyset$ nem $\inf \emptyset$: corpos ordenados são ilimitados inferior e superiormente (verifique)$^{\star}_{\star}$ e, em particular, não têm máximo e nem mínimo.

(Importante) corpos estendidos e intervalos

Em contraponto ao que se observou acima, é formalmente lícito *acrescentar* pontos num corpo ordenado $\mathbb{K}$ que sirvam como *extremos*. De modo geral, dada uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$, é possível tomar elementos *artificiais*[66] distintos $p, q \notin \mathbb{P}$ e considerar sobre $\mathbb{P}' := \mathbb{P} \cup \{p, q\}$ uma ordem parcial $\preceq$ que estende $\leq$, declarando-se $p \preceq x$ e $x \preceq q$ para qualquer $x \in \mathbb{P}'$, e para $x, y \in \mathbb{P}$, $x \preceq y$ se, e somente se, $x \leq y$; em particular, obtém-se $p = \min \mathbb{P}'$ e $q = \max \mathbb{P}'$. Um *corpo estendido* é a ordem oriunda deste processo aplicado a um corpo ordenado $\mathbb{K}$.

Definição 0.8.9. Denota-se por $[-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$ o conjunto $\mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$, onde $-\infty, +\infty \notin \mathbb{K}$, com a ordem acima (com $p := -\infty$ e $q := +\infty$), que passa a ser chamado de **corpo estendido**[67]. ¶

Observação 0.8.10. No futuro, $\mathbb{R}$ e seus subcorpos serão os únicos corpos considerados, caso em que $[-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ será chamada de *reta estendida*. Então, se preferir, pode fingir que $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$.△

A escolha do símbolo "∞" para indicar os pontos artificiais acrescentados ao corpo $\mathbb{K}$ é arbitrária e segue apenas a prática comum. Dito isso, é importante ressaltar que, embora seja frequente se referir a tais pontos como "infinitos", seria mais correto xingá-los de *ilimitados*, posto que "infinito" costuma se referir à cardinalidade de conjuntos, enquanto "$-\infty$" e "$+\infty$" apenas denotam *extremos* artificiais numa ordem, algo bem mais específico.

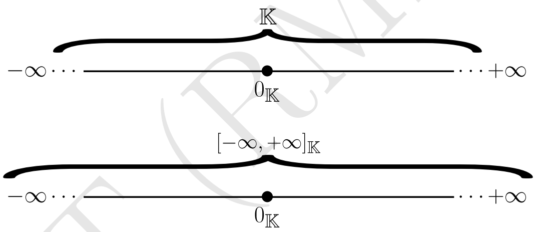


Figura 0.9: Se você já aceita o desenho de cima, por que não aceitar o desenho de baixo?

Definição 0.8.11 (Intervalos abertos)**.** Para $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$, os conjuntos

$$[-\infty, \beta)_{\mathbb{K}} := \{x \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}} : x < \beta\}, \tag{0.1}$$
$$(\alpha, +\infty]_{\mathbb{K}} := \{x \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}} : \alpha < x\} \tag{0.2}$$

serão chamados de *intervalos abertos fundamentais* de $[-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$. Diremos que $I \subseteq [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$ é um **intervalo aberto** se I for interseção finita de intervalos fundamentais. Quando $\mathbb{K}$ for claro pelo contexto, os subíndices serão abandonados[68]. ¶

Sim: a notação acima não está errada, e os intervalos foram "fechados" nos pontos *infinitos*. Você não podia fazer isso em Cálculo I pois ainda não tinha idade para entender certas coisas, como a liberdade poética proporcionada pela Teoria dos Conjuntos. Mas esta fase da sua vida passou. Agora, por exemplo, é completamente lícito considerar o intervalo $[-\infty, 5)_{\mathbb{Q}}$ em $[-\infty, +\infty]_{\mathbb{Q}}$, explicitamente composto pelo ponto $-\infty$ e todos os números racionais menores do que 5, ou seja:

$$[-\infty, 5)_{\mathbb{Q}} = \{-\infty\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}.$$

O mesmo se aplica à definição dada para intervalo aberto: secretamente, ela generaliza os intervalos abertos que você já conhecia.

[66] Ou virtuais, fictícios, etc. Não faz diferença, dado que tudo aqui é algum tipo de ficção.

[67] O mais comum é escrever $\overline{\mathbb{K}}$ em vez de $[-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$. No entanto, tal notação entraria em conflito com o *fecho topológico*, que será introduzido no próximo capítulo. Em tempo: isto nada tem a ver com as *extensões de corpos* da Teoria de Anéis.

[68] Em particular, após a introdução de $\mathbb{R}$, sempre consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposição 0.8.12. *Para $a, b \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$, o subconjunto*

$$(a, b)_{\mathbb{K}} := \{x \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}} : a < x < b\}$$

é um intervalo aberto inteiramente contido em $\mathbb{K}$, i.e., $(a, b)_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}$. Em particular, $\emptyset$, $\mathbb{K}$, (k, l), $(-\infty, k)_{\mathbb{K}}$ e $(k, +\infty)_{\mathbb{K}}$ são intervalos abertos contidos em $\mathbb{K}$, para quaisquer $k, l \in \mathbb{K}$.

Demonstração. A segunda parte segue da primeira ao se observar que $\emptyset = (a, b)_{\mathbb{K}}$ sempre que $b \leq a$ e $\mathbb{K} = (-\infty, +\infty)_{\mathbb{K}}$. Para a primeira parte, note que $(a, b)_{\mathbb{K}} = [-\infty, b)_{\mathbb{K}} \cap (a, +\infty]_{\mathbb{K}}$, ou seja, é uma interseção finita de intervalos abertos fundamentais e, por isso, é um intervalo aberto. A inclusão segue pois $-\infty \leq a, b$ e $a, b \leq +\infty$, de modo que se $a < x < b$, então $x \notin \{-\infty, +\infty\}$ e, portanto, $x \in \mathbb{K}$. □

Observação 0.8.13. Embora a proposta seja elevar $-\infty$ e $+\infty$ ao patamar de *pontos*, eles não são elementos do corpo e, por isso, não podem ser operados livremente com os outros *elementos* do corpo. Em particular, não escreva atrocidades do tipo "$-\infty + \infty = 0$". Lembre-se: o mundo não vai acabar se você pensar um pouco antes de escrever uma abobrinha. △

O motivo para tais *intervalos* serem chamados de *abertos* só será abordado no próximo capítulo. Com isso dito, há outra palavra que deveria ter chamado sua atenção: por que tais animais são chamados de intervalos? Afinal, o que *significa* ser um intervalo?

Definição 0.8.14. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Dizemos que um subconjunto $I \subseteq \mathbb{P}$ é um **intervalo** se para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{P}$ valer que $c \in I$ sempre que $a \leq c \leq b$ com $a, b \in I$. ¶

Figura 0.10: Na figura à esquerda, quaisquer dois pontos entre a e b estão na região destacada. Já na figura à direita, há pontos entre a e b que não estão na região destacada.

Exercício 0.99 $({}^{\star}_{\star})$**.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado.

a) Mostre que os intervalos abertos fundamentais de $[-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$ são intervalos.

b) Mostre que a interseção de intervalos (numa ordem qualquer) é um intervalo.

c) Conclua que os intervalos abertos contidos em $\mathbb{K}$ são intervalos de $\mathbb{K}$. ■

Em particular, após introduzirmos a reta real $\mathbb{R}$, poderemos classificar todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ e de $[-\infty, +\infty]$ que são intervalos, o que condiz com os exemplos usuais que você já conhece do Cálculo I. Um pouco mais adiante, em posse da noção de *conexidade*, veremos que os intervalos são, precisamente, os subconjuntos *conexos* de $\mathbb{R}$, como mandam o *bom senso* e a *intuição*. Isto sugere a pergunta: se, na prática, os intervalos serão exatamente os subconjuntos que já sabíamos ser intervalos, para que serve ter uma definição abstrata de intervalo? Resposta: para simplificar a vida, sempre[69]!

Exercício 0.100 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Supondo que $(\mathbb{T}, \leq)$ é ordem total, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, com $\alpha < \beta$. Mostre que se $I, J \subseteq \mathbb{T}$ são intervalos tais que $\alpha \in I$, $\beta \in J$ e $I \cap J = \emptyset$, então para quaisquer $x \in I$ e $y \in J$ deve ocorrer $x < y$. ■

Futuramente, o exercício acima será usado na demonstração da clássica "lei da conservação do sinal", uma importante propriedade dos limites de ~~redes~~ funções e sequências em $\mathbb{R}$.

0.9 Completude (no sentido de Dedekind)

0.9.0 Essencial

Cortes e corpos completos

É chegada a hora de apresentar a reta real: a ideia é definir $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado *sem buracos*. Evidentemente, isto pressupõe que saibamos o que é um *buraco*. No entanto, por questões estéticas e morais, buracos serão chamados de *cortes*.

[69] Como dizia o Prof. Alexandre "Sasha" Ananin, "a preguiça é a locomotiva do progresso".

Definição 0.9.0. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Um **corte** em $\mathbb{K}$ é um par (A, B) de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{K}$ tais que

(i) $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{K}$,

(ii) para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$ ocorre $a < b$. ¶

Exemplo 0.9.1. Ampliando o leque de *intervalos* apresentados na Definição 0.8.11 e na Proposição 0.8.12 (cf. Subseção 0.8.1), fixado um corpo ordenado $\mathbb{K}$ e elementos $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}}$, definimos

(i) $[\alpha, \beta]_{\mathbb{K}} := \{x \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}} : \alpha \leq x \leq \beta\}$,

(ii) $[\alpha, \beta)_{\mathbb{K}} := \{x \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}} : \alpha \leq x < \beta\}$ e

(iii) $(\alpha, \beta]_{\mathbb{K}} := \{x \in [-\infty, +\infty]_{\mathbb{K}} : \alpha < x \leq \beta\}$,

todos intervalos no sentido da Definição 0.8.14. Em particular, para $p \in \mathbb{K}$, ambos os intervalos $(-\infty, p]_{\mathbb{K}}$ e $[p, +\infty)_{\mathbb{K}}$ são subconjuntos de $\mathbb{K}$ (verifique?)* que induzem os chamados *cortes triviais*.

✓ (A, B) com $A := (-\infty, p]_{\mathbb{K}}$ e $B := (p, +\infty)_{\mathbb{K}}$, e

✓ (A, B) com $A := (-\infty, p)_{\mathbb{K}}$ e $B := [p, +\infty)_{\mathbb{K}}$.

Em geral, diremos que um corte (A, B) é **trivial** se existir $p \in \mathbb{K}$ tal que $p = \max A$ ou $p = \min B$. Desse modo, não é difícil perceber que (A, B) é trivial se, e somente se, (A, B) se enquadra em um dos casos acima para algum $p \in \mathbb{K}$ (verifique?)*. ▲

Como o exemplo acima sugere, os subconjuntos A e B na definição do corte (A, B) correspondem aos dois pedaços que se obteriam de $\mathbb{K}$ se este fosse *cortado* num determinado *ponto* de $\mathbb{K}$. É por essa razão que os cortes do exemplo anterior são triviais: para qualquer ponto $p \in \mathbb{K}$ fixado, é *trivial* cortar a reta em p, basta “inclinar a lâmina” para que p fique num dos lados do corte. A grande sacada vem agora: a depender do corpo considerado, podem haver “buracos” que permitam cortes sem extremos, i.e., não-triviais.

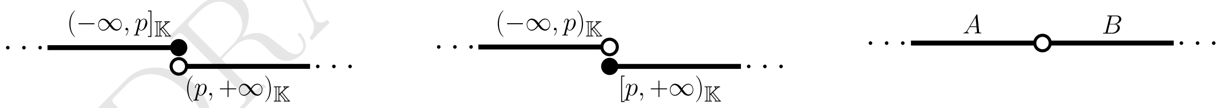


Figura 0.11: Um corte não-trivial é, na prática, um “buraco”.

Exemplo 0.9.2 (Fundamental: $\sqrt{2}$)**.** Fixado um corpo ordenado $\mathbb{K}$, os subconjuntos

$$A := \left\{x \in \mathbb{K} : x < 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } 0_{\mathbb{K}} \leq x^2 < 2_{\mathbb{K}}\right\} \text{ e } B := \left\{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}} \text{ e } x^2 \geq 2_{\mathbb{K}}\right\}$$

determinam um corte (A, B) em $\mathbb{K}$.

✓ $A \neq \emptyset$ pois $0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}} \in A$ e $B \neq \emptyset$ pois $2_{\mathbb{K}} \in B$.

✓ A tricotomia da ordem de $\mathbb{K}$ acarreta tanto $A \cap B = \emptyset$ quanto $A \cup B = \mathbb{K}$ (certo?)*.

✓ Finalmente, se $a \in A$ e $b \in B$, então $a < b$: isto é evidente para $a < 0_{\mathbb{K}}$; se ocorresse $a \geq 0_{\mathbb{K}}$ com $a \geq b$, teria-se $a^2 \geq ab \geq b^2 \geq 2_{\mathbb{K}}$, acarretando $a \notin A$.

Pergunta-se: tal corte é, necessariamente, induzido por algum $\alpha \in \mathbb{K}$? Como a discussão no Exemplo 0.9.1 sugere, isto equivale a perguntar sobre a existência de máximo para A ou mínimo para B.

Lema 0.9.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Se $\alpha = \sup A$ ou $\alpha = \min B$, então $\alpha^2 = 2_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração. A prova a seguir é adaptada de Rudin [20]. Essencialmente, a ideia é mostrar que se $\alpha^2 \neq 2_{\mathbb{K}}$, então α não pode ser supremo de A e tampouco pode ser mínimo de B. Algumas considerações iniciais:

(i) como $1_{\mathbb{K}} \in A$ e $b > 0_{\mathbb{K}}$ para todo $b \in B$, podemos supor $\alpha > 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) como a ordem de $\mathbb{K}$ é total, de $\alpha^2 \neq 2_{\mathbb{K}}$ restam apenas as alternativas $\alpha^2 < 2_{\mathbb{K}}$ ou $\alpha^2 > 2_{\mathbb{K}}$;

(iii) se ocorrer o primeiro caso, então $\alpha \notin B$ e, portanto, α não pode ser o mínimo de B;

(iv) se ocorrer o segundo caso, então $\alpha \in B$;

(v) se $\alpha \in B$ mas $\alpha \neq \min B$, então existe $b \in B$ com $b < \alpha$, donde segue que α não pode ser o supremo de A (certo?)*.

Desta argumentação preliminar, resulta que basta mostrar duas afirmações.

Afirmação 0. *Se $\alpha^2 < 2_{\mathbb{K}}$, então α não é supremo de A.*

Afirmação 1. *Se $\alpha^2 > 2_{\mathbb{K}}$, então α não é mínimo de B.*

⌜*Demonstração.* Para mostrar que α não é supremo de A, basta obter $\beta \in A$ tal que $\alpha < \beta$ (pois assim α não limitará A superiormente). Para mostrar que α não é mínimo de B, basta obter $\beta \in B$ com $\beta < \alpha$. Ora, escrevendo $\beta := \alpha + \gamma$, precisamos determinar γ de modo que se $\alpha \in A$, então $\gamma > 0$ com $\alpha + \gamma \in A$, e se $\alpha \in B$, então $\gamma < 0$ com $\alpha + \gamma \in B$. Como Rudin [20], faremos

$$\gamma := -\frac{\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}}}{\alpha + 2_{\mathbb{K}}}, \tag{!!}$$

o que assegura as identidades (verifique!)$^\star_\star$

$$\underbrace{\beta = \alpha - \frac{\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}}}{\alpha + 2_{\mathbb{K}}}}_{(A)} = \frac{2_{\mathbb{K}}\alpha + 2_{\mathbb{K}}}{\alpha + 2_{\mathbb{K}}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\beta^2 - 2_{\mathbb{K}} = \frac{2_{\mathbb{K}}(\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}})}{(\alpha + 2_{\mathbb{K}})^2}}_{(B)}.$$

Antes de prosseguir, observe que $\beta > 0_{\mathbb{K}}$ (o contrário daria $\alpha \leq -1_{\mathbb{K}}$). Agora, se $\alpha^2 < 2_{\mathbb{K}}$, então $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$, donde (A) acarreta $\beta > \alpha > 0_{\mathbb{K}}$, enquanto (B) garante $\beta \in A$. Por outro lado, se $\alpha^2 > 2_{\mathbb{K}}$, então $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, donde (A) acarreta $0_{\mathbb{K}} < \beta < \alpha$, enquanto (B) implica $\beta^2 > 2_{\mathbb{K}}$, i.e., $\beta \in B$. ⌟

Enfim, se $\alpha^2 \neq 2_{\mathbb{K}}$ e:

✗ $\alpha^2 < 2_{\mathbb{K}}$, então α não pode ser mínimo de B (por (iii)), enquanto a Afirmação 0 prova que α também não pode ser supremo de A;

✗ $\alpha^2 > 2_{\mathbb{K}}$, então α não pode ser mínimo de B pela Afirmação 1, enquanto (v) prova que α também não pode ser supremo de A. □

Em posse do lema acima, observe que se $\mathbb{K}$ for um corpo em que *não existe* $\alpha \in \mathbb{K}$ satisfazendo $\alpha^2 = 2_{\mathbb{K}}$, então o corte (A, B) não poderá ser trivial: por um lado, o lema impede que A admita máximo (por quê?)*; por outro lado, se $p \in B$ fosse mínimo de B, então o lema acarretaria $p^2 = 2_{\mathbb{K}}$. Em particular, $\mathbb{Q}$ tem buracos! ▲

Exercício 0.101 ($^\star_\star$). Mostre que não existe $q \in \mathbb{Q}$ com $q^2 = 2$. ■

Observação 0.9.4 (De onde Rudin tirou aquele γ?!)**.** Note que o *sinal* do γ procurado é dado, em ambos os casos, por $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}}$: no primeiro caso, temos $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$ e buscamos $\gamma > 0_{\mathbb{K}}$; no segundo caso, temos $\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ e buscamos $\gamma < 0_{\mathbb{K}}$. Assim, podemos fazer $\gamma := -(\alpha^2 - 2_{\mathbb{K}})x$ a fim de encontrar valores de x que determinem o *sinal* de $\beta^2 - 2_{\mathbb{K}}$ como desejado. Em outras palavras: caímos na resolução de uma inequação de segundo grau!

`[Fingindo que estamos em` $\mathbb{R}$`]`. Com γ dado como acima, podemos reescrever $\beta^2 - 2$ fazendo

$$\beta^2 - 2 = (\alpha^2 - 2)(1 - 2\alpha x + (\alpha^2 - 2)x^2),$$

e para se ter $\beta^2 - 2 = 0$, há dois valores possíveis para x, a saber $\frac{1}{\alpha+\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\alpha-\sqrt{2}}$ (verifique!)[70]. Logo, basta tomar x no intervalo *real* $\left(0, \frac{1}{\alpha+\sqrt{2}}\right)$ para obter tanto γ quanto β^2 nos *lugares corretos*, em qualquer um dos casos (certo?)*. Ora, como espera-se implementar tal solução num corpo ordenado qualquer, precisa-se escolher um x racional neste intervalo. Enfim, como $\sqrt{2} < 2$, basta tomar $x := \frac{1}{\alpha+2}$. Brilhante[71]. △

Reconhecido o problema, precisa-se encontrar uma solução: o que exigir sobre um corpo ordenado a fim de não ter buracos?

Exercício 0.102 ($^\star_{\star\star}$). Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e (A, B) um corte em $\mathbb{K}$. Para $\alpha \in \mathbb{K}$ qualquer, mostre que $\alpha = \sup A$ se, e somente se, $\alpha = \inf B$. Dica: primeiro, faça um desenho. ■

Observe então que se $\alpha = \sup A$ (ou $\alpha = \inf B$), então de duas uma: ou $\alpha = \max A$ ou $\alpha = \min B$. Com efeito, por valer $\mathbb{K} = A \cup B$, tem-se $\alpha \in A$ ou $\alpha \in B$, donde segue que $\alpha = \max A$ ou $\alpha = \min B$. Descobrimos assim como tampar os buracos de um corpo ordenado.

Definição 0.9.5. Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é chamado de **completo**[72] se todo subconjunto não-vazio $A \subseteq \mathbb{K}$ limitado superiormente tem supremo. ¶

Exercício 0.103 ($^\star_\star$). Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo e (A, B) é um corte em $\mathbb{K}$, então (A, B) é trivial. ■

A condição arquimediana

A completude também traz outra consequência fundamental que você provavelmente pensou que era "de graça".

Teorema 0.9.6. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado e completo, então o subconjunto*

$$\mathbb{N}_{\mathbb{K}} := \{n_{\mathbb{K}} : n \in \mathbb{N}\}$$

não é limitado superiormente, i.e., para qualquer $x \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_{\mathbb{K}}$.

[70] Por "Bhaskara" mesmo! ($^\star_\star$)

[71] Rudin é conhecido por apresentar argumentos fantásticos sem enfatizar suas possíveis motivações. Nesse aspecto, ele não é melhor que o Elon. Em todo caso, para aprofundar a discussão sobre o que pode ter motivado as escolha do "γ de Rudin", confira https://math.stackexchange.com/questions/141774.

[72] Ou *Dedekind-completo*.

Demonstração. Se $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ fosse limitado superiormente, existiria $\alpha := \sup \mathbb{N}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$. Como $\alpha - 1_{\mathbb{K}} < \alpha$, a minimalidade de α como limitante superior de $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ acarreta a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1_{\mathbb{K}} < n_{\mathbb{K}}$. Mas daí $\alpha < n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$, uma contradição. □

Definição 0.9.7. Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ satisfazendo a tese do teorema acima é chamado de (corpo) **arquimediano**. ¶

Que grande porcaria a propriedade arquimediana, não é mesmo? O conjunto dos naturais é ilimitado?! O que de útil poderia decorrer de uma afirmação tão *trivial*? Resposta:

Proposição 0.9.8. *Dado um corpo ordenado $\mathbb{K}$, são equivalentes:*

(i) ($\mathbb{K}$ é arquimediano) $\mathbb{N}_{\mathbb{K}}$ *não é limitado superiormente em* $\mathbb{K}$*;*

(ii) (ausência de "ilimitados") *não existe* $x \in \mathbb{K}$ *com* $n_{\mathbb{K}} < x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) (ausência de "infinitésimos") *não existe* $x \in \mathbb{K}$ *com* $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ *satisfazendo*

$$|x|_{\mathbb{K}} < \frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*;*

(iv) ($\mathbb{Q}$ é "denso" em $\mathbb{K}$) *se* $x, y \in \mathbb{K}$ *e* $x < y$*, então existe* $q \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x < q_{\mathbb{K}} < y$*.*

Demonstração. Os três primeiros itens são *claramente* equivalentes entre si (já sabé, né?)$\overset{\star}{\star}$. Agora, assumindo (iii), provaremos (iv). Como $x < y$, temos $y - x = |y - x|_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ e, por (iii), existe $n \in \mathbb{N}$ com

$$\frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} < y - x$$

e, por conseguinte, $1_{\mathbb{K}} + nx < ny$. Se conseguirmos "encaixar" um $m_{\mathbb{K}}$ entre nx e $1_{\mathbb{K}} + nx$, fazendo $nx < m_{\mathbb{K}} \leq 1_{\mathbb{K}} + nx$, então a desigualdade desejada seguirá com $q := \frac{m_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}}$. Supondo $0_{\mathbb{K}} < x$, a condição (iii) novamente assegura $s \in \mathbb{N}$ com

$$\frac{1_{\mathbb{K}}}{s_{\mathbb{K}}} < \frac{1_{\mathbb{K}}}{nx},$$

de modo que ao tomar $m := \min\left\{s \in \mathbb{N} : \frac{1_{\mathbb{K}}}{s_{\mathbb{K}}} < \frac{1_{\mathbb{K}}}{nx}\right\}$ resulta $m_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} \leq nx < m_{\mathbb{K}}$ e, consequentemente, $nx < m_{\mathbb{K}} \leq nx + 1_{\mathbb{K}}$. Os casos em que $x \leq 0_{\mathbb{K}}$ ficam por sua conta ($\overset{\star}{\star}$).

Finalmente, supondo (iv), mostraremos que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente: para $r \in \mathbb{K}$ com $r > 0_{\mathbb{K}}$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$0_{\mathbb{K}} < \frac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} \leq \frac{m_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}} < \frac{1_{\mathbb{K}}}{r},$$

donde segue que $r < n_{\mathbb{K}}$, como desejado. □

Exercício 0.104 ($\star$)**.** Sejam $\mathbb{K}$ um corpo arquimediano e $x, y \in \mathbb{K}$. Mostre que se $x, y > 0_{\mathbb{K}}$, então existe $N \in \mathbb{N}$ com $Nx > y$. ■

A proposição acima estabelece que para um corpo ordenado $\mathbb{K}$ fixado, são as cópias de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{K}$ que codificam a informação necessária para decidir se $\mathbb{K}$ é arquimediano ou não. Em particular, é de se esperar que o próprio corpo ordenado $\mathbb{Q}$ seja arquimediano, o que de fato ocorre: dados $p, q \in \mathbb{Q}$ distintos, não é difícil perceber que $s := p + r$ é tal que $p < s < q$, onde $r := \frac{|p-q|}{2}$. Em particular, por $\mathbb{Q}$ ter subconjuntos não-vazios, limitados superiormente e sem supremo, resulta que a condição arquimediana não garante completude.

0.9.1 Extras

Corpos não-arquimedianos

Definição 0.9.9. Dado um corpo ordenado $\mathbb{K}$, diremos que $x \in \mathbb{K}$ é **infinitesimal** em $\mathbb{K}$, ou é um **infinitésimo**, se para todo $n \in \mathbb{N}$ valer $|nx|_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$. Analogamente, $x \in \mathbb{K}$ é **ilimitado**[73] em $\mathbb{K}$ se para todo $n \in \mathbb{N}$ valer $n_{\mathbb{K}} < |x|_{\mathbb{K}}$. ¶

É claro que $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ é infinitesimal em $\mathbb{K}$. Por outro lado, $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ é infinitesimal em $\mathbb{K}$ se, e somente se, $\frac{1}{x}$ é ilimitado em $\mathbb{K}$. Logo, $\mathbb{K}$ tem infinitésimos não-nulos se, e somente se, $\mathbb{K}$ tem elementos ilimitados (verifique)*. Portanto, corpos arquimedianos são precisamente aqueles nos quais *não* existem infinitésimos não-nulos (certo?)*, o que sugere a pergunta: há algum corpo ordenado não-arquimediano? Sim.

Proposição 0.9.10. *Se $\mathbb{D}$ é um* domínio ordenado[74]*, então seu corpo de frações $\mathbb{K} := \operatorname{Frac}(\mathbb{D})$ admite uma relação de ordem total $\sqsubseteq$, compatível com a ordem de $\mathbb{D}$ e que faz de $\mathbb{K}$ um corpo ordenado.*

Demonstração. Basta encarar o Exemplo 0.7.1 até que ele te encare de volta. □

Portanto, a fim de obter um corpo ordenado dotado de infinitésimos, basta encontrar um domínio ordenado $\mathbb{D}$ dotado de um elemento ilimitado x, pois daí seu inverso multiplicativo x^{-1} (no corpo de frações $\mathbb{K}$) será um infinitésimo não-trivial.

Exercício 0.105 ($^{\star\star}_{\star\star}$)**.** Para um domínio ordenado $(\mathbb{D}, \preceq)$, considere o *anel de polinômios* na indeterminada x e coeficientes em $\mathbb{D}$, denotado por $\mathbb{D}[x]$.

a) Mostre que $\mathbb{D}[x]$ é um domínio legítimo. Dica: avalie o grau de um produto de polinômios.

b) Dados $p, q \in \mathbb{D}[x]$, declare $p \sqsubseteq q$ se, e somente se, $p = q$ ou o coeficiente líder de $q - p$ é (estritamente!) maior do que $0 \in \mathbb{D}$. Mostre que tal relação faz de $\mathbb{D}[x]$ um domínio ordenado em que x é ilimitado.

c) Conclua que $\mathbb{D}(x)$, o corpo de frações do domínio $\mathbb{D}[x]$, é um corpo ordenado que contém infinitésimos. ■

Análise "não-*standard*"

O Cálculo não nasceu em sua formulação atual. Originalmente, para definir a *derivada* de uma função "$f(x)$", por exemplo, considerava-se a expressão

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon},$$

com ε um infinitesimal não-nulo, a fim de obter daí sua *parte não-infinitesimal*. Por exemplo: com $f(x) := x^2$, tem-se

$$\frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon,$$

donde segue que a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 2x$. A questão é: como justificar isso? Afinal de contas, num certo momento do cálculo, trata-se $\varepsilon \neq 0$ para, posteriormente, agir como se $\varepsilon = 0$. Na época, as definições não se embasavam em entidades abstratas como conjuntos, mas sim em noções geométrico-físicas, de modo que tal tratamento "artificial" causava certo incômodo. O tempo passou e, aos poucos, infinitésimos foram substituídos por limites e a reta geométrica tornou-se um corpo arquimediano completo.

No entanto, nos anos 60 do século passado, técnicas avançadas de Lógica-Matemática foram utilizadas na elaboração do que passou a ser conhecido como *Nonstandard Analysis*, ou *Análise não-padrão*, que permite não apenas formalizar e, em certa medida, justificar a metodologia original, como também sistematizar métodos para transferir resultados da Análise não-padrão para a Análise usual – e vice-versa. Para saber mais, o texto de Keisler [9] é um excelente ponto de partida.

[73] Na Wikipedia, você encontrará tais números xingados como "*infinitos*", mas tal terminologia não é adequada, por confundir noções de ordem e cardinalidade.

[74] Cuja definição é a mesma dos corpos ordenados, trocando-se o corpo $\mathbb{K}$ por um *domínio* $\mathbb{D}$: um anel $\mathbb{D}$ é chamado de **domínio** se $0_{\mathbb{D}} \neq 1_{\mathbb{D}}$ e $xy \neq 0_{\mathbb{D}}$ sempre que $x, y \in \mathbb{D} \setminus \{0_{\mathbb{D}}\}$.

0.10 A reta real: definição, unicidade e cardinalidade

0.10.0 Essencial

A unicidade de corpos completos (a menos de isomorfismo)

Assim como o Axioma de Dedekind-Peano postulou a existência de $\mathbb{N}$, vamos postular a existência ~~da reta real~~ de um corpo ordenado completo.

Axioma da Preguiça Infinita. Existe um corpo ordenado completo.

O nome dado ao axioma acima explicita a sua motivação: preguiça. Enquanto, no caso de $\mathbb{N}$, precisa-se realmente postular sua existência[75], aqui, um corpo ordenado completo poderia ser efetivamente construído, mas o custo seria demasiado alto[76] em comparação aos benefícios: na prática, apenas transformaríamos o axioma acima num teorema e nunca mais voltaríamos a aproveitar a demonstração (neste texto).

Com isso dito, parece mais razoável dar atenção ao problema da *unicidade*: como já se mencionou anteriormente, a ideia é definir a reta real $\mathbb{R}$ como *um* corpo ordenado completo. Ora, admitindo-se que existe pelo menos um objeto dessa natureza, surge a pergunta: e se existir outro? Se duas construções distintas para corpos ordenados completos forem apresentadas, pode-se garantir que os corpos em questão são similares em algum sentido? Resposta: sim.

Observação 0.10.0. Para o que segue, convém revisar a noção de morfismo de anel na Subseção 0.6.1. △

Definição 0.10.1. Dados corpos ordenados $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$, diremos que uma função $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ é um **morfismo de corpos ordenados** se f for simultaneamente um morfismo de corpos e uma função crescente[77]. Diz-se que f é um **isomorfismo** de corpos ordenados se existir um morfismo de corpos ordenados $g\colon \mathbb{K}' \to \mathbb{K}$ com $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}'}$. Em tais condições, $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ são ditos **isomorfos**. ¶

Exercício 0.106 ($^{\star}_{\star}$). Mostre que se $\mathbb{K}$ é corpo ordenado, então existe um único morfismo de corpos ordenados $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$. ■

A definição de isomorfismo dada acima é bem mais geral e se aplica, naturalmente, a qualquer contexto no qual uma noção *apropriada* de morfismo estiver disponível. Em certo sentido, enquanto *morfismos* são meios pelos quais *objetos* de um mesmo *tipo* ou *categoria* se *comunicam*, *isomorfismos* são meios que permitem não apenas a troca de informação, mas também a fidelidade nas traduções de um lado para outro. Há, porém, um modo bem mais prático de verificar isomorfismos *no presente contexto*.

Exercício 0.107 ($^{\star}_{\star}$). Sejam A e B anéis e $f\colon A \to B$ um morfismo de anéis.

a) Mostre que se f é bijetora, então f é um isomorfismo de anéis. Dica: a inversa (que existe!) deve satisfazer as condições para ser morfismo.

b) Mostre que se A e B são corpos ordenados e f é bijeção crescente, então f é um isomorfismo de corpos ordenados. Dica: pelo item anterior, f já é um isomorfismo de corpos, enquanto o Exercício 0.71 permite concluir que f^{-1} também é crescente. ■

[75] Grosso modo, postular a existência de $\mathbb{N}$ equivale a assumir que existe ao menos um conjunto infinito. Detalhes mais precisos fogem do escopo do texto.

[76] Mesmo assim, uma breve discussão é apresentada na Subseção 0.10.1.

[77] Como definido no Exercício 0.71.

Observação 0.10.2. Apesar do que se estabeleceu acima, há outros contextos (ou *categorias*) nos quais a mera bijetividade não é suficiente para atestar o isomorfismo entre os objetos considerados. Por exemplo: na *categoria* dos *espaços topológicos*, que conheceremos superficialmente em breve, *funções contínuas* fazem o papel de morfismos, e nem toda função contínua bijetiva tem inversa contínua. △

Moralmente, dizer que A e B são anéis ou corpos (ordenados) isomorfos significa afirmar que embora A e B possam ter definições distintas, os *comportamentos* que suas estruturas modelam são os mesmos. O próximo exercício pode dar uma ideia mais clara sobre tudo isso no contexto específico dos corpos ordenados.

Exercício 0.108 ($\star$)**.** Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ corpos ordenados e $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ um isomorfismo de corpos ordenados.

a) Mostre que $S \subseteq \mathbb{K}$ é limitado superiormente se, e somente se, $f[S] \subseteq \mathbb{K}'$ é limitado superiormente.

b) Mostre que $S \subseteq \mathbb{K}$ admite um supremo $\alpha \in \mathbb{K}$ se, e somente se, $f[S]$ admite supremo $\beta \in \mathbb{K}'$. Além disso, tem-se $\beta = f(\alpha)$.

c) Mostre que a equação $x^2 - 2_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ tem solução em $\mathbb{K}$ se, e somente se, a equação $x^2 - 2_{\mathbb{K}'} = 0_{\mathbb{K}'}$ tem solução em $\mathbb{K}'$. ■

Pelo que se expôs acima, um modo legítimo de resolver o problema da "unicidade" seria mostrar que quaisquer dois corpos ordenados completos são isomorfos. É precisamente isso o que será feito a seguir.

Lema 0.10.3. *Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados e, para cada $a \in \mathbb{A}$, considere o subconjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} := \{q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} : q_{\mathbb{A}} < a\}$. Se $\mathbb{A}$ é arquimediano e $\mathbb{K}$ é completo, então a correspondência*

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{A} &\to \mathbb{K} \\ a &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{aligned} \tag{0.3}$$

é um morfismo de corpos ordenados.

É mais fácil entender a prova do que escrevê-la. A coisa toda é bastante visual, como ilustrado a seguir.

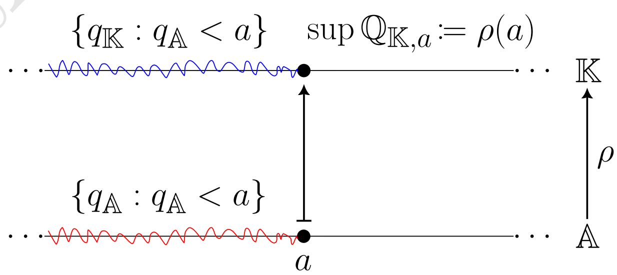


Figura 0.12: Sincronização de corpos.

Para cada $a \in \mathbb{A}$ considera-se, num primeiro momento, a coleção dos racionais (interpretados em $\mathbb{A}$) menores do que a. Ao *interpretar* tais números racionais em $\mathbb{K}$, obtém-se um conjunto limitado superiormente, que por sua vez admite um supremo em virtude da completude de $\mathbb{K}$. Finalmente, ρ apenas associa a ao supremo obtido no passo anterior. Mesmo que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ sejam *construídos* de maneiras distintas, o fato de ambos *interpretarem* cópias *densas* de $\mathbb{Q}$ permite sincronizá-los entre si.

Demonstração. É edificante observar, antes de qualquer outra coisa, que a *relação* ρ é, na verdade, uma função:

- ✓ a propriedade arquimediana de $\mathbb{A}$ permite mostrar tanto que $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \neq \emptyset$ quanto a existência de um limitante superior em $\mathbb{K}$ (certo?)*;
- ✓ logo, a completude de $\mathbb{K}$ assegura a existência de um único $\rho(a) \in \mathbb{K}$ digno de ser xingado como $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$.

Em outras palavras: ρ associa a cada $a \in \mathbb{A}$ um único $\rho(a) \in \mathbb{K}$, como esperado. Você pode cuidar dos detalhes omitidos acima[78]. Agora, mostraremos que ρ é um morfismo de corpos. Para isso, para quaisquer $a, b \in \mathbb{A}$, precisa-se verificar que

$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},1_{\mathbb{A}}} = 1_{\mathbb{K}}, \tag{0.4}$$
$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b} = \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} \tag{0.5}$$
$$\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},ab} = \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \cdot \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}. \tag{0.6}$$

Identidade (0.4). Ela vale mais geralmente, pois $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}} = q_{\mathbb{K}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Com efeito, $q_{\mathbb{K}}$ limita $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}}$ superiormente e, se $\beta < q_{\mathbb{K}}$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ com $r_{\mathbb{A}} < q_{\mathbb{A}}$ e $\beta < r_{\mathbb{K}}$, mostrando que $q_{\mathbb{K}}$ é, legitimamente, o menor limitante superior de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},q_{\mathbb{A}}}$.

Identidade (0.5). Tendo em vista o Teorema 0.8.7, basta mostrar que $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b} = \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$, cuja verificação será apresentada a seguir.

Por um lado, se $q := r + s$ com $r_{\mathbb{A}} < a$ e $s_{\mathbb{A}} < b$, então $r_{\mathbb{A}} + s_{\mathbb{A}} < a + b$, acarretando $q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b}$, donde a arbitrariedade de q implica em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a+b}$. Por outro lado, se $q_{\mathbb{A}} < a+b$, então $0_{\mathbb{A}} < a+b-q_{\mathbb{A}}$ e, pela condição arquimediana satisfeita por $\mathbb{A}$, existem $r, s \in \mathbb{Q}$ com $0_{\mathbb{A}} < r_{\mathbb{A}} < a+b-q_{\mathbb{A}}$ e $a - r_{\mathbb{A}} < s_{\mathbb{A}} < a$. Logo, $q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} < q_{\mathbb{A}} + r_{\mathbb{A}} - a < b$, com $q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$, $s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a}$, mostrando $q_{\mathbb{A}} = s_{\mathbb{A}} + q_{\mathbb{A}} - s_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} + \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$.

Identidade (0.6). A verificação das possíveis variações de *sinal* se reduz ao caso em que $a, b > 0_{\mathbb{A}}$, desde que se saiba da identidade auxiliar $\rho(-a) = -\rho(a)$. De fato, em posse disso, para $a < 0_{\mathbb{A}}$ e $b > 0_{\mathbb{A}}$, por exemplo, resulta

$$-\rho(ab) = \rho(-ab) = \rho((-a)b) = \rho(-a)\rho(b) = -\rho(a)\rho(b),$$

com um raciocínio análogo para o caso em que $a < 0_{\mathbb{A}}$ e $b < 0_{\mathbb{A}}$ (o caso em que $a = 0_{\mathbb{A}}$ ou $b = 0_{\mathbb{A}}$ é, em vista de (0.4), imediato). Tratemos então das identidades *suficientes*.

- ✓ Observe que se $x > 0_{\mathbb{A}}$, então o conjunto $D_x := \{q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K},x} : q > 0_{\mathbb{A}}\}$ é tal que $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},x} = \sup D_x$ (certo?)*. Daí, observando que $D_{ab} = D_a \cdot D_b$ (verifique!)$^{\star}_{\star}$, a identidade $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ para $a, b > 0_{\mathbb{A}}$ segue do Teorema 0.8.7.
- ✓ Para a identidade auxiliar $\rho(-a) = -\rho(a)$, note que não há perda de generalidade em supor $a \notin \mathbb{Q}_{\mathbb{A}}$ (por (0.4)). Daí, note que se $q_{\mathbb{A}} < a$, então $-a < -q_{\mathbb{A}}$, donde a definição de supremo acarreta $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a} \leq -q_{\mathbb{K}}$. Logo, $q_{\mathbb{K}} \leq -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$ e, novamente pela definição, $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \leq -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$. Se a desigualdade fosse estrita, a condição arquimediana garantiria um $p \in \mathbb{Q}$ com $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} < p_{\mathbb{K}} < -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, com $a > p_{\mathbb{A}}$ e, consequentemente, $-p_{\mathbb{A}} < -a$, o que implicaria em $-p_{\mathbb{K}} \leq \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, i.e., $-\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a} \leq p_{\mathbb{K}}$, uma contradição. Portanto, $\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} = -\sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},-a}$, como desejado.

[78] Será essencial lembrar que as correspondências $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$ definem (únicos) morfismos de corpos da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ e $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, respectivamente.

A enfadonha discussão acima mostra que ρ é um morfismo de corpos. Resta a ordem: se $a \leq b$ em $\mathbb{A}$, então $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b}$ e, novamente pelo Teorema 0.8.7, segue que $\rho(a) \leq \rho(b)$. □

Exercício 0.109 $(^{\star}_{\star})$**.** Complete os detalhes da demonstração acima. ■

Observação 0.10.4. Convém destacar que o morfismo de corpos ρ é *estritamente crescente*, no sentido da Observação 0.5.4. Há dois modos simples de se convencer disso:

(i) por $\mathbb{A}$ ser arquimediano, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $a < q_{\mathbb{A}} < b$ e

$$\rho(a) := \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} < q_{\mathbb{K}} < \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} := \rho(b);$$

(ii) alternativamente, como ρ é um morfismo de corpos, segue que ρ é injetor (item b) do Exercício 0.83). Logo, ρ deve ser estritamente crescente.

Embora o segundo argumento mostre que *qualquer* morfismo de corpos ordenados é estritamente crescente, o primeiro argumento será importante em breve, quando surgir o problema de estimar a cardinalidade de corpos arquimedianos. △

Teorema 0.10.5. *Se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ são corpos ordenados e completos, então o mapa $\rho\colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ definido em* (0.3) *é um isomorfismo de corpos ordenados.*

Demonstração. Desta vez o corpo $\mathbb{A}$ também é completo. Logo, o lema anterior permite conjurar *dois* morfismos de corpos ordenados, simultaneamente:

$$\begin{array}{rl} \rho\colon \mathbb{A} & \to \mathbb{K} \\ a & \mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} \sigma\colon \mathbb{K} & \to \mathbb{A} \\ k & \mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{A},k} \end{array}$$

Portanto, basta mostrar que um é o inverso do outro. Fixado $a \in \mathbb{A}$, tem-se

$$\sigma(\rho(a)) := \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)},$$

e busca-se verificar $\sigma(\rho(a)) = a$. Ora, dado $q_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$, tem-se $q_{\mathbb{K}} < \rho(a)$, e isso proíbe a ocorrência de $a \leq q_{\mathbb{A}}$: caso contrário, teria-se $\rho(a) \leq \rho(q_{\mathbb{A}}) = q_{\mathbb{K}}$. Agora, se $\beta \in \mathbb{A}$ é tal que $\beta < a$, então $\rho(\beta) < \rho(a)$, e existe $q \in \mathbb{Q}$ com $\rho(\beta) < q_{\mathbb{K}} < \rho(a)$, donde segue que $q_{\mathbb{A}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$ com $\beta < q_{\mathbb{A}}$. Portanto, a é o menor limitante superior de $\mathbb{Q}_{\mathbb{A},\rho(a)}$, i.e., $a = \sigma(\rho(a))$, como queríamos. Analogamente, mostra-se que $\rho(\sigma(k)) = k$ para todo $k \in \mathbb{K}$. □

Exercício 0.110 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados, com $\mathbb{A}$ arquimediano e $\mathbb{K}$ completo.

a) Mostre que se $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ é um morfismo de corpos ordenados, então $\varphi(q_{\mathbb{A}}) = q_{\mathbb{K}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Dica: as correspondências $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e $q \mapsto q_{\mathbb{K}}$ determinam os únicos morfismos de corpos ordenados da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ e $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$, respectivamente; por outro lado, a composição entre $q \mapsto q_{\mathbb{A}}$ e φ também determina um morfismo da forma $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$.

b) Conclua que existe um único morfismo de corpos ordenados da forma $\mathbb{A} \to \mathbb{K}$. Em particular, os isomorfismos do teorema anterior são únicos. ■

As discussões acima resolvem o problema da "unicidade" mencionado anteriormente, e tornam quase honesta a próxima

Definição 0.10.6. Denota-se por $\mathbb{R}$ *qualquer* corpo ordenado e completo, que passa a ser chamado de **conjunto dos números reais**, ou apenas de **reta real**. ¶

Devido a tal escolha de notação, perde o sentido carregar "$\mathbb{R}$" como subíndice para indicar em qual corpo ordenado e completo um determinado procedimento ocorre, postura que será aplicada também para o valor absoluto de um número real x, que será denotado por $|x|$ de agora em diante[79].

Além disso, em contextos algébricos ou *analíticos*, será inofensivo considerar como verdadeiras as inclusões próprias $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ embora, a rigor, existam apenas morfismos injetores que preservam as *estruturas algébricas e de ordem* subjacentes. Se, por um lado, isso soa demasiado arbitrário, por outro, a unicidade assegura que não haveria outra forma de *enxergar* um dentro do outro. É por isso que, na prática, tanto $\mathbb{N}$, quanto $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são *substituídos* por suas cópias em $\mathbb{R}$.

A cardinalidade da reta real

Um dos fatos mais marcantes nos desenvolvimentos iniciais da Teoria dos Conjuntos e no estudo de coleções infinitas foi a *constatação* de que o *tipo de infinito* de $\mathbb{R}$ é *estritamente maior* do que o *tipo de infinito* de $\mathbb{N}$, i.e., $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ ou $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ (lembre-se da Observação 0.4.24!). Explicitamente, isto significa que existe função injetora $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mas não existe função bijetora entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Com o jargão típico dos textos básicos de Análise, isto se reduz a dizer que "$\mathbb{R}$ é não-enumerável".

A primeira parte é fácil: como $\mathbb{N}$ *é subconjunto* de $\mathbb{R}$, a inclusão $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ determina uma função automaticamente injetora. A parte não-trivial é mostrar que não pode existir função injetora $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$ ou, equivalentemente (cf. Teorema 0.4.10), não existe função sobrejetora $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Há várias formas de demonstrar a não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Um argumento bastante comum (conhecido como "diagonalização de Cantor") consiste em tomar *qualquer* função $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e definir um número $r := r_0, r_1 r_2 r_3 \ldots$ exigindo-se apenas que o número $r_n \in \{0, \ldots, 9\} \setminus \{a_{n,n}, 1, 9\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\varphi(n) := a_{n,0}, a_{n,1} a_{n,2} \ldots a_{n,n} \ldots$$

indica a expansão de $\varphi(n)$ em *base* 10. Como $r \notin \operatorname{im}(\varphi)$, segue que φ não pode ser sobrejetora.

Evidentemente, tal argumento depende de um estudo um pouco mais cuidadoso de *séries* e *representações* decimais, o que atrasaria a *formalização* do resultado no texto. Uma alternativa popular por aqui [10, 11], por exemplo, é apelar para a *compacidade* dos *intervalos fechados e limitados* de $\mathbb{R}$, disfarçada como a *propriedade dos intervalos encaixantes*. Porém, vejo como problemático se valer de propriedades *topológicas* da reta real sem avisar do que se trata, apenas para apresentar um argumento com gosto geométrico.

Aqui, a abordagem adotada será outra: mostraremos que $\mathbb{R}$ está em bijeção com $\wp(\mathbb{N})$, o conjunto das partes de $\mathbb{N}$. Daí, a não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$ seguirá do Teorema de Cantor (cf. Teorema 0.4.6): como não existe sobrejeção $\mathbb{N} \to \wp(\mathbb{N})$, tampouco pode existir sobrejeção $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, já que $\wp(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$. Como *punição* pela transgressão imperdoável de não seguir o Elon, *ganharemos* de brinde a existência de bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (cf. Subseção 0.10.1).

[79] O contexto deixará claro quando "$|x|$" representa o valor absoluto do *número real* x ou a cardinalidade do *conjunto* x. Pelo menos neste texto, conjuntos não são denotados por letras minúsculas, o que pode ajudar a acalmar os ânimos

Exercício 0.111 $(\substack{\star\\\star})$**.** Mostre que $\wp(\mathbb{Q}) \approx \wp(\mathbb{N})$. Dica: Exercício 0.57 + $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$. ■

Lema 0.10.7. *Se $\mathbb{A}$ é corpo arquimediano, então $|\mathbb{A}| \leq |\wp(\mathbb{N})|$, i.e., existe função injetora $\mathbb{A} \to \wp(\mathbb{N})$.*

Demonstração. A correspondência

$$\begin{aligned} \partial \colon \mathbb{A} &\to \wp(\mathbb{Q}) \\ a &\mapsto \{q \in \mathbb{Q} : q_{\mathbb{A}} < a\} \end{aligned}$$

é uma injeção: se $a, b \in \mathbb{A}$ são distintos, então ocorre $a < b$ ou $b < a$, donde a condição arquimediana assegura a existência de $q \in \mathbb{Q}$ *entre* a e b, acarretando em $\partial(a) \neq \partial(b)$. Portanto, existe função injetora $\mathbb{A} \to \wp(\mathbb{Q})$ e, pelo exercício anterior, existe injeção $\mathbb{A} \to \wp(\mathbb{N})$, como desejado. □

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano (por ser completo), segue que $|\mathbb{R}| \leq |\wp(\mathbb{N})|$. O próximo passo é mostrar a desigualdade oposta, i.e., $|\wp(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$, pois daí o Teorema 0.1.10 (Cantor-Bernstein) garantirá $|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})|$. Embora este lado da desigualdade possa ser demonstrado de modo mais rápido por meio de *séries*, é possível maquiar os argumentos por meio de supremos de ~~séries~~ *somas* finitas. A seguir, assume-se que você tenha familiaridade com a notação de somatório ($\sum$). Se não for o caso, confira a Subseção 0.10.1.

Lema 0.10.8. *Se $0 < a < 1$, então $\sup\left\{\sum_{n \leq m} a^n : m \in \mathbb{N}\right\} = \frac{1}{1-a}$.*

Demonstração. Por indução, verifica-se que $a^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$: $a^0 = 1$, $a^1 := a > 0$ e, se $a^n > 0$, então $a^{n+1} := a \cdot a^n > 0$ pela Proposição 0.7.5. Por sua vez,

$$\sum_{n \leq m} a^n := \sum_{n=0}^{m} a^n = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$ (verifique!)$\overset{\star}{\star}$. Logo, pela primeira parte, $S := \{\sum_{n \leq m} a^n : m \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente por $\frac{1}{1-a}$ (por quê?!)*, donde a completude de $\mathbb{R}$ garante que existe $s \in \mathbb{R}$ com $s = \sup S$. Para finalizar, o Teorema 0.8.7 se aplica e permite fazer

$$as = a \sup S = \sup aS = \underbrace{\sup\{ay : y \in S\} = \sup\{y - 1 : y \in S\}}_{(\text{por quê?!})\overset{\star}{\star}} = \sup(S - 1) = s - 1,$$

acarretando $s = \frac{1}{1-a}$. □

Exercício 0.112 $(\star)$**.** Mostre que $\sup\left\{\sum_{n \leq m} \frac{1}{10^n} : m \in \mathbb{N}\right\} = \frac{10}{9}$. ■

Lema 0.10.9. *Para cada $f \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, existe o número real $\psi(f) \in \mathbb{R}$ dado por*

$$\psi(f) := \sup\left\{\sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Além disso, ao denotar por $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções da forma $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$, a correspondência $\psi \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ é injetora.

Demonstração. Fixada $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a ideia é usar a completude de $\mathbb{R}$ para garantir a existência de $\psi(f)$. Para tanto, é suficiente mostrar que o conjunto

$$S(f) := \left\{ \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

é não-vazio e limitado superiormente: obviamente, tem-se $S(f) \neq \emptyset$; para verificar a limitação, observe que $0 \leq f(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue que

$$\frac{1}{10^n} f(n) \leq \frac{1}{10^n} \Rightarrow \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} \leq \sum_{n \leq m} \frac{1}{10^n} \leq \frac{10}{9},$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$.

Isso mostrou que $S(f) \neq \emptyset$ é limitado superiormente para cada $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Consequentemente, a correspondência $\psi \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ está bem definida, pois o supremo de $S(f)$ é único para cada $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Resta apenas verificar a injetividade de ψ.

Para $p \in \mathbb{N}$ e $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ fixados, mostraremos que

$$\psi_p(f) := \sup \left\{ \sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^{n+p}} : m \in \mathbb{N} \right\} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{p-1}}. \tag{0.7}$$

De fato, já que $f(j) \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pode-se fazer

$$\sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^{n+p}} = \frac{1}{10^p} \sum_{n \leq m} \frac{f(n+p)}{10^n} \leq \frac{1}{10^p} \sum_{n \leq m} \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^p} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{p-1}},$$

donde a desigualdade (0.7) segue.

O último ingrediente da prova consiste em observar que

$$\psi(f) = \sum_{n \leq m} \frac{f(n)}{10^n} + \psi_{m+1}(f) \tag{0.8}$$

para qualquer $m \in \mathbb{N}$, o que segue do Teorema 0.8.7 (por quê?)*.

Enfim, para $g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ com $f \neq g$, existe $m := \min\{j \in \mathbb{N} : f(j) \neq g(j)\}$ e, por falta de opções, não há perda de generalidade em supor $f(m) = 0$ e $g(m) = 1$. Segue então de (0.8), bem como da minimalidade de m, que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(f) = r + \psi_{m+1}(f) \text{ e } \psi(g) = r + \frac{1}{10^m} + \psi_{m+1}(g).$$

Por (0.7), finalmente, obtém-se

$$\begin{aligned} \psi(g) - \psi(f) &= \frac{1}{10^m} + \psi_{m+1}(g) - \psi_{m+1}(f) \geq \frac{1}{10^m} + 0 - \psi_{m+1}(f) \geq \\ &\geq \frac{1}{10^m} - \frac{1}{9 \cdot 10^m} = \frac{8}{9 \cdot 10^m} > 0, \end{aligned}$$

mostrando que $\psi(f) \neq \psi(g)$. □

Secretamente, a prova acima consiste apenas em tomar sequências infinitas de 0's e 1's e interpretá-las como números reais por meio da expansão decimal. Assim, a sequência constante $(1, \ldots, 1, \ldots)$, por exemplo, se torna o número real que, na rua[80], xingaríamos de $1{,}1111\ldots$

Corolário 0.10.10. $\mathbb{R}$ *é não-enumerável.*

Demonstração. Pelo Exercício 0.56 temos $|\wp(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$. Logo, mostrou-se que $|\wp(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$. Como já tínhamos $|\mathbb{R}| \leq |\wp(\mathbb{N})|$, a igualdade $|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})|$ segue em virtude do Teorema de Cantor-Bernstein. Por fim, como $\wp(\mathbb{N})$ é não-enumerável pelo Teorema 0.4.6 (de Cantor), o resultado segue. $\square$

Exercício 0.113 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Diz-se que $r \in \mathbb{R}$ é **transcendente** se não existe polinômio <u>não-nulo</u> $p \in \mathbb{Q}[x]$ com $p(r) = 0$. Mostre que o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável. Em particular, conclua que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o conjunto dos **números irracionais**, é não-enumerável. $\blacksquare$

0.10.1 Extras

Somatórios e produtórios

A seguir, $\operatorname{seq}(\mathbb{R})$ denota a coleção das **sequências finitas** de números reais, i.e., $s \in \operatorname{seq}(\mathbb{R})$ se, e somente se, s é uma função da forma $\mathbb{N}_{<n} \to \mathbb{R}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Em particular, note que $\emptyset \in \operatorname{seq}(\mathbb{R})$. Para facilitar as notações, vamos escrever $(f_i : i \leq n)$ para indicar a sequência finita $f \colon \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{R}$ que a cada $i \leq n$ associa f_i, enquanto $(g_i : i < n)$ indica uma função real g cujo domínio é $\mathbb{N}_{<n}$.

Definição 0.10.11 (Operadores Σ e Π)**.** Definem-se $\sum \colon \operatorname{seq}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e $\prod \colon \operatorname{seq}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

(i) $\sum \emptyset := 0$ e $\prod \emptyset := 1$;

(ii) $\sum (f_i : i \leq n) := f_n + \sum (f_i : i < n)$ e $\prod (f_i : i \leq n) := f_n \cdot \prod (f_i : i < n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $f := (f_i : i \leq n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. ¶

É comum que o primeiro contato com as *definições* acima cause desconforto. Porém, a coisa é bastante simples, e consiste tão somente de um algoritmo de repetição. No caso de Σ, por exemplo, para se $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum \emptyset &:= 0;\\
\sum (x_0) &:= \sum \emptyset + x_0 = 0 + x_0;\\
\sum (x_0, x_1) &:= \sum (x_0) + x_1 = x_0 + x_1;\\
\sum (x_0, x_1, x_2) &:= \sum (x_0, x_1) + x_2 = (x_0 + x_1) + x_2;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Intuitivamente, $\sum (x_i : i \leq n)$ expressa aquilo que se escreveria como $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Isto sugere notações bem mais práticas e *maleáveis* do que as anteriores.

Definição 0.10.12. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f := (f_i : i \leq n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(i) Tanto $\displaystyle\sum_{i \leq n} f_i$ quanto $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\sum (f_i : i \leq n)$.

(ii) Tanto $\displaystyle\prod_{i \leq n} f_i$ quanto $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\prod (f_i : i \leq n)$. ¶

A partir dessas definições, é relativamente simples adaptá-las a fim de dar sentido formal a variações típicas de *somatórios* e *produtórios*, como os listados a seguir:

[80] Talvez você se surpreenda ao efetuar o cálculo "$10 \div 9$", em sua calculadora, por exemplo.

(i) $\displaystyle\sum_{i=j}^{m} f_i$; (ii) $\displaystyle\prod_{i<m} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$; (iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \sum_{j+k=i} a_j b_k c_i$

(iv) $\displaystyle\prod_{x\in X} h(x)$ para um conjunto finito X e uma função $h\colon X \to \mathbb{R}$;

(v) $\sum F$ para um subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{R}$;

(vi) ...

Você provavelmente já tem familiaridade com esse tipo de notação e sabe como operá-las no dia a dia. Ainda assim, quando alguma propriedade for usada sem maiores explicações, fica o convite para que você a demonstre – são bons exercícios de indução.

Construções da reta real

Tipicamente, ao encontrar algum tipo de objeto matemático *incompleto* num sentido específico, a coleção das testemunhas da incompleteza/incompletude esconde um modo para completar o que faltava. Foi assim com $\mathbb{Z}$ e com $\mathbb{Q}$. Também é assim com $\mathbb{R}$. Há três modos clássicos para construir um corpo ordenado completo.

✓ *Cortes de Dedekind.* Considera-se a família

$$\mathcal{C} := \{(A, B) \in \wp(\mathbb{Q}) \times \wp(\mathbb{Q}) : (A, B) \text{ é corte de } \mathbb{Q} \text{ e } A \text{ não tem máximo}\},$$

conjunto que é munido de uma estrutura de corpo ordenado completo. A vantagem desta construção está na completude: como a ordem de $\mathcal{C}$ é, essencialmente, a inclusão, supremos se manifestam como reuniões de maneira quase automática. No entanto, a parte algébrica é terrível.

✓ *Sequências de Cauchy racionais.* Considera-se a família

$$\mathcal{S} := \{(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é de Cauchy}\},$$

onde "ser de Cauchy" significa, *grosso modo*, que os termos da sequência se tornam arbitrariamente próximos uns dos outros. Daí, com uma relação de equivalência $\sim$ apropriada sobre $\mathcal{S}$, definem-se sobre o quociente $\mathcal{S}/\sim$ operações de adição e multiplicação, bem como uma ordem, que fazem de $\mathcal{S}/\sim$ um corpo ordenado completo.

✓ *Completamento uniforme.* Apela-se para a *teoria de espaços uniformes* e seus teoremas de *completamento*, que englobam tipos de estruturas chamadas de *grupos topológicos*, reino em que habita o grupo aditivo $(\mathbb{Q}; +; 0)$. Em tal cenário, mostra-se que o completamento uniforme de $\mathbb{Q}$ pode ser promovido ao patamar de corpo ordenado (completo).

Tecnicamente, o primeiro método é o menos exigente do ponto de vista terminológico: já teríamos bagagem suficiente para realizar a construção, se não tivéssemos mais o que fazer. Todavia, os meandros envolvidos nessa *implementação* não costumam contribuir para a prática da Análise no dia a dia. Nesse sentido, o segundo método tem a vantagem de utilizar *ecos* de definições que serão importantes *após* a construção, como as *sequências de Cauchy*. Mesmo assim, as enfadonhas verificações de que as *estruturas* definidas satisfazem as condições desejadas só servem para o contexto da construção da reta: no futuro, quando você *precisar* de *espaços métricos completos*, tudo deverá ser refeito.

O terceiro método não tem essa desvantagem: um único teorema de *completamento* de *espaços uniformes* dá conta de *completar* tanto $\mathbb{Q}$ quanto *espaços métricos* e outras *estruturas uniformes* encontradas na *natureza*. Porém, dado o escopo do texto, desenvolver esse ferramental *apenas* para construir um corpo ordenado completo e, posteriormente, *fazer* Análise, seria descabido[81].

[81] É a postura tomada por Bourbaki [1, 2], por exemplo. Porém, cabe a ressalva de que os textos de Bourbaki nunca almejaram servir como propostas didáticas, mas sim como fundamentação teórico-formal. Se quiser uma releitura em português, confira [13].

Outras bijeções curiosas

Observação 0.10.13. Você provavelmente já sabe, mas não custa lembrar: para um conjunto X e um número $n \in \mathbb{N}$ fixado, pode-se definir $X^n := X^{\mathbb{N}_{<n}}$, i.e., a coleção de todas as funções da forma $(x_i : i < n)$. Alternativamente, poderíamos definir $X^0 := \{\emptyset\}$, $X^1 := X$, $X^2 := X \times X$ e, mais geralmente, $X^{n+1} := X^n \times X$, o que essencialmente consiste em formalizar n-uplas como se fossem pares ordenados tomados iteradamente: assim, uma tripla (x_0, x_1, x_2) seria, formalmente, $((x_0, x_1), x_2)$. △

Entre outras coisas, o Exercício 0.58, que você provavelmente já fez, assegura que se existem funções injetoras $A \to C$ e $B \to D$, então existe uma função injetora $A^B \to C^D$, i.e., há uma correspondência injetiva que associa a cada função do tipo $B \to A$ outra função do tipo $C \to D$. Consequentemente:

$$|\mathbb{R}| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right|,$$

onde a primeira desigualdade segue pois existe função injetora $\{0,1\} \to \mathbb{N}$, enquanto a segunda decorre da existência de função injetora $\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mas você também fez o Exercício 0.60 e, por isso, sabe que existe bijeção entre as funções da forma $Y \times Z \to X$ e as funções da forma $Z \to X^Y$. Em particular, temos daí

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^n| = \left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^n\right| = \left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}_{<n}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}_{<n}}\right| \quad \text{e} \quad \left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right|$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$. Por fim, segue do Exercício 0.59 (que é consequência direta do Exercício 0.58) que X^Y e X^Z estão em bijeção sempre que Y e Z estão em bijeção. Portanto,

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^n| \leq \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}_{<n}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$$

pois $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{<n}$ têm todos a mesma cardinalidade para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$.

Corolário 0.10.14. *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ têm a mesma cardinalidade para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$.*

Corolário 0.10.15. *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ têm a mesma cardinalidade. Explicitamente: existem tantas funções da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ quanto números reais.*

Exercício 0.114 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que $|\mathbb{R}| < \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|$. ■

0.11 Exercícios adicionais

Adiante, $\mathbb{K}$ denota um corpo ordenado qualquer, enquanto $\mathbb{R}$ denota *a* reta real.

Exercício 0.115 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja $A \subseteq \{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\}$ com $A \neq \emptyset$. Mostre que A é ilimitado superiormente se, somente se, $\inf\left\{a^{-1} : a \in A\right\} = 0_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício 0.116 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $\mathbb{K}$ é arquimediano, então $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (2_{\mathbb{K}})^{-n} = 0_{\mathbb{K}}$. Dica: primeiro, mostre que $\{(2_{\mathbb{K}})^n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{K}$. ■

Exercício 0.117 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que

$$\frac{|x+y|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}} + |x+y|_{\mathbb{K}}} \leq \frac{|x|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}} + |x|_{\mathbb{K}}} + \frac{|y|_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$. Dica: $1_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$:p ■

Exercício 0.118 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam $\delta \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\delta > -1_{\mathbb{K}}$ e $n > 0$, então vale a *desigualdade de Bernoulli*: $(1_{\mathbb{K}} + \delta)^n \geq 1_{\mathbb{K}} + n_{\mathbb{K}}\delta$. Dica: $1_{\mathbb{K}} + \delta > 0_{\mathbb{K}}$ e $n\delta^2 \geq 0_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício 0.119 $(^{\star}_{\star})$**.** Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, mostre que $|(a,b)| = |\mathbb{R}|$. ■

Exercício 0.120 $(\star)$**.** Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, qual a cardinalidade de $\mathbb{Q} \cap (a,b)$? ■

Exercício 0.121 $(\star)$**.** Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, mostre que existe um número real $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ com $x < z < y$. ■

Exercício 0.122 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $\varphi\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) := \dfrac{x}{1 - |x|}$ é bijetora. ■

Exercício 0.123 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $[a, b]$ e (a, b) têm a mesma cardinalidade para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Conclua que $[-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade. ■

Exercício 0.124 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $x^2 \leq y^2$, para $x, y \in \mathbb{R}$, então $|x| \leq |y|$. ■

Exercício 0.125 $(^{\star}_{\star})$**.** Assuma que para todo $r \in \mathbb{R}$ com $r \geq 0$ exista um único $\alpha \geq 0$ tal que $\alpha^2 = r$. O número α costuma ser indicado por $\sqrt{r}$.

a) Mostre que se $x, y \geq 0$, então deve ocorrer $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x + y}{2}$. Dica: $\gamma^2 \geq 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

b) Com respeito ao item anterior: em que situações pode-se garantir a igualdade? Dica: observe que $\sqrt{x}^2 = x$ para todo $x \geq 0$.

c) Mostre que $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) Mostre que se $\alpha > \beta \geq 0$, então $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta}$ ■

Exercício 0.126 $(^{\ \star}_{\star\star})$**.** Prove que $\sqrt{r}$ existe para todo $r \geq 0$. Dica: para a unicidade, lembre-se de que $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$; para a existência, imite o que se fez para $r := 2$ (cf. Exemplo 0.9.2), onde pode ser conveniente tratar separadamente os casos em que $0 < r < 1$ e $r > 1$. ■

Exercício 0.127 $(^{\ \star}_{\star\star})$**.** Mostre que vale a recíproca do Exercício 0.103. ■

Exercício 0.128 $(^{\ \star}_{\star\star})$**.** Para uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$, mostre que são equivalentes:

(i) todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente admite supremo;

(ii) todo subconjunto não-vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.

Dica: note que se $A \subseteq \mathbb{P}$ é subconjunto não-vazio limitado inferiormente, então $B := \{p \in \mathbb{P} : p$ é limitante inferior de $A\}$ é não-vazio e limitado superiormente (pelos membros de A!). ■

Exercício 0.129 $(\star)$**.** Mostre que $\mathbb{K}$ é completo se, e somente se, todo subconjunto não-vazio e limitado inferiormente tem ínfimo. ■

Exercício 0.130 $(^{\ \star}_{\star\star})$**.** Sejam A e B subconjuntos de uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$.

a) Mostre que se $\sup A$ e $\sup B$ existem e, para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a \leq b$, então $\sup A \leq \sup B$. Enuncie e demonstre a versão dual para ínfimos.

b) Fazendo $\mathbb{P} := \mathbb{R}$, conclua que se $\emptyset \neq A \subseteq B$ e B tem supremo, então A tem supremo e vale $\sup A \leq \sup B$. Analogamente, se B tem ínfimo, então A tem ínfimo e $\inf A \geq \inf B$. ■

Exercício 0.131 $(^{\ \star}_{\star\star})$**.** Uma **norma** num $\mathbb{R}$-espaço vetorial E é uma função $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições a seguir para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:norma do supremo (ou do máximo)

(i) $\|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Para um conjunto não-vazio X qualquer, mostre que a função $\|\cdot\|_\infty\colon \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\|f\|_\infty := \sup\{f(x) : x \in X\}$ define uma norma no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ das funções limitadas da forma $X \to \mathbb{R}$ (cf. Subseção 0.7.1). Costuma-se chamar $\|\cdot\|_\infty$ de **norma do supremo**. ■

Capítulo 1

Limites e continuidade

O capítulo anterior apresentou e discutiu a reta real enquanto objeto matemático formal, enfatizando seus aspectos algébricos e de ordem. O próximo passo é entender como tal objeto pode ser usado na "prática": neste capítulo, vamos dar sentido às noções de *limite* na reta (e noutros ambientes similares), bem como apresentaremos as funções que são compatíveis com tais limites – as funções *contínuas*.

1.0 Noções de convergência

1.0.0 Essencial

Motivação: limites de sequências e funções

Em Cálculo I você provavelmente aprendeu a noção de *limite* de uma função real. Por exemplo, para uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais $p, L \in \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L, \tag{1.0}$$

para dizer que L é *um* **limite real da função f quando x tende a p**, o que abrevia o seguinte: *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x - p| < \delta$.

Por sua vez, se você fez Cálculo II no Bacharelado em Matemática da UESC, então já deve ter se deparado com a noção de *sequência convergente*[0]. Primeiro, lembre-se de que uma **sequência real** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é, meramente, uma função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ onde $s(n) := x_n$ para todo n. Daí, para uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um número real L, escreve-se

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L, \tag{1.1}$$

para dizer que L é *um* **limite real da sequência** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (e alguns ainda insistem em dizer "quando n tende a infinito"). *Como* no caso de funções, a notação acima também abrevia uma condição um pouco mais técnica: *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - L| < \varepsilon$ *sempre que* $n \geq N$.

Intuitivamente, tanto em "$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$" quanto em "$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$", expressa-se a ideia de que conforme elementos num conjunto de índices *avançam* numa *direção* específica ("$x \to p$" no primeiro caso e "$n \to \infty$" no segundo), as imagens indexadas ($f(x)$ no primeiro caso e x_n no segundo) se *aproximam* do limite L. No fundo, ambos são subcasos de um fenômeno mais geral. Chegaremos lá...

[0]Se fez e não viu... bem, a culpa não é minha.

Exemplo 1.0.0. *Existe no máximo* um *número real* $L \in \mathbb{R}$ *que satisfaz a condição abreviada por* (1.0). Mais precisamente, se $L, L' \in \mathbb{R}$ satisfazem a mesma condição, então $L = L'$. Ora, a fim de mostrar isso, basta garantir que $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ (cf. Teorema 0.7.9). Tendo em vista que a desigualdade triangular acarreta $|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, convém utilizar a condição satisfeita por L e L', que permite tomar $\delta, \delta' > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad 0 < |x - p| < \delta' \Rightarrow |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Certamente, existe algum $x' \in \mathbb{R}$ satisfazendo as duas condições com respeito a δ e δ': basta tomar x' com $0 < |x' - p| < \min\{\delta, \delta'\}$, por exemplo. Logo,

$$|L - L'| \leq |L - f(x')| + |f(x') - L'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como desejado. ▲

Exemplo 1.0.1. *Existe no máximo* um *número real* $L \in \mathbb{R}$ *que satisfaz a condição abreviada por* (1.1). Mais precisamente, se $L, L' \in \mathbb{R}$ satisfazem a mesma condição, então $L = L'$. Novamente, basta assegurar que $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por um lado, para $\gamma > 0$ fixado, existe $N_L \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \gamma$ sempre que $n \geq N_L$. Por outro lado, também existe $N_{L'} \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L'| < \gamma$ sempre que $n \geq N_{L'}$, pois $x_n \to L'$. Daí, *como existe* $N \in \mathbb{N}$ com $N_L, N_{L'} \leq N$, segue que

$$|L - L'| \leq |L - x_N| + |x_N - L'| < \gamma + \gamma = 2\gamma$$

donde a afirmação original segue com $\gamma := \frac{\varepsilon}{2}$. ▲

No primeiro exemplo, o fato de podermos tomar um mesmo ponto x' cumprindo as duas exigências ($|x' - p| < \delta$ e $|x' - p| < \delta'$) permitiu concluir que tanto $|f(x') - L|$ quanto $|f(x') - L'|$ são *suficientemente pequenos*. Já no segundo exemplo, o número N escolhido satisfaz as duas exigências ($N \geq N_L$ e $N \geq N_{L'}$), o que permitiu concluir que tanto $|x_N - L|$ quanto $|x_N - L'|$ são *suficientemente pequenos*. Chega de rodeios.

Limites de redes reais

Definição 1.0.2. Sejam $\mathbb{D}$ um conjunto e $\preceq$ uma relação binária sobre $\mathbb{D}$. Diremos que $(\mathbb{D}, \preceq)$ é uma **pré-ordem** se $\preceq$ for reflexiva e transitiva. Diremos que $\mathbb{D} \neq \emptyset$ é um **conjunto dirigido** pela pré-ordem $\preceq$ se, adicionalmente, valer a seguinte condição de *compatibilidade/refinamento*: para quaisquer $x, y \in \mathbb{D}$ existe $z \in \mathbb{D}$ com $x, y \preceq z$. ¶

Exemplo 1.0.3. *Ordens totais* não-vazias são conjuntos dirigidos, já que quaisquer dois elementos x e y da ordem são majorados por $\max\{x, y\}$. Note que $(\mathbb{N}, \leq)$ é dirigido. ▲

Exemplo 1.0.4. Para um ponto $p \in \mathbb{R}$ fixado, sejam $\mathbb{R}_p := \mathbb{R} \setminus \{p\}$ e a relação binária $\preceq$ em $\mathbb{R}_p$ definida da seguinte forma: para $x, y \in \mathbb{R}_p$, vamos escrever $x \preceq y$ para indicar $|y - p| \leq |x - p|$. Não é difícil se convencer de que $\preceq$ é uma pré-ordem sobre $\mathbb{R}_p$ (verifique?)*. Para ver que $(\mathbb{R}_p, \preceq)$ é dirigido, apenas note que se $x, y \in \mathbb{R}_p$, então ocorre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, já que $|x - y|$ e $|y - x|$ são elementos de um conjunto totalmente ordenado. ▲

Exercício 1.0 ($\star$)**.** Mostre que $(\mathbb{R}_p, \preceq)$ não é uma ordem parcial[1]. ■

[1] Lembre-se: nada te impede de escolher números "de verdade" e testá-los numa definição ou exemplo que você nunca viu a fim de facilitar a sua compreensão – e, ainda mais importante, você não precisa esperar que ~~eu~~ alguém diga para fazer isso. Os tempos de Ensino Médio já acabaram para nós.

Uma **rede real**[2] é uma função da forma $\rho\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{D}$ é um conjunto dirigido por alguma pré-ordem $\preceq$. Redes serão denotadas por $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, $(x_d : d \in \mathbb{D})$ ou mesmo $(x_d)_d$ quando o conjunto dirigido $\mathbb{D}$ for claro pelo contexto[3].

Definição 1.0.5. Um ponto $L \in \mathbb{R}$ será xingado de (*um*) **limite real da rede** $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ se a seguinte condição for satisfeita: para todo $\varepsilon > 0$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - L| < \varepsilon$ para todo $d \succeq D$. Em tal situação, também se diz que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ **converge para** L em $\mathbb{R}$, o que se abrevia com a notação $x_d \to L$. Dizer que uma rede é **convergente em** $\mathbb{R}$ apenas indica que existe um limite real para o qual a rede converge. ¶

Observação 1.0.6 (Interpretação geométrica)**.** Lembre-se de que $x \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ se, e somente se, $|L - x| < \varepsilon$ (cf. Exercício 0.89). Assim, uma rede $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ converge para $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ existe um índice $D \in \mathbb{D}$ a partir do qual $x_d \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, isto é, tal que $x_d \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ para todo $d \succeq D$. △

Note que ao ler "$a \preceq b$" como "b é melhor do que a", dizer que L é limite de $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ passa a significar que para todo $\varepsilon > 0$ pode-se fazer $|x_d - L| < \varepsilon$ para $d \in \mathbb{D}$ *suficientemente bom*.

Exercício 1.1 $(\star)$**.** Mostre que uma sequência real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $L \in \mathbb{R}$ (no sentido de sequência convergente) se, e somente se, $x_n \to L$ (no sentido de rede convergente). ■

Exemplo 1.0.7. De volta ao Exemplo 1.0.4, note que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induz uma rede $(f(x))_{x\in\mathbb{R}_p}$ por meio da restrição a $\mathbb{R} \setminus \{p\}$: cada $x \in \mathbb{R}_p$ é associado a $f(x)$. Reciprocamente, para $a \in \mathbb{R}$ fixado, uma rede $(\eta(x))_{x\in\mathbb{R}_p}$ induz uma função $\eta_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por meio da regra

$$\eta_a(x) := \begin{cases} a, & \text{se } x = p \\ \eta(x), & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Agora, *se* $L \in \mathbb{R}$ *for tal que* $\lim_{x\to p} f(x) = L$ *no sentido clásico do Cálculo I, então a rede* $(f(x))_{x\in\mathbb{R}_p}$ *converge para* L: com efeito, para $\varepsilon > 0$ dado, a condição satisfeita por L assegura $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$; tomando $D \in \mathbb{R}_p$ tal que $0 < |D - p| < \delta$, segue que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para qualquer $x \in \mathbb{R}_p$ *melhor* do que D, uma vez que $x \succeq D$ significa $|x - p| \leq |D - p|$, acarretando $0 < |x - p| < \delta$ (por transitividade).

Reciprocamente, *se uma rede* $(\eta(x))_{x\in\mathbb{R}_p}$ *converge para* $L \in \mathbb{R}$, *então qualquer função induzida* $\eta_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é tal que* $\lim_{x\to p} \eta_a(x) = L$: para $\varepsilon > 0$, existe um *momento* $D \in \mathbb{R}_p$ tal que $|\eta_a(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \succeq D$; tomando $\delta := |p - D|$, segue que se $0 < |x - p| < \delta$, então $x \succeq D$, donde segue o resultado. ▲

Moral da história: limites de redes generalizam, simultaneamente, limites de sequências e os limites de funções da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veremos adiante que, na verdade, o escopo de redes é bem mais abrangente do que esta breve introdução sugere.

Exercício 1.2 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se uma rede real $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ converge para números reais $L, L' \in \mathbb{R}$, então $L = L'$. ■

Definição 1.0.8. Também escreveremos $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d$ para indicar o único número real $L \in \mathbb{R}$, se existir, tal que $x_d \to L$. ¶

Exercício 1.3 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que uma rede real $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ converge para $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ com $L \in I$ existir $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in I$ sempre que $d \succeq D$. ■

[2] A terminologia usual, em inglês, é *net*.

[3] Como de costume, entende-se que x_d indica a imagem de $d \in \mathbb{D}$ pela função ρ.

1.0.1 Extras

Limites em espaços normados

O Exercício 0.131 introduziu a noção de *espaço vetorial normado*: trata-se de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial em que se tem a habilidade de *calcular* ~~o tamanho~~ a *norma* dos vetores. Embora o exemplo apresentado tenha sido relativamente abstrato, há representantes bem mais corriqueiros dessa classe de animal:

(i) a própria reta real, enquanto $\mathbb{R}$-espaço vetorial, com a norma dada pelo seu valor absoluto $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$;

(ii) o *plano bidimensional* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, seu velho conhecido dos tempos da Geometria Analítica, com a norma $\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ que a cada vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ associa a *norma euclidiana* do vetor (a, b), definida como $\|(a, b)\|_2 := \sqrt{a^2 + b^2}$;

(iii) o *espaço tridimensional* $\mathbb{R}^3$, outro amigo dos tempos da Geometria Analítica, com a *norma euclidiana*[4] $\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ que a cada vetor (a, b, c) associa a norma euclidiana do vetor (a, b, c), definida como $\|(a, b, c)\|_2 := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Em geral, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$, pode-se considerar sobre $\mathbb{R}^n$ a **norma euclidiana** $\|\cdot\|_2\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ que a cada n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ associa o número

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 := \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Embora a intuição geométrica torne bastante razoável assumir que a regra acima define realmente uma *norma*, a terminologia tem atrelada a ela certas condições – que precisam ser verificadas para que possamos chamar a coisa de "norma" sem peso na consciência. As condições (i), (ii) e (iii) são corriqueiras:

(i) como $a^2 \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$ (certo?)*, o que assegura a boa definição do número $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, que é maior do que ou igual a zero, por definição (cf. Exercício 0.126);

(ii) se $\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 = 0$, então $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 0$ e, consequentemente $a_i^2 = 0$ para todo $i \leq n$ (por quê?!)$^{\star}_{\star}$, donde segue que $a_i = 0$ para todo $i \leq n$; por outro lado, é claro que $\|(0, \ldots, 0)\|_2 = 0$;

(iii) para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ quaisquer,

$$\|\lambda(a_1, \ldots, a_n)\|_2 = \|(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)\|_2 = \sqrt{\lambda^2 \cdot (a_1^2 + \ldots + a_n^2)} \underbrace{=}_{(!)}$$
$$\underbrace{=}_{(!)} \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \underbrace{=}_{(A)} |\lambda| \cdot \|(a_1, \ldots, a_n)\|_2,$$

onde a igualdade (!) se deve à identidade $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$, válida para quaisquer $\alpha, \beta \geq 0$ (por quê?!)*, enquanto (A) decorre do Exercício 0.125.

A desigualdade triangular (iv), porém, é mais delicada. Para verificá-la, vamos assumir, momentaneamente, a validade da desigualdade

$$|(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)| \leq \|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 \cdot \|(b_1, \ldots, b_n)\|_2 \tag{1.2}$$

para quaisquer $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Para quê? ~~Paraguaio~~ Para isso: uma vez que para $\alpha, \beta \geq 0$ tem-se $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \beta^2$ (certo?)*, a fim de mostrar

$$\underbrace{\|(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)\|_2}_{B} \leq \underbrace{\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2}_{C} + \underbrace{\|(b_1, \ldots, b_n)\|_2}_{D},$$

basta obter $B^2 \leq (C + D)^2$. E realmente:

$$B^2 = \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + 2a_j b_j + b_j^2 = C^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_j b_j + D^2 \leq C^2 + 2\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| + D^2 \leq$$
$$\leq C^2 + 2CD + D^2 = (C + D)^2,$$

onde a primeira desigualdade vale em geral[5], enquanto a segunda desigualdade decorre da suposição (1.2).

[4] Spoiler alert: o subíndice "$_2$" em "$\|\cdot\|_2$" faz referência aos expoentes envolvidos na expressão da norma, e não à *dimensão* do espaço.

[5] Pois $\alpha \leq |\alpha|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então... por que (1.2) vale? Secretamente, a norma euclidiana foi induzida por um tipo de função chamada de *produto interno*. Um **produto interno** num $\mathbb{R}$-espaço vetorial E é uma função $E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par de vetores $(x, y) \in E \times E$ associa um *escalar*[6] $\langle x, y \rangle$, sujeito às seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(I) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(II) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$,

(III) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, e

(IV) $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0_E$.

É um exercício simples ($\star$) verificar que a função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que faz

$$((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \mapsto a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^n$. O que traz a pergunta: e daí?

Lema 1.0.9 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ é um produto interno, então ao definir $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ para todo $u \in E$, a desigualdade*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

se verifica para quaisquer $x, y \in E$.

Demonstração. Note que nada precisa ser feito se ocorrer $\langle x, y \rangle = 0$. Supondo $\langle x, y \rangle \neq 0$, encontraremos $v \in E$ satisfazendo $\langle x, v \rangle = 0$ e $x + v = \alpha y$ para *algum* $\alpha \in \mathbb{R}$: note que se tal α *existisse*, poderíamos fazer $v = \alpha y - x$, e daí

$$0 = \langle x, v \rangle = \langle x, \alpha y - x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle - \|x\|^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\|x\|^2}{\langle x, y \rangle}.$$

Como tal α funciona (verifique?)*, encontramos o v procurado. Enfim, a *mágica*: por um lado,

$$\|x + v\|^2 = \|\alpha y\|^2 = \frac{\|x\|^4}{|\langle x, y \rangle|^2} \|y\|^2,$$

e, por outro lado,

$$\|x + v\|^2 = \langle x + v, x + v \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, v \rangle + \|v\|^2 = \|x\|^2 + \|v\|^2 \geq \|x\|^2,$$

donde segue que $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$. Completar os detalhes é problema seu ($\star$)[7]. □

Exercício 1.4 ($\star$)**.** Prove a desigualdade (1.2). ■

Exercício 1.5 (Outras normas em $\mathbb{R}^n$ – $\left({}^{\star}_{\star\star}\right)$)**.** Para $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, defina os números

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_1 := |a_1| + \ldots + |a_n| \quad \text{e} \quad \|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty := \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

Mostre que as funções $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são normas em $\mathbb{R}^n$. Costuma-se chamar $\|\cdot\|_1$ de **norma da soma**, enquanto $\|\cdot\|_\infty$, neste contexto, é a **norma do máximo**. ■

Toda essa ladainha deve ter te convencido de que espaços vetoriais normados são bastante comuns e, justamente por isso, não há razão para temê-los. Com isso dito, ao rever a definição de limite de rede, cabe perguntar: por que considerar apenas redes *reais*? Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, poderíamos dizer que uma sequência $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de *pontos* em $\mathbb{R}^2$ *converge* para um *ponto* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_2 < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. Reescrevendo com notação de *gente grande*[8]: uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^2$ *converge* para $x \in \mathbb{R}^2$ se para todo $\varepsilon > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\|_2 < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. Ou seja: é o mesmo conceito de sequência convergente em $\mathbb{R}$, e com uma grafia essencialmente idêntica. Isto motiva (que se tente) adaptar tudo o que se fez anteriormente em $\mathbb{R}$ para o contexto de espaços normados! Mas faremos algo um pouco *melhor*.

[6] Há quem prefira xingar produtos internos como *produtos escalares*!

[7] E agradeço a João Santos por ter me (re?) apresentado a tal argumento memorável. *Dale*.

[8] Ao escrever "$x \in \mathbb{R}^2$", a pessoa adulta percebe que x indica um par ordenado e não um número real.

Limites em espaços métricos

Enquanto uma norma $\|\cdot\|$ num $\mathbb{R}$-espaço vetorial E permite determinar o *tamanho* dos vetores de E, a função

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}\colon E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

define uma *noção de distância*, já que ela calcula o "tamanho" do vetor que liga o *ponto* x ao ponto y (Geometria Analítica, lembra?). Note que para $x, y, z \in E$ quaisquer:

(i) $d_{\|\cdot\|}(x, y) \geq 0$ (não há distâncias negativas!);

(ii) $d_{\|\cdot\|}(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$ (pontos distintos têm distância estritamente positiva)[9];

(iii) $d_{\|\cdot\|}(x, y) = d_{\|\cdot\|}(y, x)$ (a distância entre Maomé e a montanha...);

(iv) $d_{\|\cdot\|}(x, y) \leq d_{\|\cdot\|}(x, z) + d_{\|\cdot\|}(z, y)$ (desigualdade triangular[10]).

Uma das vantagens da formulação acima, que não é óbvia num primeiro momento, é a seguinte: não se mencionam quaisquer operações algébricas em E, mas apenas em $\mathbb{R}$. Isto sugere a possibilidade de discutir problemas que envolvem distâncias mesmo em contextos desprovidos de uma estrutura vetorial!

Definição 1.0.10. Dizemos que uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é uma **métrica** em X se as condições (i), (ii), (iii) e (iv) acima forem satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in X$. O par (X, d) será chamado de **espaço métrico** – e diremos apenas que "X é espaço métrico" quando a métrica for clara pelo contexto. ¶

Percebe-se assim que o *aparato algébrico* empregado na definição dos limites de redes reais era apenas uma distração: no número "$|x_d - L|$" que se busca *minimizar* conforme o índice *d melhora*, a ocorrência da subtração é apenas um artifício para expressar a *distância* entre x_d e L. Dessa forma, a seguinte definição é inevitável:

Definição 1.0.11. Para um espaço métrico (X, d), uma *rede em* X é uma função da forma $\eta\colon \mathbb{A} \to X$ onde $\mathbb{A}$ é algum conjunto dirigido[11] por uma pré-ordem $\preceq$. Diremos que $L \in X$ é (*um*) **limite** (em X) **da rede** $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ se a seguinte condição for satisfeita: para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $d(x_a, L) < \varepsilon$ para todo $a \succeq A$. Em tais situações, diremos que $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ **converge para** $L \in X$, o que será abreviado com a notação $x_a \to L$. Dizer que uma rede em X é *convergente em* X apenas indica que existe um limite em X para a rede. ¶

Embora pareça mais complicado, na verdade, trata-se de uma simplificação: com os mesmos argumentos que já utilizávamos, obtemos resultados que abrangem mais casos! Por exemplo:

Proposição 1.0.12. *Se $(x_a)_a$ é uma rede num espaço métrico X tal que $x_a \to L$ e $x_a \to L'$ para certos $L, L' \in X$, então $L = L'$.*

Demonstração. A fim de provar que $L = L'$, basta mostrar que $d(L, L') = 0$ (pela condição (ii) na definição de espaço métrico) o que, por sua vez, pode ser alcançado mostrando que $d(L, L') < \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$ tomado. Ora, fixando-se algum $\varepsilon > 0$, a desigualdade triangular (para métricas) assegura

$$d(L, L') \leq d(L, x_a) + d(x_a, L')$$

para qualquer a no domínio da rede $(x_a)_a$. Em particular, por $x_a \to L$ e $x_a \to L'$, existem α e α' no conjunto de índices tais que $d(x_a, L) < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $a \succeq \alpha$, enquanto $d(x_a, L') < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $a \succeq \alpha'$. Assim, tomando-se $\alpha'' \succeq \alpha, \alpha'$, que existe pois o domínio da rede é dirigido, obtém-se

$$d(L, L') \leq d(L, x_{\alpha''}) + d(x_{\alpha''}, L') = d(x_{\alpha''}, L) + d(x_{\alpha''}, L') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos. □

Como este curso é voltado para Análise na Reta, você não precisa se preocupar muito com espaços métricos... ~~pelo menos por enquanto.~~ No entanto, conforme as discussões na reta avançarem, naturalmente nosso entendimento sobre espaços métricos e normados avançará, mesmo que subconscientemente.

[9] Pela contrapositiva... certo?

[10] Ou... desvios aumentam distâncias.

[11] Embora a letra "$\mathbb{D}$" faça alusão a "$\mathbb{D}$irigido", usá-la agora nos *obrigaria* a utilizar a letra "d" para denotar seus elementos, o que entraria em conflito com o uso da mesma letra para nos referirmos à ~~distância~~ *métrica* do espaço. Indicar a métrica pela letra "m" seria ainda pior, já que m é um número natural *por excelência*.

1.1 Estudos de caso

1.1.0 Essencial

Alguns exemplos importantes

Funções constantes constituem os exemplos mais preguiçosos de convergência: se $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{D}$ é um conjunto dirigido, então a rede $C_r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, que faz $C_r(d) := r$ para todo $d \in \mathbb{D}$ e é usualmente denotada por $(r)_{d\in\mathbb{D}}$, converge precisamente para r. De fato, para $\varepsilon > 0$, qualquer $D \in \mathbb{D}$ é tal que $|C_r(d) - r| < |\varepsilon$ sempre que $d \succeq D$, pois

$$|C_r(d) - r| = |r - r| = 0$$

para qualquer $d \in \mathbb{D}$. Em particular:

(i) fazendo $\mathbb{D} := \mathbb{N}$, segue que sequências constantes convergem;

(ii) fazendo $\mathbb{D} := \mathbb{R}_p$ para algum $p \in \mathbb{R}$, segue que qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que assume valor constante r em $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ é tal que $\lim_{x\to p} f(x) = r$, independentemente do valor de f em p.[12]

Exemplo 1.1.0 (Convergência não implica constância)**.** A recíproca do que se observou acima é falsa, i.e., existem redes convergentes que não são constantes. Um exemplo simples é a sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, cujo limite é 0. Vejamos:

- ✓ para $\varepsilon > 0$, busca-se $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$;
- ✓ para obter tal N, note que $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ e, por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que
$$\frac{1}{\varepsilon} < N';$$
- ✓ como $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ (certo?)*, se tomarmos $N \geq \max\{N', 2\}$ teremos
$$\frac{1}{\varepsilon} < N < 2^N (\text{certo?})^\star,$$
e, consequentemente,
$$\frac{1}{2^N} < \varepsilon;$$
- ✓ por fim, como $0 < \frac{1}{2} < 1$, resulta que $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente (cf. Exercício 1.48), de modo que se $n \geq N$, então $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N}$.

Por tudo o que se observou acima, conclui-se que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (certo?)*. ▲

A argumentação acima foi bastante cuidadosa por dois motivos: i) foi o primeiro exemplo explícito de uma rede convergente; ii) ainda não vimos resultados que permitem "adivinhar" alguns limites de modo rápido e indolor. As próximas seções vão lidar com esse tipo de problema. Mas tudo em seu tempo.

Exemplo 1.1.1 (Uma sequência *divergente*)**.** A definição de convergência não teria graça se tudo convergisse. Para um exemplo simples de rede que não converge, considere a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: explicitamente, trata-se da sequência $(1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$ que leva $n \in \mathbb{N}$ ao número $x_n := (-1)^n$, daí $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, etc. Intuitivamente, é óbvio que se trata de uma *sequência* que não converge em $\mathbb{R}$.

[12] Não se preocupe, futuramente, vamos tratar de funções da forma $X \to \mathbb{R}$ com $X \subseteq \mathbb{R}$.

Para argumentar formalmente, o Exercício 1.3 pode ser útil: se $L \in \mathbb{R}$ fosse limite da sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, então para qualquer intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ com $L \in I$ deveria ser possível encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $(-1)^n \in I$ sempre que $n \geq N$. Existe algum L com tal propriedade?

- ✗ para $L := 1$, basta tomar I tal que $-1 \notin I$, pois daí para qualquer $N \in \mathbb{N}$, sempre ocorre $(-1)^N \notin I$ ou $(-1)^{N+1} \notin I$ (por quê?)*;
- ✗ para $L := -1$, basta tomar I tal que $1 \notin I$, pois daí para qualquer $N \in \mathbb{N}$, sempre ocorre $(-1)^N \notin I$ ou $(-1)^{N+1} \notin I$ (por quê?)*;
- ✗ para $L \neq -1, 1$, basta tomar I tal que $-1, 1 \notin I$, pois daí $(-1)^N \notin I$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Em breve teremos ferramentas bem mais práticas para detectar quando uma sequência não converge em $\mathbb{R}$. ▲

Definição 1.1.2. Diremos que uma rede real $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é **divergente em** $\mathbb{R}$ se não existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_d \to L$. Sequências divergentes são definidas analogamente. ¶

Observação 1.1.3 (Cuidado com o conjunto dirigido!)**.** No último exemplo, a divergência de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se deve ao fato de que $n + 1 > n$ para todo n, de modo que os dois valores possíveis da sequência se alternam à medida que os índices avançam de acordo com a ordenação usual de $\mathbb{N}$.

Exercício 1.6 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Para $\mathcal{N} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considere a relação $\preceq$ em que se declara $m \preceq n$ se m *divide* n, i.e., se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = mk$. Mostre que $(\mathcal{N}, \preceq)$ é um conjunto dirigido tal que a rede $((-1)^n)_{n\in\mathcal{N}}$ converge para 1. Dica: i) observe o que acontece com $(-1)^n$ para $n \succeq 2$; ii) releia a dica (i) até perceber que não está escrito "$n \geq 2$", mas sim "$n \succeq 2$"; iii) se você não entendeu o que significa "$n \succeq 2$" neste exercício, releia o enunciado desde o princípio[13]. ■

Com isso dito, não se preocupe: em geral, sempre que $\mathcal{M}$ for um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ e $(x_m)_{m\in\mathcal{M}}$ for uma rede, iremos considerar $\mathcal{M}$ com a ordem usual *herdada* de $\mathbb{N}$, o que na prática significa que podemos tratá-las como sequências[14]. △

Como veremos, o problema de determinar se uma rede (sequência, função, etc.) converge ou não é bastante delicado. Assim, conhecer critérios rápidos, mesmo que aplicáveis apenas a um número *limitado* de casos, pode ser bastante útil. Por falar em *limitação*, já vimos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **limitada** se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ (cf. Subseção 0.7.1). Em particular, como redes são funções, a mesma definição se aplica a elas – e a sequências, etc.

Teorema 1.1.4. *Toda rede real, limitada e monótona*[15] *converge em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ crescente e considere $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup\{x_d : d \in \mathbb{D}\}$, que existe em virtude da completude de $\mathbb{R}$ e da limitação do conjunto $T := \{x_d : d \in \mathbb{D}\}$. Mostraremos que $x_d \to \alpha$.

[13] Se nada disso ajudou... (suspiro): "$n \succeq 2$" significa "$2 \preceq n$", que por sua vez significa "2 divide n". Por que eu sei disso? Porque li a definição da relação $\preceq$ no começo do enunciado do exercício.

[14] Isto ficará mais claro após a discussão de *subsequências*.

[15] Isto é, crescente ($d \leq d' \Rightarrow x_d \leq x_{d'}$) ou decrescente ($d \leq d' \Rightarrow x_{d'} \leq x_d$). Trata-se da mesma definição apresentada no Exercício 0.71.

Para isso, dado $\varepsilon > 0$, temos $\alpha - \varepsilon < \alpha$. Por α ser o supremo de T, $\alpha - \varepsilon$ não pode limitar T superiormente. Logo, existe pelo menos um $D \in \mathbb{D}$ com $x_D > \alpha - \varepsilon$. Enfim, por $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ ser crescente, temos

$$\alpha - \varepsilon < x_D \leq x_d \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

para todo $d \succeq D$. O caso decrescente é problema seu. $\square$

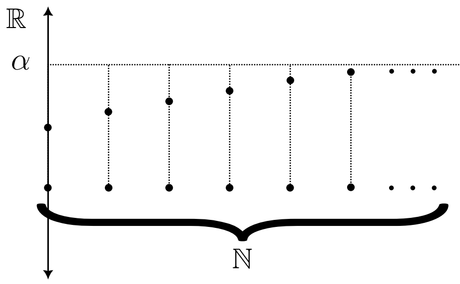


Figura 1.0: O supremo α impede que os termos escapem "para cima", enquanto o comportamento crescente da sequência "empurra" os termos até α.

Exercício 1.7 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Mostre que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma rede real, limitada e decrescente, então $\inf\{x_d : d \in \mathbb{D}\}$ é o limite da rede. $\blacksquare$

Observação 1.1.5. A Subseção 1.1.1 traz uma aplicação surpreendente para o resultado acima: a existência de *limites laterais reais* para funções reais limitadas e monótonas. $\triangle$

Exemplo 1.1.6. Como prometido, agora é bem mais fácil provar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$: dado que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 0$ (cf. Exercício 0.116) e $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Para outro exemplo, observe que $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, uma vez que $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente (certo?)* e valem as identidades

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{1 - \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1 - \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$$

por conta do Teorema 0.8.7 (por quê?)$^\star_\star$. Futuramente, isto será ainda mais simples. $\blacktriangle$

Exemplo 1.1.7 (Séries de números reais)**.** Um tipo particular de sequência costuma ser bastante útil em diversos contextos: as *séries*. Fixada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, a **série** (de números reais) determinada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, geralmente denotada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n\geq 0} x_n \quad \text{ou apenas} \quad \sum x_n,$$

é a *sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada pelos termos $s_n := \sum_{j=0}^{n} x_j$, que por sua vez costumam ser chamados de **somas parciais da série**.

Intuitivamente, a série $\sum x_n$ *representa* o que seria a *soma* de todos os termos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o que não faz sentido puramente algébrico já que as operações de $\mathbb{R}$ são *finitárias*, mas que pode fazer sentido do ponto de vista ~~topológico~~ ordenado por meio da noção de limite.

Definição 1.1.8. Diremos que a série de números reais $\sum x_n$ **converge** em $\mathbb{R}$ se existir $S \in \mathbb{R}$ tal que

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j,$$

i.e., se as somas parciais da série convergem para S. Por abuso de notação, em tais situações, o limite da série também será denotado por $\sum x_n$, que xingaremos de **soma da série** $\sum x_n$. ¶

É importante não confundir a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com a série $\sum_{n\geq 0} x_n$. Além das notações serem completamente diferentes[16], cada uma tem um significado preciso: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a função que associa $x_n \in \mathbb{R}$ a cada $n \in \mathbb{N}$, enquanto $\sum_{n\geq 0} x_n$ associa $x_0 + \ldots + x_n$ a cada $n \in \mathbb{N}$. Mastigando ainda mais, note que a sequência constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ induz a série $\sum_{n\geq 0} 1$, que por sua vez é a sequência $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$. Ao longo do curso, séries serão animais bastante recorrentes. Por ora, vamos apenas reescrever um resultado que já foi utilizado no capítulo anterior (cf. Lema 0.10.8) para ilustrar um pouco mais a aplicabilidade do Teorema 1.1.4. ▲

Exercício 1.8 ($\star\atop\star$). Mostre que se $0 < a < 1$, então $\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$. ■

Limites na reta estendida

Na discussão anterior, é bem provável que você tenha percebido um segundo exemplo de sequência divergente: a saber, $\sum_{n\geq 0} 1$, a sequência formada por todos os números naturais maiores do que zero. Ela não pode convergir em $\mathbb{R}$ pois, se convergisse, seu limite seria o supremo[17] de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, mas $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{R}$ (cf. Teorema 0.9.6). Ainda assim, a *divergência* de $\sum_{n\geq 0} 1$ parece ser diferente da *divergência* de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: enquanto os termos da primeira assumem valores *arbitrariamente altos*, a segunda oscila indefinidamente.

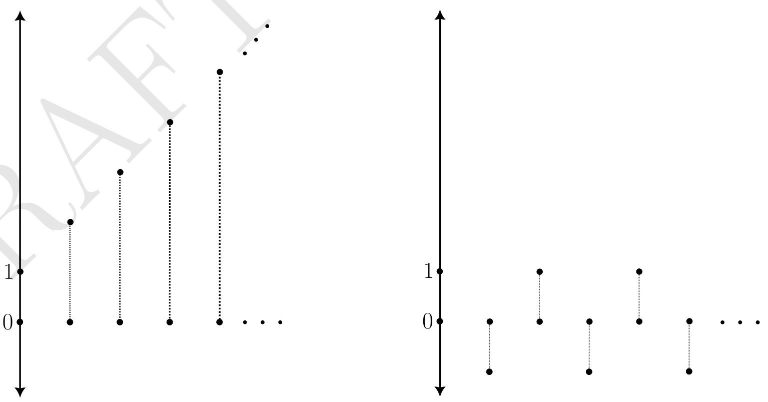


Figura 1.1: A série $\sum_{n\geq 0} 1$ vs. a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mais precisamente, ao dizer que os termos de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assumem *valores arbitrariamente altos*, busca-se abreviar a seguinte condição: para todo $M \in \mathbb{R}$ (na verdade, basta fazer $M > 0$), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M < x_n$ sempre que $n \geq N$.

[16] Em caso de discordância, procure especialistas em oftalmologia.

[17] Atenção: isto não é consequência do Teorema 1.1.4: o teorema diz que se uma rede real é monótona e limitada, então ela converge (para o seu supremo ou o seu ínfimo, a depender do caso). Aqui, o que está sendo dito é: se uma rede monótona converge em $\mathbb{R}$, então seu limite é também supremo ou ínfimo da imagem da rede (a depender do caso). Confira o Exercício 1.50 para mais detalhes.

Reescrevendo a condição acima por meio de intervalos, os termos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *assumem valores arbitrariamente altos* se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (M, +\infty)$ sempre que $n \geq N$. Esta última formulação sugere que assumir valores arbitrariamente altos possa ter semelhanças com a convergência em $\mathbb{R}$.

Considere, por exemplo, a sequência $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Já sabemos que $1 - \frac{1}{2^n} \to 1$, o que por sua vez significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|1 - \frac{1}{2^n} - 1\right| < \varepsilon$$

sempre que $n \geq N$. Porém, ao analisar este caso por um ponto de vista (mais) geométrico, podemos afirmar que para qualquer $M < 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \frac{1}{2^n} \in (M, 1)$ para todo $n \geq N$: como nenhum termo da sequência em questão assume valores maiores do que ou iguais a 1, o lado direito dos intervalos pode ser ignorado.

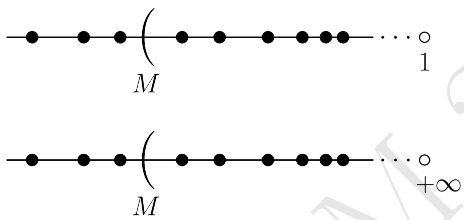


Figura 1.2: A sequência de cima converge para 1, enquanto a outra assume valores arbitrariamente altos.

Assim, ao pensar em convergência menos algebricamente e mais *geometricamente* (por meio de intervalos), percebemos que seria inofensivo "acrescentar" um ponto artificial *acima* (ou à *direita*) da reta real a fim de servir como *limite* das ~~redes~~ sequências que assumem valores arbitrariamente altos: este ponto é geralmente denotado por $+\infty$, e costuma-se escrever

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

para indicar que "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assume valores arbitrariamente altos".

Após refazer toda essa argumentação num espelho, chega-se à definição de sequências que assumem *valores arbitrariamente baixos* e, mais importante, percebe-se que seria inofensivo "acrescentar" um ponto artificial *abaixo* (ou à esquerda) da reta real, comumente denotado por "$-\infty$".

Definição 1.1.9. A **reta estendida** é o conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, com a ordem que você imagina: para $x, y \in [-\infty, +\infty]$, $x < y$ significa

- $x < y$ no sentido usual se $x, y \in \mathbb{R}$ (ou seja, números reais seguem sua ordem "de sempre"), ou
- $x := -\infty$ e $y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou
- $y := +\infty$ e $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. ¶

Em $[-\infty, +\infty]$, passa a fazer sentido escrever $\sup A = +\infty$ sempre que A for um subconjunto não-vazio de números reais ilimitado superiormente, assim como $\inf B = -\infty$ para $B \subseteq \mathbb{R}$ com $B \neq \emptyset$ ilimitado inferiormente: para o primeiro caso, $+\infty$ é automaticamente limitante superior de A, mas nenhum $L < +\infty$ pode limitar A superiormente, já que supomos A ilimitado em $\mathbb{R}$.

Exercício 1.9 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ e B é ilimitado inferiormente, então $\inf B = -\infty$. Vale a volta? ■

Também podemos ser mais fléxíveis com intervalos: além dos intervalos usuais de $\mathbb{R}$, são permitidos os intervalos da forma $[-\infty, \alpha]$, $[-\infty, \alpha)$, $[\beta, +\infty]$ e $(\beta, +\infty]$ para $\alpha, \beta \in [-\infty, +\infty]$. Diremos que $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ é um **intervalo aberto fundamental** se I for da forma $[-\infty, \alpha)$ ou $(\alpha, +\infty]$ para algum $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. Interseções finitas de intervalos abertos fundamentais serão chamadas de **intervalos abertos**.

Definição 1.1.10. Um ponto $L \in [-\infty, +\infty]$ será chamado de (*um*) **limite estendido da rede** $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ se a seguinte condição for satisfeita: para todo intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $L \in I$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in I$ sempre que $d \succeq D$. Em tal situação, também se diz que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ **converge para** L **na reta estendida**, o que se abrevia com a notação $x_d \to L$. Dizer que uma rede é **convergente na reta estendida** apenas indica que existe um limite em $[-\infty, +\infty]$ para o qual a rede converge. ¶

Como os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ são intervalos abertos de $[-\infty, +\infty]$ (cf. Exercício 0.99), segue que limites reais são limites na reta estendida. A falha da recíproca se dá justamente com as redes arbitrariamente altas e baixas: elas divergem na reta real, mas convergem na reta estendida.

Proposição 1.1.11. *Se* $x_d \to L$ *com* $L \in \{-\infty, +\infty\}$ *e* $r \in \mathbb{R}$, *então* $x_d \not\to r$.

Demonstração. O argumento é essencialmente *geométrico*: tudo segue pois existem intervalos abertos $I, J \subseteq [-\infty, +\infty]$ tais que $L \in I$, $r \in J$ e $I \cap J = \emptyset$ (certo?!)*. De fato, sabendo-se disso, como $x_d \to L$, existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \in I$ para todo $d \succeq D$. Por outro lado, se também valesse $x_d \to r$, então existiria $D' \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in J$ sempre que $d \succeq D'$. Logo, para $D'' \succeq D, D'$ ocorreria tanto $x_{D''} \in I$ quanto $x_{D''} \in J$. □

Exercício 1.10 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $L, L' \in [-\infty, +\infty]$ e $x_d \to L$ e $x_d \to L'$, então $L = L'$. ■

Definição 1.1.12. Para uma rede real $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, vamos escrever $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d$ para indicar o único ponto $L \in [-\infty, +\infty]$, se existir, tal que $x_d \to L$. ¶

Embora pareça diferente, a abordagem aqui adotada apenas enfatiza os aspectos geométricos das diversas definições clássicas de limites reais e infinitos: a mágica, se há alguma, está nos intervalos.

Exercício 1.11 $({}^{\star}_{\star})$**.** A seguir, para uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais e um ponto $L \in [-\infty, +\infty]$, a notação "$x_n \to L$" está de acordo com a Definição 1.1.10.

a) Para $L \in \mathbb{R}$, mostre que $x_n \to L$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. Dica: note que um ponto $a \in \mathbb{R}$ pertence a um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq I$, e lembre-se que $b \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se, e somente se, $|b - a| < \varepsilon$.

b) Mostre que $x_n \to +\infty$ se, e somente se, para todo $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M < x_n$ sempre que $n \geq N$.

c) Mostre que $x_n \to -\infty$ se, e somente se, para todo $M \in \mathbb{R}$ com $M < 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < M$ sempre que $n \geq N$. ■

Exercício 1.12 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} -(2^n) = -\infty$. A sequência $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $[-\infty, +\infty]$? ■

Exercício 1.13 $({}^{\star}_{\star})$**.** Adapte o exercício acima para caracterizar $\lim_{x\to p} f(x) = L$ nos casos em que $L \in \mathbb{R}$, $L := +\infty$ e $L := -\infty$, onde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função e $p \in \mathbb{R}$. ■

1.1.1 Extras

Limites laterais e funções monótonas

Observação 1.1.13. Embora já tenhamos ferramental para discutir limites de funções da forma $X \to \mathbb{R}$ com $X \subseteq \mathbb{R}$, isto só será feito após termos discutido noções *topológicas*. Com isso dito, os resultados aqui se aplicam nesse contexto levemente mais geral, *mutatis mutandis*. △

Para uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$, a relação $\preceq$ sobre $\mathbb{R}_p := \mathbb{R} \setminus \{p\}$ segundo a qual

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{r \in \mathbb{R}_p} f(r),$$

i.e., segundo a qual a definição usual de limite coincide com a noção de limite de rede, declara

$$a \preceq b \text{ se, e somente se, } |b - p| \leq |a - p|.$$

Verbalmente: b é melhor do que a se a distância de b até p é menor do que ou igual a distância de a até p (em outras palavras, quando o assunto é estar próximo de p, b é melhor nisso do que a).

Exercício 1.14 ($\star$). Para $p := 0$, dê exemplos de números reais $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a < b$ e $a \succ b$. Observação: note que não se pediu "$a < b$ e $a > b$", mas sim "$a < b$ e $a \succ b$" (os símbolos "$>$" e "$\succ$" indicam coisas diferentes!). ■

O exercício sugere que a relação $\preceq$ sobre $\mathbb{R}_p$ ignora o "lado" pelo qual o ponto se aproxima de p. No entanto, há situações bastante naturais em que faz sentido analisar o comportamento da função levando em conta a direção de aproximação.

Exemplo 1.1.14 (*Spoiler*: derivadas)**.** Futuramente, para uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$, iremos considerar o número

$$f'(p) := \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

que, quando existir em $\mathbb{R}$, será chamado de *derivada da função f no ponto p*. A rigor, trata-se do limite da rede $\eta_p\colon \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Em particular, para $f(x) := |x|$ e $p := 0$, a função η_p correspondente é dada pela regra

$$\eta_p(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

mostrando que os valores da rede $(\eta_p(x))_{x \in \mathbb{R}_p}$ dependem do lado pelo qual x se aproxima de 0: para $x > 0$, $\eta_p(x) = 1$, ao passo que para $x < 0$, $\eta_p(x) = -1$. Como no caso da *sequência* $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, não é difícil perceber que, neste caso, $(\eta_p(x))_{x \in \mathbb{R}_p}$ diverge (certo?)$^{\star}_{\star}$. Ainda assim, ao considerarmos apenas um dos lados, os limites correspondentes parecem existir. ▲

O exemplo anterior ilustra uma situação típica em que *limites laterais* dão as caras. Para uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$, diz-se que $L \in [-\infty, +\infty]$ é **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela esquerda** se para todo intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $L \in I$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \in I$ sempre que $0 < p - x < \varepsilon$. Analogamente, diz-se que L é **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita** se para todo intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $L \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \in I$ sempre que $0 < x - p < \varepsilon$.

Exemplo 1.1.15. Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) := \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$, com $g(0) \in \mathbb{R}$ qualquer[18]. Vamos ver que o limite de $g(x)$ quando x tende a 0 pela esquerda é $-\infty$. Um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ *em torno de* $-\infty$ é da forma $I = [-\infty, M)$ para algum $M \in \mathbb{R}$, que podemos assumir negativo, i.e., tal que

[18] O valor que g assume em 0 é irrelevante para o que faremos. Na prática, isto significa que estamos considerando, na verdade, a restrição da função g ao subconjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Porém, não precisa se preocupar com isso ainda.

$M < 0$. Agora, busca-se $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < -x < \varepsilon$, então $g(x) \in I$, i.e., $g(x) < M$. Ora, como $-x > 0$ e $M < 0$, temos

$$\frac{1}{x} < M \Leftrightarrow -\frac{1}{M} > -x,$$

mostrando que basta tomar $\varepsilon := -\frac{1}{M}$ (certo?)$^\star_\star$. Analogamente, o limite de $g(x)$ quando x tende a 0 pela direita é $+\infty$. Por fim, não existe limite de $g(x)$ quando x tende a 0: $+\infty$ não pode ser limite de $g(x)$ pois sempre podemos tomar pontos arbitrariamente próximos de 0 pela esquerda, e estes se aproximam de $-\infty$; por sua vez, $-\infty$ também não pode ser limite de $g(x)$ (por quê?)$^\star_\star$. ▲

Parece a definição de limite usual mas, a rigor, não é:

(i) no caso canhoto, apenas os pontos x satisfazendo $x < p$ interessam (aqueles à esquerda de p!);

(ii) no caso destro, apenas os pontos x satisfazendo $p < x$ interessam (aqueles à direita de p!).

A princípio, isto proíbe a *aplicação* das propriedades de limites usuais para limites laterais, já que os segundos são diferentes dos primeiros. Porém, como as demonstrações são verdadeiramente análogas, o mais comum é deixar essas verificações como exercícios[19]. O ponto importante aqui é outro: se você interpretar limites laterais como limites de redes, as verificações nem precisam ser deixadas como exercício, pois as propriedades se tornam corolários diretos.

($-$) **Para o limite pela esquerda.** Ao considerar $\mathbb{R}_{<p} := (-\infty, p)$ com a relação $\preceq$ definida sobre $\mathbb{R}_p$, tem-se $a \preceq b$ se, e somente se, $a \leq b$, pois como ambos $a, b \in (-\infty, p)$, tem-se $a < p$ e $b < p$, de modo que

$$a \preceq b \Leftrightarrow |b - p| \leq |a - p| \Leftrightarrow p - b \leq p - a \Leftrightarrow -b \leq -a \Leftrightarrow a \leq b.$$

Agora, como $(\mathbb{R}_{<p}, \preceq)$ é dirigido (certo?)*, podemos considerar a rede $(f(x))_{x \in \mathbb{R}_{<p}}$. Enfim, um ponto $L \in [-\infty, +\infty]$ é limite da rede $(f(x))_{x \in \mathbb{R}_{<p}}$ se, e somente se, para todo intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $L \in I$ existe $D \in \mathbb{R}_{<p}$ tal que $f(x) \in I$ sempre que $x \succeq D$. Como no Exemplo 1.0.7, não é difícil perceber que

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_{<p}} f(x) = L \text{ se, e somente se, } L \text{ é limite de } f(x) \text{ quando } x \text{ tende a } p \text{ pela esquerda.}$$

($+$) **Para o limite pela direita.** Ao considerar $\mathbb{R}_{>p} := (p, +\infty)$ com a relação $\preceq$ definida sobre $\mathbb{R}_p$, tem-se $a \preceq b$ se, e somente se, $b \leq a$, pois como ambos $a, b \in (p, +\infty)$, tem-se $p < a$ e $p < b$, acarretando

$$a \preceq b \Leftrightarrow |b - p| \leq |a - p| \Leftrightarrow b - p \leq a - p \Leftrightarrow b \leq a.$$

Agora, como $(\mathbb{R}_{>p}, \preceq)$ é dirigido (certo?)*, podemos considerar a rede $(f(x))_{x \in \mathbb{R}_{>p}}$. Enfim, um ponto $L \in [-\infty, +\infty]$ é limite da rede $(f(x))_{x \in \mathbb{R}_{>p}}$ se, e somente se... Você pegou a ideia, e não deve ter dificuldades para verificar que

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_{>p}} f(x) = L \text{ se, e somente se, } L \text{ é limite de } f(x) \text{ quando } x \text{ tende a } p \text{ pela direita.}$$

Portanto, já não precisamos nos preocupar em provar que limites laterais, quando existem, são únicos, pois já provamos tal resultado para redes reais quaisquer. Em particular, ficam justificadas as notações usuais para os limites laterais:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) := \lim_{x \in \mathbb{R}_{<p}} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p^+} f(x) := \lim_{x \in \mathbb{R}_{>p}} f(x). \tag{1.3}$$

Analogamente, após provarmos as propriedades operatórias dos limites reais de redes reais, como

$$\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d + \lim_{d \in \mathbb{D}} y_d = \lim_{d \in \mathbb{D}} (x_d + y_d),$$

teremos, <u>automaticamente</u>, os resultados correspondentes para os diversos tipos de limites de funções, como

$$\lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x) = \lim_{x \to p} (f(x) + g(x)), \quad \lim_{x \to p^-} f(x) + \lim_{x \to p^-} g(x) = \lim_{x \to p^-} (f(x) + g(x)), \quad \text{etc.}$$

[19] Que nunca são feitos!

Observação 1.1.16 (Importante)**.** Talvez você tenha notado que

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to p^-} f(x) = \lim_{x\to p^+} f(x) = L,$$

ou, verbalmente: se o limite de $f(x)$ quando x tende a p existe e é igual a L, então ambos os limites laterais de $f(x)$ em p existem e são iguais a L. Isto de fato acontece (por quê)$\overset{\star}{\star\star}$, o que dá um critério prático para decidir quando $\lim_{x\to p} f(x)$ não existe: basta que os limites laterais não existam, ou existam mas não coincidam. Secretamente, trata-se do mesmo fenômeno observado na sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, que não converge por existirem *subsequências* que convergem para pontos distintos. Retornaremos a isso em breve, não se preocupe. △

Por fim, uma consequência inesperada de interpretar limites laterais como redes:

Proposição 1.1.17. *Se $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é monótona, então*

$$\lim_{x\to p^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to p^+} f(x)$$

existem em $\mathbb{R}$ para todo $p\in\mathbb{R}$.

Demonstração. Se f é crescente, por exemplo, então $(f(x))_{x\in\mathbb{R}_{<p}}$ é uma rede crescente e sua imagem é limitada superiormente por $f(p)$, enquanto $(f(x))_{x\in\mathbb{R}_{>p}}$ é decrescente e sua imagem é limitada inferiormente por $f(p)$ (por quê?)$\overset{\star}{\star}$. Logo, pelo Teorema 1.1.4, existem $L, L'\in\mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = \lim_{x\in\mathbb{R}_{<p}} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\in\mathbb{R}_{>p}} f(x) = L',$$

como desejado[20]. □

Exercício 1.15 ($\overset{\star}{\star}$)**.** Prove a proposição anterior para o caso em que f é decrescente. Sugestão: não prove, mas apenas use o que já foi provado, observando que $-f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é crescente se f for decrescente[21]. ■

Supremos e ínfimos revistos (parte I)

É possível que, em seu primeiro contato com supremos e ínfimos, você tenha *sentido* que as definições escondiam alguma *noção de* limite – como os estudandos em Cálculo I ou II. Agora, após conhecer limites de redes, talvez a sensação esteja mais forte. Por sorte, a impressão está certa, e não é difícil se convencer disso.

De fato, para $S\subseteq\mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio, podemos considerar S como um conjunto dirigido tanto com a ordenação usual de $\mathbb{R}$ quanto com a ordem inversa. Para evitar confusões, vamos escrever $\overrightarrow{S}$ para indicar o conjunto dirigido $(S,\leq)$ (aqui, $\leq$ é realmente a ordem usual), e $\overleftarrow{S}$ para indicar o conjunto dirigido $(S,\preceq)$, onde $a\preceq b$ se, e somente se, $b\leq a$ (se você prometer não se confundir, pode escrever $\geq$ em vez de $\preceq$).

Proposição 1.1.18. *Nas notações acima,* $\sup S = \lim_{s\in\overrightarrow{S}} s$ *e* $\inf S = \lim_{s\in\overleftarrow{S}} s$.

Demonstração. Note que as redes $(s)_{s\in\overrightarrow{S}}$ e $(s)_{s\in\overleftarrow{S}}$ são, respectivamente, crescente e decrescente, e ambas têm o conjunto S como imagem. Logo, para os casos limitados, tudo segue do Teorema 1.1.4. Os casos ilimitados decorrem do que se observou acerca de supremos e ínfimos de conjuntos ilimitados (cf. Exercício 1.9). Completar os detalhes fica por sua conta ($\overset{\star}{\star\star}$). □

Futuramente, esta abordagem permitirá reobter as propriedades operatórias de supremos e ínfimos como casos particulares das propriedades operatórias dos limites de redes (mas a que custo, não é mesmo?).

[20]Cuidado: o enunciado do Teorema 1.1.4 originalmente exige que a imagem da rede seja limitada (superiormente e inferiormente). Porém, isto foi feito apenas para tornar o enunciado mais legível: na prática, se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é rede crescente e sua imagem é limitada superiormente (mas não inferiormente), o mesmo argumento se aplica para mostrar que $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = \sup\{x_d : d\in\mathbb{D}\}$; analogamente, se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é decrescente e sua imagem é limitada inferiormente, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = \inf\{x_d : d\in\mathbb{D}\}$.

[21]Se você for uma pessoa muito honesta, talvez prefira esperar ter em mãos as propriedades operatórias de limites, a fim de usar a identidade $\lim_{d\in\mathbb{D}}(-x_d) = -\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d$. É uma atitude muito honrosa, parabéns!

Bolas abertas e limites em espaços métricos

Os intervalos na reta estendida permitiram não apenas dar sentido formal aos limites infinitos, como também (permitiram) interpretar de maneira mais intuitiva/geométrica as noções de limites reais. Algo similar pode ser feito em espaços normados e métricos – mas em vez de intervalos, usam-se *bolas*. Para motivar a definição, observe que para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, ao fazer $c := \frac{a+b}{2}$ e $r := \frac{b-a}{2}$, resulta

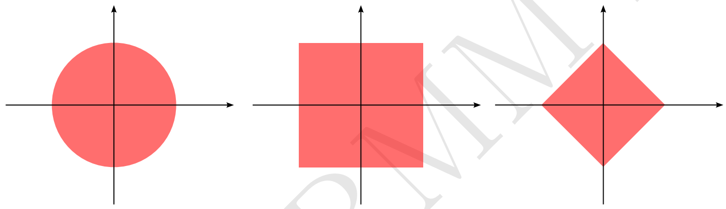
$$(a, b) = (c - r, c + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}.$$

Exercício 1.16 $(\star)$**.** Mostre que as identidades acima estão certas. Dica/observação: note que c é o "centro" do intervalo (a, b). ■

A última *descrição* de intervalo tem a vantagem de não depender da ordem de $\mathbb{R}$ ou de sua estrutura algébrica: ao escrever $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$, expressa-se que (a, b) é a coleção de todos os pontos da reta cuja distância até c é menor do que r. Ou seja: trata-se de algo *realizável* em *espaços métricos* (cf. Definição 1.0.10).

Definição 1.1.19. Dado um espaço métrico (X, d), para $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$, define-se a **d-bola aberta de centro x e raio r** como sendo o conjunto $B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Quando não houver risco de confusão, o sufixo "d-" será suprimido. ¶

Exemplo 1.1.20 (Bolas em $\mathbb{R}^2$)**.** O uso da palavra "bola" é motivado pela interpretação geométrica das *bolas* definidas por meio das normas euclidianas em $\mathbb{R}^2$ (no plano) e $\mathbb{R}^3$ (no espaço), como sugerido pela figura a seguir, à esquerda.



No entanto, você deve abandonar o quanto antes a ideia de que *bolas* precisam ser "redondas". Chamando por d_∞ a métrica em $\mathbb{R}^2$ induzida pela norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$ (cf. Exercício 1.5), não é difícil perceber que $B_{d_\infty}(0, 1)$ corresponde ao quadrado central na figura anterior, onde 0 indica o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$, por abuso de notação (e é um bom exercício fazer o esboço por conta própria!)$^{\star}_{\star\star}$.

Da mesma forma, chamando por d_1 a métrica em $\mathbb{R}^2$ induzida pela norma da soma $\|\cdot\|_1$ (cf. Exercício 1.5), a bola $B_{d_1}(0, 1)$ corresponde ao último quadrado na figura anterior, à direita. Com efeito, deve-se ter $u := (x, y) \in B_{d_1}(0, 1)$ se, e somente se, $\|u\|_1 < 1$, i.e., $|x| + |y| < 1$. Ocorre que tal desigualdade equivale a $|x| - 1 < y < 1 - |x|$, e os pontos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ com tal propriedade são, precisamente, aqueles que se encontram na interseção das duas regiões esboçadas na Figura 1.3 (verifique!)$^{\star}_{\star\star}$. ▲

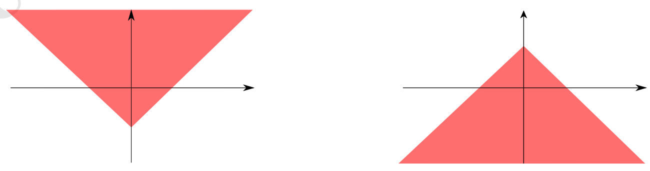


Figura 1.3: Os pontos do plano satisfazendo as inequações $|x| - 1 < y$ e $y < 1 - |x|$, respectivamente.

Bolas abertas permitem dar uma interpretação geométrica bastante intuitiva para convergência: uma rede $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ num espaço métrico (X, d) converge para um ponto $L \in X$ se, e somente se, para toda bola aberta B *centrada* em L existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $x_a \in B$ para todo $a \succeq A$. Exatamente o que se tem em $\mathbb{R}$ ou em $[-\infty, +\infty]$, apenas trocando intervalos abertos por bolas abertas.

Exercício 1.17 $(\substack{\star\\ \star})$**.** Prove a Proposição 1.0.12 usando bolas abertas. Dica: imite a Proposição 1.1.11. ■

Exemplo 1.1.21 (Métrica discreta)**.** As bolas abertas dependem das métricas, e estas variam com o contexto. Para piorar, um mesmo conjunto admite muitas métricas diferentes: você já viu acima, por exemplo, que o plano $\mathbb{R}^2$ admite três métricas distintas. Mas essas três não esgotam o repertório.

Sobre qualquer conjunto X, podemos definir uma métrica $d_X : X \times X \to \{0, 1\}$ chamada de (métrica) **discreta**, fazendo

$$d_X(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Exercício 1.18 ($\star$)**.** Convença-se de que d_X é, de fato, uma métrica em X. ■

Quando tal métrica é considerada em X, há apenas dois tipos de bolas abertas: se $0 < r < 1$, então $B_{d_X}(x, r) = \{x\}$ pois não há $y \neq x$ satisfazendo $d_X(x, y) < 1$; se $r \geq 1$, então $B_{d_X}(x, r) = X$ pois $d(x, y) \leq 1 \leq r$ para quaisquer $x, y \in X$. Na prática, d_X é capaz de detectar apenas quando dois pontos são distintos, sem qualquer outra nuance de distância, como nos espaços vetoriais normados. ▲

Há um problema aqui, certo? Se um conjunto admite tantas métricas diferentes, como escolher a correta para se trabalhar? Resposta: não há métrica certa. O que pode existir, a depender do caso, é a métrica mais conveniente para um dado contexto. Para espaços vetoriais do tipo $\mathbb{R}^n$, por exemplo, o mais comum é imitar a experiência empírica que temos no *espaço físico*, o que faz da métrica induzida pela norma euclidiana a escolha *canônica*. Mas mesmo esta escolha pode mudar a depender do que você pretende fazer com a métrica.

Se você precisa construir uma casa, é melhor manter a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^3$. Porém, se você trabalha no setor de transportes terrestres, pode preferir a métrica da soma: afinal de contas, para quem não pode voar do ponto (a, b) até o ponto (c, d) em linha reta, é mais conveniente conhecer as distâncias de a até c e de b até d, já que este será o trajeto percorrido[22]. Esta é justamente a distância da soma, $d_1((a, b), (c, d)) := \| (a, b) - (c, d) \|_1 = |a - c| + |b - d|$.

Por outro lado, se você pretende usar métricas apenas para analisar *limites* no próprio espaço e coisas do tipo, a situação fica um pouco melhor a depender do conjunto. Um fato surpreendente sobre $\mathbb{R}^n$, por exemplo, é que qualquer métrica induzida por *alguma* norma produz os mesmos resultados nesse aspecto! Embora seja cedo para provar isso, é relativamente fácil se convencer de que a afirmação vale em $\mathbb{R}^2$ para as três métricas discutidas anteriormente.

(i) Supondo que $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ é uma rede em $\mathbb{R}^2$ que converge para um ponto $L \in \mathbb{R}^2$ com respeito à métrica euclidiana, vamos mostrar que $x_a \to L$ com respeito à métrica do máximo: para isso, precisamos mostrar que para qualquer d_∞-bola aberta B *em torno* de L existe um índice $A \in \mathbb{A}$ tal que $x_a \in B$ para todo $a \succeq A$; ora, uma vez fixada uma dessas bolas B, certamente existe uma bola aberta euclidiana B' com $L \in B'$ e $B' \subseteq B$, o que permite usar a hipótese de que $x_a \to L$ na métrica euclidiana para obter $A \in \mathbb{A}$ tal que $x_a \in B'$ para todo $a \succeq A$.

(ii) Supondo que $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ é uma rede em $\mathbb{R}^2$ que converge para um ponto $L \in \mathbb{R}^2$ com respeito à métrica do máximo, vamos mostrar que $x_a \to L$ com respeito à métrica da soma: como no caso anterior, o *Katzensprung*[23] é mostrar que qualquer d_1-bola aberta centrada em L contém uma d_∞-bola aberta centrada em L (dentro de um quadrado há um "losango").

(iii) Supondo que $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ é uma rede em $\mathbb{R}^2$ que converge para um ponto $L \in \mathbb{R}^2$ com respeito à métrica da soma, vamos mostrar que $x_a \to L$ com respeito à métrica euclidiana... você entendeu a ideia, certo? ($\star\star\star$).

Exemplo 1.1.22 (Convergência não é bagunça)**.** É importante ter em mente que alterar a métrica pode sim alterar os limites. Por exemplo, com a métrica discreta em $\mathbb{R}$, uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = L$ para todo $n \geq N$. Com efeito, $B := B_{d_\mathbb{R}}(L, 1)$ é uma bola aberta legítima em torno de L com a métrica discreta, de modo que se $x_n \to L$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq N$. Uma vez que $B = \{L\}$, o resultado segue. ▲

A causa dos fenômenos observados acima tem nome: *topologia*. Em breve, veremos que todo espaço métrico (X, d) vem de fábrica com uma família de subconjuntos $\mathcal{T}_d$ chamada de *topologia*, que por sua vez é a verdadeira responsável por todas as coisas quando o assunto é *convergência* (pelo menos em contextos *elementares*). Em particular, quando duas métricas induzem a mesma *topologia* num espaço, uma rede convergirá com respeito a uma das métricas se, e somente se, convergir com respeito a outra. Assim, o fenômeno observado em $\mathbb{R}^n$ é apenas sintoma de que as métricas oriundas de normas (em $\mathbb{R}^n$!) geram a mesma topologia, que por sua vez é diferente da topologia induzida pela métrica discreta.

[22] Pelo menos num cenário com condições mínimas de urbanização.

[23] Pulo do gato, em alemão.

Com isso dito, você pode ser perguntar: por que alguém trocaria a norma de $\mathbb{R}^n$, uma vez que a norma euclidiana parece ser a mais intuitiva? Resposta: evitar contas! Como ilustração, veja a próxima proposição, com a qual encerramos esta seção.

Proposição 1.1.23. *Seja $\mathbb{R}^2$ com a métrica d induzida por uma das normas usuais $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Para uma rede $((x_a, y_a))_{a\in\mathbb{A}}$ em $\mathbb{R}^2$ e um par $(L, L') \in \mathbb{R}^2$, são equivalentes:*

(i) $\lim_{a\in\mathbb{A}} (x_a, y_a) = (L, L')$ *com respeito à métrica d;*

(ii) $\lim_{a\in\mathbb{A}} x_a = L$ *e* $\lim_{a\in\mathbb{A}} y_a = L'$ *em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. As discussões anteriores mostram que basta trabalhar com a norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$. E com ela a coisa toda fica bem simples.

($\Rightarrow$) Para mostrar que $x_a \to L$, podemos fixar $\varepsilon > 0$ a fim de encontrar $A \in \mathbb{A}$ tal que $x_a \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ sempre que $a \succeq A$. Ora, a bola aberta $B_d((L, L'), \varepsilon)$ é formada por todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo
$$\|(x, y) - (L, L')\|_\infty = \max\{|x - L|, |y - L'|\} < \varepsilon$$
e, por hipótese, existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $\|(x_a, y_a) - (L, L')\|_\infty < \varepsilon$ sempre que $a \succeq A$. Em particular, por valer (trivialmente!) $|x_a - L| \le \|(x_a, y_a) - (L, L')\|_\infty$, obtemos a condição desejada. Analogamente, mostra-se que $y_a \to L'$.

($\Leftarrow$) Para mostrar que $(x_a, y_a) \to (L, L')$ em $\mathbb{R}^2$, fixa-se uma bola aberta $B_d((L, L'), r)$ em torno de (L, L') a fim de encontrar $A' \in \mathbb{A}$ tal que $\|(x_a, y_a) - (L, L')\|_\infty < r$ sempre que $a \succeq A'$. Desta vez, a hipótese assegura $A_0, A_1 \in \mathbb{A}$ tais que $|x_a - L| < r$ se $a \succeq A_0$ e $|y_a - L'| < r$ se $a \succeq A_1$ (pois $x_a \to L$ e $y_a \to L'$, respectivamente). Daí, basta tomar $A' \succeq A_0, A_1$, que existe por $\mathbb{A}$ ser dirigido, acarretando
$$\|(x_a, y_a) - (L, L')\|_\infty = \max\{|x_a - L|, |y_a - L|\} < r$$
sempre que $a \succeq A'$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. □

Poderíamos provar a proposição acima sem apelar para a norma do máximo? Certamente. Porém, algumas alterações seriam necessárias: com a norma euclidiana, por exemplo, também ocorre a desigualdade (um pouco *menos óbvia*[24])
$$|x - L|, |y - L'| \le \|(x, y) - (L, L')\|_2 = \sqrt{(x - L)^2 + (y - L')^2},$$
necessária para provar a "ida" ($\Rightarrow$), enquanto
$$\|(x, y) - (L, L')\|_2 = \|(x - L, 0) + (0, y - L')\|_2 \le |x - L| + |y - L'|$$
(por quê?)$^{\star}_{\star}$, que pode ser usada para demonstrar a "volta" ($\Leftarrow$). Embora nada disso seja terrivelmente mais difícil do que a demonstração apresentada, o apego aos cálculos pode ofuscar o verdadeiro conceito: um problema de convergência em $\mathbb{R}^2$ nada mais é do que dois problemas simultâneos de convergência em $\mathbb{R}$! Nesse sentido, trocar as métricas de vez em quando pode ajudar a não perder tempo com o que não interessa!

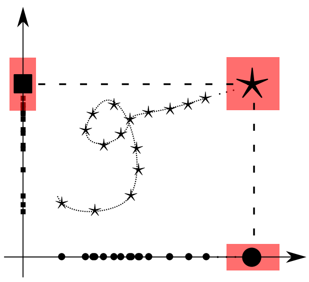


Figura 1.4: As estrelhinhas convergem para a estrelona se, e somente se, os pontinhos convergem para o pontão e os quadradinhos convergem para o quadradão.

[24] Mas é *quase* óbvia, certo? ($^{\star}_{\star}$).

1.2 A “álgebra ordenada” dos limites

1.2.0 Essencial

Utilizar a definição de convergência para verificar se uma rede (sequência, função, etc.) converge para um ponto escolhido é um processo delicado e artesanal: a depender da rede $(x_d)_d$, pode ser que o método para assegurar o índice D a partir do qual as *distâncias* entre x_d e o candidato a limite se tornem menores do que um $\varepsilon > 0$ dado seja diferente de todos os artifícios conhecidos pela pessoa até o momento – se o método existir, afinal de contas o ponto escolhido pode não ser limite da rede.

Um modo de (tentar) simplificar isso consiste em expressar uma rede em termos de outras redes cujos limites já são conhecidos (por sorte ou azar). Os dois modos mais comuns são:

(i) escrever o termo da rede como uma expressão algébrica envolvendo redes cujos limites são conhecidos;

(ii) comparar (no sentido de ordem) os termos da rede com os termos de outras redes cujos limites são conhecidos.

Operações com limites reais

Em termos mais mundanos, aqui iremos verificar as *propriedades operatórias dos limites*, que indicam como os limites de redes reais se comportam diante das operações algébricas usuais. Por ser o primeiro contato formal com tais propriedades[25], o foco inicial será nas situações em que as redes convergem para pontos na reta real.

Lema 1.2.0. *Se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma rede real que converge em $\mathbb{R}$, então $|\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d| = \lim_{d\in\mathbb{D}} |x_d|$.*

Demonstração. Fazendo $L := \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d$, mostraremos que $\lim_{d\in\mathbb{D}} |x_d| = |L|$. Para isso, fixado $\varepsilon > 0$, busca-se $D \in \mathbb{D}$ tal que $||x_d| - |L|| < \varepsilon$ sempre que $d \succeq D$ (certo)*. Mas isto é muito simples: basta notar que $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (verifique!)$^\star_\star$ e daí apelar para o fato de que existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - L| < \varepsilon$ sempre que $d \succeq D$. Os detalhes ficam por sua conta. □

Teorema 1.2.1. *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais sobre o mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$, tais que $x_d \to x$ e $y_d \to y$ para certos $x, y \in \mathbb{R}$.*

(i) *A rede $(z_d)_{d\in\mathbb{D}}$ dada por $z_d := x_d + y_d$ para todo d é tal que $z_d \to x + y$, i.e.,*

$$\lim_{d\in\mathbb{D}}(x_d + y_d) = \lim_{d\in\mathbb{D}} x + \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d.$$

(ii) *A rede $(z_d)_{z\in\mathbb{D}}$ dada por $z_d := x_d \cdot y_d$ para todo d é tal que $z_d \to x \cdot y$, i.e.,*

$$\lim_{d\in\mathbb{D}}(x_d \cdot y_d) = \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d \cdot \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d.$$

(iii) *Se $y \neq 0$ e $y_d \neq 0$ para todo $d \in \mathbb{D}$, então a rede $(z_d)_{d\in\mathbb{D}}$ dada por $z_d := \frac{x_d}{y_d}$ é tal que $z_d \to \frac{x}{y}$, i.e.,*

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = \frac{\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d}{\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} y_d}.$$

[25] Quem cursou pelo menos Cálculo I tem toda a razão em discordar

Demonstração. Ao longo desta prova, ε indica um número real estritamente maior do que 0. Para o primeiro caso, devemos encontrar $D \in \mathbb{D}$ tal que $|z_d - (x+y)| < \varepsilon$ sempre que $d \succeq D$. Ora, temos

$$|z_d - (x+y)| = |x_d + y_d - x - y| = |(x_d - x) + (y_d - y)| \leq \underbrace{|x_d - x|}_{(A)} + \underbrace{|y_d - y|}_{(B)}.$$

Como $x_d \to x$, podemos deixar (A) tão pequeno quanto desejado, bastando para isso ajustar o índice d. Da mesma forma, (B) pode ser feito tão pequeno quanto quisermos pois $y_d \to y$. Queremos $(A) + (B) < \varepsilon$, certo? Então, se fizermos $(A), (B) < \frac{\varepsilon}{2}$, teremos a desigualdade desejada![26] Mais precisamente: como $x_d \to x$ e $y_d \to y$, existem $D_0, D_1 \in \mathbb{D}$ tais que $|x_d - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $d \succeq D_0$ e $|y_d - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $d \succeq D_1$; por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $D \succeq D_0, D_1$ e daí, por transitividade, se $d \succeq D$, então $d \succeq D_0$ e $d \succeq D_1$, acarretando

$$|z_d - (x+y)| \leq |x_d - x| + |y_d - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O segundo caso é análogo: busca-se $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d y_d - xy| < \varepsilon$ sempre que $d \succeq D$. A diferença, desta vez, é que precisamos "somar zero" de um jeito *esperto* duas vezes:

✓ primeiro fazemos

$$|x_d y_d - xy| \leq |x_d y_d + (x_d y - x_d y) - xy| \leq |x_d| \cdot |y_d - y| + |y| \cdot |x_d - x|;$$

✓ depois[27], note que $|x_d| = |x_d + (-x + x)| \leq |x_d - x| + |x|$, de modo que em virtude da desigualdade anterior, resulta

$$|x_d y_d - xy| \leq (|x_d - x| + |x|) \cdot |y_d - y| + |y| \cdot |x_d - x| = |x_d - x| \cdot (|y_d - y| + |y|) + |x| \cdot |y_d - y|.$$

Acabou: como $y_d \to y$, existe $D_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|y_d - y| < \frac{\varepsilon}{2(|x|+1)} := \alpha$ sempre que $d \succeq D_0$; chamando $\beta := \alpha + |y|$, existe $D_1 \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - x| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$ sempre que $d \succeq D_1$ (pois $x_d \to x$); enfim, para $D \succeq D_0, D_1$, verifica-se

$$|x_d y_d - xy| < \frac{\varepsilon}{2\beta} \cdot \beta + |x| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|x|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $d \succeq D$ (certo?)[28].

Para o terceiro caso, basta mostrar que $\lim_{d \in \mathbb{D}} \frac{1}{y_d} = \frac{1}{y}$, pois daí o item (ii) assegura

$$\lim_{d \in \mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = \lim_{d \in \mathbb{D}} \left(x_d \cdot \frac{1}{y_d} \right) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}.$$

[26] Felizmente, a vida é curta demais para explicar esse tipo de raciocínio em todas as situações em que precisarmos escolher valores "espertos" para épsilons intermediários. "*Mas como eu poderia adivinhar que era para escolher* $\frac{\varepsilon}{2}$*? A vida é muito cruel e o mundo me odeia!*". Resposta: não adivinhe. Por exemplo, pedindo apenas que $|x_d - x| < \varepsilon'$ e $|y_d - y| < \varepsilon'$, chega-se a $(A) + (B) < 2\varepsilon'$; como o que se busca é $(A) + (B) < \varepsilon$, o problema fica resolvido se $2\varepsilon' < \varepsilon$, ou seja, $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$. De modo geral, é dessa maneira que se "descobrem" valores adequados para os épsilons intermediários. Por que não escrever sempre assim? Simples: papel é caro, a vida é cruel e o mundo nos odeia.

[27] Não podemos pedir $D \in \mathbb{D}$ tal que $|y_d - y| < \frac{\varepsilon}{2|x_d|}$ sempre que $d \succeq D$ pois x_d também está *atrelado* ao índice d, ou seja: não é uma constante, diferente de $|x|$ e $|y|$, que estão ~~constantes~~ fixos.

[28] Pois $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (verifique!)*. Precisa-se fazer isso pois poderia ocorrer $|x| = 0$, o que nos obrigaria a considerar tal caso separadamente.

Uma prova simples de que $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d} = \frac{1}{y}$ requer certo grau de malícia: busca-se $D \in \mathbb{D}$ tal que $\left|\frac{1}{y_d} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon$, e temos

$$\left|\frac{1}{y_d} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_d}{y_d \cdot y}\right| = \frac{|y_d - y|}{|y \cdot y_d|}.$$

Enquanto a condição $y_d \to y$ nos permite “controlar” o número $|y_d - y|$ diretamente, não é tão claro como fazer a mesma coisa com $\frac{1}{|y \cdot y_d|}$. A ideia aqui é apelar para a *conservação de sinal*: como $y \neq 0$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha < |y|$ e por valer $|y_d| \to |y|$ (pelo lema anterior), existe $D_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\alpha < |y_d|$ para todo $d \succeq D_0$ (por quê?)$\overset{\star}{\star\star}$. Consequentemente, $\frac{1}{|y|\cdot|y_d|} < \frac{1}{|y|\alpha}$. Agora, por existir $D_1 \in \mathbb{D}$ tal que $|y_d - y| < \varepsilon\alpha|y|$, basta tomar $D \succeq D_0, D_1$, pois assim $d \succeq D$ acarreta

$$\left|\frac{1}{y_d} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{|y_d - y|}{|y \cdot y_d|} < \frac{1}{|y|\alpha} \cdot \varepsilon\alpha|y| = \varepsilon. \qquad \square$$

Exercício 1.19 ($\star$)**.** Adapte alguns dos argumentos acima para os casos de sequências e funções reais. ■

Observação 1.2.2. A formulação do teorema anterior deve ser levada à sério, no seguinte sentido: se $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d$ são números reais, então o limite de $(z_d)_{d\in\mathbb{D}}$ existe e é dado pela expressão correspondente. **Não se pode assegurar** que os limites de $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ ou $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ existem apenas com a garantia de que $(z_d)_{d\in\mathbb{D}}$ converge em $\mathbb{R}$.

Por exemplo: fazendo $x_n := (-1)^n$ e $y_n := (-1)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, verifica-se

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = -1,$$

mas tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergem em $\mathbb{R}$. Apesar disso, esse detalhe é tipicamente omitido, o que pode confundir pessoas incautas. Por exemplo, para $\alpha \in \mathbb{R}$, é comum encontrar por aí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{2^n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{2^n}\right)\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \alpha - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\right)^2 = (\alpha - 0)^2 = \alpha^2,$$

o que, a rigor, deveria ser interpretado da direita para a esquerda: como $\lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, resulta $\lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{2^n}\right) = \alpha$; logo, $\lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{2^n}\right)^2 = \alpha^2$. Todavia, a vida é curta demais para não vivê-la perigosamente. △

Observação 1.2.3. Se $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d \neq 0$, então não é preciso *exigir* $y_d \neq 0$ para todo d a fim de *estimar* $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d}$: na verdade, basta que exista $D \in \mathbb{D}$ tal que $y_d \neq 0$ sempre que $d \succeq D$. De fato, neste caso, o subconjunto $D^{\uparrow} := \{d \in \mathbb{D} : d \succeq D\}$ ainda é dirigido pela pré-ordem $\preceq$ de $\mathbb{D}$ (certo?)*, o que permite considerar $(y_d)_{d\in D^{\uparrow}}$ como uma rede legítima. Daí, não é difícil perceber[29] que para $L \in [-\infty, +\infty]$, tem-se $\lim_{d\in\mathbb{D}} y_d = L$ se, e somente se, $\lim_{d\in D^{\uparrow}} y_d = L$. Isto permite *interpretar* $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{y_d}$ como sendo $\lim_{d\in D^{\uparrow}} \frac{1}{y_d}$, mesmo que, a rigor, o número $\frac{1}{y_d}$ possa não estar definido para certos índices $d \in \mathbb{D}$.

No caso, de sequências, por exemplo, se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $y_n \to y \neq 0$, basta que exista $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \neq 0$ sempre que $n \geq N$: em tal situação, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N' \geq N$ tal que $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon$ para qualquer $n \geq N'$. Já no caso de uma função real $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to p} f(x) = L \neq 0$, basta que exista $r > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ sempre que $0 < |x - p| < r$: agora, para qualquer $\varepsilon > 0$, exite δ com $0 < \delta < r$ tal que $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon$ para todo x com $0 < |x - p| < \delta$. △

[29]Leia-se: exercício! $(\substack{\star\\\star})$.

Definição 1.2.4. Para simplificar futuras notações, escreveremos $\lim\limits_{d \succeq D} x_d$ para indicar o limite de uma rede $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ restrita ao subconjunto de índices $D^{\uparrow}$ sempre que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ convergir. ¶

Exemplo 1.2.5. No caso de sequências, podemos reinterpretar limites do tipo $\lim_{n\geq N} x_n$ como limites usuais de sequências, afinal de contas, $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\} = \{N + n : n \in \mathbb{N}\}$, e daí não é difícil se convencer de que

$$\lim_{n\geq N} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{N+n}.$$

Pense um pouco antes de discordar ou concordar[30]. ▲

Exemplo 1.2.6 (Teste da divergência para séries de números reais)**.** As propriedades operatórias de limites dão um critério muito simples para dizer quando uma série $\sum a_n$ de números reais <u>não</u> converge em $\mathbb{R}$.

Proposição 1.2.7. *Se $\sum a_n$ converge em $\mathbb{R}$, então $a_n \to 0$.*

Demonstração. Chamando $\sum a_n = a$ e $s_n := a_0 + \ldots + a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $s_n \to a$ por definição e, pelo que se discutiu acima,

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = a.$$

Agora, por um lado, temos

$$\lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} (a_0 + \ldots + a_n + a_{n+1} - (a_0 + \ldots + a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

e, por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = a - a = 0,$$

mostrando que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Infelizmente, a recíproca não é verdadeira: oportunamente veremos que $\sum \frac{1}{n+1} = +\infty$, embora se tenha $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. ▲

Exemplo 1.2.8. *Para $a \in \mathbb{R}$ com $|a| < 1$, verifica-se* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. De fato, se $0 \leq a < 1$, existe $L \in \mathbb{R}$ com $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ pois $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e decrescente (certo?). Como $(a^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ também deve convergir para L, obtemos

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a \cdot a^n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = aL,$$

acarretando $L(1-a) = 0$ e, consequentemente, $L = 0$. Isto também resolve o caso em que $-1 < a \leq 0$: pela parte anterior, $\lim_{n\to\infty} |a^n| = 0$, mas isto acarreta $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ (por quê?)[31]. Em particular, resulta que $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ para qualquer a com $|a| < 1$ (cf. Exercício 1.8). ▲

Exercício 1.20 $\left({}^{\star}_{\star}\right)$**.** Mostre que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função polinomial, então

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

para qualquer $p \in \mathbb{R}$. Dica: indução. ■

[30] Lembre-se: em Matemática, "pensar" é abreviação para "faça as contas até se convencer". Outra coisa: um panda morre toda vez que alguém confunde $\lim\limits_{n\to\infty} x_{N+n}$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_N + n$.

[31] Faça por sua conta agora $\left({}^{\star}_{\star\star}\right)$ ou confira o Exercício 1.44.

Operações com limites na reta estendida

O Teorema 1.2.1 foi enunciado e demonstrado para limites reais. As situações em que as redes convergem para $-\infty$ ou $+\infty$, porém, são mais delicadas: precisa-se de cuidado para estender as propriedades *operatórias* uma vez que $-\infty$ e $+\infty$ não são números reais, o que impede que eles sejam *algebricamente operados* com os membros de $\mathbb{R}$. A reta estendida não é bagunça!

Teorema 1.2.9. *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes de números reais sobre o mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$, com $x_d \to x$ e $y_d \to y$, tais que $x \in [-\infty, +\infty]$ e $y \in \{-\infty, +\infty\}$.*[32]

(i) *Se $x \in [-\infty, +\infty)$ e $y = -\infty$, então $x_d + y_d \to -\infty$.*

(ii) *Se $x \in (-\infty, +\infty]$ e $y = +\infty$, então $x_d + y_d \to +\infty$.*

(iii) *Se $x > 0$, então $x_d \cdot y_d \to -\infty$ caso $y = -\infty$, e $x_d \cdot y_d \to +\infty$ se $y = +\infty$.*

(iv) *Se $x < 0$, então $x_d \cdot y_d \to +\infty$ caso $y = -\infty$, e $x_d \cdot y_d \to -\infty$ se $y = +\infty$.*

Demonstração. A argumentação fica bastante simplificada se apelarmos para a interpretação “geométrica”, i.e., intervalos.

(i) Para um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ em torno de $-\infty$, digamos $I := [-\infty, -M)$ para algum $M > 0$, busca-se $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d + y_d \in I$ sempre que $d \succeq D$. Há dois casos: se $x = -\infty$, então existem $D_0, D_1 \in \mathbb{D}$ tais que $x_d < -M$ (se $d \succeq D_0$) e $y_d < -M$ (se $d \succeq D_1$), de modo que ao escolher qualquer $D \succeq D_0, D_1$, resulta

$$x_d + y_d < -2M < -M$$

sempre que $d \succeq D$; se $-\infty < x$, então para qualquer $r > x$ com $r > 0$ existe $D_0 \in \mathbb{D}$ tal que $x_d < r$ para todo $d \succeq D_0$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$, e também existe $D_1 \in \mathbb{D}$ tal que $y_d < -(M + r)$, de modo que para qualquer $D \in \mathbb{D}$ com $D \succeq D_0, D_1$ se verifica

$$x_d + y_d < r - (M + r) = -M$$

sempre que $d \succeq D$, como queríamos.

(ii) O argumento é análogo e ficará por sua conta $(^{\star}_{\star\star})$[33].

(iii) Se $y = +\infty$ e $M > 0$, precisamos encontrar $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d y_d \in (M, +\infty]$ para todo $d \succeq D$. Ora, como $0 < x$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha < x$ e, daí, por $x_d \to x$ e $y_d \to y$, obtemos $D_0, D_1 \in \mathbb{D}$ tais que

$$d \succeq D_0 \Rightarrow \alpha < x_d, \text{ e}$$
$$d \succeq D_1 \Rightarrow \frac{M}{\alpha} < y_d,$$

de modo que para $D \succeq D_0, D_1$, vale $M < x_d y_d$ sempre que $d \succeq D$. O caso $y = -\infty$ é análogo e, por isso, ficará por sua conta.

(iv) Adivinha? Exercício! □

[32] Leia com atenção: se escrevêssemos $y \in \{A, B\}$, significaria que $y = A$ ou $y \in B$. Analogamente, ao escrever $y \in \{-\infty, +\infty\}$, deve-se entender que $y = -\infty$ ou $y = +\infty$.

[33] Sugestão: se não quiser sujar as mãos, note que os itens (iii) e (iv) garantem $-x_d \to -x \in [-\infty, +\infty)$, $-y_d \to -\infty$ e $-x_d - y_d \to -\infty$, e com uma aplicação adicional do item (iv) resulta $x_d + y_d \to +\infty$.

Exercício 1.21 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Complete a demonstração anterior, e observe que as posições de x e y podem ser trocadas em todos os casos[34]. Se preferir, pode argumentar com sequências ou limites de funções. ■

Exemplo 1.2.10 (As malditas *indeterminações*)**.** Na prática, o que as propriedades operatórias anteriores *fazem*? Resposta: elas permitem determinar, *a priori*, os limites de certas redes a partir dos limites de outras redes possivelmente mais simples, desde que algumas condições algébricas sejam satisfeitas. Assim, uma situação de *indeterminação* é aquela em que não se tem uma regra algébrica que permita determinar o limite *a priori*:

✗ não significa que o limite automaticamente não existe (em $\mathbb{R}$ ou em $[-\infty, +\infty]$);

✗ não significa que o limite é $+\infty$;

✗ não significa que o limite é $-\infty$;

✗ não significa que é proibido se perguntar se o limite existe.

Exercício 1.22 $(^{\star}_{\star})$**.** Leia os itens acima dez vezes. ■

Por exemplo: se $x_d \to +\infty$ e $y_d \to -\infty$, gostaríamos de atribuir um significado para "$+\infty + (-\infty)$" que permitisse determinar $\lim_{d\in\mathbb{D}}(x_d + y_d)$. Isto é possível? Resposta: não, pois depende do caso!

(i) Chamando $x_n \coloneqq 2n$ e $y_n \coloneqq -n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(2n - n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

(ii) Chamando $x_n \coloneqq n$ e $y_n \coloneqq -2n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(n - 2n) = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty.$$

(iii) Para $r \in \mathbb{R}$ fixado e chamando $x_n \coloneqq n + r$ e $y_n \coloneqq -n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(n + r - n) = \lim_{n\to\infty} r = r.$$

(iv) Chamando $x_n \coloneqq n$ e $y_n \coloneqq -n + (-1)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n + y_n = (-1)^n$ para todo n, e $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência divergente em $[-\infty, +\infty]$.

Logo, para qualquer valor L que você pensava que deveria ser atribuído "$+\infty + (-\infty)$", existem sequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ tais que $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) \neq L$. O mesmo tipo de fenômeno ocorre com outras expressões, como "$0 \cdot (\pm\infty)$". Lembre-se de alguns exemplos por conta própria $(^{\star}_{\star})$. ▲

Limites de redes do tipo $\left(\frac{x_d}{y_d}\right)_{d\in\mathbb{D}}$, com $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ convergentes na reta estendida, também podem ser determinados em algumas situações específicas.

Proposição 1.2.11. *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes de números reais sobre o mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$, com $x_d \to x$ e $y_d \to y$. Se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \{-\infty, +\infty\}$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} \dfrac{x_d}{y_d} = 0$.*

[34]**Importante**: isto segue da comutatividade das operações em $\mathbb{R}$ e da unicidade dos limites, afinal de contas, $(x_d + y_d)_{d\in\mathbb{D}} = (y_d + x_d)_{d\in\mathbb{D}}$.

Demonstração. Primeiro, observe que apesar de se ter $y_d \to y \neq 0$, poderia ocorrer $y_d = 0$ para *alguns* índices. No entanto, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $y_d \neq 0$ para todo $d \succeq D$ (certo?)[35], de modo que mostraremos, na verdade, $\lim_{d \succeq D} \frac{x_d}{y_d} = 0$.

Segundo, note que é suficiente assegurar $\lim_{d \succeq D} \frac{1}{y_d} = 0$: se isso estiver provado, então $(x_d)_{d \succeq D}$ e $\left(\frac{1}{y_d}\right)_{d \succeq D}$ serão redes reais cujos limites são números reais e, portanto,

$$\lim_{d \succeq D} \frac{x_d}{y_d} = \lim_{d \succeq D} x_d \cdot \lim_{d \succeq D} \frac{1}{y_d} = x \cdot 0 = 0.$$

Finalmente, para $\frac{1}{y_d} \to 0$: para $\varepsilon > 0$, $I := \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ é um intervalo aberto em torno de $-\infty$, de modo que se $y_d \to -\infty$, então existe $D' \succeq D$ tal que $d \succeq D'$ acarreta $y_d < -\frac{1}{\varepsilon}$ ou, equivalentemente[36],

$$-\varepsilon < \frac{1}{y_d} < 0 < \varepsilon,$$

i.e., $\left|\frac{1}{y_d}\right| < \varepsilon$. Para o caso em que $y_d \to +\infty$, basta repetir o argumento com $I := \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right]$. Os detalhes ficam por sua conta ($^\star_\star$). □

O caso em que $y_d \to 0$ é um pouco mais delicado do que o anterior pois a multiplicação *sente* o *sinal* dos termos y_d, i.e., a direção por meio da qual os pontos se aproximam de 0. Por exemplo, após estudarmos o *Teorema do Confronto* (o que ocorrerá muito em breve), poderemos concluir de maneira indolor que

$$\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

ao passo que $((-1)^n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge em $[-\infty, +\infty]$: para n par ocorre $(-1)^n 2^n > 0$ e, para n ímpar, $(-1)^n 2^n < 0$. Porém, nos casos em que os sinais de $(y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ se estabilizam num dos lados de 0, é possível determinar (*a priori*) o limite de $\left(\frac{1}{y_d}\right)_{d \in \mathbb{D}}$, o que por sua vez permite determinar o limite de redes do tipo $\left(\frac{x_d}{y_d}\right)_{d \in \mathbb{D}}$ num leque um pouco maior de situações (cf. Exercício 1.26).

Proposição 1.2.12. *Seja $(y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ uma rede de números reais tal que $y_d \to 0$.*

(i) *Se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $y_d > 0$ para todo $d \succeq D$, então $\lim_{d \in \mathbb{D}} \frac{1}{y_d} = +\infty$.*

(ii) *Se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $y_d < 0$ para todo $d \succeq D$, então $\lim_{d \in \mathbb{D}} \frac{1}{y_d} = -\infty$.*

Demonstração. Pelo item (iv) do Teorema 1.2.9, basta mostrar o primeiro caso: para $M > 0$, a hipótese assegura $D' \succeq D$ tal que $0 < y_d < \frac{1}{M}$ sempre que $d \succeq D'$ (por quê?)*, donde segue que $M < \frac{1}{y_d}$. Em outras palavras, mostramos que para todo intervalo aberto I em torno de $+\infty$ existe D' tal que $\frac{1}{y_d} \in I$ sempre que $d \succeq D'$. □

Exercício 1.23 ((?!))**.** Esboce o gráfico da função $g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $g(x) := \frac{1}{x}$ e reflita sobre os resultados anteriores. ■

[35] Este argumento já foi usado algumas vezes antes (e deixado como exercício...). Se ainda não parecer claro, espere até a discussão de monotonicidade, que virá a seguir.

[36] Pois $y_d < 0$ em tais casos.

Monotonicidade, sanduíche e confronto

Um modo alternativo de mostrar que $2^n \to +\infty$ em $[-\infty, +\infty]$ (cf. Exercício 1.12) consiste em apelar para a desigualdade $n < 2^n$, válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$: dado um intervalo I em torno de $+\infty$, digamos $I := (M, +\infty]$ para algum $M > 0$, ao fazer $N := \max\{M, 2\}$ resulta que $2^n \in I$ sempre que $n \geq N$, pois $2^n > n \geq N \geq M$.

Em certo sentido, os limites das sequências $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *concordam* com o comportamento dos seus termos: verifica-se $n \leq 2^n$ para n *suficientemente bom*[37] e

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} n \leq \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$$

Outros casos similares já passaram por aqui:

(i) $0 \leq \frac{1}{2^n}$ para todo n e $0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$;

(ii) $1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} 1 = 1$;

(iii) para $a \in (0,1)$, $1 + a + \ldots + a^n \leq \frac{1}{1-a}$ para todo n e $\sum a^n \leq \frac{1}{1-a}$.

Os exemplos acima sugerem que algo mais geral ocorre: se $x_d \to x$, $y_d \to y$ e vale $x_d \leq y_d$ para d suficientemente bom, então também vale $x \leq y$. Na prática:

$$x_d \leq y_d \text{ para } d \text{ suficientemente bom} \xRightarrow[\text{“passando o limite”}^{(\dagger)}]{} \lim_{d\in\mathbb{D}} x_d \leq \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d$$

onde $(\dagger)$ também costuma ser substituído pelas expressões “fazendo n tender a infinito” (no caso de sequências) ou “tomando x suficientemente próximo de p” (no caso de funções), etc. A sugestão está certa, e se deve ao Exercício 0.100 (cf. Figura 1.5, a seguir).

Teorema 1.2.13. *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais sobre o mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$, tais que $x_d \to x$ e $y_d \to y$ para certos $x, y \in [-\infty, +\infty]$.*

(i) (*Monotonicidade*): *se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \leq y_d$ para todo $d \succeq D$, então $x \leq y$.*

(ii) (*Conservação*): *se $x < y$, então existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d < y_d$ para todo $d \succeq D$.*

Demonstração. Tratemos de (i) pela contrapositiva. Supondo $y < x$ (negou-se a tese...), existem intervalos abertos e disjuntos $I, J \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $y \in I$ e $x \in J$. Agora,

- como $y_d \to y$, existe $D_0 \in \mathbb{D}$ tal que $y_d \in I$ sempre que $d \succeq D_0$ e,
- como $x_d \to x$, também existe $D_1 \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in J$ sempre que $d \succeq D_1$.

Note que ao escolher $D_2 \in \mathbb{D}$ melhor do que D_0 e D_1, o Exercício 0.100 garante que $y_d < x_d$ para todo $d \succeq D_2$ (por quê?)*. Em particular, se existisse $D \in \mathbb{D}$ como no enunciado do item (i), poderíamos tomar $d \succeq D_2, D$, mas isto acarretaria $y_d < x_x$ e $x_d \leq y_d$ simultaneamente, o que é absurdo. Portanto, não existe tal D (negou-se a hipótese...).

O item (ii) é um pouco mais fácil. Tomando novamente intervalos abertos e disjuntos $I, J \subseteq [-\infty, +\infty]$ tais que $x \in I$ e $y \in J$, o Exercício 0.100 assegura que $a < b$ sempre que $a \in I$ e $b \in J$. Logo, basta escolher $D \in \mathbb{D}$ de modo que se garanta $x_d \in I$ e $y_d \in J$ para todo $d \succeq D$, o que pode ser feito pois $x_d \to x$ e $y_d \to y$ (convença-se disso!)*. $\square$

[37] Lembrando que, neste caso, melhor = maior no sentido usual.

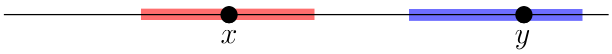


Figura 1.5: Pontos no intervalo vermelho são estritamente menores do que os pontos no intervalo azul.

Corolário 1.2.14 (Conservação de sinal)**.** *Seja* $(z_d)_{d\in\mathbb{D}}$ *uma rede real que converge para um ponto* $L \in [-\infty, +\infty]$.

(i) *Se* $L > 0$, *então existe* $D \in \mathbb{D}$ *tal que* $z_d > 0$ *para todo* $d \succeq D$.

(ii) *Se* $L < 0$, *então existe* $D \in \mathbb{D}$ *tal que* $z_d < 0$ *para todo* $d \succeq D$.

Demonstração. Segue do item (ii) do teorema anterior: para $L > 0$, basta fazer $x_d := z_d$ e $y_d := 0$ para todo $d \in \mathbb{D}$; para $L < 0$, faça $x_d := 0$ e $y_d := z_d$ para todo $d \in \mathbb{D}$. □

Corolário 1.2.15 (Conservação de sinal, para sequências)**.** *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais que converge para* $L \in [-\infty, +\infty]$.

(i) *Se* $L > 0$, *então existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n \geq N$.

(ii) *Se* $L < 0$, *então existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < 0$ *para todo* $n \geq N$.

Corolário 1.2.16 (Conservação de sinal, para funções)**.** *Sejam* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função,* $p \in \mathbb{R}$ *um ponto e* $L \in [-\infty, +\infty]$ *tal que* $\lim_{x\to p} f(x) = L$.

(i) *Se* $L > 0$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$ *tal que* $|x - p| < \delta$.

(ii) *Se* $L < 0$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$ *tal que* $|x - p| < \delta$.

E assim por diante...

Exercício 1.24 ($\star$)**.** Convença-se de que os dois últimos corolários são instâncias particulares do Corolário 1.2.14. Interprete graficamente. ■

Exemplo 1.2.17 (Como se livrar do truque de Rudin (cf. Observação 0.9.4))**.** Vamos mostrar que o conjunto $A := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$ satisfaz $(\sup A)^2 = 2$ (em $\mathbb{R}$) sem apelar para truques ou cartolas. Primeiro, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\sup A = \alpha$ pois $\mathbb{R}$ é corpo completo (cf. Exemplo 0.9.2). Agora, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\alpha - \frac{1}{2^n} < \alpha < \alpha + \frac{1}{2^n}.$$

Da definição de supremo, a primeira desigualdade assegura uma testemunha $a_n \in A$ de que $\alpha - \frac{1}{2^n}$ não é supremo de A, i.e., $\alpha - \frac{1}{2^n} < a_n$, enquanto a segunda desigualdade (aliada ao fato de que $\alpha \geq 1$) implica que $\alpha + \frac{1}{2^n} \notin A$. Logo,

$$\left(\alpha - \frac{1}{2^n}\right)^2 < a_n^2 < 2 \leq \left(\alpha + \frac{1}{2^n}\right)^2$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (pois $a_n \in A$ com $a_n > 0$). Ao "fazer n tender a infinito", resulta (cf. Observação 1.2.2)

$$\alpha^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{2^n}\right)^2 \leq 2 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\alpha + \frac{1}{2^n}\right)^2 = \alpha^2$$

como desejado. ▲

Exercício 1.25 $\left(\substack{\star \\ \star}\right)$**.** Use o raciocínio anterior para resolver o Exercício 0.126. ■

Observação 1.2.18. Note que não é possível concluir $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d < \lim_{d\in\mathbb{D}} y_d$ sabendo-se apenas que $x_d < y_d$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Já vimos alguns exemplos ao longo do texto. Encontre alguns deles para ter certeza. △

Intuitivamente, a convergência de uma rede "por baixo" de outra empurra o limite da segunda para cima (se este existir). Em particular, se duas redes que convergem para o mesmo ponto "sanduicharem" uma terceira rede, então...

Proposição 1.2.19 (Sanduíche)**.** *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(z_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais sobre o mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$ e considere $L \in [-\infty, +\infty]$. Se $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} z_d = L$ e existe $D \in \mathbb{D}$ com $x_d \leq y_d \leq z_d$ para todo $d \succeq D$, então $y_d \to L$.*

Demonstração. Dado um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $L \in I$, busca-se $D \in \mathbb{D}$ tal que $y_d \in I$ para todo $d \succeq D$. Ora, como $x_d \to L$ e $z_d \to L$, existem $D', D'' \in \mathbb{D}$ satisfazendo

$$d \succeq D' \Rightarrow x_d \in I \quad \text{e} \quad d \succeq D'' \Rightarrow z_d \in I.$$

Por $\mathbb{D}$ ser dirigido, existe $\widetilde{D} \geq D, D', D''$. Logo, se $d \succeq \widetilde{D}$, então $x_d \leq y_d \leq z_d$ com $x_d, z_d \in I$, donde o fato de I ser intervalo (cf. Definição 0.8.14) acarreta $y_d \in I$, como desejado. □

Argumentos de "sanduíche" são muito comuns e, a depender da fome, podem ser usados até mesmo em situações em que não parece haver pães.

Proposição 1.2.20 (Confronto)**.** *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais sobre o mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$, com $y_d \to 0$. Se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\{x_d : d \succeq D\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, então $x_d y_d \to 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.0, $|y_d| \to 0$. Agora, para $M > 0$ com $|x_d| < M$ para todo $d \succeq D$, note que $-M|y_d| \leq |x_d y_d| \leq M|y_d|$, com $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} -M|y_d| = \lim\limits_{d\in\mathbb{D}} M|y_d| = 0$. Logo, $x_d y_d \to 0$ pela proposição anterior. □

Exercício 1.26 (Confronto no infinito – $\left(\substack{\star \\ \star\star}\right)$)**.** Prove as afirmações a seguir. Dica: i) se você se sentir confortável com redes, basta provar os dois últimos itens, pois os outros são corolários; ii) em vez de investigar $\frac{x_d}{y_d}$, atente-se para o que a proposição anterior tem a dizer sobre o comportamento de $\frac{y_d}{x_d}$, e daí retorne para o caso desejado por meio da Proposição 1.2.12.

a) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências reais. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada[38], existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \cdot y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq N$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

b) Sejam $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais e $p \in \mathbb{R}$. Se f é limitada, existe $r > 0$ tal que $f(x) \cdot g(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - p| < r$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

c) Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais. Se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é limitada, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \cdot y_d > 0$ para todo $d \succeq D$ e $y_d \to 0$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = +\infty$.

d) Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais. Se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é limitada, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \cdot y_d < 0$ para todo $d \succeq D$ e $y_d \to 0$, então $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{y_d} = -\infty$ ■

[38] Lembre-se: uma sequência é limitada se sua imagem é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$, i.e., existe $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. **Isto não significa que a sequência tem limite**. Desta vez a culpa não é minha, mas sim de quem traduziu e popularizou tais termos no Brasil.

Exemplo 1.2.21 (Sanduíches no infinito (ou *princípio da explosão/implosão*))**.** Há uma pergunta bastante inocente que talvez você não tenha se feito até agora por manter algum tipo de respeito implícito pelas in(sti)tuições físicas: se permitimos que as redes reais convirjam para pontos na reta estendida, por que não considerar redes *na reta estendida*? Mais precisamente: por que não considerar coisas do tipo $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ com $x_d \in [-\infty, +\infty]$ e, possivelmente, $x_d \in \{-\infty, +\infty\}$? Resposta: se você quiser, pode!

Embora isso não traga vantagens do ponto de vista algébrico, já que $[-\infty, +\infty]$ não é um corpo, há pelo menos uma aplicação útil do ponto de vista de ordem: uma vez que a demonstração apresentada para o *Teorema do Sanduíche* não fez uso de qualquer coisa algébrica de $\mathbb{R}$, as redes $(x_d)_d$, $(y_d)_d$ e $(z_d)_d$ no enunciado poderiam ser tomadas em $[-\infty, +\infty]$. Em particular, fazendo $z_d := +\infty$ para todo d temos $z_d \to +\infty$, de modo que se $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d = +\infty$ e $x_d \leq y_d$ para d suficientemente bom, então conclui-se que $y_d \to +\infty$! Ao repetir as considerações para $z_d := -\infty$, chega-se ao seguinte resultado útil, que pode ser provado sem a gambiarra acima – mas a que custo, não é mesmo? ▲

Corolário 1.2.22 (Explosão/implosão)**.** *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais sobre um mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$. Se existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \leq y_d$ para todo $d \succeq D$, então*

(i) *$y_d \to +\infty$ se ocorrer $x_d \to +\infty$, e*

(ii) *$x_d \to -\infty$ se ocorrer $y_d \to -\infty$.*

Exercício 1.27 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais tais que $x_n \leq y_n$ para n suficientemente grande[39].

a) Mostre que se $\sum x_n = +\infty$, então $\sum y_n = +\infty$.

b) Mostre que se $\sum y_n = -\infty$, então $\sum x_n = -\infty$. ■

1.2.1 Extras

Integrais de Riemann como limites de redes (parte I)

Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, xingaremos de **partição do intervalo** $[a, b]$ qualquer sequência finita de números reais $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ com $n > 0$ e $a := a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n := b$. Embora, a rigor, não sejam as mesmas *partições* introduzidas na Definição 0.1.23, há uma relação clara entre ambas: se $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ é uma partição do *intervalo* $[a, b]$, então $\mathcal{P}' := \{[a_i, a_{i+1}) : i < n\}$ é uma partição do *conjunto* $[a, b)$ (certo?!)*.

Agora, fixada uma partição $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ do intervalo $[a, b]$, uma ***tag***[40] de $\mathcal{P}$ é uma sequência $T := (t_1, \ldots, t_n)$ de números reais satisfazendo $a_{i-1} \leq t_i \leq a_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. A coleção dos pares $(\mathcal{P}, T)$ em que $\mathcal{P}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ e T é uma *tag* de $\mathcal{P}$ será denotada por $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a, b]$, a família das **partições de Riemann** do intervalo $[a, b]$. Você já deve imaginar onde isso tudo vai dar.

Definição 1.2.23. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e $(\mathcal{P}, T)$ uma partição de Riemann do intervalo. A **soma de Riemann** da função f com respeito à partição $(\mathcal{P}, T)$ é o número real

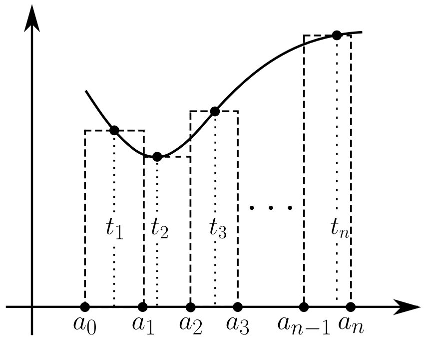
$$\sum_{(\mathcal{P},T)} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}),$$

onde $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ e $T := (t_1, \ldots, t_n)$. ¶

[39] Isto é: existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq N$.

[40] Nacionalistas podem preferir expressões (mais longas) em português, como *marcação*, *etiqueta*, *pontilhamento*, etc. Particularmente, tenho mais apego ao tempo do que ~~à bandeira~~ ao léxico.

Quando a função f é não-negativa, pode-se pensar em $\sum_{(\mathcal{P},T)} f$ como uma aproximação *tosca* do que seria a área da região plana determinada pelo gráfico de f com o eixo *horizontal*. Intuitivamente, a fim de tornar a aproximação menos *tosca*, i.e., torná-la uma aproximação *melhor* do que seria a área *real* da figura, basta *refinar* as partições, no sentido de acrescentar mais pontos a ela, processo em que se diminuem os *tamanhos* dos subintervalos da forma $[a_i, a_{i+1})$.



Para tornar mais precisas as considerações acima, vamos associar a cada partição $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ do intervalo $[a, b]$ o número $\|\mathcal{P}\| := \max\{a_i - a_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$, que xingaremos de **norma da partição**.

Definição 1.2.24. Diremos que $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é **Riemann-integrável** se existir $L \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer partição de Riemann $(\mathcal{P}, T)$ de $[a, b]$ se tenha $\left|L - \sum_{(\mathcal{P},T)} f\right| < \varepsilon$ sempre que $\|\mathcal{P}\| < \delta$. ¶

Em contextos que tratam unicamente do limite de sequências e funções com domínio real, a definição acima não costuma ser muito prática, posto que ela consiste numa *terceira forma de limite*[41]. Porém, as ferramentas apresentadas até agora permitem interpretar a Definição 1.2.24 como a mera exigência de que uma rede apropriada converge: ao declarar $(\mathcal{P}, T) \preceq (\mathcal{P}', T')$ se, e somente se, $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$, resulta que $(\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a, b], \preceq)$ é um conjunto dirigido, o que segue essencialmente da totalidade da ordem de $\mathbb{R}$. Com efeito, para $(\mathcal{P}, T), (\mathcal{P}', T') \in \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a, b]$, basta ver que $\|\mathcal{P}\| \leq \|\mathcal{P}'\|$ ou $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$.

Observação 1.2.25. Existe outra forma bastante natural de *dirigir* $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a, b]$ que é frequentemente útil: para partições $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ e $\mathcal{P}' := (a'_0, \ldots, a'_m)$ de $[a, b]$ com *tags* T e T', respectivamente, vamos escrever tanto $\mathcal{P} \sqsubseteq \mathcal{P}'$ quanto $(\mathcal{P}, T) \sqsubseteq (\mathcal{P}', T')$ para indicar que

$$\mathrm{im}\,(\mathcal{P}) = \{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \{a'_0, \ldots, a'_m\} = \mathrm{im}\,(\mathcal{P}'),$$

já que escrever apenas $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ seria tremendamente imoral. Agora, não é difícil perceber que $(\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a, b], \sqsubseteq)$ é um conjunto dirigido: para a condição de refinamento, dadas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ como acima, basta definir $\mathcal{P}'' := (p_0, \ldots, p_{k-1})$, onde $k := |\,\mathrm{im}\,(\mathcal{P}) \cup \mathrm{im}\,(\mathcal{P}')\,|$, $p_0 := a$ e, para cada $i < k$,

$$p_{i+1} := \min((\mathrm{im}\,(\mathcal{P}) \cup \mathrm{im}\,(\mathcal{P}')) \setminus \{p_0, \ldots, p_i\})$$

pois, com isso se verifica $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \sqsubseteq \mathcal{P}''$ (certo?!)[42]. As relações entre $\preceq$ e $\sqsubseteq$ são discutidas no próximo exercício. △

Exercício 1.28. Sejam $(\mathcal{Q}, R)$ e $(\mathcal{S}, T)$ partições de Riemann do intervalo $[a, b]$.

a) Mostre que se $(\mathcal{Q}, R) \sqsubseteq (\mathcal{S}, T)$, então $\|\mathcal{S}\| \leq \|\mathcal{Q}\|$. Conclua que $(\mathcal{Q}, R) \preceq (\mathcal{S}, T)$.

b) Para $a := 0$ e $b := 10$, considere $\mathcal{P} := (0, 5, 10)$ e $\mathcal{Q} := (0, 3, 6, 10)$, com *tags* T e T' quaisquer. Mostre que $\mathcal{P} \not\sqsubseteq \mathcal{Q}$, mas $\|\mathcal{P}\| \geq \|\mathcal{Q}\|$. Conclua que $(\sqsubseteq) \subsetneq (\preceq)$. ■

[41] Talvez por isso seja comum substituí-la pela noção (equivalente) de *integrabilidade de Darboux*, como feito em [10, 11].

[42] Por exemplo: com $a := 0$ e $b := 15$, ao considerar $\mathcal{P} := (0, 3, 7, 9, 15)$ e $\mathcal{P}' := (0, 1, 5, 7, 11, 15)$, o procedimento descrito para $\mathcal{P}''$ resulta em $k = 8$ e $p_0 := 0$, com os demais pontos da partição definidos recursivamente, $p_1 = \min\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 15\} = 1$, $p_2 = \min\{3, 5, 7, 11, 15\} = 3$, $p_3 = 5\ldots$ de modo que $\mathcal{P}'' = (0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15)$. Viu? Não é tão difícil inventar um exemplo para entender uma definição. Faça isso você também!

Moralmente, a pré-ordem $\preceq$ determina que conforme as normas das partições diminuem, elas se tornam *melhores* ou mais próximas do que seria uma partição *ideal*, justamente o que se espera de um conjunto dirigido. Para facilitar futuras referências, diremos que uma partição $\mathcal{P}$ é **mais fina** do que outra partição $\mathcal{P}'$ se ocorrer $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$, nomenclatura que também será utilizada para partições de Riemann – já que as *tags* não influenciam a ordenação. Em particular, ganha-se o direito de considerar redes indexadas por $\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]$, o que permite enunciar o próximo

Teorema 1.2.26. *Para uma função $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é Riemann-integrável;*

(ii) *a rede $\left(\sum_{(\mathcal{P},T)} f\right)_{(\mathcal{P},T)\in \mathrm{Par}_{\mathcal{R}}[a,b]}$ converge em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Com f Riemann-integrável e $\varepsilon > 0$, para *um* número real L como na Definição 1.2.24, existe $\delta > 0$ tal que $\left|L - \sum_{(\mathcal{P},T)} f\right| < \varepsilon$ sempre que $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Logo, para mostrar que a rede converge, basta exibir uma partição de Riemann $(\mathcal{P}', T')$ para $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}'\| < \delta$, pois daí sempre que $(\mathcal{P},T) \succeq (\mathcal{P}',T')$ teremos $\left|L - \sum_{(\mathcal{P},T)} f\right| < \varepsilon$. Ora, tomando $N \in \mathbb{N}$ com $N > \frac{b-a}{\delta}$, que existe por $\mathbb{R}$ ser arquimediano (certo?)*, considere $\mathcal{P}' := (a_0, \ldots, a_N)$ onde $a_j := a + j \cdot \frac{b-a}{N}$ para cada $j \leq N$, e tome T' uma *tag* qualquer em $\mathcal{P}'$, como por exemplo $T' := (a_1, \ldots, a_N)$: por construção, $\|\mathcal{P}'\| = \frac{b-a}{N} < \delta$. Para a recíproca, com a rede convergindo para $L \in \mathbb{R}$ e fixado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta < \|\mathcal{P}'\|$, onde $(\mathcal{P}',T')$ é tal que $\left|L - \sum_{(\mathcal{P},T)} f\right| < \varepsilon$ sempre que $(\mathcal{P},T) \succeq (\mathcal{P}',T')$. □

Corolário 1.2.27. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $L, L' \in \mathbb{R}$ satisfazem a Definição 1.2.24, então $L = L'$*

Demonstração. Pelo teorema anterior, L e L' são limites da mesma rede real. Logo, $L = L'$ pela unicidade dos limites de redes reais. □

Definição 1.2.28. Dada uma função Riemann-integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, a **integral de Riemann de f em** $[a,b]$, denotada por

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

é o único $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo as condições da Definição 1.2.24. ¶

Exemplo 1.2.29. Funções constantes são Riemann-integráveis. Com efeito, se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = r$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\sum_{(\mathcal{P},T)} f = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} r(a_i - a_{i-1}) = r\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = r(b-a)$$

para qualquer partição de Riemann $(\mathcal{P},T)$ do intervalo $[a,b]$, com $\mathcal{P} = (a_0, \ldots, a_n)$ e $T = (t_1, \ldots, t_n)$, mostrando que a rede é constante e, portanto, convergente. Em particular, $\displaystyle\int_a^b r\,\mathrm{d}t = r(b-a)$. ▲

Exemplo 1.2.30 (Monotonicidade da integral de Riemann)**.** Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções Riemann-integráveis com $f \leq g$ e $(\mathcal{P},\mathcal{T})$ é uma partição de Riemann de $[a,b]$, digamos que com $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ e $T := (t_1, \ldots, t_n)$, então

$$\sum_{(\mathcal{P},T)} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(a_i - a_{i-1}) := \sum_{(\mathcal{P},T)} g.$$

Dada a arbitrariedade da partição tomada, o Teorema 1.2.13 acarreta $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. ▲

Exemplo 1.2.31 (Linearidade da integral de Riemann)**.** Para funções $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integráveis e constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixadas, a função $\alpha f + \beta g$ ainda é Riemann-integrável. Com efeito, para uma partição de Riemann $(\mathcal{P}, T)$ de $[a,b]$, digamos que $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ e $T := (t_1, \ldots, t_n)$, tem-se

$$\sum_{(\mathcal{P},T)} (\alpha f + \beta g) := \sum_{i=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(t_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(a_i - a_{i-1}) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(a_i - a_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(a_i - a_{i-1}) := \alpha \sum_{(\mathcal{P},T)} f + \beta \sum_{(\mathcal{P},T)} g.$$

Logo, existe a integral de Riemann de $\alpha f + \beta g$ em $[a,b]$, já que

$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \beta g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]} \sum_{(\mathcal{P},T)} \alpha f + \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]} \sum_{(\mathcal{P},T)} \beta g = \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]} \left(\alpha \sum_{(\mathcal{P},T)} f + \beta \sum_{(\mathcal{P},T)} g \right) =$$

$$= \lim_{\mathrm{Par}_{\mathcal{R}}\,[a,b]} \sum_{(\mathcal{P},T)} (\alpha f + \beta g) := \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t,$$

como desejado. ▲

Os procedimentos aqui já permitem calcular integrais de forma indolor? Certamente não! Porém, a mera formulação de integrais em termos de redes revela, pelo menos, que as propriedades acima fazem parte do mesmo leque de propriedades de sequências convergentes, limites de funções, etc. É claro que, no momento de aprofundar as discussões sobre integrais, suas particularidades virão à tona – mas o mesmo ocorre com sequências, séries, limites de funções, etc. Para encerrar este primeiro contato, vamos ver que a condição de Riemann-integrabilidade *limita*, literalmente, o escopo das funções que podem ser integradas.

Proposição 1.2.32. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então f é limitada.*

Demonstração. Suponha que não. Agora, por f ser Riemann-integrável, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = L,$$

o que assegura uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\left| L - \sum_{(\mathcal{Q},T)} f \right| < 1. \tag{1.4}$$

para toda partição de Riemann $(\mathcal{Q}, T)$ satisfazendo $\|\mathcal{Q}\| \leq \|\mathcal{P}\|$.

Agora, chamando $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$, existe $i \in \mathbb{N}$ com $0 < i \leq n$ tal que a restrição de f ao intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ é ilimitada: caso contrário, f seria limitada em $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ... e $[a_{n-1}, a_n]$ e, por conseguinte, f seria limitada em $[a,b]$ (lembre-se da frase que iniciou esta demonstração!). Isto permite escolher $t_i, t_i' \in [a_{i-1}, a_i]$ com $|f(t_i) - f(t_i')| \cdot (a_i - a_{i-1}) \geq 2$, uma vez que $\sup\{|f(t)| : t \in [a_{i-1}, a_i]\} = +\infty$ (verifique! $\binom{\star}{\star}$)[43]. E daí? Ora, tomando $t_j = t_j' \in [a_{j-1}, a_j]$ arbitrariamente para $j \neq i$, obtemos duas tags $T := (t_1, \ldots, t_n)$ e $T' := (t_1', \ldots, t_n')$ tais que

$$\left| \sum_{(\mathcal{P},T)} f - \sum_{(\mathcal{P},T')} f \right| = |f(t_i) - f(t_i')|\,(a_i - a_{i-1}) \geq 2.$$

Porém, como a desigualdade (1.4) vale para $(\mathcal{P}, T)$ e $(\mathcal{P}, T')$, também vale

$$\left| \sum_{(\mathcal{P},T)} f - \sum_{(\mathcal{P},T')} f \right| \leq \left| L - \sum_{(\mathcal{P},T)} f \right| + \left| L - \sum_{(\mathcal{P},T')} f \right| < 1 + 1 = 2,$$

contrariando a conclusão anterior. □

Exercício 1.29 ($\binom{\star}{\star}$)**.** Mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável, então vale a desigualdade $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_\infty (b-a)$, onde $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. ■

[43] Dica/sugestão: note que se $\sup\{|a| : a \in A\} = +\infty$, então $\sup\{|a-b| : a, b \in A\} = +\infty$, afinal de contas, para $M > 0$ e $a \in A$ qualquer, existe $b \in A$ com $M + |a| < |b|$, donde segue que $M < |b| - |a| \leq |a-b|$.

Operações com limites em espaços normados

Muitas das propriedades operatórias vistas para limites reais se estendem de forma muito natural para espaços normados, feitas as devidas ressalvas oriundas das restrições algébricas. A grande sacada é perceber como as desigualdades utilizadas anteriormente se generalizam. Por sorte, a maior parte do trabalho consiste em trocar adequadamente as ocorrências de “$|\cdot|$” por “$\|\cdot\|$”.

Lema 1.2.33. *Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Para vetores $u, v, x, y \in E$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valem as seguintes desigualdades:*

(i) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$;

(ii) $\|u + v - (x + y)\| \leq \|u - x\| + \|v - y\|$;

(iii) $\|\alpha x - \beta y\| \leq |\alpha - \beta| \cdot (\|x - y\| + \|y\|) + |\beta| \cdot \|x - y\|$.

Exercício 1.30 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Prove as desigualdades anteriores. Dica: observe que para verificar as desigualdades análogas em $\mathbb{R}$, tudo o que você fez foi usar as propriedades fundamentais do valor absoluto (cf. Proposição 0.7.7) que, por sua vez, são justamente as condições que definem normas (cf. Exercício 0.131 e Subseção 1.0.1); evidentemente, esta dica é inútil se você ignorou as desigualdades em $\mathbb{R}$. ■

Corolário 1.2.34. *Sejam $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ redes num espaço normado $(E, \|\cdot\|)$, e $(\lambda_d)_{d \in \mathbb{D}}$ uma rede real, todas sobre um mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$, tais que $x_d \to x$, $y_d \to y$ e $\lambda_d \to \lambda$ para certos $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) *A rede $(z_d)_{d \in \mathbb{D}}$ dada por $z_d := \|x_d\|$ para todo d é tal que $z_d \to \|x\|$, i.e.,*

$$\left\| \lim_{d \in \mathbb{D}} x_d \right\| = \lim_{d \in \mathbb{D}} \|x_d\|.$$

(ii) *A rede $(z_d)_{d \in \mathbb{D}}$ dada $z_d := x_d + y_d$ para todo d é tal que $z_d \to x + y$, i.e.,*

$$\lim_{d \in \mathbb{D}} (x_d + y_d) = \lim_{d \in \mathbb{D}} x_d + \lim_{d \in \mathbb{D}} y_d.$$

(iii) *A rede $(z_d)_{d \in \mathbb{D}}$ dada por $z_d := \lambda_d \cdot x_d$ para todo d é tal que $z_d \to \lambda \cdot x$, i.e.,*

$$\lim_{d \in \mathbb{D}} (\lambda_d \cdot x_d) = \lim_{d \in \mathbb{D}} \lambda_d \cdot \lim_{d \in \mathbb{D}} x_d.$$

Demonstração. Os mesmos argumentos utilizados nas provas do Lema 1.2.0 e do Teorema 1.2.1 se aplicam. Os detalhes ficam por sua conta. □

É preciso ter em mente que neste contexto, a multiplicação é feita entre escalares e vetores, e não entre vetores: “multiplicar” vetores em dimensão maior do que 1 costuma ser algo *complexo*. Com isso dito, na situação particular em que se pensa no *produto interno*, a propriedade esperada se mantém.

Exercício 1.31 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \to \mathbb{R}$ um produto interno (cf. Subseção 1.0.1), e considere sobre E a norma $\|\cdot\|$ induzida pelo produto interno[44]. Mostre que se $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ são redes em E tais que $x_d \to x$ e $y_d \to y$, então $\langle x_d, y_d \rangle \to \langle x, y \rangle$, i.e.,

$$\lim_{d \in \mathbb{D}} \langle x_d, y_d \rangle = \left\langle \lim_{d \in \mathbb{D}} x_d, \lim_{d \in \mathbb{D}} y_d \right\rangle.$$

Dica: você já parou para pensar que se escrevêssemos “$u \bullet v$” em vez de “$\langle u, v \rangle$”, as propriedades do produto interno seriam parecidíssimas com as propriedades da multiplicação usual? Depois que perceber, não se esqueça da desigualdade de Cauchy-Schwarz. ■

Se a multiplicação entre vetores já é inexistente, com ainda mais razão a *divisão* entre vetores nem chega a fazer sentido. Apesar disso, escrevendo $\frac{x}{\lambda}$ para indicar $\frac{1}{\lambda}x$, resultado da multiplicação entre o escalar $\frac{1}{\lambda}$ e o vetor x, segue que

$$\frac{x_d}{\lambda_d} \to \frac{x}{\lambda}$$

sempre que $\lim_{d \in \mathbb{D}} \lambda_d \neq 0$ em $\mathbb{R}$ e $\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d \in E$.

[44] Aquela que declara $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in E$.

As situações *indeterminadas* são igualmente delicadas, com o agravante dimensional de que os *pontos* no infinito ficam mais complicados e, por isso, não costumam ser considerados em contextos elementares[45]. Porém, alguns resultados são similares. Encerraremos esta seção com um deles.

Proposição 1.2.35. *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma rede num espaço normado E e $(\lambda_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma rede em $\mathbb{R}$, ambas definidas sobre o mesmo conjunto dirigido $\mathbb{D}$, tais que $\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d := x \in E$ e $\lim_{d\in\mathbb{D}} \lambda_d := \lambda \in [-\infty, +\infty]$.*

(i) Se $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$, então $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} \frac{x_d}{\lambda_d} = 0$.

(ii) Se $x \neq 0$, $\lambda := 0$ e $\lambda_d \neq 0$ para todo d, então $\lim_{d\in\mathbb{D}'} \frac{\|x_d\|}{|\lambda_d|} = +\infty$.

Demonstração. O primeiro item é bem mais simples do que parece: já sabemos que em tais condições, $\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{\lambda_d} = 0$ em $\mathbb{R}$, de modo que por $\left(\frac{1}{\lambda_d}\right)_{d\in\mathbb{D}}$ ser uma rede em $\mathbb{R}$, o resultado segue do terceiro item no último corolário[46]! O segundo item é um pouco malicioso, mas não tanto. Neste caso, fazendo $y_d := \frac{1}{|\lambda_d|}$ no item (i) da Proposição 1.2.12, resulta que

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} \frac{1}{|\lambda_d|} = +\infty,$$

donde o restante é consequência do Teorema 1.2.9. □

1.3 Subsequências e o critério de Cauchy

1.3.0 Essencial

Subsequências (e o Teorema de Bolzano-Weierstrass)

Diversas vezes ao longo das seções anteriores, nos deparamos com situações em que a partir de uma rede dada (ou sequência, função, etc.), consideramos uma restrição dela a um subconjunto particular a fim de analisar limites. Finalmente, faremos isso de modo preciso, com foco especial no caso das sequências.

Definição 1.3.0. Uma sequência (real) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é xingada de **subsequência** de outra sequência (real) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma função estritamente crescente $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{h(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Geralmente, escreve-se $h(k) := n_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ a fim de denotar a subsequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. ¶

$$\begin{tikzcd}
h(n) \arrow[rr, mapsto] & & x_{h(n)} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{N} \arrow[r] & \mathbb{R} & y_n \\
\mathbb{N} \arrow[u, "h"] \arrow[ur] & & \\
n \arrow[uuu, bend left, mapsto] \arrow[uurr, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.6: Um resumo diagramático da definição de subsequência. Lembre-se de que h precisa ser estritamente crescente.

[45]Em $\mathbb{R}$ existem apenas duas *direções*, “registradas” por $-\infty$ e $+\infty$. Quantas direções existem em $\mathbb{R}^2$?

[46]Não custa lembrar que existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\frac{1}{\lambda_d} \neq 0$ para todo $d \succeq D$, e é apenas a partir de tal índice que garantimos a boa definição de $\frac{1}{\lambda_d}$.

Para a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, por exemplo, ao fazer $n_k := 2k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, ganha-se a *subsequência* $\left((-1)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, que por sua vez é a sequência constante $(1)_{k\in\mathbb{N}}$, já que $(-1)^{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Analogamente, ao fazer $m_k := 2k+1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, obtém-se a subsequência $\left((-1)^{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, que desta vez é a sequência constante $(-1)_{k\in\mathbb{N}}$, já que $(-1)^{2k+1} = -1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Há um detalhe sutil escondido aqui: a rigor, chamando $\mathcal{N} := \{2k : k \in \mathbb{N}\}$, os objetos $\left((-1)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ e $((-1)^n)_{n\in\mathcal{N}}$ são distintos! De fato, enquanto o primeiro é uma função da forma $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o segundo é uma função da forma $\mathcal{N} \to \mathbb{R}$. A inquietante semelhança entre ambas é culpa da bijeção $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ que faz, justamente, $h(n) := 2n$ para cada n: com a ordem herdada de $\mathbb{N}$, o k-ésimo elemento de $\mathcal{N}$ é, precisamente, $2k$, de modo que o k-ésimo termo da sequência $\left((-1)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ coincide com o k-ésimo termo da rede $((-1)^n)_{n\in\mathcal{N}}$.

Exercício 1.32 ((!))**.** Pare e reflita sobre o que foi escrito acima. Faça um desenho se for preciso, associando alguns números naturais particulares aos seus dobros. Dica: faça esse tipo de coisa sem que alguém precise pedir para você fazer isso! ■

Parece ser uma distinção irrelevante, certo? Desta vez sim.

Proposição 1.3.1 (Opcional[47])**.** *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência real e $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto infinito.*

(i) *Existe uma única função bijetora $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ estritamente crescente.*

(ii) *A subsequência $\left(x_{h(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $L \in [-\infty, +\infty]$ se, e somente se, a rede $(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ converge para L ao considerarmos $\mathcal{N}$ com a ordem induzida de $\mathbb{N}$.*

Demonstração. Embora isto possa ser feito no braço, já temos tecnologia para proceder mais rapidamente: $(\mathcal{N}, \leq)$ é uma boa ordem natural com a ordem $\leq$ herdada de $\mathbb{N}$: para $n \in \mathcal{N}$ qualquer, o menor elemento de $\mathcal{N} \setminus \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\} \neq \emptyset$ é o sucessor de n em $\mathcal{N}$ (certo?)*; se $n \in \mathcal{N} \setminus \{\min \mathcal{N}\}$, então existe $k := \max\{m \in \mathcal{N} : m < n\}$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$, cujo sucessor em $\mathcal{N}$ é n. Logo, pelo Teorema de Dedekind (cf. Teorema 0.3.12), existe um único isomorfismo $h\colon \mathbb{N} \to \mathcal{N}$. Alternativamente, você pode definir $h(0) := \min \mathcal{N}$ e, supondo $h(n)$ definido para $n \in \mathbb{N}$, fazer

$$h(n+1) := \min\left(\mathcal{N} \setminus \{h(j) : j \leq n\}\right),$$

mas daí será problema seu mostrar que h tem as propriedades desejadas[48].

Vamos ao que interessa, o segundo item. Se a subsequência $\left(x_{h(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para L e $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ é um intervalo aberto em torno de L, então existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_{h(k)} \in I$ sempre que $k \geq K$. Para mostrar que $(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ converge para L enquanto rede, basta tomar $N := h(K)$: se $n \in \mathcal{N}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $h(k) = n$, de modo que se $n \geq N$, então $k \geq K$ (pois h é estritamente crescente!) e, por conseguinte, $x_{h(k)} = x_n \in I$, como desejado. A recíproca é análoga (e um bom exercício para praticar $\binom{\star}{\star}$). □

Observação 1.3.2 (Moral da história)**.** Em algumas situações, fixada uma sequência real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pode ser mais fácil definir uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por meio de alguma função $k \mapsto n_k$ que descreve o subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ cujos índices serão considerados. Porém, em outras situações, fazer isso é apenas chato: como descrever, por exemplo, a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que n_k é o k-ésimo número natural primo? É muito mais razoável pensar em $(x_p)_{p\in\mathcal{P}}$ onde $\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ é primo}\}$. △

[47]Para quem prefere ter um sono tranquilo

[48]Se seguir por este caminho, no final do dia descobrirá que h é o isomorfismo entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{N}$.

Subsequências são dispositivos úteis tanto para detectar divergência quanto para determinar convergência.

Proposição 1.3.3. *Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência real e* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *uma subsequência. Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ *para algum* $L \in [-\infty, +\infty]$*, então* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$*.*

Demonstração. A grande sacada está na "cofinalidade" dos índices n_k em $\mathbb{N}$: o fato de que para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K \geq M$. Isto ocorre pois a função $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que faz $h(k) := n_k$ é estritamente crescente por hipótese, o que assegura $n_0 \geq 0$, $n_1 \geq 1$ (pois $n_1 > n_0 \geq 0$ e...)[49] e, mais geralmente, $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (certo?)*. Por que isto é útil? Simples: fixado um intervalo aberto I em torno de L, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in I$ sempre que $n \geq N$, mas agora basta tomar $K := N$, pois daí $n_K \geq N$, acarretando $n_k \geq N$ para todo $k \geq K$ e, por conseguinte, $x_{n_k} \in I$. □

Corolário 1.3.4 (Importante)**.** *Se uma sequência real* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tem (pelo menos) duas subsequências que convergem para limites distintos em* $[-\infty, +\infty]$*, então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge em* $[-\infty, +\infty]$*, i.e., não existe* $L \in [-\infty, +\infty]$ *tal que* $x_n \to L$*.*

Demonstração. Sejam $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequências de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_{n_k} \to L'$ e $x_{m_k} \to L''$, com $L', L'' \in [-\infty, +\infty]$. Se existe $L \in [-\infty, +\infty]$ tal que $x_n \to L$, então a proposição anterior acarreta

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = L,$$

donde o Exercício 1.10 assegura $L = L'$ e $L = L''$. □

Exemplo 1.3.5. Agora é muito fácil verificar que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge: a subsequência $((-1)^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para -1, enquanto a subsequência $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 1. Acabou. ▲

Exemplo 1.3.6. A sequência $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em $[-\infty, +\infty]$: com efeito, a subsequência $\left((-2)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $+\infty$, já que $2^k \leq 2^{2k} = (-2)^{2k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $2^k \to +\infty$; por outro lado, $\left((-2)^{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $-\infty$ uma vez que $(-2)^{2k+1} = -(2^{2k+1}) \leq -2^k$ e $-2^k \to -\infty$. Note que em ambos os casos, o Corolário 1.2.22 foi usado sem menção explícita. Acostume-se. ▲

Exemplo 1.3.7 (Série harmônica)**.** Já vimos que se $\sum a_n$ é uma série de números reais que converge em $\mathbb{R}$, então $a_n \to 0$. A vida seria fácil demais se a recíproca fosse verdadeira. A **série harmônica** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é um exemplo clássico de que a vida não é fácil.

Suponha conhecida uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que

(i) $x_n \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$, com $x_n < \frac{1}{n}$ quando n é ímpar, e

(ii) $\frac{1}{n} = x_{2n-1} + x_{2n}$ para cada $n \geq 1$.

Observe então que

$$\sum_{n\geq 1} x_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{2k} x_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} x_{2j-1} + x_{2j} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n},$$

[49] Complete o raciocínio ($\star$).

onde a segunda igualdade se deve ao fato de $(x_1 + \ldots + x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ser subsequência da sequência $(x_1 + \ldots + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge na reta estendida (possivelmente para $+\infty$)[50]. Agora, se ocorresse $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$, então valeria que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1} x_n = 0$. Porém, pelas propriedades operatórias dos limites,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - x_n > 0,$$

já que $\frac{1}{n} - x_n \geq 0$ para todo n, com desigualdade estrita sempre que n é ímpar. Portanto, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \notin \mathbb{R}$, i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Por outro lado, já sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ▲

Exercício 1.33 ($\star$). Defina uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ com as propriedades requiridas no exemplo anterior. Dica: para $n \geq 1$ par, faça $x_n := \frac{1}{n}$. ■

Um dos modos de *determinar* convergência por meio de subsequências se dá na próxima

Proposição 1.3.8. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tais que $\mathbb{N} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência real tal que $(x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ e $(x_b)_{b\in\mathcal{B}}$ convergem para um mesmo limite $L \in [-\infty, +\infty]$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.*

Demonstração. Para um intervalo aberto I em torno de L, precisamos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in I$ sempre que $n \geq N$: ora, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x_a \in I$ sempre que $a \in \mathcal{A}$ for tal que $a \geq A$, e também existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_b \in I$ sempre que $b \in \mathcal{B}$ e $b \geq B$. Ora, basta escolher $N \geq A, B$: neste caso, se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $n \geq N$, então $n \in \mathcal{A}$ com $n \geq A$ ou $n \in \mathcal{B}$ com $n \geq B$ (pois $\mathbb{N} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ por hipótese!), donde segue que $x_n \in I$, como desejado. □

Exemplo 1.3.9. Na hora do aperto, é bastante comum esquecer de usar o Teorema do Confronto para simplificar o cálculo de alguns limites. Por exemplo, um jeito relativamente *blasé* de verificar

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

consiste em observar que $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$, com $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada e $\frac{1}{2^n} \to 0$, donde a igualdade desejada segue por confronto. No entanto, também seria possível apelar para a proposição anterior, que fornece uma solução mais humilde, mas igualmente satisfatória:

$$\lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

"Ah, mas eu não poderia calcular apenas $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ *e apelar para o Exercício 1.44?? Por que o mundo me odeia???"*... Calma, você apenas acabou de perceber que existe mais de um jeito de resolver um problema. Parabéns. ▲

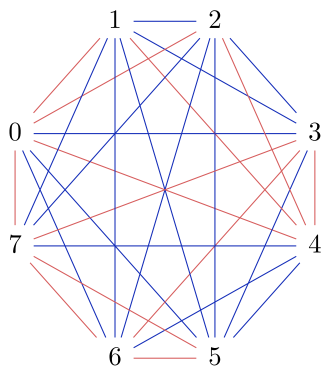
Observação 1.3.10. A semelhança com limites laterais, do Cálculo I, não é mera coincidência (cf. Subseção 1.3.1). △

[50] Certo? ($\star$).

Subsequências ainda são úteis num terceiro aspecto: consolação. Numa grande gama de casos, mesmo quando uma sequência *não* converge, é possível obter uma subsequência convergente. Esta ideia aparentemente boba terá consequências avassaladoras ao longo do curso, bem como o teorema que dá nome a esta parte da seção.

Lema 1.3.11. *Toda sequência em $\mathbb{R}$ admite subsequência monótona.*

Demonstração. Dada uma sequência real $(x_n)_n$, pode-se considerar o conjunto $[\mathbb{N}]^2$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ com precisamente dois elementos, e daí definir a função $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ que faz $c(\{m,n\}) := \mathsf{A}$ se $m < n$ e $x_m < x_n$, e $c(\{m,n\}) := \mathsf{V}$ se $m < n$ com $x_m \geq x_n$. Vamos com calma...



$x_0 := 1$ $\quad$ $x_4 := -3$

$x_1 := -2$ $\quad$ $x_5 := 9$

$x_2 := 0$ $\quad$ $x_6 := 3$

$x_3 := 4$ $\quad$ $x_7 := 1$

Figura 1.7: Exemplo de um *subgrafo* finito do grafo descrito acima.

Intuitivamente, a construção proposta consiste em considerar o *grafo infinito* cujos vértices são todos os números naturais e cujas arestas são todas as possíveis ligações entre eles. Nesse sentido, a função *c pinta* uma "aresta" $m \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, n$ em que $m < n$: de Azul se ocorrer $x_m < x_n$; de Vermelho caso contrário[51].

Por que alguém faria isso? *Muito simples*! Um subconjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$ no qual qualquer aresta ligando seus vértices tenha a mesma cor induz uma subsequência monótona $(x_m)_{m\in M}$: (estritamente) crescente se a cor for Azul; decrescente se a cor for Vermelha. Por exemplo, se $\mathsf{c} := \mathsf{A}$, então $x_m < x_n$ sempre que $m, n \in M$ com $m < n$, ou seja: a *subsequência* $(x_m)_{m\in M}$ é estritamente crescente. O raciocínio é análogo para $\mathsf{c} := \mathsf{V}$.

O passo fundamental na demonstração de que existe um subconjunto $M \subseteq \mathbb{N}$ com a propriedade desejada faz uso (de uma variação) do Princípio da Casa dos Pombos, como expresso no Exercício 0.46: *se X é infinito, $A, B \subseteq X$ são tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$, então A é infinito ou B é infinito.* Em particular, se $P \subseteq [\mathbb{N}]^2$ é infinito, então P é união disjunta dos subconjuntos $\{p \in P : c(p) = \mathsf{A}\}$ e $\{p \in P : c(p) = \mathsf{V}\}$, donde segue que pelo menos um deles deve ser infinito.

$\ulcorner$**Afirmação.** *Fixados um subconjunto infinito $S \subseteq \mathbb{N}$ e um elemento $s \in S$, existem um subconjunto infinito $G_{S,s} \subseteq S$ e uma cor $\mathsf{c}_S \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ tal que $s < \min G_{S,s}$ e $c(\{s,n\}) = \mathsf{c}_S$ para qualquer $n \in G_{S,s}$.*

[51] Evidentemente, A e V são apenas modos psicologicamente agradáveis de denotar 0 e 1, x e $\{x\}$ ou, mais geralmente, quaisquer dois conjuntos A e V com $A \neq V$.

Demonstração. Em outras palavras, existe um subconjunto infinito de S cujas arestas que ligam seus elementos ao número s têm todas a mesma cor. Para se dar conta disso, note que o subconjunto $P := \{\{s, n\} : n > s \text{ e } n \in S\} \subseteq [\mathbb{N}]^2$ é infinito e, pelo argumento do parágrafo anterior, existe uma cor $\mathsf{C} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ tal que $Q := \{p \in P : c(p) = \mathsf{C}\}$ é infinito. Daí, basta tomar $G_{S,s} := (\bigcup Q) \setminus \{s\}$ e $\mathsf{c}_S := \mathsf{C}$. ⌟

Dito isso, mostraremos que existe uma sequência estritamente crescente $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturais tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\mathsf{c}_n \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $c(\{k_n, k_m\}) = \mathsf{c}_n$ para todo $m > n$. De fato, em vista da argumentação anterior, basta proceder recursivamente:

✓ $S_0 := \mathbb{N}$, $k_0 := \min S_0$ e $\mathsf{c}_0 := \mathsf{c}_{S_0}$;

✓ $S_1 := G_{S_0,k_0}$, $k_1 := \min S_1$ e $\mathsf{c}_1 := \mathsf{c}_{S_1}$;

✓ para $n \geq 1$, e supondo $S_0, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{N}$ definidos com $S_n \subseteq S_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq S_0$, todos infinitos, com $k_i \in S_i$ para cada $i \leq n$, faz-se $S_{n+1} := G_{S_n,k_n}$, $k_{n+1} := \min S_{n+1}$ e $\mathsf{c}_{n+1} := \mathsf{c}_{S_{n+1}}$.

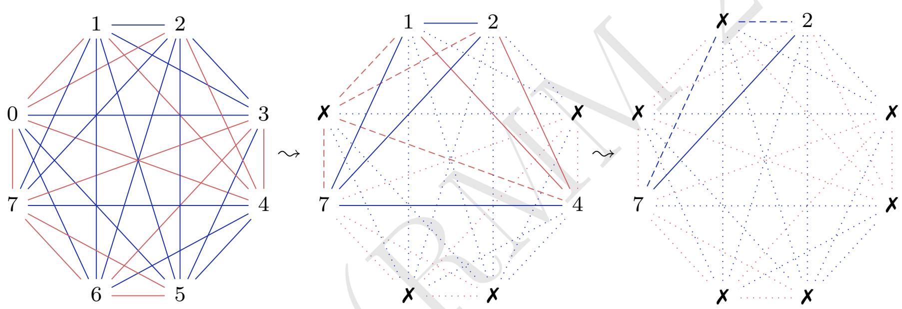


Figura 1.8: Ilustração do procedimento anterior, com $\mathsf{c}_0 := \mathsf{V}$ e $\mathsf{c}_1 := \mathsf{A}$.

Finalmente, a função $\varphi \colon \mathbb{N} \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$, que faz $\varphi(n) := \mathsf{c}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tem imagem finita, donde o Princípio da Casa dos Pombos garante um subconjunto infinito $T \subseteq \mathbb{N}$ e $\mathsf{c} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $\varphi(t) = \mathsf{c}$ para todo $t \in T$. Isto acarreta $c(\{k_s, k_t\}) = \mathsf{c}$ para quaisquer $s, t \in T$ distintos. Logo, basta fazer $M := \{k_t : t \in T\}$. □

Observação 1.3.12 (Opcional: heurística do argumento)**.** Essencialmente, a sequência de subconjuntos $(S_n)_n$ seleciona, a cada passo n, um subconjunto infinito de índices $S_{n+1} \subsetneq S_n$ cujos termos correspondentes são "monótonos" com respeito ao primeiro termo de S_n, mas sem afetar o tipo de monotonicidade (crescente ou decrescente) que seus termos mantêm com o primeiro termo de S_{n-1}. Com base nas ilustrações da Figura 1.8:

(i) com $\mathsf{c}_0 := \mathsf{V}$ e $S_1 := \{1, 2, 4, 7, \ldots\}$, indica-se que o conjunto de vértices S_1 é infinito e tal que todas as arestas ligando os seus vértices a 0 são vermelhas – isto é, $x_0 \geq x_s$ para todo $s \in S_1$; note que no segundo grafo restam apenas os vértices de S_1;

(ii) com $k_1 = 1$ o menor elemento de S_1, a ocorrência de $\mathsf{c}_1 := \mathsf{A}$ com $S_2 := \{2, 7, \ldots\} \subsetneq S_1$ indica que S_2 é um subconjunto infinito de vértices (de S_1!) cujas arestas que ligam seus vértices a 1 são todas azuis – ou seja, $x_1 < x_s$ para todo $s \in S_2$; note que no terceiro grafo restam apenas os vértices de S_2;

(iii) observe que por valer $S_2 \subsetneq S_1$, *ainda* se tem $x_0 \geq x_s$ para todo $s \in S_2$!

Portanto, ao encontrar um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ cujos c_n's coincidem, assegura-se que o tipo de monotonicidade que termos correspondentes na sequência mantêm uns com os outros é o mesmo. $\triangle$

Teorema 1.3.13 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais admite subsequência que converge em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo lema anterior, $(x_n)_n$ tem uma subsequência monótona $(y_n)_n$. Agora, por $(x_n)_n$ ser limitada, segue que $(y_n)_n$ é limitada (certo?!)*. Logo, $(y_n)_n$ tem um limite em $\mathbb{R}$ (pelo Teorema 1.1.4 ou pelo Exercício 1.7). $\square$

Exercício 1.34 ($\substack{\star\\\star}$). Pense rápido: nenhuma sequência ilimitada tem subsequência que converge em $\mathbb{R}$? $\blacksquare$

O critério (de completude) de Cauchy

A primeira aplicação do Teorema de Bolzano-Weierstrass será mostrar que em $\mathbb{R}$, a noção de convergência não é afetada por um defeito prático grave presente na definição de limite: o próprio limite. Como assim?

Veja bem: de um ponto de vista meramente linguístico, ao dizer algo do tipo "a sequência $(x_n)_n$ é convergente", é natural entender isso como uma propriedade da sequência. Na prática, isto exigiria que fôsssemos capazes de *decidir* se uma sequência é convergente ou não apenas estudando o comportamento de seus termos. Porém, não é o caso: por definição, a sequência é convergente se ela admite um limite, e até agora isto é tudo o que sabemos[52]... até agora!

Definição 1.3.14. Uma rede $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $\mathbb{R}$ é **de Cauchy**[53] se para todo $\varepsilon > 0$ existir D tal que $|x_d - x_{d'}| < \varepsilon$ sempre que $d, d' \succeq D$. Em particular, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é **de Cauchy** se para todo ε existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N$. ¶

Intuitivamente, os termos de uma sequência (ou rede) de Cauchy se tornam *arbitrariamente* próximos uns dos outros[54]. É claro que se os termos de uma sequência (ou rede) se tornam arbitrariamente próximos de um limite, então eles se tornam arbitrariamente próximos entre si. Em outras palavras:

Proposição 1.3.15. *Toda rede real que converge em* $\mathbb{R}$ *é de Cauchy.*

Demonstração. Seja $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma rede real tal que $x_d \to L$, com $L \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy, devemos fixar $\varepsilon > 0$ e mostrar que existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - x_{d'}| < \varepsilon$ sempre que $d, d' \succeq D$. Como de costume, o truque usual se aplica: para quaisquer $d, d' \in \mathbb{D}$ vale

$$|x_d - x_{d'}| \leq |x_d - L| + |x_{d'} - L|,$$

o que permite escolher $D \in \mathbb{D}$ tal que $|x_d - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $d \succeq D$ pois, assim, $|x_d - x_{d'}| < \varepsilon$ sempre que $d, d' \succeq D$ (verifique?!)*. $\square$

[52] Em outras palavras: se você encontrar uma sequência real que nunca viu na vida, o único modo de garantir que ela converge é encontrar o seu limite... mas como cada ponto de $[-\infty, +\infty]$ é um candidato em potencial, seriam precisos infinitos testes!

[53] Lê-se "coxí".

[54] Essa expressão significa que a distância entre os termos fica menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ escolhido, desde que se tomem termos suficientemente bons. Escolhido como? *Arbitrariamente*, i.e., conforme o *arbítrio* de quem tem o poder de escolha/decisão: você.

Em certo sentido, a condição de Cauchy é um *sintoma* de convergência ou, em linguajar clássico, a condição de Cauchy é *necessária* para convergência: se uma sequência (ou rede) converge, então necessariamente ela será de Cauchy. Num mundo ideal, tal condição deveria ser suficiente: toda sequência (ou rede) de Cauchy converge para algum limite! Para variar as frustrações da vida, desta vez veremos que a reta real é um desses mundos ideais.

Lema 1.3.16. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.*

(i) *Se $(x_n)_n$ é de Cauchy, então $(x_n)_n$ é limitada.*

(ii) *Se $(x_n)_n$ é de Cauchy e admite pelo menos uma subsequência convergente, então $(x_n)_n$ converge para o mesmo limite da subsequência.*

Demonstração. Como a condição de Cauchy pode ser usada para *qualquer* $\varepsilon > 0$, podemos fixar um específico, como $\varepsilon := 1$, e daí obtemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < 1$ sempre que $m, n \geq N$. Como mostrar que $(x_n)_n$ é limitada daí? Ora, note que para $n \geq N$ qualquer, deve-se ter

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N| := M',$$

mostrando que os termos da sequência ficam limitados por M' para todo $n \geq N$. Restam apenas os termos $x_0, \ldots, x_{N-1}$ mas, para estes, certamente ocorre

$$|x_i| \leq \max\{|x_0|, \ldots, |x_{N-1}|\} := M''$$

para todo $i < N$. Dessa forma, basta tomar $M := \max\{M', M''\}$ para provar o item (i).

Para a segunda afirmação, seja $(x_{n_k})_k$ subsequência de $(x_n)_n$ convergente em $\mathbb{R}$, digamos $x_{n_k} \to L$ com $L \in \mathbb{R}$. Note que para $\varepsilon > 0$ existem

✓ $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq N$ (pela condição de Cauchy), e

✓ $K \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$ para qualquer $k \geq K$ (convergência da subsequência).

Como $k \mapsto n_k$ é estritamente crescente, existe $j \in \mathbb{N}$ com $j \geq K$ e $n_j \geq N$, donde segue que

$$|x_n - L| \leq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - L| < 2\varepsilon$$

para todo $n \geq N$, mostrando que $x_n \to L$ (por quê?). □

Teorema 1.3.17 (A reta é Cauchy-completa)**.** *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Pelo lema anterior, uma sequência real $(x_n)_n$ é limitada e, por Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_n$ admite subsequência convergente em $\mathbb{R}$. Novamente pelo lema anterior, resulta que $(x_n)_n$ converge. □

Corolário 1.3.18 (Opcional – mas bem útil)**.** *Toda rede real de Cauchy converge em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma rede de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a condição de Cauchy assegura um $D_n \in \mathbb{D}$ satisfazendo $|x_d - x_{d'}| < \frac{1}{2^n}$ para quaisquer $d, d' \succeq D_n$, e a condição de compatibilidade dos conjuntos dirigidos permite supor $D_{n+1} \succeq D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (verifique?)$\star\star\star$. Com isso, resulta que $(x_{D_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$: para $\varepsilon > 0$, basta tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N+1}} < \varepsilon$ pois daí, para $m, n \geq N$, teremos $D_m, D_n \succeq D_N$ (entendeu?)[55]. Logo, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_{D_n} \to L$ (pelo teorema anterior!). Em posse disso, mostraremos que $\lim_d x_d = L$.

[55] Conclua a demonstração de que $(x_{D_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy ($\star\star$).

Fixado $\varepsilon > 0$, buscamos $D \in \mathbb{D}$ tal que $d \succeq D$ assegure $|x_d - L| < \varepsilon$. Para encontrá-lo, note que

$$|x_d - L| \leq \underbrace{|x_d - x_{D_n}|}_{(A)} + \underbrace{|x_{D_n} - L|}_{(B)},$$

para quaisquer $d \in \mathbb{D}$ e $n \in \mathbb{N}$, em que a parcela (A) pode ser controlada pela condição de Cauchy e a parcela (B) pode ser controlada pois $\lim_{n\to\infty} x_{D_n} = L$. Para controlar (A), observe que já sabemos que $|x_d - x_{D_n}| < \frac{1}{2^n}$ para qualquer $d \succeq D_n$, o que sugere escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Para controlar (B), pode-se tomar $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{D_n} - L| < \frac{1}{2^{N+1}}$ para todo $n \geq N'$ (já já você verá a razão do "+1"). Enfim, para $M := \max\{N+1, N'\}$, façamos $D := D_M$:

✓ como $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e $M \geq N+1$, a ocorrência de $d \succeq D_M$ acarreta $d \succeq D_{N+1}$ e, dessa forma, $(A) < \frac{1}{2^{N+1}}$;

✓ como $M \geq N$, resulta $|x_{D_M} - L| < \frac{1}{2^{N+1}}$;

✓ logo, se $d \succeq D_M$, então $|x_d - L| < \frac{1}{2^N} < \varepsilon$, como queríamos. □

Observação 1.3.19 (E o Kiko?)**.** O critério de Cauchy permite assegurar a existência de limites sem conhecê-los. Daí, aliando isto ao fato de que subsequências convergem, pode-se reduzir o problema de calcular um limite complicado ao processo de determinar o limite de uma *subsequência* mais simples. A Subseção 1.3.1 traz uma ilustração com integrais. △

1.3.1 Extras

Cofinalidade, sub-redes e limites laterais revisitados

Se você curtiu a ideia de redes, deve ter se perguntado: qual seria o análogo de subsequências para o caso de redes? Em outras palavras: o que seria uma *sub-rede*? Embora existam várias respostas não-equivalentes para esta pergunta, o presente contexto permite ignorar o panorama geral das sub-redes e focar apenas no caso que interessa, que felizmente é bem simples.

Definição 1.3.20. Sejam $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem parcial e $C \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto. Diz-se que C é **cofinal** em $\mathbb{P}$ se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $c \in C$ com $p \leq c$. ¶

Exemplo 1.3.21 (Subconjuntos cofinais de $\mathbb{N}$)**.** *Um subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}$ é cofinal se, e somente se, $\mathcal{C}$ é infinito.* De fato, se $\mathcal{C}$ é cofinal e $F \subseteq \mathcal{C}$ é um subconjunto finito de $\mathcal{C}$, então existe $n \in \mathcal{C}$ tal que $\max F < 1 + \max F \leq n$, mostrando que $\mathcal{C} \setminus F \neq \emptyset$ para qualquer subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{C}$. Em particular, $\mathcal{C}$ deve ser infinito. Reciprocamente, se $\mathcal{C}$ é infinito e $m \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{C} \setminus \{n \in \mathcal{C} : n \leq m\}$ é não-vazio, ou seja, existe $c \in \mathcal{C}$ com $m \leq c$. Pela arbitrariedade do $m \in \mathbb{N}$ tomado, resulta que $\mathcal{C}$ é cofinal. ▲

Exemplo 1.3.22 (Subconjuntos cofinais de $\mathbb{R}_p$)**.** Lembre-se de que para $p \in \mathbb{R}$, denota-se por $\mathbb{R}_p$ o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ com a relação $\preceq$ que declara $a \preceq b$ se, e somente se, $|b - p| \leq |a - p|$ (cf. Exemplo 1.0.4). Quais são os subconjuntos cofinais de $\mathbb{R}_p$?

Proposição 1.3.23. *Nas condições anteriores, $X \subseteq \mathbb{R}_p$ é cofinal se, e somente se, todo intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ em torno de p intercepta X.*

Demonstração. Supondo X cofinal e tomando $I := (\alpha, \beta)$ com $p \in I$, podemos escolher $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \alpha' < p < \beta' < \beta$ (certo?)*. Tomando $\gamma \in \mathbb{R}_p$ tal que $\gamma \succeq \alpha', \beta'$, a cofinalidade de X permite escolher $x \in X$ com $\gamma \preceq x$, e o modo como γ foi obtido garante que $x \in I$: temos

$$|x - p| \leq |\gamma - p| \leq \begin{cases} p - \alpha' < p - \alpha \Rightarrow \alpha - p < x - p < p - \alpha \Rightarrow \alpha < x < 2p - \alpha \\ \text{e} \\ \beta' - p < \beta - p \Rightarrow p - \beta < x - p < \beta - p \Rightarrow 2p - \beta < x < \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha < x < \beta.$$

Reciprocamente, se X satisfaz a condição e $y \in \mathbb{R}_p$, então para $r := |y - p| > 0$ podemos considerar $J := (p - r, p + r)$, um legítimo intervalo aberto de $\mathbb{R}$ em torno de p. Pela hipótese, existe $x \in X \cap J$, que satisfaz $|x - p| < r$, como desejado. □

Assim, para $p := 0$, digamos, são exemplos de subconjuntos cofinais em $\mathbb{R}_0$:

(i) $(0, b)$ para qualquer $b \in [-\infty, +\infty]$ com $b > 0$

(ii) $\left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(iii) $(a, 0)$ para qualquer $a \in [-\infty, +\infty]$ com $a < 0$;

(iv) $\left\{-\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

(v) $(a, b) \setminus \{0\}$ para quaisquer $a, b \in [-\infty, +\infty]$ com $a < 0$ e $b > 0$.

Antes de encerrar, observe duas coisas: fazendo $a := -\infty$ e $b := +\infty$ nos exemplos acima, obtemos $\mathbb{R}_p = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, i.e., expressamos o conjunto dirigido $\mathbb{R}_p$ como reunião de dois subconjuntos cofinais. Agora compare com a situação da Proposição 1.3.8. ▲

A definição de sub-rede que adotaremos aqui[56] consiste em restringir redes a subconjuntos cofinais.

Exercício 1.35 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Sejam $\mathbb{D}$ um conjunto dirigido e $C \subseteq \mathbb{D}$ um subconjunto. Mostre que se C é cofinal, então a restrição da relação $\preceq$ a C faz de $(C, \preceq)$ um conjunto dirigido. Dica: antes de qualquer outra coisa, perceba que você deve mostrar que para $a, b \in C$, existe $c \in C$ tal que $a, b \preceq c$. ■

Definição 1.3.24. Sejam $\mathbb{D}$ um conjunto dirigido e $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ uma rede real. Uma **sub-rede** de $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ é uma rede $(x_d)_{d \in \mathcal{C}}$ onde $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{D}$ é um subconjunto cofinal. Explicitamente, trata-se da restrição da função $\rho \colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ao subconjunto cofinal $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{D}$. ¶

Exemplo 1.3.25. Em virtude da Proposição 1.3.1, sub-redes de sequências podem ser tratadas como subsequências. ▲

Exemplo 1.3.26 (Cf. Subseção 1.1.1)**.** Para uma função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$, os subconjuntos $\mathbb{R}_{>p} := (p, +\infty)$ e $\mathbb{R}_{<p} := (-\infty, p)$ são ambos cofinais em $\mathbb{R}_p$ (cf. Proposição 1.3.23). Assim, de acordo com a definição, as redes $(f(x))_{x \in \mathbb{R}_{<p}}$ e $(f(x))_{x \in \mathbb{R}_{>p}}$ são sub-redes de $(f(x))_{x \in \mathbb{R}_p}$. ▲

Exemplo 1.3.27 (Cf. Subseção 1.2.1)**.** Para uma função $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, considere $\mathbb{P}[a, b]$ o conjunto das partições de Riemann de $[a, b]$ dirigido pela comparação entre normas, i.e., onde $(\mathcal{P}, T) \preceq (\mathcal{P}', T')$ se, e somente se, $\|\mathcal{P}'\| \leq \|\mathcal{P}\|$. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ fixarmos uma partição de Riemann $(\mathcal{P}_n, T_n)$ tal que $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$, então $\mathcal{C} := \{(\mathcal{P}_n, T_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é cofinal em $\mathbb{P}[a, b]$. Com efeito, para qualquer partição $(\mathcal{P}, T) \in \mathbb{P}[a, b]$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mathcal{P}_n\| < \|\mathcal{P}\|$ para todo $n \geq N$, donde em particular resulta que $(\mathcal{P}, T) \preceq (\mathcal{P}_N, T_N)$. ▲

A propriedade fundamental das subsequências, a saber, a preservação de convergência, permanece válida para sub-redes:

Proposição 1.3.28. *Sejam $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ uma rede real e $(x_d)_{d \in \mathcal{C}}$ uma sub-rede. Se $\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d = L$ para algum $L \in [-\infty, +\infty]$, então $\lim_{d \in \mathcal{C}} x_d = L$.*

Demonstração. Dado um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ em torno de L, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in I$ sempre que $d \succeq D$. Como $\mathcal{C}$ é cofinal em $\mathbb{D}$, existe $C \in \mathcal{C}$ com $D \preceq C$. Logo, para todo $c \in \mathcal{C}$ com $c \succeq C$ deve valer $x_c \in I$ já que $c \succeq D$ por transitividade. □

Corolário 1.3.29. *Se $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ são tais que $\lim_{x \to p} f(x) = L$ para $L \in [-\infty, +\infty]$, então*

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x) = L.$$

Corolário 1.3.30. *Se $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável e $((\mathcal{P}_n, T_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de partições de Riemann de $[a, b]$ tal que $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$, então*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{(\mathcal{P}_n, T_n)} f = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t.$$

[56] Há outras mais elaboradas que servem a propósitos mais abrangentes do que os nossos.

Exemplo 1.3.31. Oportunamente, provaremos que toda função *contínua* da forma $[a,b]\to\mathbb{R}$ é Riemann-integrável. Assumindo tal resultado conhecido, e supondo que a função $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x):=x^2$ é *contínua*, como calcular $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$? Antes de pensar que se trata de um problema bobo, lembre-se de que ainda não temos o *Teorema Fundamental do Cálculo*!

Para contornar a ausência desse poderosíssimo canhão, vamos cozinhar uma sequência $((\mathcal{P}_n,T_n))_n$ de partições apropriadas de $[0,1]$ e calcular o limite da sequência $\left(\sum_{(\mathcal{P}_n,T_n)} f\right)_n$ correspondente. Para $n\in\mathbb{N}$ com $n>0$, sejam $\mathcal{P}_n:=(a_0,\ldots,a_n)$ e $T_n:=(t_1,\ldots,t_n)$ definidos por $a_i:=t_i:=\frac{i}{n}$ para cada $i\le n$. Como $\|\mathcal{P}_n\|=\frac{1}{n}\to 0$, é lícito prosseguir:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(\mathcal{P}_n,T_n)} f=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{6}=\frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

pois $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$ com $n>0$ (verifique!)*. Talvez agora você entenda o "Fundamental" no *Teorema Fundamental do Cálculo.* ▲

É nesse sentido que a Observação 1.3.10 indicou a semelhança entre subsequências e limites laterais: todos são exemplos de sub-redes em contextos apropriados. Assim, a Proposição 1.3.8 pode ser encarada como um resultado análogo ao que você aprendeu em Cálculo I acerca de limites laterais: se ambos existem e coincidem, então o limite da função no ponto existe. Por sua vez, ambos são casos particulares do próximo

Proposição 1.3.32. *Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma rede real, $L\in[-\infty,+\infty]$ um ponto e $\mathcal{C},\mathcal{C}'\subseteq\mathbb{D}$ subconjuntos cofinais em $\mathbb{D}$. Se $\mathbb{D}=\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'$, então são equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{d\in\mathbb{D}} x_d=L$;

(ii) $\lim\limits_{d\in\mathcal{C}} x_d=\lim\limits_{d\in\mathcal{C}'} x_d=L$.

Demonstração. A Proposição 1.3.28 dá conta de (i) ⇒ (ii). Para a recíproca, fixado um intervalo aberto $I\subseteq[-\infty,+\infty]$ com $L\in I$, existem $C\in\mathcal{C}$ e $C'\in\mathcal{C}'$ tais que $x_d\in I$ sempre que $d\in\mathcal{C}$ e $d\succeq C$ ou $d\in\mathcal{C}'$ e $d\succeq C'$. Como $\mathbb{D}$ é dirigido, existe $D\in\mathbb{D}$ com $D\succeq C,C'$, de modo que se $d\geq D$, então por $\mathbb{D}=\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'$ resulta que $d\in\mathcal{C}$ e $d\succeq C$ ou $d\in\mathcal{C}'$ e $d\succeq c'$: em todo caso, $x_d\in I$. □

Corolário 1.3.33. *Sejam $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função e $p\in\mathbb{R}$ um ponto. Se*

$$\lim_{x\to p^-} f(x)=\lim_{x\to p^+} f(x)=L$$

para algum $L\in[-\infty,+\infty]$, então $\lim_{x\to p} f(x)=L$.

Demonstração. Já vimos que todos os limites acima são limites de rede:

$$\lim_{x\to p} f(x)=\lim_{x\in\mathbb{R}_p} f(x)$$
$$\lim_{x\to p^-} f(x)=\lim_{x\in\mathbb{R}_{<p}} f(x)$$
$$\lim_{x\to p^+} f(x)=\lim_{x\to\mathbb{R}_{>p}} f(x)$$

Dado que $\mathbb{R}_{<p}:=(-\infty,p)$ e $\mathbb{R}_{>p}:=(p,+\infty)$ são cofinais em $\mathbb{R}_p=\mathbb{R}_{<p}\cup\mathbb{R}_{>p}$, o resultado segue da proposição anterior. □

Exercício 1.36 (Opcional – $(^\star_\star)$)**.** Prove o corolário anterior diretamente, i.e., sem aplicar a proposição anterior. Dica: *adapte* a prova da proposição anterior. ■

Observação 1.3.34. Não é difícil perceber[57] que na última proposição, se valer $\mathbb{D}=\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1\cup\ldots\cup\mathcal{C}_n$ para algum $n\in\mathbb{N}$, com $\mathcal{C}_i$ cofinal para todo $i\le n$, então o limite de $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ existe e é L se, e somente se, todas as sub-redes $(x_d)_{d\in\mathcal{C}_i}$ também convergem para L. Não é possível estender este resultado para o caso em que $\mathbb{D}$ é reunião de *infinitos* subconjuntos cofinais (reflita). Secretamente, é por isso que a noção de limite lateral perde parte do apelo em dimensões maiores... △

[57] Se discordar, encare como exercício $(^{\star}_{\star\star})$.

Espaços métricos completos

Muito do que se discutiu nas seções anteriores pode ser reciclado para o contexto mais geral dos espaços métricos (cf. Definição 1.0.10), mas algum cuidado é necessário pois nem todo espaço métrico é *bom* como a reta real. Os fatos a seguir são generalizações simples do que vimos – e as verificações serão problema seu $(^{\star}_{\star})$.

(i) As noções de subsequência (e, mais geralmente, sub-redes) são idênticas.

(ii) A preservação de convergência por subsequências (e sub-redes) também permanece.

(iii) A condição de Cauchy se expressa de maneira análoga para sequências e redes em espaços métricos: onde antes havia "$|x_m - x_n| < \varepsilon$", substitua por "$d(x_m, x_n) < \varepsilon$".

(iv) Ainda é verdade que redes convergentes em espaços métricos são de Cauchy. Além disso, se uma sequência de Cauchy tem subsequência convergente, então ela converge.

(v) Num espaço normado, sequências de Cauchy ainda são *limitadas*[58].

Os problemas ocorrem nos resultados que envolvem a *existência* de limites... no sentido de convergência!!

Exercício 1.37 (Será útil em mais ocasiões – $(^{\star}_{\star})$)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio e $\alpha \in [-\infty, +\infty] \setminus X$. Mostre que se $\alpha = \sup X$, então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in X$ para todo n e $x_n \to \alpha$. Mostre que a mesma coisa se verifica se $\alpha = \inf X$. ■

Exemplo 1.3.35. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais pode ser encarado como um espaço métrico por meio do valor absoluto[59]. Com isso dito, seja $X \subseteq \mathbb{Q}$ um subconjunto não-vazio e limitado tal que $\sup X = \sqrt{2}$ (cf. Exemplo 1.2.17). Pelo exercício anterior, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to \sqrt{2}$ em $\mathbb{R}$. Como $(x_n)_n$ converge em $\mathbb{R}$, segue que $(x_n)_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, como as distâncias entre os termos da sequência medidos em $\mathbb{R}$ são iguais às distâncias medidas em $\mathbb{Q}$, resulta que $(x_n)_n$ também de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas $(x_n)_n$ não converge em $\mathbb{Q}$! De fato, se existisse $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to q$ em $\mathbb{Q}$, o mesmo argumento das distâncias coincidentes permitiria concluir que $x_n \to q$ em $\mathbb{R}$, e daí $q = \sqrt{2}$, absurdo! Note que este exemplo também mostra que o Teorema de Bolzano-Weierstrass falha em $\mathbb{Q}$.[60] ▲

Definição 1.3.36. Um espaço métrico X é **completo** no *sentido de Cauchy*, assim como sua métrica é dita **completa**, se toda *sequência* de Cauchy em X converge em X. Em particular, se X é espaço vetorial e a métrica completa é induzida por uma norma, diz-se que X é um **espaço de Banach**. ¶

Exercício 1.38 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Adapte o Corolário 1.3.18 para redes em espaços métricos completos: mostre que toda rede de Cauchy num espaço métrico converge no espaço métrico. ■

A reta real é o exemplo fundamental de espaço métrico completo, mas está longe ser o único. Para um exemplo bobo, lembre-se que qualquer conjunto X pode ser elevado ao patamar de espaço métrico com a métrica discreta (cf. Exemplo 1.1.21), que será completa por um motivo muito simples: suas sequências de Cauchy são as *quase-constantes*, i.e., que a partir de um certo índice passam a assumir o mesmo valor (cf. Exemplo 1.1.22). Para um exemplo menos bobo, enfrente a próxima proposição, em que $\mathcal{B}(X)$ abrevia $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, o espaço das funções limitadas da forma $X \to \mathbb{R}$ (cf. Subseção 0.7.1 e o Exercício 0.131).

Observação 1.3.37 (**Atenção!**)**.** Aqui passa a ser muito importante não confundir f com $f(x)$: a primeira indica A FUNÇÃO COMO UMA TOTALIDADE, enquanto $f(x)$ representa apenas a imagem de um $x \in X$ pela função f. Explicitamente, f é uma coleção de pares ordenados enquanto $f(x)$ é apenas UM NÚMERO REAL. "*Ah, mas quando eu estudava Cálculo I os exercícios eram enunciados assim! Por que as notações mudam toda hora??? Que vida cruel!*". Pois é, já me contaram que eu *também* comia terra quando criança. Vamos seguir com a vida? △

---

[58] Por favor, não é hora de confundir "ser limitada" com "ter limite". Assim como na nota-de-rodapé 38 (página 113), uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ é **limitada** se existe $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ tal que $\|x_n\| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[59] Em geral, se (X, d) é espaço métrico e $Y \subseteq X$, então Y pode ser tratado como espaço métrico: basta medir as distâncias em Y por meio da métrica de X. Mais precisamente: ao definir $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ fazendo $d_Y(a, b) := d(a, b)$, segue que d_Y satisfaz os axiomas de métrica pois d já os satisfaz.

[60] Você precisará adaptar a definição de "ser limitado" para subconjuntos de espaços métricos.

Proposição 1.3.38. *Para um conjunto X qualquer, $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. A ideia é tomar uma sequência de Cauchy $(f_n)_n$ em $\mathcal{B}(X)$ e, por meio da completude de $\mathbb{R}$, obter $f \in \mathcal{B}(X)$ com $f_n \to f$ com respeito à norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$. Ora, como $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, segue que $(f_n(x))_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ (certo?)* e, portanto, existe $y \in \mathbb{R}$ com $f_n(x) \to y$. Ao xingar $y := f(x)$, torna-se evidente que a função $f\colon X \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto f(x)$ para todo x em X, é a candidata natural a limite de $(f_n)_n$.

Para provar a última afirmação, devemos fixar $\varepsilon > 0$ e mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Por sua vez, esta é uma desigualdade sobre supremos: assim, se para $\varepsilon' < \varepsilon$ mostrarmos que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$ para quaisquer $x \in X$ e $n \geq N$, seguirá que

$$\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon' < \varepsilon.$$

Acabou: note que para $x \in X$ e $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer,

$$|f(x) - f_m(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| < |f(x) - f_m(x)| + \|f_m - f_n\|,$$

o que pode ser arbitrariamente limitado pois $f_m(x) \to f(x)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{B}(X)$. Os detalhes ficam por sua conta. □

Corolário 1.3.39. *Se $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, então $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ é espaço de Banach.*

Demonstração. Tomando $X := \{1, \ldots, n\}$, segue que $\mathbb{R}^n = B(X)$, já que uma n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ nada mais é do que uma função $a\colon X \to \mathbb{R}$, automaticamente limitada por X ser finito. Daí,

$$\|\,(a_1, \ldots, a_n)\,\|_\infty := \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} = \sup\{x \in X : |a_x|\} = \|a\|_\infty.$$ □

O corolário anterior permanece válido se trocarmos a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$ por qualquer outra norma, mas ainda é cedo para verificar isso.

Observação 1.3.40 (Completude de Dedekind vs. completude de Cauchy)**.** A reta real foi definida como um corpo ordenado e *Dedekind-completo*. Poderíamos, alternativamente, ter definido a noção de sequências de Cauchy em corpos ordenados (por meio do valor absoluto) a fim de introduzir corpos ordenados *Cauchy-completos*: aqueles em que toda sequência de Cauchy converge. Assim, pelo que vimos aqui, a reta real é Cauchy-completa. Porém, pode-se mostrar mais: um corpo ordenado arquimediano $\mathbb{K}$ é Dedekind-completo se, e somente se, é Cauchy-completo. A prova da direção restante não é horrível.

Demonstração (*opcional*). Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado superiormente, digamos que por $M_0 \in \mathbb{K}$ com $M_0 > 0$. Fixado $x_0 \in S$, define-se $p_0 := \dfrac{1}{2}(x_0 + M_0)$. Daí:

(i) se p_0 for limitante superior de S, faz-se $a_0 := x_0$ e $b_0 := p_0$;

(ii) se não, faz-se $a_0 := p_0$ e $b_0 := M_0$.

Supondo definidos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ e $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que

($\star_i$) para todo $j \leq n$, $b_j - a_j = \dfrac{b_0 - a_0}{2^j}$ e $a_j \leq b_j$,

($\star_{ii}$) para todo $j < n$, $[a_{j+1}, b_{j+1}] \subseteq [a_j, b_j]$, e

($\star_{iii}$) para todo $j \leq n$, b_j limita S superiormente e existe $s \in S$ com $a_j \leq s$,

define-se $p_{n+1} := \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$. Daí:

(i) se p_{n+1} for limitante superior de S, faz-se $a_{n+1} := a_n$ e $b_{n+1} := p_{n+1}$;

(ii) se não, faz-se $a_{n+1} := p_{n+1}$ e $b_{n+1} := b_n$,

de modo que as sequências finitas $(a_j)_{j\leq n+1}$ e $(b_j)_{j\leq n+1}$ satisfazem as condições ($\star_i$), ($\star_{ii}$) e ($\star_{iii}$) anteriores.

Ao se considerarem as sequências $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ obtidas pelo procedimento recursivo acima, a condição ($\star_{ii}$) garante que a primeira é crescente, enquanto a segunda é decrescente. Por sua vez, a condição ($\star_i$) assegura que ambas são de Cauchy, donde a hipótese implica que ambas convergem em $\mathbb{K}$, digamos que para $a, b \in \mathbb{K}$, respectivamente. Aplicando-se então, novamente, a condição (i), verifica-se que $a = b$. Por fim, da condição ($\star_{iii}$), segue que $b = \sup S$: como $s \leq b_n$ para quaisquer $s \in S$ e $n \in \mathbb{N}$, resulta $s \leq \lim_n b_n = b$, mostrando que b limita S superiormente; se $x \in \mathbb{K}$ é limitante superior de S, então $a_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e daí $a = \lim_n a_n \leq x$, mostrando que $a = b$ é o menor limitante superior de S, o que encerra a prova. □

Para mais detalhes, confira a Subseção 5.1.2 de [13] (ou [6], artigo em que ela se baseia). △

1.4 Alguns critérios de convergência para séries

1.4.0 Essencial

A completude (de Dedekind ou de Cauchy, cf. Observação 1.3.40) é, precisamente, a propriedade que garante a existência de toda sorte de limites que *deveriam existir*. Em particular, ela é usada diariamente para determinar a convergência de séries sem a necessidade de explicitar o valor do limite. Uma ilustração típica no contexto de séries se dá na seguinte

Proposição 1.4.0 (Critério de Cauchy para séries)**.** *Uma série* $\sum a_n$ *de números reais converge em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* N *tal que* $\left|\sum_{j=m}^{n} a_j\right| < \varepsilon$ *sempre que* $n \geq m \geq N$.

Demonstração. A série $\sum a_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, a sequência $(a_0 + \ldots + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{R}$. Agora, pelo Teorema 1.3.17, esta sequência converge se, e somente se, é de Cauchy. Para finalizar, basta perceber que a condição expressa no enunciado é apenas o critério de Cauchy reescrito para a sequência $(a_0 + \ldots + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exercício 1.39 ($\star$)**.** Perceba. ■

Ao longo desta seção, veremos outras condições cuja verificação costuma ser mais simples.

Convergência absoluta

Definição 1.4.1. Uma série $\sum x_n$ de números reais é **absolutamente convergente** (ou **converge absolutamente**) se $\sum |x_n|$ converge em $\mathbb{R}$. ¶

Assim, por exemplo, $\sum \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge absolutamente, já que a série formada pelos termos $\left|\frac{1}{2^n}\right|$ já teve sua convergência verificada (cf. Exercício 1.8). O ponto a se destacar é que poderia não ser óbvio determinar se $\sum \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge no sentido usual, devido a alternância dos sinais. Eis aí uma das maravilhas da completude.

Proposição 1.4.2. *Toda série absolutamente convergente converge*[61].

Demonstração. Para uma série $\sum x_n$ em $\mathbb{R}$, tem-se

$$\left|\sum_{j=0}^{m} x_j - \sum_{j=0}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=m}^{n} |x_j| \leq \sum_{j=m}^{\infty} |x_j| := S_m \leq \sum_{j=0}^{\infty} |x_j| := M$$

sempre que $m \leq n$. Em particular, se $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então $M < +\infty$. Ocorre que em tais condições, ao fazer "$m \to \infty$", resulta que "$S_m \to 0$" (confira o Exercício 1.62). Logo, a série satisfaz a condição da última proposição e, portanto, deve convergir em $\mathbb{R}$. □

[61] Caso você se interesse por espaços normados, perceba que os argumentos utilizados se aplicam a qualquer espaço normado cuja métrica induzida pela norma é completa. Em outras palavras: a afirmação permanece válida em espaços de Banach. Na verdade, também vale a recíproca: se toda série absolutamente convergente converge no espaço normado, então o espaço é de Banach.

Exercício 1.40 ($\star$)**.** Mostre que se $\sum a_n$ é série absolutamente convergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $b_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum b_n a_n$ converge em $\mathbb{R}$. ■

Observação 1.4.3. Nem toda série convergente é absolutamente convergente. Um modo relativamente rápido de cozinhar um exemplo faz uso da

Proposição 1.4.4 (Opcional)**.** *Se $(a_n)_n$ é uma sequência decrescente de números positivos com $a_n \to 0$, então $\sum(-1)^n a_n$ converge em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Chamando $s_n := \displaystyle\sum_{j\leq n}(-1)^j a_j$, verificam-se sem grandes dificuldades as identidades

$$s_{2n} = s_{2n-2} \underbrace{-a_{2n-1} + a_{2n}}_{\leq 0} \quad \text{e} \quad s_{2n+1} = s_{2n-1} \underbrace{+a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0}.$$

Logo, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, enquanto $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Ocorre que uma sequência limita a outra de forma apropriada: como $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{n+1}$ com $a_{n+1} \geq 0$, segue que $s_{2n+1} \leq s_{2n}$ para todo n, acarretando $s_1 \leq s_{2n}$ e $s_{2n+1} \leq s_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, existem os limites $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$, que coincidem pois

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

O restante segue da Proposição 1.3.8. A verificação dos detalhes fica por sua conta. □

Para o exemplo prometido: a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ satisfaz as hipóteses da proposição anterior e, portanto, converge em $\mathbb{R}$; porém, ela não converge absolutamente, já que a série das normas de seus termos é a série harmônica! △

Séries convergentes em $\mathbb{R}$ que não convergem absolutamente são chamadas de **condicionalmente convergentes**. Aqui, a escolha de advérbios ("absolutamente" e "condicionalmente") pode ter chamado sua atenção: condicionalmente com respeito a quê? Resposta: a ordenação das parcelas na soma! Confira a Subseção 1.4.1

Alguns testes clássicos

Em teoria, a primeira proposição desta seção estabelece o melhor critério de convergência para séries, no sentido de que se trata de uma equivalência: nenhuma série convergente é capaz de escapar de seu escopo. No entanto, nem sempre é fácil determinar se uma série satisfaz ao critério de Cauchy. E é para facilitar esse aspecto da vida de quem pratica Análise que se investigam outros *testes de convergência*: nem toda série convergente satisfaz todos os testes, mas sempre que uma série satisfaz algum deles, ela converge. Aqui provaremos apenas um[62]:

Proposição 1.4.5 (Teste da comparação)**.** *Sejam $\sum x_n$ e $\sum y_n$ séries de números reais, com $|x_n| \leq y_n$ para n suficientemente grande. Se $\sum y_n$ converge, então $\sum x_n$ converge absolutamente.*

[62] Testes mais delicados costumam ser importantes para tratar de *séries de potências* e, por isso, podem esperar até lá. Se você estiver com muita pressa, confira [10, 11].

Demonstração. Note que para $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$,

$$\left|\sum_{j=m}^{n} x_j\right| = \sum_{j=m}^{n} |x_j| \leq \sum_{j=m}^{n} y_j \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j| := A_{m,n}.$$

Daí, como $\sum y_n$ converge em $\mathbb{R}$, para $\varepsilon > 0$ fixado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_{m,n} < \varepsilon$ sempre que $n \geq m \geq N$. Consequentemente, $\sum |x_n|$ satisfaz o critério de Cauchy para séries e, portanto, converge (certo?)*. $\square$

Observação 1.4.6. A formulação acima está de acordo com Tao [25], Pugh [17] e, possivelmente, muitas outras obras. Porém, o Teste da Comparação enunciado em [10, 11] é "mais geral": com a mesma tese, Lima pede como hipótese *apenas* a existência de uma constante $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c y_n$ para n suficientemente grande. A rigor, trata-se de uma generalização, já que o resultado anterior segue desta versão com $c := 1$. Porém, veja que isto também segue automaticamente da versão que provamos: afinal de contas, se $\sum y_n$ converge em $\mathbb{R}$, então $\sum c y_n = c \sum y_n$ converge em $\mathbb{R}$ (cf. Exercício 1.61) e, se $\sum c x_n$ é absolutamente convergente, então $\frac{1}{c} \sum c x_n = \sum x_n$ é absolutamente convergente. $\triangle$

Exemplo 1.4.7. Ainda não definimos aqui, mas você certamente conhece a função $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $\operatorname{sen}(x)$, a *função seno*. Note que por saber apenas que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, já somos capazes de perceber, de forma indolor, que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{2^n}$$

converge absolutamente, para qualquer sequência real $(x_n)_n$: basta compará-la com $\sum \frac{1}{2^n}$, que converge para 1. $\blacktriangle$

Corolário 1.4.8 (Teste de d'Alembert[63]). *Se $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c < 1 \tag{1.5}$$

para n suficientemente grande, então $\sum x_n$ converge absolutamente.

Demonstração. Primeiro, note que com $y_n := c^n$, temos $\sum y_n$ absolutamente convergente (pois $0 < c < 1$). Agora, note que a sequência $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada: como existe $N \in \mathbb{N}$ tal que (1.5) se verifica para todo $n \geq N$, resulta que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c = \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

para todo $n \geq N$ ou, equivalentemente,

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right| \leq \left|\frac{x_n}{y_n}\right|,$$

mostrando que a sequência $\left(\left|\frac{x_{k+N}}{y_{k+N}}\right|\right)_{k \in \mathbb{N}}$ é decrescente, e daí não é difícil concluir que $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada (conclua!)[64]. Por que isso importa? Pelo seguinte: agora, sabemos que existe $B > 0$ tal que $\frac{|x_n|}{|y_n|} \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que pode ser reescrito como $|x_n| \leq B y_n$. Portanto, $\sum x_n$ é absolutamente convergente pelo teste da comparação! $\square$

[63] Como enunciado em [10, 11]. Trata-se de uma variação do Teste da Razão (*Ratio Test*).

[64] Sugestão: lembre-se do truque utilizado para mostrar que toda sequência de Cauchy é limitada $\left(^{\star}_{\star}\right)$. Tente realmente se lembrar antes de procurar o trecho exato do texto, que se encontra na página 126.

Exercício 1.41 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $\sum y_n$ converge absolutamente, com $y_n \neq 0$ para todo n, e $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ é limitada, então $\sum x_n$ é absolutamente convergente. Dica: encare a demonstração anterior até que ela te encare de volta. ■

Exemplo 1.4.9. Fazendo $x_n := \frac{1}{n^2-3n+1}$, será que $\sum x_n$ converge? Resposta: sim. Após verificar que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge em $\mathbb{R}$ (cf. Exercício 1.65), basta aplicar o exercício anterior. ▲

Exemplo 1.4.10 (Exponencial escondida)**.** Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

converge absolutamente: basta notar que

$$\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n}\right| = \left|\frac{a}{n+1}\right|,$$

que se torna estritamente menor do que 1 para n suficientemente grande. ▲

Para mais exemplos de testes de convergência e aplicações, volte duas casas e faça um curso de Cálculo n para $n > 1$. Isto é um curso de Análise Real.

Observação 1.4.11. Veja que nos testes acima, a convergência das séries é determinada sem que se expresse o limite delas! Em geral, determinar o valor exato de uma série convergente é um problema bem mais delicado e artesanal. △

1.4.1 Extras

Convergência relativa e o surpreendente Teorema de Riemann

Vamos discutir melhor o sentido das expressões "absolutamente" e "condicionalmente" que acompanharam algumas séries ao longo da última seção. Primeiro, vamos mostrar que a *soma* de uma série absolutamente convergente não se altera se a ordem das parcelas for alterada – e daí a convergência ser *absoluta*, i.e., não relativa à ordem escolhida.

Já que se trata de uma subseção extra...

Proposição 1.4.12. *Se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach e $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é uma série absolutamente convergente, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$$

para qualquer bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Demonstração. No enunciado, ao dizer que $\sum x_n$ é absolutamente convergente, queremos dizer que $\sum \|x_n\|$ converge em $\mathbb{R}$. Logo, já temos garantida a convergência de $\sum x_n$ em E (Proposição 1.4.2 + nota-de-rodapé 61). Resta mostrar que $\sum x_{\varphi(n)}$ converge para o mesmo ponto.

Ora, para $N \in \mathbb{N}$ qualquer, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{0, \ldots, N\} \subseteq \{\varphi(0), \ldots, \varphi(M)\}$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. Daí, segue que

$$\left\|\sum_{n=0}^{M} x_{\varphi(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{M} x_{\varphi(n)} - \sum_{n=0}^{M} x_n + \sum_{k>M} x_n\right\| \leq \sum_{k\geq N} \|x_k\|,$$

e a última converge para 0 conforme $N \to \infty$ (cf. Exercício 1.62). Os detalhes ficam por sua conta. □

O resultado acima pode não surpreender tanto, já que as somas com as quais nos acostumamos a viver são comutativas de modo que, em certo sentido, a proposição só faz o trabalho de mostrar que a intuição é preservada pelo modelo matemático em questão. A situação mudará drasticamente com as séries condicionalmente convergentes.

Exercício 1.42 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Seja $\sum x_n$ uma série de números reais condicionalmente convergente.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $x_n^+ := \max\{a_n, 0\}$ e $x_n^- := \min\{a_n, 0\}$. Convença-se de que $\sum x_n = \sum x_n^+ + \sum x_n^-$.

b) Mostre que se $\sum x_n^+$ ou $\sum x_n^-$ convergissem em $\mathbb{R}$, então $\sum x_n$ seria absolutamente convergente. ■

Exercício 1.43 (Teorema do Rearranjo de Riemann $\left(\substack{\star\\\star}\star\substack{\star\\\star}\right)$)**.** Seja $\sum x_n$ uma série de números reais. Mostre que se $\sum x_n$ é condicionalmente convergente e $r \in \mathbb{R}$, então existe uma bijeção $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum x_{\varphi(n)} = r$. Dica: note que o Exercício 1.42 assegura $\sum x_n^+ = +\infty$ e $\sum x_n^- = -\infty$, o que permite selecionar alternadamente parcelas à direita e à esquerda de r. ■

1.5 Exercícios adicionais

Exercício 1.44 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Mostre que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ converge para $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$. Dica: primeiro prove para o caso em que $x = 0$, daí observe (de verdade!) que o caso geral segue deste pelas propriedades operatórias de limite. ■

Exercício 1.45 (Opcional – $\left(\substack{\star\\\star}\right)$)**.** Generalize o resultado anterior para *sequências* em espaços normados. ■

Exercício 1.46 (Opcional – $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$)**.** Generalize o resultado anterior para *redes* em espaços normados. ■

Exercício 1.47 $(\star)$**.** Pense rápido: se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$ para $x \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência real, então $\lim_{n\to\infty} x_n = x$? ■

Exercício 1.48 $(\star)$**.** Mostre que se $0 < a < 1$, então $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente. Dica: Proposição 0.7.5 + indução. ■

Exercício 1.49 $(\star)$**.** Mostre que se $a < -1$, então não existe $L \in [-\infty, +\infty]$ tal que $a^n \to L$. ■

Exercício 1.50 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência real, crescente e que converge em $\mathbb{R}$, então $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$. Mostre o análogo para sequências decrescentes. Dica: a parte menos óbvia é mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n$ é cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; para provar isso, suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n < x_N$ para algum $N \in \mathbb{N}$; agora é só não se esquecer das hipóteses. ■

Exercício 1.51 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Mostre que o resultado anterior permance válido para redes. ■

Exercício 1.52 $(\star)$**.** Mostre que se $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum x_n$ converge em $[0, +\infty]$. ■

Exercício 1.53 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais. Mostre que se $x_d \to x$ e $x_d + y_d \to z$, com $x, z \in \mathbb{R}$, então $y_d \to z - x$. Dica: tente escrever y_d *usando* x_d e $x_d + y_d$. ■

Exercício 1.54 $(\star)$**.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = z$, com $x, z \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n\to\infty} y_n = z - x$. ■

Exercício 1.55 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais estritamente positivos. Mostre que se existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \lambda$, então $x_n \to 0$. Dica: note que para $\mu \in (\lambda, 1)$ fixado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \mu$ para todo $n \geq N$, o que permite concluir que a (sub) sequência $(x_n)_{n\geq N}$ é decrescente e limitada inferiormente. ■

Exercício 1.56 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixado.

a) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \lim\limits_{n\to\infty} n! = \lim\limits_{n\to\infty} n^n = +\infty$.

b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Dica: use o exercício anterior. ■

Exercício 1.57 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $x \in \mathbb{R}$ um número real, $(x_d)_d$ uma rede real e $(r_n)_n$ uma sequência de números reais estritamente positivos com $r_n \to 0$. Mostre que se para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $D_n \in \mathbb{D}$ com $|x_d - x| < r_n$ para todo $d \geq D_n$, então $\lim_d x_d = x$. ■

Exercício 1.58 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais, com $y_d \to 0$. Mostre que se a rede $\left(\frac{x_d}{y_d}\right)_{d\in\mathbb{D}}$ converge em $\mathbb{R}$, então $x_d \to 0$. Dica/sugestão: faça primeiro para sequências e depois generalize. ■

Exercício 1.59 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências reais e crescentes tais que $x_n \leq y_n$ para todo n. Mostre que se para cada $p \in \mathbb{N}$ fixado existir um número natural $n_p > p$ com $x_{n_p} \geq y_p$, então $\lim_n x_n = \lim_n y_n$. ■

Exercício 1.60 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ redes reais e crescentes. Mostre que se para cada $a \in \mathbb{D}$ existir $b \geq a$ tal que $x_b \geq y_a$, então $\lim_d x_d \geq \lim_d y_d$. Dica: use a Proposição 1.2.13 várias vezes. ■

Exercício 1.61 (Propriedades operatórias de séries $({}^{\star}_{\star})$)**.** Para séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ convergentes em $\mathbb{R}$, mostre que $\sum x_n + y_n = \sum x_n + \sum y_n$ e $r \sum x_n = \sum r x_n$ para qualquer $r \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.62 $({}^{\star}_{\star})$**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$.

a) (**Séries telescópicas**) Mostre que se $x_n \to 0$, então $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1}) = x_0$. Dica: calcule

$$\sum_{j\leq n} x_j - x_{j+1}$$

explicitamente[65].

b) Fixado $m \in \mathbb{N}$, mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\sum_{n\geq m} x_n$ também converge em $\mathbb{R}$, onde $\sum_{n\geq m} x_n$ indica a série induzida pela sequência $(x_{m+n})_n$. Dica: observe que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{m+k} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n,$$

daí use o Exercício 1.53 para encerrar.

c) Mostre que se $\sum x_n$ converge em $\mathbb{R}$, então $\lim_{m\to\infty} \sum_{n\geq m} x_n = 0$. Dica: antes de reclamar, confira o Exercício 1.54. ■

Observação 1.5.0. A série $\sum_{n\geq m} x_n$ acima costuma ser xingada de **rabo da série** (a partir de m), também denotada por $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$. △

[65]E não há problema se o resultado do somatório não lhe parecer óbvio – realmente não é. O problema, neste caso, é você não fazer, por conta própria, exemplos com valores pequenos de n para perceber o que está acontecendo.

Exercício 1.63 (Opcional ($\substack{\star\\ \star\star}$))**.** Mostre que os resultados anteriores permanecem válidos em espaços normados. ■

Exercício 1.64 ($\substack{\star\\ \star}$)**.** Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Dica: expresse $\frac{1}{n(n-1)}$ de um jeito esperto. ■

Exercício 1.65 ($\substack{\star\\ \star}$)**.** Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge em $\mathbb{R}$. Dica: *compare* com a série anterior. ■

Exercício 1.66 ($\star$)**.** Mostre que se $\sum x_n$ converge em $\mathbb{R}$ e $\sum y_n$ diverge, então $\sum x_n + y_n$ diverge. **Opcional** ($\substack{\star\\ \star}$): generalize para espaços normados. ■

Exercício 1.67 ($\substack{\star\\ \star}$)**.** Resolva o Exercício 1.7 usando apenas o caso crescente e as propriedades operatórias de limites e supremos/ínfimos (na reta estendida). ■

Exercício 1.68 ($\substack{\star\\ \star}$)**.** Usando o Teorema do Sanduíche, prove que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $\mathbb{R}$ tal que $|x_n| \to 0$, então $x_n \to 0$. Dica: $-|a| \leq a \leq |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.69 ($\substack{\star\\ \star}$)**.** Dado $r \in \mathbb{R}$, mostre que existe uma sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. ■

Exercício 1.70 ($\substack{\star\\ \star}$)**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.

a) Mostre que se $(x_n)_n$ é limitada e $a \in \mathbb{R}$ não é limite da sequência, então $(x_n)_n$ admite uma subsequência que converge para algum $b \neq a$. Dica: primeiro, escreva com cuidado o que significa dizer que a é limite de $(x_n)_n$; pronto, agora tudo o que você precisa fazer é negar essa condição com cuidado para cozinhar uma subsequência esperta antes de aplicar o Teorema de Bolzano-Weierstrass[66].

b) Mostre que se $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ com $L \in \{-\infty, +\infty\}$, então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

c) Mostre que se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, então nenhuma subsequência de $(x_n)_n$ converge em $\mathbb{R}$.

d) Vale a recíproca do item anterior? Isto é: se $(x_n)_n$ não admite subsequências que convergem em $\mathbb{R}$, então $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$? Dica: proceda pela contrapositiva, e observe (mostre!) que se $|x_n| \not\to +\infty$, então $(x_n)_n$ admite uma subsequência limitada. ■

Exercício 1.71 ($\substack{\star\\ \star\star}$)**.** Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos não-vazios.

a) Mostre que $\sup A$ e $\inf A$ sempre existem em $[-\infty, +\infty]$.

b) Supondo que $\sup A \coloneqq +\infty$, mostre que $\sup(A + B) = +\infty$.

c) Supondo que $\inf A \coloneqq -\infty$, mostre que $\inf(A + B) = -\infty$.

d) Mostre que se $\inf A \coloneqq -\infty$, então $\inf(rA) = -\infty$ para $r > 0$ e $\sup(rA) = +\infty$ para $r < 0$.

e) Mostre que se $\sup A \coloneqq +\infty$, então $\sup(rA) = +\infty$ para $r > 0$ e $\inf(rA) = -\infty$ para $r < 0$.

f) Poderia ocorrer $\sup A = -\infty$ ou $\inf A = +\infty$? Por quê? ■

Exercício 1.72 ($\substack{\star\\ \star\star}$)**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ e $L \in [-\infty, +\infty]$. Mostre que se $x_n \not\to L$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que nenhuma subsequência de $(x_{n_k})_k$ converge para L. ■

[66] **Atenção:** dizer que a não é limite de $(x_n)_n$ NÃO É DIZER QUE $\lim_{n\to\infty} x_n \neq a$, pois a sequência $(x_n)_n$ poderia simplesmente não convergir.

1.6 Continuidade

Intuitivamente, uma função contínua, digamos que da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$, é aquela cujo gráfico pode ser desenhado "sem tirar o lápis do papel". É claro que isso não é uma *definição matemática* no sentido atual do termo mas, enquanto motivação, essa ideia irá nos ajudar a elaborar/encontrar definiç*ões* apropriadas de continuidade: como *detectar* que o lápis foi tirado do papel?

Mais precisamente, se o lápis for tirado do papel no *ponto* $(p, f(p))$ de $\mathbb{R}^2$, então deve ter ocorrido um *salto* no gráfico[67]: existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ em torno de $f(p)$ tal que para qualquer intervalo aberto $J \subseteq [a,b]$ em torno de p é possível encontrar $x \in J$ tal que $f(x) \notin I$.

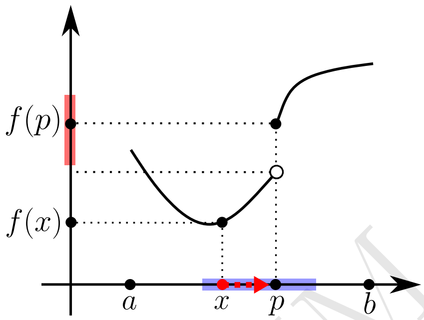


Figura 1.9: Para o intervalo aberto I (em vermelho) em torno de $f(p)$, em qualquer intervalo aberto J (em azul) em torno de p existe x tal que $f(x) \notin I$. Note que se os J's diminuem, os x's convergem para p.

Acima, o intervalo aberto I é *uma* testemunha do "salto", isto é, uma evidência de que o lápis foi tirado do papel no ponto $(p, f(p))$. Note que para servir como uma testemunha efetiva de ~~descontinuidade~~ salto, I realmente precisa encontrar pelo menos um ponto x em qualquer intervalo aberto J em torno de p satisfazendo a condição $f(x) \notin I$.

Observação 1.6.0 (Cuidado com os quantificadores!)**.** Se para *algum* intervalo aberto I em torno de $f(p)$ existir *pelo menos um* intervalo aberto J em torno de p tal que $f(x) \in I$ para todo $x \in J$, ainda seria *possível* que f apresentasse um salto em p?

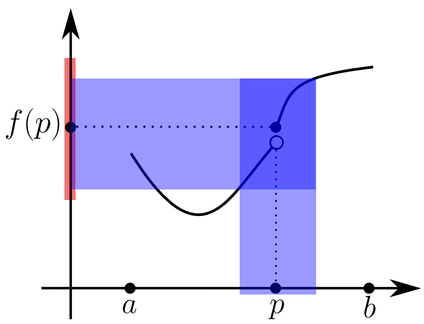


Figura 1.10: Resposta: sim.

Acima, qualquer ponto x no intervalo aberto J em torno de p (em azul) tem sua imagem pertencente ao intervalo aberto I em torno de $f(p)$ (em vermelho). No entanto, se diminuíssemos um pouco mais o intervalo vermelho, chegaríamos novamente ao cenário descrito pela Figura 1.9. △

[67]A menos que a pessoa volte a desenhar no mesmo ponto em que parou... Como este caso não é útil para a ilustração, podemos supor que a pessoa esteja trêmula.

Em outras palavras, cada intervalo aberto I em torno de $f(p)$ funciona como uma lupa que utilizaremos para checar a existência de saltos. Se a lupa for incapaz de determinar um salto (como na Figura 1.10), melhoramos a lupa, tomando um intervalo aberto I' ainda menor, para enxergar ainda *mais perto*. Se for impossível encontrar uma lupa/intervalo aberto capaz de detectar um salto, a conclusão é uma só: não há salto!

1.6.0 Essencial

Continuidade via convergência

A discussão anterior sugere definir continuidade como ausência de saltos. Porém, em vez de fazer isso apenas para funções da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, vamos considerar funções da forma $X \to \mathbb{R}$, para $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer.

Definição 1.6.1 (Continuidade via intervalos, para funções reais)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto, $p \in X$ um ponto e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que $f: X \to \mathbb{R}$ é **contínua em** p se para todo intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ com $f(p) \in I$ existir um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $p \in J$ e $f(x) \in I$ para todo $x \in J \cap X$. Uma função **contínua** é aquela que é contínua em todos os pontos de seu domínio. ¶

Exercício 1.73 (Definição clássica – $(^{\star}_{\star})$)**.** Mostre que $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua em $p \in X$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ satisfaz $|x - p| < \delta$. Dica: lembre-se de que para $O \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto tal que $z \in O$, existe $r > 0$ tal que $(z - r, z + r) \subseteq O$ (cf. Observação 1.0.6). ■

Num primeiro momento, trata-se da exata negação do que entendemos como a definição de descontinuidade, o que parece fazer desta uma formulação ótima, já que é bastante intuitiva. Porém, ela é pouco prática:

Exemplo 1.6.2 (Ilustrativo, quase nunca será assim)**.** Suponha que se queira provar que a função $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) := t^2$ é contínua em todo ponto do intervalo $[0, 1]$. Para isso, fixado $x \in [0, 1]$ e um intervalo aberto I em torno de x^2, devemos encontrar um intervalo aberto J em torno de x tal que $y^2 \in I$ sempre que $y \in J \cap [0, 1]$. Tomando $I := (x^2 - \varepsilon, x^2 + \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$, isto significa encontrar $\delta > 0$ tal que $|x^2 - y^2| < \varepsilon$ sempre que $y \in [0, 1] \cap (x - \delta, x + \delta)$. Percebeu que será massante, né? ▲

Exercício 1.74 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Encontre um $\delta > 0$ que funciona. Dica: $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y|$ e $|x + y| \leq |x| + |y| \leq |x| + |y - x| + |x| = |x - y| + 2|x|$. ■

O exemplo acima, embora chato, pode ajudar as pessoas que não leem as legendas das figuras a perceber que (des) continuidade tem a ver com convergência, o que pode trazer uma definição de continuidade bem mais prática: na Figura 1.9, o intervalo I que testemunha a descontinuidade de f em p é tal que para todo intervalo aberto J em torno de p existe $x \in J$ tal que $f(x) \notin I$. Em particular, ao escolher $x_J \in J$ tal que $f(x_J) \notin I$, podemos fazer J variar na coleção $\mathcal{I}_p$ de *todos os intervalos abertos em torno de* p. Ora, tal coleção $\mathcal{I}_p$ pode ser encarada como um conjunto dirigido: basta declarar $J \preceq J'$ se, e somente se, $J' \subseteq J$ (verifique que $(\mathcal{I}_p, \preceq)$ é um conjunto dirigido!)[68]. Desse modo, $(x_J)_{J \in \mathcal{I}_p}$ se revela uma rede legítima, tal que $x_J \to p$ mas $f(x_J) \not\to f(p)$. Esta é a contrapositiva da ponta de um *iceberg*.

[68]Dica: a interseção de intervalos abertos em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ $(^{\star}_{\star})$.

Teorema 1.6.3. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. Para qualquer $p \in X$, são equivalentes:*

(i) *f é contínua em p;*

(ii) $\lim_{d \in \mathbb{D}} f(x_d) = f(p)$ *para toda <u>rede real</u> $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X tal que $x_d \to p$;*

(iii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ *para toda <u>sequência</u> real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to p$.*

Demonstração. Para (i) $\Rightarrow$ (ii), dado um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ em torno de $f(p)$, existe um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $p \in J$ e tal que $f(x) \in I$ para todo $x \in X \cap J$. Ora, por hipótese, $x_d \in X$ para todo $d \in \mathbb{D}$ e, como $x_d \to p$, existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $d \succeq D$ acarreta $x_d \in X \cap J$ e, portanto, $f(x_d) \in I$. Em outras palavras, mostramos que $f(x_d) \to f(p)$.

A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) segue pois toda sequência é uma rede. Enfim, para (iii) $\Rightarrow$ (i), podemos proceder pela contrapositiva de modo análogo ao que se fez no parágrafo que antecede o presente teorema: se f é descontínua em p e $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto em torno de $f(p)$ que testemunha isso, então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \left(p - \frac{1}{2^n}, p + \frac{1}{2^n}\right) \cap X$ tal que $f(x_n) \notin I$, o que resulta numa sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to p$ mas $f(x_n) \not\to f(p)$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. $\square$

Observação 1.6.4 (Axioma da Escolha, presente!)**.** Como justificar as escolhas dos pontos $x_n \in \left(p - \frac{1}{2^n}, p + \frac{1}{2^n}\right) \cap X$ para cada $n \in \mathbb{N}$? Certamente, como $\left(p - \frac{1}{2^n}, p + \frac{1}{2^n}\right) \cap X \neq \emptyset$ para todo n, algum ponto *pode* ser escolhido. Porém, de um ponto de vista intuitivo, isto pode ser feito apenas individualmente: para extrapolar para todo $n \in \mathbb{N}$, precisamos fazer escolhas infinitas vezes, o que não condiz com o ideal de demonstrações como "algoritmos" finitários. Formalmente, o que se faz é assumir que isto pode ser feito: entrou em cena o Axioma da Escolha, discutido na Subseção 0.4.1 (cf. página 46). "*Ah, eu prefiro o jeito que o Elon faz, ele não usa essas coisas filosóficas de conjuntos!!!*". Você tem o direito de ignorar as justificativas formais – mas aqui, pelo menos, a escolha é sua e não minha. $\triangle$

Entre outras coisas, o último teorema também mostra que sequências *bastam* para discutir continuidade na reta real[69]. No entanto, matrizes também bastam para estudar Álgebra Linear em dimensão finita, e nem por isso descartamos as transformações lineares, não é mesmo? Embora sequências sejam *suficientes*, elas não têm a mesma versatilidade que as redes apresentam para descrever as diversas noções de convergência que surgem diariamente na Análise.

Exemplos iniciais

Corolário 1.6.5 (Cf. Exercício 1.20, na Subseção 1.2.0)**.** *Toda função polinomial é contínua.*

Demonstração. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) := a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ para certos $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em X tal que $x_n \to x$ para algum $x \in X$, então

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a_0 + a_1 \lim_{n\to\infty} x_n + \ldots + a_m \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^m = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = f(x). \quad \square$$

Observação 1.6.6 (Continuidade de restrições)**.** Acima, não haveria perda de generalidade em assumir $X = \mathbb{R}$. De fato, em geral, se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon Y \to \mathbb{R}$ é contínua, então a restrição $f|_X\colon X \to \mathbb{R}$ ainda é contínua (verifique!)*. $\triangle$

[69]E, mais geralmente, em espaços métricos.

Exemplo 1.6.7. A função $\iota\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $\iota(x) := \frac{1}{x}$ é contínua (em todos os pontos do seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) em virtude do item (iii) no Teorema 1.2.1. Neste caso, não é possível *estender* ι a uma função *contínua* da forma $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Com efeito, se $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos, então $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(0)$ para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $x_n\to 0$. Agora, se $g(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x\neq 0$, então ao fazer $x_n := \frac{1}{2^n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ teríamos $x_n\to 0$ mas $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = +\infty$. ▲

Observação 1.6.8 (Opcional: nem todo "erro" está errado)**.** Apesar do que se destacou acima, seria possível estender ι a uma função *contínua* da forma $[-\infty,0)\cup(0,+\infty]\to\mathbb{R}$: neste caso, declarando $\Gamma(+\infty) := \Gamma(-\infty) := 0$ e $\Gamma(x) := \frac{1}{x}$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, resulta que Γ é *contínua*, no sentido de que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $[-\infty,+\infty]\setminus\{0\}$ tal que $x_n\to x$ para $x\in[-\infty,+\infty]\setminus\{0\}$, então $\Gamma(x_n)\to\Gamma(x)$ (cf. Proposição 1.2.11). Se $\Phi\colon[-\infty,+\infty]\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ fosse outra função com as mesmas propriedades, resultaria que $\Gamma=\Phi$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. Logo, Γ fica completamente determinada por ι, o que justifica escrever

$$\Gamma(x) := \frac{1}{x}$$

para todo $x\in[-\infty,+\infty]\setminus\{0\}$. Assim, você não precisa sentir peso na consciência ao escrever "$\frac{1}{+\infty}=0$" ou "$\frac{1}{-\infty}=0$", embora seja bom evitar, já que as pessoas não estão prontas para conversar sobre a reta estendida. △

Corolário 1.6.9. *A função* <u>*valor absoluto*</u>[70] $|\cdot|\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é contínua.*

Demonstração. Automático em vista do teorema anterior e do Lema 1.2.0. □

Corolário 1.6.10. *A função* $\sqrt{(\cdot)}\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *é contínua.*

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso em que $x\neq 0$. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $[0,+\infty)$ tal que $x_n\to x$, então $\sqrt{x_n}+\sqrt{x}\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, e daí

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}-\sqrt{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty}(x_n-x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}} = 0,$$

pois $\lim_{n\to\infty}(x_n-x)=0$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada por $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (certo?)*. Disso resulta a identidade $\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{x}$ (cf. Exercício 1.54). Se $x=0$, então para $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|<\varepsilon^2$ para todo $n\geq N$. Logo, $|\sqrt{x_n}|<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$ sempre que $n\geq N$, i.e., $\sqrt{x_n}\to 0$ (pode ser útil rever o Exercício 0.125). □

Corolário 1.6.11. *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, bem como funções $f\colon X\to Y$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$. Se f é contínua num ponto $p\in X$ e g é contínua em $f(p)$, então $g\circ f$ é contínua no ponto p.*

Demonstração. Para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência real em X, devemos mostrar que se $x_n\to p$, então $(g\circ f)(x_n)\to g(f(p))$. Ora, por f ser contínua em p temos $f(x_n)\to f(p)$. Como $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em Y e g é contínua em $f(p)$, resulta $g(f(x_n))\to g(f(p))$, como desejado. □

Exercício 1.75 ($^{\star}_{\star}$)**.** Sejam $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ funções reais contínuas em $p\in X$. Mostre que $f+g$ e $f\cdot g$ são contínuas em p. Além disso, se $g(p)\neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ (definida em todo ponto $x\in X$ tal que $g(x)\neq 0$) é contínua em p. ■

[70]... "módulo".

Exemplo 1.6.12. A função $\chi_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$, que faz $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := 1$ se, e somente se, $x \in \mathbb{Q}$, é descontínua em todos os pontos. De fato, para $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existe uma sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Q}$ tal que $q_n \to p$ (cf. Exercício 1.69): ora, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $q_n \in \left(p - \frac{1}{2^n}, p + \frac{1}{2^n}\right)$, de modo que $\lim_{n\to\infty} |p - q_n| = 0$ e, consequentemente, $\lim_{n\to\infty} q_n = p$. Todavia, $\lim_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1$ e $\chi_{\mathbb{Q}}(p) = 0$. Analogamente (isto é, prove!)*, para $p \in \mathbb{Q}$, existe sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $s_n \to p$, mostrando que $\lim_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(s_n) = 0$ mas $\chi_{\mathbb{Q}}(p) = 1$. Em ambos os casos, $\chi_{\mathbb{Q}}$ não é contínua em p. ▲

Exemplo 1.6.13 (A função exponencial)**.** O Exemplo 1.4.10 permite definir a função $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real $x \in \mathbb{R}$ associa $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, usualmente xingada de **função exponencial**. Vamos ver que tal função é contínua. Primeiro, note que $\exp(x)$ é estritamente crescente quando restrita a $(0, +\infty)$, e vale $\exp(a) \geq 1$ sempre que $a \geq 0$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$. Agora, observe que para $x, y \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, temos

$$|x^k - y^k| = |x - y| \cdot \left|x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}\right| \leq |x - y| \cdot \sum_{j=0}^{k-1} |x|^j |y|^{k-1-j}.$$

Como $\alpha^k \leq \beta^k$ sempre que $0 < \alpha, \beta$ e $\alpha < \beta$ (verifique!)$^{\star}_{\star}$, ao fazer $c \geq \max\{|x|, |y|\}$, resulta

$$|x^k - y^k| \leq |x - y| \cdot \sum_{j=0}^{k-1} c^j c^{k-1-j} = |x - y| \cdot \sum_{j=0}^{k-1} c^{k-1} = |x - y| k c^{k-1},$$

de modo que

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{|x^k - y^k|}{k!} \leq \sum_{k=1}^{m} |x - y| \frac{kc^{k-1}}{k!} = |x - y| \sum_{j=1}^{m} \frac{c^{k-1}}{(k-1)!} \leq |x - y| \cdot \exp(c).$$

Por fim, fixados $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$|\exp(x) - \exp(y)| = \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k - y^k}{k!} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{|x^k - y^k|}{k!} \leq |x - y| \cdot \exp(c)$$

donde segue que $|\exp(x) - \exp(y)| < \varepsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$ para um $\delta > 0$ adequado. Completar os detalhes é problema seu ($^{\star}_{\star\star}$). ▲

Exercício 1.76 ($^{\star}_{\star}$)**.** Reflita: o δ que você encontrou dependeu apenas do x escolhido? Dica: note para qualquer $\delta > 0$ que você fixar, deverá valer $|y| \leq |x - y| + |x| < \delta + |x|$. ■

Observação 1.6.14. Define-se $e := \exp(1)$, i.e., $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, número real que costuma ser xingado de **constante de Euler**. Futuramente, após provarmos que a identidade $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ se verifica para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, seguirá que $\exp(n) = e^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, bem como $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que justifica a notação mais comum: $e^x := \exp(x)$. △

1.6.1 Extras

Continuidade em espaços métricos

Ao trocar os intervalos abertos na definição de continuidade por bolas abertas num espaço métrico (cf. Definição 1.0.10), chega-se à definição de continuidade para funções entre espaços métricos.

Definição 1.6.15. Para espaços métricos (X, d) e (Y, d'), uma função $f : X \to Y$ é **contínua em** $p \in X$ se, e somente se, para toda d'-bola aberta $B \subseteq Y$ com $f(p) \in B$ existe uma d-bola aberta $C \subseteq X$ tal que $p \in C$ e $f[C] \subseteq B$. A função f é **contínua** se for contínua em todos os pontos de seu domínio. ¶

Exercício 1.77 (Definição clássica – $(\substack{\star\\\star\star})$)**.** Mostre que $f : X \to Y$ é contínua em $p \in X$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d'(f(x), f(p)) < \varepsilon$ sempre que $d'(x, p) < \delta$. Dica: mostre que, em geral, se (Z, ρ) é espaço métrico e $z \in Z$, então z pertence a uma ρ-bola aberta B se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $B_\rho(z, r) \subseteq B$. ■

Não deve ser difícil perceber que a definição acima estende a noção de continuidade de funções reais: como sempre, a ideia é trocar "$|x - y|$" por "$d(x, y)$" sem pensar muito no assunto. Talvez a parte menos evidente se refira à interseção presente na Definição 1.6.1: para $X \subseteq \mathbb{R}$, ao definir $d(a, b) := |a - b|$ para quaisquer $a, b \in X$, segue que (X, d) é um espaço métrico. E daí?

Exercício 1.78 $(\substack{\star\\\star})$**.** Nas notações acima, para $x \in X$ e $r > 0$, mostre que vale a identidade $B_d(x, r) = (x - r, x + r) \cap X$. Dica: basta "destrinchar" os significados de $a \in B_d(x, r)$ e $a \in (x - r, x + r) \cap X$. ■

Com base nisso, você já deve imaginar que o Teorema 1.6.3 permaneça válido para espaços métricos. Imaginou certo! Parabéns... mas terá que provar por conta própria.

Exercício 1.79 $(\substack{\star\\\star\star})$**.** Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos, e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que para qualquer $p \in X$, são equivalentes:

a) f é contínua em p;

b) $\lim_{a \in \mathbb{A}} f(x_a) = f(p)$ para toda rede $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ em X tal que $x_a \to p$;

c) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(p)$ para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to p$. ■

Exemplo 1.6.16 (Continuidade das operações em $\mathbb{R}$)**.** As operações usuais de $\mathbb{R}$, a saber $(+) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são, antes de qualquer outra coisa, funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}^2$ é um espaço métrico, é lícito nos perguntarmos se tais operações são contínuas... e a resposta é sim. O mais curioso é que, secretamente, isto já está provado no texto.

Com efeito, em vista do exercício anterior, basta mostrar que $(+)$ e $(\cdot)$ comutam com limites de redes ou sequências em $\mathbb{R}^2$. Ora, se $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{n \to \infty}(x_n, y_n) = (x, y)$, então já sabemos que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ e $\lim_{n \to \infty} y_n = y$ (cf. Proposição 1.1.23). Agora, o Teorema 1.2.1 assegura que

$$\lim_{n \to \infty}(x_n + y_n) = x + y \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty}(x_n \cdot y_n) = xy,$$

i.e.,

$$\lim_{n \to \infty}(+)(x_n, y_n) = (+)(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty}(\cdot)(x_n, y_n) = (\cdot)(x, y).$$

Moral da história: as propriedades operatórias dos limites reais sempre foram um mero corolário da continuidade das operações de soma e produto vistas como funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. ▲

Exercício 1.80 $(\substack{\star\\\star\star})$**.** Enuncie e demonstre a versão análoga do Corolário 1.6.11 para funções entre espaços métricos. ■

Exemplo 1.6.17. Ainda por conta do Exercício 1.79, as projeções

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

são contínuas (certo?)$^{\substack{\star\\\star}}$. Disto segue que se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ for uma função contínua, então também serão contínuas as funções $\pi_1 \circ F$ e $\pi_2 \circ F$ (pelo exercício anterior). O que isto significa? Vejamos: por definição, F associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um ponto $F(x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que deve ter duas coordenadas, digamos $F(x) := (f_1(x), f_2(x))$. Assim, o que a afirmação anterior assegura é que se F é contínua, então f_1 e f_2 são contínuas.

A graça é que vale a volta: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então também é contínua a função $(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que faz $(f, g)(x) := (f(x), g(x))$. De fato, se $x_n \to x$ em $\mathbb{R}$, então $f(x_n) \to f(x)$ e $g(x_n) \to g(x)$, donde a Proposição 1.1.23 assegura que $(f(x_n), g(x_n)) \to (f(x), g(x))$ em $\mathbb{R}^2$, mostrando que (f, g) é contínua – novamente pelo Exercício 1.79. ▲

Exercício 1.81 ($\star\atop\star$)**.** Para $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, mostre que $f + g = (+) \circ (f, g)$ e $f \cdot g = (\cdot) \circ (f, g)$. Use isto para provar que $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas sempre que f e g são contínuas. ■

Continuidade de transformações lineares

Quando os espaços métricos são, na verdade, espaços (vetoriais!) normados, temos ainda mais alguns métodos para detectar a continuidade de algumas funções... Infelizmente, isto vale apenas para as *transformações lineares* (cf. Definição 0.6.24), mas não se engane: em dimensões *maiores*[71], transformações lineares costumam ser bem mais interessantes do que em dimensão 1.

Proposição 1.6.18. *Para espaços (vetoriais) normados $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(S, \|\cdot\|_S)$ e uma transformação linear $T\colon E \to S$, são equivalentes:*

(i) *T é contínua;*

(ii) *T é contínua em 0_E;*

(iii) *existe $r > 0$ tal que $\|T(x)\|_S \leq r \cdot \|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. É claro que (i) ⇒ (ii). Para (ii) ⇒ (iii), é mais conveniente usar a definição de continuidade em termos de ε's e δ's. Como T é contínua em 0_E, para $\varepsilon := 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_S = \|T(x) - T(0_E)\|_S < 1$$

sempre que $\|x\|_E = \|x - 0_E\|_E < \delta$. Logo, para qualquer $x \neq 0_E$ e δ' com $0 < \delta' < \delta$ temos $u := \frac{\delta'}{\|x\|_E} \cdot x$ satisfazendo $\|u\|_E < \delta$ (certo?)*, de modo que

$$\|T(u)\|_S = \left\| T\left(\frac{\delta'}{\|x\|_E} x\right) \right\|_S = \frac{\delta'}{\|x\|_E} \|T(x)\|_S < 1 \Rightarrow \|T(x)\|_S < \frac{1}{\delta'} \|x\|_E,$$

mostrando que basta tomar $r := \frac{1}{\delta'}$. Para (iii) ⇒ (i), a linearidade de T dá

$$\|T(x) - T(y)\|_S = \|T(x - y)\|_S \leq r\|x - y\|_E,$$

e assim, $\|T(x) - T(y)\|_S < \varepsilon$ sempre que $\|x - y\|_E < \frac{\varepsilon}{r}$. □

Uma consequência surpreendente desta banalidade?

Teorema 1.6.19. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{B}[a, b]$, i.e., cada f_n é uma função limitada da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$. Se cada f_n é Riemann-integrável e, além disso, $f_n \to f$ em $\mathcal{B}[a, b]$, onde $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ também é Riemann-integrável, então*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demonstração. O subconjunto $\mathcal{RI}[a, b]$ das funções Riemann-integráveis é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}[a, b]$ (cf. Exemplo 1.2.31), o que permite considerar $\mathcal{RI}[a, b]$ como espaço vetorial normado pela norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$. Ainda pelo exemplo supracitado, a função

$$\begin{aligned} \int_a^b \colon \mathcal{RI}[a, b] &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

é uma transformação linear. Finalmente, pela última proposição, o Exercício 1.29 garante a continuidade da integral enquanto transformação linear, com $r := (b - a)$. □

Na verdade, as hipóteses do último corolário podem ser afrouxadas: uma vez em posse de uma caracterização "melhor" de Riemann-integrabilidade, será possível assegurar que se uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções Riemann-integráveis *converge uniformemente* para uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, então f será Riemann-integrável. Mas é cedo para se preocupar com isso.

[71] Talvez você já tenha ouvido falar que *toda* transformação linear é contínua. Mas isto é falso: em dimensão *infinita* sempre é possível encontrar transformações lineares descontínuas (cf. Observação 2.0.31).

1.7 A topologia da reta

1.7.0 Essencial

Abertos da reta e abertos relativos

Para tratar da última caracterização de continuidade, precisamos revelar outra importante forma de abordar as questões de convergência. Ela se baseia numa observação muito simples: na Figura 1.9, tudo funcionaria de forma idêntica se, em vez de intervalos abertos I e J com $f(p) \in I$ e $p \in J$, tivéssemos apenas subconjuntos I' e J' com $I \subseteq I'$ e $J \subseteq J'$.

Definição 1.7.0. Diremos que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é **aberto em** $\mathbb{R}$ (ou **de** $\mathbb{R}$) se para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x \in I$ e $I \subseteq A$. ¶

Exercício 1.82 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Mostre que $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$. ■

Por vacuidade, $\emptyset$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$: não há $x \in \emptyset$ que possa testemunhar o contrário. Analogamente, $\mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$ (não há intervalo aberto de $\mathbb{R}$ que não esteja contido em $\mathbb{R}$). Intervalos abertos também são abertos em $\mathbb{R}$, mas não por culpa da gramática: se $I \subseteq \mathbb{R}$ é intervalo aberto e $x \in I$, então o próprio I é um intervalo aberto tal que $x \in I$ e $I \subseteq I$.

Exercício 1.83 ($\star$)**.** Mostre que intervalos abertos são abertos em $\mathbb{R}$ usando a caracterização do exercício anterior.[72] ■

Exemplo 1.7.1 (Nem todo aberto de $\mathbb{R}$ é intervalo aberto)**.** A definição dos abertos de $\mathbb{R}$ se aplica a outros tipos de subconjuntos. Por exemplo, se $A := (0, 2) \cup (3, 5)$, então A é aberto em $\mathbb{R}$, mas não é um intervalo. É aberto em $\mathbb{R}$ pois para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto $I \subseteq A$ tal que $x \in I$ e $I \subseteq A$: se $0 < x < 2$, então basta tomar $I := (0, 2)$; se $3 < x < 5$, então basta fazer $I := (3, 5)$. No entanto, A não é intervalo: temos $1, 4 \in A$, com $1 < 3 < 4$, mas $3 \notin A$ (cf. Definição 0.8.14). ▲

Exercício 1.84 (?!)**.** Leia o exemplo anterior dez vezes. Em particular, perceba que um conjunto que se escreve como reunião de intervalos não precisa ser intervalo. ■

Exemplo 1.7.2 (Nem tudo é aberto!)**.** O subconjunto $S := [0, 1)$ não é aberto em $\mathbb{R}$, e a testemunha é o ponto 0: embora $0 \in S$, não há intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $0 \in I$ e $I \subseteq S$ (certo?)*. Analogamente, $\mathbb{Q}$ não é aberto em $\mathbb{R}$ e, mais geralmente, nenhum subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ pode ser aberto em $\mathbb{R}$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$. ▲

Lema 1.7.3. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto. Se para todo $x \in A$ existir um subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $x \in B$ e $B \subseteq A$, então A é aberto em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Como B é aberto em $\mathbb{R}$, existe intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x \in I$ e $I \subseteq B$. Como $B \subseteq A$, o resultado segue. □

Proposição 1.7.4. *Seja Λ um conjunto. Se para cada $\lambda \in \Lambda$ for dado um subconjunto aberto $A_\lambda \subseteq \mathbb{R}$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.*

[72] “*Como assim a caracterização do exercício anterior? Por que você usa tantas palavras difíceis??!!*”. Veja: no exercício anterior, você mostrou que A é aberto em $\mathbb{R}$ (segundo a Definição 1.7.0) se, e somente se, “para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$”. Isto significa que a condição entre aspas *também* serve para determinar o que é um aberto de $\mathbb{R}$. Ou seja, tal condição serve como “caracterização”, no sentido de determinar quais características o objeto precisa ter para ser xingado de aberto em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Primeiro, lembre-se que $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ se, e somente se, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A_\lambda$ (cf. Definição 0.1.21). Assim, chamando $A := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, perceba que se $x \in A$, então existe um aberto $A_\lambda \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x \in A_\lambda$ e $A_\lambda \subseteq A$, donde o resultado segue pelo lema anterior. □

Exercício 1.85 ($\star$)**.** Perceba! ■

Definição 1.7.5 (Abertos relativos)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto. Diremos que $R \subseteq X$ é um subconjunto **aberto de** X (ou **em** X) se existir um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $R = X \cap A$. ¶

Exemplo 1.7.6. Para $X := [0, 3]$, o subconjunto $R := [0, 1)$ é aberto em X, pois $[0, 1) = (-1, 1) \cap X$. "*Ah, mas eu havia pensado em fazer* $[0, 1) = (-\infty, 1) \cap X$*!!! Por que eu nunca acerto uma?!!!*" Calma... A definição de aberto relativo não diz que a testemunha A deva ser única: "existe um" é diferente de "existe um único". ▲

Observação 1.7.7 (Importante)**.** Veja que um subconjunto R pode ser aberto num subconjunto de $\mathbb{R}$ sem ser aberto em $\mathbb{R}$: já vimos que $[0, 1)$ não é aberto em $\mathbb{R}$ mas, pelo exemplo anterior, $[0, 1)$ é aberto em $[0, 3]$.

"*Mas por quê??!! Por que um subconjunto pode ser aberto num* X *mas não ser aberto em* $\mathbb{R}$*??!! Ahhh eu odeio Análise!!!*"... A primeira resposta é: ora, porque a definição permite – e isso não é exclusividade de Análise! A segunda resposta traz um adendo: no fim do dia o que importa é a definição, e não o que você acha que a palavra usada para abreviar a definição significa[73]. A terceira resposta talvez te interesse mais: em certo sentido, ao considerar os abertos relativos de $X := [0, 3]$, ignoram-se todos os pontos de $\mathbb{R}$ fora de $[0, 3]$, de modo que os intervalos abertos que causavam problema "deixam de existir". A quarta resposta foi banida pelo setor jurídico. △

Exercício 1.86 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Considere X um subconjunto de $\mathbb{R}$.

a) Mostre que $\emptyset$ e X são abertos em X.

b) Mostre que se $A, B \subseteq X$ são abertos em X, então $A \cap B$ é aberto em X.

c) Mostre que se $A_\lambda \subseteq X$ é aberto em X para cada $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto em X. ■

Exercício 1.87 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Mostre que $A \subseteq X$ é aberto em X se, e somente se, para todo $a \in A$ existe um subconjunto $B \subseteq X$, aberto em X, tal que $a \in B$. ■

Continuidade topológica

Para um conjunto Z, que nada precisa ter a ver com $\mathbb{R}$, uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de Z é chamada de **topologia** em Z se

(i) $\emptyset, Z \in \mathcal{T}$;

(ii) $A \cap B \in \mathcal{T}$ sempre que $A, B \in \mathcal{T}$;

(iii) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$ sempre que $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{T}$.

Dessa forma, ao longo desta primeira parte, mostramos que para $X \subseteq \mathbb{R}$, a *família* $\mathcal{T}_X$, cujos membros são os subconjuntos de X abertos em X, constitui <u>uma</u> *topologia* em X. O que isso tudo tem a ver com continuidade?

[73] O dicionário não manda aqui!

Teorema 1.7.8 (Continuidade de funções reais, via pré-imagens)**.** *Para um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[A]$ for aberto em X sempre que A for aberto em $\mathbb{R}$, onde $f^{-1}[A]$ indica a pré-imagem de A pela função f.*

Demonstração. Se f é contínua e $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, pode-se ter $f^{-1}[A] = \emptyset$ ou $f^{-1}[A] \neq \emptyset$, com o primeiro caso automaticamente resolvido pelo exercício anterior. No segundo caso, para $x \in f^{-1}[A]$, temos $f(x) \in A$ pela definição de pré-imagem[74] e, por A ser aberto em $\mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in I$ e $I \subseteq A$. Logo, pela definição de continuidade, existe um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x \in J$ e $f(z) \in I$ sempre que $z \in X \cap J$. Percebeu? Como J é aberto em $\mathbb{R}$, segue que $X \cap J$ é um aberto em X tal que $x \in X \cap J$ e $f(z) \in I \subseteq A$ sempre que $z \in X \cap J$, i.e., $X \cap J \subseteq f^{-1}[A]$. Percebeu?? Mostramos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X (pelo exercício anterior!).

Para a recíproca, basta mostrar que f é contínua em x, para qualquer $x \in X$. Dado um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ com $f(x) \in I$, precisamos encontrar outro intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ em torno de x tal que $f(z) \in I$ sempre que $z \in X \cap J$. Ora, por I ser aberto em $\mathbb{R}$, sabemos que $f^{-1}[I]$ é aberto em X, digamos $f^{-1}[A] = X \cap O$ para algum aberto $O \subseteq \mathbb{R}$. Como $x \in f^{-1}[I]$ (pois $f(x) \in A$!!), resulta que $x \in O$ e, pela definição dos abertos de $\mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x \in J$ e $J \subseteq O$. Finalmente, note que se $z \in X \cap J$, então $z \in X \cap O = f^{-1}[I]$ e, portanto, $f(z) \in I$, como desejado. □

Observação 1.7.9. Pré-imagem não é a imagem pela função inversa.

Exercício 1.88 (!!!)**.** Releia a frase acima cinquenta vezes. ■

Por que a pré-imagem não é a imagem pela função inversa?

Resposta rápida: quem manda não são os símbolos, mas sim as definições e o contexto.

Resposta longa: uma função só admite inversa quando é bijetora, e a pré-imagem de f por A é, POR DEFINIÇÃO, o subconjunto $f^{-1}[A] := \{x \in X : f(x) \in A\}$, ou seja: f **não precisa ser bijetora para considerarmos pré-imagens**. Nas situações em que, por sorte, f é bijetora, aí sim, as duas noções coincidem.

Poderíamos utilizar uma notação menos ambígua para pré-imagens? Sim. Há textos que utilizam "$f^{\leftarrow}[A]$" para indicar a pré-imagem de A pela função f, por exemplo. No entanto, a maioria dos textos costuma assumir que ninguém acrescentaria uma hipótese tão forte como "bijetividade" sem perceber. Se você discorda, treine até perceber! △

O salto conceitual que demos é inegavelmente estranho: antes das considerações topológicas, a noção de continuidade (e, por extensão, convergência) parecia mais intuitiva, já que podíamos nos apegar a *números* e *distâncias* para *calcular* e *estimar* a convergência; enquanto isso, uma topologia parece apenas uma sacola cheia de informações abstratas que alguém inventou só para impedir você de se formar. Contudo, não é para isso que ela serve.

As topologias formalizam a impressão que você provavelmente já tinha de que não precisamos de uma régua ótima para decidir se uma função é contínua ou se uma rede (ou sequência) converge, já que todos os procedimentos envolvem *desigualdades*, estimativas, aproximações, etc. Além disso, em situações em que mais de uma noção de distância é razoável[75], topologias permitem decidir quando tais noções de distância são *equivalentes* – mas este é um problema mais natural em $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$. Na reta, a topologia favorece argumentos mais concisos e, simultaneamente, abrangentes, como veremos pelo restante do curso.

[74] Cf. Exercício 0.54.

[75] Cf. a subsubseção sobre bolas abertas, na Subseção 1.1.1 (página 102).

1.7.1 Extras

Espaços topológicos e homeomorfismos

Definição 1.7.10. Um **espaço topológico** é um par $(X, \mathcal{T})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X. ¶

Diariamente, os membros da topologia $\mathcal{T}$ de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ são chamados de **abertos de** X (ou **em** X) **segundo a topologia** $\mathcal{T}$ – ou ainda, se preferir, $\mathcal{T}$**-abertos**. Nesse sentido, os axiomas que definem uma topologia se reescrevem assim: $\emptyset$ e X são abertos, a interseção finita de abertos é aberta e a reunião arbitrária de abertos é aberta. Secretamente, o Teorema 1.7.8 diz como definir *funções contínuas* entre espaços topológicos:

Definição 1.7.11. Para $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos, uma função $f : X \to Y$ é **contínua** se $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$ sempre que $S \in \mathcal{S}$. Verbalmente: "a pré-imagem de abertos de Y é aberta em X". ¶

Exemplo 1.7.12. Ao considerar $\mathbb{R}$ com a topologia $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ formada pelos abertos de $\mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$ com a topologia $\mathcal{T}_X$ formada por seus abertos relativos, segue que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua (como na Definição 1.6.1) se, e somente se, f é contínua no sentido da definição anterior (cf. Teorema 1.7.8!). ▲

Exemplo 1.7.13 (Topologia de espaços métricos)**.** Todo espaço métrico (X, d) vem de fábrica com uma topologia $\mathcal{T}_d$: um subconjunto $A \subseteq X$ é $\mathcal{T}_d$-aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe uma bola aberta $B \subseteq A$ tal que $x \in B$ (verifique!)$^{\star}_{\star}$. Classicamente, porém, a definição é diferente: pede-se que para todo $x \in A$ exista $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq A$. A equivalência entre as duas definições se dá pelo seguinte[76]

Exercício 1.89 ($^{\star}_{\star}$)**.** Nas notações acima, mostre que $z \in B_d(x, r)$ se, e somente se, existe $s > 0$ tal que $B_d(z, s) \subseteq B_d(x, r)$. Em particular, bolas abertas são abertas. Dica: a distância entre x e z é $d(x, z)$ e, por valer $d(x, z) < r$, segue que $r - d(x, z) := s > 0$ é um candidato a raio; fazer um desenho também pode ajudar. ■

Agora, para espaços métricos (X, d) e (Y, d') o que significa dizer que $f : X \to Y$ é contínua com respeito às suas topologias? Resposta: a mesma coisa que a Definição 1.6.15! De fato, se f é "metricamente" contínua e $S \subseteq Y$ é aberto (... em Y)[77] segundo a topologia $\mathcal{T}_{d'}$, então para qualquer $x \in f^{-1}[S]$ vale $f(x) \in S$, de modo que a definição de $\mathcal{T}_{d'}$ garante uma d'-bola aberta $B' \subseteq S$ tal que $f(x) \in B' \subseteq S$. Pela continuidade, existe uma d-bola aberta $B \subseteq X$ tal que $x \in B$ e $f[B] \subseteq B' \subseteq S$, ou seja, $x \in B$ e $B \subseteq f^{-1}[S]$, mostrando que $f^{-1}[S]$ é $\mathcal{T}_d$-aberto (por quê?)[78]. Reciprocamente, se f é "topologicamente" contínua, então f é "metricamente" contínua pois bolas abertas são abertas nas topologias induzidas por suas métricas. Você pode cuidar dos detalhes ($^{\star}_{\star\star}$). ▲

A relação com espaços métricos pode levantar algumas perguntas interessantes:

(i) faz sentido falar de funções (topologicamente) contínuas em pontos específicos?

(ii) faz sentido falar de convergência em espaços topológicos?

(iii) as funções contínuas ainda são aquelas que preservam convergência nesse contexto?

A resposta para todas as perguntas é "sim", embora a última tenha uma ressalva. Dizer que uma rede $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ **num espaço topológico** $(X, \mathcal{T})$ **converge** para um ponto $x \in X$ significa que para todo $\mathcal{T}$-aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in V$ sempre que $d \succeq D$, o que ainda abreviaremos com $x_d \to x$. Note que tal definição estende as noções anteriores de convergência de redes (é para notar mesmo!)$^{\star}_{\star}$. Com isso, vale o seguinte.

Teorema 1.7.14 (Opcional)**.** *Para espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$, uma função $f : X \to Y$ e um ponto $p \in X$, são equivalentes:*

(i) *para todo $\mathcal{S}$-aberto $U \subseteq Y$ tal que $f(p) \in U$, existe um $\mathcal{T}$-aberto $V \subseteq X$ com $p \in U$ e $f[V] \subseteq U$;*

(ii) *$f(x_d) \to f(p)$ em Y para qualquer rede $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em X tal que $x_d \to p$.*

[76] Compare com a dica fornecida para o Exercício 1.73.

[77] Com o tempo você perceberá que isto não precisa ser enfatizado a todo momento.

[78] Um argumento parecido já foi usado anteriormente, junto com um lema esperto; adapte o lema ($^{\star}_{\star\star}$).

Demonstração. Para (i) $\Rightarrow$ (ii), imite o argumento da etapa correspondente no Teorema 1.6.3. Para a recíproca, troque $\mathcal{I}_p$ por $\mathcal{T}_p := \{V \in \mathcal{T} : p \in V\}$ no argumento que antecede o teorema supracitado. $\square$

Exercício 1.90 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Complete a demonstração. $\blacksquare$

Definição 1.7.15. Uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ é **contínua em** $p \in X$ se qualquer uma das duas condições no teorema anterior for satisfeita. ¶

Exercício 1.91 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $f\colon X \to Y$ é contínua se, e somente se, f é contínua em todos os pontos de X. $\blacksquare$

E as ressalvas? Há duas principais: a primeira se refere à unicidade dos limites, que não é garantida em espaços topológicos quaisquer; a segunda se refere às sequências convergentes, que nem sempre podem substituir as redes no último teorema.

Sim, você pode esbarrar com um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ em que uma rede $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ converge para dois pontos distintos. Mas não se preocupe: já provamos que em espaços métricos isto não acontece, então não será agora que isso passará a acontecer em espaços métricos. Esse tipo de comportamento *pode* ocorrer em topologias que não são induzidas por métricas.

Exercício 1.92 (Opcional – $({}^{\star}_{\star})$)**.** Um espaço topológico é chamado de (espaço de) **Hausdorff** se para quaisquer pontos distintos x e y existem abertos disjuntos A e B tais que $x \in A$ e $y \in B$. Mostre que se X é de Hausdorff e $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma rede em X tal que $x_d \to x$ e $x_d \to y$, então $x = y$. **For fun** $({}^{\star}_{\star\star})$**:** mostre que vale a volta![79] $\blacksquare$

A questão das sequências convergentes é mais delicada: existem situações em que $f(x_n) \to f(p)$ sempre que uma sequência $(x_n)_n$ converge para p mas, ainda assim, a função f não é contínua em p no sentido do item (i) do último teorema. Evidentemente, isto nunca ocorre quando as topologias envolvidas são induzidas por métricas: já provamos isso, não precisa se preocupar. Em todo caso, esta é uma das motivações para o estudo de redes: permitir que convergência e continuidade se descrevam mutuamente em cenários *não*-metrizáveis.

Respondidas as perguntas, outro aspecto fundamental da topologia é dar sentido preciso a certas relações de *similaridade* que alguns espaços parecem manter com outros.

Definição 1.7.16. Dois espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ são **homeomorfos** se existe uma função bijetora contínua $f\colon X \to Y$ cuja inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ também é contínua. Em tais situações, a função f é chamada de **homeomorfismo.** ¶

Exemplo 1.7.17. Os intervalos $(-1, 1)$ e $(-\infty, +\infty)$ certamente são distintos. Apesar disso, eles são *parecidos*: é como se $(-\infty, +\infty)$ fosse $(-1, 1)$ *esticado*. Embora as distâncias exatas sejam alteradas nesse processo de "esticamento", *algo se preserva.* Formalmente, o esticamento pode ser dado pela função

$$\begin{aligned} \varphi\colon (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{t}{1-|t|} \end{aligned}$$

contínua em virtude das propriedades de funções contínuas, bijetora por ter

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{R} &\to (-1,1) \\ t &\mapsto \frac{t}{1+|t|} \end{aligned}$$

como inversa, homeomorfismo pois ψ é contínua em virtude das propriedades de funções contínuas. O que tal homeomorfismo preserva? Resposta: convergência. Por exemplo: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $(-1, 1)$ que converge para $\frac{9}{10}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{9}{10}} = 9,$$

mostrando que φ leva $(x_n)_n$ a pontos arbitrariamente próximos de $\varphi\left(\frac{9}{10}\right)$. Analogamente, ψ leva pontos arbitrariamente próximos de $r \in \mathbb{R}$ a pontos arbitrariamente próximos de $\psi(r)$. $\blacktriangle$

[79] Em particular, todo espaço métrico é de Hausdorff, bem como a reta estendida, mas você já sabia disso (cf. Exercício 1.17).

Exemplo 1.7.18 (Informal)**.** Os intervalos $(0,1)$ e $[0,1)$ não são homeomorfos. De fato, se $f\colon [0,1) \to (0,1)$ fosse um homeomorfismo, então f levaria 0 a algum ponto de $(0,1)$, digamos $f(0) = \frac{1}{2}$. Porém, se isso ocorresse, ao retirar o ponto 0 de $[0,1)$, isto deveria ser homeomorfo a $(0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\} = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, mas isto não pode ocorrer, já que o segundo tem “dois pedaços”, enquanto o primeiro tem apenas um “pedaço”. No próximo capítulo, este raciocínio será formalizado por meio da noção de *conexidade*. ▲

Exemplo 1.7.19. Como exemplo final, note que se d e d' são duas métricas sobre o mesmo conjunto X, então $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_d'$ se, e somente se, a função identidade $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ é um homeomorfismo entre $(X, \mathcal{T}_d)$ e $(X, \mathcal{T}_{d'})$ (por quê?)$^\star_\star$. Em particular, se E é um espaço vetorial com duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$, então elas *induzem a mesma topologia*[80] se, e somente se, existem $r, R > 0$ tais que

$$r\|x\| \leq \|x\|' \leq R\|x\|$$

para todo $x \in E$ (cf. Proposição 1.6.18). Futuramente, isto será usado para provar que, quando o assunto é continuidade e convergência em $\mathbb{R}^n$, podemos considerar *qualquer* norma em $\mathbb{R}^n$. ▲

Supremos e ínfimos revistos (parte II)

Nessa altura do campeonato você provavelmente já percebeu que $[-\infty, +\infty]$ é um espaço topológico de maneira bastante natural[81]. O que talvez ainda te assuste é que $[-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$ também é! Em geral, para espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$, definimos uma nova topologia em $X \times Y$ declarando como abertos os subconjuntos $A \subseteq X \times Y$ com a seguinte propriedade: para todo $(x,y) \in A$, existem $U \in \mathcal{T}$ e $V \in \mathcal{S}$ tais que $(x,y) \in U \times V$ e $U \times V \subseteq A$. Entre muitas outras coisas, isso nos permite revisitar as indeterminações com bem mais poder de *expressividade*.

O Exemplo 1.6.16 já revelou que as propriedades operatórias dos limites reais são, na verdade, manifestação da continuidade das operações em $\mathbb{R}$ vistas como funções da forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assim, podemos dizer que as propriedades operatórias dos limites na reta estendida, secretamente, buscavam estender as operações de $\mathbb{R}$ para $[-\infty, +\infty]$ de forma contínua.

$$\begin{tikzcd}
{[-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty]} \arrow[r, "*_\infty"] & {[-\infty,+\infty]} \\
\mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[u] \arrow[r, "*"] & \mathbb{R} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.11: Existe uma operação contínua em $[-\infty, +\infty]$ que estende outra operação contínua $*$ em $\mathbb{R}$?

Nesse sentido, as indeterminações apenas provam que isto não é possível com as operações usuais de $\mathbb{R}$. Por exemplo, com $* := (+)$, se existisse uma função contínua $(+)_\infty\colon [-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty] \to [-\infty,+\infty]$ tal que $a\,(+)_\infty\, b = a + b$ sempre que $a, b \in \mathbb{R}$, então deveria haver um *valor* em $[-\infty, +\infty]$ bem definido para $+\infty\,(+)_\infty\,-\infty$, digamos $L \in [-\infty, +\infty]$. Logo, por continuidade, sempre que $x_n \to +\infty$ e $y_n \to -\infty$, com $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ para todo n, deveria ocorrer

$$\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = L.$$

No entanto, já vimos que para $x_n = n$ e $y_n = (-1)^n - n$, a sequência $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge em $[-\infty, +\infty]$! O problema da multiplicação é análogo.

Apesar disso, é possível estender tais operações a um *subespaço* de $[-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty]$. Em geral, se $(X, \mathcal{T})$ é espaço topológico e $Y \subseteq X$ é um subconjunto, a família $\mathcal{T}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em Y, chamada de **topologia de subespaço** (compare com a Definição 1.7.5).

[80]Duas métricas (resp. normas) sobre um mesmo conjunto X (resp. espaço vetorial) são **topologicamente equivalentes** se ambas induzem a mesma topologia.

[81]Declare $A \subseteq [-\infty, +\infty]$ aberto se, e somente se, para todo $a \in A$ existir um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ tal que $a \in I$ e $I \subseteq A$...

Exercício 1.93 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que a topologia de $\mathbb{R}$ coincide com a topologia de subespaço herdada de $[-\infty, +\infty]$. ■

Com isso em mente, não é difícil perceber que o Teorema 1.2.9, na verdade, prova que a adição $(+)$ e a multiplicação $(\cdot)$ em $\mathbb{R}$ admitem *extensões contínuas* $(+)_\infty$ e $(\cdot)_\infty$, respectivamente, sobre os subespaços $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$ de $[-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$ *ilustrados* a seguir. Explicitamente, basta fazer

- ✓ $+\infty\ (+)_\infty\ r := r\ (+)_\infty\ +\infty = +\infty$ para todo $r \in (-\infty, +\infty]$,
- ✓ $-\infty\ (+)_\infty\ r := r\ (+)_\infty\ -\infty = -\infty$ para todo $r \in [-\infty, +\infty)$,
- ✓ $+\infty\ (\cdot)_\infty\ r := r\ (\cdot)_\infty\ +\infty = +\infty$ para todo $r \in (0, +\infty]$,
- ✓ $+\infty\ (\cdot)_\infty\ r := r\ (\cdot)_\infty\ +\infty = -\infty$ para todo $r \in [-\infty, 0)$,
- ✓ $-\infty\ (\cdot)_\infty\ r := r\ (\cdot)_\infty\ -\infty = -\infty$ para todo $r \in (0, +\infty]$
- ✓ $-\infty\ (\cdot)_\infty\ r := r\ (\cdot)_\infty\ -\infty = +\infty$ para todo $r \in [-\infty, 0)$.

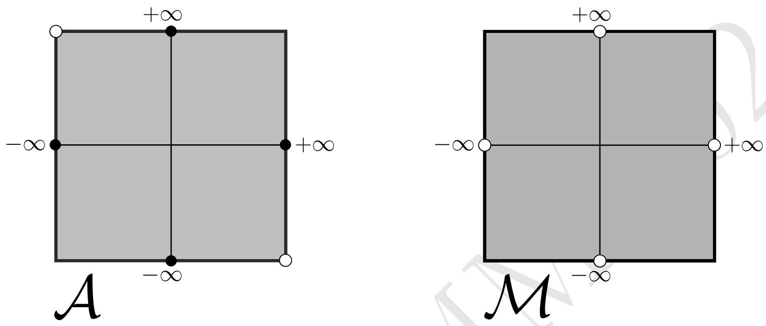


Figura 1.12: Acima, os círculos brancos indicam os pontos do *plano estendido* $[-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$ excluídos em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$, respectivamente.

Analogamente, a Proposição 1.2.11 apenas garante que a função $\iota \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dada por $\iota(x) := \frac{1}{x}$, se estende a uma função contínua $\Gamma \colon [-\infty, +\infty] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ em que $\Gamma(\pm\infty) = 0$, o que fica bem menos estranho depois que você investiga o gráfico da função ι.

Exercício 1.94 (?!)**.** Esboce o gráfico da função ι. Sugestão: Geogebra. ■

O que supremos e ínfimos têm a ver com tudo isso? Pouca coisa: o título foi mais uma isca do que algo realmente sério. Ainda assim...

Exercício 1.95 (*For fun* – $(^{\star\star}_{\star\star})$)**.** Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$.

a) Mostre que se $(\sup A, \sup B) \in \mathcal{A}$, então $\sup(A + B) = \sup A\ (+)_\infty\ \sup B$. Sugestão: note que a correspondência $(a, b) \mapsto a + b$ determina uma função crescente da forma $A \times B \to \mathbb{R}$, onde $A \times B$ pode ser encarado como conjunto dirigido ao fazermos $(a, b) \preceq (a', b') \Leftrightarrow a \leq a'$ e $b \leq b'$; como a imagem dessa rede crescente é o conjunto $A + B$, por um lado obtemos

$$\lim_{(a,b) \in A \times B} a + b = \sup(A + B);$$

por outro lado, as redes $(a)_{(a,b) \in A \times B}$ e $(b)_{(a,b) \in A \times B}$ convergem para $\sup A$ e $\sup B$, respectivamente, donde segue que

$$\lim_{(a,b) \in A \times B} a + b = \lim_{(a,b) \in A \times B} a\ (+)_\infty \lim_{(a,b) \in A \times B} b = \sup A\ (+)_\infty\ \sup B.$$

b) Repita o exercício anterior para ínfimos.

c) Use os truques acima para mostrar que $\sup(-A) = -\inf A$.

d) Supondo $A, B \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, use o mesmo tipo de raciocínio para mostrar que $\sup(AB) = \sup A\ (\cdot)_\infty\ \sup B$ e $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$ sempre que $(\sup A, \sup B) \in \mathcal{M}$ e $(\inf A, \inf B) \in \mathcal{M}$. ■

1.8 Limites de funções: antes tarde do que nunca

1.8.0 Essencial

Limites de funções em pontos de acumulação

Vamos finalmente utilizar todo o ferramental desenvolvido ao longo do capítulo para formalizar a noção de limite para funções da forma $X \to \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$. Primeiro, a ideia clássica, que está quase certa: para uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$, que pode ou não pertencer a X, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ *é um limite de f quando x tende a p* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$ para $x \in X$. A definição acima *quase* funciona.

Exemplo 1.8.0 (Falha da unicidade de limites)**.** Seja $X := (0,1) \cup (3,4)$ e considere a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0,1) \\ 1, & \text{se } x \in (3,4) \end{cases}.$$

Pergunta-se: existe algum $L \in \mathbb{R}$ tal que "$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = L$"?

Resposta: sim! Basta tomar $L := 59$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, ao fazer $\delta := 1$, a implicação

$$x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x - 2| < 1 \Rightarrow |f(x) - 59| < \varepsilon$$

é verdadeira, por um motivo bastante frustrante: não há $x \in X$ tal que $0 < |x - p| < 1$. Ora, mas então por que 59? Pelo mesmo motivo que $L := 200$ funcionaria: para o p escolhido, não é possível garantir a unicidade dos números L's satisfazendo a definição de limite! ▲

A situação do exemplo anterior se deve a uma falha "técnica": o fato de existir um $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta) \cap X \neq \emptyset$ permite que a implicação que caracteriza o limite seja satisfeita por vacuidade. Para impedir isso, portanto, basta pedir que tal δ não exista (cf. Proposição 1.3.23).

Definição 1.8.1. Para $X \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$, diremos que p é **ponto de acumulação de** X se para todo $r > 0$ existe $x \in X$ tal que $0 < |x - p| < r$. ¶

Exercício 1.96 ($\star$)**.** A seguir, decida se os pontos $p \in \mathbb{R}$ dados são pontos de acumulação dos subconjuntos S.

a) $S := (0,2)$ e $p := 1$.

b) $S := (0,1]$ e $p := 0$.

c) $S := \mathbb{Z}$ e $p := 200$.

d) $S := \{\sqrt{2}\}$ e $p := \sqrt{2}$.

e) $S := \mathbb{Q}$ e $p := \sqrt{12039810293} - 1$.

f) $S := \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ e $p := 0$. ■

Exercício 1.97 ($\overset{\star}{\star}$)**.** Mostre que se $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X e $L, L' \in \mathbb{R}$ são limites[82] de f quando x tende a p, então $L = L'$. Dica: imite o Exemplo 1.0.7. ■

Definição 1.8.2. Como de costume, nas situações em que p é ponto de acumulação de X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função, vamos escrever $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ para indicar que $L \in \mathbb{R}$ é o único número real L que é limite de f quando x tende a p. ¶

[82] Com respeito à definição apresentada no começo desta seção!

Observação 1.8.3 (É só mais um limite de redes, mas com ressalvas)**.** Suponha que $X_p := X \setminus \{p\} \neq \emptyset$. Ao declarar $a \preceq b$ se $a, b \in X_p$ e $|b - p| \leq |a - p|$, elevamos $(X_p, \preceq)$ ao patamar de conjunto dirigido, o que permite (mais uma vez) considerar a rede $(f(x))_{x \in X_p}$. Agora, como no Exemplo 1.0.7, para $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \in X_p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = L$$

sempre que p é ponto de acumulação de X.

A sutileza está nas situações em que p *não é ponto de acumulação de* X. Em tais cenários, embora não faça sentido tratar de "$\lim\limits_{x \to p} f(x)$" no sentido clássico, o limite da rede $(f(x))_{x \in X_p}$ ainda pode fazer sentido, já que X_p é dirigido independentemente da situação do ponto p (verifique!)${}^{\star}_{\star}$. De qualquer forma, vamos manter a exigência de p ser ponto de acumulação, entre outras coisas, por respeito aos cânones. △

A observação acima coloca à disposição todos os resultados obtidos anteriormente para redes reais. Daí, como já se estendeu a noção de limite de rede reais, faz sentido considerar os casos em que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ com $L \in [-\infty, +\infty]$. Mas faremos mais:

Exercício 1.98 (${}^{\star}_{\star}$)**.** Para $X \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$, mostre que p é ponto de acumulação de X se, e somente se, para todo intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $p \in I$ existe $x \in X \cap (I \setminus \{x\})$. ■

Definição 1.8.4. Diremos que $p \in [-\infty, +\infty]$ é **ponto de acumulação de** $X \subseteq \mathbb{R}$ se para todo intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $p \in I$ existir $x \in X$ com $x \in I$ e $x \neq p$. ¶

A definição acima não apenas estende a noção inicial de ponto de acumulação para pontos reais, como também permite tratar $-\infty$ e $+\infty$ como pontos de acumulação de subconjuntos da reta: note que para um subconjunto não-vazio $X \subseteq \mathbb{R}$,

✓ X é ilimitado superiormente se, e somente se, $+\infty$ é ponto de acumulação de X, e

✓ X é ilimitado inferiormente se, e somente se, $-\infty$ é ponto de acumulação de X.

Definição 1.8.5. Para uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$, onde $X \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in [-\infty, +\infty]$ é ponto de acumulação de X, dizemos que $L \in [-\infty, +\infty]$ é o *limite de* f *quando* x *tende a* p, o que se indica com $L = \lim\limits_{x \to p} f(x)$, se para todo intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $L \in I$ existe intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $p \in J$ e $f(x) \in I$ sempre que $x \in J \cap X$. ¶

Chegamos à verdade fundamental sobre a noção usual dos limites de funções: trata-se apenas de um modo de discutir continuidade sob um disfarce não topológico.

Teorema 1.8.6 (Opcional: sempre foi continuidade)**.** *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $p, L \in [-\infty, +\infty]$, com p ponto de acumulação de X. Para uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$, seja $h \colon X \cup \{p\} \to [-\infty, +\infty]$ a função dada pela seguinte regra:*

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & se\ x \neq p \\ L, & se\ x = p \end{cases}.$$

Sob tais condições, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ e, e somente se, a função h é contínua em p.

Demonstração. Evidentemente, o enunciado usa a noção de continuidade topológica discutida no Teorema 1.7.14, juntamente com a descrição da topologia de $[-\infty, +\infty]$ (cf. nota de rodapé 81, na página 151). Mas, ao reler todos os pré-requisitos com cuidado, o enunciado se torna um exercício quase simples de tradução (cf. Exercício 1.110). $\square$

Exercício 1.99 $\binom{\star}{\star}$**.** Demonstre o teorema anterior supondo $p, L \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Corolário 1.8.7. *Nas condições anteriores, são equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$;

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$ *para toda sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* $X \setminus \{p\}$ *tal que* $x_n \to p$.

Em particular, f *é contínua em* $p \in X$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Os **limites laterais** se obtêm então de modo natural via restrição (cf. Subseção 1.1.1). Para $f \colon X \to \mathbb{R}$ e $p \in [-\infty, +\infty]$ ponto de acumulação de X, podemos considerar os subconjuntos $X_{<p} := \{x \in X : x < p\}$ e $X_{>p} := \{x \in X : x > p\}$.

Exercício 1.100 $\binom{\star}{\star}$**.** Mostre que $p \in [-\infty, +\infty]$ é ponto de acumulação de X se, e somente se, p é ponto de acumulação de $X_{<p}$ ou p é ponto de acumulação de $X_{>p}$. $\blacksquare$

Assim, quando p é ponto de acumulação de $X_{<p}$ (caso em que se diz que p é **ponto de acumulação de X pela esquerda**), faz sentido considerar o limite da função $f|_{X_{<p}}$ no ponto p, denotado por $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$ quando existe. Analogamente, quando p é ponto de acumulação de $X_{>p}$ (caso em que se diz que p é **ponto de acumulação de X pela direita**), faz sentido considerar o limite da função $f|_{X_{>p}}$ no ponto p, denotado por $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$ quando existe. Nas frequentes situações em que p é ponto de acumulação tanto de $X_{<p}$ quanto de $X_{>p}$, ambos os limites $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$ podem ser investigados. Neste caso, verifica-se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x) = L.$$

Exercício 1.101 $\binom{\star}{\star}$**.** Prove a equivalência anterior. Dica: confira a Proposição 1.3.32. $\blacksquare$

Observação 1.8.8. Note que ao fazer $p := -\infty$, por exemplo, p é ponto de acumulação de X se, e somente se, p é ponto de acumulação de X pela direita, mostrando que os limites da forma "$\lim\limits_{x \to -\infty}$" são limites pela direita. Observação análoga vale para $p := +\infty$.
Importante: a ordem que dirige $X_{<+\infty}$ é a ordem usual de $\mathbb{R}$ restrita a X (quanto maior, melhor!), enquanto a ordem que dirige $X_{>-\infty}$ é a ordem inversa de $\mathbb{R}$ restrita a X (quanto menor, melhor!). $\triangle$

Mudança de variáveis (e derivadas!)

Dadas funções $f \colon X \to \mathbb{R}$ e $g \colon Y \to \mathbb{R}$, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$, pode-se considerar a composição $g \circ f \colon X \to \mathbb{R}$: lembre-se de que, por definição, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para cada $x \in X$. Neste caso, se $p \in [-\infty, +\infty]$ é ponto de acumulação de X, faz sentido investigar a existência de $\lim\limits_{x \to p} (g \circ f)(x)$. Até aí, nada de novo...

Porém, *se* existirem $\lim\limits_{x \to p} f(x) := L \in [-\infty, +\infty]$ e $\lim\limits_{y \to L} g(y) := L' \in [-\infty, +\infty]$, a intuição sugere que deveria valer algo como $\lim\limits_{x \to p} g(f(x)) = L'$. Exceto por situações "patologicamente" problemáticas, é exatamente o que acontece.

Exemplo 1.8.9 (Casos patológicos)**.** Com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função nula e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função que faz $g(y) := 1$ para $y \neq 0$ e $g(0) := 0$, temos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$, mas $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to 0} g(0) = 0$. No entanto, note que a função g foi construída de modo *artificial* a fim de gerar a falha: se g fosse contínua em 0, teríamos $g(0) = 1$ e daí $\lim g(f(x)) = g(\lim f(x))$. ▲

Teorema 1.8.10 (Mudança de variáveis – o caso que importa)**.** *Para $L \in [-\infty, +\infty]$, seja $g\colon Y \cup \{L\} \to [-\infty, +\infty]$ função contínua em L. Se $p \in [-\infty, +\infty]$ é ponto de acumulação de $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon X \to Y$ é tal que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = g(L)$.*

Demonstração. As hipóteses asseguram que $(f(x))_{x\in X_p}$ é uma rede em Y que converge para L. Logo, por continuidade, $(g(f(x)))_{x\in X_p}$ converge para $g(L)$, i.e., $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = g(L)$. □

Observação 1.8.11 (Pedantismo opcional)**.** A rigor, a função g não precisaria estar definida em L, mas daí precisa-se de mais cuidado.

Proposição 1.8.12 (Mudança pedante de variáveis)**.** *Sejam $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$ funções, com $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$. Se $p, L, L' \in [-\infty, +\infty]$ são tais que*

(i) p é ponto de acumulação de X e $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$,

(ii) L é ponto de acumulação de Y e $\lim\limits_{y\to L} g(y) = L'$, e

(iii) existe um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ com $p \in I$ e $f(x) \neq L$ para todo ponto $x \in (X \cap I) \setminus \{p\}$,

então $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = L'$.

Demonstração. Basta trocar g pela função $h\colon Y \cup \{L\} \to [-\infty, +\infty]$ que faz $h(y) := g(y)$ para $y \neq L$ e $h(L) := L'$, que será contínua em L, e daí aplicar o teorema anterior, observando que $g(f(x)) = h(f(x))$ para todo $x \in X_p \cap I$ (cf. Exercício 1.109). □

Note que no exemplo anterior, foi justamente a falha da condição (iii) que ocasionou a falha no resultado esperado. △

Exemplo 1.8.13. Um modo alternativo de verificar $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ é observar que as funções $g(y) := \frac{1}{y}$ e $f(x) := x + 1$ são tais que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 0$, com a condição (iii) na Proposição 1.8.12 satisfeita automaticamente[83], donde segue $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) = 0$.

A terminologia "mudança de variáveis" se deve ao seguinte: a princípio, a função $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ associa a *variável* x ao valor $\frac{1}{x+1}$; porém, ao considerar a função que associa a variável $y := x + 1$ ao valor $\frac{1}{y}$, percebe-se que a correspondência original é a composição das funções $x \mapsto y := x + 1$ e $y \mapsto \frac{1}{y}$. ▲

Para encerrar a parte essencial desta seção – e do capítulo – vamos introduzir um tipo de limite de função fundamental para Análise.

[83] Uma vez que $f(x) \in \mathbb{R}$ e $L \notin \mathbb{R}$. Alternativamente, você pode observar que a função g utilizada é contínua em $(0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, e daí aplicar o teorema anterior.

Definição 1.8.14. Para um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de X, a **derivada de** f em a é o limite

$$f'(a) \coloneqq \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.6}$$

se este existir – possivelmente em $[-\infty, +\infty]$. Se, adicionalmente, $f'(a)$ for um número real, diremos que f é **diferenciável em** a. Uma função **diferenciável** é aquela que é diferenciável em todos os pontos de seu domínio. ¶

Alternativamente, pode-se definir

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}, \tag{1.7}$$

essencialmente por mudança de variáveis. Primeiro, observe que $a \in X$ se, e somente se, $0 \in Z \coloneqq \{x - a : x \in X\}$, bem como a é ponto de acumulação de X se, e somente se, 0 é ponto de acumulação de Z.

Exercício 1.102 $(^{\star}_{\star})$**.** Observe, realmente. ■

Agora, note que a função $\varphi\colon Z \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) \coloneqq a + t$ é tal que $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = a$, com $\operatorname{im}(\varphi) = X$. Por sua vez, a função $\psi\colon X \to [-\infty, +\infty]$ dada por

$$\psi(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & \text{se } x \neq a \\ f'(a), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é tal que $\lim_{x \to a} \psi(x) = f'(a)$. Logo,

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \psi(\varphi(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi(t)) - f(a)}{\varphi(t) - a} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

como queríamos[84]. A recíproca é análoga (faça!)$^{\star}_{\star}$.

Observação 1.8.15. O conjunto Z precisou ser explicitado pois a função f só sabe *operar* em X, que é seu domínio por hipótese. Todavia, no dia a dia é relativamente seguro não ter tanto cuidado. △

Intuitivamente, o quociente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

expressa o *coeficiente angular* da reta determinada pelos pontos $(x, f(x))$ e $(a, f(a))$, de modo que ao tomar x cada vez mais próximo de a, chega-se cada vez mais perto do coeficiente angular de uma reta *tangente* ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Nas situações em que a função f é contínua em a, o limite que define $f'(a)$ é uma *indeterminação* da forma $0 \cdot \pm\infty$, pois $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$ e $\lim_{x \to a} x - a = 0$. Sendo assim, não há garantia de que $f'(a)$ sempre exista. Mas... quando existe na reta real... a vida é bem melhor.

[84]Em resumo: ao fazer $x \coloneqq a + t$ na expressão que define (1.7), somos "forçados" a substituir t por $x - a$ (já que $x = a + t$ se, e somente se, $t = x - a$), e daí tudo segue *automático*.

Proposição 1.8.16. *Se f é diferenciável em $a \in X$, então f é contínua em a.*

Demonstração. Em virtude do Corolário 1.8.7, basta mostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ou, equivalentemente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$. Ocorre que para $x \neq a$ no domínio de f, tem-se

$$f(x) - f(a) = (f(x) - f(a)) \cdot \frac{x-a}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot (x-a),$$

com $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $\lim\limits_{x\to a} x - a = 0$, donde segue que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot (x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Exercício 1.103 ($\star$)**.** Mostre que se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função constante, então $f'(a) = 0$ para todo $a \in X$. ■

Exemplo 1.8.17. Com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$ e $a := 2$,

$$f'(2) := \lim_{t\to 0} \frac{(2+t)^2 - 4}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + 4t}{t} = \lim_{t\to 0} 4 + t = 4.$$

Em outras palavras, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2))$ é 4. Portanto, a reta tangente é descrita pela função $r(t) := 4(t-2) + 4$. ▲

Exemplo 1.8.18 (Clássico)**.** A função $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é derivável em 0, pois

$$|0|' := \lim_{t\to 0} \frac{|t| + 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

não existe (verifique os limites laterais!)$^{\star}_{\star}$. ▲

Exemplo 1.8.19. Para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^n g(x)$, em que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função limitada tal que não exista $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$; se você já souber o que é, pode fazer $g(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$ e $g(0) := 0$. Como $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$, segue por *confronto* que

$$f'(0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^n g(t)}{t} = \lim_{t\to 0} t^{n-1} g(t) = 0$$

desde que se tenha $n > 1$. ▲

Embora sejam definidas como indeterminações, derivadas apresentam comportamentos bastante previsíveis diante de certas operações algébricas. Quem não dormiu nas aulas de Cálculo deve se lembrar da próxima

Proposição 1.8.20 (Propriedades operatórias)**.** *Para $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $a \in X$, as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são diferenciáveis em a, com*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ *e*

(ii) $(f \cdot g)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$ (a.k.a. ***regra de Leibniz***).

Além disso, se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}. \tag{1.8}$$

Demonstração. A primeira identidade segue diretamente da continuidade da soma. Para a segunda, note que com $x \neq a$ tal que $x \in X$,

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x) + (f(x)g(a) - f(x)g(a)) - f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= f(x) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

donde a continuidade de f em a (proposição anterior) acarreta

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

Para o quociente, com $t \neq 0$ tal que $a + t \in X$ (que existe pois...?)$^{\star}_{\star}$, tem-se

$$\frac{\frac{1}{g(a+t)} - \frac{1}{g(a)}}{t} = \frac{g(a) - g(a+t)}{g(a+t)g(a)} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{g(a+t) - g(a)}{t} \cdot \frac{1}{g(a+t)g(a)},$$

donde segue que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) \coloneqq \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{g(a+t)} - \frac{1}{g(a)}}{t} = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2},$$

uma vez que g é contínua em a (por ser diferenciável). O caso geral segue do item (ii). □

Exercício 1.104 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \coloneqq x^n$, mostre que $f'(a) = na^{n-1}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Conclua que funções polinomiais são diferenciáveis. Dica: indução + Regra de Leibniz. ■

Exercício 1.105 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para f como no exercício anterior, determine $\left(\frac{1}{f}\right)'(a)$ para cada $a \neq 0$. Conclua que para $z \in \mathbb{Z}$ fixado, a função que faz $x \mapsto x^z$ é diferenciável em todo ponto $\neq 0$, e sua derivada é a função que faz $x \mapsto zx^z$. Dica: lembre-se de que para $n > 0$, $x^{-n} \coloneqq \frac{1}{x^n}$. ■

Exemplo 1.8.21. A função $\sqrt{\ }\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é diferenciável em todo ponto $x > 0$. De fato, observe que para $x, t > 0$,

$$\frac{\sqrt{x+t} - \sqrt{x}}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{x+t} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+t} + \sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x+t} + \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+t} + \sqrt{x}},$$

e, como $\sqrt{x+t} + \sqrt{x} \to 2\sqrt{x} \neq 0$ quando $t \to 0$, resulta $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Note que ao escrever $x^{\frac{1}{2}} \coloneqq \sqrt{x}$, a expressão acima condiz com a fórmula do exercício anterior: $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (x^{\frac{1}{2}-1}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ▲

Observação 1.8.22 (Derivadas laterais)**.** No exemplo anterior, para $x \coloneqq 0$, temos

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\sqrt{t} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty,$$

posto que $\sqrt{t} \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $\sqrt{\ }$ é contínua em 0, com $\sqrt{0} = 0$ (mudança de variáveis!)$^{\star}_{\star}$. Geometricamente, a reta tangente ao gráfico de $\sqrt{\ }$ no ponto 0 é vertical (sugestão: faça um desenho!). Secretamente, esse tipo de situação lida com a noção de *derivada lateral*, que essencialmente consiste em tratar das versões laterais (i.e., à direita e à esquerda) do limite que define a derivada. Esse tipo de minúcia não será abordado no texto de forma enfática. △

Nas situações em que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *diferenciável*, a derivada $f'(a)$ existe para todo $a \in X$, o que induz uma *nova* função, agora indicada por $f'\colon X \to \mathbb{R}$, que a cada $a \in X$ associa $f'(a)$. Tal função é, muito apropriadamente, xingada de **derivada da função** f. Por ser uma função da forma $X \to \mathbb{R}$, é lícito investigar a derivada de f', denotada por f'' e chamada de **segunda derivada de** f, que se existir permite a procura de sua derivada, f''' (*a.k.a.* **terceira derivada de** f), e assim sucessivamente, *ad nauseam*.

Exemplo 1.8.23. Pelos exercícios anteriores, funções polinomiais são *infinitamente diferenciáveis*, i.e., admitem todas as derivadas iteradas. Usualmente, funções com tal propriedade são xingadas de **suaves**. ▲

Exemplo 1.8.24. De volta ao Exemplo 1.8.19, note que ao assumir g diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função $f(x) := x^2 g(x)$ é tal que $f'(a) = 2ag(a) + a^2 g'(a)$ se $a \neq 0$, enquanto $f'(a) = 0$. Logo,

$$f''(0) := \lim_{t \to 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t \to 0} 2g(t) + t^2 g'(t),$$

que pode não existir a depender da função g escolhida: com $g(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, por exemplo, veremos que $g'(t) = -\frac{1}{t^2} \cdot \cos \frac{1}{t}$ para $t \neq 0$, situação em que o limite acima não existe. ▲

Para encerrar este primeiro contato com derivadas[85], vamos relembrar

Teorema 1.8.25 (Regra da cadeia)**.** *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon Y \to \mathbb{R}$ funções tais que $f[X] \subseteq Y$. Se f é diferenciável em $a \in X$ e g é diferenciável em $f(a) \in Y$, então $g \circ f$ é diferenciável em a, com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Demonstração. A primeira ideia que vem em mente, possivelmente, consiste em afirmar que para $x \neq a$ seja lícito escrever

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

de modo que o argumento se encerra ao fazer "$x \to a$". Contudo, não há razões para supor $f(x) \neq f(a)$ para x *suficientemente próximo* de a. Isto se remedia com um truque sujo.

Das hipóteses de que $f'(a)$ e $g'(f(a))$ existem, faz sentido definir as funções auxiliares $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ e $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \qquad \psi(y) := \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} - g'(f(a))$$

sempre que $x \neq a$ e $y \neq f(a)$, respectivamente, com $\varphi(a) := \psi(f(a)) := 0$. Adiante, será importante notar que φ e ψ são contínuas em a e $f(a)$, respectivamente: faça isso!($^\star_\star$). Agora, substituindo y por $f(x)$ na última expressão, segue que

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= (\psi(f(x)) + g'(f(a))) \cdot (f(x) - f(a)) = \\ &= (\psi(f(x)) + g'(f(a))) \cdot (\varphi(x) + f'(a)) \cdot (x - a), \end{aligned} \tag{1.9}$$

acarretando

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} (\psi(f(x)) + g'(f(a))) \cdot \lim_{x \to a} (\varphi(x) + f'(a)) = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

pois ψ e φ são contínuas em $f(a)$ e a, respectivamente[86]. □

[85] Que continuará pelo restante deste material.

[86] A continuidade de f em a também é importante, pois ao fazer "$x \to a$", resulta "$f(x) \to f(a)$" e daí "$\psi(f(x)) \to \psi(f(a)) = 0$".

Exemplo 1.8.26 (Cuidado para não se confundir com o Exemplo 1.8.21)**.** Para $x, t > 0$, não é difícil se convencer de que

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x+t}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{t} = -\frac{1}{\sqrt{x+t}\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+t} + \sqrt{x})},$$

o que permite mostrar que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Ocorre que a função $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ é a composição das funções $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ e $g\colon y \to \frac{1}{y}$. Logo, pela regra da cadeia,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}},$$

exatamente o resultado esperado. ▲

Exemplo 1.8.27. Para g diferenciável em a com $g(a) \neq 0$, a Regra da Cadeia garante que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2},$$

justamente a expressão obtida na demonstração da identidade (1.8). ▲

Exemplo 1.8.28 (L'Hospital – versão trivial)**.** Uma aplicação inusitada das derivadas facilita a estimativa de algumas indeterminações. Supondo $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funções contínuas em a e satisfazendo $f(a) = g(a) = 0$, já vimos que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tem *status* indeterminado. Porém, se f e g forem diferenciáveis em a com $g'(a) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

desde que o último limite exista: com efeito, neste caso,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = f'(a) \cdot \frac{1}{g'(a)}.$$

Uma vez munidos de ferramentas topológicas mais sofisticadas, poderemos estender o resultado acima para uma gama bem mais ampla de funções. ▲

1.8.1 Extras

Derivadas à moda Carathéodory

Enquanto limites podem ser tratados, de modo geral, em espaços topológicos dos mais abstratos, derivadas requerem algum tipo de aparato algébrico para serem definidas: a fim de dar sentido a algo do tipo

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

precisa-se de uma topologia ("$\lim\limits_{t\to 0}$"), de uma adição e uma multiplicação no domínio da função ("$a + t$" e "$\cdot \frac{1}{t}$"), bem como de uma adição no contradomínio da função ("$f(a + t) - f(a)$"). Além disso, existe o problema de que se o domínio e o contradomínio de f não forem subconjuntos do mesmo espaço ambiente, todas essas operações podem ser *incompatíveis* umas com as outras.

Exemplo 1.8.29. Para uma função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, note que não faz sentido escrever

$$\frac{f(a+t)-f(a)}{t},$$

pois $a, t, a+t \in \mathbb{R}^3$, $f(a+t)-f(a) \in \mathbb{R}^2$ e tampouco há uma multiplicação definida em $\mathbb{R}^3$ que permita dar sentido a algo como "$\frac{1}{t}$" para $t \neq (0,0,0)$. Mesmo que tudo isso fosse resolvido, restaria o problema de multiplicar um elemento de $\mathbb{R}^3$ por outro de $\mathbb{R}^2$. ▲

Um modo bastante esperto de contornar o problema se deve a Carathéodory:

Proposição 1.8.30. *Para um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de X, são equivalentes:*

(i) *f é diferenciável em a;*

(ii) *existe $L\colon X \to \mathbb{R}$ contínua em a tal que $f(x)-f(a) = L(x)(x-a)$ para todo $x \in X$.*

Em particular, $f'(a) = L(a)$.

Demonstração. Para (i) $\Rightarrow$ (ii), a ideia é definir a função $L\colon X \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{se } x \neq a \\ f'(a), & \text{se } x = a \end{cases}$$

pois daí, por definição, $\lim\limits_{x\to a} L(x) = L(a)$, mostrando que L é continua em a e satisfaz a identidade desejada para todo $x \in X$. Para a recíproca, a identidade assegura

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L(x)$$

sempre que $x \neq a$, de modo que o limite que caracteriza a derivada de f em a é, precisamente, o limite de L quando x se aproxima arbitrariamente do ponto a. □

Parece uma observação artificial, certo? Algo que serve apenas para testar a sua habilidade de manipular as definições... Isto está longe de ser verdade.

Exemplo 1.8.31 (Continuidade de funções diferenciais revisitada)**.** Note que a continuidade de uma função diferenciável é decorrência automática desta formulação: como $f(x)-f(a) = L(x)(x-a)$, temos

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} L(x) \cdot \lim_{x\to a} x - a = L(a)\cdot 0 = 0,$$

exatamente o que precisou ser feito na demonstração original. ▲

Exemplo 1.8.32 (Regra da cadeia revisitada)**.** Nas condições da Regra da Cadeia, note que a proposição anterior assegura funções $K\colon X \to \mathbb{R}$ e $L\colon Y \to \mathbb{R}$, com K contínua em a e L contínua em $f(a)$, tais que $f(x)-f(a) = K(x)(x-a)$ e $g(y)-g(f(a)) = L(y)(y-f(a))$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Para mostrar que $g \circ f$ é diferenciável em a, a proposição pede que encontremos uma função $T\colon X \to \mathbb{R}$, contínua em a, tal que $g(f(x)) - g(f(a)) = T(x)(x-a)$ para todo $x \in X$. Como ~~adivinhar~~ encontrar T? Ora, fazendo $y := f(x)$ na identidade satisfeita por L, obtemos

$$g(f(x)) - g(f(a)) = L(f(x))(f(x)-f(a)) = L(f(x))K(x)(x-a),$$

onde a última igualdade é fruto da identidade satisfeita por K em todo $x \in X$. Mas veja só o que apareceu: a expressão $L(f(x))K(x)$ determina uma função do tipo $X \to \mathbb{R}$ que satisfaz a identidade desejada para todo $x \in X$. Logo, basta mostrar que $T(x) := L(f(x))K(x)$ é contínua em a. Vejamos duas formas de fazer isso:

✓ observe que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em X tal que $x_n \to a$, então $f(x_n) \to f(a)$, $L(f(x_n)) \to L(f(a))$ e $K(x_n) \to K(a)$, donde segue que $T(x_n) \to T(a)$;

✓ alternativamente, $L(f(x)) = (L \circ f)(x)$ é contínua em a pois f é contínua em a e L é contínua em $f(a)$, e daí $T(x)$ é o produto de duas funções contínuas em a.

Em todo caso, provamos que $g \circ f$ é contínua em a, e *descobrimos* que sua derivada em a é dada por $T(a) = L(f(a))K(a) = g'(f(a))f'(a)$. ▲

Embora os argumentos acima sejam essencialmente idênticos aos que foram apresentados na seção anterior, aqui há uma diferença sutil: não foi preciso adivinhar nada.

Derivadas em dimensões maiores

A grande vantagem da formulação de Carathéodory, no entanto, é a facilidade para estender a definição de derivada para funções da forma $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$: com $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, a função L deveria ser capaz de dar sentido a uma equação do tipo

$$f(x) - f(a) = L(x)(x-a)$$

para qualquer $x \in X$. Logo, $L(x)$ deveria ser um objeto que, ao interagir com o vetor $x-a$ em $\mathbb{R}^m$, se *tornasse* o vetor $f(x)-f(a)$ em $\mathbb{R}^n$. Após pensar um pouco, talvez a primeira ideia seja pedir que $L(x)$ seja uma matriz – mas, já que a ideia é fazer as coisas com elegância, vamos pedir que $L(x)$ seja uma transformação linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$! Não se preocupe: nada aqui é óbvio. Como diria Jack, vamos por partes.

(i) A ideia não é que L seja uma transformação linear $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, mas sim que para cada $x \in X$, $L(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seja uma transformação linear: ou seja, L é uma função que a cada ponto de X associa uma transformação linear $L(x)$. Sim, é uma função que associa pontos a outras funções. Não, o mundo não te odeia.

(ii) Mesmo no caso em $m = n = 1$, $L(x)$ *sempre foi uma transformação linear* – a diferença é que podíamos fingir que não. De fato, $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear se, e somente se, existe um escalar $a_T \in \mathbb{R}$ tal que $T(r) = a_T r$ para todo $r \in \mathbb{R}$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. Logo, quando fizemos $L(x)\cdot(x-a)$ com $L(x) \in \mathbb{R}$, secretamente tínhamos a transformação linear $T_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada $r \in \mathbb{R}$ associa o número $T_x(r) := L(x)\cdot r$, de modo que $L(x)\cdot(x-a)$ é meramente $T_x(x-a)$, a imagem do "vetor" $x-a \in \mathbb{R}$ pela função T_x.

Superadas as angústias algébricas, e denotando por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares do tipo $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, o próximo passo é entender o que significa dizer que uma função $L\colon X \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua em $a \in X$. Tipicamente, apela-se para Álgebra Linear e para o *isomorfismo* existente entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{R}^{mn}$ a fim de tratar transformações lineares como matrizes/vetores com alguma das normas usuais. O caminho aqui será outro: justamente por conta de tal isomorfismo, sabemos[87] que quaisquer duas normas em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ são equivalentes, o que permite utilizar uma norma mais apropriada a espaços de funções lineares.

Na inofensiva Proposição 1.6.18, provamos que uma transformação linear $T\colon E \to S$ é contínua se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $\|T(x)\|_S \leq r\|x\|_E$ para todo $x \in E$. Em particular, isto assegura a boa definição do número real $\|T\| := \inf\{r > 0 : \|T(x)\|_S \leq r\|x\|_E \text{ para todo } x \in E\}$. Como a notação sugere, ao fazer T percorrer o conjunto de todas as transformações lineares contínuas de E em S, obtemos uma norma $\|\cdot\|\colon \mathcal{L}_c(E,S) \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{L}_c(E,S)$ denota o espaço vetorial das transformações lineares contínuas de E em S.

Exercício 1.106 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Prove as afirmações acima. Em particular, gaste algum tempo observando que $\mathcal{L}_c(E,S)$ é realmente um espaço vetorial[88]. ■

A grande vantagem da norma $\|\cdot\|$ acima, usualmente chamada de **norma de operador**, é a validade da desigualdade

$$\|T(x)\|_S \leq \|T\| \cdot \|x\|_E$$

para todo $x \in E$: um modo divertido de prová-la consiste em observar que existe sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais satisfazendo $\|T(x)\|_S \leq r_n\|x\|_E$ para todo $x \in E$ tal que $r_n \to \|T\|$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$, e daí

$$\|T(x)\|_S \leq r_n\|x\|_E \Rightarrow \|T(x)\|_S \leq \|x\|_E \lim_{n\to\infty} r_n = \|x\|_E \cdot \|T\|.$$

Definição 1.8.33. Para espaços normados X e Y, seja $S \subseteq X$ um subconjunto aberto[89] e considere $f\colon S \to Y$ uma função. Diremos que f é **diferenciável em** $a \in S$ se existe uma função $\Phi\colon S \to \mathcal{L}_c(X,Y)$, contínua em a, tal que $\Phi(x)(x-a) = f(x) - f(a)$ para todo $x \in S$. ¶

[87] Ou melhor... saberemos, oportunamente.

[88] Quando E tem dimensão finita, vale $\mathcal{L}(E,S) = \mathcal{L}_c(E,S)$, mas isto se perde quando a dimensão de E é infinita.

[89] É possível *executar* a definição pedindo que $a \in X$ seja um ponto de acumulação de X, mas a complicação não justifica a generalidade. Aliás, mesmo para funções reais, a maioria das referências lida apenas com funções diferenciáveis definidas em intervalos abertos. Elon é uma exceção – embora, na prática, os principais teoremas em [10, 11] sejam provados justamente para tais casos.

Acima, a função Φ costuma ser chamada de (*função de*) *inclinação de* f no ponto a, enquanto a transformação linear *contínua* (!) $\Phi(a)\colon X \to Y$ é a **derivada** de f em a. A fim de xingar $\Phi(a)$ por um apelido mais específico, como $f'(a)$, é preciso mostrar que ela independe de Φ. Emergem daí as *derivadas direcionais.*

Proposição 1.8.34. *Nas condições acima,*

$$\Phi(a)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

para qualquer $v \in X$.

Demonstração. Lembre-se de que $v \in X$ está fixado. Agora, observe que para $t \neq 0$ *suficientemente próximo* de 0, o quociente

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} := \frac{1}{t}\cdot(f(a+tv)-f(a))$$

está *bem definido*, já que a função $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ dada por $\gamma(t) := a + tv$ é contínua: como $\gamma(0) = a \in S$ e S é aberto em X, existe $r > 0$ tal que $\gamma(t) \in S$ sempre que $|t| < r$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$, mostrando que $a + tv$ pertence ao domínio de f em tais situações.

Para tais valores de t, a definição de Φ assegura

$$f(a+tv)-f(a)-t\Phi(a)(v) = t\Phi(a+tv)(v) - t\Phi(a)(v),$$

pois $\Phi(a + tv)$ é linear e $a + tv - a = tv$ (verifique!)$^{\star}_{\star}$. Logo,

$$\left|\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \Phi(a)(v)\right| = |\Phi(a+tv)(v) - \Phi(a)(v)| \leq \|\Phi(a+tv)-\Phi(a)\|\cdot\|v\|,$$

que por sua vez pode ser *arbitrariamente controlado*: como $\gamma(t) := a + tv$ é contínua em 0 e Φ é contínua em $\gamma(0) = a$, existe $r' > 0$ menor do que r tal que $\|\Phi(a + tv) - \Phi(a)\| < \frac{\varepsilon}{\|v\|}$ para todo $t \neq 0$ com $|t| < r'$. Em outras palavras, mostrou-se

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \Phi(a)(v) = 0,$$

como desejado. □

Exercício 1.107 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Mostre que se f é diferenciável em $a \in S$, então f é contínua em a. ■

O limite encontrado na última proposição costuma ser chamado de **derivada de f na direção de v no ponto** a, que se denota, usualmente, por $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Dessa forma, o que se demonstrou foi que uma função diferenciável num ponto admite todas as *derivadas direcionais* naquele ponto, pois $f'(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Com um pouco mais de Álgebra Linear e paciência, desenvolve-se todo o arsenal básico de derivação em $\mathbb{R}^n$, mas isto não será feito aqui – por ora, buscou-se apenas mostrar como uma definição boa pode motivar generalizações naturais a partir de conceitos simples...

Seria frustrante fechar o capítulo com a frase acima, não acha?

Lema 1.8.35. *Para espaços normados X, Y e Z, a correspondência $(T, S) \mapsto T \circ S$ determina uma função contínua $\circ\colon \mathcal{L}_c(Y,Z) \times \mathcal{L}_c(X,Y) \to \mathcal{L}_c(X,Z)$.*

Demonstração. Se $T_n \to T$ em $\mathcal{L}_c(Y,Z)$ e $S_n \to S$ em $\mathcal{L}_c(X,Z)$, então $T_n \circ S_n \to T \circ S$, posto que

$$\begin{aligned}\|T_n(S_n(x)) - T(S(x))\| &= \|T_n(S_n(x) - S(x)) + (T_n - T)(S(x))\| \leq \\ &\leq \|T_n\|\|S_n - S\|\|x\| + \|T_n - T\|\|S\|\|x\|\end{aligned}$$

para qualquer $x \in X$, donde segue o resultado. □

Teorema 1.8.36 (Regra da cadeia)**.** *Sejam X, Y e Z espaços normados, $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$ subconjuntos abertos e $f\colon S \to Y$ e $g\colon T \to Z$ funções, com $\operatorname{im}(f) \subseteq Z$. Se f e g são diferenciáveis em $a \in S$ e $b := f(a) \in T$, respectivamente, então $g \circ f$ é diferenciável em a e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.*

Demonstração. Basta imitar a prova apresentada no Exemplo 1.8.32, trocando a multiplicação por composição! Boa sorte! ($^{\star}_{\star\star}$) □

1.9 Exercícios adicionais

Exercício 1.108 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja $p \in [-\infty, +\infty]$ ponto de acumulação de $X \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ para $L \in [-\infty, +\infty]$, então L é ponto de acumulação de $\operatorname{im}(f) := \{f(x) : x \in X\}$. Dica: use a definição de ponto de acumulação via intervalos abertos. ■

Exercício 1.109 $(^{\star}_{\star})$**.** Para $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto, $p, L \in [-\infty, +\infty]$ pontos na reta estendida tais que p é ponto de acumulação de X e $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ um intervalo aberto com $p \in I$. Finalmente, para uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$, chame de g a restrição de f ao subconjunto $X \cap I$. Com isso, mostre que $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to p} g(x) = L$. Dica: antes de reclamar, faça um desenho para interpretar o que o enunciado está dizendo. ■

Exercício 1.110 (Opcional – $(^{\star}_{\star\star})$)**.** Para $X, Y \subseteq [-\infty, +\infty]$, mostre que $f \colon X \to Y$ é contínua em $p \in X$ se, e somente se, para todo intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ tal que $f(p) \in I$ existe um intervalo aberto $J \subseteq [-\infty, +\infty]$ tal que $p \in J$ e $f(x) \in I$ sempre que $x \in J \cap I$. ■

Exercício 1.111 (Parte inteira de um número real – $(^{\star}_{\star})$)**.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ com $x > 0$, considere $N_x := \min\{n \in \mathbb{N} : n > x\} > 0$ e defina *natural* $\lfloor x \rfloor := N_x - 1$, usualmente xingado de **parte inteira** de x.

a) Mostre que $\lfloor x \rfloor$ é o único número natural para o qual $x = \lfloor x \rfloor + r$ com $0 \leq r < 1$. Calcule $\lfloor x \rfloor$ para alguns números reais de sua preferência.

b) Para $p \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, mostre que $\lim_{z \to p} \lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor$.

c) Para $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mostre que $\lim_{z \to p^-} \lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor - 1$ e $\lim_{z \to p^+} \lfloor z \rfloor = \lfloor p \rfloor$.

d) Em quais pontos a função $\lfloor \cdot \rfloor \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua? ■

Exercício 1.112 (Limites de funções polinomiais – $(^{\star}_{\star})$)**.** Para $\lambda \in [-\infty, +\infty] \setminus \{0\}$, defina $\operatorname{sgn}(\lambda) := -1$ para $\lambda < 0$ e $\operatorname{sgn}(\lambda) := 1$ para $\lambda > 0$. Com isso, para $P := \alpha_0 + \ldots + \alpha_n t^n \in \mathbb{R}[t]$ um polinômio de grau $n \geq 1$ e $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$, mostre que

$$\lim_{x \to \lambda} P(x) = \underbrace{\alpha_n \operatorname{sgn}(\lambda)^n \cdot (+\infty)}_{(*)}, \tag{1.10}$$

onde $(*)$ deve ser interpretada com as regras apresentadas na altura da Figura 1.12, na página 152. Sugestão: primeiro, observe que $\lim_{x \to \lambda} x = \lambda$; daí, proceda por indução (e use o Teorema 1.2.9 sem dó nem piedade). ■

Exercício 1.113 $(\star)$**.** Para $P := -19 + 11t - 5t^7$, calcule $\lim_{x \to -\infty} P(x)$ por meio da fórmula anterior. ■

Exercício 1.114 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $p \in [-\infty, +\infty]$ um ponto de acumulação de X. Para funções $f, g \colon X \to \mathbb{R}$, suponha que

(i) $\lim_{x \to p} f(x) = 0$, e

(ii) existe um intervalo aberto $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ e um número real $M > 0$ tal que $p \in I$ e $|g(x)| < M$ para todo $x \in I \cap X$ com $x \neq p$.

Sob tais condições, mostre que $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$. Dica: imite a demonstração da Proposição 1.2.20, ou perceba como aplicar a proposição diretamente para obter o resultado pedido. ■

Exercício 1.115 $(^{\star}_{\star})$**.** Dê exemplos de que o resultado anterior é falso sem a condição (i). Dica: você já conhece exemplos com $X := \mathbb{N}$ e $p := +\infty$. ■

Exercício 1.116 $(^{\star}_{\star})$**.** Para $X \subseteq \mathbb{R}$, uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é chamada de **racional** se existem polinômios $P, Q \in \mathbb{R}[t]$ tais que $Q(x) \neq 0$ e $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ para todo $x \in X$. Suponha que P e Q tenham graus $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e considere $\lambda \in \{-\infty, +\infty\}$.

a) Mostre que se $m < n$, então $\displaystyle\lim_{x \to \lambda} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

b) Mostre que se $m = n$, então $\displaystyle\lim_{x \to \lambda} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_m}{q_m}$, onde p_m e q_m são os *coeficientes líderes*[90] de P e Q, respectivamente.

c) Mostre que se $n > m$, então $\displaystyle\lim_{x \to \lambda} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_n}{b_m} \cdot \operatorname{sgn}(\lambda)^{n-m} \cdot (+\infty)$. ■

Exercício 1.117 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Para funções polinomiais $f, g: X \to \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$, *investigue*[91] o comportamento de $\displaystyle\lim_{x \to r} \frac{f(x)}{g(x)}$ sabendo que $f(r) = g(r) = 0$. Dica: lembre-se de que você pode escrever $f(x) = (x-r)^N P(x)$ e $g(x) = (x-r)^M Q(x)$, onde P e Q são polinômios satisfazendo $P(r) \neq 0$ e $Q(r) \neq 0$; use as relações entre N e M para te guiar em sua investigação. ■

Exercício 1.118 $(^{\star}_{\star})$**.** Para $X \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in X$ um ponto de acumulação de X, suponha que $f: X \to \mathbb{R}$ seja monótona e diferenciável em p.

a) Mostre que se f é crescente, então para todo $x \in X \setminus \{p\}$ se verifica

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0.$$

b) Mostre que se f é crescente, então $f'(p) \geq 0$.

c) Mostre que se f é decrescente, então $f'(p) \leq 0$. Dica: $-f$ é crescente. ■

Exercício 1.119 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^3$ é estritamente crescente e diferenciável. É verdade que $f'(p) > 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$? ■

Exercício 1.120 (Teste da derivada para máximos locais – $(^{\star}_{\star})$)**.** Um ponto $a \in X$ é dito **máximo local** de $f: X \to \mathbb{R}$ se existe um subconjunto $V \subseteq X$ aberto em X com $a \in V$ tal que $f(a) = \max\{f(v) : v \in V\}$. A definição de **mínimo local** é análoga. Diremos que a é **extremo local** se a for ponto de máximo ou de mínimo local[92]. Supondo que $f: X \to \mathbb{R}$ seja diferenciável em $p \in X$, onde p é **ponto de acumulação bilateral**[93] de X, mostre que se p for extremo local de f, então $f'(p) = 0$. Dica: supondo $f'(p) \neq 0$, use "conservação de sinal" para investigar o comportamento de $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ para $x \neq p$ tanto à direita quanto à esquerda de p. ■

Exercício 1.121 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Apresente uma definição razoável para "$\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = L$", onde entende-se que $f: X \to \mathbb{R}$ é uma função com $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto ilimitado tanto superiormente quanto inferiormente, e $L \in [-\infty, +\infty]$. ■

---

[90] Coeficiente (escalar, numerozinho de verdade, etc.) que acompanha o monômio de maior grau do polinômio. Por exemplo, em $P = -5 + 90t - 2t^3$, o coeficiente líder é -2.

[91] Nesse tipo de situação, "investigar" significa analisar por conta própria o que ocorre nas diversas situações possíveis dentro do contexto.

[92] O adjetivo "local" costuma ser omitido ou trocado por "**absoluto**" na ocorrência de $V = X$.

[93] Isto é, p é simultaneamente ponto de acumulação de X pela esquerda e pela direita.

Exercício 1.122 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. ■

Exercício 1.123 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que não existe $L \in [-\infty, +\infty]$ tal que $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} x^3 = L$. ■

Exercício 1.124 $(^{\star}_{\star})$**.** Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **par** se $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se f é par, então $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ existe se, e somente se, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe. Em particular, quando existem, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} f(x)$. ■

Exercício 1.125 $(^{\star}_{\star})$**.** Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **impar** se $f(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine em quais situações existe $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ para f ímpar. ■

Exercício 1.126 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função polinomial, então $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. Dica: $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.127 $(\star)$**.** Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0$. ■

Exercício 1.128 $(^{\star}_{\star})$**.** Determine $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$. ■

Exercício 1.129 $(^{\star}_{\star})$**.** Para $X \subseteq \mathbb{R}$, mostre que $p \in [-\infty, +\infty]$ é ponto de acumulação de X se, e somente se, existe sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $X \setminus \{p\}$ tal que $x_n \to p$. Além disso:

a) se p é ponto de acumulação de X pela esquerda, então podemos supor $x_n < p$ para todo $n \in \mathbb{N}$; e

b) se p é ponto de acumulação de X pela direita, então podemos supor $p < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercício 1.130 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}$. Mostre que se L é ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite subsequência que converge para L. Vale a recíproca? ■

Exercício 1.131 $(^{\star}_{\star})$**.** Para $X \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que $p \in X$ é **ponto isolado em** X se existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $p \in I$ e $I \cap X = \{p\}$. Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ é chamado de **discreto** se todo ponto de S é isolado em S.

a) Mostre que se $p \in X$ é isolado em X, então qualquer função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua em p. Dica: use a definição de continuidade em termos de intervalos abertos.

b) Mostre que se X é discreto, então qualquer função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua.

c) Mostre que se $S \subseteq \mathbb{R}$ é discreto, então S é, no máximo, enumerável. Dica: para $x \in S$, mostre que existem racionais p_x, q_x tais que $p_x < x < q_x$ e $(p_x, q_x) \cap X = \{x\}$; observe então que se $x, y \in X$ com $x \neq y$, então $p_x \neq p_y$. ■

Exercício 1.132 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $S \subseteq \mathbb{R}$ é discreto, então todo subconjunto $O \subseteq S$ é aberto <u>em S</u>. ■

Exercício 1.133 $(^{\star}_{\star})$**.** Dado um subconjunto discreto $S \subseteq \mathbb{R}$, é possível que exista $x \in \mathbb{R}$ que seja ponto de acumulação de S? É possível que $x \in S$? ■

Exercício 1.134 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função monótona e limitada, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto.

a) Mostre que $f(p^-) := \lim\limits_{x\to p^-} f(x)$ e $f(p^+) := \lim\limits_{x\to p^+} f(x)$ existem e são números reais para todo $p \in I$. Dica: isto já foi feito, embora você possa ter ignorado (cf. Proposição 1.1.17).

b) Mostre que $f(p^-) \leq f(p) \leq f(p^+)$ para todo $p \in I$. Dica: monotonicidade.

c) Assumindo que f é crescente, mostre que se $p, q \in I$ e $p < q$, então $f(p^+) \leq f(q^-)$. Dica: use o Exercício 1.129 para escrever $f(p^+)$ e $f(q^-)$ como limites de *sequências*, e daí conclua por monotonicidade.

d) Adapte o item anterior para o caso decrescente.

e) Seja $T \subseteq I$ o conjunto dos pontos de I em que f é descontínua. Mostre que T é, no máximo, enumerável. Dica: se $p \in T$, então $f(p^-) < f(p^+)$, o que permite escolher um número racional $r_p \in (f(p^-), f(p^+))$. ■

Exercício 1.135 ($^\star_\star$)**.** Dizemos que um subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ é **fechado em** $\mathbb{R}$ se $\mathbb{R} \setminus F$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Mostre que para $F \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes:

a) F é fechado em $\mathbb{R}$;

b) para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F ocorre $x \in F$ sempre que $x_n \to x$. ■

Exercício 1.136 (Opcional – ($^\star_\star$))**.** Num espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, $F \subseteq X$ é **fechado** em X se $X \setminus F$ é um aberto de X. Mostre que

a) $\emptyset$ e X são fechados em X,

b) $F \cup G$ é fechado sempre que $F, G \subseteq X$ são fechados,

c) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ é fechado sempre que $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é família não-vazia de subconjuntos fechados de X.

Dica: use o Lema 0.4.15. ■

Exercício 1.137 ($^\star_\star$)**.** Se tiver fugido do exercício anterior por não gostar de espaços topológicos gerais, resolva-o para o caso em que os fechados são considerados em $\mathbb{R}$. Dica: você ainda vai precisar usar o Lema 0.4.15, a não ser que goste de sofrer. ■

Exercício 1.138 ($^\star_\star$)**.** Para um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$, dizemos que p é **ponto aderente de** S (ou **a** S) se $V \cap S \neq \emptyset$ para todo subconjunto aberto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $p \in V$. Mostre que p é ponto aderente de S se, e somente se, existe sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S tal que $x_n \to p$. ■

Exercício 1.139 ($^\star_\star$)**.** O **fecho** de um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, denotado por $\overline{S}$, é a coleção de todos os pontos aderentes a S.

a) Mostre que $\overline{S}$ é fechado em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que $S \subseteq \overline{S}$.

c) Mostre que se $F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e $S \subseteq F$, então $\overline{S} \subseteq F$.

d) Mostre que S é fechado em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\overline{S} = S$. ■

Exercício 1.140 ($^\star_\star$)**.** Para um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$, dizemos que p é **ponto interior de** S (ou **a** S) se existe um aberto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $p \in V$ e $V \subseteq S$. O **interior** de um conjunto S, denotado por $\operatorname{int}(S)$, é a coleção de seus pontos interiores.

a) Mostre que $\operatorname{int}(S)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que $\operatorname{int}(S) \subseteq S$.

c) Mostre que se $A \subseteq S$ com A aberto em $\mathbb{R}$, então $A \subseteq \operatorname{int}(S)$.

d) Mostre que S é aberto em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\operatorname{int}(S) = S$. ■

Exercício 1.141 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Para $S \subseteq \mathbb{R}$, mostre que $\operatorname{int}(S) = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus S}$. ■

Exercício 1.142 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam $S, T \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos quaisquer.

a) Mostre que se $S \subseteq T$, então $\operatorname{int}(S) \subseteq \operatorname{int}(T)$ e $\overline{S} \subseteq \overline{T}$. Dica: prove apenas uma das inclusões e use o exercício anterior para obter a outra.

b) Mostre que $\operatorname{int}(S \cap T) = \operatorname{int}(S) \cap \operatorname{int}(T)$ e $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. Dica: prove apenas uma das identidades e use o exercício anterior para obter a outra. ■

Exercício 1.143 (Opcional – $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** As definições de ponto aderente e ponto interior em espaços topológicos são idênticas. Sabendo disso, adapte os exercícios anteriores para subconjuntos de espaços topológicos. Observação: no Exercício 1.138, você precisará trocar sequências convergentes por redes convergentes. ■

Exercício 1.144 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para $X \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que $D \subseteq X$ é **denso em** X se todo aberto não-vazio de X contém pelo menos um ponto de D.

a) Mostre que $D \subseteq \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $\overline{D} = \mathbb{R}$.

b) Dê exemplos de subconjuntos densos de $\mathbb{R}$.

c) Mostre que $D \subseteq X$ é denso se, e somente se, para todo $x \in X$ existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em D tal que $x_n \to x$.

d) Mostre que se $D \subseteq X$ é denso e $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in D$, então $f = g$. ■

Exercício 1.145 (Teorema de Merten sobre produtos de Cauchy – $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := A$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n := B$ séries de números reais, ambas convergentes em $\mathbb{R}$, com pelo menos uma delas absolutamente convergente. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $c_k := \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$. Por fim, seja $\varepsilon > 0$.

a) Chamando $A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$, $B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i$ e $C_n := \sum_{i=0}^{n} c_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$, mostre que $C_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} B_i$ e, por conseguinte, $C_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B)\right) + A_n B$.

b) Assumindo que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|B_n - B| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + 1}$$

sempre que $n \geq N$.

c) Mostre que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{3N} \cdot \dfrac{1}{\max\{|B_i - B| + 1 : i \leq N - 1\}}$ sempre que $n \geq M$.

d) Mostre que existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $|A_n - A| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} \cdot \dfrac{1}{|B| + 1}$ sempre que $n \geq L$.

e) Conclua que $C_n \to AB$. ■

Observação 1.9.0. O exercício acima lida com o problema do *produto de séries*. Note que o produto de duas expressões polinomiais $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ e $b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t_m$ é dado por

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + b_0 a_2)t^2 + \ldots$$

de modo que o coeficiente que acompanha o termo t^k é dado por

$$c_k := a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \ldots + a_0b_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}.$$

Nesse sentido, o exercício acima nos mostra que quando uma das séries é absolutamente convergente, o produto de ambas se comporta como se fosse o produto de duas expressões polinomiais infinitas. △

Exercício 1.146 (Função exponencial revisitada – $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Considere a função $\exp(x) := e^x$ definida no Exemplo 1.6.13 (cf. Observação 1.6.14).

a) Use o exercício anterior para mostrar que $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Dica: note que e^x e e^y são séries absolutamente convergentes, e assim $e^x e^y$ se expressa como a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ do exercício anterior; calcule c_n explicitamente e tenha uma surpresa[94].

b) Com o item anterior, mostre que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, mostre que exp é função estritamente crescente.

c) Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Dica: mostre que $1 + x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ para todo $x \in (0, 1)$, e daí use os itens anteriores para mostrar que tal desigualdade vale para todo x tal que $|x| < 1$.

d) Mostre que $\exp'(x) = \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

e) Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Dica: para o primeiro limite, observe que $e > 1$, $e^2 = e \cdot e > 2$, $e^3 > 3$, etc.; para o segundo limite, use mudança de variáveis. ■

Exercício 1.147 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ funções contínuas, mostre que as funções

$$\begin{aligned} \max\{f, g\} \colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \min\{f, g\} \colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

são contínuas. Dica: você já notou que $\max\{\alpha, \beta\} = \dfrac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$? ■

Exercício 1.148 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para $S \subseteq \mathbb{R}$ com $S \neq \emptyset$ e $x \in \mathbb{R}$, definimos a *distância* entre S e x como sendo o número real $d(x, S) := \inf\{|x - s| : s \in S\}$. Mostre que a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) := d(x, S)$, é contínua. Dica: mostre que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.149 (Opcional – $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Adapte o exercício anterior para espaços métricos e, em seguida, resolva-o. ■

Exercício 1.150 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[G]$ é fechado em $\mathbb{R}$ sempre que $G \subseteq \mathbb{R}$ é fechado em $\mathbb{R}$. ■

Exercício 1.151 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para $S \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer, mostre que S é fechado em $\mathbb{R}$ se, e somente se, toda sequência de Cauchy em S converge para algum ponto de S. ■

Exercício 1.152 (Ponto fixo de Banach disfarçado – $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não-vazio e fechado em $\mathbb{R}$ e considere uma função $f \colon X \to X$. Se existir $K \in (0, 1)$ tal que $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ para quaisquer $x, y \in X$, mostre que existe um único $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Dica: supondo que p existe, argumente via contradição para provar sua unicidade; para assegurar a existência, escolha $p_0 \in X$ e defina $p_1 := f(p_0)$, $p_2 := f(p_1) \ldots$ note que se $p := \lim_{n \to \infty} p_n$ existir, então $f(p) = p$, de modo que resta apenas mostrar que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para algum ponto de F. ■

[94] Você precisará do Binômio de Newton.

Capítulo 2

Os teoremas fundamentais da Análise

Este capítulo já se inicia com uma mentira[0]: a afirmação de que os teoremas que serão discutidos aqui são fundamentais, o que pode passar a (falsa) impressão de que os teoremas anteriores são menos importantes. Na verdade, como tudo o que discutiremos se *fundamenta* no que se apresentou previamente, segue que os resultados anteriores – estes sim – são fundamentais. Feita a ressalva, por que mantive o título? Pelo seguinte: os teoremas que veremos, além de importantes, ajudam a revelar os *aspectos fundamentais* da Análise, no sentido de serem as noções que verdadeiramente permitem desenvolver e generalizar a teoria: *compacidade*, *conexidade* e *completude*.

2.0 Teorema de Heine-Borel-Lebesgue

2.0.0 Essencial

Compacidade e o Teorema de Heine-Borel-Lebesgue

Vamos começar a discussão com um problema inocente: existe uma função contínua e ilimitada $[0,1) \to \mathbb{R}$? Intuitivamente, se existisse, seria como se pudéssemos desenhar uma linha de comprimento infinito e sem tirar o lápis do papel em momento algum. Embora, na vida real, papel e lápis sejam recursos finitos, isto não nos impede de imaginar que enquanto objeto abstrato, existe uma função em tais condições.

Exercício 2.0 ($\star$)**.** Convença-se de que $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \frac{x}{1-x}$ serve. Dica: $\lim_{x\to 1^-} x = 1$ e $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = \lim_{u\to 0^+} \dfrac{1}{u}$. ■

Aceitar o exemplo anterior impede que você apele para a finitude dos recursos naturais para tratar do verdadeiro problema: se, no lugar do intervalo $[0,1)$, considerarmos o intervalo $[0,1]$, a resposta para a pergunta original passa a ser negativa. Por quê?

Definição 2.0.0. Dizemos que $\mathcal{U}$ é uma **cobertura aberta** para um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ se $\mathcal{U}$ for uma família de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$ exista $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. O subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é chamado de **compacto** se toda cobertura aberta de X admite subcobertura finita, i.e., se existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, com $\mathcal{V}$ finito e $X \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$. ¶

[0] Ou, pelo menos, uma afirmação forte demais.

Exemplo 2.0.1. *A reta não é compacta.* De fato, ao considerar a *coleção*[1] de intervalos abertos $\mathcal{U} := \{(-n, n) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, segue que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe algum aberto $(-n, n) \in \mathcal{U}$ tal que $x \in (-n, n)$. No entanto, nenhum subconjunto finito de $\mathcal{U}$ é cobertura para $\mathbb{R}$: afinal de contas para $n_0, \ldots, n_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ quaisquer, sempre existe um número real $x \in \mathbb{R} \setminus ((-n_0, n_0) \cup (-n_1, n_1) \cup \ldots \cup (-n_m, n_m))$. ▲

Exercício 2.1 $(\substack{\star\\\star})$**.** Justifique a última afirmação no exemplo anterior. ■

O exemplo anterior sugere que subconjuntos ilimitados de $\mathbb{R}$ não podem ser compactos, o que na contrapositiva se lê assim:

Proposição 2.0.2. *Se $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, então K é limitado.*

Todavia, limitação não basta para assegurar compacidade.

Exemplo 2.0.3. *O intervalo aberto $(0, 1)$ não é compacto.* Neste caso, note que

$$\mathcal{U} := \left\{ \left(0, 1 - \frac{1}{2^n}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

é uma cobertura aberta para $(0, 1)$ sem subcobertura finita: para $r \in (0, 1)$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|1 - \frac{1}{2^N} - 1\right| < 1 - r$, e daí $r < 1 - \frac{1}{2^N}$. Ainda assim, não há subconjunto finito de $\mathcal{U}$ capaz de cobrir $(0, 1)$: para $k_0, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ quaisquer, basta tomar $K := \max\{k_0, \ldots, k_n\}$ e notar que

$$\left(0, 1 - \frac{1}{2^{k_i}}\right) \subseteq \left(0, 1 - \frac{1}{2^K}\right),$$

de modo que $1 - \frac{1}{2^{K+1}} \in (0, 1)$ mas não pertence a nenhum dos intervalos $\left(0, 1 - \frac{1}{2^{k_i}}\right)$. ▲

Exercício 2.2 $(\star)$**.** Faça um desenho do argumento anterior. ■

A sugestão aqui é um pouco mais sutil: lembre-se de que $F \subseteq \mathbb{R}$ é *fechado* em $\mathbb{R}$ se $\mathbb{R} \setminus F$ é aberto em $\mathbb{R}$ (cf. Exercício 1.135).

Lema 2.0.4. *Se $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, então K é fechado em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Mostraremos que $\mathbb{R} \setminus K$ é aberto e, para isso, usaremos o Lema 1.7.3: para $x \in \mathbb{R} \setminus K$, vamos encontrar um subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $x \in B$ e $B \subseteq \mathbb{R} \setminus K$. Como nada precisa ser feito se $K = \emptyset$ (certo?)*, podemos supor $K \neq \emptyset$. Agora, com o ponto $x \in \mathbb{R} \setminus K$ fixado, para cada $y \in K$ podemos encontrar subconjuntos abertos em $\mathbb{R}$, digamos $A_y, B_y \subseteq \mathbb{R}$, tais que $x \in B_y$, $y \in A_y$ e $\underline{A_y \cap B_y = \emptyset}$ (certo?)*. Por K ser compacto e $\mathcal{U} := \{A_y : y \in K\}$ ser uma cobertura aberta para K, existem $y_0, \ldots, y_n \in K$ tais que $K \subseteq A_{y_0} \cup \ldots \cup A_{y_n}$. Para encerrar, vamos ver que $B := \bigcap_{i \leq n} B_{y_i}$ cumpre o que se pede:

- ✓ B é aberto por ser interseção finita de abertos (certo?)*;
- ✓ $x \in B$ pois $x \in B_{y_i}$ para todo $i \leq n$;
- ✓ $B \subseteq \mathbb{R} \setminus K$ pois, se $z \in K$, então $z \in A_{y_i}$ para algum $i \leq n$, o que impede que z pertença a B_{y_i} (percebeu?)* e, portanto, $z \notin B$. □

[1] Já passou da hora de você parar de encrencar com o uso da palavra "conjunto" e "coleção" para designar conjuntos cujos elementos são outros conjuntos.

Exercício 2.3 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Por que foi preciso tomar B como uma interseção *finita* de abertos? Por que não fazer $B := B_y$ para *algum* $y \in K$? ■

Num primeiro momento, os resultados acima não nos dizem quem são os compactos de $\mathbb{R}$, mas o contrário: quais subconjuntos não podem ser. Por exemplo, $(0,1)$ não pode ser compacto pois não é fechado (embora seja limitado): existe sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1)$ com $x_n \to 1$, mas $1 \notin (0,1)$ (cf. Exercício 1.135); $[0,+\infty)$ não pode ser compacto pois não é limitado (embora seja fechado)[2]. Agora, será verdade que se K é fechado em $\mathbb{R}$ e limitado, então K é compacto?

Teorema 2.0.5 (Heine-Borel-Lebesgue...[3])**.** *Para $K \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes:*

(*i*) *K é compacto;*

(*ii*) *K é fechado e limitado;*

(*iii*) *todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K;*

(*iv*) *toda sequência de K tem subsequência que converge em K.*

Demonstração. A implicação (i) ⇒ (ii) já foi feita. Por sua vez, a implicação (ii) ⇒ (iii) segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass:

✓ se $A \subseteq K$ é infinito, então existe uma sequência *injetiva* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A,

✓ como K é limitado, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada;

✓ Bolzano-Weierstrass assegura subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para algum $x \in \mathbb{R}$;

✓ como K também é fechado, resulta que $x \in K$ (cf. Exercício 1.135);

✓ como a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A é injetora, segue que x é ponto de acumulação de A (convença-se disso!)$^{\star}_{\star\star}$.

Para (iii) ⇒ (iv), fixada uma sequência $(x_n)_n$ de K, dois casos podem ocorrer:

✓ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ pode ser finito, e daí basta tomar a subsequência constante formada por algum termo que se repete infinitamente;

✓ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ pode ser infinito, e daí a hipótese garante um ponto de acumulação x em K, donde ~~é fácil~~ não é difícil obter uma subsequência que converge para o ponto de acumulação (cf. Exercício 1.130).

A última implicação, (iv) ⇒ (i), ficará bem mais simples em posse da seguinte

⌜**Afirmação.** *Para toda coleção $\mathcal{U}$ de abertos de $\mathbb{R}$ existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, com $\mathcal{V}$ enumerável, tal que $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$.*

Demonstração. Seja $S := \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Para cada $x \in S$, podemos *escolher* um aberto $U_x \in \mathcal{U}$, bem como números racionais $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$ tais que $x \in (a_x, b_x) \subseteq U_x$. Como a família $\mathcal{B} := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$ é enumerável (pois $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é enumerável!), resulta que a família $\mathcal{C} := \{(a_x, b_x) : x \in S\}$ também é enumerável, já que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Reescrevendo $\mathcal{C} := \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S$ com $(a_n, b_n) \subseteq U_{x_n}$, e daí não é difícil perceber que $S \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{x_n}$, como desejado. ⌟

[2] Note que $\mathbb{R} \setminus [0,+\infty) = (-\infty, 0)$, um (intervalo) aberto de $\mathbb{R}$. Em geral, $[a,b]$ é fechado em $\mathbb{R}$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, pois $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.

[3] ...Bolzano-Weierstrass-Fréchet-Hausdorff... (cf. Observação 2.0.24).

Enfim, supondo (iv), provaremos que K é compacto. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ para K, a afirmação assegura uma subcobertura enumerável $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$, e mostraremos que $\mathcal{V}$ admite subcobertura finita para K (e, portanto, $\mathcal{U}$ também admite): ora, se não fosse o caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos escolher $x_n \in K \setminus (V_0 \cup \ldots \cup V_n)$, o que resulta numa sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que não pode convergir para nenhum ponto de K (por quê?!)$^{\star}_{\star\star}$. □

Exercício 2.4 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Complete os detalhes da demonstração.

a) Mostre que $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $S \subseteq \mathbb{R}$ se, e somente se, existe sequência injetora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $S \setminus \{p\}$ tal que $x_n \to p$. Dica: para a direção difícil ($\Rightarrow$), use a condição de acumulação para cozinhar uma sequência adequada, como na demonstração de que (iii) $\Rightarrow$ (i) no Teorema 1.6.3.

b) Mostre que não existe $x \in K$ tal que a sequência obtida no final da demonstração converge para x. Dica: se $x \in K$, então existe algum $V_m \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V_m$. ■

Exemplo 2.0.6. $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ é compacto para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. ▲

Exemplo 2.0.7. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência real tal que $x_n \to x$, com $x \in \mathbb{R}$, então o subconjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é compacto. ▲

Exemplo 2.0.8. Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ são compactos[4]. ▲

Exercício 2.5 ($\star$)**.** Convença-se de que os exemplos acima são, de fato, exemplos. ■

Antes de prosseguir, convém notar que a compacidade é *intrínseca*, no sentido de que os abertos da cobertura podem ser considerados contidos no próprio subconjunto – e não precisam ser vistos como abertos maiores em $\mathbb{R}$. Mais precisamente:

Exercício 2.6 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que para $K \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes:

a) K é compacto;

b) para toda coleção $\mathcal{U}$ de abertos de K tal que $K = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, com $\mathcal{V}$ finito e $K = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$. ■

Observação 2.0.9. Se esta não é sua primeira vez estudando Análise, você deve ter sentido falta dos *superestimados* intervalos encaixantes, fundamentais no cânone [10, 11]. Eles estão na Subseção 2.0.1, não se preocupe. △

O Teorema de Weierstrass (máximos e mínimos)

De volta ao problema original:

Lema 2.0.10. *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função. Se K é compacto e f é contínua, então* $\operatorname{im}(f)$ *é compacto.*

Demonstração. Ora, se $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta para $\operatorname{im}(f)$, então $K \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} f^{-1}[V]$, com cada $f^{-1}[V]$ aberto em K em virtude da continuidade de f. Em outras palavras, $\{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$ é uma cobertura por abertos de K. Daí, por K ser compacto, existem $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j\leq n} f^{-1}[V_j]$ e, consequentemente, $\operatorname{im}(f) \subseteq V_0 \cup \ldots \cup V_n$. □

[4] Este já era óbvio em virtude da primeira definição de compacidade...

Exercício 2.7 (*For fun* – (!?))**.** Tente demonstrar o lema anterior por meio das outras caracterizações de compacidade em $\mathbb{R}$. ■

Corolário 2.0.11 (Weierstrass)**.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f é contínua, então f tem máximo e mínimo.*

Demonstração. O domínio de f é fechado e limitado e, portanto, compacto. Logo, o subconjunto $K := \operatorname{im}(f)$ também é compacto (pelo lema anterior), donde segue que deve ser fechado e limitado. Por ser limitado, existem $m := \inf K$ e $M := \sup K$, enquanto a garantia de K ser fechado permite concluir que $m, M \in K$: basta apelar para os Exercícios 1.37 e 1.135. Acabou. □

O Teorema do Valor Médio

Uma das inúmeras consequências do Teorema de Weierstrass recebe um título próprio, tanto por sua interpretação geométrica quanto pela vasta gama de aplicações.

Lema 2.0.12 (Rolle)**.** *Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, diferenciável no intervalo (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$, existe $c \in (a,b)$ com $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, f admite um ponto de máximo e um ponto de mínimo. Se tais pontos coincidirem com os extremos do intervalo, então f é constante (cert?!)* e, portanto, tem derivada nula (cf. Exercício 1.103). Se, porém, algum desses pontos pertencer a (a,b), então será um ponto de acumulação *bilateral* de $[a,b]$, extremo *local* de f em que a função é diferenciável. Logo, pelo Exercício 1.120, sua derivada será nula. □

Teorema 2.0.13 (Do **V**alor **M**édio, T.V.M.)**.** *Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e uma função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, diferenciável no intervalo (a,b), existe $c \in (a,b)$ satisfazendo $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Demonstração. A ideia é manipular f para obter uma função g satisfazendo as hipóteses do Lema de Rolle, de modo que a partir da identidade $g'(c) = 0$ se possa concluir $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ou seja: precisa-se que $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Um modo razoável de fazer isso consiste em definir $g(x) := f(x) - \gamma x$, onde $\gamma := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: tem-se g contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e tal que $g(a) = g(b)$ (verifique?!)*, exatamente as exigências do Lema de Rolle. □

Você se lembra daquela história de somar uma constante nos exercícios de *antiderivação* que te obrigavam a fazer em Cálculo I? Eis o culpado.

Corolário 2.0.14. *Sejam $I \neq \emptyset$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f'(p) = 0$ para todo ponto p no <u>interior</u> de I, então f é constante em I.*

Demonstração. Primeiro, note que para $a, b \in I$ com $a < b$, as hipóteses acarretam $(a,b) \subseteq I$ com f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Logo, pelo T.V.M., existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

donde segue que $f(b) = f(a)$ (percebeu?)*. Isto mostra que f é constante no *interior* do intervalo I (cf. Exercício 1.140). Agora, se existir $x \in I$ que não é ponto interior I, então é possível obter $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada x_n é ponto interior de I, tal que $x_n \to x$, e daí $f(x_n) \to f(x)$, donde o resultado segue. □

Exercício 2.8 $(^{\star}_{\star})$**.** Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Corolário 2.0.15. *Sejam* $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $[a, b]$ *e diferenciáveis em* (a, b)*. Se* $f'(p) = g'(p)$ *para todo ponto* $p \in (a, b)$*, então existe* $C \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x) + C$ *para todo* $x \in [a, b]$*.*

Demonstração. A função $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) := f(x) - g(x)$ é tal que h é contínua em $[a, b]$ e $h'(p) = 0$ para todo $p \in (a, b)$, donde segue que existe $C \in \mathbb{R}$ com $h(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$. □

2.0.1 Extras

Compacidade em espaços métricos e topológicos

Secretamente, o Exercício 2.6 dá a dica de como definir *compacidade* em espaços topológicos.

Definição 2.0.16. Dizemos que $\mathcal{U}$ é uma **cobertura aberta** para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ se $\mathcal{U}$ for uma família de $\mathcal{T}$-abertos de X tal que para todo $x \in X$ exista $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é **compacto** se toda cobertura aberta para X admite subcobertura finita. ¶

Nesse sentido, o exercício supracitado apenas revela que quando X é *subespaço topológico* de outro espaço, os abertos das coberturas podem ser tomados no espaço ambiente que contém X (pense a respeito)$^{\star}_{\star}$. Em todo caso, agora podemos discutir compacidade em ambientes bem mais gerais do que $\mathbb{R}$. Vamos começar devagar.

Exercício 2.9 $(\star)$**.** Mostre que se X e Y são espaços topológicos homeomorfos, então X é compacto se, e somente se, Y é compacto. ■

Exercício 2.10 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $[-\infty, +\infty]$ é espaço compacto. ■

Exemplo 2.0.17. *Um espaço discreto é compacto se, e somente se, é finito.* Por um lado, se X é discreto e compacto, então a cobertura aberta $\{\{x\} : x \in X\}$ admite subcobertura finita e, portanto, X é finito (certo?)*. A recíproca é automática. ▲

Exemplo 2.0.18. *Sequências convergentes são compactas.* Mais precisamente, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência num espaço topológico X e $x_n \to x$, então $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é subespaço compacto. Com efeito, se $\mathcal{U}$ é cobertura aberta para K por abertos de X, então existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, e daí $\{x_n : n \geq N\} \subseteq U$ para algum $N \in \mathbb{N}$, de modo que restam apenas finitos pontos fora de U para serem cobertos por abertos de $\mathcal{U}$. ▲

Exercício 2.11 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se X é compacto e $K \subseteq X$ é fechado (cf. Exercício 1.136), então K é compacto com a topologia de subespaço. Dica: se $\mathcal{U}$ é coleção de abertos de X e $K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, então $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$ é cobertura aberta para X. ■

Ao aliar o exercício anterior com o Lema 2.0.4, tem-se a impressão de que a compacidade conversa bem com fechados. Na verdade, a relação é bem mais profunda, já que fechados são complementares de abertos[5].

Exercício 2.12 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$ famílias não-vazias de subconjuntos de X.

a) Mostre que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ se, e somente se, $\emptyset = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U$. Dica: Lema 0.4.15.

b) Mostre que $\emptyset = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ se, e somente se, $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} X \setminus F$. Dica: Lema 0.4.15. ■

Dizemos que um conjunto não-vazio $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X tem a **propriedade da interseção finita (p.i.f.)** se para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ valer que $F_0 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$.

[5]Fechados quase não foram mencionados no capítulo anterior, mas serão bastante importantes neste. Para saber mais sobre eles, confira os exercícios iniciais da Seção 2.4.

Teorema 2.0.19. *Para um espaço topológico X, são equivalentes:*

(i) *X é compacto;*

(ii) *toda família $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de fechados de X com a p.i.f. é tal que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$;*

(iii) *para toda família $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de fechados de X tal que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$ existem $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $F_0 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$*

Demonstração. Primeiramente, note que (ii) e (iii) são apenas a contrapositiva uma da outra e, portanto, são equivalentes. Agora, se X é compacto e $\mathcal{F} \neq \emptyset$ é uma família de fechados tal que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$, então o exercício anterior assegura que $\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma cobertura aberta para X. Por compacidade, existem $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tais que $X = \bigcup_{j\leq n} X \setminus F_j$ e daí, novamente pelo exercício anterior,

$$\emptyset = \bigcap_{j\leq n} X \setminus (X \setminus F_j) = \bigcap_{j\leq n} F_j,$$

como desejado. A recíproca será problema seu $({}^{\star}_{\star})$. □

Corolário 2.0.20 (Intervalos encaixantes)**.** *Seja $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos não-vazios, fechados e limitados de $\mathbb{R}$. Se $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo n, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. Já sabemos que I_0 é compacto. Além disso, cada I_n é fechado em I_0:

✓ por definição, $F \subseteq I_0$ é fechado em I_0 se, e somente se, $I_0 \setminus F$ é aberto em I_0;

✓ por sua vez, $I_0 \setminus F$ é aberto em I_0 se, e somente se, existe $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $I_0 \setminus F = A \cap I_0$;

✓ consequentemente, $F = I_0 \setminus (A \cap I_0) = (I_0 \setminus A) \cup (I_0 \setminus I_0) = I_0 \cap (\mathbb{R} \setminus A)$, mostrando que $F = I_0 \cap G$, com $G \subseteq \mathbb{R}$ fechado em $\mathbb{R}$;

✓ em particular, por I_0 ser fechado em $\mathbb{R}$, segue que $F \subseteq I_0$ é fechado em I_0 se, e somente se, é fechado em $\mathbb{R}$.

Assim, $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família de fechados do compacto I_0 com a p.i.f.. Logo, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. □

Curiosamente, ao tentar generalizar a propriedade dos intervalos encaixantes para espaços métricos, recaímos não em compacidade, mas sim em completude! Para simplificar as notações, diremos que uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X é *decrescente* se para todo $n \in \mathbb{N}$ valer $F_{n+1} \subseteq F_n$.

Proposição 2.0.21 (Fechados encaixantes – versão métrica)**.** *Seja $(F_n)_n$ uma sequência decrescente de subconjuntos fechados de um espaço métrico X. Se X é completo e $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, então existe um único ponto em $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, onde $\operatorname{diam}(F_n) := \sup\{d(x,y) : x, y \in F_n\}$ indica o* ***diâmetro*** *de F_n.*

Demonstração. Pode-se fixar, para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $x_n \in F_n$, o que resulta numa sequência $(x_n)_n$ em X que é de Cauchy: para $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$, tem-se $x_n \in F_n \subseteq F_m$ e $x_m \in F_m$, donde segue que $\rho(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_m)$ e, por valer $\operatorname{diam}(F_m) \to 0$, o restante da afirmação segue. Por conta da completude, existe $x \in X$ com $x_n \to x$, ponto que deve pertencer a F_m para todo m: como $(x_n)_{n\geq m}$ é uma sequência em F_m que é subsequência de $(x_n)_n$, podemos inferir que $\lim\limits_{n\geq m} x_n = x$ (por ser subsequência!) e, por conseguinte, $x \in F_m$ (pois este é fechado!). Finalmente, se $y \in F_m$ para todo m, então $\rho(x,y) \leq \operatorname{diam}(F_m)$ para todo m e, portanto, $\rho(x,y) = 0$, i.e., $x = y$. □

Exercício 2.13 (Opcional – $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Suponha que para toda sequência decrescente $(F_n)_n$ de fechados não-vazios de um espaço métrico X satisfazendo $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ tenha-se um único elemento na interseção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Mostre que X é completo. Dica: para uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço, considere os fechados $F_n := \overline{\{x_m : m \geq n\}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Isto sugere que compacidade e completude tenham algum tipo de relação em espaços métricos. Num primeiro momento, é tentador usar a caracterização de compacidade via p.i.f. juntamente com o exercício anterior para concluir que todo espaço métrico compacto é completo. Faremos melhor.

Exercício 2.14 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Para um espaço topológico X, dizemos que $p \in X$ é **ponto de acumulação** de $S \subseteq X$ se $S \cap (V \setminus \{p\}) \neq \emptyset$ para todo aberto $V \subseteq X$ tal que $p \in V$. Mostre que tal definição generaliza todas as noções anteriores de ponto de acumulação. ■

Definição 2.0.22. Diremos que um espaço métrico é **totalmente limitado** se toda sequência admitir subsequência de Cauchy. ¶

Teorema 2.0.23 (Opcional)**.** *Para um espaço métrico K, são equivalentes:*

(i) *K é compacto;*

(ii) *todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação;*

(iii) *toda sequência em K tem subsequência convergente;*

(iv) *K é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. A primeira implicação é simples: se $A \subseteq K$ não tem pontos de acumulação em K, então para cada $x \in K$ existe um aberto $V_x \subseteq K$ com $x \in V_x$ que testemunha o fato de A não se acumular em x, ou seja, tal que $V_x \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pela compacidade, existem $x_0, \ldots, x_n \in K$ com $K = \bigcup_{j \leq n} V_{x_j}$, mas isto obriga que A esteja contido em $\{x_0, \ldots, x_n\}$. A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) segue os mesmos moldes da implicação "(iii) $\Rightarrow$ (iv)" no Teorema 2.0.5 e, por isso, será problema seu $({}^{\star}_{\star\star})$[6]. A implicação (iii) $\Rightarrow$ (iv) é divertida: se toda sequência tem subsequência convergente, então toda sequência de Cauchy converge[7] bem como toda sequência tem subsequência de Cauchy, i.e., o espaço métrico é completo e totalmente limitado. A carga dramática fica por conta da implicação (iv) $\Rightarrow$ (i).

⌜**Afirmação.** *Se X é espaço métrico totalmente limitado, então para todo $r > 0$ existe um subconjunto finito $F_r \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x \in F_r} B[x, r]$, onde $B[x, r] := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ é a d-**bola fechada de centro x e raio r**.*

Demonstração. Se não fosse o caso, existiria $r > 0$ tal que $\{B[x, r] : x \in X\}$ não tem subcobertura finita. Em particular, para $x_0 \in X$ fixado, existe $x_1 \in X \setminus B[x_0, r]$, o que dispara a existência de $x_2 \in X \setminus B[x_0, r] \cup B[x_1, r]$, e assim sucessivamente. A sequência $(x_n)_n$ obtida recursivamente desse processo não admite subsequências de Cauchy, já que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ deve-se ter $d(x_m, x_n) > r$. ⌟

Agora, assumindo (iv), suponha que K não seja compacto e fixe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ sem subcobertura finita. Em vista da afirmação anterior, podemos supor que existe um subconjunto finito F_0 tal que $K = \bigcup_{x \in F_0} B[x, 1]$, donde se obtém $x_0 \in F_0$ tal que $B_0 := B[x_0, 1]$ não admite subcobertura finita por abertos de $\mathcal{U}$: caso contrário, $\mathcal{U}$ teria uma subcobertura finita para K. Uma vez que limitação total é uma propriedade hereditária para subespaços (por quê?)$^{\star}_{\star}$, pode-se repetir o argumento a fim de obter outra bola fechada $B_1 := B\left[x_1, \frac{1}{2}\right] \subseteq B[x_0, 1]$ que não admite cobertura finita por abertos de $\mathcal{U}$. Procedendo recursivamente, obtém-se uma sequência decrescente de *fechados*[8] $(B_n)_n$ cujo diâmetro converge para 0. Logo, a completude permite conjurar $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, o que leva a uma contradição: como existem $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$ e $r > 0$ com $B(x, r) \subseteq U$, qualquer n satisfazendo $\frac{1}{2^n} < r$ é tal que $B_{n+1} \subseteq U$, o que contraria a escolha de B_{n+1}. Portanto, K é compacto. □

Observação 2.0.24 (Opcional: história e taxonomia)**.** A história da *compacidade* se confunde com a própria história da Análise e da Topologia Geral. É evidente que não se começou do geral para o particular, como feito aqui, o que não é um problema, posto que não se reinventa o fogo toda vez que alguém sente frio. Dito isso, convém destacar algumas coisas.

(a) A *constatação* de que (intervalos) fechados e limitados satisfazem as condições da Definição 2.0.0 é usualmente *creditada* a Heine e Borel (por volta de 1894). Apesar disso, em seus argumentos, ambos trataram apenas de coberturas enumeráveis de abertos. Costuma-se atribuir a Lebesgue (1904) a versão para coberturas de cardinalidade arbitrária – por isso o nome "Teorema de Borel-Lebesgue" encontrado em textos que não usam a Definição 2.0.0 como caracterização inicial de compacidade.

(b) As caracterizações de compacidade (ii) e (iii) do último teorema, assim como o próprio termo "compacidade", surgiram no contexto de *espaços métricos*, introduzidas por Fréchet em 1906. Apenas na década seguinte (1914) a equivalência com a *propriedade de Borel-Lebesgue* (das coberturas abertas) foi observada, por Hausdorff.

[6] Em particular, observe que o item (a) do Exercício 2.4 permanece válido em espaços métricos $({}^{\star}_{\star})$.

[7] Confira a discussão sobre espaços métricos completos, na Subseção 1.3.1 (página 130).

[8] Assim como bolas abertas são abertas (cf. Exercício 1.89), bolas fechadas também são fechadas (cf. Exercício 2.24).

(c) A caracterização geral de compacidade em termos de fechados com a *propriedade da interseção finita* (Teorema 2.0.19) foi *registrada* pela primeira vez por Riesz (1908).

Todavia, tudo o que se fez acima foi anterior à definição atual de *espaço topológico*, que só ocorreu em 1922, com Kuratowski, mas com a influência de trabalhos anteriores, como o de Hausdorff em 1914. Entre outras coisas, isto serve de alerta para a possibilidade de encontrar textos que definam compacidade por meio de condições diferentes (mas equivalentes), e que enunciem a Definição 2.0.0 como uma caracterização alternativa garantida por algum teorema *com nome de gente*[9]. Por fim, um alerta: a equivalência entre todas essas definições só pode ser garantida em espaços métricos. △

O Lema de Riesz e a dimensão de espaços normados

Nenhuma das caracterizações anteriores de compacidade parece ser tão simples quanto a que foi apresentada no item (ii) do Teorema 2.0.5: $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado. Por que ela foi ignorada nas considerações anteriores?

Primeiro: ao lidar com compacidade de espaços topológicos, deve-se ter em mente que todo espaço é fechado em si mesmo, o que inutiliza tal noção para uma definição geral. Segundo: analogamente, limitação só faz sentido em espaços métricos ou normados. Assim, a caracterização de compacidade como "fechado + limitado" só tem *chances* de funcionar para subespaços de espaços métricos. Terceiro: ela não tem chances de funcionar em todos os espaços métricos, já que qualquer espaço métrico admite uma métrica limitada e *topologicamente equivalente* (cf. Exercício 2.22), de modo que a própria reta real se torna um contraexemplo. Talvez tenhamos mais sorte com espaços normados... Quarto: ela não funciona nem em espaços normados.

Teorema 2.0.25 (*A.k.a.* Lema de Riesz)**.** *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $S \subseteq E$ um subespaço vetorial com $\overline{S} \neq E$. Para cada $\alpha \in (0,1)$ existe $x \in E$ com $\|x\| = 1$ e $\|s - x\| \geq \alpha$ para todo $s \in S$.*

Demonstração. Para $x_0 \in E \setminus \overline{S}$, seja $R := d(x_0, S)$, que satisfaz $R > 0$ (por quê?)[10]. Como $R < \frac{R}{\alpha}$, existe $x_1 \in S$ com $\|x_0 - x_1\| \leq \frac{R}{\alpha}$, e daí basta fazer $x := \frac{1}{\|x_0 - x_1\|}(x_0 - x_1)$. □

Exercício 2.15 $({}^{\star}_{\star})$**.** Verifique os detalhes omitidos na demonstração anterior. ■

Corolário 2.0.26. *Se um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ tem dimensão infinita, então a bola fechada (e limitada) $B[0,1] := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ não é compacta.*

Demonstração. Fixado $x_0 \in E$ com $\|x_0\| = 1$, pode-se fazer $S := [x_0]$ o subespaço de E gerado por x_0, que satisfaz $\overline{S} = S \neq E$ em virtude da suposição sobre a dimensão de E. Logo, o teorema anterior assegura $x_1 \in E \setminus S$ com $\|x_1\| = 1$ e $\|x_0 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Como $[x_0, x_1]$ ainda tem dimensão finita, pode-se repetir o argumento de modo a obter $x_2 \in E \setminus [x_0, x_1]$ com $\|x_2\| = 1$ e $\|x_i - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ para $i \in \{0, 1\}$. Como $[x_0, x_1, x_2]$ tem dimensão finita... Recursivamente, conclui-se que $B[0,1]$ admite uma sequência sem subsequência de Cauchy e, portanto, não pode ser compacto em vista do Teorema 2.0.23. □

Moral da história: em espaços métricos quaisquer, não se pode assegurar a compacidade de bolas fechadas, embora elas sejam fechadas (cf. Exercício 2.24) e, obviamente, limitadas. Restam os espaços normados de dimensão finita[11]. Desta vez a resposta é afirmativa: e é bem fácil provar com a norma euclidiana, por exemplo.

Exercício 2.16 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Considere $\mathbb{R}^n$ com a norma *euclidiana* (cf. Exercício 1.5). Mostre que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, K é fechado em $\mathbb{R}^n$ e limitado (na norma euclidiana). Dica: para a implicação que não é automática, mostre que toda sequência em K tem subsequência convergente e, para isso, aplique o Teorema de Bolzano-Weierstrass n-vezes. ■

[9] Mais informações sobre a História da Topologia Geral podem ser encontradas nos textos de Engelking [4] e Willard [26], ou em trabalhos voltados explicitamente para a História da Análise, como a recente obra de Thomas Sonar [24]. Para uma revisão sobre a história da compacidade, confira [18].

[10] Dica $({}^{\star}_{\star\star})$: confira o Exercício 1.149.

[11] Na verdade, esta é uma conclusão apressada. Pode-se mostrar que um espaço *metrizável* X admite uma métrica d que caracteriza os subconjuntos compactos de X como sendo os fechados e limitados se, e somente se, X tem um denso enumerável e todo ponto de X está contido no interior de um compacto. A prova de tal caracterização, no entanto, foge tremendamente do escopo deste trabalho. Confira o Exercício 4.67 em [13] para mais detalhes.

Este é um bom momento para você encrencar com a escolha da norma em $\mathbb{R}^n$: "*Ah! Por que não outra? Eu nunca escolho a norma certa?!!!*" Resposta: porque sim.

Teorema 2.0.27. *Quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são topologicamente equivalentes*[12].

Demonstração. Basta mostrar que qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ é equivalente à norma euclidiana (certo?)*. Por simplicidade, vamos escrever "E" para indicar o espaço $\mathbb{R}^n$ dotado de uma norma $\|\cdot\|$ qualquer, enquanto "$\mathbb{R}^n$" indicará tal espaço com a norma $\|\cdot\|_2$. Sejam $T\colon \mathbb{R}^n \to E$ a função que faz $T(x) := x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $B := \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, no sentido usual da Álgebra Linear. Uma vez que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existem únicos escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com $x = \sum_{i\leq n} a_i e_i$, resulta

$$\|T(x)\| \leq \sum_{i\leq n} |a_i|\|T(e_i)\| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i\leq n} |a_i|^2}}_{\|x\|_2} \underbrace{\sqrt{\sum_{i\leq n} \|T(e_i)\|^2}}_{R}, \tag{2.0}$$

pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Lema 1.0.9)[13]. Isto mostra que T é contínua (cf. Proposição 1.6.18).

Para a continuidade da inversa de T, note que $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^n} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ é subespaço compacto de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$: é fechado por ser pré-imagem do fechado $\{1\}$ pela função contínua $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ (cf. Exercício 2.21), e é limitado na norma euclidiana por definição. Agora, a função $\varphi := \|\cdot\| \circ T \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é contínua e, pelo Teorema de Weierstrass, deve assumir mínimo em $\mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$, i.e., existe $u \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $0 < \|T(u)\| \leq \|T(v)\|$ para todo $v \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$. Logo, se $x \in E$ e $x \neq 0$, então $v := \frac{x}{\|x\|_2} \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}^n}$ e

$$\|T(x)\| = \|x\|_2\|T(v)\| \geq \|x\|_2\|T(u)\|,$$

mostrando que basta tomar $r := \|T(u)\|$. □

Exercício 2.17 ($^\star_\star$)**.** Complete os detalhes da demonstração anterior. Em particular, mostre que o Teorema de Weierstrass permanece válido para qualquer função contínua da forma $X \to \mathbb{R}$, onde X é espaço topológico compacto. ■

As consequências do teorema anterior vão longe. O próximo resultado, por exemplo, combina o Corolário 1.3.39 com a desigualdade obtida no Exemplo 1.7.19:

Corolário 2.0.28. *Para quaisquer normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ em $\mathbb{R}^n$, existem constantes $r, R > 0$ tais que*

$$r\|x\| \leq \|x\|' \leq R\|x\|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ é espaço de Banach com respeito a qualquer norma $\|\cdot\|$.

Demonstração. A existência das constantes decorre diretamente do último teorema. Já para a segunda afirmação, sabemos que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ é espaço de Banach, onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do máximo. Agora, para qualquer outra norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$, a existência das constantes $r > 0$ e $R > 0$ como acima, para $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ permite mostrar que uma sequência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ se, e somente se, é de Cauchy em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, donde o resultado segue. □

Exercício 2.18 ($^\star_\star$)**.** Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Por sua vez, ao aliar o corolário anterior ao próximo teorema, você descobrirá por que nunca precisou se preocupar com a continuidade das transformações lineares que encontrava na escola.

Teorema 2.0.29. *Para um espaço normado E, uma transformação linear $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $\ker\varphi := \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$ é fechado em E.*

Demonstração. Se φ é contínua, então $\ker\varphi = \varphi^{-1}[\{0\}]$ é fechado pois $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$. Para a recíproca, basta proceder pela contrapositiva, com a suposição nada problemática de que existe $y \in E \setminus \ker\varphi$: como φ não é contínua (em 0_E, cf. Proposição 1.6.18), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ com $|\varphi(x_n)| > 2^n\|x_n\|$; daí, não é difícil perceber que $y_n := y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_n)} \cdot x_n$ é tal que $y_n \in \ker\varphi$ para todo n e $y_n \to y$, mostrando que $\ker\varphi$ não é fechado (por quê?!)$^\star_\star$. □

[12] Isto é, induzem a mesma topologia (cf. nota de rodapé 80, página 151).

[13] Fazendo $x := (|a_1|, \ldots, |a_n|)$ e $y := (\|T(e_1)\|, \ldots, \|T(e_n)\|)$, a desigualdade $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ é precisamente (2.0) ao considerar o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Corolário 2.0.30. *Sejam X e Y espaços normados e $T\colon X \to Y$ uma transformação linear. Se $\dim X$ é finita, então T é contínua.*

Demonstração. Primeiro, para $Y := \mathbb{R}$, note que T é contínua se, e somente se, $\ker T$ é subespaço fechado de X. Como X tem dimensão finita, segue que $\ker T$ também tem dimensão finita e, consequentemente, é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algum n. Logo, $\ker T$ é um subespaço de Banach com a norma herdada de X e, portanto, é fechado (cf. Exercício 2.23).

Agora, para Y qualquer, se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases de X e Y, respectivamente, com $\mathcal{B}$ finito, então para cada $b \in \mathcal{B}$ existe um subconjunto finito $\mathcal{C}_b \subseteq \mathcal{C}$ de tal forma que $T(b)$ é combinação linear dos vetores em $\mathcal{C}_b$ donde, por linearidade, segue que $\mathcal{C}' := \bigcup_{b\in\mathcal{B}} \mathcal{C}_b$ é uma base finita para $\operatorname{im}(T)$. Note que para $c \in \mathcal{C}$, a projeção $p_c\colon Y \to \mathbb{R}$ que associa cada $y \in Y$ à sua "c-ésima coordenada" é linear, o que faz de $\varphi_c := p_c \circ T\colon X \to \mathbb{R}$ ~~um funcional linear~~ uma transformação linear, contínua pelo que se discutiu no parágrafo anterior. Por fim, ao fazer $\mu_c\colon \mathbb{R} \to Y$ a função contínua que multiplica cada $r \in \mathbb{R}$ pelo vetor $c \in \mathcal{C}$ fixado, não é difícil perceber que T é combinação linear das transformações lineares contínuas da forma $T_c := \mu_c \circ \varphi_c\colon X \to Y$ conforme c percorre $\mathcal{C}'$. Os detalhes ficam por sua conta $(^{\star}_{\star\star})$. □

Observação 2.0.31 (Opcional: transformações lineares descontínuas)**.** Se $(E, \|\cdot\|)$ é espaço normado com dimensão infinita, então existe uma transformação linear $T\colon E \to \mathbb{R}$ descontínua. Para simplificar o argumento, suponha que $\mathcal{B} := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ seja uma base para E e, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\varphi(b_n) := 2^n \|b_n\|.$$

Pelo que você já aprendeu em Álgebra Linear, existe uma única transformação linear $T\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $T(b_n) = \varphi(b_n)$ para todo n. Para encerrar, note que ao fazer $x_n := \frac{1}{\|b_n\|2^n} b_n$ para todo n, obtemos $x_n \to 0_E$ (por quê?)* mas $T(x_n) = 1$ para todo n. Para o caso de dimensão infinita qualquer, você só precisa saber que todo subconjunto linearmente independente de E está contido numa base e repetir o argumento anterior, *mutatis mutandis.* △

Independentemente do seu gosto (ou desgosto) pelos espaços normados com dimensão infinita, uma coisa é certa: eles estão sempre presentes, mesmo quando fingimos que eles não estão lá (cf. Subseção 2.1.1).

Exercício 2.19 (Opcional – $(^{\star}_{\star\star})$)**.** Mostre que $\mathcal{B}(X)$ contém um subconjunto *linearmente independente*[14] em bijeção com X, para qualquer conjunto $X \neq \emptyset$. Conclua que se X é infinito, então $\mathcal{B}(X)$ tem dimensão infinita. Dica: para $x \in X$ fixado, a função $\delta_x\colon X \to \mathbb{R}$, que a cada $y \in X$ associa o número $\delta_x(y)$ dado por

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases},$$

é limitada (faça primeiro com $X := \{0, 1\}$ para entender o que está havendo). ■

2.1 Teorema de Heine-Cantor

2.1.0 Essencial

Continuidade uniforme e o Teorema de Heine-Cantor

Extensão de funções uniformemente contínuas

2.1.1 Extras

Integrais de Riemann como limites de redes (parte II)

texto

[14] Um subconjunto S de um espaço vetorial E é **linearmente independente** se para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_0, \ldots, x_n \in S$, uma igualdade do tipo $\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ em E só for possível com $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$. Em Álgebra Linear, mostra-se que a dimensão de um espaço vetorial coincide com a cardinalidade de qualquer subconjunto linearmente independente maximal.

Convergência uniforme

texto

2.2 Teorema do Valor Intermediário

2.3 Teorema Fundamental do Cálculo

2.4 Exercícios adicionais

Exercício 2.20 (Opcional – $\binom{\star}{\star}$)**.** Pense rápido: se $(x_d)_d$ é rede real tal que $x_d \to x$, com $x \in \mathbb{R}$, então $\{x_d : d \in \mathbb{D}\} \cup \{x\}$ é compacto? ■

Exercício 2.21 (Opcional – $\binom{\star}{\star}$)**.** Para X e Y espaços topológicos, mostre que $f\colon X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[G]$ é fechado em X sempre que $G \subseteq Y$ é fechado. ■

Exercício 2.22 (Opcional – $\left(\substack{\star\\ \star\star}\right)$)**.** Para um espaço métrico (X, d), defina $d'\colon X \times X \to [0, 1]$ fazendo

$$d'(x, y) := \begin{cases} d(x, y), & \text{se } d(x, y) \leq 1 \\ 1, & \text{se } d(x, y) > 1 \end{cases}.$$

Mostre que (X, d') é espaço métrico homeomorfo a (X, d). ■

Exercício 2.23 (Opcional – $\binom{\star}{\star}$)**.** Para X métrico completo, mostre que F é completo com a métrica de subespaço se, e somente se, F é fechado em X. Dica: cf. Exercício 1.151. ■

Exercício 2.24 ($\star$)**.** Mostre que bolas fechadas são fechadas em espaços métricos. Dica: você já tem tecnologia para resolver isto numa linha (cf. Exercícios 1.149, 2.21 + o fato de que $[0, r]$ é fechado em $\mathbb{R}$ para todo $r \in \mathbb{R}$). ■

Lista de símbolos e siglas

$\wp(X)$	conjunto das partes de X, 19
R^{-1}	relação inversa de R, 19
$\bigcup \mathcal{S}$ ou $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}} S$	reunião da família $\mathcal{S}$, 21
$A \approx B$	A e B têm a mesma cardinalidade, 22
$(\mathbb{X}, \preceq)$	ordem parcial, 23
$\min A$, $\min\limits_{a \in A} a$ ou $\min_{\leq} A$	o menor elemento de A com respeito à ordem $\leq$, 26
$\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$	sucessor de b em $\mathbb{B}$, 27
$\max A$, $\max\limits_{a \in A} a$ ou $\max_{\leq} A$	o maior elemento de A com respeito à ordem $\leq$, 29
$n!$	fatorial de n, 33
$\mathbb{N}_{<n}$	conjunto dos naturais estritamente menores do que n, 38
$\lvert X \rvert$	número cardinal de X, 39
$\bigcap \mathcal{S}$ ou $\bigcap\limits_{S \in \mathcal{S}} S$	interseção da família $\mathcal{S}$, 43
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros, 45
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais, 45
$f[A]$	imagem direta de A por f, 49
$f^{-1}[B]$	pré-imagem de B por f, 49
Y^X	conjunto das funções de X em Y, 49
$(G, *, e)$	conjunto G munido de operação $*$ que tem e como elemento neutro, 53
0	elemento neutro aditivo, 54
$-x$	inverso aditivo de x, 54
1	elemento neutro multiplicativo, 54
x^{-1} ou $\frac{1}{x}$	inverso multiplicativo de x, 54
a^n	n-ésima potência de a, 56
z_A	para $z \in \mathbb{Z}$, interpretação de z em A, 57
$\ker f$	núcleo de f, 57
$\lvert x \rvert_{\mathbb{K}}$	valor absoluto de $x \in \mathbb{K}$, 61
$\mathbb{K}_{\geq 0}$	cone positivo, 61
$\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$	espaço das funções limitadas de X em $\mathbb{K}$, 62
$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos, 62
$\sup A$ ou $\sup_{a \in A} a$	supremo de A, 63
$\inf A$ ou $\inf_{a \in A} a$	ínfimo de A, 63
$A + B$ e $A + x$	soma dos subconjuntos A e B; translação de A por x, 64
AB e xA	produto dos subconjuntos A e B; produto de A por x, 64

Referências Bibliográficas

[0] A. F. Beardon. *Limits: a new approach to real analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[1] N. Bourbaki. *General Topology, part 1*. Addison-Wesley, London, 1966.

[2] N. Bourbaki. *General Topology, part 2*. Addison-Wesley, London, 1966.

[3] L. Bukovský. *The structure of the real line*. Monografie Matematyczne 71. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2011.

[4] R. Engelking. *General Topology: Revised and completed edition*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] J. Ferreirós. *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics*. Birkhäuser Basel, 2ª edition, 2007.

[6] J. F. Hall. *Completeness of Ordered Fields*. California Polytechnic State University, 2010. Monografia de graduação.

[7] J. D. Hamkins. *Lectures on the Philosophy of Mathematics*. MIT Press, 2021.

[8] V. J. Katz and K. H. Parshall. *Taming the Unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century*. Princeton University Press, 2014.

[9] H. Keisler. *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*. Dover, 2 edition, 2000.

[10] E. L. Lima. *Análise Real, Volume 1: Funções de uma Variável*. IMPA, 2006.

[11] E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 1*. IMPA, 14 edition, 2017.

[12] P. Maddy. *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Oxford University Press, USA, 2011.

[13] R. M. Mezabarba. Fundamentos de Topologia Geral, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/Fund_Top_Geral.

[14] R. M. Mezabarba. Teoria maliciosa dos conjuntos, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/MaliciousSetTheory.

[15] R. M. Mezabarba. Um curso fechado e limitado de análise real, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/AnalysisZero.

[16] E. A. Ok. *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University, 2007.

[17] C. C. Pugh. *Real Mathematical Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2 edition, 2015.

[18] M. Raman-Sundström. A pedagogical history of compactness. *The American Mathematical Monthly*, 122(7):619–635, 2015.

[19] T. Roque. *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Zahar, 2012.

[20] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 3 edition, 1976.

[21] E. Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. Academic Press, 1996.

[22] R. Shakarchi. *Problems and solutions for undergraduate analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1 edition, 1998.

[23] S. Shapiro, editor. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford Handbooks in Philosophy. Oxford University, 2005.

[24] T. Sonar. *3000 Years of Analysis: Mathematics in History and Culture*. Birkhäuser, 2021.

[25] T. Tao. *Analysis I*. Texts and Readings in Mathematics. Springer, 3 edition, 2016.

[26] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, New York, 1970. Reprinted in 2004 by Dover.

Índice Remissivo