Análise I – CET 1114
Notas de aula

Renan M. Mezabarba

Última atualização: 10 de agosto de 2024.

Quis custodiet ipsos custodes?[0]

Juvenal, Sátiras, VI, linha 347.

[0] Quem vigia os vigilantes?

Sumário

Prefácio (É PRA LER!) 6

0 A reta real 8
- 0.0 Linguagem: revisão de conjuntos e funções . . . 8
  - 0.0.0 Essencial . . . 8
    - Conjuntos . . . 8
    - Funções . . . 11
  - 0.0.1 Extras . . . 13
    - Análise para quê? . . . 13
    - Fundamentos debaixo do tapete . . . 15
- 0.1 Injeções, sobrejeções e a noção de cardinalidade . . . 15
  - 0.1.0 Essencial . . . 15
    - Revisão: funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras . . . 15
    - A noção de cardinalidade . . . 17
  - 0.1.1 Extras . . . 18
    - Relações binárias e inversas . . . 18
    - Relações de equivalência, partições e cardinais . . . 19
- 0.2 Ordens, boas ordens e indução . . . 23
  - 0.2.0 Essencial . . . 23
    - Ordens . . . 23
    - Boas ordens e indução . . . 26
  - 0.2.1 Extras . . . 29
    - Elementos minimais e maximais . . . 29
    - Dualidade . . . 29
- 0.3 Os axiomas de Dedekind-Peano . . . 30
  - 0.3.0 Essencial . . . 30
    - Boas ordens naturais . . . 30
    - Breves noções de aritmética . . . 30
  - 0.3.1 Extras . . . 30
    - Recursão . . . 30
    - Recursão mais uma vez . . . 30
- 0.4 As diferentes noções de (in)finitude . . . 30
  - 0.4.0 Essencial . . . 30
    - Conjuntos finitos . . . 30
    - Conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis . . . 30
  - 0.4.1 Extras . . . 30
    - Como representar os infinitos? . . . 30
    - O Problema da Escolha . . . 30

0.5 Exercícios adicionais 30
0.6 Linguagem algébrica: anéis e corpos 30
0.7 Corpos ordenados 30
0.8 Supremos e ínfimos 30
0.9 Completude (no sentido de Dedekind) 30
0.10 Isomorfismos e a unicidade da reta real 30
0.11 Exercícios adicionais 30

1 Limites e continuidade **32**

2 Os teoremas fundamentais da Análise **34**

Lista de símbolos e siglas **37**

Referências Bibliográficas **39**

Índice Remissivo **41**

Prefácio (É PRA LER!)

O presente material é uma versão reformulada (de partes) do texto "`Um curso fechado e limitado de Análise Real`" [4], que comecei a escrever tempos atrás, mas cuja narrativa não é apropriada para, efetivamente, acompanhar um curso de Análise, por diversos motivos[0]. Por isso, aqui você encontrará os assuntos distribuídos de forma diferente e mais amigável.

Cada capítulo corresponde a um terço do curso, enquanto as seções correspondem aos conteúdos das aulas. Tais seções serão divididas em duas partes: a subseção "`Essencial`" apresenta o que será abordado em aula, enquanto a subseção "`Extras`" contêm discussões adicionais, cuja leitura é opcional (mas recomendada)[1]. Exercícios serão propostos tanto ao longo do texto quanto em subseções específicas para atividades ("`Exercícios adicionais`"). Por falar nos exercícios, eles serão classificados em três tipos ($\star$, $\substack{\star\\ \star}$ e $\substack{\star\\ \star\star}$) descritos a seguir.

($\star$) Verificações (que deveriam ser) corriqueiras. Embora nem todos os exercícios nesta classe sejam imediatos, a maioria consiste em "abrir" as definições e fazer as "contas" naturais ao contexto em questão. Não é o tipo de problema que "cai em prova", mas são bons aquecimentos caso você ainda não tenha prática em escrever demonstrações mais complicadas.

($\substack{\star\\ \star}$) Exercícios típicos de listas e provas. Consistem em aplicar resultados previamente demonstrados (tanto em aula quanto em questões anteriores), ou reciclar ideias vistas anteriormente a fim de testar o seu entendimento do assunto: quanto maior sua familiaridade, mais fácil será para você fazer os malabarismos necessários.

($\substack{\star\\ \star\star}$) Estes geralmente são mais difíceis ou elaborados e não costumam fazer parte de listas ou provas (exceto, possivelmente, como questões bônus). Eles "testam" não apenas a familiaridade com o assunto, mas também dão a oportunidade de exercitar um pouco mais a criatividade.

Tente fazer exercícios de todos os tipos: fazer os fáceis te ajudará a ganhar ritmo para fazer os médios, e ao fazer alguns difíceis você *pode* aprender técnicas para transformar os exercícios médios em fáceis. Outra dica: se já souber EXATAMENTE como fazer um exercício, pule para o próximo.

Por fim, uma sugestão: sempre que possível, estude (ou ao menos leia) o "essencial" da aula antes da aula, pois isto tornará ~~possivelmente~~ as aulas bem mais proveitosas para você – e para mim.

[0] A principal razão é o propósito: [4] se destina a estudantes que pretendem estudar (!) o assunto de maneira independente, sem vínculo com o cronograma de uma disciplina de graduação.

[1] Algumas discussões realizadas nas seções extras serão importantes para o desenrolar de outras seções essenciais. Tais ocorrências serão devidamente indicadas, não se preocupe.

Capítulo 0

A reta real

Intuitivamente, a *reta real* é um objeto geométrico: um *segmento retilíneo sem saltos*, i.e., *contínuo*. Por outro lado, como segmentos dessa reta podem ser *somados* (copiados e justapostos) e *multiplicados*[0], segue que a reta também é um objeto *algébrico*. Daí, uma pergunta natural a se fazer é: como conciliar as duas noções a fim de *descrever*, matematicamente, a reta real?

A resposta usual faz uso da *linguagem de conjuntos*: a reta real será definida como *um conjunto* (de pontos), cujos *aspectos geométricos* desejados serão abstraídos por uma *relação de ordem* que deverá capturar, de alguma forma, as noções de *linearidade* e *continuidade*; os *aspectos algébricos*, por sua vez, serão descritos por meio de *operações binárias* que imitarão as operações usuais que aprendemos na *escola*. Nesta parte do curso lidaremos com todos esses aspectos, a fim de entender a definição matemática da reta real.

0.0 Linguagem: revisão de conjuntos e funções

0.0.0 Essencial

Conjuntos

A palavra "conjunto" é uma daquelas típicas expressões (*atômicas*) que não se explicam por meio de outras expressões mais simples, como *tempo*, *espaço*, *ser*, etc. Costuma ficar a cargo da (vida em) sociedade ensinar o significado dessas coisas: no caso, conjuntos podem ser entendidos como *agrupamentos de objetos* ou *coleções de indivíduos* que partilham algum tipo de característica comum num certo contexto. **Exemplos**: conjunto das pessoas numa sala, conjunto dos torcedores de um time, conjunto dos times de algum esporte coletivo num campeonato, conjunto dos campeonatos desse esporte coletivo, etc. Porém, usaremos tais noções em contexto matemático, e trataremos apenas de conjuntos formados por objetos de natureza matemática.

Dados *objetos matemáticos* x e A, vamos assumir que apenas dois casos podem ocorrer (e necessariamente um deles ocorrerá): "$x \in A$" (lido como "x pertence a A", "x é elemento de A" ou "x é membro de A") ou o contrário, indicado por "$x \notin A$" (lido como "x não pertence a A", "x não é elemento de A" ou "x não é membro de A"). **Porém, como não se define explicitamente o que significa *ser* conjunto** e, muito menos, o que é a relação de pertinência "$\in$", precisa-se, pelo menos, indicar os comportamentos esperados.

[0] Como feito por Descartes na infância da Geometria Analítica. Para saber mais, confira a obra de Tatiana Roque [5].

Definição 0.0.0. Para conjuntos A e B:

(i) escreveremos "$A \subseteq B$" para abreviar a afirmação "para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$", lida como "A é **subconjunto** de B", ou "A **está contido em** B";

(ii) escreveremos "$A \nsubseteq B$" para abreviar a negação de "$A \subseteq B$", i.e., para indicar que "existe $x \in A$ tal que $x \notin B$";

(iii) escreveremos "$A \subsetneq B$" para abreviar "$A \subseteq B$ e $A \neq B$" e, em tais situações, diremos que A é **subconjunto próprio** de B. ¶

Axioma da Extensão. *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos. Em notação mais econômica:* $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B)$ *e* $(B \subseteq A)$.

Exercício 0.0 ($\star$)**.** Sejam A o conjunto dos números inteiros pares, B o conjunto dos números inteiros múltiplos de 3 e C o conjunto dos números inteiros múltiplos de 6. Determine as relações de inclusão entre A, B e C. ■

Entre outras coisas, o exercício acima indica que precisamos de um modo mais prático para *descrever* conjuntos. A seguir, listam-se modos comuns de descrever o conjunto A do exercício anterior:

- $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \text{ é par}\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é par}\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} : \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 2n\}$;
- $A = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$.

Em geral, ao descrever um conjunto no formato

$$\underbrace{\{\ldots}_{1^{\underline{a}}\text{ parte}} \; : \; \underbrace{\ldots\}}_{2^{\underline{a}}\text{ parte}}$$

entende-se que o conjunto considerado é formado pelos elementos que satisfazem o que se escreve na primeira parte, **tais que** as condições impostas na segunda parte são satisfeitas. Assim, na primeira descrição de A, entende-se que seus elementos são todas as coisas (já que não há restrições) que são números inteiros pares (a condição imposta na segunda parte). Analogamente, na segunda descrição, A é descrito como a coleção de todos os números inteiros (como imposto na primeira parte) que são pares (já que está é a condição da segunda parte).

Exercício 0.1 ($\star$)**.** Descreva os conjuntos B e C do exercício anterior nos formatos acima. ■

Observação 0.0.1. É comum encontrar a notação "$\{\ldots|\ldots\}$" em vez de "$\{\ldots : \ldots\}$". Você pode usá-la em seus exercícios, desde que não implique com a minha forma de escrever, padrão nos textos de Teoria dos Conjuntos, e que será adotada no texto. △

Outra alternativa prática de descrição, geralmente utilizada para conjuntos *finitos*[1], consiste em listar os elementos do conjunto. Por exemplo: para $S := \{a, 4, \triangle\}$, temos $a \in S$, $4 \in S$ e $\triangle \in S$, enquanto $0 \notin S$, $\nabla \notin S$ etc. Importante destacar o uso do símbolo ":=" acima: a ideia é usá-lo para indicar que S foi "definido" como o conjunto escrito após o símbolo ":=". Para ilustrar, observe que no próximo exercício faz sentido usar "=".

[1]Finitude é um tópico que será discutido ainda neste capítulo.

Exercício 0.2 ($\star$)**.** Mostre que $S = \{\triangle, 4, a\}$. ■

Preciosismos à parte[2], o exercício acima indica que a ordem em que os elementos de um conjunto são descritos é irrelevante. É por essa razão, que conjuntos do tipo $\{a, b\}$ são chamados de **pares não-ordenados**.

Exercício 0.3 ($\star$)**.** Mostre que $\{x, x\} = \{x\}$ para qualquer x. **Observação**: por conta deste resultado, é de "bom tom" não grafar duas vezes o mesmo elemento ao descrever um conjunto com a notação "$\{\ldots\}$". ■

Exercício 0.4 ($\star$)**.** Descreva o conjunto $\{0, 1\}$ por meio da notação $\{\ldots : \ldots\}$. ■

A próxima definição trás o restante das notações e operações usuais entre conjuntos, a fim de encerrar esta primeira parte da revisão.

Definição 0.0.2.

(i) Denota-se $\emptyset := \{x : x \neq x\}$, *coleção* que será chamada de **conjunto vazio** por razões *óbvias*: não existe x com $x \in \emptyset$, já que o contrário daria $x \neq x$.

(ii) Para X e Y conjuntos, considera-se $X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\}$, que denota a **diferença** entre X e Y, também chamada de **complementar de Y em X**.

(iii) Para conjuntos A e B, $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ e $A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ denotam os conjuntos chamados, respectivamente, de **interseção** e (**re**) **união** dos conjuntos A e B. Em particular, A e B são **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$. ¶

Observação 0.0.3. Lembre-se: na linguagem comum, "e" funciona como um *agregador*, enquanto "ou" indica *alternativa*: por exemplo, os pontos da reta nos intervalos $(-\infty, 1)$ *e* $(3, +\infty)$ constituem a solução da inequação $x^2 - 4x + 3 > 0$, o que em linguagem de conjuntos se expressa por meio da reunião $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. No entanto, **não** faz sentido dizer que tal reunião é composta por todo x tal que $x \in (-\infty, 1)$ **e** $x \in (3, +\infty)$, pois este "e" (da linguagem matemática usual) indica *simultaneidade* – e não há x com as duas propriedades *ao mesmo tempo*: o correto é dizer que $x \in (-\infty, 1)$ **ou** $x \in (3, +\infty)$. Cabe ainda destacar que o "ou" matemático não é exclusivo: sempre que dissermos "$x \in A$ ou $x \in B$", deve-se entender que *pelo menos* um dos casos deve ocorrer, o que não inviabiliza a ocorrência de ambos. △

Proposição 0.0.4. *Para todo conjunto A ocorre $\emptyset \subseteq A$.*

Demonstração. Dado x qualquer, a implicação "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" é verdadeira por *vacuidade*, já que "$x \in \emptyset$" é falso. Alternativamente: se a *inclusão* fosse falsa, deveria existir $x \in \emptyset$ com $x \notin A$, mas não existe $x \in \emptyset$, absurdo[3]. □

Observação 0.0.5 (Contido vs. pertence)**.** Cuidado para não confundir *pertinência* e *continência*:

- "$x \in y$" significa que "x" é um dos elementos de "y";
- "$x \subseteq y$" significa que "todo elemento de x é também elemento de y".

[2] Ninguém reprovará na matéria por escrever "=" em vez de ":=". CALMA.

[3] Por exemplo: a sentença "todas as piscinas da minha casa são olímpicas" é verdadeira se a minha casa não tiver piscinas.

Assim, embora $\emptyset \subseteq A$ ocorra para qualquer conjunto A, nem sempre ocorre $\emptyset \in A$. Na verdade, fora de contextos mais formais, é raro que se tenha $\emptyset \in A$. Veja que, por exemplo, $\emptyset \notin \emptyset$, já que o contrário é dizer que $\emptyset$ tem um elemento. Mesmo assim, $\emptyset \subseteq \emptyset$. A raiz dessa confusão é, possivelmente, oriunda do fato de que muitas vezes se diz "y contém x" a fim de expressar "$x \in y$". $\triangle$

Exercício 0.5 $(\star)$**.** Convença-se de que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. ■

Exercício 0.6 $(\star)$**.** Sejam A, B e C conjuntos. Mostre as identidades, inclusões, equivalências e implicações a seguir.

a) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

d) $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

f) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

g) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$.

h) $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

i) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. ■

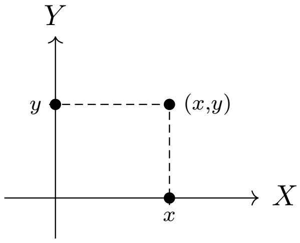
Funções

O advento das *funções*, seja por invenção ou descoberta, deflagrou uma das maiores mudanças de paradigma na Matemática por permitir incorporar as noções de movimento e variação aos *modelos* que, até então, tratavam apenas de situações estáticas e posicionais. Embora hoje se apresente como um conceito simples, alguns séculos separam as primeiras menções explícitas às funções da "definição" apresentada por Dedekind na segunda metade do Século XIX:

Conceito de função. *Uma função é uma regra f que associa cada elemento x de um conjunto X a um único elemento $f(x)$ de um conjunto Y.*

Se, por um lado, a conceituação acima parece englobar os casos clássicos aprendidos na infância (funções *polinomiais*, *trigonométricas*, etc.), por outro lado ela empurra para debaixo do tapete a definição de "regra". Um modo mais honesto consiste em apelar para *pares ordenados*.

Diferente do que ocorre no caso não-ordenado, em que $\{a, b\} = \{b, a\}$ mesmo com $a \neq b$, pode-se *convencionar* escrever (a, b) com o intuito de ter o seguinte comportamento: $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Com tal *dispositivo*, usualmente xingado de **par ordenado**, passa a fazer sentido definir o **produto cartesiano** $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$ entre os conjuntos X e Y, cujos membros são todos os pares ordenados da forma (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$: noutras palavras, $X \times Y$ apenas abstrai um típico plano *cartesiano*.



Dado que um par ordenado (x, y) pode ser interpretado como uma *mini-regra* que faz sua *primeira coordenada* x corresponder à sua *segunda coordenada* y, é natural pensar em *regras* que associam elementos de X a Y como subconjuntos de $X \times Y$.

Definição 0.0.6 (Bourbaki, 1939)**.** Uma **função** (ou **mapa** ou **aplicação**) **de** X **em** Y é um subconjunto $f \subseteq X \times Y$ tal que:

(i) para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ com $(x, y) \in f$ (cada x se associa a pelo menos um y);

(ii) se $(x, y), (x, z) \in f$, então $y = z$ (o y associado a x é único).

Escreve-se $f\colon X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ para indicar que f é uma função de X em Y. ¶

Acima, o conjunto X costuma ser chamado de **domínio** da função f, enquanto Y é o seu **codomínio** (também chamado de *contradomínio*). Uma vez que a cada $x \in X$ corresponde um único $y \in Y$ com $(x, y) \in f$, faz sentido atribuir a y uma notação que remeta ao elemento x: no caso, faz-se $y \coloneqq f(x)$ (ou ainda $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$), e xinga-se $f(x)$ de **imagem de** x pela função f. Por sua vez, o subconjunto de Y formado por todos os elementos da forma $f(x)$, conforme x *varia* em X, é chamado de **imagem da função**, e denotado por $\operatorname{im}(f)$. Em símbolos: $\operatorname{im}(f) \coloneqq \{f(x) : x \in X\}$.

Exemplo 0.0.7 (Funções polinomiais)**.** Dado um *polinômio na indeterminada* t, i.e., uma *expressão* da forma $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e *números reais*[4] $a_0, \ldots, a_n$, onde t indica apenas um símbolo *indeterminado*, que abreviaremos com $p(t)$, passa a fazer sentido substituir cada ocorrência de "t" na expressão $p(t)$ por um *número real* x fixado, o que *produz* o *número real*

$$p(x) \coloneqq a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Dessa forma, pode-se dizer que $p \coloneqq \{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ relaciona cada $x \in \mathbb{R}$ ao número $p(x) \in \mathbb{R}$. Uma vez que tal associação é claramente *funcional*[5], ganha-se uma função $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto p(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Funções desse tipo são chamadas de (funções) **polinomiais**. ▲

Exemplo 0.0.8 (Funções racionais)**.** Mais geralmente, consideram-se expressões da forma $r(t) \coloneqq \frac{p(t)}{q(t)}$ em que ambos $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios na indeterminada t. Desta vez, só faz *sentido* substituir "t" em $r(t)$ por um número real x fixado nas situações em que se garantir $q(x) \neq 0$, pois a divisão por 0 não é realizável em *corpos*. Assim, a expressão $r(t)$ induz uma função r cujo domínio é $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$, e que faz $r(x) \coloneqq \frac{p(x)}{q(x)}$ para cada x no domínio de r. Funções assim costumam ser chamadas de (funções) **racionais**. ▲

[4]Formalmente ainda não definimos o que é um número real. No entanto, você já fez Cálculo I. De modo geral, os exemplos farão uso de informações que nós já sabemos como são, embora ainda não estejam implementadas formalmente na disciplina. O Elon faz isso e ninguém reclama, então não é agora que isso vai virar um problema, certo?

[5]No sentido de que se $(x, y), (x, z) \in p$, então $y = z$.

Exercício 0.7 ($\star$). Para funções f e g de X em Y, mostre que $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. ■

Definição 0.0.9. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são funções, então fica *bem definida* uma função $g \circ f\colon X \to Z$ dada pela identidade

$$(g \circ f)(x) := g \circ f(x) := g(f(x)),$$

para todo $x \in X$, chamada de (função) **composta** (ou **composição**) entre f e g, em geral denotada apenas por $g \circ f$. ¶

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] & f(x) & y \arrow[r, mapsto] & g(y) \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[rrrr, bend right, "g\circ f"'] & & Y \arrow[rr, "g"] & & Z \\
x \arrow[rrrr, mapsto] & & & & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Figura 0.0: Esquematicamente, f vem antes de g, já que as setas costumam sair da direita para esquerda, no sentido de nossa escrita. Por outro lado, para descrever a regra da composição, precisamos escrever g primeiro, já que os cálculos são feitos "de dentro para fora": primeiro calcula-se $f(x)$, para daí calcular $g(f(x))$. Note que, apesar disso, as duas notações indicam a mesma coisa.

A definição acima faz sentido pois $f(x) \in Y$ para todo $x \in X$ e $Y = \operatorname{dom}(g)$, de modo que g *sabe* o que *fazer* com $f(x)$. Um pouco mais formalmente, podemos definir

$$g \circ f := \{(x, z) \in X \times Z : g(f(x)) = z\},$$

que satisfaz as condições para ser uma função do tipo $X \to Z$:

- para cada $x \in X$ existe $z \in Z$ tal que $(x, z) \in g \circ f$, basta tomar $z := g(f(x))$;
- se $(x, z), (x, z') \in g \circ f$, então $z = z'$ já que $z = g(f(x)) = z'$.

Exercício 0.8 ($\star$). Sejam $f\colon W \to X$, $g\colon X \to Y$ e $h\colon Y \to Z$ funções. Mostre que as funções $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são iguais. ■

Exercício 0.9 ($\star$). Para um conjunto X, escreve-se $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ para denotar a **função identidade de** X, definida por $\mathrm{Id}_X(x) := x$ para cada x em X. Mostre que $f \circ \mathrm{Id}_X = f$ para qualquer função f cujo domínio é X e $\mathrm{Id}_X \circ g = g$ para qualquer função g cujo codomínio é X. ■

0.0.1 Extras

Análise para quê?

Os números naturais foram criados por Deus, todo o resto é trabalho da humanidade.

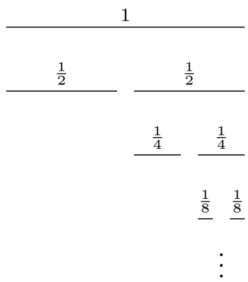
Leopold Kronecker (1886).

Faz parte do folclore matemático atribuir a frase anterior ao algebrista Leopold Kronecker (1823-1891), como uma síntese de seu ceticismo perante os diversos métodos *infinitários* e não-construtivos que se propagaram na Matemática a partir da segunda metade do Século XIX [2]. Longe de ser uma mera declaração teológica, ela expressa a confiabilidade que temos diante dos *métodos aritméticos* usuais, explicitamente ancorados na (aparente?) realidade imediata, em contraponto aos argumentos do *Cálculo*, que frequentemente dependem de suposições incomuns ao nosso cotidiano intrinsecamente *finito*, como no caso das *séries*.

Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \qquad (\dagger)$$

que manifesta a ideia de somar iteradamente parcelas da forma $\frac{1}{2^n}$ conforme toma-se n cada vez maior. Embora possa parecer artificial, esse tipo de animal surge naturalmente em problemas que envolvem o *cálculo* de áreas *curvilíneas*, por meio do chamado *método da exaustão*[6]. O ponto a chamar atenção, porém, é o seguinte: embora cada estágio finito desse processo seja facilmente calculável, não é completamente óbvio o que poderia *significar* realizar uma soma com infinitas parcelas.



Com argumentos aritmético-geométricos do tipo ilustrado acima, é razoável *convencionar* que o valor para (†) (seja lá qual for) deve corresponder ao *número* para o qual as *somas parciais* se *dirigem*: no caso, tal número *deveria* ser 1, já que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \cdots$ Ainda assim, trata-se de uma convenção ou definição: não há vida suficiente para efetuar *todas* as somas e verificar uma igualdade legítima.

Agora, o que significa dizer que tais somas parciais se dirigem para algum valor? Além disso, o que impediria que certas somas se dirigissem para números diferentes? Mais ainda, como determinar os valores de tais somas infinitas?

Evidentemente, nada impede que tais perguntas sejam respondidas de forma vaga e intuitiva – ou apenas ignoradas. No caso da série proposta, por exemplo, um argumento muito comum para justificar as estimativas sem muito esforço (abanando as mãos) é o seguinte: ao escrever $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, chega-se a

$$2S = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + S$$

e, consequentemente, $S = 1$, justamente o que o raciocínio intuitivo geométrico sugeria!

Não é difícil adaptar o *método* para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ e, mais geralmente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{m-1}$ sempre que $m > 1$, identidades compatíveis com suas respectivas interpretações geométricas. O que acontece, porém, ao aplicar tal "metodologia" na determinação do valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$? Como antes, ao escrever $T := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, chega-se a

$$2T = 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{n+1} + \ldots \Rightarrow 2T + 2 = 2 + 4 + 8 + \ldots = T \Rightarrow T = -2,$$

resultado que, desta vez, não parece *certo*, por discordar do que a interpretação geométrica sugere.

Finalmente encontramos uma pergunta mais inescapável do que as feitas um pouco acima: *por que o truque algébrico preguiçoso pareceu funcionar nos primeiros casos mas falhou no último?*

Responder a esse tipo de pergunta é, pelo menos historicamente, um dos papéis da Análise. Pode-se dizer que ela surgiu do processo natural de revisão metodológica, típico do *modus operandi* científico, no contexto do *Cálculo* de Leibniz-Newton. Embora, a princípio, tratasse-se de um movimento voltado a justificar (e expandir) os resultados da área com base em conceitos geométricos menos vagos, seus praticantes não tardaram a empregar a *linguagem de conjuntos* no processo de retraduzir e *sintetizar* o Cálculo a partir de noções aparentemente tão sólidas quanto os números criados pelo deus de Kronecker.

[6]É o que está por trás das ideias de *integração* que você estudou em Cálculo I.

Fundamentos debaixo do tapete

Conjuntos e, mais geralmente, *objetos matemáticos*, não existem da mesma forma que as entidades físicas existem. Por mais que você procure na sua casa ou em qualquer outro lugar, você nunca encontrará *o número 2*, por exemplo. É claro que você pode encontrar símbolos, desenhos ou pinturas que remetam ao *número 2*, mas nunca *o* próprio número 2, já que este é uma ideia, a abstração de um conceito. Dessa forma, diferente de alguém na Biologia ou na Geologia, cujos objetos de estudo são palpáveis e facilmente detectáveis, na Matemática é preciso tomar mais cuidado.

Conforme a Matemática se desenvolveu e amadureceu ao longo dos milênios, chegou-se ao consenso de utilizar *o método axiomático*. Na prática, isto consiste em assumir como válidas algumas afirmações básicas que parecem razoáveis o bastante para serem entendidas como "verdadeiras", e a partir delas deduzir "todo o resto". Como a discussão anterior indicou, isto é relativamente desnecessário para questões matemáticas corriqueiras, mas se torna indispensável quando problemas menos usuais entram em cena. Concomitantemente, a adaptabilidade dos conjuntos favoreceu o seu uso em praticamente todas as áreas da Matemática. Mas, novamente: conjuntos não existem.

Nesse sentido, há basicamente dois axiomas sobre conjuntos que as pessoas utilizam em seus primeiros contatos com o tema: o Axioma da Extensão, já postulado no começo da seção, e o Axioma da Abstração. Este último é usado implicitamente sempre que se emprega a notação $\{\ldots : \ldots\}$. Grosso modo, postula-se o seguinte: dada uma *propriedade* $\mathcal{P}$, existe o conjunto $\{x : x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$. É claro que isto deixa o problema de explicar o que é *propriedade*, mas a intuição basta para a discussão: tudo o que se definiu na seção anterior poderia ser justificado por meio desses dois axiomas, até mesmo pares ordenados!

Exercício 0.10 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Para x e y quaisquer, <u>defina</u> $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mostre que para a, b, c e d quaisquer, $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. ■

Com um pouco mais de paciência, não seria difícil ver que funções podem ser interpretadas como conjuntos. Mais adiante, veremos que números também podem ser "definidos" via conjuntos, de modo que chega-se à conclusão inevitável: é razoável assumir, para propósitos formais, que tudo é conjunto. Do ponto de vista metodológico mencionado na página anterior, esta seria uma vitória enorme: a partir de dois axiomas básicos, *seríamos* capazes de justificar e reconstruir uma quantidade monumental de *fatos* matemáticos, o que tornaria bastante razoável aceitar as consequências menos intuitivas que encontrássemos pelo caminho. Contudo, há um problema.

Exercício 0.11 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Considere $R := \{x : x \notin x\}$. Mostre que $R \in R$ se, e somente se, $R \notin R$. ■

O Axioma da Abstração diz que R deveria *existir*. Porém, se R existir, chega-se a uma contradição, pois tanto $R \in R$ quanto sua negação devem ocorrer simultaneamente.

Uma das soluções encontradas para resolver tal problema, conhecido como Paradoxo de Russell, foi abandonar o Axioma da Abstração e, em seu lugar, assumir o Axioma da Separação que, grosso modo, postula o seguinte: dada uma *propriedade* $\mathcal{P}$ e uma conjunto A, existe o conjunto $\{x \in A : x \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$. Assim, em vez de assumir a habilidade irrestrita de definir conjuntos, supõe-se apenas a capacidade de determinar *subconjuntos* de conjuntos previamente conhecidos. O preço disso é que a lista de axiomas precisou ser estendida. Contudo, tais axiomas não serão abordados aqui – com exceção do Axioma da Escolha. Para saber mais, você pode conferir a referência [3].

0.1 Injeções, sobrejeções e a noção de cardinalidade

0.1.0 Essencial

Revisão: funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Definição 0.1.0. Uma função $f : X \to Y$ será dita:

(i) **injetora** (ou *injetiva*, *injeção*, etc.) se para quaisquer $x, x' \in X$, a ocorrência de $f(x) = f(x')$ acarretar $x = x'$;

(ii) **sobrejetora** (ou *sobrejetiva*, *sobrejeção*, *sobre* Y, etc.) se $\operatorname{im}(f) = Y$ e

(iii) **bijetora** (ou *bijetiva*, *bijeção*, etc.) se $f : X \to Y$ for injetora e sobrejetora. ¶

Para aquecer, você pode começar com o próximo

Exercício 0.12 ($^{\star}_{\star}$)**.** Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se g e f são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

b) Mostre que se g e f são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

c) Conclua que se g e f são bijetoras, então $g \circ f$ é bijetora.

Bijeções estão intimamente ligadas com a noção de *invertibilidade*[7] para funções.

Definição 0.1.1. Dizemos que uma função $g\colon Y \to X$ é *uma* **inversa** de $f\colon X \to Y$ se $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. A função f é **invertível** se tem uma inversa. ¶

Observação 0.1.2. Na prática, dizer que g é *uma* inversa de f equivale a dizer que $g\colon Y \to X$ satisfaz o seguinte

$$\text{para quaisquer } x \in X \text{ e } y \in Y,\ g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y. \tag{0.0}$$

De fato, se g é *uma* inversa de f, então a condição acima é satisfeita: por um lado, se $g(y) = x$, então $f(g(y)) = f(x)$, com $f(g(y)) = y$ pois $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ vale por hipótese; por outro lado, se $f(x) = y$, então $g(f(x)) = g(y)$, com $g(f(x)) = x$ pois $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ vale por hipótese. Reciprocamente, se $g\colon Y \to X$ satisfaz a condição (0.0), então valem as identidades $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$: para a primeira, note que se $f(x) = y$, então (0.0) assegura $g(y) = g(f(x)) = x$; a segunda é *análoga*[8]. △

Em outras palavras, *uma* inversa de g desfaz tudo o que f faz. Como consequência:

Exercício 0.13 ($\star$)**.** Mostre que uma inversa, se existir, é única, ou seja: se g e g' são inversas de f, então $g = g'$. ■

Em certo sentido, o resultado acima diz que a inversa de uma função f fica completamente determinada por f (caso exista). Por isso, é comum indicá-la de modo a fazer alusão à função f: neste caso, a notação mais comum para a inversa de f é f^{-1}.

Exemplo 0.1.3. A função $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(z) := z + 1$ tem inversa dada por $g(z) := z - 1$. De fato,

$$g(f(z)) = f(z) - 1 = z + 1 - 1 = z \quad \text{e} \quad f(g(z)) = g(z) + 1 = z - 1 + 1 = z.$$

Futuramente, veremos que a função exponencial $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tem a função logaritmo $\ln\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como inversa: de suas aulas de Cálculo I, você deve se lembrar de que $e^x = y$ se, e somente se, $\ln(y) = x$. Compare isso com a condição (0.0). ▲

Exemplo 0.1.4. A função $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $h(z) := z^2$ não é invertível: por valer $h(-1) = h(1) = 1$, não pode haver g satisfazendo (0.0), pois $g(1)$ seria simultaneamente igual a -1 e 1. Em particular, note que h não é injetora e nem sobrejetora. ▲

O que tudo isso tem a ver com bijeções?

Proposição 0.1.5. *Uma função $f\colon X \to Y$ é bijetora se, e somente se, é invertível.*

[7] O verbo é "inverter" e não "inverser".

[8] Afirmações dessa natureza devem ser encaradas como exercícios do tipo ($\star$).

Demonstração. Assumindo que f é bijetora, vamos definir uma função $g\colon Y \to X$ que provaremos ser a inversa de f. Não há muito o que fazer: vamos definir

$$g := \{(y, x) \in Y \times X : f(x) = y\}.$$

Por f ser sobrejetora, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $(y, x) \in g$. Agora, se $(y, x), (y, x') \in g$, então $f(x) = f(x')$ (por quê?)*, donde a injetividade de f assegura $x = x'$. Isto mostra que g é função de $Y \to X$. Para verificar que g é a inversa de f, basta notar que g satisfaz a condição (0.0) da Observação 0.1.2 por construção.

A recíproca, isto é, "se $f\colon X \to Y$ é invertível, então f é bijetora", é consequência do próximo exercício. □

Exercício 0.14 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

b) Mostre que se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora.

c) Conclua que se $Z := X$ e $g := f^{-1}$, então f é bijetora. ■

Corolário 0.1.6. *Se $f\colon X \to Y$ é bijeção, então $f^{-1}\colon Y \to X$ é bijeção.*

A noção de cardinalidade

Os tipos de função discutidos no começo da seção permitem comparar o *tamanho* dos conjuntos de modo bastante prático.

Definição 0.1.7. Diremos que dois conjuntos **têm a mesma cardinalidade** ("quantidade de elementos") se existir uma bijeção entre os dois. ¶

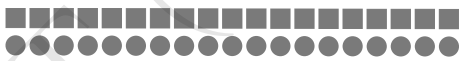


Figura 0.1: É evidente que há tantos círculos quanto quadrados, mesmo sem saber *quantos*.

Proposição 0.1.8. *Sejam A, B e C conjuntos.*

(i) *Existe uma bijeção de A para A.*

(ii) *Se existe uma bijeção de A para B, então existe uma bijeção de B para A.*

(iii) *Se existe uma bijeção de A para B e outra bijeção de B para C, então existe uma bijeção de A para C.*

Demonstração. O primeiro item segue por Id_A ser bijeção, enquanto o terceiro item decorre do fato de que a composição de bijeções é bijeção (Exercício 0.12). O segundo item é o Corolário 0.1.6. □

Intuitivamente, a proposição acima diz que ao escrever

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{existe bijeção } A \to B,$$

define-se uma *relação binária*[9] entre conjuntos que se comporta, essencialmente, como a relação de igualdade: $A \approx A$, $B \approx A$ sempre que $A \approx B$ e $A \approx C$ sempre que $A \approx B$ e $B \approx C$. Esse tipo de coisa tem um nome: trata-se de uma *relação de equivalência*[10].

[9] Primeiro tópico da Subseção 0.1.1.
[10] Segundo tópico da Subseção 0.1.1.

Em vez de determinar quando dois conjuntos *têm* a mesma cardinalidade, podemos usar funções para detectar quando um conjunto tem *mais elementos* do que outro.

Definição 0.1.9. Para conjuntos X e Y, vamos fixar as seguintes notações:

(i) "$X \precsim Y$" será usada para indicar a existência de injeção $X \to Y$;

(ii) "$X \prec Y$" será usada para indicar "$X \precsim Y$" e "$X \not\approx Y$";

(iii) "$Y \succsim X$" será usada para indicar a existência de sobrejeção $Y \to X$;

(iv) "$Y \succ X$" será usada para indicar "$Y \succsim X$" e "$X \not\approx Y$". ¶

A semelhança com os símbolos "$\leq$" e "$<$" usualmente empregados no contexto de ordenação numérica é intencional: ela serve para nos lembrar que as propriedades de $\precsim$ e $\prec$ se parecem com as propriedades de $\leq$ e $<$, respectivamente.

Exercício 0.15 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para conjuntos X, Y e Z, mostre que

a) $X \precsim X$;

b) se $X \precsim Y$ e $Y \precsim Z$, então $X \precsim Z$;

c) se $X \approx Y$, então $X \precsim Z$ se, e somente se, $Y \precsim Z$.

Faça o mesmo trocando $\precsim$ por $\prec$, $\succsim$ e $\succ$. ■

Formalmente, tais relações remetem às ordens que serão abordadas na próxima seção. Todavia, com a terminologia que será utilizada, $\precsim$ não pode satisfazer a *antissimetria*: existem conjuntos X e Y com $X \neq Y$ tais que $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ (dê exemplos)*. Isto ocorre pois $\precsim$ é uma ordem não sobre os conjuntos, mas sobre suas *cardinalidades*.

Teorema 0.1.10 (Cantor-Bernstein)**.** *Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$, então $X \approx Y$, i.e., se existem injeções da forma $X \to Y$ e $Y \to X$, então existe bijeção $X \to Y$.*

O resultado acima é uma banalidade nas situações em que X e Y são *finitos*: como veremos, em tais situações, $X \precsim Y$ se, e somente se, o *número de elementos de X*, digamos m, é menor do que ou igual ao *número de elementos de Y*, digamos n, de modo que a ocorrência simultânea de $Y \precsim X$ acarreta a desigualdade oposta $n \leq m$, resultando em $m = n$. Com isso dito, note que o enunciado não menciona números ou *finitude*, que ainda não foram formalmente introduzidos. O fato de ser possível demonstrá-lo no contexto que se desenrola pode ser interpretado como um indicativo de que as definições adotadas cumprem bem o papel de abstrair a noção de cardinalidade. Sua demonstração, porém, será postergada: há questões mais urgentes a serem discutidas.

Exercício 0.16 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Usando o Teorema de Cantor-Bernstein, mostre que $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

0.1.1 Extras

Relações binárias e inversas

Definição 0.1.11. Dados conjuntos X e Y, uma **relação** (**binária**) R entre X e Y é um subconjunto de $X \times Y$.

(i) Para um par $(x, y) \in X \times Y$, escreve-se $x \mathrel{R} y$ para indicar que o par (x, y) é membro da relação R, enquanto x e y são ditos **R-relacionados**. A ocorrência de $(x, y) \notin R$ será indicada por $x \not\mathrel{R} y$.

(ii) O **domínio** da relação R é o conjunto $\operatorname{dom}(R) := \{x : \text{existe } y \in Y \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

(iii) A **imagem** da relação R é o conjunto $\operatorname{im}(R) := \{y : \text{existe } x \in X \text{ com } x \mathrel{R} y\}$.

Quando $X = Y$, diz-se apenas que R é uma relação em X. ¶

Exemplo 0.1.12 (Relação de igualdade)**.** Fixado um conjunto X, pode-se considerar $\Delta_X := \{(x,y) \in X \times X : x = y\}$, a *relação de igualdade* em X. Daí, de acordo com a definição anterior, pode-se escrever $x\,\Delta_X\,y$ para indicar que $(x,y) \in \Delta_X$, i.e., $x = y$. ▲

Exemplo 0.1.13 (Partes e inclusão)**.** Fixado um conjunto X, faz sentido considerar a *coleção* de *todos os subconjuntos de* X, denotada por $\wp(X)$ e chamada de **conjunto das partes de** X, simbolicamente: $\wp(X) := \{A : A \subseteq X\}$. Por exemplo:

(i) para $X := \emptyset$, $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, já que $\emptyset$ é o único subconjunto de $\emptyset$;

(ii) para $X := \{0,2\}$, $\wp(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}\}$, pois $\emptyset$ e X sempre são subconjuntos de X e, no caso, os demais subconjuntos possíveis são $\{0\}$ e $\{2\}$;

(iii) para $X := \mathbb{N}$, ocorre $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, bem como $\{n : n$ é par$\}$, $\{n : n$ é ímpar$\}$, $\{n : n$ é primo$\}, \ldots \in \wp(\mathbb{N})$, além dos típicos $\emptyset, \mathbb{N} \in \wp(\mathbb{N})$. TODO subconjunto de $\mathbb{N}$ é, por definição, membro de $\wp(\mathbb{N})$; oportunamente, veremos que se trata de um conjunto bem grande.

De qualquer forma, para X fixado, a relação de inclusão entre subconjuntos de X define, como a frase sugere, uma relação binária $\subseteq$ na *família*[11] $\wp(X)$ de todos os subconjuntos de X: explicitamente, $\subseteq := \{(A,B) : A \subseteq B \subseteq X\}$. ▲

Exemplo 0.1.14 (*Curvas* e gráficos)**.** Em posse de *estruturas algébricas*, é possível utilizar expressões algébricas a fim de *relacionar variáveis*. Por exemplo, a *expressão polinomial* $x^2 + y^2 = 1$ induz a relação binária $S := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Quando se representa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ graficamente como o plano cartesiano usual, o subconjunto S *passa a corresponder* aos pontos do plano que *distam* precisamente 1 da origem $(0,0)$.

Em particular, S *não* determina uma função da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pois para um mesmo $x \in \operatorname{dom}(S)$ existem $y, y' \in \operatorname{im}(S)$ distintos e relacionados a x: explicitamente, se $x^2 + y^2 = 1$, então $y^2 = x^2 - 1$ e, como veremos, em tal situação pode-se concluir apenas que $|y| = \sqrt{x^2 - 1}$, o que dá margem a $y = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y' = -\sqrt{x^2 - 1}$, ambos relacionados ao mesmo x. ▲

Definição 0.1.15. Dada uma relação binária R, a **relação inversa** de R, denotada por R^{-1}, é a relação $R^{-1} := \{(y,x) : x\,R\,y\}$. ¶

Exercício 0.17 ($\star\star$)**.** Para uma relação binária R, mostre que:

a) $x\,R\,y \Leftrightarrow y\,R^{-1}\,x$ para quaisquer x e y;

b) $\operatorname{dom}(R) = \operatorname{im}\left(R^{-1}\right)$;

c) $\operatorname{im}(R) = \operatorname{dom}\left(R^{-1}\right)$; e

d) $(R^{-1})^{-1} = R$. ■

Exercício 0.18 ($\star\star\star$)**.** Supondo que $X = Y$ e $R \subseteq X \times X$, interprete geometricamente a definição de R^{-1} como sendo a "rotação" de R em torno da "diagonal" Δ_X. ■

Esta discussão permite revisar a noção de função inversa. Como toda função é uma relação binária, vemos que toda função $f : X \to Y$ admite uma *relação inversa* f^{-1}. Assim, a Proposição 0.1.5 estabelece critérios para que tal relação inversa seja uma função (no sentido de Bourbaki).

Relações de equivalência, partições e cardinais

Definição 0.1.16. Uma relação binária $\sim$ num conjunto X é dita uma **relação de equivalência** se $\sim$ for

(i) **reflexiva**, i.e., se para todo $x \in X$ ocorrer $x \sim x$,

(ii) **simétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in X$, a ocorrência de $x \sim y$ acarretar $y \sim x$, e

(iii) **transitiva**, i.e., se para quaisquer $x, y, z \in X$, a ocorrência simultânea de $x \sim y$ e $y \sim z$ acarretar $x \sim z$.

Diremos também que x e y são **$\sim$-equivalentes** sempre que ocorrer $x \sim y$, com a omissão do sufixo "$\sim$" quando a relação estiver clara pelo contexto. ¶

[11] Não custa frisar: neste texto, "conjunto", "coleção" e "família" são tratados como sinônimos!

Uma relação de equivalência $\sim$ estabelece um critério por meio do qual objetos a princípio distintos podem ser vistos como iguais, ao mesmo tempo em que separa outros objetos distintos pelo mesmo critério. Dessa forma, não espanta que a *relação de igualdade* ($x \sim y$ se, e somente se, $x = y$) seja o exemplo óbvio de equivalência.

Exemplo 0.1.17 (Horóscopo)**.** Frequentemente, praticantes da (pseudociência chamada de) `Astrologia` fazem uso implícito das relações de equivalência. De fato, de um ponto de vista informal, signos determinam uma "relação de equivalência" no "conjunto" de todas as pessoas:

✓ toda pessoa tem o mesmo signo de si mesma;

✓ se P tem o mesmo signo de P', então P' tem o mesmo signo de P;

✓ se P tem o mesmo signo de P' e esta tem o mesmo signo de P'', então P e P'' têm o mesmo signo.

Se a coisa parasse por aí, a `Astrologia` seria inofensiva. No entanto, é comum encontrar asserções do tipo "o comportamento X é característico do signo Y", o que sugere duas alternativas: ou a afirmação é falsa, ou *toda pessoa* do signo Y apresenta o comportamento X. Esse tipo de máxima ajuda a entender um dos usos mais comuns das relações de equivalência: a simplificação. Com efeito, se tais afirmações *astrológicas* fossem verdadeiras, então para entender os padrões comportamentais de *toda a humanidade* bastaria estudar os comportamentos de doze *representantes*, um de cada signo, algo bem mais simples do que estimar o comportamento individual dos oito bilhões de habitantes do planeta. Por *sorte*, signos estimam tão somente as datas de nascimento de seus portadores. ▲

Exemplo 0.1.18 (Paridade)**.** Recordemo-nos de que os números naturais podem ser classificados como *pares* ou *ímpares*: **pares** são os múltiplos de dois, **ímpares** são os outros. Isso pode ser usado para determinar uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{N}$: $m, n \in \mathbb{N}$ serão ditos $\sim$-equivalentes se tiverem a mesma *paridade*. Assim, $0, 2, 4, 6, \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, $1, 3, 5, 7 \ldots$ são $\sim$-equivalentes entre si, enquanto 0 e 1 não são $\sim$-equivalentes, por exemplo. Note que há certos comportamentos *algébricos* que não dependem dos números escolhidos, e sim de suas paridades: a soma de *quaisquer* dois *ímpares* é *par*, o produto entre quaisquer *ímpares* é *ímpar*, etc. Isto sugere a possibilidade de realizar operações diretamente com as *classes* dos pares e dos ímpares em vez de lidar com seus *infinitos* representantes. ▲

Exemplo 0.1.19 (Restos da divisão por n)**.** Para generalizar o exemplo anterior, pode-se considerar a seguinte relação binária: para $n \in \mathbb{N}$ fixado e $x, y \in \mathbb{N}$, escreveremos $x \sim_n y$ a fim de indicar que x e y têm o mesmo *resto* na *divisão* por n. Verificar que tal relação $\sim_n$ é reflexiva, simétrica e transitiva é um bom exercício para quem se lembra de como fazer divisões. Ocorre que, como antes, certos comportamentos algébricos não dependem dos representantes escolhidos: por exemplo, a soma de quaisquer dois números com resto 2 na divisão por 3 terá resto 1, enquanto o produto de quaisquer dois números com resto 1 na divisão por 3 ainda terá resto 1. ▲

Um efeito colateral inevitável das relações de equivalência é a segregação dos elementos do conjunto em *classes de equivalência*. Mais precisamente:

Definição 0.1.20. Para uma relação de equivalência $\sim$ sobre um conjunto X, diremos que o conjunto $\{y : x \sim y\}$ é a **$\sim$-classe de equivalência de** x. A notação varia com o contexto: é comum escrever $[x]$, $[x]_\sim$, $\pi(x)$, $\overline{x}$, etc. Na dúvida, convêm explicitar a notação que será usada no começo das discussões. ¶

Com *relação* aos exemplos anteriores:

(i) a classe de equivalência de uma pessoa P com respeito aos signos astrológicos seria a coleção de todas as pessoas que têm o mesmo signo de P, consequentemente, existem apenas doze classes de equivalência (correspondentes aos signos possíveis);

(ii) a classe de equivalência de um número $n \in \mathbb{N}$ com respeito à paridade é a coleção dos naturais que têm a mesma paridade de n; logo, existem apenas duas classes, a dos pares e a dos ímpares;

(iii) a classe de equivalência de um número $p \in \mathbb{N}$ com respeito aos restos da divisão por n é a coleção dos números naturais que têm o mesmo resto na divisão, o que leva à conclusão de que existem precisamente n classes de equivalência (correspondentes aos restos possíveis na divisão por n).

Para facilitar a discussão de como uma relação de equivalência *particiona* o seu domínio, vamos introduzir brevemente a generalização do conceito de reunião.

Definição 0.1.21. Para um conjunto $\mathcal{S}$, define-se $\bigcup \mathcal{S} := \{x : \text{existe } S \in \mathcal{S} \text{ com } x \in S\}$, a **reunião da família** $\mathcal{S}$. Nas ocasiões em que $\mathcal{S} := \{S_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto $\mathcal{I}$ fixado, também é comum escrever $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} S_i$ ou $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} S_i$. ¶

O dispositivo acima apenas cria um modo bastante esperto de evitar abominações notacionais como "$S_0 \cup S_1 \cup \ldots$" quando se quer expressar uma reunião (possivelmente) *infinita* de conjuntos. Fora isso, ela não traz novidades: note, por exemplo, que para $\mathcal{S} := \{X, Y\}$, tem-se $\bigcup \mathcal{S} = X \cup Y$.

Exercício 0.19 ($\star$). Note mesmo, isto é: verifique! ■

Proposição 0.1.22. *Sejam X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Ao denotar por C_x a $\sim$-classe de equivalência de x para cada $x \in X$, valem as afirmações:*

(*i*) *para todo $y \in X$, existe $x \in X$ com $y \in C_x$ (i.e., $X = \bigcup_{x \in X} C_x$);*

(*ii*) *para quaisquer $x, y \in X$ ocorre $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$;*

(*iii*) *para quaisquer $x, y \in X$, $C_x = C_y$ se, e somente se, $x \sim y$.*

Demonstração. O primeiro item decorre da reflexividade de $\sim$: como $y \sim y$, tem-se $y \in C_y$. Os dois itens seguintes ficam a cargo do leitor (confira o exercício a seguir). □

Exercício 0.20 ($^{\star}_{\star\star}$). Sejam $\sim$ uma relação binária em X e $x, y \in X$ elementos quaisquer.

a) Mostre que se $\sim$ é transitiva, então "$x \sim y \Rightarrow C_y \subseteq C_x$".

b) Mostre que se $\sim$ é simétrica e transitiva, então "$x \sim y \Rightarrow C_x = C_y$".

c) Mostre que se $\sim$ é reflexiva, então "$C_x \subseteq C_y \Rightarrow x \sim y$".

d) Conclua que valem as condições (ii) e (iii) da proposição anterior. Dica: para (ii), o que ocorre com C_z se $z \in C_x \cap C_y$? ■

A última proposição mostra que $X/\!\sim\, := \{C_x : x \in X\}$, chamado de **quociente** de X por $\sim$, é uma família de subconjuntos de X que se enquadra como exemplo de *partição*.

Definição 0.1.23. Uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos não-vazios de X é uma **partição** de X se valerem as seguintes condições:

(i) para todo $x \in X$ existe $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$ (i.e., $X = \bigcup \mathcal{P}$); e

(ii) [12] se $P, Q \in \mathcal{P}$ e $P \neq Q$, então $P \cap Q = \emptyset$. ¶

Exercício 0.21 ($^{\star}_{\star}$). Mostre que se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X, então $X/\!\sim$ é uma partição de X. ■

Como o nome sugere, uma partição de X *particiona* o conjunto X em *partes* ou blocos *dois a dois disjuntos*, de modo que cada elemento de X está precisamente em apenas um membro de $\mathcal{P}$. Assim, faz sentido dizer que dois elementos de X são $\mathcal{P}$*-equivalentes* se pertencerem ao mesmo membro de $\mathcal{P}$. Como o leitor atento certamente suspeita, isto define uma relação de equivalência legítima.

Proposição 0.1.24. *Se $\mathcal{P}$ for uma partição de X, então a relação $\sim_{\mathcal{P}}$ definida por*

$$u \sim_{\mathcal{P}} v \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } \{u, v\} \subseteq P$$

é uma relação de equivalência em X. Além disso, $\mathcal{P} = X/\!\sim_{\mathcal{P}}$.

Demonstração. A relação $\sim_{\mathcal{P}}$ é

✓ reflexiva, pois dado $x \in X$ existe $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$, e daí $\{x\} = \{x, x\} \subseteq P$,

✓ simétrica, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, então $\{x, y\} = \{y, x\} \subseteq P \in \mathcal{P}$, e

[12] Costuma-se expressar a condição (ii) como "os membros de $\mathcal{P}$ são dois a dois disjuntos".

✓ transitiva, pois se $\{x, y\} \subseteq P \in \mathcal{P}$ e $\{y, z\} \subseteq P' \in \mathcal{P}$, então $P \cap P' \neq \emptyset$, acarretando $P = P'$ e, por conseguinte, $\{x, z\} \subseteq \{x, y\} \cup \{y, z\} \subseteq P \in \mathcal{P}$.

A igualdade $\mathcal{P} = X/{\sim_{\mathcal{P}}}$ segue pois $P = [x]_{\sim_{\mathcal{P}}}$ para quaisquer x e P com $x \in P \in \mathcal{P}$. □

Exemplo 0.1.25. Para a relação $\sim_n$ do Exemplo 0.1.19, as classes de equivalência correspondem precisamente a todos os possíveis restos pela divisão por n. Assim, chamando por R_i a coleção dos naturais que têm resto i na divisão por n, segue que $\mathbb{N}/{\sim_n} = \{R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}\}$. Dito isso, observe que ao chamar por $\bar{i}$ a *classe* de equivalência de i, verifica-se $\bar{i} = R_i$. Desse modo, seria lícito escrever, por exemplo, $\mathbb{N}/{\sim_2} = \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}$, ou ainda $\mathbb{N}/{\sim_2} = \left\{\overline{12}, \overline{13}\right\}$, já que $\overline{0} = \overline{12}$ na relação $\sim_2$ (0 e 12 são divisíveis por 2) e $\overline{1} = \overline{13}$ (1 e 13 têm resto 1 na divisão por 2). Como você já deve ter imaginado, trata-se de um fenômeno mais geral. ▲

Definição 0.1.26. Um subconjunto $R \subseteq X$ é uma **classe de representantes** de uma

(*i*) relação de equivalência $\sim$ se para todo $x \in X$ existe um único $r \in R$ tal que $x \sim r$,

(*ii*) partição $\mathcal{P}$ de X se R for classe de representantes da relação $\sim_{\mathcal{P}}$, i.e., se para cada $P \in \mathcal{P}$ existe um único $r \in R$ tal que $r \in P$. ¶

Exercício 0.22 ($\star$)**.** Nas condições anteriores, mostre que $X/{\sim} = \{C_r : r \in R\}$, onde R é uma classe de representantes de $\sim$ e C_r indica a $\sim$-classe de equivalência de $r \in R$. ■

Agora parece um bom momento para uma pergunta ardilosa: quais partições (ou relações de equivalência) sobre *um conjunto* não-vazio admitem classes de representantes? Certamente, se X é tal conjunto e $\mathcal{P}$ é uma de suas partições, então cada $P \in \mathcal{P}$ é um subconjunto não-vazio de X, o que permite *escolher* um desses elementos $x_P \in P$ para então considerar o conjunto $\{x_P : P \in \mathcal{P}\}$. Dado que para $P, P' \in \mathcal{P}$ distintos ocorre $P \cap P' = \emptyset$, deve-se ter $x_P \neq x_{P'}$ sempre que $P \neq P'$. Em outras palavras, $\mathcal{R} := \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$ é uma classe de representantes para $\mathcal{P}$. Se tal argumentação for honesta, significa que provamos o

Teorema 0.1.27 (©)**.** *Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto, então existe uma classe de representantes para $\sim$.*

Exercício 0.23 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** A argumentação acima foi *honesta*? Se esta for a primeira vez que você se deparou com tal pergunta, pense nela pelo resto do seu dia. ■

As considerações acima ajudam a elucidar o que se *quis dizer* na discussão que sucedeu a Proposição 0.1.8. Para fixar notações:

Definição 0.1.28 (†)**.** Vamos denotar por $\mathbb{V}$ o *conjunto de todos os conjuntos*[13], (provisoriamente) chamado de **conjunto universo**. ¶

Com a terminologia acima, a Proposição 0.1.8 *demonstra* que ao escrever "$A \approx B$" para indicar que existe bijeção da forma $A \to B$, obtém-se uma relação de equivalência em $\mathbb{V}$.

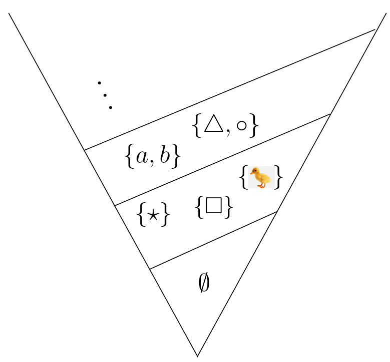


Figura 0.2: Cada $\approx$-classe de equivalência corresponde a uma noção de cardinalidade.

[13] Poderíamos defini-lo como $\mathbb{V} := \{x : x = x\}$, já que *todas as coisas são iguais a si mesmas*. Sim, isto é problemático de um ponto de vista formal, mas vamos ignorar essa treta por enquanto.

Portanto, na prática, uma das noções mais corriqueiras da matemática cotidiana é, na verdade, um dispositivo muito sofisticado: números são representantes de classes de equivalência! Ao dizer que $A := \{x, y\}$ e $B := \{a, b\}$ têm 2 elementos, por exemplo, o símbolo "2" codifica a classe de *todas as coisas com a mesma quantidade de elementos de* A (ou de B, ou de qualquer coisa que tenha... *dois elementos*). Nesse sentido, o que faremos nas próximas seções é encontrar um conjunto "canônico" para representar as cardinalidades dos conjuntos finitos: estes serão os *números naturais*.

0.2 Ordens, boas ordens e indução

0.2.0 Essencial

Ordens

O aparato das relações binárias apresentado na subseção anterior permite abstrair o nosso entendimento de *ordenação*, que será usado posteriormente tanto na descrição da reta real quanto no tratamento das *nets*. Intuitivamente, os pontos da reta são *ordenados*, no sentido de que há uma *noção* de *antes* e *depois*, como em 3 que antecede 7 e 7 que antecede 9 (note que de nossa experiência diária, 3 também antecede 9). Mais do que isso, a *reta* está ordenada em forma de linha, no sentido de que dados dois pontos nela, algum deles deve anteceder o outro. Tais ideias se formalizam na próxima

Definição 0.2.0. Uma relação binária R num conjunto $\mathbb{X}$ é dita uma **relação de ordem** (**parcial**) se R for reflexiva, transitiva e, além disso, **antissimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência simultânea de $x \; R \; y$ e $y \; R \; x$ acarretar $x = y$, e Escreve-se $(\mathbb{X}, R)$ quando se busca enfatizar que o conjunto $\mathbb{X}$ é considerado com a ordem R, caso em que $\mathbb{X}$ é dito ser (**parcialmente**) **ordenado** pela ordem (parcial) R. ¶

Dada a óbvia inspiração nas ordenações usuais entre números, costuma-se utilizar símbolos como "$\preceq$", "$\sqsubseteq$" ou mesmo "$\leq$" para denotar ordens parciais – o que sugere uma generalização alternativa, desta vez com base em "$<$".

Definição 0.2.1. Diz-se que $\prec$ é uma **relação de ordem estrita** em $\mathbb{X}$ se $\prec$ for transitiva mas, em vez de reflexiva e antissimétrica, for

(i) **irreflexiva**, i.e., se para todo $x \in \mathbb{X}$ ocorrer $x \not\prec x$, e

(ii) **assimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$, a ocorrência de $x \prec y$ acarretar $y \not\prec x$.

Como no caso parcial, escreve-se $(\mathbb{X}, \prec)$ para indicar que $\mathbb{X}$ *está* (**estritamente**) **ordenado** pela ordem (estrita) $\prec$. ¶

Observação 0.2.2. Na prática, podemos chamar ordens parciais e ordens estritas simplesmente de *ordens*. De fato:

✓ se $(\mathbb{S}, \prec)$ é uma ordem estrita, então a relação $\preceq$ definida por

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \neq y \text{ e } x \prec y) \text{ ou } x = y$$

é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{S}$;

✓ se $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ é uma ordem parcial, então a relação $\sqsubset$ definida por

$$x \sqsubset y \Leftrightarrow x \neq y \text{ e } x \sqsubseteq y$$

é uma relação de ordem estrita em $\mathbb{P}$.

Exercício 0.24 ($\star$)**.** Verifique as afirmações anteriores. ■

É claro que ao aplicar o primeiro procedimento à ordem estrita $\sqsubset$, retorna-se à ordem parcial original $\sqsubseteq$, enquanto o segundo procedimento aplicado à ordem parcial $\preceq$ resulta na ordem estrita original $\prec$. Assim, tem-se o direito de chamar tanto $(\mathbb{S}, \prec)$ quanto $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ de **ordens**. Em tais situações, ficam implicitamente definidas a ordem parcial $\preceq$ e a ordem estrita $\sqsubset$ induzidas por $\prec$ e $\sqsubseteq$, respectivamente[14]. △

Exemplo 0.2.3. Quem já tem familiaridade com conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc.) deve ter em mente as formas usuais de ordenação em tais cenários como exemplos de ordens. Apesar disso, é importante saber que mesmo conjuntos *ordinários* admitem ordenações incomuns.

Por exemplo, em $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (que será discutido na próxima seção), pode-se declarar $m \preceq n$ sempre que m for um divisor de n. Embora tal relação defina uma ordem parcial sobre $\mathbb{N}^*$ (verifique?)*, ela é bastante diferente de sua ordenação usual: note que $2 \npreceq 3$ e $3 \npreceq 2$, já que ambos são primos. Portanto, $(\mathbb{N}^*, \preceq)$ é uma ordem em que podem haver elementos *não-comparáveis* entre si, comportamento bem mais comum do que parece. ▲

Exemplo 0.2.4 (Confira o Exemplo 0.1.13)**.** A relação de inclusão $\subseteq$ sobre os membros de $\wp(X)$, para algum conjunto X fixado, faz de $(\wp(X), \subseteq)$ uma ordem, já que: $A \subseteq A$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implicam $A = B$ e $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implicam $A \subseteq C$, para quaisquer $A, B, C \in \wp(X)$. Como no caso anterior, podem existir $A, B \in \wp(X)$ não-comparáveis: para $X := \mathbb{N}$ por exemplo, $A := \{0, 1, 2\}$ e $B := \{0, 1, 3\}$ não são comparáveis, já que $A \nsubseteq B$ (pois $2 \in A \setminus B$) e $B \nsubseteq A$ (pois $3 \in B \setminus A$). ▲

Observação 0.2.5 (Diagramas de Hasse)**.** Um modo bastante prático de *entender* certas ordens (ou *partes* delas) consiste em considerar seus *diagramas de Hasse*. A ideia é muito simples: a ocorrência de $x < y$ em $\mathbb{P}$ é representada por uma seta $(x \to y)$ que liga o vértice anterior (*menor*) x ao posterior (*maior*) y; quando $y < z$ e, por conseguinte, $x < z$, não se grafa uma seta entre ambos, pois subentende-se que as duas setas (entre x e y e entre y e z) compõem a seta entre x e z.

Assim, por exemplo, o diagrama de Hasse de $(\mathbb{N}^*, \preceq)$ com a ordem do Exemplo 0.2.3 poderia *começar* com

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
8 \arrow[u] & 36 \arrow[u] & 81 \arrow[u] & 225 \arrow[u] & 625 \arrow[u] & 1225 \arrow[u] & 2401 \arrow[u] \\
4 \arrow[u] \arrow[ur] & 6 \arrow[u] & 9 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & 15 \arrow[u] & 25 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & 35 \arrow[u] & 49 \arrow[ul] \arrow[u] \\
2 \arrow[u] \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & 5 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & 7 \arrow[ul] \arrow[u] \\
& & & 1 \arrow[ulll] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

[14] Há uma exceção que será adotada neste texto: a inclusão estrita ainda será denotada por "$\subsetneq$" e não por "$\subset$". O motivo é muito simples: o uso do símbolo "$\subset$" para indicar a inclusão parcial está demasiado difundido, o que poderia causar confusão.

Evidentemente, *diversos* (*infinitos*!) números foram omitidos, como 12 (que deveria estar acima de 4 e 3), 10 (que deveria estar acima de 5 e 2), 11 (que deveria estar acima de 1 apenas), 13... Já para o caso de $X := \{a, b, c\}$ e $(\wp(X), \subseteq)$, o diagrama é mais simples, embora ainda intrincado.

$$\begin{tikzcd}
 & \{a,b,c\} & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagramas desse tipo ajudam a perceber que a ocorrência de elementos não-comparáveis se traduz em bifurcações. Uma vez que pretendemos usar ordens para capturar o comportamento das retas, é razoável considerar aquelas em que quaisquer dois elementos sejam comparáveis, condição usualmente chamada de *tricotomia*.

Definição 0.2.6. Uma ordem $(\mathbb{X}, <)$ é **total** se para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorrer somente um dos três casos a seguir: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$. Se a ordem de $\mathbb{X}$ for parcial, basta dizer que para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ ocorre $x \leq y$ ou $y \leq x$. ¶

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

Como o diagrama acima sugere, ordens totais[15] se comportam como linhas precisamente por não terem elementos incomparáveis (bifurcações). Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ com suas ordenações usuais são exemplos típicos de ordens totais. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ também, mas seus diagramas são mais desonestos em virtude da *densidade* de suas ordens: dado que entre quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ com $x < y$ existe $z \in \mathbb{Q}$ com $x < z < y$, torna-se *impossível* representar *fielmente*, por meio de um diagrama de Hasse, o comportamento linear de tais ordens. Na prática, a alternativa honesta de representação gráfica nesses casos é, justamente... uma linha reta. △

Em geral, costuma-se ler uma expressão do tipo "$x \preceq y$" como "x é **menor do que ou igual** a y", enquanto "$x \prec y$" é lida como "x é (**estritamente**) **menor** do que y" – a menos que o contexto sugira uma terminologia própria para os símbolos. *Alternativamente*, lê-se "$x \preceq y$" como "y é **maior do que ou igual** a x", o que esconde um fato que será importante: escrevendo "$a \succeq b$" para indicar que $b \preceq a$, segue que $\succeq$ também é uma relação de ordem sobre o conjunto em questão: explicitamente, $\succeq$ é apenas a *relação inversa* de $\preceq$ (Definição 0.1.15). Embora pareça banal, tal observação pode ser útil para quem se aventurar na exploração dos princípios de dualidade (Subseção 0.2.1).

Exercício 0.25 $(\star)$**.** Mostre que $(\mathbb{P}, \succeq)$ é ordem parcial sempre que $(\mathbb{P}, \preceq)$ é ordem parcial. ■

[15]Que com muita razão também são chamadas de ordens *lineares*.

Boas ordens e indução

Definição 0.2.7. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $a \in A$, diremos que a é *um* **menor elemento** (ou **mínimo**) de A se $a \leq x$ ocorrer para todo $x \in A$. No caso de uma ordem estrita $<$, pede-se $a < x$ para todo $x \in A$ tal que $x \neq a$. ¶

Acima, o uso do artigo indefinido "um" foi puro preciosismo, já que um mínimo, quando existe, é único: se $a, a' \in A$ são mínimos de A, então ocorre $a \leq a'$ e $a' \leq a$, donde a antissimetria de $\leq$ acarreta $a = a'$. Isto justifica introduzir uma notação para indicar os mínimos: caso exista, o menor elemento de A será denotado $\min\limits_{a \in A} a$, $\min_{\leq} A$ ou apenas $\min A$.

Definição 0.2.8. Uma ordem $\leq$ (ou $<$) sobre um conjunto $\mathbb{B}$ é chamada de **boa ordem** se todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$ admite menor elemento. Diz-se também que $\mathbb{B}$ está **bem ordenado** pela (boa) ordem $\leq$. ¶

Exemplo 0.2.9. Alguns conjuntos numéricos clássicos que você já viu na escola (ou em Cálculo I) não são bem ordenados: é o caso de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (por quê?)*. A situação de $\mathbb{C}$ é um pouco pior, mas ainda é cedo para discutir isso. Por outro lado, $\mathbb{N}$ é o exemplo típico de boa ordem, o que não é mero acidente, como veremos em breve. ▲

Moralmente, um conjunto está bem ordenado quando seus elementos podem ser *enfileirados* por meio da ordem $\leq$: há o *primeiro* elemento, digamos $b_0 := \min \mathbb{B}$, em seguida o seu *sucessor*, digamos $b_1 := \min(\mathbb{B} \setminus \{b_0\})$, em seguida... Como os índices "0" e "1" sugerem, parece haver alguma ligação com os *números naturais* que já conhecemos de longa data, o que suscita uma pergunta deliberadamente evitada até agora (pelo menos para quem pulou a Subseção 0.1.1: *o que são números* (*e o que poderiam ser*)*?*[16]

$$b_0 \longrightarrow b_1 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow b_4 \longrightarrow \cdots$$

Evidentemente, esse tipo de pergunta não se refere ao símbolo utilizado para *denotar* um número, mas sim ao próprio número: por exemplo, qual o significado de "três" nas sentenças "A Argentina venceu três Copas do Mundo" e "Neymar rolou por três metros ao simular uma falta"? Quais as diferenças de significado, e quais as semelhanças?

Exercício 0.26 ($\star$)**.** Reflita (por pelo menos *três* minutos) sobre as questões acima. ■

Apesar da sugestão numérica anterior, é possível evitar o emprego explícito de números no entendimento das boas ordens – o que inclusive será útil quando voltarmos a discutir a *natureza* dos números. A grande sacada para fazer isso está escondida na seguinte

Proposição 0.2.10. *Sejam* $(\mathbb{B}, \leq)$ *uma boa ordem e* $b \in \mathbb{B}$*. Se existir* $c \in \mathbb{B}$ *com* $c > b$*, então existe* $b' \in \mathbb{B}$ *com as seguintes propriedades:*

(*i*) $b < b'$;

(*ii*) *se* $d \in \mathbb{B}$ *e* $d > b$*, então* $b' \leq d$.

[16] Referência ao clássico "*Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*", de Richard Dedekind, em que *Ele* apresenta Sua construção para (o que hoje chamamos de) um corpo ordenado completo [2].

Demonstração. É mais simples do que parece: a existência de c com $c > b$ garante que $\mathbb{B}_{>b} := \{d \in \mathbb{B} : d > b\}$ é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{B}$, justamente por ter c como elemento. Logo, a boa ordenação garante a existência de $\min \mathbb{B}_{>b}$, de modo que basta tomar $b' := \min \mathbb{B}_{>b}$. □

Definição 0.2.11. Nas condições da proposição anterior, vamos denotar b' por $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, o **sucessor** de b na boa ordem $\mathbb{B}$. ¶

Assim como ocorre com sucessores nos diversos campos da vida real, o sucessor de b numa boa ordem $\mathbb{B}$, caso exista, é o primeiro elemento da ordem a ser maior do que b, o que em particular impede a existência de elementos *intermediários*. O próximo exercício deve esclarecer a ideia.

Exercício 0.27 ($\star$)**.** Seja $(\mathbb{B}, \leq)$ uma boa ordem. Mostre que se $b \in \mathbb{B}$ e existe $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$, então não existe $c \in \mathbb{B}$ tal que $b < c < \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. Dica: releia a definição de $\mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(b)$. ■

Observação 0.2.12. É importante destacar que a noção de sucessor só faz sentido em boas ordens. Para quem tem familiaridade com os números racionais, por exemplo, note que não faz sentido perguntar qual o sucessor de 0 em $\mathbb{Q}$, já que não existe o *primeiro racional* maior do que 0: sempre que $q > 0$, existe outro q' com $0 < q' < q$. Em particular, a relação de ordem usual sobre $\mathbb{Q}$ não é uma boa ordem. △

Exemplo 0.2.13. Por mais sem graça que pareça, $\mathbb{B} := \emptyset$ pode ser considerado como um conjunto bem ordenado: no caso, sua boa ordem $\leq$ é o único subconjunto de $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$, a saber, $\emptyset$! Apesar de sua simplicidade, $\emptyset$ é o gatilho de uma importante reação em cadeia, como veremos adiante. ▲

Definição 0.2.14. Fixada uma boa ordem $(\mathbb{B}, \leq)$, diremos que $u \in \mathbb{B}$ é o **último elemento** de $\mathbb{B}$ se $u = \max \mathbb{B}$. ¶

Proposição 0.2.15. *Se* $(\mathbb{B}, \leq)$ *é uma boa ordem e* $u' \notin \mathbb{B}$*, então existe uma boa ordem* $(\mathbb{B}', \leq')$ *tal que*

(*i*) $\mathbb{B} \subsetneq \mathbb{B}'$,

(*ii*) $x \leq y \Leftrightarrow x \leq' y$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{B}$*, e*

(*iii*) u' *é o último elemento de* $\mathbb{B}'$*.*

Demonstração. Basta definir $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\}$ e, para quaisquer $x, y \in \mathbb{B}'$, escrever $x \leq' y$ para indicar a ocorrência de "$x, y \in \mathbb{B}$ e $x \leq y$" ou "$y = u'$". Na prática, $\leq'$ apenas *estende* a definição de $\leq$ sobre $\mathbb{B}' \times \mathbb{B}'$ ao declarar $x \leq' u'$ para todo $x \in \mathbb{B}'$, o que torna quase imediata a verificação das propriedades desejadas. □

Exercício 0.28 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Complete a demonstração. ■

Exemplo 0.2.16. Fixado qualquer objeto u', tem-se por definição que $u' \notin \emptyset$, o que permite empregar a última proposição a fim de estender a boa ordem $\mathbb{B}$ do Exemplo 0.2.13: faz-se $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\} = \{u'\}$, que tem u' como seu último (e único!) elemento. Ora, por que parar? Certamente existe $u'' \neq u'$, donde a proposição anterior garante a boa ordem $\mathbb{B}'' := \mathbb{B}' \cup \{u''\}$, com $u' < u''$ e u'' como último elemento. Em particular, u'' é sucessor de u', mas u'' não tem sucessores em $\mathbb{B}''$. Ora, por que parar? Certamente existe $u''' \notin \{u', u''\}$, donde a proposição anterior garante... ▲

Como os exemplos acima sugerem, a noção de sucessor numa boa ordem torna supérfluo o uso explícito de números *alienígenas* para descrever o seu enfileiramento. Na verdade, mais do que isso, o comportamento dos sucessores é tão parecido com o da *progressão* esperada dos números naturais que chega a ser tentador utilizar a noção de boa ordenação para *descrever* o que os números *poderiam ser*. Para agravar ainda mais o sentimento:

Teorema 0.2.17 (Indução numa boa ordem)**.** *Seja* $(\mathbb{B}, \leq)$ *uma boa ordem. Suponha que* X *seja um subconjunto de* $\mathbb{B}$ *com a seguinte propriedade:*

sempre que ocorre $b \in X$ *para todo* $b < c$*, também ocorre* $c \in X$*.*

Em tais condições, $\mathbb{B} = X$*.*

Demonstração. Nada precisa ser feito se ocorrer $\mathbb{B} = \emptyset$. Agora, se $\mathbb{B} \neq \emptyset$ e existir $b \in \mathbb{B}$ com $b \notin X$, então o conjunto $T \coloneqq \{b \in \mathbb{B} : b \notin X\}$ é não-vazio e, pela boa ordenação, deve existir $t \coloneqq \min T$; em particular, $t \in T$. Ora, isto impede que X tenha a propriedade do enunciado: com efeito, por t ser o menor elemento em T, todo $b < t$ deve ser membro de X, de modo que se X tivesse a propriedade, concluiríamos que $t \in X$, mas $t \in T \coloneqq \mathbb{B} \setminus X$. □

Na prática, o subconjunto X costuma ser formado pelos elementos de $\mathbb{B}$ que têm alguma propriedade $\mathcal{P}$ fixada, de modo que a exigência feita sobre X se traduz na seguinte condição: *sempre que vale* $\mathcal{P}(b)$ *para todo* $b < c$*, também vale* $\mathcal{P}(c)$. Note que em tal situação, o conjunto $X \coloneqq \{x : x \in \mathbb{B} \text{ e vale } \mathcal{P}(x)\}$ satisfaz a condição imposta pelo teorema anterior, de modo que deve-se ter $X = \mathbb{B}$, i.e., $\mathcal{P}(b)$ vale para todo $b \in \mathbb{B}$.

Em todo caso, o cerne do argumento indutivo consiste em usar a *boa estruturação* de um conjunto bem ordenado para, em vez de verificar *individualmente* se "$b \in X$" para cada $b \in \mathbb{B}$, fazer a verificação de uma <u>única</u> afirmação condicional do tipo

"para todo c, $\mathcal{H}(c) \Rightarrow \mathcal{T}(c)$",

onde a $\mathcal{H}$**ipótese indutiva**, $\mathcal{H}(c)$, é "$b \in X$ para todo $b < c$", e a $\mathcal{T}$**ese**, $\mathcal{T}(c)$, é "$c \in X$". Em certo sentido, assegurar esta simples condicional dispara um efeito dominó:

✓ se $\mathbb{B} \neq \emptyset$, então existe $w \coloneqq \min \mathbb{B}$ e, por não existirem elementos menores do que w, a hipótese indutiva $\mathcal{H}(w)$ *se revela* verdadeira por vacuidade (para que fosse falsa, deveria existir $b < w$ com $b \notin X$, mas não há $b < w$), donde se conclui que vale a tese, i.e., $w \in X$;

✓ se existir $w' \coloneqq \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(w)$, então w é o único elemento de $\mathbb{B}$ estritamente menor do que w', e já sabemos que vale $w \in X$, o que garante a hipótese indutiva $\mathcal{H}(w')$ e, portanto, deve-se ter $w' \in X$;

✓ se existir $w'' \coloneqq \mathrm{suc}_{\mathbb{B}}(w')$, então...

Esse arquétipo de efeito dominó é equivalente ao que foi apresentado no teorema anterior, mas somente nas boas ordens em que todos os elementos, exceto o menor, são sucessores de *alguém*[17]. *Naturalmente*, isto será discutido depois.

[17] Cuidado: ter sucessor $\neq$ ser sucessor. O exemplo óbvio é o menor elemento de uma boa ordem com pelo menos *dois* elementos.

0.2.1 Extras

Elementos minimais e maximais

Definição 0.2.18. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $a \in A$, diremos que $a \in A$ é **elemento minimal de** A se não existe $x \in A$ com $x < a$. De modo *dual*, diremos que $a \in A$ é **elemento maximal** de A se não existe $x \in A$ com $a < x$. ¶

Elementos minimais e maximais não costumam ser explorados em contextos introdutórios de Análise pois as ordens consideradas *geralmente* são totais – e, em tais casos, as definições coincidem com as noções de mínimos e *máximos*.

Proposição 0.2.19. *Sejam* $(\mathbb{T}, \leq)$ *uma ordem,* $A \subseteq \mathbb{T}$ *um subconjunto e* $a \in A$ *um elemento qualquer.*

(i) *Se* $a = \min A$*, então* a *é minimal.*

(ii) *Se* $(\mathbb{T}, \leq)$ *é uma ordem total, então vale a recíproca do item anterior.*

Demonstração. Para a primeira parte, não pode existir $x \neq a$ com $x < a$ e $x \in A$, pois por a ser mínimo deve-se ter $a \leq x$ (lembre-se: ordens estritas são assimétricas!). Para a segunda parte: a princípio, por a ser minimal, para nenhum $x \in A$ *ocorre* $x < a$ e, como x e a são comparáveis pela hipótese de tricotomia, *resta* apenas $a \leq x$. Logo, $a = \min A$. □

Exercício 0.29 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Enuncie e demonstre a versão da proposição anterior para elementos maximais. **Observação:** neste caso, você também precisará da definição de *maior elemento* (ou *máximo*)[18]. ■

Com isso dito, o leitor curioso pode retornar para as ordens não-totais da Observação 0.2.5: no caso de $\wp(X)$, por exemplo, $A := \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ é tal que todos os seus elementos são minimais em $\wp(X)$ (e nenhum deles é mínimo!), comportamento similar ao dos números primos em $(\mathbb{N}^*, \preceq)$. Alguma delas apresenta subconjuntos com elementos maximais que não são máximos?

Dualidade

Considere $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem (parcial). O fato de $(\mathbb{P}, \geq)$ ainda ser uma ordem parcial traz uma consequência curiosa: sempre que você tiver um resultado acerca de um conceito definível em ordens parciais $(\leq)$, você ganha automaticamente outro resultado acerca da versão *dual* do conceito, isto é, onde o conceito é reescrito com a ordem inversa $(\geq)$.

Por exemplo: caso não tenha *adivinhado* a definição de máximo, ela se faz assim.

Definição 0.2.20. Fixada uma *ordem* $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e um elemento $a \in A$, diremos que a é *um* **maior elemento** (ou **máximo**) de A se $x \leq a$ ocorrer para todo $x \in A$. No caso de uma ordem estrita $<$, pede-se $x < a$ para todo $x \in A$ tal que $x \neq a$. ¶

Agora, esqueça a definição acima e considere $(\mathbb{P}, \geq)$, onde $\geq$ é a inversa de $\leq$. O que significa dizer que $a \in A$ é menor elemento de A com respeito à ordem $\geq$? Checando a Definição 0.2.20, deve-se ter o seguinte: $a \geq x$ ocorre para todo $x \in A$. Como "$a \geq x$" significa "$x \leq a$", resulta que a é máximo de A com respeito à ordem $\leq$. Neste caso, as definições de máximo e mínimo são ditas duais.

Exercício 0.30 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que as definições de elementos minimais e maximais são duais. ■

Uma das vantagens desse tipo de abordagem é reciclar demonstrações. Por exemplo: como já sabemos que mínimos em ordens parciais são únicos quando existem, resulta que máximos em ordens parciais também são únicos quando existem, simplesmente por eles podem ser expressos como mínimos nas ordens inversas. Se você duvida, faça o próximo exercício, e perceba que, na prática, você precisa apenas trocar todas as ocorrências de "$<$" e "$\leq$" na demonstração da Proposição 0.2.19 por "$>$" e "$\geq$", respectivamente. Abaixo, $\max A$ indica o máximo de A, caso exista.

Exercício 0.31 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $(\mathbb{T}, \leq)$ uma ordem, $A \subseteq \mathbb{T}$ um subconjunto e $a \in A$ um elemento qualquer.

(i) Mostre que se $a = \max A$, então a é maximal.

(ii) Mostre que se $(\mathbb{T}, \leq)$ é uma ordem total, então vale a recíproca do item anterior. ■

[18] Note que máximos, assim como mínimos, quando existem, são únicos $(\star)$.

0.3 Os axiomas de Dedekind-Peano

0.3.0 Essencial

Boas ordens naturais

Breves noções de aritmética

0.3.1 Extras

Recursão

Recursão mais uma vez

0.4 As diferentes noções de (in)finitude

0.4.0 Essencial

Conjuntos finitos

Conjuntos infinitos enumeráveis e não-enumeráveis

0.4.1 Extras

Como representar os infinitos?

O Problema da Escolha

0.5 Exercícios adicionais

0.6 Linguagem algébrica: anéis e corpos

0.7 Corpos ordenados

0.8 Supremos e ínfimos

0.9 Completude (no sentido de Dedekind)

0.10 Isomorfismos e a unicidade da reta real

0.11 Exercícios adicionais

Capítulo 1

Limites e continuidade

Capítulo 2

Os teoremas fundamentais da Análise

Lista de símbolos e siglas

$\in$	símbolo de pertinência, 8
$A \subseteq B$	A está contido em/é subconjunto de B, 9
$A \nsubseteq B$	A não é subconjunto de B, 9
$A \subsetneq B$	A é subconjunto próprio de B, 9
$A = B$	igualdade entre os conjuntos A e B, 9
$\{x : \mathcal{P}(x)\}$	conjunto dos x's com a propriedade $\mathcal{P}$, 9
$\{a, b\}$	par não-ordenado, 10
$\emptyset$	conjunto vazio, 10
$X \setminus Y$	complementar de Y em X, 10
$A \cap B$	interseção entre A e B, 10
$A \cup B$	(re)união dos conjuntos A e B, 10
(x, y)	par ordenado, 11
$X \times Y$	produto cartesiano, 11
$f\colon X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$	função f de X em Y, 12
$f(x)$	valor de f em x, 12
$x \overset{f}{\mapsto} y$	$f(x) = y$, 12
$g \circ f$	composição das funções g e f, 13
Id_X	função identidade de X, 13
f^{-1}	inversa de f, 16
$X \precsim Y$	cardinalidade de X menor do que a cardinalidade de Y, 18
$X \prec Y$	cardinalidade de X estrit. menor do que a cardinalidade de Y, 18
$Y \succsim X$	cardinalidade de Y maior do que a cardinalidade de X, 18
$Y \succ X$	cardinalidade de Y estrit. maior do que a cardinalidade de X, 18
$x \mathrel{R} y$	R-relação; x e y estão R-relacionados, 18
$x \not\mathrel{R} y$	negação de $x \mathrel{R} y$, 18
$\wp(X)$	conjunto das partes de X, 19
R^{-1}	relação inversa de R, 19
$\bigcup \mathcal{S}$ ou $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$	reunião da família $\mathcal{S}$, 21

$A \approx B$	A e B têm a mesma cardinalidade, 22
$(\mathbb{X}, \preceq)$	ordem parcial, 23
$\min A$, $\min\limits_{a \in A} a$ ou $\min_{\leq} A$	o menor elemento de A com respeito à ordem $\leq$, 26
$\operatorname{suc}_{\mathbb{B}}(b)$	sucessor de b em $\mathbb{B}$, 27
$\max A$, $\max\limits_{a \in A} a$ ou $\max_{\leq} A$	o maior elemento de A com respeito à ordem $\leq$, 29

Referências Bibliográficas

[0] A. F. Beardon. *Limits: a new approach to real analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[1] L. Bukovský. *The structure of the real line.* Monografie Matematyczne 71. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2011.

[2] J. Ferreirós. *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics.* Birkhäuser Basel, 2ª edition, 2007.

[3] R. M. Mezabarba. Teoria maliciosa dos conjuntos, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/MaliciousSetTheory.

[4] R. M. Mezabarba. Um curso fechado e limitado de análise real, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/AnalysisZero.

[5] T. Roque. *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas.* Zahar, 2012.

[6] E. Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations.* Academic Press, 1996.

[7] T. Tao. *Analysis I.* Texts and Readings in Mathematics. Springer, 3 edition, 2016.

Índice Remissivo

aplicação
  veja função, 12
Axioma (de ZFC)
  da Extensão, 9

boa ordem, 26
  indução numa, 28

cardinalidade
  mesma, 17
classe
  de equivalência, 20
  de representantes, 22
complemento, 10
composição
  de funções, 13
conjunto
  bem ordenado, 26
  das partes, 19
  elemento de um, 8
  parcialmente ordenado, 23
  quociente, 21
  universo, 22
  vazio, 10
conjuntos disjuntos, 10

elemento
  (elementos) equivalentes, 19
  último, 27
  de um conjunto, 8

função
  bijetora, 15
  codomínio, 12
  composição de, 13
  composta, 13
  conceito de, 11
  de X em Y, 12
  identidade, 13
  imagem de um elemento, 12
  injetora, 15
  invertível, 16
  polinomial, 12
  sobrejetora, 15

hipótese indutiva, 28

indução
  numa boa ordem, 28
interseção, 10

máximo, 29
mínimo, 26
mapa
  veja função, 12

número
  ímpar, 20
  par, 20

ordem, 24
  boa ordem, 26
  elemento máximo, 29
  elemento mínimo, 26
  elemento maximal, 29
  elemento minimal, 29
  estrita, 23
  maior elemento, 29
  menor elemento, 26
  parcial, 23
  total, 25

par
  não-ordenado, 10
  ordenado, 11
partição
  de um conjunto, 21
polinômio, 12
produto
  cartesiano, 11

relação
  antissimétrica, 23
  assimétrica, 23
  binária, 18
  de equivalência, 19
  de ordem estrita, 23
  de ordem parcial, 23
  de pertinência, 8
  domínio da, 18
  imagem da, 18
  inversa, 19
  irreflexiva, 23
  reflexiva, 19
  simétrica, 19
  transitiva, 19

reunião, 10
    de uma família, 21

subconjunto, 9
    próprio, 9
sucessor
    numa boa ordem, 27

Teorema
    de Cantor-Bernstein, 18
tricotomia, 25

união (ver reunião), 10