Fundamentos de

Topologia Geral

Renan Maneli Mezabarba

Fundamentos de Topologia Geral

17 de outubro de 2023.

[...] *All these people that you mention*
Yes, I know them, they're quite lame
I had to rearrange their faces
And give them all another name
Right now I can't read too good
Don't send me no more letters, no
Not unless you mail them from
Desolation Row.

Bob Dylan, *Desolation Row*, 1965.

Sumário

II Análise Abstrata 425

Prefácio

Geralmente, a primeira coisa que faço ao abrir um livro de Matemática é (tentar) descobrir, no seu prefácio, se as minhas expectativas enquanto leitor condizem com as perspectivas do autor. Em certo sentido, isso é conceitualmente simples, pois o livro já está escrito e as minhas expectativas de leitura já estão formadas.

No processo de *criação*, porém, não há um *leitor canônico*[1] com expectativas fixadas, tampouco a perspectiva de quem redige está cristalizada, pois o processo de escrita sobre um determinado tópico envolve reflexões que, não raramente, alteram as próprias percepções iniciais sobre o tema. Outro problema é imaginar por que alguém se daria ao trabalho de ler sobre algo que já foi escrito inúmeras vezes: por que ler B e não A, dado que ambos tratam do assunto X? Aliás, por que alguém se deu ao trabalho de escrever B? Vale a pena escrever ainda um C?

Por que escrevi este livro?

A escassez de livros de Topologia Geral em Língua Portuguesa é, de um ponto de vista editorial, a melhor resposta para a pergunta acima. Embora existam algumas obras[2], acredito que a mais conhecida neste nicho seja do Prof. Elon Lages Lima, *Elementos de Topologia Geral* [68]. Apesar de meu primeiro contato com tal material ter ocorrido perto do final da graduação (2011), *ele* me acompanhou por menos de um semestre, já que o meu mestrado em Topologia Geral exigia bem mais do que um texto introdutório (como o *Elementos*) costuma oferecer.

Especificamente, o deliberado protagonismo dado pelo *Elementos* aos *espaços métricos* e às *sequências convergentes* tornou o material insuficiente para estudar as noções topológicas oriundas de contextos não-metrizáveis – algo corriqueiro *onde* eu me encontrava. Dado que *espaços topológicos* generalizam os métricos de forma natural, é razoável usar métricas como motivação para os axiomas que caracterizam os espaços topológicos: o livro *General Topology* [115], de Stephen Willard, é um dos diversos exemplos de textos que fazem isso de maneira bastante acertada. O problema ocorre quando um material supostamente voltado para Topologia Geral apresenta, na prática, técnicas úteis *apenas* para espaços métricos – caso em que se encontra o *Elementos*. Com isso em mente, o meu objetivo inicial com o presente trabalho foi fornecer uma introdução à Topologia Geral capaz de contemplar cenários efetivamente topológicos e sem muletas métricas. *Inicialmente...*

Se o objetivo fosse apenas o que mencionei acima, a redação teria sido bem mais rápida. (In?) felizmente, uma das minhas principais inspirações foi o majestoso e inimitável *Handbook of Analysis and its Foundations* [104], de Eric Schechter, que ao se referir ao próprio texto, afirma que

> (...) este é o livro que eu gostaria de ter lido antes de começar meus estudos de pós-graduação[3].

Tal ideia me cativou de forma irreversível, razão pela qual decidi tornar o texto útil para pessoas interessadas em ingressar num mestrado (ou doutorado) em Matemática Pura. Nesse sentido, a única forma que encontrei de "competir" minimamente com as referências estrangeiras clássicas (tipicamente utilizadas nas pós-graduações) foi incluir temas mais avançados de Topologia Geral bem como *algumas* aplicações não-triviais em áreas *afins*. Mas a que custo, não é mesmo?

[1] Embora eu frequentemente me dirija a tal *leitor*. Dito isso, convém ressaltar que ao escrever "o leitor", eu o faço pensando puramente na interpretação de gênero neutro do substantivo "leitor". As alternativas neolinguísticas (leitor@?), ainda são confusas e pouco estabelecidas na literatura acadêmica.

[2] E recomendo a leitura do parágrafo que antecede os Agradecimentos.

[3] "(...) *this is the book I wish I had had before I began my graduate studies* (sic)".

Por que ler este livro?

Noções topológicas surgem naturalmente em contextos que a princípio nada têm a ver com Topologia Geral e, geralmente, ampliam o leque de ferramentas para analisar diversos problemas. Isto, por si só, já constitui um bom motivo para o estudo de Topologia Geral, por meio de qualquer livro. Quanto ao presente trabalho, o leitor pode achar interessante o fato adicional de que tal interdisciplinaridade será abordada ao longo do texto *sempre que possível*, com incursões por Álgebra, Análise (Funcional) e Lógica. Haverá espaços métricos? Certamente, mas sem *favoritismo*.

Além disso, o texto conta com um considerável repertório de exercícios, muitos deles divertidos – embora possivelmente *triviais*[4]. Exercícios não-triviais, geralmente, tratam de aspectos não essenciais para o entendimento da teoria, como curiosidades e *trívias*. Por sua vez, a maioria dos pontos não-triviais importantes serão demonstrados e discutidos *ad nauseam*.

Por fim, como um admirador do Prof. Eduardo Tengan, procuro equilibrar a seriedade do rigor matemático com uma dose de humor, muitas vezes sem sucesso. Longe de ser uma tentativa de parecer engraçado ~~sei que não consigo~~, tal postura visa apenas aliviar a monotonia típica de textos técnicos.

O que saber antes de *usar* este livro?

Saber ler é indispensável. No entanto, a leitura de textos matemáticos, em geral, requer uma dose extra de atenção e, muitas vezes, papel e lápis para que se possam *reinterpretar* os conteúdos em sua própria linguagem. Nesse sentido, é seguro afirmar que algum grau de *maturidade matemática* possa tornar a leitura deste material menos traumática – eu não recomendo, por exemplo, que este seja o primeiro livro de Matemática Abstrata estudado pelo leitor.

Mais precisamente, recomendo que o leitor já tenha traquejo com o *linguajar* matemático corrente. Sentir *desconforto* com expressões do tipo "*pré-imagem de um conjunto por uma função*" deve servir como sinal vermelho: do Capítulo 1 em diante, quase tudo depende de um bom entendimento de conjuntos e funções, de modo que pode ser mais vantajoso aprender/revisar tais pré-requisitos com o seu *fornecedor local* – confira, porém, a Seção K.1. Falta de familiaridade com tópicos mais algébricos, por sua vez, deve acender um sinal amarelo: embora, de um ponto de vista não-pedagógico, perca-se pouco da Parte I caso não se saiba o que é um *espaço vetorial*, por exemplo, fica gradativamente mais penoso avançar sem saber o que são *grupos*, *anéis*, etc. Nunca ter visto Cálculo ou Análise, por outro lado, pode ser encarado sem grandes preocupações técnicas. Em todo caso, a próxima subseção traz outras informações acerca de pré-requisitos.

Como ler este livro?

O *esqueleto* do presente texto é composto por duas partes principais, separadas por dois "breves" interlúdios, que serão esmiuçadas mais adiante. Localmente, cada parte se subdivide em capítulos, seções e subseções, todas numeradas; eventuais subsubseções, porém, serão destacadas sem numeração. Da Parte I em diante, exemplos e exercícios serão propostos ao longo de todo o texto, a fim de proporcionar uma *leitura ativa* e salvar o autor de escrever argumentações muitas vezes tediosas. Em geral, o final de cada seção ou capítulo conta com uma subseção de exercícios complementares, alguns mais fundamentais do que outros.

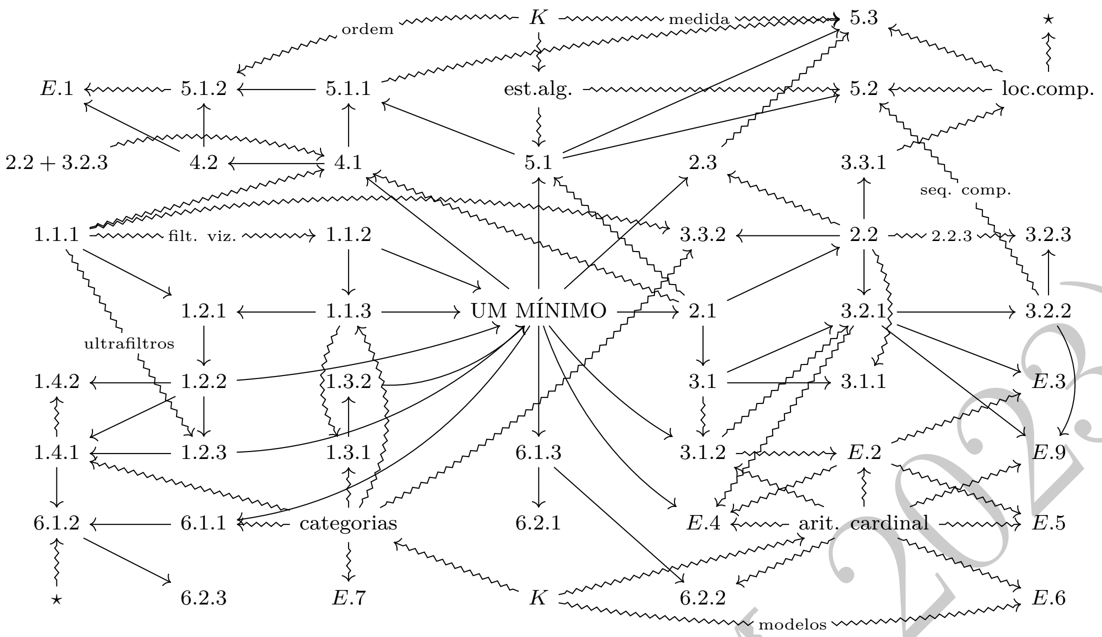
Os símbolos "$\triangle$", "$\blacktriangle$" e "$\blacksquare$" serão usados para demarcar o final de observações, exemplos e enunciados de exercícios, respectivamente. Demonstrações, como de costume, serão finalizadas com o símbolo "$\square$". Além disso, ao longo do texto, as definições mais importantes serão destacadas em ambientes numerados próprios, e o símbolo "¶" será usado para delimitá-las[5]. Ainda assim, para não fazer do texto um aglomerado de verbetes ou caixas de texto, muitas outras definições serão dadas ao longo do discurso, mas todas elas estarão devidamente **destacadas** e indicadas no Índice Remissivo.

Embora a dependência lógica dos capítulos seja mais ou menos linear, a leitura independente de uma seção arbitrária do texto poderá ser feita de modo seguro pois, *quase sempre*, indica-se onde encontrar um pré-requisito apresentado anteriormente no texto. Em todo caso, talvez o grafo de *dependências* a seguir ajude a ~~iludir~~ nortear o leitor[6] ("$A \to B$" deve ser lido como "só estude B depois de estudar A", enquanto "$A \rightsquigarrow B$" indica que "A contém pré-requisitos importantes para B"):

[4]O termo "trivial" não tem uma definição bem estabelecida. Por via das dúvidas, o leitor deve considerar suas futuras ocorrências como sugestões de exercício ou meras provocações passivo-agressivas. A mesma ressalva se aplica a outros julgamentos de valor.

[5]Partidários dessa forma de redação devem agradecimentos a Pryscilla Silva.

[6]Sugestão de um dos meus poucos amigos de infância que ainda conversam comigo, Thales F. V. Paiva.



O Capítulo 1 coleta um *pacote minimal* de definições e resultados (topológicos) necessários para o bom aproveitamento dos demais capítulos. Embora a Subseção 1.1.1, que introduz filtros e os utiliza para motivar espaços topológicos, possa ser evitada por quem quiser apenas o *básico* sobre espaços topológicos e funções contínuas (temas das Subseções 1.1.2 e 1.1.3, respectivamente), ela é indispensável para as Subseções 1.2.1 e 1.2.2, que tratam da convergência de filtros e *nets* em espaços topológicos – e como utilizá-las no lugar das sequências em espaços arbitrários. Cabe frisar que o "básico" mencionado acima já inclui o caso geral da topologia produto, descrita como a topologia fraca induzida pelas projeções. Filtros também são importantes para a primeira parte da Subseção 1.2.3, que motiva a definição de compacidade a partir da convergência de ultrafiltros – apesar disso, a segunda metade discute espaços compactos por meio de coberturas abertas da forma usual e sem a dependência de filtros. **Importante destacar**: as duas metades apresentam provas do Teorema de Tychonoff, uma por meio de ultrafiltros, outra por meio de coberturas por abertos espertos. Quocientes topológicos e outras construções *funtoriais* são o tema da Seção 1.3, que encerra o pacote destinado a uma primeira leitura. A Seção 1.4 é indicada para leitores com indagações mais sérias: a primeira subseção traz os *espaços de convergência*, animais que generalizam os espaços topológicos ao abstraírem a noção de convergência diretamente, i.e., sem o apelo de uma topologia, enquanto a segunda restringe tal abstração aos filtros induzidos por sequências, processo em que se recuperam os *espaços sequenciais*. **Importante destacar**: a Subseção 1.4.1 é indispensável para as discussões posteriores nas Subseções 6.1.2 e, principalmente, 6.2.3.

Os demais capítulos da Parte I podem ser resumidos de maneira mais sucinta: enquanto o Capítulo 2 trata de axiomas de separação e conexidade, o Capítulo 3 discute generalizações e propriedades relacionadas com compacidade, aqui chamadas como propriedades de recobrimento. Especificamente, a Seção 2.1 traz os axiomas usuais de separação entre pontos e fechados por meio de abertos – T_0, T_1, T_2 (ou Hausdorff, introduzido na Subseção 1.2.2), T_3 e T_4 – enquanto a Seção 2.2 aborda o papel das funções contínuas no assunto: em particular, o leitor encontrará os clássicos resultados de extensão de funções contínuas na Subseção 2.2.2. **Importante destacar**: o primeiro contato com a noção de finitude local e partições da unidade, típicas da *paracompacidade*, é realizado na Subseção 2.2.3, por óbvia influência de Schechter [104]. A Seção 2.3 faz um apanhado mínimo sobre espaços conexos e suas variações usuais, sem pirotecnias – estas ficam reservadas para a Subseção 2.3.3, em que se demonstra, por exemplo, a unicidade de $\mathbb{Q}$ como único espaço métrico enumerável sem pontos isolados, a menos de homeomorfismo. Os títulos das seções e subseções do Capítulo 3 são autoexplicativos, exceto, possivelmente, pela Subseção 3.2.2: nela, as variações usuais de compacidade (sequencial, enumerável, etc.) são discutidas tanto em âmbito geral quanto no contexto metrizável.

Juntos, os Capítulos 1, 2 e 3 constituem o *meu depoimento* sobre o que eu gostaria que qualquer praticante de Matemática Abstrata soubesse de *Topologia Geral*. O correto seria parar por aí, certo?

O Capítulo 4, que introduz espaços uniformes, dá o primeiro passo na direção de temas um pouco mais avançados, mas por meio de ideias ainda úteis ao *grande público*: a poderosa noção de convergência uniforme, evitada nos capítulos anteriores, é utilizada sem pudores em seu *habitat* natural, e permite demonstrar, entre outras coisas, o importante Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov na parte final da Seção 4.1. A segunda parte do capítulo lida com a noção de completude no contexto de espaços uniformes: em vez de sequências de Cauchy, o protagonismo é assumido pelos filtros e *nets* de Cauchy (e a importância das Subseções 1.1.1 e 1.2.1 deve ser evidente). Em particular, é ao longo da Subseção 4.2.2 que se cumpre a autoimposta penitência de construir o *completamento* de um espaço uniforme: a vantagem desse tratamento é obter, num único (e doloroso) golpe, tanto o completamento de espaços métricos (abordado no final da subseção) quanto o completamento dos racionais que leva à reta real (discutido no capítulo seguinte). O final do capítulo ainda apresenta algumas peculiaridades dos espaços métricos completos, como a propriedade de Baire, que também será explorada posteriormente. Por ser um tema que interessa tanto ao *grande público* quanto ao nicho da Análise Abstrata, espaços uniformes foram escolhidos como interlúdio entre a Parte I e a Parte II.

Originalmente, a Parte II utilizaria os resultados anteriores em aplicações mais avançadas e menos urgentes (*importantes, mas nem tanto*) de Análise, Álgebra e Lógica. Todavia, o desenrolar da redação e a inevitável supressão de tópicos fez de seus dois capítulos sobreviventes, 5 e 6, um resumo bem intencionado de Análise Funcional. No primeiro deles, o Capítulo 5, grupos topológicos e espaços vetoriais topológicos são tratados com bastante cuidado ao longo das Subseções 5.1 e 5.2, respectivamente. **Importante destacar**: enquanto o ponto alto da primeira seção é o completamento da reta real por meio dos aparatos do capítulo anterior, a segunda seção demonstra resultados importantes de Análise Funcional, como os clássicos Teoremas de Riesz-Weil, Hahn-Banach[7], Banach-Steinhauss, Banach-Alaoglu-Bourbaki e Eberlein-Šmulian (sim!); em particular, os teoremas de metrização de grupos e espaços vetoriais topológicos (*a.k.a.* Birkhoff-Kakutani) são obtidos como corolários rápidos do Teorema de Weil que caracteriza os espaços uniformes metrizáveis (este último demonstrado na Subseção 4.1.2). A improvável Seção 5.3 apresenta a construção de Weil para a integral de Haar num grupo topológico localmente compacto de Hausdorff, utilizada no final da seção para (risos?) garantir a existência de funções exponenciais e logarítmicas, numa adaptação do que é feito em [20]. Por sua vez, o Capítulo 6 trata de diferentes topologias (úteis) que podem ser consideradas sobre espaços de funções contínuas. **Importante destacar**: os clássicos Teoremas de Stone-Weierstrass e Arzelà-Ascoli são demonstrados ao longo da Seção 6.2, o primeiro da forma usual e o segundo por meio das parafernálias exponenciais introduzidas na Subseção 1.4.1.

O resumo acima ignora dois capítulos: o *Kindergarten* ("Capítulo K") e o Epílogo ("Capítulo E"). O *Kindergarten*, graficamente o zero-ésimo capítulo do texto, visa suprir (com alguma folga) os requisitos de Teoria dos Conjuntos (axiomas, notações e aritmética cardinal), Álgebra (desde noções mais universais como modelos, até banalidades como grupos, anéis, etc.), Análise (corpos ordenados e elementos de Teoria da Medida) e Categorias. Por sua vez, o Epílogo fecha este texto com introduções bem intencionadas a temas sobre os quais eu gostaria de ter discorrido com mais calma – se eu fosse imortal, por exemplo.

Com isso dito, é possível que leitores inexperientes se indaguem por roteiros de leitura. Nesse sentido, minha sugestão sincera é: ignore o *Kindergarten* e utilize-o apenas em momentos de desespero com alguma notação ou definição que lhe pareça *estranha* (o que frequentemente poderá ser feito com uma consulta rápida ao "dicionário" da Subseção K.1.7) e siga os Capítulos 1, 2 e 3 na ordem em que estão escritos – mas pule a Subseção 1.4.1 se for o seu primeiro contato com espaços topológicos. Ao final de tal percurso, você já terá maturidade suficiente para decidir quais capítulos ler em seguida – mas, se ainda assim, for difícil demais tomar uma decisão por conta própria, siga a ordem de impressão.

Por fim, três avisos.

- O leitor com fobia de notas-de-rodapé deve reconsiderar se o presente texto é apropriado – encerrar a leitura aqui pode ser uma opção[8].
- Tenho diversos vícios de linguagem que transparecem ao longo do texto: alguns são propositais, outros não. *Pedimos* desculpa pelo inconveniente.
- Não abordarei a noção de *grupo fundamental* ou outros aparatos típicos de Topologia Algébrica, pois **eu não sou obrigado**. O leitor interessado em tais conceitos deve conferir um livro de Topologia Algébrica.

[7]Para espaços localmente convexos, o que exige a introdução da seminorma de Minkowski.

[8]Pois eu realmente adoro notas-de-rodapé e não pretendo extirpá-las. Com isso dito, adianto que eu, intencionalmente, exagerei neste Prefácio – elas serão um pouco menos frequentes ao longo do texto.

"Devo usar este texto para ministrar um curso?"

Resposta curta: não.

Resposta longa: talvez sim, mas com muitas ressalvas. Minha principal preocupação se refere ao estilo da redação, que faz o texto parecer um monólogo proferido por alguém que não tem um cronograma a ser executado[9]. Embora tal estética seja adequada ao *propósito final do trabalho* – que é ser usado para *consulta* por quem não está com pressa para recordar ou *aprender* – ela não me parece favorável para acompanhar uma rotina cronometrada em horas-aula, que costuma exigir textos mais sucintos e objetivos.

Outro ponto importante a destacar é a incompatibilidade de ordem com respeito à maioria das ementas que eu conheço, já que não segui a ordenação usual dos conteúdos: na Parte I, por exemplo, espaços métricos serão o último exemplo de espaço topológico, o Teorema de Tychonoff será provado no primeiro capítulo, quase não abordarei homotopias, etc. Em suma: usar (parte d) este material como livro-texto acarreta um esforço extra de adaptação a depender da ementa da disciplina em seu departamento. Em última análise, isso é reflexo do fato de que este texto se destina ao *leitor* – e não ao *expositor*. Peço desculpas quase sinceras pela inconveniência.

Docentes em busca de um *livro-texto* podem conferir o recente "Topologia Geral", de Leandro Aurichi, publicado em 2022 pela Livraria da Física. Em minha defesa, como o ano da publicação sugere, tal material não existia quando comecei a redigir este *trambolho*, por volta do final de 2017. Portanto, que fique registrado que a escassez de material mencionada no começo deste prefácio estava inserida num contexto anterior ao livro supracitado.

Agradecimentos

No universo de todas as pessoas que não atrapalharam[10], destaca-se uma lista importante de pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente na dolorosa redação deste texto[11].

- Minha família, pois para escrever é preciso existir[12].
- As professoras Lúcia Junqueira e Ofélia Alas, por existirem e serem quem são.
- Os professores Marcelo Dias Passos e Rodrigo Roque Dias, que de certa forma foram os responsáveis por eu escolher esta área.
- Os professores Alexandre/"Sasha" Ananin (*in memoriam*), Carlos Grossi, Eduardo Tengan, Leandro Aurichi e Samuel Gomes da Silva, por me inspirarem a escrever este material *sem amarras*.
- Minhas primeiras cobaias de leitura, das quais destaco: Alex Pereira, Galvão, Leonardo Cavenaghi e Pryscilla Silva[13].
- A coragem (ou falta de juízo) de Gisele Paula, que usou parte deste material com suas turmas de Topologia Geral – seus comentários foram um dos gatilhos que me levaram a reformular o *Kindergarten*.
- *Meus* estudantes da UFES (sob o risco de cometer injustiças, não posso deixar de mencionar Alícia Marques, Fabíola Loterio, João Perim, Lucas Vanderlei, Lucca Dias e Pedro Schineider).
- A *turma* da disciplina Topologia II – 2023, ministrada na UESC, composta por João Santos, Gabriel França, Hellen Pinheiro, Lucas Brasil, Rodrigo Monteiro e Thiago Castro – além do sempre entusiasmado Prof. German Ferrer.
- Artur Tomita, Brenno Barbosa, Hugo (tanto o Botós quanto o Ribeiro), Ivo Terek, Júlio Cândido, Luiz Felipe Garcia, Marcos Mercandeli Rodrigues, Pedro Pimenta, Thales Paiva e Victor Ronchim – por incentivarem esta loucura sempre que eu toco no assunto com eles.

[9] Provável influência de Schechter [104] e Manin [71].

[10] O que exclui o presidente do Brasil durante os anos 2019-2022.

[11] E acredito que a lista aumentará entre a finalização da redação da primeira versão e sua eventual publicação.

[12] Exceto para divindades e outras entidades fictícias, como Bourbaki.

[13] Não só por isso (͡° ͜ʖ ͡°)

- A leitura cuidadosa do Caio "*the evil*" Oliveira, nas primeiras etapas da redação, merece atenção especial, bem como uma pontuação adequada. :) As sugestões do Gustavo Figueiredo também foram úteis.
- O professor Eric Schechter, por ter escrito o *HAF* [104], que por sua vez me despertou o desejo de redigir um texto *abrangente*.
- O teorista de tipos Varkor, por ter criado o `quiver`[14], que utilizei para gerar vários dos diagramas deste texto.

A maioria dos agradecimentos anteriores foi redigida antes da pandemia. Depois da mudança radical de paradigma que o `Covid-19` estabeleceu em todas as sociedades do mundo, ter este texto para me dedicar funcionou como âncora psicológica nos recorrentes momentos de desespero. Talvez por isso, parte de seu conteúdo tenha contaminado brevemente o Youtube[15]. Portanto, também devo agradecer a todas as pessoas que assistiram tais vídeos e, direta ou indiretamente, ajudaram-me a reescrever as *próximas páginas*.

Renan M. Mezabarba

Ilhéus-BA, 17 de outubro de 2023.[16]

[14] https://q.uiver.app/.
[15] https://www.youtube.com/user/rmmezabarba.
[16] Convém ressaltar que a redação começou em meados de outubro de 2017.

Kindergarten

A proposta deste capítulo[1] é simples: introduzir a linguagem e os conceitos básicos utilizados ao longo do trabalho. Trataremos de rudimentos (não tão rudimentares) de Teoria dos Conjuntos (Seção K.1), estruturas algébricas e de ordem (Seção K.2), categorias (Seção K.3), entre outras coisas pelo caminho. Além de evitar a quebra de ritmo nos capítulos seguintes, espero tornar o presente material tão "auto-contido" quanto *possível*, o que talvez facilite a empreitada do leitor pragmático e independente...

Mas não tanto: a "auto-inclusão" é principalmente no sentido de consulta, como já alertei no Prefácio – o leitor que evitou o Prefácio deve, pelo menos, ler a Subseção "O que saber antes de *usar* este livro?", na página 10. Reforçada a ressalva, cabe destacar que a discussão de cada tema será feita com cuidado inversamente proporcional à sua escassez na literatura nacional.

K.1 Teoria apressada dos conjuntos

(Ax.1) Axioma da Extensão: se X e Y têm os mesmos *elementos*, então $X = Y$.

(Ax.2) Axioma do Par: dados a e b, existe um *conjunto* que tem precisamente a e b como elementos, denotado por $\{a, b\}$.

(Ax.3) Axioma-esquema da Separação: se $\mathcal{P}(x)$ é uma *propriedade*, então para todo X existe $\{x \in X : \mathcal{P}(x)\}$ cujos elementos são todos os elementos de X com a propriedade $\mathcal{P}$.

(Ax.4) Axioma da União: para todo X existe $\bigcup X$, cujos *membros* são todos os elementos dos elementos de X.

(Ax.5) Axioma das Partes (ou da *Potência*): para todo X existe $\wp(X)$, que tem como elementos todos os *subconjuntos* de X.

(Ax.6) Axioma do Infinito: existe um conjunto *infinito*.

(Ax.7) Axioma-esquema da Substituição: se $\mathcal{F}$ é uma *função de classes*, então para todo X existe o conjunto $\{\mathcal{F}(x) : x \in X\}$, denotado por $\mathcal{F}[X]$.

(Ax.8) Axioma da Fundação (ou da *Regularidade*): todo conjunto *não-vazio* tem um elemento *$\in$-minimal*.

(Ax.9) Axioma da Escolha: todo conjunto não-vazio de conjuntos não-vazios tem uma *função escolha*.

[1]No passado, o *Kindergarten* foi um *conjunto* de quatro capítulos bem mais extensos. Espero publicar tal versão estendida, eventualmente.

A lista anterior, adaptada de [58], é uma aproximação em *linguagem natural*[2] do que atualmente costuma ser entendido como **ZFC**[3], um dos *sistemas de axiomas* mais comuns utilizados para *ditar* o *comportamento* "formal" das entidades abstratas que xingamos de *conjuntos*. Mas o que significa ser conjunto?

A palavra "conjunto" é uma daquelas típicas expressões (*atômicas*) que não se explicam por meio de outras expressões mais simples, como *tempo*, *espaço*, *ser*, etc. Entende-se (e se espera) que a vida em sociedade tenha ensinado o significado popular dessas coisas: no caso, conjuntos podem ser entendidos como *agrupamentos de objetos* ou *coleções de indivíduos* que partilham algum tipo de característica comum num certo contexto. Porém, no cotidiano matemático que se desenrola adiante, o senso comum costuma ser ineficiente, haja vista que as noções tratadas escapam com frequência das experiências diárias dos falantes da língua.

Então, sem uma definição precisa do que é um conjunto, como utilizá-los de forma precisa em Matemática? Simples: com pragmatismo. O desenrolar histórico da Matemática ensinou que quando não sabemos explicitar *o quê* um certo objeto é, pode-se pelo menos descrever *como* tal objeto deve se comportar. É justamente isso o que a lista de axiomas acima se propõe a fazer.

Com isso dito, é recomendável que o leitor já tenha alguma familiaridade com a chamada *Teoria Ingênua dos Conjuntos* e suas notações, que não se embasa na lista completa de axiomas acima, mas apenas no Axioma da Extensão, no *Princípio da Abstração* (a ser discutido adiante) e, implicitamente, no Axioma da Escolha. Para facilitar futuras menções ao longo do texto:

Definição K.1.1 (Inclusão)**.** Sejam A e B conjuntos.

- "$A \subseteq B$" abrevia a afirmação "para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$", lida como "A é **subconjunto** de B", ou "A **está contido em** B".
- "$A \nsubseteq B$" abrevia a negação de "$A \subseteq B$", i.e., para indicar que "existe $x \in A$ tal que $x \notin B$".
- "$A \subsetneq B$" abrevia "$A \subseteq B$ e $A \neq B$" e, em tais situações, diz-se que A é **subconjunto próprio** de B. ¶

Assim, **(Ax.1)** se reescreve da seguinte forma:

$$\forall A \forall B \, (A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)) \tag{K.1}$$

Como o leitor já deve saber, expressões do tipo "$\forall x \forall y \forall z \ldots$ [...]" indicam que para quaisquer *valores* atribuídos às variáveis x, y, z, ... verifica-se[4] seja lá o que estiver expresso em "[...]". No caso, o axioma acima manifesta a ideia de que são os elementos de um conjunto, e apenas eles, que caracterizam um dado conjunto. Em outras palavras, o critério de igualdades entre conjuntos não é um *fato óbvio* da vida, mas sim uma imposição axiomática sobre os conjuntos com os quais pretendemos lidar.

Analogamente, **(Ax.2)** pode ser abreviado por

$$\forall a \forall b \exists P \forall x \, (x \in P \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = b)) \tag{K.2}$$

[2] Aquela utilizada para discutir acerca de uma teoria: no presente caso, português juntamente com simbologia matemática.

[3] Ernst Zermelo (Z), Abraham Fraenkel (F) e o Axioma da Escolha (*Axiom of Choice* (C)).

[4] Ou "é verdade que".

que explicitamente significa o que havia sido originalmente expresso em linguagem natural: dizer que $x \in P$ *é afirmar que* $x = a$ ou $x = b$, i.e., a e b são os únicos elementos de P.

Definição K.1.2. Dados a e b, denota-se por $\{a, b\}$ o conjunto cujos únicos elementos são a e b, que será chamado de **par não-ordenado**. ¶

K.1.1 A ingenuidade matou o gato

Na *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, o Axioma do Par é apenas consequência de um princípio mais geral e aparentemente inofensivo. Intuitivamente, sempre que se tem algum tipo de *propriedade matemática*[5], é razoável considerar o conjunto das *coisas* que possuem tal propriedade. Em vista do Axioma da Extensão, para uma propriedade $\mathcal{P}$ fixada, é único, *caso exista*, o conjunto de *todos* os elementos que possuem a propriedade $\mathcal{P}$: ora, se tanto A quanto B têm como elementos precisamente aqueles com a propriedade $\mathcal{P}$, então

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B,$$

acarretando $A = B$.

Definição K.1.3. Dada uma propriedade $\mathcal{P}$, escreve-se $\mathcal{P}(y)$ para indicar que y possui a propriedade $\mathcal{P}$. Denota-se por $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ o *conjunto* caracterizado pela propriedade $\mathcal{P}$, i.e., tal que $y \in \{x : \mathcal{P}(x)\}$ se, e somente se, $\mathcal{P}(y)$. ¶

Então, a intuição clássica diz que deveria valer o seguinte

***Princípio* da Abstração.** *Para toda propriedade* $\mathcal{P}$ *existe o conjunto* $\{x : \mathcal{P}(x)\}$.

Com tal princípio, *seria* possível reduzir o estudo de conjuntos ao mero estudo do cálculo proposicional, já que conjuntos $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ e $\{x : \mathcal{Q}(x)\}$ apenas *materializam* as propriedades $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Por exemplo:

- uma implicação do tipo $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ se traduz na inclusão $\{x : \mathcal{P}(x)\} \subseteq \{x : \mathcal{Q}(x)\}$;
- *conjunções* do tipo $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ correspondem à interseção entre $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ e $\{x : \mathcal{Q}(x)\}$.

Supondo a validade do Princípio da Abstração *momentaneamente*[6], é possível justificar a maioria das construções *conjuntistas* com as quais o leitor já teve o desprazer de esbarrar. A fim de fixar as notações, elas serão listadas adiante e discutidas MUITO brevemente. No que segue, a notação "$A := B$" busca destacar que a igualdade $A = B$ é imposta por definição ou, em outras palavras, o símbolo B é *definido* como um *nome* alternativo para o conjunto A.

Definição K.1.4.

(i) Denota-se por $\emptyset := \{x : x \neq x\}$ a *coleção* que será chamada de **conjunto vazio**, por razões *óbvias*: não existe x com $x \in \emptyset$, já que o contrário daria $x \neq x$.

(ii) Para uma *família*[7] $\mathcal{F}$, consideram-se:

[5] Aqui, "propriedade matemática" é meramente uma *fórmula* escrita na *linguagem* da Teoria dos Conjuntos, possivelmente com *variáveis livres*. Porém, tais pormenores não serão discutidos... agora.

[6] Como veremos, tal princípio é "problemático".

[7] Neste texto, as palavras "família", "coleção" e "conjunto" devem ser encaradas como sinônimos.

- a **interseção** dos membros de $\mathcal{F}$, cujos elementos são os x's que pertencem a todos os membros de $\mathcal{F}$, simbolicamente
$$\bigcap \mathcal{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F := \{x : \forall F(F \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in F)\};$$
- a **(re)união da família** $\mathcal{F}$, cujos elementos são os x's que pertencem a algum dos membros de $\mathcal{F}$, simbolicamente
$$\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F := \{x : \exists F(F \in \mathcal{F} \text{ e } x \in F)\};$$
- o **conjunto das partes de** $\mathcal{F}$, cujos elementos são todos os subconjuntos de $\mathcal{F}$, simbolicamente
$$\wp(\mathcal{F}) := \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

(iii) Em particular, $X \cap Y$ e $X \cup Y$ denotam $\bigcap\{X, Y\}$ e $\bigcup\{X, Y\}$, xingados de **interseção entre** X **e** Y e **(re) união de** X **e** Y, respectivamente. Os conjuntos X e Y são ditos **disjuntos** se $X \cap Y = \emptyset$.

(iv) Ainda para X e Y conjuntos, considera-se $X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\}$, que denota a **diferença** entre X e Y, também chamada de **complementar de** Y **em** X.

(v) O **(conjunto) unitário**[8] de x é $\{x\} := \{x, x\}$, que tem x como único elemento.

(vi) O **par ordenado** de x e y é o conjunto $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

(vii) Em vista do item anterior, para conjuntos X e Y, define-se
$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$
para indicar o **produto cartesiano** entre X e Y, cujos membros são todos os pares ordenados da forma (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$. ¶

Observação K.1.5. Diz-se que o par $\{x, y\}$ é *não-ordenado* pois $\{x, y\} = \{y, x\}$, enquanto o par (x, y) é ordenado pois $(x, y) = (c, d)$ se, e somente se, $x = c$ e $y = d$. Vale destacar o seguinte: na prática, é mais importante saber o comportamento do par ordenado do que sua definição *conjuntista* dada acima.

Os elementos a e b num par ordenado (a, b) são chamados, respectivamente, de **primeira** e **segunda coordenadas** do par. Há outras nomenclaturas, como *ordenadas* e *abcissas*, mas eu as detesto e não vejo razão para propagá-las. △

Cada uma das instâncias acima se obtém como manifestação do Princípio da Abstração por meio de propriedades adequadas. Sob uma análise pouco criteriosa, nada disso parece problemático e, mais importante: tudo soa coerente com o que se esperaria de tais definições. Como ilustração e aquecimento, o leitor pode provar as seguintes afirmações (ou apenas aceitá-las sem pensar muito).

Proposição K.1.6. *Para conjuntos A, B, C e D, valem as seguintes identidades, inclusões, equivalências e implicações.*

(*i*) $\emptyset \subseteq A$.

[8] Geralmente xingado de *singleton* em referências anglófonas.

(ii) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

(iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(v) $A \subseteq A$, $A \subseteq B$, e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

(vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$, e $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(viii) $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(ix) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ e $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(x) $(A \times B) \times (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(xi) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$.

Proposição K.1.7. *Para conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, valem as seguintes implicações.*

(i) *Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$, então $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ e $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Se para todo $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ com $A \subseteq B$, então $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.*

(iii) *Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.*

Observação K.1.8. Fazer $\mathcal{A} := \emptyset$ nos itens (i) e (iii) resultaria num conjunto bastante peculiar: todo x deve ser membro de $\bigcap \emptyset$, já que o contrário exige a existência de $A \in \emptyset$ com $x \notin A$. Em outras palavras: $\bigcap \emptyset = \{x : x = x\} := \mathbb{V}$, animal ingenuamente chamado de *conjunto universo*. Note que a validade das afirmações permaneceria inalterada em tais cenários pois, de fato, $\mathbb{V} \subseteq A$ para qualquer $A \in \emptyset$ (por *vacuidade*!) e $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \mathbb{V}$ qualquer que seja o conjunto $\mathcal{B}$. Todavia, a restrição foi imposta pois, como veremos, o *conjunto universo* é "problemático" por outras razões. △

Embora banais num primeiro contato, produtos cartesianos e pares ordenados permitem formalizar a ideia de *relação* entre objetos quaisquer, o que embasa as futuras relações *algébricas* que serão estabelecidas entre *números*.

Definição K.1.9. Dados conjuntos X e Y, uma **relação** (**binária**) R entre X e Y é um subconjunto de $X \times Y$.

(i) Para um par $(x, y) \in X \times Y$, costuma-se escrever $x\,R\,y$ para indicar que (x, y) é membro da relação R, situação em que x e y serão ditos **R-relacionados**. A ocorrência de $(x, y) \notin R$ será indicada por $x \not R\, y$.

(ii) O **domínio** da relação R é o subconjunto $\operatorname{dom}(R) := \{x \in X : \exists y (x\,R\,y)\}$.

(iii) A **imagem** da relação R é o subconjunto $\operatorname{im}(R) := \{y \in Y : \exists x (x\,R\,y)\}$. ¶

Definição K.1.10. Uma **função** (ou **mapa** ou **aplicação**) é uma relação binária f tal que $y = z$ sempre que $x\,f\,y$ e $x\,f\,z$, para quaisquer $x \in \operatorname{dom}(f)$ e $y, z \in \operatorname{im}(f)$. Em particular, escreve-se "$f(x) := y$" a fim de indicar que $x\,f\,y$, i.e., para denotar o *valor* de f em $x \in X$, ou a **imagem** de x pela função f. Também é usual escrever $x \overset{f}{\mapsto} y$ para indicar a identidade $f(x) := y$. ¶

Definição K.1.11. Uma **função de** X **em** Y é uma função f com $\mathrm{dom}(f) = X$ e $\mathrm{im}(f) \subseteq Y$. Escreve-se $f\colon X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ para denotar a função f de X em Y. Em tais situações, diz-se que Y é *o* **codomínio**[9] da função. ¶

Observação K.1.12. Como as definições acima sugerem, existe uma diferença sutil entre dizer "f é uma função" e "f é uma função de X em Y": no primeiro caso, não se explicita um (co) domínio para f, enquanto no segundo caso fixam-se tanto o domínio quanto *o codomínio da função*[10]. Uma alternativa menos confusa seria restringir as nomenclaturas e, por exemplo, chamar as primeiras de funções e as segundas de *mapas* – o leitor pode fazer isso, se preferir. Neste texto, quase sempre as funções serão consideradas como no segundo caso, principalmente depois deste capítulo, de modo que não convém restringir as terminologias.

Com isso dito, alguns cuidados são necessários. Por exemplo, uma função f (ou uma função $f\colon X \to Y$) é dita **injetora**[11] se $x = x'$ sempre que $f(x) = f(x')$, critério que evidentemente se aplica a todos os elementos de $\mathrm{dom}(f)$ (ou a todos os elementos de X se $\mathrm{dom}(f) = X$). Em outras palavras, a definição para os dois casos é idêntica. Por outro lado, o critério de *sobrejetividade* só faz sentido para funções do segundo tipo, haja vista sua relação direta com o codomínio: uma função $f\colon X \to Y$ é dita **sobrejetora**[12] se $\mathrm{im}(f) = Y$. Nesse sentido, seria mais correto dizer que $f\colon X \to Y$ é *sobre* Y, a fim de destacar a relação de dependência da sobrejetividade com o codomínio escolhido[13]. △

Munidos de tais conceitos, poderíamos ainda definir **bijeções** (funções simultaneamente injetivas e sobrejetivas) e observar que elas generalizam a noção intuitiva de comparação quantitativa sem a necessidade de apelar para *números*. Mais ainda: ao formalizar a noção de *relação de equivalência*, perceberíamos que as bijeções estabelecem uma tal relação entre conjuntos, de modo que poderíamos definir *números* como classes de representantes dessa relação! Tudo isso com base no Axioma da Extensão e no Princípio da Abstração, maravilhoso! Então, qual o problema da Teoria Ingênua dos Conjuntos?

Paradoxo de Russell. Considere $\mathcal{R}(x)$ como sendo "$x \notin x$", i.e., x tem a propriedade $\mathcal{R}$ se, e somente se, x não pertence a si mesmo. Pelo Princípio da Abstração, existe o conjunto $R \coloneqq \{x : x \notin x\}$. Note que deve ocorrer $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, uma contradição. ■

Isso mostra que o sistema axiomático composto apenas pelo Axioma da Extensão e pelo Princípio da Abstração é problemático, no sentido de permitir a conclusão de contradições. Uma das soluções propostas foi substituir o Princípio da Abstração por sua versão mais fraca, o Axioma (-esquema) da Separação **(Ax.3)**: em vez de garantir a existência do conjunto formado por todos os elementos satisfazendo uma condição $\mathcal{P}$, garante-se a existência do conjunto de todos os elementos de X com a propriedade $\mathcal{P}$, para cada conjunto X previamente conhecido, daí o nome "separação".

Definição K.1.13. Para um conjunto X e uma propriedade $\mathcal{P}(x)$, $\{a \in X : \mathcal{P}(a)\}$ denota o único conjunto tal que para todo z, $z \in \{a \in X : \mathcal{P}(a)\}$ se, e somente se, $z \in X$ e $\mathcal{P}(z)$.¶

[9] Ou *contradomínio* da função f.

[10] A rigor, uma função (do primeiro tipo) não tem *um* codomínio canônico: *qualquer* conjunto Y satisfazendo $\mathrm{im}(f) \subseteq Y$ pode ser *escolhido* como codomínio de f. Então, como decidir? Simples: o que for mais útil para o contexto. Note que nas funções do tipo $X \to Y$, é justamente o contexto (i.e., a definição) que fixa Y como codomínio.

[11] Ou *injetiva*, *injeção*, etc.

[12] Ou *sobrejetiva*, *sobrejeção*, etc.

[13] Alguns textos mais antigos adotam essa terminologia. Infelizmente, seu uso segue em declínio.

Evidentemente, tal restrição tem um preço: **(Ax.3)** não tem o mesmo poder criativo de seu primo contraditório. É por tal razão que se acrescentam os Axiomas do Par **(Ax.2)**, da União **(Ax.4)**, da Potência **(Ax.5)** e da Substituição **(Ax.7)**: recuperar parte da habilidade de construção de conjuntos, perdida ao se abandonar a *abstração irrestrita*. Se quiser, o leitor não deve ter dificuldades para se convencer de que todas as definições anteriores podem ser justificadas com base nos axiomas mencionados acima. Dito isso, embora não seja objetivo desta seção se prolongar em tais pormenores, convém mencionar uma sutileza oriunda de **(Ax.3)**:

Proposição K.1.14. *Não existe um conjunto* $\mathbb{V}$ *tal que* $x \in \mathbb{V}$ *para todo* x.

Demonstração. Se existisse, então $T := \{x \in \mathbb{V} : x \notin x\}$ seria tal que $x \in T \Leftrightarrow x \notin T$, uma contradição. □

Consequentemente, só faz sentido definir interseções arbitrárias da forma $\bigcap \mathcal{F}$ para famílias $\mathcal{F}$ que sejam não-vazias[14]: neste caso, faz-se

$$\bigcap \mathcal{F} := \{x \in A : \forall F(F \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in F)\}$$

para qualquer $A \in \mathcal{F}$, o que independe, naturalmente, do elemento $A \in \mathcal{F}$ escolhido. A justificativa para a existência de produtos cartesianos (Exercício K.2), bem como das outras construções mais simples, fica a cargo do leitor.

Os três axiomas restantes (do Infinito **(Ax.6)**, da Fundação **(Ax.8)** e da Escolha **(Ax.9)**) lidam com questões mais técnicas e que escapam do contexto usual de quem usa as noções ingênuas discutidas nesta subseção. No presente texto, usaremos o Axioma do Infinito (na discussão sobre *ordinais* e *números naturais*), o Axioma da Escolha (ao longo dos capítulos seguintes) e o Axioma da Substituição (na formalização das *recursões transfinitas*). Já o Axioma da Fundação será tratado apenas na seção de exercícios, por desencargo de consciência.

Porém, antes de avançar, convém fixar mais algumas notações que serão usadas com frequência no decorrer deste material. O leitor fica convidado a justificar a existência dos conjuntos a seguir, bem como demonstrar os resultados enunciados sem prova.

Proposição K.1.15 (Leis de De Morgan)**.** *Sejam* X *e* Y *conjuntos, com* $Y \neq \emptyset$.

(i) $\displaystyle\bigcap_{B \in Y} (X \setminus B) = X \setminus \bigcup_{B \in Y} B.$ (ii) $\displaystyle\bigcup_{B \in Y} (X \setminus B) = X \setminus \bigcap_{B \in Y} B.$

Definição K.1.16. Dada uma relação binária R, a **relação inversa** de R, denotada por R^{-1}, é a relação $R^{-1} := \{(y, x) : x\,R\,y\}$, ou $R^{-1} := \{(y, x) \in \operatorname{im}(R) \times \operatorname{dom}(R) : x\,R\,y\}$ para os mais céticos. ¶

O importante sobre R^{-1} é que para quaisquer x e y vale $x\,R\,y \Leftrightarrow y\,R^{-1}\,x$. De tal relação, segue que $\operatorname{dom}(R) = \operatorname{im}(R^{-1})$, $\operatorname{im}(R) = \operatorname{dom}(R^{-1})$ e $(R^{-1})^{-1} = R$.

Proposição K.1.17. *Uma função* $f : X \to Y$ *é bijetora se, e somente se,* f^{-1} *é uma função de* Y *em* X.

Corolário K.1.18. *Se* $f : X \to Y$ *é uma função bijetora, então* $f^{-1} : Y \to X$ *é bijetora.*

[14] Espertinhos que definem $\bigcap \mathcal{F}$ como subconjunto de $\bigcup \mathcal{F}$ devem fazer o Exercício K.1, como punição.

Demonstração. Como $(f^{-1})^{-1} = f$ é uma função de X em Y, o resultado segue da proposição anterior. $\square$

Definição K.1.19. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são funções, então fica *bem definida* uma função $g \circ f\colon X \to Z$ dada pela identidade $(g \circ f)(x) := g \circ f(x) := g(f(x))$, para todo $x \in X$, que chamamos de (função) **composta** entre f e g. ¶

Proposição K.1.20. *Sejam $f\colon W \to X$, $g\colon X \to Y$ e $h\colon Y \to Z$ funções. Então as funções $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são iguais.*

A seguir, para um conjunto Z, denota-se por $\mathrm{Id}_Z\colon Z \to Z$ a função que faz $\mathrm{Id}_Z(z) := z$ para todo $z \in Z$. Tal função costuma ser xingada de **identidade** de Z.

Proposição K.1.21. *Uma função $f\colon X \to Y$ é bijetora se, e somente se, existe uma função $g\colon Y \to X$ satisfazendo $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Em particular, a função g é, necessariamente, a inversa de f.*

Definição K.1.22. Para uma função $f\colon X \to Y$ e um subconjunto $W \subseteq X$, a **restrição** da função f ao subconjunto W é a função $f|_W\colon W \to Y$ definida por $f|_W(w) := f(w)$ para todo $w \in W$. Mais ainda, para subconjuntos $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ fixados, consideram-se:

(i) a **imagem direta** de A por f, definida como $f[A] := \{f(a) : a \in A\}$;

(ii) a **pré-imagem** de B por f, definida como $f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$. ¶

Proposição K.1.23. *Sejam $f\colon X \to Y$ uma função e considere famílias $\mathcal{U} \subseteq \wp(X)$ e $\mathcal{V} \subseteq \wp(Y)$. Então:*

(i) $f\left[\bigcup \mathcal{U}\right] = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f[U]$ e $f\left[\bigcap \mathcal{U}\right] \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} f[U]$, com igualdade garantida no último caso se f for injetora;

(ii) $f^{-1}\left[\bigcup \mathcal{V}\right] = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}[V]$ e $f^{-1}\left[\bigcap \mathcal{V}\right] = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}[V]$.

Observação K.1.24 (“*boa definição*”)**.** Digamos que X e Y sejam conjuntos dotados de uma relação binária $R \subseteq X \times Y$. Nas frequentes situações em que R é uma função da forma $X \to Y$, é comum encontrar frases como “a função R está bem definida” ou ainda “... isto prova a boa definição da função R”.

Tais afirmações são apenas abusos de linguagem, e querem dizer que a relação binária R, *definida* de alguma forma apropriada dentro do contexto, é uma função: no caso, a “boa definição” não se refere à *existência* de R, mas sim ao elemento “$y := R(x)$”, que fica *bem definido* em função de x se R for uma função – afinal de contas, se existissem y e y' distintos com $x\,R\,y$ e $x\,R\,y'$, ambos poderiam competir pelo título de “$R(x)$”, tornando a coisa “mal-definida”. △

Definição K.1.25. Para conjuntos X e Y fixados, denotaremos por

$$Y^X := \{f \subseteq X \times Y : f \text{ é função de } X \text{ em } Y\},$$

o conjunto de todas as funções da forma $X \to Y$. ¶

K.1.2 Classes (próprias)

Embora o Paradoxo de Russell ensine que coisas do tipo $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ devam ser consideradas com cuidado, a notação por si só parece muito conveniente para ser abandonada sem protesto. Por isso, em vez de proibir, pode ser mais razoável *permitir* que a notação $X := \{x : \mathcal{P}(x)\}$ seja usada, mas com cautela, pois X pode não ser um conjunto, o que sugere a pergunta: se X não é conjunto, então o que é X?

Do ponto de vista de ZFC, uma resposta razoável poderia ser `Error404` – ou então um *not even wrong*: os objetos sobre os quais ZFC discursa são aqueles cuja existência é demonstrável pelos axiomas de ZFC, ou seja, conjuntos. Logo, *coisas* desse tipo não existem *formalmente*, como $\mathbb{V} := \{x : x = x\}$. Ainda assim, do lado de fora de ZFC, onde vivemos e nos comunicamos por meio de nossa (meta) linguagem, somos capazes de discursar sobre V, afinal de contas é justamente o que estamos fazendo.

Definição K.1.26. Vamos chamar $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ de **classe**, situação em que $y \in \{x : \mathcal{P}(x)\}$ será entendido como uma *abreviação* da sentença "y é um conjunto e $\mathcal{P}(y)$ é verdadeira." Adicionalmente:

(i) diremos que duas classes $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ e $\{x : \mathcal{Q}(x)\}$ são iguais se, e somente se, valer $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$;

(ii) diremos que $\{x : \mathcal{P}(x)\}$ é uma **classe própria** se não existir um conjunto Z satisfazendo $Z = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, o que significa, explicitamente, que não existe conjunto Z tal que para todo x tenha-se $x \in Z \Leftrightarrow \mathcal{P}(x)$. ¶

ZFC não vem de fábrica com suporte para tratar formalmente de classes próprias: oficialmente, quantificar sobre classes próprias seria quantificar sobre *fórmulas* (i.e., sobre *propriedades*), e a estrutura de nossa linguagem permite apenas a quantificação sobre objetos do universo do discurso, i.e., conjuntos. Mas há muitas coisas que podem ser feitas com classes, algumas mais ilegais do que outras.

Exemplo K.1.27. Todo conjunto é uma classe (*imprópria*) pois, para um conjunto X fixado, tem-se $y \in \{x : x \in X\}$ se, e somente se, $y \in X$. Por outro lado, $\mathbb{V} := \{x : x = x\}$ é uma classe própria (Proposição K.1.14), que será chamada de **universo**. ▲

Exemplo K.1.28. Dadas duas classes S e T, é natural considerar o *produto cartesiano* das classes S e T, denotado $S \times T$: seus elementos são os pares ordenados cujas coordenadas pertencem às classes correspondentes. Mais precisamente, para classes $S := \{x : \mathcal{P}(x)\}$ e $T := \{x : \mathcal{Q}(x)\}$, denota-se $S \times T := \{(x, y) : \mathcal{P}(x) \text{ e } \mathcal{Q}(y)\}$. Em particular, para *conjuntos* S e T, mostra-se que tal classe é imprópria, já que existe um conjunto Z que possui, precisamente, os elementos de $S \times T$. ▲

Também faz sentido tratar de *subclasses*, adaptando a ideia geral do que significa ser um subconjunto: dadas classes C e D, diz-se que C é **subclasse** de D se valer a implicação

$$x \in C \Rightarrow x \in D$$

para todo x. Note que isso apenas abrevia situações do tipo "$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$", em que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são *propriedades*.

Definição K.1.29. Diremos que uma subclasse $\mathcal{F} \subseteq S \times T$ é uma **função de classe**, escrita $\mathcal{F} : S \to T$, se para cada $x \in S$ existir um único $y \in T$ com $(x, y) \in \mathcal{F}$, caso em que se escreve $\mathcal{F}(x) := y$. ¶

Exemplo K.1.30. Para todo conjunto x existe um único y tal que $y = \{x\}$. Assim, tem-se uma função de classe $\mathcal{F} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ em que $\mathcal{F}(x) := \{x\}$ para todo x. ▲

Observação K.1.31. A rigor, funções de classes não são a mesma coisa que as *funções* (entre conjuntos). Formalmente, funções de classe abreviam *propriedades* que se comportam como funções (vide o exemplo anterior). △

Definição K.1.32. Dada uma função de classe $\mathcal{F} \colon S \to T$ e uma classe $C \subseteq S$, denota-se por $\{\mathcal{F}(c) : c \in C\}$ a subclasse de T dada pela *propriedade de* y "existe $x \in C$ tal que $\mathcal{F}(x) = y$", que passa a ser chamada de **imagem de C por $\mathcal{F}$** e denotada por $\mathcal{F}[C]$. ¶

Exemplo K.1.33. Com a notação acima, $\{\{x\} : x \in \mathbb{V}\}$ é tão somente a classe de *todos* os conjuntos unitários: $y \in \{\{x\} : x \in \mathbb{V}\}$ se, e somente se, existe x tal que $y = \{x\}$. Por sua vez, $\{\wp(X) : X \in \mathbb{V}\}$ é a classe de *todos* os conjuntos das partes. ▲

Com isso em mente, o Axioma-Esquema da Substituição **(Ax.7)** impõe que se X é um conjunto e $\mathcal{F}$ é uma função de classe, então $\mathcal{F}[X]$ é um conjunto, o que explicitamente significa que existe um conjunto Z tal que para todo z, $z \in Y$ se, e somente se, existe $x \in X$ com $\mathcal{F}(x) = y$.

K.1.3 Algumas relações binárias importantes

Uma relação binária recebe xingamentos adicionais a depender das condições satisfeitas por ela. Dentre as funções, já discutidas anteriormente, há um tipo especial que generaliza os pares ordenados e será muito importante ao longo do texto. Além dessas, dois tipos especiais de relações, as de *equivalência* e as de *ordem*, também merecem uma discussão um pouco mais calma.

Funções escolha (ou uplas)

Definição K.1.34. Para um conjunto $\mathcal{I}$ qualquer, considere fixado um conjunto X_i para cada $i \in \mathcal{I}$. A família

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i := \left\{ f \in \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i \right)^{\mathcal{I}} : \text{ para todo } i \in \mathcal{I} \text{ ocorre } f(i) \in X_i \right\}$$

será chamada de **produto cartesiano** generalizado (dos conjuntos X_i's). ¶

Observação K.1.35. A rigor, o produto cartesiano acima não se define *em termos* da *família indexada* $\mathcal{X} := \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$, mas sim *em função* da função $\varphi \colon \mathcal{I} \to \mathcal{X}$ dada por $\varphi(i) := X_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Por exemplo, note que para um conjunto X fixado, pode-se fazer $X_0 := X_1 := X$, e daí $\{X_i : i \in \{0, 1\}\} = \{X_0, X_1\} = \{X\}$, o que levaria uma *máquina* a entender o produto cartesiano $\prod\{X_0, X_1\}$ como sendo o conjunto X, e não o conjunto $X \times X$, provavelmente a intenção original.

Dito isso, é frequente encontrar afirmações do tipo "$\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é o produto cartesiano da família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$" ou "$\prod_{Y \in \mathcal{Y}} Y$", mas o leitor deve estar ciente de que se trata apenas de um abuso de notação e, formalmente, o produto é interpretado em termos da função que determina a indexação: no primeiro caso, $i \mapsto X_i$ e, no segundo, $Y \mapsto Y$. Considerações análogas se aplicam a outras *operações*, como $\sum$, $\bigoplus$, etc. △

Proposição K.1.36. *Sejam $f, g \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$. Então $f = g$ se, e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$ ocorrer $f(i) = g(i)$.*

Demonstração. Ora, f e g são funções da forma $\mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Logo, elas são iguais se, e somente, coincidirem em todos os pontos do domínio (Exercício K.3), como desejado. $\square$

Em vista da proposição anterior, faz sentido denotar um elemento $f \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ por $(f(i) : i \in \mathcal{I})$ ou $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Por analogia com o comportamento de pares, ternas e "*n-uplas*" ordenadas, tais funções costumam ser chamadas de **$\mathcal{I}$-uplas** ou apenas uplas. Porém, classicamente, uplas também são xingadas de **funções escolha**.

Corolário K.1.37. *Para $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}, (g_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, tem-se $(f_i)_{i\in\mathcal{I}} = (g_i)_{i\in\mathcal{I}}$ se, e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$ ocorrer $f_i = g_i$.*

É no sentido da nomenclatura acima que o Axioma da Escolha **(Ax.9)** postula a existência de funções escolha:

$$\forall \mathcal{A} \left(\mathcal{A} \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin \mathcal{A} \Rightarrow \prod_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset \right) \tag{K.3}$$

que explicitamente significa o seguinte: se $\mathcal{A}$ é conjunto não-vazio cujos elementos também são não-vazios, então existe uma função $f\colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ que *escolhe* um elemento em cada $A \in \mathcal{A}$, no sentido de que $f(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$, i.e., $f \in \prod_{A\in\mathcal{A}} A$.

Observação K.1.38. Note que a recíproca é automática para $\mathcal{A} \neq \emptyset$, i.e., se $\mathcal{A} \neq \emptyset$, então $\prod_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{A}$: pela contrapositiva, se $\emptyset \in \mathcal{A}$, então não pode ocorrer $f(\emptyset) \in \emptyset$. Por outro lado, para $\mathcal{A} = \emptyset$, tem-se $\prod_{A\in\mathcal{A}} A = \{\emptyset\}$, devido ao modo como produtos cartesianos foram definidos. $\triangle$

Este é o polêmico Axioma da Escolha, que postula a *existência* de uplas em produtos cartesianos generalizados ou, em outras palavras, a *existência* de escolhas arbitrárias, mesmo que *infinitas*. É justamente o seu caráter *não-construtivo* que incomoda diversos matemáticos: não há qualquer menção sobre como tais escolhas são feitas, elas apenas existem. Em contextos voltados para questões computacionais, isso não costuma ajudar. Porém, como veremos ao longo dos próximos capítulos, diversos resultados *razoáveis* dependem em maior ou menor grau de consequências do Axioma da Escolha.

Definição K.1.39. Dada uma $\mathcal{I}$-upla $\mathcal{X} := (X_i : i \in \mathcal{I})$ de conjuntos não-vazios, o produto cartesiano $\prod \mathcal{X} := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ vem de fábrica com uma $\mathcal{I}$-upla de funções $(\pi_i : i \in \mathcal{I})$, chamadas de **projeções**, onde para cada $j \in \mathcal{I}$ tem-se $\pi_j\colon \prod \mathcal{X} \to X_j$ dada pela regra $\pi_j\left((x_i)_{i\in\mathcal{I}}\right) := x_j \in X_j$ para cada $\mathcal{I}$-upla $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod \mathcal{X}$. ¶

Proposição K.1.40 (*Propriedade universal*[15] de $\prod_{i\in\mathcal{I}}$)**.** *Se X é um conjunto munido de uma função $f_i\colon X \to X_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$, então existe uma única função $F\colon X \to \prod \mathcal{X}$ satisfazendo $\pi_j \circ F = f_j$ para todo $j \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Basta fazer $F(x) := (f_i(x))_{i\in\mathcal{I}}$, que está *bem definida* (Observação K.1.24) pois cada uma das f_i's é uma função. A função F satisfaz as condições impostas, pois

- ✓ para qualquer $x \in X$, $\pi_j(F(x)) = \pi_j((f_i(x))_{i\in\mathcal{I}}) = f_j(x)$ e,
- ✓ se $G\colon X \to \prod \mathcal{X}$ satisfaz $\pi_j \circ G = f_j$ para todo $j \in \mathcal{I}$, então para um elemento $x \in X$ fixado existe uma $\mathcal{I}$-upla $y := (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod \mathcal{X}$ com $G(x) = y$, de modo que por um lado tem-se $\pi_j(G(x)) = y_j$ e, por outro lado, $\pi_j(G(x)) = f_j(x)$, donde segue que $y = F(x)$ e, por conseguinte, $G = F$. $\square$

[15] A expressão "propriedade universal" será explicada na Seção K.3.

Definição K.1.41. A função F da proposição acima será chamada de **produto** (**diagonal**) das funções f_i e será denotada por $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$. ¶

Supondo que para cada $i \in \mathcal{I}$ tenha-se uma função $g_i \colon X_i \to Y_i$ fixada, define-se

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} g_i \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i \tag{K.4}$$

que a cada $\mathcal{I}$-upla $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ associa a $\mathcal{I}$-upla $(g_i(x_i))_{i\in\mathcal{I}}$ de $\prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$. Naturalmente, ela se obtém da propriedade universal com $X \coloneqq \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e $f_i \coloneqq \pi_i \circ g_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Esta sim é chamada de **produto** (**cartesiano**) das funções g_i.

Relações de equivalência

Definição K.1.42. Uma relação binária $\sim$ num conjunto X é dita uma **relação de equivalência** se $\sim$ for

(i) **reflexiva**, i.e., se para todo $x \in X$ ocorrer $x \sim x$,

(ii) **simétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in X$, a ocorrência de $x \sim y$ acarretar $y \sim x$, e

(iii) **transitiva**, i.e., se para quaisquer $x, y, z \in X$, a ocorrência simultânea de $x \sim y$ e $y \sim z$ acarretar $x \sim z$.

Diremos também que x e y são **$\sim$-equivalentes** sempre que ocorrer $x \sim y$, com a omissão do sufixo "$\sim$" quando a relação $\sim$ estiver clara pelo contexto. ¶

Em certo sentido, uma relação de equivalência $\sim$ estabelece um critério por meio do qual objetos a princípio distintos podem ser vistos como iguais, ao mesmo tempo em que separa outros objetos distintos pelo mesmo critério.

Definição K.1.43. Para uma relação de equivalência $\sim$ sobre um conjunto X, diremos que o conjunto $\{y \in X : x \sim y\}$ é a **$\sim$-classe de equivalência de** x. ¶

Observação K.1.44. A notação para a classe de equivalência de x varia de acordo com o contexto. Frequentemente escreve-se $\overline{x}$ para denotá-la. Apesar disso, para a discussão a seguir, pode ser psicologicamente menos traumático escrever C_x em vez de $\overline{x}$. △

Proposição K.1.45. *Se X é um conjunto e $\sim$ é uma relação de equivalência em X, então*

(i) $X = \bigcup_{x\in X} C_x$, i.e., para todo $y \in X$, existe $x \in X$ com $y \in C_x$, e

(ii) para quaisquer $x, y \in X$ ocorre $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \emptyset$, com $C_x = C_y$ se, e somente se, $x \sim y$.

Demonstração. O primeiro item segue da reflexividade de $\sim$, enquanto o segundo item decorre da simetria e transitividade. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Posto de outra forma, a proposição acima mostra que as classes de uma relação de equivalência *particionam* o seu domínio, no seguinte sentido.

Definição K.1.46. Uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos não-vazios de X é uma **partição** de X se

(i) $X = \bigcup \mathcal{P}$ e

(ii) [16] se $P, Q \in \mathcal{P}$ e $P \neq Q$, então $P \cap Q = \emptyset$. ¶

Como o nome sugere, uma partição $\mathcal{P}$ de X *particiona* o conjunto X em *partes* ou blocos *dois a dois disjuntos*, de modo que cada elemento de X pertença a apenas um membro da partição. Assim, faz sentido dizer que dois elementos de X são $\mathcal{P}$*-equivalentes* se pertencerem ao mesmo membro de $\mathcal{P}$. Como o leitor atento certamente suspeita, isto define uma relação de equivalência legítima.

Proposição K.1.47. *Se $\mathcal{P}$ for uma partição de X, então a relação $\sim_{\mathcal{P}}$ definida por*

$$u \sim_{\mathcal{P}} v \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } \{u, v\} \subseteq P$$

é uma relação de equivalência em X. Além disso, $\mathcal{P} = \{[x]_{\sim_{\mathcal{P}}} : x \in X\}$.

Desse modo, uma relação de equivalência também particiona o seu domínio em "blocos" não-vazios dois a dois disjuntos: cada bloco contém precisamente todos os elementos do domínio que são equivalentes entre si. Em particular, como cada classe de equivalência $C \in X/\sim$ é um conjunto não-vazio, segue (do Axioma da Escolha) que existe uma upla

$$f \in \prod_{C \in X/\sim} C.$$

Explicitamente, f é uma função que para cada classe de equivalência C *escolhe* $f(C) \in C$. Daí, o conjunto $R := \{f(C) : C \in X/\sim\}$ é uma classe de representantes para $\sim$: de fato, se $f(C) \neq f(D)$ para certas classes $C, D \in X/\sim$, então deve-se ter $C \neq D$, caso contrário ocorreria $f(C) = f(D)$; logo, $C \cap D = \emptyset$ e, consequentemente, $f(C)$ e $f(D)$ não estão relacionados entre si. Em resumo:

Definição K.1.48. Um subconjunto $R \subseteq X$ é uma **classe de representantes** da relação $\sim$ se para todo $x \in X$ existe um único $r \in R$ tal que $x \sim r$. Analogamente definem-se classes de representantes de uma partição. ¶

Teorema K.1.49. *Se $\sim$ é uma relação de equivalência sobre um conjunto X, então existe uma classe de representantes para $\sim$. Vale o análogo para partições.*

(Boas) Ordens e recursão

Enquanto relações de equivalência permitem tratar como iguais coisas que são diferentes, *relações de ordem* se preocupam com a comparação entre objetos diferentes.

Definição K.1.50. Uma relação binária $\preceq$ num conjunto X é dita uma **relação de ordem** (**parcial**) se $\preceq$ for *reflexiva*, *transitiva* e **antissimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in X$, a ocorrência simultânea de $x \preceq y$ e $y \preceq x$ acarretar $x = y$. Escreve-se $(X, \preceq)$ para indicar o conjunto X dotado da ordem $\preceq$, que se diz (estar) (**parcialmente**) **ordenado** pela ordem (parcial) $\preceq$. ¶

Observação K.1.51 (Variações)**.** Alternativamente, diz-se que $\prec$ é uma **relação de ordem estrita** em X se $\prec$ for transitiva mas, em vez de reflexiva e antissimétrica, for

(i) **irreflexiva**, i.e., se para todo $x \in X$ ocorrer $x \not\prec x$, e

(ii) **assimétrica**, i.e., se para quaisquer $x, y \in X$, a ocorrência de $x \prec y$ acarretar $y \not\prec x$.

[16]Costuma-se expressar a condição (ii) como "os membros de $\mathcal{P}$ são dois a dois *disjuntos*".

Contudo, a diferença entre (relações de) *ordens parciais* e *estritas* é meramente virtual, no seguinte sentido:

- se $(\mathbb{S}, \prec)$ é uma ordem estrita, então a relação $\preceq$ definida por
$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \neq y \text{ e } x \prec y) \text{ ou } x = y$$
é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{S}$;
- se $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ é uma ordem parcial, então a relação $\sqsubset$ definida por
$$x \sqsubset y \Leftrightarrow x \neq y \text{ e } x \sqsubseteq y$$
é uma relação de ordem estrita em $\mathbb{P}$.

É claro que ao aplicar o primeiro procedimento à ordem estrita $\sqsubset$, retorna-se à ordem parcial original $\sqsubseteq$, enquanto o segundo procedimento aplicado à ordem parcial $\preceq$ resulta na ordem estrita original $\prec$. Assim, tem-se o direito de chamar tanto $(\mathbb{S}, \prec)$ quanto $(\mathbb{P}, \sqsubseteq)$ de *ordens*. Em tais situações, ficam implicitamente definidas a ordem parcial $\preceq$ e a ordem estrita $\sqsubset$ induzidas por $\prec$ e $\sqsubseteq$, respectivamente. $\triangle$

Exemplo K.1.52 (Leitura e Inversa)**.** Em geral, costuma-se ler uma expressão do tipo "$x \preceq y$" como "x é menor do que ou igual a y", enquanto "$x \prec y$" é lida como "x é (estritamente) menor do que y" – a menos que o contexto sugira uma terminologia própria para os símbolos.

Alternativamente, lê-se "$x \preceq y$" como "y é maior do que ou igual a x", o que esconde um fato que será importante: escrevendo $a \succeq b$ para indicar que $b \preceq a$, segue que $\succeq$ também é uma relação de ordem parcial sobre o conjunto em questão: explicitamente, $\succeq$ é apenas a relação inversa de $\preceq$. $\blacktriangle$

No que segue, fixam-se uma ordem $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto A de $\mathbb{P}$ e elementos $a \in A$ e $p \in \mathbb{P}$. A cada *conceito* a ser definido na ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ a seguir, *corresponderá* um conceito *dual*, ou *co-conceito*, que consiste em reescrever o conceito original na ordem inversa $(\mathbb{P}, \geq)$. Na prática, substituem-se as ocorrências dos símbolos $<$ e $\leq$ por $>$ e $\geq$, respectivamente. O leitor provavelmente já conhece algumas das definições na próxima tabela.

Conceito	**Co-conceito**
$a \in A$ é **elemento minimal de** A se não existe $x \in A$ com $x < a$	$a \in A$ é **elemento maximal** de A se não existe $x \in A$ com $a < x$
a é *um* **menor elemento** (ou **mínimo**) de A se $a \leq x$ ocorrer para todo $x \in A$	a é *um* **maior elemento** (ou **máximo**) de A se $x \leq a$ ocorrer para todo $x \in A$
p é um **limitante inferior** de A se $p \leq x$ para todo $x \in A$	p é um **limitante superior** de A se $x \leq p$ para todo $x \in A$
p é *um* **ínfimo** de A se p for *um* maior elemento do conjunto dos limitantes inferiores de A	p é *um* **supremo** de A se p for *um* menor elemento do conjunto dos limitante superiores de A
A é **limitado** se A é limitado inferiormente e superiormente	

Na tabela acima, escreve-se *um mínimo* (e *um máximo*) por puro preciosismo: se $a, a' \in A$ são mínimos de A, então ocorre $a \leq a'$ e $a' \leq a$, donde a antissimetria de $\leq$ acarreta $a = a'$. Como um máximo de A em $(\mathbb{P}, \leq)$ é um mínimo de A em $(\mathbb{P}, \geq)$, segue que máximos (quando existem) também são únicos.

Exemplo K.1.53 (Dualidade)**.** O argumento acima segue um arquétipo frequente em *teoria da ordem*, chamado de *princípio da dualidade*: ao se provar um determinado resultado sobre ordens válido em geral, a versão dual do resultado também deverá ser *verdadeira*, posto que $(\mathbb{P}, \geq)$ também é uma ordem parcial. ▲

Como *ínfimos* e *supremos* são definidos como certos máximos e mínimos, respectivamente, segue que eles também são únicos. A unicidade de tais elementos permite adotar notações mais práticas para designá-los.

Definição K.1.54. Sejam $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem parcial e $A \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto. Adotaremos as seguintes notações:

- o menor elemento de A (caso exista) é denotado $\min\limits_{a \in A} a$, $\min_{\leq} A$ ou apenas $\min A$;
- o maior elemento de A (caso exista) é denotado por $\max\limits_{a \in A} a$, $\max_{\leq} A$ ou apenas $\max A$;
- o ínfimo de A (caso exista) é denotado por $\inf\limits_{a \in A} a$, $\inf_{\leq} A$ ou apenas $\inf A$;
- o supremo de A (caso exista) é denotado por $\sup_{a \in A} a$, $\sup_{\leq} A$ ou apenas $\sup A$. ¶

Pode ser útil frisar que max e min abreviam *maximum* e *minimum*, os termos usuais na literatura estrangeira para se referir ao maior e menor elemento, respectivamente. Dito isso, não faria sentido associar notações para elementos maximais ou minimais pois, em geral, estes não são únicos.

Exemplo K.1.55. Dado um conjunto X, segue que $(\wp(X), \subseteq)$ é uma ordem parcial, já que a *relação* de inclusão é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Agora, se $\mathcal{C} \neq \emptyset$ é uma família de subconjuntos de X, então $\bigcap \mathcal{C}$ é o ínfimo de $\mathcal{C}$ na ordem $(\wp(X), \subseteq)$, pois

✓ (é limitante inferior) $\bigcap \mathcal{C} \subseteq C$ para todo $C \in \mathcal{C}$, e

✓ (é o maior limitante inferior) se $A \in \wp(X)$ é tal que $A \subseteq C$ para todo $C \in \mathcal{C}$, então $A \subseteq \bigcap \mathcal{C}$.

Analogamente mostra-se que $\bigcup \mathcal{C}$ é o supremo de $\mathcal{C}$ na ordem $(\wp(X), \subseteq)$. Em particular, ao se considerar $\mathcal{A} := \{A \in \wp(X) : A \neq \emptyset \text{ e } A \neq X\}$ com a *ordem induzida* de $\wp(X)$, verifica-se sem grandes dificuldades que $\{x\}$ é um elemento minimal de $\mathcal{A}$ para cada $x \in X$, que não é mínimo quando $X \neq \{x\}$. Nas mesmas situações, $X \setminus \{x\}$ é um elemento maximal de $\mathcal{A}$ que não é máximo. ▲

Observação K.1.56. Obviamente, se $\min A$ existe, então $\min A = \inf A$. Em certo sentido, o que difere um ínfimo de A de um mínimo de A é a pertinência ao conjunto. Precisamente, a é um ínfimo de A se a for o *melhor* limitante inferior de A, no seguinte sentido:

(i) além de valer $a \leq x$ para todo $x \in A$, vale $b \leq a$ para todo b que limita A inferiormente, i.e., a é o maior elemento do conjunto dos limitantes inferiores de A.

Em particular, a condição (i) *quase* acarreta o seguinte:

(ii) além de valer $a \leq x$ para todo $x \in A$, nenhum $b > a$ limita A inferiormente, i.e., se $b > a$, então existe $x \in A$ com $x < b$.

De fato, se algum $b > a$ limitasse A inferiormente, então a não seria o maior limitante inferior de A, o que garante apenas um $x \in A$ com $x \not\leq b$. △

A implicação (*i*) ⇒ (*ii*) anterior, bem como sua recíproca, se verificam em *ordens totais*.

Definição K.1.57. Uma ordem $(X, <)$ é **total** se para quaisquer $x, y \in X$ ocorrer somente um dos três casos a seguir: $x = y$, $x < y$ ou $y < x$. Evidentemente, se a ordem de X for parcial, basta dizer que para quaisquer $x, y \in X$ ocorre $x \leq y$ ou $y \leq x$. ¶

Agora, a implicação (*i*) ⇒ (*ii*) é automática. Já para a sua recíproca, se $(X, \leq)$ é uma ordem total que satisfaz a condição (*ii*), então a limita A inferiormente e nenhum $b > a$ faz o mesmo, donde segue que todo limitante inferior de A deve ser menor do que ou igual a a, posto que a ordem é total. Convém notar ainda que ordens totais colapsam as noções de mínimo e minimal, no seguinte sentido: a é elemento minimal de A se, e somente se, $a = \min A$, com um equivalência análoga para elementos maximais.

Definição K.1.58. Uma ordem parcial $\leq$ (ou estrita $<$) sobre um conjunto $\mathbb{P}$ é chamada de **boa ordem** se todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{P}$ admite menor elemento. ¶

Moralmente, um conjunto está bem ordenado quando seus elementos podem ser *enfileirados* numa certa *ordem*: $p_0 := \min \mathbb{P}$ é o primeiro da fila, $p_1 := \min(\mathbb{P} \setminus \{p_0\})$ é o segundo, etc. Veremos, em breve, que boas ordens são muito frequentes em ZFC, no seguinte sentido: todo conjunto admite uma boa ordem.

Como a analogia sugere, boas ordens permitem descrever processos que, intuitivamente, entendem-se como recursivos ou iterativos. Embora construções recursivas já tenham sido utilizadas implicitamente no texto, seu uso foi restrito a argumentos *finitários* e, nesse sentido, aceitáveis de um ponto de vista metalinguístico. Porém, boas ordens permitem implementar construções recursivas *dentro* da teoria e em contextos *infinitos*, graças à boa e velha indução.

Proposição K.1.59 (Indução em boas ordens)**.** *Seja* $(\mathbb{W}, \leq)$ *uma boa ordem e suponha que* $\mathcal{P}(x)$ *seja uma "propriedade de* x*" tal que para todo* $w \in \mathbb{W}$ *seja possível verificar*

$$(\forall v \in \mathbb{W} \quad v < w \Rightarrow \mathcal{P}(v)) \Rightarrow \mathcal{P}(w). \tag{K.5}$$

Então $\mathcal{P}(w)$ *é verdadeira para todo* $w \in \mathbb{W}$.

Demonstração. Se existisse $\tilde{w} \in \mathbb{W}$ com $\neg\mathcal{P}(\tilde{w})$, então o conjunto $T := \{w \in \mathbb{W} : \neg\mathcal{P}(w)\}$ das *testemunhas* seria não-vazio e, por conseguinte, seria possível tomar $\tilde{w} = \min T$. Por construção, teria-se $\forall v \in \mathbb{W}\ v < \tilde{w} \Rightarrow \mathcal{P}(v)$, com $\neg\mathcal{P}(\tilde{w})$, mostrando que $\mathcal{P}(x)$ não satisfaz (K.5). □

Vejamos agora, precisamente, *como* construir por recursão. Para isso, suponha que $(\mathbb{W}, \leq)$ seja uma boa ordem e $\mathcal{F} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ seja uma função de classe definida no universo, que será o *procedimento* utilizado na definição *recursiva* de uma função f cujo domínio é $\mathbb{W}$. A ideia é fazer o seguinte: para $w_0 := \min \mathbb{W}$, define-se $f(w_0) := \mathcal{F}(\emptyset)$; para $w_1 := \min(\mathbb{W} \setminus \{w_0\})$, define-se $f(w_1) := \mathcal{F}((f(w_0)))$; para $w_2 := \min(\mathbb{W} \setminus \{w_0, w_1\})$, define-se $f(w_2) := \mathcal{F}((f(w_0), f(w_1)))\ \ldots$

Ou seja: ao menor elemento de $\mathbb{W}$, chamado de w_0, associa-se $\mathcal{F}(\emptyset)$, pois não há *histórico* sobre o qual se possa aplicar o *procedimento*; no passo seguinte, toma-se o *sucessor* de w_0 em $\mathbb{W}$, chamado de w_1, precisamente o menor dos elementos de $\mathbb{W}$ maiores do que w_0, e a ele se associa $\mathcal{F}((f(w_0)))$, onde $(f(w_0))$ é o *histórico* da função f obtido até o passo anterior[17]; em seguida, ao sucessor de w_1, chamado de w_2, associa-se $\mathcal{F}((f(w_0), f(w_1)))$. Mais geralmente, a função f que se busca definir deve ser dada pela regra

$$f(w) := \mathcal{F}((f(v) : v < w)), \tag{K.6}$$

para cada $w \in \mathbb{W}$. O leitor tem todo o direito de suspeitar da notação[18] $(f(v) : v < w)$, mas ela é justificável: um bom *histórico* não lembra somente dos eventos que ocorreram numa determinada época, mas também da *ordem* em que ocorreram.

Não parece completamente óbvio que (K.6) defina qualquer coisa razoável, já que usa-se f (no lado direito) para definir f (no lado esquerdo), mas ainda nem sabemos que f existe[19]! Intuitivamente, do lado direito a letra f denota uma definição *parcial* de f que se usa para definir a função f no passo w. Formalmente, a coisa toda é feita por indução.

Definição K.1.60. Sejam $\mathcal{F}: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ uma função de classe e $(\mathbb{W}, \leq)$ uma boa ordem. Diremos que uma função f é **$\mathcal{F}$-recursiva em** $\mathbb{W}$ se $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{W}$ e f satisfaz a condição (K.6) para cada $w \in \mathbb{W}$. ¶

Lema K.1.61. *Nas condições acima, existe no máximo uma função $\mathcal{F}$-recursiva em $\mathbb{W}$.*

Demonstração. Supondo que f e g sejam funções distintas e $\mathcal{F}$-recursivas em $\mathbb{W}$, seria possível tomar o menor $\tilde{w} \in \mathbb{W}$ com $f(\tilde{w}) \neq g(\tilde{w})$. Daí, teria-se $f(v) = g(v)$ para todo $v < \tilde{w}$, resultando em $(f(v) : v < \tilde{w}) = (g(v) : v < \tilde{w})$ e, consequentemente, $f(\tilde{w}) = g(\tilde{w})$, uma contradição. Logo, se existir uma função $\mathcal{F}$-recursiva em $\mathbb{W}$, ela é única. □

Teorema K.1.62 (Recursão em boas ordens)**.** *Sejam $(\mathbb{W}, \leq)$ uma boa ordem e $\mathcal{F}: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ uma função de classes. Então existe uma única função $\mathcal{F}$-recursiva em $\mathbb{W}$.*

Demonstração. A unicidade segue do lema anterior. Para mostrar a existência, em vez de $\mathbb{W}$ toma-se y com $y \notin \mathbb{W}$ e estende-se a boa ordem de $\mathbb{W}$ para $Y := \mathbb{W} \cup \{y\}$ declarando $w < y$ para todo $w \in \mathbb{W}$. Agora, mostra-se por indução que para cada $v \in Y$ existe uma (única) função $\mathcal{F}$-recursiva em $D_v := \{u \in Y : u < v\}$, digamos f_v. Note que se isso for feito, então a função $\mathcal{F}$-recursiva em $\mathbb{W}$ *será* f_y.

Para $v \in Y$, assumamos que para cada $u < v$ exista uma função f_u, $\mathcal{F}$-recursiva em D_u, que deve ser única em virtude do lema anterior. Com tais informações, mostraremos que existe uma função $\mathcal{F}$-recursiva em D_v. Há dois casos para considerar.

(i) *Existe $u \in Y$ com $v = \min\{x \in Y : u < x\}$.*

Neste caso, verifica-se a igualdade $\{w \in Y : w < v\} = \{w \in Y : w \leq u\}$, de modo que f_v se obtém com $f_v(t) := f_u(t)$ se $t < u$, e $f_v(u) := \mathcal{F}((f_u(t) : t < u))$, que obviamente satisfaz as condições impostas.

(ii) *Não existe $u \in Y$ tal que $v = \min\{x \in Y : u < x\}$.*

[17] A rigor, é a função cujo domínio é $\{0\}$ e cuja imagem é o conjunto $\{f(w_0)\}$. O que é o 0? Aguarde.

[18] É também comum denotar $(f(v) : v < w)$ como $f|_{\mathbb{W}_{<w}}$, onde $\mathbb{W}_{<w} := \{v \in \mathbb{W} : v < w\}$, para indicar a função f restrita ao conjunto $\mathbb{W}_{<w}$.

[19] Por isso gosto de dizer que “antes de aprender recursão é preciso saber recursão”. Conjuguei na primeira pessoa pois o ditado clássico é “antes de aprender recursão, é preciso aprender recursão”: admito que essa última é mais engraçada, mas a primeira é mais fiel ao que realmente ocorre.

Neste caso, tem-se $\{w \in Y : w < v\} = \bigcup_{u<v} \{t \in Y : t < u\}$, e daí para cada elemento $t < v$ define-se $f_v(t) := f_u(t)$ para *qualquer* $u \in Y$ com $t < u < v$, o qual existe pela hipótese sobre v. Note que a função f_v está *bem definida*: se $u, u' < v$ são elementos distintos tais que $t < u$ e $t < u'$, então $u < u'$ ou $u' < u$; se valer $u < u'$, observe que

$$f_{u'}(s) = \mathcal{F}((f_{u'}(x) : x < s))$$

para qualquer $s < u$, mostrando que a restrição $f_{u'}|_{D_u}$ é $\mathcal{F}$-recursiva em D_u; como existe no máximo uma função $\mathcal{F}$-recursiva em D_u, segue que $f_{u'}|_{D_u} = f_u$ e, portanto, $f_{u'}(t) = f_u(t)$, mostrando que a definição de $f_v(t)$ independe da testemunha u escolhida. Enfim, a função f_v é $\mathcal{F}$-recursiva em D_v pois, se $w < v$, então existe $u < v$ com $w < u$ e

$$f_v(w) := f_u(w) = \mathcal{F}((f_u(t) : t < w)) = \mathcal{F}((f_v(t) : t < w)),$$

onde a última igualdade segue pois $f_u(t) = f_v(t)$ para todo $t < w$, dado que $t < u$. □

Observação K.1.63. Secretamente, a demonstração acima depende do Axioma-esquema da Substituição **(Ax.7)**. De fato, no caso (ii), fez-se

$$f_v := \bigcup_{u<v} f_u,$$

o que depende da existência do conjunto $\{f_u : u < v\}$: como para cada $u < v$ existe uma única função f_u, $\mathcal{G} := \{(u, f_u) : u \in \mathbb{W}$ e $u < v\}$ define uma função de classe $\mathcal{G} \colon D_v \to \mathbb{V}$, donde **(Ax.7)** garante a existência do conjunto $\mathcal{G}[D_v]$, cujos membros são todas as funções da forma f_u para $u < v$. △

K.1.4 Cardinalidade vs. números cardinais

Como aprendemos a lidar com *números* desde a tenra infância, há certas sutilezas sobre as noções de contagem e comparação de elementos que escapam do público leigo. A primeira delas é a de que números não são necessários nessa tarefa.

Definição K.1.64. Diremos que dois conjuntos **têm a mesma cardinalidade** ("quantidade de elementos") se existir uma bijeção entre os dois. ¶

Proposição K.1.65. *Sejam A, B e C conjuntos.*

(i) *Existe uma bijeção de A para A.*

(ii) *Se existe uma bijeção de A para B, então existe uma bijeção de B para A.*

(iii) *Se existe uma bijeção de A para B e outra bijeção de B para C, então existe uma bijeção de A para C.*

Intuitivamente, a proposição acima diz que a relação

$$A \approx B \Leftrightarrow \text{existe bijeção } A \to B,$$

define uma relação de equivalência sobre o universo $\mathbb{V}$ de todos os conjuntos. Naturalmente, isto é apenas intuitivo, posto que $\mathbb{V}$ não é um conjunto e relações de equivalência só podem ser definidas sobre conjuntos. Mesmo assim, com essa limitação técnica em mente, a *cardinalidade* de um conjunto X pode ser pensada como a *classe de equivalência* de X nesta pseudo-relação $\approx$, i.e., a classe de todos os conjuntos em bijeção com X. Entretanto, não há como formalizar tal intuição em ZFC.

Teorema K.1.66. *Para um conjunto X fixado, a classe $\#X := \{Y : X \approx Y\}$ é um conjunto se, e somente se, $X = \emptyset$.*

Demonstração. Basta notar que se $X \neq \emptyset$, então $\bigcup \#X = \mathbb{V}$. □

Como não se pode considerar a própria classe $\#X$ em ZFC, elege-se um único elemento em $\#X$, digamos $|X| \in \#X$, que será o representante de toda a classe: este *será* o *número cardinal de* X. Ao se fazer isso para todos os conjuntos, espera-se que conjuntos com o mesmo *número cardinal* tenham a mesma *cardinalidade*, i.e.,

$$X \approx Y \Leftrightarrow |X| = |Y|, \tag{K.7}$$

ou, em outras palavras: $\mathcal{C} := \{|X| : X \text{ é conjunto}\}$ deve ser uma *classe de representantes* da pseudo-relação de equivalência $\approx$. Evidentemente, isso traz um problema profundo: como *escolher* tais representantes?

Observação K.1.67 (Cardinais enquanto *façon de parler*)**.** A maneira *ingênua* de lidar com o problema consiste numa manobra abreviativa, que costuma ser útil em contextos mais elementares, principalmente para leitores predispostos a não se aprofundarem em aspectos simples da Teoria dos Conjuntos.

Com base na Definição K.1.64, escreve-se "$|X| = |Y|$" a fim de indicar a existência de uma bijeção $X \to Y$, cuja negação é indicada com $|X| \neq |Y|$. Por sua vez, mimetizando a experiência *finita concreta*, escreve-se "$|X| \leq |Y|$" para indicar a existência de injeção $X \to Y$, que se pode ler como "a cardinalidade de X é *menor* do que a cardinalidade de Y". Finalmente, "$|X| < |Y|$" abrevia "$|X| \leq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$", que se pode ler como "a cardinalidade de X é *estritamente menor* do que a cardinalidade de Y". Com isso, não é difícil provar a seguinte

Proposição K.1.68. *Para conjuntos X, Y e Z, valem as seguintes asserções.*

(i) $|X| = |Y| \Rightarrow |X| \leq |Y|$.

(ii) $|X| \leq |Y|$ *e* $|Y| \leq |Z| \Rightarrow |X| \leq |Z|$.

(iii) $X \subseteq Y \Rightarrow |X| \leq |Y|$.

Os dois primeiros itens da proposição acima sugerem que a *relação* de *desigualdade* entre cardinalidades tem comportamento parecido com o que se esperaria de uma ordem parcial. Faltaria apenas a *antissimetria* que, de fato, se verifica, mas é menos trivial do que parece: afinal de contas, os conjuntos acima podem ser *infinitos*. △

Definição K.1.69. Dada uma função $h \colon A \to A$, diremos que $a \in A$ é um **ponto fixo** da função h se ocorrer $h(a) = a$. ¶

Lema K.1.70 (Ponto Fixo de Tarski)**.** *Se X é um conjunto e $\varphi \colon \wp(X) \to \wp(X)$ é uma função **$\subseteq$-crescente**, i.e., tal que $A \subseteq B \subseteq X$ acarreta $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$, então φ tem ponto fixo.*

Demonstração. Com $\mathcal{F} := \{S \subseteq X : S \subseteq \varphi(S)\}$, $P := \bigcup \mathcal{F}$ é um ponto fixo de φ. □

Teorema K.1.71 (Cantor-Bernstein[20])**.** *Se existem injeções $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to X$, então existe uma bijeção $h \colon X \to Y$.*

[20] Também chamado de Cantor-Bernstein-Schröder.

Demonstração. Obteremos partições $\{X_0, X_1\}$ e $\{Y_0, Y_1\}$ de X e Y, respectivamente, tais que $f[X_0] = Y_0$ e $g[Y_1] = X_1$ pois, se isso for feito, então as restrições $f|_{X_0}: X_0 \to Y_0$ e $\tilde{g} := g|_{Y_1}: Y_1 \to X_1$ serão bijeções, donde bastará definir $h: X \to Y$ como $h(x) := f(x)$ se $x \in X_0$ e $h(x) := (\tilde{g})^{-1}(x)$ se $x \in X_1$.

Para obter a partição desejada, *tira-se da cartola* a função

$$\begin{aligned} \varphi: \wp(X) &\to \wp(X) \\ S &\mapsto X \setminus g\,[Y \setminus f[S]] \end{aligned} \tag{K.8}$$

que é $\subseteq$-crescente. Logo, pelo lema anterior, existe $X_0 \subseteq X$ satisfazendo a igualdade $X_0 = \varphi[X_0] := X \setminus g\,[Y \setminus f[X_0]]$, de modo que agora basta tomar $Y_0 := f[X_0]$, $X_1 := X \setminus X_0$ e $Y_1 := Y \setminus Y_0$, pois disso resulta $g[Y_1] = g\,[Y \setminus f[X_0]] = X_1$, como queríamos. □

Na prática, o Teorema de Cantor-Bernstein permite determinar igualdades do tipo $|X| = |Y|$ sem explicitar bijeções: por exemplo, bem mais adiante, a fim de demonstrar a identidade $|\mathbb{R}| = |\wp(\omega)|$, *exibiremos* injeções $\wp(\omega) \to \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \to \wp(\omega)$, onde $\mathbb{R}$ e ω denotam os conjuntos dos *números reais* e *naturais*, respectivamente. Agora, se a intenção for mostrar desigualdades estritas, uma boa ferramenta é o clássico

Teorema K.1.72 (Cantor)**.** *Dado um conjunto X, não existe sobrejeção $X \to \wp(X)$. Em outras palavras: $|X| < |\wp(X)|$.*

Demonstração. Para uma função $\varphi: X \to \wp(X)$, o conjunto $T := \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$ atesta a não-sobrejetividade de φ. De fato, se ocorresse $\varphi(t) = T$ para algum $t \in X$, a definição de T daria $t \in T \Leftrightarrow t \notin \varphi(t) = T$, uma contradição. Logo, não há sobrejeção $X \to \wp(X)$, como desejado. □

Números ordinais

Definição K.1.73. Um conjunto α é chamado de **número ordinal** (para os íntimos: ordinal) se

- α é um **conjunto transitivo**, i.e., se para todo x, $x \in \alpha \Rightarrow x \subseteq \alpha$, e
- $(\alpha, \in)$ é uma boa ordem *estrita*[21]. ¶

Exemplo K.1.74 (Alguns números ordinais)**.** O conjunto vazio $\emptyset$ é, por vacuidade, transitivo e bem ordenado pela relação de pertinência e, portanto, é um número ordinal. Definindo $0 := \emptyset$ e $1 := \{0\}$, segue que 1 também é número ordinal: seu único elemento é $0 := \emptyset \subseteq 1$ e, como o único subconjunto não-vazio de 1 é *o próprio*, segue que 1 é bem ordenado por $\in$. Analogamente, $2 := \{0, 1\}$, $3 := \{0, 1, 2\}$, $\ldots$ são ordinais. Esse tipo de coisa é bem mais geral do que parece. ▲

Definição K.1.75. Para cada X, denotaremos por $X_+ := X \cup \{X\}$ o conjunto que será chamado de **sucessor de** X. ¶

Observação K.1.76. É comum encontrar "X_+" denotado como "$X + 1$". Neste texto, isto só será adotado após a Observação K.1.123. △

Proposição K.1.77. *Se α é ordinal, então $\alpha_+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ é ordinal.*

[21] É realmente o que a definição sugere: fazendo $\in_\alpha := \{(x, y) \in \alpha \times \alpha : x \in y\}$, pede-se que a relação binária $\in_\alpha$ seja uma ordem estrita em α em que todo subconjunto não-vazio tenha menor elemento.

Demonstração. De fato, $\beta := \alpha_+$ é transitivo pois, se $\gamma \in \beta$, então $\gamma \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$ e, de ambos os casos, decorre $\gamma \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} := \beta$. Por outro lado, $(\beta, \in)$ é uma boa ordem, já que, na prática, β é obtido a partir de $(\alpha, \in)$ por meio do acréscimo de um maior elemento, tal qual se fez na demonstração do Teorema K.1.62. □

A proposição acima sugere que os elementos da *classe* $\mathrm{ORD} := \{\alpha : \alpha \text{ é ordinal}\}$ se comportam de alguma maneira *ordenada*, já que a cada ordinal α dado associa-se naturalmente o seu sucessor ordinal. Isto não é coincidência.

Definição K.1.78. Para ordinais α e β, escreve-se "$\alpha < \beta$" a fim de indicar "$\alpha \in \beta$". ¶

Proposição K.1.79. *Se β é ordinal, então $\beta = \{\alpha \in \mathrm{ORD} : \alpha < \beta\}$.*

Demonstração. É claro que se α é um ordinal satisfazendo $\alpha < \beta$, então $\alpha \in \beta$: esta é, justamente, a definição da notação "$\alpha < \beta$". É a recíproca que carece de demonstração, já que poderia ser o caso de que algum $\alpha \in \beta$ não fosse ordinal. Contudo, tal fenômeno não ocorre: em geral, se $x \in \beta$, então x é ordinal.

De fato, por β ser (conjunto) transitivo, x é transitivo: se $y \in x$, então $y \subseteq \beta$, de modo que qualquer $z \in y$ é um membro de β, donde o fato de $(\beta, \in)$ ser ordem permite inferir, pela transitividade da ordem, que $z \in x$. O fato de $(x, \in)$ ser boa ordem segue por x (também) ser subconjunto de β. □

Embora pareça circular, pensar num ordinal como a coleção de todos os ordinais que *vieram antes* é o modo mais prático de *lidar* com eles. Quanto à ilusão da circularidade, ela é apenas fruto da impressão de que para *definir* um ordinal β, primeiro precisa-se definir *todos* os ordinais anteriores, o que não é verdade: a definição de ordinal envolve apenas duas cláusulas, de modo que um conjunto é ordinal ou não é; o que a proposição acima faz, nesse sentido, é *descrever* um ordinal como a coleção de seus antecessores. Tal descrição se torna bastante relevante tendo em vista a *tricotomia dos ordinais*.

Lema K.1.80. *Para $\alpha, \beta \in \mathrm{ORD}$ valem as seguintes afirmações:*

(i) $\alpha \not< \alpha$;

(ii) $\alpha \cap \beta \in \mathrm{ORD}$;

(iii) $\beta \not\subseteq \alpha \Rightarrow \alpha \in \beta$.

Demonstração. Os dois primeiros itens ficam a cargo do leitor. Para o terceiro: observe que se $\beta \setminus \alpha$ é um subconjunto não-vazio de β, então $\beta \setminus \alpha$ tem menor elemento, digamos $\gamma \in \beta$; daí, deve ocorrer $\gamma \subseteq \alpha$ (pela minimalidade de γ) e $\alpha \subseteq \gamma$ (o contrário daria $\delta \in \alpha$ com $\delta \notin \gamma$, acarretando $\gamma \in \delta$ ou $\gamma = \delta$)[22]. □

Teorema K.1.81 (Tricotomia para ordinais)**.** *Para ordinais α e β, um e somente um dos casos a seguir ocorre: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.*

Demonstração. Note que $\alpha \cap \beta$ é um ordinal que satisfaz $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ e $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$. Porém, não pode ocorrer simultaneamente $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha$ e $\alpha \cap \beta \subsetneq \beta$: se ocorresse, resultaria $\alpha \cap \beta \in \alpha$ e $\alpha \cap \beta \in \beta$, i.e., $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, absurdo. □

[22] Não custa lembrar: toda boa ordem é ordem total.

Observação K.1.82. Para ordinais α e β, pode-se escrever "$\alpha \leq \beta$" como abreviação para "$\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$", donde não é difícil perceber que $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha \subseteq \beta$. Consequentemente, $\alpha = \beta$ se, e somente se, $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$. △

Em particular, como as ocorrências simultâneas de $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ acarretam $\alpha \in \gamma$, resulta que $(\textsc{Ord}, <)$ *se comporta* como uma ordem total. Embora seja razoável, dizer esse tipo de coisa só faz sentido na *metateoria*, em virtude da próxima

Proposição K.1.83. *Toda subclasse não-vazia $S \subseteq \textsc{Ord}$ tem $\in$-menor elemento, i.e., existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\beta \in S$.*

Demonstração. Se $\mathcal{P}$ é uma *propriedade* tal que $S := \{x : \mathcal{P}(x)\} \subseteq \textsc{Ord}$ e existe $\alpha \in S$, então $T := \{\beta \in \alpha : \mathcal{P}(\beta)\}$ satisfaz $\min S = \min T$ (se $T \neq \emptyset$) ou $\min S = \alpha$ (se $T = \emptyset$). □

Corolário K.1.84 (Paradoxo de Burali-Forti)**.** *$\textsc{Ord}$ é classe própria.*

Demonstração. Se $\textsc{Ord}$ fosse um conjunto, então $(\textsc{Ord}, \in)$ seria uma boa ordem. Como todo ordinal é um conjunto de ordinais, resultaria que $\textsc{Ord}$ é transitivo e, portanto, um ordinal, o que violaria o primeiro item do lema anterior. □

A princípio, a constatação de que $\textsc{Ord}$ é uma classe própria impediria a utilização *imediata* do Teorema da Recursão para, digamos, obter uma (única) função $\mathcal{G}$-recursiva $\mathcal{F} \colon \textsc{Ord} \to \mathbb{V}$ a partir de uma função de classe $\mathcal{G} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Mas isto é contornável.

Teorema K.1.85 (Recursão em ordinais)**.** *Seja $\mathcal{G} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ uma função de classe. Então existe uma única função de classe $\mathcal{G}$-recursiva em $\textsc{Ord}$, i.e., uma função de classe $\mathcal{F} \colon \textsc{Ord} \to \mathbb{V}$ tal que para todo ordinal α se verifica $\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}((\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha))$.*

Demonstração. Como cada ordinal α é um conjunto bem ordenado pela relação de pertinência, o Teorema K.1.62 garante que existe uma única função $\mathcal{G}$-recursiva em α, digamos t_α. Com isso em mente, considera-se $\mathcal{F} := \bigcup_{\alpha \in \textsc{Ord}} t_{\alpha_+}$, o que corresponde, explicitamente, ao seguinte: $(x, y) \in \mathcal{F}$ se, e somente se, $x \in \textsc{Ord}$ e $y = t_{x_+}(x)$. Pela existência e unicidade das funções $\mathcal{G}$-recursivas, segue que a classe $\mathcal{F}$ é, de fato, uma função de classe da forma $\textsc{Ord} \to \mathbb{V}$. Por construção, para cada ordinal α se tem

$$\mathcal{F}(\alpha) = t_{\alpha_+}(\alpha) = \mathcal{G}(\big(t_{\alpha_+}(\beta) : \beta < \alpha\big))$$

em virtude da $\mathcal{G}$-recursividade da função t_{α_+}. Como $\beta < \alpha$ acarreta $\beta_+ < \alpha_+$, resulta que $t_{\alpha_+}|_{\beta_+} = t_{\beta_+}$, donde se infere $t_{\alpha_+}(\beta) = t_{\beta_+}(\beta) = \mathcal{F}(\beta)$ e, portanto,

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}((\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha)),$$

como desejado. Os argumentos usados no Lema K.1.61 para mostrar a unicidade de funções recursivas podem ser reciclados aqui, em virtude da Proposição K.1.83. □

A versão da recursão acima é a que se utiliza para definir os *alephs*, a *hierarquia de von Neumann*, a *boa ordenação de Zermelo*, etc. Algumas dessas coisas serão feitas em breve. Mas antes:

Definição K.1.86. Um ordinal α é dito

- **sucessor** se existe $\beta < \alpha$ tal que $\alpha = \beta_+$,
- **limite** se para todo $\beta < \alpha$ ocorrer $\beta_+ < \alpha$,
- **cardinal** se não existe $\beta < \alpha$ com uma bijeção $\beta \to \alpha$. ¶

A ideia é que um número cardinal é o *primeiro* ordinal a alcançar uma *cardinalidade* não atingida nos estágios anteriores. Intuitivamente, não é difícil se convencer de que 0, 1, 2, 3 ... são cardinais. E depois?

O Axioma do Infinito e os números naturais

Implicitamente, o Exemplo K.1.74 sugeriu uma receita para construir, em ZFC, objetos que se comportam como os *números naturais* que conhecemos da *nossa vida*: faz-se $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, ..., $19 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, ... Mesmo que se aceite (metateoricamente) que todo número natural pode ser implementado em ZFC por meio desse *algoritmo*, precisa-se de um axioma que possibilite *coletar* todos esses números num conjunto só[23].

Definição K.1.87. Diz-se que um conjunto $\mathcal{J}$ é **indutivo** se $\emptyset \in \mathcal{J}$ e $X_+ \in \mathcal{J}$ sempre que $X \in \mathcal{J}$. ¶

Intuitivamente, um conjunto indutivo, se *existir*, não deve satisfazer qualquer definição razoável de finitude, já que sua condição impõe indefinidamente a ocorrência de *novos* elementos. É nesse sentido que o Axioma do Infinito **(Ax.6)** postula a existência de um conjunto infinito:

$$\exists \mathcal{I} \, (\emptyset \in \mathcal{I} \wedge \forall x \, (x \in \mathcal{I} \Rightarrow x_+ \in \mathcal{I})) \tag{K.9}$$

ou, verbalmente, *existe um conjunto indutivo* $\mathcal{I}$. Com isso posto, o *conjunto dos naturais* costuma ser definido como o *menor conjunto indutivo*, no seguinte sentido.

Definição K.1.88. $\omega := \{x \in \mathcal{I} : x \in \mathcal{J}$ para todo conjunto indutivo $\mathcal{J}\}$. Diremos que um conjunto x é um **número natural** se $x \in \omega$. *Naturalmente*, ω será chamado de **conjunto dos números naturais**. ¶

Lema K.1.89. *ω é um conjunto indutivo.*

Demonstração. A interseção de conjuntos indutivos é indutiva. □

Teorema K.1.90 (Indução finita)**.** *Seja $\mathcal{P}(x)$ uma "propriedade de x" tal que $\mathcal{P}(0)$ vale e para todo $n \in \omega$ tenha-se $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n_+)$. Então $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para todo $n \in \omega$.*

Demonstração. Considere $N := \{n \in \omega : \mathcal{P}(n)\}$. Por construção tem-se $N \subseteq \omega$. Por outro lado, N é conjunto indutivo: $0 \in N$ e, se $n \in N$, então $n \in \omega$ com $\mathcal{P}(n)$, donde a hipótese acerca de $\mathcal{P}$ acarreta em $\mathcal{P}(n_+)$, donde segue que $n_+ \in N$. Portanto, $\omega \subseteq N$. □

Corolário K.1.91. *ω é um ordinal.*

Demonstração. Por indução, não é difícil perceber que $\omega \subseteq \mathrm{ORD}$ e $m \subseteq \omega$ para todo $m \in \omega$. Portanto, ω é ordinal. □

Como todo membro de ω é ordinal, as notações anteriores permitem escrever $m < n$ para indicar que $m \in n$, a boa ordem nativa de ω. Diferentemente do que se tinha na subseção anterior, agora é possível considerar ordinais *infinitos*: ω, $\omega + 1 := \omega_+$, $\omega + 2 := (\omega + 1)_+$, ... O sentido em que tais objetos são *infinitos* pode ser expresso precisamente, enfim:

Definição K.1.92. Um conjunto X é **finito** se existe $n \in \omega$ em bijeção com X. Caso contrário, X é dito **infinito**. ¶

Teorema K.1.93. *Se X é finito, então existe um único $n \in \omega$ em bijeção com X.*

[23] Para o leitor familiar com a distinção entre *infinito potencial* e *infinito atual*: precisa-se postular a existência de um conjunto *infinito atual*.

Demonstração. Basta mostrar que se $n \in \omega$ e $X \subsetneq n$, então não existe bijeção entre n e X. Por sua vez, este é um exercício clássico de *indução finita.* □

Corolário K.1.94. *Se X é finito e $Y \subsetneq X$, então não existe bijeção entre X e Y.*

Corolário K.1.95. *ω é um conjunto infinito.*

Corolário K.1.96. *Se $\alpha \leq \omega$, então α é cardinal.*

O teorema anterior é a justificativa usual para utilizar os números naturais como os representantes das cardinalidades de conjuntos finitos, enquanto os dois últimos corolários destacam que todos os ordinais entre 0 e ω, capturam, cada um deles, um tipo de *cardinalidade.* A partir de ω, a situação se complica.

Exemplo K.1.97 (Hotel de Hilbert)**.** ω_+ não é um número cardinal. De fato, fazendo $\omega \mapsto 0$ e $n \mapsto n_+$, obtém-se uma bijeção entre ω e ω_+. ▲

Com base nisso, é prática comum dizer que se X é finito, então $|X| := n$, onde $n \in \omega$ é o único natural em bijeção com X, e escrever "$|X| = \infty$" nos casos em que X é infinito. Porém, o Teorema de Cantor mostra que a notação do caso infinito não satisfaz o critério de representabilidade expresso em (K.7): de fato, para X infinito, não é difícil se convencer de que $\wp(X)$ também deve ser infinito; porém, não há bijeção entre X e $\wp(X)$.

K.1.5 Reencarnações do Axioma da Escolha

A presente (e breve) seção se destina a apreciar algumas nuances mais sutis do Axioma da Escolha, não abordadas na Subseção K.1.3 e que serão úteis adiante.

Teorema K.1.98. *As seguintes afirmações são equivalentes em ZF.*

(AC_0)[24] *Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ é tal que $A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e $A \cap B = \emptyset$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$ distintos, então existe C com $|C \cap A| = 1$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

(AC_1) *Se $\emptyset \neq \mathcal{A} = \{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ e $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i \neq \emptyset$.*

(AC_2) *Toda relação de equivalência/partição admite uma classe de representantes.*

(AC_3) *Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{A}$, então existe uma função $f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Se vale (AC_0) e $\mathcal{A}$ é uma família como em (AC_1), então para cada $i \in \mathcal{I}$ define-se $B_i := \{i\} \times A_i$ e considera-se $\mathcal{B} := \{B_i : i \in \mathcal{I}\}$, cuja existência segue de **(Ax.3)** ou **(Ax.7)**. Como $\mathcal{B}$ satisfaz as hipóteses de (AC_0), segue que existe um conjunto C com $|C \cap B_i| = 1$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e, justamente, $f := \{c \in C : \exists i \in \mathcal{I}\,(c \in B_i)\}$ é tal que $f \in \prod_{i\in\mathcal{I}} A_i$. A implicação ($AC_1$) ⇒ ($AC_2$) já foi feita no Teorema K.1.49. Para (AC_2) ⇒ (AC_3), fixa-se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ uma família de conjuntos não-vazios e para cada $A \in \mathcal{A}$ considera-se $A' := \{A\} \times A$. Sobre $\mathcal{B} := \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A'$, que existe por conta de **(Ax.7)** e **(Ax.4)**, define-se a relação $\approx$ por

$$P \approx Q \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} \quad \text{tal que} \quad P, Q \in A'.$$

Como $\approx$ é, claramente, uma relação de equivalência, (AC_2) assegura uma classe de representantes $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ de $\approx$. Logo, $\mathcal{R}$ é tal que para todo $P \in \mathcal{B}$ existe um único $R \in \mathcal{R}$ com $P \approx R$. O leitor deve se convencer de que $\bigcup \mathcal{R}$ é uma função escolha da forma $\mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$, como desejado. A implicação (AC_3) ⇒ (AC_0), por fim, é automática. □

[24] Essencialmente a formulação original do Axioma da Escolha, como feita por Zermelo em 1904.

A *magia* do Axioma da Escolha, i.e., o seu *caráter não-construtivo*, se expressa no conjunto C (no caso de (AC_0)), na existência da função g (no caso de (AC_1)), na classe de representantes $\mathcal{R}$ (no caso de (AC_2)) e na função f (no caso de (AC_3)): C, g, $\mathcal{R}$ e f são as *regras* com as quais se *escolhe* um elemento de cada membro da família $\mathcal{A}$; porém, tais regras não são *explícitas* – elas existem, e é isso. Porém, nem sempre é assim: há situações em que é *possível* dar uma regra explícita de escolha. O caso canônico, em certo sentido, depende de uma boa ordem.

Lema K.1.99. *Seja $\mathcal{F}\colon S \to T$ uma função de classes. Se T é um conjunto e S é classe própria, então $\mathcal{F}$ não é injetora*[25].

Demonstração. Se fosse, então $\mathcal{G} := \{(t,s) : \mathcal{F}(s) = t\} \subseteq T \times S$ seria uma função de classe da forma $\mathcal{F}[S] \to S$: por um lado, dado $t \in \mathcal{F}[S]$, existe (por hipótese) $s \in S$ com $\mathcal{F}(s) = t$, mostrando que $(t,s) \in \mathcal{G}$; por outro lado, a injetividade assegura que tal s é único. Logo, **(Ax.7)** garante que $\mathcal{G}[T]$ é um conjunto, o que é absurdo: se $s \in S$, então $t := \mathcal{F}(s) \in \mathcal{F}[S]$ e daí $\mathcal{G}(t) = s$, mostrando que $S \subseteq \mathcal{G}[T]$ e, portanto, é um conjunto[26]. $\square$

Teorema K.1.100. *As seguintes afirmações são equivalentes em ZF.*

(AC_3) *Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{A}$, então existe uma função $f\colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

(AC_4) (*Teorema da Boa Ordem de Zermelo*) *todo conjunto admite uma boa ordem.*

Demonstração. (AC_4) implica (AC_3) de modo muito natural: toma-se uma boa ordem $\leq$ sobre $\bigcup \mathcal{A}$ e define-se $f\colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ declarando $f(A) := \min A$.

Para a recíproca, fixado um conjunto X, basta encontrar um ordinal em bijeção com X. Como o caso $X := \emptyset$ é automático, supõe-se $X \neq \emptyset$, e isso permite tomar uma função escolha $f\colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A} := \wp(X) \setminus \{\emptyset\}$. Agora, para $Y \notin X$, seja $\mathcal{G}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ a função de classe que faz $\mathcal{G}(x) := f(X \setminus \operatorname{im}(x))$ se x for uma função satisfazendo $X \setminus \operatorname{im}(x) \neq \emptyset$, ou $\mathcal{G}(x) := Y$ caso contrário. Pelo Teorema da Recursão, existe uma única função de classe $\mathcal{G}$-recursiva $\mathcal{F}\colon \textsc{Ord} \to \mathbb{V}$, i.e., satisfazendo $\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}((\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha))$ para todo $\alpha \in \textsc{Ord}$. Note que, na prática:

(i) $\mathcal{F}(\alpha) = f(X \setminus \{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\})$ se $X \setminus \{\mathcal{F}(\beta) : \beta < \alpha\} \neq \emptyset$, e

(ii) $\mathcal{F}(\alpha) = Y$ caso contrário.

Agora, o *Katzensprung*[27] é observar o seguinte: *se $\mathcal{F}$ satisfaz as duas condições acima, então $\mathcal{F}(\alpha) = Y$ para algum número ordinal α.* De fato, se ocorresse o contrário, então a condição (i) faria de $\mathcal{F}$ uma função de classe injetiva da forma $\textsc{Ord} \to X$, o que não pode ocorrer em virtude do lema anterior.

Enquanto o *Katzensprung* garante a existência de *algum* ordinal γ com $\mathcal{F}(\gamma) = Y$, a Proposição K.1.83 permite assumir que γ é o menor com tal propriedade. Logo, para todo $\alpha < \gamma$, $\mathcal{F}(\alpha)$ é dada pela condição (i) acima e, portanto, a restrição de $\mathcal{F}$ ao ordinal γ resulta numa injeção $\gamma \to X$. Ocorre que tal restrição também é sobrejetora: se existisse $x \in X$ com $\mathcal{F}(\alpha) \neq x$ para todo $\alpha < \gamma$, teria-se $X \setminus \{\mathcal{F}(\alpha) : \alpha < \gamma\} \neq \emptyset$ e isso daria $\mathcal{F}(\gamma) \neq Y$, contrariando o modo como γ foi tomado. $\square$

[25] A definição de injetividade para funções de classe é uma extensão óbvia da injetividade de funções.

[26] Esta conclusão é apenas o Axioma-esquema da Separação **(Ax.3)** refraseado em termos de classes: toda subclasse de um conjunto é um conjunto.

[27] *Pulo do gato*, em alemão. Ou pelo menos foi o que me disse Guilherme Schultz na ocasião em que ministrei Análise II para ele.

Há uma *última*[28] encarnação típica do Axioma da Escolha, que essencialmente funciona como uma "recursão de bolso" – graças a ela, muitas *pessoas* dormem tranquilas sem nunca terem ouvido a expressão "recursão transfinita". Porém, tudo tem um preço.

Definição K.1.101. Para uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ e um subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}$, diz-se que $C \subseteq \mathbb{P}$ é uma **cadeia** se quaisquer dois elementos de C são comparáveis segundo a relação $\leq$, i.e., se para quaisquer $x, y \in C$ valer $x \leq y$ ou $y \leq x$. ¶

Agora, suponha que $(\mathbb{P}, \leq)$ seja uma ordem parcial, com $\mathbb{P} \neq \emptyset$, em que toda cadeia tenha limitante superior. Se visualizarmos $\mathbb{P}$ como uma *árvore* cujas ramificações são determinadas pelas relações de ordem entre seus elementos, podemos imaginar cadeias como ramos *lineares* ou *caminhos*, de modo que a sentença acima se torna algo como *todo ramo da* árvore *admite uma extensão*.

Se $\mathbb{P}$ for uma *árvore* com tal propriedade, podemos recursivamente determinar um caminho entre os seus nós de modo a sempre *permanecermos* num mesmo ramo. Dessa forma, eventualmente atingiremos uma *folha*: um nó do ramo que não admite extensão, ou mais precisamente, um elemento maximal. De fato:

- escolhe-se $p_0 \in \mathbb{P}$, de modo que $\{p_0\}$ é uma cadeia de $\mathbb{P}$;
  - se, por ventura, p_0 for maximal, então não há como estender a cadeia, i.e., p_0 é uma folha;
  - se não, escolhe-se $p_1 \in \mathbb{P}$ com $p_0 < p_1$ e observa-se que $\{p_0, p_1\}$ é uma cadeia;
    - se p_1 for maximal, então atingiu-se uma folha;
    - se não, ...

Como na demonstração de que (AC$_3$) implica (AC$_4$), a construção desse caminho se esgota em algum estágio λ, resultando numa cadeia $\{p_\alpha : \alpha < \lambda\}$ em $\mathbb{P}$, sem extensões. Pela hipótese sobre $\mathbb{P}$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p_\alpha \leq p$ para todo $\alpha < \lambda$, i.e., a cadeia $\{p_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tem um limitante superior. Se p não fosse maximal, então a cadeia $\{p_\alpha : \alpha < \lambda\}$ poderia ser estendida, contrariando a constatação de esgotamento anterior.

A menos de formalidade, isso prova a parte não-trivial do

Teorema K.1.102. *As seguintes afirmações são equivalentes em ZF.*

(AC$_3$) (*Axioma da Escolha*) *Se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{A}$, então existe uma função $f \colon \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

(AC$_5$) (*Lema de Zorn*[29]) *Se $\mathbb{P} \neq \emptyset$ é uma ordem parcial em que toda cadeia tem limitante superior, então $\mathbb{P}$ tem um elemento maximal.*

Demonstração. Para mostrar (AC$_3$) $\Rightarrow$ (AC$_5$), precisa-se apenas formalizar a recursão descrita na discussão anterior. Para a recíproca, basta observar que para um conjunto $\mathcal{A} \neq \emptyset$ com $\emptyset \notin \mathcal{A}$, a família

$$\mathbb{P} := \left\{ f \subseteq \mathcal{A} \times \bigcup \mathcal{A} : f \text{ é função, } \operatorname{dom}(f) \neq \emptyset \text{ e } \forall A \in \operatorname{dom}(f)\ f(A) \in A \right\}$$

é um conjunto não-vazio, parcialmente ordenado pela inclusão e no qual toda cadeia tem limitante superior. Daí, qualquer elemento maximal de $\mathbb{P}$ é uma função escolha da forma procurada. O leitor pode cuidar dos detalhes. □

[28] Existem muitas reformulações equivalentes do Axioma da Escolha. Ao longo deste texto encontraremos mais algumas.

[29] Embora o primeiro a prová-lo tenha sido K. Kuratowski.

K.1.6 Números cardinais, de novo

Definição K.1.103. Dado um conjunto X, o **número cardinal de** X, denotado por $|X|$, é o menor número ordinal α em bijeção com X. ¶

Proposição K.1.104. *A definição acima faz sentido e satisfaz ao critério* (K.7) *da página 33.*

Ainda convém notar que, como ordinais são cardinais, a tricotomia de ordinais assegura que para quaisquer dois conjuntos X e Y, exatamente um dos seguintes casos deve ocorrer: $|X| = |Y|$, $|X| < |Y|$ ou $|Y| < |X|$. Nesse sentido, a próxima proposição mostra que tais desigualdades são compatíveis com as notações análogas usadas por pessoas preguiçosas (Observação K.1.67).

Proposição K.1.105. *Sejam X e Y conjuntos quaisquer.*

1. *São equivalentes:*
   (i) $|X| \leq |Y|$ *(como desigualdade de ordinais);*
   (ii) *existe injeção* $X \to Y$*,*
   (iii) *existe sobrejeção* $Y \to X$*.*
2. *São equivalentes:*
   (i) $|X| < |Y|$ *(como desigualdade de ordinais);*
   (ii) *não existe injeção* $Y \to X$*;*
   (iii) *não existe sobrejeção* $X \to Y$*.*

Demonstração. Se $|X| \leq |Y|$, então o número cardinal $|X|$ é subconjunto do cardinal $|Y|$, donde segue que existe uma função injetora (a inclusão!) $|X| \to |Y|$. Logo, o primeiro *grupo* de equivalências segue de observações simples acerca do comportamento de injeções e sobrejeções perante a composição[30]. O segundo grupo de equivalências segue da tricotomia de ordinais aliada ao primeiro grupo de equivalências: por exemplo, se $|X| < |Y|$ e existisse uma injeção $Y \to X$, teria-se $|Y| \leq |X|$ e $|X| < |Y|$ como ordinais, o que não pode ocorrer. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Corolário K.1.106. *Se f é uma função, então* $|\operatorname{im}(f)| \leq |\operatorname{dom}(f)|$.

Definição K.1.107. Dado um cardinal κ, denota-se por κ^+ o menor cardinal estritamente maior do que κ, chamado **sucessor de** κ. ¶

Proposição K.1.108. *Todo cardinal tem um sucessor.*

Demonstração. Dado um cardinal κ, o Teorema de Cantor acarreta $\kappa < |\wp(\kappa)|$, mostrando que a classe $S := \{\lambda : \lambda \text{ é cardinal e } \kappa < \lambda\}$ é não-vazia. Note que $\min S$ satisfaz exatamente as condições para ser xingado de κ^+. □

[30] Exercícios K.8, K.9 e K.10.

Observação K.1.109 (Cardinalidade vs. ordem, de novo)**.** É importante não confundir κ^+ com κ_+: embora ambos coincidam no caso finito, a situação muda completamente se κ for infinito. De fato, se α é um ordinal com $\omega \leq \alpha$, então $\alpha_+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ não é um cardinal: obtém-se uma bijeção[31] $\alpha_+ \to \alpha$ fazendo

$$\alpha \mapsto 0, \quad n \mapsto n_+ \text{ se } n \in \omega \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad \gamma \mapsto \gamma \text{ se } \gamma \in \alpha \setminus \omega,$$

mostrando que α_+ não é cardinal. Note que a contrapositiva desse argumento diz que cardinais infinitos são, necessariamente, ordinais limite. △

O Exercício K.29, já utilizado na demonstração do *Paradoxo* de Burali-Forti, secretamente atesta que se $\mathcal{X}$ for um conjunto de ordinais, então existe um ordinal digno de ser xingado de $\sup \mathcal{X}$: basta fazer $\sup \mathcal{X} := \bigcup \mathcal{X}$. Agora, se $\mathcal{X}$ for um conjunto de *cardinais*, então $\sup \mathcal{X}$ também é um cardinal: a existência de uma injeção $\sup \mathcal{X} \to \alpha$ para algum $\alpha \in \kappa$ com $\kappa \in \mathcal{X}$ resulta numa injeção $\kappa \to \alpha$, contrariando o fato de κ ser cardinal. Com isso, pode-se enfim introduzir a célebre notação dos *alephs* para os cardinais *transfinitos*.

Definição K.1.110. Para um número ordinal α, define-se $\aleph_\alpha$ recursivamente como:

(i) $\aleph_0 := \omega$;

(ii) $\aleph_{\alpha_+} := (\aleph_\alpha)^+$ para qualquer ordinal α; e

(iii) $\aleph_\alpha := \sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi$ se α for um ordinal limite. ¶

Observação K.1.111. Em contextos mais preocupados com ordem do que com cardinalidade, escreve-se ω_α em vez de $\aleph_\alpha$. △

A descrição dos *alephs*[32] estipula $\aleph_0 := \omega$ como *primeiro* número cardinal infinito. Dado que $1 = 0_+$, a definição impõe $\aleph_1 := (\aleph_0)^+$, o *primeiro* número cardinal maior do que $\aleph_0$ ou, com a terminologia clássica, o menor número cardinal não-enumerável. De modo análogo, $\aleph_2 := (\aleph_1)^+$ é o *primeiro* número cardinal maior do que $\aleph_1$. Também faz sentido considerar $\aleph_\omega := \sup_{n<\omega} \aleph_n$, explicitamente o primeiro número cardinal maior do que *todos* os $\aleph_n$'s para $n < \omega$, enquanto $\aleph_{\omega_+} := (\aleph_\omega)^+$ é o *primeiro* maior do que $\aleph_\omega$.

Se fosse legítimo considerar as classes Ord e Card $:= \{\kappa : \kappa \text{ é cardinal e } \kappa \geq \omega\}$, a descrição dos $\aleph$'s seria, na verdade, uma função $\aleph \colon \text{Ord} \to \text{Card}$ que associa cada ordinal α ao α-ésimo *aleph* de modo a *converter* a operação de sucessão ordinal[33] ($\alpha \mapsto \alpha_+$) em sucessão cardinal ($\kappa \mapsto \kappa^+$) por meio da identidade $\aleph_{\alpha_+} = \aleph_\alpha^+$. Porém, Ord e Card não são conjuntos[34], o que inviabiliza o uso formal desta interpretação *em* ZFC. Se não fosse isso, o próximo teorema poderia ser enunciado de maneira muito simples: $\aleph$ é um *isomorfismo* de ordens.

Teorema K.1.112. *Para todo cardinal infinito κ existe um único ordinal α tal que $\kappa = \aleph_\alpha$. Além disso, $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ se, e somente se, $\alpha < \beta$.*

[31] Devido ao Teorema de Cantor-Bernstein, a fim de mostrar que um certo ordinal β **não** é cardinal basta obter uma injeção $\beta \to \gamma$ para algum $\gamma < \beta$.

[32] Que utiliza um refinamento da Recursão em ordinais como descrita no Teorema K.1.85. Enquanto a versão estendida do *Kindergarten* não conhecer a luz do sol, o leitor interessado pode conferir [55].

[33] O leitor pode preferir escrever $\alpha + 1$ em vez de α_+ para denotar o sucessor ordinal de α, i.e., $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. Embora esta seja a notação padrão na literatura conjuntista, neste texto ela só será *oficializada* após as discussões sobre aritmética ordinal e cardinal.

[34] Em particular, perguntas como "qual o número cardinal de $\{\aleph_\alpha : \alpha \in \text{Ord}\}$?" nem fazem sentido *em ZFC*, posto que apenas conjuntos tem números cardinais.

Aritmética cardinal

Definição K.1.113. Para cardinais κ e λ, definem-se:

(i) (**adição** ou **soma**) $\kappa + \lambda := |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$;

(ii) (**multiplicação** ou **produto**) $\kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|$;

(iii) (**potência**) $\kappa^\lambda := |\kappa^\lambda|$. ¶

Definição K.1.114. Dados um conjunto $\mathcal{I}$ e cardinais κ_i para cada $i \in \mathcal{I}$, definem-se:

(i) $\sum_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i := \left|\bigcup_{i\in\mathcal{I}} (\kappa_i \times \{i\})\right|$;

(ii) $\prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i := \left|\prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i\right|$. ¶

É evidente que a última definição generaliza as duas primeiras cláusulas da anterior. Convém destacar que *outros* representantes poderiam ser colocados no lado direito das identidades, no seguinte sentido[35]

Proposição K.1.115. *Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto, $\mathcal{A} := (A_i : i \in \mathcal{I})$ e $\mathcal{B} := (B_i : i \in \mathcal{I})$ uplas de conjuntos tais que $|A_i| \leq |B_i|$ para cada $i \in \mathcal{I}$.*

(i) Se cada upla é composta por termos dois a dois disjuntos, então $\left|\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right| \leq \left|\bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i\right|$.

(ii) Tem-se $\left|\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i\right| \leq \left|\prod_{i\in\mathcal{I}} B_i\right|$.

Além disso, se $|A_i| = |B_i|$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então ocorrem igualdade em ambos os casos.

Demonstração. No primeiro item, para cada $j \in \mathcal{I}$ existe uma injeção $f_j \colon A_j \to B_j$, o que permite definir $f \colon \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$ com $f(x) = f_j(x)$, onde $j \in \mathcal{I}$ é o único tal que $x \in A_j$. Claramente f é uma injeção.

Para a segunda afirmação, para cada $i \in \mathcal{I}$ fixa-se uma função $f_i \colon A_i \to B_i$ a fim de definir a função[36]

$$\begin{aligned} \prod_{i\in\mathcal{I}} f_i \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} A_i &\longrightarrow \prod_{i\in\mathcal{I}} B_i \\ (a_i)_{i\in\mathcal{I}} &\longmapsto (f_i(a_i))_{i\in\mathcal{I}} \end{aligned}$$

Note que se cada f_i é uma injeção, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} f_i$ é uma injeção. O final segue do Teorema de Cantor-Bernstein. □

Observação K.1.116. Quando $(A_i : i \in \mathcal{I})$ é uma $\mathcal{I}$-upla de conjuntos não necessariamente disjuntos, garante-se apenas

$$\left|\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right| \leq \sum_{i\in\mathcal{I}} |A_i|,$$

que segue da injeção $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \times \{i\}$ dada por $x \mapsto (x, \min\{j \in \mathcal{I} : x \in A_j\})$, onde implicitamente se assume $\mathcal{I}$ bem-ordenado. △

[35] Em particular, tal proposição justifica o modo de se fazer aritmética cardinal sem cardinais mencionado anteriormente.

[36] Também denotada como $g_0 \times \ldots \times g_n$ caso se tenha $\mathcal{I} := \{0, \ldots, n\}$.

Corolário K.1.117. *Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto e para cada $i \in \mathcal{I}$ considere cardinais κ_i e λ_i.*

(*i*) *(Monotonicidade) Se $\kappa_i \leq \lambda_i$ para todo i, então $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i \leq \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i$ e $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i \leq \prod\limits_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i$.*

(*ii*) *(Comutatividade) Se $\psi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ é uma bijeção, então*

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i = \sum_{\psi(i)\in\mathcal{I}} \kappa_{\psi(i)} \quad e \quad \prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i = \prod_{\psi(i)\in\mathcal{I}} \kappa_{\psi(i)}.$$

(*iii*) *(Associatividade) Se $\{J : J \in \mathcal{J}\}$ é uma partição de $\mathcal{I}$, então*

$$\sum_{J\in\mathcal{J}} \left(\sum_{j\in J} \kappa_j\right) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i \quad e \quad \prod_{J\in\mathcal{J}} \left(\prod_{j\in J} \kappa_j\right) = \prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i.$$

Demonstração. A monotonicidade decorre da proposição anterior, e as demais afirmações referentes a adição são imediatas. Para o produto, a correspondência $(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto \left(a_{\psi(i)}\right)_{\psi(i)\in\mathcal{I}}$ define uma bijeção entre $\prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i$ e $\prod_{\psi(i)\in\mathcal{I}} \kappa_{\psi(i)}$, o que estabelece a comutatividade. Para a associatividade, note que numa $\mathcal{J}$-upla $(f_J)_{J\in\mathcal{J}}$, cada f_J é uma J-upla, i.e., $f_J = (f_J(j))_{j\in J}$. Como $\mathcal{J}$ é uma partição de $\mathcal{I}$, para cada $i \in \mathcal{I}$ existe um único $J(i) \in \mathcal{J}$ tal que $i \in J(i)$, e daí a função a seguir é claramente uma bijeção:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \prod_{J\in\mathcal{J}} \left(\prod_{j\in J} \kappa_j\right) &\longrightarrow \prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i \\ (f_J)_{J\in\mathcal{J}} &\longmapsto \left(f_{J(i)}(i)\right)_{i\in\mathcal{I}} \end{aligned}$$

□

Proposição K.1.118. *Sejam A, B, C e D conjuntos com $|A| \leq |C|$ e $|B| \leq |D|$. Então vale $|A^B| \leq |C^D|$. Em particular, se $|A| = |C|$ e $|B| = |D|$, então $|A^B| = |C^D|$.*

Corolário K.1.119. *Se $\kappa_0 \leq \kappa_1$ e $\lambda_0 \leq \lambda_1$ são cardinais, então $\kappa_0^{\lambda_0} \leq \kappa_1^{\lambda_1}$.*

Proposição K.1.120. *Para qualquer conjunto X vale $|\wp(X)| = 2^{|X|}$.*

Corolário K.1.121 (Cantor, repaginado)**.** *Para qualquer cardinal κ ocorre $\kappa < 2^\kappa$.*

Teorema K.1.122. *A seguir, números cardinais (possivelmente finitos) serão denotados por letras gregas.*

(*I*) *Valem as seguintes identidades.*

(*i*) $\kappa \cdot 0 = 0$, $\kappa + 0 = \kappa$, $1 \cdot \kappa = \kappa$, $\kappa^0 = 1$ *e* $1^\kappa = 1$.

(*ii*) $\kappa = \sum_{\alpha\in\kappa} 1$.

(*iii*) $\sum_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i = 0 \Leftrightarrow \kappa_i = 0$ *para todo* i.

(*iv*) $\prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i = 0 \Leftrightarrow$ *algum* $\kappa_i = 0$.

(*II*) *Valem as seguintes identidades.*

(*i*) $\kappa \cdot (\sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \kappa \cdot \lambda_i$.

(*ii*) $\left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

(*iii*) $\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i\right)^\lambda = \prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa_i^\lambda$.

(*iv*) $\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} \kappa^{\lambda_i}\right) = \kappa^{\sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i}$.

(III) *Valem as desigualdades a seguir.*

(i) $\sup_{\alpha\in\lambda}\kappa_\alpha \leq \sum_{\alpha\in\lambda}\kappa_\alpha$.

(ii) $\sum_{\alpha\in\lambda}\kappa_\alpha \leq \lambda\cdot\sup_{\alpha\in\lambda}\kappa_\alpha$.

(iii) *Se* $\lambda > 0$, *então* $\kappa \leq \kappa\lambda$.

(iv) *Se* $\lambda > 0$, *então* $\kappa \leq \kappa^\lambda$.

(v) *Se* $\kappa > 1$, *então* $\lambda \leq \kappa^\lambda$.

Observação K.1.123 (Aritmética ordinal)**.** Também é possível desenvolver aritmética de números ordinais. Em certo sentido, a ideia é a mesma que se utiliza para desenvolver aritmética de números naturais sintaticamente, i.e., sem apelar para noções de cardinalidade. Por exemplo:

Definição K.1.124. Para um ordinal α, define-se recursivamente o ordinal $\alpha+\beta$ da seguinte forma:

(i) $\alpha + 0 \coloneqq \alpha$;

(ii) $\alpha + (\beta_+) \coloneqq (\alpha+\beta)_+$ para todo ordinal β; e

(iii) $\alpha + \beta \coloneqq \sup_{\xi<\beta}\alpha+\xi$ se $\beta \neq 0$ é ordinal limite. ¶

Fazendo-se $\beta \coloneqq 1 \coloneqq 0_+$ em $\alpha+\beta$, obtém-se

$$\alpha + 1 \coloneqq (\alpha+0)_+ \coloneqq \alpha_+ \coloneqq \alpha\cup\{\alpha\},$$

mostrando que a sucessão ordinal coincide com o processo de "somar 1" em aritmética ordinal. Por isso, daqui em diante, "α_+" será denotado por "$\alpha+1$" (como de costume). Uma vez que as demais operações ordinais não serão utilizadas no texto, não convém apresentá-las. O leitor interessado pode conferir [55]. △

Para cardinais κ e λ, os procedimentos para determinar $\kappa+\lambda$ e $\kappa\cdot\lambda$ podem ser bastante intrincados a depender da *natureza* de κ e λ. A situação típica em que ambos são finitos é, certamente, conhecida pelo leitor: trata-se do que se faz em *Teoria dos Números*, *Aritmética* e outros campos afins. Tendo em vista as propriedades já demonstradas, convém apenas reforçar a seguinte

Proposição K.1.125. *Sejam* X *e* Y *conjuntos. Se* X *e* Y *são finitos, então* $X\cup Y$, $X\times Y$ *e* $\wp(X)$ *são finitos.*

Segue que $\kappa+\lambda$, $\kappa\cdot\lambda$ e κ^λ pertencem a ω sempre que κ e λ forem números cardinais finitos, *a.k.a.*[37] números naturais. Em particular, ficam bem definidas funções da forma $\omega\times\omega\to\omega$ que fazem $(m,n)\mapsto m+n$, $(m,n)\mapsto m\cdot n$ e $(m,n)\mapsto m^n$. A situação em que pelo menos um dos cardinais é infinito, por outro lado, é drasticamente distinta.

Lema K.1.126. *Para um conjunto* X, *são equivalentes:*

(i) X *é infinito;*

(ii) $\aleph_0 \leq |X|$;

(iii) X *admite bijeção com algum* $Y \subsetneq X$.

[37] *Also known as*, que significa "também conhecido como".

Demonstração. O conjunto X tem seu cardinal $|X|$. Se X é infinito, então não ocorre $|X| < \aleph_0$, restando apenas $|X| \geq \aleph_0$. Agora, se $\aleph_0 \leq |X|$, então existe uma injeção $\omega \to X$, donde é fácil obter uma bijeção de X sobre um subconjunto próprio. A última implicação é a contrapositiva do Corolário K.1.94. $\square$

Lema K.1.127. $|\omega \times \omega| = |\omega|$.

Demonstração. A função $n \mapsto (0, n)$ define uma injeção $\omega \to \omega \times \omega$. Por outro lado, como leitores versados em Aritmética devem saber, a correspondência $(m, n) \mapsto 2^m 3^n$ define uma função injetora $\omega \times \omega \to \omega$. Logo, o resultado segue do Teorema de Cantor-Bernstein[38]. $\square$

Teorema K.1.128 (Tarski)**.** *Se A é um conjunto infinito, então $|A| = |A \times A|$.*

Demonstração. Como A é infinito, existe um subconjunto $\mathcal{N} \subseteq A$ com $|\mathcal{N}| = \omega$. Logo, o conjunto

$$\mathbb{P} := \{(M, g) \mid \mathcal{N} \subseteq M \subseteq A \text{ e } g\colon M \to M \times M \text{ é bijeção}\}$$

é não-vazio (pelo lema anterior). Define-se então a relação binária $\preceq$ em $\mathbb{P}$, dada por $(M, g) \leq (K, h) \Leftrightarrow M \subseteq K$ e $g \subseteq h$, claramente uma ordem parcial. O próximo passo é apelar para o Lema de Zorn: note que se $\mathcal{C} := \{(M_i, g_i) : i \in \mathcal{I}\}$ é uma cadeia em $\mathbb{P}$, então $(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} M_i, \bigcup_{i \in \mathcal{I}} g_i) \in \mathbb{P}$ é um limitante superior para $\mathcal{C}$; logo, existe $(B, f) \in \mathbb{P}$ maximal.

Agora, basta mostrar que, para $|B| := \kappa$ e $|A \setminus B| := \lambda$, deve ocorrer $\lambda \leq \kappa$: com efeito, se a desigualdade vale, tem-se $\kappa^2 = \kappa$ (pois $(B, f) \in \mathbb{P}$) e, por conseguinte,

$$|A| \leq |A \times A| = (\lambda + \kappa)^2 = \lambda^2 + \lambda\kappa + \kappa\lambda + \kappa^2 \leq 4\kappa^2 = 4\kappa \leq \kappa^2 = \kappa \leq |A|.$$

A argumentação é por absurdo, supondo $\kappa < \lambda$. Tal desigualdade garante a existência de um subconjunto $D \subseteq A \setminus B$ com $|D| = \kappa$, e a ideia será mostrar que $B' := B \cup D$ admite uma bijeção com $B' \times B'$, contrariando a maximalidade de (B, f). Ora, o subconjunto $E := (B' \times B') \setminus (B \times B)$ satisfaz $|E| = \kappa$, pois $D \times D \subseteq E$ e, por conseguinte,

$$\kappa = |D| \leq |D \times D| \leq |E| \leq (\kappa + \kappa)^2 = 4\kappa^2 = 4\kappa \leq \kappa^2 = \kappa.$$

Logo, existe uma bijeção $h\colon D \to E$, que pode ser "colada" com a bijeção $f\colon B \to B \times B$ a fim de obter a bijeção $B' \to B' \times B'$ desejada. $\square$

Corolário K.1.129. *Se $\kappa \geq \aleph_0$, então $\kappa^n = \kappa$ para todo $n \in \omega$ com $n > 0$.*

Corolário K.1.130. *Sejam κ e λ cardinais, ambos diferentes de 0, com pelo menos um deles infinito. Então $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.*

Demonstração. Assuma $\lambda \geq \aleph_0$ com $\kappa \leq \lambda$. Então $\max\{\kappa, \lambda\} = \lambda$ e

$$\lambda \leq \kappa + \lambda \leq \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda = 1 \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda,$$

donde a igualdade desejada segue. $\square$

Como $\kappa^2 = \sum_{\alpha < \kappa} \kappa$, a igualdade $\kappa^2 = \kappa$ permite particionar κ em κ subconjuntos de cardinalidade κ. Interpretações análogas e mais surpreendentes podem ser feitas para alguns dos próximos resultados.

[38]Alternativamente, é possível definir uma correspondência que percorre $\omega \times \omega$ em ω passos, fazendo um *zigue-zague*. O leitor interessado pode ilustrar a ideia – ou pior, formalizá-la.

Definição K.1.131. Dados um conjunto X, um ordinal α e um cardinal κ, denotam-se:

(i) $X^{<\alpha} := \bigcup_{\gamma<\alpha} X^{\gamma}$;

(ii) $X^{\leq\alpha} := X^{<\alpha} \cup X^{\alpha}$;

(iii) $[X]^{\kappa} := \{Y \subseteq X : |Y| = \kappa\}$;

(iv) $[X]^{<\kappa} := \{Y \subseteq X : |Y| < \kappa\}$;

(v) $[X]^{\leq\kappa} := \{Y \subseteq X : |Y| \leq \kappa\}$. ¶

Proposição K.1.132. *Sejam X um conjunto e κ um cardinal. Valem as desigualdades: $|[X]^{\kappa}| \leq |X^{\kappa}|$, $|[X]^{<\kappa}| \leq |X^{<\kappa}|$ e $|[X]^{\leq\kappa}| \leq |X^{\leq\kappa}|$. Além disso, se $\kappa \leq |X|$ com $|X| \geq \aleph_0$, então também valem as desigualdades opostas.*

Demonstração. Para cada subconjunto $S \in [X]^{\kappa}$ existe uma injeção $f_S\colon \kappa \to X$ com $\operatorname{im}(f_S) = S$, de modo que a correspondência $S \mapsto f_S$ define uma injeção $[X]^{\kappa} \to X^{\kappa}$ e, portanto, $|[X]^{\kappa}| \leq |X^{\kappa}|$. Se valer $\kappa \leq |X|$ com $|X| \geq \aleph_0$, então uma função $f \in X^{\kappa}$ é um subconjunto de $\kappa \times X$ com cardinalidade precisamente κ, o que define uma injeção $X^{\kappa} \to [\kappa \times X]^{\kappa}$ e, consequentemente, $|X^{\kappa}| \leq |[\kappa \times X]^{\kappa}| = |[X]^{\kappa}|$ (a última igualdade usa, entre outras coisas, o fato de que $|\kappa \times X| = |X|$). As demais desigualdades, em ambos os casos, são análogas. □

Corolário K.1.133. *Sejam $\kappa \geq \aleph_0$ e X um conjunto com $|X| \leq 2^{\kappa}$. Então $|X^{\leq\kappa}| \leq 2^{\kappa}$. Analogamente, se X é infinito, então X tem precisamente $|X|$ subconjuntos finitos.*

Demonstração. Para cada $\alpha \leq \kappa$ ocorre $|X^{\alpha}| \leq |X^{\kappa}| \leq (2^{\kappa})^{\kappa} = 2^{\kappa}$. Daí

$$\left|X^{\leq\kappa}\right| = \left|\bigcup_{\alpha\leq\kappa} X^{\alpha}\right| = \sum_{\alpha\leq\kappa} |X^{\alpha}| \leq \sum_{\alpha\leq\kappa} 2^{\kappa} \leq \kappa \cdot 2^{\kappa} = 2^{\kappa}.$$

A última afirmação segue de forma similar. □

Teorema K.1.134. *Sejam $\lambda \geq \aleph_0$ um cardinal e $(\kappa_\alpha : \alpha < \lambda)$ uma λ-upla de cardinais, com $\kappa_\alpha > 0$ para todo $\alpha \in \lambda$. Então*

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha.$$

Demonstração. Já se tem $\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \leq \lambda \cdot \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Para verificar a outra desigualdade, observe que por valer $1 \leq \kappa_\alpha$ para todo α, segue que $\lambda = \sum_{\alpha<\lambda} 1 \leq \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. Como $\kappa := \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \leq \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$ e $\lambda \geq \aleph_0$, resulta $\lambda \cdot \kappa = \max\{\lambda, \kappa\} \leq \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. □

Corolário K.1.135. *Sejam $\kappa \geq \aleph_0$ um cardinal e $\mathcal{X}$ uma família de conjuntos com $|X| \leq \kappa$ para todo $X \in \mathcal{X}$. Então $|\bigcup \mathcal{X}| \leq \kappa \cdot |\mathcal{X}|$. Em particular, se $|\mathcal{X}| \leq \kappa$, então $|\bigcup \mathcal{X}| \leq \kappa$.*

Corolário K.1.136. *Seja $\mathcal{X} := \{X_n : n \in \omega\}$ uma família de conjuntos com $|X_n| \leq \aleph_0$ para cada $n \in \omega$. Então $|\bigcup \mathcal{X}| \leq \aleph_0$.*

Exemplo K.1.137. Note que para $n \geq 2$ tem-se

$$2^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0 \cdot n} = 2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}, \tag{K.10}$$

donde em particular resulta que $\prod_{n\in\omega\setminus\{0,1\}} n = 2^{\aleph_0}$. ▲

Observação K.1.138 (Contínuo)**.** O cardinal $2^{\aleph_0}$, mencionado no último exemplo, é bastante frequente na Matemática Contemporânea: um dos motivos é que o número cardinal da *reta real* é $2^{\aleph_0}$, como veremos oportunamente. Note que, pelo Teorema de Cantor, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ e, por conseguinte, $2^{\aleph_0} \geq \aleph_0^+ := \aleph_1$, já que $\aleph_0^+$ é o menor cardinal maior do que $\aleph_0$. A (realmente grande) questão é:

$$2^{\aleph_0} > \aleph_1 \text{ ou } 2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

A resposta curta é: depende. Mais precisamente, ZFC não é capaz de decidir qual das duas alternativas acima escolher. Isso possivelmente ficará um pouco mais claro na próxima seção – mas não é uma promessa. De toda forma, o leitor já tem o ferramental para entender o conteúdo da **Hipótese do Contínuo**, frequentemente abreviada como CH: é a afirmação de que a identidade $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ é verdadeira. △

Cofinalidade e outras sutilezas

Considere os cardinais $\aleph_1$ e $\aleph_\omega$, e *suponha* que cada um desses cardinais seja uma *escadaria*[39] cujos degraus são determinados por seus ordinais menores. Mais do que isso, suponha que por alguma falha de caráter ou coisa do tipo, duas pessoas queiram subir tais escadarias o mais alto *possível* com apenas $\aleph_0$ passos.

Evidentemente, pessoas dispostas a fazer esse tipo de atividade física extrema não costumam considerar medidas de segurança razoáveis, como subir um degrau a cada novo passo: por isso, vamos assumir que elas subirão aos *saltos*, i.e., elas darão $\aleph_0$ saltos ao longo dos degraus das escadas. Porém, dado que viver perigosamente ainda não é a mesma coisa que atentar contra a própria vida, as personagens desta anedota imbecil vão se impor uma única restrição: seus saltos devem levá-las a degraus pertencentes às respectivas escadarias, a fim de evitar quedas infinitamente altas.

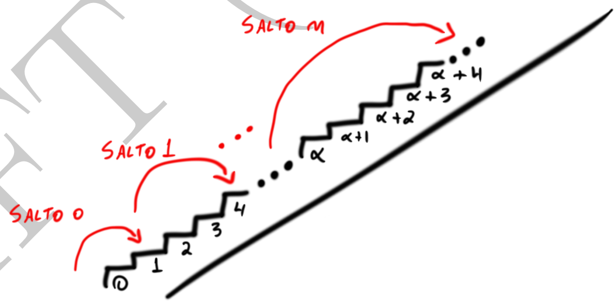


Figura K.1: Ninguém aguenta mais o Hotel de Hilbert.

A pergunta é: qual das duas pessoas chega ao final de sua respectiva escada?

✓ Em $\aleph_\omega$, escala-se tão alto quanto desejado: basta estipular que o 0-ésimo salto leve até o $\aleph_0$-ésimo degrau, o 1-ésimo salto leve até o $\aleph_1$-ésimo degrau e, de modo geral, o n-ésimo salto deve *pousar* no $\aleph_n$-ésimo degrau. Posto que para qualquer ordinal $\alpha < \aleph_\omega$ existe $n < \omega$ com $\alpha < \aleph_n$, para efeitos práticos tal procedimento percorre a escadaria $\aleph_\omega$ completamente.

✗ Como $\aleph_1 < \aleph_\omega$, é natural imaginar que *deveria* ser possível galgar os degraus de $\aleph_1$ com a mesma eficiência do cenário anterior. Não é o caso:

[39] Possivelmente construída em torno de um Hotel de Hilbert, quem sabe.

Proposição K.1.139. *Sejam* $\mathcal{D} \subseteq \aleph_1$ *e* $s\colon \mathcal{D} \to \aleph_1$ *uma função. Se* $|\mathcal{D}| \leq \aleph_0$*, então* $\sup_{d\in\mathcal{D}} s(d) < \aleph_1$.

Demonstração. Como $|\mathcal{D}| \leq \aleph_0$, existe uma sobrejeção $g\colon \omega \to \mathcal{D}$, o que permite escrever $\mathcal{D} = \{d_n : n \in \omega\}$ (com repetições, possivelmente). Tem-se

$$\delta := \sup_{d\in\mathcal{D}} s(d) = \sup_{n\in\omega} s(d_n) = \bigcup_{n\in\omega} s(d_n).$$

Como cada $s(d_n) < \aleph_1$, segue que cada $s(d_n)$ é um ordinal enumerável e, por conseguinte, δ é uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis, donde o Corolário K.1.136 assegura a desigualdade $|\delta| \leq \aleph_0$. □

Portanto, fazendo $\mathcal{D}$ como o conjunto de degraus escolhidos em $\aleph_1$, segue que os saltos $s\colon \mathcal{D} \to \aleph_0$ alcançam, no máximo, o δ-ésimo degrau da escadaria $\aleph_1$.

Observação K.1.140. Na verdade, a situação é pior do que parece. Escrevendo

$$\aleph_1 = \{\gamma : \gamma \leq \delta\} \cup \{\xi : \delta < \xi < \aleph_1\}$$

com $\{\gamma : \gamma \leq \delta\} = \delta + 1$, segue que $\{\xi : \alpha < \xi < \aleph_1\}$ é não-enumerável: se o último conjunto fosse enumerável, $\aleph_1$ seria enumerável, absurdo. △

A parte final do argumento acima é uma variação do chamado *Princípio da Casa dos Pombos*, no qual secretamente se usam propriedades de *cofinalidade* de ordens. Classicamente, o **Princípio da Casa dos Pombos** (finito), que será abreviado como PCP, *estabelece* que *se* $n < \omega$ *pombos são distribuídos em* $m < \omega$ *casas, com* $m < n$*, então em pelo menos uma das casas haverá mais de um pombo.* De novo:

Proposição K.1.141 (PCP, finito)**.** *Se* X *é um conjunto finito e* $\mathcal{P}$ *é uma partição de* X *com* $|\mathcal{P}| < |X|$*, então existe* $P \in \mathcal{P}$ *com* $|P| > 1$.

Demonstração. Pela contrapositiva, se $|P| \leq 1$ para todo $P \in \mathcal{P}$, então para cada P existe $x_P \in X$ com $P = \{x_P\}$, e daí $X = \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$, acarretando em $|X| \leq |\mathcal{P}|$. □

Por sua vez, o argumento na Observação K.1.140 usou a seguinte versão:

Proposição K.1.142 (PCP, infinito)**.** *Sejam* X *um conjunto e* $\mathcal{P}$ *uma partição de* X*. Se* $|X| > \aleph_0$ *e* $|\mathcal{P}| \leq \aleph_0$*, então existe* $P_0 \in \mathcal{P}$ *com* $|P_0| > \aleph_0$*. Em particular, se* $|X| = \aleph_1$*, então* $|P_0| = \aleph_1$.

Dada a similaridade entre a Proposição K.1.142 e o PCP, é razoável chamar também a última de Princípio da Casa dos Pombos (infinito). Atentemo-nos para a segunda parte do enunciado: como $\aleph_0 < |P_0| \leq \aleph_1$, resta somente o caso $|P_0| = |X|$. O ponto a se destacar aqui é outro: a generalização não é automática para cardinalidades não-enumeráveis quaisquer. Por exemplo, se $|X| := \aleph_\omega$, garante-se apenas $|P_0| \geq \aleph_n$ para algum $n \geq 1$. Como no caso das escadas, a sutileza está na *cofinalidade*.

Definição K.1.143. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ é dito **cofinal** em $\mathbb{P}$ (ou $\leq$**-cofinal**) se para todo $p \in \mathbb{P}$ existir $c \in C$ com $p \leq c$. ¶

Assim, por exemplo, mostrou-se que o conjunto

$$C := \{\aleph_n : n \in \omega\} \tag{K.11}$$

é cofinal em $\aleph_\omega$, ao passo que nenhum subconjunto enumerável de $\aleph_1$ é cofinal em $\aleph_1$. Como qualquer ordem é cofinal em si mesma, segue que

$$E_{\mathbb{P}} := \{|C| \leq |\mathbb{P}| : C \subseteq \mathbb{P} \text{ é cofinal em } \mathbb{P}\}$$

é uma família não-vazia de cardinais e, por conseguinte, admite um menor elemento.

Definição K.1.144. A **cofinalidade** de $\mathbb{P}$ é o cardinal $\operatorname{cof}(\mathbb{P}) := \min E_{\mathbb{P}}$, i.e., a menor cardinalidade de um subconjunto cofinal em $\mathbb{P}$. ¶

Como $\operatorname{cof}(\mathbb{P}) \leq |\mathbb{P}|$ se verifica para qualquer ordem $\mathbb{P}$, segue que $\operatorname{cof}(\alpha) \leq |\alpha| \leq \alpha$ vale para qualquer ordinal α. Assim, por exemplo, como o conjunto C definido em (K.11) é enumerável, tem-se $\operatorname{cof}(\aleph_\omega) \leq \aleph_0$. Por outro lado, dado que nenhum subconjunto finito pode ser cofinal em $\aleph_\omega$, resulta $\operatorname{cof}(\aleph_\omega) = \aleph_0$. Já para $\aleph_1$, tem-se $\operatorname{cof}(\aleph_1) \leq \aleph_1$ e $\operatorname{cof}(\aleph_1) > \aleph_0$ (pois não existe subconjunto enumerável e cofinal em $\aleph_1$), e daí $\operatorname{cof}(\aleph_1) = \aleph_1$.

Observação K.1.145. Curiosamente, há ordens infinitas com cofinalidades finitas: qualquer que seja o ordinal α, verifica-se a igualdade $\operatorname{cof}(\alpha + 1) = 1$, já que o conjunto $\{\alpha\}$ é cofinal em $\alpha + 1$. Na verdade, vale a recíproca, i.e., se $\operatorname{cof}(\beta) < \aleph_0$, então β é ordinal sucessor[40]. Por essa razão, apenas a cofinalidade de ordinais limites diferentes de 0 costuma ser interessante. △

Em certo sentido, a cofinalidade permite generalizar a Proposição K.1.142 com bastante precisão:

Proposição K.1.146. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{P}$ uma partição de X. Se X é infinito e $|\mathcal{P}| < \operatorname{cof}(|X|)$, então existe $P_0 \in \mathcal{P}$ tal que $|P_0| = |X|$.*

Demonstração. Como $\mathcal{P}$ é uma família de subconjuntos de X dois a dois disjuntos tal que $X = \bigcup \mathcal{P}$, ocorre $|X| = \sum_{P \in \mathcal{P}} |P|$ e, por X ser infinito, tem-se $\operatorname{cof}(|X|) \geq \aleph_0$. Por *$\omega$ ser como Las Vegas*[41], se ocorrer $|\mathcal{P}| < \aleph_0$, então algum dos $P \in \mathcal{P}$ é infinito e, por conseguinte,

$$|X| = \sum_{P \in \mathcal{P}} |P| = \max_{P \in \mathcal{P}} |P|,$$

de modo que P_0 pode ser tomado como um dos finitos elementos de $\mathcal{P}$ que realizam o máximo acima. Se, porém, ocorrer $|\mathcal{P}| \geq \aleph_0$, então

$$|X| = \sum_{P \in \mathcal{P}} |P| = |\mathcal{P}| \cdot \sup_{P \in \mathcal{P}} |P| = \max \left\{ |\mathcal{P}|, \sup_{P \in \mathcal{P}} |P| \right\}.$$

Agora, pela suposição de que $|\mathcal{P}| < \operatorname{cof}(|X|)$ e por valer $\operatorname{cof}(|X|) \leq |X|$, a igualdade acima acarreta $|X| = \sup_{P \in \mathcal{P}} |P|$. Por fim, observe que se valesse $|P| < |X|$ para todo $P \in \mathcal{P}$, então a última igualdade garantiria a cofinalidade do subconjunto $\{|P| : P \in \mathcal{P}\}$ em $|X|$, com $|\mathcal{P}| < \operatorname{cof}(|X|)$, absurdo. □

[40] Em particular, note que $\operatorname{cof}(\beta) < \aleph_0$ se, e somente se, $\operatorname{cof}(\beta) = 1$.

[41] Tudo o que se faz em Vegas, fica em Vegas.

Na maioria das vezes, o PCP se manifesta na forma da Proposição K.1.142: se X é não-enumerável e $\mathcal{P}$ é uma partição enumerável de X, então existe $P_0 \in \mathcal{P}$ não-enumerável, sem a garantia de que $|P_0| = |X|$. A formulação dada pela Proposição K.1.146 (demonstrada acima) apenas visa dar um critério que garanta a igualdade $|P_0| = |X|$:

- na Proposição K.1.142, pedir $|\mathcal{P}| \leq \aleph_0$ e $|X| = \aleph_1$ recai em $|\mathcal{P}| < \operatorname{cof}(|X|)$, caso tratado pela Proposição K.1.146;
- se $|X| = \aleph_\omega$, então dizer que uma partição $\mathcal{P}$ de X satisfaz $|\mathcal{P}| < \operatorname{cof}(|X|)$ é afirmar que $\mathcal{P}$ é uma partição finita – note que se $|\mathcal{P}| = \aleph_0$, então a Proposição K.1.146 não garante $P_0 \in \mathcal{P}$ com $|P_0| = \aleph_\omega$, o que é muito bom, já que tal P_0 poderia não existir.

K.1.7 Dicionário (para quem realmente tem pressa)

Os capítulos topológicos usarão, frequentemente, terminologias que o público avesso à Teoria dos Conjuntos detesta. A fim de não afastar (muito) tais leitores, esta breve subseção contém uma lista de *traduções* que pode ser útil para quem não tem tempo (ou desejo) de se aprofundar nas tecnicalidades discutidas ao longo desta seção[42].

Ao ver isso	**Leia assim**
$n \in \omega$	n é natural, o que inclui o zero
$n \in \mathbb{N}$	n é natural, mas $n \neq 0$
$A \in \wp(X)$	$A \subseteq X$, A é subconjunto de X, etc.
$\bigcap \mathscr{F}$	com $\mathscr{F} := \{F_i : i \in \mathcal{I}\}$, é o que costuma se denotar por $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i$
$\bigcup \mathscr{F}$	análogo ao anterior
$\lvert X\rvert$	número cardinal de X, *quantidade* de elementos de X
$2^{\lvert X\rvert}$ ou $\lvert\wp(X)\rvert$	número de subconjuntos de X
$\mathfrak{c}$ ou $2^{\aleph_0}$	número cardinal de $\mathbb{R}$, número de subconjuntos em ω, etc.
$0 < \lvert X\rvert$	X é não-vazio
$\lvert X\rvert < \aleph_0$	X é finito, X tem n elementos para algum $n \in \omega$, etc.
$\lvert X\rvert = \aleph_0$	X é **infinito enumerável**, tem bijeção com ω
$\lvert X\rvert \leq \aleph_0$	X é **enumerável**, podendo ser finito ou infinito enumerável
$\lvert X\rvert \geq \aleph_0$	X é infinito
$\lvert X\rvert > \aleph_0$	X é (infinito) **não-enumerável**
$\lvert X\rvert \geq \aleph_1$	a mesma coisa do anterior, só mais elegante
$\lvert X\rvert \leq \lvert Y\rvert$	X tem no máximo tantos elementos quanto Y
$\lvert X\rvert < \lvert Y\rvert$	X tem estritamente menos elementos do que Y
$\lvert X\rvert \leq \kappa$	X tem no máximo κ elementos
$\lvert X\rvert \leq 2^{\lvert Y\rvert}$	Y tem pelo menos tantos subconjuntos quanto X tem de elementos
$\lvert X\rvert \geq 2^{\lvert Y\rvert}$	Y tem no máximo tantos subconjuntos quanto X tem de elementos
$\lvert X\rvert < 2^{\lvert X\rvert}$	Teorema de Cantor: X tem estritamente mais subconjuntos do que elementos
$[X]^{<\aleph_0}$	família dos subconjuntos finitos de X
$f \in Y^X$	f é função do tipo $X \to Y$
$f \in Y^\omega$	f é uma sequência *infinita* $(x_0, x_1, \ldots)$
$f \in 2^X$	f é função do tipo $X \to \{0, 1\}$
α é ordinal	α é um conjunto bem ordenado
α é ordinal sucessor	α é um conjunto bem ordenado que tem maior elemento
α é ordinal limite	α é um conjunto bem ordenado *sem* maior elemento

[42] A escolha da notação também é um ato político.

Exercícios complementares da seção

Exercício K.1. Mostre que se $\mathcal{F} \neq \emptyset$, então

$$\bigcap \mathcal{F} = \left\{ x \in \bigcup \mathcal{F} : \exists F \in \mathcal{F} \text{ tal que } x \in F \right\}.$$

Conclua que seria legítimo *definir* $\bigcap \mathcal{F}$ por meio da identidade acima. ■

Observação K.1.147. A identidade anterior tem a vantagem de dar sentido a $\bigcap \mathcal{F}$ mesmo nas situações em que $\mathcal{F} = \emptyset$. Porém, ela é incompatível com a implicação

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A},$$

válida sempre que $\mathcal{A} \neq \emptyset$: como $\emptyset \subseteq \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B}$, *seria natural* esperar que $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \emptyset$, o que não é compatível com a proposta do último exercício, que daria $\bigcap \emptyset = \emptyset$. Em certo sentido, isso mostra a artificialidade da definição[43]. △

Exercício K.2. Para x fixado, seja $\mathcal{F}_x \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ a função de classes dada por $\mathcal{F}(y) := (x, y)$.

a) Para um conjunto Y fixado, mostre que $\mathcal{F}_x[Y] := \{(x, y) : y \in Y\}$ é um conjunto.

b) Use o item anterior para definir $\mathcal{G}_Y : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ por $\mathcal{G}_Y(x) := \mathcal{F}_x[Y]$. Mostre que a coleção $\mathcal{G}_Y[X] := \{\mathcal{F}_x[Y] : x \in X\}$ é um conjunto e $z \in \bigcup \mathcal{G}_Y[X]$ se, e somente se, $z = (x, y)$ para $x \in X$ e $y \in Y$. ■

Exercício K.3. Sejam f e g funções.

a) Considerando-as como na Definição K.1.10, mostre que $f = g$ se, e somente se, $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g)$ e $f(x) = g(x)$ para cada $x \in \operatorname{dom}(f)$.

b) Considerando-as como funções da forma $X \to Y$ e $X' \to Y'$ (Definição K.1.11), mostre que $f = g$ se, e somente se, $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

c) Para uma função $h \colon A \to B$, defina $\operatorname{graf}(h) := \{(x, h(x)) : x \in A\}$, o **gráfico** da função h. Mostre que existe funções da forma $X \to Y$ e $X \to Y'$ que são formalmente distintas mas têm o mesmo gráfico. Dica: para um conjunto X, considere $h := \mathrm{Id}_X$, $Y := X$, $Y \subsetneq Y'$ e $i \colon X \to Y'$ a **função inclusão** dada por $i(x) := x$ para cada $x \in X$ ■

Exercício K.4 (Função vazia)**.** Mostre que $\emptyset$ é a única função da forma $\emptyset \to \emptyset$, i.e., $\emptyset^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. ■

Exercício K.5. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ conjuntos.

(i) Mostre que se $\mathcal{A} := \{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ e $\mathcal{I} := \bigcup \mathcal{J}$, para uma certa família $\mathcal{J}$, então

$$\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)$$

e, se $\mathcal{A} \neq \emptyset$, então $\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right)$.

(ii) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ forem não-vazios, mostre que

$$\left(\bigcap \mathcal{A} \right) \cup \left(\bigcap \mathcal{B} \right) = \bigcap_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} (A \cup B) \text{ e } \left(\bigcup \mathcal{A} \right) \cap \left(\bigcup \mathcal{B} \right) = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} (A \cap B).$$

■

Exercício K.6 (Teorema de König)**.** Mostre que se $\kappa_i < \lambda_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\sum_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i < \prod_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i$. Dica: mostre que se $f \colon \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \to \prod_{i \in \mathcal{I}} B_i$ é uma função, então f não é sobrejetora. ■

[43] Para leitores versados em frações, seria como introduzir a notação $\frac{1}{0} := 0$ em $\mathbb{Z}$, apenas para dar sentido a expressões do tipo ab^{-1} para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercício K.7. Demonstre a Proposição K.1.120. Dica: para um subconjunto $A \subseteq X$, defina a **função característica** de A em X, $\chi_A \colon X \to \{0, 1\}$, que faz $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, e $\chi_A(x) = 0$ caso contrário; investigue então a correspondência $A \mapsto \chi_A$. ■

Exercício K.8. Sejam $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se g e f são injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

b) Mostre que se g e f são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora.

c) Mostre que se g e f são bijetoras, então $g \circ f$ é bijetora.

d) Determine a inversa de $g \circ f$. ■

Exercício K.9. Seja $f \colon X \to Y$ uma função, com $X \neq \emptyset$.

a) Mostre que a função f é injetora se, e somente se, existe uma sobrejeção $g \colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

b) (AC_7) Mostre que a função f é sobrejetora se, e somente se, existe uma injeção $g \colon Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

c) Mostre que a asserção acima é equivalente (em ZF) ao Axioma da Escolha. ■

Exercício K.10. Mostre que se $X \subseteq Y$, então $|X| \leq |Y|$ (desigualdade de ordinais). Dica: se fosse $|Y| < |X|$, então $|X|$ não seria o menor número cardinal em bijeção com X. ■

Exercício K.11. Sejam $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ funções.

a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

b) Mostre que se $g \circ f$ é sobre, então g é sobre.

c) Mostre que se $g \circ f$ é bijetora, então f é injetora e g é sobrejetora. ■

Exercício K.12. Para uma função $h \colon X \to Y$, mostre que $\mathrm{Id}_Y \circ h = h = h \circ \mathrm{Id}_X$. ■

Exercício K.13. Sejam $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to X$ funções. Mostre que se $g \circ f$ e $f \circ g$ são bijeções, então f e g são bijeções. Adicionalmente, se $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ ou $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, então $g = f^{-1}$. ■

Exercício K.14. Seja $f \colon X \to Y$ uma função.

a) Mostre que $f[A] \subseteq f[A']$ e $f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[B']$ sempre que $A \subseteq A' \subseteq X$ e $B \subseteq B' \subseteq Y$, respectivamente.

b) Mostre que $f[\emptyset] = \emptyset$, $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ e $f^{-1}[Y] = X$.

c) Para $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ quaisquer, mostre que valem as inclusões $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ e $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$, com as igualdades garantidas se f for injetora (para o primeiro caso) ou sobrejetora (para o segundo caso). ■

Exercício K.15. De modo geral, se R e S são relações binárias, faz sentido definir a relação

$$S \circ R := \{(x, z) : \exists y \text{ tal que } x \, R \, y \text{ e } y \, S \, z\},$$

a **composição** das relações S e R, uma generalização óbvia da composição de funções.

a) Mostre que $S \circ R \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{im}\,(R) \cap \mathrm{dom}\,(S) \neq \emptyset$.

b) Mostre que a composição de relações é *associativa*, i.e., para relações R, S e T, vale a identidade $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

c) Supondo $R \subseteq X \times Y$, para $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ defina

$$R[A] := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tal que } x \, R \, y\}, \text{ e}$$
$$R^{-1}[B] := \{x \in X : \exists y \in B \text{ tal que } x \, R \, y\},$$

respectivamente a **imagem direta** de A pela relação R e a **pré-imagem de** B pela relação R. Mostre que $R^{-1}[B]$ é a imagem direta de B pela relação R^{-1}.

(i) mostre que $(S \circ R)[A] = S[R[A]]$ se $A \subseteq \mathrm{dom}(R)$;

(ii) mostre que $R^{-1} \circ S^{-1}$ é a inversa de $S \circ R$;

(iii) mostre que $(S \circ R)^{-1}[B] = \left(R^{-1} \circ S^{-1}\right)[B] = R^{-1}\left[S^{-1}[B]\right]$ para qualquer subconjunto B do codomínio de S.

Dica/Observação: O segundo item pode soar mais *evidente* no caso em que R e S são as *funções* "vestir a meia" e "calçar o tênis", respectivamente[44].

d) Derive considerações análogas para o caso da composição de funções. ■

Exercício K.16. Mostre que o conjunto ω^ω, de todas as funções da forma $\omega \to \omega$, é não-enumerável. ■

Exercício K.17. Seja $f\colon X \to Y$ uma função.

a) Mostre que $\mathcal{P} := \{f^{-1}[\{y\}] : y \in \mathrm{im}(f)\}$ é uma partição de X.

b) Suponha Y enumerável e X não-enumerável. Mostre que existe $y \in Y$ tal que $X' := \{x \in X : f(x) = y\}$ é não-enumerável. ■

Exercício K.18. Mostre que $2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$. Dica: $2^\omega \subseteq \omega^\omega \subseteq \wp(\omega \times \omega)$. ■

Exercício K.19. Generalize o exercício anterior: mostre que se $2 \leq \kappa \leq \lambda$ e $\lambda \geq \aleph_0$, então $k^\lambda = 2^\lambda$. ■

Exercício K.20. Seja $\psi\colon X \to Y$ uma função bijetora. Mostre que se $\mathcal{P}$ é uma partição de X, então $\psi(\mathcal{P}) := \{\psi[P] : P \in \mathcal{P}\}$ é uma partição de Y. Em particular, tem-se $|\mathcal{P}| = |\psi(\mathcal{P})|$. ■

Exercício K.21. Sejam X e Y conjuntos, $\sim$ uma relação de equivalência sobre X e R uma relação binária $R \subseteq X \times Y$ com $\mathrm{dom}(R) = X$. Mostre que a relação binária $f := \{(\overline{x}, y) \in {}^{X}\!/\!_{\sim} \times Y : x\,R\,y\}$ é uma função da forma $f\colon {}^{X}\!/\!_{\sim} \to Y$ se, e somente se, para quaisquer $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ com $x \sim x'$, $x\,R\,y$ e $x'\,R\,y'$ ocorrer $y = y'$. ■

Exercício K.22. Sejam X, Y e Z conjuntos.

a) Mostre que $X^Z = \prod_{z \in Z} X$.

b) Dada uma função $f\colon X \to Y$, mostre que existe uma única função $f^Z\colon X^Z \to Y^Z$ satisfazendo $\pi_{z'}\left(f^Z((x_z)_{z \in Z})\right) = f(z')$ para cada $z' \in Z$. ■

Exercício K.23. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A} := \{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de subconjuntos de X. Chamando por $\varphi\colon X \to X^{\mathcal{I}}$ o produto diagonal de $\mathrm{Id}_{X_i} := \mathrm{Id}_X$ para cada $i \in \mathcal{I}$ (Definição K.1.41), mostre que $\varphi^{-1}\left[\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i\right] = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$. ■

Exercício K.24. Sejam $(\mathbb{S}, \leq)$ e $(\mathbb{T}, \leq)$ ordens parciais. Uma função $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ é:

(i) **crescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \leq f(s')$;

(ii) **decrescente** se para quaisquer $s, s' \in \mathbb{S}$ valer que $s \leq s' \Rightarrow f(s) \geq f(s')$;

(iii) **monótona** se f for crescente ou decrescente.

Sabendo disso, suponha que a ordem de $\mathbb{S}$ seja total.

a) Mostre que se f é crescente e $f(s) < f(s')$, então $s < s'$.

b) Mostre que se f é decrescente e $f(s) < f(s')$, então $s > s'$.

c) Conclua que se f for monótona e bijetora, então a inversa $f^{-1}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{S}$ também será monótona (na verdade, f é crescente/decrescente se, e somente se, f^{-1} é crescente/decrescente). ■

Exercício K.25. Mostre que uma função crescente e injetora satisfaz a implicação *estrita* $s < s' \Rightarrow f(s) < f(s')$. Funções em tal condição serão chamadas de **estritamente crescentes**. A definição para funções **estritamente decrescentes** é análoga[45]. ■

[44] Para obter a inversa da composição $S \circ R$, precisa-se *tirar o sapato* para só depois *tirar a meia*, i.e., $R^{-1} \circ S^{-1}$. Aprendi tal analogia com o Prof. Samuel G. da Silva.

[45] A literatura também costuma xingar de *não-decrescente* as coisas que aqui foram chamadas de *crescentes*. Em tais textos, o adjetivo *crescente* se reserva para as situações de desigualdade estrita. Um comentário análogo é válido para funções *não-crescentes*.

Exercício K.26. Sejam $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem parcial, $A \subseteq \mathbb{P}$ e $a \in \mathbb{P}$.

a) Mostre que $a = \min_{\leq} A$ em $(\mathbb{P}, \leq)$ se, e somente se, $a = \max_{\geq} A$ em $(\mathbb{P}, \geq)$.

b) Mostre que A é limitado inferiormente em $(\mathbb{P}, \leq)$ se, e somente se, A é limitado superiormente em $(\mathbb{P}, \geq)$.

c) Mostre que $a = \inf_{\leq} A$ em $(\mathbb{P}, \leq)$ se, e somente se, $a = \sup_{\geq} A$ em $(\mathbb{P}, \geq)$. ■

Exercício K.27. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ funções.

a) Mostre como usar recursão para definir os conjuntos $X_0 := \emptyset$ e para $n \in \omega$,

$$X_{n+1} := X \setminus g\left[Y \setminus f[X_n]\right]. \tag{K.12}$$

b) Defina $\widetilde{X} := \bigcup_{n\in\omega} X_n$ e mostre que, se g é injetiva, então $\widetilde{X} = X \setminus g\left[Y \setminus f\left[\widetilde{X}\right]\right]$.

c) Prove o Teorema K.1.71 (Cantor-Bernstein) sem apelar para o ponto fixo de Tarski. ■

Exercício K.28. Seja $\mathcal{O} \neq \emptyset$ uma família de ordinais. Mostre que $\bigcap \mathcal{O}$ é ordinal. Mais ainda: mostre que $\bigcap \mathcal{O} = \min \mathcal{O}$, i.e., $\bigcap \mathcal{O} \in \mathcal{O}$ e $\bigcap \mathcal{O} \leq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{O}$. ■

Exercício K.29. Seja X uma família não-vazia de ordinais. Mostre que $\bigcup X$ é um número ordinal com a seguinte propriedade: $\beta \leq \bigcup X$ para todo $\beta \in X$ e, se α é um ordinal tal que $\beta \leq \alpha$ para todo $\beta \in X$, então $\bigcup X \leq \alpha$. ■

Exercício K.30. Sejam α, β e γ ordinais.

a) Mostre que se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.

b) Mostre que se $\alpha < \beta$, então $\beta \not< \alpha$. Dica: suponha que não. ■

Exercício K.31. Dado um ordinal α, existe outro ordinal β com $\alpha < \beta < \alpha_+$? ■

Exercício K.32. Sejam $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ e $\mathbb{P}''$ ordens parciais, com funções crescentes $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ e $g\colon \mathbb{P}' \to \mathbb{P}''$. Mostre que $g \circ f$ é crescente. Conclua que a composta de isomorfismos de ordem é um isomorfismo de ordens. ■

Exercício K.33. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem.

a) Mostre que se $\mathbb{P}$ é uma boa ordem e $f\colon \omega \to \mathbb{P}$ é uma função, então $\operatorname{im}(f)$ tem menor elemento. Conclua que, neste caso, não existe função $\omega \to \mathbb{P}$ estritamente decrescente, i.e., tal que se $m, n \in \omega$ com $m < n$, então $f(m) > f(n)$.

b) Suponha que $\mathbb{P}$ seja ordem total, mas que não seja boa ordem. Mostre que existe uma função $f\colon \omega \to \mathbb{P}$ estritamente decrescente. Dica: recursão + Axioma da Escolha. ■

Exercício K.34. Um **isomorfismo de ordem** entre duas ordens $(\mathbb{P}, \leq)$ e $(\mathbb{P}', \preceq)$ é uma bijeção $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ tal que

$$p < q \Leftrightarrow f(p) \prec f(q)$$

para quaisquer elementos $p, q \in \mathbb{P}$. Dizemos que duas ordens $(\mathbb{P}, \leq)$ e $(\mathbb{P}', \preceq)$ são **isomorfas** caso exista um isomorfismo entre elas, o que será denotado com $(\mathbb{P}, \leq) \cong (\mathbb{P}', \preceq)$.

a) Mostre que toda ordem é isomorfa a si mesma.

b) Sejam α e β ordinais. Mostre que se $f\colon \alpha \to \beta$ é um isomorfismo de ordens, então $f = \mathrm{Id}_\alpha$ e $\alpha = \beta$.

c) Mostre que se $(\mathbb{W}, \leq)$ é uma boa ordem, então existe um único ordinal α com $(\mathbb{W}, <) \cong (\alpha, \in)$. Em particular, o isomorfismo $\mathbb{W} \to \alpha$ é único.

d) Fixado um conjunto X, mostre que existe um conjunto $H(X)$ tal que $\alpha \in H(X)$ se, e somente se, α é um ordinal com $|\alpha| \leq |X|$. Dica: o Axioma da Separação assegura que

$$\mathcal{W}(X) := \{R \subseteq X \times X : \text{existe } W \subseteq X \text{ tal que } (W, R) \text{ é boa ordem}\}$$

é um conjunto, o que permite considerar a função de classe $\mathcal{H}(x)$ que faz $\mathcal{H}(x) := y$ se $x \in \mathcal{W}(X)$ e $(y, \in)$ é *algum* ordinal isomorfo a (w, x), para algum $w \subseteq X$, ou $\mathcal{H}(x) := \emptyset$ caso contrário; daí, não é difícil perceber que o conjunto $H(X)$ procurado é, tão somente, $\mathcal{H}[\mathcal{W}(X)]$. ■

Exercício K.35. Sejam κ e λ cardinais.

a) Mostre que se $\kappa \geq \aleph_0$, então $\kappa < \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$. Dica: encontre um subconjunto cofinal em κ de cardinalidade $\mathrm{cof}\,(\kappa)$ e dê um jeito de usar o Teorema de König (Exercício K.6).

b) Mostre que se $\kappa \geq \aleph_0$ e $\lambda \geq 2$, então $\kappa < \mathrm{cof}\,(\lambda^\kappa)$. Dica: note que λ^κ deve ser infinito, de modo que o item anterior acarreta $\lambda^\kappa < (\lambda^\kappa)^{\mathrm{cof}(\lambda^\kappa)}$; o que ocorreria se valesse $\mathrm{cof}\,(\lambda^\kappa) \leq \kappa$?

c) Conclua que $\mathrm{cof}\,(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$. Em particular, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. ■

Exercício K.36. Seja $(\mathbb{W}, \leq)$ uma boa ordem. Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{W}$ é chamado de **segmento inicial** de $\mathbb{W}$ se $S \neq \emptyset$ e $\{x \in \mathbb{W} : x < s\} \subseteq S$ para todo $s \in S$.

a) Seja S um subconjunto inicial de $\mathbb{W}$. Mostre que existe um único $s \in \mathbb{W}$ tal $S = \{x \in \mathbb{W} : x < s\}$. Dica: suponha que não e argumente por indução ou faça primeiro o próximo item.

b) Sejam $\mathbb{W}_0$ e $\mathbb{W}_1$ boas ordens. Então um e somente um dos casos a seguir ocorre: $\mathbb{W}_0 \cong \mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_0 \cong S_1$ para algum segmento inicial $S_1 \subseteq \mathbb{W}_1$, ou $\mathbb{W}_1 \cong S_0$ para algum segmento inicial $S_0 \subseteq \mathbb{W}_0$. Dica: existem únicos ordinais α e β com $\mathbb{W}_0 \cong \alpha$ e $\mathbb{W}_1 \cong \beta$. ■

Exercício K.37. Pratique um pouco com o Axioma da Fundação!

a) Mostre que para todo x deve ocorrer $x \notin x$. Dica: o conjunto $X := \{x\}$ é não-vazio.

b) Mostre que não existem x e y satisfazendo $x \in y$ e $y \in x$. Dica: suponha $x \in y$ e considere $X := \{x, y\}$.

c) Mostre que se C é uma classe não-vazia, então existe $x \in C$ tal que $x \cap C = \emptyset$. Dica: fixe $S \in C$; se $S \cap C = \emptyset$, acabou; se não, faça $\mathrm{trcl}\,(S) := \bigcup_{n\in\omega} S_n$, onde $S_0 := S$ e $S_{n+1} := \bigcup S_n$ para cada $n \in \omega$, o **fecho transitivo** de S, para daí considerar $X := \mathrm{trcl}\,(S) \cap C$; note que $X \neq \emptyset$, e qualquer $x \in X$ com $x \cap X = \emptyset$ satisfaz o que se pede.

d) Chame $\mathbb{V}_0 := \emptyset$, $\mathbb{V}_{\alpha+1} := \wp(\mathbb{V}_\alpha)$ para $\alpha \in \mathrm{O{\scriptstyle RD}}$ e, para $\beta \in \mathrm{O{\scriptstyle RD}}$ ordinal limite com $\beta > 0$, $\mathbb{V}_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathbb{V}_\alpha$. Mostre que $\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{O{\scriptstyle RD}}} \mathbb{V}_\alpha$. Dica: suponha que não é o caso e use o item anterior para obter uma contradição. ■

K.2 (Oper+rel)ações

A longa seção anterior discutiu de maneira relativamente exaustiva como ZFC permite *estruturar* o *universo* dos conjuntos que suporta a nossa *ontologia de cada dia*. Por isso, nesta seção[46] veremos (de maneira sucinta) como dar vida ao deserto estéril dos conjuntos, mas apenas na medida do que for necessário para *fazer topologia*, ou quase.

Por exemplo, uma das protagonistas deste livro é a reta real, usualmente denotada por $\mathbb{R}$, que consiste tão somente de um *corpo ordenado completo*. A expressão destacada significa que o conjunto $\mathbb{R}$ é dotado de duas *operações* (binárias) *bem comportadas*, ao mesmo tempo em que tem uma ordem total compatível com tais operações e, mais importante, satisfaz uma condição de *completude*. Suprir os pré-requisitos técnicos para tornar a explicação anterior inteligível é um dos objetivos desta seção, mas não o único: nos capítulos seguintes, também trataremos de *grupos*, *anéis*, *módulos* e *espaços vetoriais* dotados de *topologias*, de modo que pode ser importante saber o que são essas coisas *sem* topologias envolvidas.

No entanto, como a seção anterior levantou algumas questões *metateóricas* (que retornarão em capítulos posteriores[47]), parece oportuno introduzir de maneira enxuta algumas noções básicas de *Teoria de Modelos*, com a desculpa de unificar a discussão dos tópicos mencionados no parágrafo acima sob uma mesma perspectiva *universal*. Evidentemente, trata-se de um engodo, já que a Seção K.3 faz exatamente isso ao apresentar a *perspectiva categorial*.

[46] Que já foi um capítulo

[47] Principalmente no último, com ênfase especial para a Subseção E.6.

K.2.1 Linguagens e estruturas

Definição K.2.1. Fixados um conjunto A e um número natural $n \in \omega$, uma função $p\colon A^n \to A$ é chamada de **operação n-ária**. Analogamente, uma **relação n-ária** sobre A consiste num subconjunto $R \subseteq A^n$. Em ambos os casos, o número n é chamado de **aridade**, tanto da operação p quanto da relação R. ¶

Evidentemente, relações n-árias generalizam as relações *bi*nárias introduzidas na Definição K.1.9. O mesmo princípio gramatical empregado nesse caso justifica chamar de **binárias** as operações 2-árias, i.e., funções da forma $A \times A \to A$, bem como **unárias** as funções da forma $A \to A$. Os casos de operações e relações 0-árias são curiosos:

- ✓ como $A^0 = \{\emptyset\}$, segue que uma operação 0-ária $A^0 \to A$ faz $\emptyset \mapsto a$ para algum $a \in A$, o que na prática consiste na escolha de uma **constante** em A, nome usual para tais operações;
- ✓ como $A^0 = \{\emptyset\}$, segue que existem apenas duas relações 0-árias possíveis em A, a saber $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$, que correspondem precisamente aos naturais 0 e 1.

A imagem de um elemento $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ em A será denotada por $p(a_1, \ldots, a_n)$, mas o leitor preciosista tem o direito de escrever $p((a_1, \ldots, a_n))$, exceto nos casos em que $n \leq 2$: para $n := 2$, faz-se $a_1\, p\, a_2$ em vez de $p(a_1, a_2)$; para $n := 1$ se escreve $p\, a$ ou algo equivalente a depender do contexto (vide o próximo exemplo); para $n := 0$, é inofensivo usar o mesmo *símbolo* p da operação $p\colon \{\emptyset\} \to A$ para denotar a *constante* $p(\emptyset)$.

Exemplo K.2.2. Fazendo $G := \mathbb{S}(X) := \{f \in X^X : f \text{ é bijeção}\}$ para um conjunto X fixado, definem-se

$$\begin{aligned} \circ\colon G \times G &\to G \\ (f,g) &\mapsto f \circ g \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} -1\colon G &\to G \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned}$$

operações binária e unária sobre $\mathbb{S}(X)$, respectivamente. Embora faça sentido *estender* a operação $\circ$ sobre o próprio conjunto X^X de todas as funções da forma $X \to X$, isso não pode ser feito com a *inversão*, já que uma função $X \to X$ tem inversa se, e somente se, é bijetora. Em tempo: $\mathbb{S}(X)$ é chamado de **grupo simétrico/de permutações** de X. ▲

Exemplo K.2.3. Como adiantado na altura da Proposição K.1.125, a soma, o produto e a exponenciação de cardinais definem operações binárias em ω. De modo similar, a função sucessor $n \mapsto n+1$ define uma operação unária em ω. ▲

Exemplo K.2.4. Evidentemente, cada elemento x de um conjunto X determina uma operação 0-ária em X. Dito isso, na prática, o mais comum é que *constantes especiais* sejam definidas de acordo com outras operações presentes num dado contexto. Por exemplo: no caso da operação $\cap$ em $\wp(X)$, X e $\emptyset$ se mostram constantes peculiares, já que a primeira satisfaz $X \cap S = S$, enquanto a segunda faz $\emptyset \cap S = \emptyset$, para qualquer $S \subseteq X$; para a composição $\circ$, $\mathrm{Id}_X \in \mathbb{S}(X)$ é uma constante que salta aos olhos por satisfazer $\mathrm{Id}_X \circ f = f \circ \mathrm{Id}_X = f$ para qualquer $f \in \mathbb{S}(X)$. ▲

Observação K.2.5. Se um conjunto X tem uma operação binária, digamos $\star$, então X admite operações, induzidas por $\star$, de qualquer aridade finita: por exemplo, para uma operação de aridade 5, digamos, pode-se considerar a operação $*$ que faz

$$(a,b,c,d,e) \mapsto ((a \star b) \star (c \star d)) \star e.$$

Uma atitude ainda mais desonesta consiste em observar que projeções cumprem o papel de operações: de fato, para $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\pi_j \colon X^n \to X$ é a operação que faz $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$. Com isso dito, note que toda operação n-ária é, a rigor, uma relação $(n+1)$-ária. $\triangle$

A breve discussão acima deve ter convencido o leitor de que operações e relações *finitárias*[48] são mais comuns do que a definição pura sugere. Apesar disso, na maior parte do texto – senão em todo – as aridades predominantes serão ≤ 2, razão pela qual o leitor pode restringir sua atenção a tais casos[49].

Exemplo K.2.6. Para $f, g \in \mathbb{S}(X)$, vale a identidade $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Por um lado, isso pode ser provado diretamente: a inversa de uma função bijetora é única e, pela Proposição K.1.20, tem-se

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ \mathrm{Id}_X \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_X$$

donde segue a igualdade (Exercício K.13). Todavia, tal *comportamento* não é exclusivo de $\mathbb{S}(X)$ com as operações $\circ$ e -1: um conjunto G dotado de

✓ uma operação binária $\star$ *satisfazendo* a *identidade* $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ para quaisquer $x, y, z \in G$,

✓ uma constante $e \in G$ com $x \star e = e \star x = x$ para qualquer $x \in G$ e

✓ uma operação unária i satisfazendo $i(x) \star x = x \star i(x) = e$ para todo $x \in G$,

necessariamente será tal que $i(x \star y) = i(y) \star i(x)$ para quaisquer $x, y \in G$. A prova disso se faz imitando os argumentos (implícitos e explícitos) utilizados no caso de $\mathbb{S}(X)$.

Um conjunto G como acima costuma ser chamado de **grupo**: um dos diversos tipo de *estruturas algébricas* que usaremos ao longo do texto. Determinar quais tipos de operações, bem como as condições que elas devem satisfazer a fim de assegurar *comportamentos* conhecidos em *modelos particulares*, são atividades corriqueiras da Álgebra, mas não são as únicas. $\blacktriangle$

Exemplo K.2.7. Considere ω com a ordem usual $<$ definida na seção anterior e chame $\mathbb{N} := \omega \setminus \{0\}$, o **conjunto dos números naturais não-nulos**[50], munido de sua ordem *induzida* $<_{\mathbb{N}} := < \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$: isto é só um jeito excessivamente simbólico de expressar que, para $m, n \in \mathbb{N}$, a grafia de $m <_{\mathbb{N}} n$ indica a ocorrência de $m < n$ enquanto elementos de ω.

Como $\mathbb{N}$ é claramente bem ordenado por $<_{\mathbb{N}}$, o Exercício K.34 garante que existe um único ordinal α dotado de um (único) *isomorfismo de ordens* $f \colon \alpha \to \mathbb{N}$. Com algum esforço, o leitor deve perceber que $\alpha = \omega$ e f *só pode ser* a função que faz $n \mapsto n+1$. Assim, no que diz respeito à ordem, tanto faz usar ω ou $\mathbb{N}$: note que para $A \subseteq \omega$ não-vazio, tem-se $a = \min A$ se, e somente se, $a + 1 = \min f[A]$, por exemplo.

[48] Isto é, aquelas que têm aridade finita.

[49] A rigor, não haveria muita perda de generalidade: confira o Teorema 7.1 em [29].

[50] Sim, as duas notações, ω e $\mathbb{N}$, serão usadas para denotar os naturais, mas a segunda se restringirá para o subconjunto próprio formado pelos naturais não-nulos. Embora o exemplo acima corrobore uma postura conciliatória, no sentido de enfatizar que a resposta para a pergunta “afinal, zero é natural??” deveria ser “depende”, neste texto a postura/resposta adotada é “sim”.

Já no caso da função $\complement\colon \wp(X) \to \wp(X)$, que faz $A \mapsto X \setminus A$, determina-se uma bijeção de $\wp(X)$ em $\wp(X)$ que *converte* informações expressas por meio da operação $\cap$ em informações expressas por meio de $\cup$: com efeito, $(S \cap T)^{\complement} = S^{\complement} \cup T^{\complement}$ pelas Leis de De Morgan. Por outro lado, *certamente* não existe uma função (*não-trivial*) desse tipo que converta a operação $\cap$ em $\wp(X)$ na operação $\circ$ em $\mathbb{S}(X)$: no primeiro, sempre ocorre $S \cap S = S$, enquanto no segundo, a única bijeção f satisfazendo $f \circ f = f$ é $f := \mathrm{Id}_X$. ▲

Definição K.2.8. Uma **linguagem** $\mathscr{L}$ é um par $\mathscr{L} := (\mathcal{S}, \Omega)$, onde $\mathcal{S}$ é um conjunto *de símbolos* e $\Omega\colon \mathcal{S} \to \omega$ é uma função que a cada símbolo $s \in \mathcal{S}$ associa um número natural $\Omega(s) \in \omega$ chamado de **aridade** de s. A função Ω costuma ser chamada de **assinatura** ou **tipo** da linguagem $\mathscr{L}$. ¶

Mais precisamente, os símbolos em $\mathcal{S}$ são particionados em dois subconjuntos disjuntos, $\mathcal{O}_{\mathscr{L}}$ e $\mathcal{R}_{\mathscr{L}}$: o primeiro composto pelos chamados *símbolos de operação*, enquanto o segundo é composto pelos *símbolos relacionais*[51]. Tal distinção é importante pois, como os nomes sugerem, símbolos operacionais e relacionais são usados para designar, respectivamente, operações e relações finitárias, que desempenham papéis diferentes na construção da *semântica* de uma linguagem.

Definição K.2.9. Sejam $\mathscr{L} := (\mathcal{S}, \Omega)$ uma linguagem e M um conjunto. Dizemos que um par $(M, \mathcal{I})$ é uma **$\mathscr{L}$-estrutura** se $\mathcal{I}$ for uma função que a cada $s \in \mathcal{S}$ com $\Omega(s) := n$ associa:

(i) uma operação n-ária $s_M\colon M^n \to M$ se s for um símbolo operacional;

(ii) uma relação n-ária $s_M \subseteq M^n$ se s for um símbolo relacional. ¶

Nas mesmas condições da definição acima, também é comum dizer que $\mathcal{I}$ é *uma* $\mathscr{L}$-estrutura sobre o *universo* M, a fim de indicar que um mesmo conjunto M pode ter mais de uma $\mathscr{L}$-estrutura. Usa-se a letra "$\mathcal{I}$" em vez da letra "$\mathcal{E}$" pois a ideia é que uma estrutura permite *interpretar* os símbolos da linguagem. Apesar disso, quase sempre é seguro omitir menções explícitas à função $\mathcal{I}$ e tratar apenas das operações e relações induzidas denotadas por s_M, como feito na próxima

Definição K.2.10. Sejam $\mathscr{L} := (\mathcal{S}, \Omega)$ uma linguagem e M, N $\mathscr{L}$-estruturas. Uma função $f\colon M \to N$ é chamada de **$\mathscr{L}$-morfismo** (ou **morfismo de $\mathscr{L}$-estruturas**) se para todo $s \in \mathcal{S}$ com $\Omega(s) := n$ ocorrer

(i) $f \circ s_M = s_N \circ f^n$ se s for um símbolo operacional, e

(ii) $f^n[s_M] \subseteq s_N$ se s for um símbolo relacional,

onde $f^n\colon M^n \to N^n$ é dada por $f^n(m_1, \ldots, m_n) := (f(m_1), \ldots, f(m_n))$. ¶

Observação K.2.11. Embora a notação não ajude a perceber, no caso em que $n := 0$, deve-se ter $f(s_M) = s_N$ no caso operacional/constante, pois $f^0\colon M^0 \to N^0$ *automaticamente* satisfaz $f^0(\emptyset) = \emptyset$, no sentido do Exercício K.22 e, a rigor, s_N é a função que faz $\emptyset \mapsto s_N$. Em particular, a condição sobre relações 0-árias fica automaticamente satisfeita. △

[51] Linguagens sem símbolos relacionais costumam ser chamadas de *algébricas* e são *responsabilidade* da Álgebra Universal.

Exemplo K.2.12. O leitor já familiarizado com *estruturas algébricas* típicas, como *espaços vetoriais* e *anéis*, deve ter reconhecido o padrão da condição (i) acima: se $+_M$ e $+_N$ indicam *somas* em M e N, por exemplo, então (i) se traduz na condição $f(m +_M m') = f(m) +_N f(m')$, ao passo que para $-_M$ e $-_N$ as operações que associam *vetores* aos seus *inversos aditivos*, (i) se traduz em $f(-_M m) = -_N f(m)$; no caso 0-ário, pode-se pensar na exigência típica de que morfismos de anéis levem *a unidade* de um anel *na unidade* do outro.

Por sua vez, a condição (ii) já teve paralelos na seção anterior: funções crescentes $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ entre ordens parciais $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ e $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ são $\mathscr{L}$-morfismos da linguagem $\mathscr{L}$ composta unicamente por um símbolo relacional de aridade 2, já que se pede que

$$a \leq_{\mathbb{P}} b \Rightarrow f(a) \leq_{\mathbb{Q}} f(b),$$

i.e., $f[\leq_{\mathbb{P}}] \subseteq \leq_{\mathbb{Q}}$. O mesmo fenômeno ocorre com funções compatíveis com uma relação de equivalência (Exercício K.21), posto que a igualdade é uma relação de equivalência. ▲

Proposição K.2.13. *Seja $\mathscr{L}$ uma linguagem.*

(i) Se M é uma $\mathscr{L}$-estrutura, então Id_M é um $\mathscr{L}$-morfismo.

(ii) Se M, N e O são $\mathscr{L}$-estruturas e $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to O$ são $\mathscr{L}$-morfismos, então $g \circ f\colon M \to O$ é um $\mathscr{L}$-morfismo.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) seguem, respectivamente, das identidades $\mathrm{Id}_M^n = \mathrm{Id}_{M^n}$ e $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$. O leitor pode cuidar dos detalhes[52]. □

Um **$\mathscr{L}$-isomorfismo** entre duas $\mathscr{L}$-estruturas M e N é um $\mathscr{L}$-morfismo $f\colon M \to N$ para o qual existe um $\mathscr{L}$-morfismo $g\colon N \to M$ com $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_N$. Em tal situação, diz-se que M e N são $\mathscr{L}$-estruturas *isomorfas*.

Exemplo K.2.14. Em virtude da Proposição K.1.21, todo $\mathscr{L}$-isomorfismo é uma bijeção entre os universos subjacentes. Por sua vez, como qualquer bijeção $f\colon M \to N$ satisfaz a identidade $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}\colon M^n \to N^n$, resulta que para uma linguagem **algébrica** $\mathscr{L}$, i.e., sem símbolos relacionais, todo $\mathscr{L}$-morfismo bijetor é um $\mathscr{L}$-isomorfismo.

Proposição K.2.15. *Se $\mathscr{L}$ é uma linguagem algébrica, então um $\mathscr{L}$-morfismo $f\colon M \to N$ é um $\mathscr{L}$-isomorfismo se, e somente se, f é $\mathscr{L}$-morfismo bijetor.*

Demonstração. Em vista da identidade observada acima, de $f \circ s_M = s_N \circ f^n$ resulta $f^{-1} \circ s_N \circ f^n = s_M$ e, por conseguinte, $f^{-1} \circ s_N = s_M \circ (f^{-1})^n$. □

Contudo, o fenômeno acima não é regra. Ao aplicar o mesmo raciocínio para relações, obtém-se $s_M \subseteq (f^{-1})^n[s_N]$. Porém, seria preciso assegurar a inclusão oposta a fim de garantir a *compatibilidade* de f^{-1} com um símbolo de relação n-ário s. Há exemplos bastante imediatos de que a proposição acima, de fato, falha em linguagens não algébricas: ao se considerar $\mathbb{P}$ como o conjunto $X := \{0, 1\}$ munido da ordem parcial $\preceq := \{(0,0), (1,1)\}$ e $\mathbb{P}'$ como o próprio conjunto X com a ordem usual[53], a função $\mathrm{Id}\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ que faz $\mathrm{Id}(x) := x$ é um $\mathscr{L}_{\leq}$-morfismo bijetor, onde $\mathscr{L}_{\leq}$ indica a **linguagem das ordens**; no entanto, sua inversa $\mathrm{Id}^{-1}\colon \mathbb{P}' \to \mathbb{P}$ não é um $\mathscr{L}_{\leq}$-morfismo, dado que $0 \leq 1$ em $\mathbb{P}'$ enquanto não ocorre $0 \preceq 1$ em $\mathbb{P}$.

[52] Cuidado para não confundir "h^n" com o resultado de n composições da função h. Aqui, a notação "h^n" está de acordo com o Exercício K.22. Em particular, como $M \neq N$, nem faria sentido pensar em tal expoente como indicativo de composições iteradas: como sempre, o contexto é importante.

[53] *Induzida* de ω.

Feitas todas essas ressalvas, note que o Exemplo K.2.7 apresentou duas $\mathscr{L}_{\leq}$-estruturas isomorfas, a saber $\mathbb{N}$ e ω (com as ordens lá consideradas). Ainda no mesmo exemplo, a bijeção $\complement\colon \wp(X) \to \wp(X)$ se revela um $\mathscr{L}_{\text{group}}$-isomorfismo, onde $\mathscr{L}_{\text{group}}$ indica a **linguagem dos grupos**: ela é composta unicamente por símbolos operacionais, sendo um binário, um unário e uma constante. ▲

Exemplo K.2.16 (Produtos)**.** Dadas uma linguagem $\mathscr{L} := (\mathcal{S}, \Omega)$ e duas $\mathscr{L}$-estruturas M e N, é muito natural definir uma $\mathscr{L}$-estrutura sobre o produto cartesiano $M \times N$: basta declarar $s_{M\times N} := s_M \times s_N$ para cada $s \in \mathcal{S}$, ou quase isso. Mais precisamente, para $s \in \mathcal{S}$ um símbolo operacional de aridade n, $s_{M\times N}$ denota a operação n-ária que faz

$$\underbrace{((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))}_{\text{em } (M\times N)^n} \mapsto (s_M(a_1, \ldots, a_n), s_N(b_1, \ldots, b_n))$$

para cada n-upla $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in (M \times N)^n$. Na prática, tal correspondência é mais simples do que parece: trata-se da composição da bijeção *natural* que existe entre $M^n \times N^n$ e $(M \times N)^n$ com o produto cartesiano das funções $s_M\colon M^n \to M$ e $s_N\colon N^n \to N$, no sentido do que se definiu em (K.4) (Subseção K.1.3), este sim denotado por $s_M \times s_N$,

$$\underbrace{((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n))}_{\text{em } M^n \times N^n} \overset{s_M\times s_N}{\longmapsto} (s_M(a_1, \ldots, a_n), s_N(b_1, \ldots, b_n)).$$

O caso de um símbolo relacional s de aridade n é análogo: $s_{M\times N} := \varphi[s_M \times s_N]$, onde $\varphi\colon M^n \times N^n \to (M \times N)^n$ é a bijeção *óbvia*, o que faz sentido pois $s_M \times s_N \subseteq M^n \times N^n$. O leitor deve se sentir encorajado a reescrever tais definições para os casos $n := 0, 1$ e 2, a fim de perceber que tudo se trata da boa e velha definição *coordenada a coordenada*. ▲

Classicamente, morfismos costumam ser xingados de *homomorfismos*, o que é etimologicamente razoável: "homos" e "morphe", que vêm do grego, significariam algo como "mesma forma". Embora essa tradução literal se aplique melhor aos *isomorfismos*, morfismos realmente preservam certas formas na passagem de uma estrutura para outra. Porém, discutir precisamente o que é preservado terá que esperar.

Subestruturas, núcleos e quocientes

Definição K.2.17. Sejam $\mathscr{L} := (\mathcal{S}, \mathcal{O})$ uma linguagem e $(M, \mathcal{I})$ uma $\mathscr{L}$-estrutura. Um subconjunto $N \subseteq M$ é dito uma $\mathscr{L}$**-subestrutura** se a restrição $\mathcal{I}|_N$ *apropriada* das operações e relações de $\mathcal{I}$ a N faz de $(N, \mathcal{I}|_N)$ uma $\mathscr{L}$-estrutura. ¶

Acima, por "restrição apropriada" entende-se a função $\mathcal{I}|_N$ que a cada símbolo $s \in \mathcal{S}$ cuja aridade é $\Omega(s) := n$ associa a restrição da operação s_M ao subconjunto N^n (no caso de um símbolo operacional s), i.e., $s_N := s_M|_{N^n}$, ou $s_N := s_M \cap N^n$ se s for um símbolo relacional. Explicitamente, a fim de que N seja subestrutura de $(M, \mathcal{I})$:

✓ as interpretações em M das constantes de $\mathscr{L}$ devem pertencer a N;

✓ deve-se ter $s_M(a_1, \ldots, a_n) \in N$ sempre que $a_1, \ldots, a_n \in N$ e s for um símbolo de operação com aridade n.

Observação K.2.18. A definição anterior deveria dizer que N é *subestruturável*, já que a princípio N é um subconjunto sem estrutura do universo M. Todavia, tal abuso é inofensivo, dado que a estrutura $\mathcal{I}|_N$ definida é a única a fazer da inclusão $i\colon N \to M$ um $\mathscr{L}$-morfismo – se, é claro, as condições observadas acima forem satisfeitas por N. △

Tais considerções sugerem uma pergunta ingênua cuja resposta tem um alcance inimaginável: se M é uma $\mathscr{L}$-estrutura e $X \subseteq M$ *não é* um subestrutura de M, como corrigir isso? Dada a aplicabilidade do próximo teorema em outros contextos, convém utilizar letras distintas das que tem sido usadas ao longo desta subseção.

Teorema K.2.19 (Fecho indutivo)**.** *Sejam A um conjunto, $X \subseteq A$ um subconjunto e $\mathcal{F}$ uma família de operações finitárias em A. Então existe um (único) subconjunto $\mathcal{F}(X) \subseteq A$ com as seguintes propriedades:*

(i) $X \subseteq \mathcal{F}(X)$;

(ii) *se $f \in \mathcal{F}$ tem aridade m e $c \in (\mathcal{F}(X))^m$, então $f(c) \in \mathcal{F}(X)$;*

(iii) *se $B \subseteq A$ tem as duas propriedades acima, então $\mathcal{F}(X) \subseteq B$.*

Demonstração. Diremos que $C \subseteq A$ é $\mathcal{F}$-indutivo se a condição (ii) acima for satisfeita para C em vez de $\mathcal{F}(X)$. Não é difícil perceber que A é $\mathcal{F}$-indutivo e, se $\mathcal{J}$ for uma família de subconjuntos $\mathcal{F}$-indutivos, então $\bigcap \mathcal{J}$ é $\mathcal{F}$-indutivo. Logo, tomando-se a família $\mathcal{J} := \{C \subseteq A : X \subseteq C$ e C é $\mathcal{F}$-indutivo$\}$, resulta que $\mathcal{F}(X) = \bigcap \mathcal{J}$. Note que a unicidade de $\mathcal{F}(X)$ segue por $\mathcal{F}(X)$ ser o ínfimo de $\mathcal{J}$ (Exemplo K.1.55).

Alternativamente, e isto será importante, pode-se considerar $X_0 := X$ e, para $n \in \omega$,

$$X_{n+1} := X_n \cup \{f(c) : m \in \omega,\ f \in \mathcal{F} \text{ tem aridade } m \text{ e } c \in (X_n)^m\},$$

donde segue que $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n\in\omega} X_n$: por construção, $X_+ := \bigcup_{n\in\omega} X_n$ é $\mathcal{F}$-indutivo e contém X, o que prova $\mathcal{F}(X) \subseteq X_+$; por outro lado, não é difícil se convencer, por indução, que $X_n \subseteq \mathcal{F}(X)$ para todo n, donde se obtém $X_+ \subseteq \mathcal{F}(X)$. □

Observação K.2.20. Convém ressaltar que $|\mathcal{F}(X)| \leq |X| \cdot |\mathcal{F}| \cdot \aleph_0$, o que segue pois $|X_0| \leq |X| \cdot |\mathcal{F}| \cdot \aleph_0$ e, se $|X_n| \leq |X| \cdot |\mathcal{F}| \cdot \aleph_0$, então

$$|X_{n+1}| \leq |X_n| + |\mathcal{F}| \cdot \sup_{m\in\omega} |X_n|^m \leq |X| \cdot |\mathcal{F}| \cdot \aleph_0 + |\mathcal{F}| \cdot \sup_{m\in\omega} |X|^m |\mathcal{F}|^m \aleph_0^m,$$

o restante decorre da Observação K.1.116, do Teorema K.1.134 e dos Corolários K.1.129 e K.1.130 [54]. Em particular, se $|X|, |\mathcal{F}| \leq \aleph_0$, então $|X| \leq |\mathcal{F}(X)| \leq \aleph_0$. △

Observação K.2.21 (Indução sobre complexidade)**.** Além de facilitar a estimativa da cardinalidade de $\mathcal{F}(X)$, a segunda construção tem a vantagem de permitir os chamados argumentos por *indução sobre complexidade*, que nada mais é do que a boa e velha indução clássica envolta numa *aura* de mistério computacional.

Teorema K.2.22 (Indução sobre complexidade)**.** *Sejam Y um conjunto e $\mathcal{P}$ uma família de subconjuntos de Y, bem ordenada por uma relação $\prec$, com $Y = \bigcup \mathcal{P}$. Se Φ for uma "propriedade" sobre elementos de Y tal que, para todo $P \in \mathcal{P}$ se tenha*

$$(\forall Q \in \mathcal{P} \quad Q \prec P \Rightarrow Q \subseteq \{y \in Y : \Phi(y)\}) \Rightarrow P \subseteq \{y \in Y : \Phi(y)\}, \tag{K.13}$$

então todo $y \in Y$ tem a propriedade Φ.

Demonstração. Basta supor $\mathcal{T} := \{P \in \mathcal{P} : \exists y \in P$ tal que $\neg\Phi(y)\} \neq \emptyset$ e procurar pelo menor elemento de $\mathcal{T}$. □

[54] Pode ser útil, ainda, observar que $\sup_{m\in\omega} |X|^m |\mathcal{F}|^m \aleph_0^m = \max\{|X|, |\mathcal{F}|, \aleph_0\}$.

O *modus operandi* acima costuma ser chamado de **indução sobre a complexidade** pois, em geral, uma decomposição $\mathcal{P}$ como acima surge em contextos nos quais o conjunto Y é descrito recursivamente a partir de conjuntos mais simples[55]. No caso, fazendo $Y := \mathcal{F}(X)$, segue que para demonstrar a validade de uma condição Φ acerca de todos os elementos de $\mathcal{F}(X)$, basta verificar que: cada $x \in X$ satisfaz Φ e $f(c)$ satisfaz Φ sempre que $f \in \mathcal{F}$ e c é uma upla do *tamanho certo* composta por elementos que satisfazem Φ. O leitor pode tratar dos detalhes. $\triangle$

Corolário K.2.23. *Sejam $\mathscr{L}$ uma linguagem e M uma $\mathscr{L}$-estrutura. Para cada subconjunto $X \subseteq M$, a família das $\mathscr{L}$-subestruturas de M que contêm X tem um menor elemento. Mais precisamente: existe uma $\mathscr{L}$-subestrutura S de M tal que $X \subseteq S$ e $S \subseteq T$ para toda $\mathscr{L}$-subestrutura $T \subseteq M$ que satisfaz $X \subseteq T$.*

Definição K.2.24. Nas notações acima, denotaremos por $\langle X \rangle$ a menor $\mathscr{L}$-subestrutura de M que contém X, que se diz ser **gerada** por X. ¶

Em geral, quando $\mathscr{L}$ é uma linguagem algébrica, as (sub) estruturas de tipo $\mathscr{L}$ são chamadas de (**sub**) **álgebras** de tipo $\mathscr{L}$, ou apenas $\mathscr{L}$-(sub) álgebras. Claramente, trata-se de uma generalização dos *subgrupos*, *subanéis*, *submódulos*, etc., que o leitor já deve conhecer de suas experiências prévias com Álgebra Abstrata. Pelo restante desta subsubseção, $\mathscr{L}$ indicará uma linguagem algébrica.

Proposição K.2.25. *Sejam $\mathscr{L}$-álgebras A e B, bem como $\mathscr{L}$-morfismos $f, g \colon A \to B$. Se $A = \langle X \rangle$ para algum $X \subseteq A$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, então $f = g$.*

Demonstração. O conjunto $T := \{a \in A : f(a) = g(a)\}$ é uma $\mathscr{L}$-subálgebra de A, pois f e g são morfismos. Como $X \subseteq T$, segue que $T = A$ e, portanto, $f = g$. $\square$

Observação K.2.26 (Bases em Álgebra Linear)**.** Explicitamente, o último resultado atesta a injetividade da correspondência $f \mapsto f|_X$ entre os $\mathscr{L}$-morfismos da forma $A \to B$ e as funções da forma $X \to B$. Por outro lado, as *bases* (de espaços vetoriais, digamos) *garantem* que a mesma correspondência é uma sobrejeção. $\triangle$

Uma vez em posse da definição de *estrutura algébrica*, a discussão dos quocientes e das *subestruturas* passa a ser realizável de modo bastante geral, o que pode revelar nuances importantes de tais construções, mas que costumam passar despercebidas quando feitas nos cenários típicos de *grupos*, *anéis* e *módulos*.

Definição K.2.27. Seja $f \colon A \to B$ um $\mathscr{L}$-morfismo. O **núcleo universal** de f é o subconjunto $\mathrm{Ker}\,(f) := \{(a, a') \in A \times A : f(a) = f(a')\}$. ¶

Embora pareça estranho para leitores já familiarizados com Álgebra Elementar, $\mathrm{Ker}\,(f)$, definido como acima, tem duas propriedades interessantes:

✓ *é uma relação de equivalência sobre* A, i.e., para quaisquer $x, y, z \in A$ ocorre

- $x \ \mathrm{Ker}\,(f) \ x$,
- $x \ \mathrm{Ker}\,(f) \ y \Rightarrow y \ \mathrm{Ker}\,(f) \ x$, e
- $x \ \mathrm{Ker}\,(f) \ y$ e $y \ \mathrm{Ker}\,(f) \ z \Rightarrow x \ \mathrm{Ker}\,(f) \ z$;

[55]Pode-se inclusive definir *a complexidade* de $y \in Y$ como $\min\{P \in \mathcal{P} : y \in P\}$.

✓ *é uma $\mathscr{L}$-subálgebra de $A\times A$*, pois $(s_A, s_A) \in \operatorname{Ker}(f)$ para todo símbolo de constante s e, para as demais aridades,

$$f(s_A(a_1,\dots,a_n)) = s_A(f(a_1),\dots,f(a_n)) = s_A(f(b_1),\dots,f(b_n)) = f(s_A(b_1,\dots,b_n)),$$

sempre que $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n) \in \operatorname{Ker}(f)$, mostrando assim que

$$s_{A\times A}((a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)) := (s_A(a_1,\dots,a_n), s_A(b_1,\dots,b_n)) \in \operatorname{Ker}(f).$$

Observação K.2.28. Acima, usou-se indução em complexidade. Se parecer muito confuso, reescreva tudo com $n := 2$. Acredite, vai melhorar. △

Definição K.2.29. Nas notações acima, uma **congruência** em A é uma relação de equivalência $C \subseteq A \times A$ que também é uma $\mathscr{L}$-subálgebra de $A \times A$. ¶

Fixada uma congruência C em A, faz sentido considerar o conjunto $A/C := \{\overline{a} : a \in A\}$, i.e., o conjunto das classes de equivalência da relação C. A fim de elevar A/C ao patamar de $\mathscr{L}$-álgebra, deve-se definir uma $\mathscr{L}$-estrutura $\mathcal{I}_{A/C}$ em A/C, o que se faz da maneira *óbvia*: para um símbolo $s \in \mathcal{S}$ de aridade $n \in \omega$, faz-se $s_{A/C}\colon (A/C)^n \to A/C$ por meio da correspondência $(\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}) \mapsto \overline{p_A(a_1,\dots,a_n)}$.

A boa definição da operação $s_{A/C}$ segue da suposição de C ser $\mathscr{L}$-subálgebra: com efeito, se $\overline{a_i} = \overline{b_i}$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, então $(a_i,b_i) \in C$ e daí

$$p_{A\times A}((a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)) := (p_A(a_1,\dots,a_n), p_A(b_1,\dots,b_n)),$$

que pertence a C pois este é fechado para a operação $s_{A\times A}$, acarretando a identidade $\overline{p_A(a_1,\dots,a_n)} = \overline{p_A(b_1,\dots,b_n)}$. A construção da estrutura de A/C é feita sob medida para que a projeção $\pi\colon A \to A/C$ seja um $\mathscr{L}$-morfismo. E não é só isso.

Teorema K.2.30. *Nas notações acima, se $f\colon A \to B$ é um $\mathscr{L}$-morfismo com $C \subseteq \operatorname{Ker}(f)$, então existe um único morfismo de $\mathscr{L}$-álgebras $\overline{f}\colon A/C \to B$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$.*

Demonstração. O único modo *sensato* de definir $\overline{f}$ é fazendo $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$, e daí precisa-se verificar que tal correspondência está bem definida (o que ocorre por conta da hipótese $C \subseteq \operatorname{Ker}(f)$) e é o único morfismo de $\mathscr{L}$-álgebras satisfazendo $\overline{f} \circ \pi = f$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Observação K.2.31 (Núcleo de funções)**.** As considerações acima a respeito de núcleos e congruências permanecem válidas nas situações em que $\mathscr{L} := \emptyset$. Em outras palavras, isto significa que núcleos (como acima) podem ser definidos para funções entre *conjuntos* desprovidos de *estruturas algébricas*. Em particular, se $f\colon X \to Y$ é uma função entre conjuntos e $R \subseteq X \times X$ é uma relação de equivalência com $R \subseteq \operatorname{Ker}(f)$, então existe uma única função $\overline{f}\colon X/R \to Y$ com $\overline{f} \circ \pi = f$. △

Assim que a discussão se voltar para os casos particulares de grupos, anéis, etc., veremos que o cenário acima dá precisamente as definições bem conhecidas de subgrupos normais, bem como as relações de equivalência usuais do contexto elementar. Por ora, vamos retornar à seguinte questão:

Interpretação, satisfabilidade e modelos

Nesta subsubseção, $\mathscr{L} := (\mathcal{S}, \Omega)$ volta a denotar uma linguagem, possivelmente não-algébrica, com $\mathcal{O}_{\mathscr{L}}$ e $\mathcal{R}_{\mathscr{L}}$ os conjuntos de símbolos operacionais e relacionais, respectivamente. Agora, o principal objetivo é descrever como os símbolos de $\mathcal{S}$ e suas respectivas aridades permitem definir uma *gramática* capaz de exprimir *termos*, *fórmulas* e *sentenças* acerca de elementos numa $\mathscr{L}$-estrutura. No caso das fórmulas e sentenças, isso também exigirá uma breve discussão sobre a noção de *verdade* ou *satisfabilidade*.

Definição K.2.32. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{A}$ conjuntos disjuntos, e $\partial \colon \mathcal{A} \to \omega$ uma função "aridade". Considere também dois objetos adicionais, $\langle\!\langle, \rangle\!\rangle \notin \mathcal{V} \cup \mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C} := \mathcal{V} \cup \mathcal{A} \cup \{\langle\!\langle, \rangle\!\rangle\}$ e chame por $\operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V}) := \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{C}^n$. ¶

Formalmente, $\operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})$ é formado por todas as *strings* de *caracteres* pertencentes ao conjunto $\mathcal{C}$, i.e., são sequências finitas da forma $(c_1, \ldots, c_n)$ para certos $n \in \omega$ e $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$. No caso de $n := \emptyset$, tem-se a *string* vazia. Na prática, $\operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial} \mathcal{V}$ é a coleção de todas as concatenações finitas de caracteres no conjunto $\mathcal{C}$.

O propósito da definição acima é descrever o *ambiente* no qual as coisas que chamaremos de termos e fórmulas *habitam*. Mais precisamente, termos e fórmulas são definidos como subconjuntos apropriados de $\operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})$, para certas escolhas de $\mathcal{A}$, ∂ e $\mathcal{V}$. Em tal processo, o Teorema K.2.19 (do fecho indutivo) pode ser usado pois, secretamente, $\operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})$ está munido de uma família de operações finitárias induzidas pela função ∂. Explicitamente:

- ✓ para $s \in \mathcal{A}$ com $\partial(s) := n > 0$, define-se $s_{\mathrm{str}} \colon \operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})^n \to \operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})$ como uma operação n-ária, com
$$((c_{1,1}, \ldots, c_{1,j_1}), \ldots, (c_{n,1}, \ldots, c_{n,j_n})) \mapsto (s, \langle\!\langle, c_{1,1}, \ldots, c_{1,j_1}, \ldots, c_{n,1}, \ldots, c_{n,j_n}, \rangle\!\rangle);$$
- ✓ para $s \in \mathcal{A}$ com $\partial(s) := 0$, define-se $s_{\mathrm{str}} \colon \operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})^0 \to \operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})$ como uma operação 0-ária, com $\emptyset \mapsto (s)$, que pode ser escrito como $\emptyset \mapsto s$ por meio da bijeção óbvia entre $\operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})$ e $\operatorname{str}_{\mathcal{A},\partial}(\mathcal{V})^1$.

A ideia por trás dessas definições é fazer das operações s_{str} meros concatenadores de caracteres: note que ao omitir parênteses e as vírgulas entre eles no primeiro caso, o resultado da operação seria $s\,\langle\!\langle c_{1,1}, \ldots, c_{n,j_n} \rangle\!\rangle$, de modo que os símbolos "$\langle\!\langle$" e "$\rangle\!\rangle$" funcionam apenas como delimitadores, ou símbolos de pontuação[56] para indicar o *escopo* de s. Adotaremos a omissão de parênteses e vírgulas sugerida acima sempre que tratarmos de *termos* e *fórmulas*.

Proposição K.2.33. *Fixado um conjunto $\mathcal{V}$ com $\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, existe um conjunto $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ de strings satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\mathcal{V} \cup \mathcal{O}_{\mathscr{L},0} \subseteq \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, *onde* $\mathcal{O}_{\mathscr{L},0} := \{s \in \mathcal{O}_{\mathscr{L}} : \Omega(s) = 0\}$;

(ii) se $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ *e* $s \in \mathcal{S}$ *é um símbolo operacional de aridade* $n > 0$, *então* $s\,\langle\!\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle\!\rangle \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$;

(iii) se $\tau \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, *então* $\tau \in \mathcal{V} \cup \mathcal{O}_{\mathscr{L},0}$ *ou existem* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ *para algum* $n > 0$, *bem como um símbolo operacional* $s \in \mathcal{S}$ *com* $\Omega(s) := n$, *tal que* $\tau = s\,\langle\!\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle\!\rangle$.

[56] Optei por não usar parênteses ou colchetes para não gerar confusões com o uso *metalinguístico* que já fazemos desses símbolos.

Demonstração. O resultado desejado segue do Teorema K.2.19, especificamente com $A := \mathrm{str}_{\mathcal{O}_{\mathscr{L}},\Omega}(\mathcal{V})$, $\mathcal{F} := \{s_{\mathrm{str}} : s \in \mathcal{O}_{\mathscr{L}}\}$ e $X := \mathcal{V}$, . □

Definição K.2.34. Nas condições acima, os elementos de $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ são chamados de **$\mathscr{L}$-termos nas variáveis** de $\mathcal{V}$.

Explicitamente, a *cláusula (i)* diz que tanto os símbolos de aridade 0 quanto as *variáveis* são $\mathscr{L}$-termos: íntimos costumam chamá-los de **$\mathscr{L}$-termos atômicos** de $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$. Por sua vez, a cláusula *(ii)* determina de maneira recursiva como obter termos *novos* a partir de termos *previamente conhecidos*: se $\tau_1, \ldots, \tau_n$ são $\mathscr{L}$-termos (atômicos ou não) e $s \in \mathcal{O}_{\mathscr{L}}$ é um símbolo operacional de aridade n, então $s\,(\!\!|\tau_1, \ldots, \tau_n|\!\!)$ é um $\mathscr{L}$-termo. A última cláusula é a tradução da minimalidade, no sentido da inclusão, da subestrutura $\mathcal{F}(X)$ *construída* no Teorema K.2.19: isso *exclui* a possibilidade de que $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ contenha elementos que não obedeçam as cláusulas anteriores. Naturalmente, $\mathscr{L}$-termos serão chamados apenas de *termos* quando a linguagem $\mathscr{L}$ estiver clara pelo contexto.

Exemplo K.2.35 (Fundamental)**.** O leitor que já tem familiaridade com polinômios deve usá-los como farol no entendimento dos termos: um polinômio *real* como $2x^3 + 5xy$, por exemplo, é tão somente uma expressão simbólica utilizando as *constantes* 2 e 5, as *variáveis* x e y e, por fim, os *símbolos de operação* $+$ e $\cdot$ (este último implícito). Por si só, um polinômio não *pede* que suas variáveis sejam substituídas por *números* ou algo do tipo. Isso pode ser feito? Sim, pode.

Na verdade, seria *lícito* usar o polinômio $2x^3 + 5xy$ para definir uma função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que associa cada par $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ao *número* $2a^3 + 5ab$, i.e., substituindo as ocorrências das variáveis x e y pelos elementos a e b de $\mathbb{R}$, respectivamente. Porém, isto é problema de quem decide fazer tal *interpretação* do polinômio. Em outras palavras: polinômios são receitas multiuso para a realização de operações algébricas. Termos não são diferentes. ▲

Definição K.2.36. Fixado um conjunto de variáveis $\mathcal{V}$ e um conjunto M, a notação $u \colon \mathcal{V} \rightharpoonup M$ indicará que u é uma função da forma $\mathcal{V}' \to M$ para algum subconjunto finito $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$. Funções dessa forma serão xingadas de **$\mathcal{V}$-atribuições de valores** em M, e a coleção de todas as $\mathcal{V}$-atribuições em M será denotada por $[\mathcal{V} \rightharpoonup M]$. ¶

Definição K.2.37. Para um $\mathscr{L}$-termo $\tau \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ e uma $\mathscr{L}$-estrutura M, chamamos de **interpretação** de τ em M à *função* τ^M definida da seguinte forma:

(i) (interpretação de variáveis) se $\tau := v \in \mathcal{V}$ e $u \colon \mathcal{V} \rightharpoonup M$ é tal que $v \in \mathrm{dom}\,(u)$, então $\tau^M(u) := u(v)$; não se define $\tau^M(u)$ caso $v \notin \mathrm{dom}\,(u)$;

(ii) (interpretação de constantes) se $\tau := s \in \mathcal{O}_{\mathscr{L}}$ tem aridade 0, então $\tau^M(u) := s_M \in M$ para qualquer atribuição $u \in [\mathcal{V} \rightharpoonup M]$;

(iii) (interpretação de termos) se $\tau := s\,(\!\!|\tau_1, \ldots, \tau_n|\!\!)$, para $s \in \mathcal{O}_{\mathscr{L}}$ com aridade $n > 0$ e termos $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, então $\tau^M(u) := s_M(\tau_1^M(u), \ldots, \tau_n^M(u))$ sempre que $u \in [\mathcal{V} \rightharpoonup M]$ for uma atribuição cujas interpretações $\tau_1^M(u), \ldots, \tau_n^M(u)$ estiverem definidas. ¶

Observação K.2.38. Em vez de $[\mathcal{V} \rightharpoonup M]$, poderíamos considerar atribuições da forma $\mathcal{V} \to M$, de modo a fazer da interpretação τ^M uma função do tipo $M^{\mathcal{V}} \to M$. Todavia, isto dificultaria as futuras discussões acerca de *subestruturas elementares*, que dependem de um controle mais cuidadoso da *quantidade* de fórmulas. △

Exemplo K.2.39. Ainda no caso de polinômios, note que a função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ induzida pelo polinômio y funciona como a projeção na segunda coordenada, enquanto a função induzida pelo polinômio x projeta pares $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ em a. Já as funções induzidas por polinômios constantes são constantes. Por fim, a função induzida pelo polinômio $2xy + y^2$ é a soma das funções induzidas pelos polinômios $2xy$ e y^2. Esse tipo de analogia deve ajudar a aceitar a próxima proposição. ▲

Proposição K.2.40. *Para um $\mathscr{L}$-termo $\tau \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ e um $\mathscr{L}$-morfismo $g\colon M \to N$ entre $\mathscr{L}$-estruturas M e N, verifica-se $\tau^N(g \circ u) = g(\tau^M(u))$ para qualquer atribuição $u\colon \mathcal{V} \rightharpoonup M$ no domínio de τ^M. Menos precisamente: $\tau^N \circ g = g \circ \tau^M$.*

Demonstração. Note que $g \circ u\colon \mathcal{V} \rightharpoonup N$ é uma atribuição de valores em N. Com isso, a ideia é usar indução na complexidade do termo a fim de *transportar* as identidades válidas em M para N:

(i) se $\tau \coloneqq v \in \mathcal{V}$, então $\tau^N(g \circ u) \coloneqq (g \circ u)(v)$, enquanto $\tau^M(u) \coloneqq u(v)$;

(ii) se $\tau \coloneqq s \in \mathscr{O}_{\mathscr{L}}$ tem aridade 0, então $\tau^N(g \circ u) \coloneqq s_N$, enquanto $\tau^M(u) \coloneqq s_M$, e daí $g(s_M) = s_N$;

(iii) se $\tau \coloneqq s \llparenthesis \tau_1, \ldots, \tau_n \rrparenthesis$ para $s \in \mathscr{O}_{\mathscr{L}}$ com aridade $n > 0$ e $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ são tais que $\tau_i^N \circ g = g \circ \tau_i^M$ para cada $i \leq n$, então

$$\begin{aligned}\tau^N(g \circ u) \coloneqq s_N\left(\tau_1^N(g \circ u), \ldots, \tau_n^N(g \circ u)\right) = s_N\left(g(\tau_1^M(u)), \ldots, g(\tau_n^M(u))\right) = \\ = g\left(s_M(\tau_1^M(u), \ldots, \tau_n^M(u))\right) = g\left(\tau^M(u)\right),\end{aligned}$$

como desejado. □

Observação K.2.41. O leitor atento deve ter percebido que a construção dos termos ignora os possíveis símbolos relacionais da linguagem $\mathscr{L}$. Isto é intencional: a ideia que se desdobra adiante consiste em usar os termos como *nomes* para objetos de uma estrutura M, de modo que M *satisfaz* uma *afirmação* φ sobre os termos $\tau_1, \ldots, \tau_n$ se a interpretação em M das relações e funções presentes na fórmula φ for verificada para os *objetos nomeados* pelos termos. Por exemplo, pode-se considerar a *expressão* "$xy + 2x^2 < 5x - y$": a depender das uplas $(a_x, a_y) \in \mathbb{R}^2$ de números reais utilizadas, pode ser *verdadeiro* ou *falso* que $a_x a_y + 2a_x^2 < 5a_x - a_y$ em $\mathbb{R}$.

Dito isso, existem muitos resultados que podem ser desenvolvidos em linguagens algébricas, sem a intromissão de símbolos relacionais e *quantificadores*. Infelizmente, tratar de tais resultados, típicos da Álgebra Universal, ocuparia muito espaço num capítulo já bastante tumultuado[57]. △

Proposição K.2.42. *Fixado um conjunto $\mathcal{V}$ com $\mathcal{V} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, existe um conjunto $\mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ de strings satisfazendo as seguintes condições:*

(i) se $\sigma, \tau \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, então $\sigma \approx \tau \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$;

(ii) se $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ e $R \in \mathcal{R}_{\mathscr{L}}$ tem aridade $n > 0$, então $R \llparenthesis \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rrparenthesis \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$;

(iii) se $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, então $\neg\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$;

[57] Mesmo assim, alguns desses resultados se encontram propostos como exercícios. Dentre eles, cabe destacar a existência de *álgebras equacionais livres*, o que engloba a existência de monoides, grupos, anéis e módulos livres.

(iv) *se* $\varphi, \psi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, *então* $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ *e* $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ *pertencem a* $\mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$*;*

(v) *se* $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ *e* $x \in \mathcal{V}$, *então* $\exists x\varphi$ *e* $\forall x\varphi$ *pertencem a* $\mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$*;*

(vi) *se* $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, *então* φ *obedece a alguma das cláusulas anteriores.*

Demonstração. Repita a demonstração da Proposição K.2.33, *mutatis mutandis*[58]. □

Definição K.2.43 (Sintaxe de primeira ordem)**.** Nas condições acima, os elementos de $\mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ são chamados de **$\mathscr{L}$-fórmulas** (de primeira ordem)[59] de $\mathcal{V}$.

Explicitamente, as cláusulas (i) e (ii) dizem que tanto as *expressões* do tipo $\sigma \approx \tau$ quanto as expressões do tipo $R\langle\!\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_n\rangle\!\rangle$ são $\mathscr{L}$-fórmulas, desde que $\tau, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sejam $\mathscr{L}$-termos e R seja um símbolo de relação apropriado, i.e., com aridade igual ao número de termos. Dada a simplicidade de tais fórmulas, elas costumam ser chamadas de **$\mathscr{L}$-fórmulas atômicas**.

As outras cláusulas determinam como obter fórmulas *válidas* a partir de fórmulas válidas já conhecidas por meio dos *símbolos lógicos* e dos *quantificadores*[60]. A última exigência exclui a possibilidade de que $\mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ contenha "fórmulas" que não obedeçam às cláusulas anteriores.

É importante destacar que os **símbolos lógicos** $\approx$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\exists$ e $\forall$ são necessariamente distintos dos possíveis símbolos já presentes na linguagem $\mathscr{L}$: o primeiro, $\approx$, será utilizado na *interpretação* da relação de igualdade[61]; $\exists$ e $\forall$ serão usados para expressar *quantificação*; os demais serão usados como *operadores* ou *conectivos* entre as fórmulas. Os parênteses usuais "(" e ")" serão usados como símbolos de pontuação entre fórmulas, enquanto o uso de "$\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$" será designar o escopo dos possíveis símbolos operacionais[62].

Observação K.2.44 (Honestidade notacional – ou falta dela)**.** Ao longo do texto, muitos parênteses serão omitidos sem maiores menções, tendo como base as regras implícitas de abreviação usuais que o leitor certamente já aprendeu *nas ruas*. Além disso, seguindo a tradição ocidental, daqui em diante, concatenações do tipo "$*\langle\!\langle x, *\langle\!\langle y, z\rangle\!\rangle\rangle\!\rangle$", em que $*$ é um símbolo de aridade 2, serão transcritas como "$x * \langle\!\langle y * z\rangle\!\rangle$", e assim por diante. △

Uma vez definidas as regras de *sintaxe* para as fórmulas de uma linguagem, é chegado o momento de definir como *interpretar* essas fórmulas numa dada estrutura.

Definição K.2.45 (Semântica)**.** Nas condições acima, seja $u\colon \mathcal{V} \rightharpoonup M$ uma $\mathcal{V}$-atribuição em M. Para uma fórmula $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ cujas variáveis pertençam ao domínio de u, escreve-se $M \models \varphi[u]$ a fim de indicar que M, juntamente com a estrutura implícita $\mathcal{I}$, **satisfaz** φ com a atribuição u, o que se faz recursivamente de acordo com a complexidade da fórmula.

[58]Grosso modo, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\leftrightarrow$ devem ser tratados como operações binárias, enquanto $\neg$, $\exists x$ e $\forall x$ são operações unárias (para cada $x \in \mathcal{V}$) que *agem* nas strings descritas pelas duas primeiras cláusulas.

[59]A expressão "primeira ordem" indica que as variáveis serão usadas apenas para interpretar *elementos* dos modelos, e não *subconjuntos*. O leitor interessado em sintaxes de *segunda ordem* pode conferir [38].

[60]Isso fica explícito na construção recursiva de $\mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ por meio do Teorema K.2.19.

[61]E é bem mais comum escrever "=" em vez de "$\approx$", mas eu prefiro reservar o símbolo "=" para a igualdade *entre* conjuntos ou – peço perdão pela expressão – para a igualdade *verdadeira*.

[62]É possível expressar tanto fórmulas quanto termos sem ambiguidades *e sem parênteses*. O leitor interessado deve pesquisar pela chamada "notação *prefixa*".

(i) Para φ atômica, há dois casos:

Forma da φ	Critério para $M \models \varphi[u]$
$\tau \approx \sigma$	$\tau^M(u) = \sigma^M(u)$
$R\langle\!\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle\!\rangle$	$\big(\tau_1^M(u), \ldots, \tau_n^M(u)\big) \in R_M$

onde $\tau, \sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ e R é simbolo relacional com aridade $n > 0$.

(ii) Para os demais casos sem quantificadores:

Forma da φ	Critério para $M \models \varphi[u]$
$\neg\psi$	**não** ocorre $M \models \psi[u]$
$\psi_1 \vee \psi_2$	ocorre $M \models \psi_1[u]$ **ou** ocorre $M \models \psi_2[u]$
$\psi_1 \wedge \psi_2$	$M \models \psi_1[u]$ **e** $M \models \psi_2[u]$ ocorrem
$\psi_1 \to \psi_2$	não ocorre $M \models \psi_1[u]$ sem que $M \models \psi_2[u]$ ocorra
$\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$	$M \models \psi_1[u]$ e $M \models \psi_2[u]$ ocorrem (ou falham) simultaneamente

onde ψ, ψ_1, $\psi_2 \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$.

(iii) Para os casos com quantificadores, convém introduzir a seguinte notação: para um elemento $a \in M$ e uma variável $x \in \mathcal{V}$, indica-se por $u_{x \mapsto a}$ à atribuição $v \colon \mathcal{V} \rightharpoonup M$ que faz $v(y) := u(y)$ para todo $y \in \operatorname{dom}(u) \setminus \{x\}$, enquanto $v(x) := a$. Com isso dito:

Forma da φ	Critério para $M \models \varphi[u]$
$\exists x \psi$	ocorre $M \models \psi[u_{x \mapsto a}]$ para algum $a \in M$
$\forall x \psi$	ocorre $M \models \psi[u_{x \mapsto a}]$ para qualquer $a \in M$

onde $\psi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ e $x \in \mathcal{V}$ é uma variável. ¶

Desse modo, enquanto a interpretação de um termo $\tau \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é uma *função parcial* $\tau^M \colon [\mathcal{V} \rightharpoonup M] \to M$, a *interpretação* de uma fórmula $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ não *toma valores* em M, mas usa as interpretações em M dos eventuais termos que ocorrem em φ a fim de decidir acerca da ocorrência de $M \models \varphi[u]$: nesse sentido, é mais coerente dizer que "$M \models \varphi[u]$" define uma relação de *satisfabilidade*, que determina se M satisfaz, ou não, uma determinada fórmula com os valores das variáveis dados por uma certa atribuição[63]. Por sua vez, os critérios utilizados para realizar tal decisão tão somente sistematizam o modo pelo qual argumentamos corriqueiramente com "não", "e", "ou", "se..., então", "se, e somente se", "existe" e "para todo".

Observação K.2.46 ($\Rightarrow$ vs. $\to$)**.** Ao longo do texto, como de costume, o símbolo "$\Rightarrow$" é usado como abreviação para "se..., então". Nesse sentido, o leitor pode pensar em "$\Rightarrow$" como a versão *metalinguística* da noção subjacente de *implicação*, como em

$$M \models (\varphi \to \psi)[u] \text{ se, e somente se, } M \models \varphi[u] \Rightarrow M \models \psi[u].$$

[63]Isto define uma função $\|\cdot\|_u \colon \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to \{0,1\}$ em que $\|\varphi\|_u := 1$ se, e somente se, $M \models \varphi[u]$.

Não faria sentido escrever "$M \models \varphi[u]$ se, e somente se, $M \models \varphi[u] \to M \models \psi[u]$", já que "$M \models \varphi[u]$" e "$M \models \psi[u]$" não são $\mathscr{L}$-fórmulas. Analogamente, o "se, e somente se" poderia ser trocado por "$\Leftrightarrow$", mas não por "$\leftrightarrow$". $\triangle$

Definição K.2.47. Diz-se que uma $\mathscr{L}$-estrutura M é um **modelo** para uma *fórmula* $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ se $M \models \varphi[u]$ para qualquer atribuição de valores $u\colon \mathcal{V} \rightharpoonup M$ cujo domínio contenha as variáveis que ocorrem em φ, o que será abreviado dizendo que u é φ-compatível. Por extensão, diz-se que M é um **modelo** para um conjunto $T \subseteq \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ de *fórmulas* se $M \models \varphi$ para toda fórmula $\varphi \in T$, o que se abrevia com $M \models T$. ¶

Observação K.2.48. Na prática, a definição acima pode se restringir para um tipo particular de fórmula chamado de **sentença**, que por sua vez é uma fórmula sem *variáveis livres*. O que é uma variável livre? Simples: é uma variável da fórmula que não ocorre "presa" a algum quantificador. Por exemplo: na fórmula "$\exists x \forall y\, x + y \approx z$", tanto x quanto y ocorrem presas aos quantificadores $\exists$ e $\forall$, respectivamente, enquanto a variável z é *livre*. Na prática, a satisfabilidade de tal fórmula numa estrutura apropriada depende do valor atribuído a z. Nesse sentido, é comum escrever $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que φ é uma fórmula em que as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ ocorrem livres.

De volta à definição de modelo: note que se $M \models \varphi$, então $M \models \varphi[u]$ para qualquer atribuição u, donde segue que $M \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi$, onde $x_1, \ldots, x_n$ são as possíveis variáveis livres de φ. A *sentença* $\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi$ pode ser chamada de *fecho universal de* φ. $\triangle$

Exemplo K.2.49 (Grupos, anéis e módulos)**.** Seja $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{\text{group}}$ a linguagem dos grupos: composta apenas por símbolos operacionais de aridades $0, 1$ e 2, digamos e, i e $*$, respectivamente. Apesar do nome atribuído a tal linguagem, *qualquer* conjunto X munido de uma operação binária $*_X$, uma operação unária i_X e uma constante fixada e_X merece a alcunha de $\mathscr{L}$-estrutura. Dito isso, grupos são as $\mathscr{L}$-estruturas que modelam as fórmulas

(i) $\xi := \forall x \forall y \forall z\ \langle\!\langle \langle\!\langle x * y \rangle\!\rangle * z \rangle\!\rangle \approx \langle\!\langle x * \langle\!\langle y * z \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle$,

(ii) $\psi := \forall x\ (\langle\!\langle x * e \rangle\!\rangle \approx x) \wedge (\langle\!\langle e * x \rangle\!\rangle \approx x)$, e

(iii) $\zeta := \forall x\ (\langle\!\langle x * i\, \langle\!\langle x \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle \approx e) \wedge (\langle\!\langle i\, \langle\!\langle x \rangle\!\rangle * x \rangle\!\rangle \approx e)$,

onde x, y e z são variáveis num conjunto $\mathcal{V}$ infinito enumerável[64]. Note que se G é uma $\mathscr{L}$-estrutura, então as interpretações dos termos na primeira fórmula correspondem às funções $G \times G \times G \to G$ que fazem $(a, b, c) \mapsto (a *_G b) *_G c$ e $(a, b, c) \mapsto a *_G (b *_G c)$, de modo que $G \models \xi$ se, e somente se, a operação $*_G\colon G \times G \to G$ é *associativa*, no sentido clássico. Da mesma forma, se $G \models \psi$ e $G \models \zeta$, então e_G é o *elemento neutro* da operação $*_G$, enquanto i_G se revela como a função que associa cada elemento de G ao seu $*_G$-*inverso*. Em outras palavras: G é um *grupo* ou, caso se queira enfatizar o papel das operações, $(G, *_G, i_G, e_G)$ é um grupo.

Definição K.2.50. Uma operação binária $\star\colon X \times X \to X$ num conjunto X é:

(i) **associativa** se para quaisquer $a, b, c \in X$ ocorrer $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;

(ii) **comutativa** se para quaisquer $a, b \in X$ valer a identidade $a \star b = b \star a$;

[64] Nada impede que se considerem outros conjuntos de variáveis. Porém, a fim de *capturar* todas as $\mathscr{L}$-estruturas merecedoras da alcunha de grupo, precisa-se de pelo menos três variáveis. Na prática, o mais comum é considerar $|\mathcal{V}| = \aleph_0$ e seguir com a vida.

(iii) Diz-se ainda que $e \in X$ é **elemento neutro**[65] da operação $\star$ se para qualquer $a \in X$ ocorrer $e \star a = a = a \star e$. Em tais casos: $y \in X$ é um $\star$-**inverso**[66] de x se valer $x \star y = y \star x = e$. ¶

Observação K.2.51. Em particular, um grupo cuja operação binária é comutativa é xingado de **grupo comutativo** ou **abeliano**. △

Com as terminologias acima, consideram-se também os *anéis* (*com unidade*): um **anel** consiste de um conjunto $A \neq \emptyset$ munido de 5 operações $(+_A, \cdot_A, -_A, 0_A, 1_A)$, com aridades 2, 2, 1, 0 e 0, respectivamente, tais que

(i) $(A, +_A, -_A, 0_A)$ é um grupo abeliano, cuja operação $+$ é chamada de *adição*,

(ii) a operação $\cdot_A$, chamada de *multiplicação*, é associativa e tem 1_A como elemento neutro, e

(iii) as operações $+_A$ e $\cdot_A$ *comutam* entre si, i.e., para quaisquer $a, b, c \in A$ valem as identidades $a \cdot_A (b +_A c) = (a \cdot_A b) +_A (a \cdot_A c)$ e $(a +_A b) \cdot_A c = (a \cdot_A c) + (b \cdot_A c)$.

Anéis comutativos são aqueles cuja multiplicação é comutativa – e constituem o principal tipo de anel que será tratado no texto[67]. Agora, é uma tarefa simples definir apropriadamente uma linguagem $\mathscr{L}' := \mathscr{L}_{\text{ring}}$ que permita descrever anéis como as $\mathscr{L}'$-estruturas que modelam um certo conjunto de fórmulas parecidas com as fórmulas ξ, ψ e ζ utilizadas na descrição dos grupos. O caso dos *módulos* é menos imediato.

Com um anel comutativo A fixado, diz-se que um grupo abeliano M é um A-**módulo** se existir uma *função*[68] $*\colon A \times M \to M$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $a * (b * m) = (a \cdot_A b) * m$ para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$;

(ii) $1_A * m = m$ para qualquer $m \in M$;

(iii) $(a +_A b) * m = (a * m) +_M (b * m)$ para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$;

(iv) $a * (m +_M n) = (a * m) +_M (a * n)$ para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in M$.

Num primeiro momento, a função $*\colon A \times M \to M$ parece fugir do poder de expressividade das operações, já que operações n-árias não tem esse formato. Porém, com $a \in A$ fixado, obtém-se uma operação unária $*_a\colon M \to M$ que faz $m \mapsto a * m$. Desse modo, a primeira exigência, por exemplo, se traduz na identidade $*_a(*_b(m)) = *_{a \cdot_A b}(m)$. Com isso, fica menos difícil perceber como definir uma linguagem apropriada para descrever os A-módulos: além dos símbolos que regem o comportamento do anel A e da estrutura de grupo abeliano de M, para cada $a \in A$ se acrescenta um símbolo $*_a$ de operação unária. As fórmulas, por sua vez, apenas traduzem as condições acima nesta linguagem. ▲

Observação K.2.52 (Magmas e morfismos)**.** Leitores com alguma bagagem em Álgebra Abstrata podem ter se incomodado com as definições anteriores por uma questão de aparente excesso de hipóteses. Por exemplo, é comum definir *grupos* como sendo conjuntos dotados de apenas uma operação binária associativa para a qual *existe um* elemento neutro e em que todo elemento tem *um* inverso. Daí, em virtude da próxima proposição, conclui-se que, de fato, existe *a* função que associa cada elemento ao seu *único* inverso, bem como a função que escolhe o *único* elemento neutro como constante.

[65] Também chamado de **zero** ou **unidade** a depender do contexto.
[66] Ou oposto, simétrico, etc. Tudo depende do contexto.
[67] Para exemplos e discussão de propriedades corriqueiras, o leitor deve conferir a Subseção K.2.2.
[68] No caso, uma *ação* (Exercício K.66).

Proposição K.2.53. *Uma operação em X admite, no máximo, um único elemento neutro. Além disso, se a operação em X é associativa e tem elemento neutro, então cada $x \in X$ tem, no máximo, um inverso.*

Assim, é lícito considerar $\mathscr{L}'' := \mathscr{L}_{\text{magma}}$, a **linguagem dos magmas**[69], que tem um único símbolo operacional binário, e dizer que grupos são precisamente as $\mathscr{L}''$-estruturas que satisfazem as fórmulas apropriadas. Naturalmente, o mesmo pode ser feito para anéis (daí com duas operações binárias) e módulos. Porém, isso traz pelo menos duas consequências.

(i) Diferente do que se fez no exemplo anterior, a descrição dos grupos enquanto estruturas da linguagem dos magmas requer fórmulas mais complexas do que as utilizadas para descrevê-los enquanto $\mathscr{L} := \mathscr{L}_{\text{group}}$-estruturas, especificamente no que se refere a quantificadores existenciais. A desvantagem é que com fórmulas mais complexas, os teoremas da Álgebra Universal acerca de estruturas algébricas não se aplicam[70].

(ii) Embora a mudança da linguagem possa não afetar os grupos, anéis e módulos (a menos de alterar as fórmulas que devem ser satisfeitas), linguagens diferentes induzem morfismos diferentes!

Com efeito, um $\mathscr{L}''$-morfismo $f\colon M \to N$ entre duas $\mathscr{L}''$-estruturas deve apenas satisfazer $f(a \star_M b) = f(a) \star_N f(b)$ para quaisquer $a, b \in M$, enquanto um $\mathscr{L}$-morfismo $f\colon G \to H$ entre $\mathscr{L}$-estruturas deve ser tal que $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$, $f(i_G(a)) = i_H(f(a))$ e $f(e_G) = e_H$ para quaisquer $a, b \in M$. No caso dos grupos propriamente ditos, a distinção inexiste por conta da existência de inversos. Porém, ao se fazer isso para anéis, chega-se a duas definições de morfismo: uma em que se pede $f(1_A) = 1_B$ e outra em que isso não precisa ocorrer. Neste texto, a exigência da preservação da unidade será mantida. △

Exemplo K.2.54 (Domínios e corpos)**.** Para um anel comutativo A em que $0_A \neq 1_A$,

(i) A é chamado de **domínio**[71] se para quaisquer $x, y \in A$, a identidade $a \cdot_A b = 0_A$ só ocorre para $a = 0_A$ ou $b = 0_A$, enquanto

(ii) A é chamado de **corpo** se para cada $a \in A \setminus \{0_A\}$ existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tal que $a \cdot_A b = 1_A$.

Embora domínios e corpos sejam $\mathscr{L}_{\text{ring}}$-estruturas, as fórmulas utilizadas para descrevê-los são fundamentalmente mais complexas: a começar pela exigência $0_A \neq 1_A$, que consiste na negação de uma igualdade entre termos constantes. Dito isso: um corpo muito peculiar, usualmente denotado por $\mathbb{R}$, será um dos principais corpos utilizados ao longo do texto – uma discussão um pouco mais cuidadosa será feita na Subseção K.2.2. ▲

Exemplo K.2.55 (Corpos ordenados)**.** Um corpo $\mathbb{K}$ munido de uma relação de ordem total $\leq$ é chamado de **corpo ordenado** se $\leq$ for compatível com sua estrutura algébrica, i.e.,

(CO$_\text{i}$) $\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$,

[69]Um **magma** é apenas um conjunto dotado de uma operação binária.
[70]Em Álgebra Universal, as fórmulas *permitidas* são do tipo $\forall x \forall y \forall z \ldots \tau \approx \sigma$.
[71]Ou domínio de integridade para quem tem muito tempo livre.

(CO$_{\text{ii}}$) $\forall a, b \in \mathbb{K} \qquad a > 0_{\mathbb{K}}$ e $b > 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow ab > 0_{\mathbb{K}}$.

Assim, corpos ordenados são o primeiro exemplo de uma estrutura cuja linguagem emprega símbolos operacionais e relacionais. O corpo $\mathbb{R}$, mencionado acima, será definido como o único corpo ordenado e *completo*, onde a *completude* exprime o seguinte: todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ e limitado superiormente admite supremo[72]. Curiosamente, tal propriedade não é exprimível como uma fórmula de primeira ordem, por um motivo muito simples: a expressão "todo subconjunto... admite supremo" está quantificada sobre subconjuntos da estrutura, e não apenas sobre seus elementos. O que permite detectar isso é o fato de que quaisquer dois corpos ordenados completos têm a mesma cardinalidade, o que em geral não ocorre com o tipo de estrutura tratada nesta seção. Isso ficará mais claro adiante. ▲

Antes de iniciar a parte mais delicada desta subseção, convém retornar ao problema de entender o que morfismos preservam. A Proposição K.2.40 já deu uma dica, no sentido de mostrar que um morfismo entre $\mathscr{L}$-estruturas preserva identidades entre termos interpretados. Assim, seria natural que $\mathscr{L}$-estruturas isomorfas satisfizessem as mesmas fórmulas/sentenças. De fato:

Teorema K.2.56. *Se $f\colon M \to N$ é um $\mathscr{L}$-isomorfismo e $T \subseteq \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é um conjunto de fórmulas, então M é modelo para T se, e somente se, N é modelo para T.*

Demonstração. Basta mostrar que $M \models \varphi[f^{-1} \circ v] \Leftrightarrow N \models \varphi[v]$ para quaisquer $\mathscr{L}$-fórmula φ e atribuição $v\colon \mathcal{V} \rightharpoonup N$ φ-compatível, o que se faz por indução na complexidade de φ. Note que $u := f^{-1} \circ v\colon \mathcal{V} \rightharpoonup M$ é uma $\mathcal{V}$-atribuição φ-compatível em N.

(i) Para $\varphi := \tau \approx \sigma$, se $\tau^M(u) = \sigma^M(u)$, então a identidade $\tau^N(v) = \sigma^N(v)$ segue da Proposição K.2.40. Analogamente, $N \models \varphi[v] \Rightarrow M \models \varphi[u]$.

(ii) Para $\varphi := R\langle\!\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle\!\rangle$, onde R é símbolo relacional n-ário e $\tau_1, \ldots, \tau_n$ são termos, se valer $M \models \varphi$, então $\left(\tau_1^M(u), \ldots, \tau_n^M(u)\right) \in R_M$, donde novamente a Proposição K.2.40 aliada às hipóteses sobre f acarretam $\left(\tau_1^N(v), \ldots, \tau_n^N(v)\right) \in R_N$. A outra implicação é análoga.

(iii) Os demais casos não atômicos são imediatos. □

A recíproca, i.e., "se duas $\mathscr{L}$-estruturas satisfazem as mesmas sentenças de primeira ordem, então ambas são isomorfas", é falsa.

Exemplo K.2.57. Considere uma linguagem $\mathscr{L}$ composta por um símbolo de relação binária R e duas constantes, digamos c' e c''. Tomando-se ω com a relação de ordem usual, $c' := 0$ e $c'' := 2$, tem-se ω uma $\mathscr{L}$-estrutura, ao passo que o subconjunto P dos números naturais pares é, evidentemente, uma subestrutura. Porém, existem fórmulas na linguagem $\mathscr{L}$ que interpretadas em P são verdadeiras em ω mas falsas em P: basta tomar $\exists x \langle\!\langle c' \, R \, x \wedge x \, R \, c'' \rangle\!\rangle$. Ainda assim, note o seguinte: a existência de uma *testemunha* para (a interpretação da) fórmula fora de P foi o que permitiu a ocorrência de tal fenômeno.▲

Definição K.2.58. Sejam M uma $\mathscr{L}$-estrutura e N uma subestrutura. Diz-se que N é **subestrutura elementar** de M se para toda $\mathscr{L}$-fórmula φ e toda atribuição de valores $u\colon \mathcal{V} \rightharpoonup N$ φ-compatível, ocorrer $N \models \varphi[u]$ se, e somente se, $M \models \varphi[u]$. ¶

[72]Tais terminologias acerca de ordens estão definidas na Subseção K.1.3.

Na prática, dizer que N é subestrutura elementar de M significa que toda fórmula interpretada em M com *parâmetros* em N é verdadeira em M se, e somente se, for verdadeira em N. Assim, o exemplo que antecede a definição acima exibe uma $\mathscr{L}$-subestrutura não-elementar de ω.

Verbalmente: se existem $a_1, \dots, a_n \in N$ e $b \in M$ tornando a interpretação de φ em M verdadeira, então pode-se trocar a *testemunha* b em M por outra testemunha $a \in N$. Vamos chamar tal propriedade de "substituição de testemunhas". O importante a destacar: vale a volta.

Lema K.2.59 (Tarski-Vaught)**.** *Se a subestrutura N tem a propriedade de substituição de testemunhas acima, então N é subestrutura elementar de M.*

Demonstração. Basta argumentar por indução na complexidade da fórmula φ presente na definição de subestrutura elementar. Com raciocínio essencialmente algébrico, a afirmação procurada valerá para todas as fórmulas sem quantificadores. No caso do quantificador existencial, é justamente a hipótese que permite provar $M \models \exists x\psi[u] \Rightarrow N \models \exists x\psi[u]$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. $\square$

Teorema K.2.60 (Löwenheim-Skolem, versão enumerável)**.** *Sejam $\mathscr{L}$ uma linguagem e $\mathcal{V}$ um conjunto de variáveis, ambas enumeráveis. Se $T \subseteq \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é um conjunto de sentenças que admite um modelo infinito, então T admite um modelo infinito enumerável.*

Demonstração. Na prática, basta mostrar que se M é uma $\mathscr{L}$-estrutura com M infinito, então existe uma subestrutura elementar $N \subseteq M$ com $|N| = \aleph_0$: de fato, se isso for feito, basta tomar M como modelo de T, pois daí a elementaridade de N garantirá que $N \models T$. Para construir N, vamos obter uma cadeia $(N_j)_{j\in\omega}$ de subestruturas de M tal que as fórmulas existenciais satisfeitas por M com parâmetros em N_j tenham testemunhas em N_{j+1}, para todo j; com isso feito basta tomar $N \coloneqq \bigcup_{j\in\omega} N_j$ com as interpretações "óbvias".

O *Katzensprung* da prova está contido na Observação K.2.20: se $|X| = \aleph_0$ e $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$, então $|\mathcal{F}(X)| = \aleph_0$, onde $\mathcal{F}(X)$ é a subestrutura *gerada* por X. Assim, fixando-se $N_0' \subseteq M$ um subconjunto infinito enumerável:

1. toma-se $N_0 \coloneqq \langle N_0' \rangle$, i.e., fecha-se N_0' por constantes e operações algébricas;
2. faz-se $N_1' \coloneqq N_0 \cup \{a_{\varphi,u} : \varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}),\ u\colon \mathcal{V} \rightharpoonup N_0 \text{ é } \varphi\text{-compatível e } M \models \exists x\varphi[u]\}$, onde $a_{\varphi,u} \in M$ é *escolhido de* tal forma que $M \models \varphi[u_{x\mapsto a_{\varphi,u}}]$; como cada atribuição u *percorre* apenas finitas variáveis (dentre as quais se incluem as possíveis variáveis livres de φ), não é difícil ver[73] que N_1' é um subconjunto enumerável de M, de modo que $N_1 \coloneqq \langle N_1' \rangle$ é ainda uma subestrutura de M com $N_0 \subseteq N_1$.

Procedendo recursivamente dessa forma, o *teste de Tarski-Vaught* garante que N é uma subestrutura elementar de M, como desejado. $\square$

Como isso mostra a falsidade da recíproca do Teorema K.2.56? Muito simples: fixada uma $\mathscr{L}$-estrutura infinita, é formalmente lícito (embora imoral) considerar o conjunto de sentenças $T \coloneqq \{\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) : \varphi \text{ é sentença e } M \models \varphi\}$; como $M \models T$, Löwenhein-Skolem garante um subestrutura N de M com $N \models T$ e $|N| = \aleph_0$. Em particular, se $|M| > \aleph_0$, então M e N não podem ser isomorfas!

[73] Talvez após lembrar que $|[\mathcal{V}]^{<\aleph_0}| \leq \aleph_0$.

Metamatemática e outras alucinações

Até aqui, as linguagens e suas estruturas foram utilizadas meramente como ferramental descritivo para tipos particulares de objetos matemáticos corriqueiros. Pode-se ir além.

Definição K.2.61. Sejam $\mathscr{L}$ uma linguagem e $\mathcal{V}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis[74]. Uma *sentença* $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é uma **consequência** (*semântica*) de um conjunto de sentenças $T \subseteq \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ se todo modelo M de T também for modelo de φ. Em outras palavras: se para toda $\mathscr{L}$-estrutura M valer que $M \models \varphi$ sempre que $M \models T$. Como de costume nos textos da área, isto será abreviado com $T \models \varphi$. ¶

Observação K.2.62 (Continuação da Observação K.2.48)**.** A definição acima poderia ser feita para um conjunto de fórmulas T em vez de um conjunto de sentenças. No entanto, se $T \models \varphi$, então $T' \models \varphi$, onde T' é o conjunto dos fechos universais de cada fórmula $\psi \in T$. Neste caso, conjuntos de sentenças, como T', ganham um nome especial: são chamados de **teorias de primeira ordem na linguagem** $\mathscr{L}$ ou, de maneira mais concisa, $\mathscr{L}$**-teorias**[75]. △

A noção de consequência acima[76] coincide com o que já se faz no dia a dia: a fim de provar, por exemplo, a afirmação "num corpo ordenado $\mathbb{K}$ ocorre $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$", toma-se um corpo ordenado $\mathbb{K}$ qualquer (i.e., um modelo para o conjunto de sentenças $\mathscr{A}_{\mathrm{OF}}$ que descreve os corpos ordenados) no qual se verifica que, de fato, $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$. Da arbitrariedade do corpo ordenado tomado, a única conclusão razoável é a de que a afirmação é *consequência* das *sentenças* em $\mathscr{A}_{\mathrm{OF}}$.

Observação K.2.63. Dado o que se observou acima, o leitor pode preferir chamar as sentenças numa teoria (conjunto de sentenças) como *axiomas*. △

Assim, em certo sentido, todo o aparato construído ao longo desta subseção permite mimetizar ou modelar o próprio raciocínio matemático, bem como sua *ontologia* mais comum, i.e., a Teoria dos Conjuntos. Por exemplo: para uma linguagem $\mathscr{L}$ composta por um único símbolo relacional binário ε, é lícito considerar a fórmula

$$\mathrm{Ext} := \forall x \forall y \forall z \left((z \mathrel{\varepsilon} x \leftrightarrow z \mathrel{\varepsilon} y) \to x \approx y \right).$$

Agora, um conjunto M dotado de uma relação binária $E \subseteq M \times M$ é tal que $M \models \mathrm{Ext}$ se, e somente se, para quaisquer $a, b \in M$, valer que

$$a \mathrel{E} b \Leftrightarrow \{c \in M : c \mathrel{E} a\} = \{c \in M : c \mathrel{E} b\}.$$

Naturalmente, se M é um número ordinal e $E := \{(\alpha, \beta) \in M \times M : \alpha \in \beta\}$, então $M \models \mathrm{Ext}$, o que vale mais geralmente para qualquer conjunto transitivo. Como a abreviação sugere, Ext é o Axioma da Extensão expresso como sentença primeira ordem – e, com alguma paciência, não é difícil perceber que todos os outros axiomas de ZFC podem ser transcritos com tal linguagem.

[74] Os elementos de $\mathcal{V}$ serão denotados por letras minúsculas com ou sem subíndices, como de costume.

[75] Algumas referências chamam de *teoria* apenas os conjuntos de sentenças *fechados* por *consequência*, no sentido da Definição K.2.61.

[76] Há outras noções de *consequência*. Em particular, pode-se desenvolver uma noção de consequência que não apele para estruturas, i.e., independente de questões semânticas, por meio de sistemas dedutivos que levam apenas a *sintaxe* das fórmulas em questão. Esta é a abordagem da chamada Teoria da Prova (*Proof Theory*), que não será abordada com ênfase neste texto.

Pergunta: existe um modelo para ZFC (onde, agora, ZFC indica os axiomas usuais de ZFC escritos como sentenças de primeira ordem)?

A resposta é mais delicada do que parece. Num primeiro momento, é tentador dizer que o universo $\mathbb{V}$ é um modelo para ZFC. Porém, pela definição adotada, modelos *deveriam* ser conjuntos, o que impede tratar $\mathbb{V}$ como um modelo de fato. Surge assim uma segunda pergunta:

Pergunta: existem um conjunto M e uma relação binária E em M tal que $(M, E) \models$ ZFC?

Suponha que exista. Neste caso, do ponto de vista dos habitantes de M, conjuntos são todos os elementos de M. Em particular, "$M \notin M$" apenas reflete o já conhecido resultado de que o universo não é um conjunto. Mas M é um conjunto, não? Para *nós*, sim, mas para os habitantes de M, não: pode ser elucidativo dizer que os elementos de M são M-conjuntos, e que ao repetir em M a prova de que não existe conjunto universo, prova-se (do nosso ponto de vista) que M não é um M-conjunto. Isto, por si só, não constitui um problema. Mas o problema existe.

Como mencionado na nota de rodapé 76, existe uma versão *sintática* de *consequência*, em que se escreve $T \vdash \varphi$ para indicar que φ é *consequência sintática*[77] das sentenças de T. Em tal contexto, há três resultados muito importantes para a presente discussão.

(i) **Corretude**: *se $T \vdash \varphi$, então $T \models \varphi$.* Em outras palavras, sentenças sintaticamente dedutíveis devem ser semanticamente dedutíveis. Se pensarmos em "$T \vdash \varphi$" e "$T \models \varphi$" como abreviações para "T prova (sintaticamente) φ" e "φ é verdade sempre que T é verdade", a corretude diz apenas que "tudo o que T prova é verdade quando T é verdade".

(ii) **Completude**: *se $T \models \varphi$, então $T \vdash \varphi$.* É a recíproca da corretude, mas em certo sentido se trata de um resultado bem mais profundo: a fim de que T não prove φ, existe um modelo para T em que φ é falsa. A expressão "completude", nesse sentido, remete à completude do sistema dedutivo de prova, que demonstra (sintaticamente) tudo o que é verdade.

Em particular, isso permite caracterizar teorias *sintaticamente consistentes*, i.e., aquelas onde não se demonstram fórmulas do tipo "$\varphi \wedge \neg\varphi$", como precisamente aquelas que admitem algum modelo. Noutras palavras: existência de modelo é equivalente a consistência sintática. Entra o terceiro resultado.

(iii) **Incompletude:** uma teoria *rica o suficiente* é sintaticamente consistente se, e somente se, não demonstra sintaticamente a sua própria consistência.

Acima, o "rica o suficiente" joga para debaixo do tapete diversas exigências técnicas que fogem do escopo deste texto, mas que, grosso modo, podem ser pensadas como "desenvolver aritmética e um pouco de recursão". Outro ponto a destacar: a não demonstrabilidade de consistência não é sinônimo de prova de inconsistência.

[77] Peço desculpas antecipadas ao Professor João Marcos pelo uso do termo, que (também) considero inadequado mas que, para a presente discussão, é bastante prático.

Agora, o problema com a suposição da existência de um modelo se torna evidente: se for possível provar em ZFC que existe um modelo para ZFC, então ZFC provou sua consistência e, portanto, é inconsistente. Desse modo, não se pode provar que um tal modelo M exista. Isso não impede que se *assuma* tal existência: no fundo, é exatamente isso o que se faz no começo de um curso de Teoria dos Conjuntos, afinal de contas, não se argumenta no vácuo[78].

Uma alternativa para fugir de todas essas tecnicalidades seria *proibir* a aplicação de (resultados da) Teoria de Modelos sobre ZFC e *seus* modelos[79]. Porém, limitar o escopo das perguntas que podem ser feitas também poda o surgimento de novas respostas – e não há sono tranquilo que justifique tamanha barbárie... Okay, a depender do sono e da barbárie, fechar os olhos pode ser aceitável mas, no presente caso, privaríamo-nos da linda técnica dos *sumodelos elementares*, que será explorada no último capítulo.

K.2.2 Os casos que (mais) importam

Esta subseção se focará nas *peculiaridades* dos principais tipos de *estruturas* que serão utilizados ao longo do texto: grupos, anéis e módulos, além de domínios, corpos (ordenados) e espaços vetoriais. Embora corpos ordenados *completos* escapem do escopo de primeira ordem, eles também serão discutidos. No entanto, a precisão notacional da subseção anterior será abandonada, de modo que é *relativamente* seguro prosseguir com a leitura mesmo sem saber o que são modelos[80].

Grupos, anéis e módulos

As estruturas no título desta subsubseção estão definidas no Exemplo K.2.49. Outras que frequentemente aparecem são descritas na próxima

Definição K.2.64. Dizemos que um conjunto X é um

(i) **magma** se X tem uma operação binária $*$;

(ii) **semigrupo** se for um magma associativo;

(iii) **monoide** se for um semigrupo com elemento neutro. ¶

Magmas, semigrupos, monoides e grupos cuja operação binária é comutativa são chamados de **comutativos** ou **abelianos**. Anéis **comutativos** são aqueles cuja multiplicação é comutativa. Em momentos de pressa moderada, a notação "$(X, *, e)$" indicará que X é um conjunto com a operação associativa $*$ e o elemento neutro e, de modo que o contexto deverá deixar claro se os elementos de X têm ou não inversos, i.e., se X é ou não um grupo. Adota-se uma notação análoga para anéis (confira adiante). Os (iso) morfismos entre tais estruturas são os $\mathscr{L}$-(iso) morfismos da Definição K.2.10 com respeito às linguagens correspondentes. Assim, a *princípio*:

[78] Ou, ainda melhor: *ex nihilo nihil fit*.

[79] Inclusive pela falsa impressão de circularidade, algo como "*ZFC e a formalização de conjuntos são usados para estabelecer as bases da Teoria de Modelos, que por sua vez tira conclusões sobre a Teoria dos Conjuntos!*". Isso é apenas um problema de perspectiva: em vez de ser uma serpente mordendo o próprio rabo, a situação "Conjuntos → Modelos → Conjuntos" *deveria* ser pensada como "Conjuntos (metateoria) → Modelos (teoria) → Conjuntos (teoria) → ..." numa espécie de espiral (em certo sentido, esta é a proposta de Kunen em [64]). Há outras propostas, como a de Halbeisen e Kraft [48], mas discuti-las no presente texto seria irrelevante.

[80] Exceto pelas demonstrações de alguns resultados, que serão omitidas por já terem sido apresentadas no contexto mais geral da Teoria de Modelos

(i) um **morfismo entre magmas** $(A, *_A)$ e $(B, *_B)$ é uma função $f\colon A \to B$ tal que $f(a *_A a') = f(a) *_B f(a')$ para quaisquer $a, a' \in A$;

(ii) um **morfismo entre monoides** $(A, *_A, e_A)$ e $(B, *_B, e_B)$ é um morfismo $f\colon A \to B$ entre os magmas $(A, *_A)$ e $(B, *_B)$ que satisfaz, adicionalmente, $f(e_A) = e_B$;

(iii) um **morfismo entre grupos** $(A, *_A, e_A)$ e $(B, *_B, e_B)$ é um morfismo $f\colon A \to B$ entre os monoides $(A, *_A, e_A)$ e $(B, *_B, e_B)$ que satisfaz, adicionalmente, a identidade $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ para todo $a \in A$, onde a^{-1} e b^{-1} indicam os inversos de a em A e b em B, respectivamente;

(iv) um **morfismo entre anéis** $(A, +_A, \cdot_A, 0_A, 1_A)$ e $(B, +_B, \cdot_B, 0_B, 1_B)$ é uma função $f\colon A \to B$ que simultaneamente satisfaz as condições para ser um morfismo entre os grupos $(A, +_A, 0_A)$ e $(B, +_B, 0_B)$ e entre os monoides $(A, \cdot_A, 1_A)$ e $(B, \cdot_B, 1_B)$;

(v) em todos os casos acima, f é um *isomorfismo* (do *tipo* correspondente) se, e somente se, for um morfismo (do tipo correspondente) bijetor (Proposição K.2.15).

Observação K.2.65. Como adiantado na Observação K.2.52, a condição para os morfismos de grupos pode ser relaxada: basta pedir que f seja um morfismo de magmas. Isto segue pois, com as notações anteriores, $f(e_A) = f(e_A) * f(e_A)$, com $f(e_A)$ invertível em A, acarretando $f(e_A) = e_B$. Analogamente, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. △

O contexto dos grupos simplifica sobremaneira o tratamento dos núcleos. A seguir, o leitor deve se lembrar de que a definição de núcleo universal se aplica mesmo para funções entre conjuntos desprovidos de estruturas (Observação K.2.31).

Proposição K.2.66. *Sejam* $(X, *, e_X)$ *e* $(Y, \star, e_Y)$ *grupos, e* $f\colon X \to Y$ *uma função. Se* f *for um morfismo de grupos, então para* $a, b \in X$ *quaisquer, são equivalentes:*

(i) $(a, b) \in \operatorname{Ker}(f)$*;*

(ii) $f(a * b^{-1}) = e_Y$*.*

Moral da história: o núcleo universal de $f\colon X \to Y$, um subconjunto de $X \times X$ que independe de operações algébricas definidas em X ou Y, pode ser completamente determinado pelo subconjunto $\{x \in X : f(x) = e_Y\}$ sempre que X e Y estiverem munidos de quaisquer estruturas de grupo *compatíveis* com f, i.e., segundo as quais f se torne um morfismo de grupos. Agora sim:

Definição K.2.67. Caso X e Y sejam grupos que tornem $f\colon X \to Y$ um morfismo de grupos, o **núcleo** de f, também chamado de *kernel* de f, é o subconjunto

$$\ker f := \{x \in X : f(x) = e_Y\},$$

onde e_Y denota o elemento neutro de Y. ¶

Núcleos (universais ou não) medem o *quão* longe de ser injetiva está a função f: de fato, quanto *maior* o núcleo, maior o número de pares $a, b \in \operatorname{dom}(f)$ satisfazendo $f(a) = f(b)$. Assim, não surpreende que núcleos de morfismos sejam *triviais* exatamente nos casos em que os morfismos são injetores.

Proposição K.2.68. *Uma função $f\colon X \to Y$ entre os conjuntos X e Y é injetora se, e somente se,* $\operatorname{Ker}(f) = \Delta_X := \{(x,x) : x \in X\}$*. Em particular, se X e Y forem grupos tais que $f\colon X \to Y$ é um morfismo de grupos, então f é injetora se, e somente se,* $\ker f = \{e_X\}$*, onde e_X é o elemento neutro de X.*

Em certo sentido, esse comportamento diminui a complexidade dos núcleos: enquanto $\operatorname{Ker}(f)$ é, por definição, uma subálgebra de $X \times X$, $\ker f$ é uma subálgebra de X. Mais precisamente:

Definição K.2.69. Um subconjunto $H \subseteq G$ de um grupo G é um **subgrupo** de G se H for uma *subestrutura* de G no sentido da Definição K.2.17. ¶

Proposição K.2.70. *Suponha que G seja um grupo. Para um subconjunto $S \subseteq G$ com $S \neq \emptyset$, são equivalentes:*

(i) S é subgrupo de G;

(ii) ($S \neq \emptyset$ e) $rs^{-1} \in S$ para quaisquer $r, s \in S$.

Com tal terminologia, é fácil ver que se $f\colon X \to Y$ é um morfismo de grupos, então $\ker f$ é um subgrupo de X. Na verdade, pode-se dizer um pouco mais.

Definição K.2.71. Um subgrupo N de um grupo G é **normal** se para qualquer $g \in G$ ocorrer $gN := \{gn : n \in N\} = \{ng : n \in N\} := Ng$. ¶

Proposição K.2.72. *Para um grupo G, sejam $C \subseteq G \times G$ e $N \subseteq G$ subconjuntos.*

(i) Se N é subgrupo normal, então $\sim_N := \{(a,b) \in G \times G : ab^{-1} \in N\}$ é uma congruência.

(ii) Se C é uma congruência, então $N_C := \{ab^{-1} : (a,b) \in C\}$ é um subgrupo normal.

Em particular, a correspondência $N \mapsto \sim_N$ define uma bijeção entre subgrupos normais de G e congruências em G.

Assim, dado um grupo G e um subgrupo normal N, a coleção ${}^{G}\!/\!{}_{\sim_N}$ das classes de equivalência induzidas pela relação de equivalência do item anterior, tem uma estrutura de grupo com a operação definida de *maneira natural*: $\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{xy}$, cujo elemento neutro é $\overline{1} = N$. Como em tais contextos a relação de equivalência fica completamente determinada por N, escreve-se ${}^{G}\!/\!{}_{N}$, ou mesmo $\frac{G}{N}$, em vez de ${}^{G}\!/\!{}_{\sim_N}$.

Definição K.2.73. O grupo ${}^{G}\!/\!{}_{N}$ é chamado de **grupo quociente** de G por N. ¶

Corolário K.2.74 (Propriedade universal do quociente – de grupos)**.** *Sejam G um grupo e $N \subseteq G$ um subgrupo normal. Se H é um grupo e $f\colon G \to H$ é morfismo de grupos com $N \subseteq \ker f$, então existe um único morfismo de grupos $\overline{f}\colon {}^{G}\!/\!{}_{N} \to H$ que torna comutativo o diagrama*

$$\begin{tikzcd} {}^{G}\!/\!{}_{N} \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & H \\ G \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

i.e., tal que $\overline{f} \circ \pi = f$.

As considerações anteriores se estendem de maneira natural para o contexto de anéis comutativos. Porém, é mais conveniente fazer um desvio pelo importante reino dos *módulos*. Primeiramente, um subconjunto S de um A-módulo M é xingado de **submódulo** se for uma *subestrutura* de M na linguagem apropriada (Exemplo K.2.49), o que equivale a pedir que S seja *subgrupo aditivo*[81] de M e tal que $as \in S$ sempre que $a \in A$ e $s \in S$.

Analogamente, uma função $f: M \to N$ será chamada de **morfismo de A-módulos** (ou função **A-linear**)[82] se f for um morfismo com respeito à linguagem dos A-módulos, o que se traduz em pedir que f seja um morfismo entre os grupos $(M, +, 0)$ e $(N, +, 0)$ compatível com as *multiplicações* de M e N, i.e., satisfazendo a identidade

$$f(am) = af(m)$$

para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$.

Observação K.2.75 (Notação multiplicativa vs. notação aditiva)**.** Há dois tipos de notações típicas para as operações num dado monoide $(X, *, e)$ qualquer:

(i) **notação multiplicativa** consiste em denotar a operação por "$\cdot$" (ou, na verdade, omitir o símbolo completamente), indicar o elemento neutro da operação por 1 (chamado de *a* **unidade**) e, caso exista, indicar o inverso de $x \in X$ por "x^{-1}";

(ii) já a **notação aditiva** consiste em denotar a operação por "+", indicar o elemento neutro da operação por 0 (chamado de *o* **zero**) e, caso exista, indicar o inverso de $x \in X$ por "$-x$"; em particular, usa-se "$x - y$" para abreviar "$x + (-y)$".

Com isso dito, a notação multiplicativa costuma ser reservada para os casos em que não se garante a comutatividade do monoide X, enquanto a notação aditiva é preferida para os casos abelianos. Em particular, nos casos de conjuntos com duas operações, como anéis, utiliza-se a notação aditiva para a adição (comutativa) e a notação multiplicativa para a multiplicação (possivelmente não comutativa). No caso dos módulos, também se omite o símbolo da função $A \times M \to M$, de modo que ao se escrever "am" (como feito um pouco acima), o contexto deve deixar claro quais são os elementos de A e M na expressão. Por fim, cabe destacar: *a partir daqui, a menos de menção contrária, todo anel considerado será comutativo.* △

Lema K.2.76. *Todo subgrupo de um grupo abeliano é normal.*

Em vista do lema acima, não é difícil se dar conta de que as congruências de um A-módulo são determinadas por seus submódulos e, equivalentemente, todo submódulo S de M determina um congruência por meio da relação $u \sim_S v \Leftrightarrow u - v \in S$. Em resumo:

Teorema K.2.77. *Sejam A um anel, M um A-módulo e $S \subseteq M$ um submódulo. Então $M/{\sim_S}$ torna-se um A-módulo com as operações dadas pelas regras*

$$\overline{u} \oplus \overline{v} \mapsto \overline{u + v} \quad e \quad a \odot \overline{v} \mapsto \overline{a \cdot v}, \tag{K.14}$$

para quaisquer $a \in A$ e $u, v \in M$. Além disso, $M/{\sim_S}$ tem a propriedade universal correspondente ao Teorema K.2.30.

[81] Isto é, subgrupo com respeito à adição de M, que faz de M um grupo.
[82] Ou ainda função (mapa, aplicação, etc.) linear quando o anel A estiver claro pelo contexto.

Denota-se por M/S o A-módulo construído acima, chamado de **módulo quociente de M por S**. *Quando* o A-módulo M é o próprio anel A, um A-submódulo I de A é o que costuma ser chamado de **ideal**, de modo que se obtém, a princípio, um A-módulo quociente A/I. Porém, neste caso, A/I (também) é um anel, com a multiplicação

$$\overline{a} \odot \overline{b} := \overline{a \cdot b},$$

que fica bem definida, pois: se $a, a', b, b' \in A$ são tais que $\overline{a} = \overline{a'}$ e $\overline{b} = \overline{b'}$, então existem $x, y \in I$ com $a = x + a'$, $b = y + b'$, de modo que

$$ab - a'b' = (x + a')(y + b') - a'b' = xy + xb' + a'y + a'b' - a'b' = (y + b')x + a'y,$$

uma combinação A-linear de elementos de I e, portanto, um elemento de I, mostrando que $\overline{ab} = \overline{a'b'}$.

Definição K.2.78. O anel A/I com as operações acima é chamado de **anel quociente de A pelo ideal I.** ¶

Exemplo K.2.79 (O anel "do $\mathbb{Z}$inteiros")**.** Fixado um monoide comutativo $(X, *, e)$ satisfazendo a condição[83]

$$x * z = y * z \Rightarrow x = y$$

para quaisquer $x, y, z \in X$, considera-se sobre o conjunto $F := X \times X$ a seguinte relação de equivalência $\sim$:

$$(x, y) \sim (a, b) \Leftrightarrow x * b = y * a.$$

Como $\sim$ é uma congruência em F, segue que $F/\sim \; := \left\{\overline{(x, y)} : (x, y) \in F\right\}$, o conjunto das classes de equivalência da relação, é um monoide (comutativo) com a operação $+$ sobre $F/\sim$ definida da maneira *óbvia*:

$$\overline{(x, y)} + \overline{(x', y')} := \overline{(x * x', y * y')},$$

que tem como elemento neutro $0 := \overline{(e, e)}$. Ocorre que, na verdade, $F/\sim$ é um grupo: basta verificar que todo elemento $\overline{(x, y)} \in F/\sim$ admite um $(+)$-inverso. De fato,

$$\overline{(x, y)} + \overline{(y, x)} = 0 = \overline{(y, x)} + \overline{(x, y)},$$

mostrando que o inverso de $\overline{(x, y)}$ é $\overline{(y, x)}$.

Em particular, como $(\omega, +, 0)$ é um monoide comutativo que satisfaz a lei do cancelamento, pode-se fazer a seguinte

Definição K.2.80. O grupo de Grothendieck associado ao monoide $(\omega, +, 0)$ costuma ser denotado por $\mathbb{Z}$ e xingado de **conjunto dos números inteiros**. Sua operação também é chamada de adição (ou soma) e é representada pelo mesmo símbolo $+$. ¶

Temos em mãos, portanto, o adorado conjunto dos inteiros, munido de sua adição usual e com todas as propriedades operatórias (aditivas) que o leitor já deve conhecer. Em particular, a boa ordem nativa de ω se estende a uma ordem total em $\mathbb{Z}$: declaram-se os elementos da forma $-n$, para $n \in \omega \setminus \{0\}$, como estritamente menores do que 0, e $-m \leq -n \Leftrightarrow m \geq n$ para quaisquer $m, n \in \omega$. Não é difícil se convencer de que com tal relação, $(\mathbb{Z}, \leq)$ é uma ordem total. Contudo, tal extensão não é uma boa ordem: o próprio conjunto $\mathbb{Z}$ não tem menor elemento. Por fim, como a função $f\colon \mathbb{Z} \to \omega \times \omega$, que para cada $n \in \omega$ faz $f(n) := (n, 0)$ e $f(-n) := (0, n)$, é uma injeção, *resulta* $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

[83] Chamada de **lei do cancelamento**.

Um modo desleixado (mas funcional) para promover $\mathbb{Z}$ ao patamar de anel consiste em definir

$$(m-n)(a-b) := (ma+nb)-(mb+na),$$

o que faz algum sentido pois os elementos de $\mathbb{Z}$ são da forma $m-n$. Fica a cargo do leitor se convencer de que tal regra independe da escolha de representantes e cumpre as exigências para fazer de $(\mathbb{Z},+,\cdot,0,1)$ um anel. ▲

Como será explicado na Seção K.3, as estruturas $(\omega,+,0)$ e $(\mathbb{Z},+,0)$ têm *propriedades universais* em categorias específicas que, secretamente, dão *sentido* às notações exponenciais e aditivas típicas da Álgebra:

(i) x^n e nx para $n\in\omega$, com o sentido recursivo usual;

(ii) caso x admita inverso na operação, faz-se $x^{-n} := (x^{-1})^n$ e $(-n)x := n(-x)$, com o mesmo sentido acima.

Tais *notações* gozam das propriedades oriundas de serem morfismos de monoides e grupos, como $x^{m+n} = x^m\cdot x^n$ e $m(nx) = (mn)x$. O leitor interessado em mais detalhes pode conferir qualquer livro introdutório de Álgebra – ou a eventual versão estendida do *Kindergarten*. Possíveis ambiguidades notacionais no contexto de anéis são eliminadas pela

Proposição K.2.81. *Sejam A um anel e $a\in A$ um elemento qualquer. Então valem as seguintes identidades:*

(i) $0\cdot a = 0$; *(ii)* $-a = (-1)\cdot a$.

Em particular, como o inverso de $-a$ é a, segue que $(-1)\cdot(-a) = -(-a) = a$, identidade que será utilizada daqui em diante sem menções especiais. Assim, se A é um anel, $a\in A$ e $m,n\in\mathbb{N}$, então ma^n indica o que, intuitivamente, seria escrito como

$$\underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ vezes}}+\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ vezes}}+\ldots+\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ vezes}}}_{m \text{ vezes}},$$

com uma interpretação análoga para $m\in\mathbb{Z}$ e, se a for invertível, para $n\in\mathbb{Z}$.

Observação K.2.82 (Propriedades elementares de morfismos)**.** Sejam X um monoide, Y um grupo e $f\colon X\to Y$ um morfismo de monoides. Adotando a notação multiplicativa, não é difícil se convencer de que valem as seguintes afirmações:

(i) $f(1_X) = 1_Y$;

(ii) se $x\in X$ for invertível, então $f(x)$ é invertível em Y, e $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.

(iii) $f(x^n) = f(x)^n$ para quaisquer $n\in\omega$ e $x\in X$;

(iv) se $x\in X$ for invertível, então $f(x^n) = f(x)^n$ para qualquer $n\in\mathbb{Z}$.

Em particular, adotando a notação aditiva, segue que se $f\colon A\to B$ for morfismo de anéis, então

(i) $f(ma) = mf(a)$ para quaisquer $m\in\mathbb{Z}$ e $a\in A$,

(ii) $f(a^m) = f(a)^m$ para quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $a \in A$, com a identidade válida para $m \in \mathbb{Z}$ se a for invertível.

Variações dessas propriedades serão usadas sem maiores menções daqui para frente.△

Definição K.2.83 (*Operadores* Σ e Π)**.** Para um anel A, denotemos por $\overline{\text{seq}}\,(A)$ a coleção das sequências finitas de A, i.e., $\overline{\text{seq}}\,(A) := \bigcup_{n\in\omega} A^n$. Definem-se então $\sum \colon \overline{\text{seq}}\,(A) \to A$ e $\prod \colon \overline{\text{seq}}\,(A) \to A$ da seguinte forma:

(i) $\sum \emptyset := 0$ e $\prod \emptyset := 1$;

(ii) $\sum (f_i : i \leq n) := \sum (f_i : i < n) + f_n$ e $\prod (f_i : i \leq n) := \prod (f_i : i < n) \cdot f_n$ para cada $n \in \omega$ e $f := (f_i : i \leq n) \in A^{n+1}$. ¶

Intuitivamente, $\sum (x_i : i \leq n)$ expressa aquilo que se escreveria como $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, enquanto $\prod (x_i : i \leq n)$ denota o que se entende como $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Isto sugere notações bem mais práticas e *maleáveis* do que as anteriores. Para $n \in \omega$ e $f := (f_i : i \leq n) \in A^{n+1}$:

(i) tanto $\displaystyle\sum_{i\leq n} f_i$ quanto $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\sum (f_i : i \leq n)$;

(ii) tanto $\displaystyle\prod_{i\leq n} f_i$ quanto $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} f_i$ serão usados para denotar $\prod (f_i : i \leq n)$.

A partir dessas definições, é relativamente simples adaptá-las a fim de dar sentido formal a variações típicas de *somatórios* e *produtórios*, como os listados a seguir:

(i) $\displaystyle\sum_{i=j}^{m} f_i$; (ii) $\displaystyle\prod_{i<m} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$; (iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \sum_{j+k=i} a_j b_k c_i$

(iv) $\displaystyle\prod_{x\in X} h(x)$ para um conjunto finito X e uma função $h\colon X \to A$;

(v) $\sum F$ para um subconjunto finito $F \subseteq A$ ...

Ao longo do texto, $\sum_{i\leq n} f_i$ será frequentemente escrito como $f_0 + \ldots + f_n$, com o acordo tácito de que notações desse tipo são formalizáveis no sentido das definições acima. Além disso, é claro que elas não são exclusividade de anéis, e admitem adaptações para o contexto de grupos, módulos, etc. Com isso em mente, para um anel A, um A-módulo M, $m_0, \ldots, m_n \in M$ e $a_0, \ldots, a_n \in A$, diz-se que $\sum_{i\leq n} a_i m_i$ é uma **combinação A-linear** dos elementos (ou *vetores*) $m_0, \ldots, m_n$.

Proposição K.2.84. *Sejam A um anel e M um A-módulo. Um subconjunto $S \subseteq M$ é um submódulo de M se, e somente se, qualquer combinação A-linear de elementos de S pertence a S. Em particular, um subconjunto $I \subseteq A$ é ideal de A se, e somente se, $I \neq \emptyset$ e $ax + by \in I$ para quaisquer $a, b \in A$ e $x, y \in I$.*

Corolário K.2.85. *Para um anel uma função A-linear $f\colon M \to N$ entre A-módulos M e N, a coleção $\operatorname{im}(f) := \{f(x) : x \in M\}$ é um submódulo de N.*

Em particular, para $a \in A$ fixado, o conjunto

$$aA := \langle a \rangle := \{ax : x \in A\} \tag{K.15}$$

é um ideal de A, por ser a imagem da função A-linear $\mu_a \colon A \to A$ que faz $x \mapsto ax$. Costuma-se chamar $\langle a \rangle$ de **ideal principal gerado por** a. Em particular, $\langle 0 \rangle = \{0\}$ e $\langle 1 \rangle = A$ são ideais de A, onde 0 e 1 denotam, evidentemente, os elementos neutros de A. Tal terminologia está de acordo com a Definição K.2.24, no sentido de que $\langle a \rangle$ é o menor ideal de A que contém o subconjunto $X := \{a\}$. Note ainda que, no último corolário, se em vez de A-módulos, M e N forem grupos e f for um morfismo de grupos, então $\operatorname{im}(f)$ é subgrupo de N. Analogamente, se ambos forem anéis e f for morfismo de anéis, então $\operatorname{im}(f)$ é subanel de N.

Exemplo K.2.86. Por meio do *algoritmo da divisão em* $\mathbb{Z}$, pode-se mostrar que todo ideal de $\mathbb{Z}$ é da forma $\langle n \rangle$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, que é único se adicionarmos a exigência de que $n \geq 0$. Apesar do nome, neste texto tal algoritmo se refere à seguinte afirmação: *para* $m \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, existem únicos* $q, r \in \mathbb{Z}$ *tais que* $m = qn + r$ *com* $0 \leq r < n$. ▲

Ainda nesse contexto *ideal*, há dois tipos especiais que merecem destaque:

Definição K.2.87. Dados um anel A e um ideal $J \subsetneq A$, diz-se que:

(i) J é um **ideal primo** se para quaisquer $a, b \in A$, $ab \in J \Rightarrow a \in J$ ou $b \in J$;

(ii) J é um **ideal maximal**[84] se para todo ideal $I \subseteq A$ com $J \subseteq I$ ocorrer $I = J$ ou $I = A$. ¶

Em geral, para um anel $A \neq 0$ e um ideal $J \subsetneq A$, a condição de *primalidade* de J equivale ao anel A/J ser um domínio, enquanto a condição de *maximalidade* de J se traduz em dizer que A/J é corpo. Em particular, $\langle 0 \rangle$ sempre é primo em domínios, como é o caso de $\mathbb{Z}$. Por sua vez, o *corpo de frações de* $\mathbb{Z}$, que será mencionado mais cuidadosamente em breve, é um exemplo típico de corpo. Nesse sentido, convém destacar o

Teorema K.2.88 (Krull[85])**.** *Sejam* $A \neq 0$ *um anel e* $J \subsetneq A$ *um ideal. Então* J *está contido num ideal maximal de* A.

Demonstração. Segue do Lema de Zorn *aplicado* ao conjunto $\mathbb{P} := \{I \subseteq A : I \text{ é ideal de } A \text{ com } J \subseteq I\} \neq \emptyset$ parcialmente ordenado pela inclusão. □

Espaços vetoriais

Módulos definidos sobre corpos, i.e., **espaços vetoriais**, têm diversos comportamentos trivializados pela garantia de inversos multiplicativos. Como tais animais são indispensáveis para a Análise Funcional, tema da Seção 5.2, convém discutir algumas de suas propriedades fundamentais.

Definição K.2.89. Dado um A-módulo M, diz-se que um subconjunto $S \subseteq M$ é:

[84] A maximalidade, no caso, é com respeito aos ideais *próprios* do anel.

[85] Trata-se de mais uma manifestação do Axioma da Escolha. O leitor interessado numa demonstração pode conferir, por exemplo, o texto de Banaschewski [8].

(i) **linearmente independente** (**l.i.** para os íntimos) se, para qualquer subconjunto finito e não-vazio $F \subseteq S$ e qualquer F-upla $(a_b : b \in F)$ de escalares de A, valer a implicação

$$\sum_{b \in F} a_b b = 0_M \Rightarrow \forall b \in F \quad a_b = 0_A,$$

ou, equivalentemente: se $a_b \neq 0_A$ para todo $b \in F$, então $\sum_{b \in F} a_b b \neq 0_M$;

(ii) **linearmente dependente** (**l.d.** para os íntimos) se não for l.i.;

(iii) **base** (de Hamel)[86] para M se S for l.i. e valer $M = \langle S \rangle$. ¶

Teorema K.2.90. *Todo conjunto é base de algum A-módulo, a menos de bijeção.*

Demonstração. Mais precisamente, dado um conjunto S, existe um A-módulo $A^{\oplus S}$ com uma base S' tal que $|S| = |S'|$. Para tanto, considera-se primeiro o A-módulo A^S de todas as funções da forma $S \to A$ com as operações usuais e, para cada $s \in S$, a função $\delta_s \colon S \to A$ que faz $\delta_s(s) := 1_A$ e $\delta_s(t) := 0_A$ para $t \neq s$. Daí, o A-módulo $A^{\oplus S}$ procurado é $\langle S' \rangle \subseteq A^S$, onde $S' := \delta[S]$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Um dos interesses em bases é que elas trivializam, em certo sentido, o estudo dos mapas lineares: é possível mostrar (Exercício K.57) que para um A-módulo M, um subconjunto $B \subseteq M$ é base de M se, e somente se, para todo A-módulo N dotado de uma função $f \colon X \to N$ existe uma *única* função A-linear $\widetilde{f} \colon M \to N$ tal que $\widetilde{f}(i(x)) = f(x)$ para todo $x \in X$. Na prática, isto significa que se B é base de M, então para definir um mapa linear $M \to N$ basta *escolher* $f(b) \in N$ para cada $b \in B$, já que todo $v \in M$ se escreve de forma única como combinação A-linear de (finitos) elementos de B. Outro fato curioso é que uma base *caracteriza* completamente o seu módulo.

Lema K.2.91 (Troca de Steinitz)**.** *Sejam K um corpo, M um K-espaço vetorial e subconjuntos $X, Y, Z \subseteq M$ tais que $X \cup Y$ gera M e $Y \cup Z$ é linearmente independente. Então para cada $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que $(X \setminus \{x\}) \cup (Y \cup \{z\})$ gera M.*

Demonstração. De fato, para $z \in Z$ fixado, existem escalares $a_0, \ldots, a_n \in K \setminus \{0\}$ e $v_0, \ldots, v_n \in X \cup Y$ com $z = \sum_{i \leq n} a_i v_i$. A independência linear de $Y \cup Z$ impede que todos os v_i's pertençam a Y, donde segue que $v_i \in X$ para algum i, o que permite expressar v_i como combinação linear de $\{v_j : j \neq i\} \cup \{z\} \subseteq (X \setminus \{v_i\}) \cup (Y \cup \{z\})$. Daí, não é difícil concluir que $(X \setminus \{v_i\}) \cup (Y \cup \{z\})$ gera M, como desejado. □

Teorema K.2.92 (Invariância da cardinalidade de bases)**.** *Sejam K um corpo e M um K-espaço vetorial. Se G e L são duas bases de M, então $|L| = |G|$.*

Demonstração. Naturalmente, por simetria, basta mostrar que $|L| \leq |G|$, o que *será feito* considerando-se, separadamente, os casos em que $|G| < \aleph_0$ e $|G| \geq \aleph_0$, ou quase: o caso $|G| < \aleph_0$, na verdade, segue do lema anterior, e será deixado a cargo do leitor. Agora, se $|G| \geq \aleph_0$, então para cada $g \in G$ existe um subconjunto finito $H_g \subsetneq L$ tal que $g \in \langle H_g \rangle$. Logo, $H := \bigcup_{g \in G} H_g \subseteq L$ e $M = \langle G \rangle = \langle H \rangle$. Se ocorresse $H \neq L$, então existiria $l \in L \setminus H$ com $l \in \langle H \rangle \subseteq \langle L \setminus \{l\} \rangle$, o que contraria a independência linear de L. Desse modo, ocorre $L = H$ e, consequentemente, $|L| = \left|\bigcup_{g \in G} H_g\right| \leq |G| \cdot \aleph_0 = |G|$, como queríamos. □

Proposição K.2.93. *Se B e C são duas bases de um mesmo A-módulo, então $|B| = |C|$.*

[86] A distinção costuma ser útil em contextos que lidam com mais de um tipo de *base*.

Demonstração. Se $A := \{0\}$, então $M = \{0\}$ e a sua única base é $\emptyset$. Agora, se $A \neq \{0\}$, então existe um ideal maximal $J \subsetneq A$, donde segue que A/J é um corpo. Fica a cargo do leitor verificar que $JM := \left\{\sum_{(j,m)\in F} jm : F \subseteq J \times M \text{ com } F \text{ finito}\right\}$ é um submódulo de M e, mais importante, que o A-módulo M/JM é um A/J-espaço vetorial com a multiplicação dada por $\overline{a} \cdot \overline{m} \mapsto \overline{am}$. Finalmente, o resultado proposto segue pois, se B é base de M, então $\overline{B} := \{\overline{b} : b \in B\}$ é base de M/JM com $|B| = \left|\overline{B}\right|$. □

Definição K.2.94. Sejam A um anel e M um A-módulo livre. A **dimensão** (ou *rank*) de M, denotada por $\dim_K M$, é a cardinalidade de qualquer base de M. ¶

Como todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo, segue que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}$-módulo para todo $m \in \mathbb{Z}$. Note que para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ se verifica $m \cdot \overline{n} := \overline{mn} = \overline{0}$. E daí? Ora, tomando $m \geq 1$, essa identidade mostra que $\{\overline{n}\} \subseteq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ é l.d. para todo $n \in \mathbb{Z}$ e, portanto, em tais situações, o único subconjunto l.i. de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ é $\emptyset$. Em outras palavras: tais $\mathbb{Z}$-módulos não tem bases. Já no caso dos corpos...

Lema K.2.95. *Sejam K um corpo e M um K-espaço vetorial. Para um subconjunto $S \subseteq M$ são equivalentes:*

(*i*) *S é l.i.;*

(*ii*) *$s \notin \langle S \setminus \{s\}\rangle$ para cada $s \in S$.*

Teorema K.2.96 (Troca generalizada de Steinitz)**.** *Sejam K um corpo e M um K-espaço vetorial. Se $G \subseteq M$ é um gerador e $L \subseteq M$ é l.i., então existe um subconjunto $D \subseteq G$ tal que $D \cup L$ é base de M.*

Demonstração. Basta observar que $\mathbb{P} := \{C \subseteq G : C \cup L \text{ é l.i.}\}$ é uma ordem parcial (com respeito à inclusão) que satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn. Primeiro, $\mathbb{P} \neq \emptyset$ pois $\emptyset \in \mathbb{P}$. Mais geralmente, se $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ é uma cadeia, então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathbb{P}$ é um limitante superior de $\mathcal{C}$: perceba que se $u_0, \ldots, u_n \in \bigcup \mathcal{C} \cup L$ e $a_0, \ldots, a_n \in K \setminus \{0\}$ são tais que $\sum_{i\leq n} a_i u_i = 0_M$, então existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \cup L$ não é l.i., contrariando $C \in \mathbb{P}$. Logo, existe $D \in \mathbb{P}$ maximal. Finalmente, tudo se resume a mostrar que $D \cup L$ é base: se não fosse, existiria $g' \in G$ com $g' \notin \langle D \cup L\rangle$ e, pelo lema anterior, teria-se $D \cup \{g'\} \in \mathbb{P}$, contrariando a maximalidade de D. □

Em particular, o teorema acima garante que todo subconjunto gerador contém uma base (basta fazer $L := \{g\}$ para algum $g \in G \setminus \{0\}$) e também que todo subconjunto l.i. está contido num subconjunto l.i. maximal[87] (faça $G := M$), i.e., uma base (Exercício K.59).

Corolário K.2.97 (do Núcleo e da Imagem)**.** *Se $T : V \to W$ é um mapa K-linear, então* $\dim_K V = \dim_K \ker T + \dim_K \operatorname{im}(T)$.

Demonstração. Fixada uma base B de $\ker T$, existe uma base C de V que contém B. Daí, fazendo $U := \langle C \setminus B\rangle$, não é difícil perceber que a restrição de T a U determina um isomorfismo com $\operatorname{im}(T)$, donde o resultado segue. □

Na demonstração acima, o subespaço U é um exemplo do que poderia ser chamado de (*um*) *complemento* do subespaço $\ker T$: em geral, subespaços $S, S' \subseteq V$ são **complementares** (entre si) se $S \cap S' = \{0\}$ e $S + S' := \langle S \cup S'\rangle = V$. No caso, o argumento de extensão da base mostra que todo subespaço $S \subseteq V$ admite *um* complemento[88].

[87] Trata-se de mais uma encarnação do Axioma da Escolha. O leitor interessado pode conferir o original [14] ou uma versão mais amigável como a apresentada por Herrlich [51].

[88] Cuidado: *complementares* aqui não têm o sentido conjuntista, já que $S \cap S' \neq \emptyset$.

Observação K.2.98. Como subespaços vetoriais são fechados por combinações lineares, a soma acima se descreve simplesmente como $S + S' := \{s + s' : s \in S \text{ e } s' \in S'\}$, construção que pode ser repetida para quaisquer dois subespaços vetoriais de V. Em particular, nas situações em que a interseção entre S e S' é *trivial*, i.e., $S \cap S' = \{0\}$, diz-se que a soma $S + S'$ é **direta**, o que se indica com a notação $S \oplus S'$.

Logo, S e S' são complementares quando $V = S \oplus S'$, ou equivalentemente, se para qualquer $v \in V$ existirem únicos $s \in S$ e $s' \in S'$ com $v = s + s'$: a existência de s e s' decorre da identidade $V = S + S'$; é a unicidade da decomposição que se deve à *diretude* da soma, já que para $s + s' = t + t'$ com $s, t \in S$ e $s', t' \in S'$, ocorre $s - t = t' - s' \in S \cap S' = \{0\}$.

Na prática, esse tipo de situação permite tratar V *como se fosse* $S \times S'$, já que a correspondência $v \mapsto (s, s')$, onde $s \in S$ e $s' \in S'$ são os únicos tais que $v = s + s'$, é um isomorfismo de espaços vetoriais[89]. △

Exemplo K.2.99 (Funcionais)**.** Ocasionalmente, álgebras A e B de uma mesma linguagem são tais que a coleção de todos os morfismos da forma $A \to B$ admite uma estrutura do mesmo tipo (Exercício K.41). Em particular, para K-espaços vetoriais V e W, denota-se por $\mathrm{Lin}_K(V, W)$ o K-espaço vetorial de todas as funções K-lineares da forma $V \to W$. Curiosamente, um caso ainda mais específico tem importância notória: para $W := K$, considera-se

$$V^* := \mathrm{Lin}_K(V, K), \tag{K.16}$$

chamado de **espaço dual** (algébrico) de V, cujos elementos são xingandos de **funcionais lineares**. Ao se considerar $V^{**} := (V^*)^*$, o espaço **bidual** de V, tem-se a seguinte

Proposição K.2.100. *Para $v \in V$, seja $\widehat{v} \colon V^* \to k$ a função que faz $\widehat{v}(\varphi) := \varphi(v)$ para cada $\varphi \in V^*$. Então $\widehat{v} \in V^{**}$ e a correspondência $\widehat{\cdot} \colon V \to V^{**}$ é uma injeção linear.*

Em particular, nos casos em que $\dim_K V < \aleph_0$, mostra-se que V e V^* sempre têm a mesma dimensão (Exercício K.60), donde em particular resulta que a injeção da última proposição é, na verdade, um isomorfismo. Tal fenômeno costuma se perder nos casos de dimensão infinita, o que torna a discussão bem mais delicada[90]. ▲

Exemplo K.2.101 (Polinômios)**.** Outro classe importante de espaços vetoriais, frequentemente utilizados tanto em exemplos quanto em aplicações, é a dos *anéis de polinômios*. Fixados um anel A e um monoide $(X, *, e)$, considera-se, num primeiro momento, o A-módulo *livre* $A^{\oplus X}$ que tem X como base, a menos de bijeção (como feito no Teorema K.2.90). Dessa forma, cada habitante de $A^{\oplus X}$ se expressa de forma única como combinação A-linear finita de elementos de X, geralmente representado como $\sum_{x \in X} a_x x$.

Até aqui, $A^{\oplus X}$ *sabe* apenas somar seus elementos entre si, bem como multiplicá-los por *escalares* de A. Porém, a operação nativa de X se estende de forma (quase) *natural* à uma operação em $A^{\oplus X}$: para cada $p := \sum_{x \in X} p_x x \in A^{\oplus X}$, a função $\mu_p \colon X \to A^{\oplus X}$ dada por $\mu_p(y) := \sum_{x \in X} p_x x * y$ tem uma única extensão A-linear $\widetilde{\mu_p} \colon A^{\oplus X} \to A^{\oplus X}$, de modo que basta definir $* \colon A^{\oplus X} \times A^{\oplus X} \to A^{\oplus X}$ por $p * q := \widetilde{\mu_p}(q)$. Em particular, nos casos em que G é um monoide comutativo, $\left(A^{\oplus G}, +, *\right)$ é anel comutativo, cuja unidade é $e \in G$.

[89] Vale destacar que os mesmos argumentos são aplicáveis no contexto de módulos

[90] O leitor interessado deve pesquisar por *reflexividade* em bons textos de Análise Funcional.

E daí? Fazendo $G := \omega$ com a operação de soma usual, resulta que $A^{\oplus G}$ é o **anel de polinômios** $A[x]$ na indeterminada x e coeficientes em A: talvez fique mais fácil perceber isso depois de escrever $\{x^n : n \in \omega\}$ em vez de $\{n : n \in \omega\}$. Analogamente, $A[x, y]$ é o anel $A^{\oplus G}$ para $G := \omega \times \omega$, ainda com a operação de soma, dessa vez coordenada a coordenada[91]. Evidentemente, há diversas identificações embaixo do tapete, mas o leitor pode cuidar dos detalhes, já que a ideia geral de construção é a mesma.

Noções e terminologias corriqueiras sobre polinômios (*grau*, raiz, função polinomial induzida, etc.) são apresentadas brevemente na subseção de exercícios, apenas para garantir algum grau de completude para o conforto do leitor – mas, na dúvida, é melhor já saber dessas coisas. Resta só mais um exemplo algébrico antes de prosseguirmos para os corpos ordenados. ▲

Exemplo K.2.102 (Racionais)**.** Embora domínios tenham sido pouco mencionados neste capítulo, um exemplo muito importante de anel é também um caso de domínio: $\mathbb{Z}$. De fato, como $mn = 0$ para $m, n \in \omega$ só ocorre com $m = 0$ ou $n = 0$, não é difícil estender isso para $m, n \in \mathbb{Z}$. Todavia, $\mathbb{Z}$ não é corpo, já que seus únicos (multiplicativamente) invertíveis são -1 e 1.

O **corpo dos números racionais**, $\mathbb{Q}$, resolve tal problema: considerando-se uma nova indeterminada x_m para cada $m \in \mathbb{Z}$, o anel $\mathbb{Z}[x_m : m \in \mathbb{Z}]$ quocientado pelo ideal gerado pelos polinômios da forma $m \cdot x_m - 1$ resulta, precisamente, num corpo $\mathbb{Q}$ que contém (uma cópia de) $\mathbb{Z}$ e tal que qualquer morfismo de anéis $f : \mathbb{Z} \to A$ se estende de forma única à um morfismo de anéis $F : \mathbb{Q} \to A$, desde que $f(z) \in A$ seja invertível para todo $z \in \mathbb{Z}$. Secretamente, esta é mais uma das muitas *propriedades universais* que caracterizam diversos tipos de objetos algébricos – mas que serão exploradas apenas na subseção de exercícios (ou na Seção K.3, de categorias).

Fatos básicos acerca de $\mathbb{Q}$, como sua cardinalidade ($|\mathbb{Q}| = \aleph_0$) e suas propriedades operatórias elementares serão assumidas como conhecidas. Por fim, note que $\mathbb{Q}$ herda de $\mathbb{Z}$ uma ordem total ao se declarar

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

para $b, d > 0$. Naturalmente, fica a cargo do leitor verificar as últimas afirmações. ▲

Corpos ordenados e a reta real

O Exemplo K.2.55 já apresentou a definição de corpos ordenados. Com alguma paciência, não é difícil perceber que o corpo dos racionais, definido um pouco acima, é um animal dessa espécie. Para começar as discussões mais interessantes, convém observar que $\mathbb{Q}$ é, em certo sentido, o *menor* corpo ordenado.

Lema K.2.103. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, então $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$.*

Demonstração. O contrário daria $0_{\mathbb{K}} > 1_{\mathbb{K}}$, posto que a ordem é total e $\mathbb{K}$ é corpo. Logo, a condição (CO$_{\mathrm{i}}$), com $c := -1_{\mathbb{K}}$, acarretaria $-1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ e, consequentemente, teria-se $0_{\mathbb{K}} > 1_{\mathbb{K}} = (-1_{\mathbb{K}})(-1_{\mathbb{K}}) > 0_{\mathbb{K}}$ em virtude da condição (CO$_{\mathrm{ii}}$), uma contradição. □

Teorema K.2.104. *Se $\mathbb{K}$ é corpo ordenado, então existe um único morfismo injetor de anéis $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$.*

[91]E, novamente, escrever $\{x^m y^n : m, n \in \omega\}$ em vez de $\{(m, n) : m, n \in \omega\}$ pode ajudar.

Demonstração. Existe um único morfismo de anéis $\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, que deve ser injetor pelo lema anterior. Como todo elemento não-nulo de $\mathbb{Z}$ tem imagem invertível em $\mathbb{K}$, resuta que existe um único morfismo de anéis $\mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ (Exercício K.64). □

Chamando por $p_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ a imagem de $p \in \mathbb{Q}$ em $\mathbb{K}$ pelo morfismo anterior, segue que $p_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ sempre que $p \in \mathbb{N}$, donde a proposição a seguir permite concluir que $q_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ sempre que $q \in \mathbb{Q}_{>0} := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$. Logo, tal morfismo é um exemplo de **morfismo de corpos ordenados**, i.e., uma função simultaneamente compatível com as estruturas algébrica e de ordem – ou, sem firulas: uma função que é simultaneamente um morfismo de corpos e uma função crescente[92].

Proposição K.2.105. *Sejam $(\mathbb{K}, \leq)$ um corpo ordenado e $x, y, z \in \mathbb{K}$ elementos quaisquer. Então:*

(i) $x > 0_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $-x < 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) se $x > 0_{\mathbb{K}}$ e $y < z$, então $xy < xz$;

(iii) se $x < 0_{\mathbb{K}}$ e $y < z$, então $xy > xz$;

(iv) $x > 0_{\mathbb{K}}$ se, e somente se, $x^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$;

(v) se $x \neq 0_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > 0_{\mathbb{K}}$;

(vi) se $0_{\mathbb{K}} < x < y$, então $0_{\mathbb{K}} < y^{-1} < x^{-1}$.

Definição K.2.106. Seja $(\mathbb{K}, \leq)$ um corpo ordenado. O **valor absoluto** em $\mathbb{K}$ é a função $|\cdot|_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que associa cada $x \in \mathbb{K}$ ao elemento $|x|_{\mathbb{K}} := \max\{x, -x\}$. ¶

O valor absoluto constitui uma *maneira uniforme* de "medir" elementos de $\mathbb{K}$, por meio da *comparação* com os habitantes de seu **cone positivo**, i.e., do subconjunto $\mathbb{K}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{K} : x \geq 0_{\mathbb{K}}\}$, posto que $|x|_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Essa "*maneira uniforme*" se refere, entre outras coisas, ao fato de que o valor absoluto é compatível tanto com a estrutura algébrica quanto com a ordem de $\mathbb{K}$, no seguinte sentido.

Proposição K.2.107. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e $x, y \in \mathbb{K}$. Então:*

(i) $|x|_{\mathbb{K}} \geq 0_{\mathbb{K}}$;

(ii) $|x|_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ *se, e somente se,* $x = 0_{\mathbb{K}}$;

(iii) $|xy|_{\mathbb{K}} = |x|_{\mathbb{K}}|y|_{\mathbb{K}}$;

(iv) $|x + y|_{\mathbb{K}} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$.

A desigualdade (iv) acima, chamada de **desigualdade triangular**, será extremamente recorrente no texto. Por tal motivo, convém demonstrá-la aqui: como $-x \leq |x|_{\mathbb{K}}$ e $-y \leq |y|_{\mathbb{K}}$, tem-se $-(x + y) \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$; como também ocorre $x + y \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$, conclui-se que $|x + y|_{\mathbb{K}} = \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x|_{\mathbb{K}} + |y|_{\mathbb{K}}$.

Observação K.2.108. Para $x, y \in \mathbb{K}$, com $\mathbb{K}$ corpo ordenado, são equivalentes:

(i) $-y \leq x \leq y$; (ii) $x \leq y$ e $-x \leq y$; (iii) $|x|_{\mathbb{K}} \leq y$.

Em particular, $|x - y| \leq z$ se, e somente se, $y - z \leq x \leq y + z$. △

Graficamente, ordens totais abstraem o comportamento de objetos encadeados ao longo de uma linha[93]: afinal de contas, dados x e y distintos, tem-se $x < y$ (x antes de y) ou $y < x$ (y antes de x), como numa corrente ou numa linha. Por sua vez, corpos ordenados adicionam a possibilidade de operar os elementos da corrente. No entanto, tais condições ainda não capturam a ideia de *continuidade* ou *ausência de buracos* que os nossos sentidos falhos atribuem aos *segmentos de reta*.

[92] Como definido no Exercício K.24.

[93] Diga-se de passagem, há textos que xingam de *lineares* as ordens aqui chamadas de *totais*.

Definição K.2.109. Uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ é dita **completa** se todo subconjunto de $\mathbb{P}$, não-vazio e limitado superiormente admite um supremo. Em particular, um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é **completo** se sua ordem total for completa no sentido anterior. ¶

Observação K.2.110. Em particular, seria equivalente pedir que subconjuntos não-vazios e limitados inferiormente tivessem ínfimo (Exercício K.69). △

Teorema K.2.111. *Dado um corpo ordenado $(\mathbb{K}, \leq)$, são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N}_{\mathbb{K}} := \{n_{\mathbb{K}} : n \in \mathbb{N}\}$ *é ilimitado superiormente em* $\mathbb{K}$*;*

(ii) *não existe* $x \in \mathbb{K}$ *com* $n_{\mathbb{K}} < x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) *não existe* $x \in \mathbb{K}$ *com* $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ *satisfazendo* $|x|_{\mathbb{K}} < \dfrac{1_{\mathbb{K}}}{n_{\mathbb{K}}}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iv) *se* $x, y \in \mathbb{K}$ *e* $x < y$*, então existe* $q \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x < q_{\mathbb{K}} < y$*.*

Em particular, se $(\mathbb{K}, \leq)$ *é um corpo ordenado e completo, então* $\mathbb{K}$ *satisfaz todas as condições acima. não é limitado superiormente, i.e., para qualquer* $x \in \mathbb{K}$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x < n_{\mathbb{K}}$*.*

Demonstração. A primeira parte do teorema é chata demais e, por isso, fica a cargo do leitor. Para a segunda, note que o contrário permitiria tomar $\alpha := \sup \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$, e daí existiria $n \in \mathbb{N}$ com $\alpha - 1_{\mathbb{K}} < n_{\mathbb{K}}$, acarretando $\alpha < n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}_{\mathbb{K}}$, absurdo. □

Definição K.2.112. Um corpo ordenado $(\mathbb{K}, \leq)$ satisfazendo qualquer uma das quatro condições equivalentes do teorema anterior é chamado de (corpo) **arquimediano**. ¶

Exemplo K.2.113 (Nem todo corpo arquimediano é completo)**.** A proposição acima estabelece que para um corpo ordenado $\mathbb{K}$ fixado, são as cópias de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{K}$ que codificam a informação necessária para decidir se $\mathbb{K}$ é arquimediano ou não. Em particular, é de se esperar que o próprio corpo ordenado $\mathbb{Q}$ seja arquimediano, o que de fato ocorre: dados $p, q \in \mathbb{Q}$ distintos, não é difícil perceber que $s := p + r$ é tal que $p < s < q$, onde $r = \dfrac{|p-q|}{2}$. Logo, por $\mathbb{Q}$ ter subconjuntos não-vazios, limitados superiormente e sem supremo, resulta que a condição arquimediana não garante completude. ▲

Axioma da Preguiça Infinita. *Existe um corpo ordenado completo.*

A rigor, a afirmação acima não é um axioma, mas apenas um teorema muito chato de se provar: como a construção de tal objeto costuma empregar técnicas que não são aproveitáveis fora de contextos avançados de Análise, é comum que textos introdutórios apenas assumam sua existência. E por que basta assumir que algum corpo ordenado completo existe? Simples: porque quaisquer dois deles são *isomorfos*.

Definição K.2.114. Um morfismo de corpos ordenados $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ é chamado de **isomorfismo** se existir um morfismo de corpos ordenados $g : \mathbb{K}' \to \mathbb{K}$ com $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ e $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}'}$. Em tais condições, $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ são ditos **isomorfos**[94]. ¶

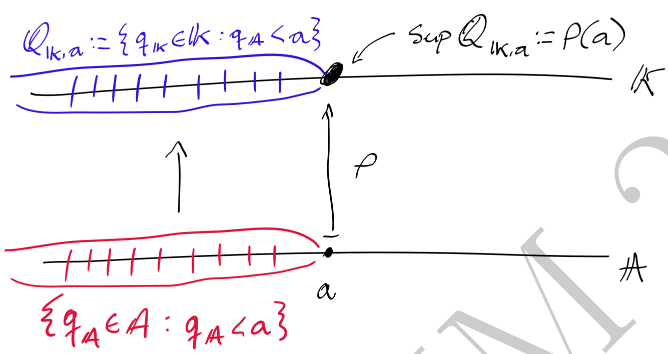
[94] É a noção óbvia de isomorfismo no sentido da linguagem dos corpos ordenados? Sim. Porém, não custa explicitar.

Lema K.2.115. *Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados e, para cada $a \in \mathbb{A}$, considere o subconjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} := \{q_\mathbb{K} \in \mathbb{Q}_\mathbb{K} : q_\mathbb{A} < a\}$. Se $\mathbb{A}$ é arquimediano e $\mathbb{K}$ é completo, então a correspondência*

$$\begin{aligned} \rho \colon \mathbb{A} &\to \mathbb{K} \\ a &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{aligned} \tag{K.17}$$

é um morfismo de corpos ordenados.

A coisa toda é bastante visual, como ilustrado a seguir.



Para cada $a \in \mathbb{A}$ considera-se, num primeiro momento, a coleção dos racionais (interpretados em $\mathbb{A}$) menores do que a. Ao *interpretarmos* tais números racionais em $\mathbb{K}$, obtém-se um conjunto limitado superiormente, que por sua vez admite um supremo em virtude da completude de $\mathbb{K}$. Finalmente, ρ apenas associa a ao supremo obtido no passo anterior. Mesmo que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ sejam *construídos* de maneiras distintas, o fato de ambos *interpretarem* cópias *densas* de $\mathbb{Q}$ permite sincronizá-los entre si.

Observação K.2.116. Convém destacar que o morfismo de corpos ρ é *estritamente crescente*, no sentido da Observação K.25. Há dois modos simples de se convencer disso:

(i) por $\mathbb{A}$ ser arquimediano, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $a < q_\mathbb{A} < b$ e

$$\rho(a) := \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} < q_\mathbb{K} < \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},b} := \rho(b).$$

(ii) alternativamente, como ρ é um morfismo de corpos, segue que ρ é injetor e, por isso, deve ser estritamente crescente.

Embora o segundo argumento mostre que *qualquer* morfismo de corpos ordenados é estritamente crescente, o primeiro argumento será importante em breve, quando surgir o problema de estimar a cardinalidade de corpos arquimedianos. △

Teorema K.2.117. *Se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ são corpos ordenados e completos, então o mapa $\rho \colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ definido em (K.17) é um isomorfismo de corpos ordenados.*

Demonstração. Como desta vez o corpo $\mathbb{A}$ também é completo, o lema anterior permite conjurar *dois* morfismos de corpos ordenados, simultaneamente:

$$\begin{aligned} \rho \colon \mathbb{A} &\to \mathbb{K} \\ a &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{K},a} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \sigma \colon \mathbb{K} &\to \mathbb{A} \\ k &\mapsto \sup \mathbb{Q}_{\mathbb{A},k} \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrar que um é o inverso do outro, o que fica a cargo do leitor interessado. □

Definição K.2.118. Denota-se por $\mathbb{R}$ *qualquer* corpo ordenado e completo, que passa a ser chamado de **conjunto dos números reais**, ou apenas de **reta real**. ¶

Devido a tal escolha de notação, perde o sentido carregar "$\mathbb{R}$" como subíndice para indicar em qual corpo ordenado e completo um determinado procedimento ocorre, postura que será aplicada também para o valor absoluto de um número real x, que será denotado por $|x|$ de agora em diante[95].

Além disso, em contextos algébricos ou *analíticos*, será inofensivo considerar como verdadeiras as inclusões próprias

$$\mathbb{N} \subsetneq \omega \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \tag{K.18}$$

embora, a rigor, existam apenas morfismos injetores que preservam as *estruturas algébricas e de ordem* subjacentes: se, por um lado, isso soa demasiado arbitrário, por outro, já sabemos que tais morfismos são únicos e, portanto, independem de escolhas *arbitrárias*[96]. Em outras palavras, tanto ω, quanto $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ podem ser substituídos por suas cópias em $\mathbb{R}$, que são únicas em virtude da unicidade dos morfismos entre as estruturas. Como consequência dessas identificações, $\mathbb{N}$, ω, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ compartilham, a partir de agora, os mesmos elementos neutros aditivos e multiplicativos, xingados respectivamente de 0 e 1.

Observação K.2.119 (A cardinalidade do *continuum*)**.** Um dos fatos mais marcantes nos desenvolvimentos iniciais da Teoria dos Conjuntos e no estudos dos infinitos foi a *constatação* de que o *tipo de infinito* de $\mathbb{R}$ é *estritamente maior* do que o *tipo de infinito* de ω. Com a linguagem apresentada no capítulo anterior, isso pode se expressar com a desigualdade

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}, \tag{K.19}$$

A letra $\mathfrak{c}$, no caso, faz referência ao ***continuum***, expressão latina classicamente utilizada para fazer menção à noção da reta real como uma linha *contínua* – sem buracos.

Com o jargão típico dos textos básicos de Análise, (K.19) se lê como "$\mathbb{R}$ é não-enumerável". Todavia, esse tipo de afirmação não *localiza* a posição de $\mathfrak{c}$ na *cadeia* dos números cardinais transfinitos: isso apenas diz que $\mathfrak{c}$ não é o menor tipo de infinito. Mas poderia ser $\aleph_1$? Talvez $\aleph_5$?

Por ora, mesmo a desigualdade em (K.19) já parece desafiar qualquer abordagem de demonstração, posto que não se apresentou *um* conjunto para chamar de $\mathbb{R}$: apenas postulou-se a existência de um corpo ordenado completo. Ocorre que, como será mostrado a seguir, as duas propriedades fundamentais de $\mathbb{R}$ permitem estimar razoavelmente bem a *cardinalidade* de $\mathbb{R}$:

(i) por ser um corpo arquimediano,$\mathbb{R}$ não pode ser *grande demais*;

(ii) por ser completo, $\mathbb{R}$ não pode ser *pequeno demais*.

Lema K.2.120. *Se $\mathbb{A}$ é corpo arquimediano, então $|\mathbb{A}| \leq 2^{\aleph_0}$.*

[95] O contexto deixará claro quando $|x|$ representa o valor absoluto do *número real* x ou a cardinalidade do *conjunto* x. De qualquer forma, o leitor incomodado pode fazer como a maioria, e pensar que *números não são conjuntos* – algo impensável para os adeptos de ZFC, mas recorrente para os praticantes do *carpe diem*: https://mathoverflow.net/a/90945/41407.

[96] No caso de $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, confira o Exercício K.71.

Demonstração. Nas condições do enunciado, a correspondência $\partial\colon \mathbb{A} \to \wp(\mathbb{Q})$ dada por $a \mapsto \{q \in \mathbb{Q} : q_{\mathbb{A}} < a\}$ é uma injeção. $\square$

Por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, segue que $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$. O próximo passo será mostrar a desigualdade oposta, i.e., $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$, pois daí o Teorema K.1.71 (Cantor-Bernstein) garantirá $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Embora este lado da desigualdade possa ser demonstrado de modo mais rápido por meio da noção de *séries*, ainda não discutidas, é possível maquiar os argumentos usando supremos de *séries finitas*. Uma prova pode ser encontrada em [76]. $\triangle$

Teorema K.2.121. *Para cada $f\colon \omega \to \{0,1\}$, existe o número real $\psi(f) \in \mathbb{R}$ dado por*

$$\psi(f) := \sup\left\{\sum_{n\leq m} \frac{f(n)}{10^n} : m \in \omega\right\}.$$

Além disso, a correspondência $\psi\colon 2^\omega \to \mathbb{R}$ é uma injeção.

Corolário K.2.122. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. *Em particular, $\mathbb{R}$ é não-enumerável.*

Corolário K.2.123. $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n| = |\omega^\omega| = |\mathbb{R}^\omega|$ *para todo $n \in \omega$ com $n > 0$.*

Demonstração. Segue pois $2^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0 \cdot n} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Observação K.2.124 (A reta real, sem álgebra)**.** Em certo sentido, o Teorema K.2.117 caracteriza a reta real enquanto objeto algébrico-ordenado. Todavia, é possível dispensar (implicitamente) a linguagem algébrica, em vista do

Teorema K.2.125. *Se $(\mathbb{T}, \preceq)$ é uma ordem total, separável, completa e sem extremos, então existe um isomorfismo de ordens entre $(\mathbb{T}, \preceq)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$.*

Nas notações acima, um subconjunto $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{T}$ é chamado de **linearmente denso**, ou apenas **denso**, se para quaisquer $x, y \in \mathbb{T}$, com $x \prec y$, existe $z \in \mathbb{D}$ com $x \prec z \prec y$. Em particular, $\mathbb{T}$ é uma ordem **separável** se existir um subconjunto denso enumerável. Os **extremos** de uma ordem $\mathbb{T}$ são $\max \mathbb{T}$ e/ou $\min \mathbb{T}$, caso existam.

É importante notar que $(\mathbb{R}, \leq)$ satisfaz, de fato, todas as condições enunciadas:

✓ pelo Axioma da Preguiça Infinita, $\mathbb{R}$ é um corpo totalmente ordenado e completo, donde em particular segue que $\mathbb{R}$ é uma ordem total e completa;

✓ a condição (iv) da Proposição K.2.111 diz, precisamente, que $\mathbb{Q}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$, donde segue que $\mathbb{R}$ é separável, já que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$;

✓ finalmente, $\mathbb{R}$ não tem extremos, pois é um corpo ordenado[97].

Assim, num primeiro momento, qualquer cópia da reta real é um *tipo de ordem* com as propriedades do teorema. A parte não trivial será observar que ordens com as propriedades listadas são, necessariamente, isomorfas à reta real. Um esboço da demonstração de tal resultado é apresentado nos Exercícios 1.129 e 1.130, do Capítulo 1. $\triangle$

Exemplo K.2.126 (Extensões)**.** Antes de encerrar, convém observar que a reta admite *extensões*, tanto no sentido de ordem quanto no sentido algébrico[98].

[97] Se $\mathbb{F}$ é um corpo ordenado e $x \in \mathbb{F}$, então $x < x + 1$ e $x - 1 < x$.

[98] Há um terceiro sentido que mescla ambos, por meio da formalização de *infinitésimos*. Porém, isto não será abordado neste texto.

- ✓ Denota-se por $\overline{\mathbb{R}}$ a reta real $\mathbb{R}$ acrescida dos pontos $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$, e estende-se a ordem de $\mathbb{R}$ de tal forma que se tenha $-\infty = \inf \mathbb{R}$ e $+\infty = \sup \mathbb{R}$, chamados de **pontos no infinito** da **reta estendida**.

- ✓ Denota-se por $\mathbb{C}$ o **conjunto dos números complexos**, que pode ser definido como o quociente
$$\mathbb{C} := \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1\rangle}, \tag{K.20}$$
donde segue que $\mathbb{C}$ é um corpo uma vez que $\langle x^2+1\rangle$ é ideal maximal de $\mathbb{R}[x]$. Seus elementos são da forma $\alpha\overline{x}+\beta$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, o que permite assumir $\mathbb{R}\subsetneq\mathbb{C}$. No entanto, por motivos histórico-psicológicos, escreve-se i em vez de $\overline{x}$, de modo que a igualdade $\overline{x}^2=-1$ se transforma na clássica identidade $i^2=-1$.

Convém observar que a última equação impossibilita a existência de uma relação de ordem total sobre $\mathbb{C}$ que seja compatível com suas operações. Em outras palavras, não há ordem $\leq$ capaz de promover $(\mathbb{C},\leq)$ ao patamar de corpo ordenado. Por outro lado, não é possível dotar $\overline{\mathbb{R}}$ de operações que o tornem um corpo *razoável*. Outras observações importantes sobre essas duas extensões são apresentadas na subseção de exercícios. ▲

Observação K.2.127. Eu provavelmente seria crucificado se não mencionasse o seguinte

Teorema K.2.128 (Fundamental da Álgebra)**.** *Se $p\in\mathbb{C}[x]$ é não-constante, então existe $\alpha\in\mathbb{C}$ com $p(\alpha)=0$. Em particular, $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado e, mais ainda, é o fecho algébrico de $\mathbb{R}$.*

O resultado acima é chamado de Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) por pura tradição histórica: embora em diversos contextos atuais o fechamento algébrico de $\mathbb{C}$ seja útil, isso está longe de ser fundamental – naturalmente, talvez tenha sido na época em que a Álgebra se limitava a resolver equações. Além disso, apesar do nome, são "raras" as demonstrações puramente algébricas do resultado acima. Discutivelmente, a versão *mais algébrica* do TFA é o seguinte

Teorema K.2.129 (Artin)**.** *Seja K um corpo totalmente ordenado e com a seguinte propriedade:*

(TVI) *se $p\in K[x]$ é tal que existem $\alpha,\beta\in K$ com $\alpha<\beta$ e $p(\alpha)p(\beta)<0$, então existe $\gamma\in K$ com $\alpha<\gamma<\beta$ e $p(\gamma)=0$.*

Então $K\left[\sqrt{-1}\right] := \dfrac{K[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ é algebricamente fechado.

Assim, provar o TFA se resume a mostrar que os polinômios $p\in\mathbb{R}[x]$ têm a propriedade descrita em (TVI), coisa que costuma ser feita em textos de Análise e Topologia Geral. Essa é, na verdade, a vantagem do Teorema K.2.129: ele isola com precisão o ingrediente *não-álgebrico*[99] necessário para provar o TFA, deixando todo o resto da demonstração inquestionavelmente algébrico. A prova desse último teorema foge do escopo deste texto: leitores interessados podem conferir a Seção 8.3 do livro de Paul Cohn [30]. △

[99] O leitor que considera Teoria de Modelos como parte da Álgebra pode se interessar pelo artigo de Piotr Błaszczyk [15], em que a condição (TVI) é provada por meio de *ultraprodutos*.

K.2.3 Limites da abordagem finitária

Embora a presente seção deva ter ilustrado o abrangente poder descritivo das linguagens de primeira ordem, é preciso ter em mente que elas apresentam limitações, tanto *práticas* quanto metamatemáticas. Do segundo ponto de vista, por exemplo, o Corolário K.2.122 demonstra que não existe *axiomática de primeira-ordem* capaz de capturar todos os fatos acerca de corpos ordenados completos: fixada qualquer linguagem enumerável $\mathscr{L}$ tal que $\mathbb{R}$ seja uma $\mathscr{L}$-estrutura, para $\mathcal{V}$ com $|\mathcal{V}| = \aleph_0$ e $\mathscr{R} := \{\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) : \mathbb{R} \models \varphi\}$, o Teorema de Löwenheim-Skolem garante uma $\mathscr{L}$-estrutura R com $R \models \mathscr{R}$ e $|R| = \aleph_0$. As limitações *práticas*, por outro lado, têm mais a ver com o que será feito nos capítulos seguintes – e o objetivo desta seção é apenas ilustrá-las.

Operações infinitárias

Suponha que X seja um conjunto munido de uma operação associativa $\odot\colon X \times X \to X$, e considere uma *sequência*[100] $(x_n)_{n\in\omega} \in X^\omega$, i.e., uma função $f\colon \omega \to X$ que a cada $n \in \omega$ associa o elemento $f(n) := x_n \in X$. Recursivamente, define-se $\bigodot\limits_{j\leq n} x_j$ fazendo

$$\bigodot_{j\leq 0} x_j := x_0 \quad \text{e} \quad \bigodot_{j\leq n+1} x_j := \left(\bigodot_{j\leq n} x_j\right) \odot x_{n+1}, \tag{K.21}$$

para cada $n \in \omega$. Por já sabermos *contar além de infinito*, é irresistível buscar por uma definição razoável para $\bigodot\limits_{n\in\omega} x_n$ em X.

Naturalmente, nada impede uma postura artificial: escolhe-se algum elemento $x_\omega \in X$ para daí fazer $\bigodot_{n\in\omega} x_n := x_\omega$. Embora seja recursivamente legítima, essa abordagem desonesta ignora qualquer tipo de informação que a operação $\odot$ tenha sobre a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$. Em outras palavras, espera-se que *uma escolha* para $x_\omega \in X$ *dependa* da sequência induzida $y := \left(\bigodot\limits_{j\leq n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$, a fim de que, moralmente, faça sentido *pensar* em

$$x_\omega = x_0 \odot x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n \odot \ldots$$

Apesar de parecer um problema artificial, a situação acima é o arquétipo do que se encontra no dia a dia. Com efeito, fazendo $(X, \odot) := (\mathbb{Q}, +)$ e $x_n := \frac{1}{2^n}$ para cada $n \in \omega$, o problema acima se traduz em dar sentido à expressão $x_\omega := \sum\limits_{n\in\omega} \dfrac{1}{2^n}$, o que o leitor *certamente* sabe como fazer: afinal, x_ω *só pode ser* 2!

Argumentando por indução, não é difícil se convencer da validade da expressão

$$2 = \frac{1}{2^n} + \sum_{j\leq n} \frac{1}{2^j} \tag{K.22}$$

para qualquer $n \in \omega$. *Logo*, deve ser verdade que

$$2 = 1 + 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \tag{K.23}$$

[100] O contexto deixará claro quando o termo "sequência" indicará uma função $\omega \to X$ ou apenas uma *sucessão* finita de termos, como em "existe uma sequência finita de elementos, digamos $x_0, \ldots, x_n$".

No entanto, uma justificativa para a razoabilidade da identidade acima escapa do ferramental tipicamente algébrico: "+" denota, para começo de conversa, uma operação binária finitamente iterável, e o comportamento algébrico *per se* não dá informações suficientes para embasar a conclusão.

Observação K.2.130 (Cálculo *freestyle*)**.** O leitor não é obrigado a acreditar no que se apontou acima e pode, como muitos de nossos antepassados, insistir que meios algébricos bastem para justificar a identidade (K.23). Um *justificativa* típica para esse tipo de *argumento* é a seguinte: supondo que *exista* a iteração infinita

$$S := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

como determinar o valor de S? Ora, posto que a distributividade *certamente* vale para iterações infinitas, segue que

$$2S = 2 \cdot 1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \ldots = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots = 2 + S,$$

resultando em $S = 2$! Parece honesto, não?

O problema é que o mesmo raciocínio permitiria mostrar, por exemplo, que

$$T := 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = -1, \tag{K.24}$$

pois ocorreria $2T = T - 1$. Enquanto (K.23) é totalmente razoável, uma soma infinita de termos positivos como em (K.24) resultar em -1 não parece *crível.* O leitor insistente ainda pode usar o mesmo tipo de "argumento" para justificar resultados distintos para uma mesma soma infinita de números inteiros (como no Exemplo K.2.136, a seguir). △

A raiz deste imbróglio não é a pseudo-argumentação algébrica em si, mas a suposição de que ela se aplica em qualquer contexto. *Ora, então basta decidir para quais sequências o argumento funciona!* E é justamente aí que se escapa da Álgebra, que tão somente se importa em *tomar* pares de elementos e operá-los: no caso, a ferramenta usual para decidir para *onde* as somas *convergem* é a *topologia*, geralmente disfarçada de ordem.

Exemplo K.2.131. Como no Teorema K.2.121, não é difícil mostrar que $\sup A = 2$, onde $A := \left\{\sum_{j \leq n} \frac{1}{2^j} : n \in \omega\right\}$. Isto significa que

- ✓ para todo $n \in \omega$ ocorre $\sum_{j \leq n} \frac{1}{2^j} < 2$ e
- ✓ para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \omega$ com $2 - \varepsilon < \sum_{j \leq m} \frac{1}{2^j}$,

o que, empiricamente, indica que as *somas parciais* $y_n := \sum_{j \leq n} \frac{1}{2^j}$ se tornam mais próximas de 2 à medida que n *cresce.* Assim, *faz sentido* escrever $\sum_{n \in \omega} \frac{1}{2^n} := \sup A$. ▲

Observação K.2.132. Agora, o truque "algébrico" realizado para mostrar que $S = 2$ perde o status de gambiarra e passa ser encarado como uma propriedade de supremos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{n \in \omega} \frac{1}{2^n} &= 2 \sup \left\{ \sum_{j \leq n} \frac{1}{2^j} : n \in \omega \right\} = \sup \left\{ 2 \sum_{j \leq n} \frac{1}{2^j} : n \in \omega \right\} = \\ &= \sup \left\{ 2 + \sum_{j < n} \frac{1}{2^j} : n \in \omega \right\} = 2 + \sup \left\{ \sum_{j < n} \frac{1}{2^j} : n \in \omega \right\} = 2 + \sum_{n \in \omega} \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

onde a subtração pode ser feita sem riscos pois $\sup A \in \mathbb{R}$. △

Definição K.2.133. Para uma função $f\colon \omega \to [0,+\infty)$, define-se a **série**

$$\sum_{n\in\omega} f(n) := \sup\left\{\sum_{j\leq n} f(j) : n\in\omega\right\}, \tag{K.25}$$

com a ressalva natural de que pode ocorrer $\sum_{n\in\omega} f(n) = +\infty$. ¶

Essa definição também revela parte do problema com o "argumento" usado em (K.24): da igualdade $2(+\infty) = -1 + (+\infty)$ não se pode inferir que $+\infty = -1$ pois a subtração $(+\infty) - (+\infty)$ não foi definida[101].

Observação K.2.134. O leitor atento certamente notou que a função $f\colon \omega \to [0,+\infty)$ não é importante: dado um subconjunto $X \subseteq [0,+\infty)$, pode-se definir

$$\sum X := \sup\left\{\sum_{x\in F} x : F \in [X]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\}\right\},$$

o que parece generalizar (K.25). Todavia, a generalização é apenas aparente.

Proposição K.2.135. *Sejam $X \subseteq [0,+\infty)$ e $A := \{x \in X : x > 0\}$. Se $|A| > \aleph_0$, então $\sum X = +\infty$. Por outro lado, se $|A| = \aleph_0$, então $\sum X = \sum_{n\in\omega} f(n)$ para qualquer bijeção $f\colon \omega \to X$.*

Demonstração. Por $\mathbb{R}$ ser arquimediano, pode-se garantir a igualdade $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, onde $A_n := \{x \in X : x > \frac{1}{n}\}$. Agora, se $|A| > \aleph_0$, então pelo Princípio da Casa dos Pombos (página 49), existe pelo menos um $n \in \mathbb{N}$ com $|A_n| > \aleph_0$, de modo que $\sum_{x\in F} x > |F|\frac{1}{n}$, para qualquer subconjunto finito $F \subsetneq A_n$, que pode ser arbitrariamente grande por A_n ser infinito, acarretando $\sum X = +\infty$.

Por outro lado, se $|A| = \aleph_0$ e $f\colon \omega \to A$ é uma bijeção, então para qualquer $F \in [X]^{<\aleph_0}$ ocorre

$$\sum_{x\in F} x = \sum_{x\in F\cap A} x \leq \sum_{j\leq m} f(j) \leq \sum_{n\in\omega} f(n)$$

para algum $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $F \cap A \subseteq \{f(j) : j \leq m\}$, o qual existe pois $F \cap A \subseteq A$ e f é bijeção. Por F ser qualquer, resulta que $\sum X \leq \sum_{n\in\omega} f(n)$. Como a outra desigualdade é óbvia, o resultado segue. □

Grosso modo, a proposição acima diz que a ordem dos fatores é irrelevante na soma de infinitos números reais não-negativos. O leitor deve valorizar tal propriedade, pois ao se estender a definição de série para funções/sequências da forma $f\colon \omega \to \mathbb{R}$, a ordem dos fatores será essencial. △

Exemplo K.2.136. Considere a função $f\colon \omega \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) := (-1)^n$, i.e., f é a sequência $(1,-1,1,-1,1,-1,\ldots)$. Para esta f, o valor de $y_n := \sum_{j\leq n} f(j)$ depende apenas da paridade de n: para n par ocorre $y_n = 1$, e para n ímpar se tem $y_n = 0$. Assim, enquanto

$$\sup\left\{\sum_{j\leq n} f(j) : n\in\omega\right\} = \max\{0,1\} = 1,$$

[101] Ou, mais precisamente, não é *definível* de modo a determinar esse tipo de estimativa. Isto ficará claro com as ferramentas topológicas.

tem-se

$$\sup\left\{\sum_{x\in F} f(x) : F \in [\omega]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\}\right\} = +\infty,$$

pois existem subconjuntos finitos de números pares arbitrariamente grandes.

Apesar disso, tanto 1 quanto $+\infty$ não parecem valores razoáveis para se atribuir à série $\sum_{n\in\omega}(-1)^n$: conforme se consideram valores maiores de $n \in \omega$, a soma parcial $\sum_{j\leq n}(-1)^n$ *oscila* entre 0 e 1, de modo que não se torna *arbitrariamente próxima* de 1 e tampouco se torna *arbitrariamente grande*. A solução desse problema consiste numa definição mais fina de convergência, o que se faz justamente com as noções de Topologia Geral que serão introduzidas no próximo capítulo. ▲

O problema da medida/integração

Enquanto os números ordinais e cardinais surgem *naturalmente* dos processos de contagem de *indivíduos*, os números reais são o resultado de se abstrair os processos de mensuração de objetos *contínuos*. Nesse sentido, *medir* um certo objeto F consiste em atribuir a F um número real (positivo) $m(F)$ de tal maneira que ao fazer o mesmo para outro objeto F', ambos os números $m(F)$ e $m(F')$ tenham alguma relação com um terceiro objeto fixado U, a *unidade padrão da medida* – onde tradicionalmente coloca-se $m(U) := 1$.

Exemplo K.2.137. O problema de medir intervalos da reta (Exercício K.76) é quase trivial quando se leva em conta o que já se faz na vida real: estipula-se $m(I) := \sup I - \inf I$. Com tal *medida*, pode-se tomar $U := [0,1]$ como unidade padrão, já que $m([0,1]) = 1$. Com isso, é natural estender o processo de medida para retângulos, fazendo $m(I \times J) := m(I) \cdot m(J)$, ou cubos, com $m(I \times J \times K) = m(I) \cdot m(J) \times m(K)$, etc. ▲

As sugestões do exemplo anterior funcionam bem, mas só enquanto os objetos são retangulares. Ao lidar com entidades não-*cartesianas*, como círculos, a postura padrão consiste em descrever a coisa, aproximadamente, em termos de retângulos ou afins: se, por exemplo, um círculo C em $\mathbb{R}^2$ puder ser descrito como reunião disjunta de retângulos $I_n \times J_n$, a ideia é que

$$m(C) = \sum_{n\in\omega} m(I_n) \cdot m(J_n).$$

Isto leva ao processo mais interessante de determinar medidas para gráficos dados por funções, digamos que limitadas e da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$, chamado de integração. Ao seguir os passos de Lebesgue (Exercício K.82), percebe-se que uma *boa teoria de integração* para funções da forma acima exige generalizar as medidas de subconjuntos de números reais para além dos intervalos.

A fim de ser compatível com as propriedades esperadas de *uma integral*, pelo menos três coisas simples deveriam ocorrer com uma função $m\colon \wp(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ que se propusesse a *medir* <u>todos</u> os subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(i) deveria ocorrer $m([0,1]) = 1$;

(ii) deveria ocorrer $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ caso A e B fossem disjuntos;

(iii) chamando $A + x := \{a + x : a \in A\}$ para $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, deveria ocorrer $m(A + x) = m(A)$.

(iv) para uma sequência $(A_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dois a dois disjuntos, deveria valer $m(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} m(A_n)$.

Embora as exigências acima soem razoáveis, não existe função $m\colon \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ satisfazendo todas as condições anteriores simultaneamente.

Teorema K.2.138. *Se uma função $m\colon \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) acima, então m não satisfaz (iv).*

Demonstração. Primeiramente, note que a segunda condição implica a monotonicidade de m, ou seja: se $A \subseteq B$, então $m(A) \leq m(B)$, pois $m(B) = m(B \setminus A) + m(A)$. Isto será útil, adiante. Agora, sobre $[0, 1]$, consideremos a relação binária $\sim$ definida por $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Q}$. Como $\sim$ é uma relação de equivalência, existe $\mathcal{R} \subsetneq [0, 1]$ um conjunto de representantes de $\sim$, i.e., tal que para cada $x \in [0, 1]$ existe um único $r_x \in \mathcal{R}$ com $x \sim r_x$.

Façamos então $\mathcal{R}_q := \mathcal{R} + q$ para cada $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Mostraremos que deve ocorrer a inclusão $[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{R}_q$: dado $x \in [0, 1]$, existe $r \in \mathcal{R}$ com $x - r := q \in \mathbb{Q}$ e, como ambos $x, r \in [0, 1]$, resulta que $q \in [-1, 1]$, com $x = r + q \in \mathcal{R}_q$. Daí, por valer $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{R}_q \subseteq [-1, 2]$, obtém-se

$$0 < 1 := m([0, 1]) \leq m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{R}_q\right) \leq m([-1, 2]) = m([-1, 0) \cup [0, 1] \cup (1, 2]) \leq$$
$$\leq m([-1, 0]) + m([0, 1]) + m([1, 2]) = 3.$$

Por outro lado, deve-se ter $\mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q = \emptyset$ para $q \neq p$: se $x \in \mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q$, então existem $r, r' \in \mathcal{R}$ com $x = r + p$ e $x = r' + q$, donde segue que $x \sim r$ e $x \sim r'$ e, consequentemente, $r = r'$ e $p = q$. Logo,

$$m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{R}_q\right) \neq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(\mathcal{R}_r) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(\mathcal{R}),$$

pois $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(\mathcal{R}) = 0$ se $m(\mathcal{R}) = 0$, e $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(\mathcal{R}) = +\infty$ se $m(\mathcal{R}) \neq 0$. □

A moral da história é a seguinte: uma função m capaz de medir subconjuntos de $\mathbb{R}$ de forma razoável não é capaz de medir todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, i.e., deve ocorrer[102] $\mathrm{dom}\,(m) \neq \wp(\mathbb{R})$. O domínio ideal de uma boa medida é uma estrutura usualmente chamada de *σ-álgebra*.

Definição K.2.139. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma **σ-álgebra** em X se

(*i*) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,

(*ii*) $M \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus M \in \mathcal{A}$, e

(*iii*) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ com $|\mathcal{M}| \leq \aleph_0 \Rightarrow \bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{A}$.

O par $(X, \mathcal{A})$ é chamado de **espaço mensurável**, enquanto os subconjuntos de X que pertencem a $\mathcal{A}$ são xingados de **mensuráveis**, ou de **$\mathcal{A}$-mensuráveis**. ¶

Definição K.2.140. Uma **medida** em $(X, \mathcal{A})$ é uma função $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu\left(\bigcup \mathcal{M}\right) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \mu(M)$ para qualquer família enumerável $\mathcal{M}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$. ¶

[102] A menos que se *assuma* o contrário, i.e., pode-se postular a existência de uma *medida* com tais propriedades. O preço, porém, é alto: abandonar o Axioma da Escolha.

O leitor atento deve notar que tanto $\wp(X)$ quanto $\{\emptyset, X\}$ são σ-álgebras em X. Em particular, o fato de $\wp(X)$ ser uma σ-álgebra não contraria o teorema anterior: a função $\mu\colon \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ que faz $\mu(A) := 0$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ é uma medida em $(\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R}))$ de acordo com a definição acima, por exemplo. Nesse sentido, o Teorema K.2.138 apenas atesta que uma medida mais sofisticada não pode ser definida em $\wp(\mathbb{R})$. Alternativamente, pode-se interpretá-lo como uma demonstração para o seguinte: se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em $\mathbb{R}$ tal que

- ✓ $\mathcal{A}$ contém todos os intervalos de $\mathbb{R}$,
- ✓ $A + x \in \mathcal{A}$ para quaisquer $A \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathbb{R}$,
- ✓ $m\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida com $m([0, 1]) = 1$ e $m(A+x) = m(A)$ para quaisquer $A \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathbb{R}$,

então existe $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{R} \notin \mathcal{A}$.

Observação K.2.141. Afinal de contas: existe uma medida sobre alguma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ com as propriedades acima? A resposta é sim. Todavia, discutir os detalhes desta resposta é mais responsabilidade da Teoria da Medida do que da Topologia Geral. Com isso dito, o leitor interessado numa *perspectiva topológica* para a resposta pode conferir a Seção 5.3, que trata sobre as *medidas/integrais de Haar*. △

Frequentemente, a terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é chamada de **espaço de medida**, embora seja ainda mais comum dizer apenas que X é um espaço de medida μ cujo domínio é uma σ-álgebra implícita pelo contexto. Em particular, se $\mu(X) = 1$, então o codomínio de μ se restringe ao intervalo $[0, 1]$ devido à *monotonicidade* de μ. Em tais situações, μ recebe o peculiar nome de (medida de) **probabilidade**, o que ajuda inclusive a motivar parcialmente as condições impostas sobre $\mathcal{A}$. Para desenvolver integração com tal aparato, faz-se o seguinte.

Definição K.2.142. Uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços mensuráveis $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ é dita $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-**mensurável** se $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. ¶

Para funções da forma $X \to \mathbb{R}$, com $(X, \mathcal{A})$ espaço mensurável, é comum considerar a mensurabilidade de f com respeito à chamada *σ-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, a menor σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ a conter os intervalos da reta[103]. Por simplicidade, em tais situações, diz-se que $f\colon X \to \mathbb{R}$ é *mensurável* em vez de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensurável.

Exemplo K.2.143. Para um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$, a função *característica* de um subconjunto $A \subseteq X$, geralmente denotada por $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$, é mensurável se, e somente se, o próprio subconjunto A é membro da σ-álgebra $\mathcal{A}$. As combinações lineares de funções características de subconjuntos mensuráveis, embora *simples*, são mais interessantes. ▲

Definição K.2.144. Uma função mensurável $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ é chamada de **simples** se $\operatorname{im}(\varphi)$ é um conjunto finito. ¶

Note que se φ é simples e $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ são (todos) os pontos (dois a dois distintos) de $\operatorname{im}(\varphi)$, então $\varphi = \sum_{j \le n} \alpha_j \chi_{A_j}$, onde $A_j := \varphi^{-1}[\{\alpha_j\}]$ para cada $j \le n$. Em particular, a coleção $\{A_j : j \le n\}$ determina uma partição de X em subconjuntos mensuráveis, pois $\{\alpha\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Uma vez que tal representação é única, pode-se fazer a próxima

[103] Leitores mais generalistas podem preferir a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, a menor σ-álgebra sobre $\mathbb{C}$ a conter os produtos cartesianos de intervalos abertos.

Definição K.2.145 (Integral de funções simples)**.** Para um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e uma função simples $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, a **integral de φ com respeito à medida μ** é o número

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j \leq n} \alpha_j \mu(A_j),$$

onde $\alpha_j \in \mathbb{R}$ e $A_j \in \mathcal{A}$ são tomados como na discussão anterior. ¶

Observação K.2.146. No contexto da Teoria da Medida, impõe-se $0 \cdot (+\infty) = 0$ não por propósitos de *continuidade*, mas porque se espera refletir a ideia de que *retas têm área zero*, *planos têm volume zero*, etc. Tal identidade é assumida tacitamente na definição anterior. △

Definição K.2.147 (Integral de funções mensuráveis)**.** Nas condições acima, considere $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável.

(i) Caso se tenha $f \geq 0$, define-se

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int \varphi \, \mathrm{d}\mu : \varphi \text{ é simples e } 0 \leq \varphi \leq f \right\};$$

(ii) Para o caso geral, faz-se

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

onde $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^{-1} := -\min\{-f, 0\}$. ¶

Observação K.2.148. A definição acima contém alguns deslizes. Primeiro, a definição no item (i) faz sentido já que a função constante nula é simples. Agora, para o caso (ii), deve-se observar que f^+ e f^- são mensuráveis; como isso as torna aptas ao caso (i), são *definíveis* as integrais $\int f^+ \, \mathrm{d}\mu$ e $\int f^- \, \mathrm{d}\mu$, o que por si só não garante que a definição dada para $\int f \, \mathrm{d}\mu$ faça sentido: para funcionar, as integrais de f^+ e f^- não podem ser simultaneamente infinitas! △

Com essas definições, e algumas ferramentas *elementares* de Análise na Reta, os praticantes da Teoria da Medida, também chamados de *probabilistas*, conseguem *abstrair* poderosos teoremas de convergência dentro de um cenário bastante genérico: basta ter um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e boa vontade. Consequentemente, a fim de *aplicar* os resultados da Teoria da Medida num determinado contexto, *precisa-se* construir uma medida[104], o que *quase sempre* exige recursos nem tão elementares da... Topologia Geral. Portanto, dado o escopo do presente texto, não faz sentido desenvolver a perspectiva abstrata da Teoria da Medida, de modo que o leitor interessado deve conferir as referências já mencionadas sobre o tema – ou os breves exercícios da seção. Por outro lado, faz sentido abordar algumas aplicações da Topologia Geral no processo de construção de medidas: para isso, confira a Seção 5.3.

[104] A situação não é tão diferente de estudar Álgebra Linear sobre espaços vetoriais arbitrários: na hora de aplicar tais resultados a um determinado problema, a primeira coisa a fazer é mostrar que o problema envolve espaços vetoriais. A diferença, no caso, é que construir estruturas vetoriais é bem menos penoso do que construir medidas.

Exercícios complementares da seção

Álgebra Universal

Nos próximos exercícios, a menos de menção contrária, $\mathscr{L}$ denota uma linguagem algébrica.

Exercício K.38. Seja $\mathcal{V}$ um conjunto de variáveis.

a) Para uma $\mathscr{L}$-álgebra A e $\mathscr{L}$-termos σ e τ, mostre que $A \models \sigma \approx \tau$ se, e somente se, $\sigma^A = \tau^A$.

b) Mostre que $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é uma $\mathscr{L}$-álgebra com a seguinte propriedade (universal): para qualquer função $u\colon \mathcal{V} \to A$, onde A é uma $\mathscr{L}$-álgebra, existe um único $\mathscr{L}$-morfismo $\widetilde{u}\colon \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to A$ que torna o diagrama a seguir comutativo,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \arrow[r, dashed, "\widetilde{u}"] & A \\ \mathcal{V} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

i.e., $\widetilde{u} \circ i = u$. Dica: essencialmente, as operações em $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ são as concatenações usadas na própria construção de $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$; para a segunda parte, trate u como uma atribuição de valores e faça $\widetilde{u}(\tau) := \tau^A(u)$ para cada $\tau \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$.

c) Mostre que $A \models \sigma \approx \tau$ se, e somente se, $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$ para todo $\mathscr{L}$-morfismo $\varphi\colon \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to A$. Dica: se $\sigma^A = \tau^A$, então $\sigma^A(u) = \tau^A(u)$ para toda função $u\colon \mathcal{V} \to A$, e estas caracterizam os morfismos $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to A$, em virtude do item anterior. ■

Exercício K.39. Sejam $\mathscr{K}$ uma classe de $\mathscr{L}$-álgebras, cujos membros serão chamados de $\mathscr{K}$-álgebras. Para um conjunto X fixado, diz-se que $K \in \mathscr{K}$ é uma **$\mathscr{K}$-álgebra livre sobre** X se existir uma função $\mu\colon X \to K$ tal que para toda $\mathscr{K}$-álgebra $A \in \mathscr{K}$ dotada de uma *função* $f\colon X \to A$ existe um único $\mathscr{L}$-morfismo $F\colon K \to A$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "F"] & A \\ X \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

i.e., tal que $F \circ \mu = f$.

a) Mostre que se K e K' forem $\mathscr{K}$-álgebras livres sobre X, então existe um único $\mathscr{L}$-isomorfismo $K \to K'$. Dica: $\mathrm{Id}_K\colon K \to K$ é o único morfismo de K em K, de modo que a composição entre os dois (únicos) morfismos $K \to K'$ e $K' \to K$ só pode ser Id_K; proceda analogamente com K'.

b) Mostre que $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é *a* $\mathscr{L}$-álgebra livre sobre $\mathcal{V}$. Observação: o uso do artigo definido "a" fica justificado pelo item anterior.

c) Seja $K \in \mathscr{K}$ uma $\mathscr{K}$-álgebra livre sobre X. Mostre que se existir $C \in \mathscr{K}$ com $|C| \geq 2$, então μ é injetora. Dica: note que se μ não fosse injetora, existiriam $x \neq x'$ em X com $\mu(x) = \mu(x')$; o que ocorreria então com uma função $f\colon X \to C$ tal que $f(x) \neq f(x')$? ■

Exercício K.40. Sejam $\mathscr{L}$-álgebras[105] A e B, e considere $A \times B$ com a $\mathscr{L}$-estrutura do Exemplo K.2.16.

a) Mostre que as projeções $\pi_A\colon A \times B \to A$ e $\pi_B\colon A \times B \to B$ são $\mathscr{L}$-morfismos.

b) Mostre que se C é uma $\mathscr{L}$-álgebra dotada de $\mathscr{L}$-morfismos $f\colon C \to A$ e $g\colon C \to B$, então existe um único $\mathscr{L}$-morfismo $(f, g)\colon C \to A \times B$ com $\pi_A \circ (f, g) = f$ e $\pi_B \circ (f, g) = g$. Dica: já existe uma única *função* com tais propriedades; basta mostrar que ela é um $\mathscr{L}$-morfismo. ■

[105] Na verdade, o resultado enunciado vale para produtos arbitrários e, mais geralmente, para linguagens de primeira ordem quaisquer.

Exercício K.41. Uma classe $\mathscr{K}$ de $\mathscr{L}$-álgebras é chamada de **classe equacional**[106] se existe uma família $\Sigma \subseteq \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \times \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ de pares de termos (*identidades*) tais que $K \in \mathscr{K}$ se, e somente se, $K \models \sigma \approx \tau$ para cada identidade $(\sigma, \tau) \in \Sigma$.

a) Convença-se de que as classes dos semigrupos, monoides, grupos, anéis e módulos sobre um anel são classes equacionais.

b) Mostre que se $\mathscr{K}$ é uma classe equacional e $A, B \in \mathscr{K}$, então $A \times B \in \mathscr{K}$. Dica: note que

$$\sigma^{A\times B}(u) = \widetilde{u}(\sigma) = (\widetilde{u_A}(\sigma), \widetilde{u_B}(\sigma)) = \left(\sigma^A(u_A), \sigma^B(u_B)\right) = \left(\tau^A(u_A), \tau^B(u_B)\right) = \ldots$$
$$\ldots = \tau^{A\times B}(u),$$

onde $u\colon \mathcal{V} \to A \times B$ é uma atribuição qualquer, $u_A := \pi_A \circ u$, $u_B := \pi_B \circ u$, e os morfismos $\widetilde{u}$, $\widetilde{u_A}$ e $\widetilde{u_B}$ são tomados como no item (b) do Exercício K.38.

c) Mostre que as classe dos domínios e dos corpos não são equacionais.

d) Sejam A um conjunto e B uma $\mathscr{L}$-álgebra. Mostre que se $\mathscr{K}$ é uma classe equacional com $B \in \mathscr{K}$, então $B^A \in \mathscr{K}$. Dica: generalize o item (b).

e) No item anterior, suponha, adicionalmente, que A também seja $\mathscr{L}$-álgebra. Considerando $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(A, B)$ a coleção dos $\mathscr{L}$-morfismos entre A e B, é correto afirmar que $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(A, B)$ é $\mathscr{L}$-subálgebra de B^A? Dica: pense no caso de anéis.

f) No item anterior, mostre que se $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(A, B)$ é $\mathscr{L}$-subálgebra de B^A, então $s_B(c_B, \ldots, c_B) = c_B$ para quaisquer símbolos de operação $c, s \in \mathscr{L}$ com aridades 0 e $n > 0$, respectivamente.

g) Determine condições sobre B a fim de que $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(A, B)$ seja $\mathscr{L}$-subálgebra de B^A.

h) Mostre que classes equacionais são *fechadas por subálgebras*, i.e.: se $C \in \mathscr{K}$ e $D \subseteq C$ é $\mathscr{L}$-subálgebra de C, então $D \in \mathscr{K}$. Em particular, conclua que se $B \in \mathscr{K}$ para uma classe equacional $\mathscr{K}$ e $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(A, B)$ satisfaz as condições do item anterior, então $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(A, B) \in \mathscr{K}$ para qualquer $\mathscr{L}$-álgebra A.

i) Mostre que se A e B são grupos (resp. módulos), então $\mathrm{Mor}(A, B)$ é um grupo (resp. módulo). Dica: use os itens anteriores.

j) Suponha que uma classe $\mathscr{K}$ seja fechada por subálgebras. Mostre que se existir uma $\mathscr{K}$-álgebra livre $\mu\colon X \to K$ sobre X, então para cada $Y \subseteq X$, a subálgebra $\langle \mu[Y] \rangle \subseteq K$ é uma $\mathscr{K}$-álgebra livre sobre Y. Dica: basta tomar $\mu'\colon Y \to \langle \mu[Y] \rangle$ como a restrição da função μ, já que qualquer função $g\colon Y \to A$ pode ser arbitrariamente estendida à uma função $f\colon X \to A$; em algum momento, será útil lembrar da Proposição K.2.25. ■

Exercício K.42. Sejam $\mathcal{V}$ um conjunto de variáveis e $\mathscr{C}$ uma classe equacional de $\mathscr{L}$-álgebras para alguma família de identidades $\Sigma \subseteq \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \times \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$. Por fim, considere

$$\widetilde{\Sigma} := \{(\sigma, \tau) \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \times \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) : \forall A \in \mathscr{C}\ A \models \sigma \approx \tau\},$$

i.e., a família das identidades satisfeitas por *todas* as álgebras da classe $\mathscr{C}$.

a) Mostre que $\Sigma \subseteq \widetilde{\Sigma}$.

b) Mostre que $\widetilde{\Sigma}$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$. Dica: a relação de igualdade é uma relação de equivalência.

c) Mostre que $\widetilde{\Sigma}$ é uma subálgebra de $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \times \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$. Dica: por indução na complexidade dos termos.

d) Mostre que $(\gamma(\sigma), \gamma(\tau)) \in \widetilde{\Sigma}$ sempre que $\gamma\colon \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é um $\mathscr{L}$-morfismo e $(\sigma, \tau) \in \Sigma$. Dica: use o item c) do Exercício K.38 com paciência.

[106] Textos especializados no assunto costumam chamar tais classes de *varieties*. O leitor não deve confundir isso com as variedades da Geometria: trata-se de um falso cognato com a palavra *manifold*.

e) Seja $K := {}^{\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})}/_{\widetilde{\Sigma}}$. Mostre que se $(\sigma, \tau) \in \Sigma$ e $\alpha\colon \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to K$ é um $\mathscr{L}$-morfismo, então $\alpha(\sigma) = \alpha(\tau)$. Dica: escolha $f(v) \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ para cada $v \in \mathcal{V}$ tal que $\alpha(v) = \overline{f}(v)$, use o Exercício K.38 para obter uma extensão $\gamma\colon \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ e note que deve valer $\mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) = \left\{t \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) : \alpha(t) = \overline{\gamma(t)}\right\}$ (pela Proposição K.2.25); use o item anterior para concluir.

f) Mostre que $K \models \sigma \approx \tau$ para toda identidade $(\sigma, \tau) \in \Sigma$. Dica: é o item anterior, disfarçado pelo item c) do Exercício K.38.

g) Finalmente, mostre que K é uma $\mathscr{C}$-álgebra livre sobre $\mathcal{V}$. Dica: para uma função $f\colon \mathcal{V} \to A$ fixada, note que $\widetilde{\Sigma} \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$, onde $g\colon \mathbb{T}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V}) \to A$ é o único $\mathscr{L}$-morfismo que estende f; encerre com o Teorema K.2.30. ■

Exercício K.43. Seja $\mathscr{C}$ uma classe equacional de $\mathscr{L}$-álgebras. Mostre que para cada conjunto X existe uma $\mathscr{C}$-álgebra livre sobre X. Dica: aplique o exercício anterior adequadamente para $\mathcal{V} \cup X$, e então tome a subálgebra livre correspondente ao subconjunto $X \subseteq \mathcal{V} \cup X$, que existe por $\mathscr{C}$ ser equacional. ■

Exercício K.44. Convença-se de que existem monoides, grupos, anéis e módulos livres sobre qualquer conjunto X. ■

Álgebra Elementar

Exercício K.45 (*A.k.a.* Primeiro Teorema do Isomorfismo)**.** Seja $f\colon G \to H$ um morfismo de grupos. Mostre que ${}^{G}/_{\ker f}$ é isomorfo a $\mathrm{im}\,(f)$ por meio da correspondência $\overline{x} \mapsto f(x)$. Em particular, se f é sobrejetora, então ${}^{G}/_{\ker f}$ e H são grupos isomorfos. ■

Exercício K.46. Enuncie e demonstre versões análogas para anéis e módulos. ■

Exercício K.47. Seja G um grupo.

a) Mostre que G é subgrupo normal de G.

b) Mostre que a interseção de subgrupos normais é um subgrupo normal.

c) Mostre que para um subconjunto $S \subseteq G$, existe $N(S) \subseteq G$ o menor subgrupo normal de G que contém S.

d) Conclua que ${}^{G}/_{N(S)}$ tem a seguinte propriedade universal: $\pi\colon G \to {}^{G}/_{N(S)}$ é um morfismo de grupos com $S \subseteq \ker \pi$ e, se $f\colon G \to H$ é um morfismo de grupos com $S \subseteq \ker f$, então existe um único morfismo de grupos $\overline{f}\colon {}^{G}/_{N(S)} \to H$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$. ■

Exercício K.48. Mostre que o monoide $(\omega, +, 0)$ satisfaz a lei do cancelamento. ■

Exercício K.49. Mostre que o monoide comutativo $(\omega, \cdot, 1)$ **não** satisfaz a lei do cancelamento, ao passo que $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ satisfaz. ■

Exercício K.50. Seja A um anel (comutativo e com unidade, como de costume).

a) Mostre que existe um único morfismo de anéis $i_A\colon \mathbb{Z} \to A$. Em outras palavras, $\mathbb{Z}$ é livre sobre $\emptyset$ na classe dos anéis.

b) Convença-se de que existe um único número natural n tal que $\ker i_A = n\mathbb{Z}$. Observação: a **característica do anel** A é definida como este único $n \geq 0$, e será denotada por $\mathrm{char}\,(A)$.

c) Mostre que $\mathrm{char}\,(A) = 0$ se, e somente se, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n1_A = 0_A$. Em particular, $\mathrm{char}\,(\mathbb{Z}) = 0$.

d) Mostre que $\mathrm{char}\,(A) = n > 0$ se, e somente se, $n = \min\{m \in \mathbb{N} : m \cdot 1_A = 0_A\}$. Em particular, $\mathrm{char}\,({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}) = n$.

e) Seja $\varphi\colon A \to B$ um morfismo de anéis. Mostre que $\mathrm{char}\,(B)$ divide $\mathrm{char}\,(A)$. Em particular, se φ é injetor, então $\mathrm{char}\,(A) = \mathrm{char}\,(B)$. ■

Exercício K.51 (Um anel não-numérico)**.** Seja X um conjunto.

a) Mostre que $(\wp(X), \cup, \emptyset)$ e $(\wp(X), \cap, X)$ são monoides comutativos.

b) Responda rápido: $(\wp(X); \cup, \cap; \emptyset, X)$ é um anel?

c) Mostre que $(\wp(X); \Delta, \cap; \emptyset, X)$ é um anel, onde Δ é a operação que a cada par de subconjuntos $A, B \subseteq X$ associa o conjunto

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

chamado de **diferença simétrica** entre os conjuntos A e B.

d) Quem é o oposto aditivo (i.e., Δ-inverso) de $A \in \wp(X)$? ■

Exercício K.52. Dado um conjunto X, mostre que $\operatorname{char}(\wp(X)) = 2$. ■

Exercício K.53. Pense rápido: o que é um anel com característica 1? ■

Exercício K.54. Sejam X e E conjuntos não-vazios. Dada uma operação $*\colon E \times E \to E$, defina $*^X\colon E^X \times E^X \to E^X$ fazendo $(f *^X g)(x) := f(x) * g(x)$ para quaisquer $f, g \in E^X$ e $x \in X$.

a) Mostre que $(E, *)$ é associativa/comutativa/tem elemento neutro se, e somente se, $\left(E^X, *^X\right)$ é associativa/comutativa/tem elemento neutro, respectivamente.

b) Mostre que se todo $v \in E$ tem $*$-inverso, então toda função $f \in E^X$ tem $*^X$-inverso. Vale a recíproca?

c) Mostre que E é um semigrupo/monoide/grupo/grupo abeliano/anel/anel comutativo se, e somente se, E^X é um semigrupo/monoide/grupo/grupo abeliano/anel/anel comutativo, respectivamente.

d) Suponha que E seja um domínio e $|X| \geq 2$. Mostre que E^X não é um domínio. Dica: se achar difícil pensar em E^X, faça primeiro com $E \times E$, depois $E \times E \times E$... mas lembre-se de que o enunciado **não** pressupõe que X seja finito. ■

Exercício K.55. Fixado um anel A, diremos que um anel B é uma **A-álgebra** se existir um morfismo de anéis $f\colon A \to B$, neste contexto chamado de **morfismo estrutural** da A-álgebra B. Um **morfismo** entre A-álgebras B e C é um morfismo de anéis $h\colon B \to C$ compatível com os morfismos que tornam B e C álgebras *sobre* A: mais precisamente, se $f\colon A \to B$ e $g\colon A \to C$ são os *morfismos estruturais*, então h deve satisfazer $h \circ f = g$.

a) (Para entusiastas de Álgebra Universal) Descreva a classes das A-álgebras como uma classe equacional de álgebras com respeito a uma linguagem algébrica de primeira ordem.

b) Para um conjunto X fixado, mostre que as operações $+$ e $\cdot$ em A^X definidas por[107]

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

para $f, g \in A^X$ e $x \in X$ qualquer, tornam A^X num anel, enquanto a correspondência $a \mapsto \underline{a}$, onde $\underline{a}\colon X \to A$ é tal que $\underline{a}(x) = a$ para todo $x \in X$, elevam A^X ao patamar de A-álgebra. ■

Exercício K.56. Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto, A um anel e M um A-módulo. Para uma função $f\colon \mathcal{I} \to A$, define-se o conjunto $\operatorname{supp}_{\mathcal{I}}(f) := \{i \in \mathcal{I} : f(i) \neq 0_A\}$, que será chamado de **suporte de** f no anel[108].

a) Suponha que f tenha *suporte finito*, i.e., $|\operatorname{supp}_{\mathcal{I}}(f)| < \aleph_0$, e defina

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} f(i) := \sum_{i \in \operatorname{supp}_{\mathcal{I}}(f)} f(i).$$

Mostre que se $g\colon \mathcal{I} \to M$ é uma função, então $\{i \in \mathcal{I} : f(i)g(i) \neq 0_M\}$ é finito, o que permite definir $\displaystyle\sum_{i \in \mathcal{I}} f(i)g(i) := \sum_{i \in \operatorname{supp}_{\mathcal{I}}(f)} f(i)g(i)$.

b) Mostre que um subconjunto $S \subseteq M$ é l.i. se, e somente se, para cada $x \in \langle S \rangle$ existe uma única upla $(x)_S := (x_s : s \in S) \in A^S$ com suporte $\operatorname{supp}_S(x)$ finito satisfazendo $x = \displaystyle\sum_{s \in S} x_s s$.

[107] Observe que no caso $|X| < \aleph_0$, digamos $X := \{1, \ldots, n\}$, a descrição anterior se reduz às regras do tipo $(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 * b_1, \ldots, a_n * b_n)$.

[108] Frequentemente ocorrem outras noções de suporte fora do contexto de anéis.

c) Mostre que $S \subseteq M$ é l.i., então fica bem definido um morfismo injetor de A-módulos $(\bullet)_S \colon \langle S \rangle \to A^S$ dada por $x \mapsto (x)_S$, onde a upla $(x)_S := (x_s : s \in S)$ é tomada como no item anterior. Além disso, $(\bullet)_S$ é um isomorfismo se, e somente se, $|S| < \aleph_0$.

d) Supondo $S \subseteq M$ l.i. e uplas $(x_s : s \in S), (y_s : s \in S) \in A^S$ com suporte finito, mostre que são equivalentes:

(i) $\sum_{s \in S} x_s s = \sum_{s \in S} y_s s$ em $\langle S \rangle$;

(ii) $x_s = y_s$ para todo $s \in S$. ■

Exercício K.57. Para um A-módulo M e um subconjunto $B \subseteq M$, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) B é base de M;

(ii) M é livre sobre B com $i \colon B \to M$ sendo a inclusão;

(iii) a correspondência $\delta_b \to b$ se estende a um isomorfismo de A-módulos $A^{\oplus B} \to M$. ■

Exercício K.58. Mostre que dois espaços vetoriais são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão. Dica: pode ser útil notar que se $\varphi \colon M \to N$ é um isomorfismo e $B \subseteq M$ é uma base de M, então $\varphi[B]$ é base de N. ■

Exercício K.59. Sejam K um corpo e M um K-espaço vetorial. Para um subconjunto $B \subseteq M$ qualquer, mostre que são equivalentes[109]:

(i) B é base de M;

(ii) B é subconjunto l.i. maximal;

(iii) B é subconjunto gerador minimal. ■

Exercício K.60. Para um corpo K e K-espaços vetoriais V e W, mostre a desigualdade $\dim_K \operatorname{Lin}_K(V, W) \geq \dim_K V \cdot \dim_K W$. Em particular, observe que se $\dim_K V < \aleph_0$, então vale a igualdade. ■

Exercício K.61. Para $\mathbb{Q}$-módulos M e N, considere uma função $f \colon M \to N$. Mostre que se f é $\mathbb{Z}$-linear, então f é $\mathbb{Q}$-linear. Dica: mostre que $f\left(\dfrac{1}{b}m\right) = \frac{1}{b}f(m)$ para quaisquer $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $m \in M$, daí use o algoritmo da divisão para concluir. ■

Exercício K.62. Sejam A um anel x um elemento com $x \notin A$.

a) Seja $A[x]$ o anel de polinômios definido no Exemplo K.2.101. Mostre que para cada $p \in A[x]$, existe uma única sequência $(p_n)_{n \in \omega} \in A^\omega$, tal que o conjunto (chamado de *suporte*) $\operatorname{supp}_A(p) := \{n \in \omega : p_n \neq 0_A\}$ é finito e satisfaz $p = \sum_{n \in \omega} p_n x^n$. Dica: trata-se de um modo um pouco mais pomposo de descrever o fato de que $\{x^n : n \in \omega\}$ é base de $A[x]$.

b) Para $p \in A[x] \setminus \{0\}$, mostre que $\operatorname{supp}_A(p)$ tem um elemento máximo. Observação: tal máximo, denotado por $\deg_x p$ ou $\deg p(x)$, é frequentemente xingado de **grau** do polinômio p na indeterminada x, enquanto o coeficiente p_n correspondente é chamado de (coeficiente) **líder** de p; em tais situações, costuma-se escrever p como

$$p_n x^n + \ldots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0 := \sum_{i \leq n} p_i x^i.$$

c) Mostre que se $f, g \in A[x]$ são tais que $f \cdot g \neq 0$, então $\deg_x(f \cdot g) \leq \deg_x f + \deg_x g$. Em particular, se o coeficiente líder de f ou de g não for *divisor de zero*[110], então vale a igualdade.

d) Mostre que $A[x]$ é uma A-álgebra com a função $a \mapsto a$.

[109] Tanto $(i) \Rightarrow (ii)$ quanto $(i) \Rightarrow (iii)$ valem no caso em que K é substituído por um anel A.

[110] Diz-se que $a \in A \setminus \{0_A\}$ é **divisor de zero** se existe $b \neq 0_A$ com $ab = 0_A$. Note que seria completamente imbecil não retirar o 0_A desta definição.

e) Mostre que se $f\colon A \to B$ é uma A-álgebra com $\beta \in B$, então existe um único morfismo de A-álgebras $\operatorname{ev}_\beta(\bullet) : A[x] \to B$ tal que $\operatorname{ev}_\beta(x) = \beta$. Dica: com as notações dos itens anteriores, faça $\operatorname{ev}_\beta(p) = \sum_{n\in\omega} p_n\beta^n$. Observação: o morfismo $\operatorname{ev}_\beta(x)$ é chamado de **morfismo de avaliação** em β.

f) Mostre que $A[x]$ é a A-álgebra livre sobre $X := \{x\}$. Generalize.

g) Fixada uma A-álgebra $f\colon A \to B$, diz-se que uma função $g\colon B \to B$ é **função polinomial** em B com coeficientes em A se existir um polinômio $p \in A[x]$ tal que $g(\beta) = \operatorname{ev}_\beta(p)$ para todo $\beta \in B$. Mostre que a função

$$\begin{aligned} \operatorname{ev}_\bullet(\bullet) : A[x] &\to B^B \\ p &\mapsto \operatorname{ev}_\bullet(p) \end{aligned}$$

é um morfismo de anéis, cuja imagem é precisamente o subanel das funções polinomiais com coeficientes em A

h) Sejam R um anel e polinômios não-nulos $f, g \in R[x]$. Mostre que se o coeficiente líder de g for invertível em R, então existem únicos polinômios $q, r \in R[x]$ satisfazendo

$$f = q \cdot g + r,$$

com $r = 0$ ou $\deg_x r < \deg_x g$. Dica: indução no grau de f.

i) Suponha que A seja subanel de B e $p \in A[x]$ seja um polinômio. Diz-se que $\beta \in B$ é **raiz** do polinômio p se ocorrer $\operatorname{ev}_\beta(p) = 0_B$. Mostre que se $\beta \in B$ é raiz do polinômio $p \in A[x]$, então o polinômio $x - \beta \in B[x]$ divide p em $B[x]$, i.e., existe $q \in B[x]$ tal que $p = (x - \beta) \cdot q$.

j) Mostre que se R é um domínio e $p \in R[x]$ é um polinômio não-nulo, então p tem no máximo $\deg_x p$ raízes. Em particular, se R for infinito, então R é domínio se, e somente se, todo polinômio não-nulo de $R[x]$ tem apenas finitas raízes.

k) Seja B um anel que contém A como subanel. Mostre que se B é um domínio infinito, então o morfismo de anéis $\operatorname{ev}_\bullet(\bullet) : A[x] \to \mathcal{F}(B, B)$ é injetor. Em particular, $A[x]$ é isomorfo ao subanel das funções polinomiais em B com coeficientes em A. Observação: isto permite fingir que polinômios são funções e, por conseguinte, pode-se escrever $p(\beta)$ em vez de $\operatorname{ev}_\beta(p)$ sem peso na consciência. ■

Exercício K.63. Fixado um anel A e um monoide $(\mathcal{X}, *, e)$, mostre que existe uma A-álgebra $A[\mathcal{X}]$ dotada de uma função $i\colon \mathcal{X} \to A[\mathcal{X}]$ com a seguinte propriedade universal: para toda A-álgebra R dotada de um morfismo de monoides $\psi\colon (\mathcal{X}, *, e) \to (R, \cdot, 1_R)$ existe um único morfismo de A-álgebras $\Psi\colon A[\mathcal{X}] \to R$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} A[\mathcal{X}] \arrow[r, dashed, "\Psi"] & R \\ \mathcal{X} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Qual a relação deste animal com o anel de polinômios usual? ■

Exercício K.64. Sejam A um anel e $S \subseteq A$ um subconjunto. Para um anel B, denote por $B^\times$ a coleção dos elementos invertíveis de B. Mostre que existe uma A-álgebra $\rho\colon A \to \mathcal{R}$ tal que se um morfismo de anéis $f\colon A \to B$ for tal que $f[S] \subseteq B^\times$, então existe um único morfismo de anéis $\widetilde{f}\colon \mathcal{R} \to B$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] & B \\ A \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Dica: use as propriedades universais do anel de polinômios e do quociente, juntamente com a proposta de construção de $\mathbb{Q}$ esboçada no Exemplo K.2.102. ■

Exercício K.65. Dados um conjunto $\mathcal{I}$ e uma $\mathcal{I}$-upla $(M_i : i \in \mathcal{I})$ de A-módulos, mostre que $\prod_{i\in\mathcal{I}} M_i$ é um A-módulo com as operações *óbvias*:

$$(u_i)_{i\in\mathcal{I}} + (v_i)_{i\in\mathcal{I}} := (u_i +_i v_i)_{i\in\mathcal{I}} \quad \text{e} \quad a \cdot (u_i)_{i\in\mathcal{I}} := (au_i)_{i\in\mathcal{I}}.$$

Mostre também que

$$\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i := \left\{ f \in \prod_{i\in\mathcal{I}} M_i : |\mathrm{supp}_{\mathcal{I}}(f)| < \aleph_0 \right\} \subseteq \prod_{i\in\mathcal{I}} M_i$$

é submódulo de $\prod_{i\in\mathcal{I}} M_i$, onde $\mathrm{supp}_{\mathcal{I}}(f) := \{i \in \mathcal{I} : f(i) \neq 0_{M_i}\}$. ■

Exercício K.66. Sejam $(X, *, e)$ um monoide e Z um conjunto qualquer. Uma função $\cdot\colon X \times Z \to Z$ é chamada de **ação à esquerda** (de Z) se para quaisquer $x, y \in X$ e $z \in Z$ ocorrer $x \cdot (y \cdot z) = (x * y) \cdot z$ e $e \cdot z = z$. Em tal situ*ação*, diz-se que o monoide X *age à esquerda*[111] de Z. A definição de **ações à direita** é a mesma, só que vista num espelho.

a) Mostre que as *notações multiplicativa e aditiva* definem ações à direita e à esquerda de qualquer grupo. Mais precisamente: $(g, m) \mapsto g^m$ e $(m, g) \mapsto mg$ definem ações $G \times \mathbb{Z} \to G$ (à direita) e $\mathbb{Z} \times G \to G$ à esquerda.

b) Para um A-módulo M, mostre que a multiplicação $A \times M \to M$ é uma ação à esquerda do monoide multiplicativo $(A, \cdot, 1)$ sobre M.

c) Mostre que se $\sigma\colon X \to Z^Z$ for um *morfismo de monoides*, então a correspondência $X \times Z \to Z$ dada por $(x, z) \mapsto \sigma(x)(z)$ define uma ação de X à esquerda de Z. Dica: note que $\sigma(x * x') = \sigma(x) \circ \sigma(x')$ e $\sigma(e) = \mathrm{Id}_Z$.

d) Mostre que se $X \times Z \to Z$ é uma ação, então a correspondência

$$\begin{aligned} x \mapsto \psi(x)\colon Z &\to Z \\ s &\mapsto xz \end{aligned}$$

define um morfismo de monoides $\psi(\bullet)\colon X \to Z^Z$.

e) Mostre que se $(X, *, e)$ for um grupo, então Z^Z pode ser trocado pelo grupo $\mathbb{S}(Z)$ nos dois itens anteriores. ■

Exercício K.67. Sejam G um *monoide* e X um conjunto dotado de uma ação de G à esquerda. Para cada $x \in X$, o subconjunto $\mathrm{orb}(x) := \{gx \in X : g \in G\}$, é chamado de **órbita de** x.

a) Mostre que $X = \bigcup_{x\in X} \mathrm{orb}(x)$.

b) Mostre que se $y \in \mathrm{orb}(x)$, então $\mathrm{orb}(y) \subseteq \mathrm{orb}(x)$.

c) Mostre que se G é um grupo, então $y \in \mathrm{orb}(x)$ se, e somente se, $x \in \mathrm{orb}(y)$. Conclua que isto define uma relação de equivalência $\sim_G$ em X onde $\overline{x} := \{y \in X : x \sim_G y\}$ é tal que $\overline{x} = \mathrm{orb}(x)$.

d) Por fim, mostre que nas condições do último item, tem-se

$$|X| = \sum_{x\in\mathcal{R}} |\mathrm{orb}(x)|,$$

onde $\mathcal{R} \subseteq X$ é uma classe de representantes da relação $\sim_G$. ■

Exercício K.68. Para um K-espaço vetorial X e funcionais lineares $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$, mostre que $\varphi \in \langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$ se, e somente se, $\bigcap_{j\le n} \ker \varphi_j \subseteq \ker \varphi$. Dica[112]: defina $T\colon X \to K^n$ fazendo $T(x) := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ e use a inclusão dos núcleos para garantir a *boa-definição* do funcional linear $f\colon \mathrm{im}(T) \to K$ dado por $f(T(x)) := \varphi(x)$; observe que uma extensão linear $\overline{f}\colon K^n \to K$ de f garante escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tais que $\overline{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{j\le n} \lambda_j \alpha_j$; conclua que $\varphi = \sum_{j\le n} \lambda_j \varphi_j$. ■

[111] Pois X está “do lado esquerdo” de Z no produto cartesiano $X \times Z$.

[112] Adaptada do Teorema 5.91 em [2].

Botando ordem na álgebra

Nos próximos exercícios, $\mathbb{K}$ denota um corpo ordenado qualquer, enquanto $\mathbb{R}$ denota *a* reta real.

Exercício K.69. Dada uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$, mostre que são equivalentes:

(i) todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente admite supremo;

(ii) todo subconjunto não-vazio e limitado inferiormente admite ínfimo. ■

Exercício K.70. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{K}$ subconjuntos não-vazios e $r \in \mathbb{K}$. Mostre que:

a) se $A \subseteq B$, então $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$;

b) se $r \geq 0$, então $\inf(rA) = r \inf A$ e $\sup(rA) = r \sup A$;

c) se $r \leq 0$, então $\inf(rA) = r \sup A$ e $\sup(rA) = r \inf A$;

d) se $x \geq 0$ para todo $x \in A \cup B$, então $\inf(AB) = \inf A \inf B$ e $\sup(AB) = \sup A \sup B$;

e) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. ■

Exercício K.71. Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{K}$ corpos ordenados, com $\mathbb{A}$ arquimediano e $\mathbb{K}$ completo. Mostre que se $\varphi \colon \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ é um morfismo de corpos ordenados, então $\varphi(q_{\mathbb{A}}) = q_{\mathbb{K}}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Conclua que existe um único morfismo de corpos ordenados da forma $\mathbb{A} \to \mathbb{K}$. Dica: note que $\varphi(a) = \sup_{\mathbb{K}}\{q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K} : q_{\mathbb{A}} < a\}$ para cada $a \in \mathbb{A}$. ■

Exercício K.72. Seja $\mathbb{T}$ uma ordem total, separável, completa e sem extremos, como no Teorema K.2.125. Mostre que se $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{T}$ é um subconjunto linearmente denso e $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{Q}$ é um isomorfismo de ordens, então existe um único isomorfismo de ordens $\overline{\varphi} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{\varphi}|_{\mathbb{D}} = \varphi$. ■

Exercício K.73. De modo geral, dada uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$, é possível tomar elementos *artificiais* distintos $p, q \notin \mathbb{P}$ e fazer $\overline{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \cup \{p, q\}$, para daí definir uma ordem parcial $\preceq$ que estende $\leq$, declarando-se $p \preceq x$ e $x \preceq q$ para todo $x \in \mathbb{P}$ e, para $x, y \in \mathbb{P}$, $x \preceq y$ se, e somente se, $x \leq y$. o que resulta em $p = \min \overline{\mathbb{P}}$ e $q = \max \overline{\mathbb{P}}$. A *reta estendida*, definida no Exemplo K.2.126, é a ordem oriunda deste processo, para $\mathbb{P} := \mathbb{R}$.

a) Mostre que um subconjunto não-vazio $S \subseteq \mathbb{R}$ é ilimitado

  (i) inferiormente se, e somente se, $\inf S = -\infty$, e

  (ii) superiormente se, e somente se, $\sup S = +\infty$.

b) Mostre que $\sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$. ■

Exercício K.74. Para $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, os conjuntos

$$[-\infty, \beta) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < \beta\}, \tag{K.26}$$

$$(\alpha, +\infty] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \alpha < x\} \tag{K.27}$$

serão chamados de *intervalos abertos fundamentais* de $\overline{\mathbb{R}}$. Diremos que $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ é um **intervalo aberto** se I for interseção finita de intervalos fundamentais.

a) Mostre que se $I \subseteq \mathbb{R}$ é intervalo aberto, então I é da forma $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Em particular, note que $\emptyset$ é um intervalo aberto contido em $\mathbb{R}$.

b) Verifique as identidades $[-\infty, \beta) \cap \mathbb{R} = (-\infty, \beta)$ e $(\alpha, +\infty] \cap \mathbb{R} = (\alpha, +\infty)$ para quaisquer $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

c) Mostre que se $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ são tais que $a < b$, então o intervalo (a, b) é isomorfo a $(\mathbb{R}, \leq)$, enquanto $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}$ é isomorfo a $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$.

d) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$, então existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ com $a < r < b$. ■

Exercício K.75. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem parcial. Dizemos que um subconjunto $I \subseteq \mathbb{P}$ é um **intervalo** se para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{P}$ valer que $c \in I$ sempre que $a \leq c \leq b$ com $a, b \in I$. Seja então $\mathcal{I}$ uma família não-vazia de intervalos de $\mathbb{P}$. Mostre que $\bigcap \mathcal{I}$ é um intervalo de $\mathbb{P}$. ■

Exercício K.76. Usando a completude de $\mathbb{R}$, mostre que os intervalos não-vazios de $\mathbb{R}$, com respeito à definição de intervalo dada no exercício anterior, admitem precisamente uma das seguintes formas:

(i) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, o intervalo *aberto* e limitado de extremos a e b, caso em que o intervalo é limitado, mas seus ínfimo e supremo não pertencem ao intervalo;

(ii) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, o intervalo limitado "fechado" em a e "aberto" em b, caso em que o intervalo é limitado, mas apenas o seu ínfimo pertence ao intervalo;

(iii) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, o intervalo limitado "aberto" em a e "fechado" em b, análogo ao anterior;

(iv) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, o intervalo **fechado** e limitado de extremos a e b; caso em que o intervalo é limitado e contém tanto o ínfimo quanto o supremo;

(v) $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, o intervalo *aberto* e ilimitado inferiormente de extremo b, caso em que o intervalo é limitado apenas superiormente, mas seu supremo não pertence ao intervalo;

(vi) $(-\infty, b]$, $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ e $[a, +\infty)$ têm nomenclaturas, definições e justificativas análogas aos anteriores. ■

Observação K.2.149. Em geral, não se escreve (a, b) com $b \leq a$ pois, em tais situações, $(a, b) = \emptyset$. Futuramente, veremos que os intervalos de $\mathbb{R}$ são, precisamente, os seus subconjuntos *conexos*. Mas não há razão para adiantar tanto as coisas. △

Exercício K.77. Mostre que $-1_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$ e $\alpha^2 > 0_{\mathbb{K}}$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$. Conclua que $\mathbb{C}$ não admite uma ordem que o torne um corpo ordenado. ■

Exercício K.78. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ elementos quaisquer.

a) Mostre que $\inf\{x \in \mathbb{K} : x > 0_{\mathbb{K}}\} = 0_{\mathbb{K}}$.

b) Conclua que se para todo $\varepsilon > 0_{\mathbb{K}}$ ocorrer $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, então $\alpha = \beta$. ■

Exercício K.79. Seja $f \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ a função dada pela regra $f(x) := x^2$.

a) Mostre que se $x > y > 0_{\mathbb{K}}$, então $f(x) > f(y)$.

b) Mostre que se $x < y < 0_{\mathbb{K}}$, então $f(x) > f(y)$.

c) Mostre que se $x > 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 > x$ e, se $0_{\mathbb{K}} < x < 1_{\mathbb{K}}$, então $x^2 < x$. ■

Exercício K.80. Sejam $\delta \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\delta > -1_{\mathbb{K}}$ e $n > 0$, então vale a *desigualdade de Bernoulli*: $(1_{\mathbb{K}} + \delta)^n \geq 1_{\mathbb{K}} + n_{\mathbb{K}}\delta$. Dica: $1_{\mathbb{K}} + \delta > 0_{\mathbb{K}}$ e $n_{\mathbb{K}}\delta^2 \geq 0_{\mathbb{K}}$. ■

Exercício K.81. Mostre que a relação $\leq$ definida em $\mathbb{K}^X$ por $f \leq g$ se, e somente se, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, é ordem (parcial) no $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}^X$, para qualquer conjunto $X \neq \emptyset$. Quando ela é total? ■

O problema da medida/integração

Exercício K.82 (Lebesgue[113]). Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, considere a família $\mathcal{B}[a, b]$ composta por todas as funções *limitadas* da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, onde se diz que f é **limitada** se existir $M \in \mathbb{R}_{>0}$ com $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Vamos *assumir*, para cada par a, b de números reais com $a \leq b$, a existência de uma função

$$\int_a^b : \mathcal{B}[a, b] \to \mathbb{R},$$

chamada de **integral**, que cumpra as seguintes exigências para quaisquer $c, h \in \mathbb{R}$:

$(\mathbb{I}_1)$ $\displaystyle\int_a^b (f) = \int_{a+h}^{b+h} (f \circ (\mathrm{I} - \underline{h}))$, onde $\mathrm{I}(x) := x$ e $\underline{h}(x) := h$ para cada $x \in [a + h, b + h]$;

[113] Trata-se de uma adaptação da abordagem axiomática que levou Lebesgue a perceber traços de como as noções de medida deveriam ser desenvolvidas de modo a renderem uma *boa* teoria de integração. Uma abordagem axiomática semelhante foi elaborada por Percy Danniel e generalizada por Marshall Stone. O leitor interessado pode conferir o último capítulo do *Real Analysis* [96], de Halsey Royden.

($\mathbb{I}_2$) $\displaystyle\int_a^b(f)+\int_b^c(f)=\int_a^c(f)$ sempre que f estiver definida e limitada em $[a,c]$;

($\mathbb{I}_3$) $\displaystyle\int_a^b(f+g)=\int_a^b(f)+\int_a^b(g)$ para quaisquer $f,g\in\mathcal{B}[a,b]$;

($\mathbb{I}_4$) se $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b(f)\geq 0$;

($\mathbb{I}_5$) $\displaystyle\int_0^1(\underline{1})=1$, onde $\underline{1}\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ é a função constante com valor 1;

($\mathbb{I}_6$) se $(f_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de funções $\mathcal{B}[a,b]$ de tal forma que $(f_n(x))_{n\in\omega}$ é uma sequência crescente de números reais com $\sup\limits_{n\in\omega}f_n(x):=f(x)\in\mathbb{R}$ para cada $x\in[a,b]$, com $f\in\mathcal{B}[a,b]$, então

$$\sup_{n\in\omega}\int_a^b(f_n)=\int_a^b(f).$$

Observe que em ($\mathbb{I}_1$), a função $f\circ(\mathrm{I}-\underline{h})$ consiste da transalação (do gráfico) da função f: se $x\in[a+h,b+h]$, então existe $d\in[a,b]$ tal que $x=d+h$, de modo que

$$f\circ(\mathrm{I}-\underline{h})(x)=f(\mathrm{I}(x)-\underline{h}(x))=f(x-h)=f(d),$$

o que permite interpretar a identidade exigida como a afirmação de que *a integral de f é invariante por translações*[114]. A exigência ($\mathbb{I}_2$), por sua vez, é bastante intuitiva: a fim de se calcular a integral de f no domínio $[a,c]$, basta realizar tal procedimento em $[a,b]$ e $[b,c]$.

a) Mostre que a condição ($\mathbb{I}_3$) consiste em pedir que $\displaystyle\int_a^b$ seja um morfismo de grupos aditivos. Em particular, $\displaystyle\int_a^b(\underline{0})=0$. Dica: note que $\mathcal{B}[a,b]$ é subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

b) Mostre que ($\mathbb{I}_4$) equivale a pedir que $\displaystyle\int_a^b$ seja crescente com respeito à ordem $\leq$ em $\mathcal{B}[a,b]$ herdada de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ (Exercício K.81), i.e., mostre que $f\leq g\Rightarrow\displaystyle\int_a^b(f)\leq\int_a^b(g)$.

c) Mostre que $\displaystyle\int_a^b$ é um morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos e, por conseguinte, é um morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos[115]. Dica: para a primeira parte, note que tanto $\mathcal{B}[a,b]$ quanto $\mathbb{R}$ são grupos abelianos; para a segunda parte, use o Exercício K.61.

d) Use ($\mathbb{I}_1$), ($\mathbb{I}_2$) e ($\mathbb{I}_5$) para provar que $\displaystyle\int_0^r\underline{1}=\int_{-r}^0\underline{1}=r$ para qualquer número racional[116] $r\geq 0$. Conclua que $\displaystyle\int_a^b\underline{1}=b-a$ sempre que $b-a\in\mathbb{Q}$.

e) Dada uma função $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada, fixemos $l,L\in\mathbb{R}$ tais que $l\leq f(x)<L$ para todo $x\in[a,b]$ e tomemos $l_0,\ldots,l_n\in[l,L]$ com $l_0:=l$, $l_n:=L$ e $l_i<l_{i+1}$ para cada $i<n$.

   (i) Note que a família $\mathcal{P}:=\{[l_i,l_{i+1}):i<n\}$ determina uma partição do intervalo $[l,L)$ e, consequentemente, $f^{-1}\mathcal{P}:=\{f^{-1}[P]:P\in\mathcal{P}\}$ é uma partição de $[a,b]$.

---

[114]Pode ser mais agradável escrever algo como $\displaystyle\int_a^b f(x)=\int_{a+h}^{b+h}f(x-h)$, com a ressalva de que $f(x)$ e $f(x-h)$ apenas abreviam as funções correspondentes, i.e., os valores específicos de $f(x)$ e $f(x-h)$ para certos x e h são irrelevantes. Em tempo: o dx não foi esquecido, afinal não se trata, necessariamente, *da* integral de Riemann.

[115]Na verdade, veremos que se trata de uma função $\mathbb{R}$-linear. No entanto, a demonstração é mais delicada e usa noções topológicas que só serão introduzidas posteriormente (Exercício 2.88).

[116]O resultado também é válido para $r\geq 0$ real mas, novamente, o argumento depende de ferramentas ainda não apresentadas.

(ii) Mostre que a função $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) := \sum_{P\in\mathcal{P}} \min P \cdot \chi_{f^{-1}[P]}(x) \tag{K.28}$$

satisfaz $\varphi \leq f$, onde $\chi_P\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é a função característica de P (como no Exercício K.7). Dica: note que para $x \in [a,b]$, existe um único $P \in \mathcal{P}$ com $x \in f^{-1}[P]$ e, consequentemente, $\varphi(x) = \min P$, com $\min P \leq f(x)$ pois $f(x) \in P$.

(iii) Defina $\|\mathcal{P}\|$ e observe que $0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \|\mathcal{P}\|$ para todo $x \in [a,b]$.

(iv) Finalmente, mostre que $\displaystyle\int_a^b(\varphi) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \min P \int_a^b \left(\chi_{f^{-1}[P]}\right)$. ■

Observação K.2.150. A longa discussão do exercício anterior e, em particular, a desigualdade no penúltimo item, sugerem a possibilidade de controlar a diferença entre $f(x)$ e $\varphi(x)$ por meio da distância entre os pontos consecutivos que determinam a partição $\mathcal{P}$. Assim, se fosse possível obter uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\omega}$ de funções da forma (K.28) nos moldes de $(\mathbb{I}_6)$, resultaria que

$$\int_a^b(f) = \sup_{n\in\omega}\int_a^b(\varphi_n).$$

Conclusão: em vista do último item, basta *atribuir* valores *apropriados* à integrais da forma $\displaystyle\int_a^b(\chi_A)$ para subconjuntos A de $[a,b]$, que em particular devem concordar com a forma usual de intervalos, já que $\displaystyle\int_a^b \chi_{[a,b]} = b-a$. △

Observação K.2.151. Enquanto as condições $(\mathbb{I}_1), \ldots, (\mathbb{I}_5)$ se verificam corriqueiramente na conhecidíssima *integral de Riemann*, a condição $(\mathbb{I}_6)$ corresponde a uma preservação de convergência que tipicamente falha para tais integrais. Nesse sentido, a integração de Lebesgue corrige tal problema. O leitor interessado em mais discussões pode conferir as referências clássicas de Teoria da Medida, como [43] e [96], ou os mais específicos *A Garden of Integrals* [24], de Frank Burk, e *Theories of Integration*, de Kurtz e Swartz [66]. △

Exercício K.83. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida.

a) Mostre que se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b) Mostre que se $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \omega$, então $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega}\mu(A_n)$. Dica: mostre primeiro que $\mu(A\cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$.

c) Mostre que se também valer $A_n \subseteq A_{n+1}$ para cada n no item anterior, então ocorre a igualdade $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sup_{n\in\omega}\mu(A_n)$. Dica: faça $A'_0 := A_0$ e troque A_{n+1} por $A'_{n+1} := A_{n+1}\setminus A_n$ para cada n; note que $\sum_{j\leq n+1}\mu(A'_j) = \mu(A_{n+1})$.

d) Mostre que se $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \omega$, então $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{A}$.

e) Mostre que se $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \omega$, $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo n e $\mu(A_0) < +\infty$, então $\mu\left(\bigcap_{n\in\omega} A_n\right) = \inf_{n\in\omega}\mu(A_n)$. Dica: com $B_n := A_0 \setminus A_n$, use o item (c) para mostrar que $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \sup_{n\in\omega}\mu(B_n)$; depois, observe que $\mu(A_0) = \sup_{n\in\omega}\mu(B_n) + \mu\left(\bigcap_{n\in\omega} A_n\right)$ com $\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$; use o Exercício K.70 para concluir. ■

Exercício K.84. Mostre que na definição de σ-álgebra, em vez da condição (iii), basta exigir que $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{A}$ sempre que $(A_n)_{n\in\omega}$ for uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. ■

Exercício K.85. Seja $\mathscr{A}$ uma família não-vazia de σ-álgebras sobre X. Mostre que $\bigcap\mathscr{A}$ é σ-álgebra em X. Conclua que para qualquer família $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X, existe $\sigma(\mathcal{E})$ uma σ-álgebra em X com $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ e $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ para qualquer σ-álgebra $\mathcal{A}$ em X satisfazendo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. ■

Definição K.2.152. A σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ do exercício acima é chamada de **σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$**. ¶

Observação K.2.153 (*Spoiler*: σ-álgebra de Borel)**.** Depois que soubermos o que é um *topológico*, a σ-álgebra gerada pelos *abertos* de X será xingada de *σ-álgebra de Borel* de X, e será denotada por $\mathcal{B}_X$, cujos membros serão chamados de **borelianos**. △

Exercício K.86 (Propriedades básicas de uma integral abstrata)**.** Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g\colon X \to [0, +\infty)$ funções mensuráveis.

a) Mostre que se $c \geq 0$, então $cf\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\displaystyle\int cf \, \mathrm{d}\mu = c \int f \, \mathrm{d}\mu$.

b) Mostre que se $f \leq g$, então $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$. ■

K.3 A linguagem das categorias

Tell me who your friends are, and I will tell you who you are.

O provérbio acima, abrasileirado como "*Diga-me com quem andas e eu te tirei quem és*", é uma das máximas mais estapafúrdias sobre o comportamento humano que eu já tive o desprazer de conhecer. Apesar disso, ela encapsula com maestria a *filosofia* subjacente da Teoria de Categorias: a fim de entender um determinado objeto matemático *verdadeiramente*, precisa-se entender suas relações com outros objetos.

Realmente, implícita ou explicitamente, as seções anteriores estão repletas de objetos *caracterizados a menos de isomorfismo* – e, nos casos explícitos, a caracterização se dá em termos da existência e unicidade de morfismos com objetos do mesmo tipo. Nesta seção, veremos o panorama geral que abarca todas essas situações.

Definição K.3.1. Uma categoria $\mathscr{C}$ é um *par* $(\mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \mathrm{Arr}(\mathscr{C}))$, onde $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ são *classes* (no sentido da Seção K.1.2), respectivamente a **classe dos objetos** de $\mathscr{C}$ e a **classe das flechas** (ou **setas** ou **morfismos**) de $\mathscr{C}$, com as propriedades a seguir.

(C_1) Existem *funções de classe* $\mathrm{dom}(\bullet)\colon \mathrm{Arr}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{cod}(\bullet)\colon \mathrm{Arr}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ que a cada seta $f \in \mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ associam os objetos $\mathrm{dom}(f)$ e $\mathrm{cod}(f)$, respectivamente xingados de **domínio** e **codomínio** da seta f. Escreve-se $f\colon a \to b$ ou $a \xrightarrow{f} b$ a fim de abreviar a expressão "$\mathrm{dom}(f) = a$ e $\mathrm{cod}(f) = b$".

(C_2) Para quaisquer $a, b, c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe uma correspondência de classes

$$\circ\colon \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(b, c) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, b) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, c)$$

chamada de **composição**, onde $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x, y)$ denota, para cada $x, y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, a subclasse de $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ composta por todas as setas f da forma $x \to y$, i.e.,

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x, y) := \{f \in \mathrm{Arr}(\mathscr{C}) : \mathrm{dom}(f) = x \text{ e } \mathrm{cod}(f) = y\}, \tag{K.29}$$

a subclasse dos **morfismos de** x **para** y. Mais precisamente, se $f\colon a \to b$ e $g\colon b \to c$ são setas da categoria $\mathscr{C}$, então existe uma terceira seta, $g \circ f\colon a \to c$.

(C_3) A composição é associativa, no seguinte sentido: se $f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ e $h\colon c \to d$ são setas da categoria $\mathscr{C}$, então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

o que faz sentido pois as setas $g \circ f\colon a \to c$ e $h \circ g\colon b \to d$ devem existir pela propriedade anterior e, consequentemente, também existem $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$.

(C_4) Para cada objeto $a \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe uma seta $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Mor}(a, a)$ tal que $f \circ \mathrm{id}_a = f$ e $\mathrm{id}_a \circ g = g$ para quaisquer setas $f, g \in \mathscr{C}$ com $\mathrm{dom}(f) = a$ e $\mathrm{cod}(g) = a$. ¶

Exemplo K.3.2. O exemplo fundamental de categoria é, sem grandes surpresas, a **categoria dos conjuntos**, denotada por $\textsc{Set}$: a classe dos objetos $\mathrm{Obj}\,(\textsc{Set})$ é o universo $\mathbb{V}$ de todos os conjuntos, enquanto $\mathrm{Arr}\,(\textsc{Set})$ é a subclasse de $\mathbb{V}$ cujos membros são as funções entre conjuntos, i.e., ternas da forma (A, f, B) em que f é uma função com $\mathrm{dom}\,(f) = A$ e $\mathrm{im}\,(f) \subseteq B$. Como o leitor já deve suspeitar, as notações adotadas em (C_1), (C_2), (C_3) e (C_4) já indicam como elas devem ser interpretadas em $\textsc{Set}$. ▲

Exemplo K.3.3. Fixada uma *classe equacional* $\mathscr{K}$ de $\mathscr{L}$-álgebras[117], obtém-se de maneira natural a categoria cujos objetos são as $\mathscr{K}$-álgebras da classe $\mathscr{K}$ e cujas setas são $\mathscr{L}$-morfismos. Alguns exemplos corriqueiros de categorias dessa natureza: $\textsc{Group}$ (**dos grupos**), $\textsc{Ring}$ (**dos anéis com unidade**), $C\textsc{Ring}$ (**dos anéis comutativos e com unidade**), ${}_A\textsc{Mod}$ (**dos A-módulos**, para um anel A fixado), ${}_k\textsc{Vect}$ (**dos k-espaços vetoriais**), etc. ▲

Exemplo K.3.4. Uma **pré-ordem** $\leq$ num conjunto $\mathbb{P}$ é uma relação binária reflexiva e transitiva. Ocorre que, secretamente, tais animais podem ser interpretados como uma categoria. Para tanto, faz-se $\mathrm{Obj}\,(\mathbb{P}) := \mathbb{P}$, $\mathrm{Arr}\,(\mathbb{P}) := \{(x, y) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} : x \leq y\}$, de modo que uma *seta* $x \to y$ entre $x, y \in \mathbb{P}$ passa a atestar a ocorrência de "$x \leq y$"[118]. Em particular, entre dois objetos desta categoria existe, no máximo, uma seta. Neste caso, a composição de setas traduz a transitividade da relação, cuja associatividade advém da unicidade das setas, enquanto as identidades manifestam a reflexividade. ▲

Exemplo K.3.5 (A categoria das categorias?)**.** Extrapolemos todo o bom senso e consideremos $\textsc{Cat}$, a **categoria das categorias**, cuja *classe* de objetos é, como o nome sugere, $\mathrm{Obj}\,(\textsc{Cat}) := \{\mathscr{C} : \mathscr{C} \text{ é categoria}\}$. O que seria uma seta entre categorias?

Definição K.3.6. Dadas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, uma correspondência $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ com as propriedades acima será chamada de **funtor** (ou **funtor covariante**). Mais precisamente, $\mathcal{F}$ deve satisfazer o seguinte:

(i) $\mathcal{F}(c) \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{D})$ e $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{D})$ para cada $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ e $f \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$, com $\mathrm{dom}\,(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathrm{dom}\,(f))$ e $\mathrm{cod}\,(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathrm{cod}\,(f))$;

(ii) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ sempre que $f \circ g$ estiver definida para $f, g \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$;

(iii) $\mathcal{F}(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(c)}$ para todo $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$. ¶

Agora, se $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $\mathcal{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ são funtores, obtêm-se facilmente um novo funtor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ por meio da *regra* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(\bullet) := \mathcal{G}\,(\mathcal{F}(\bullet))$, i.e.,

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(c) := \mathcal{G}(\mathcal{F}(c)) \quad \text{e} \quad \mathcal{G} \circ \mathcal{F}(f) := \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$$

para quaisquer $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ e $f \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$. Como tal *procedimento* é associativo, a definição da *categoria* $\textsc{Cat}$ se encerra com a observação de que a correspondência $\mathrm{id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, que faz $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}(c) := c$ e $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}(f) := f$ para $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ e $f \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$, é um funtor, qualquer que seja a categoria $\mathscr{C}$, o *funtor identidade* da categoria $\mathscr{C}$. ▲

[117] Confira o Exercício K.41.

[118] Alternativamente, para quem aceita a definição de relações binárias como conjuntos de pares ordenados: $\mathrm{Arr}\,(\mathbb{P}) := \leq$.

Os exemplos acima devem ter sido suficientes para alertar o leitor de que a definição grossa de categoria esconde alguns problemas. O menor deles é a definição de $\mathscr{C}$ como um par $(\mathscr{O}, \mathscr{S})$, onde $\mathscr{O}$ e $\mathscr{S}$ podem ser classes próprias. Lembremo-nos de que na Seção K.1.2, *permitiu-se* a consideração de *classes* da forma $\mathscr{A} := \{x : \varphi(x)\}$ a fim de abreviar afirmações do tipo "x é um conjunto que tem a propriedade φ". Assim, embora escrevamos "$x \in \mathscr{A}$", $\mathscr{A}$ não é um objeto formal de ZFC, i.e., não é um conjunto: na prática, classes são apenas instrumentos psicológicos para tratar de *fórmulas* como se fossem objetos.

Assim, em vez de definir categorias como um *par ordenado de classes* possivelmente próprias, basta exigir que $\mathscr{C}$ seja uma classe munida de uma função de classes (Definição K.1.29) $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \{0, 1\}$, para daí definir $\mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}) := \mathcal{G}^{-1}[\{0\}]$, $\mathrm{Arr}\,(\mathscr{C}) := \mathcal{G}^{-1}[\{1\}]$ e então repetir as demais exigências. O leitor preciosista pode assumir isso daqui em diante.

Desse modo, neste texto, afirmar que $\mathscr{C} := \{x : \varphi(x)\}$ é uma categoria simplesmente abrevia que os conjuntos satisfazendo a condição φ se estruturam de acordo com as exigências (C_1), (C_2), (C_3) e (C_4), cada uma delas determinadas por um número finito de *abreviações*. Até aqui, isso não parece mais perturbador do que permitir discussões sobre a classe de todos os conjuntos ou de todos os números ordinais. Esvaziam-se assim as ressalvas que o leitor possa ter levantado com respeito às categorias apresentadas nos Exemplos K.3.2 e K.3.3. Naturalmente, a categoria do Exemplo K.3.4 é inofensiva, enquanto a categoria de todas as categorias é a mãe de todos os monstros!

Apenas para começo de conversa, a classe de objetos de Cat possui como elementos classes próprias – e não apenas uma quantidade finita como no caso de pares ordenados de classes. Isto viola a convenção de não permitir classes como elementos de outras classes. O segundo problema se desenrola naturalmente: se Cat *fosse* uma categoria, deveria ocorrer Cat $\in$ Cat, ou algo do tipo. Embora isso não contradiga o Axioma da Fundação, dado que Cat *não* é um conjunto, colocamo-nos diante de um embaraço recursivamente perigoso.

Situações como as descritas acima costumam ser chamadas de *problemas de tamanho* (*a.k.a. size issues*), consequências *inevitáveis* da tentativa de formalizar a Teoria de Categorias por meio dos aparatos linguísticos da Teoria dos Conjuntos. Tal inevitabilidade é fruto de uma diferença fundamental de perspectivas: enquanto a linguagem de conjuntos se destina a descrições "microscópicas" dos objetos matemáticos – tornando irrelevante a inexistência de um *conjunto universo* –, categorias tratam de interações "macroscópicas" entre as diversas *estruturas* observadas no cotidiano matemático – tornando inevitável a ideia de uma *categoria das categorias*.

Observação K.3.7. Existem algumas gambiarras técnicas que permitem contornar parcialmente o tipo de encrenca apontado acima – invariavelmente, todas elas extrapolam ZFC[119]. *Grosso modo*, a prática usual consiste em fugir do problema por meio da hierarquização do universo.

Considera-se um conjunto U que ZFC *acredita* ser universo[120] e daí as categorias *básicas* (chamadas U-categorias) passam a ser aquelas compostas por objetos que habitam tal universo, enquanto categorias mais incontroláveis são pensadas como *subconjuntos* de U. Isso permite considerar a categoria (incontrolável) de todas as U-categorias. Todavia, o problema anterior não desaparece: não se pode assegurar uma categoria que represente a categoria de todas as *categorias incontroláveis*. Como resolver isso? Muito simples: acrescenta-se outro universo intermediário, e assim sucessivamente. $\triangle$

[119] O leitor interessado numa discussão mais detalhada pode conferir o texto de Herrlich e Strecker [52].
[120] Porém, *nós* sabemos que U não é o universo.

Apesar da discussão realizada na Observação K.3.7, a postura oficial que adotaremos ainda é a de tratar categorias como mero aparato metateórico/linguístico/abreviativo. Assim, elas serão tomadas como classes (ou *coleções de classes*) de objetos e setas satisfazendo as condições (C_1), (C_2), (C_3) e (C_4), sem distinções explícitas entre quase-categorias ou U-categorias. Por futura conveniência e pedantismo, convém acrescentar mais duas nomenclaturas.

Definição K.3.8. Diremos que uma categoria $\mathscr{C}$ é **localmente pequena** se $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x, y)$ for um conjunto para quaisquer objetos x e y de $\mathscr{C}$. A categoria $\mathscr{C}$ será dita **pequena** no caso mais restritivo em que tanto $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ quanto $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ forem conjuntos. ¶

K.3.1 Reminiscências categoriais

Consideremos uma categoria $\mathscr{C}$ qualquer. A primeira observação, embora elementar, é importante: para cada $a \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, é único o morfismo id_a na condição (C_4): se $i : a \to a$ também satisfaz $i \circ f = f$ e $g \circ i = g$ para quaisquer morfismos $f : x \to a$ e $g : a \to y$, então $i = i \circ \mathrm{id}_a = \mathrm{id}_a$. Por essa razão, id_a é frequentemente chamado de (morfismo) **identidade** de a.

Definição K.3.9. Uma seta $f : a \to b$ da categoria $\mathscr{C}$ é chamada de **$\mathscr{C}$-isomorfismo**[121] se existe uma seta $g : b \to a$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_a$ e $f \circ g = \mathrm{id}_b$, situação em que os objetos a e b são ditos **$\mathscr{C}$-isomorfos**. ¶

Em particular, fixado um $\mathscr{C}$-isomorfismo $f : a \to b$, é única a seta $g : b \to a$ que atesta isso: se $g' : b \to a$ também satisfaz $g' \circ f = \mathrm{id}_a$ e $f \circ g' = \mathrm{id}_b$, então

$$g = g \circ \mathrm{id}_b = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \mathrm{id}_a \circ g' = g',$$

o que justifica denotar g *em função de* f.

Definição K.3.10. Classicamente, escreve-se f^{-1} para denotar a seta g acima, que passa a ser xingada de **$\mathscr{C}$-inversa** de f. Como de costume, o sufixo "$\mathscr{C}$-" será abandonado se a categoria $\mathscr{C}$ estiver clara pelo contexto. ¶

Exemplo K.3.11. Secretamente, sempre que o termo "isomorfismo" é usado, existe uma categoria subjacente em que o isomorfismo é uma instância da definição anterior. Em SET, por exemplo, os SET-isomorfismos são precisamente as bijeções. Em particular, como a inversa de um isomorfismo é um isomorfismo, *redescobrimos* que a inversa de uma bijeção é bijeção.

Na verdade, como todo conjunto pode ser pensado como uma $\emptyset$-estrutura (algébrica!), a caracterização dos SET-isomorfismos é uma consequência da Proposição K.2.15 que, na verdade, classifica todos os $\mathscr{K}$-isomorfismos de qualquer classe/categoria equacional de álgebras: isomorfismos de grupos (magmas, semigrupos, anéis, módulos, etc.) são precisamente os morfismos bijetores entre tais estruturas. ▲

Exemplo K.3.12. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem parcial, que será tratada como categoria (Exemplo K.3.4). *Aqui*, dois objetos $x, y \in \mathbb{P}$ são $\mathbb{P}$-isomorfos se, e somente se, $x = y$. De fato, como uma seta da forma $x \to y$ corresponde à desigualdade $x \leq y$, resulta que a ocorrência de $x \to y$ e $y \to x$ implica em $x = y$. ▲

[121] Ou **$\mathscr{C}$-iso** para os $\mathscr{C}$-íntimos.

Dados dois objetos x e y da categoria $\mathscr{C}$, escreveremos $x \simeq_{\mathscr{C}} y$ para indicar que x e y são $\mathscr{C}$-isomorfos. Moralmente, isto determina uma relação de equivalência em $\mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$:

Proposição K.3.13. *Se $x, y, z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$, então*

(iso$_1$) $x \simeq_{\mathscr{C}} x$,

(iso$_2$) $x \simeq_{\mathscr{C}} y \Rightarrow y \simeq_{\mathscr{C}} x$, *e*

(iso$_3$) $x \simeq_{\mathscr{C}} y$ *e* $y \simeq_{\mathscr{C}} z \Rightarrow x \simeq_{\mathscr{C}} z$.

Demonstração. As afirmações seguem, respectivamente, dos seguintes fatos: id_x é iso; se f é iso, então f^{-1} é iso; se $f\colon x \to y$ e $g\colon y \to z$ são isos, então $g \circ f$ é iso pois

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_z$$

e, analogamente, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_x$. □

Observação K.3.14 (Funtores e isomorfismos)**.** Um funtor (covariante) $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ pode ser usado para detectar quando dois objetos $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ não são isomorfos. De fato, basta que $F(a)$ e $F(b)$ não sejam $\mathscr{D}$-isomorfos para concluir que a e b não são $\mathscr{C}$-isomorfos, em vista da

Proposição K.3.15. *Se $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor e $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ são $\mathscr{C}$-isomorfos, então $F(a)$ e $F(b)$ são $\mathscr{D}$-isomorfos.*

Demonstração. Se $f\colon a \to b$ é um $\mathscr{C}$-isomorfismo, então $F(f)\colon F(a) \to F(b)$ é um $\mathscr{D}$-isomorfismo, pois $\mathrm{id}_a = F(f^{-1} \circ f) = F(f^{-1}) \circ F(f)$ e $\mathrm{id}_b = F(f \circ f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1})$. □

Essa abordagem costuma ser vantajosa quando a categoria $\mathscr{D}$ é mais amigável do que a categoria $\mathscr{C}$: em vez de verificar se $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ são $\mathscr{C}$-isomorfos, investiga-se a situação de $F(a)$ e $F(b)$ em $\mathscr{D}$; se não existirem $\mathscr{D}$-isos entre $F(a)$ e $F(b)$, então não há como a e b serem $\mathscr{C}$-isomorfos. Infelizmente, apenas resultados *negativos* são confiaveis, já que $F(a)$ e $F(b)$ podem ser $\mathscr{D}$-isomorfos mesmo que a e b não sejam... △

Exemplo K.3.16 (Produtos categoriais)**.** Vamos generalizar a noção de produto cartesiano para uma categoria qualquer. Dados objetos $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$, suponha que exista um objeto $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ com as seguintes propriedades:

(prc$_1$) existem setas $p_a\colon c \to a$ e $p_b\colon c \to b$, chamadas de projeções;

(prc$_2$) se $x \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ é um objeto com setas $f\colon x \to a$ e $g\colon x \to b$, então existe uma única seta $h\colon x \to c$ tal que $p_a \circ h = f$ e $p_b \circ h = g$.

O leitor que se aventurou pela Seção K.2 já deve ter notado que as informações acima podem ser enunciadas de modo mais sucinto por meio de um diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & c \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

Acima, as setas "contínuas" entre os objetos indicam as setas de (prc$_1$) e (prc$_2$), enquanto a seta pontilhada h indica que ela é a única a tornar o *diagrama comutativo*, i.e., a única a permitir que os "caminhos" $x \xrightarrow{f} a$ e $x \xrightarrow{g} b$ sejam percorridos pelos "desvios" $x \xrightarrow{h} c \xrightarrow{p_a} a$ e $x \xrightarrow{h} c \xrightarrow{p_b} b$, respectivamente.

Na categoria $\textsc{Set}$, sabemos muito bem quem pode fazer o papel de C para certos conjuntos A e B: toma-se $C \coloneqq A \times B$, com $p_A \coloneqq \pi_A \colon A \times B \to A$ e $p_B \coloneqq \pi_B \colon A \times B \to B$ as projeções usuais. Observe que para um conjunto X fixado munido de funções $f \colon X \to A$ e $g \colon X \to B$, a seta $h \colon X \to A \times B$ da definição acima é obtida pela correspondência $x \mapsto (f(x), g(x))$, como discutido em (K.1.41).

Definição K.3.17. Um objeto $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ munido de setas $p_a \colon c \to a$ e $p_b \colon c \to b$ satisfazendo as condições (prc$_1$) e (prc$_2$) costuma ser chamado de (um) **produto categorial** de a e b, perigosamente denotado por $a \times b$. ¶

O perigo dessa notação reside em dois pontos: as setas p_a e p_b são importantes, de modo que seria mais honesto dizer que $a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$ é o produto categorial entre a e b; o segundo, e mais delicado, está no uso do artigo definido "o": *um* produto, caso exista, não é, necessariamente, único.

De fato, mesmo no ambiente de $\textsc{Set}$, observe que $P \coloneqq (A \times \{0\}) \times (B \times \{0\})$ ainda satisfaz as condições (prc$_1$) e (prc$_2$): dessa vez, a função $h \colon X \to P$ deve ser dada por $h(x) \coloneqq ((f(x), 0), (g(x), 0))$. Mais geralmente, qualquer conjunto Q em bijeção com $A \times B$ merece ser chamado, em $\textsc{Set}$, de produto categorial de A e B, sintoma de *um* fenômeno análogo observado em qualquer categoria – e que será discutido em breve. ▲

Definição K.3.18. Um objeto u de uma categoria $\mathscr{C}$ é chamado de **inicial** se para todo objeto $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ existe uma única seta $u \to c$. De modo *dual*, u é chamado de (objeto) **final** (ou **objeto terminal**) se para todo objeto $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ existe uma única seta $c \to u$. Em ambos os casos, diremos que u é um **objeto universal** da categoria $\mathscr{C}$ – o que não parece ser uma terminologia padrão. ¶

Decorre da definição de categorias que se $u \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ é um objeto universal, então id_u é a única seta da forma $u \to u$: por um lado, tal seta deve existir por conta de (C$_4$); por outro lado, existe apenas uma seta da forma $u \to u$, devido à universalidade de u. Consequentemente, quaisquer dois objetos iniciais (ou finais) da categoria $\mathscr{C}$, caso existam, são necessariamente isomorfos. Embora elementar, isto merece destaque.

Proposição K.3.19. *Sejam $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$, com a inicial em $\mathscr{C}$. Então b é objeto inicial da categoria $\mathscr{C}$ se, e somente se, a e b são $\mathscr{C}$-isomorfos.*

Demonstração. Se a e b são iniciais, então existem únicas setas $f \colon a \to b$ e $g \colon b \to a$, donde segue que $f \circ g$ é uma seta da forma $b \to b$, enquanto $g \circ f$ é uma seta da forma $a \to a$. Pela discussão que antecede esta proposição, resulta que $f \circ g = \mathrm{id}_b$ e $g \circ f = \mathrm{id}_a$, i.e., a e b são isomorfos. Reciprocamente, seja $\psi \colon b \to a$ um isomorfismo. Para $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ fixado, a hipótese de a ser inicial diz que existe uma única seta $h \colon a \to c$ e, consequentemente, $h \circ \psi$ é uma seta da forma $b \to c$. Se $h' \colon b \to c$ é outra seta, então $h' \circ \psi^{-1}$ é uma seta da forma $a \to c$, que deve ser igual a h por a ser objeto inicial. Logo,

$$h' \circ \psi^{-1} = h \Rightarrow (h' \circ \psi^{-1}) \circ \psi = h \circ \psi \Rightarrow h' = h \circ \psi,$$

mostrando que $h \circ \psi$ é a única seta da forma $b \to c$, como queríamos. □

É claro que a versão análoga da proposição acima, obtida da substituição do termo “inicial” por “final”, ainda é verdadeira. O leitor cético pode repetir a prova acima num espelho para verificar tal afirmação ou, se tiver um pouco de paciência, esperar pela discussão futura sobre *categoriais duais*. Por ora, convém revelar que as duas definições acima de fato capturam a essência das construções *universais*.

Exemplo K.3.20. Fixado um anel A, o A-módulo nulo $\{0\}$ é simultaneamente objeto inicial e final da categoria ${}_A\mathrm{Mod}$: fixado um A-módulo M, o único mapa A-linear da forma $\{0\} \to M$ é o que associa $0 \mapsto 0_M$, enquanto o único mapa A-linear da forma $M \to \{0\}$ faz $m \mapsto 0$ para todo $m \in M$. ▲

Exemplo K.3.21. Conforme discutido na Observação K.55, $\mathbb{Z}$ é um objeto inicial da categoria Ring. Como acima, o anel trivial $\{0\}$ é objeto final de Ring. ▲

Exemplo K.3.22. Fixada uma categoria $\mathscr{C}$ e um objeto $c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, vamos cozinhar uma nova categoria *em cima de* c. Denotemos por $(c \to \mathscr{C})$ a categoria definida da seguinte forma:

- os objetos são todas as setas $f \in \mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ tais que $\mathrm{dom}(f) = c$;
- um morfismo $p\colon f \to g$ entre objetos f e g da categoria $(c \to \mathscr{C})$ é uma seta $p\colon \mathrm{cod}(f) \to \mathrm{cod}(g)$ de $\mathscr{C}$ tal que $p \circ f = g$;
- a composição entre dois morfismos $p\colon f \to g$ e $q\colon g \to h$ é a composição $q \circ p$ em $\mathscr{C}$ das setas $p\colon \mathrm{cod}(f) \to \mathrm{cod}(g)$ e $q\colon \mathrm{cod}(g) \to \mathrm{cod}(h)$;
- para um objeto $f\colon c \to x$, $\mathrm{id}_f\colon f \to f$ é a seta $\mathrm{id}_{\mathrm{cod}(f)}\colon \mathrm{cod}(f) \to \mathrm{cod}(f)$ da categoria $\mathscr{C}$.

Em outras palavras, $(c \to \mathscr{C})$ tem setas da forma $c \to x$ como objetos, por exemplo $c \xrightarrow{f} x$ e $c \xrightarrow{g} y$, enquanto um morfismo entre tais objetos é uma seta $p\colon x \to y$ que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "p"] & y \\ c \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

As regras de etiqueta exigem a verificação de que $(c \to \mathscr{C})$ é uma categoria, o que significa mostrar que a lei de composição está bem definida, é associativa e dotada de (setas) identidades. Por exemplo, se $x \coloneqq y$ e $f \coloneqq g$ no diagrama acima, então a seta $h \coloneqq \mathrm{id}_x$ torna o mesmo diagrama comutativo, mostrando que $\mathrm{id}_f\colon f \to f$ (definida como id_x) é, realmente, um morfismo de $(c \to \mathscr{C})$. Analogamente, a composição está bem definida pois, se os dois triângulos internos no diagrama abaixo *forem* comutativos ($p \circ f = g$ e $q \circ g = h$),

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "p"] & y \arrow[r, "q"] & z \\ & c \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "g"'] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

então o triângulo externo "maior" também *será* comutativo: algebricamente, isso se expressa por meio das igualdades

$$\underbrace{(q \circ p)}_{\text{assim}} \circ \underbrace{f}_{\text{assado}} = q \circ (p \circ f) = \underbrace{q}_{\text{assado}} \circ \underbrace{g}_{\text{assim}} = h,$$

As demais exigências necessárias (associatividade da composição e neutralidade de id_f) seguem então automaticamente[122]. ▲

Dizemos que uma categoria $\mathscr{K}$ é **subcategoria** da categoria $\mathscr{C}$ se $\mathrm{Obj}(\mathscr{K}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Arr}(\mathscr{K}) \subseteq \mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ e a inclusão $i\colon \mathscr{K} \to \mathscr{C}$, que faz $i(k) := k$ para objetos e setas, for um funtor. A subcategoria $\mathscr{K}$ é **completa** se $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x, y) = \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(x, y)$ para quaisquer objetos x e y de $\mathscr{K}$.

Exemplo K.3.23. Se $\mathscr{K}$ é uma subcategoria de $\mathscr{C}$, pode-se adaptar a construção do exemplo anterior a fim de cozinhar a categoria $(c \xrightarrow{\mathscr{C}} \mathscr{K})$:

- seus objetos são setas de $\mathscr{C}$ da forma $c \to k$, com $k \in \mathrm{Obj}(\mathscr{K})$;
- um morfismo $p\colon f \to g$ entre objetos f e g da categoria $(c \xrightarrow{\mathscr{C}} \mathscr{K})$ é uma seta $p\colon \mathrm{cod}(f) \to \mathrm{cod}(g)$ de $\mathscr{K}$ tal que $p \circ f = g$;
- as regras de composição e identidade são as mesmas de $(c \to \mathscr{C})$.

A única diferença de $(c \to \mathscr{C})$ para $(c \xrightarrow{\mathscr{C}} \mathscr{K})$ é que, na segunda, um morfismo entre os objetos $c \xrightarrow{f} x$ e $c \xrightarrow{g} y$ (com $x, y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{K})$) deve ser uma seta $p\colon x \to y$ da categoria $\mathscr{K}$ que torne comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "p"] & y \\
c \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Uma vez convencidos de que $(c \xrightarrow{\mathscr{C}} \mathscr{K})$ é uma categoria, passa a fazer sentido perguntar sobre a existência de objetos especiais como os definidos anteriormente. Em particular, o que seria um objeto inicial em $(c \xrightarrow{\mathscr{C}} \mathscr{K})$? Ora, pela definição, deve ser uma seta $c \xrightarrow{i} u$ de $\mathscr{C}$, para algum $u \in \mathrm{Obj}(\mathscr{K})$, tal que para qualquer outra seta $c \xrightarrow{f} x$ de $\mathscr{C}$, com $x \in \mathrm{Obj}(\mathscr{K})$, exista uma única seta $\tilde{f}\colon u \to x$ de $\mathscr{K}$ que torne o diagrama abaixo comutativo. Parece familiar?

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & y \\
c \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Fixado um anel comutativo e com unidade A, é *evidente* que ${}_A\textsc{Mod}$ é uma subcategoria de $\textsc{Set}$. Assim, fixado um conjunto X, pode-se considerar a categoria $(X \xrightarrow{\textsc{Set}} {}_A\textsc{Mod})$. O que seria um objeto inicial de tal categoria? Pela discussão acima, deve ser um A-módulo M munido de uma função $i\colon X \to M$ tal que, para qualquer outro A-módulo N munido de uma função $f\colon X \to N$, existe uma única função A-linear $\tilde{f}\colon M \to N$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$. Compare isso com o Exercício K.57.

[122] Mas é instrutivo que o leitor se convença disso sozinho.

As considerações acima podem ser adaptadas para mostrar que anéis de polinômios, grupos livres, localizações e diversas outras construções típicas são exemplos de objetos iniciais de categorias apropriadas. Essa aventura edificante, porém, ficará a cargo do leitor animado. ▲

Exemplo K.3.24. Fixada uma categoria $\mathscr{C}$, sejam $\mathcal{I}$ um conjunto e $\varphi\colon \mathcal{I} \to \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ uma função. Com tais informações, faz sentido considerar a categoria $(\mathscr{C} \to \varphi)$:

- seus objetos são $\mathcal{I}$-uplas $\left(x \xrightarrow{f_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}}$, com $f_i \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$ para cada $i \in \mathcal{I}$;
- um morfismo $p\colon \left(x \xrightarrow{f_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}} \to \left(y \xrightarrow{g_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}}$ é uma seta $p\colon x \to y$ de $\mathscr{C}$ tal que $g_i \circ p = f_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$.

Intuitivamente, cada objeto de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ é um objeto x de $\mathscr{C}$ munido de uma seta $f_i\colon x \to \varphi(i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$: quando $\mathcal{I} := \{0, 1\}$, por exemplo, convém denotar seus objetos como no diagrama abaixo (à esquerda),

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ \varphi(0) & & \varphi(1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[d, "f_i"] \\ \varphi(i) \end{tikzcd} \quad (i \in \mathcal{I}) \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f_i"'] & & y \arrow[dl, "g_i"] \\ & \varphi(i) & \end{tikzcd} \quad (i \in \mathcal{I})$$

o que (in)felizmente não pode ser repetido da mesma forma para um conjunto $\mathcal{I}$ qualquer.

Porém, há um paliativo interessante: pode-se representar um elemento de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ como no diagrama anterior (ao centro) com a ressalva de que $i \in \mathcal{I}$ é qualquer. Uma vantagem imediata dessa abordagem estética está no entendimento de que um morfismo entre dois objetos x e y de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ é apenas uma seta $p\colon x \to y$ em $\mathscr{C}$ tal que o diagrama acima (à direita) seja comutativo para todo $i \in \mathcal{I}$.

Isso permite intuir de modo quase fácil qual deve ser a *lei de composição* entre duas setas $p\colon x \to y$ e $q\colon y \to z$ de $(\mathscr{C} \to \varphi)$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f_i"'] & y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g_i"] & z \arrow[dl, "h_i"] \\ & \varphi(i) & \end{tikzcd} \qquad (i \in \mathcal{I})$$

como ambos os “triângulos” acima são comutativos, i.e., $g_i \circ p = f_i$ e $h_i \circ q = g_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$, segue que o “triângulo” maior é comutativo, ou seja, $h_i \circ (q \circ p) = f_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$, mostrando que $q \circ p$ é uma seta legítima entre os objetos x e z de $(\mathscr{C} \to \varphi)$. A verificação de que isso dá uma composição fidedigna, com identidades e associatividade, torna-se então um exercício simples.

Um objeto final na categoria $(\mathscr{C} \to \varphi)$ deve ser uma $\mathcal{I}$-upla $\left(u \xrightarrow{p_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}}$ tal que para todo objeto $\left(x \xrightarrow{f_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}}$ de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ exista um único morfismo $p\colon x \to u$ nas condições acima. Já vimos isso antes, certo?

Ao substituir $\mathscr{C}$ por Set, o produto cartesiano $\prod_{i\in\mathcal{I}} \varphi(i)$ é um objeto final da categoria $(\textsc{Set} \to \varphi)$. Ao substituir $\mathscr{C}$ por ${}_A\textsc{Mod}$, o produto $\prod_{i\in\mathcal{I}} \varphi(i)$ dos A-módulos $\varphi(i)$ (Exercício K.65), é um objeto final da categoria correspondente $({}_A\textsc{Mod} \to \varphi)$. Fenômenos análogos se verificam em Group, Ring, CRing, etc. Por essa razão, um objeto final da categoria $(\mathscr{C} \to \varphi)$, chamado de **produto categorial** dos objetos $\varphi(i)$, costuma ser denotado por $\prod_{i\in\mathcal{I}} \varphi(i)$. ▲

K.3.2 Codiagramas mutativos e dualidade

Uma curiosa característica das categorias é que *colocá-las* diante de espelhos produz *novas* categorias. Mais precisamente:

Definição K.3.25. Fixada uma categoria $\mathscr{C}$, define-se uma "nova" categoria, denotada por $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ e chamada de **categoria dual** (ou **oposta**) a $\mathscr{C}$, cujos objetos e setas são os mesmos de $\mathscr{C}$, a menos da orientação das setas:

- $\mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) \coloneqq \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$;
- cada seta $a \xrightarrow{f} b$ de $\mathscr{C}$ determina a seta $b \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} a$ de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, denotada apenas por f^{op}, de modo que $(\bullet)^{\mathrm{op}} \colon \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C}) \to \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$ seja uma *bijeção*;
- dadas duas setas $c \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} b$ e $b \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} a$ de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, a composição entre elas é $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} \coloneqq (f \circ g)^{\mathrm{op}}$, o que faz sentido pois a composta $f \circ g \colon a \to b \to c$ está definida em $\mathscr{C}$. ¶

Como de costume, a descrição "formal" acima visa dificultar o entendimento de uma ideia muito simples: $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ consiste precisamente da categoria $\mathscr{C}$, salvo pela troca de cada seta da forma $a \xrightarrow{f} b$ (nativa de $\mathscr{C}$) por uma da forma $b \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} a$ (típica de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$). Isto já foi feito no Exemplo K.1.53, onde associou-se uma ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ à sua ordem inversa $(\mathbb{P}, \geq)$: da perspectiva categorial, $(\mathbb{P}, \geq)$ é a categoria dual de $(\mathbb{P}, \leq)$.

A categoria oposta também nos coloca diante do primeiro exemplo explícito de funtor *contravariante*, que não foi mencionado no Exemplo K.3.2.

Definição K.3.26. Dadas duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, um **funtor contravariante** F é uma correspondência entre os objetos e setas de $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ que a cada seta $f \colon a \to b$ em $\mathscr{C}$ faz corresponder uma seta $F(f) \colon F(b) \to F(a)$ de modo que se tenha:

(i) $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ para qualquer $a \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$; e

(ii) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ para quaisquer setas $f, g \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$ cuja composição $f \circ g$ estiver definida. ¶

Em outras palavras, um funtor contravariante é um funtor que inverte a ordem das setas. Consequentemente, a composição de dois funtores contravariantes resulta num funtor covariante.

Observação K.3.27. Em particular, ao se tomar a categoria oposta de uma categoria $\mathscr{C}$, há um funtor contravariante implícito, $\bullet^{\mathrm{op}} \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, que faz $\bullet^{\mathrm{op}}(c) \coloneqq c$ para cada objeto $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ e $\bullet^{\mathrm{op}}(f) \coloneqq f^{\mathrm{op}}$ para cada seta $f \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$. Logo, pode-se dizer alternativamente que $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor contravariante se $F \circ \bullet^{\mathrm{op}} \colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ for um funtor covariante. △

Exemplo K.3.28. Se $\mathbb{S}$ e $\mathbb{T}$ são ordens, uma função $f \colon \mathbb{S} \to \mathbb{T}$ crescente é o mesmo que um funtor covariante entre as categorias $\mathbb{S}$ e $\mathbb{T}$, enquanto uma função decrescente é um funtor contravariante. ▲

Por falta de mais espectros políticos, dualizar uma categoria duas vezes *retorna* a categoria original, i.e., vale a *igualdade* $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$ para qualquer categoria $\mathscr{C}$. Consequentemente, ao se provar uma afirmação P a respeito de categorias arbitrárias, prova-se de maneira automática a *afirmação dual* de P, fenômeno que costuma ser chamado de **Princípio da Dualidade**.

Consideremos, por exemplo, a afirmação da Proposição K.3.19: "se $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ e a é objeto inicial de $\mathscr{C}$, então b é objeto inicial de $\mathscr{C}$ se, e somente se, $a \simeq_{\mathscr{C}} b$". Simbolicamente, ela pode ser abreviada como segue:

$$\forall a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}) \left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\, \exists!\ f\colon a \to z}_{a \text{ é inicial em } \mathscr{C}} \right) \Rightarrow \left(\left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\, \exists!\ g\colon b \to z}_{b \text{ é inicial em } \mathscr{C}} \right) \Leftrightarrow a \simeq_{\mathscr{C}} b \right). \tag{K.30}$$

Supondo a validade da sentença acima para uma categoria qualquer, ela deve valer, em particular, para a categoria $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Ao reescrever em $\mathscr{C}$ a conclusão aferida em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, obtém-se a sentença

$$\forall a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}) \left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\, \exists!\ f\colon z \to a}_{a \text{ é final em } \mathscr{C}} \right) \Rightarrow \left(\left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\, \exists!\ g\colon z \to b}_{b \text{ é final em } \mathscr{C}} \right) \Leftrightarrow a \simeq_{\mathscr{C}} b \right). \tag{K.31}$$

Essencialmente isso mostra que $\forall \mathscr{C}$ (K.30) $\Rightarrow \forall \mathscr{C}$ (K.31). Se optássemos por assumir (K.31) para toda categoria $\mathscr{C}$, a repetição do argumento acima na *direção oposta* levaria a (K.30), mostrando a recíproca da implicação anterior e, por conseguinte, garantindo

$$\forall \mathscr{C}(\text{K.30}) \Leftrightarrow \forall \mathscr{C}(\text{K.31}).$$

Sintaticamente, a única diferença entre as duas sentenças é a direção das setas. Grosso modo, dada uma sentença P na *linguagem de categorias*, pode-se denotar por P^{op} a sentença obtida a partir de P por meio da "inversão" de todas as setas que ocorrem na sentença P. Em virtude do que se discutiu, é natural xingar P^{op} de **sentença dual** de P.

Observação K.3.29. Dada uma sentença P na linguagem de categorias, nem sempre se verifica $P \Leftrightarrow P^{\mathrm{op}}$. Por exemplo, não é *verdade* que uma categoria dotada de objetos iniciais tenha objetos finais (Exercício K.91), embora a sentença dual da afirmação "$a \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ é objeto inicial de $\mathscr{C}$" seja "$a \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ é objeto final de $\mathscr{C}$". Mais geralmente, e com o linguajar da Subseção K.2.1, tem-se apenas uma equivalência "local":

$$\mathscr{C} \models P \Leftrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \models P^{\mathrm{op}},$$

i.e., uma categoria $\mathscr{C}$ satisfaz P se, e somente se, sua categoria oposta $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ satisfaz a condição dual P^{op}. △

Exemplo K.3.30. Suponha que para certos objetos $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ exista um objeto c que desempenhe o papel do produto categorial $a \times b$ e, como tal, esteja munido de projeções $p_a\colon c \to a$ e $p_b\colon c \to b$ como no Exemplo K.3.16. Qual o *papel* de c na categoria oposta $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$?

Por definição, para cada par de setas $f\colon x \to a$ e $g\colon x \to b$ de $\mathscr{C}$, existe uma única seta $h\colon x \to c$ tal que $p_a \circ h = f$ e $p_b \circ h = g$ (é o diagrama à direita na figura abaixo). Logo, para cada par de setas $f^{\mathrm{op}}\colon a \to x$ e $g^{\mathrm{op}}\colon b \to x$ de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, existe uma única seta $h^{\mathrm{op}}\colon c \to x$ tal que $h^{\mathrm{op}} \circ {p_a}^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}}$ e $h^{\mathrm{op}} \circ {p_b}^{\mathrm{op}} = g^{\mathrm{op}}$ (confira o diagrama à esquerda).

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & c \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x & \\ a \arrow[ur, "f^{\mathrm{op}}"] \arrow[r, "{p_a}^{\mathrm{op}}"'] & c \arrow[u, dashed, "h^{\mathrm{op}}"] & b \arrow[ul, "g^{\mathrm{op}}"'] \arrow[l, "{p_b}^{\mathrm{op}}"] \end{tikzcd}$$

Como *era de se esperar*, em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, o objeto c é munido de *inclusões* ${p_a}^{\mathrm{op}}\colon a \to c$ e ${p_b}^{\mathrm{op}}\colon b \to c$, desempenhando o papel dual do produto: profissionais costumam dizer que c é (um) *coproduto* entre a e b. ▲

Definição K.3.31. Um objeto d de $\mathscr{C}$ é (um) **coproduto categorial** entre a e b se existem setas (*inclusões*) $i_a\colon a \to d$ e $i_b\colon b \to d$ tais que para qualquer par de setas $r\colon a \to x$ e $s\colon b \to x$ existe uma única seta $t\colon d \to x$ com $t \circ i_a = r$ e $t \circ i_b = s$, como no próximo diagrama. ¶

$$\begin{tikzcd}
 & x & \\
a \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "i_a"'] & d \arrow[u, dashed, "t"] & b \arrow[ul, "s"'] \arrow[l, "i_b"]
\end{tikzcd}$$

Como ocorre com o produto, o coproduto categorial, caso exista, é único a menos de isomorfismo: a demonstração disso segue pelo princípio da dualidade, já que *estamos convencidos* de que produtos categoriais são únicos a menos de isomorfismo. Por alusão ao produto, costuma-se denotar um objeto c como acima por $a \amalg b$, o que faria mais sentido se escrevêssemos $a \amalg b$ em vez de $a \times b$. Alternativamente, também é comum encontrar o coproduto entre a e b denotado por $a \oplus b$, numa menção implícita ao que ocorre em contextos algébricos.

Exemplo K.3.32. Em Set, o coproduto entre dois conjuntos A e B é *representado* pela *reunião disjunta* entre A e B, com as inclusões sendo, naturalmente, as *inclusões*. Como nem sempre dois conjuntos são disjuntos, o leitor deve entender tal descrição no mesmo sentido do que foi feito na Definição K.1.114: declara-se $A \amalg B := (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$, explicitamente a reunião entre *cópias disjuntas* dos conjuntos A e B, com as inclusões $i_A\colon A \to A \amalg B$ e $i_B\colon B \to A \amalg B$ dadas por $i_A(a) := (0, a)$ e $i_B(b) := (1, b)$, respectivamente. A verificação da *universalidade* fica a cargo do leitor. É relativamente comum, neste contexto, substituir o símbolo "$\amalg$" por "$\sqcup$" ou "$\dot\cup$". Em particular, se A e B forem disjuntos, então $A \cup B$ também cumpre o papel de coproduto. ▲

O leitor com tendências *Bourbakistas* pode ter se incomodado com a ausência de uma definição mais precisa sobre *o que é um diagrama*, dado que frequentemente temos apelado a tais entidades a fim de justificar diversos argumentos. Um modo efetivo e preguiçoso de definir diagrama é apresentado em [1].

K.3.3 Setas entre setas e naturalidade

Dada uma categoria $\mathscr{C}$, há um modo mais ou menos legítimo de elevar a classe $\operatorname{Arr}(\mathscr{C})$ ao patamar de categoria. *Respire fundo antes de prosseguir.* Como se espera que os objetos de $\operatorname{Arr}(\mathscr{C})$ sejam as setas de $\mathscr{C}$, surge o problema de definir *o que é* uma seta entre duas setas. Faz-se o seguinte: para setas $f\colon a \to b$ e $g\colon a' \to b'$ em $\operatorname{Arr}(\mathscr{C})$, um morfismo entre f e g é um par de setas $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Arr}(\mathscr{C}) \times \operatorname{Arr}(\mathscr{C})$ tal que $\alpha\colon a \to a'$, $\beta\colon b \to b'$ de modo a fazer o diagrama a seguir comutativo,

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & a' \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "\beta"'] & b'
\end{tikzcd}$$

ou seja, com $g \circ \alpha = \beta \circ f$. Note que se $f, g, h \in \operatorname{Arr}(C)$ e $(\alpha, \beta)\colon f \to g$ e $(\gamma, \delta)\colon g \to h$ são setas, então $(\gamma \circ \alpha, \delta \circ \beta)$ é uma seta entre f e h, pois

$$h \circ (\gamma \circ \alpha) = (h \circ \gamma) \circ \alpha = (\delta \circ g) \circ \alpha = \delta \circ (g \circ \alpha) = \delta \circ (\beta \circ f) = (\delta \circ \beta) \circ f,$$

o que em termos de diagramas pode ser visualizado assim:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\alpha"] & a' \arrow[r, "\gamma"] & a'' \arrow[d, "h"] \\
 & & b''
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\alpha"] & a' \arrow[d, "g"] & \\
 & b' \arrow[r, "\delta"'] & b''
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & & \\
b \arrow[r, "\beta"'] & b' \arrow[r, "\delta"'] & b''
\end{tikzcd}
$$

Isto sugere que a regra $(\gamma, \delta) \circ (\alpha, \beta) := (\gamma \circ \alpha, \delta \circ \beta)$ define uma composição em $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ que faz dela uma categoria legítima: a associatividade de tal procedimento decorre da associatividade da composição de $\mathscr{C}$, e é claro que para qualquer $f \in \mathrm{Arr}(\mathscr{C})$, $\mathrm{id}_f := \left(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}, \mathrm{id}_{\mathrm{cod}(f)}\right)$ funciona como uma seta identidade para f com respeito a tal composição. Esta é a ponta do imenso *iceberg* das *transformações naturais*.

Para motivar as ideias, consideremos o seguinte problema: como explicar para um leigo o que é uma seta? Dada a trivialidade do enunciado, vamos acrescentar um complicador: suponha que sejamos *categoristas*, i.e., especialistas em categorias. Agora, temos a obrigação de explicar o que é uma seta da forma $f : a \to b$ sem mencionar os *objetos* a e b, pois tal postura é proibida pelo sindiCATo.

Após alguma reflexão, o leitor não terá dificuldades em perceber que uma seta de $\mathscr{C}$ é apenas um funtor $(\{0, 1\}, <) \to \mathscr{C}$. Como já sabemos que a *classe* de todos os funtores dessa forma constitui a categoria $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ acima, pode-se expressar a resposta com a simplicidade irritante típica dos melhores categoristas[123]: uma seta em $\mathscr{C}$ é apenas um objeto da categoria dos funtores de $(\{0, 1\}, <)$ em $\mathscr{C}$. A grande pergunta vem agora: o que nos impede de considerar categorias de funtores quaisquer? Resposta: nada.

Fixadas duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, vamos denotar por $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ a classe composta pelos funtores da forma $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$. A fim de elevar $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ ao *status* de categoria, precisa-se: definir o que é uma seta entre dois funtores $F, G \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}$; estabelecer um procedimento de composição; garantir que tudo funciona como numa categoria *legítima*. As setas entre funtores são chamadas de *transformações naturais*.

Definição K.3.33. Para funtores $F, G \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, uma **transformação natural de F em G** é uma $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$-upla de $\mathscr{D}$-morfismos $\tau_\bullet := (\tau_c : F(c) \to G(c))_{c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})}$ compatível com os funtores F e G, no seguinte sentido: para cada seta $f : a \to b$ em $\mathscr{C}$ se verifica a identidade $G(f) \circ \tau_a = \tau_b \circ F(f)$, i.e., o ~~quadrado~~ diagrama abaixo é comutativo. ¶

$$
\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(b) \arrow[r, "\tau_b"'] & G(b)
\end{tikzcd}
$$

Seguiremos a tendência mundial de escrever $\tau_\bullet : F \Rightarrow G$ para denotar uma transformação natural como acima. Se $H \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ é outro funtor e $\upsilon_\bullet : G \Rightarrow H$ é uma transformação natural, então $\upsilon_\bullet \circ \tau_\bullet := (\upsilon_c \circ \tau_c : c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}))$ é uma transformação natural de F em H, o que se verifica com os mesmos argumentos utilizados anteriormente para observar que a composição das setas entre setas faz sentido, *mutatis mutandis*. Se $\alpha_\bullet : A \Rightarrow B$, $\beta_\bullet : B \Rightarrow C$ e $\gamma_\bullet : C \Rightarrow D$ são transformações naturais, então para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ vale a igualdade $\gamma_c \circ (\beta_c \circ \alpha_c) = (\gamma_c \circ \beta_c) \circ \alpha_c$, o que garante a associatividade da composição. Finalmente, ao se declarar $\mathrm{id}_{Fc} := \mathrm{id}_{F(c)}$ para cada $c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, obtém-se uma transformação natural $\mathrm{id}_{F_\bullet} : F \Rightarrow F$ que se comporta precisamente como uma identidade com respeito à composição de transformações naturais. Detalhes ficam a cargo do leitor preciosista.

[123]“`X` é apenas um `Y` na categoria `Z`”.

Embora seja quase evidente que a categoria $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ acima realmente generaliza a categoria $\operatorname{Arr}(\mathscr{C})$ com que iniciamos esta subseção, o adjetivo "natural" empregado para designar as transformações entre funtores deve parecer apenas uma chacota para quem nunca teve contato explícito com tais entidades. Ocorre que essa nomenclatura não poderia ser mais apropriada.

Exemplo K.3.34 (E se escrevêssemos $x(f)$ em vez de $f(x)$?)**.** Dados conjuntos X e Y quaisquer e uma função $f\colon X \to Y$, é extremamente comum denotar a imagem de um elemento $x \in X$ por $f(x)$. Esse tipo de notação costuma enfatizar que a função f está fixada num certo contexto enquanto x tem um caráter *variável*.

Alternativamente, pode-se fixar o elemento x e fazer as funções f variarem, o que costuma ser expresso por meio da função $\widehat{x}\colon Y^X \to Y$ que a cada $f\colon X \to Y$ associa o elemento $\widehat{x}(f) := f(x)$. Na prática, troca-se a ordem da escrita: em certo sentido, foi uma *transformação natural* das variáveis.

Com efeito, fixado um conjunto A, considere a correspondência $A^{\bullet}\colon \textsc{Set} \to \textsc{Set}$ dada por $X \mapsto A^X$, i.e., que associa cada conjunto X à família A^X de todas as funções da forma $X \to A$. Essa associação de conjuntos pode ser promovida ao patamar de funtor contravariante: basta fazer uma função $X \xrightarrow{f} Y$ corresponder à função $A^f\colon A^Y \to A^X$, que por sua vez associa uma função $Y \xrightarrow{g} A$ à composta $g \circ f := X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} A$, um membro legítimo de A^X.

Agora, a composição $A^{\bullet} \circ A^{\bullet}\colon \textsc{Set} \to \textsc{Set}$ resulta num funtor covariante que a cada função $f\colon X \to Y$ associa a função $A^{A^f}\colon A^{A^X} \to A^{A^Y}$, que faz $A^{A^f}(\psi) := \psi \circ A^f$ para cada $\psi\colon A^X \to A$. Depois de digerir isso tudo, a reação natural deve ser se perguntar "e daí?". Ocorre que a correspondência $e_X\colon X \to A^{A^X}$, que a cada $x \in X$ associa o mapa $\widehat{x}\colon A^X \to A$, determina uma transformação natural entre o funtor $\mathrm{id}_{\textsc{Set}}(\bullet)\colon \textsc{Set} \to \textsc{Set}$ e o funtor $A^{\bullet} \circ A^{\bullet}\colon \textsc{Set} \to \textsc{Set}$ ou, simbolicamente, $e_{\bullet}\colon \mathrm{id}_{\textsc{Set}}(\bullet) \Rightarrow A^{\bullet} \circ A^{\bullet}$.

É mais difícil se acostumar com todas as notações envolvidas do que efetivamente provar a afirmação feita: para uma função $f\colon X \to Y$ fixada, é suficiente verificar que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[d, "f"'] & A^{A^X} \arrow[d, "A^{A^f}"] \\ Y \arrow[r, "e_Y"'] & A^{A^Y} \end{tikzcd}$$

pois $\mathrm{id}_{\textsc{Set}}(f) := f$. Isto é quase trivial: dados $x \in X$ e $g\colon Y \to A$, deve-se ter

$$\begin{aligned} \left((A^{A^f} \circ e_X)(x)\right)(g) &= \left(A^{A^f}(e_X(x))\right)(g) = \left(A^{A^f}(\widehat{x})\right)(g) = \left(\widehat{x} \circ A^f\right)(g) = \\ &= \widehat{x}\left(A^f(g)\right) = \widehat{x}\,(g \circ f) := (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \\ &= (e_Y(f(x)))(g) = ((e_Y \circ f)(x))(g), \end{aligned}$$

mostrando que $(A^{A^f} \circ e_X)(x)$ e $(e_Y \circ f)(x)$ são idênticos para cada $x \in X$ e, portanto, $A^{A^f} \circ e_X = e_Y \circ f$. ▲

Exemplo K.3.35 (Determinantes[124])**.** Fixado um anel comutativo e com unidade A e um número natural $n > 0$, tanto a família $\mathrm{GL}_n(A)$ composta pelos mapas A-lineares bijetores da forma $A^n \to A^n$ quanto o subconjunto $A^\times \subsetneq A$ composto por todos os elementos invertíveis formam grupos: o primeiro com a operação de composição e o segundo com a multiplicação de A. Fica a cargo do leitor observar que as correspondências $A \mapsto \mathrm{GL}_n(A)$ e $A \mapsto A^\times$ determinam funtores da forma $\textsc{Ring} \to \textsc{Group}$, bem como observar que $\det \bullet \colon \mathrm{GL}_n(\bullet) \Rightarrow (\bullet)^\times$, onde $\det E$ denota o determinante do morfismo $E \colon A^n \to A^n$. ▲

Observação K.3.36. O leitor curioso talvez se indague sobre o escopo do que foi feito no Exemplo K.3.34, dado que os argumentos parecem se adaptar facilmente a outras categorias. Embora algumas das ideias realmente admitam paralelos mais gerais, nem tudo pode ser realizado em categorias arbitrárias: o problema está na natureza do objeto A^X.

Para uma categoria localmente pequena $\mathscr{C}$ e um objeto $c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ fixado, faz sentido definir as correspondências $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(c, \bullet) : \mathscr{C} \to \textsc{Set}$ e $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(\bullet, c) : \mathscr{C} \to \textsc{Set}$, que associam um objeto a de $\mathscr{C}$ aos conjuntos $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(c, a)$ e $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, c)$, respectivamente[125]. Secretamente, ambos são funtores, o primeiro covariante e o segundo contravariante:

- dada uma seta $a \xrightarrow{f} b$ em $\mathscr{C}$, pode-se induzir sem grandes malabarismos uma função da forma $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(c, a) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(c, b)$, basta fazer uma seta $c \xrightarrow{g} a$ corresponder à composição $f \circ g \colon c \to a \to b$;

- dada uma seta $a \xrightarrow{f} b$ em $\mathscr{C}$, pode-se induzir sem grandes malabarismos uma função da forma $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(b, c) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, c)$, basta fazer uma seta $b \xrightarrow{h} c$ corresponder à composição $h \circ f \colon a \to b \to c$.

A função $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(c, a) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(c, b)$ induzida pela seta $f \colon a \to b$ costuma ser denotada por $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(c, f)$ ou $f \circ \_$, ao passo que sua análoga contravariante $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(b, c) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, c)$ é indicada por $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(f, c)$ ou $\_ \circ f$. Nas palavras de Sasha Ananin[126], "são melhores funtores do mundo... assim".

O funtor $A^\bullet$ do Exemplo K.3.34 é uma clara instância do funtor $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(\bullet, c)$: basta tomar $\mathscr{C} := \textsc{Set}$ e $c := A$. Em particular, isso mostra uma das limitações da situação abordada no exemplo supracitado: não há razões para esperar que $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, c)$ seja um objeto de $\mathscr{C}$ no caso de uma categoria qualquer. A categoria dos conjuntos tem essa propriedade, tal qual a categoria dos grupos e, notavelmente, a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo, mas isto não é uma regra: o anel composto por todos os morfismos de anéis entre dois domínios não é um domínio, por exemplo. △

Uma vez convencidos de que transformações naturais são morfismos legítimos entre funtores de $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, somos levados de modo implacável ao *onipresente* conceito de **isomorfismo natural**, que é precisamente um $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$-isomorfismo entre dois funtores. Curiosamente, há um modo um pouco mais concreto de verificar se uma certa transformação natural é ou não um isomorfismo: contudo, a demonstração de tal milagre será problema do leitor.

Proposição K.3.37. *Nas notações acima, $\tau_\bullet \colon F \Rightarrow G$ é um isomorfismo natural se, e somente se, $\tau_c \colon F(c) \to G(c)$ é um $\mathscr{D}$-isomorfismo para todo $c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.*

[124] O leitor que desconhece as definições de determinante pode conferir [94].
[125] Não há garantias de que $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, b)$ seja um conjunto no caso de categorias mais gerais.
[126] Com quem tive o meu primeiro contato com "catigarias".

Exemplo K.3.38 (Revisitando o Exemplo K.1.122)**.** Qualquer conjunto $\mathcal{I}$ pode ser considerado como uma categoria cujas únicas setas são as identidades. Com isso, a categoria $\text{SET}^{\mathcal{I}}$ tem como objetos $\mathcal{I}$-uplas de conjuntos, enquanto uma seta entre duas $\mathcal{I}$-uplas $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ e $(Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ é meramente uma $\mathcal{I}$-upla de funções $(f_i\colon X_i \to Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Nessa altura da vida, o leitor já deve ter imaginado, em alguma pausa reflexiva para um café, que o produto de duas categorias é algo bastante factível: basta considerar a categoria cujos objetos são pares de objetos e setas são pares de setas e blablabla[127]. E daí?

No Exemplo K.1.122, secretamente, exibiu-se um isomorfismo natural entre dois funtores covariantes da forma $\text{SET}^{\mathcal{I}} \times \text{SET}^{\text{op}} \to \text{SET}$: o primeiro associa $((X_i)_{i\in\mathcal{I}}, X)$ ao conjunto $\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i\right)^X$, enquanto o segundo o associa ao produto $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i^X$. Tais funtores agem nas setas da *única forma*[128] que poderiam e, por isso, não serão explicitados: pensar em como tais correspondências se descrevem é um excelente exercício. Fenômenos análogos se escondem nas justificativas das propriedades distributivas da aritmética cardinal: em particular, fica o convite para que o leitor investigue a naturalidade da bijeção entre $\wp(X)$ e 2^X exibida na Proposição K.1.120. ▲

Exemplo K.3.39 (Biduais em Álgebra Linear)**.** Fixado um corpo K, a Observação K.3.36 já deve ter convencido o leitor de que a correspondência $V \mapsto V^*$ determina um funtor contravariante da forma $(\bullet)^*\colon {}_K\text{VECT} \to {}_K\text{VECT}$, enquanto a adaptação sugerida do Exemplo K.3.34 indica que $e_\bullet\colon \text{Id}_{{}_K\text{VECT}} \Rightarrow (\bullet)^{**}$ é uma transformação natural. Se restringirmos tais considerações para a categoria dos K-espaços vetoriais com dimensão finita, então $e_\bullet$ é um isomorfismo natural (Exercício K.60 + Exercício K.58). ▲

Exercícios complementares da seção

Exercício K.87. Seja $\text{POSET}^{\uparrow}$ a categoria cujos objetos são as ordens parciais e as setas são as funções crescentes.

a) Mostre que nesta categoria, morfismos bijetores não precisam ser isomorfismos.

b) Mostre que ao se considerar $\text{TOTAL}^{\uparrow}$ como a categoria cujos objetos são ordens *totais* e setas são as funções crescentes, volta-se a verificar que morfismos bijetores são os isomorfismos da categoria. Dica: Exercício K.24. ■

Exercício K.88. Mostre que o conjunto vazio é o único objeto inicial da categoria SET. ■

Exercício K.89. Mostre que se $|X| = 1$, então X é objeto final da categoria SET. ■

Exercício K.90. Considere a categoria FIELD, dos corpos (objetos: corpos; setas: morfismos de anéis entre corpos). Dados objetos K e L em FIELD, existe o produto categorial entre K e L em FIELD? Dica: não (Exercício K.50). ■

Exercício K.91. Verifique que a categoria FIELD não tem objetos iniciais ou finais. Contudo, mostre que:

a) para um número primo $p > 1$ fixado, a categoria FIELD_p dos corpos de característica p, cuja definição o leitor já deve ter ideia de como explicitar, tem o corpo $\mathbb{F}_p$ como um objeto inicial;

b) o corpo $\mathbb{Q}$ é o objeto inicial da categoria FIELD_0 dos corpos de característica 0;

c) ainda assim, tanto FIELD_p quanto FIELD_0 não admitem objetos finais. ■

Exercício K.92. Considere uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ como uma categoria (Exemplo K.3.4). Dados objetos $p, q \in \mathbb{P}$, o que seria o produto categorial $p \times q$? ■

[127]Formalizar esse tipo de coisa é o tipo de exercício implícito que não precisa ser sugerido.
[128]Em geral, bons funtores têm definições que quase nascem sozinhas.

Exercício K.93. Refaça os dois exercícios anteriores pensando em coprodutos. ■

Exercício K.94. Em ${}_A\textsc{Mod}$, mostre que o coproduto entre dois A-módulos M e N é a soma direta $M \oplus N$, munida dos mapas $i_M : M \to M \oplus N$ e $i_N : N \to M \oplus N$ que fazem $m \mapsto m + 0_N$ e $n \mapsto 0_M + n$, respectivamente. ■

Exercício K.95. Para uma função $\varphi : \mathcal{I} \to \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, o **coproduto categorial** dos objetos $\varphi(i)$, denotado por $\coprod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$, é um objeto inicial da categoria $(\varphi \to \mathscr{C})$, cujos objetos são objetos x de $\mathscr{C}$ munidos de setas $f_i : \varphi(i) \to x$ para cada $i \in \mathcal{I}$, onde... Formule precisamente a definição. Dica: dualize a definição do produto categorial. ■

Exercício K.96. Seja $\textsc{Arch}$ a **categoria dos corpos totalmente ordenados arquimedianos**, cujas setas são os morfismos de corpos que preservam supremos e ínfimos. Mostre que todo corpo completo é final nesta categoria. Dica: Lema K.2.115. ■

Exercício K.97. Seja $\textsc{Set}$ a categoria dos conjuntos.

a) Mostre que a correspondência $\wp^{[\cdot]} : \textsc{Set} \to \textsc{Set}$, que faz a função $f : X \to Y$ corresponder à função $\wp[f] : \wp(X) \to \wp(Y)$ daad por $A \mapsto f[A]$, é um funtor covariante.

b) Mostre que a correspondência $\wp^{-1} : \textsc{Set} \to \textsc{Set}$, que faz a função $f : X \to Y$ corresponder à função $\wp^{-1}(f) : \wp(Y) \to \wp(X)$ dada por $\wp^{-1}(f)(B) := f^{-1}[B]$, é um funtor contravariante.

c) Mostre que a correspondência $X \mapsto \{X\}$ define uma transformação natural entre os funtores covariantes $\mathrm{Id}_{\textsc{Set}}$ e $\wp^{[\cdot]}$. ■

Exercício K.98. Suponha que $\mathscr{C}$ seja uma categoria tal que $A \times B$ exista para quaisquer objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$. Um objeto C de $\mathscr{C}$ é *um* **exponencial** dos objetos A e B se existe uma seta $\varepsilon : C \times A \to B$ tal que para toda seta $g : X \times A \to B$ existe uma única seta $\overline{g} : X \to C$ satisfazendo $\varepsilon \circ (\overline{g} \times \mathrm{id}_A) = g$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\overline{g}"'] & X \times A \arrow[d, dashed, "\overline{g}\times\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "g"] & \\
C & C \times A \arrow[r, "\varepsilon"'] & B
\end{tikzcd}$$

a) Mostre que um objeto C como acima, caso exista, é único a menos de isomorfismo. Dica: considere $\mathscr{D}$ a categoria cujos objetos são pares da forma $(X, f : X \times A \to B)$, onde uma seta entre (X, f) e (Y, g) é um morfismo $\varphi : X \to Y$ tal que $g \circ (\varphi \times \mathrm{id}_A) = f$.

b) Para $\mathscr{C} := \textsc{Set}$, mostre que B^A é um exponencial dos conjuntos A e B. Observação: por conta disso e da unicidade observada no item anterior, um objeto exponencial de A e B costuma ser denotado por B^A, e o seu morfismo $\varepsilon : B^A \times A \to B$ é xingado de **avaliação**. ■

Parte I

Meu depoimento sobre Topologia Geral

Capítulo 1

Um mínimo de Topologia Geral

Enquanto a Parte I deste imbróglio se destina a apresentar tudo aquilo que um matemático arbitrário deveria saber sobre Topologia Geral, o atual capítulo, como o título sugere, traz *um mínimo que você precisa saber para não ser um idiota* no cenário político-topológico contemporâneo[1]. Entre outras coisas, o leitor encontrará *filtros*, *compacidade* e o *Teorema de Tychonoff* já nas duas primeiras seções. A terceira seção é menos urgente: ela discutirá alguns métodos elementares de construção/destruição de *espaços topológicos*, onde se encontrarão, sem muita ênfase, os *espaços quocientes*. A última seção é um bônus ou, talvez, um pedido de socorro.

1.1 Topologia e continuidade

Esta é (*suspiro*) a primeira seção *topológica* do texto. Aqui o leitor será apresentado aos protagonistas: *espaços topológicos* e *funções contínuas*. Há, essencialmente, dois modos para se fazer isso: o *direto* e sem firulas, ao estilo Bourbaki, em que as definições são simplesmente vomitadas e as propriedades passam a ser discutidas, e o *místico*, onde a definição *surge* a partir de considerações ~~holísticas~~ naturais.

Autores que optam pelo segundo método costumam apelar para os *espaços métricos*. Um dos problemas dessa abordagem é viciar o raciocínio topológico à intuição geo*métrica*. Como alternativa, a primeira subseção motivará a coisa toda por meio de *filtros*. No entanto, o leitor que preferir a abordagem *direta* (e sem *muitas* menções a filtros) pode saltar diretamente para a Subseção 1.1.2 (página 142) sem grandes prejuízos.

1.1.1 Filtrando o que importa

Quero vender a ideia de que *filtros* permitem capturar a essência da noção de *convergência*, seja lá o que isso signifique. Assim, para respeitar a *ordem* natural das coisas, precisa-se discutir um pouco sobre o que se espera do significado da palavra *convergência*, pelo menos empiricamente.

No nosso dia a dia, a expressão *convergir* tem significados diversos, mas que, geralmente, *convergem* para um sentido de aproximação de um destino (ou objetivo) comum. De certa forma, expressa-se a inevitabilidade de que um determinado *fenômeno* atinja uma conclusão esperada, mesmo que desconhecida.

[1]Duas observações: 1) não verifiquei se vale a antissimetria, por isso o artigo indefinido; 2) a referência óbvia ao famigerado (e, atualmente, finado) astrólogo não foi feita por admiração, muito pelo contrário.

Estamos acostumados com tais concepções em contextos visuais. A noção de profundidade que percebemos em imagens *bidimensionais*, por exemplo, pode ser obtida a partir do reconhecimento de certas *retas* que *convergem* para um *ponto de fuga*.

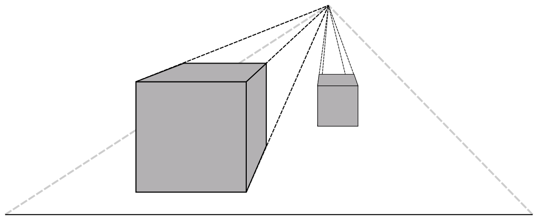


Figura 1.1: Retas "paralelas" *convergindo* para um *ponto de fuga* no *infinito*.

Outra situação recorrente, principalmente para matemáticos tradicionais, ocorre na pré-produção de teoremas, também conhecida como *filtragem do café*[2]: antes de se *transmutar*, a água escoa por um *filtro de papel*, de modo que cada nova gota de café foi um dia uma gota d'água que convergiu em meio ao pó até o *final* (ou limite) do filtro.

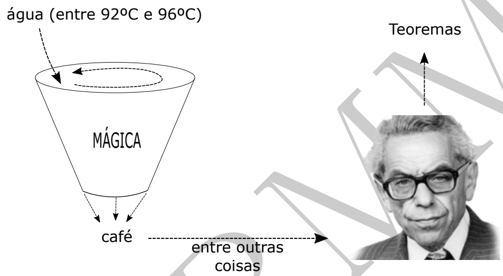


Figura 1.2: Uma aplicação prática de filtros.

Vamos *filtrar* alguma informação qualitativa e útil de toda essa embromação pseudopedagógica. Tanto as linhas da Figura 1.1 que *convergem* para o ponto no infinito quanto o final do *filtro* da Figura 1.2 determinam, secretamente, uma série de condições que ditam o quão próximo um ponto qualquer está do *limite*: quanto mais condições forem satisfeitas pelo ponto, mais próximo ele estará do limite.

O leitor que ainda não desistiu desta seção pode se perguntar: que condições são essas? Ora, aqui podemos pensar em qualquer coisa razoável que concorde com a ideia "quanto mais condições em comum, mais perto do final". A figura a seguir dá um exemplo.

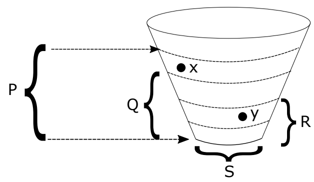


Figura 1.3: É alto o preço que se paga por ser *hipster*.

Na Figura 1.3, P, Q, R e S são condições, enquanto x e y são pontos no filtro. Convém notar que é irrelevante acrescentar novas condições *menos restritivas* do que as originais, no sentido de que mais pontos as satisfaçam: as conclusões sobre x e y seriam as mesmas se tivéssemos outra condição P' com $P \subseteq P'$. A notícia para o leitor incomodado com essas analogias infantis não poderia ser melhor: elas acabam aqui!

[2]Matéria-prima para a produção de teoremas, segundo ~~Erdős~~ Alfréd Rényi.

Filtros *sem filtro*

Definição 1.1.1. Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} \neq \emptyset$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um **filtro** (em X) se as duas condições abaixo forem satisfeitas:

(F_1) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;

(F_2) $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathcal{F}$. ¶

Esquematicamente, dado um filtro $\mathcal{F}$ e um elemento F de $\mathcal{F}$, o filtro $\mathcal{F}$ impõe restrições sobre quais subconjuntos *abaixo* de F pertencem a $\mathcal{F}$, ao passo que quaisquer subconjuntos *acima* de F pertencem automaticamente a $\mathcal{F}$. Empiricamente, dado $F \in \mathcal{F}$, é mais fácil encontrar membros do filtro acima de F, i.e., que o contém, do que abaixo de F, o que sugere sua ilustração afunilada, como filtros de café.

Observação 1.1.2. Antes de discutir porque filtros capturam o conceito de *convergência*, pode ser útil observar que eles *também* dão uma noção de *grandeza*: chamando de (realmente) *grandes* os elementos de um filtro, as condições (F_1) e (F_2) se traduzem como

- a interseção de subconjuntos grandes é grande, e
- se $A \subseteq X$ é grande e $A \subseteq B$, então B é grande.

Aqui, a ideia de grandeza, naturalmente, varia com o contexto, de modo que quanto mais restritiva for a noção, menor será o filtro: se a noção de grandeza não impõe quaisquer restrições (tudo é grande!), obtém-se o filtro $\wp(X)$; por outro lado, se o único subconjunto grande de X é o próprio X (nada é grande!), obtém-se o filtro $\{X\}$.

Moralmente, ambos os filtros acima são inúteis e, por isso, merecem xingamentos especiais: chamaremos o filtro $\wp(X)$ de **trivial** (ou **discreto**), enquanto $\{X\}$ será chamado de filtro **antidiscreto**. Em particular, qualquer filtro $\mathcal{F}$ em X com $\mathcal{F} \neq \wp(X)$ será chamado de **próprio**. △

Exercício 1.1. Mostre que um filtro $\mathcal{F}$ em X é próprio se, e somente se, $\emptyset \notin \mathcal{F}$. ■

Exemplo 1.1.3. Qualquer que seja o conjunto X, a família

$$\operatorname{cofin}(X) := \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \aleph_0\}$$

é um filtro, cujos membros são os subconjuntos **cofinitos** de X, i.e., aqueles cujo complementar é finito[3]. Note que se X é infinito, então $\operatorname{cofin}(X) \neq \wp(X)$, *nosso* primeiro filtro próprio. ▲

Exercício 1.2. Mostre que $\operatorname{cofin}(X)$ é um filtro de X. Convença-se de que $|X| \geq \aleph_0$ implica $\operatorname{cofin}(X) \neq \wp(X)$. ■

Exemplo 1.1.4. A noção de grandeza também surge no contexto da Análise. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida[4], então $\mathcal{F}_\mu := \{G \subseteq X : \exists A \in \mathcal{A} \text{ com } A \subseteq G \text{ e } \mu(X \setminus A) = 0\}$ é um filtro, cujos elementos são os subconjuntos que contêm conjuntos de *medida total*. Note que do *ponto de vista* de μ, os membros de $\mathcal{F}_\mu$ são realmente grandes, já que cada um deles contém um subconjunto com a maior medida possível. ▲

[3] O filtro $\operatorname{cofin}(X)$ é usualmente chamado de *filtro de Fréchet*, mas tal nomenclatura entraria em conflito com algumas terminologias futuras.

[4] Definição K.2.140.

Exercício 1.3. Nas notações acima, mostre que se $\mu(X) > 0$, então $\mathcal{F}_\mu$ é um filtro próprio em X. ■

O leitor atento deve ter notado que a condição (F_2) na definição de filtro é justificada pela discussão que sucedeu a Figura 1.3: para os propósitos de convergência que serão abordados, assumir que $B \in \mathcal{F}$ sempre que $A \subseteq B$ com $A \in \mathcal{F}$ ("B é uma condição menos restritiva do que A") não *atrapalha*. E aqui convém discutir um pouco sobre os desdobramentos disso.

Note que se a vida nos der apenas uma família $\mathcal{G} \neq \emptyset$ satisfazendo (F_1), i.e., tal que $G, H \in \mathcal{G} \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{G}$, então a família $\mathcal{G}^\uparrow$ é um filtro em X, onde

$$\mathcal{G}^\uparrow := \{A \subseteq X : \exists G \in \mathcal{G} \text{ tal que } G \subseteq A\} \tag{1.1}$$

é o **fecho da família $\mathcal{G}$ para cima**: $\mathcal{G}^\uparrow$ satisfaz (F_2) por construção, ao passo que (F_1) segue pois se $A, B \in \mathcal{G}^\uparrow$, então existem $G, H \in \mathcal{G}$ com $G \subseteq A$ e $H \subseteq B$, donde se infere $G \cap H \subseteq A \cap B$, acarretando $A \cap B \in \mathcal{G}^\uparrow$ pois $G \cap H \in \mathcal{G}$ por hipótese.

Como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^\uparrow$ por construção, o Exercício 1.1 mostra que se $\emptyset \in \mathcal{G}$, então $\mathcal{G}^\uparrow$ é trivial. A observação importante é que a recíproca também é válida:

Exercício 1.4. Seja $\mathcal{G} \neq \emptyset$ uma família de subconjuntos de X, que não necessariamente satisfaz (F_1). Mostre que são equivalentes:

i) $\mathcal{G}^\uparrow \neq \wp(X)$;

ii) $\emptyset \notin \mathcal{G}$.

Conclua que $\mathcal{G}^\uparrow$ é um filtro não-trivial de X se, e somente se, $\emptyset \notin \mathcal{G}$ e para quaisquer $G, H \in \mathcal{G}$ existe $I \in \mathcal{G}$ com $I \subseteq G \cap H$. ■

Definição 1.1.5. Uma família $\mathcal{G} \neq \emptyset$ de subconjuntos de X tal que

i) $\emptyset \notin \mathcal{G}$ e

ii) para quaisquer $G, H \in \mathcal{G}$ existe $I \in \mathcal{G}$ com $I \subseteq G \cap H$,

será chamada de **pré-filtro**. ¶

Observação 1.1.6. A motivação para o nome "pré-filtro" é muito clara: a família $\mathcal{G}$ já é quase um filtro próprio, a menos fechá-la para cima. Obviamente, todo filtro próprio é pré-filtro. △

O fato de tudo se encaixar como uma luva se deve a uma hipótese muito forte: a vida nos dar algo bom – e sabemos que isso não ocorre com frequência. No caso geral, em que se tem apenas uma família $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X, seria o universo tão bom a ponto de assegurar as condições de filtro para a família $\mathcal{H}^\uparrow$?

Exercício 1.5 (Não)**.** Em $X := \omega$, seja $\mathcal{H} := \{\{0,1,2\},\{2,3\}\}$. Mostre que $\mathcal{H}^\uparrow$ não é filtro. O que ocorre se, em vez de $\mathcal{H}$, usar-se $\mathcal{G} := \{\{0,1,2\},\{2,3\},\{2\}\}$? ■

Portanto, precisa-se mudar a pergunta a fim de ter uma resposta menos deprimente: existe *algum* filtro em X que contém $\mathcal{H}$? A resposta agora é, *trivialmente*, afirmativa: o filtro trivial $\wp(X)$ contém $\mathcal{H}$ como subconjunto. O leitor com predileções algébricas já deve saber onde isso irá levar.

Exercício 1.6. Prove que se $\mathscr{F} \neq \emptyset$ é uma família de filtros em X, então $\bigcap \mathscr{F}$ é um filtro em X. ■

Ora, aliando o exercício anterior ao fato de que $\wp(X)$ é um filtro que contém $\mathcal{H}$, resulta que

$$\mathcal{H}^{\Uparrow} := \bigcap \{\mathcal{F} \subseteq \wp(X) : \mathcal{F} \text{ é filtro em } X \text{ e } \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}\} \tag{1.2}$$

é um filtro em X que contém $\mathcal{H}$. Mais do que isso, $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ é o menor filtro em X com tal propriedade, no sentido natural: qualquer filtro $\mathcal{F}$ em X que contém $\mathcal{H}$ como subconjunto também contém $\mathcal{H}^{\Uparrow}$.

Definição 1.1.7. Nas notações acima, o conjunto $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ será chamado de **filtro gerado** pela família $\mathcal{H}$. ¶

Exercício 1.7. Mostre que se $\mathcal{G}$ é um pré-filtro, então $\mathcal{G}^{\uparrow} = \mathcal{G}^{\Uparrow}$. Dica: note que qualquer filtro $\mathcal{F}$ em X com $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ satisfaz $\mathcal{G}^{\uparrow} \subseteq \mathcal{F}$. ■

O exercício acima nos livra do problema de descrever os membros de $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ quando $\mathcal{H}$ é um pré-filtro. Porém, ainda resta o problema de descrever um habitante típico de $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ nos casos em que $\mathcal{H}$ **não** é pré-filtro. Curiosamente, o inofensivo Exercício 1.5 tem a dica de como proceder.

Proposição 1.1.8. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{H} \neq \emptyset$ uma família de subconjuntos de X. Então*

$$\mathcal{H}^{\Uparrow} = \left\{ A \subseteq X : \textit{existem } n \in \omega \textit{ e } H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H} \textit{ tais que } \bigcap_{i \leq n} H_i \subseteq A \right\}.$$

Demonstração. Como $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ é, por definição, o menor filtro a conter $\mathcal{H}$, basta mostrar que

$$\mathcal{F} := \left\{ A \subseteq X : \text{existem } n \in \omega \text{ e } H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H} \text{ tais que } \bigcap_{i \leq n} H_i \subseteq A \right\}$$

é filtro, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ para todo filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. □

Exercício 1.8. Complete a demonstração da Proposição 1.1.8. ■

Em outras palavras, a proposição acima afirma que $\mathcal{H}^{\Uparrow} = \left(\overline{\mathcal{H}}^{\cap}\right)^{\uparrow}$, onde

$$\overline{\mathcal{H}}^{\cap} := \left\{ A \subseteq X : \exists F \in [\mathcal{H}]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\} \text{ tal que } \bigcap F = A \right\} \tag{1.3}$$

é o **fecho de $\mathcal{H}$ por interseções finitas**, e $[\mathcal{H}]^{<\aleph_0}$ é a coleção dos subconjuntos finitos de $\mathcal{H}$. Verbalmente, $\overline{\mathcal{H}}^{\cap}$ é o conjunto de todas as interseções finitas de membros de $\mathcal{H}$ (pode ser edificante reler o Exercício 1.5). Em particular, consegue-se um critério simples para decidir quando $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ é um filtro próprio.

Proposição 1.1.9. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{H} \subseteq \wp(X)$. Então $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ é um filtro próprio se, e somente se, para cada $n \in \omega$ e quaisquer $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ valer $H_0 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. O filtro $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ é trivial se, e somente se, $\emptyset \in \mathcal{H}^{\Uparrow}$. Ora, tal pertinência ocorre se, e somente se, existem $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{G}$ tais que $H_0 \cap \ldots \cap H_n \subseteq \emptyset$. □

Exercício 1.9. Se $\mathcal{H} := \emptyset$, quem é o filtro $\mathcal{H}^{\Uparrow}$? Dica: $\{X\}$ é filtro. ■

Definição 1.1.10. Diremos que uma família $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X tem a **propriedade da interseção finita**, abreviada com **p.i.f.**, se $\mathcal{H}^{\Uparrow}$ for um filtro próprio. ¶

Observação 1.1.11. Equivalentemente, pela Proposição 1.1.9, a família $\mathcal{H}$ tem a p.i.f. se $H_0 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset$ para quaisquer $n \in \omega$ e $H_0, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$. △

Exercício 1.10. Mostre que se $\mathcal{H}$ tem p.i.f., então $\overline{\mathcal{H}}^{\cap}$ é pré-filtro. ■

Observação 1.1.12. Dado um filtro próprio $\mathcal{F}$, existem, possivelmente, diversas famílias $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X satisfazendo $\mathcal{F} = \mathcal{H}^{\Uparrow}$, i.e, tais que $\mathcal{F}$ é o filtro gerado por $\mathcal{H}$. Nestas situações, costuma-se dizer que $\mathcal{H}$ é **sub-base** do filtro $\mathcal{F}$. Se, adicionalmente, ocorrer $\mathcal{F} = \mathcal{H}^{\uparrow}$, diz-se que $\mathcal{H}$ é **base** do filtro $\mathcal{F}$. △

Exemplo 1.1.13. Por conta do Exercício 1.4, $\{G\}$ é pré-filtro sempre que $G \subseteq X$ é não-vazio. Costuma-se escrever $G^{\uparrow}$ em vez de $\{G\}^{\uparrow}$, e chamar o filtro $G^{\uparrow}$ de **filtro principal** com base G. No caso particular em que $G = \{g\}$ para algum $g \in X$, escreve-se

$$\mathfrak{u}_g := \{A \subseteq X : g \in A\}$$

em vez de $\{g\}^{\uparrow}$, que passa a ser chamado de **ultrafiltro principal** sobre g. ▲

Exemplo 1.1.14. Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X, pode-se considerar a família $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X definida por

$$\mathcal{H} := \{\{x_m : m \geq n\} : n \in \omega\}.$$

Como $\{x_m : m \geq p\} \cap \{x_m : m \geq q\} = \{x_m : m \geq \max\{p, q\}\} \neq \emptyset$, resulta que $\mathcal{H}$ é um pré-filtro em X. ▲

Exemplo 1.1.15. Fixado $x \in \mathbb{R}$, chamemos por

$$\mathcal{V}_x := \{V \subseteq \mathbb{R} : \exists r > 0 \text{ tal que } (x - r, x + r) \subseteq V\}.$$

É fácil se convencer de que $\mathcal{V}_x$ é um filtro em $\mathbb{R}$ e, mais ainda, $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}_x$.

Exercício 1.11. Para $x \in \mathbb{R}$ fixado, considere as famílias

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x &:= \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \\ \mathcal{B}_x &:= \{(-\infty, x + r) : r > 0\} \cup \{(x - s, +\infty) : s > 0\}. \end{aligned}$$

Mostre que $\mathcal{A}_x$ e $\mathcal{B}_x$ são, respectivamente, base e sub-base de $\mathcal{V}_x$. ■

O exercício acima evidencia que um mesmo filtro pode ter bases e sub-bases distintas. Nesse sentido, convém fazer um alerta com respeito à cardinalidade. A terminologia *base*, já carregada de significado da Álgebra Linear, pode levar o leitor incauto a pensar que quaisquer duas bases ou sub-bases de um filtro $\mathcal{F}$ estejam em bijeção, como ocorre com as bases de espaços vetoriais. No entanto, isto é falso: basta notar que as famílias

$$\mathcal{A}'_x := \left\{\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \text{ e } \mathcal{B}'_x := \left\{\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(x - \frac{1}{m}, +\infty\right) : m \in \mathbb{N}\right\}$$

são base e sub-base de $\mathcal{V}_x$, respectivamente, com $|\mathcal{A}'_x| = |\mathcal{B}'_x| = \aleph_0 < |\mathcal{A}_x| = |\mathcal{B}_x| = \mathfrak{c}$. ▲

Observação 1.1.16. O exemplo acima mostra que *a cardinalidade* das bases de um filtro não é invariante. Apesar disso, pode-se associar *invariantes cardinais a filtros* por meio da boa ordenação. De fato, como a família $\mathscr{B}_{\mathcal{F}} := \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ é base do filtro $\mathcal{F}\}$ é uma coleção não-vazia de cardinais, fica bem definido o cardinal $\min \mathscr{B}_{\mathcal{F}}$. O número $\min \mathscr{B}_{\mathcal{F}}$, chamado de **caráter** do filtro $\mathcal{F}$ e denotado por $\chi(\mathcal{F})$, não será explorado de modo explícito durante a Parte I deste material. Em todo caso, o leitor está convidado a provar que $\chi(\mathcal{V}_x) = \aleph_0$, onde $\mathcal{V}_x$ é o filtro em $\mathbb{R}$ do exemplo anterior[5]. △

Embora exista muito mais para se discutir sobre filtros, existe uma *agenda topológica* que deve ser cumprida: mostrar que os espaços topológicos surgem naturalmente da abordagem de convergência via filtros. Para realizar essa tarefa, deve-se entender, evidentemente, como tratar convergência com filtros.

Topologia camuflada

Fixemos um filtro próprio $\mathcal{V}$ sobre um conjunto X. Ao se interpretar as condições que caracterizam filtros por meio de diagramas de Venn[6], chega-se a esboços que invariavelmente remetem às Figuras 1.1 e 1.3. De fato, como $\mathcal{V} \neq \emptyset$, existe pelo menos um $V_0 \in \mathcal{V}$, com $V_0 \neq \emptyset$, o que nos coloca diante de, essencialmente, dois cenários.

- *Cenário 1*: se valer $V_0 \subseteq V$ para todo $V \in \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} = V_0^{\uparrow}$.
- *Cenário 2*: se para algum $U_0 \in \mathcal{V}$ ocorrer $V_0 \nsubseteq U_0$, então $V_1 := V_0 \cap U_0$ é estritamente *menor* do que V_0; se existir $U_1 \in \mathcal{V}$ tal que $V_1 \nsubseteq U_1$, obtém-se $V_2 := V_1 \cap U_1$ estritamente *menor* do que V_1 – caso contrário, recai-se no caso 1, i.e., conclui-se que $\mathcal{V} = V_1^{\uparrow}$; procedendo indutivamente, retorna-se ao Cenário 1 ou se obtém uma cadeia enumerável estritamente decrescente

  $$V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \ldots \supsetneq V_n \supsetneq \ldots$$

  de elementos do filtro $\mathcal{V}$.

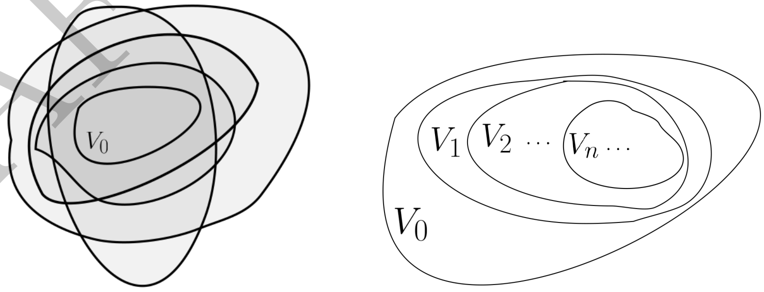


Figura 1.4: Cenário 1 vs. Cenário 2.

Agora, suponha que $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$ sejam filtros em X, com $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$. De um ponto de vista literal, isso diz apenas que qualquer membro de $\mathcal{V}$ também é membro de $\mathcal{F}$. Porém, psicologicamente, há mais *sendo* dito: o filtro $\mathcal{F}$ concorda com as condições impostas por $\mathcal{V}$ e deveria *convergir* para os *mesmos pontos*.

[5]Como já existe uma base de *tamanho* $\aleph_0$, basta observar que não pode haver base finita.

[6]Uma atitude imoral, mas pseudopedagogicamente útil.

De fato, suponha que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sejam bases de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{F}$, respectivamente. Da inclusão $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$, segue que todo $V \in \mathcal{V}$ é membro de $\mathcal{F} = \mathcal{C}^{\uparrow}$, acarretando a existência de $C \in \mathcal{C}$ com $C \subseteq V$. Em particular, por valer $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$, pode-se substituir $V \in \mathcal{V}$ por $B \in \mathcal{B}$, donde se conclui que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{C}$ com $C \subseteq B$.

Representando os elementos de $\mathcal{B}$ como quadriláteros e os elementos de $\mathcal{C}$ como elipses num diagrama de Venn, segue que dentro de cada quadrilátero deve haver uma elipse. Ora, como os quadriláteros *convergem* para uma *região de fuga* (Figura 1.4), somos forçados a concordar que as elipses também *convergem* para a mesma região.

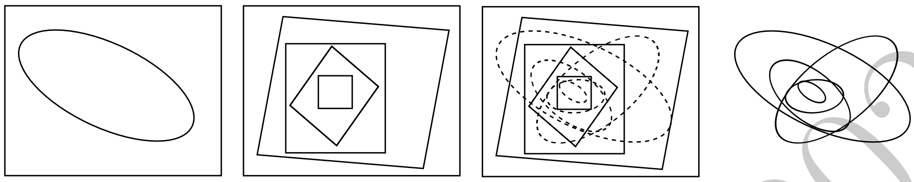


Figura 1.5: O princípio fundamental das *matryoshka* (bonecas russas).

Para deixar as coisas mais próximas do contexto que nos interessa, suponha que exista um ponto $x \in X$ tal que $\mathcal{V}$ seja **centrado** em x, i.e., tal que $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Pela argumentação anterior, parece seguro usar o filtro fixado $\mathcal{V}$ para decidir quando um filtro em X *converge* para x.

Definição 1.1.17. Nas condições acima, diremos que um filtro $\mathcal{F}$ em X *converge para x com respeito à $\mathcal{V}$*, o que indicaremos com $\mathcal{F} \to_{\mathcal{V}} x$, se ocorrer $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$. ¶

Exemplo 1.1.18 (Fundamental)**.** O leitor já familiarizado com Cálculo ou Análise sabe que para uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ de números reais, escreve-se $x_n \to 0$ para indicar que

$$\text{para todo } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \text{ existe } N \in \omega \text{ tal que } |x_n| < \varepsilon \text{ para qualquer natural } n \geq N. \tag{1.4}$$

Intuitivamente, quanto maior o subíndice $n \in \omega$, mais próximo de 0 se torna o termo x_n correspondente. Por essa ser uma definição oriunda da Análise e com muito apelo geométrico, é seguro dizer que ela é razoável e benquista pelas agências de fomento. Agora, como nos Exemplos 1.1.14 e 1.1.15, tomemos os filtros

$$\mathcal{V}_0 := \{V \subseteq \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq V\}, \text{ e } \mathcal{H} := \{\{x_m : m \geq N\} : N \in \omega\}^{\uparrow}.$$

Note que, por construção, $0 \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}_0$, o que permite usar o filtro $\mathcal{V}_0$ para decidir quando um filtro $\mathcal{F}$ qualquer converge para 0. Em particular, o que ocorre quando $\mathcal{H} \to_{\mathcal{V}_0} 0$? Por definição, tem-se $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{H}$ e, tanto pela construção dos filtros quanto pelas discussões anteriores, não é difícil se convencer de que $\mathcal{H} \to_{\mathcal{V}_0} 0$ é equivalente a dizer que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que $\{x_m : m \geq N\} \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ora, ora... ▲

Exercício 1.12. Convença-se de que $x_n \to 0$ se, e somente se, $\mathcal{H} \to_{\mathcal{V}_0} 0$. ■

O exemplo acima sugere que a noção usual de convergência em $\mathbb{R}$ é completamente capturada pela abordagem via filtros, com a vantagem de que a segunda é absurdamente mais geral do que a primeira: a princípio, ela pode ser realizada em qualquer conjunto desprovido de estruturas algébricas ou de ordem.

Então, fixado um conjunto X, suponha que exista uma família $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ onde cada $\mathcal{V}_x$ é um filtro centrado em x. Por futura conveniência, vamos chamar cada $V \in \bigcup \mathcal{V}$ de *$\mathcal{V}$-vizinhança de x*. Para um filtro $\mathcal{F}$ de X, vamos escrever $\mathcal{F} \to_{\mathcal{V}} x$ se ocorrer a inclusão $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$, e diremos que o filtro $\mathcal{F}$ *converge para x*.

Observação 1.1.19. Os mais puristas podem preferir que $\mathcal{V}$ seja a X-upla $(\mathcal{V}_x : x \in X)$, o que formalmente consiste em dizer que $\mathcal{V}$ é uma função com $\operatorname{dom}(\mathcal{V}) := X$ e $\mathcal{V}(x) := \mathcal{V}_x$ para cada $x \in X$. Enfim... $\triangle$

Embora efetiva e abrangente, essa abordagem por meio de filtros é geral *demais* e, por isso, não será o foco deste livro: em certo sentido, a falta de exigências sobre os filtros centrados $\mathcal{V}_x$ permite que eles discordem entre si sobre quais são as $\mathcal{V}$-vizinhanças conforme x varia. Ainda assim, pode-se separar os subconjuntos de X que são *vistos* como $\mathcal{V}$-vizinhanças de seus pontos independentemente do ponto escolhido[7]. Explicitamente, considera-se a família $\tau_{\mathcal{V}} := \{A \subseteq X : \forall x \in A\,(A \in \mathcal{V}_x)\}$, cujos membros serão chamados de *$\mathcal{V}$-vizinhanças abertas* de X. É possível que os leitores já familiarizados com a definição de *topologia* se espantem com a próxima

Proposição 1.1.20. *Nas notações acima, a família $\tau_{\mathcal{V}}$ tem as seguintes propriedades:*

(OT$_1$) *$X, \emptyset \in \tau_{\mathcal{V}}$;*

(OT$_2$) *se $U, V \in \tau_{\mathcal{V}}$, então $U \cap V \in \tau_{\mathcal{V}}$;*

(OT$_3$) *se $\mathcal{U} \subseteq \tau_{\mathcal{V}}$, então $\bigcup \mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{V}}$.*

Por outro lado, se $\mathcal{T}$ é uma família de subconjuntos de X satisfazendo todas as condições acima, então a coleção $\mathcal{T}_x := \{A \in \mathcal{T} : x \in A\}$ é base para um filtro $\mathcal{N}_x$ em X centrado em x, para cada $x \in X$. Finalmente, se $\mathcal{T} := \tau_{\mathcal{V}}$, então $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{V}_x$ para cada $x \in X$.

Demonstração. Para a primeira parte:

(OT$_1$) X é membro de qualquer filtro e $\emptyset \in \mathcal{V}_x$ para todo $x \in \emptyset$ (*a.k.a.* vacuidade);

(OT$_2$) dado $x \in U \cap V$, tem-se $U, V \in \mathcal{V}_x$ e daí $U \cap V \in \mathcal{V}_x$;

(OT$_3$) se $x \in \bigcup \mathcal{U}$, então existe $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U \subseteq \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$, pois $U \in \mathcal{V}_x$.

Para a segunda parte, note que a família $\mathcal{T}_x$ é base para um filtro pois se $A, B \in \mathcal{T}_x$, então $A \cap B \in \mathcal{T}$ com $x \in A \cap B$, i.e., $A \cap B \in \mathcal{T}_x$. Por construção, $\mathcal{N}_x := \mathcal{T}_x^{\uparrow}$ é centrado em x. Finalmente, para a terceira afirmação, note que

$$\mathcal{N}_x := \{A \subseteq X : \exists V \in \tau_{\mathcal{V}} \text{ tal que } x \in V \subseteq A\}.$$

Assim, para $A \in \mathcal{N}_x$, a existência de $V \in \tau_{\mathcal{V}}$ com $x \in V \subseteq A$ acarreta $V \in \mathcal{V}_x$ (pela definição de $\tau_{\mathcal{V}}$) e, por $\mathcal{V}_x$ ser filtro, infere-se que $A \in \mathcal{V}_x$. $\square$

A proposição acima diz duas coisas:

1. para tratar de convergência num conjunto X, basta ter uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X satisfazendo (OT$_1$), (OT$_2$) e (OT$_3$), o que é tecnicamente preferível pela menor complexidade da definição;
2. não se perdem "filtros convergentes" no caso em que a família $\mathcal{T}$ é oriunda de uma coleção $\mathcal{V}$ de filtros centrados pois, se $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{V}_x$, então $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$, i.e., $\mathcal{F} \to_{\mathcal{V}_x} x \Rightarrow \mathcal{F} \to_{\mathcal{N}_x} x$.

O leitor preocupado em não ganhar filtros convergentes vai se alegrar com a seção bônus deste capítulo. Já o pragmático pode avançar para a próxima subseção, onde a diversão vai começar.

[7] Uma discussão um pouco mais profunda será feita no Exemplo 1.4.5.

1.1.2 Espaços topológicos

Definição 1.1.21. Um conjunto X munido de uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X é um **espaço topológico**, e $\mathcal{T}$ é uma **topologia** sobre X, se as três condições (OT_1), (OT_2) e (OT_3) forem satisfeitas, ou seja:

(OT_1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;

(OT_2) se $U, V \in \mathcal{T}$, então $U \cap V \in \mathcal{T}$;

(OT_3) se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, então $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

Em momentos de sobriedade, diz-se que o par $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, mas em geral diremos apenas que X é um espaço topológico, com a topologia $\mathcal{T}$ implícita no contexto.¶

Em alusão a Geometria, elementos de um espaço topológico são chamados de **pontos**, enquanto membros da topologia $\mathcal{T}$ são chamados de (sub) **conjuntos abertos** de X com respeito à topologia $\mathcal{T}$, mas mesmo isso será abreviado com frequência, e diremos apenas que $U \subseteq X$ é *um aberto*. Assim, os axiomas de topologia se leem da seguinte maneira:

- tanto X quanto $\emptyset$ são abertos (chamados de **abertos triviais**);
- se U e V são abertos, então $U \cap V$ é aberto;
- a reunião arbitrária de abertos é aberta.

Para qualquer ponto $x \in X$, denota-se por $\mathcal{T}_{x,X} := \mathcal{T}_x := \{V \in \mathcal{T} : x \in V\}$, a base *canônica* do filtro $\mathcal{N}_{x,X} := \mathcal{N}_x := \{N \subseteq X : \exists V \in \mathcal{T}_x\,(V \subseteq N)\}$, que será chamado de **filtro de vizinhanças**[8] de x. Nas raras ocasiões em que a topologia de X não estiver clara pelo contexto, escreveremos $\mathcal{N}_{x,\mathcal{T}}$ em vez de $\mathcal{N}_x$. Em sincronia com tais nomenclaturas, neste texto, diremos que um subconjunto $A \subseteq X$ é uma **vizinhança** de X se existir um aberto não-vazio V tal que $V \subseteq A$, mas apenas aquelas que pertencem a $\mathcal{N}_x$ serão **vizinhanças do ponto** x (confira a Observação 1.1.41). Desse modo, a expressão "vizinhança aberta" é um sinônimo mais longo de "aberto"[9]. De qualquer forma, se existem conjuntos abertos, então deveriam existir...

Definição 1.1.22. Um subconjunto $F \subseteq X$ de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é **fechado** se $X \setminus F$ for aberto. Será comum dizer apenas que F é *um fechado*. ¶

Proposição 1.1.23. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e chame por*

$$\mathcal{T}^{\mathrm{op}} := \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{T}\}$$

a ~~cotopologia~~ família dos fechados de X. Então vale o seguinte:

(CT_1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}^{\mathrm{op}}$;

(CT_2) $F, G \in \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{T}^{\mathrm{op}}$;

(CT_3) $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \Rightarrow \bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{T}^{\mathrm{op}}$.

[8] O leitor que prefere ignorar a existência de filtros pode interpretar o termo apenas como uma expressão pomposa, como quando pré-imagens de conjuntos unitários são chamadas de fibra ou certas sobrejeções são xingadas de projeções. Mas adiante: na próxima seção, filtros serão inevitáveis.

[9] Cuidado: essa não é uma terminologia universal nos livros de Topologia Geral.

Demonstração. Segue diretamente das Leis de De Morgan (Proposição K.1.15) aplicadas na definição de topologia. □

Observação 1.1.24. O problema gramatical em chamar tais conjuntos de fechados está na associação natural que se faz com portas: uma porta está aberta ou fechada, nunca ambas[10]. Subconjuntos de espaços topológicos, por outro lado, não são portas! Para verificar isso, note que tanto X quanto $\emptyset$ são simultaneamente abertos e fechados. Além disso, diferente das portas, conjuntos ainda admitem um terceiro estado: um subconjunto de um espaço topológico não precisa necessariamente ser aberto ou fechado. Isso ficará mais claro em breve. △

Pelo que se discutiu até aqui, uma topologia $\mathcal{T}$ num conjunto X permite a análise de noções sobre convergência, pois a cada $x \in X$ se associa o filtro $\mathcal{N}_{x,X}$ centrado em x. Um estudo um pouco mais aprofundado sobre convergência será feito na próxima seção. Por ora, vamos nos demorar mais neste primeiro contato com espaços topológicos.

Como cozinhar topologias: bases e sub-bases

O roteiro usual para desbravar novas estruturas começa com a investigação daquelas que são *triviais*, em certo sentido. No caso dos filtros, havia dois tipos de exemplares triviais: o filtro $\wp(X)$, trivial por definição, e o filtro $\{X\}$, moralmente trivial. Tais filtros foram ditos triviais pela relevância das informações que eles carregam. O caso topológico não é diferente: há dois *tipos* de topologias triviais. Num extremo, a família $\wp(X)$ é uma topologia sobre X, segundo a qual *todo* subconjunto é aberto. Noutro extremo, a família $\{\emptyset, X\}$ é uma topologia sobre X, segundo a qual somente X e $\emptyset$ são abertos.

A topologia $\{\emptyset, X\}$ será chamada de **codiscreta**[11], enquanto $\wp(X)$ será chamada de **topologia discreta**: são, respectivamente, a *menor* e a *maior* topologia sobre o conjunto X. Naturalmente, X será chamado de **espaço discreto** se sua topologia for discreta. Em particular, um ponto x de um espaço topológico X é **isolado** se $\{x\}$ for aberto em X.

Exercício 1.13. Convença-se de que um espaço é discreto se, e somente se, todos os seus pontos são isolados. ■

Exemplo 1.1.25 (A topologia cofinita)**.** O primeiro exemplo de filtro não-trivial apresentado foi $\operatorname{cofin}(X) := \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \aleph_0\}$, para qualquer conjunto infinito X. Curiosamente, tal filtro também (quase) serve como exemplo de topologia não-trivial. De fato, $\mathcal{T} := \operatorname{cofin}(X) \cup \{\emptyset\}$ é uma topologia em X:

- ✓ obviamente, $X \in \mathcal{T}$ pois $X \in \operatorname{cofin}(X)$, e $\emptyset \in \mathcal{T}$ por definição;
- ✓ se $A, B \in \mathcal{T}$ são ambos não-vazios, então $X \setminus A$ e $X \setminus B$ são ambos subconjuntos finitos de X, donde segue que $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ é finito e, portanto, $A \cap B \in \mathcal{T}$;
- ✓ se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, então $X \setminus U$ é finito para cada $U \in \mathcal{U}$, e daí $X \setminus (\bigcup \mathcal{U}) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U$ é uma interseção de conjuntos finitos, logo finita e, consequentemente, $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

Em tal topologia, chamada de **topologia cofinita**, um subconjunto $F \subseteq X$ é fechado se, e somente se, $F = X$ ou F é finito. Em particular, se X é infinito, então vale $\mathcal{T} \neq \wp(X)$. Embora pareça artificial, em breve veremos uma situação em que uma topologia muito parecida com a cofinita surge de modo natural. ▲

[10] Exceto na Holanda: `https://en.wikipedia.org/wiki/Dutch_door`.

[11] Há quem a xingue de topologia *antidiscreta*, ou pior: *caótica*.

Observação 1.1.26 (*Spoiler alert*: $\mathrm{T}_1 \not\Rightarrow \mathrm{T}_2$)**.** Note que se $|X| \geq \aleph_0$ e $A, B \subseteq X$ são abertos não-vazios de X com a topologia cofinita, então $A \cap B \neq \emptyset$. △

Exemplo 1.1.27 (Topologias em conjuntos finitos)**.** Embora espaços topológicos finitos surjam em diversos contextos, eles não receberão muita atenção neste livro. Ainda assim, note que qualquer topologia $\mathcal{T}$ em X é um subconjunto de $\wp(X)$, i.e., é um elemento de $\wp(\wp(X))$. Logo, se $|X| = n$ para algum $n \in \omega$, então há no máximo $2^{2^n} = |\wp(\wp(X))|$ topologias em X (pela Proposição K.1.120), um número finito bem grande a depender do número natural n considerado.

Qual o número total de topologias em X? Por mais estranho que pareça, este ainda é um problema em aberto[12]! Convido o leitor interessado em finitudes da vida a verificar que:

- para $n := 0$ ou $n := 1$ há somente uma topologia;
- para $n := 2$ há 4 topologias;
- para $n := 3$ há 29 topologias.

Boa sorte... ▲

Como o exemplo anterior sugere, dado um conjunto X, a família $\mathscr{T}(X)$ das topologias em X é um conjunto farto de elementos. Em particular, assim como no caso dos filtros, $\mathscr{T}(X)$ é rica o suficiente para *gerar* topologias a partir de famílias de subconjuntos de X. De fato, dada uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, a topologia discreta $\wp(X)$ obviamente satisfaz $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$, de modo que o subconjunto $\mathscr{T}_{\mathcal{A}} := \{\mathcal{T} \in \mathscr{T}(X) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}\}$ é não-vazio. Logo, existe o conjunto $\mathcal{T}(\mathcal{A}) := \bigcap \mathscr{T}_{\mathcal{A}}$.

Mostraremos que $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ é uma topologia em X. Isto segue pois:

✓ como $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ para toda topologia $\mathcal{T}$ em X, tem-se $X, \emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$;

✓ se $A, B \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, então $A, B \in \mathcal{T}$ para toda topologia $\mathcal{T} \in \mathscr{T}_{\mathcal{A}}$, donde segue que $A \cap B \in \mathcal{T}$ para toda $\mathcal{T} \in \mathscr{T}_{\mathcal{A}}$ e, por conseguinte, $A \cap B \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$;

✓ se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$, então $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ para toda $\mathcal{T} \in \mathscr{T}_{\mathcal{A}}$, acarretando $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$, donde se infere $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Em particular, qualquer topologia $\mathcal{T}$ em X com $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ satisfaz $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}$. Formalmente, isto significa que $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ é a menor topologia a conter $\mathcal{A}$, ou seja: $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ é a menor topologia em que os elementos de $\mathcal{A}$ são abertos.

Definição 1.1.28. Dizemos que uma topologia $\mathcal{T}$ é **gerada** por uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se valer $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$. ¶

Explicitamente, como os elementos de $\mathcal{A}$ devem ser abertos em $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, segue que para qualquer subconjunto finito $\emptyset \neq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ ocorre $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Logo, como a reunião arbitrária de abertos deve ser aberta, resulta que a reunião arbitrária de conjuntos da forma $\bigcap \mathcal{G}$ deve pertencer a $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. Em outras palavras: os abertos de X de acordo com a topologia $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ são reuniões de interseções finitas de membros de $\mathcal{A}$, exceto possivelmente o próprio X. Por futura conveniência, isto segue destacado na próxima

[12] O atual *status* do problema pode ser consultado em http://oeis.org/A000798.

Proposição 1.1.29. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de X. Então*

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{X\} \cup \left\{\bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\cap}\right\},$$

onde $\overline{\mathcal{A}}^{\cap}$ denota o fecho de $\mathcal{A}$ por interseções finitas.

Observação 1.1.30. Se a família $\mathcal{A}$ satisfaz $\bigcup \mathcal{A} = X$, então é claro que

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \left\{\bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\cap}\right\},$$

essencialmente pelo fato de que, neste caso, ocorrem $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\cap}$ e $\bigcup \mathcal{A} = X$.

Fixada uma topologia $\mathcal{T}$ em X, as referências clássicas costumam dizer que uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é **sub-base** para $\mathcal{T}$ se ocorrer $\bigcup \mathcal{A} = X$ e $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$ ou, explicitamente: se todo aberto de X segundo a topologia $\mathcal{T}$ for reunião de interseções finitas de membros de $\mathcal{A}$, inclusive o próprio X.

É claro que se a família $\mathcal{A}$ já for fechada por interseções finitas, i.e., se ocorrer $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}^{\cap}$, então a descrição dos abertos de X com respeito à topologia $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ é ainda mais fácil: são meramente reuniões de membros de $\mathcal{A}$. Em tais situações é comum abandonar o sufixo "sub".

Definição 1.1.31. Fixada uma topologia $\mathcal{T}$ em X, diz-se que uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é **base** para $\mathcal{T}$ (ou para X, quando $\mathcal{T}$ estiver clara pelo contexto), se ocorrer

$$\mathcal{T} = \left\{\bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}\right\},$$

i.e., se todo aberto de X segundo a topologia $\mathcal{T}$ for reunião de membros de $\mathcal{B}$. ¶

Proposição 1.1.32. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{T}$ uma topologia em X. Para uma família $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ são equivalentes:*

(*i*) *$\mathcal{B}$ é base da topologia $\mathcal{T}$;*

(*ii*) *todo aberto de X segundo $\mathcal{T}$ se escreve como reunião de elementos de $\mathcal{B}$;*

(*iii*) *para qualquer $U \subseteq X$, $U \in \mathcal{T}$ se, e somente se, para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Exercício 1.14. Prove a Proposição 1.1.32. ■

A proposição acima dá critérios para decidir se uma certa família $\mathcal{B}$ de abertos com respeito à uma topologia $\mathcal{T}$ já conhecida é, ou não, base para $\mathcal{T}$. Naturalmente, pode ocorrer o caso em que se precise decidir sobre a existência, ou não, de uma topologia $\mathcal{T}$ que tenha como base uma família fixada $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X.

Proposição 1.1.33. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X. Então a família $\mathcal{B}$ é base para uma topologia em X se, e somente se, $\bigcup \mathcal{B} = X$ e para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$ existir $C \in \mathcal{B}$ com $x \in C \subseteq A \cap B$.*

Demonstração. Se $\mathcal{B}$ for base para alguma topologia em X, digamos $\mathcal{Q}$, então $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Q}$ pois $B = \bigcup\{B\} \in \mathcal{Q}$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Consequentemente, para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$ ocorre $A \cap B \in \mathcal{Q}$ e daí, pela Definição 1.1.31, existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A \cap B = \bigcup \mathcal{G}$. Logo, se $x \in A \cap B$, então existe $C \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subseteq A \cap B$.

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ tem as propriedades enunciadas, então a família

$$\mathcal{S} := \left\{\bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}\right\}$$

é uma topologia, que tem $\mathcal{B}$ como base por construção. De fato:

✓ a condição $\bigcup \mathcal{B} = X$ resulta em $X \in \mathcal{S}$ e, tomando-se $\mathcal{G} = \emptyset$, obtém-se $\emptyset \in \mathcal{S}$;

✓ dados $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$ e $x \in (\bigcup \mathcal{G}) \cap (\bigcup \mathcal{H}) := V$, existem $A_x \in \mathcal{G}, B_x \in \mathcal{H}$ tais que $x \in A_x \cap B_x$, donde por hipótese se obtém $C_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C_x \subseteq A_x \cap B_x$; como isso vale para todo $x \in V$, resulta

$$\left(\bigcup \mathcal{G}\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{H}\right) \subseteq \bigcup_{x \in V} C_x \subseteq \bigcup_{x \in V} (A_x \cap B_x) \subseteq \left(\bigcup \mathcal{G}\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{H}\right),$$

donde segue que $(\bigcup \mathcal{G}) \cap (\bigcup \mathcal{H}) \in \mathcal{S}$;

✓ finalmente, se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$, então $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{S}$ por definição. □

Exercício 1.15. Dados um espaço topológico X e um subconjunto $A \subseteq X$, mostre que A é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um aberto $C \subseteq X$ com $x \in C$ e $C \subseteq A$. ■

Definição 1.1.34. Um **aberto básico** de um espaço topológico X é um aberto pertencente a alguma base para a topologia, geralmente clara pelo contexto. Analogamente, um **fechado básico** é o complementar de um aberto básico. ¶

É claro que se $\mathcal{B}$ é base para uma topologia $\mathcal{T}$, então ocorre $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$, pois qualquer outra topologia que inclua $\mathcal{B}$ também deve incluir conjuntos da forma $\bigcup \mathcal{G}$ com $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$, e estes são, precisamente, os elementos de $\mathcal{T}$, mostrando que $\mathcal{T}$ é a menor topologia contendo $\mathcal{B}$. Por conta disso, é claro que toda base para uma topologia é, também, sub-base. △

Em situações corriqueiras, bases de topologias surgem em dois tipos de ocasiões:

- quando precisa-se cozinhar uma topologia a partir de uma base dada;
- quando já se conhece uma topologia $\mathcal{T}$, mas precisa-se encontrar uma base adequada que descreva os seus abertos.

O próximo exemplo deve servir de ilustração.

Exemplo 1.1.35 (A reta real)**.** O espaço topológico mais importante[13] que existe, o corpo dos números reais $\mathbb{R}$, já teve sua topologia *usual* considerada no texto, embora de maneira implícita (vide o Exemplo 1.1.18). De fato, ao se repetir a construção de $\tau_{\mathcal{V}}$ realizada na Proposição 1.1.20, com $X := \mathbb{R}$ e $\mathcal{V}_x := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}^{\uparrow}$ para cada $x \in \mathbb{R}$, ganha-se uma topologia em $\mathbb{R}$. Explicitamente, $\tau_{\mathcal{V}}$ declara como abertos os subconjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ com $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.

Exercício 1.16. Convença-se que a descrição acima determina uma topologia em $\mathbb{R}$. ■

A menos de menção contrária, daqui em diante, $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais munido dessa topologia, que será chamada de **topologia usual da reta** e, quando necessário, será denotada por $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. Vamos explorá-la um pouco mais demoradamente, a fim de ilustrar os conceitos introduzidos anteriormente.

Exercício 1.17. Convença-se de que cada um dos conjuntos a seguir gera a topologia usual da reta.

a) Como base:

[13] Para a comunidade matemática como um tudo, no sentido de interesse.

(i) $\mathcal{A} := \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{R} \text{ e } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$;

(ii) $\mathcal{B} := \left\{\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) : x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right\}$;

(iii) $\mathcal{C} := \{(a,b) : a < b \text{ e } a, b \in \mathbb{R}\}$;

(iv) $\mathcal{D} := \{(q,r) : q < r \text{ e } q, r \in \mathbb{Q}\}$.

b) Como sub-base:

(i) $\mathcal{E} := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$;

(ii) $\mathcal{F} := \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{(r, +\infty) : r \in \mathbb{Q}\}$.

Dica: para facilitar a tediosa empreitada acima, use o próximo exercício. ■

Exercício 1.18. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para topologias sobre um conjunto X. Mostre que se para todo $C \in \mathcal{C}$ e todo $x \in C$ existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq C$, então $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B})$. ■

Desse modo, intervalos abertos da reta são abertos básicos da topologia usual. Analogamente, intervalos fechados também são fechados. De fato, para números reais a e b, com $a < b$, tem-se $[a,b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, +\infty))$, o complementar de uma reunião de abertos, logo um fechado. Da mesma maneira, mostra-se que intervalos da forma $(-\infty, a]$ e $[b, +\infty)$ são fechados de $\mathbb{R}$, bem como os conjuntos unitários (e por conseguinte, qualquer subconjunto finito). Aproveitemos o momento para verificar que, realmente, conjuntos não são portas.

1. O subconjunto $A := [0,1)$: o ponto $0 \in A$ atesta que A não é aberto, pois não existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ com $0 \in U \subseteq A$; tampouco A é fechado, pois o seu complementar é $B := (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, e o ponto $1 \in B$ atesta que B não é aberto.

2. O subconjunto $C := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$: qualquer intervalo aberto da forma $\left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right)$ com $\varepsilon > 0$ intercepta números irracionais, donde segue que qualquer ponto de C serve como testemunha de que C não é aberto; por sua vez, $D := \mathbb{R} \setminus C$ se expressa como a reunião
$$(-\infty, 0] \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right) \cup (1, +\infty),$$
onde novamente o ponto $0 \in D$ atesta que D não é aberto.

3. O subconjunto $\mathbb{Q}$: o conjunto dos números racionais não é aberto pois qualquer intervalo aberto contém pontos irracionais; tampouco $\mathbb{Q}$ é fechado pois, o seu complementar, o conjunto dos números irracionais, não é aberto (por um motivo análogo).

É óbvio que ao se adicionar o ponto 1 ao subconjunto $[0,1)$ se obtém o fechado $[0,1]$, e o leitor não deve ter dificuldades em notar que $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é fechado. Agora, quais pontos devem ser adicionados ao conjunto $\mathbb{Q}$ a fim de fechá-lo de maneira *ótima* ou, em outras palavras: *qual é o menor fechado que contém $\mathbb{Q}$?*

Certamente *algum* fechado contém $\mathbb{Q}$, pois $\mathbb{R}$ é fechado. Agora, se $F \subseteq \mathbb{R}$ é um fechado tal que $\mathbb{Q} \subseteq F$, então $\mathbb{R} \setminus F$ é um aberto que está contido em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Isto só é possível se $\mathbb{R} \setminus F = \emptyset$, i.e., se $F = \mathbb{R}$. Estamos diante da versão topológica da densidade (Definição K.2.124), cuja urgência exige o abandono momentâneo da reta real. ▲

Fecho, interior e pontos de acumulação

O exemplo anterior mostrou que $\mathbb{R}$ é o menor fechado que contém $\mathbb{Q}$, e a justificativa para isso se valeu do fato de $\emptyset$ ser o maior aberto contido em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Secretamente, tais argumentos fazem uso das noções de *fecho* e *interior*, respectivamente.

Dado um subconjunto A de um espaço topológico X, podemos considerar a família $\mathscr{F} := \{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}$, que é não-vazia por termos $X \in \mathscr{F}$.

Definição 1.1.36. Nas condições acima, o subconjunto $\overline{A} := \bigcap \mathscr{F}$ será chamado **fecho** (topológico) do conjunto A. ¶

Da definição acima, é fácil ver que $\overline{A}$ é o menor fechado contendo A. Na verdade, $\overline{A}$ fica completamente determinado por tal propriedade: se $F \subseteq X$ for o menor fechado que contém A, então deve ocorrer $F = \bigcap \mathscr{F}$.

Agora, considere a família de abertos $\mathscr{U} := \{U \subseteq X : U \text{ é aberto e } U \subseteq A\}$.

Definição 1.1.37. Nas condições acima, o subconjunto $\operatorname{int}(A) := \bigcup \mathscr{U}$ será chamado de **interior** do conjunto A. ¶

De modo análogo ao caso do fecho, é fácil ver que $\operatorname{int}(A)$ se caracteriza como o maior aberto contido em A, no sentido de que qualquer outro aberto contido em A deve, necessariamente, estar contido em $\operatorname{int}(A)$.

Exercício 1.19. Convença-se de que as afirmações anteriores são verdadeiras. ■

Exercício 1.20. Observe que para um espaço topológico X e um subconjunto $A \subseteq X$, A é fechado (resp. aberto) se, e somente se, $A = \overline{A}$ (resp. $A = \operatorname{int}(A)$). ■

Observação 1.1.38. Quando precisarmos MUITO especificar o espaço topológico *ambiente*, digamos $(X, \mathcal{T})$, escreveremos $\operatorname{cl}_{\mathcal{T}}(A)$ ou $\operatorname{cl}_X(A)$ em vez de $\overline{A}$, bem como $\operatorname{int}_{\mathcal{T}}(A)$ ou $\operatorname{int}_X(A)$ em vez de $\operatorname{int}(A)$. △

Embora úteis, essas descrições abstratas de fecho e interior não são compatíveis com a intuição atomista promovida pela Teoria dos Conjuntos. Por essas e outras razões, faz sentido provar a

Proposição 1.1.39. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então*

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall V \in \mathcal{T}_x\,(A \cap V \neq \emptyset)\} \quad e \quad \operatorname{int}(A) = \{x \in A : \exists V \in \mathcal{T}_x\,(V \subseteq A)\}.$$

Demonstração. Por simplicidade, vamos escrever $C := \{x \in X : \forall V \in \mathcal{T}_x\,(A \cap V \neq \emptyset)\}$ e $D := \{x \in A : \exists V \in \mathcal{T}_x\,(V \subseteq A)\}$. Agora, para a primeira igualdade, basta mostrar que C é o menor fechado que contém A:

✓ é claro que $A \subseteq C$;

✓ se $x \notin C$, então existe $V \in \mathcal{T}_x$ com $V \cap A = \emptyset$, daí $V \subseteq X \setminus C$, mostrando que $X \setminus C$ é aberto (Exercício 1.15)[14] e, por conseguinte, C é fechado;

✓ se $A \subseteq F$ com F fechado, então um ponto $x \notin F$ é tal que $x \in X \setminus F$ e, como $X \setminus F$ é um aberto satisfazendo $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$, segue que $x \notin C$, implicando em $X \setminus F \subseteq X \setminus C$, i.e., $C \subseteq F$.

[14] Alternativamente: use o item *(iii)* da Proposição 1.1.32.

Para a segunda identidade, basta mostrar que D é o maior aberto contido em A:

- ✓ é claro que $D \subseteq A$;
- ✓ note que se $x \in D$, então existe $V \in \mathcal{T}_x$ com $V \subseteq A$, donde segue $y \in D$ para todo $y \in V$ e, por isso, D é aberto;
- ✓ se $U \subseteq A$ é um aberto não-vazio, então obviamente $U \subseteq D$. □

A depender da situação, as definições mais abstratas se aplicam melhor do que as descrições *atômicas*. A fim de ilustrar o uso das descrições abstratas, vejamos algumas propriedades do *operador* fecho, válidas para quaisquer $A, B \subseteq X$.

(CO$_1$) $A \subseteq \overline{A}$: $\overline{A}$ é o menor fechado que contém A.

(CO$_2$) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$: $\overline{A}$ é fechado, logo o próprio já é o menor fechado a *se conter*.

(CO$_3$) $\overline{\emptyset} = \emptyset$: segue do anterior.

(CO$_4$) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: por valer $A \subseteq \overline{A}$ e $B \subseteq \overline{B}$, obtém-se $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, e a minimalidade de $\overline{A \cup B}$ acarreta $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$; a inclusão contrária segue pois A e B estão contidos em $A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$, logo $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são subconjuntos de $\overline{A \cup B}$ e, por conseguinte, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Propriedades *duais* são válidas para o *operador* interior, para quaisquer $A, B \subseteq X$.

(IO$_1$) $\operatorname{int}(A) \subseteq A$.

(IO$_2$) $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$.

(IO$_3$) $\operatorname{int}(X) = X$.

(IO$_4$) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

O leitor interessado pode provar diretamente as propriedades acima ou, se preferir, pode *dualizá-las* formalmente a partir das propriedades do fecho por meio da próxima

Proposição 1.1.40. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então* $\operatorname{int}(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Demonstração. Três coisas devem ser mostradas.

- ✓ $X \setminus \overline{X \setminus A}$ é um aberto.
- ✓ $X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq A$: como $X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$, segue que $X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A$.
- ✓ Se $U \subseteq X$ é aberto e $U \subseteq A$, então $U \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$: como $U \subseteq A$, segue que $X \setminus A \subseteq X \setminus U$ e daí, por $X \setminus U$ ser fechado e $\overline{X \setminus A}$ ser o menor fechado a conter $X \setminus A$, resulta $\overline{X \setminus A} \subseteq X \setminus U$ e, consequentemente, $U \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$, como queríamos. □

Exercício 1.21. *Tente* provar as propriedades acima usando as *caracterizações atômicas* da Proposição 1.1.39. Conclua que propriedades abstratas são, absolutamente, as melhores coisas da vida. ■

Intuitivamente, o fecho do conjunto A consiste dos pontos de X que são *arbitrariamente próximos* dos pontos de A, enquanto o interior do conjunto A consiste dos pontos de A que estão *dentro* de A com alguma *folga*. Assim, a Proposição 1.1.40 diz que estar *dentro* de A com *folga* é o mesmo que não estar *arbitrariamente próximo* do complementar de A, algo bastante razoável. Na literatura, o leitor frequentemente encontrará os elementos de $\overline{A}$ (resp. de $\operatorname{int}(A)$) chamados de **pontos aderentes** (resp. **pontos interiores**) de A.

Observação 1.1.41 (Vizinhança vs. vizinhança de um ponto)**.** A noção de interior permite dar uma definição bem mais precisa para vizinhanças: $V \subseteq X$ é uma **vizinhança** se $\operatorname{int}(V) \neq \emptyset$; V é **vizinhança do ponto** $x \in X$ se $x \in \operatorname{int}(V)$. Assim, por exemplo, embora $[0,1]$ seja *uma* vizinhança (pois contém um aberto não-vazio) e ocorra $0 \in [0,1]$, $[0,1]$ não é uma *vizinhança de* 0, pois $0 \notin \operatorname{int}([0,1]) = (0,1)$. △

Antes de discutir novos exemplos, convém analisar o fenômeno observado entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sob a luz das novas definições.

Definição 1.1.42. Em geral, um subconjunto D de um espaço topológico X satisfazendo $\overline{D} = X$ é chamado de (subconjunto) **denso** de X. ¶

Equivalentemente:

Corolário 1.1.43 (da Proposição 1.1.39)**.** *Sejam X um espaço topológico e $D \subseteq X$. Então D é denso se, e somente se, para todo $V \subseteq X$ aberto com $V \neq \emptyset$ valer $V \cap D \neq \emptyset$.*

Na intuição topológica do dia a dia, dizer que $D \subseteq X$ é denso em X significa afirmar que todo ponto de X está *arbitrariamente próximo* de algum ponto de D. Assim, ao se afirmar que "o subconjunto dos edpistas é denso no conjunto dos matemáticos", abrevia-se a sentença "todo matemático está arbitrariamente próximo de um edpista", o que por sua vez é um dos fatos ~~tristes~~ corriqueiros da vida.

Observação 1.1.44. Em certo sentido, "ter interior vazio" é o conceito dual a "ser denso". De fato, se $D \subseteq X$ é denso, então

$$\operatorname{int}(X \setminus D) = X \setminus \overline{X \setminus (X \setminus D)} = X \setminus \overline{D} = X \setminus X = \emptyset,$$

e, por sua vez, se $A \subseteq X$ tem interior vazio, então $X \setminus A$ é denso, pois

$$X \setminus \overline{X \setminus A} = \operatorname{int}(A) = \emptyset \Rightarrow X = \overline{X \setminus A}.$$

Assim, o fato de $\mathbb{Q}$ ser denso é equivalente ao fato de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ter interior vazio. △

Exercício 1.22. Prove que $\mathbb{Q}$ é denso por meio do Corolário 1.1.43. Conclua que caracterizações atômicas são, absolutamente, as melhores coisas da vida. ■

Exercício 1.23. Compare os Exercícios 1.21 e 1.22. Conclua que não existem conclusões absolutas, exceto, possivelmente, esta. ■

Exemplo 1.1.45 (A topologia do espectro)**.** Recordemo-nos de que para um anel comutativo e com unidade R fixado, um subconjunto $P \subsetneq R$ é xingado de **ideal primo** (Definição K.2.87) se P for um ideal (fechado por combinações R-lineares) e valer $x \in P$ ou $y \in P$ sempre que $xy \in P$.

Consideremos então a família

$$\operatorname{Spec}(R) := \{P \subsetneq R : P \text{ é ideal primo}\}, \tag{1.5}$$

chamada de **espectro do anel** R. Este conjunto admite uma topologia natural *induzida* pelos conjuntos da forma

$$V(I) := \{P \in \operatorname{Spec}(R) : I \subseteq P\}, \tag{1.6}$$

conforme I percorre a família de todos os ideais de R. A escolha pela expressão “induzida” em vez de “gerada” foi feita com cuidado: os conjuntos $V(I)$ não são abertos na topologia que exibiremos. Isso ficará mais claro adiante, após examinarmos o comportamento dos conjuntos da forma $V(I)$; por simplicidade, faremos $X := \operatorname{Spec}(R)$.

- ✓ Todo ideal primo de R contém o ideal nulo $\langle 0\rangle$, e nenhum ideal primo de R contém o próprio R, donde segue que $V(\langle 0\rangle) = X$ e $V(R) = \emptyset$.
- ✓ Se I e J são ideais de R, então o ideal $IJ \subseteq R$, definido como o menor ideal que contém os elementos da forma $\alpha\beta$, com $\alpha \in I$ e $\beta \in J$, é tal que $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.
- ✓ Se $\{I_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de ideais de R, então o ideal $\sum_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$, definido como o menor ideal que contém a família $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$, é tal que

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} V(I_\gamma) = V\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma\right).$$

Em outras palavras, os conjuntos da forma $V(I)$ se comportam, precisamente, como se esperaria que os fechados de *uma topologia* em X se comportassem (Proposição 1.1.23). Logo, basta declarar $A \subseteq X$ aberto se, e somente se, existe um ideal I de R tal que $X \setminus A = V(I)$, para assim obter uma topologia em X nos moldes da definição oficial[15]. Tal topologia é conhecida como **topologia de Zariski**.

Assim, no espaço $\operatorname{Spec}(R)$, os pontos são os ideais primos de R e os abertos são reuniões de abertos da forma $D_R(r) := D(r) := \operatorname{Spec}(R) \setminus V(\langle r\rangle)$, conforme r varia em R. De fato, isto segue pois $\operatorname{Spec}(R) \setminus V(I) = \bigcup_{r\in I} D(r)$ para qualquer ideal I de R. Em linguajar topologicamente mais técnico, a família $\{D(r) : r \in R\}$ é base para a topologia de Zariski sobre $\operatorname{Spec}(R)$. A escolha por apresentar este espaço agora se deve à próxima

Proposição 1.1.46. *Se* $P \in \operatorname{Spec}(R)$, *então* $\overline{\{P\}} = V(P)$.

Demonstração. Como $P \subseteq P$, tem-se $P \in V(P)$ e assim $\overline{\{P\}} \subseteq V(P)$: com efeito, $\overline{\{P\}}$ é o menor fechado que contém $\{P\}$, e $V(P)$ é um fechado nativo de $\operatorname{Spec}(R)$ por definição. Por outro lado, se $P \in V(I)$ para algum I, então $I \subseteq P$. Logo, se $Q \in V(P)$, então $P \subseteq Q$ e, por conseguinte, $I \subseteq Q$, i.e., $Q \in V(I)$, mostrando que $V(P) \subseteq V(I)$. Em outras palavras, $V(P)$ é o menor fechado que contém $\{P\}$, como queríamos. □

Uma pergunta bastante pertinente a se fazer então seria: e daí? Bom, por valer $V(\langle 0\rangle) = \operatorname{Spec}(R)$, o resultado acima diz que se $\langle 0\rangle$ for um ideal primo em R, então o fecho do conjunto unitário $\{\langle 0\rangle\}$ em $\operatorname{Spec}(R)$ é $\operatorname{Spec}(R)$. Informalmente, temos um ponto denso! Isso ilustra bem que a intuição geométrica não dita as regras por aqui.

[15] Na prática, isso mostra que é legítimo definir topologias tanto por meio de abertos quanto por fechados.

É também com a topologia de Zariski que se obtém um "quase-exemplo" natural de topologia cofinita. De fato, tomando o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$, tem-se

$$\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}) = \{\langle 0\rangle\} \cup \{\langle p\rangle : p \in \mathbb{Z} \text{ é primo}\}.$$

Note que para qualquer número primo $p \in \mathbb{Z}$ ocorre

$$\overline{\{\langle p\rangle\}} = V(\langle p\rangle) = \{\langle q\rangle \in \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z}) : \langle p\rangle \subseteq \langle q\rangle\} = \{\langle p\rangle\},$$

mostrando que a menos do ponto $\langle 0\rangle$, todos os seus *pontos são fechados* e, por conseguinte, conjuntos finitos que não contêm o ponto $\langle 0\rangle$ também são fechados. Fica a cargo do leitor verificar que esses são os únicos fechados não-triviais de $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$. ▲

Observação 1.1.47 (*Spoiler alert*: $\mathrm{T}_0 \not\Rightarrow \mathrm{T}_1$)**.** Note que se $P, Q \in \mathrm{Spec}\,(R)$ são distintos, então há $h \in P \setminus Q$ ou $h \in Q \setminus P$. Se, por exemplo, valer o primeiro caso, então $D(h)$ é um aberto de $\mathrm{Spec}\,(R)$ tal que $Q \in D(h)$ e $P \notin D(h)$. Ainda assim, vimos que se $\langle 0\rangle$ for ideal primo, então $\{\langle 0\rangle\}$ não é fechado. △

Exemplo 1.1.48 (Subespaços topológicos)**.** De volta ao reino abstrato, suponha que $(X, \mathcal{T})$ seja um espaço topológico e considere $Y \subseteq X$ um subconjunto qualquer. É natural esperar que Y admita uma estrutura topológica oriunda de X pois, se existe uma noção de *proximidade* no conjunto "maior", com ainda mais razão deveria existir uma noção parecida no conjunto "menor". Realmente, a família $\mathcal{T}|_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em Y, chamada de **topologia de subespaço** em Y, e $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ é dito um **subespaço topológico** de $(X, \mathcal{T})$.

A menos de menção explícita contrária, todo subconjunto de X será considerado com sua respectiva topologia induzida e, por conseguinte, será automaticamente considerado um subespaço topológico: isso evitará repetições desnecessárias da expressão "subespaço topológico", que tornariam o texto mais carregado do que já é. Em particular, é claro que se $\mathcal{B}$ for sub-base/base para a topologia $\mathcal{T}$ em X, então $\mathcal{B}|_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é sub-base/base para a topologia $\mathcal{T}|_Y$ em Y. Além disso[16]

- se Y é aberto, então $A \subseteq Y$ é aberto de Y se, e somente se, A é aberto de X, e
- se Y é fechado, então $F \subseteq Y$ é fechado de Y se, e somente se, F é fechado de X.

Contudo, em geral, o fato de $A \cap Y$ ser aberto (ou fechado) em Y não garante que $A \cap Y$ seja aberto (ou fechado) em X: $[0, 1)$ é aberto em $[0, 2]$, por exemplo. ▲

Observação 1.1.49 (Cuidado!)**.** Se $Y \subseteq X$, então $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ é um espaço topológico e, por conseguinte, Y é tanto aberto quanto fechado em Y! △

O leitor experiente certamente notou que a topologia usual de $\mathbb{R}$ é oriunda de um caso mais geral. Vamos explorar tal contexto a seguir.

Exemplo 1.1.50 (A topologia da ordem)**.** Seja $(\mathbb{T}, \leq)$ uma ordem total e, para cada $t \in \mathbb{T}$, considere os intervalos ilimitados em $\mathbb{T}$:

$$(-\infty, t) := \{x \in \mathbb{T} : x < t\} \tag{1.7}$$
$$(t, +\infty) := \{x \in \mathbb{T} : t < x\}. \tag{1.8}$$

[16] O segundo item é uma consequência da descrição dos fechados de Y: são da forma $Y \cap G$, com $G \subseteq X$ fechado, o que por sua vez decorre da identidade $Y \cap (X \setminus A) = Y \setminus (Y \cap A)$.

A **topologia da ordem** sobre $\mathbb{T}$ é gerada pela sub-base composta pelos conjuntos da forma (1.7) e (1.8), conforme t percorre o conjunto $\mathbb{T}$. Como as interseções finitas de intervalos ilimitados constituem uma base para $\mathbb{T}$, segue que também são abertos básicos os intervalos da forma $(a,b) := \{x \in \mathbb{T} : a < x < b\}$, para $a, b \in \mathbb{T}$ com $a < b$. Em particular, note que se existir $\max \mathbb{T}$, então $(t, +\infty) = (t, \max \mathbb{T}]$, com uma observação dual válida se existir $\min \mathbb{T}$.

É imediato que a topologia usual da reta real $\mathbb{R}$ é, precisamente, a topologia induzida por sua ordem total. Além disso, para qualquer intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, a topologia de I como subespaço de $\mathbb{R}$ coincide com a topologia induzida da ordem em I. De fato, os abertos básicos de I são da forma $J := I \cap (a,b)$ e, como I é intervalo, segue do Exercício K.75 que J é intervalo de I. As verificações de todas essas coisas ficam a cargo do leitor.

Mais geralmente, se $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$, então existem duas escolhas naturais de topologia para o subconjunto $\mathbb{S}$:

- a oriunda da ordem induzida de $(\mathbb{T}, \leq)$;
- a topologia induzida como subespaço topológico de $\mathbb{T}$.

Neste primeiro contato, pode parecer tentador assumir que elas coincidam. Embora isso nem sempre ocorra (como mostra o exercício seguinte), a afirmação é verdadeira se $\mathbb{S}$ for um intervalo (como mostra o exercício subsequente).

Exercício 1.24. Sejam $(\mathbb{T}, \leq)$ uma ordem total e $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ um subconjunto. Considere $\mathbb{T}$ munido da topologia da ordem e, sobre $\mathbb{S}$, tome $\mathcal{R}$ e $\mathcal{O}$ as topologias de subespaço e da ordem (em $\mathbb{S}$), respectivamente. Mostre que $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{R}$. Em particular, com $\mathbb{T} := \mathbb{R}$ e $\mathbb{S} := [0,1] \cup (2,3]$, mostre que a inclusão $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{R}$ é estrita. Dica: com a ordem induzida, o que vem *depois* de 1 em $\mathbb{S}$? ■

Exercício 1.25. Sejam $\mathbb{T}$ uma ordem total e $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{T}$ um intervalo. Mostre que a topologia de $\mathbb{I}$ como subespaço de $\mathbb{T}$ coincide com sua topologia da ordem. ■

A topologia da ordem também encontra lar natural nos números ordinais[17]. Com efeito, como um número ordinal α é bem-ordenado pela relação $\in$, é legítimo dotá-lo da topologia da ordem, o que resulta em espaços com propriedades bastante incomuns. Nesse aspecto, a primeira peculiaridade dos ordinais se refere aos intervalos fechados da forma $[a,b]$: como em $\mathbb{R}$, eles também são fechados mas, neste caso[18], também são abertos.

Proposição 1.1.51. *Se α é ordinal e $\gamma < \beta < \alpha$, então $[\gamma, \beta]$ é aberto básico de α.*

Demonstração. Pode ocorrer $\beta + 1 = \alpha$ ou $\beta + 1 < \alpha$ e $\gamma = \delta + 1$ para $\delta \geq 0$ ou $\gamma = 0$, donde segue que $[\gamma, \beta]$ pode ser reescrito como um aberto básico de α: por exemplo, se $\beta + 1 < \alpha$ e $\gamma = \delta + 1$, então $[\gamma, \beta] = (\delta, \beta + 1)$, um aberto básico típico de α. Os demais casos são análogos. □

[17] O leitor que não sabe o que são ordinais (e que prefere continuar sem saber) pode ignorar o restante da discussão ou trabalhar a mais para traduzir as considerações feitas para ordinais. Por exemplo: em vez de ordinais, pense em conjuntos bem ordenados; para definir o sucessor de um elemento x, considere o menor elemento da ordem maior do que x, se tal elemento existir, etc. Quem quiser saber o que são ordinais, pode conferir a Subseção K.1.4 do *Kindergarten*.

[18] Cuidado: os elementos pertencentes a um intervalo $[\alpha, \beta]$ dependem, obviamente, da ordem em que o intervalo é tomado. Note, por exemplo, que $[0,1]$ em ω tem apenas dois elementos, enquanto $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ tem $2^{\aleph_0}$ pontos.

Observação 1.1.52. É fácil ver que se α e β são ordinais, com $\alpha \in \beta$, então α é um intervalo de β: lembre-se que como ordinais são transitivos, se $\alpha \in \beta$, então $\alpha \subseteq \beta$ (Observação K.1.82). Assim, pelo Exercício 1.25, a topologia de α oriunda de sua ordem coincide com a topologia de subespaço herdada de β. Isso justifica a prática comum de denotar os ordinais α e $\alpha+1$ como $[0,\alpha)$ e $[0,\alpha]$, respectivamente. △

Uma consequência bastante particular da última proposição é que o ordinal $[0,\omega)$, *a.k.a.* o conjunto dos números naturais, munido da topologia da ordem, é discreto: basta notar que se $n \in \omega$, então $\{n\} = [n, n+1]$, com ambos $n, n+1 < \omega$. Por outro lado, $[0,\omega]$ não é discreto! Com efeito, um aberto básico *em torno* de $\omega \in [0,\omega]$ é da forma $(n,\omega]$, com $n < \omega$. Logo, qualquer aberto $V \subseteq [0,\omega]$ com $\omega \in V$ é necessariamente infinito, donde segue que $\{\omega\}$ não é aberto. Mais geralmente, tem-se a

Proposição 1.1.53. *Seja α um ordinal munido da topologia da ordem. Se $H \subseteq \alpha$ é não-vazio, então H, com a topologia de subespaço, tem um ponto isolado.*

Demonstração. Se $|H| = 1$ nada há a provar. Se H tem pelo menos dois pontos, então existem $h := \min H$ e $h' := \min(H \setminus \{h\})$. Daí $[h,h') \cap H = \{h\}$. □

Observação 1.1.54. Esse comportamento é dramaticamente oposto ao da reta real: todos os pontos de $H := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ são não-isolados, por exemplo. Espaços com a propriedade descrita na proposição anterior são chamados de **dispersos**[19]. △

Ao longo de todo o texto, a menos de menção contrária, ordinais serão considerados com suas respectivas topologias da ordem. Mais geralmente, os **espaços totalmente ordenados**, i.e., aqueles cuja topologia é oriunda de uma ordem total, serão recorrentes neste trabalho. ▲

No exemplo anterior, pontos não-isolados surgiram de uma maneira bastante *natural*. Como estes são bois que veremos com muita frequência, convém nomeá-los.

Definição 1.1.55. Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ um subconjunto e $x \in X$. Dizemos que x é **ponto de acumulação** de A se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, e denota-se por

$$A^{\mathrm{d}} := \{x \in X : x \text{ é ponto de acumulação de } A\}$$

o conjunto dos pontos de acumulação de A, chamado de **conjunto derivado** de A. ¶

Explicitamente, $x \in A^{\mathrm{d}}$ se, e somente se, $\emptyset \neq V \cap (A \setminus \{x\})$ para qualquer vizinhança V de x. Pontos de acumulação se relacionam com pontos aderentes por meio da relação

$$\overline{A} = A \cup A^{\mathrm{d}}, \tag{1.9}$$

cuja verificação simples fica a cargo do leitor. Em particular, como A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$, resulta que A é fechado se, e somente se, $A^{\mathrm{d}} \subseteq A$.

Observação 1.1.56. Embora a notação A^{d} não denuncie, o espaço ambiente X precisa estar claro no contexto ao se tratar dos pontos de acumulação de A, para evitar o risco de ambiguidades. Considere, por exemplo, o conjunto $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$: visto como subconjunto de $X := \mathbb{R}$, é fácil se convencer de que $A^{\mathrm{d}} = \{0\}$; contudo, se fosse $X := A$, teria-se $A^{\mathrm{d}} = \emptyset$. Por isso, a menos de menção explícita em contrário, considera-se o espaço ambiente X que estiver fixado pelo contexto.

[19] *Scattered spaces* nas referências estrangeiras.

Também convém destacar que o conjunto derivado, relacionado com o (operador) fecho por meio da identidade (1.9), não se comporta da mesma forma que o fecho: por exemplo, pode ocorrer $X^{\mathrm{d}} \neq X$. Com efeito, para $x \in X$, não é difícil provar que

$$x \text{ é ponto isolado de } X \Leftrightarrow x \notin X^{\mathrm{d}}. \tag{1.10}$$

Desse modo, X^{d} é, precisamente, a coleção de todos os pontos de X que são não-isolados, i.e., dos pontos x tais que $\{x\}$ não é aberto, motivo pelo qual $X^{\mathrm{d}} = \emptyset$ sempre que X é discreto. A coisa começa a ficar interessante agora: embora os pontos isolados de X estejam excluídos de X^{d}, nada impede que X^{d} tenha pontos isolados quando visto como espaço topológico, ou seja: podem existir $x \in X^{\mathrm{d}}$ e $V \subseteq X$ aberto tais que $V \cap X^{\mathrm{d}} = \{x\}$.

Exercício 1.26. Exiba um espaço topológico X tal que X^{d} seja discreto e não-vazio. Dica: você já viu isso. ■

Em geral, vale o seguinte:

Proposição 1.1.57. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então $A^{\mathrm{d}} = \emptyset$ se, e somente se, A é um subespaço discreto e fechado de X.*

Demonstração. Por um lado, se $A^{\mathrm{d}} = \emptyset$, (1.9) diz que A é fechado. Por outro lado, dado $x \in A$, a vacuidade de A^{d} garante um subconjunto aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $V \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$, i.e., tal que $V \cap A = \{x\}$, mostrando que x é isolado em A. Reciprocamente, por A ser discreto, nenhum elemento de A pode ser ponto de acumulação de A e, por A ser fechado, o aberto $X \setminus A$ atesta que tampouco os elementos de $X \setminus A$ podem pertencer a A^{d}, donde segue que $A^{\mathrm{d}} = \emptyset$. □

É historicamente importante mencionar que a ideia dos números ordinais, de Cantor, emergiu de seu trabalho com conjuntos derivados de números reais: há subconjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ para os quais $A^{\mathrm{d}}, \left(A^{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{d}}, \left(\left(A^{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{d}}, \ldots$ são dois a dois distintos e têm interseção não-vazia, digamos B, o que permite que se faça $B^{\mathrm{d}}, \left(B^{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{d}}, \ldots$ i.e., considerar iterações que excedem os primeiros ω passos. Tal procedimento leva à definição da chamada *derivada de Cantor-Bendixson*, tema que será abordado brevemente no Capítulo 3. △

Exemplo 1.1.58 (Espaços pseudométricos e calibres[20]). Dado um conjunto X, diz-se que uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é uma **pseudométrica** se para $x, y, z \in X$ quaisquer ocorrer

- (pm_1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, x) = 0$,
- (pm_2) $d(x, y) = d(y, x)$ (é simétrica) e
- (pm_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (satisfaz a **desigualdade triangular**).

Uma família $\mathcal{G}$ de pseudométricas em X é um **calibre** em X, e dizemos que $(X, \mathcal{G})$ é um **espaço de calibre**. Se o calibre $\mathcal{G}$ for composto por uma única pseudométrica d em X, dizemos que (X, d) é um **espaço pseudométrico**. Tais espaços vêm de fábrica com uma topologia, definida em termos de uma generalização bastante natural dos *intervalos* da reta.

Definição 1.1.59. Dado um espaço pseudométrico (X, d), para cada ponto $x \in X$ e número real $r > 0$, definem-se:

[20] *Gauge*, nas referências estrangeiras.

(*i*) a d-**bola aberta de centro** x **e raio** r como $B_d(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$;

(*ii*) a d-**bola fechada de centro** x **e raio** r como $B_d[x,r] := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$. ¶

Fixado um espaço pseudométrico (X, d), a família $\mathcal{B}_d := \{B_d(x,r) : x \in X \text{ e } r \in \mathbb{R}_{>0}\}$ é base para uma topologia $\mathcal{T}_d$ em X, que se diz ser *induzida pela pseudométrica* d. Pela Proposição 1.1.33, basta observar os dois pontos a seguir.

✓ Como $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$, tem-se $x \in B_d(x,r)$ para todo $r > 0$.

✓ Se $x \in B_d(y,r) \cap B_d(z,s)$, então $d(x,y) < r$ e $d(x,z) < s$, de modo que fazendo $\delta = \min\{r', s'\}$, onde $r' := r - d(x,y) > 0$ e $s' := s - d(x,z)$, resulta a inclusão $B_d(x,\delta) \subseteq B_d(y,r) \cap B_d(z,s)$: com efeito, se $u \in B_d(x,\delta)$ e $p \in \{y,z\}$, então

$$d(u,p) \leq d(u,x) + d(x,p) < \delta + d(x,p) \Rightarrow d(u,y) < r \quad \text{e} \quad d(u,z) < s,$$

donde segue a inclusão desejada.

Assim, em tal topologia, d-bolas abertas são *abertas*, e não apenas gramaticalmente. Analogamente, d-bolas fechadas são *fechadas*, uma vez que $y \notin B_d[x,r]$ se, e somente se, $d(x,y) - r > 0$, resultando em

$$X \setminus B_d[x,r] = \bigcup_{y \notin B_d[x,r]} B_d(y, d(x,y) - r).$$

Mais geralmente, um calibre num conjunto X induz uma topologia $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ ao se considerar a topologia em X gerada por todas as topologias $\mathcal{T}_d$, com $d \in \mathcal{G}$, i.e., $\mathcal{T}_\mathcal{G} := \mathcal{T}\left(\bigcup_{d\in\mathcal{G}} \mathcal{T}_d\right)$ no sentido da Definição 1.1.28: explicitamente, é a menor topologia que torna abertas (todas) as d-bolas *abertas*, conforme d percorre $\mathcal{G}$. Em particular, do que já se discutiu ao longo desta seção, não é difícil ver que uma base para $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ é composta por conjuntos da forma

$$B_D(x,r) := \bigcap_{d\in D} B_d(x,r), \tag{1.11}$$

para quaisquer subconjuntos finitos $D \subseteq \mathcal{G}$ e $r \in \mathbb{R}$, com $D \neq \emptyset$ e $r > 0$. Espaços pseudométricos e de calibre sempre serão considerados com suas topologias induzidas. Dito isso...

Definição 1.1.60. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

(*i*) Dizemos que o espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é **calibrável** se existir um calibre $\mathcal{G}$ em X tal que $\mathcal{T}_\mathcal{G} = \mathcal{T}$.

(*ii*) Dizemos que o espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é **pseudometrizável** se sua topologia for calibrável por um calibre composto por uma única pseudométrica.

Em ambos os casos, diz-se que o calibre (ou a pseudométrica) é **compatível** com a topologia $\mathcal{T}$. ¶

Pseudométricas permitem interpretar pontos de acumulação de maneira bastante amigável, quase concreta. De fato, dado um subconjunto A de um espaço de calibre $(X, \mathcal{G})$, em vista da Proposição 1.1.39, o fecho de A é composto pelos pontos $x \in X$ cujas vizinhanças *sempre* interceptam A, i.e.,

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow V \cap A \neq \emptyset \text{ para toda vizinhança } V \in \mathcal{T}_x.$$

Assim, fixado $x \in \overline{A}$, pode-se restringir a equivalência acima para os abertos básicos de X. Logo, para qualquer subconjunto finito $\emptyset \neq D \subseteq \mathcal{G}$ existe $x_D \in A \cap B_D(x, r_D)$, onde $r_D := \frac{1}{|D|}$, o que faz sentido pois $0 < |D| < \aleph_0$. De certa forma, esse processo resulta numa espécie de *sequência* $(x_D)_{D \in \mathcal{D}}$, com a diferença de que os índices D habitam $\mathcal{D} := [\mathcal{G}]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\}$ em vez de percorrerem o conjunto ω.

Embora soe artificial, essa sequência apresenta um comportamento *convergente*: dada uma vizinhança $B_D(x, r)$ de x, existe $n \in \omega$ tal que $|D| < n$ e $\frac{1}{n} < r$, de modo que para qualquer $D' \subseteq \mathcal{G}$ com $|D'| = n$ e $D \subsetneq D'$, deve-se ter $x_E \in B_D(x, r)$ para todo $E \subseteq \mathcal{G}$ finito com $D' \subseteq E$. Por mais estranho que pareça, é como se fizesse sentido escrever $x_D \to x$.

O leitor atento deve ter percebido que a argumentação acima depende, implicitamente, de se supor $|\mathcal{G}| \geq \aleph_0$. Todavia, os casos em que $|\mathcal{G}| < \aleph_0$ são ainda mais claros: tomando-se como ilustração[21] o caso em que $\mathcal{G} := \{d\}$, basta *escolher* $x_n \in A \cap B_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right)$ para cada $n \in \omega$, o que resulta numa sequência *bona fide* $(x_n)_{n \in \omega}$ que, claramente, satisfaz um *critério de convergência* com cheiro de infância: para qualquer d-bola aberta $B := B_d(x, r)$ existe $N \in \omega$ com $x_n \in B$ para todo $n \geq N$, essencialmente a mesma definição de convergência dada no Exemplo 1.1.18. Abreviando-se essa última condição com os símbolos "$x_n \to x$", o que se provou foi a

Proposição 1.1.61. *Se (X, d) é espaço pseudométrico, $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ em A tal que $x_n \to x$.*

Geralmente, a condição $x \in \overline{A}$ não basta para garantir a existência de uma sequência em A que converge para x, embora a recíproca seja verdadeira. Na próxima seção, discutiremos os pormenores disso com mais calma, entre outras coisas, como observar que a *sequência* $(x_D)_{D \in \mathcal{D}}$ definida acima faz parte de um tipo de objeto mais geral utilizado no estudo de convergência: as *nets*. De qualquer forma, o leitor atento certamente notou que os benditos espaços métricos ainda não foram definidos! Pois bem:

Definição 1.1.62. Uma **métrica** d sobre um conjunto X nada mais é do que uma pseudométrica *positiva definida*, i.e., tal que $d(x, y) = 0$ só ocorre para $x = y$, situação em que o par (X, d) é dito um **espaço métrico**[22]. ¶

Naturalmente, todas as considerações feitas para espaços pseudométricos se estendem para espaços métricos. Em particular, um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é **metrizável** se existir uma métrica d tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. ▲

Exercício 1.27. Mostre que todo espaço discreto é metrizável. ■

Exercício 1.28. Mostre que a topologia usual de $\mathbb{R}$ é induzida por uma métrica. Dica: tente $d(x, y) := |x - y|$. ■

Observação 1.1.63. Espaços calibráveis aparecerão diversas vezes ao longo deste texto, disfarçados tanto como *espaços uniformes* quanto como *espaços de Tychonoff*. △

[21] Na verdade, veremos no Capítulo 4 que se $|\mathcal{G}| \leq \aleph_0$, então tudo se reduz ao caso $|\mathcal{G}| = 1$.

[22] Trívia: veremos, futuramente, que a diferença entre métricas e pseudométricas é topológica. Pensando nisso, Hugo C. Botós sugeriu que eu chamasse como "métrica" aquilo que definimos como pseudométricas, e de "métricas T_1" (ou separáveis, mas essa entraria em conflito com a noção de densidade enumerável) aquilo que estamos chamando de métricas. Embora eu julgue isso admirável, eu sou, como ele bem observou, um "conformista desprezível".

Observação 1.1.64. Ainda sobre o exemplo anterior, observe que se o ponto $x \in \overline{A}$ tomado for tal que $x \notin A$, então da igualdade $\overline{A} = A \cup A^{\mathrm{d}}$ segue $x \in A^{\mathrm{d}}$, i.e., x é ponto de acumulação de A. E *realmente*, a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ que se exibiu *acumula* em x, no sentido de que seus termos se tornam arbitrariamente próximos de x, agora sem a necessidade de itálicos. $\triangle$

1.1.3 Funções contínuas

Assim como morfismos entre estruturas algébricas possibilitam a tradução de certos tipos de informação entre estruturas algébricas[23], *funções contínuas* são os *dispositivos* por meio dos quais a informação *topológica* navega entre os espaços topológicos. Porém, diferente do caso algébrico, em que a simplicidade da linguagem torna (quase) imediata a definição dos morfismos apropriados, a linguagem topológica é mais sutil, razão pela qual convém motivar a definição de continuidade por um viés... geométrico ou mundano.

Considere, por exemplo, uma função $f\colon [0,1] \to [0,1]$, e suponha que se queira formalizar o significado da expressão "desenhar o gráfico da função f sem tirar o lápis do papel", como o que não ocorre na figura.

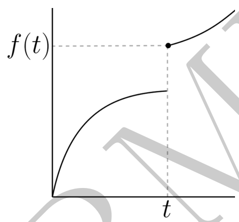


Figura 1.6: O gráfico da função `pragmatismo`.

Empiricamente, é fácil ver se (e onde) o lápis foi tirado do papel: encontra-se o ponto/*instante* t no qual o gráfico tenha saltado, como na figura anterior. O problema é como *escrever* isso?

Ao se analisar a figura com uma *lupa*, pode-se encontrar uma vizinhança V de $f(t)$ tal que qualquer vizinhança U de t tem, pelo menos, um ponto u cuja imagem $f(u)$ não pertence a V. Reciprocamente, se a função f *apresentar* tal propriedade no ponto $t \in [0,1]$, então *ocorrerá* um salto no gráfico de f precisamente no ponto t. Em tal situação, diz-se que a função f é *descontínua* em t.

Logo, não tirar o lápis do papel no instante t consiste, precisamente, em negar a propriedade descrita acima. Ou seja: para qualquer vizinhança V de $f(t)$ existe uma vizinhança U de t tal que $f(u) \in V$ para todo $u \in U$ ou, simbolicamente:

$$\forall V \in \mathcal{N}_{f(t)}\, \exists U \in \mathcal{N}_t \text{ tal que } f[U] \subseteq V. \tag{1.12}$$

Dada a motivação empírica dessa definição, é claro que $[0,1]$ está munido de sua topologia usual. Assim, na expressão acima, pode-se tomar $V := (f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon)$ e $U := (t - \delta, t + \delta)$, com $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ positivos, donde se obtém a clássica definição de continuidade para funções reais:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |t - u| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(u)| < \varepsilon. \tag{1.13}$$

[23]Vide os morfismos de grupos, anéis, módulos, etc. discutidos ao longo do Seção K.2.

Ocorre que, enquanto (1.13) utiliza fórmulas que só fazem sentido em $\mathbb{R}$, (1.12) usa informações comuns a quaisquer espaços topológicos. Logo, é por meio dela que se formaliza (e generaliza) a ideia de desenhar sem tirar o lápis do papel[24].

Definição 1.1.65. Dizemos que uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y é **contínua em** $x \in X$ se valer o análogo da condição (1.12), i.e., se para cada vizinhança $V \subseteq Y$ de $f(x)$ existir uma vizinhança $U \subseteq X$ de x com $f[U] \subseteq V$. ¶

Exercício 1.29. Sejam X e Y espaços topológicos, $x \in X$ e $f\colon X \to Y$ uma função. Considere as sentenças

(a) $\forall V \in \mathcal{T}_{f(x),Y}\ \exists U \in \mathcal{T}_{x,X}$ tal que $f[U] \subseteq V$;

(b) $\forall V \in \mathcal{T}_{f(x),Y}\ f^{-1}[V] \in \mathcal{N}_{x,X}$.

Mostre que as condições acima são equivalentes a exigir que f é contínua em $x \in X$. ■

Uma vez que se sabe definir continuidade *localmente*, a definição global de continuidade é automática, embora meio burra. A caracterização enunciada após a próxima definição será muito mais útil.

Definição 1.1.66. Uma função $f\colon X \to Y$ entre os espaços topológicos X e Y é **contínua** se f for contínua em todos os pontos de X. ¶

Proposição 1.1.67. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $f^{-1}[V] \subseteq X$ for aberto para cada aberto $V \subseteq Y$.*

Demonstração. Se f é contínua em todos os pontos de X e $V \subseteq Y$ é um aberto, então para qualquer $x \in f^{-1}[V]$ ocorre $f(x) \in V$, donde a continuidade de f em x dá um aberto $U \in \mathcal{T}_{x,X}$ com $f[U] \subseteq V$, acarretando $U \subseteq f^{-1}[V]$. A recíproca é óbvia. □

Observação 1.1.68 (Escravidão notacional)**.** Ao se falar sobre os "espaços topológicos X e Y", consideram-se topologias fixadas para X e Y, digamos $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$, respectivamente. Assim, entende-se que a afirmação "a função $f\colon X \to Y$ é contínua (em $x \in X$)" depende das topologias fixadas $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$.

Quando se quer explicitar as topologias envolvidas, escreve-se $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$, o que deve ser entendido como a função $f\colon X \to Y$ entre os conjuntos X e Y munidos das topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$, respectivamente. Neste texto, isso será adotado apenas em situações de extrema necessidade. △

Num primeiro momento, pode soar curioso que a compatibilidade das funções contínuas ocorra na *direção oposta* da seta, no sentido de que é a pré-imagem de abertos que deve ser aberta, e não a imagem. A discussão estruturalista da próxima subsubseção deve ajudar a justificar essa reversão. Em todo caso, embora a condição

$$U \text{ é aberto} \Rightarrow f[U] \subseteq Y \text{ é aberto}, \tag{1.14}$$

também seja importante[25], ela não tem qualquer relação de implicação (ida ou volta) com a continuidade.

[24] Diga-se de passagem: sem lápis e sem papel.

[25] É o que define as chamadas funções *abertas*.

Exercício 1.30 ($\neq$)**.** Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços topológicos, com Y discreto, e note que qualquer função $f : X \to Y$ satisfaz a condição (1.14). Agora, suponha que $\mathcal{T}$ não seja a topologia discreta em X, e assuma $Y := X$ com $\mathcal{S} := \wp(X)$. Mostre que a função $f : X \to Y$, dada por $f(x) := x$, não é contínua. ■

Exercício 1.31 ($\not\Rightarrow$)**.** Assuma que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é contínua (veremos isso em breve). Mostre que f não satisfaz (1.14). Dica: o que é $f[(-1, 1)]$? ■

Outras encarnações de continuidade

Suponha que ainda não tivéssemos uma definição de função contínua e tampouco nos interessássemos por gráficos de funções. Seria possível chegar de modo natural na definição de continuidade? Note que numa perspectiva *algébrica* (Seção K.2.1), a estrutura de um espaço topológico poderia ser pensada como sendo a topologia do espaço. Desse modo, um *morfismo* entre espaços topológicos deveria ser um mapa compatível com as topologias do domínio e codomínio da função.

Ora, se $f : X \to Y$ é uma função entre espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$, então f não *age* diretamente no mesmo *nível* das estruturas de X e Y, que são subconjuntos de $\wp(X)$ e $\wp(Y)$. Mas nem tudo está perdido, posto que f *induz* mapas no nível certo, a saber[26]:

$$\begin{aligned} \wp^{[\cdot]}(f) : \wp(X) &\to \wp(Y) \\ A &\mapsto f[A] \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \wp^{-1}(f) : \wp(Y) &\to \wp(X) \\ B &\mapsto f^{-1}[B] \end{aligned}.$$

A questão agora é: qual dessas duas se comporta melhor com as *operações topológicas*, que são compostas por duas constantes ($\emptyset$ e o próprio espaço), uma operação binária (a interseção) e uma "operação $\wp$-ária" (a reunião arbitrária?). Vejamos:

(*i*) $\wp^{[\cdot]}(f)(\emptyset) = \emptyset$ e $\wp^{[\cdot]}(f)\left(\bigcup \mathcal{U}\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \wp^{[\cdot]}(f)(U)$, mas as outras operações não são compatíveis em geral;

(*ii*) por outro lado, tudo de bom acontece com $\wp^{-1}(f)$, pois

- ✓ $f^{-1}[Y] = X$ e $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ (preserva as constantes),
- ✓ $f^{-1}[V \cap V'] = f^{-1}[V] \cap f^{-1}[V']$ para quaisquer $V, V' \in \mathcal{T}$ (compatível com $\cap$) e
- ✓ $f^{-1}\left[\bigcup \mathcal{V}\right] = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{-1}[V]$ para qualquer $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ (compatível com $\bigcup$)

em vista do Lema K.1.23.

Portanto, exigindo-se

$$\wp^{-1}(f)(U) \in \mathcal{T} \text{ para qualquer } U \in \mathcal{S}, \tag{1.15}$$

obtém-se de modo natural uma função da forma $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ compatível com suas *operações*, precisamente aquela que faz $U \in \mathcal{S}$ corresponder a $\wp^{-1}(f)(U) := f^{-1}[U]$. Ora, a exigência (1.15) é, exatamente, o que usamos para definir funções contínuas entre espaços topológicos, em vista da Proposição 1.1.67.

[26] Confira os Exercícios K.14 e K.97.

Observação 1.1.69. É claro que poderíamos fazer mais exigências sobre f a fim de que $\wp^{[\cdot]}(f)$ também fosse compatível com as demais *operações*. Porém, isso excluiria muitas funções, ao passo que $\wp^{-1}(f)$, por ser naturalmente compatível[27], apresenta um escopo bem mais abrangente. Talvez esse tipo de abordagem incomode o leitor platonista, que acredita na existência de *definições* certas em si mesmas. Se for o caso, então eu cumpri o meu papel. $\triangle$

Para encerrar (momentaneamente) esta discussão categorial, definamos explicitamente a categoria Top dos espaços topológicos: os objetos de Top são os espaços topológicos e suas setas são as funções contínuas.

Proposição 1.1.70. *Top é uma categoria.*

Demonstração. Como funções contínuas são, em particular, funções entre conjuntos, não é preciso verificar a associatividade da composição (Lema K.1.20). Basta observar que se X é espaço topológico, então $\mathrm{Id}_X \colon X \to X$ é contínua e, se $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ são funções contínuas, então $g \circ f \colon X \to Z$ é contínua, o que ficará a cargo do leitor. $\square$

Exercício 1.32. Complete a prova da proposição acima. $\blacksquare$

A definição de continuidade também surge naturalmente da ideia de (preservação de) convergência, o que ficará mais evidente com o ferramental da próxima seção. Ainda assim, pode-se chegar à definição certa por meio de fechos, que capturam a ideia de se estar *arbitrariamente próximo de alguma coisa*: afinal de contas, x está arbitrariamente próximo de um subconjunto A se $x \in \overline{A}$, posto que o último significa que qualquer vizinhança de x intercepta *alguém* de A. Então, vejamos o que ocorre se uma função $f \colon X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y satisfizer

$$f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]}, \tag{1.16}$$

para todo $A \subseteq X$, o que, em outras palavras, significa: f leva pontos arbitrariamente próximos de A para pontos arbitrariamente próximos de $f[A]$.

Se $V \subseteq Y$ *fosse* aberto *mas* $f^{-1}[V] \subseteq X$ não *fosse* aberto, então existiria $x \in f^{-1}[V]$ tal que para todo $U \in \mathcal{T}_{x,X}$ se *verificaria* $\emptyset \neq U \cap (X \setminus f^{-1}[V]) = U \cap f^{-1}[Y \setminus V]$, mostrando que $x \in \overline{f^{-1}[Y \setminus V]}$. Logo, da hipótese sobre f, teria-se

$$f(x) \in f\left[\overline{f^{-1}[Y \setminus V]}\right] \subseteq \overline{f\left[f^{-1}\left[Y \setminus V\right]\right]} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V,$$

contrariando a forma com que se tomou x.

Portanto, se $f \colon X \to Y$ satisfaz (1.16) para todo $A \subseteq X$, então f é contínua. Ocorre que a recíproca também é verdadeira: se f é contínua, $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$, então qualquer aberto $V \subseteq Y$ com $f(x) \in V$ é tal que $x \in f^{-1}[V]$, donde segue que existe $a \in A$ com $a \in f^{-1}[V]$, i.e., $f(a) \in f[A] \cap V$, mostrando que $f(x) \in \overline{f[A]}$. Em suma, provamos a

Proposição 1.1.71. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f \colon X \to Y$ uma função. São equivalentes:*

(i) *f é contínua;*

(ii) *para todo $A \subseteq X$ ocorre $f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]}$.*

[27] Por sua vez, essa diferença de comportamentos se deve ao fato de que a pré-imagem não *colapsa* informações, enquanto a imagem direta sempre o faz para funções não-injetoras.

Observação 1.1.72. É aconselhável que o leitor não se prenda a uma definição específica de continuidade, posto que diferentes contextos podem se adaptar melhor a uma formulação e menos a outras. Ao longo desta subseção veremos mais encarnações de continuidade. △

Exemplo 1.1.73. Se $f\colon X \to Y$ é uma função entre espaços topológicos com X discreto, então f é contínua, posto que a pré-imagem de qualquer aberto de Y é, automaticamente, aberta em X. ▲

Exemplo 1.1.74. Qualquer função constante entre espaços topológicos é contínua. ▲

Exemplo 1.1.75. Se X é um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto, então a inclusão $i\colon A \hookrightarrow X$ é contínua. Isso ocorre pois $i^{-1}[V] = V \cap A$ para qualquer $V \subseteq X$. Lembre-se: os abertos de A são, justamente, os subconjuntos da forma $V \cap A$ com $V \subseteq X$ aberto. ▲

Exemplo 1.1.76 (Restrições)**.** Seja $f\colon X \to Y$ uma função contínua entre os espaços topológicos X e Y. Se $A \subseteq X$, então a restrição $f|_A\colon A \to Y$ é contínua, pois $f|_A = f \circ i$ é composição de funções contínuas. Além disso, a função f é contínua quando vista como função da forma $f\colon X \to \mathrm{im}\,(f)$, onde $\mathrm{im}\,(f)$ tem sua topologia herdada de Y. ▲

Exemplo 1.1.77 (O funtor $\mathrm{Spec}\,(\bullet)$)**.** Sejam A e B anéis comutativos com unidade e $\varphi\colon A \to B$ um morfismo de anéis. Já vimos que $\mathrm{Spec}\,(A)$ e $\mathrm{Spec}\,(B)$ são espaços topológicos (Exemplo 1.1.45). Se pudéssemos associar a φ uma função contínua entre esses espaços, poderia ser o caso de termos esbarrado num funtor.

Observe que se $P \in \mathrm{Spec}\,(B)$, então $\varphi^{-1}[P] \in \mathrm{Spec}\,(A)$: dados $x, y \in A$ satisfazendo $xy \in \varphi^{-1}[P]$, tem-se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \in P$, donde segue que $\varphi(x) \in P$ ou $\varphi(y) \in P$, i.e., $x \in \varphi^{-1}[P]$ ou $y \in \varphi^{-1}[P]$. Isso resulta numa função $\mathrm{Spec}\,(\varphi) : \mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A)$ que faz $P \mapsto \varphi^{-1}[P]$, que provaremos ser contínua com respeito às topologias de Zariski. Com efeito, um aberto V de $\mathrm{Spec}\,(A)$ é reunião de abertos da forma $D_A(h) \coloneqq \{Q \in \mathrm{Spec}\,(A) : h \notin Q\}$, para $h \in S$, com $S \subseteq A$, de modo que

$$\mathrm{Spec}\,(\varphi)^{-1}\,[V] = \mathrm{Spec}\,(\varphi)^{-1}\left[\bigcup_{h\in S} D_A(h)\right] = \bigcup_{h\in S} \mathrm{Spec}\,(\varphi)^{-1}\,[D_A(h)],$$

mostrando que basta verificar a condição de continuidade para abertos da forma $D_A(h)$. Ora, note que se $P \in \mathrm{Spec}\,(B)$, então

$$P \in \mathrm{Spec}\,(\varphi)^{-1}\,[D_A(h)] \Leftrightarrow h \notin \varphi^{-1}[P] \Leftrightarrow \varphi(h) \notin P \Leftrightarrow P \in D_B(\varphi(h)),$$

i.e., $\mathrm{Spec}\,(\varphi)^{-1}\,[D_A(h)] = D_B(\varphi(h))$, um aberto básico em $\mathrm{Spec}\,(B)$. Assim, o espectro determina uma correspondência

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\bullet)\colon \textsc{Ring} \arrow[r] & \textsc{Top} \\
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Spec}(A) \\
B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[u, "\mathrm{Spec}(\varphi)"]
\end{tikzcd}$$

e fica a cargo do leitor versado em categorias[28] verificar que $\mathrm{Spec}\,(\bullet)$ é realmente um funtor (contravariante) da categoria Ring dos anéis comutativos e com unidade na categoria Top dos espaços topológicos. ▲

[28]Leitores com nenhuma familiaridade em categorias podem ignorar a proposta ou, alternativamente, conferir a Seção K.3.

Exercício 1.33. No exemplo acima, utilizou-se uma caracterização equivalente para continuidade, por meio de bases. Sejam X e Y espaços topológicos e tome $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de Y. Mostre que uma função $f: X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[B] \subseteq X$ é aberto para todo $B \in \mathcal{B}$. ■

Exercício 1.34. Repita o exercício anterior, trocando o termo “base” por “sub-base”. ■

Exercício 1.35. Repita os dois exercícios anteriores, trocando “f é contínua” por “f é contínua em x”, para $x \in X$ fixado. ■

Exemplo 1.1.78 (Funções contínuas em espaços de calibre)**.** Sejam $(X, \mathcal{G})$ e $(Y, \mathcal{H})$ espaços de calibre. Pelo exercício anterior, uma função $f: X \to Y$ é contínua (com respeito às topologias $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$) se $f^{-1}[V] \subseteq X$ for um aberto de X para cada aberto $V \subseteq Y$ de uma sub-base fixada de Y. Por outro lado, já sabemos desde o Exemplo 1.1.58 que a família

$$\mathcal{B}_Y := \{B_e(y, r) : e \in \mathcal{H}, y \in Y \text{ e } r \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

é sub-base para a topologia de Y.

Logo, f é contínua em $x \in X$ se, e somente se, $f^{-1}[B_e(f(x), \varepsilon)] \subseteq X$ é aberto para quaisquer $e \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Por sua vez, isto equivale a dizer que existem $\delta > 0$ e $\emptyset \neq D \in [\mathcal{G}]^{<\aleph_0}$ tais que, para qualquer $u \in X$,

$$\max_{d \in D} d(u, x) < \delta \Rightarrow e(f(u), f(x)) < \varepsilon. \tag{1.17}$$

No caso particular em que $\mathcal{G} := \{d\}$ e $\mathcal{H} := \{e\}$, reobtém-se a clássica definição de continuidade em espaços (pseudo) métricos: $f: (X, \mathcal{T}_d) \to (Y, \mathcal{T}_e)$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(u, x) < \delta \Rightarrow e(f(u), f(x)) < \varepsilon$. ▲

Como cozinhar topologias: com funções (*feat.* topologia produto)

Para motivar o que vem a seguir, fixe o espaço pseudométrico (X, d) de sua preferência; pode, inclusive, ser métrico, isto é irrelevante. Agora, como a topologia de X é determinada pela pseudométrica d, a *função* d deveria ser compatível com a topologia de X, em algum sentido. Porém, não é óbvio como expresar isso, posto que o domínio de d é $X \times X$, que até agora não tem uma topologia *natural*.

Se $X \times X$ *admitisse* uma pseudométrica *natural* ρ, por exemplo[29], a continuidade de d significaria dizer que, controlando-se a *pseudodistância* determinada por ρ entre pares (x, y) e (u, v), a distância em $\mathbb{R}$ entre as imagens $d(x, y)$ e $d(u, v)$ poderia ser tão pequena quanto se desejasse (vide o Exemplo 1.1.78). Mesmo sem uma definição para ρ, a sugestão de que algo do tipo possa existir está escondida numa desigualdade corriqueira: para quaisquer $(x, y), (u, v) \in X \times X$ deve ocorrer

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v). \tag{1.18}$$

Exercício 1.36. Demonstre a desigualdade acima. Dica: é a mesma coisa que provar $||a| - |b|| \leq |a - b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, *mutatis mutandis*. ■

Isso mostra que para *controlar* a distância entre $d(x, y)$ e $d(u, v)$ em $\mathbb{R}$, basta limitar as (pseudo) distâncias $d(x, u)$ e $d(y, v)$ em X. Mais precisamente: fixado $\varepsilon > 0$ e fazendo $U := B_d(x, \varepsilon)$ e $V := B_d(y, \varepsilon)$, resulta

$$(u, v) \in U \times V \Rightarrow |d(x, y) - d(u, v)| < 2\varepsilon.$$

[29] *Spoiler alert*: admite.

Voilà! Se $\mathcal{T}$ for uma topologia em $X \times X$ que declare como abertos os subconjuntos da forma $U \times V$ acima, então $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ *será* contínua quando $X \times X$ *for* munido dessa topologia.

Por fatores psicológicos, pode-se interpretar o subconjunto $U \times V$ como um "*retângulo*" de lados U e V no *plano cartesiano* $X \times X$, um 2-*retângulo*, como na Figura 1.7. Embora imoral, essa interpretação denuncia que a família $\mathcal{B} := \{U \times V : U, V \subseteq X \text{ são abertos}\}$ não é uma topologia em $X \times X$, posto que a reunião de retângulos não precisa ser um retângulo.

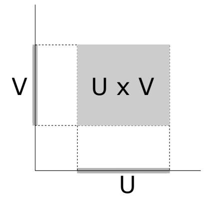


Figura 1.7: Seria $\mathbb{R}^2$ universal na categoria dos desenhos?

Porém, isto não constitui impedimento para obter uma topologia: basta definir $\mathcal{T}$ como a menor topologia em X que torna abertos os membros da família $\mathcal{B}$. Na verdade, como $\mathcal{B}$ satisfaz as condições da Proposição 1.1.33, segue que $\mathcal{B}$ é base para $\mathcal{T}$ e, desse modo, os abertos de $X \times X$ segundo tal topologia são reuniões arbitrárias de retângulos.

Exemplo 1.1.79 (*Pixels*[30] generalizados)**.** Um círculo nada mais é do que uma sobreposição (união) infinita de retângulos. Se duvida, olhe este símbolo "•" com uma lupa bem boa – ou confira a Figura 1.8 a seguir. ▲

Figura 1.8: A televisão nos ensina a topologia produto, desde sempre.

O próximo exercício, embora inócuo, contém a essência do que faremos adiante em contexto bem mais geral.

Exercício 1.37. Sejam X e Y espaços topológicos e sobre o conjunto $X \times Y$ considere a topologia $\mathcal{T}$ gerada (como base) pelos conjuntos da forma $A \times B$, com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ ambos abertos. Mostre que $\mathcal{T}$ é a menor topologia que torna contínuas as projeções $\pi_X \colon X \times Y \to X$ e $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$. ■

Sejam $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos, X um conjunto fixado e $\mathscr{F} := \{f_i \colon X \to X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ uma coleção de funções[31]. Como X é meramente um conjunto, não faz sentido discutir a continuidade das funções de $\mathscr{F}$. Podemos remediar isso facilmente, por exemplo, dotando X da topologia discreta: em tal cenário, todas as funções f_i se tornam contínuas. No entanto, isso não parece muita vantagem, já que qualquer função $f \colon X \to Z$ é contínua quando X é discreto.

[30] *Pixel* é aglutinação de *pix* (abreviado de *picture*) e *el* (abreviado de *element*), ambos do inglês. Por tal razão, prefiro respeitar o original ao tratar do plural. O leitor nacionalista deve escrever "pixeis".

[31] A adoção da notação "$\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$" como abreviação para $\{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ visa apenas evitar a repetição do símbolo ": " entre as chaves, que poderia causar ambiguidades.

O problema da topologia discreta sobre X é ela ser *grande demais*: de fato, $\wp(X)$ é a maior topologia possível sobre X. Isso sugere atacar o problema na direção oposta, de modo a se buscar pela *menor* topologia sobre X que torna cada uma das funções $f_i\colon X \to X_i$ contínuas. Note que se $\mathcal{S}$ é uma topologia em X segundo a qual $f_i\colon (X, \mathcal{S}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ é contínua para cada $i \in \mathcal{I}$, então para cada $V \in \mathcal{T}_i$ ocorre $f_i^{-1}[V] \in \mathcal{S}$. Embora a coleção $\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) := \{f_i^{-1}[V] : i \in \mathcal{I} \text{ e } V \in \mathcal{T}_i\}$ não seja uma topologia em X, ela pode ser usada para obter a topologia procurada.

Definição 1.1.80. Nas notações acima, a **topologia fraca induzida pela família** $\mathscr{F}$, também chamada de **topologia inicial** e denotada como $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$, é a menor topologia em X que contém todos os subconjuntos da forma $f_i^{-1}[V]$ com $i \in \mathcal{I}$ e $V \in \mathcal{T}_i$. ¶

Observação 1.1.81. Nas notações da Definição 1.1.28, tem-se $\mathcal{T}_{\mathscr{F}} := \mathcal{T}\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\right)\right)$. △

A efetividade da definição acima se comprova na próxima

Proposição 1.1.82. *Sejam X e $\mathscr{F}$ como acima. Se $\mathcal{S}$ é uma topologia em X tal que $f_i\colon (X, \mathcal{S}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ é contínua para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\mathcal{T}_{\mathscr{F}} \subseteq \mathcal{S}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{S}$ tem a propriedade enunciada, então $\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) \subseteq \mathcal{S}$, e $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ é a menor topologia com tal propriedade. Logo, $\mathcal{T}_{\mathscr{F}} \subseteq \mathcal{S}$. □

Exercício 1.38. Sejam X e $\mathscr{F}$ como acima. Para cada $i \in \mathcal{I}$, fixe $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{T}_i$ uma sub-base (ou base) para a topologia $\mathcal{T}_i$. Mostre que a família $\{f_i^{-1}[V] : i \in \mathcal{I} \text{ e } V \in \mathcal{B}_i\}$ é sub-base para a topologia fraca $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Dica: use os Exercícios 1.33 e 1.34. ■

Embora pareça, a proposição a seguir não descreve uma propriedade universal[32].

Proposição 1.1.83. *Nas condições acima, para um espaço topológico $(Y, \mathcal{S})$, uma função $g\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T}_{\mathscr{F}})$ é contínua se, e somente se, a composta $f_i \circ g\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ é contínua para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Como $f_i\colon (X, \mathcal{T}_{\mathscr{F}}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ é contínua pela definição de $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$, segue que se $g\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T}_{\mathscr{F}})$ é contínua, então $f_i \circ g$ é contínua por ser composição de funções contínuas. Reciprocamente, para mostrar que $g\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T}_{\mathscr{F}})$ é contínua, pelo Exercício 1.34 basta verificar que $g^{-1}[U] \in \mathcal{S}$ para qualquer $U \in \mathscr{F}^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$, pois esta é sub-base para a topologia $\mathcal{T}_{\mathscr{F}}$. Ora, tem-se $U = f_i^{-1}[V]$ para algum $i \in \mathcal{I}$ e $V \in \mathcal{T}_i$, logo

$$g^{-1}[U] = g^{-1}\left[f_i^{-1}[V]\right] = (f_i \circ g)^{-1}[V] \in \mathcal{S},$$

onde a pertinência acima ocorre pela continuidade de $f_i \circ g\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, assumida para todo $i \in \mathcal{I}$. □

A topologia fraca já apareceu, secretamente, pelo menos duas vezes ao longo desta seção, como indicam os exercícios a seguir.

Exercício 1.39. Mostre que se $(X, \mathcal{T})$ é espaço topológico e $A \subseteq X$, então a topologia de subespaço em A é a menor topologia que torna a inclusão $i\colon A \hookrightarrow X$ contínua. ■

Exercício 1.40. Mostre que se $(X, \mathcal{G})$ é um espaço de calibre, então a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ é a menor topologia em X que torna contínuas as funções $i_d\colon X \to (X, \mathcal{T}_d)$ dadas por $i_d(x) := x$, para cada $d \in \mathcal{G}$. ■

[32] A topologia fraca *pode* ser descrita por uma propriedade universal. Isto só não será feito aqui.

Observação 1.1.84. Mais geralmente, dado um conjunto X e uma família $\mathscr{O}$ de topologias sobre X, denota-se por $\sup \mathscr{O}$ a menor topologia em X que torna contínuas as funções $i_{\mathcal{T}} \colon X \to (X, \mathcal{T})$ dadas por $i_{\mathcal{T}}(x) := x$, para cada $\mathcal{T} \in \mathscr{O}$. Diz-se que $\sup \mathscr{O}$ é o **supremo das topologias em** $\mathscr{O}$ (confira o Exercício 1.51). △

Usaremos o aparato da Definição 1.1.80 a fim de generalizar o procedimento de *topologizar* um produto de espaços topológicos. Para uma família $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços topológicos, consideremos o produto cartesiano $X := \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$. Como o conjunto X vem munido de uma projeção *canônica*[33] $\pi_j \colon X \to X_j$ para cada $j \in \mathcal{I}$, dada pela regra

$$\pi_j\left((x_i)_{i \in \mathcal{I}}\right) := x_j,$$

é legítimo considerar sobre o conjunto X a topologia fraca induzida pela família $\pi(\mathcal{I})$ de todas as projeções: literalmente, a menor topologia em X que torna as projeções $\pi_i \colon X \to X_i$ contínuas, para cada $i \in \mathcal{I}$. Em certo sentido, a topologia $\mathcal{T}_{\pi(\mathcal{I})}$ em $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é a topologia *mais natural* em que poderíamos pensar e, por tal motivo, receberá o nome de **topologia produto**[34]. A menos de menção contrária explícita, $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ sempre será munido de sua topologia produto.

A *naturalidade* da topologia produto se expressa por meio da seguinte

Proposição 1.1.85 (Propriedade universal da topologia produto)**.** *Sejam $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ uma família de espaços topológicos e $(Y, \mathcal{T})$ um espaço topológico munido de funções contínuas $g_i \colon (Y, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Então existe uma única função contínua $g \colon (Y, \mathcal{T}) \to (\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i, \mathcal{T}_{\pi(\mathcal{I})})$ tal que $g_i = \pi_i \circ g$ para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Pela propriedade universal do produto cartesiano $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ enquanto conjunto, existe e é única a função $g := (g_i)_{i \in \mathcal{I}} \colon Y \to \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ satisfazendo $g_i = \pi_i \circ g$ para todo $i \in \mathcal{I}$: explicitamente, $g(y) := (g_i(y))_{i \in \mathcal{I}}$ para cada $y \in Y$. A continuidade de g segue da Proposição 1.1.83, trocando-se f_i por π_i. □

Tal qual ocorre com conjuntos, o produto diagonal[35] das funções contínuas $g_i \colon Y \to X_i$ será denotado por $(g_i)_{i \in \mathcal{I}}$, ou $(g_0, \ldots, g_n)$ se $\mathcal{I} := \{0, \ldots, n\}$. Esquematicamente, pode-se interpretar a função $(g_i)_{i \in \mathcal{I}} \colon Y \to \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ como o único mapa contínuo que torna o diagrama a seguir comutativo para cada $j \in \mathcal{I}$:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed, "(g_i)_{i \in \mathcal{I}}"] \arrow[dr, "g_j"'] & \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \arrow[d, "\pi_j"] \\
& X_j
\end{tikzcd}$$

Figura 1.9: "j-ésima" instância da propriedade universal do produto.

Dada a importância da topologia produto, vale o esforço de reescrever a Proposição 1.1.83 para esse caso particular:

Proposição 1.1.86 (*a.k.a.* Proposição 1.1.83 para $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$)**.** *Sejam $\{X_i : i \in \mathcal{I}\} \cup \{Y\}$ uma família de espaços topológicos e $f \colon Y \to \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $\pi_i \circ f$ é contínua para todo $i \in \mathcal{I}$.*

[33] Vide a Definição K.1.39 ou o Exemplo K.3.24.

[34] Ou *topologia de Tychonoff*, terminologia que entraria em conflito com os *espaços de Tychonoff*, abordados no próximo capítulo.

[35] Definição K.1.41.

Observação 1.1.87. Em geral, a topologia produto costuma parecer mais complicada do que realmente é, principalmente para quem se depara com ela pela primeira vez. Por conta disso, convém ~~perder~~ investir um pouco mais de tempo com ela.

O singelo Exercício 1.37 mostrou que ao se considerarem apenas dois espaços X e Y, a topologia produto em $X \times Y$ tem como abertos básicos os *retângulos* da forma $A \times B$, com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ ambos abertos. Procedendo indutivamente a partir desse exercício, é fácil concluir que se $X_0, \dots, X_n$ são espaços topológicos, então a topologia produto em $\prod_{i \leq n} X_i$ tem como base os *retângulos* da forma

$$\prod_{i \leq n} A_i := \{(x_i)_{i \leq n} : \forall i \leq n \ x_i \in A_i\},$$

com $A_i \subseteq X_i$ aberto para cada $i \leq n$.

Em geral, isso pode levar o leitor incauto a acreditar que, no caso de um conjunto qualquer de índices $\mathcal{I}$, os abertos básicos do produto $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ *serão* **$\mathcal{I}$-retângulos**, i.e., conjuntos da forma

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i := \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : \forall i \in \mathcal{I} \ x_i \in A_i\}, \tag{1.19}$$

com $A_i \subseteq X_i$ aberto para cada $i \in \mathcal{I}$. MAS ISTO É FALSO SE $|\mathcal{I}| \geq \aleph_0$.

Exemplo 1.1.88. Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^\omega$, que ~~pode ser interpretado como~~[36] é o produto cartesiano $\prod_{n \in \omega} \mathbb{R}$, munido com a topologia gerada pelos ω-retângulos descritos em (1.19) (para $\mathcal{I} := \omega$). Definamos então a função

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^\omega \\ x &\mapsto (x)_{n \in \omega} \end{aligned}$$

que associa cada $x \in \mathbb{R}$ à sequência constante $(x)_{n \in \omega}$.

Note que para cada $n \in \omega$, a composição $\pi_n \circ \varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identidade, muito conhecida por ser contínua, dentre outras coisas. Se a topologia definida sobre $\mathbb{R}^\omega$ fosse a topologia produto, então a Proposição 1.1.86 seria aplicável, e acarretaria a continuidade de φ. Contudo, neste caso, a função φ não é contínua em 0: com efeito, embora $U := \prod_{n \in \omega} \left(-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$ seja um aberto de $\mathbb{R}^\omega$ que contém $\varphi(0)$, o subconjunto $\varphi^{-1}[U]$ não contém abertos em torno de 0, já que $\varphi^{-1}[U] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$ (Exercício K.23)[37], e esta última interseção é, precisamente, $\{0\}$. ▲

Agora, se os abertos básicos de $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ não são produtos arbitrários de abertos para $\mathcal{I}$ qualquer, então como ~~diabos~~ é um aberto básico de $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$?

Por definição, a topologia produto sobre $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é a topologia fraca induzida pelas projeções $\pi_j \colon \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \to X_j$, que tem como sub-base a família

$$\mathcal{B} := \left\{\pi_i^{-1}[V] : i \in \mathcal{I} \text{ e } V \subseteq X_i \text{ aberto}\right\}.$$

Ou seja: os abertos de $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ são <u>reuniões</u> de <u>interseções finitas</u> de membros de $\mathcal{B}$. Observe que para cada $j \in \mathcal{I}$ e $V \subseteq X_j$ aberto, tem-se $\pi_j^{-1}[V] = \prod_{i \in \mathcal{I}} V_i$, onde $V_i := X_i$ para $i \neq j$ e $V_j := V$. Portanto, uma base para $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é composta por $\mathcal{I}$-retângulos da forma

[36] Se tal igualdade não parecer óbvia, confira a Subseção K.1.3.

[37] Sagaz observação de João Santos e do Prof. German Ferrer durante uma aula de Topologia 2.

$W := \prod_{i\in\mathcal{I}} W_i$, com $W_i \subseteq X_i$ aberto para cada $i \in \mathcal{I}$ e **suporte finito**, onde *suporte* indica o subconjunto de índices

$$\mathrm{supp}\,(W) := \{i \in \mathcal{I} : W_i \neq X_i\}. \tag{1.20}$$

Em particular, quando $|\mathcal{I}| < \aleph_0$, a condição de suporte finito é trivialmente satisfeita para qualquer $\mathcal{I}$-retângulo, o que está de acordo com a experiência diária. △

Observação 1.1.89. O leitor inquisidor pode ainda se indagar sobre o que motiva a preferência pela topologia produto (de suporte finito) em detrimento da topologia observada no Exemplo 1.1.88 (sem exigências sobre o suporte), chamada de ***topologia box***. Moralmente, a Proposição 1.1.85 garante que a *topologia de Tychonoff* é a *correta*, pois dá exatamente um *produto* no sentido *categorial* subjacente. Por outro lado, numa perspectiva mais prática, a comodidade da Proposição 1.1.86 também serve de justificativa: é reconfortante saber que $(\varphi_i)_{i\in\mathcal{I}} \colon Y \to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é uma função contínua se $\varphi_i \colon Y \to X_i$ *for* contínua para cada $i \in \mathcal{I}$.

Mais ainda, como veremos, a topologia produto é muito bem comportada com respeito à preservação de *propriedades topológicas*, principalmente com relação a *compacidade*, diferente do que ocorre com a topologia *box*. Ainda assim, a topologia *box* fornece inúmeros contraexemplos em contextos mais avançados. △

A topologia produto se aplica de modo bastante razoável sobre conjuntos de funções. De fato, caso se tenha $X_i := Y$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i = Y^{\mathcal{I}}$ é a família das funções da forma $\mathcal{I} \to Y$. Logo, se Y é um espaço topológico, então $Y^{\mathcal{I}}$ herda uma topologia oriunda de Y por meio da topologia produto. Além disso, se o próprio $\mathcal{I}$ for um espaço topológico, digamos $\mathcal{I} := X$, faz sentido considerar apenas o subconjunto das funções da forma $X \to Y$ que são contínuas[38], denotado por

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{f \in Y^X : f \text{ é contínua}\}. \tag{1.21}$$

Definição 1.1.90. Denota-se por $\mathcal{C}_p(X, Y)$ o conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ munido da topologia de subespaço herdada de Y^X, onde o último é dotado da topologia produto. Para $Y := \mathbb{R}$, escreve-se $\mathcal{C}_p(X)$ em vez de $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{R})$. ¶

Exercício 1.41. Mostre que se X é discreto, então $\mathcal{C}_p(X, Y) = Y^X$. ■

No caso em que $Y := \mathbb{R}$ e $\mathcal{I}$ é um conjunto de índices, o espaço $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ também vem de fábrica com uma estrutura de $\mathbb{R}$-álgebra natural, já introduzida no Exercício K.55: para $f, g \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, $f + g \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ e $f \cdot g \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ são as funções definidas pelas regras

$$(f + g)(i) := f(i) + g(i) \text{ e } (f \cdot g)(i) := f(i) \cdot g(i)$$

para cada $i \in \mathcal{I}$. Isto sugere duas perguntas simples:

(*i*) As operações de $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ são contínuas?

(*ii*) Se $X := \mathcal{I}$ é um espaço topológico, seria $\mathcal{C}_p(X)$ fechado para as operações de $\mathbb{R}^X$?

[38] Com respeito às topologias de X e Y, como de costume.

A resposta para as duas perguntas é sim. Curiosamente, tais respostas se obtêm de modo quase simples por meio das propriedades da topologia produto. Porém, é conveniente limpar o excesso de informação antes de botar a mão na massa.

Sejam $(M, *)$ um magma, isto é, um conjunto M munido de uma operação $*$, e X um conjunto. Vamos denotar com o mesmo símbolo $*$ a operação induzida em M^X, onde $f * g \in M^X$ é dada por

$$(f * g)(x) := f(x) * g(x),$$

para quaisquer $f, g \in M^X$ e $x \in X$.

Lema 1.1.91. *Nas notações acima, se M é dotado de uma topologia que torna a operação $*\colon M \times M \to M$ contínua, então a operação $*\colon M^X \times M^X \to M^X$ também é contínua. Além disso, se X é munido de uma topologia e $f, g \in \mathcal{C}(X, M)$, então $f * g \in \mathcal{C}(X, M)$.*

Demonstração. Para a primeira parte, note que para $x \in X$ fixado, a função

$$\begin{aligned}(\pi_x \times \pi_x)\colon M^X \times M^X &\to M \times M\\ (f, g) &\mapsto (f(x), g(x))\end{aligned}$$

é contínua, pois π_x é contínua. Logo, a composição $(*) \circ (\pi_x \times \pi_x)\colon M^X \times M^X \to M$, que faz $(f, g) \mapsto f(x) * g(x)$, também é contínua. Como isso ocorre para cada $x \in X$, resulta que $*\colon M^X \times M^X \to M^X$ é contínua.

Agora, para a segunda parte, note que se $f, g \in \mathcal{C}(X, M)$, então

$$\begin{aligned}(f, g)\colon X &\to M \times M\\ x &\mapsto (f(x), g(x))\end{aligned}$$

é contínua e, consequentemente, a composição $(*) \circ (f, g)\colon X \to M$ é contínua. Como $f * g = (*) \circ (f, g)$, segue o resultado. □

Proposição 1.1.92 ($\mathcal{C}_p(X)$ é subanel topológico de $\mathbb{R}^X$)**.** *Dado um conjunto X qualquer, as operações*

$$\begin{aligned}(+)\colon \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X &\to \mathbb{R}^X\\ (f, g) &\mapsto f + g\end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned}(\cdot)\colon \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X &\to \mathbb{R}^X\\ (f, g) &\mapsto f \cdot g\end{aligned}$$

são contínuas. Além disso, se X é espaço topológico e $f, g \in \mathcal{C}(X)$, então $f + g, f \cdot g \in \mathcal{C}(X)$.

Demonstração. Em vista do lema anterior, basta mostrar que as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ são contínuas, trabalho mínimo que será deixado a cargo do leitor[39]. □

Observação 1.1.93. Anéis como $\mathbb{R}^X$, munidos de uma topologia que torna suas operações contínuas, são chamados de **anéis topológicos**. Em particular, a proposição acima mostra que $\mathcal{C}_p(X)$ é um (sub) anel topológico (de $\mathbb{R}^X$). Tais criaturas serão examinadas no Capítulo 5, na ainda longínqua Parte II. △

A proposição acima resulta no inesperado (e útil!) corolário.

[39]Isto vale, mais geralmente, para corpos ordenados, e não apenas para $\mathbb{R}$: o leitor interessado pode conferir a Proposição 5.1.39 e o Exemplo 5.1.40.

Corolário 1.1.94. *Seja $p := \sum_{i \leq n} \alpha_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio e considere a função induzida $\underline{p} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\underline{p}(r) := \sum_{i \leq n} \alpha_i r^i,$$

para cada $r \in \mathbb{R}$. Então $\underline{p}$ é função contínua.

Demonstração. Se $p := x$, então $\underline{p} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ é função contínua. Como funções constantes são contínuas, segue que se $p := \alpha x$ para $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\underline{p}$ é contínua (por ser multiplicação de funções contínuas). Agora, por indução, resulta que toda função induzida por um monômio da forma αx^n é contínua (por ser multiplicação de funções contínuas). Novamente, por indução, segue que qualquer função induzida por uma soma de monômios é contínua (por ser soma de funções contínuas), o que encerra a demonstração. □

Observação 1.1.95. Como $\mathbb{R}$ é um corpo com cardinalidade $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, segue que $\mathbb{R}$ é um domínio infinito. Logo, o item k) do Exercício K.62 se aplica ao presente contexto e garante que $\mathbb{R}[x]$ é isomorfo ao subanel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ cujos elementos são as funções polinomiais. Em outras palavras: $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$. △

Isomorfismos em Top (*a.k.a.* homeomorfismos)

Definição 1.1.96. Um **homeomorfismo** entre os espaços topológicos X e Y é uma bijeção contínua $f \colon X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} \colon Y \to X$ é contínua. Neste caso, os espaços X e Y são ditos **homeomorfos** (entre si). ¶

Evidentemente, homeomorfismos são os isomorfismos da categoria Top. A nomenclatura distinta se deve a razões históricas, psicológicas e mesmo contextuais: chamar de *isomorfismo topológico*, por exemplo, coincidiria com o termo usado em Álgebra Topológica, em que "isomorfismo topológico" indica uma função que é tanto um isomorfismo algébrico (de grupos, de anéis, etc.) quanto um homeomorfismo; chamar de *isomorfismo de espaços topológicos* seria apenas cansativo demais. Portanto, fiquemos com "homeomorfismo" e pronto.

Observação 1.1.97. *Estruturalmente*, se X e Y são homeomorfos, então suas *topologias* são *isomorfas*. De fato, se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ são as topologias de X e Y, respectivamente, e $f \colon X \to Y$ é um homeomorfismo, então os mapas

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathcal{T} &\to \mathcal{S} \\ A &\mapsto f[A] \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \psi \colon \mathcal{S} &\to \mathcal{T} \\ U &\mapsto f^{-1}[U] \end{aligned}$$

são crescentes com respeito à inclusão e inversos um do outro, mostrando que as ordens parciais $(\mathcal{T}, \subseteq)$ e $(\mathcal{S}, \subseteq)$ são isomorfas. Mas não só isso, a bijetividade de f se *propaga* a bijeções entre $\wp(X)$ e $\wp(Y)$, $\wp(\wp(X))$ e $\wp(\wp(Y))$ e assim sucessivamente, *ad nauseam*, todas compatíveis com as relações de inclusão. Naturalmente, o mesmo pode ser feito entre $\wp(\mathcal{T})$ e $\wp(\mathcal{S})$, $\wp(\wp(\mathcal{T}))$ e $\wp(\wp(\mathcal{S}))$, etc.

Consequentemente, se X e Y são homeomorfos e $\mathcal{P}$ é uma *propriedade exprimível* em termos de abertos (elementos da topologia) e pontos do espaço, ou em termos de subconjuntos de abertos e subconjuntos do espaço, ou subconjuntos de subconjuntos de..., então X tem a propriedade $\mathcal{P}$ se, e somente se, Y tem a propriedade $\mathcal{P}$. △

Exercício 1.42. Sejam X e Y espaços topológicos homeomorfos. Mostre que X tem ponto de acumulação se, e somente se, Y tem ponto de acumulação. ■

Definição 1.1.98. Um pouco mais rigorosamente, mas nem tanto, diz-se que $\mathcal{P}$ é uma **propriedade topológica**[40] se para quaisquer espaços topológicos X e Y homeomorfos, valer que X *tem a propriedade* $\mathcal{P}$ *se, e somente se,* Y *tem a propriedade* $\mathcal{P}$. ¶

Assim, propriedades topológicas podem ser pensadas como *reagentes* usados para detectar quando dois espaços não são homeomorfos: se existir uma propriedade topológica $\mathcal{P}$ tal que X a possui mas Y não, então X e Y não podem ser homeomorfos.

Exemplo 1.1.99. Como todo homeomorfismo é uma bijeção, segue que quaisquer dois espaços homeomorfos têm a mesma cardinalidade. Consequentemente, espaços com cardinalidades distintas não podem ser homeomorfos. ▲

Exemplo 1.1.100. Pelo Exercício 1.42, segue que se X é discreto e Y tem pelo menos um ponto de acumulação, então X e Y não são homeomorfos. Em particular, $[0, \omega)$ não é isomorfo a $[0, \omega]$, embora ambos tenham a mesma cardinalidade. ▲

Exemplo 1.1.101. Ter (algumas) propriedades topológicas em comum não garante, de modo geral, que os espaços sejam homeomorfos (vide o exemplo anterior). Dito isso, há exceções marcantes, como as *caracterizações topológicas* para os espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, 2^ω (discutidas no próximo capítulo) e ω^ω (no Capítulo 6). Para um exemplo mais imediato, note que quaisquer dois espaços discretos com a mesma cardinalidade são homeomorfos. ▲

Exemplo 1.1.102. Se X é um espaço topológico e $f : X \to Y$ é uma bijeção entre X e Y, então é possível munir Y de uma topologia segundo a qual f se torna um homeomorfismo. Fica a cargo do leitor a simples tarefa de descrever tal topologia. ▲

Exemplo 1.1.103 (Propriedades não-topológicas)**.** Propriedades *de outra natureza*, de modo geral, falham em detectar a inexistência de homeomorfismo. Como exemplo, considerando a bijeção $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que associa $(x, y) \mapsto x + yi$, pode-se induzir sobre $\mathbb{C}$ uma topologia que torna $\mathbb{C}$ homeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde o último está munido da topologia produto. No entanto, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não são anéis isomorfos. ▲

Observação 1.1.104. A menos de menção contrária, o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ sempre será considerado com a topologia importada de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. △

Exemplo 1.1.105. Em contraposição ao exemplo anterior, observe que se $\mathscr{C}$ é uma categoria e $F\colon \mathscr{C} \to \textsc{Top}$ é um funtor, digamos covariante, então $F(a)$ e $F(b)$ são espaços homeomorfos sempre que a e b são objetos isomorfos da categoria $\mathscr{C}$. Isto é apenas uma instância da Proposição K.3.15. Em particular, segue pelo Exemplo 1.1.77 que se R e S são anéis isomorfos, então $\operatorname{Spec}(R)$ é homeomorfo a $\operatorname{Spec}(S)$. ▲

Observação 1.1.106. Matemáticos mais adeptos ao *handwaving* podem condenar a escolha inicial de exemplos acima pela falta de apelo geométrico. De fato, é comum se deparar com explicações intuitivas do tipo

> dois espaços são homeomorfos quando um pode ser *deformado continuamente* até se *transformar* no outro,

cujo exemplo clássico é a transformação de uma *rosquinha* numa *caneca*. Contudo, essa ideia de deformação, que profissionais chamam de *homotopia*, pode levar o matemático aprendiz a conclusões assustadoramente **equivocadas**:

[40] Um alerta para encrenqueiros: por abuso de linguagem, será comum tratar como indistinguíveis as expressões "X tem a propriedade $\mathcal{P}$" e "a topologia de X tem a propriedade $\mathcal{P}$". *Por favor, né?*

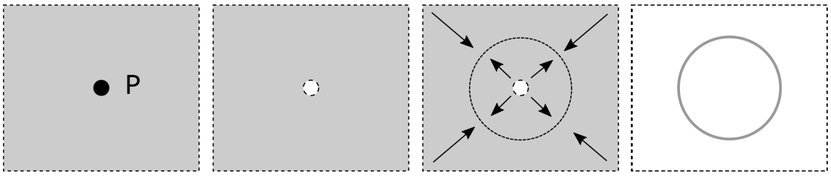


Figura 1.10: Uma demonstração típica da Topologia Algébrica.

- se tirarmos um ponto de $\mathbb{R}^2$, digamos P, podemos rasgar esse furo até formar um círculo “vazado” C;
- agora, podemos encolher o restante do plano até que sobre apenas a linha que delimita o círculo C;
- a conclusão, segundo a definição intuitiva, seria que $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ e C são homeomorfos, o que está absolutamente **errado**!

De fato, na próxima seção, munidos da *compacidade*, notaremos que círculos são *compactos*, enquanto $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ não é. O problema não está no conceito de deformação/homotopia, mas sim em tentar usá-lo como analogia para homeomorfismos. Dito isso, há realmente um modo um pouco mais intuitivo e geométrico de passar a ideia de homeomorfismo:

são deformações que não alteram as noções de *proximidade arbitrária*.

Em particular, *esticar*, *entortar* ou *girar* um *objeto*, sem *colar* nem *cortar* ou *separar* pedaços, resulta em *objetos* homeomorfos ao original. Note que isso invalida o exemplo anterior, ao mesmo tempo em que sugere homeomorfismos entre intervalos abertos com a reta, ou entre círculos e quadrados, etc., que de fato ocorrem. Ainda assim, vale o alerta: metáforas desse tipo são voltadas para divulgação científica e direcionam-se a um público alvo leigo; elas jamais devem ser encaradas como definição por profissionais.

Para o leitor que duvida e insiste no poder fundamental da transmissão de ideias por meio de metáforas ~~pseudodidáticas~~ *acessíveis*, pode ser interessante interpretar as próximas afirmações com algum desses mantras[41]:

1. se α é ordinal enumerável, então $\alpha \times \mathbb{Q}$ é homeomorfo a $\mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^n$ são homeomorfos para qualquer $n \in \mathbb{N}$;
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é homeomorfo ao espaço $\mathcal{C}_p(\omega, \omega)$, geralmente denotado como ω^ω.

Moral da história: embora homeomorfismos sejam capazes de perceber certas distinções entre os espaços, a abrangência dos conceitos topológicos permite que objetos aparentemente muito distintos sejam topologicamente indistinguíveis; em outras palavras, topologias capturam tão somente propriedades topológicas e nada mais. $\triangle$

Como homeomorfismos são os isomorfismos da categoria Top, o corolário a seguir é uma simples instância da Proposição K.3.13.

Corolário 1.1.107. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos.*

(i) *X é homeomorfo a X.*

[41] Todas elas serão demonstradas ao longo do texto, sem *abanação de mão*.

(ii) *Se X é homeomorfo a Y, então Y é homeomorfo a X.*

(iii) *Se X é homeomorfo a Y e Y é homeomorfo a Z, então X é homeomorfo a Z.*

Exemplo 1.1.108 (Como matar pandas – ou esticar intervalos)**.** Vamos mostrar, *no braço*, que $\mathbb{R}$ é homeomorfo a qualquer um de seus intervalos da forma (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Sujar as mãos... faz parte da vida[42].

O primeiro passo é observar que a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto x^{-1}$, é contínua. Para tanto, note que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ocorre

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - \alpha|}{|\alpha\beta|},$$

de modo que se $|\beta| > \frac{|\alpha|}{2}$, então a igualdade anterior resulta em

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right| < \frac{2}{|\alpha|^2}|\alpha - \beta|.$$

Daí, não é difícil concluir que f é contínua em α: para $\varepsilon > 0$ fixado, basta tomar $\delta := \min\left\{\frac{|\alpha|}{2}, \frac{\varepsilon|\alpha|^2}{2}\right\}$, já que

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| < \delta \leq \frac{|\alpha|}{2} \Rightarrow |\beta| > \frac{|\alpha|}{2},$$

donde segue a afirmação.

Com isso, *pode-se* mostrar que as funções

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R} &\to (-1, 1) \\ x &\mapsto \frac{x}{1 + |x|} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \psi \colon (-1, 1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{1 - |x|} \end{aligned}$$

são contínuas – o leitor deve entender isso como uma sugestão de exercício[43]. Enfim, como $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ e $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{(-1,1)}$, segue que $\mathbb{R}$ e $(-1, 1)$ são homeomorfos. A conclusão de que $\mathbb{R}$ e (a, b) são homeomorfos decorre, por transitividade, do próximo exercício. ▲

Exercício 1.43. Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, mostre que (a, b) é homeomorfo a $(-1, 1)$. ■

Observação 1.1.109. Do ponto de vista topológico, $(-1, 1)$ e $\mathbb{R}$ são indistinguíveis. Intuitivamente, as funções φ e ψ do exemplo anterior apenas "esticam" o intervalo, ou "contraem" a reta, sem alterar a proximidade *relativa* entre os pontos, como ilustrado na próxima figura.

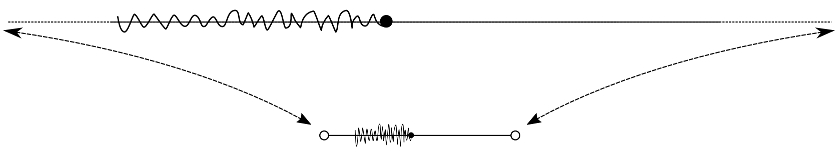


Figura 1.11: Eu morro um pouquinho a cada nova ilustração.

[42]Mas nem sempre: confira o Exercício 1.111.

[43]Dica: use e abuse de composições, restrições e multiplicações de funções contínuas. Lembre-se: *um panda morre a cada ε e δ utilizados sem necessidade.* Em particular, pode ser útil conferir o Exercício 1.114.

No entanto, a *métrica* sente a alteração. De fato, a métrica usual de $(-1,1)$ é limitada (se $x, y \in (-1,1)$, então $|x-y| < 2$), enquanto a métrica em $\mathbb{R}$ é ilimitada. Assim, embora φ e ψ sejam compatíveis com as topologias, elas não são compatíveis com as métricas.

Mais geralmente, $\mathbb{R}$ é homeomorfo a qualquer um de seus intervalos abertos não-vazios. Embora isso esteja implicitamente mostrado nas discussões acima, o Teorema K.2.125 garante que tais espaços são isomorfos no sentido de ordem. Logo, eles também são homeomorfos, em virtude do que se discutiu no Exemplo 1.1.105 juntamente com o Exercício 1.123. Moral da história: pandas morreram em vão. △

Exemplo 1.1.110 (Reta estendida ou *encolhida*?)**.** Assim como a reta real é homeomorfa ao intervalo $(0,1)$, a reta *estendida* $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ (Exemplo K.2.126) é homeomorfa ao intervalo $[0,1]$. Com efeito, pelo que se discutiu no Exemplo 1.1.50, a topologia da ordem em $\overline{\mathbb{R}}$ tem como abertos básicos, além dos intervalos abertos usuais de $\mathbb{R}$, os intervalos da forma $[-\infty, a)$ e $(b, +\infty]$ para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, situação análoga à dos abertos básicos de $[0,1]$. Com isso, é *relativamente fácil*[44] estender um homeomorfismo $\mathbb{R} \to (0,1)$ a fim de obter um homeomorfismo entre $[-\infty, +\infty]$ e $[0,1]$, mostrando que a reta estendida é, em certo sentido, um encolhimento da reta real. ▲

Antes de encerrar esta seção, convém explorar outro modo pelo qual homeomorfismos manifestam a *indistinguibilidade* topológica. No caso, a continuidade da inversa se traduz no seguinte.

Proposição 1.1.111. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma bijeção contínua. São equivalentes:*

(IT$_1$) *f é homeomorfismo;*

(IT$_2$) *para qualquer $U \subseteq X$, $f[U] \subseteq Y$ é aberto sempre que U for aberto;*

(IT$_3$) *para qualquer $A \subseteq X$, $f[A] \subseteq Y$ é fechado sempre que A for fechado.*

Demonstração. A equivalência entre (IT$_1$) e (IT$_2$) segue por f ser bijeção: de fato, por um lado, sabe-se que f é homeomorfismo se, e somente se, $f^{-1}\colon Y \to X$ é contínua e, por outro lado, para qualquer $U \subseteq X$ ocorre $(f^{-1})^{-1}[U] = f[U] \subseteq Y$. Logo a condição (IT$_2$) diz, precisamente que f^{-1} é contínua. A equivalência entre (IT$_1$) e (IT$_3$) segue de maneira análoga ao se considerar o próximo exercício. □

Exercício 1.44. Seja $f\colon X \to Y$ uma função entre os espaços topológicos X e Y. Mostre que a função f é contínua se, e somente se, $f^{-1}[C] \subseteq Y$ é fechado para cada subconjunto fechado $C \subseteq X$. ■

Definição 1.1.112. Uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y é

(*i*) **aberta** se a condição (IT$_2$) acima for satisfeita, i.e., se $f[U] \subseteq Y$ for aberto para todo $U \subseteq X$ aberto;

(*ii*) **fechada** se a condição (IT$_3$) acima for satisfeita, i.e., se $f[A] \subseteq Y$ for fechado sempre que $A \subseteq X$ for fechado. ¶

[44] A maior dificuldade é decidir entre $-\infty \mapsto 0$ ou $-\infty \mapsto 1$ (e $+\infty \mapsto 1$ ou $+\infty \mapsto 0$). Ocorre que por questões de *conexidade*, um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e $(0,1)$ é estritamente crescente ou decrescente: em posse disso, basta fazer $-\infty \mapsto 0$ e $+\infty \mapsto 1$ no primeiro caso, ou $-\infty \mapsto 1$ e $+\infty \to 0$ no segundo.

Assim, homeomorfismos são exemplos de aplicações que são (simultaneamente) abertas e fechadas. Vejamos outros exemplos.

Exemplo 1.1.113 (Projeções são abertas)**.** Se $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços topológicos, então $\pi_j \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$ é uma aplicação aberta para cada $j \in \mathcal{I}$. Isto segue pois

$$\pi_j\left[\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i\right] = A_j,$$

para qualquer família $\{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ com $A_i \subseteq X_i$. ▲

Exemplo 1.1.114 (Projeções não são fechadas)**.** Seja $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a projeção $(x, y) \mapsto x$ na primeira coordenada. Note que $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ é um subconjunto fechado, pois a multiplicação $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua (Exercício 1.112) e $F = f^{-1}[\{1\}]$. Mas $\pi[F] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ não é fechado em $\mathbb{R}$. ▲

Exemplo 1.1.115. (Funções polinomiais em uma variável são fechadas) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial, i.e., tal que exista um polinômio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ com $f(r) = p(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Futuramente, mostraremos que f é fechada. ▲

Observação 1.1.116 (*Spoiler alert*)**.** A ideia é que se $C \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e $y \in \overline{f[C]}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em C com $f(x_n) \to y$ (Proposição 1.1.61) e $\{x_n : n \in \omega\}$ *limitado* em $\mathbb{R}$, o que permite tomar uma *subsequência convergente* para algum $x \in C$, e daí $f(x) = y$. Alguns detalhes implícitos em tal argumentação serão discutidos já na próxima seção. A solução completa, porém, será apresentada no Exemplo 3.2.45. △

No caso em que $f\colon X \hookrightarrow Y$ é uma injeção contínua, é fácil ver que f define um homeomorfismo entre X e $f[X]$ se, e somente se, $f\colon X \to f[X]$ for aberta (ou fechada). Em tal situação, diz-se que f é um **mergulho** de X em Y. Mergulhos generalizam a noção de inclusão, já que se $A \subseteq Y$, então a inclusão $i\colon A \hookrightarrow Y$ é um mergulho. Como efeito colateral, se $f\colon X \hookrightarrow Y$ for um mergulho, tem-se o direito de assumir $X \subseteq Y$ por meio da *identificação* “$X = f[X]$”. O próximo resultado ilustra o conceito – e também encerra a seção[45].

Proposição 1.1.117. *Se X é um espaço topológico e $\mathcal{I}$ é um conjunto, então a diagonal $\Delta_{i\in\mathcal{I}}\colon X \to X^{\mathcal{I}}$ é uma injeção contínua. Se $|\mathcal{I}| < \aleph_0$, então $\Delta_{i\in\mathcal{I}}$ é um mergulho.*

Demonstração. Por simplicidade, escrevamos Δ em vez de $\Delta_{i\in\mathcal{I}}$. A função Δ é injetora, e sua continuidade segue pois a pré-imagem de um aberto sub-básico $\pi_i^{-1}[V]$ de $X^{\mathcal{I}}$ é, precisamente, o aberto $V \subseteq X$. Agora, se valer $|\mathcal{I}| < \aleph_0$, então $\Delta[V] = V^{\mathcal{I}}$ é um aberto de $X^{\mathcal{I}}$. □

Exercícios complementares da seção

Topologia, abertos, fechados e outras coisas

Exercício 1.45. Mostre que, em geral, a reunião arbitrária de fechados pode não ser fechada. Analogamente, a interseção arbitrária de abertos pode não ser aberta. Dica: em $\mathbb{R}$, escreva um intervalo fechado (resp. aberto) como reunião (resp. interseção) enumerável de abertos (resp. fechados). ■

Exercício 1.46. Sejam X um espaço topológico e $\kappa \geq \aleph_0$ um cardinal. Dizemos que $G \subseteq X$ é um (subconjunto) $\mathbf{G}_\kappa$ se existir uma família $\mathcal{U}$ de abertos de X com $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ e $G = \bigcap \mathcal{U}$. Um subconjunto $F \subseteq X$ é chamado de $\mathbf{F}_\kappa$ se existir uma família $\mathcal{C}$ de fechados de X com $|\mathcal{C}| \leq \kappa$ e $F = \bigcup \mathcal{C}$.

[45] Futuramente, pode ser interessante comparar com o Teorema 2.2.9 e com o Exercício 2.57.

a) Mostre que existem espaços nos quais nem todo G_κ é aberto, assim como existem espaços nos quais nem todo F_κ é fechado.

b) Mostre que o complementar de um G_κ é um F_κ, e *vice-versa*.

c) Seja $\mathcal{G}$ uma família de subconjuntos G_κ de X. Mostre que se $|\mathcal{G}| \leq \kappa$, então $\bigcap \mathcal{G}$ é um G_κ.

d) Enuncie e demonstre a versão dual do item anterior para subconjuntos F_κ.

e) A reunião arbitrária de subconjuntos G_κ é ainda um subconjunto G_κ?

Chamando por $\mathcal{G}_\kappa$ a família dos G_κ de X, conclua que $\mathcal{G}_\kappa$ é base para uma topologia em X, possivelmente diferente da topologia original de X – tal topologia é chamada de **G_κ-modificação**, e escrevemos X_κ para denotar o conjunto X munido desta topologia. Dica: para $\kappa := \aleph_0$ e $X := \mathbb{R}$, note que $\mathbb{R}_{\aleph_0}$ é discreto. ■

Observação 1.1.118. Quando $\kappa := \aleph_0$, costuma-se escrever "$\mathbf{G}_\delta$" e "$\mathbf{F}_\sigma$" em vez de "G_κ" e "F_κ", respectivamente. △

Exercício 1.47. Mostre que $\mathbb{Q}$ é um F_σ de $\mathbb{R}$. Pense a respeito: seria $\mathbb{Q}$ um G_δ de $\mathbb{R}$? ■

Exercício 1.48. Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um G_δ de $\mathbb{R}$. Seria $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ um F_σ de $\mathbb{R}$? ■

Exercício 1.49. Um subconjunto Z de um espaço topológico X é chamado de **zero-set** se existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}[\{0\}] = Z$. Mostre que todo zero-set é um G_δ. ■

Exercício 1.50. Mostre que a coleção das topologias sobre um conjunto X é parcialmente ordenada pela relação de inclusão. Em particular, todo subconjunto não-vazio de topologias de X admite um ínfimo. ■

Observação 1.1.119. Dadas duas topologias $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sobre um conjunto X, é muito comum encontrar textos que se referem à inclusão "$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$" das seguintes formas:

- $\mathcal{S}$ é *mais fraca*, ou *mais grossa* (*coarser*), do que $\mathcal{T}$, e
- $\mathcal{T}$ é *mais forte*, ou *mais fina*, do que $\mathcal{S}$.

Uma vez que o símbolo "$\subseteq$" tem cumprido bem o seu papel, não vejo razão para perpetuar esse tipo de nomenclatura – o que também não significa o completo abandono dela neste texto. De qualquer forma, é justo que o leitor saiba dos diferentes costumes com os quais pode vir a se deparar. △

Exercício 1.51. Seja $\mathscr{O}$ uma família de topologias sobre um conjunto X. Observe que $\bigcup \mathscr{O}$ não é necessariamente uma topologia sobre X. Qual a menor topologia sobre X que contém $\bigcup \mathscr{O}$? Dica: ela já apareceu nesta seção. ■

Exercício 1.52. Sejam (M, d) um espaço pseudométrico, $x \in M$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$. Mostre que se $\alpha \leq \beta$, então $B_d(x, \alpha) \subseteq B_d(x, \beta)$. Se ocorrer $\alpha < \beta$, a inclusão se torna estrita? ■

Exercício 1.53. Sejam (M, d) um espaço pseudométrico, $x, y \in M$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Quando ocorre $B_d(x, \alpha) \subseteq B_d(y, \beta)$? ■

Exercício 1.54 (Sorgenfrey)**.** Mostre que os subconjuntos da forma $[a, b) \subsetneq \mathbb{R}$, para $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, constituem uma base para uma topologia $\mathcal{S}$ em $\mathbb{R}$, estritamente mais forte do que a topologia usual da reta. ■

Observação 1.1.120. A topologia $\mathcal{S}$ considerada no exercício anterior constitui um espaço muito útil, frequentemente utilizado como contraexemplo em diversas situações. Por futura conveniência, e obedecendo a tradição, chamamos o par $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ de **reta de Sorgenfrey** e, por simplicidade, escrevemos $\mathbb{R}_S$ para indicar o conjunto dos números reais munido desta topologia. △

Bases, sub-bases e subespaços

Exercício 1.55. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, mostre que a topologia de subespaço de $[a, b]$ é gerada pela família $\{[a, r) : a < r \leq b\} \cup \{(r, b] : a \leq r < b\}$. Compare com a reta estendida. Dica: use o que sabemos sobre a topologia da ordem. ■

Exercício 1.56. Sejam duas topologias $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ de um mesmo conjunto, com bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Quais condições $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ devem satisfazer a fim de que ocorra $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$? ■

Exercício 1.57 (Subespaços revisitados[46])**.** Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um subconjunto $Y \subseteq X$, repita a demonstração de que $\mathcal{T}|_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ é uma topologia em Y. Reflita: você usou o Axioma da Escolha? Se sim, ele foi realmente necessário? Dica: o modo a topologia $\mathcal{T}|_Y$ foi descrita é enganoso; a rigor, $\mathcal{T}|_Y$ tem como elementos os subconjuntos V de Y para os quais *existe algum* $U \in \mathcal{T}$ com $V = U \cap Y$. ■

Exercício 1.58. Sejam X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço. Mostre que $F \subseteq Y$ é fechado (em Y) se, e somente se, existe um subespaço fechado (em X) $G \subseteq X$ tal que $F = Y \cap G$. ■

Exercício 1.59. Sejam X um espaço topológico e $Y, Z \subseteq X$ tais que $Z \subseteq Y$. Descreva a topologia de Z como subespaço de Y e como subespaço de X. Conclua que ambas as topologias coincidem. ■

Exercício 1.60. Sejam X e Y conjuntos, com $Y \subseteq X$. Mostre que se $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ é uma pseudométrica em X, então a restrição de d a $Y \times Y$ é uma pseudométrica em Y. Repita o procedimento para um calibre $\mathcal{G}$ em X e mostre que a inclusão $i\colon Y \to X$ é contínua. ■

Exercício 1.61. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para uma topologia em X. Mostre que se $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}|$, com $|\mathcal{B}| \geq \aleph_0$, então existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, com $|\mathcal{C}'| \leq |\mathcal{B}|$ tal que $\mathcal{C}'$ ainda é base da mesma topologia. Dica: use os abertos de $\mathcal{B}$ como fatias de um sanduíche cujo recheio são membros de $\mathcal{C}$; lembre-se de que $|\mathcal{B} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{B}|$. ■

Fecho, interior, conjuntos derivados e outros operadores

Exercício 1.62. Para um espaço topológico X e $A \subseteq X$, mostre que $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$. De preferência, tente fazer isso sem apelar para a igualdade $\operatorname{int}(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$. ■

Exercício 1.63. Seja X um espaço topológico tal que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ para quaisquer $A, B \subseteq X$. Qual é a topologia de X? Dica: seja discreto e argumente por absurdo. ■

Exercício 1.64. Mostre que se X é um espaço topológico e $A \subseteq X$ intercepta todos os densos de X, então A tem interior não-vazio. ■

Exercício 1.65 ("denso de denso é denso")**.** Se X é um espaço topológico e $D \subseteq X$ é denso, então qualquer subespaço denso de D é denso em X. ■

Exercício 1.66. Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. ■

Exercício 1.67. Pense rápido: se X é um espaço topológico e $D \subsetneq X$ é denso, então $X \setminus D$ é denso? ■

Exercício 1.68. Quais espaços X têm a seguinte propriedade: se $A \subseteq X$ é denso, então $A = X$? ■

Exercício 1.69. Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de X e, para cada $B \in \mathcal{B}$ não-vazio escolha $d_B \in B$. Mostre que $\{d_B : B \in \mathcal{B}\}$ é denso em X. ■

Exercício 1.70. Sejam X um espaço topológico, $Y \subseteq X$ um subespaço e $A \subseteq Y$. Mostre que $\operatorname{cl}_Y(A) = \operatorname{cl}_X(A) \cap Y$, i.e., o fecho do subconjunto A como subespaço de Y é a interseção entre o fecho de A como subespaço de X e o subespaço Y. Vale o análogo para $\operatorname{int}_Y(A)$? ■

Exercício 1.71. Dados um espaço topológico X e subconjuntos $A \subseteq Y \subseteq X$, mostre que

$$\operatorname{int}_Y(A) = \operatorname{int}_X(A \cup (X \setminus Y)) \cap Y.$$

Conclua que a resposta para a última pergunta do exercício anterior é "não". ■

Exercício 1.72. Para um espaço topológico X qualquer e $A \subseteq X$, é sempre verdade que A^{d} é fechado? Dica: considere $X = \{a, b\}$ com a topologia codiscreta. ■

Exercício 1.73. Dados um espaço topológico X e um subconjunto $A \subseteq X$, definimos a **fronteira** de A como sendo

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \tag{1.22}$$

Prove as identidades a seguir.

[46]Comentários mais extensos podem ser encontrados no artigo de Blackadar [13].

a) $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A)$.

b) $\operatorname{int}(A) = A \setminus \partial A$.

c) $\overline{A} = A \cup \partial A$.

d) $\partial(X \setminus A) = \partial A$.

e) $X = \operatorname{int}(A) \cup \partial A \cup \operatorname{int}(X \setminus A)$.

Determine ∂A para os seus subconjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ favoritos. ■

Exercício 1.74. Exiba um espaço topológico X e uma família infinita $\mathcal{S}$ de subconjuntos satisfazendo $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} \overline{S} \subsetneq \overline{\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S}$. Dica: pense racionalmente. ■

Exercício 1.75. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Diz-se que A é **rarefeito**[47] se $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset$. Por sua vez, $M \subseteq X$ é chamado de **magro** (em X) se M é reunião enumerável de subconjuntos rarefeitos. Subconjuntos **não-magros**[48] são aqueles que não são magros. **Espaços (não-) magros** são aqueles que são subconjuntos **(não-) magros** em si próprios. Mostre que:

a) se $A \subseteq B$ e B é magro em X, então A é magro em X;

b) a reunião enumerável de subconjuntos magros em X é magra em X;

c) se F é fechado com interior vazio, então F é magro em X.

Conclua que se $f\colon X \to X$ é um homeomorfismo, então $A \subseteq X$ é magro em X se, e somente se, $f[A]$ é magro em Y. ■

Exercício 1.76. Mostre que um espaço com pelo menos um ponto isolado é, necessariamente, não-magro. Dica: algum subconjunto com interior vazio pode conter um ponto isolado? ■

Exercício 1.77. Mostre que se um espaço contém um aberto que é não-magro com a topologia de subespaço, então o próprio espaço é não-magro. ■

Funções contínuas

Exercício 1.78. Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma função e $S \subseteq X$. Geralmente, a frase "f é contínua em S" admite duas interpretações:

(i) f é contínua em cada ponto de S;

(ii) a restrição $f|_S$ é contínua.

Mostre que $(i) \Rightarrow (ii)$ e, se S for aberto, então $(ii) \Rightarrow (i)$. Mostre que se S não for aberto, então a implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ pode ser falsa. ■

Exercício 1.79. Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se $D \subseteq X$ é denso, então $f[D]$ é denso no subespaço $\operatorname{im}(f)$. ■

Exercício 1.80. Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias em X. Mostre que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ se, e somente se, a função identidade $\operatorname{Id}_X\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ é contínua. ■

Exercício 1.81. Mostre que podem existir topologias $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$ num mesmo conjunto X tais que $(X, \mathcal{T})$ e $(X, \mathcal{S})$ sejam homeomorfos. Tal homeomorfismo pode ser Id_X? ■

Exercício 1.82. Duas pseudométricas sobre um mesmo conjunto X são **topologicamente equivalentes** se induzirem a mesma topologia em X. Explicite essa definição em termos de bolas abertas. ■

Exercício 1.83. Sejam X e Y espaços topológicos discretos. Mostre que X é homeomorfo a Y se, e somente se, $|X| = |Y|$. ■

Exercício 1.84. Seja X um conjunto infinito munido da topologia cofinita. Mostre que se $f \in \mathcal{C}(X)$, então f é constante. Dica: suponha que não e tome pré-imagens de intervalos abertos marotos (pense grande!). ■

[47] *Nowhere dense*, algo como *denso em lugar nenhum*. Há textos que chamam tais subconjuntos de *raros* (como Bourbaki), mas isso pode dar um entendimento mais quantitativo ("há poucos") do que topológico.

[48] *Nonmeager*. É muito comum chamar subconjuntos magros como "de primeira categoria", enquanto subconjuntos não-magros são também conhecidos como "de segunda categoria".

Exercício 1.85 (TOP não é uma *categoria de Cantor-Bernstein*)**.** Existem espaços topológicos X e Y, com X mergulhado em Y e Y mergulhado em X, mas X e Y não são homeomorfos. ■

Exercício 1.86. Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de X. Mostre que f é aberta se, e somente se, $f[B] \subseteq Y$ é aberto para todo $B \in \mathcal{B}$. ■

Exercício 1.87. Mostre que se uma função contínua $f\colon X \to Y$ é fechada, então para qualquer subconjunto $A \subseteq X$ deve ocorrer $f\left[\overline{A}\right] = \overline{f[A]}$. Vale a recíproca? ■

Exercício 1.88. Mostre que se uma injeção contínua $f\colon X \to Y$ é aberta ou fechada, então f é um mergulho. Mostre que a recíproca é falsa. Dica: lembre-se que f é um mergulho se $f\colon X \to f[X]$ é um homeomorfismo, onde $f[X]$ tem a topologia de subespaço herdada de Y. ■

Exercício 1.89. Seja $f\colon X \to Y$ uma injeção contínua. Mostre que se para quaisquer $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado com $x \notin F$ ocorrer $f(x) \notin \overline{f[F]}$, então f é um mergulho. ■

Exercício 1.90. Considere a função $\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ a função característica dos racionais. Mostre que $\chi_{\mathbb{Q}}$ é descontínua em todos os pontos do domínio. É possível desenhar o gráfico de $\chi_{\mathbb{Q}}$? ■

Exercício 1.91. Mostre que a correspondência $\mathcal{C}\colon$ TOP $\to$ RING que faz $X \mapsto \mathcal{C}(X)$ é um funtor contravariante. Adapte para a correspondência $\mathcal{C}_p\colon$ TOP $\to$ TOP que faz $X \mapsto \mathcal{C}_p(X)$. ■

Exercício 1.92 (Invariantes)**.** Sejam C uma categoria e $F\colon$ TOP $\to$ C um funtor. Se X e Y são espaços topológicos homeomorfos, então $F(X)$ e $F(Y)$ são objetos isomorfos na categoria C. ■

Observação 1.1.121. Situações como a descrita no exercício anterior são um dos grandes fetiches em Topologia Algébrica: a cada espaço topológico associa-se um certo objeto algébrico de maneira funtorial, por meio do qual classificam-se os espaços topológicos. △

Exercício 1.93. Considere as seguintes asserções sobre um espaço topológico X.

a) X tem cardinalidade κ.

b) X é discreto.

c) X é calibrável.

d) X é pseudometrizável.

e) X é metrizável.

Mostre que cada uma delas é uma propriedade topológica. ■

Exercício 1.94. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço pseudometrizável. Mostre que existe uma pseudométrica limitada compatível com a topologia de X, ou seja: existe $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ uma pseudométrica, limitada como função real, tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Conclua que *ser limitado* não é uma propriedade topológica. ■

A topologia produto

Nos exercícios a seguir, $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços topológicos não-vazios e $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é munido da topologia produto.

Exercício 1.95. Suponha que $X := X_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Mostre que a função diagonal $\Delta\colon X \to X^{\mathcal{I}}$, dada por $\Delta(x) := (x)_{i\in\mathcal{I}}$, é um mergulho. ■

Exercício 1.96. Fixado $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, mostre que a projeção

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{J}}\colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i &\to \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\\ (x_i)_{i\in\mathcal{I}} &\mapsto (x_j)_{j\in\mathcal{J}}\end{aligned}$$

é contínua. ■

Exercício 1.97. Uma função $f\colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to Z$ é **separadamente contínua** se, para quaisquer $j \in \mathcal{I}$ e $(x_i)_{i\in\mathcal{I}\setminus\{j\}}$ fixados, a função $f_j\colon X_j \to Z$ dada por $f_j(x_j) := f((x_i)_{i\in\mathcal{I}})$ for contínua. Mostre que se f é contínua, então f é separadamente contínua. Pense a respeito: vale a recíproca? ■

Exercício 1.98. Para cada $i \in \mathcal{I}$, seja $A_i \subseteq X_i$. Determine $\operatorname{int}\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)$. Dica: convém separar os casos $|\mathcal{I}| < \aleph_0$ e $|\mathcal{I}| \geq \aleph_0$. ■

Exercício 1.99. Para cada $i \in \mathcal{I}$, seja $A_i \subseteq X_i$. Mostre que $\overline{\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i} = \prod_{i\in\mathcal{I}} \overline{A_i}$. ■

Observação 1.1.122. Acima, $\overline{\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i}$ indica o fecho topológico de $\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i$ em $\prod_{x\in\mathcal{I}} X_i$, enquanto $\overline{A_i}$ denota o fecho topológico do subconjunto A_i em X_i. Convém salientar que se a tese do exercício acima é assumida como verdadeira em ZF, então pode-se provar o Axioma da Escolha! Tal equivalência, devida a Schechter, é discutida em [104]. △

Exercício 1.100. Para cada $i \in \mathcal{I}$ seja $D_i \subseteq X_i$ denso. Mostre que $\prod_{i\in\mathcal{I}} D_i$ é denso em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. ■

Exercício 1.101. Seja $\varphi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ uma bijeção. Mostre que $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_{\varphi(i)}$ são homeomorfos. ■

Observação 1.1.123. Embora seja tentador imaginar que ambos os produtórios sejam idênticos como conjuntos, note que uma $\mathcal{I}$-upla típica do primeiro é uma função da forma $f\colon \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ para cada i, enquanto uma $\mathcal{I}$-upla do segundo é uma função $g\colon \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_{\varphi(i)}$ com $g(i) \in X_{\varphi(i)}$ para cada i, e pode ocorrer $X_i \neq X_{\varphi(i)}$ para algum (ou todos!) $i \in \mathcal{I}$. △

Exercício 1.102. Dados espaços topológicos não-vazios X e Y, exiba um mergulho de X em $X \times Y$. Dica: fixe $y \in Y$ e depois seja preguiçoso. ■

Exercício 1.103. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $\mathcal{I}$. Mostre que $\prod_{P\in\mathcal{P}}\left(\prod_{i\in P} X_i\right)$ é homeomorfo a $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Dica: use a propriedade universal do produto. ■

Exercício 1.104. Se $\emptyset \neq \mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e $\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\right) \times \left(\prod_{i\in\mathcal{I}\setminus\mathcal{J}} X_i\right)$ são espaços homeomorfos. Dica: use $\mathcal{P} := \{\mathcal{J}, \mathcal{I}\setminus\mathcal{J}\}$ no exercício anterior. ■

Exercício 1.105. Seja $\emptyset \neq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ e, para cada $i \in \mathcal{I}\setminus\mathcal{J}$, fixe $u_i \in X_i$. Mostre que a função $i_{\mathcal{J}}\colon \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j \to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é contínua, onde

$$i_{\mathcal{J}}((x_j)_{j\in\mathcal{J}}) = (x_i)_{i\in\mathcal{I}},$$

com $x_i := u_i$ para cada $i \in \mathcal{I}\setminus\mathcal{J}$. A função $i_{\mathcal{J}}$ é um mergulho? Dica: use os exercícios anteriores. ■

Exercício 1.106. Considere $\textsc{Top}^{\mathcal{I}}$ a categoria cujos objetos são $\mathcal{I}$-uplas de espaços topológicos e cujas setas são $\mathcal{I}$-uplas de funções contínuas, i.e., se $Y := (Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ e $Z := (Z_i)_{i\in\mathcal{I}}$ são objetos de $\textsc{Top}^{\mathcal{I}}$, então uma seta entre Y e Z é uma $\mathcal{I}$-upla $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$, onde $f_i\colon Y_i \to Z_i$ é uma função contínua para cada $i \in \mathcal{I}$. A composição entre setas deve ser feita em cada coordenada, do modo usual.

a) Mostre que $\textsc{Top}^{\mathcal{I}}$ é, de fato, uma categoria.

b) Mostre que a correspondência óbvia $\prod_{i\in\mathcal{I}}\colon \textsc{Top}^{\mathcal{I}} \to \textsc{Top}$ determina um funtor.

Conclua que se X_i e Y_i são homeomorfos para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é homeomorfo a $\prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$. Dica para b): a uma seta $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ entre as $\mathcal{I}$-uplas de espaços $(Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ e $(Z_i)_{i\in\mathcal{I}}$, associe a função $\prod_{i\in\mathcal{I}} f_i\colon \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i \to \prod_{i\in\mathcal{I}} Z_i$ que faz $\prod_{i\in\mathcal{I}} f_i\left((y_i)_{i\in\mathcal{I}}\right) := (f_i(y_i))_{i\in\mathcal{I}}$; use a Proposição 1.1.86 para concluir que $\prod_{i\in\mathcal{I}} f_i$ é contínua. ■

Observação 1.1.124. Se $\mathcal{I} := \{0, 1, \ldots, n\}$, por exemplo, também se escreve $f_0 \times \ldots \times f_n$ em vez de $\prod_{i\in\mathcal{I}} f_i$. Tais resultados e notações foram usados no Lema 1.1.91. △

Exercício 1.107. Use o exercício anterior para dar sentido à frase "se $\varphi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ é uma bijeção, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_{\varphi(i)}$ são naturalmente homeomorfos". Dica: encontre uma transformação natural do funtor $\prod_{i\in\mathcal{I}}$ para ele mesmo. ■

Exercício 1.108. Sejam $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ e $(Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ $\mathcal{I}$-uplas de espaços topológicos e $f_i\colon X_i \to Y_i$ uma função aberta, para cada $i \in \mathcal{I}$. Mostre que se$\{i \in \mathcal{I} : \operatorname{im}(f_i) \neq Y_i\}$ é finito, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} f_i\colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$ é aberta. ■

Exercício 1.109. Mostre que se X e Y são homeomorfos, então $X^{\mathcal{I}}$ e $Y^{\mathcal{I}}$ são homeomorfos, qualquer que seja o conjunto de índices $\mathcal{I}$. ■

Exercício 1.110. Fixe um espaço topológico X. Mostre que se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são conjuntos com a mesma cardinalidade, então $X^{\mathcal{I}}$ e $X^{\mathcal{J}}$ são espaços topológicos homeomorfos. Interprete isso em termos de categorias, por meio de um funtor $\textsc{Set} \to \textsc{Top}$ adequado. Dica: se $\varphi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ é uma função entre $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$, então a correspondência $(\bullet) \circ \varphi\colon X^{\mathcal{J}} \to X^{\mathcal{I}}$ dada por $g \mapsto g \circ \varphi$ é contínua. ■

Análise revisitada

Exercício 1.111. Seja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ a função que faz $x\mapsto\frac{1}{x}$. Mostre que se I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ com $0\notin I$, então $f^{-1}[I]$ é um intervalo aberto. Conclua que f é contínua. ■

Exercício 1.112. Seja $p\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ um polinômio e considere $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ a função que faz

$$(r_1,\ldots,r_n)\longmapsto p(r_1,\ldots,r_n)$$

para cada $(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n$. Mostre que f é contínua. ■

Exercício 1.113. Como um topólogo prova que o conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : xy^7-2z^3x<2\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$? ■

Exercício 1.114. Sejam X, Y e Z espaços topológicos, com Z pseudometrizável. Se $d\colon Z\times Z\to\mathbb{R}$ é uma pseudométrica compatível com a topologia de Z, $f\colon X\to Z$ e $g\colon Y\to Z$ são funções contínuas, mostre que

$$\begin{aligned} d(f(\bullet),g(\bullet))\colon X\times Y &\to \mathbb{R}\\ (x,y)&\mapsto d(f(x),g(y)) \end{aligned}$$

é contínua. Em particular, conclua que se $h\colon X\to\mathbb{R}$ é contínua, então é contínua a função $|h|\colon X\to\mathbb{R}$, que faz $|h|(x):=|h(x)|$ para todo $x\in X$. ■

Exercício 1.115. Dado um espaço topológico X e $f,g\in\mathcal{C}(X)$, defina as funções

$$\begin{aligned} \max\{f,g\}\colon X&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\max\{f(x),g(x)\} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \min\{f,g\}\colon X&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\min\{f(x),g(x)\} \end{aligned}.$$

Mostre que $\max\{f,g\},\min\{f,g\}\in\mathcal{C}(X)$. Dica: $\max\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$. ■

Exercício 1.116. Seja R um anel comutativo e com unidade, munido de uma topologia que torna contínuas as operações de adição e multiplicação. Prove que toda função polinomial $f\colon R\to R$ é contínua. Dica: repita a demonstração do Corolário 1.1.94. ■

Exercício 1.117. Seja $p\in\mathbb{C}[x]$ um polinômio com coeficientes complexos. Prove que a função $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ que faz $\alpha\mapsto p(\alpha)$ é contínua. ■

Exercício 1.118. Mostre que bijeções estritamente crescentes entre intervalos de $\overline{\mathbb{R}}$ são homeomorfismos. Dica: qual a pré-imagem de intervalos abertos? ■

Exercício 1.119. Para $n\in\mathbb{N}$, mostre que a função $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ que faz $x\mapsto x^{2n}$ é uma bijeção crescente. Conclua que existem e são contínuas as funções $\sqrt[2n]{\ }\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. Dica: primeiro, observe que tal função se obtém como n composições de $x\mapsto x^2$, o que reduz o problema a mostrar que esta é uma bijeção crescente; para a injetividade, lembre-se de que $a^2+b^2=(a+b)(a-b)$; para a sobrejetividade, mostre, via supremos, a existência de $\sqrt{\alpha}$ para cada $\alpha\geq 0$ (ou espere pela conexidade a fim de apelar para o Teorema do Valor Intermediário). ■

Exercício 1.120 (Opcional)**.** Para $n\in\omega$, mostre que a função $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que faz $x\mapsto x^{2n+1}$ é uma bijeção crescente. Conclua que existem e são contínuas as funções $\sqrt[2n+1]{\ }\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dica: para a injetividade, lembre-se de que $a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$; para a sobrejetividade, prove, via supremos, a existência de raízes n-ésimas (ou espere pela conexidade etc. etc.). ■

Exercício 1.121. Mostre que as funções

$$\begin{aligned} |\cdot|\colon\mathbb{R}^X&\to\mathbb{R}^X\\ f&\mapsto|f| \end{aligned}\ ,\quad \begin{aligned} \max\colon\mathbb{R}^X\times\mathbb{R}^X&\to\mathbb{R}^X\\ (f,g)&\mapsto\max\{f,g\} \end{aligned}\quad e\quad \begin{aligned} \min\colon\mathbb{R}^X\times\mathbb{R}^X&\to\mathbb{R}^X\\ (f,g)&\mapsto\min\{f,g\} \end{aligned}$$

são contínuas. Dica: escreva max e min em termos mais algébricos. ■

Sortidos

Exercício 1.122. Seja $\text{TOTAL}^{\uparrow}$ a categoria das ordens totais, cujas setas são as funções crescentes.

a) Sejam $\mathbb{T} := [0,2]$ e $\mathbb{T}' := [0,4]$ os intervalos de $\mathbb{R}$ munidos da ordem induzida de $\mathbb{R}$. Considere a função $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}'$ que faz $f(x) := 2x$ para $x \in [0,1)$ e $f(x) := 2x+1$ para $x \in [1,2]$. Convença-se de que a função f é injetora e crescente. Em particular, f é um isomorfismo de ordens entre $[0,2]$ e $\mathbb{T}'' := [0,2) \cup [3,4]$, onde o último tem a ordem induzida de $\mathbb{T}'$.

b) No item anterior, ao se considerarem $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$ munidos das topologias induzidas por suas ordens, pode-se afirmar que a função f é contínua? Dica: aposte no "não".

c) Ainda com respeito ao primeiro item, considere f com o codomínio restrito à sua imagem $\mathbb{T}''$. Note que f é contínua se considerarmos $\mathbb{T}''$ munido com a topologia da ordem, e descontínua quando $\mathbb{T}''$ é dotado da topologia de subespaço induzida de $\mathbb{T}'$.

d) Dada uma ordem total $(\mathbb{T}, \leq)$, vamos denotar por $\tau_{\leq}$ a topologia em $\mathbb{T}$ induzida por $\leq$. Use os itens anteriores para mostrar que a correspondência

$$(f\colon (\mathbb{T}, \leq) \to (\mathbb{T}', \leq')) \longmapsto (f\colon (\mathbb{T}, \tau_{\leq}) \to (\mathbb{T}', \tau_{\leq'})) \tag{1.23}$$

não induz um funtor $\text{TOTAL}^{\uparrow} \to \text{TOP}$. ■

Observação 1.1.125. O exercício anterior contraria, num primeiro momento, a *intuição* de que isomorfismos de ordem *induzem* homeomorfismos por meio de funtores. Isto será *corrigido* a seguir. △

Exercício 1.123. O propósito deste exercício é mostrar que isomorfismos entre ordens totais se traduzem como homeomorfismos *por meios funtoriais* na categoria *certa*.

a) Uma função $\varphi\colon (\mathbb{T}, \leq) \to (\mathbb{T}', \leq')$ **preserva supremos** se ocorrer a igualdade $\varphi(\sup S) = \sup \varphi[S]$ para todo subconjunto S de $\mathbb{T}$ que admitir um supremo. Analogamente, φ **preserva ínfimos** se para todo subconjunto S de $\mathbb{T}$ que admitir um ínfimo valer $\varphi(\inf S) = \inf \varphi[S]$. Mostre que para uma função $f\colon (\mathbb{T}, \leq) \to (\mathbb{T}', \leq')$, são equivalentes:

   i) $f\colon (\mathbb{T}, \tau_{\leq}) \to (\mathbb{T}', \tau_{\leq'})$ é contínua e crescente;

   ii) f preserva supremos e ínfimos.

   Sugestão. Para (ii) $\Rightarrow$ (i), note que f deve ser crescente. Em seguida, mostre que se $f(a) \in (b, +\infty) := I$, então existe $\alpha \in \mathbb{T}$ com $a \in (\alpha, +\infty) \subseteq f^{-1}[I]$: se tal α não *existisse*, teria-se $a = \min f^{-1}[I]$ e $\sup\{t \in \mathbb{T} : t < a\} = a$, de modo que (ii) daria $f(a) = \sup_{t<a} f(t)$, donde uma contradição se seguiria da desigualdade $b < f(a)$. O caso em que $f(a) \in (-\infty, c)$ é análogo. Dica: faça um desenho (realmente ajuda).

b) Mostre que se $f\colon (\mathbb{T}, \leq) \to (\mathbb{T}', \leq')$ é um isomorfismo de ordens no sentido usual, então f e f^{-1} preservam supremos e ínfimos.

c) Seja $\text{TOTAL}^{\uparrow}{}_{\sup,\inf}$ a subclasse de $\text{TOTAL}^{\uparrow}$ cujos objetos são ordens totais e cujas setas são funções que preservam supremo e ínfimo. Mostre que $\text{TOTAL}^{\uparrow}{}_{\sup,\inf}$ é uma subcategoria de $\text{TOTAL}^{\uparrow}$, e observe que a correspondência (1.23) define um funtor $\text{TOTAL}^{\uparrow}{}_{\sup,\inf} \to \text{TOP}$.

Conclua de forma categorialmente honesta que o homeomorfismo entre $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ decorre da existência de um isomorfismo de ordens entre ambos. ■

Observação 1.1.126. Um *desafio* proposto por Rígille Menezes, no Twitter[49], fez com que eu notasse a não-funtorialidade da correspondência (1.23). A "solução" sugerida pelo Exercício 1.123, também observada por Schechter [104][50], foi adaptada da discussão realizada em https://math.stackexchange.com/questions/2542202. △

Exercício 1.124. Mostre que um aberto não-vazio $U \subseteq \mathbb{R}$ é reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Dicas: 1) $\mathbb{R}$ tem base enumerável; 2) espere até termos em mãos o conceito de *componente conexa*; 3) confira o Exemplo 2.3.23; alternativamente, siga os passos a seguir.

[49] https://twitter.com/impression28/status/1225141899494817793.

[50] Embora com argumentações bem mais gerais. O leitor pode conferir a Seção 15.45 de [104].

a) Chamando por $\mathcal{I}$ a família dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ contidos em U, defina

$$\mathbb{P} := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} : I, J \in \mathcal{A} \text{ e } I \neq J \Rightarrow I \cap J = \emptyset\}.$$

Agora, para $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{P}$, declare $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ se para cada $I \in \mathcal{A}$ existir $J \in \mathcal{B}$ com $I \leq J$. Mostre que $(\mathbb{P}, \leq)$ é uma ordem parcial.

b) Seja $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{P}$ uma cadeia.

i) Dado $L \in \bigcup\bigcup\mathscr{C}$, defina $I_L := \bigcup\{J \in \bigcup\bigcup\mathscr{C} : L \subseteq J\}$. Mostre que $I_L \in \mathcal{I}$. Dica: note que uma reunião de intervalos com (pelo menos) um ponto comum a todos é um intervalo.

ii) Mostre que se $L \in \mathcal{C} \in \mathscr{C}$, então para cada $\mathcal{D} \in \mathscr{C}$ com $\mathcal{C} < \mathcal{D}$ existe um único $L_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$ com $I \subseteq I_{\mathcal{D}}$.

iii) Mostre que se $I_L \cap I_K \neq \emptyset$ para certos $K, L \in \bigcup\bigcup\mathscr{C}$, então $I_L = I_K$. Dica: nas notações do item anterior, observe que $I_L = \bigcup_{\mathcal{D}>\mathcal{C}} L_{\mathcal{D}}$ e $I_L = I_{L_{\mathcal{D}}}$ para qualquer $\mathcal{D} > \mathcal{C}$.

iv) Conclua que $\mathcal{B} := \{I_L : L \in \bigcup\bigcup\mathscr{C}\}$ é limitante superior da cadeia $\mathscr{C}$.

c) Dado $\mathcal{M} \in \mathbb{P}$ maximal (que existe pelo Lema de Zorn), mostre que $\bigcup\mathcal{M} = U$. Dica: se não fosse, tomando $x \in U \setminus \bigcup\mathcal{M}$ teríamos $I \in \mathcal{I}$ com $x \in I \subseteq U$ e daí

$$\mathcal{M}' := \{J \in \mathcal{M} : J \cap I = \emptyset\} \cup \left\{I \cup \bigcup\{J \in \mathcal{M} : J \cap I \neq \emptyset\}\right\}$$

satisfaz $\mathcal{M} < \mathcal{M}'$

d) Para concluir que $\mathcal{M}$ é enumerável use o fato de $\mathbb{Q}$ ser um subconjunto enumerável denso de $\mathbb{R}$. ■

Observação 1.1.127. Oportunamente, mostraremos que os abertos envolvidos na decomposição exibida acima são únicos. △

Exercício 1.125. Dada uma pré-ordem $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto não-vazio $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ é chamado de **filtro** se ocorrer o seguinte:

- para quaisquer $p, q \in \mathcal{F}$ existe $r \in \mathcal{F}$ com $r \leq p$ e $r \leq q$;
- se $p \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathbb{P}$ é tal que $p \leq q$, então $q \in \mathcal{F}$.

Faça $(\mathbb{P}, \leq) := (\wp(X), \subseteq)$ e mostre que $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ é filtro (no sentido acima) se, e somente se, $\mathcal{F}$ é filtro (no sentido da Definição 1.1.1). ■

Exercício 1.126. Dada uma pré-ordem $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ é **denso** se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $d \in D$ com $d \leq p$.

a) Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, considere $\mathbb{P}_0 := \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. Mostre que se $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}_0$ é denso (no sentido de ordem), então existe $D \subseteq X$ denso (no sentido topológico) tal que $|D| \leq |\mathcal{D}|$.

b) Uma **anticadeia** de abertos em X é uma família $\mathcal{A}$ de abertos não-vazios de X dois a dois disjuntos. Mostre que se $D \subseteq X$ é denso, então $|\mathcal{A}| \leq |D|$ para qualquer anticadeia $\mathcal{A}$ de abertos de X.

c) Uma anticadeia $\mathcal{A}$ de abertos de X é maximal se não existe aberto $\emptyset \neq U \subseteq X$ tal que $\mathcal{A} \cup \{U\}$ seja anticadeia. Mostre que se $\mathcal{A}$ é anticadeia maximal de abertos de X, então $\mathcal{A}^{\downarrow} := \{B \in \mathbb{P}_0 : \exists A \in \mathcal{A}$ com $B \subseteq A\}$ é denso em $\mathbb{P}_0$.

d) Mostre que existem anticadeias maximais. Dica: Zorn. ■

Exercício 1.127. Seja $\mathbb{P}$ uma pré-ordem e para cada $q \in \mathbb{P}$ considere sobre $\mathbb{P}$ a topologia gerada pela família $\left\{q^{\downarrow} : q \in \mathbb{P}\right\}$, onde $q^{\downarrow} := \{p \in \mathbb{P} : p \leq q\}$ para cada $q \in \mathbb{P}$. Mostre que $D \subseteq \mathbb{P}$ é denso (no sentido do exercício anterior) se, e somente se, D é denso em $\mathbb{P}$ (no sentido topológico). ■

Exercício 1.128. Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Defina $\operatorname{Fn}(X, Y) := \bigcup_{Z \in [X]^{<\aleph_0}} Y^Z$, i.e., $\operatorname{Fn}(X, Y)$ é a coleção das funções da forma $f : Z \to Y$ para $Z \subseteq X$ com $|Z| < \aleph_0$.

a) Note que $\operatorname{Fn}(X, Y)$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão reversa, e $\emptyset \in \operatorname{Fn}(X, Y)$ é seu maior elemento.

b) Mostre que se $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Fn}(X, Y)$ é um filtro (no sentido de ordem), então $\bigcup\mathcal{F}$ é uma função.

c) Mostre que para $x \in X$, o subconjunto $D_x := \{f \in \mathrm{Fn}(X,Y) : x \in \mathrm{dom}(f)\}$ é denso em $\mathrm{Fn}(X,Y)$.

Conclua que, se $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Fn}(X,Y)$ é um filtro (no sentido de ordem) com $\mathcal{F} \cap D_x$ para todo $x \in X$, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função da forma $X \to Y$. ■

Exercício 1.129 (*a.k.a.* Lema de Rasiowa-Sikorski)**.** Seja $\mathbb{P}$ uma pré-ordem e $\mathcal{D}$ uma família enumerável de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Mostre que para cada $p \in \mathbb{P}$, existe um filtro $\mathcal{F}_p \subseteq \mathbb{P}$ tal que $p \in \mathcal{F}_p$ e $\mathcal{F}_p \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$. *Sugestão.* Fixe $f_0 := p$ e daí, por meio da densidade de cada $D \in \mathcal{D}$, construa $\mathcal{G} := \{f_n : n \in \omega\}$ com $f_{n+1} \leq f_n$ e $f_n \in D_n$ para todo n, onde $\mathcal{D} := \{D_n : n \in \omega\}$; use $\mathcal{G}$ para definir $\mathcal{F}_p$. ■

Exercício 1.130. Use o Lema de Rasiowa-Sikorski para mostrar que se $(\mathbb{T}, \leq)$ é uma ordem total, separável, enumerável e sem extremos, então existe um isomorfismo de ordens entre $(\mathbb{T}, \leq)$ e $(\mathbb{Q}, \leq)$. Para tanto, considere o seguinte roteiro.

a) Seja $\mathbb{P} := \{p \in \mathrm{Fn}(\mathbb{T}, \mathbb{Q}) : p \text{ é estritamente crescente}\}$, parcialmente ordenado pela inclusão reversa. Note que $\emptyset \in \mathbb{P}$.

b) Mostre que $D_t := \{p \in \mathbb{P} : t \in \mathrm{dom}(p)\}$ é denso em $\mathbb{P}$, para cada $t \in \mathbb{T}$.

c) Mostre que $E_q := \{p \in \mathbb{P} : q \in \mathrm{im}(p)\}$ é denso em $\mathbb{P}$, para cada $q \in \mathbb{Q}$.

d) Obtenha um isomorfismo $f : \mathbb{T} \to \mathbb{Q}$. Dica: com as notações do último exercício, faça $f := \bigcup \mathcal{F}_\emptyset$ e verifique que f é, de fato, um isomorfismo de ordem; para essa última parte, o Exercício 1.128 poderá ser útil. ■

Exercício 1.131. Conclua a prova do Teorema K.2.125: *se* $(\mathbb{T}, \preceq)$ *é uma ordem total, separável,* completa *e sem extremos, então existe um isomorfismo de ordens entre* $(\mathbb{T}, \preceq)$ *e* $(\mathbb{R}, \leq)$. Dica: use a completude de $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}$ para estender o isomorfismo obtido no exercício anterior[51]. ■

Exercício 1.132 (Dualizando filtros)**.** Uma família $\mathcal{I} \neq \emptyset$ de subconjuntos de X é chamada de **ideal** (em X) se

(I_1) $A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I}$, e

(I_2) $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A \subseteq X \Rightarrow B \in \mathcal{I}$.

A seguir, deixo uma lista de considerações similares ao que fizemos na Subseção 1.1.1 com respeito à filtros.

a) Note que $\emptyset \in \mathcal{I}$ para qualquer ideal $\mathcal{I}$ em X.

b) Mostre que as famílias $\{\emptyset\}$ e $\wp(X)$ são ideais em X. Assim como ocorre com os filtros, $\{\emptyset\}$ é chamado de ideal *antidiscreto*, enquanto $\wp(X)$ é o ideal *trivial* de X.

c) Mostre que um ideal $\mathcal{I}$ é trivial se, e somente se, $X \in \mathcal{I}$.

d) Observe que a família $\mathscr{I}$ dos ideais em X é parcialmente ordenada pela inclusão. Dada uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X, mostre que existe $\mathcal{G}^{\Downarrow} \in \mathscr{I}$ o menor ideal que contém $\mathcal{G}$.

e) Determine $\mathcal{G}^{\Downarrow}$ explicitamente em termos dos membros de $\mathcal{G}$.

f) *Dualize* as considerações feitas para filtros na Seção 1.1.1 e apresente uma definição razoável para o que poderia ser $\mathcal{G}^{\downarrow}$.

g) Mostre que $\mathcal{I}$ é um ideal em X se, e somente se, $\mathcal{F}(\mathcal{I}) := \{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$ é um filtro. O ideal $\mathcal{I}$ é dito *dual* ao filtro $\mathcal{F}(\mathcal{I})$.

h) A função $\mathcal{F} : \mathscr{I} \to \mathscr{F}$ é um isomorfismo de ordens, i.e., $\mathcal{F}$ é uma bijeção que satisfaz

$$\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J} \Leftrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{I}) \subsetneq \mathcal{F}(\mathcal{J}).$$

i) Conclua que $\mathcal{I}$ é maximal na família dos ideais próprios de X se, e somente se, $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ é ultrafiltro. ■

[51] Argumentação baseada no trabalho de Matos-Wiederhold [72], onde o leitor encontrará mais detalhes. Secretamente, o *modus operandi* executado nos três exercícios acima é o arquétipo da técnica conhecida como *forcing*.

Exercício 1.133. Um filtro $\mathcal{F}$ em X é dito **livre** se $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Fixado um filtro $\mathcal{F}$, seja $\mathcal{I} := \{X \backslash F : F \in \mathcal{F}\}$ o seu ideal dual. Mostre que são equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ é filtro livre;

b) $\mathcal{F}$ contém o filtro $\operatorname{cofin}(X)$ dos subconjuntos cofinitos de X;

c) $X = \bigcup \mathcal{I}$;

d) $\mathcal{I}$ contém o ideal $[X]^{<\aleph_0}$ dos subconjuntos finitos de X.

e) Conclua que se $\mathfrak{u}$ é ultrafiltro em X e $F \in \mathfrak{u}$ satisfaz $|F| < \aleph_0$, então $\mathfrak{u}$ é ultrafiltro principal. ■

Exercício 1.134. Considere $\wp(X)$ munido de sua estrutura de anel (Exemplo K.51). Para $\mathcal{I} \subseteq \wp(X)$, o que significa dizer que $\mathcal{I}$ é um ideal do *anel* $\wp(X)$? ■

Exercício 1.135. Mostre que o conjunto $\mathfrak{F}$ dos filtros em X é parcialmente ordenado pela inclusão. Dada uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X, conclua que $\mathcal{G}^{\Uparrow}$ é o menor elemento do conjunto $\{\mathcal{F} \in \mathfrak{F} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}\}$, no sentido da definição de menor elemento (página 28). ■

Exercício 1.136. Mostre que $(\bullet)^{\Uparrow} : \wp(X) \to \mathfrak{F}$ é crescente, ou seja: se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, então $\mathcal{H}^{\Uparrow} \subseteq \mathcal{G}^{\Uparrow}$. ■

Exercício 1.137. Em geral, para um conjunto X qualquer e famílias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, dizemos que $\mathcal{A}$ **refina** $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{A}$ é um **refinamento** de $\mathcal{B}$, se para todo $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ com $A \subseteq B$. Mostre que se $\mathcal{A}$ refina $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}^{\Uparrow} \subseteq \mathcal{A}^{\Uparrow}$. Vale a recíproca? ■

Exercício 1.138. Sejam X um conjunto, $Y \subseteq X$ um subconjunto e $\mathcal{F}$ um filtro em X. A família

$$\mathcal{F}|_Y := \{F \cap Y : F \in \mathcal{F}\}$$

é um filtro em Y? ■

Exercício 1.139. Um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X é chamado de **ultrafiltro** se $\mathcal{F}$ for maximal na subfamília dos filtros próprios de X, i.e., se valer

$$\text{se } \mathcal{G} \text{ é filtro em } X \text{ e } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G} \quad \text{ou} \quad \mathcal{G} = \wp(X).$$

Mostre que são equivalentes:

(UF_1) (maximalidade) $\mathcal{F}$ é ultrafiltro;

(UF_2) (dicotomia) para todo $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$;

(UF_3) (primalidade) para quaisquer $A, B \subseteq X$, $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

Conclua que os ultrafiltros principais (Exemplo 1.1.13) são ultrafiltros. ■

Exercício 1.140. No sentido da Proposição 1.1.20, qual é a topologia induzida em X ao considerarmos todos os ultrafiltros principais? ■

Exercício 1.141. Em ZF, suponha válida a seguinte afirmação:

para todo anel comutativo e com unidade R, se $I \subsetneq R$ for um ideal próprio, então existe $P \subsetneq R$ um ideal primo tal que $I \subseteq P$.

Sem usar o Lema de Zorn, demonstre o **Lema do Ultrafiltro**: *se $\mathcal{F}$ é um filtro próprio de um conjunto X, então existe um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ em X com $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{u}$.* Dica: o que é o dual de um ideal primo? ■

Exercício 1.142 (Revisitando a Proposição 1.1.20)**.** Fixado um conjunto X e uma família de filtros $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$, onde cada $\mathcal{V}_x$ é centrado em x, obtemos uma topologia $\mathcal{T}$ em X declarando $A \subseteq X$ aberto se, e somente se, $A \in \mathcal{V}_a$ para todo $a \in A$. Note que com tal topologia não "perdemos" filtros convergentes, pois vale $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{V}_x$ para qualquer $x \in X$. Neste exercício, adaptado de [7], veremos (de modo um tanto quanto artificial) que podemos ganhar novos filtros convergentes.

a) Seja X um conjunto não-enumerável e fixe $x_0 \in X$. Defina $\mathcal{V}_{x_0} := \{A \subseteq X : x \in A \text{ e } |X \setminus A| \leq \aleph_0\}$ e $\mathcal{V}_y := \{X\}$ se $y \neq x_0$. Note que cada $\mathcal{V}_x$ é um filtro centrado em x.

b) Chamando por $\mathcal{T}$ a topologia induzida pelos filtros $\mathcal{V}_x$, determine os filtros de vizinhança $\mathcal{N}_x := \mathcal{N}_{x,\mathcal{T}}$ para cada $x \in X$. Note que $\mathcal{N}_{x_0} \subsetneq \mathcal{V}_{x_0}$.

Conclua que o filtro $\mathcal{N}_{x_0}$ converge para x_0 com respeito à topologia $\mathcal{T}$ mas que não converge para x_0 com respeito aos filtros de $\mathcal{V}$. ■

1.2 Convergência e compacidade

Nesta seção vamos aprofundar bastante as considerações acerca de convergência. Caso o leitor tenha caído de paraquedas aqui, convém relembrar algumas notações. Fixado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, para cada $x \in X$ escrevemos:

- $\mathcal{T}_x := \{V \in \mathcal{T} : x \in V\}$ para indicar a coleção dos abertos de X que contém x;
- $\mathcal{N}_x := \mathcal{T}_x{}^{\uparrow}$ para indicar o *filtro* das vizinhanças de x, explicitamente a coleção de todos os subconjuntos de X que contém algum membro de $\mathcal{T}_x$.

Definição 1.2.1. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um filtro em X. Diremos que $\mathcal{F}$ é **convergente** (com respeito à topologia $\mathcal{T}$) se existir pelo menos um ponto de X no conjunto

$$\lim_{\mathcal{T}} \mathcal{F} := \lim \mathcal{F} := \{x \in X : \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Um ponto $x \in \lim \mathcal{F}$ será chamado de **limite do filtro** $\mathcal{F}$, o que também se indicará por meio das notações $\mathcal{F} \to x$ ou $\mathcal{F} \to_{\mathcal{T}} x$, a depender do contexto. ¶

Como de costume, a negação de "$\mathcal{F} \to x$" será denotada por $\mathcal{F} \not\to x$. Note que por valer $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ para qualquer filtro em X, seria inútil considerar o filtro trivial para estudar convergência. Por tal razão, consideraremos apenas filtros próprios em nossas discussões – a menos de menção contrária explícita.

Observação 1.2.2. Como já deve ter ficado evidente, filtros estão intrinsecamente ligados a esta seção. Logo, quem preferir ignorá-los encontrará, possivelmente, dificuldades ao longo das próximas páginas. Apesar disso, quem só tiver interesse na noção de *compacidade* por meio de *coberturas por abertos* pode tentar a sorte e *pular* para a Proposição 1.2.77.△

1.2.1 Filtros vs. *nets*

Como adiantado na seção anterior, a Definição 1.2.1 generaliza a noção de convergência de sequências, provavelmente já conhecida pelo leitor.

Definição 1.2.3. Uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X é **convergente** se existir $x \in X$ tal que

$$\forall V \in \mathcal{N}_x \quad \exists n \in \omega \quad \text{tal que} \quad m \geq n \Rightarrow x_m \in V,$$

o que se abrevia com $x_n \to x$, $x \in \lim\limits_{n\in\omega} x_n$ ou ainda $x \in \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. ¶

De modo análogo ao que se fez no Exemplo 1.1.18, mostra-se que a condição acima equivale a dizer que o filtro $(x_n)_n^{\uparrow}$ converge para x, onde

$$(x_n)_n^{\uparrow} := \{\{x_m : m \geq n\} : n \in \omega\}^{\uparrow}. \tag{1.24}$$

De acordo com a discussão mais geral realizada na Subseção 1.1.1, o filtro $\mathcal{N}_x$ determina quais filtros convergem para x. *Psicologicamente*, para um filtro $\mathcal{F}$ com $\mathcal{F} \to x$, cada aberto $V \subseteq X$ com $x \in X$ contém algum $B \in \mathcal{F}$, de modo que se V *está próximo* de x, então com ainda mais razão B também está.

Neste ponto do texto, há possivelmente dois tipos de leitores que se sentem incomodados com os elefantes na sala.

(Leitor n.1) Quem nunca se deparou com Análise pode não entender o porquê de tanto alvoroço em torno da convergência *per se*.

(Leitor n.2) Quem já esbarrou com algo de Análise na vida – e sabe a importância das noções de convergência – pode preferir sequências em detrimento de filtros, pois elas parecem mais concretas.

Tal situação me obriga a quebrar ~~mais ainda~~ a quarta parede.

Para o Leitor n.1. Se, para justificar a presente *balbúrdia*, *você* espera ver *aplicações práticas* de convergência em Economia, Finanças, Sistemas Dinâmicos entre outras coisas do tipo, pare de ler agora: tais aplicações existem, mas não serão abordadas neste livro[52]. Porém, se para *você* bastarem *aplicações parnasianistas*[53] para convergência, então a leitura pode prosseguir.

Para o Leitor n.2. Curiosamente, leitores como *você* costumam ser mais problemáticos, por conta de ~~armadilhas~~ proposições como a próxima.

Proposição 1.2.4. *Sejam (X, d) um espaço pseudométrico, $A \subseteq X$ e $x \in X$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em A com $x_n \to x$.*

Demonstração. A “ida” foi provada na Proposição 1.1.61. A recíproca é automática[54]. □

Essencialmente, a proposição acima diz que os fechados de um espaço pseudométrico (X, d) são completamente caracterizados pelas sequências convergentes do espaço. Por sua vez, como os fechados caracterizam a topologia de um espaço, conclui-se que as sequências convergentes caracterizam a topologia de um espaço pseudométrico. O próximo exercício ilustra bem o fenômeno.

Exercício 1.143. Sejam X e Y espaços topológicos, com X pseudometrizável e $x \in X$. Mostre que uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X com $x_n \to x$ valer que $f(x_n) \to f(x)$. ■

Situações desse tipo passam a impressão de que topologias são dispensáveis, já que *tudo* se resolve por meio de sequências, ε's e δ's – postura adotada por muita gente cuja reputação é questionável. O problema é que mecanismos tão específicos quanto esses, frequentemente, não estão disponíveis.

De fato, as coisas da vida nem sempre são pseudometrizáveis e, em muitos contextos *naturais*, a conclusão da Proposição 1.2.4 deixa de valer. Na verdade, historicamente, os aparatos mais gerais que abordaremos aqui nasceram por conta da ineficácia do ferramental métrico para lidar com espaços de funções. Geralmente, é por não saber disso que o Leitor n.2 encrenca com essas abstrações, que parecem artificiais e complicadas.

Portanto, Leitor n.2, saiba que este é um lugar de acolhimento, em que todas essas coisas que não lhe contaram serão reveladas. A começar pelo próximo

Exemplo 1.2.5 (Convergência em espaços de funções)**.** Após estabelecer as bases para análise de convergência de sequências e séries de números reais, é natural que se tente estender tais conceitos para $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, o conjunto das funções da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ herda

[52]Sugestão: procure textos que se propronham a discutir tais aplicações, como [2] ou [85].
[53]Créditos pela expressão: Professor João Paulo Costalonga.
[54]Quem discorda pode tratá-la como exercício.

uma topologia natural de $\mathbb{R}$, chamada de topologia produto. Recordemo-nos de que tal topologia declara como abertos básicos os conjuntos da forma

$$V := \prod_{x\in\mathbb{R}} V_x := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \in V_x \right\},$$

onde cada $V_x \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, e cujo *suporte* $\operatorname{supp}(V) := \{x \in \mathbb{R} : V_x \neq \mathbb{R}\}$ é finito.

Tendo isso em vista, pode-se perguntar: o que *a topologia produto de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *diz sobre a convergência de sequências*?

Proposição 1.2.6. *Seja* $(f_n)_{n\in\omega}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*, e considere* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *munido da topologia produto. Para* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *qualquer, ocorre*

$$f_n \to f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \to f(x). \tag{1.25}$$

Demonstração. Primeiro, supondo que $f_n \to f$, busca-se concluir que $f_n(x) \to f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Para tanto, fixemos $x \in \mathbb{R}$ e um aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ com $f(x) \in U$. Pela definição da topologia produto em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, o conjunto $V := \pi_x^{-1}[U]$ é um aberto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ com $f \in V$. Logo, existe $N \in \omega$ tal que $n \geq N$ acarreta $f_n \in V$, e

$$f_n \in V \Leftrightarrow f_n(x) \in U.$$

Como o aberto U foi tomado arbitrariamente, obtém-se $f_n(x) \to f(x)$.

Reciprocamente, seja $W := \prod_{x\in\mathbb{R}} W_x \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ um aberto básico que contém f. Como $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $N_x \in \omega$ tal que $n \geq N_x \Rightarrow f_n(x) \in W_x$. Em particular, por $\operatorname{supp}(W)$ ser finito, existe $N := \max\{N_x : x \in \operatorname{supp}(W)\}$. Finalmente, por valer $W_x = \mathbb{R}$ para $x \notin \operatorname{supp}(W)$, o número N tomado assegura que

$$n \geq N \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \in W_x,$$

i.e., $f_n \in W$. Portanto, $f_n \to f$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. □

Pode surpreender que uma topologia tão *estranha* resulte num critério de convergência tão *natural*, mas a vida tem dessas. Entretanto, o ponto deste exemplo é outro: *a convergência de sequências de funções não é capaz de determinar a topologia de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – no sentido da Proposição 1.2.4.

Exercício 1.144. Considere o subconjunto

$$A := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \operatorname{im}(f) \subseteq \{0, 1\} \text{ e } |\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}| < \aleph_0\} \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

e a função $\underline{0} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que faz $x \mapsto 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, chamada de **função nula**. Note que os elementos de A são as funções características dos subconjuntos cofinitos de $\mathbb{R}$.

a) Mostre que $\underline{0} \in \overline{A}$.

b) Dada uma sequência $(f_n)_{n\in\omega}$ em A, mostre $|\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to \underline{0}(x)\}| \leq \aleph_0$.

Conclua que não existe sequência $(f_n)_{n\in\omega}$ em A com $f_n \to \underline{0}$. ■

O exercício acima mostra que, se definíssemos o significado de $f_n \to f$ por meio de (1.25), não seria possível recuperar os *fechados* da topologia produto em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, como na Proposição 1.2.4 (veja também o Exercício 6.66). É por isso que costuma-se dizer: *sequências convergentes não capturam a topologia de um espaço.* Isso suscita dois tipos naturais de abordagem:

1. encontrar substitutas para sequências convergentes capazes de capturar a topologia de um espaço, em qualquer contexto;

2. investigar os espaços cujas topologias são capturáveis por sequências convergentes.

Filtros, coadjuvantes neste capítulo, surgiram como fruto da primeira abordagem[55], mas não constituem a única solução conhecida – e tampouco se limitam a isso. A segunda abordagem, por sua vez, consiste no estudo dos *espaços sequenciais*, sobre os quais discutiremos na última subseção deste capítulo. ▲

Apesar de todas as justificativas anteriores, o Leitor n.2 tem razão numa coisa: filtros não parecem naturais quando comparados com sequências, dado que estas são listas de pontos do espaço, indexadas por ω, enquanto filtros são coleções de subconjuntos do espaço sem uma ordenação aparente. Ocorre que existe um substituto para as sequências que não é tão horrível como os filtros – na verdade, são apenas sequências *generalizadas*.

Antes de introduzi-los, convém refletir mais sobre as sequências, a fim de cogitar quais características *realmente importam*. Para isso, fixemos uma sequência $\varphi := (x_n)_{n\in\omega}$ de um espaço topológico X. Uma vez que, a rigor, tal sequência é apenas uma função $\varphi\colon \omega \to X$, vale a pergunta: qual é o papel de ω?

Observe que em $[0,\omega]$, os elementos de $[0,\omega)$, literalmente, convergem para o *ponto* ω: qualquer vizinhança de ω em $[0,\omega]$ deve conter um intervalo da forma $(N,\omega]$, e daí é claro que se $n \geq N$, então $n \in (N,\omega]$. Assim, pode-se dizer que na definição de sequências convergentes, ω se apresenta como um *ponto virtual* que aponta a *direção* para a qual os *índices* da sequência *acumulam*, de modo que a *sequência* será *convergente* se seus elementos indexados também acumularem num *ponto concreto de* X. Isso pode ser formulado de modo mais preciso da seguinte forma.

Exercício 1.145. Fixados um espaço topológico X, uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X e um ponto $x \in X$, mostre que $x_n \to x$ se, e somente se, a função

$$\begin{aligned}\varphi\colon [0,\omega] &\to X\\ n &\mapsto x_n\\ \omega &\mapsto x\end{aligned}$$

é contínua. ■

Do *nosso* ponto de vista, é evidente que os números naturais crescem *rumo* ao ponto ω, pois *podemos ver* a coisa toda ocorrendo em $[0,\omega]$. No entanto, os números naturais não sabem se chegarão a algum lugar *concreto*, posto que ω não existe em $[0,\omega)$. Ainda assim, a ordem de $[0,\omega)$ permite que seus elementos *percebam* que estão se *dirigindo* para *algum* lugar.

Exemplo 1.2.7. *Se $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ com $x_n \to x$ e $x_n \to y$, então $x = y$.* Embora este fato vá ser explorado em contextos mais gerais adiante, é edificante observá-lo aqui. Mostrar que $x = y$ em $\mathbb{R}$ equivale a provar que $x - y = 0$, o que, por sua vez, pode ser obtido se a desigualdade $|x-y| < \varepsilon$ for garantida para todo $\varepsilon > 0$, posto que disso resulta $|x-y| \leq \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0\} = 0$ e, consequentemente, $|x-y| = 0$, o que só ocorre se $x - y = 0$.

[55]Foram introduzidos em 1937 por Henri Cartan [26] e, posteriormente, difundidos por Bourbaki, para a surpresa de zero pessoas.

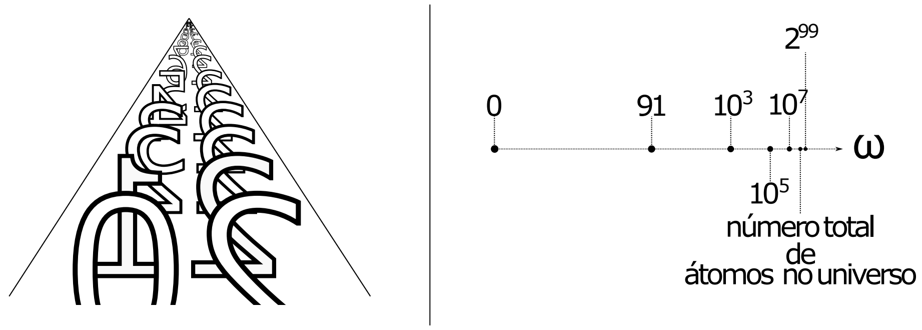


Figura 1.12: Como o número 19 vê $[0, \omega)$ vs. como nós vemos $[0, \omega)$.

Por um lado, para $\gamma > 0$ fixado, como $x_n \to x$, existe $N_x \in \omega$ tal que $|x_n - x| < \gamma$ sempre que $n \geq N_x$. Por outro lado, também existe $N_y \in \omega$ tal que $|x_n - y| < \gamma$ sempre que $n \geq N_y$, pois $x_n \to y$. Daí, *como existe* $N \in \omega$ com $N_x, N_y \leq N$, segue que

$$|x - y| \leq |x - x_N| + |x_N - y| < \gamma + \gamma = 2\gamma$$

donde a afirmação original segue com $\gamma := \frac{\varepsilon}{2}$. ▲

A discussão de perspectiva anterior, bem como a existência do número natural N satisfazendo $N_x, N_y \leq N$ no último exemplo, sugerem as próximas definições.

Definição 1.2.8. Diremos que uma pré-ordem[56] $(\mathbb{D}, \preceq)$ é **dirigida**, ou que o conjunto $\mathbb{D}$ é **dirigido** pela pré-ordem $\preceq$, se para quaisquer $a, b \in \mathbb{D}$ existe $d \in \mathbb{D}$ com $a, b \preceq d$. ¶

Obviamente, o conjunto $[0, \omega)$ é dirigido pela relação de ordem usual de ordinais e, mais geralmente, qualquer ordem total $(\mathbb{T}, \leq)$ é dirigida. Porém, diferente do que ocorre em ordens totais, conjuntos dirigidos podem ter comportamentos não-*lineares*.

Exemplo 1.2.9. Embora $\mathbb{N}$ seja subconjunto de $[0, \omega)$ e, como tal, tenha uma boa ordem $\leq$ herdada de $[0, \omega)$, pode-se dotá-lo com diversas (pré-)ordens distintas. Por exemplo, a relação binária "$\,|\,$", definida por

$$n \,|\, m \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \quad m = cn,$$

é, claramente, uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$, logo uma pré-ordem. Observe que dados $m, n \in \mathbb{N}$, o produto $p := mn$ é tal que $m, n \,|\, p$, mostrando que $\mathbb{N}$ é dirigido pela relação de ordem $|$. Dirigido para onde? Bem...

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[r] \arrow[dr] & 8 \arrow[r] & \ldots \\
 & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 12 \arrow[r] & \ldots \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 6 \arrow[ur] \arrow[r] & \ldots & \\
 & 3 \arrow[ur] \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 27 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Figura 1.13: Uma *pequena* amostra do (intrincado) "diagrama de Hasse" de $(\mathbb{N}, |)$.

[56]Lembre-se: uma *pré-ordem* é uma relação binária *reflexiva* e *transitiva*.

Como o diagrama acima sugere, a ordem $\mid$ *dirige* os elementos de $\mathbb{N}$ por caminhos que se ramificam infinitamente. ▲

Definição 1.2.10. Para um conjunto $\mathbb{D}$ dirigido por uma pré-ordem $\preceq$, uma função $\eta\colon \mathbb{D} \to X$ é chamada de ***net***[57] em X. ¶

Consonante com as notações adotadas para sequências, uma *net* η que faz $\eta(d) := x_d$ para cada $d \in \mathbb{D}$ será denotada como $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, ou apenas $(x_d)_d$ quando o conjunto dirigido $\mathbb{D}$ estiver claro pelo contexto – ou for irrelevante[58]. Em vista de tudo isso, a próxima definição é inevitável.

Definição 1.2.11. Uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ no espaço topológico X **converge** para um ponto $x \in X$ se

$$\forall V \in \mathcal{N}_x \quad \exists d \in \mathbb{D} \quad \text{tal que} \quad a \succeq d \Rightarrow x_a \in V,$$

o que se abreviará com $x_d \to x$ e será negado com $x_d \not\to x$. ¶

Assim, a *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é dita **convergente** se o conjunto

$$\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d := \lim\,(x_d)_d := \lim x_d := \{x \in X : x_d \to x\} \tag{1.26}$$

for não-vazio. Naturalmente, um ponto $x \in \lim x_d$ será chamado de **ponto limite** da *net*.

Exemplo 1.2.12. A pré-ordem do conjunto dirigido $\mathbb{D}$ faz parte da *estrutura* da *net*. Para ilustrar isso, considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos naturais maiores do que zero munido de sua ordem usual $\leq$, e $\mathbb{D}$ o *conjunto* $\mathbb{N}$ munido da relação de ordem $\mid$ definida no Exemplo 1.2.9.

É fácil ver que a *net* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente. Porém, a *net* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{D}}$ converge para 1: fixado $\varepsilon > 0$, note que para todo $n \in \mathbb{D}$ com $2 \mid n$ ocorre $n = 2k$ para algum k, e daí $(-1)^n = (-1)^{2k} = 1 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. ▲

Exemplo 1.2.13. Se $\mathbb{D}$ é uma pré-ordem com um maior elemento Ω, então $x_d \to x_\Omega$, para qualquer *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X. Embora possa parecer estranho a princípio, isso está de acordo com a interpretação empírica da coisa: se o conjunto $\mathbb{D}$ tem um último elemento, então o processo de convergência tem um último passo. Por isso costuma ser interessante tratar de conjuntos dirigidos *ilimitados*. ▲

Exemplo 1.2.14. Considere o conjunto $\mathbb{T} := (0, +\infty) \subsetneq \mathbb{R}$ munido da relação de ordem total herdada de $\mathbb{R}$. Uma *net* $f\colon \mathbb{T} \to X$ converge para $x \in X$ se, e somente se, para qualquer aberto $V \subseteq X$ com $x \in X$ existir $R \in \mathbb{T}$ tal que $f(S) \in V$ para todo $S \geq R$. Se tivéssemos escrito $\mathbb{R}$ e L em vez de X e x, teríamos acabado de redescobrir a definição para

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = L,$$

algo tipicamente tratado como um caso à parte nos cursos de Cálculo I. O leitor interessado nesse tipo de abordagem pode conferir [76]. ▲

[57] Nacionalistas podem preferir chamar tal objeto de *rede*.

[58] Se eu fosse fiel às minhas próprias convenções, para escrever a *net* $\eta\colon \mathbb{D} \to X$ como uma $\mathbb{D}$-upla eu deveria fazer $(\eta_d)_{d\in\mathbb{D}}$. Mas o preço disso seria permitir que a *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ fosse denotada simplesmente por x, o que contraria a tendência humana de usar a letra x para designar um possível *limite* da *net*. Um modo de conciliar as duas posturas seria seguir as notações de Pete Clark [28], que escreve $(\mathbf{x}_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e diz que a *net* $\mathbf{x}$ converge para x – mas isso ainda me parece muito cansativo e perigosamente confuso para o leitor desatento.

Em vista dos exemplos acima, parece justo refazer a pergunta inicialmente lançada para ω: qual o papel do conjunto dirigido $\mathbb{D}$ na convergência de uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X? Num primeiro momento, a *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ indexa o subconjunto $\{x_d\}_{d\in\mathbb{D}}$ do espaço X por meio de um conjunto de índices $\mathbb{D}$ cujos elementos estão dirigidos para um *ponto de fuga* possivelmente inexistente. Um ponto x em X que permita estender tal indexação de maneira *compatível* com a *direção* de $\mathbb{D}$ será, precisamente, um limite da *net*.

Mais precisamente, uma vez fixado o conjunto dirigido $\mathbb{D}$, vamos imitar o que se fez com ω no Exercício 1.145. Para um *objeto* $\infty \notin \mathbb{D}$, chamemos por $\mathbb{D}^+ := \mathbb{D} \cup \{\infty\}$. Agora, sobre o conjunto $\mathbb{D}^+$, definamos a seguinte topologia: $A \subseteq \mathbb{D}^+$ é aberto se, e somente se, $\infty \notin A$ ou existe $d' \in \mathbb{D}$ tal que $\{d \in \mathbb{D} : d \succeq d'\} \cup \{\infty\} \subseteq A$. Essencialmente, os pontos de $\mathbb{D}$ se mantêm isolados enquanto os subconjuntos da forma $\{d \in \mathbb{D} : d \succeq d'\} \cup \{\infty\}$ são declarados abertos básicos *em torno de* ∞. Qualquer semelhança com a topologia de $[0, \omega]$ não é mera coincidência.

Proposição 1.2.15. *Sejam X um espaço topológico, $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma* net *em X e $x \in X$ um ponto. Então $x_d \to x$ se, e somente se, é contínua a função $\varphi\colon \mathbb{D}^+ \to X$ definida por $\varphi(d) := x_d$ para cada $d \in \mathbb{D}$ e $\varphi(\infty) := x$.*

Demonstração. Se $x_d \to x$ e $V \subseteq X$ é um aberto que contém $\varphi(\infty) := x$, então a convergência da *net* dá um elemento $d' \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in V$ para todo $d \succeq d'$, donde segue que φ é contínua em ∞. Como os demais pontos de $\mathbb{D}^+$ são isolados, conclui-se que φ é contínua. A recíproca é idêntica. $\square$

Observação 1.2.16. *Nets* foram introduzidas em 1922, por Eliakim Moore e Herman Smith [78] com o propósito explícito de generalizar a noção de sequências convergentes para espaços mais gerais. É claro que as notações e terminologias originais destoam do que foi apresentado aqui – em particular, o termo *net* foi disseminado pelo clássico trabalho de John Kelley [60]. $\triangle$

Secretamente, *nets* já foram discutidas no texto. Com as terminologias desta seção, o Exemplo 1.1.58 mostrou que se $(X, \mathcal{G})$ é um espaço de calibre com $|\mathcal{G}| \geq \aleph_0$, $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$, então existe uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ tal que $x_d \to x$, onde $\mathbb{D} := \{D \subsetneq \mathcal{G} : 0 < |D| < \aleph_0\}$ é dirigido pela relação $\preceq$ de inclusão reversa. Conforme anunciado, isto vale em geral.

Proposição 1.2.17. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Para $x \in X$, são equivalentes:*

($\mathrm{cl}_{\mathrm{n1}}$) *$x \in \overline{A}$;*

($\mathrm{cl}_{\mathrm{n2}}$) *existe uma* net *$(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em A para algum conjunto dirigido $\mathbb{D}$, com $x_d \to x$.*

Demonstração. Fica a cargo do leitor observar que se $x_d \to x$ com $x_d \in A$ para cada $d \in \mathbb{D}$, então $x \in \overline{A}$. Agora, supondo que $x \in \overline{A}$, façamos $\mathbb{D} := \mathcal{N}_x$, o **filtro** de vizinhanças de x, parcialmente ordenado pela relação de inclusão reversa: dados $U, V \in \mathcal{N}_x$,

$$U \preceq V \Leftrightarrow V \subseteq U.$$

Note que por $\mathcal{N}_x$ ser um **filtro**, o conjunto $\mathbb{D}$ é dirigido pela ordem $\preceq$. Por sua vez, como $x \in \overline{A}$, resulta que $N \cap A \neq \emptyset$ para cada $N \in \mathbb{D}$, o que permite *escolher* $x_N \in A \cap N$. Logo, $(x_N)_{N\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em $A^{\mathbb{D}}$, com $x_N \to x$. $\square$

Portanto, *nets* capturam a topologia do espaço, no mesmo sentido do que fazem as sequências em espaços pseudometrizáveis na Proposição 1.2.4. No entanto, isto não configura uma vitória absoluta para o Leitor n.2: como *fiz* questão de destacar na demonstração acima, filtros surgem **naturalmente** como *os* conjuntos dirigidos usados na construção da *net*. Como veremos, esta ainda é apenas a ponta do *iceberg* no que se refere à interação entre filtros e *nets*.

Definição 1.2.18 (Compare com (1.24))**.** Para uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X, o filtro próprio

$$(x_d)^{\uparrow}_{d\in\mathbb{D}} := (x_d)^{\uparrow}_{d} := \{\{x_a : a \succeq d\} : d \in \mathbb{D}\}^{\uparrow},$$

será chamado de **filtro associado** à *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$. ¶

Observação 1.2.19. A definição acima faz sentido[59] pois um conjunto $\mathbb{D}$ é dirigido por uma pré-ordem $\preceq$ se, e somente se, a família $\{\{a \in \mathbb{D} : a \succeq d\} : d \in \mathbb{D}\}$ é um pré-filtro[60] em $\mathbb{D}$, garantindo que $\{\{x_a : a \succeq d\} : d \in \mathbb{D}\}$ seja um pré-filtro em X. △

Exercício 1.146. Convença-se de que as afirmações anteriores estão certas. ■

Exercício 1.147. Dados um espaço topológico X, uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e um ponto $x \in X$, mostre que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ converge para x se, e somente se, o filtro $(x_d)^{\uparrow}_{d}$ converge para x. ■

Corolário 1.2.20. *Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ um subconjunto e $x \in X$ um ponto. São equivalentes:*

(cl$_1$) $x \in \overline{A}$*;*

(cl$_2$) *existe uma* net $(x_d)_{d\in\mathbb{D}} \in A^{\mathbb{D}}$ *para algum conjunto dirigido* $\mathbb{D}$*, com* $x_d \to x$*;*

(cl$_3$) *existe um filtro próprio* $\mathcal{F}$ *em* X *com* $A \in \mathcal{F}$ *e* $\mathcal{F} \to x$*.*

Demonstração. Para (cl$_2$) ⇒ (cl$_3$) basta tomar $\mathcal{F} := \{\{x_a : a \succeq d\} : d \in \mathbb{D}\}^{\uparrow}$. Para verificar (cl$_3$) ⇒ (cl$_1$), note que se $V \subseteq X$ é um aberto com $x \in V$, $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{F}$, então $V \in \mathcal{N}_x$ e $V \cap A \in \mathcal{F}$, acarretando $V \cap A \neq \emptyset$. A implicação (cl$_1$) ⇒ (cl$_2$) foi provada na Proposição 1.2.17. □

Portanto, num primeiro momento, a vantagem dos filtros sobre as *nets* é de perspectiva: filtros são intrínsecos à topologia do espaço, enquanto *nets* introduzem um aspecto *alienígena* ao processo, o conjunto dirigido. Ocasionalmente, essa vantagem se traduz em facilidade técnica, mas nem sempre, o que sugere que se investigue a direção oposta da Definição 1.2.18.

Observação 1.2.21 (Como obter uma *net* a partir de um filtro?)**.** Fixado um espaço topológico X, vamos chamar por $\mathrm{Nets}\,(X)$ e $\mathrm{Filt}(X)$ o *conjunto* das *nets* e o conjunto dos filtros próprios em X, respectivamente. Note que a menos de roupagem, o Exercício 1.147 consiste em provar que a *função*

$$\begin{aligned} (\bullet)^{\uparrow} \colon \mathrm{Nets}\,(X) &\to \mathrm{Filt}(X) \\ (x_d)_{d\in\mathbb{D}} &\mapsto (x_d)^{\uparrow}_{d} \end{aligned}$$

[59] Mesmo no caso patológico em que $\mathbb{D} = \emptyset$, pois se verifica $\emptyset \notin (x_d)^{\uparrow}_{d}$.

[60] Ou seja, é base para um filtro.

preserva os limites, i.e., satisfaz $\lim x_d = \lim(x_d)_d^{\uparrow}$ para qualquer *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}} \in \mathrm{Nets}\,(X)$.

Haveria uma chance de conseguir uma inversa que também preservasse os limites?

A resposta curta é "não" e a justificativa é muito simples: $\mathrm{Filt}(X)$ é um conjunto, enquanto $\mathrm{Nets}\,(X)$ é uma classe própria[61]! De fato, se $\mathrm{Nets}\,(X)$ fosse um conjunto, seria possível associar a cada $\eta \in \mathrm{Nets}\,(X)$ o subconjunto $\mathrm{dom}\,(\eta)$ correspondente, e daí o Axioma da Substituição daria o conjunto $R := \{\mathrm{dom}\,(\eta) : \eta \in \mathrm{Nets}\,(X)\}$, o que não pode ocorrer, posto que $\textsc{Ord} \subseteq R$. Em particular, enquanto função de classes, $(\bullet)^{\uparrow}$ não tem chances de ser uma correspondência injetiva, pelo Lema K.1.99.

No entanto, nada impede que $(\bullet)^{\uparrow}$ seja uma função de classes sobrejetora, no sentido de que para qualquer filtro próprio $\mathcal{F}$ em X exista pelo menos uma *net* η em X com $\eta^{\uparrow} = \mathcal{F}$. Nisso consiste a resposta "não tão curta" para a pergunta inicial: determinar uma função de classes $\Gamma\colon \mathrm{Filt}(X) \to \mathrm{Nets}\,(X)$ tal que $(\Gamma(\mathcal{F}))^{\uparrow} = \mathcal{F}$ ocorra para qualquer $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$. Em particular, se isso for feito, seguirá

$$\lim \Gamma(\mathcal{F}) = \lim(\Gamma(\mathcal{F}))^{\uparrow} = \lim \mathcal{F}, \tag{1.27}$$

pois $(\bullet)^{\uparrow}$ preserva limites.

Contudo, até agora o único modo apresentado para induzir *nets* a partir de filtros foi aquele utilizado na demonstração da Proposição 1.2.17: dado um filtro $\mathcal{F}$ em X, qualquer $\mathcal{F}$-upla $\eta \in \prod_{F\in\mathcal{F}} F$ pode ser interpretada como uma *net* $\eta\colon \mathcal{F} \to X$, posto que $\mathcal{F}$ é dirigido pela boa e velha relação de **inclusão reversa**. Infelizmente, tal método está fadado ao fracasso.

Exercício 1.148. Para $\mathcal{F} := \{X\}$, uma *net* $\eta\colon \mathcal{F} \to X$ consiste simplesmente da escolha de um elemento $\eta_X \in X$. Mostre que se $|X| \geq 2$, então $\mathcal{F} \neq \eta^{\uparrow}$. ■

Há pelo menos uma maneira *canônica* de obter a *net* procurada. Para isso, tomemos o conjunto $\mathbb{D}_{\mathcal{F}} := \{(x, F) \in X \times \mathcal{F} : x \in F\}$ dirigido pela pré-ordem

$$(x, F) \leq (y, G) \Leftrightarrow F \supseteq G,$$

e consideremos a *net* $(\Gamma_{(x,F)})_{(x,F)\in\mathbb{D}_{\mathcal{F}}}$, onde $\Gamma_{(x,F)} := x$.

Exercício 1.149. Nas notações acima, mostre que $(\Gamma_{(x,F)})^{\uparrow}_{(x,F)} = \mathcal{F}$. Dica: convença-se de que para qualquer $(x, F) \in \mathbb{D}_{\mathcal{F}}$ vale $\{\Gamma_{(y,G)} : (y, G) \geq (x, F)\} = F$. ■

Na prática, a construção acima serve apenas para tranquilizar a consciência. Nas raras ocasiões em que precisarmos induzir uma *net* a partir de um filtro próprio $\mathcal{F}$ de modo a preservar seus limites, bastará tomar *alguma net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ satisfazendo $(x_d)_d^{\uparrow} = \mathcal{F}$, e agora sabemos que existe pelo menos uma *net* com tal propriedade. △

Temos, portanto, dois modos legítimos e *suficientemente* equivalentes para tratar convergência: filtros e *nets*. O contexto costuma determinar qual a melhor abordagem, o que também varia de acordo com o gosto do leitor. No entanto, independentemente do *modus operandi* adotado, convergência não parece mais do que mero fetiche até agora. Por isso, vamos dedicar algum tempo para observar como tais noções surgem no dia a dia topológico a fim de perceber seu papel fundamental nos tópicos que estudaremos[62].

[61] Em caso de dúvidas, confira a Subseção K.1.2.

[62] Isso não exclui a possibilidade de que convergência seja o fetiche de alguém.

1.2.2 Convergência no dia a dia

Comecemos com o problema de caracterizar continuidade por meio de convergência, no sentido de generalizar o Exercício 1.143. Nesse aspecto, *nets* se mostram relativamente superiores aos filtros pois, como veremos, a tradução é automática. Para usar filtros, a coisa é um pouco enrugada.

Lema 1.2.22. *Seja $f\colon X \to Y$ uma função entre conjuntos não-vazios X e Y. Se $\mathcal{B}$ é um pré-filtro em X, então $f\mathcal{B} := \{f[B] : B \in \mathcal{B}\}$ é um pré-filtro em Y.*

Demonstração. Como $\emptyset \notin \mathcal{B}$, resulta que $\emptyset \notin f\mathcal{B}$. Agora, dados $A, B \in \mathcal{B}$, existe $C \in \mathcal{B}$ com $C \subseteq A \cap B$. Logo,

$$\emptyset \neq f[C] \subseteq f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B],$$

mostrando que $f\mathcal{B}$ satisfaz as condições para ser um pré-filtro[63]. □

Em particular, se $\mathcal{F}$ é um filtro próprio em X, então o próprio $\mathcal{F}$ é um pré-filtro e, pelo lema acima, segue que $f\mathcal{F}$ é um pré-filtro em Y, o que justifica a próxima

Definição 1.2.23. Nas notações acima, o filtro $f(\mathcal{F}) := (f\mathcal{F})^{\uparrow}$ será chamado de **imagem do filtro $\mathcal{F}$ pela função f.** ¶

Lema 1.2.24. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma função e $x \in X$. Então f é contínua em x se, e somente se, $f(\mathcal{N}_{x,X}) \to f(x)$.*

Demonstração. Por definição, $f(\mathcal{N}_{x,X}) \to f(x)$ significa $\mathcal{N}_{f(x),Y} \subseteq f(\mathcal{N}_{x,X})$. Por sua vez, tal inclusão se traduz na afirmação

$$\forall V \in \mathcal{N}_{f(x),Y} \quad \exists U \in \mathcal{N}_{x,X} \quad f[U] \subseteq V,$$

o que significa dizer, precisamente, que f é contínua em x. □

Proposição 1.2.25. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma função e $x \in X$. São equivalentes:*

(c. c_1) *a função f é contínua em x;*

(c. c_2) *se $\mathcal{F} \in \operatorname{Filt}(X)$ e $\mathcal{F} \to x$, então $f(\mathcal{F}) \to f(x)$;*

(c. c_3) *se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}} \in \operatorname{Nets}(X)$ e $x_d \to x$, então $f(x_d) \to f(x)$.*

Demonstração. Note que se $\mathcal{N}_{x,X} \subseteq \mathcal{F}$, então $f(\mathcal{N}_{x,X}) \subseteq f(\mathcal{F})$. Logo, se f é contínua em x, então o lema garante que $\mathcal{N}_{f(x),Y} \subseteq f(\mathcal{N}_{x,X}) \subseteq f(\mathcal{F})$, acarretando $f(\mathcal{F}) \to f(x)$. Como a recíproca é óbvia em vista do mesmo lema, resulta (c. c_1) $\Leftrightarrow$ (c. c_2).

A equivalência entre (c. c_2) e (c. c_3) segue dos dois próximos exercícios e do fato de que a correspondência $(\bullet)^{\uparrow}\colon \operatorname{Nets}(X) \to \operatorname{Filt}(X)$ preserva limites e é sobrejetora (Observação 1.2.21). Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Exercício 1.150. Seja $f\colon X \to Y$ uma função entre os conjuntos não-vazios X e Y. Considere $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ pré-filtros em X.

a) Mostre que se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então $f\mathcal{A} \subseteq f\mathcal{B}$. Em particular, $(f\mathcal{A})^{\uparrow} \subseteq (f\mathcal{B})^{\uparrow}$.

[63] O leitor desconfiado das inclusões pode conferir o Lema K.1.23, e depois demonstrá-lo.

b) Mostre que se $\mathcal{A}$ refina $\mathcal{B}$, i.e., se para todo $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ com $A \subseteq B$, então $f\mathcal{A}$ refina $f\mathcal{B}$. Em particular, $(f\mathcal{B})^{\uparrow} \subseteq (f\mathcal{A})^{\uparrow}$. Dica: para o final, confira o Exercício 1.137.

c) Conclua que se $\mathcal{F} := \mathcal{A}^{\uparrow}$, então $f(\mathcal{F}) = (f\mathcal{A})^{\uparrow}$, i.e., se $\mathcal{A}$ é base de $\mathcal{F}$, então $f\mathcal{A}$ é base de $f(\mathcal{F})$. Dica: para a conclusão, note que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{A}$ refina $\mathcal{F}$. ■

Exercício 1.151. Seja $f\colon X \to Y$ uma função entre os conjuntos não-vazios X e Y. Mostre que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em X, então $f((x_d)_d^{\uparrow}) = (f(x_d))_d^{\uparrow}$, ou seja: a imagem do filtro $(x_d)_d^{\uparrow}$ pela função f é o filtro associado à *net* $(f(x_d))_{d\in\mathbb{D}}$. Dica: na conclusão do exercício anterior, considere $\mathcal{A} := \{\{x_a : a \succeq d\} : d \in \mathbb{D}\}$ e $\mathcal{F} := (x_d)_d^{\uparrow}$. ■

Corolário 1.2.26. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função. São equivalentes:*

(cgc$_1$) *a função f é contínua;*

(cgc$_2$) $f[\lim \mathcal{F}] \subseteq \lim (f(\mathcal{F}))$ *para todo filtro próprio em X;*

(cgc$_3$) $f[\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d] \subseteq \lim_{d\in\mathbb{D}} f(x_d)$ *para toda* net $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ *em X.*

Observação 1.2.27. Há possivelmente duas coisas que podem chamar a atenção do leitor. A primeira e mais sutil delas advém da comparação entre o Exercício 1.143 e a Proposição 1.2.25; a segunda, e mais urgente, é o aparente pedantismo ao se escrever $x \in \lim \mathcal{F}$ em vez de $\lim \mathcal{F} = x$. Como diria Jack...

1. A Proposição 1.2.25 nasceu da intenção de generalizar o Exercício 1.143. Logo, tal exercício deveria ser um mero corolário da Proposição 1.2.25. Note que para fazer isso, precisa-se saber como garantir que num espaço pseudométrico (X, d), a existência de uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em A com $x_d \to x$ implica a existência de uma *sequência* $(x_n)_{n\in\omega}$ em A com $x_n \to x$. Isto não parece óbvio.

2. Uma notação como $\lim \mathcal{F} = x$ explicita o ponto x como *o* limite do filtro $\mathcal{F}$. Ocorre que existe apenas uma entidade em todo o universo conhecido capaz de ser x: o próprio x. Consequentemente, a identidade $\lim \mathcal{F} = x$ deve indicar que x é o único ponto limite do filtro $\mathcal{F}$. O problema? Existem espaços nos quais esse tipo de unicidade não se verifica.

O restante desta subseção explorará esses problemas, em ordem de urgência: primeiro, a unicidade de limites; depois, como recuperar sequências convergentes a partir de filtros/*nets* convergentes. No meio do caminho vamos nos deparar com situações corriqueiras em que a convergência *emerge*. △

Unicidade de limites e separação

Leitores acostumados com Cálculo podem ter considerado estranho escrever $\lim \mathcal{F}$ para denotar um *conjunto* de pontos em vez de denotar um *único* ponto. Há certa razão nisso, uma vez que boa parte da intuição sobre convergência é modelada nos fenômenos observados em $\mathbb{R}$ ou, mais geralmente, em espaços métricos.

Exemplo 1.2.28 (Compare com o Exemplo 1.2.7)**.** *Se (X,d) é um espaço métrico, então $|\lim x_d| \leq 1$ para qualquer* net $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ *em X.* De fato, se $x_d \to x$ e $y \in X \setminus \{x\}$, então por d ser uma métrica[64] existe um número real $r > 0$ com $d(x,y) = 2r$. Daí, os conjuntos $U := B_d(x,r)$ e $V := B_d(y,r)$ são abertos de X, com $x \in U$ e $y \in V$, tais que $U \cap V = \emptyset$. Logo, V atesta que $y \notin \lim x_d$: como $x_d \to x$, existe $d' \in \mathbb{D}$ tal que $x_a \in U$ para todo $a \succeq d'$ e, por conseguinte, para qualquer $d \in \mathbb{D}$ existe $d'' \succeq d', d$ com $x_{d''} \notin V$.

Consequentemente, se $\mathcal{F}$ é um filtro convergente em X, então existe e é único o ponto $x_{\mathcal{F}} \in X$ tal que $\lim \mathcal{F} = \{x_{\mathcal{F}}\}$. Analogamente, se $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência convergente em X, então existe e é único o ponto $x \in X$ tal que $\lim x_n = \{x\}$. Por isso, em tais espaços faz sentido abandonar as chaves e pensar em $\lim x_d$ como um único ponto – caso o limite exista, obviamente. ▲

Exemplo 1.2.29. Considere X um conjunto infinito munido de sua topologia cofinita e seja $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência injetiva em X, i.e., tal que $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$. Mostraremos que $\lim_{n\in\omega} x_n = X$. Ora, se $x \in X$ e $V \subseteq X$ é um aberto que contém x, então $X \setminus V$ é um conjunto finito, o que permite definir $k := \max(\{m \in \omega : x_m \notin V\} \cup \{0\})$. Observe que $x_n \in V$ para todo $n \geq k$. ▲

Os dois exemplos anteriores apresentam comportamentos diametralmente opostos: enquanto no primeiro uma sequência converge para no máximo um ponto, no segundo se observa uma sequência que converge para todos os pontos do espaço. No caso dos espaços métricos, o que permitiu garantir a unicidade do limite de uma sequência foi a possibilidade de *separar pontos* distintos por meio de abertos disjuntos, o que nem sempre ocorre.

Exercício 1.152. Seja X um espaço topológico tal que para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$ existam abertos $U, V \subsetneq X$ com $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Mostre que $|\lim x_d| \leq 1$ para qualquer *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X. Dica: imite o Exemplo 1.2.28. ■

O exercício acima sugere algo relativamente natural: o modo como os abertos “separam” os pontos do espaço influencia o comportamento das *nets*/filtros convergentes. O curioso é que vale a recíproca.

Proposição 1.2.30. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

(Haus_1) *para quaisquer $x, y \in X$ distintos existem abertos disjuntos $U, V \subsetneq X$ com $x \in U$ e $y \in V$;*

(Haus_2) $|\lim_{d\in\mathbb{D}} x_d| \leq 1$ *para qualquer* net $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ *em X;*

(Haus_3) $|\lim \mathcal{F}| \leq 1$ *para qualquer filtro próprio $\mathcal{F}$ em X.*

Demonstração. A implicação (Haus_1) $\Rightarrow$ (Haus_2) é o Exercício 1.152. Por sua vez, a implicação (Haus_2) $\Rightarrow$ (Haus_3) decorre da equivalência entre filtros e *nets* discutida na Observação 1.2.21. Finalmente, se vale (Haus_3) e $x, y \in X$ são distintos, então o filtro $\mathcal{F} := (\mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_y)^{\Uparrow}$, i.e., o menor filtro que contém ambos $\mathcal{N}_x$ e $\mathcal{N}_y$, não pode ser próprio[65], o que garante a validade de (Haus_1), como indica o exercício a seguir. □

[64] Se d fosse uma pseudométrica, poderia ocorrer $x \neq y$ com $d(x,y) = 0$.

[65] Se fosse, então $\mathcal{F}$ seria um filtro próprio que converge para mais de um ponto, contrariando (Haus_3).

Exercício 1.153. Sejam X um espaço topológico e $x, y \in X$ pontos distintos. Mostre que se $\wp(X) = (\mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_y)^{\Uparrow}$, então existem abertos $U, V \subsetneq X$ com $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Dica: o que um subconjunto B de X deve satisfazer a fim de pertencer a um filtro da forma $\mathcal{G}^{\Uparrow}$? Confira a Proposição 1.1.8 caso tenha se esquecido; depois, faça $B := \emptyset$ e $\mathcal{G} := \mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_y$ para concluir. ■

Definição 1.2.31. Dizemos que X é um **espaço de Hausdorff** (ou espaço $\mathbf{T}_2$) se qualquer uma das condições enunciadas na proposição anterior for satisfeita[66]. ¶

Exemplo 1.2.32. Claramente, todo espaço métrico é de Hausdorff, enquanto conjuntos infinitos com a topologia cofinita não são. ▲

Observação 1.2.33. O leitor que ainda *insiste* em levar sequências a sério provavelmente está se questionando sobre a possibilidade de usá-las no lugar das *nets* para caracterizar os espaços de Hausdorff. Pois bem... △

Exercício 1.154 (*Nets* não são substituíveis na Proposição 1.2.30)**.** Dado um conjunto X com $|X| > \aleph_0$, considere a família $\mathcal{T} := \{A \subseteq X : |X \setminus A| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$.

a) Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia em X que não verifica a condição de Hausdorff.

b) Mostre que se $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em $(X, \mathcal{T})$ com $x_n \to x$, então existe $m \in \omega$ tal que $x_n = x$ para todo $n \geq m$. ■

Observação 1.2.34. Assim, se X *for* um espaço de Hausdorff e $\mathcal{F}$ *for* um filtro próprio e convergente em X, escreveremos $\lim \mathcal{F}$ para indicar o único $x \in X$ tal que $\mathcal{F} \to x$, postura que também será adotada para sequências e *nets* convergentes em tais espaços. △

Dados X e Y conjuntos conjuntos não-vazios e $f : X \to Y$, invariavelmente ocorre $f[A] \neq \emptyset$ sempre que $A \subseteq X$ é um subconjunto não-vazio. Em particular, se X é um espaço topológico e $\mathcal{F}$ é um filtro convergente em X, então $\lim \mathcal{F} \neq \emptyset$ e daí $f[\lim \mathcal{F}] \neq \emptyset$. Finalmente, se X e Y são espaços de Hausdorff, conclui-se o seguinte.

Corolário 1.2.35. *Nas condições acima, são equivalentes as seguintes asserções:*

(ceh$_1$) *a função f é contínua;*

(ceh$_2$) $f(\lim \mathcal{F}) = \lim f(\mathcal{F})$ *para qualquer filtro convergente $\mathcal{F}$ em X;*

(ceh$_3$) $f(\lim x_d) = \lim f(x_d)$ *para qualquer* net *convergente $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X.*

Tais identidades, certamente mais familiares para o leitor, justificam dizer que *funções contínuas comutam com limites*[67], o que traz consequências interessantes. Porém, antes de explorá-las, convém estabelecer a versão geral da Proposição 1.2.6, o que se faz no próximo

Lema 1.2.36 (Convergência pontual)**.** *Sejam $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos, $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ o espaço produto e $x \in X$ uma $\mathcal{I}$-upla qualquer.*

(c. p$_1$) *Uma* net *$(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X converge para x se, e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$ ocorre $\pi_i(x_d) \to \pi_i(x)$.*

[66] O subíndice “2” no termo “T_2” sugere variações da condição de Hausdorff. Realmente é o caso: o Capítulo 2 discutirá diversos tipos de *axiomas de separação*, dentre os quais se encontram as condições de Hausdorff.

[67] Pode ser interessante conferir o Exercício 1.202.

(c. p$_2$) *Um filtro $\mathcal{F}$ em X converge para x se, e somente se, para todo $i \in \mathcal{I}$ ocorre $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x)$.*

Demonstração. A direção "$\Rightarrow$" dos dois itens segue da Proposição 1.2.25 ao se fazer $Y := X_i$ e $f := \pi_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$. A recíproca de (c. p$_1$) segue da Proposição 1.2.15 aliada à Proposição 1.1.86. A recíproca de (c. p$_2$) segue da inclusão $F \subseteq \pi_i^{-1}[\pi_i[F]] \subseteq \pi_i^{-1}[V]$, válida para quaisquer $F \in \mathcal{F}$ e $V \subseteq X_i$ com $\pi_i[F] \subseteq V$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Proposição 1.2.37. *Seja $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos não-vazios*[68]. *Então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é de Hausdorff se, e somente se, X_i é de Hausdorff para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Se X_i é de Hausdorff para cada $i \in \mathcal{I}$ e $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ com $x, y \in \lim x_d$, então $\pi_i(x), \pi_i(y) \in \lim \pi_i(x_d)$, acarretando $\pi_i(x) = \pi_i(y)$. Como $i \in \mathcal{I}$ é qualquer, segue que $x = y$. A recíproca fica a cargo do leitor. □

Exercício 1.155. Complete a demonstração da proposição anterior. Dica: fixada uma *net* em X_j com dois limites, induza uma *net* esperta em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. ■

Como corolário muito particular da proposição acima, resulta que se X e Y são espaços de Hausdorff, então $X \times Y$ também é de Hausdorff. Logo, se Z é um espaço de Hausdorff e $p\colon X \times Y \to Z$ é uma função, então p é contínua se, e somente se, para qualquer par $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, $(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ de *nets* convergentes em X e Y, respectivamente, verificar-se

$$p(\lim x_d, \lim y_d) = \lim p(x_d, y_d). \tag{1.28}$$

Ainda não parece familiar? Pois então contemple os próximos exemplos.

Exemplo 1.2.38. Tanto a adição quanto a multiplicação usuais de $\mathbb{R}$ são contínuas, o que pode ser visto por meio da Proposição 1.1.92 ou pelo Exercício 1.112. Assim, se $(x_n)_{n\in\omega}$ e $(y_n)_{n\in\omega}$ são sequências convergentes em $\mathbb{R}$, então (1.28) se traduz nas identidades

$$\lim_{n\in\omega} x_n * \lim_{n\in\omega} y_n = \lim_{n\in\omega} x_n * y_n,$$

onde $*$ pode ser tanto a adição $(+)$ quanto a multiplicação $(\cdot)$. ▲

Exemplo 1.2.39. Em Cálculo, para um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de A, $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função e $L \in \mathbb{R}$, classicamente se define

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon),$$

onde a exigência de que $a \in A^{\mathrm{d}}$ se faz para garantir a unicidade do número L. Assim como no Exemplo 1.2.14, o limite acima se traduz, precisamente, como um limite de *net*[69]. De fato, ao se considerar o subconjunto $\mathbb{A} := A \setminus \{a\}$ dirigido pela pré-ordem

$$x \preceq y \Leftrightarrow |y-a| \leq |x-a|,$$

a restrição da função f ao conjunto $\mathbb{A}$ é uma *net* em $\mathbb{R}$. Daí, é fácil ver que para $L \in \mathbb{R}$ ocorre

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\in\mathbb{A}} f(x) = L.$$

[68] Se algum dos X_i's for vazio, então o produto $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é necessariamente vazio, logo de Hausdorff, mesmo que algum dos outros X_i's não seja de Hausdorff.

[69] Neste caso, a exigência de que a seja ponto de acumulação garante a equivalência das definições. O leitor interessado deve ponderar sobre isso.

Analogamente, pode-se definir conjuntos dirigidos cujas *nets* induzidas traduzam os limites laterais, os limites infinitos[70] e toda a sorte de limites típicos do primeiro semestre de uma pessoa ingressante em Matemática. Logo, as propriedades operatórias dos limites, em Cálculo, são instâncias particulares de (1.28) e do fato de que as respectivas operações em $\mathbb{R}$ são contínuas. ▲

Observação 1.2.40. Por que não estudar *limites de funções* no contexto da Topologia Geral? A definição seria uma extensão natural do caso real: dados espaços topológicos X e Y, com Y de Hausdorff, um subconjunto $A \subseteq X$, uma função $f\colon A \to Y$ e pontos $a \in A^{\mathrm{d}}$ e $y \in Y$, pode-se definir $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$ se, e somente se, para qualquer aberto $V \subseteq Y$ com $y \in V$ existir um aberto $U \subseteq X$ com $a \in U$ tal que $f[A \cap U \setminus \{a\}] \subseteq V$.

Não há problemas *técnicos* com a definição acima. Inclusive, a suposição de que a é ponto de acumulação de A aliada à condição de Hausdorff para Y garante a unicidade do limite. No entanto, há problemas *práticos*: tal definição é, essencialmente, redundante[71], como mostra o próximo exercício. △

Exercício 1.156. Nas condições acima, prove que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$ ocorre se, e somente se, $F\colon A \cup \{a\} \to Y$ é contínua em a, onde $F(x) := f(x)$ para $x \in A \setminus \{a\}$ e $F(a) := y$. ■

Exemplo 1.2.41 (Integrais como limites)**.** Fixados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, considere o intervalo $[a, b]$ e chame por $\mathbb{P}$ a coleção das sequências finitas da forma $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n)$ tais que: $a_0 := a$, $a_n := b$ e $a_i < a_{i+1}$ para cada $i < n$. Agora, sobre $\mathbb{P}$, tome a relação $\preceq$ definida por

$$(a_0, \ldots, a_n) \preceq (b_0, \ldots, b_m) \Leftrightarrow \max_{i<m} |b_{i+1} - b_i| \leq \max_{j<n} |a_{j+1} - a_j|,$$

claramente uma pré-ordem dirigida em $\mathbb{P}$.

Geometricamente, cada $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ determina uma partição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos disjuntos e não-vazios, de modo que outra partição $\mathcal{Q}$ é *melhor* do que $\mathcal{P}$, i.e., $\mathcal{Q} \succeq \mathcal{P}$, se os subintervalos determinados por $\mathcal{Q}$ tiverem *comprimento* menor do que os subintervalos determinados por $\mathcal{P}$.

Finalmente, para uma função $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, defina o número

$$\sum_{\mathcal{P}} f := \sum_{i<n} f(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i)$$

para cada $\mathcal{P} := (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}$, o que resulta numa *net* $\sum f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{R}$.

O limite $\lim\limits_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}} \sum\limits_{\mathcal{P}} f$, quando existe, é um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ satisfazendo

$$\left| \sum_{\mathcal{Q}} f - L \right| < \varepsilon$$

para qualquer partição $\mathcal{Q} \in \mathbb{P}$ com $\mathcal{Q} \succeq \mathcal{P}$. Em outras palavras:

$$L = \int_a^b f(x)\, dx,$$

[70] Para os casos em que se tem $\lim_{x\to a} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$, basta usar a reta estendida $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$.

[71] No contexto do Cálculo a definição também é irrelevante. Porém, explicar isso para um calouro (ou para os colegiados responsáveis) também seria irrelevante.

no sentido de Cauchy[72]. Tal abordagem torna desnecessárias quaisquer verificações braçais com integrais, como a unicidade (boa definição) ou as propriedades algébricas. ▲

Exemplo 1.2.42. Por último, mas não menos importante, atentemo-nos ao cenário mais geral dos espaços pseudometrizáveis. Comecemos com uma singela observação: dados um espaço pseudométrico (X, d) e um ponto fixado $w \in X$, a função $d(\bullet, w)\colon X \to \mathbb{R}$ que faz $x \mapsto d(x, w)$ é contínua.

De fato, como d é contínua, sabe-se que se $(x_d, y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em $X \times X$ com $(x_d, y_d) \to (x, y)$, então $d(x_d, y_d) \to d(x, y)$. Daí, fazendo $y_d := w$ para todo $d \in \mathbb{D}$, obtém-se $y_d \to w$ e, consequentemente, $d(x_d, w) \to d(x, w)$, mostrando que $d(\bullet, w)$ é contínua[73].

Em particular, isso evidencia que convergências em X se *reduzem* a convergências em $\mathbb{R}$, posto que para uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X e um ponto $x \in X$, tem-se

$$x_d \to x \Rightarrow d(x_d, x) \to d(x, x) = 0 \Rightarrow x_d \to x. \tag{1.29}$$

Assim, a diferença entre métricas e pseudométricas é, em certo sentido, topológica. ▲

Exercício 1.157. Seja (X, d) um espaço pseudométrico. Mostre que a topologia em X induzida por d é de Hausdorff se, e somente se, d for uma métrica. Dica: note que $F := \{y \in X : d(x, y) = 0\}$ é um subconjunto fechado de X para cada $x \in X$ fixado. ■

Bases locais

Nesta subsubseção, vamos lidar com o problema de reconciliar sequências e *nets*. Por mais paradoxal que pareça, isto será alcançado por meio de uma análise mais profunda sobre a influência dos filtros na topologia de um espaço. Nesse sentido, o próximo exercício constitui um bom aquecimento.

Exercício 1.158. Sejam S um conjunto, $\mathcal{F}$ um filtro em S e $\mathcal{B}$ uma base de $\mathcal{F}$. Mostre que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ é base de $\mathcal{F}$ se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{C}$ com $C \subseteq B$ (com a linguagem da Definição K.1.143, significa dizer que $\mathcal{C}$ é $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{B}$)[74]. ■

Corolário 1.2.43. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{N}_x$ o filtro de vizinhanças de um ponto $x \in X$. Uma família $\mathcal{B}$ de vizinhanças de x é base do filtro $\mathcal{N}_x$ se, e somente se, cada vizinhança $V \subseteq X$ de x contém algum $B \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. Faça $S := X$ e $\mathcal{F} := \mathcal{N}_x$ no exercício anterior. □

Naturalmente, a família $\mathcal{T}_x$, de *todos os abertos* de X que contém x, é base para o filtro $\mathcal{N}_x$. No entanto, frequentemente, $\mathcal{T}_x$ tem mais informação do que o necessário para *gerar* o filtro de vizinhanças de x.

Exemplo 1.2.44. Para $X := \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, a família

$$\mathcal{V}_x := \{(x - r, x + r) : r \in \mathbb{R} \text{ e } r > 0\}$$

[72] Há diversos tipos de integral que também podem ser vistos como limites de *nets*. Em particular, a *integral de Riemann* é quase idêntica: basta substituir a soma $\sum_{\mathcal{P}} f$ por $\sum_{(\mathcal{P},t)} f := \sum_{i<n} f(t_i)(a_{i+1} - a_i)$, onde $t := (t_0, \ldots, t_{n-1})$ é uma *escolha* de pontos nos subintervalos determinados pela partição $\mathcal{P}$.

[73] Note que por d ser simétrica, a função $d(w, \bullet)$, definida de modo análogo, também é contínua.

[74] A inversão do símbolo não foi acidental.

é base para o filtro $\mathcal{N}_x$ de vizinhanças de x. No entanto, $\mathcal{V}_x$ é desnecessariamente *grande*. Note, por exemplo, que a coleção

$$\mathcal{B}_x := \{(x-q, x+q) : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q > 0\}$$

é $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{V}_x$ e, consequentemente, também é base para $\mathcal{N}_x$. De um ponto de vista cardinal, $\mathcal{B}_x$ é bem mais econômica do que $\mathcal{V}_x$, posto que $|\mathcal{V}_x| = 2^{\aleph_0}$ enquanto $|\mathcal{B}_x| = \aleph_0$. Note que não é possível obter uma base ainda menor para $\mathcal{N}_x$. ▲

Exercício 1.159. Seja $(r_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ com $r_n > 0$ para todo $n \in \omega$. Se $r_n \to 0$, mostre que $\{(x - r_n, x + r_n) : n \in \omega\}$ é base do filtro $\mathcal{N}_x$. ■

Observação 1.2.45. Vale reforçar que uma base para o filtro $\mathcal{N}_x$ não precisa ser composta exclusivamente por vizinhanças *abertas* de x, posto que vizinhanças não precisam ser abertas, mas sim conter abertos. Pode, inclusive, ser o caso de $\mathcal{N}_x$ ter uma base composta por vizinhanças fechadas[75]. △

Exercício 1.160. Sejam $(r_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ com $r_n > 0$ para todo $n \in \omega$. Se $r_n \to 0$, mostre que $\{[x - r_n, x + r_n] : n \in \omega\}$ é base do filtro $\mathcal{N}_x$. ■

Exercício 1.161. Generalize os dois últimos exercícios para espaços pseudométricos. Mais precisamente, mostre que se (X, d) é um espaço pseudométrico, $x \in X$ e $(r_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$, com $r_n > 0$ para todo $n \in \omega$ e $r_n \to 0$, então as famílias

$$\{B_d(x, r_n) : n \in \omega\} \quad \text{e} \quad \{B_d[x, r_n] : n \in \omega\}$$

são bases para o filtro $\mathcal{N}_x$. ■

Definição 1.2.46. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. Uma família $\mathcal{B}$ de vizinhanças de x será chamada de **(sub-) base local de vizinhanças** em x se $\mathcal{B}$ for (sub-) base para o filtro $\mathcal{N}_x$ de vizinhanças de x. Se, adicionalmente, todos os membros de $\mathcal{B}$ forem abertos, diremos apenas que $\mathcal{B}$ é uma **(sub-) base local**[76] em x. ¶

Moralmente, o filtro $\mathcal{N}_x$ carrega toda a informação topológica local relevante acerca de x, o que pode ser ilustrado pelo Lema 1.2.24. Nesse sentido, uma base local em x é um subconjunto possivelmente *menor* do que o filtro de vizinhanças de x mas, ainda assim, com informação suficiente para recuperar as propriedades locais do ponto x. O exercício a seguir exemplifica o fenômeno.

Exercício 1.162. Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ um ponto e $\mathcal{B}$ uma base local de vizinhanças em x.

a) Mostre que para um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, $\mathcal{F} \to x$ ocorre se, e somente se, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

b) Mostre que para uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X, $x_d \to x$ ocorre se, e somente se, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $x_a \in B$ para todo $a \succeq d$.

O que ocorre se $\mathcal{B}$ for apenas sub-base local de vizinhanças? ■

[75] E, no futuro, coisas desse tipo nos deixarão felizes.

[76] Há outras terminologias. Por exemplo, em [7], bases locais de vizinhanças são chamadas de “sistemas fundamentais de vizinhanças”.

Observação 1.2.47. Agora, com as mesmas notações do exercício anterior, note que se $A \subseteq X$ é tal que $x \in \overline{A}$, então a família $\mathcal{B}|_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ tem p.i.f.. De fato, se $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, então $B := \bigcap_{i \leq n} B_i$ é uma vizinhança de x e, como $x \in \overline{A}$, resulta

$$\emptyset \neq A \cap B = A \cap \bigcap_{i \leq n} B_i = \bigcap_{i \leq n} (A \cap B_i).$$

Como $\mathcal{B}$ é $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{N}_x$, segue que $\mathcal{B}$ também é dirigido com respeito à relação de inclusão reversa. Logo, ao se *escolher* $x_B \in B \cap A$ para cada $B \in \mathcal{B}$, obtém-se uma *net* $(x_B)_{B \in \mathcal{B}}$ com $x_B \to x$, por construção. $\triangle$

O leitor atento pode ter notado também que a argumentação acima é, essencialmente, a mesma realizada na demonstração do Corolário 1.2.20: basta substituir $\mathcal{B}$ por $\mathcal{N}_x$ para reobter a construção original. No entanto, o procedimento atual tem a vantagem de explicitar o fato, antes despercebido, de que é possível controlar a *cardinalidade* do conjunto dirigido que indexa a *net*. Convém destacar tal resultado, para futuras referências.

Proposição 1.2.48. *Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base local de vizinhanças em x. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma* net *$(x_B)_{B \in \mathcal{B}}$ em A com $x_B \to x$, onde $\mathcal{B}$ é dirigido pela relação de inclusão reversa.*

Por um lado, o Exercício 1.161 diz que todo ponto de um espaço pseudométrico tem base local (de vizinhanças) enumerável. Por outro lado, a proposição acima afirma que se um ponto x admite base local de vizinhanças $\mathcal{B}_x$, com $|\mathcal{B}_x| = \aleph_0$, e $A \subseteq X$ é tal que $x \in \overline{A}$, então existe uma *net* $(x_B)_{B \in \mathcal{B}_x}$ em A com $x_B \to x$. Isto já é quase a reconciliação procurada, a menos de ordem: mesmo com $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \in \omega\}$, seus elementos, enquanto índices dirigidos pela inclusão reversa, podem não se comportar do mesmo modo que ω, no sentido de que pode ocorrer $B_m \not\subseteq B_n$ mesmo que se tenha $m \geq n$.

Em outras palavras: pode ser que $(x_{B_n})_{n \in \omega}$ convirja como *net*, com a ordem da inclusão reversa importada de $\mathcal{B}$, mas não convirja como sequência, i.e., com a ordem usual de ω; tal fenômeno já foi ilustrado no Exemplo 1.2.12. Dito isso, tal problema se remedia por meio do

Lema 1.2.49. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}$ um filtro próprio em X. Se $\mathcal{F}$ tem base enumerável, então $\mathcal{F}$ admite uma base enumerável e decrescente com respeito à inclusão, i.e., existe $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \omega\}$ tal que $\mathcal{B}^{\uparrow} = \mathcal{F}$ e $B_n \subseteq B_m$ se $n \geq m$.*

Demonstração. Se $\mathcal{A} := \{A_n : n \in \omega\}$ é uma base enumerável de $\mathcal{F}$, basta definir $B_m := \bigcap_{n \leq m} A_n$ para cada $m \in \omega$. Os detalhes serão problema do leitor. $\square$

Proposição 1.2.50. *Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ um subconjunto, $x \in X$ um ponto e $\mathcal{B}$ uma base local de vizinhanças em x. Se $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$, então são equivalentes:*

(sc_1) *$x \in \overline{A}$;*

(sc_2) *existe uma sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ em A com $x_n \to x$.*

Demonstração. É claro que se $x_n \to x$, então $x \in \overline{A}$. Reciprocamente, se $x \in \overline{A}$, então existe uma *net* $(x_B)_{B \in \mathcal{B}}$ em A com $x_B \to x$ (pela Proposição 1.2.48). Tomando $\mathcal{B}$ como no lema anterior, não é difícil ver que $x_{B_n} \to x$ como sequência. $\square$

Exercício 1.163. Demonstre a proposição anterior sem usar filtros. Dica: para $(\mathbb{D}, \preceq)$ um conjunto dirigido, mostre que se $|\mathbb{D}| \leq \aleph_0$, então existe uma função crescente $f : \omega \to \mathbb{D}$ com $\operatorname{im}(f)$ cofinal em $\mathbb{D}$. $\blacksquare$

Observação 1.2.51 (Compare com a Observação 1.1.16)**.** Fixado um espaço topológico X e um ponto $x \in X$, o *caráter do filtro* $\mathcal{N}_x$, denotado por $\chi(\mathcal{N}_x)$, costuma ser xingado de **caráter de x em X**. Explicitamente, este é o primeiro exemplo apresentado no texto do que costuma ser chamado de *função cardinal*: uma correspondência entre Top e números cardinais e invariante por homeomorfismo[77]. △

Definição 1.2.52. Dizemos que X é um espaço de **caráter enumerável em x** se existir uma base local $\mathcal{B}$ em x com $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. Se tal condição valer para todo $x \in X$, diremos simplesmente que X tem **caráter enumerável**[78]. ¶

Exemplo 1.2.53 (Espaços homogêneos)**.** O espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não tem caráter enumerável em $\underline{0}$: o Exercício 1.144, essencialmente, mostra que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ viola a tese da Proposição 1.2.50 com respeito ao "ponto" $x := \underline{0}$. A mesma conclusão vale se, em vez $\underline{0}$, considerar-se qualquer *outra* função $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Para se convencer disso, o leitor pode adaptar o Exercício 1.144 para f ou, alternativamente, observar que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é *homogêneo*.

Definição 1.2.54. Um espaço topológico X é **homogêneo** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existir um homeomorfismo $\varphi\colon X \to X$ com $\varphi(x) = y$. ¶

Em outras palavras, a *homogeneidade* é a versão topológica da frase "a menos de uma mudança de coordenadas". Logo, num espaço homogêneo, qualquer propriedade topológica *local* verificada por um ponto particular do espaço também se verifica para qualquer outro ponto do espaço. ▲

Exercício 1.164. Sejam X um espaço homogêneo e $x, y \in X$ pontos quaisquer. Mostre que X tem caráter enumerável em x se, e somente se, X tem caráter enumerável em y. ■

Exercício 1.165. Seja $(G, +, 0)$ um grupo, não necessariamente abeliano, dotado de uma topologia que torne a operação $(+)\colon G \times G \to G$ contínua. Mostre que G é um espaço homogêneo. Conclua que $\mathbb{R}^X$ e $\mathcal{C}_p(X)$ são espaços homogêneos para qualquer espaço X. Dica: a correspondência $g \mapsto g + h$ é contínua, para qualquer $h \in G$ fixado. ■

Exercício 1.166. Mostre que se $|X| \leq \aleph_0$, então $\mathbb{R}^X$ tem caráter enumerável. Em particular, $\mathcal{C}_p(X)$ tem caráter enumerável. Dica: encontre uma base local enumerável em $\underline{0}$. Metadica: lembre-se de que, neste caso, vale $|[X]^{<\aleph_0}| \leq \aleph_0$. ■

Exemplo 1.2.55. Dado um número ordinal α munido de sua topologia da ordem (Exemplo 1.1.50), a família $\{(\gamma, \beta] : \gamma < \beta\}$ é base local de β para qualquer $\beta \in \alpha$.

Exercício 1.167. Sejam α um ordinal e $\beta \in [0, \alpha)$ um ordinal limite. Mostre que se $\beta > 0$, então $\beta \in \overline{[0, \beta)}$. Dica: lembre-se de que basta verificar $[0, \beta) \cap V \neq \emptyset$ para abertos V que pertençam a uma base local de β. ■

Fazendo $\alpha := [0, \omega_1]$ e $\beta := \omega_1$ no exercício anterior, resulta que $\omega_1 \in \overline{[0, \omega_1)}$, e por ocorrer $\operatorname{cof}(\omega_1) = \omega_1$, infere-se que não existe sequência $(\gamma_n)_{n \in \omega}$ em $[0, \omega_1)$ com $\gamma_n \to \omega_1$: o contrário daria uma função $\gamma_\bullet\colon \omega \to \omega_1$ cofinal. ▲

Em resumo, filtros são usados na definição de caráter enumerável e, por meio de tal propriedade, consegue-se relacionar a convergência de filtros e *nets* em espaços gerais com a convergência de sequências em espaços pseudométricos. Em particular:

[77] Em outras palavras, é uma propriedade topológica expressa por meio de um número cardinal.

[78] Ou satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade**, ou é **primeiro-contável** (este último em alusão à terminologia estrangeira "*first countable space*").

Proposição 1.2.56. *Se X é um espaço pseudometrizável, então X tem caráter enumerável.*

Consequentemente, um modo indireto de provar que um espaço **não é** (pseudo) metrizável consiste em verificar que ele não tem caráter enumerável. Isso, por sua vez, pode ser feito por meio da Proposição 1.2.50, com ressalvas: há espaços que satisfazem a tese da Proposição 1.2.50 mas que não têm caráter enumerável. No entanto, tópicos mais urgentes do que banalidades sequenciais[79] precisam ser discutidos.

1.2.3 A emergência da compacidade

Os diversos exemplos abordados na subseção anterior sugerem algo já conhecido por analistas desde tempos imemoriais: o mundo é mais feliz quando as coisas convergem. Assim, é bastante natural buscar por espaços favoráveis à *convergência*. Ora, se a coisa é tão boa assim, por que se contentar com *pouco*?

Exemplo 1.2.57 (Supercompacidade)**.** Seja $(Y, \mathcal{S})$ um espaço topológico no qual *tudo converge*, i.e., no qual todo filtro (ou toda *net*) seja convergente. Dada a importância da convergência, Y deveria ser o sonho de todo analista, correto?

Não.

De fato, se todo filtro de Y converge, então em particular o filtro $\{Y\}$ converge e, por definição, isto significa que existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{N}_{y,Y} \subseteq \{Y\}$. Logo, Y é o único aberto que contém y. Consequentemente, se $|Y| > 1$, então Y não é um espaço de Hausdorff, pois qualquer ponto $x \in Y$ com $x \neq y$ também pertence a Y. Moral da história: para que *tudo* convirja precisa-se abrir mão da unicidade dos limites – algo que *analistas* não fazem nem na privacidade de seus lares. ▲

Em algum sentido, a discussão acima mostra que a condição exigida sobre Y foi extrema, o que sugere moderação. Em outras palavras, pode ser conveniente que um espaço admita filtros não convergentes[80]. Nesse sentido, a próxima proposição traz alguma esperança.

Proposição 1.2.58. *Dados um espaço topológico X e filtros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ em X, tem-se*

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \lim \mathcal{F} \subseteq \lim \mathcal{G}.$$

Demonstração. Ora, se $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$, então $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{G}$. □

A proposição acima esconde uma sutileza muito útil: embora possa existir um filtro $\mathcal{F}$ não convergente, i.e., com $\lim \mathcal{F} = \emptyset$, talvez seja razoável supor que $\mathcal{F}$ *admita uma extensão* convergente. Mais precisamente: pode ser interessante exigir que exista um filtro $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ e $\lim \mathcal{G} \neq \emptyset$. Como veremos ao longo desta subseção, esta alternativa é bastante acertada e muito eficaz. Porém, antes de nomeá-la, convém traduzir a discussão com filtros em termos de *nets*.

[79] O leitor apressado pode conferir a Subseção 1.4.2, que faz parte da Seção Bônus.

[80] Frequentemente, a fim de que uma determinada propriedade seja "interessante", é importante que existam tanto objetos que a possuam quanto objetos que não a possuam.

Observação 1.2.59 (O mundo selvagem das sub*nets*)**.** Dados dois filtros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ em X, não é preciso de muita imaginação para determinar uma relação natural que os *compare*[81]: ambos são habitantes de $\wp(\wp(X))$, um animal que nasce parcialmente ordenado pela inclusão. Contudo, a situação não é tão óbvia no contexto das *nets*: dadas duas *nets* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ num conjunto X, como relacionar uma com a outra?

Um jeito esperto consiste em empurrar o problema para os filtros: em vez de comparar duas *nets* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$, comparam-se os filtros $(x_d)_d^{\uparrow}$ e $(y_s)_s^{\uparrow}$ com respeito à inclusão. Note que se valer a inclusão $(x_d)_d^{\uparrow} \subseteq (y_s)_s^{\uparrow}$, então cada membro do filtro $(x_d)_d^{\uparrow}$ pertence ao filtro $(y_s)_s^{\uparrow}$, o que em particular ocorre para os membros da base de $(x_d)_d^{\uparrow}$. Assim, deve-se ter $\{x_a : a \succeq d\} \in (y_s)_s^{\uparrow}$ para cada $d \in \mathbb{D}$, donde se infere que $\{x_a : a \succeq d\}$ contém algum membro da base de $(y_s)_s^{\uparrow}$. Em linhas gerais, trata-se da solução do

Exercício 1.168. Nas notações acima[82], mostre que $(x_d)_d^{\uparrow} \subseteq (y_s)_s^{\uparrow}$ ocorre se, e somente se, para todo $d \in \mathbb{D}$ existe $s \in \mathbb{S}$ tal que $\{y_t : t \succeq s\} \subseteq \{x_a : a \succeq d\}$. ■

O exercício acima garante que para qualquer *índice* $d \in \mathbb{D}$ existe um *momento* $s \in \mathbb{S}$ a partir do qual todos os termos y_s da *net* $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ ocorrem na *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$. Em outras palavras, a menos de ordem, as informações da *net* $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ já estão presentes na *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, o que justifica a próxima

Definição 1.2.60. Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ *nets* num conjunto X. Diremos que $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ é uma **sub*net*** de $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ se ocorrer $(x_d)_d^{\uparrow} \subseteq (y_s)_s^{\uparrow}$. ¶

Embora soe contraintuitiva a princípio, a definição acima generaliza a ideia de *subsequência*, possivelmente já conhecida pelo leitor. *Grosso modo*, diz-se que uma sequência $(y_n)_{n\in\omega}$ é *subsequência* de outra sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ se a primeira está *distribuída* entre os termos da segunda, respeitando a ordem dos seus índices. O jeito *certo* de definir, porém, é o seguinte:

Definição 1.2.61. Sejam $\chi := (x_n)_{n\in\omega}$ e $\zeta := (y_n)_{n\in\omega}$ sequências num conjunto X. Diz-se que $(y_n)_{n\in\omega}$ é uma **subsequência** de $(x_n)_{n\in\omega}$ se existir uma função $f\colon \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $y_n = x_{f(n)}$ para todo $n \in \omega$ (como no diagrama abaixo). ¶

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\chi"] & X \\
\omega \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\zeta"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.14: O poder unificador das setas.

Em geral, se $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em X e $\mathcal{N} \subseteq \omega$ é cofinal[83] em ω, então a função $f\colon \omega \to \omega$ dada por $f(n) := \min(\mathcal{N} \setminus \{f(m) : m < n\})$ é estritamente crescente, e daí $(x_{f(n)})_{n\in\omega}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\omega}$. Neste caso, a função f é o *único*[84] isomorfismo de ordens entre $\mathcal{N}$ e ω (item c) do Exercício K.34). Por isso, bem como pelo exercício a seguir, tem-se o direito de chamar como sequência *qualquer* função da forma $\mathcal{N} \to X$, desde que $\mathcal{N}$ seja cofinal em ω.

[81] Não significa que a ordem seja total: pode acontecer $\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{G}$ e $\mathcal{G} \not\subseteq \mathcal{F}$.

[82] O correto seria indicar as pré-ordens de $\mathbb{D}$ e $\mathbb{S}$ com símbolos distintos, posto que elas não precisam ter qualquer tipo de relação uma com a outra. Infelizmente, a vida é curta demais para isso.

[83] Ou infinito. Neste caso ambos os conceitos coincidem.

[84] O que isenta até mesmo o leitor preciosista da obrigação de explicitar o isomorfismo.

Exercício 1.169. Considere $\mathcal{N} \subseteq \omega$ um subconjunto cofinal em ω e seja $(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ uma *net* em $\mathbb{R}$. Mostre que a *net* $(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ converge para $x \in X$ se, e somente se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $n \in \mathcal{N}$ tal que $|x_m - x| < \varepsilon$ para todo $m \in \mathcal{N}$ com $m \geq n$. Conclua que a *net* $(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ também merece ser chamada de sequência. ■

Com tais definições, é *claro*[85] que se $(y_n)_{n\in\omega}$ *for* uma subsequência de $(x_n)_{n\in\omega}$, então $(y_n)_{n\in\omega}$ *será* uma sub*net* de $(x_n)_{n\in\omega}$. A recíproca, no entanto, é falsa.

Exemplo 1.2.62. A sequência $(2n)_{n\in\omega}$, que alguns escrevem como $(0, 2, 4, \ldots)$, é subsequência (logo, sub*net*) da sequência $(n)_{n\in\omega}$, que alguns escrevem como $(0, 1, 2, 3, \ldots)$. Por outro lado, a sequência $(0, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots)$, que não merece ter seu termo geral expresso, é sub*net* da *net* $(n)_{n\in\omega}$, mas não é uma subsequência. ▲

O exemplo acima pode levar o leitor a ponderar se a definição de sub*net* que adotamos é adequada. Haveria outra? A resposta curta é "sim", enquanto a resposta longa é "sim, um monte". Em [104], Schechter aborda pelo menos quatro tipos de sub*nets* que emergiram nos diversos contextos da Análise desde o seu advento: as sub*nets* de *Willard*, de *Kelley* e de *Aarnes-Ardenæs*, bem como as sub*nets cofinais*. Mais importante, ele observa as implicações (estritas)

$$\text{sub}\textit{net}\text{ cofinal} \Rightarrow \text{sub}\textit{net}\text{ de Willard} \Rightarrow \text{sub}\textit{net}\text{ de Kelley} \Rightarrow \text{sub}\textit{net}\text{ de Aarnes-Ardenæs}$$

e discute os malabarismos morais que dão ao leitor a liberdade de escolher qualquer uma delas para o tratamento de convergências.

A Definição 1.2.60 é a de Aarnes-Ardenæs, e foi escolhida tanto pela sua generalidade quanto pela ausência de burocracia ao se transitar entre o reino das *nets* e o reino dos filtros. O leitor interessado nos outros tipos de sub*nets* pode conferir [104]. △

Agora sim, com a definição de sub*net* adotada, que generaliza o comportamento das subsequências, a Proposição 1.2.58 se traduz de forma muito familiar para o leitor que traz consigo alguma bagagem de Análise.

Exercício 1.170. Sejam $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ *nets* num espaço topológico X. Mostre que se $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ é sub*net* de $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, então $\lim x_d \subseteq \lim y_s$, ou verbalmente: sub*net* de *net* convergente é convergente. ■

Exemplo 1.2.63. Embora a sequência $(-1^n)_{n\in\omega}$ não convirja, as subsequências $(-1^{2n})_{n\in\omega}$ e $(-1^{2n+1})_{n\in\omega}$ convergem. Em particular, o fato de ambas convergirem para limites distintos dá um modo indireto de verificar a divergência da sequência $(-1^n)_{n\in\omega}$ (confira o Exercício 1.207). ▲

Finalmente, estamos prontos para conhecer a definição mais importante deste livro.

Definição 1.2.64. Um espaço topológico X é **compacto** se todo filtro próprio de X está contido num filtro próprio convergente. Equivalentemente, X é compacto se, e somente se, toda *net* em X admite uma sub*net* convergente. ¶

É quase a mesma tentativa de definição realizada no início desta subseção, certo?

Não. Não mesmo.

[85] Se não for claro para *você*, por favor, não se ofenda! É bem mais útil entender esse tipo de afirmação como uma sugestão provocativa de exercício do que sair xingando no Twitter.

Ultrafiltros e o Teorema de Tychonoff

De um ponto de vista técnico, a Definição 1.2.64 tem a aparente desvantagem de exigir que se encontrem *superfiltros* (ou sub*nets*) que convirjam, e tais animais não parecem ser trivialmente maleáveis. Isso pode ser corrigido de modo bastante natural no contexto dos filtros, por meio de *ultrafiltros*. O correspondente com (ultra) *nets* também é efetivo, mas bem mais artificial, razão pela qual ele será mencionado de forma breve[86].

Antes de qualquer outra coisa, deve-se entender como se dá o processo de extensão de filtros, o que sugere uma pergunta muito natural: dado um filtro próprio $\mathcal{F}$, existe *algum* filtro próprio $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$? Em termos mais precisos, isso é o mesmo que perguntar se $\mathcal{F}$ é um elemento maximal do conjunto $\mathrm{Filt}(X)$, dos filtros próprios de X, parcialmente ordenado pela relação de inclusão. Por sua vez, isso já foi discutido no Exercício 1.139, apresentado na seção anterior. Em tese, o leitor deve ter provado que para um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, são equivalentes:

(UF_1) (maximalidade) $\mathcal{F}$ é maximal em $\mathrm{Filt}(X)$;

(UF_2) (dicotomia) para todo $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$;

(UF_3) (primalidade) para quaisquer $A, B \subseteq X$, $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

Definição 1.2.65. Um filtro próprio $\mathfrak{u}$ num conjunto X é chamado de **ultrafiltro** se for maximal na família dos filtros próprios de X. ¶

Exemplo 1.2.66. Os filtros introduzidos no Exemplo 1.1.13 não receberam o nome por acaso: *ultrafiltros principais*, i.e.„ filtros da forma $\mathfrak{u}_x := \{A \subseteq X : x \in A\}$ para $x \in X$ fixado, são ultrafiltros de fato, o que é evidente pela condição (UF_2). ▲

Secretamente, as condições (UF_2) e (UF_3) dizem como se dá o processo de extensão de filtros próprios não-maximais. De fato, se $\mathcal{F}$ é um filtro próprio e não-maximal, deve existir um subconjunto $A \subseteq X$ tal que $A \notin \mathcal{F}$ e $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Daí, resulta que tanto $\mathcal{F} \cup \{A\}$ quanto $\mathcal{F} \cup \{X \setminus A\}$ têm a p.i.f. e, portanto, geram filtros próprios em X que contêm $\mathcal{F}$.

Exercício 1.171. Convença-se de que as afirmações anteriores estão corretas. Dica: o que ocorre com $X \setminus A$ se $F \cap A = \emptyset$ para algum $F \in \mathcal{F}$? ■

Isso resolve, parcialmente, o problema da extensão de filtros. Agora, note que se $\mathcal{G}$ é um filtro convergente que contém o filtro $\mathcal{F}$, então qualquer extensão de $\mathcal{G}$ também será convergente, em virtude da Proposição 1.2.58. Logo, se *fosse possível* estender $\mathcal{G}$, recursivamente, até um ultrafiltro $\mathfrak{u}$, este seria convergente. Ocorre que tal procedimento é, de fato, realizável em ZFC.

Lema 1.2.67 (do Ultrafiltro)**.** *Se $\mathcal{F}$ é um filtro próprio num conjunto X, então existe um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ em X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{u}$.*

Demonstração. O argumento é uma aplicação clássica do Lema de Zorn[87]. Note que o conjunto $\mathbb{P} := \{\mathcal{G} \subseteq \wp(X) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ é filtro próprio$\}$ é:

✓ não-vazio, pois $\mathcal{F} \in \mathbb{P}$;

[86] Aqueles com predileção por *nets* têm o direito de protestar. Mudarei a abordagem? Não – confira, porém, a demonstração do Teorema 6.2.38.

[87] Que esconde a sujeira da recursão transfinita debaixo de um tapete parcialmente ordenado.

✓ parcialmente ordenado pela relação de inclusão;

✓ tem limitantes superiores para quaisquer cadeias, posto que se $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ for uma cadeia, então $C := \bigcup \mathcal{C} \in \mathbb{P}$ e $\mathcal{G} \subseteq C$ para todo $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$.

Assim, o Lema de Zorn se aplica, e garante a existência de $\mathfrak{u} \in \mathbb{P}$ maximal com respeito à inclusão. Logo, $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro que contém $\mathcal{F}$. □

Observação 1.2.68. A demonstração acima fez uso explícito do Axioma da Escolha na encarnação do Lema de Zorn, o que pode levar o leitor curioso a se perguntar se isso poderia ser evitado. A resposta curta é "não", enquanto a resposta honesta carece de outra pergunta: evitado em que sentido?

O leitor que espera uma prova para o **Lema do Ultrafiltro** realizável inteiramente em ZF deve tirar o cavalinho da chuva. Pode-se provar que ele independe dos axiomas de ZF, mostrando que o Axioma da Escolha é realmente necessário para prová-lo. Por outro lado, o Lema do Ultrafiltro não é forte o suficiente para, juntamente com os demais axiomas de ZF, derivar o Axioma da Escolha.

Por isso, costuma-se pensar no lema acima como um enfraquecimento do Axioma da Escolha. Tal qual seu *primo* mais forte, o Lema do Ultrafiltro tem outras encarnações surpreendentes em diversos contextos matemáticos[88]. Ao longo do texto esbarraremos com algumas formulações equivalentes. O leitor curioso pode conferir o livro de Schechter [104] para um tratamento bastante cuidadoso dessas equivalências. △

Exercício 1.172. Sejam $f: X \to Y$ uma função sobrejetora e $\mathfrak{u}$ um ultrafiltro em X. Mostre que o filtro $f(\mathfrak{u})$ induzido em Y é um ultrafiltro. Dica: use (UF_2) (ou confira os Exercícios K.14 e 1.322). ■

Observação 1.2.69 (*Nets* universais)**.** Qual seria a tradução de ultrafiltros para a linguagem das *nets*? A resposta para essa pergunta ajuda a justificar a preferência por filtros neste contexto: costuma-se dizer que uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X é uma ***net* universal**[89] se o filtro induzido $(x_d)_d^{\uparrow}$ for um ultrafiltro em X. Sem filtros, a definição de *nets* universais fica bem mais intrincada. △

Exercício 1.173. Mostre que uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é universal se, e somente se, para todo subconjunto $A \subseteq X$ existe $d \in \mathbb{D}$ satisfazendo $\{x_a : a \succeq d\} \subseteq A$ ou $\{x_a : a \succeq d\} \subseteq X \setminus A$. Conclua que o Lema do Ultrafiltro é equivalente ao Lema da *net* universal: toda *net* admite uma sub*net* universal. ■

Com esse ferramental, a condição de compacidade pode ser expressa de modo bem mais *econômico*.

Proposição 1.2.70. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

(Comp_1) *X é compacto;*

(Comp_2) *todo ultrafiltro em X converge;*

(Comp_3) *toda* net *universal em X converge.*

[88] Confira, por exemplo, o Exercício 1.141.

[89] Também xingadas de *ultranets*.

Demonstração. Se X é compacto e $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro, então existe um filtro próprio $\mathcal{F}$ convergente com $\mathfrak{u} \subseteq \mathcal{F}$, ou seja: $\mathfrak{u} = \mathcal{F}$ é convergente. Se vale (Comp$_2$) e η é uma *net* universal, então $\eta^{\uparrow}$ é um ultrafiltro convergente, donde segue que η é convergente pois $\lim \eta = \lim \eta^{\uparrow}$. Por fim, se vale (Comp$_3$) e χ é uma *net* em X, então χ admite uma sub*net* universal, que é convergente pela hipótese. □

A fim de ilustrar o poder de síntese das reformulações acima e, com sorte, surpreender o leitor, provaremos a seguir um dos teoremas mais importantes da Topologia Geral.

Teorema 1.2.71 (Tychonoff)**.** *O produto de espaços compactos é compacto.*

Demonstração. Seja $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços compactos e faça $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. A fim de demonstrar o teorema, basta mostrar que todo ultrafiltro em X converge. Ora, se $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro em X, então o Exercício 1.172 garante que $\pi_i(\mathfrak{u})$ é um ultrafiltro em X_i para cada $i \in \mathcal{I}$. Como X_i é compacto, resulta que existe $x_i \in X_i$ com $\pi_i(\mathfrak{u}) \to x_i$, para cada $i \in \mathcal{I}$. Finalmente, pelo Lema 1.2.36, conclui-se que $\mathfrak{u} \to (x_i)_{i\in\mathcal{I}}$. □

Há diversas demonstrações do **Teorema de Tychonoff**, que variam em elegância e complexidade de acordo com a caracterização de compacidade utilizada. Devido a importância deste teorema, veremos mais algumas provas ao longo do texto. O leitor interessado em provar o Teorema de Tychonoff por meio de *nets* universais deve adaptar o Exercício 1.172 para o contexto adequado e então repetir a argumentação anterior.

Observação 1.2.72. A demonstração acima merece alguns comentários no que se refere ao uso do Axioma da Escolha: a rigor, ele foi utilizado implicitamente na caracterização de compacidade (Comp$_2$), bem como na escolha de $x_i \in \lim \pi_i(\mathfrak{u})$ para cada i. É importante mencionar isso pois um olhar desatento pode levar o leitor a conjecturar, erroneamente, que para provar o Teorema de Tychonoff basta usar o Lema do Ultrafiltro. Isso está longe de ser verdade[90].

Teorema 1.2.73 ((AC$_{14}$) – Kelley)**.** (Em ZF) *Se o produto arbitrário de espaços compactos é compacto, então vale o Axioma da Escolha.*

Demonstração. Dada uma família não-vazia $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de conjuntos não-vazios, busca-se mostrar que $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \neq \emptyset$. Para isso, tomemos $p \notin \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e, para cada $i \in \mathcal{I}$, façamos $Y_i := X_i \cup \{p\}$ munido da *topologia compacta*[91] $\mathcal{T}_i := \{Y_i, \{p\}, \emptyset\}$. Por hipótese, o espaço $Y := \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$ é compacto. Como a projeção $\pi_i \colon Y \to Y_i$ é contínua e $X_i \subsetneq Y_i$ é fechado para cada i, segue que $F_i := \pi_i^{-1}[X_i]$ é fechado em Y. Agora, mostraremos que $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i \neq \emptyset$.

Como cada F_i é fechado em Y e este é compacto, basta provar que a família de fechados $\mathcal{F} := \{F_i : i \in \mathcal{I}\}$ tem a p.i.f., pois isto *acarreta* $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i \neq \emptyset$ (pela Proposição 1.2.77, a seguir). É justamente neste ponto da prova que a importância da escolha de p se revela: dado um subconjunto *finito* $I \subseteq \mathcal{I}$, pode-se escolher $x_i \in X_i$ para cada $i \in I$ sem apelar para o Axioma da Escolha, posto que I é finito; daí, define-se $f \in Y$ por $f(i) := x_i$ se $i \in I$ e $f(i) = p$ caso $i \in \mathcal{I} \setminus I$, resultando em $f \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Por fim, note que $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. □

[90] Mas a conjectura torna-se verdadeira ao se acrescentar a condição de Hausdorff a cada um dos espaços. Confira o item d) do Exercício 1.250.

[91] A rigor, espaços são compactos, não suas topologias. No entanto, a preguiça aliada à liberdade poética me forçam a usar tal expressão. *Caio Oliveira, desculpe-me, mas eu não presto.*

Essa observação é útil mesmo para o leitor que não se interessa por Fundamentos: uma vez que o Teorema de Tychonoff é equivalente ao Axioma da Escolha, assumí-lo como verdadeiro (sem demonstração) é tão perigoso quanto assumir o próprio Axioma da Escolha sem demonstração. $\triangle$

Agora que já vimos como os aparatos finos de convergência permitem provar o Teorema de Tychonoff sem dor, podemos nos debruçar sobre outras manifestações mais populares da compacidade, além de conhecer alguns ilustres representantes dessa classe de espaços.

Coberturas por abertos

Definição 1.2.74. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U}$ uma família de subconjuntos de X. Diz-se que $\mathcal{U}$ é uma **cobertura** de X, ou que $\mathcal{U}$ (**re**)**cobre** X, se valer $X = \bigcup \mathcal{U}$. Se os elementos da cobertura $\mathcal{U}$ forem abertos (resp. fechados, etc.) de X, diremos que $\mathcal{U}$ é uma **cobertura por abertos** (resp. **cobertura por fechados**, etc.). Um subconjunto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ é chamado de **subcobertura** da cobertura $\mathcal{U}$ se também valer $X = \bigcup \mathcal{V}$. ¶

O comportamento das coberturas abertas costuma codificar muitas propriedades topológicas importantes, conhecidas na literatura como *propriedades de recobrimento*[92]. A compacidade, introduzida aqui como uma propriedade de convergência, é frequentemente definida como uma propriedade de recobrimento. O elo entre as duas definições passa pelo próximo

Lema 1.2.75. *Se X é um espaço topológico e $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro em X, então*

$$\lim \mathfrak{u} = \bigcap_{A \in \mathfrak{u}} \overline{A} = \bigcap \{F \in \mathfrak{u} : F \text{ é fechado}\}. \tag{1.30}$$

Demonstração. Como $\mathfrak{u}$ é fechado para cima, resulta que os conjuntos $\{\overline{A} : A \in \mathfrak{u}\}$ e $\{F \in \mathfrak{u} : F \text{ é fechado}\}$ são iguais, acarretando a segunda igualdade. Para a primeira igualdade, note que ocorre $x \notin \lim \mathfrak{u}$ se, e somente se, existe um aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ e $U \notin \mathfrak{u}$, donde o restante segue por $\mathfrak{u}$ satisfazer (UF$_2$). $\square$

Definição 1.2.76. Dados um espaço topológico X e um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, diz-se que $x \in X$ é um **ponto aderente** de $\mathcal{F}$ se ocorrer $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$. ¶

Proposição 1.2.77. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

(Comp$_2$) *X é compacto;*

(Comp$_4$) *todo filtro próprio tem ponto aderente;*

(Comp$_5$) *se $\mathcal{F}$ é uma família de fechados de X com a p.i.f., então $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$;*

(Comp$_6$) *toda cobertura por abertos de X tem subcobertura finita.*

Demonstração. Dado um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, existe um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{u}$. Logo, se X é compacto, então existe $x \in X$ tal que

$$x \in \lim \mathfrak{u} = \bigcap_{A \in \mathfrak{u}} \overline{A} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A},$$

[92] NÃO. TEM. A. VER. COM. *ESPAÇOS. DE. RECOBRIMENTO.* Agora sem pausa: não tem a ver com espaços de recobrimento. Espero que entusiastas de Topologia Algébrica tenham entendido o recado.

onde a primeira igualdade se deve ao lema anterior, enquanto a última inclusão decorre desta: $\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\right\} \subseteq \left\{\overline{A} : A \in \mathfrak{u}\right\}$. Assim, mostrou-se que (Comp$_2$) $\Rightarrow$ (Comp$_4$).

Por sua vez, se vale (Comp$_4$) e $\mathcal{F}$ é uma família com a p.i.f., então $\mathcal{G} := \mathcal{F}^{\Uparrow}$ é um filtro próprio. Logo, por hipótese, existe $x \in \bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \bigcap \mathcal{F}$, onde a última igualdade decorre da suposição de que os elementos de $\mathcal{F}$ são fechados. Tem-se, portanto, (Comp$_5$).

Agora, assumamos (Comp$_5$). Dada uma cobertura por abertos $\mathcal{U}$ de X, observe que o conjunto $\mathcal{F} := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma família de fechados tal que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Logo, pela contrapositiva de (Comp$_5$), existem $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $\bigcap_{i \leq n}(X \setminus U_i) = \emptyset$, donde se conclui, pelo Proposição K.1.15, que $\{U_0, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ é subcobertura de $\mathcal{U}$.

Finalmente, provemos (Comp$_6$) $\Rightarrow$ (Comp$_2$), o que faremos pela contrapositiva. Se $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro de X com $\lim \mathfrak{u} = \emptyset$, então

$$X = X \setminus \lim \mathfrak{u} = X \setminus \bigcap_{A \in \mathfrak{u}} \overline{A} = \bigcup_{A \in \mathfrak{u}} X \setminus \overline{A},$$

mostrando que $\mathcal{U} := \left\{X \setminus \overline{A} : A \in \mathfrak{u}\right\}$ é uma cobertura por abertos de X. Para concluir, note que $\mathcal{U}$ não admite subcobertura finita: se admitisse, ocorreria $\emptyset \in \mathfrak{u}$. □

Observação 1.2.78 (Para os amantes de ZF)**.** Nas situações em que o Axioma da Escolha é proibido, a definição padrão de compacidade passa a ser (Comp$_6$) (e seus equivalentes em ZF[93]). Nesse contexto, embora ainda se tenha (Comp$_6$) $\Rightarrow$ (Comp$_2$), *não é possível* provar a recíproca em ZF: na verdade, o Lema do Ultrafiltro é (equivalente a) a implicação (Comp$_2$) $\Rightarrow$ (Comp$_6$). Para mais detalhes, confira o Exercício 1.250. △

A caracterização (Comp$_6$) revela um modo típico de se motivar compacidade, como sendo *uma generalização topológica do conceito de finitude*. De fato, note que se X é um espaço topológico com $|X| < \aleph_0$, então X é compacto: se $\mathcal{U}$ é cobertura por abertos de X, então para cada $x \in X$ existe $U_x \in \mathcal{U}$ com $x \in U_x$ e, daí, $\{U_x : x \in X\}$ é subcobertura finita de $\mathcal{U}$. Para garantir a recíproca, basta acrescentar *discretude*.

Exercício 1.174. Mostre que um conjunto X é finito se, e somente se, X é compacto com a topologia discreta. ■

Embora a caracterização de compacidade em termos de coberturas abertas use, explicitamente, a noção de finitude, observe que (Comp$_4$) não faz isso. Assim, é *honesto* afirmar que a finitude se descreve como a interseção das propriedades de compacidade e discretude.

Exemplo 1.2.79. Qualquer conjunto X munido de sua topologia cofinita é compacto. De fato, se $\mathcal{U}$ for cobertura por abertos de X, então um aberto $U \in \mathcal{U}$ é tal que $X \setminus U$ é finito, e daí basta tomar um aberto $U_x \in \mathcal{U}$ para cada $x \in X \setminus U$, pois disso resultará que $\{U_x : x \in X \setminus U\} \cup \{U\}$ é subcobertura finita de $\mathcal{U}$. ▲

Exemplo 1.2.80 (Compacidade do espectro)**.** O espectro de um anel comutativo e com unidade R é *sempre* compacto. Para provar isso, mostraremos que se $\mathcal{F} := \{V(J_i) : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de fechados de $\mathrm{Spec}\,(R)$ satisfazendo $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, então $\mathcal{F}$ não tem a p.i.f.. Com efeito, tem-se

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} V(J_i) = V\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} J_i\right) = \emptyset,$$

[93]Note que (Comp$_4$), (Comp$_5$) e (Comp$_6$) são equivalentes em ZF.

ou seja: não existe ideal primo contendo o ideal $\sum_{i\in\mathcal{I}} J_i$. Como isso só é possível caso $\sum_{i\in\mathcal{I}} J_i = R$, segue que existem $i_0, \ldots, i_n \in \mathcal{I}$ tais que $1_R \in \sum_{j\leq n} J_{i_j}$, donde obtém-se

$$\emptyset = V\left(\sum_{j\leq n} J_{i_j}\right) = \bigcap_{j\leq n} V(J_{i_j}),$$

como desejado. ▲

Observação 1.2.81. No exemplo acima, usou-se a contrapositiva de (Comp$_5$), que de tão comum, merece um enunciado: *um espaço X é compacto se para qualquer família $\mathcal{F}$ de fechados de X, com $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, existe uma subfamília finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$.* △

Exemplo 1.2.82 (Ordinais compactos)**.** Como o ordinal ω é discreto e infinito, segue do último exercício que ω não é um espaço compacto. De modo geral, vale a seguinte

Proposição 1.2.83. *Um ordinal α munido de sua topologia da ordem é compacto se, e somente se, α é ordinal sucessor.*

Demonstração. Seja $\alpha \coloneqq \beta + 1$ e tome $\mathcal{U}$ uma cobertura por abertos de α. Observe que o subconjunto $A \coloneqq \left\{x \in \alpha : \exists \mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\aleph_0} \text{ tal que } [0, x] \subseteq \bigcup \mathcal{V}\right\} \subseteq \alpha$ é não-vazio, pois $0 \in A$. A ideia é mostrar que $A = [0, \beta]$, i.e., $A = \alpha$, pois daí resulta $\beta \in A$, o que por construção significa dizer que $[0, \beta]$ admite subcobertura finita para $\mathcal{U}$.

Suponha que não, i.e., $\alpha \setminus A \neq \emptyset$. Neste caso, existe $\alpha_0 \coloneqq \min \alpha \setminus A$, com $\alpha_0 > 0$. Daí, tomando-se $U \in \mathcal{U}$ com $\alpha_0 \in U$, obtém-se $\gamma < \alpha_0$ tal que $(\gamma, \alpha_0] \subseteq U$, donde a minimalidade de α_0 garante um subconjunto finito $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ com $[0, \gamma] \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Note que isso permite mostrar que $[0, \alpha_0]$ é coberto por $\mathcal{V} \cup \{U\}$, contrariando o modo como se tomou α_0. Logo, $A = \alpha$, como desejado.

Reciprocamente, se α é compacto, então $\mathcal{U} \coloneqq \{[0, \beta] : \beta < \alpha\}$ é uma cobertura por abertos de α, donde é fácil ver que uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ resulta numa igualdade $\alpha = [0, \gamma] = \gamma + 1$ para algum $\gamma < \alpha$. □

Na primeira parte da demonstração acima, embora se tenha tomado uma cobertura por abertos arbitrária para α, na prática usou-se apenas um *refinamento* por abertos básicos. Esse é um tipo de procedimento muito útil e corriqueiro, razão pela qual será destacado na próxima proposição (confira também o Exercício 1.213). ▲

Proposição 1.2.84. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para X. Então X é compacto se, e somente se, toda cobertura por abertos de X composta por elementos de $\mathcal{B}$ tem subcobertura finita*

Demonstração. Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos para X, então pode-se tomar um *refinamento* $\mathcal{V}$ de X inteiramente composto por abertos de $\mathcal{B}$: para cada $x \in X$ existem $U_x \in \mathcal{U}$ e $V_x \in \mathcal{B}$ com $x \in V_x \subseteq \mathcal{B}$, o que permite tomar $\mathcal{V} \coloneqq \{V_x : x \in X\}$. Agora, basta notar que qualquer subcobertura $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ induz uma subcobertura $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ com $|\mathcal{U}'| \leq |\mathcal{V}'|$. A recíproca é automática. □

Exemplo 1.2.85. A reta real não é compacta: os abertos da forma $(-n, n) \subseteq \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$, constituem uma cobertura por abertos infinita e sem subcobertura finita. Como tal família também determina uma cobertura por abertos da reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$, definida no Exercício 1.54, segue que $\mathbb{R}_S$ também não é compacto. Alternativamente:

Proposição 1.2.86. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Se X é compacto e f é sobre, então Y é compacto.*

Demonstração. Se $\mathcal{U}$ é cobertura por abertos de Y, então $\mathcal{V} := \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ é cobertura por abertos de X (pois f é contínua), de modo que se $\mathcal{V}'$ for subcobertura de $\mathcal{V}$, então $\mathcal{U}' := \{U : f^{-1}[U] \in \mathcal{V}'\}$ é subcobertura de $\mathcal{U}$ (pois f é sobre). Como $|\mathcal{U}'| \leq |\mathcal{V}'|$, o resultado segue da compacidade de X, que permite tomar $\mathcal{V}'$ com $|\mathcal{V}'| < \aleph_0$. □

Exercício 1.175. Prove a proposição anterior por meio da caracterização de compacidade em termos de ultrafiltros ou *nets* universais. ■

Para concluir que $\mathbb{R}_S$ não é compacto por meio da proposição acima, note que a função $\mathrm{Id} : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}$ que faz $x \mapsto x$ é contínua e bijetora. Esse tipo de argumentação será muito recorrente, como no próximo exemplo. ▲

Exemplo 1.2.87. O espaço $\mathcal{C}_p(X)$ não é compacto, qualquer que seja o espaço topológico $X \neq \emptyset$. A proposição anterior dá um modo bastante simples de verificar isso: se $x \in X$, então a projeção

$$\begin{aligned} \pi_x : \mathcal{C}_p(X) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

é contínua e sobrejetora, donde segue que $\mathcal{C}_p(X)$ não pode ser compacto, pois $\mathbb{R}$ não é. ▲

Naturalmente, dizemos que um subconjunto $K \subseteq X$ é **subespaço compacto** de X se o próprio K for um espaço compacto com sua topologia de subespaço. No entanto, na prática, não é preciso se preocupar em restringir os abertos de X para obter abertos legítimos em K, no seguinte sentido.

Exercício 1.176. Sejam X um espaço topológico e $K \subseteq X$ um subespaço. Mostre que $K \subseteq X$ é compacto se, e somente se, para qualquer família de abertos $\mathcal{U}$ de X com $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ existe um subconjunto finito $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $K \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. ■

Observação 1.2.88. Eventualmente o leitor pode se deparar com a seguinte indagação retórica: se K é subespaço dos espaços X e Y, e é subespaço compacto de X, então K é subespaço compacto de Y? A resposta, naturalmente, é sim. △

Com o exercício acima é fácil concluir que a compacidade é hereditária para subespaços fechados. Mais precisamente:

Proposição 1.2.89. *Se X é compacto e $K \subseteq X$ é fechado, então K é compacto.*

Demonstração. Dada uma família $\mathcal{U}$ de abertos de X com $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, observe que

$$\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{X \setminus K\}$$

é uma cobertura por abertos de X. Daí, se $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ é subcobertura de $\mathcal{V}$, então $K \subseteq \bigcup \mathcal{V}''$, onde $\mathcal{V}'' := \mathcal{V}' \setminus \{X \setminus K\} \subseteq \mathcal{U}$. Como a compacidade de X permite tomar $\mathcal{V}'$ com $|\mathcal{V}'| < \aleph_0$, o resultado segue. □

A relação entre compactos e fechados se torna mais estreita ao se acrescentar a condição de Hausdorff.

Proposição 1.2.90. *Sejam X um espaço de Hausdorff e $K \subseteq X$ um subespaço. Se K é compacto, então K é fechado.*

Demonstração. Nada precisa ser feito se $K = X$. Supondo $K \neq X$, mostraremos que $X \setminus K$ é aberto. Para isso, fixemos $x \notin K$. Por X ser de Hausdorff, para cada $y \in K$ existem pares de abertos disjuntos $A_y, B_y \subseteq X$ com $x \in A_y$ e $y \in B_y$. Por construção, tem-se $K \subseteq \bigcup_{y \in K} B_y$ e, pela compacidade de K, há certos $y_0, \ldots, y_n \in K$ para algum $n \in \omega$ com $K \subseteq \bigcup_{i \leq n} B_{y_i}$. Daí, segue que $x \in A := \bigcap_{i \leq n} A_{y_i}$ e $A \subseteq X \setminus K$. Como x foi tomado arbitrariamente em $X \setminus K$, resulta que $X \setminus K$ é aberto, como queríamos. □

Corolário 1.2.91. *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $K \subseteq X$. Então K é compacto se, e somente se, K é fechado em X.*

Exemplo 1.2.92. As hipóteses acima são realmente importantes. Por exemplo, tomando um conjunto X infinito qualquer dotado da topologia cofinita, resulta que todo subespaço de X é compacto, mas apenas os finitos são fechados. Por sua vez, todo espaço não-compacto contém um fechado que não é compacto...[94] ▲

Corolário 1.2.93. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Se X é compacto e Y é de Hausdorff, então f é fechada. Se, além disso, f for bijeção, então f é homeomorfismo.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.2.86 combinada com a Proposição 1.2.90. □

Observação 1.2.94. Em particular, se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são topologias sobre o mesmo conjunto X, com $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, então a função identidade $\mathrm{Id}\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ é uma bijeção contínua. Logo, se $\mathcal{T}$ for uma topologia compacta e $\mathcal{S}$ for uma topologia de Hausdorff, então $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Em outras palavras, dentre as topologias T_2 de um conjunto X, as topologias compactas são minimais. △

Exemplo 1.2.95 (Compacidade e limitação)**.** Sejam (X, d) um espaço pseudométrico e $L \subseteq X$ um subespaço. Dizemos que L é um subconjunto **limitado** se existir $M > 0$ com $d(x, y) \leq M$ para quaisquer $x, y \in L$. O próprio X é dito um espaço limitado se for limitado como subconjunto de si mesmo. É então fácil *resolver* o seguinte

Exercício 1.177. Sejam (X, d) um espaço pseudométrico e $K \subseteq X$ um subespaço. Mostre que se K é compacto, então K é limitado. Além disso, se d for uma métrica, então K também é fechado. ■

Convém chamar a atenção para o seguinte: enquanto a compacidade é uma propriedade topológica, a limitação não é (Exercício 1.94). Então, não parece estranho que uma propriedade topológica (compacidade) acarrete uma propriedade métrica (a limitação)?

Ao reler atentamente o exercício anterior, observe que a compacidade de K implica a sua limitação para qualquer (pseudo) métrica d compatível com a topologia de X, o que revela o conteúdo verdadeiramente topológico da afirmação. Assim, um enunciado mais preciso do mesmo exercício seria

Proposição 1.2.96. *Se X é pseudometrizável e $K \subseteq X$ é compacto, então K é limitado em qualquer pseudométrica d compatível com a topologia de X. Em particular, se X for metrizável, então K também é fechado.*

[94] Para um contraexemplo menos imbecil, considere os fechados ilimitados de $\mathbb{R}$.

A recíproca desse resultado é delicada mesmo no caso métrico: o fato de $K \subseteq X$ ser fechado e limitado com respeito a uma métrica não é suficiente para garantir sua compacidade, mas a situação se torna um pouco mais favorável se a limitação for com respeito a todas as métricas compatíveis com a topologia. Contudo, ainda é cedo para investigar isso. ▲

Exercício 1.178 (*a.k.a.* Teorema de Weierstrass)**.** Sejam X um espaço compacto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que a imagem de f tem máximo e mínimo. Dica: use as Proposições 1.2.86 e 1.2.96, juntamente com a completude de $\mathbb{R}$. ■

Apesar de tudo o que já se discutiu nesta seção, ainda falta apresentar uma das classes mais importantes de espaços topológicos compactos. A fim de remediar tal embaraço, provaremos um lema muito curioso que relaciona compacidade e sub-bases. O próximo exercício sela um voto de confiança com o leitor.

Exercício 1.179. Sejam X um espaço topológico e $\mathfrak{u}$ um ultrafiltro em X. Mostre que se $\mathcal{B}$ é sub-base para a topologia de X, então $\lim \mathfrak{u} = \bigcap\{F \in \mathfrak{u} : X \setminus F \in \mathcal{B}\}$. ■

Lema 1.2.97 (Alexander)**.** *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma sub-base para a topologia de X. Se toda cobertura por abertos de X composta por elementos de $\mathcal{B}$ tem subcobertura finita, então X é compacto.*

Demonstração. Utilizaremos a contrapositiva da caracterização de compacidade via ultrafiltros. Se X não é compacto, então existe um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ com $\lim \mathfrak{u} = \emptyset$. Logo, o exercício anterior e as "leis" de De Morgan (Proposição K.1.15) garantem que a família $\mathcal{U} := \{B \in \mathcal{B} : X \setminus B \in \mathfrak{u}\}$ é uma cobertura por abertos de X. *Por sorte*, $\mathcal{U}$ não tem subcobertura finita: se $n \in \omega$ e $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ são tais que $X \setminus B_i \in \mathfrak{u}$ para cada i, então $\bigcap_{i \leq n} X \setminus B_i \in \mathfrak{u}$, mostrando que $\bigcap_{i \leq n} X \setminus B_i \neq \emptyset$ e, consequentemente, $\bigcup_{i \leq n} B_i \neq X$. □

Demonstração (sem filtros). Assumindo que $\mathcal{C}$ é uma cobertura por abertos sem subcobertura finita, a família $\mathbb{P} := \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ é cobertura por abertos de X, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ não tem subcobertura finita$\}$ é não-vazia ($\mathcal{C} \in \mathbb{P}$), parcialmente ordenada pela inclusão e tal que toda cadeia tem limitante superior (por quê?). Logo, ao assumirmos, por absurdo, que existe uma cobertura por abertos $\mathcal{C}$ sem subcobertura finita, podemos supor adicionalmente que $\mathcal{C}$ é maximal com respeito a inclusão.

Note que as hipóteses sobre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ acarretam que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ não é uma cobertura para X. Logo, existe pelo menos um ponto x em $X \setminus \bigcup(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$. Agora vem a artimanha: tal ponto x está contido num aberto de $\mathcal{C}$, digamos U, e por sua vez existe uma família finita de abertos $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ com $x \in \bigcap \mathcal{B}' \subseteq U$; pela forma como se tomou x, nenhum membro de $\mathcal{B}'$ pode pertencer a $\mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{C} \cup \{B\} \notin \mathbb{P}$ para cada $B \in \mathcal{B}'$, o que só pode significar a existência de uma subcoleção finita $\mathcal{C}_B \subseteq \mathcal{C}$ com $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_B} C \cup B$; por fim note que $\{C : C \in \mathcal{C}_B$ e $B \in \mathcal{B}'\} \cup \{U\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$, contrariando o modo como $\mathcal{C}$ foi tomada. □

Observação 1.2.98. A primeira demonstração apresentada para o Lema de Alexander faz uso implícito do Lema do Ultrafiltro, afinal de contas a caracterização de compacidade utilizada depende dele. Ocorre que, na verdade, o lema acima é equivalente ao Lema do Ultrafiltro. O leitor curioso deve conferir o roteiro apresentado no Exercício 1.250. △

Teorema 1.2.99. *Dada uma ordem total $(\mathbb{T}, \leq)$, são equivalentes:*

(rc$_1$) *todo subconjunto de $\mathbb{T}$ tem supremo*[95]*;*

(rc$_2$) $\mathbb{T}$ *é compacto com a topologia da ordem.*

Demonstração. Pelo Lema de Alexander, a fim de concluir que $\mathbb{T}$ é compacto, basta mostrar que toda cobertura por abertos pertencentes a *uma* sub-base $\mathcal{B}$ fixada admite subcobertura finita. O *Katzensprung* está na escolha da sub-base: tomaremos $\mathcal{B}$ como no Exemplo 1.1.50, a família dos intervalos da forma

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{T} : x < a\} \quad \text{e} \quad (b, +\infty) := \{x \in \mathbb{T} : b < x\},$$

para $a, b \in \mathbb{T}$. Agora, dada uma cobertura por abertos $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ de $\mathbb{T}$, há dois pontos muito especiais que devem ser recobertos: $t_0 := \sup \emptyset$ e $t_1 := \sup \mathbb{T}$. Note que como todo $t \in \mathbb{T}$ é limitante superior de $\emptyset$ (por vacuidade), tem-se $t_0 = \min \mathbb{T}$, enquanto claramente ocorre $t_1 = \max \mathbb{T}$. Disso resulta que os abertos de $\mathcal{U}$ são da forma $[t_0, a)$ e $(b, t_1]$.

Consideremos então o conjunto $A := \{a \in \mathbb{T} : [t_0, a) \in \mathcal{U}\}$, não-vazio pois existe pelo menos um $U \in \mathcal{U}$ com $t_0 \in U$, e tomemos $a_0 := \sup A$. Novamente, existe $V \in \mathcal{U}$ com $a_0 \in V$, e não pode ocorrer $V = [t_0, a)$ para algum a, pois isso contradiz a escolha de a_0 como supremo de A. Logo, existe $b \in \mathbb{T}$ com $(b, t_1] \in \mathcal{U}$ e $a_0 \in (b, t_1]$, acarretando $b < a_0$. Mais uma vez, pelo modo como se tomou a_0, b não é limitante superior de A e, portanto, existe $a_1 \in A$ com $b < a_1 \leq a_0$. Consequentemente, $b \in [t_0, a_1)$. Note, por fim, que $\mathbb{T} = [t_0, a_1) \cup (a_0, t_1]$.

A recíproca será feita por contraposição. Para isso, vamos supor a existência de $A \subseteq \mathbb{T}$ sem supremo. Fica a cargo do leitor verificar que:

- se $A = \emptyset$, então a inexistência de $\sup \emptyset$ garante que $\{(t, +\infty) : t \in \mathbb{T}\}$ é uma cobertura para $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita;
- se $A \neq \emptyset$ não tem limitante superior, então $\{(-\infty, a) : a \in A\}$ é uma cobertura para $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita;
- se $A \neq \emptyset$ é limitado superiormente, então a inexistência de $\sup A$ garante que $\{(-\infty, a) : a \in A\} \cup \{(b, +\infty) : b \in B\}$ é uma cobertura para $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita, onde $B := \{b \in \mathbb{T} : \forall a \in A \quad a \leq b\}$.

Em todos os casos, a inexistência de $\sup A$ implicou a existência de uma cobertura por abertos de $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita, mostrando assim que $\mathbb{T}$ não é compacto. □

Observação 1.2.100. Uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ é chamada de **reticulado**[96] se para quaisquer $a, b \in \mathbb{P}$ existem $\sup\{a, b\} := a \vee b$ e $\inf\{a, b\} := a \wedge b$. Diz-se que $(\mathbb{P}, \leq)$ é um **reticulado completo** se todo subconjunto de $\mathbb{P}$ admite supremo e ínfimo. Nesse sentido, o Teorema 1.2.99 garante que uma ordem total é um reticulado completo se, e somente se, é compacta como espaço topológico. Mesmo quem não se importa com reticulados pode ficar feliz em saber que o teorema anterior caracteriza topologicamente a completude no sentido de Dedekind, i.e., as ordens nas quais *qualquer* subconjunto *não-vazio e limitado superiormente* admite um supremo. △

[95] Essa hipótese é mais forte do que a condição de completude (de Dedekind): aqui, pede-se que *todo* subconjunto tenha supremo, enquanto a completude (de Dedekind) exige apenas que todo subconjunto *não-vazio* e *limitado superiormente* tenha supremo.

[96] Ou *lattice* nas referências estrangeiras.

Corolário 1.2.101 (Heine-Borel – para ordens completas)**.** *Uma ordem total* $(\mathbb{T}, \leq)$ *é* (*Dedekind*) *completa se, e somente se, todo intervalo fechado e limitado é compacto.*

Demonstração. Se $\mathbb{T}$ é completa e $I \subseteq \mathbb{T}$ é um intervalo fechado e limitado, então todo subconjunto de I admite supremo e, pelo teorema anterior, é compacto. Reciprocamente, se $S \neq \emptyset$ é limitado superiormente, então existe $t \in \mathbb{T}$ tal que $S \subseteq (-\infty, t]$. Logo, para $s \in S$ fixado, a hipótese garante que $[s, t]$ é compacto e, pelo teorema anterior, é um reticulado completo. Por fim, note que $\sup S = \sup(S \cap [s, t])$. □

Corolário 1.2.102 (O espaço compacto de Hausdorff mais importante que existe)**.** *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a < b$. *Então o intervalo* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *é compacto.*

Corolário 1.2.103. *A reta estendida* $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ *é compacta.*

Exercício 1.180 (Compare com o Exercício 1.178)**.** Sejam X um espaço topológico, $(\mathbb{T}, \leq)$ uma ordem total e $f \colon X \to \mathbb{T}$ uma função contínua. Mostre que se X é compacto, então a imagem de f tem máximo e mínimo. Dica: em $f[X]$ tome $\sup \emptyset$ e $\sup f[X]$. ■

Observação 1.2.104. Embora os três últimos corolários, bem como o teorema que os precedeu, sejam conceitualmente simples, a dependência do Lema de Alexander pode ser vista como desvantagem, posto que o último é uma *consequência* do Lema do Ultrafiltro, que por sua vez depende do Axioma da Escolha[97]. Dito isso, convém avisar que a adoção desta abordagem no presente texto se fez por motivos estéticos, já que a caracterização das ordens compactas é realizável em ZF, apenas com um pouco mais de trabalho: o leitor exigente pode adaptar a demonstração da Proposição 1.2.83. △

Como a observação acima depõe contra o Lema de Alexander, é justo apresentar um contraponto favorável à sua utilização.

Demonstração alternativa do Teorema 1.2.71 (a.k.a. *Teorema de Tychonoff*)*.* Consideremos uma família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços compactos, $X := \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ e $\mathcal{B}$ a sub-base "canônica" de X por abertos da forma $\pi_i^{-1}[V]$. Pelo Lema de Alexander, basta mostrar que qualquer cobertura $\mathcal{U}$ por abertos de X composta por elementos de $\mathcal{B}$ tem subcobertura finita. Chamando $\mathcal{U}_i := \{V \subseteq X_i : \pi_i^{-1}[V] \in \mathcal{U}\}$ para cada $i \in \mathcal{I}$, provaremos que a família $\mathcal{U}_j$ é uma cobertura por abertos de X_j, para algum $j \in \mathcal{I}$: caso contrário, para cada $i \in \mathcal{I}$ *seria possível escolher*[98] $x_i \notin \bigcup \mathcal{U}_i$, de modo que $x := (x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ não *seria* coberto por $\mathcal{U}$. Agora, pela compacidade de X_j, existem $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{U}_j$ tais que $X_j = \bigcup_{l \leq n} V_l$, donde se conclui que $\{\pi_j^{-1}[V_l] : 0 \leq l \leq n\}$ é subcobertura finita de $\mathcal{U}$. □

Vamos encerrar esta seção com um importante corolário, que caracteriza os subespaços compactos de $\mathbb{R}^n$, para $n \in \omega$ qualquer. Outras aplicações *honestas* do Teorema de Tychonoff serão dadas na seção de exercícios. No que segue, precisaremos de uma métrica *razoável* em $\mathbb{R}^n$, i.e., que seja compatível com sua topologia produto. O leitor honesto pode, se quiser, verificar que a função $\mathrm{d}_{\max} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{d}_{\max}((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \max_{i \leq n} |x_i - y_i| \tag{1.31}$$

é uma métrica que satisfaz tal exigência. Por essa razão, ela será chamada, carinhosamente, de **métrica usual de** $\mathbb{R}^n$.

[97] Na verdade, o Lema de Alexander é o Lema do Ultrafiltro (Exercício 1.250).
[98] O Axioma da Escolha está escondido aqui.

Corolário 1.2.105 (Heine-Borel). *Sejam $n \in \omega$ e $K \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. Então K é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado com respeito à $\mathrm{d}_{\max}$.*

Demonstração. Já vimos que se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto, então K é fechado e limitado (em qualquer métrica d em $\mathbb{R}^n$ compatível com sua topologia). Para a recíproca, consideremos $\mathbb{R}^n$ munido da métrica $\mathrm{d}_{\max}$ e tomemos $K \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado e limitado nesta métrica[99]. Como K é limitado, existem $M > 0$ e $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $K \subseteq B_{\mathrm{d}_{\max}}[x, M]$ (Exercício 1.240). Agora, note que

$$B_{\mathrm{d}_{\max}}[x, M] = \prod_{i \leq n} [x_i - M, x_i + M] := C.$$

Como C é produto de intervalos da forma $[a, b]$, segue que C é compacto em $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é de Hausdorff, resulta que C também é fechado em $\mathbb{R}^n$ e, por conseguinte, $K \subseteq C$ é subespaço fechado de C, donde se conclui que K é compacto. □

Exercícios complementares da seção

Compacidade e convergência

Exercício 1.181. Sejam X e Y espaços topológicos, com Y de Hausdorff, e funções $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$. Se existe $D \subseteq X$ denso tal que $f|_D = g|_D$, então $f = g$. *Sugestão*: pense com sequências, use *nets*. ■

Exercício 1.182. Sejam X um espaço topológico e $D \subseteq X$ um subespaço denso. Mostre a desigualdade $|\mathcal{C}(X)| \leq |\mathcal{C}(D)|$. Em particular, se D for um denso enumerável, então $|\mathcal{C}(X)| \leq \mathfrak{c}$. Dica: use o exercício anterior. ■

Exercício 1.183. Quantas funções contínuas existem entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$? ■

Exercício 1.184. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ num espaço métrico (X, d) é **de Cauchy** se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \omega$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para quaisquer $n, m \geq n_0$.

a) Mostre que se $(x_n)_{n \in \omega}$ converge, então $(x_n)_{n \in \omega}$ é de Cauchy.

b) Qual seria uma definição razoável para *nets* convergentes? É verdade que toda *net* convergente é de Cauchy?

c) Seja $X := \left\{\frac{1}{n} : n \in \omega\right\}$ e considere-o munido das métricas d_0 e d_1, onde d_0 é a métrica induzida de $\mathbb{R}$ e d_1 é a métrica que faz $d_1(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Mostre que (X, d_0) e (X, d_1) são homeomorfos.

d) Considere a sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \omega}$ no conjunto X do item anterior. Ela é de Cauchy em (X, d_0)? Ela é de Cauchy em (X, d_1)?

Conclua que a propriedade "ser de Cauchy" não é uma propriedade topológica. ■

Exercício 1.185. Seja $(x_n)_{n \in \omega}$ uma sequência em X e $x \in X$ um ponto qualquer. Mostre que se X tem caráter enumerável e $x \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$, então existe uma subsequência de $(x_n)_{n \in \omega}$ que converge para x. ■

Exercício 1.186. Dado um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, mostre que $\mathcal{F}$ é a interseção dos ultrafiltros que estendem $\mathcal{F}$. Com isso, generalize o exercício anterior para qualquer espaço topológico. Sugestão: confira também o Exercício 1.198. ■

Exercício 1.187. Mostre que uma sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ em X converge para x se, e somente se, toda subsequência de $(x_n)_{n \in \omega}$ converge para x. ■

[99] Essa direção depende da métrica: para $n := 1$, pode-se considerar $d \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a métrica limitada que faz $d(x, y) := |x - y|$ se $|x - y| < 1$, e $d(x, y) := 1$ se $|x - y| \geq 1$, que é compatível com a topologia de $\mathbb{R}$. Neste caso, a própria reta $\mathbb{R}$ é fechada e limitada, mas não é compacta. Ainda assim, o resultado não é exclusividade da métrica $\mathrm{d}_{\max}$: basta que d seja uma métrica induzida por uma *norma* em $\mathbb{R}^n$ (Exercício 1.236).

Exercício 1.188. Mostre que $\lim \mathcal{F} = \bigcap\{\lim \mathfrak{u} : \mathfrak{u}$ é ultrafiltro em X e $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{u}\}$ para qualquer filtro próprio $\mathcal{F}$ em X. ■

Exercício 1.189. Para uma *net* $(x_d)_d$ em X, mostre que $x_d \to x$ se, e somente se, para toda *net* universal $(y_s)_s$ que é sub*net* de $(x_d)_d$ ocorrer $y_s \to x$. ■

Exercício 1.190. Descreva os abertos de um espaço topológico por meio de filtros e *nets* convergentes. ■

Exercício 1.191. Seja X um conjunto infinito munido de sua topologia cofinita. Quais são suas sequências convergentes? ■

Exercício 1.192. Seja $\mathbb{T}$ uma ordem total. Mostre que $\mathbb{T}$ é de Hausdorff. ■

Exercício 1.193. Mostre que sem a tricotomia, a conclusão anterior pode ser falsa. Sugestão[100]: investigue a topologia sobre $\mathbb{C}$ obtida ao se declarar $a \preceq b$ se $|a| \leq |b|$. ■

Exercício 1.194. Seja $(x_n)_n$ uma sequência em $\overline{\mathbb{R}}$.

a) Mostre que se $(x_n)_n$ é crescente, então $x_n \to \sup_{n\in\omega} x_n$.

b) Mostre que se $(x_n)_n$ é decrescente, então $x_n \to \inf_{n\in\omega} x_n$.

c) Mostre que se $(x_n)_n$ é monótona e limitada, então $x_n \to x$ com $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 1.195. Sejam X um espaço de Hausdorff e $Y \subseteq X$. Mostre que Y, com a topologia de subespaço, é de Hausdorff. ■

Exercício 1.196. Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias em X. Mostre que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ocorre se, e somente se, para qualquer filtro próprio $\mathcal{F}$ em X ocorrer $\lim_{\mathcal{T}} \mathcal{F} \subseteq \lim_{\mathcal{S}} \mathcal{F}$. Enuncie e demonstre o resultado análogo para *nets*. Dica: Exercício 1.190. ■

Exercício 1.197. Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias em X. Mostre que se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ e $(X, \mathcal{S})$ é de Hausdorff, então $(X, \mathcal{T})$ é de Hausdorff. ■

Exercício 1.198. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{G}$ um pré-filtro em X. Dizemos que x é **ponto aderente** de $\mathcal{G}$ se $x \in \bigcap_{G\in\mathcal{G}} \overline{G}$. Mostre que se x é ponto aderente de $\mathcal{G}$, então existe um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ que estende $\mathcal{G}$ e satisfaz $\mathfrak{u} \to x$. ■

Exercício 1.199. Sejam X um espaço topológico e $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* em X. Para $x \in X$, dizemos que x é **ponto aderente da *net*** $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ se x for ponto aderente do filtro $(x_d)_d^{\uparrow}$. Mostre que x é ponto aderente da *net* $(x_d)_d$ se, e somente se, $x \in \overline{\{x_a : a \geq d\}}$ para todo $d \in \mathbb{D}$. ■

Exercício 1.200. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um filtro próprio em X. Mostre que vale a inclusão $\lim \mathcal{F} \subseteq \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$. ■

Exercício 1.201. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{G}$ um pré-filtro em X. Mostre que

$$\mathrm{ad}(\mathcal{G}) = \bigcup\{\lim \mathfrak{u} : \mathfrak{u} \text{ é ultrafiltro de } X \text{ tal que } \mathcal{G} \subseteq \mathfrak{u}\},$$

onde $\mathrm{ad}(\mathcal{G})$ denota o conjunto dos pontos aderentes de $\mathcal{G}$. ■

Exercício 1.202. Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\wp(X) \arrow[r, "\wp^{\to}(f)"] & \wp(Y) \\
\mathrm{Filt}(X) \arrow[u, "\lim_X"] \arrow[r, "f(\bullet)"'] & \mathrm{Filt}(Y) \arrow[u, "\lim_Y"']
\end{tikzcd}$$

onde $\lim_X\colon \mathrm{Filt}(X) \to \wp(X)$ e $\lim_Y\colon \mathrm{Filt}(Y) \to \wp(Y)$ são as funções que associam os filtros próprios de X e Y a seus conjuntos limites, respectivamente. Mostre que se o diagrama acima for comutativo, então f é contínua. Por que a recíproca pode falhar em espaços que não são de Hausdorff? ■

[100]Exemplo bem legal de Thiago Castro, motivado por uma pergunta do Prof. German durante as aulas de Topologia 2.

Exercício 1.203. Sejam X um espaço topológico e Y um espaço de Hausdorff. Mostre que uma função f é contínua se, e somente se, f leva *nets* convergentes em *nets* convergentes. Dica: resolva primeiro o caso em que X e Y são métricos e no lugar de *nets* use sequências; faça um zigue-zague maroto e divirta-se. ■

Exercício 1.204. Repita o exercício anterior, trocando *nets* por filtros. ■

Exercício 1.205. No exercício anterior, mostre que não se pode trocar *nets* (ou filtros) por sequências. Dica: procure uma função da forma $[0, \omega_1] \to [0, 1]$ que leva sequências convergentes em sequências convergentes mas que não é contínua. ■

Exercício 1.206. Refaça o Exercício 1.114 por meio de *nets* convergentes. ■

Exercício 1.207. Sejam X um espaço topológico e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em X. Se $(y_n)_{n\in\omega}$ e $(z_n)_{n\in\omega}$ são subsequências de $(x_n)_{n\in\omega}$ com $\lim_{n\in\omega} y_n \cap \lim_{n\in\omega} z_n = \emptyset$, conclua que $(x_n)_{n\in\omega}$ diverge. Em particular, se X é de Hausdorff e $\lim_{n\in\omega} y_n \neq \lim_{n\in\omega} z_n$, então $(x_n)_{n\in\omega}$ não converge. ■

Exercício 1.208. Generalize o exercício anterior para filtros e *nets*. ■

Compacidade e recobrimento

Exercício 1.209. Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ topologias sobre um mesmo conjunto X, tais que $(X, \mathcal{T})$ e $(X, \mathcal{S})$ são compactos. Mostre que se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ com $(X, \mathcal{S})$ Hausdorff, então $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Compare com a Observação 1.2.94 e conclua que topologias Hausdorff são maximais entre as compactas. ■

Exercício 1.210. Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias em X. Se $(X, \mathcal{S})$ e $(X, \mathcal{T})$ são ambos compactos Hausdorff e $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$, então $\mathcal{S} \nsubseteq \mathcal{T}$ e $\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{S}$. ■

Observação 1.2.106. Se $\mathscr{T}$ denota a família das topologias num conjunto X, então $(\mathscr{T}, \subseteq)$ é um reticulado completo. Chamando por $\mathscr{H}$ o subconjunto das topologias Hausdorff e por $\mathscr{K}$ a família das topologias compactas, é fácil ver $\mathscr{H}$ é fechada para cima, enquanto $\mathscr{K}$ é fechada para baixo. Nesse sentido, o último exercício diz que quaisquer duas topologias distintas $\mathcal{T}, \mathcal{S} \in \mathscr{H} \cap \mathscr{K}$ são incomparáveis: na terminologia de ordens, isto equivale a dizer que o subconjunto das topologias compactas e T_2 formam uma *anticadeia* em $\mathscr{T}$. △

Exercício 1.211. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se X é compacto, então $f[X]$ é subespaço compacto de Y. Além disso, se Y for de Hausdorff, então $f[X]$ é fechado. ■

Exercício 1.212. Sejam X um espaço topológico e $\mathfrak{u}$ um ultrafiltro. Mostre que os conjuntos $\{\overline{F} : F \in \mathfrak{u}\}$ e $\{F \in \mathfrak{u} : F \text{ é fechado}\}$ são iguais. Conclua que $x \in X$ é ponto aderente de $\mathfrak{u}$ se, e somente se, x é ponto limite de $\mathfrak{u}$. O que ocorre se em vez de um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ considerarmos um filtro próprio $\mathcal{F}$? ■

Exercício 1.213. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para X. Mostre que X é compacto se, e somente se, para toda cobertura por abertos $\mathcal{U}$ de X existe uma cobertura finita $\mathcal{V}$ de X, composta por elementos de $\mathcal{B}$ e que refina $\mathcal{U}$. ■

Exercício 1.214. Se X é um espaço compacto e $Y \subseteq X$ é infinito, então Y tem pelo menos um ponto de acumulação. Dica: suponha que não. ■

Exercício 1.215. Sejam X um espaço topológico e $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em X. Mostre que se $x_n \to x$, então $\{x_n : n \in \omega\} \cup \{x\}$ é subespaço compacto de X. Vale algo análogo para *nets*? ■

Exercício 1.216. Mostre que $[a, b] \subsetneq \mathbb{R}$ é compacto sem apelar para o Axioma da Escolha ou derivados. Dica: repita a demonstração da Proposição 1.2.83, *mutatis mutandis*. ■

Exercício 1.217 (Intervalos encaixantes)**.** Seja $\mathcal{I} := \{I_n : n \in \omega\}$ uma família de intervalos não-vazios, fechados e limitados de $\mathbb{R}$, tais que $I_{n+1} \subseteq I_n$ para cada $n \in \omega$. Mostre que $\bigcap \mathcal{I} \neq \emptyset$. Dica: p.i.f.. ■

Exercício 1.218. Mostre que a conclusão do exercício anterior pode falhar se os intervalos não forem fechados ou limitados. ■

Exercício 1.219 (Teorema de Baire – camuflado)**.** Mostre que $\mathbb{R}$ não é reunião enumerável de fechados com interior vazio. Dica: suponha $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega} C_n$, onde cada C_n é fechado com interior vazio, e obtenha uma família $\{I_n\}_{n\in\omega}$ de intervalos compactos encaixantes tal que $I_n \cap C_n = \emptyset$ para cada $n \in \omega$. ■

Exercício 1.220. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um G_δ de $\mathbb{R}$. Dica: suponha que não e contrarie o exercício anterior. ■

Análise revisitada

Exercício 1.221. Considere os seguintes subconjuntos $\mathcal{A}_\infty$ e $\mathcal{M}_\infty$ de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, bem como as funções $s \colon \mathcal{A}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ e $p \colon \mathcal{M}_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$:

(i) $\mathcal{A}_\infty := (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)\}$ e, para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_\infty$,

- ✓ $s(\alpha, \beta) := \alpha + \beta \in \mathbb{R}$ se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- ✓ $s(\alpha, \beta) := +\infty$ se $+\infty \in \{\alpha, \beta\}$;
- ✓ $s(\alpha, \beta) := -\infty$ se $-\infty \in \{\alpha, \beta\}$.

(ii) $\mathcal{M}_\infty := (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus \{(-\infty, 0), (0, -\infty), (+\infty, 0), (0, +\infty)\}$ e, para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{M}_\infty$,

- ✓ $p(\alpha, \beta) := \alpha \cdot \beta$ se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- ✓ $p(\alpha, \beta) := +\infty$ se $(\alpha, \beta) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com $\alpha, \beta < 0$ ou $\alpha, \beta > 0$;
- ✓ $p(\alpha, \beta) := -\infty$ se $(\alpha, \beta) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\alpha < 0 < \beta$ ou $\beta < 0 < \alpha$.

Mostre que as duas funções s e p são extensões contínuas da soma e da multiplicação em $\mathbb{R}$, respectivamente. É possível estender tais funções a operações sobre $\overline{\mathbb{R}}$? ■

Exercício 1.222. Traduza os limites usuais do Cálculo como limites de *nets*, e utilize o exercício anterior para obter as propriedades operatórias básicas de tais limites. ■

Exercício 1.223. Seja $(y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ uma *net* em $\mathbb{R}$. Mostre que se $y_d \to \pm\infty$, então existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $y_d \neq 0$ para todo $d \geq D$ e vale $\lim_{d \geq D} \frac{1}{y_d} = 0$, onde o último limite é tomado com respeito ao conjunto dirigido $\{d \in \mathbb{D} : d \geq D\}$. Utilize tal resultado para investigar as propriedades dos limites de quocientes usuais do Cálculo. ■

Exercício 1.224. Sejam $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ e $(y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ *nets* em $\mathbb{R}$ tais que $x_d \leq y_d$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Mostre que se $x_d \to x$ e $y_d \to y$, então $x \leq y$. ■

Exercício 1.225. Mostre que *nets* reais e monótonas convergem em $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Exercício 1.226. Para $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f \colon I \to \mathbb{R}$ monótona, mostre que $D := \{x \in I : f$ é descontínua em $x\}$ é enumerável. Dica: lembre-se da definição de limites laterais e de sua relação com a continuidade num ponto; utilize o exercício anterior para concluir que f tem todos os limites laterais em $\mathbb{R}$; por fim, obtenha uma injeção $D \to \mathbb{Q}$. ■

Exercício 1.227 (Just for fun)**.** Seja $\operatorname{Mon}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ a família das funções monótonas da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que $|\operatorname{Mon}(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$. ■

Exercício 1.228. Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Dizemos que $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}$ é uma **norma** se para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valer

(N$_1$) $\|x\| \geq 0$, (N$_3$) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, e

(N$_2$) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$, (N$_4$) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ¶

Nesta situação, diz-se que $(E, \|\cdot\|)$ é um **espaço vetorial normado**. Mostre que a correspondência $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ determina uma métrica em E. ■

Observação 1.2.107. Em geral, um **espaço normado**, i.e., um espaço vetorial dotado de uma norma, sempre será considerado com a topologia induzida pela métrica obtida pela norma, a menos de menção contrária. △

Exercício 1.229. Mostre que tanto as operações quanto a própria norma de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado são contínuas. ■

Exercício 1.230. Sejam E e F $\mathbb{R}$-espaços vetoriais normados. Mostre que se $f \colon E \to F$ é $\mathbb{Q}$-linear e contínua, então f é $\mathbb{R}$-linear. Dica: note que para $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$ e $v \in E$ quaisquer, tem-se

$$f(r \cdot v) - q \cdot f(v) = f((r - q) \cdot v);$$

lembre-se então de que existe uma sequência $(q_n)_{n \in \omega}$ em $\mathbb{Q}$ com $q_n \to r$. ■

Observação 1.2.108. O tipo de argumentação acima é frequente em Análise: a fim de mostrar que dois vetores A e B são idênticos, por exemplo, basta provar que $A - B = 0$, o que por sua vez é equivalente a afirmar que $\|A - B\| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Como, eventualmente, isso não é imediato, faz-se uma estimativa do tipo $\|A - qB\| \leq q\varepsilon$, para daí então se aproveitar da continuidade da norma, fazendo "q tender a 1" ou outra coisa do tipo. △

Exercício 1.231. Seja E um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E \times E \to \mathbb{R}$ é um **produto interno** se para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ ocorrer

(P_1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(P_2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$,

(P_3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, e

(P_4) $\langle x, x\rangle > 0$ se $x \neq 0_E$. ¶

Em tais condições, $(E, \langle\,,\,\rangle)$ é chamado de **espaço com produto interno**.

a) Dois vetores $x, y \in E$ são **ortogonais** se ocorrer $\langle x, y\rangle = 0$. Prove que se $x, y \in E$ são ortogonais, então
$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle. \tag{1.32}$$

b) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Nas condições anteriores, mostre que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ocorre para quaisquer $x, y \in E$.

c) Mostre que a função $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ define uma norma em E. ■

Exercício 1.232. O exemplo canônico de produto interno ocorre em $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$: para vetores $x := (x_1, \ldots, x_n), y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{1.33}$$
usualmente chamado de **produto interno *canônico***[101]

a) Mostre que $\langle\,,\,\rangle$ é de fato um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

b) Use o isomorfismo usual entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ (como $\mathbb{R}$-espaços vetoriais) para tornar $\mathbb{C}$ num $\mathbb{R}$-espaço vetorial normado. Explicitamente, mostre que
$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{1.34}$$
define uma norma em $\mathbb{C}$. Esta é a **norma usual de** $\mathbb{C}$. ■

Exercício 1.233 (Produto interno complexo)**.** Como $\mathbb{C}$ é um corpo, também é legítimo considerar $\mathbb{C}$-espaços vetoriais e, mais ainda, esperar que o estudo de normas e produtos internos se estenda para tal contexto. A adaptação é automática para normas, que continuam com codomínio real: o único cuidado é que, na condição (N_3), o número real $|\lambda|$ na igualdade $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ é dado pela expressão (1.34), pois $\lambda \in \mathbb{C}$. A generalização dos produtos internos, por outro lado, tem uma *complicação*.

Diferentemente da norma, espera-se que um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ num $\mathbb{C}$-espaço vetorial V assuma valores em $\mathbb{C}$. Em tais casos, a condição (P_1) é substituída por

(P_1') $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

onde $\overline{a + bi} := a - bi$ é o **conjugado** do número complexo $a + bi$. Em particular, disso segue que $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, a condição (P_4) faz sentido também no caso complexo. Convença-se disso tudo e, depois, mostre que tanto o Teorema de Pitágoras quanto a desigualdade de Cauchy-Schwarz permanecem válidas, donde segue que produtos internos complexos também induzem normas. ■

Exercício 1.234. Mostre que a tese do Exercício 1.229 permanece válida para $\mathbb{C}$-espaços vetoriais normados. ■

Adiante, $\mathbb{K}$ denota um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com suas topologias usuais.

Exercício 1.235. Sejam E e F $\mathbb{K}$-espaços normados.

[101] Há muitos outros, embora, para efeitos práticos, esse baste em $\mathbb{R}^n$.

a) Mostre que as regras

$$(v,u) \mapsto \sqrt{\|v\|_E^2 + \|u\|_F^2}, (v,u) \mapsto \|v\|_E + \|u\|_F \text{ e } (u,v) \mapsto \max\{\|v\|_E, \|u\|_F\}$$

induzem normas no $\mathbb{K}$-espaço normado $E \times F$.

b) Mostre que todas as normas acima induzem a topologia produto usual em $E \times F$. ■

Observação 1.2.109. As normas $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$ e $\max\{\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F\}$ costumam ser chamadas, respectivamente, de normas **da soma** e **do máximo**. Evidentemente, elas podem ser adaptadas para qualquer produto finito de espaços normados. △

Exercício 1.236. Considere $T \colon E \to F$ um mapa $\mathbb{K}$-linear entre os $\mathbb{K}$-espaços normados E e F. Mostre que T é contínua se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$. Conclua que se E e F têm a mesma dimensão finita, então E e F são homeomorfos. Dica para a primeira parte: use a continuidade de T em 0_E com $\varepsilon := 1$. Dica para a segunda parte: mostre que se E tem dimensão n, então E e $\mathbb{K}^n$ são homeomorfos, onde $\mathbb{K}^n$ é dotado da norma da soma; para tanto, tome um isomorfismo $T \colon \mathbb{K}^n \to E$ e use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que T é contínua, e a compacidade de

$$\mathbb{S}_{\mathbb{K}^n} := \{v \in \mathbb{K}^n : \|v\| = 1\}$$

para concluir que T^{-1} é contínua. ■

Observação 1.2.110. O resultado acima mostra que quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ induzem a mesma topologia. Esse importante resultado foi deixado como exercício pois, no Capítulo 5, *ele* será obtido como corolário de uma caracterização mais geral. △

Exercício 1.237 (Teorema *Fundamental* da Álgebra, confira a Observação K.2.127)**.** Podem-se usar os Teoremas de Weierstrass (*a.k.a.* Exercício 1.178) e de Heine-Borel (*a.k.a.* Corolário 1.2.105) na demonstração do Teorema K.2.128 (*a.k.a. Fundamental* da Álgebra).

a) Mostre que se $f \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio não-constante, então $\lim_{|a| \to +\infty} |f(a)| = +\infty$.

b) Use o item anterior, juntamente com o Teorema de Weierstrass, para concluir que a função $|f| \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tem um mínimo, onde $f \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio qualquer.

c) Seja $f \in \mathbb{C}[x]$ não-constante tal que $f(z) \neq 0$ para algum $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $|f(z)|$ não é o valor mínimo da função $|f|$. Para isso, prossiga com o seguinte roteiro.

   ✓ Comece fingindo que $z = 0$, $f(0) = 1$ e $f = 1 - x^k + x^{k+1}g$, para certos $k \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathbb{C}[x]$.

   ✓ Note que para $t \in \mathbb{R}$, com $t^k < 1$, ocorre $|f(t)| \leq 1 - t^k(1 - t|g(t)|)$.

   ✓ Conclua que existe $t \in \mathbb{R}_{>0}$ suficientemente pequeno com $|f(t)| < 1$.

   ✓ Mostre que o fingimento inicial pode ser realizado sem comprometer a generalidade. Dica: observe que a correspondência $x \mapsto x + \gamma$ define um isomorfismo de anéis $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ para qualquer $\gamma \in \mathbb{C}$, o que costuma ser xingado de *mudança de variáveis*; faça tais mudanças até dizer chega[102].

Use as observações acima para concluir que se $f \in \mathbb{C}[x]$ é não-constante, então existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 0$. ■

[102] O leitor que quiser mais detalhes pode conferir a primeira prova para o Teorema Fundamental da Álgebra apresentada no livro [41], de Fine e Rosenberger, material dedicado completamente à prova deste teorema – que é fundamental na mesma medida em que é da Álgebra.

Sortidos

Exercício 1.238. Seja $(\mathbb{D}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma $\mathcal{I}$-upla de conjuntos de dirigidos e considere $\mathbb{D} := \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{D}_i$.

a) Mostre que ao declarar $(\alpha_i)_i \preceq (\beta_i)_i$ se, e somente se, $\alpha_i \leq \beta_i$ em $\mathbb{D}_i$ para todo i, o conjunto $\mathbb{D}$ fica dirigido pela pré-ordem $\preceq$.

b) Para cada $i \in \mathcal{I}$, fixe uma *net* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{D}_i}$ num conjunto X_i e, para $f := (f_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathbb{D}$, defina $(x_{f_i})_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Mostre que $(x_{f_i})_{f\in\mathbb{D}}$ é sub*net* de $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{D}_i}$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Dica: para $\alpha \in \mathbb{D}_i$ fixado, construa $\widetilde{f} \in \mathbb{D}$ adequada de modo que para todo $\beta \geq \alpha$ em $\mathbb{D}_i$ exista $f \geq \widetilde{f}$ tal que $x_{f_i} = x_\beta$.

c) Use os argumentos acima[103] para resolver, de forma indolor, o Exercício 1.99. ∎

Exercício 1.239. Sejam $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em X e $x \in X$ um ponto. Mostre que se toda subsequência de $(x_n)_{n\in\omega}$ tem uma (sub) subsequência que converge para x, então $x_n \to x$. Por que isso não contradiz a divergência da sequência $((-1)^n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{R}$? ∎

Exercício 1.240. Sejam (X, d) um espaço pseudométrico e $L \subseteq X$ um subconjunto. Mostre que L é limitado no sentido da definição feita no Exemplo 1.2.95 se, e somente se, existem $x \in X$ e $M > 0$ tais que $L \subseteq B_d(x, M)$. ∎

Exercício 1.241 (Convergência em topologias fracas – compare com a Proposição 1.2.36)**.** Sejam X um conjunto, $\mathscr{F} := \{f_i : X \to X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de funções, onde X_i é um espaço topológico para cada $i \in \mathcal{I}$, e $\mathcal{T}$ a topologia fraca sobre X induzida pela família $\mathscr{F}$. Mostre que uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X converge para $x \in X$ com a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $f_i(x_d) \to f_i(x)$ em X_i para cada $i \in \mathcal{I}$. Enuncie e demonstre a versão análoga para filtros em X. ∎

Exercício 1.242. Mostre que o único morfismo de anéis entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Dica: use o Exercício 1.181 juntamente com a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. ∎

Exercício 1.243. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de X e $x \in X$ um ponto. Mostre que $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é base local em x. ∎

Exercício 1.244 (Bases locais em espaços de calibre – Exemplo 1.1.58)**.** Dado um espaço de calibre $(X, \mathcal{G})$, descreva uma base local em $x \in X$. ∎

Exercício 1.245. Seja $f : [0, \omega_1) \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

a) Mostre que para todo $n \in \omega$ existe $x_n \in \omega_1$ com $|f(x) - f(x_n)| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $x \geq x_n$. Dica: supondo que não, é possível obter sequências $(\alpha_n)_n$ e $(\beta_n)_n$ em ω_1 com $\alpha_j < \beta_j < \alpha_{j+1}$ para todo j, com $|f(\alpha_j) - f(\beta_j)| \geq \frac{1}{2^n}$; porém, f não seria contínua em $\gamma := \sup_{j\in\omega} \alpha_j$.

b) Use o item anterior para concluir que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f(\beta) = f(\alpha)$ para todo $\beta \geq \alpha$.

c) Mostre que existem funções que preservam sequências convergentes e não são contínuas. Dica: com $X := [0, \omega_1]$, a função $X \to \mathbb{R}$ que leva $\alpha < \omega_1$ em 0 e $\omega_1 \mapsto 1$ é contínua? ∎

Exercício 1.246. Mostre que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ não é metrizável. ∎

Exercício 1.247. Mostre que $[0, \omega_1)$ tem caráter enumerável. ∎

Exercício 1.248. Mostre que $[0, \omega_1]$ não é metrizável. ∎

Exercício 1.249. Mostre que se $\alpha \geq \omega$, então $[0, \alpha]$ não é homogêneo. ∎

Exercício 1.250. Neste exercício veremos um roteiro para demonstrar a equivalência, em ZF, entre algumas afirmações feitas ao longo desta seção. Para facilitar as referências, faremos as seguintes abreviações.

- **UF**: Lema do Ultrafiltro (*Ultrafilter Lemma*).
- **UC**: *se todo ultrafiltro do espaço converge, então o espaço é compacto.*

[103] Frutos da insistência de João Santos.

- **ASL**: Lema da Sub-base de Alexander.
- **TK**: Teorema de Tychonoff restrito a produtos de espaços compactos de Hausdorff.
- **TF**: Teorema de Tychonoff restrito a produtos de espaços compactos discretos.
- **TC**: Teorema de Tychonoff restrito a produtos do espaço $2 := \{0, 1\}$.

Atenção: ao longo deste roteiro, o uso do Axioma da Escolha está PROIBIDO.

a) Note que já se provaram as implicações UF $\Rightarrow$ UC $\Rightarrow$ ASL ao longo do texto.

b) Mostre que ASL $\Rightarrow$ TF. Para isso, considere as etapas a seguir, onde $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços compactos e discretos (logo, finitos) e $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$.

   i) Note que se ocorrer $X = \emptyset$, então nada precisa ser feito.

   ii) Para cada $j \in \mathcal{I}$ e $a \in X_j$ chame $B_{j,a} := \pi_j^{-1}[X_j \setminus \{a\}]$. Convença-se de que $\mathcal{B} := \{B_{j,a} : j \in \mathcal{I}$ e $a \in X_j\}$ é sub-base para X.

   iii) Note que para $j \in \mathcal{I}$ fixado, se $a, a' \in X_j$ com $a \neq a'$, então $X = B_{j,a} \cup B_{j,a'}$.

   iv) Assumindo ASL e $X \neq \emptyset$, fixe $g \in X$ e mostre que toda cobertura de X por abertos de $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita. Dica: fixada uma cobertura $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$, se existirem $j \in \mathcal{I}$ e $a, a' \in X_j$ com $a \neq a'$ e $B_{j,a}, B_{j,a'} \in \mathcal{U}$, então acabou; se não existirem, use g para definir $f \in X \setminus \bigcup\mathcal{U}$.

c) Prove que TC $\Rightarrow$ UF. Para isso, considere as etapas a seguir, onde $\mathcal{F}$ denota um filtro próprio num conjunto X.

   i) Chame $\Sigma := \wp(X)$ e *identifique* $\wp(\Sigma)$ com o conjunto de funções 2^Σ por meio da correspondência χ, que a cada subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \Sigma$ associa a função característica de $\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{G}} \colon \Sigma &\to \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R} \\ A &\mapsto 1 \text{ se } A \in \mathcal{G} \\ A &\mapsto 0 \text{ se } A \notin \mathcal{G} \end{aligned}$$

   Caso ainda não tenha se convencido de que χ é uma bijeção, faça isso agora.

   ii) Note que para cada $A \subseteq X$, a função $\pi_A \colon 2^\Sigma \to \{0, 1\}$, que faz $\pi_A(\chi_{\mathcal{G}}) = \chi_{\mathcal{G}}(A)$, é contínua. Dica: como a notação sugere, π_A é a projeção na A-ésima coordenada.

   iii) Observe que $\mathcal{G}$ é um filtro próprio em X se, e somente se, $\chi_{\mathcal{G}}(\emptyset) = 0$ e $\chi_{\mathcal{G}}(A)\chi_{\mathcal{G}}(B) = \chi_{\mathcal{G}}(A\cap B)$ para quaisquer $A, B \subseteq X$. Conclua que o conjunto dos filtros próprios de X está em bijeção com o subespaço fechado

$$\mathscr{F} := \left(\bigcap_{A,B\in\Sigma} (\pi_A\pi_B - \pi_{A\cap B})^{-1} [\{0\}] \right) \cap \pi_\emptyset^{-1}[\{0\}].$$

   iv) Note que $\mathscr{E} := \{\chi_{\mathcal{G}} \in 2^\Sigma : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$ é subespaço fechado de 2^Σ. Dica: quais filtros $\mathcal{G}$ satisfazem a identidade $(1 - \pi_A(\mathcal{G}))\pi_A(\mathcal{F}) = 0$ para todo $A \in \Sigma$?

   v) Para cada $A \subseteq X$, mostre que $\mathscr{D}_A := \{\chi_{\mathcal{G}} \in 2^\Sigma : A \in \mathcal{G}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{G}\}$ é subespaço fechado de 2^Σ. Dica: $[1, +\infty)$ é fechado em $\mathbb{R}$.

   vi) Mostre que uma família $\mathfrak{u}$ de subconjuntos de X é um ultrafiltro que estende $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\chi_{\mathfrak{u}} \in \bigcap_{A\subseteq X} \Phi_A$, onde $\Phi_A := \mathscr{F} \cap \mathscr{E} \cap \mathscr{D}_A$.

   vii) Suponha que 2^Σ seja compacto. Mostre que $\Phi := \{\Phi_A : A \subseteq X\}$ é uma família de fechados com p.i.f. e, portanto, existe um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ em X que estende $\mathcal{F}$. Dica: mostre primeiro que $\Phi_A \neq \emptyset$ para todo $A \subseteq X$, depois itere o processo.

d) *Just for fun*, prove que UF $\Rightarrow$ TK sem apelar para o Axioma da Escolha. Dica: repita a primeira demonstração apresentada para o Teorema de Tychonoff, mas use a condição de Hausdorff para fazer as escolhas por *você*.

Observe que TK $\Rightarrow$ TF $\Rightarrow$ TC trivialmente. Conclua que as asserções UL, UC, ASL, TK, TF e TC são equivalentes entre si, em ZF. ■

Exercício 1.251 (Ultraprodutos e o Teorema da Compacidade)**.** *Um conjunto* Σ *de sentenças de primeira ordem tem um modelo se, e somente se, todo subconjunto não-vazio e finito* $F \subseteq \Sigma$ *tem modelo*[104]. O objetivo deste exercício é guiar o leitor numa demonstração topológica deste resultado[105].

a) Sejam $\mathcal{I} \neq \emptyset$ um conjunto de índices e $\{M_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de conjuntos. Dado um filtro $\mathcal{F}$ em $\mathcal{I}$, considere $\sim_{\mathcal{F}}$ a relação binária em $M := \prod_{i\in\mathcal{I}} M_i$ definida por $f \sim_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \{i \in \mathcal{I} : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$. Mostre que $\sim_{\mathcal{F}}$ é uma relação de equivalência sobre M.

b) Sejam $\mathscr{L}$ uma linguagem de primeira ordem e M_i uma $\mathscr{L}$-estrutura para cada $i \in \mathcal{I}$, com $M := \prod_{i\in\mathcal{I}} M_i$. Considerando um conjunto infinito enumerável $\mathcal{V}$ de variáveis, para uma fórmula $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ com n variáveis livres, digamos $x_1, \ldots, x_n$, e uma n-upla $\vec{\alpha} := (\vec{\alpha}(i))_{i\in\mathcal{I}} \in M^n$, defina

$$\|\varphi[\vec{\alpha}]\| := \{i \in \mathcal{I} : M_i \models \varphi[\vec{\alpha}(i)]\},$$

onde a expressão "$M_i \models \varphi[\vec{\alpha}(i)]$" abrevia que M_i satisfaz φ com respeito a $\vec{\alpha}(i) \in M_i^n$. Para fórmulas $\varphi, \psi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ com n variáveis livres e $\vec{\alpha} \in M^n$, mostre que:

   i) $\|\varphi[\vec{\alpha}] \wedge \psi[\vec{\alpha}]\| = \|\varphi[\vec{\alpha}]\| \cap \|\psi[\vec{\alpha}]\|$;

   ii) $\|\varphi[\vec{\alpha}] \vee \psi[\vec{\alpha}]\| = \|\varphi[\vec{\alpha}]\| \cup \|\psi[\vec{\alpha}]\|$;

   iii) $\|\neg\varphi[\vec{\alpha}]\| = \mathcal{I} \setminus \|\varphi[\vec{\alpha}]\|$.

Observe que se $b \in M$ e $\vec{\gamma} \in M^{n-1}$, então $\|\varphi[b, \vec{\gamma}]\| \subseteq \|\exists x\, \varphi[x, \vec{\gamma}]\|$ e existe $b' \in M$ tal que $\|\varphi[b', \vec{\gamma}]\| = \|\exists x\, \varphi[x, \vec{\gamma}]\|$.

c) (Teorema de Łoś). Suponha que $\mathfrak{u}$ seja um ultrafiltro em $\mathcal{I}$. Denotemos por $M/\mathfrak{u}$ o quociente do item (a)[106], e uma classe de equivalência de $m \in M$ por $m/\mathfrak{u}$. Por simplicidade, dada uma n-upla $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M^n$, escreveremos $\vec{\alpha}/\mathfrak{u} := (\alpha_1/\mathfrak{u}, \ldots, \alpha_n/\mathfrak{u}) \in (M/\mathfrak{u})^n$. Mostre que se cada M_i for uma $\mathscr{L}$-estrutura, $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ for uma fórmula com n variáveis livres e $\vec{\alpha} \in M^n$ for uma n-upla, então $M/\mathfrak{u} \models \varphi[\vec{\alpha}/\mathfrak{u}] \Leftrightarrow \|\varphi[\vec{\alpha}]\| \in \mathfrak{u}$. *Sugestão*: indução na complexidade das fórmulas. Mais precisamente: primeiro, *investigue* o comportamento dos *termos* da linguagem em $M/\mathfrak{u}$ e então convença-se de que a afirmação é válida para *fórmulas atômicas*[107]; daí, supondo o resultado válido para fórmulas φ, φ_1 e φ_2, mostre que o resultado é válido para $\neg\varphi$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ e $\exists x\, \varphi(x)$, onde o fato de $\mathfrak{u}$ ser um (ultra) filtro será imprescindível.

d) (Teorema da Compacidade). Seja Σ um conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas. Mostre que se para cada subconjunto finito e não-vazio $F \subseteq \Sigma$ tem um modelo M_F, então $M/\mathfrak{u} \models \Sigma$, onde $M := \prod_{F\in\mathcal{I}} M_F$ e $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro em $\mathcal{I} := [\Sigma]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\}$ que contém $\{\{F \in \mathcal{I} : G \subseteq F\} : G \in \mathcal{I}\}$. Dica: note que a última família de subconjuntos tem p.i.f..

e) (Compacidade explícita). Seja $\mathcal{C}_{\mathscr{L}}$ o conjunto das *$\mathscr{L}$-teorias completas* e, para cada *sentença* $\varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$, defina $\langle\varphi\rangle := \{T \in \mathcal{C}_{\mathscr{L}} : \varphi \in T\}$.

   i) Mostre que $\{\langle\varphi\rangle : \varphi \in \mathbb{F}_{\mathscr{L}}(\mathcal{V})$ é sentença$\}$ é base para uma topologia em $\mathcal{C}_{\mathscr{L}}$.

   ii) Mostre que tal topologia é compacta. Dica: $\mathcal{C}_{\mathscr{L}} \setminus \langle\varphi\rangle = \langle\neg\varphi\rangle$, daí se ocorrer $\mathcal{C}_{\mathscr{L}} = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \langle\varphi_j\rangle$, então $\{\neg\varphi_j : j \in \mathcal{J}\}$ não tem modelo, donde o Teorema da Compacidade se aplica.

   iii) Note que a compacidade do espaço $\mathcal{C}_{\mathscr{L}}$ também permite provar o item (d).

Mais detalhes podem ser encontrados no excelente livro de Philipp Rothmaler [93]. ■

[104] Equivalentemente: um conjunto $\mathcal{A}$ de sentenças de primeira ordem é consistente (não deriva contradições), se e somente se, todo subconjunto não-vazio e finito $F \subseteq \Sigma$ é consistente. Visto dessa forma, o Teorema da Compacidade é óbvio – porém, tal equivalência depende do *canhão* conhecido como Teorema da Completude de Gödel.

[105] E pode ser útil conferir a Subseção K.2.1 para se inteirar acerca do *lore*.

[106] Que neste contexto costuma ser chamado de **ultraproduto**.

[107] O que exige definir apropriadamente as *interpretações* no quociente $M/\mathfrak{u}$: no caso de um símbolo de relação n-ária R, faça $R_{M/\mathfrak{u}} := \{(\alpha_1/\mathfrak{u}, \ldots, \alpha_n/\mathfrak{u}) \in (M/\mathfrak{u})^n : \{i \in \mathcal{I} : (\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \in R_{M_i}\} \in \mathfrak{u}$; a interpretação das variáveis e operações é a usual. Em particular, será muito útil observar que, com tais definições, $\tau^{M/\mathfrak{u}} = \tau^M/\mathfrak{u}$, para qualquer $\mathscr{L}$-termo τ.

1.3 Gastronomia topológica (opcional)

Nesta seção, veremos que os métodos de cocção topológica explorados ao longo do capítulo são casos particulares de uma técnica gastronômica categorial, o chamado *limite projetivo* ou *inverso*. *Infelizmente*, a perspectiva das setas tornará irresistível considerar a versão dual, justamente onde encontraremos os *espaços quocientes* como casos particulares de *limites injetivos* ou *diretos*. De toda forma, como tais construções serão evitadas sempre que possível ao longo do texto, a leitura desta seção é opcional – talvez por revanchismo.

1.3.1 Um cardápio universal

Sejam $\mathcal{I}$ uma *categoria pequena* e $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \textsc{Top}$ um funtor[108]. Explicitamente, isto significa que $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \textsc{Top}$ é uma coleção $\{\mathcal{F}(i) : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços topológicos tal que cada seta $f\colon i \to j$ em $\mathcal{I}$ corresponde a uma função contínua $\mathcal{F}(f)\colon \mathcal{F}(i) \to \mathcal{F}(j)$ que respeita a *estrutura* de $\mathcal{I}$, ou seja:

- $\mathcal{F}(\mathrm{id}_i) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(i)}$ para cada objeto i da categoria $\mathcal{I}$; e
- $\mathcal{F}(u \circ v) = \mathcal{F}(u) \circ \mathcal{F}(v)$ para quaisquer setas *componíveis* u e v de $\mathcal{I}$.

Vamos usar $\mathcal{F}$ para definir uma categoria $\mathscr{C}$ cujos *possíveis* objetos finais *codificam* as informações de $\mathcal{F}$, em certo sentido. Objetos de $\mathscr{C}$ são espaços topológicos dotados de funções contínuas *para* cada $\mathcal{F}(i)$ *compatíveis* com as $\mathcal{F}(u)$'s, ou seja: qualquer espaço topológico X munido de uma função contínua $g_i\colon X \to \mathcal{F}(i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$, de tal maneira que $\mathcal{F}(f) \circ g_j = g_k$ para qualquer morfismo $f\colon j \to k$ em $\mathcal{I}$. Dado o formato "cônico" do diagrama correspondente, apresentado abaixo, os objetos de $\mathscr{C}$ costumam ser xingados de **cones**:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g_j"'] \arrow[dr, "g_k"] & \\ \mathcal{F}(j) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"'] & & \mathcal{F}(k) \end{tikzcd} \tag{1.35}$$

Um morfismo entre cones $(X, (g_i)_{i\in\mathcal{I}})$ e $(Y, (h_i)_{i\in\mathcal{I}})$ de $\mathscr{C}$ é uma função contínua $\varphi\colon X \to Y$ tal que $h_i \circ \varphi = g_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, i.e., tal que o diagrama abaixo é comutativo para todo $i \in \mathcal{I}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "g_i"'] & & Y \arrow[dl, "h_i"] \\ & \mathcal{F}(i) & \end{tikzcd}$$

Definição 1.3.1. Nas condições acima, um objeto final de $\mathscr{C}$, *caso exista*, será chamado de **limite projetivo**, **limite inverso** (ou apenas **limite**) do funtor $\mathcal{F}$, e será denotado por $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$. ¶

A definição acima faz sentido pois qualquer outro objeto final de $\mathscr{C}$ será homeomorfo a $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$, em virtude da versão dual da Proposição K.3.19. Um outro problema *seria* o da existência. Porém, no contexto topológico, limites projetivos sempre existem

[108] Para rever alguns conceitos, confira a Seção K.3.

Proposição 1.3.2. *Nas notações acima, o limite* $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ *sempre existe.*

Demonstração. Como conjunto, definamos

$$\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i) := \left\{(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i) : \forall j \xrightarrow{f} k \in \operatorname{Arr}(\mathcal{I}) \quad \mathcal{F}(f)(x_j) = x_k\right\}$$

e, para cada $j \in \mathcal{I}$, consideremos $p_j\colon \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i) \to \mathcal{F}(j)$ como a restrição da projeção $\pi_j\colon \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i) \to \mathcal{F}(j)$. Como se espera que cada p_j seja contínua, vamos munir $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ da topologia fraca induzida pela família de funções $\{p_i : i \in \mathcal{I}\}$. Resta apenas mostrar que $(\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i), (p_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é tanto um *cone* quanto um objeto final da categoria $\mathscr{C}$.

Verifiquemos, primeiramente, as condições impostas pelo diagrama (1.35): o modo como se definiu $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ garante que se $f\colon j \to k$ é uma seta em $\mathcal{I}$ e $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$, então

$$\mathcal{F}(f) \circ p_j\left((x_i)_{i\in\mathcal{I}}\right) := \mathcal{F}(f)(x_j) = x_k = p_k\left((x_i)_{i\in\mathcal{I}}\right),$$

mostrando que o diagrama desejado *comuta*. Por sua vez, se $(X, (g_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é um cone de $\mathscr{C}$, então existe um único morfismo $X \to \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$. A última parte fica por conta do leitor. □

Exercício 1.252. Complete a demonstração da proposição anterior. Dica: a função contínua $(g_i)_{i\in\mathcal{I}}\colon X \to \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$, cuja existência decorre da propriedade universal do produto cartesiano (Proposição 1.1.85), tem sua imagem contida em $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$. ■

Exemplo 1.3.3. O produto cartesiano $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ é um caso particular de limite projetivo ao se tomar $\mathcal{I}$ como uma *categoria discreta*, i.e., uma categoria cujas únicas setas são as identidades: basta notar que, neste caso, a propriedade universal que caracteriza $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ é a mesma que caracteriza $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$, uma vez que a condição (1.35) é satisfeita por qualquer espaço topológico X munido de funções contínuas da forma $X \to \mathcal{F}(i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Há, contudo, um modo mais curioso de obter o produto cartesiano com este método.

Fixada uma família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços topológicos, consideremos a família $\mathcal{J} := [\mathcal{I}]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\}$ dos subconjuntos finitos e não-vazios de $\mathcal{I}$, que admite uma estrutura de categoria induzida pela relação de inclusão inversa (confira o Exemplo K.3.4). Para cada $J \in \mathcal{J}$, definamos $\mathcal{F}(J) := \prod_{j\in J} X_j$ e, para $J, K \in \mathcal{J}$ com $J \subseteq K$, façamos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(J \subseteq K)\colon \mathcal{F}(K) &\to \mathcal{F}(J) \\ (x_j)_{j\in K} &\mapsto (x_j)_{j\in J} \end{aligned}$$

i.e., a projeção canônica nas coordenadas de J. Toda essa embromação resulta num funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{J} \to \textsc{Top}$ cujo limite projetivo é, precisamente, o produto cartesiano $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ (confira o Exercício 1.261). ▲

Exemplo 1.3.4. A interseção de subespaços também pode ser vista como um tipo de limite projetivo. Mais precisamente, dada uma família Σ de subespaços de um espaço topológico X, pode-se dotá-la de uma estrutura categorial a partir da relação de inclusão usual. Daí, ao se fazer $\mathcal{F}(A) := A$ para cada $A \in \Sigma$ e $\mathcal{F}(A \subseteq B)\colon A \hookrightarrow B$ como a inclusão, segue que $\varprojlim_{A\in\Sigma} \mathcal{F}(A) = \bigcap \Sigma$ (confira o Exercício 1.262). Apesar disso, não costuma ser útil pensar muito nisso. ▲

Exemplo 1.3.5. Frequentemente, referências clássicas de Topologia Geral restringem as considerações anteriores para o caso em que $\mathcal{I}$ é um conjunto dirigido (como Engelking [39]) ou, de forma ainda mais particular, para $\mathcal{I} := \omega$ (como Willard [115]), contextos nos quais a ~~terrível~~ alcunha de *limite inverso* é unânime. A abordagem categorial adotada, embora mais abstrata, torna certos aspectos da teoria bem mais claros.

Por exemplo, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são funtores da forma $\mathcal{I} \to \mathrm{T{\small OP}}$, é relativamente fácil perceber que uma *transformação natural* (Subseção K.3.3) $h_\bullet \colon \mathcal{F}(\bullet) \to \mathcal{G}(\bullet)$ induz uma função contínua $h \colon \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i) \to \varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{G}(i)$. O único fato topológico importante para verificar isso está na Proposição 1.3.2 que, secretamente, garante a funtorialidade da correspondência $\varprojlim_{i\in\mathcal{I}} \colon \mathrm{T{\small OP}}^{\mathcal{I}} \to \mathrm{T{\small OP}}$, onde $\mathrm{T{\small OP}}^{\mathcal{I}}$ denota a categoria dos funtores da forma $\mathcal{I} \to \mathrm{T{\small OP}}$. Por mais inócuo que pareça, esse fato permite provar de forma surpreendentemente *limpa* (ou com a sujeira elegantemente empurrada para debaixo do tapete) que o *conjunto de Cantor* é o único espaço métrico compacto, *perfeito* e *totalmente desconexo*, a menos de homeomorfismo (como feito por Willard [115]). Neste texto, tal resultado será provado por métodos mais... *forçados*. ▲

Observação 1.3.6. O categorista entusiasta pode se interessar em saber que mesmo a topologia *inicial*, usada ardilosamente na demonstração de existência de limites projetivos, é manifestação de um objeto *final* numa categoria apropriada de *cones de funtores*. O mais curioso, porém, é que tal propriedade universal se manifesta por meio da propriedade *não* universal apresentada na Proposição 1.1.83. Detalhes podem ser encontrados nos diversos becos categoriais da rede mundial de computadores[109]. △

A abordagem categorial utilizada para repaginar as receitas que já vínhamos fazendo tem a vantagem de sugerir, implicitamente, um cardápio *dual*. Ainda com um funtor $\mathcal{F} \colon \mathcal{I} \to \mathrm{T{\small OP}}$ fixado, vamos *dualizar os objetos* da categoria $\mathscr{C}$ definida anteriormente, para daí investigar os seus possíveis objetos *iniciais*. Mais precisamente, define-se uma categoria $\mathscr{D}$ da seguinte forma:

- um objeto típico de $\mathscr{D}$ deve ser um espaço topológico X munido de uma função contínua $q_i \colon \mathcal{F}(i) \to X$ para cada $i \in \mathcal{I}$, de tal forma que o diagrama a seguir seja comutativo para qualquer seta $f \colon j \to k$ de $\mathcal{I}$;

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(j) \arrow[rr, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[dr, "q_j"'] & & \mathcal{F}(k) \arrow[dl, "q_k"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{1.36}$$

- um morfismo entre objetos $(X, (q_i)_{i\in\mathcal{I}})$ e $(Y, (r_i)_{i\in\mathcal{I}})$ de $\mathscr{D}$ é uma função contínua $\varphi \colon X \to Y$ tal que $\varphi \circ q_i = r_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, i.e., tal que o diagrama a seguir é comutativo para todo $i \in \mathcal{I}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\ & \mathcal{F}(i) \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "r_i"'] & \end{tikzcd}$$

Na literatura especializada, os objetos da categoria $\mathscr{D}$ são xingados de *co-cones* ou, para os mais maduros, **cocones**[110].

[109] Por exemplo: https://math.stackexchange.com/a/138416/128988.

[110] Convém lembrar que, na Álgebra Comutativa, o conjunto dos ideais primos *associados* a um módulo costuma ser denotado por $\mathrm{Ass}(M)$. Moral da história: algebristas e categoristas têm gostos peculiares.

Definição 1.3.7. Quando existe, um cocone inicial na categoria $\mathscr{D}$ é chamado de **limite indutivo**, **limite direto** (ou apenas **colimite**) de $\mathcal{F}$, e será denotado por $\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$. ¶

Mais uma vez, tal notação faz sentido devido à unicidade garantida pela propriedade universal (vide a Proposição K.3.19). Como no caso anterior, limites indutivos *sempre* existem: o leitor com a impressão de que a demonstração de tal fato deve ser, essencialmente, o reflexo da argumentação apresentada para a Proposição 1.3.2, não está enganado. Porém, a natureza dual dos objetos envolvidos requer uma discussão um pouco mais detalhada, o que será feito a seguir.

Como *zinhar* topologias: com funções (*feat.* quocientes)

Nesta subsubseção, *construiremos* o limite indutivo $\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$. Para tanto, vamos mimetizar os procedimentos da Proposição 1.3.2, com o único cuidado de *inverter as setas*. Assim, dado que lá se utilizaram as topologias fracas (ou iniciais), aqui precisaremos de um conceito dual *forte*[111] (ou *final*). Antes de prosseguir, pode ser útil revisar brevemente a discussão feita acerca das topologias iniciais (Definição 1.1.80).

Sejam $\{(X_i,\mathcal{T}_i) : i\in\mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos, X um conjunto fixado e $\mathscr{F} := \{f_i\colon X_i\to X\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma coleção de funções. Como X é meramente um conjunto, não faz sentido discutir a continuidade das funções de $\mathscr{F}$. Podemos remediar isso facilmente, por exemplo, dotando X da topologia *codiscreta*: em tal cenário, todas as funções f_i se tornam contínuas. No entanto, isso não parece muita vantagem, já que qualquer função $f\colon Z\to X$ é contínua quando X é codiscreto.

O problema da topologia codiscreta sobre X é ela ser *pequena demais*: de fato, $\{\emptyset, X\}$ é a menor topologia possível sobre X. Isto sugere atacar o problema na direção oposta, de modo a se buscar pela *maior* topologia sobre X que torna cada uma das funções $f_i\colon X_i\to X$ contínuas[112].

Note que se $\mathcal{S}$ é uma topologia em X segundo a qual $f_i\colon (X_i,\mathcal{T}_i)\to(X,\mathcal{S})$ é contínua para cada $i\in\mathcal{I}$, então para cada $V\in\mathcal{S}$ ocorre $f_i^{-1}[V]\in\mathcal{T}_i$. *Curiosamente*, dessa vez a coleção $\mathscr{F}(\mathcal{T}_\mathcal{I}) := \{V\subseteq X : \forall i\in\mathcal{I}\quad f_i^{-1}[V]\in\mathcal{T}_i\}$ é uma topologia em X:

✓ $\emptyset, X\in\mathscr{F}(\mathcal{T}_\mathcal{I})$ pois $f_i^{-1}[\emptyset]=\emptyset$ e $f_i^{-1}[X]=X_i$ para todo $i\in\mathcal{I}$;

✓ se $U,V\in\mathscr{F}(\mathcal{T}_\mathcal{I})$, então $f_i^{-1}[U], f_i^{-1}[V]\in\mathcal{T}_i$ para todo i, donde segue que a mesma coisa vale para $f_i^{-1}[U]\cap f_i^{-1}[V] = f_i^{-1}[U\cap V]$;

✓ se $\mathcal{W}\subseteq\mathscr{F}(\mathcal{T}_\mathcal{I})$, então $f_i^{-1}[W]\in\mathcal{T}_i$ para cada $i\in\mathcal{I}$ e $W\in\mathcal{W}$, donde segue que

$$f_i^{-1}\left[\bigcup\mathcal{W}\right] = \bigcup_{W\in\mathcal{W}} f_i^{-1}[W]\in\mathcal{T}_i$$

e, pela arbitrariedade do i tomado, resulta $\bigcup\mathcal{W}\in\mathscr{F}(\mathcal{T}_\mathcal{I})$.

Definição 1.3.8. Nas notações acima, a **topologia forte induzida pela família** $\mathscr{F}$, também chamada de **topologia final**, é a topologia $\mathscr{F}(\mathcal{T}_\mathcal{I})$. ¶

[111] Praticantes de Análise Funcional não devem tirar conclusões precipitadas: a princípio, tal terminologia nada tem a ver com *a* topologia *forte* induzida pela norma de um espaço normado, até porque espaços vetoriais nem foram mencionados nesta seção.

[112] Sim, os dois últimos parágrafos são cópias dualizadas do que se escreveu na Página 165.

Exercício 1.253. Nas notações acima, mostre que se $\mathcal{S}$ é uma topologia em X tal que $f_i\colon X_i \to (X, \mathcal{S})$ é contínua para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{F}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$. ■

Tal qual se presenciou com a topologia fraca (Proposição 1.1.83), as funções f_i determinam a continuidade com respeito à topologia forte. Porém, neste caso, as funções envolvidas são aquelas que *saem* de X.

Proposição 1.3.9. *Sejam X e $\mathscr{F}$ como acima, $(Y, \mathcal{S})$ um espaço topológico e $g\colon X \to Y$ uma função. Então $g\colon (X, \mathscr{F}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})) \to (Y, \mathcal{S})$ é contínua se, e somente se, a composta $g \circ f_i\colon (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{S})$ é contínua para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Como $f_i\colon X_i \to X$ é contínua pela definição de $\mathscr{F}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$, segue que se $g\colon X \to Y$ é contínua, então $f_i \circ g$ é contínua por ser composição de funções contínuas. Para a recíproca, dado $W \subseteq Y$ aberto, a continuidade de cada composta $g \circ f_i$ diz que $f_i^{-1}[g^{-1}[W]] \subseteq X_i$ é aberto para cada i, donde se obtém $g^{-1}[W] \in \mathscr{F}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$. □

Exemplo 1.3.10 (Dual da inclusão)**.** Como já se discutiu anteriormente, a topologia de subespaço herdada pelos subconjuntos de um espaço topológico pode ser vista como uma instância da topologia fraca. É na situação dual que emerge a *topologia quociente*.

Definição 1.3.11. Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto e $f\colon X \to Y$ uma função sobrejetora[113]. Diz-se que Y está munido de *uma* **topologia quociente** ao se considerar a topologia forte induzida pela função f. ¶

Como o nome sugere, tal noção surge naturalmente no caso em que Y é uma partição de X determinada por *alguma* relação de equivalência e f é a respectiva projeção[114]. Se Y tem a topologia quociente induzida por uma sobrejeção $f\colon X \to Y$, então a definição da topologia forte permite concluir que

✓ $U \subseteq Y$ é aberto se, e somente se, $f^{-1}[U] \subseteq X$ é aberto, e

✓ $g\colon Y \to Z$ é contínua se, e somente se, a composição $g \circ f\colon X \to Z$ é contínua.

O leitor interessado nas especificidades da topologia quociente pode conferir a próxima subseção. Para o que faremos aqui, já é seguro prosseguir. ▲

Exemplo 1.3.12 (Dual do produto)**.** No Exemplo K.3.32, observou-se que o coproduto entre dois conjuntos A e B pode ser *visualizado* como a reunião *disjunta*

$$A \amalg B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

munida das inclusões $A \to A \amalg B$ e $B \to A \amalg B$ dadas por $a \mapsto (a, 0)$ e $b \mapsto (b, 1)$, respectivamente. Pelo caráter *concreto* dos espaços topológicos, espera-se que um tipo de construção análoga ocorra para o coproduto de espaços topológicos.

Fixada uma família $\mathscr{X} := \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços topológicos, define-se o **coproduto** (ou **soma direta**) da família $\mathscr{X}$ como o conjunto

$$\coprod_{i \in \mathcal{I}} X_i := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i \times \{i\} \tag{1.37}$$

[113] Uma inclusão é um tipo particular de injeção. Logo, o seu dual deve ser *sobre*. Pode ser edificante refletir *sobre* isso.

[114] Há quem prefira dizer, neste caso, que $f\colon X \to Y$ é uma **aplicação quociente**, enquanto a expressão "topologia quociente" fica reservada para a situação específica do quociente por uma relação de equivalência. Porém, tal distinção é irrelevante (confira o Exercício 1.269).

munido da topologia forte induzida pela família de funções $\mathscr{F} := \{m_i : X_i \to \coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, onde m_i faz $x \mapsto (x, i)$ para cada $x \in X_i$. O termo "coproduto" usado acima não é mero fetiche, como revela a próxima

Proposição 1.3.13 (Propriedade universal da topologia coproduto)**.** *Sejam $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de espaços topológicos e Y um espaço topológico munido de funções contínuas $g_i : X_i \to Y$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Então existe uma única função contínua $g : \coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to Y$ tal que $g_i = g \circ m_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Exercício 1.254. Demonstre a proposição acima. ■

Pode-se pensar no espaço $\coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ como o simples "emparelhamento" dos espaços X_i. Enquanto, por exemplo, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ corresponde ao *modelo* usual do plano, $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ se *comporta* como duas retas que não se interceptam – o que em linguajar geométrico *bidimensional* se resume em dizer que tais retas são paralelas[115].

Explicitamente, um subconjunto $W \subseteq \coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é aberto se, e somente se, $m_i^{-1}[W] \subseteq X_i$ é aberto para todo $i \in \mathcal{I}$. Dado que $m_i[A] = A \times \{i\}$ para todo $A \subseteq X$, segue que os abertos de $\coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ são da forma

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \times \{i\},$$

com $U_i \subseteq X_i$ aberto para cada $i \in \mathcal{I}$. Porém, como o leitor atento deve ter notado, se a família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ *fosse* tal que $X_i \cap X_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, então $\coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *poderia* se reescrever meramente como a *reunião* dos espaços X_i's, de modo que seus abertos se *tornariam* simples reuniões dos abertos de cada X_i. Ora, como X_i e $X_i \times \{i\}$ são homeomorfos, tal suposição sempre pode ser feita. Dito isso, convém reescrever a Proposição 1.3.9.

Proposição 1.3.14 (*A.k.a.* Proposição 1.3.9 para o coproduto)**.** *Seja $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos dois a dois disjuntos. Fixado um espaço topológico Y, uma função $g : \coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to Y$ é contínua se, e somente se, a restrição $g|_{X_i} : X_i \to Y$ é contínua para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Outras peculiaridades do coproduto de espaços topológicos serão discutidas nos exercícios do final da seção. Por ora, tem-se uma agenda a cumprir. ▲

Proposição 1.3.15. *Nas notações da Definição 1.3.7, o limite $\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ sempre existe.*

Demonstração. Por simplicidade, comecemos chamando $Z' := \coprod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$, com as funções contínuas $m'_i : X_i \to Z'$ dadas por[116] $x \mapsto (x, i)$. Neste momento, o ideal seria garantir que $(Z', (m'_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é um cocone inicial da categoria $\mathscr{D}$, como definido em (1.36). Para a primeira parte, precisaria-se assegurar que para qualquer seta $f : j \to k$ da categoria $\mathcal{I}$ ocorre $m'_k \circ \mathcal{F}(f) = m'_j$, ou seja: para todo $x \in X_j$ deve-se ter

$$m'_k(\mathcal{F}(f)(x)) := (\mathcal{F}(f)(x), k) = m'_j(x) := (x, j).$$

O problema, porém, é que não há razões para isso ocorrer naturalmente, o que exige uma *correção*. Para tanto, tomaremos $\sim$ como a *menor relação de equivalência*[117] em Z' tal que, para quaisquer $(x, j), (y, k) \in Z'$, se verifica

$$(\exists f : j \to k \quad \text{tal que} \quad \mathcal{F}(f)(x) = y) \Rightarrow (x, j) \sim (y, k). \tag{1.38}$$

[115] A ocorrência da inclusão $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ não é uma coincidência completa (confira o Exercício 1.258).

[116] O leitor que preferir assumir $\mathcal{F}(i) \cap \mathcal{F}(j) = \emptyset$ para $i \neq j$ deve considerar $m'_i(x) := x$ para todo $x \in X_i$.

[117] O *mumble jumble* é ardiloso: como a interseção de relações de equivalência é uma relação de equivalência, segue que para todo $S \subseteq X \times X$ existe a menor relação de equivalência que contém S. Os detalhes ficam a cargo do leitor, que pode achar interessante conferir o Exercício 1.265.

Seja então $Z := {}^{Z'}\!/\!\sim$, i.e., o conjunto das classes de equivalência de Z' com respeito à relação de equivalência $\sim$. Vamos munir Z da topologia forte induzida pela projeção $\pi\colon Z' \to Z$ dada por $\pi((x,i)) := \overline{(x,i)}$. Mostraremos que $(Z, (m_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é o cocone procurado, onde $m_i := \pi \circ m_i'$ para cada $i \in \mathcal{I}$.

A validade de (1.38) garante que $(Z, (m_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é um cocone. Por sua vez, ao se descrever a relação de equivalência $\sim$ (confira o Exercício 1.265), *não é muito horrível* se convencer de que $(Z, (m_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é inicial na categoria $\mathscr{D}$:

- se $(X, (q_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é um cocone, então a mera existência da função $q_i\colon \mathcal{F}(i) \to X$ para cada $i \in \mathcal{I}$ garante a existência de uma única função contínua $q'\colon Z' \to X$ com $q' \circ m_i' = q_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$;

- para $(x,j),(y,k) \in Z'$ com $(x,j) \sim (y,k)$, a descrição explícita da relação $\sim$ (dada no Exercício 1.265) aliada ao fato de $(X, (q_i)_{i\in\mathcal{I}})$ ser um cocone garantem a igualdade $q'(x,j) = q'(y,k)$;

- finalmente, a *propriedade universal do quociente*[118] dá uma única função contínua $q\colon Z \to X$ tal que $q \circ \pi = q'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(i) \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "m_i'"] \arrow[dd, bend right, "m_i"'] & X \\
Z' \arrow[ur, "q'"] \arrow[d, "\pi"] & \\
Z \arrow[uur, "q"] &
\end{tikzcd}$$

O diagrama acima resume a argumentação. Uma vez digerida toda essa malandragem, o leitor não terá dificuldades em se convencer de que $(Z, (m_i)_{i\in\mathcal{I}})$ é inicial em $\mathscr{D}$, como queríamos. □

Observação 1.3.16 (*Mea culpa*)**.** Não é muito comum ver a construção geral do colimite de espaços topológicos exposta em detalhes na literatura[119] e, quando ela é feita, costuma-se considerar exclusivamente o caso em que $\mathcal{I}$ é um conjunto dirigido – o que explica uma das terminologias para tal tipo de objeto[120]. A argumentação acima, embora porca, foi uma adaptação bem intencionada do verbete correspondente no ncatlab – o que talvez me redima perante os adeptos de categorias. △

1.3.2 Algumas peculiaridades do quociente

Para um espaço topológico X fixado e uma relação de equivalência R em X, já se observou que a *topologia quociente* no conjunto $X/R := \{\overline{x} : x \in X\}$ é a topologia final obtida pela projeção canônica $\pi\colon X \to X/R$. Explicitamente, um subconjunto $G \subseteq X/R$ é:

✓ aberto se, e somente se, $\pi^{-1}[G] \subseteq X$ é aberto; e

✓ fechado se, e somente se, $\pi^{-1}[G] \subseteq X$ é fechado.

[118] O leitor pode deduzir sua formulação a partir dos quocientes conhecidos em outras categorias ou, alternativamente, conferir a próxima subseção.

[119] Por exemplo, tanto Bourbaki [19] quanto Engelking [39] ignoram esse tipo de animal.

[120] Limites diretos são, frequentemente, chamados de *direct limits*, enquanto os conjuntos dirigidos são chamados de *directed sets*.

Enquanto o primeiro item decorre da definição da topologia forte, o segundo é consequência da sobrejetividade da projeção: $G \subseteq X/R$ é fechado se, e somente se, $(X/R) \setminus G$ é aberto, o que por sua vez equivale a

$$\pi^{-1}[(X/R) \setminus G] = \pi^{-1}[X/R] \setminus \pi^{-1}[G]$$

ser aberto em X e, portanto, é equivalente a $\pi^{-1}[G]$ ser fechado.

Na prática, isso diz que para conhecer os abertos de X/R basta saber quais são os abertos U de X que "absorvem" a relação R, no seguinte sentido: *sempre que* $x \in X$ *e* $y \in U$ *forem tais que* $x\,R\,y$, *ocorrerá* $x \in U$. Um modo mais econômico de expressar a mesma coisa faz uso da identidade $\pi^{-1}\left[\pi[U]\right] = U$.

Exercício 1.255. Convença-se de que a afirmação acima está certa, ou seja: mostre que U é tal que $x \in U$ sempre que existe $y \in U$ com $x\,R\,y$ se, e somente se, for verdadeira a identidade $\pi^{-1}\left[\pi[U]\right] = U$. ■

Adaptando a *taxonomia* de Bourbaki [19], diremos que um subconjunto de X é **R-saturado** se uma das duas condições equivalentes do exercício anterior for satisfeita. Nestes termos, resulta que a projeção canônica π determina uma bijeção entre os abertos R-saturados de X e os abertos de X/R: se $U \subseteq X$ é R-saturado, então $\pi[U]$ é aberto em X/R pois $\pi^{-1}\left[\pi[U]\right] = U$; por outro lado, se $V \subseteq X/R$ é um aberto, então $U := \pi^{-1}[V]$ é um aberto de X, cuja *R-saturabilidade* decorre da sobrejetividade[121] de π.

Exemplo 1.3.17. Considere $X := [0,1]$ com a topologia oriunda de $\mathbb{R}$ e, sobre X, tome a relação de equivalência $\sim$ definida da seguinte forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \in (0,1) \quad \text{ou} \quad \{x,y\} = \{0,1\}.$$

Explicitamente, a relação $\sim$ mantém intactos os pontos de X diferentes de 0 e 1 enquanto *identifica* os dois últimos. Mais precisamente: se $x \in X$, então $\overline{x} = \{x\}$ para $x \notin \{0,1\}$ e $\overline{0} = \overline{1} = \{0,1\}$. Psicologicamente, o espaço quociente $X/\sim$ resulta da *colagem* das extremidades 0 e 1 do intervalo $[0,1]$. É nesse ponto que alguém (sempre) pergunta: *e geometricamente*???

Suspiro.

Em vista da discussão anterior, a fim de entender $X/\sim$ *topologicamente*, basta conhecer os abertos $\sim$-saturados de X. Ora, é claro que se $U \subseteq (0,1)$, então U é $\sim$-saturado. Por sua vez, se $U \cap \{0,1\} \neq \emptyset$, então U é $\sim$-saturado se, e somente se, $\{0,1\} \subseteq U$.

Logo, os abertos de $X/\sim$ são da forma $\pi[U]$ onde $U \subseteq X$ é um subconjunto aberto de $(0,1)$ ou um aberto de $[0,1]$ que contém os dois extremos do intervalo. Em particular, note que se $V \subseteq X/\sim$ é um aberto com $\overline{0} = \overline{1} \in V$, então existem $\alpha, \beta \in (0,1)$ tais que $[0,\alpha) \cup (\beta,1] \subseteq \pi^{-1}[V]$. Isso tudo está ilustrado de forma deprimente, embora pedagogicamente acessível, na próxima figura.

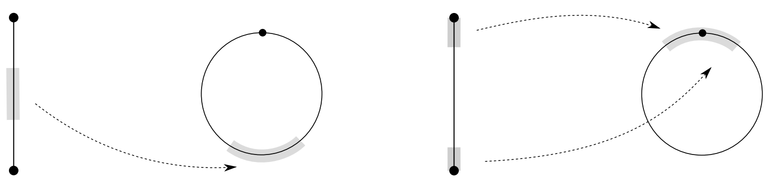


Figura 1.15: Estou um pouco mais morto agora.

[121] Exercício K.14 se precisar de mais argumentos.

Na verdade, como veremos, o espaço quociente $X/\sim$ *é*, de fato, o *círculo* de $\mathbb{R}^2$, a menos de homeomorfismo. Isto seguirá, dentre outras coisas, da propriedade universal do quociente, demonstrada adiante. ▲

Teorema 1.3.18 (Propriedade universal do quociente – de espaços topológicos)**.** *Sejam X um espaço topológico e R uma relação de equivalência em X. Se Y é um espaço topológico e $f\colon X \to Y$ é uma função contínua tal que $a\,R\,b \Rightarrow f(a) = f(b)$ para quaisquer $a, b \in X$, então existe uma única função contínua $\overline{f}\colon X/R \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$.*

Demonstração. Em outras palavras, nas hipóteses do teorema, mostraremos que existe uma única função $g\colon X/R \to Y$ que torna o diagrama a seguir comutativo.

$$\begin{tikzcd}
X/R \arrow[r, dashed, "g"] & Y \\
X \arrow[u, two heads, "\pi"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Implicitamente, e a menos de continuidade, a existência de g decorre da *propriedade universal dos quocientes de conjuntos*. Explicitamente, como f é tal que $f(a) = f(b)$ sempre que $a\,R\,b$, resulta que a relação binária $g \subseteq (X/R) \times Y$, definida pelos pares da forma $(\overline{x}, y)$ satisfazendo $f(x) = y$, é uma função cujo domínio é X/R e que torna comutativo o diagrama acima. A unicidade segue pois, se $h\colon X/R \to Y$ também torna o diagrama comutativo, então $h(\overline{x}) = h \circ \pi(x) = f(x) = g(\overline{x})$, i.e., $h = g$.

Finalmente, a continuidade de g é uma instância particular da Proposição 1.3.9 para a topologia final induzida por uma função sobrejetora (confira o Exemplo 1.3.10): por um lado, a função g é contínua se, e somente se, a composta $\pi \circ g\colon X \to Y$ é contínua; por outro lado, g satisfaz $\pi \circ g = f$ por construção, e f é contínua por hipótese. □

Exemplo 1.3.19. A propriedade universal do quociente permite formalizar a *ideia* expressa pela Figura 1.15. Quem já é familiarizado com *funções trigonométricas* não terá dificuldades em notar que a função $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) := (\operatorname{sen}\, 2\pi\, x, \cos\, 2\pi\, x)$, é contínua e tem como imagem o conjunto

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \tag{1.39}$$

objeto vulgarmente chamado de **esfera de dimensão 1**.

Como φ satisfaz $\varphi(0) = \varphi(1)$, o teorema anterior garante que $\overline{\varphi}\colon [0, 1]/\sim \to \mathbb{S}^1$ é uma sobrejeção contínua, onde $\sim$ é a relação de equivalência definida no Exemplo 1.3.19. Mais ainda, pelas propriedades periódicas das funções seno e cosseno, φ é uma injeção quando restrita ao intervalo $(0, 1)$, donde segue que $\overline{\varphi}$ é, na verdade, uma bijeção contínua. Finalmente, como $[0, 1]/\sim$ é imagem contínua do compacto $[0, 1]$ pela projeção π e $\mathbb{S}^1$ é um espaço de Hausdorff, o aparentemente inócuo Corolário 1.2.93 garante que $\overline{\varphi}$ é um homeomorfismo. ▲

A desvantagem do argumento anterior está, *evidentemente*, na dependência explícita das funções trigonométricas, o que pode incomodar o leitor sistemático, uma vez que elas não serão introduzidas no texto[122]. Contudo, há uma alternativa que, embora seja mais trabalhosa, compensará pela generalidade.

[122]Cursos de Análise existem para isso, afinal de contas.

Observação 1.3.20 (Bolas vs. quadrados)**.** Em vez de utilizar a norma euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$, aquela dada pela regra $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}$, vamos considerar a norma do *máximo*[123], dada pela regra $\|(x, y)\|_{\max} := \max\{|x|, |y|\}$. Agora, a esfera de raio 1 se expressa como

$$\mathbb{S}^1_{\max} := \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] : |x| = 1 \text{ ou } |y| = 1\}, \tag{1.40}$$

cuja representação gráfica é um quadrado centrado na origem $(0, 0)$ com vértices nos pontos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$.

Definamos então $\psi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ fazendo

$$\psi(x) := \begin{cases} (8x - 1, -1) & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ \left(1, 8\left(x - \frac{1}{4}\right) - 1\right) & \text{se } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right) \\ \left(1 - 8\left(x - \frac{2}{4}\right), 1\right) & \text{se } x \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ \left(-1, 1 - 8\left(x - \frac{3}{4}\right)\right) & \text{se } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}.$$

É um exercício simples de Cálculo N, para $N \gg 0$, convencer-se de que ψ é uma função contínua[124]. Daí, como no caso da função φ, a imagem da função ψ é $\mathbb{S}^1_{\max}$ e sua restrição ao intervalo $(0, 1)$ é injetora. Logo, por ocorrer $\psi(0) = \psi(1)$, o mesmo argumento utilizado no último exemplo garante que $\overline{\psi}$ é um homeomorfismo entre $[0, 1]/\sim$ e $\mathbb{S}^1_{\max}$.

Quase tudo resolvido: falta apenas mostrar que as esferas $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^1_{\max}$ são subespaços de $\mathbb{R}^2$ homeomorfos entre si. Em certo sentido, isto vale bem mais geralmente.

Teorema 1.3.21. *Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, onde $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e considere duas normas $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$ sobre E. Se tais normas são equivalentes*[125]*, então as esferas $\mathbb{S}_{\|\cdot\|_0} := \{v \in E : \|v\|_0 = 1\}$ e $\mathbb{S}_{\|\cdot\|_1} := \{v \in E : \|v\|_1 = 1\}$ são homeomorfas entre si.*

Demonstração. Vamos escrever E_i para indicar o espaço vetorial E munido da topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_i$. O primeiro passo consiste em mostrar a continuidade da função $\varphi\colon E_0 \to E_1$ dada por

$$\varphi(x) := \frac{\|x\|_0}{\|x\|_1} \cdot x \text{ para } x \neq 0_E \text{ e } \varphi(0_E) := 0_E.$$

A continuidade em 0_E é a parte mais simples: dado $\varepsilon > 0$, busca-se $\delta > 0$ tal que $0 < \|v\|_0 < \delta$ acarrete em $\dfrac{\|v\|_0}{\|v\|_1}\|v_1\| < \varepsilon$, de modo que basta tomar $\delta := \varepsilon$. Para a continuidade de φ em $E \setminus \{0_E\}$, observe que a equivalência entre as normas garante a continuidade da função $E_0 \to E_0 \times E_1 \times E_1$ dada por $v \mapsto (v, v, v)$. Daí, note que em $E \setminus \{0_E\}$, φ se expressa como a composição das funções contínuas "óbvias":

$$E_0 \setminus \{0_E\} \to (E_0 \setminus \{0_E\}) \times (E_1 \setminus \{0_E\}) \times (E_1 \setminus \{0_E\}) \to \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E_1 \to \mathbb{K} \times E_1 \to E_1,$$

$$v \mapsto (v, v, v) \mapsto \left(\|v\|_0, \frac{1}{\|v\|_1}, v\right) \mapsto \left(\frac{\|v\|_0}{\|v\|_1}, v\right) \mapsto \frac{\|v\|_0}{\|v\|_1} \cdot v.$$

[123] Ela já deu as caras, implicitamente, no Corolário 1.2.105.
[124] Pode ser útil conferir o Exercício 1.266 – ou sua versão geral (Exercício 2.63).
[125] Isto é, induzem a mesma topologia.

Analogamente, mostra-se que a função $\psi\colon E_1 \to E_0$ dada por

$$\psi(x) := \frac{\|x\|_1}{\|x\|_0} \cdot x \text{ para } x \neq 0_E \text{ e } \psi(0_E) := 0_E$$

é contínua. Finalmente, como φ e ψ são inversas uma da outra, com $\varphi\left[\mathbb{S}_{\|\cdot\|_0}\right] = \mathbb{S}_{\|\cdot\|_1}$, o resultado segue. $\square$

Observação 1.3.22. Alternativamente, e de modo mais indireto, mostra-se que qualquer espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ é homeomorfo a qualquer uma de suas bolas abertas: primeiro, a função $E \to B_{\|\cdot\|}(0,1)$ dada por $v \mapsto \frac{1}{1+\|v\|}v$ é contínua e tem inversa contínua dada por $u \mapsto \frac{1}{1-\|u\|}u$; segundo, $B_{\|\cdot\|}(x,r) = \varphi\left[B_{\|\cdot\|}(0,1)\right]$ onde φ faz $v \mapsto \frac{1}{r}(v-x)$, claramente um homeomorfismo. $\triangle$

Uma consequência bastante particular do teorema acima é o término da discussão sobre o homeomorfismo entre o círculo e o quadrado: ao se fazer $E := \mathbb{R}^2$, com $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$ as normas euclidiana e do máximo, respectivamente, o Exercício 1.236 garante a equivalência dessas normas, donde o teorema anterior assegura um homeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^1_{\max}$. $\triangle$

A dolorosa discussão acima revela o *apelo* da topologia quociente para muitos problemas matemáticos de natureza *geométrica*. Por isso, é comum que livros de Topologia Geral voltados para outras áreas abordem o presente tópico com devoção ~~quase~~ religiosa e, como efeito colateral, ignorem outras questões típicas da própria Topologia Geral.

Por isso, o término abrupto desta seção não deve prejudicar o leitor interessado em estudar quocientes de espaços topológicos, dado que há muitos livros que o fazem de maneira *soberba* – este texto, porém, jamais será um deles. Eventuais resultados que possam ser úteis no decorrer dos próximos capítulos serão apresentados na subseção de exercícios, que se inicia a seguir.

Exercícios complementares da seção

Exercício 1.256. Existem outras formas de cozinhar topologias sobre conjuntos quaisquer.

a) Seja $C\colon \wp(X) \to \wp(X)$ uma função satisfazendo as seguintes condições[126], para quaisquer $A, B \subseteq X$:

(i) $A \subseteq C(A)$;

(ii) $C(C(A)) = C(A)$;

(iii) $C(\emptyset) = \emptyset$;

(iv) $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$.

Nestas condições, a família $\{F \subseteq X : C(F) = F\}$ determina uma cotopologia em X. Uma função C como acima é chamada de **operador fecho**.

b) Seja $I\colon \wp(X) \to \wp(X)$ uma função satisfazendo as seguintes condições[127], para quaisquer $A, B \subseteq X$:

(i) $I(A) \subseteq A$;

(ii) $I(I(A)) = I(A)$;

(iii) $I(X) = X$;

(iv) $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$.

[126] Compare com as propriedades (CO_1), (CO_2), (CO_3) e (CO_4), do fecho topológico, página 149.
[127] Compare com as propriedades (IO_1), (IO_2), (IO_3) e (IO_4), do interior, página 149.

Nestas condições, a família $\{O \subseteq X : I(O) = O\}$ determina uma topologia em X. Uma função I como acima é chamada de **operador interior**.

c) Seja $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ uma família de pré-filtros, com cada $\mathcal{V}_x$ centrado em x. Se, para quaisquer $x, y \in X$ e $U \subseteq X$, a ocorrência de $U \in \mathcal{V}_y$ com $x \in U$ acarretar a existência de $V \in \mathcal{V}_x$ com $V \subseteq U$, então a reunião $\mathcal{V} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$ é base para uma topologia em X. Uma família $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ com tais propriedades costuma ser chamada de **sistema fundamental de vizinhanças**, pois cada $\mathcal{V}_x$ é, essencialmente, o filtro de vizinhanças de x na topologia gerada por $\mathcal{V}$.

Prove cada um dos itens acima. ■

Exercício 1.257 (Bourbaki)**.** Suponha que para cada $x \in X$ seja fixado um pré-filtro $\mathcal{F}_x$ tal que ocorra o seguinte: se $V \in \mathcal{F}_x$, então existe $W \in \mathcal{F}_x$ tal que $V \in \mathcal{F}_z$ para todo $z \in W$. Mostre que existe uma única topologia sobre X tal que $\mathcal{N}_x = (\mathcal{F}_x)^{\uparrow}$ para cada $x \in X$. Dica: defina $\mathcal{T} := \{A \subseteq X : \forall x \in A \quad A \in \mathcal{F}_x\}$; para a inclusão $(\mathcal{F}_x)^{\uparrow} \subseteq \mathcal{N}_x$, basta mostrar $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ e, para isso, fixado $V \in \mathcal{F}_x$, mostre que a família $U := \{y \in X : V \in \mathcal{N}_y\}$ é tal que $x \in U$, $U \subseteq V$ e $U \in \mathcal{T}$. ■

Exercício 1.258. Seja X um espaço topológico com pelo menos dois pontos. Existe um mergulho $X \amalg X \to X \times X$? ■

Exercício 1.259 (Transitividade da topologia fraca)**.** Sejam $\mathcal{I}$ e $\{\mathcal{J}_i : i \in \mathcal{I}\}$ conjuntos de índices. Para cada $i \in \mathcal{I}$ e $j \in \mathcal{J}_i$, fixe: um espaço topológico Z_j, um conjunto Y_i e uma função $g_{i,j} \colon Y_i \to Z_j$. Finalmente, suponha que X seja um conjunto munido de funções $f_i \colon X \to Y_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Mostre que se cada Y_i tem a topologia inicial induzida pelas funções $\{g_{i,j} : j \in \mathcal{J}_i\}$, então as topologias iniciais sobre X induzidas pelas famílias $\{g_{i,j} \circ f_i : i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}_i\}$ e $\{f_i : i \in \mathcal{I}\}$ coincidem. Dica: mostre que uma topologia está contida na outra, e *vice-versa*; em vez de explicitar os abertos como um troglodita, use e abuse das Proposições 1.1.82 e 1.1.83. ■

Exercício 1.260 (Topologias fracas e subespaços)**.** Seja $\mathscr{F} := \{f_i \colon X \to X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ uma família de funções, onde X_i é um espaço topológico para cada $i \in \mathcal{I}$ e X é apenas um conjunto. Chame de $\mathcal{T}$ a topologia fraca sobre X induzida pela família $\mathscr{F}$. Mostre que para um subconjunto $Y \subseteq X$, a topologia de subespaço de Y herdada de X coincide com a topologia induzida pela família de funções $\mathscr{F}|_Y := \{f_i|_Y : i \in \mathcal{I}\}$. Dica: faça no braço ou use o exercício anterior. ■

Exercício 1.261 (Confira o Exemplo 1.3.3)**.** Fixada uma família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços topológicos, prove que $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é o limite projetivo dos produtos da forma $\prod_{j \in J} X_j$ para $J \subseteq \mathcal{I}$ com $0 < |J| < \aleph_0$. ■

Exercício 1.262 (Confira o Exemplo 1.3.4)**.** Sejam X um espaço topológico e Σ um pré-filtro em X. Mostre que $\varprojlim_{A \in \Sigma} A = \bigcap \Sigma$. ■

Exercício 1.263 (Confira o Exemplo 1.3.5)**.** Mostre que $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \colon \textsc{Top}^{\mathcal{I}} \to \textsc{Top}$ é um funtor. Dica: a unicidade das setas pode ser usada para garantir a compatibilidade com a composição. ■

Exercício 1.264. Seja $\mathcal{F} \colon \mathcal{I} \to \textsc{Top}$ um funtor com $\mathcal{I}$ uma categoria pequena.

a) Mostre que se $\mathcal{F}(i)$ é de Hausdorff para todo i, então $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ é subespaço fechado de $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$. Dica: evidentemente, deve-se considerar a construção explícita de $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ como subespaço do produto; com isso dito, use *nets*.

b) Mostre que se $\mathcal{I} := (\mathbb{P}, \geq)$, com $(\mathbb{P}, \leq)$ dirigido, e $\mathcal{F}(i)$ é compacto de Hausdorff para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ é compacto e não-vazio. Dica: neste caso, perceba que a descrição de $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ é resultado de uma interseção de fechados de $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(i)$ com a p.i.f.. ■

Exercício 1.265. Sejam X um conjunto, $S \subseteq X \times X$ uma relação binária e considere $\sim_S$ a menor relação de equivalência que contém S. Para $a, b \in X$, mostre que $a \sim_S b$ ocorre se, e somente se,

- $a = b$, ou
- $a \approx b$, ou
- existem $n \in \omega$ e $c_0, \ldots, c_n \in X$ tais que $a \approx c_0$, $c_0 \approx c_1$, $\ldots$, $c_{n-1} \approx c_n$ e $c_n \approx b$,

onde $x \approx y$ abrevia "$x \, S \, y$ ou $y \, S \, x$". ■

Exercício 1.266 (*A.k.a.* Lema da colagem)**.** Sejam X e Y espaços topológicos e considere uma função $f\colon X \to Y$. Mostre que se $\mathcal{G}$ é uma família finita de fechados (ou abertos) de X com $X = \bigcup \mathcal{G}$ e tal que $f|_G$ é contínua para cada $G \in \mathcal{G}$, então f é contínua. ■

Exercício 1.267. Mostre que o resultado anterior pode não valer se $\mathcal{G}$ for infinito. Dica: tome $X := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ e fixe $f\colon X \to \mathbb{R}$ a sua função não-contínua favorita. ■

Exercício 1.268. Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma função contínua e R a relação de equivalência em X definida por $a\, R\, b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Chame por $\pi\colon X \to X/R$ a projeção canônica, $\overline{f}\colon X/R \to \operatorname{im}(f)$ a função dada pela propriedade universal do quociente e $i\colon \operatorname{im}(f) \to Y$ a inclusão.

a) Convença-se de que todas as coisas do enunciado fazem sentido e que a função f se expressa como a composição $i \circ \overline{f} \circ \pi$, chamada de **decomposição canônica** de f.

b) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- f é uma função aberta;
- π, $\overline{f}$ e i são abertas;
- π é aberta, $\overline{f}$ é um homeomorfismo e $\operatorname{im}(f)$ é um subconjunto aberto de Y.

Em particular, mostre que tudo permance válido ao se substituir o termo “aberto” por “fechado” nos itens anteriores. ■

Exercício 1.269. Sejam $f\colon X \to Y$ uma função sobrejetora, com X um espaço topológico e Y munido da topologia forte induzida por f. Mostre que Y é homeomorfo ao espaço quociente $X/{\sim_f}$, onde ${\sim_f} := \{(x, x') : f(x) = f(x')\}$. ■

Exercício 1.270. Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto de índices não-vazio e para cada $i \in \mathcal{I}$ considere um espaço topológico X_i dotado de uma relação de equivalência R_i. Chame $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$.

a) Mostre que $R := \prod_{i\in\mathcal{I}} R_i$ é uma relação de equivalência sobre X. Explicitamente, ao definirmos

$$(x_i)_{i\in\mathcal{I}} R\, (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \Leftrightarrow \forall i \in \mathcal{I} \quad x_i\, R_i\, y_i,$$

resulta que R é uma relação de equivalência sobre X.

b) Mostre que se cada projeção $X_i \to X_i/R_i$ é aberta, então X/R e $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i/R_i$ são espaços topológicos homeomorfos.

Roteiro: use os Exercícios 1.106 e 1.108 para mostrar que $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto (\pi_i(x_i))_{i\in\mathcal{I}}$ define uma aplicação contínua e aberta $\pi\colon X \to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i/R_i$ e, por meio do Exercício 1.268, conclua que a função induzida $\overline{\pi}\colon X/R \to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i/R_i$ é um homeomorfismo. ■

Exercício 1.271. Sejam X um espaço topológico, $\sim$ uma relação de equivalência em X e $\pi\colon X \to X/{\sim}$ a projeção. Mostre que se as classes de equivalência de $\sim$ são compactas, $X/{\sim}$ é compacto e π é uma aplicação aberta, então X é compacto. ■

1.4 Bônus: convergência como protagonista

When you are studying any matter or considering any philosophy, ask yourself only what are the facts and what is the truth that the facts bear out. Never let yourself be diverted either by what you wish to believe or by what you think would have beneficent social effects if it were believed, but look only and solely at what are the facts.

Bertrand Russell[128].

[128] Transcrição de parte da resposta dada por Bertrand Russell, num programa da BBC (*Face-to-Face*, de 1959), ao ser perguntado sobre o que ele gostaria de dizer a respeito das coisas que aprendeu para uma geração que viesse a viver mil anos no futuro.

A abordagem adotada na Subseção 1.1.1 para *justificar* os axiomas de espaço topológico pode ter deixado o leitor atento com uma impressão inquietante: é possível que espaços topológicos não sejam o cenário mais geral em que faça sentido abordar convergência. Se este for o caso, então a opção por espaços topológicos não pode mais se justificar por motivos *nobres* como generalidade e abstração, mas apenas por motivos mundanos como praticidade, tradição e outros *efeitos sociais*... Pois é.

Nesta seção, dedicada à memória de Russell, faremos duas coisas. A primeira é aquela que deveria ter sido feita desde o começo: ver até onde os filtros podem levar alguém interessado mais em *convergência* e menos em *abertos*. Porém, como a vida é curta e eu sou hipócrita, tudo será feito num nível bastante introdutório, a fim de não afastar leitores em potencial[129]. A segunda coisa, embora menos generalista, é igualmente honesta: em vez de *criarmos* ferramentas para abraçar o *universo*, como filtros e *nets*, aceitaremos sua vastidão e, resignados, focaremo-nos em coisas palpáveis. Traduzindo: investigaremos quais são os espaços em que se pode fazer Topologia Geral apenas com *sequências* convergentes.

1.4.1 Espaços de convergência (onde os filtros reinam)

Definição 1.4.1. Sejam X um conjunto e $\mathrm{Filt}(X)$ a família dos filtros próprios de X. Uma (estrutura de) **convergência** em X é uma função $\mathcal{L}\colon \mathrm{Filt}(X) \to \wp(X)$, que será denotada por $\lim_X$ ou apenas lim quando for conveniente. Como de costume, o par $(X, \mathcal{L})$ será chamado de **espaço de convergência**. ¶

Observação 1.4.2. Adota-se aqui a nomenclatura menos restritiva de Schechter [104]. Em outras referências, como [10, 37], uma estrutura de convergência satisfaz condições adicionais, como as que serão discutidas no Exemplo 1.4.6. △

Alternativamente, uma convergência em X pode ser interpretada (ou definida) como uma relação binária $\to_{\mathcal{L}}$ entre filtros próprios de X e subconjuntos de X. A equivalência entre as duas abordagens é reflexo de um fato mais geral.

Exercício 1.272. Para conjuntos A e B quaisquer, mostre que existe uma bijeção *natural* $\wp(B)^A \to \mathrm{Rel}(A, B)$, onde $\mathrm{Rel}(A, B) := \{R \subseteq A \times B : \mathrm{dom}(R) = A\}$. Dica: para $g\colon A \to \wp(B)$, defina R_g fazendo

$$a\, R_g\, b \Leftrightarrow b \in g(a),$$

para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. ■

Desse modo, associada à (estrutura de) convergência $\mathcal{L}$ em X, tem-se a relação (de convergência) $\to_{\mathcal{L}}$ definida por

$$\mathcal{F} \to_{\mathcal{L}} x \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \tag{1.41}$$

para cada filtro $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$ e ponto $x \in X$. Em "ambos" os casos, diremos que o filtro $\mathcal{F}$ **$\mathcal{L}$-converge para** x e, quando a convergência $\mathcal{L}$ estiver clara pelo contexto, escreveremos apenas "$\mathcal{F} \to x$" ou "$\mathcal{F} \to_X x$" em vez de "$\mathcal{F} \to_{\mathcal{L}} x$".

Observação 1.4.3. Naturalmente, se $(X, \mathcal{L})$ é um espaço de convergência, faz sentido dizer que uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em x converge para $x \in X$ se o filtro induzido pela *net* convergir para x, i.e., se ocorrer $(x_d)_d^{\uparrow} \to_{\mathcal{L}} x$. Por economia, isto será denotado por $x_d \to_{\mathcal{L}} x$. Em particular, em espaços de convergência é legítimo tratar de sequências convergentes. △

[129] E, consequentemente, editoras interessadas.

Uma vez definidos os objetos, as regras de etiqueta pedem que se determinem as setas, tarefa trivial para quem não ignorou a Subseção 1.2.2.

Definição 1.4.4. Dados espaços de convergência X e Y, uma função $f: X \to Y$ é **contínua** se ocorrer

$$f\left[\lim_X(\mathcal{F})\right] \subseteq \lim_Y(f(\mathcal{F})), \tag{1.42}$$

para qualquer $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$. ¶

Reescrevendo (1.42) em termos de (1.41), segue que f é contínua se para quaisquer $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$ e $x \in X$ valer a implicação

$$\mathcal{F} \to_X x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to_Y f(x).$$

Exercício 1.273. Convença-se de que as informações acima definem uma categoria, que será chamada de Conv, cujos objetos e setas são espaços de convergência e funções contínuas entre tais espaços, respectivamente. Dica: para funções $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ e um filtro $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$, vale a igualdade

$$(g \circ f)(\mathcal{F}) = g(f(\mathcal{F})),$$

pois os filtros $(g \circ f)(\mathcal{F})$ e $g(f(\mathcal{F}))$ são gerados pela mesma base[130]. ■

Exemplo 1.4.5. Espaços topológicos são espaços de convergência *óbvios*: se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, basta definir $\lim_{\mathcal{T}}(\mathcal{F}) := \{x \in X : \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}\}$ para cada $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$, como feito na Seção 1.2. Reciprocamente, se $(X, \mathcal{L})$ é um espaço de convergência, então a família

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L}} := \{A \subseteq X : \forall \mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)\ (\lim \mathcal{F} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow A \in \mathcal{F})\}, \tag{1.43}$$

é uma topologia em X. Esta é, essencialmente, a mesma construção realizada na Proposição 1.1.20 para mostrar (secretamente) que uma noção de convergência *induz* uma topologia. Um modo mais ou menos razoável de intuir a definição (1.43) consiste em observar duas coisas:

1. quando ocorre $\mathcal{F} \to x$, o filtro $\mathcal{F}$ *é* uma família de noções de *vizinhança* (ou “folgas”) em torno de x, no sentido de que cada $V \in \mathcal{F}$ é uma *vizinhança* de x;
2. ao se dizer que um subconjunto A é aberto, *espera-se* que em torno de cada $x \in A$ exista uma *folga* de x inteiramente contida em A e, mais ainda, a *concordância* sobre isso *deve* ser *global*.

Ora, como as *folgas* de $x \in A$ são determinadas pelos filtros $\mathcal{F}$ que verificam $\mathcal{F} \to x$, pede-se que exista $V \in \mathcal{F}$ com $V \subseteq A$, o que acarreta $A \in \mathcal{F}$ (por $\mathcal{F}$ ser filtro). Daí, como esse comportamento *deve* ser *global*, recai-se na definição (1.43)

$$A \text{ é aberto} \Leftrightarrow \text{para quaisquer } x \in A \text{ e } \mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X) \text{ com } \mathcal{F} \to x \text{ valer } A \in \mathcal{F}.$$

Cabe observar que a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ induz uma convergência em X, digamos lim, mas esta última não coincide, necessariamente, com a original. De fato, se $\mathcal{F} \to x$ (na convergência original de X) e $A \subseteq X$ é aberto (membro de $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$) com $x \in A$, então $A \in \mathcal{F}$ (pela definição de $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$), mostrando que $x \in \lim \mathcal{F}$ (na convergência induzida pela topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$) e, consequentemente, $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \lim(\mathcal{F})$.

[130] Sugestão: Lema 1.2.22.

Isso ainda está de acordo com a Proposição 1.1.20, onde se mostrou que a topologia induzida por uma família de filtros centrados não *perde* filtros convergentes. Como de costume, uma convergência $\mathcal{L}$ para a qual exista uma topologia $\mathcal{T}$ com $\mathcal{L} = \lim_{\mathcal{T}}$ será chamada de **convergência topológica**[131]. ▲

Exemplo 1.4.6 (Convergências pré-topológicas)**.** Fixados um conjunto X e uma família $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$, onde cada $\mathcal{V}_x$ é um filtro próprio e centrado em x, pode-se definir uma convergência em X por $\lim_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) := \{x \in X : \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}\}$ para cada filtro $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$. Note que este é, precisamente, o cenário da Proposição 1.1.20.

Vejamos algumas propriedades desta convergência. Por simplicidade escreveremos $\mathcal{F} \to_{\mathcal{V}} x$ para indicar $x \in \lim_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$.

i. Se $x \in X$ e $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Filt}(X)$ são tais que $\mathcal{F} \to_{\mathcal{V}} x$ e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, então $\mathcal{G} \to_{\mathcal{V}} x$. Em particular, fica assegurado que, se $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência tal que $x_n \to_{\mathcal{V}} x$, então $x_{n_k} \to_{\mathcal{V}} x$ para qualquer subsequência $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ de $(x_n)_{n\in\omega}$.

ii. Lembrando que $\mathfrak{u}_x := \{A \subseteq X : x \in A\}$, tem-se necessariamente $\mathfrak{u}_x \to_{\mathcal{V}} x$.

iii. Por construção, o filtro $\mathcal{V}_x$ é o menor filtro que converge para x.

Convergências satisfazendo a primeira condição serão chamadas de **isótonas**, enquanto convergências com a segunda condição serão chamadas de **centradas**[132]. Finalmente, uma convergência isótona e centrada será xingada de **pré-topologia** se para cada ponto x do espaço existe um filtro próprio $\mathcal{F}_x$ com $\mathcal{F}_x \to x$ e tal que

$$\forall \mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X) \quad \mathcal{F} \to x \Rightarrow \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}.$$

Pelo que se observa acima, a convergência $\lim_{\mathcal{V}}$ induzida pela família de filtros centrados $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é uma pré-topologia em X. Ocorre que a recíproca é verdadeira, no seguinte sentido: toda pré-topologia é induzida por uma família de filtros centrados.

De fato, dada uma pré-topologia $(X, \mathcal{L})$, para cada $x \in X$ se pode fixar $\mathcal{H}_x$ o menor filtro que converge para x. Como $\mathcal{L}$ é centrada, tem-se $\mathfrak{u}_x \to x$ e, pela minimalidade de $\mathcal{H}_x$, deve-se ter $\mathcal{H}_x \subseteq \mathfrak{u}_x$, donde segue que $\mathcal{H}_x$ é centrado em x. Basta então notar que a família de filtros $\mathscr{H} := \{\mathcal{H}_x : x \in X\}$ induz precisamente a pré-topologia $\mathcal{L}$, o que consiste em verificar a identidade $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \lim_{\mathscr{H}}(\mathcal{F})$ para qualquer $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$ ou, equivalentemente,

$$\mathcal{F} \to_{\mathcal{L}} x \Leftrightarrow \mathcal{F} \to_{\mathscr{H}} x,$$

para qualquer $x \in X$: ora, por um lado $\mathcal{F} \to_{\mathcal{L}} x$ implica $\mathcal{H}_x \subseteq \mathcal{F}$ (pela minimalidade de $\mathcal{H}_x$), e daí $\mathcal{F} \to_{\mathscr{H}} x$; por outro lado, se $\mathcal{F} \to_{\mathscr{H}} x$, então $\mathcal{H}_x \subseteq \mathcal{F}$, e por valer $\mathcal{H}_x \to x$ com $\mathcal{L}$ isótona, obtém-se $\mathcal{F} \to_{\mathcal{L}} x$.

Portanto, pode-se dizer que um **espaço pré-topológico** é um par $(X, \mathcal{V})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ é uma família de filtros em X, com cada $\mathcal{V}_x$ centrado em x – opção adotada por Schechter [104], por exemplo. ▲

Exercício 1.274. Dado um espaço de convergência $(X, \mathcal{L})$ isótono e centrado, construa uma família $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ de filtros próprios de X, de modo que cada $\mathcal{V}_x$ seja centrado em x e, para cada $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$, se verifique $\mathcal{F} \to_{\mathcal{L}} x \Rightarrow \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$. Dica: interseção qualquer de filtros próprios é um filtro próprio. ■

[131] Poderia também ser "*topologizável*", mas esta é uma palavra triste.

[132] A terminologia ainda não é unânime: em [37], "convergências" são as coisas que chamaremos de "convergências isótonas e centradas"; já em [10], uma "convergência" precisa satisfazer *também* a condição $\lim \mathcal{F} \cap \lim \mathcal{G} \subseteq \lim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$.

Exemplo 1.4.7 (Convergência q.t.p[133]). Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida (que o leitor preciosista pode assumir *completa*). Tendo em vista o Exercício 1.322, dados um filtro próprio $\mathcal{F}$ em $\mathbb{R}^X$ e um ponto $x \in X$, faz sentido cozinhar o filtro próprio

$$\pi_x\mathcal{F} := \{\pi_x[F] : F \in \mathcal{F}\} = \{\{f(x) : f \in F\} : F \in \mathcal{F}\}$$

em $\mathbb{R}$, onde $\pi_x \colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ é a projeção/avaliação na coordenada x. Por simplicidade, vamos escrever $\mathcal{F}_x$ em vez de $\pi_x\mathcal{F}$.

As informações acima permitem induzir uma convergência λ em $\mathbb{R}^X$ que respeita tanto a topologia usual de $\mathbb{R}$ quanto a medida μ em X. Mais precisamente, dado um filtro próprio $\mathcal{F}$ em $\mathbb{R}^X$, definamos

$$\lambda(\mathcal{F}) := \left\{f \in \mathbb{R}^X : \exists N \in \mathcal{A} \text{ com } \mu(N) = 0 \text{ tal que } \forall x \in X \setminus N \quad \pi_x\mathcal{F} \to f(x)\right\},$$

i.e., $\mathcal{F} \to_\lambda f$ se existe um subconjunto $N \subseteq X$ de medida nula tal que $\pi_x\mathcal{F} \to f(x)$ para cada $x \in X \setminus N$. Em outras palavras, $\mathcal{F} \to_\lambda f$ se, e somente se, $\mathcal{F}_x \to f(x)$ a menos de um conjunto de medida nula, o que costuma se abreviar com $\mathcal{F} \to f$ q.t.p.

Em Teoria da Medida, a definição acima costuma se restringir a sequências de funções: $f_n \to f$ q.t.p se $f_n(x) \to f(x)$ para todo x no complementar de um conjunto de medida nula. Não é difícil notar que ao se substituir o filtro $\mathcal{F}$ anterior pelo filtro $(f_n)_n^\uparrow$, reobtém-se a definição para sequências.

Por mais simples que pareça, a convergência $\lambda\colon \operatorname{Filt}\left(\mathbb{R}^X\right) \to \wp(\mathbb{R}^X)$ definida acima vem de fábrica com duas propriedades familiares:

- ✓ λ é centrada, pois se $\mathfrak{u}_f := \{F \subseteq \mathbb{R}^X : f \in F\}$, então para cada $x \in X$ ocorre

  $$(\mathfrak{u}_f)_x := \{\{g(x) : g \in F\} : F \in \mathfrak{u}_f\} = \{U \subseteq \mathbb{R} : f(x) \in U\} =: \mathfrak{u}_{f(x)},$$

  com $\mathfrak{u}_{f(x)} \to f(x)$, pois a convergência de $\mathbb{R}$ é centrada;

- ✓ λ é isótona, pois se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são filtros próprios em $\mathbb{R}^X$, com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} \to_\lambda f$, então existe $N \subseteq X$ com $\mu(N) = 0$ e $\mathcal{F}_x \to f(x)$ para todo $x \in X \setminus N$, donde a isotonia da convergência em $\mathbb{R}$ e a inclusão $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{G}_x$ garantem $\mathcal{G}_x \to f(x)$ e, consequentemente, $\mathcal{G} \to_\lambda f$.

A curiosidade deste exemplo, porém, é a seguinte: em geral, λ não é uma convergência pré-topológica! Com efeito, suponha que a medida μ satisfaça $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$, algo bastante razoável[134]. Fixada uma função $f \in \mathbb{R}^X$, para cada par $(a, n) \in X \times \omega$ pode-se escolher uma função $f_n^a \colon X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n^a(x) \to f(x) \Leftrightarrow x \neq a,$$

donde a hipótese sobre μ garante que $\mathcal{F}^a := (f_n^a)_n^\uparrow \to f$ q.t.p. Mostraremos que o filtro próprio $\mathcal{F} := \bigcap_{a \in X} \mathcal{F}^a$ é tal que $\mathcal{F} \not\to f$ q.t.p: de fato, como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^a$ para todo a, segue que para cada x ocorre $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}_x^x$, de modo que se valesse $\mathcal{F}_x \to f(x)$, a isotonia acarretaria $f_n^x(x) \to f(x)$, contrariando a escolha das funções f_n^a. Logo, não existe um filtro $\mathcal{H}_f$ em $\mathbb{R}^X$ com a propriedade de ser o *menor* que converge para f: se existisse, teria-se $\mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{F}^a$ para todo $x \in X$ e, consequentemente, $\mathcal{H}_f \subseteq \mathcal{F} \to f$. ▲

[133] Pode ser útil conferir a Definição K.2.140 bem como a discussão subsequente.

[134] A medida de Lebesgue, por exemplo, tem tal propriedade.

Reminiscências topológicas

Sejam X um conjunto, $(Y, \mathcal{L})$ um espaço de convergência e $f : X \to Y$ uma função. Assim como no caso topológico, é natural procurar por convergências em X que tornem f contínua. Nesse tipo de empreitada, o primeiro passo costuma ser descartar opções triviais. Aqui, há pelo menos duas convergências que se enquadram em tal perfil.

✗ A *convergência vazia* $\phi : \mathrm{Filt}(X) \to \wp(X)$, que faz $\phi(\mathcal{F}) := \emptyset$ para todo filtro próprio $\mathcal{F}$ em X: ϕ torna o mapa $f : (X, \phi) \to (Y, \mathcal{L})$ contínuo por vacuidade, já que não há filtros convergentes em X.

✗ A *convergência discreta* $\delta : \mathrm{Filt}(X) \to \wp(X)$, que faz $\delta(\mathcal{F}) := \{x \in X : \mathfrak{u}_x \subseteq \mathcal{F}\}$ para todo filtro próprio $\mathcal{F}$ em X: se a convergência $\mathcal{L}$ for centrada, então a convergência δ torna a função $f : (X, \delta) \to (Y, \mathcal{L})$ contínua, pois os únicos filtros convergentes de X são os ultrafiltros principais e, para qualquer $x \in X$, vale $f(\mathfrak{u}_x) = \mathfrak{u}_{f(x)}$, com $\mathfrak{u}_{f(x)} \to f(x)$ pela hipótese sobre $\mathcal{L}$.

Observação 1.4.8. Para a surpresa de nenhum leitor, a convergência *discreta* induz a topologia *discreta*: seguindo a receita (1.43) do Exemplo 1.4.5, a topologia induzida em X por δ é tal que um subconjunto $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, $A \in \mathcal{F}$ para quaisquer $x \in A$ e $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$ com $\mathcal{F} \to_\delta x$. Ora, como o único filtro que δ-*converge* para x é o ultrafiltro principal $\mathfrak{u}_x$, resulta que todo subconjunto de X é aberto. Por outro lado, enquanto nenhuma topologia induz a convergência vazia (posto que ela não é centrada), a convergência vazia induz a topologia discreta (por quê?). △

Em ambos os casos, a escassez de filtros convergentes garantiu a continuidade da f. Por isso, a fim de obter uma convergência mais *interessante*, deve-se *acrescentar* filtros convergentes. Isso sugere uma relação de ordem entre convergências.

Definição 1.4.9. Dadas duas convergências λ e μ sobre o mesmo conjunto X, diremos que λ é **mais forte** do que μ (ou μ é **mais fraca** do que λ), o que será indicado por $\lambda \succeq \mu$ (ou $\mu \preceq \lambda$), se para todo filtro próprio $\mathcal{F}$ em X valer $\lambda(\mathcal{F}) \subseteq \mu(\mathcal{F})$. ¶

A aparente incongruência entre a notação adotada ($\succeq$) e seu significado ($\subseteq$) é oriunda do contexto topológico, e fica completamente justificada pelo Exercício 1.196: intuitivamente, se mais filtros convergem, então há menos abertos[135]. Logo, se $\mu \preceq \lambda$, então a Definição 1.4.9 diz que há mais filtros μ-convergentes do que λ-convergentes e, consequentemente, $\mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\lambda$. Ou seja: λ é *mais* forte por induzir *mais* abertos[136]. Evidentemente, $\preceq$ é uma ordem parcial na família das convergências em X.

De toda forma, essa breve digressão indica o próximo passo: determinar, caso exista, a convergência em X com a propriedade de ser *menos forte*/*mais fraca* do que qualquer outra que torne $f : X \to Y$ contínua[137]. No caso topológico, a ideia seria tomar as pré-imagens em X dos abertos de Y e então considerar a menor topologia que contém tais abertos. Faremos a mesma coisa aqui, *mutatis mutandis*.

[135] Filtros convergentes impõem as restrições que determinam os abertos. Quanto mais restrições, menos abertos.

[136] Outra alternativa mnemônica: $\mu \preceq \lambda$ significa que a convergência em λ implica a convergência em μ.

[137] O malabarismo da frase se deve à ausência de um equivalente português para *weakest*: em inglês, além da expressão "*weaker than*" (mais fraco/fraca que), existe o superlativo "*weakest*", que indica *o mais fraco dos fracos* (a/a/as/as). No caso, um modo menos prosaico (e mais preciso) de expressar seria dizer que se busca o $\preceq$-menor elemento da família composta pelas convergências que tornam f contínua.

Proposição 1.4.10. *Sejam X e Y conjuntos e $f\colon X \to Y$ uma função. Se $\mathcal{L}$ é uma convergência em Y, então a regra*

$$f^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{F}) := f^{-1}\left[\mathcal{L}(f(\mathcal{F}))\right]$$

determina uma convergência em X que torna $f\colon (X, f^{-1}\mathcal{L}) \to (Y, \mathcal{L})$ contínua. Além disso, se $\mathcal{L}$ for centrada ou isótona, então $f^{-1}\mathcal{L}$ também será centrada ou isótona, respectivamente. Por fim, se λ é outra convergência em X com $f\colon (X, \lambda) \to (Y, \mathcal{L})$ contínua, então $f^{-1}\mathcal{L} \preceq \lambda$.

Demonstração. Naturalmente, $f^{-1}\mathcal{L}$ é uma convergência, por construção. Agora, se $\mathcal{F}$ é um filtro próprio em X com $\mathcal{F} \to_{f^{-1}\mathcal{L}} x$, então $x \in f^{-1}\left[\mathcal{L}(f(\mathcal{F}))\right]$, donde segue que $f(x) \in \mathcal{L}(f(\mathcal{F}))$, o que por sua vez significa $f(\mathcal{F}) \to_{\mathcal{L}} f(x)$, mostrando que f é contínua.

✓ Se $\mathcal{L}$ é centrada e $x \in X$, então $f(\mathfrak{u}_x) = \mathfrak{u}_{f(x)}$, de modo que $f(x) \in \mathcal{L}(f(\mathfrak{u}_x))$ e, consequentemente, $x \in f^{-1}\left[\mathcal{L}(f(\mathfrak{u}_x))\right] := f^{-1}\mathcal{L}(\mathfrak{u}_x)$, i.e., $\mathfrak{u}_x \to_{f^{-1}\mathcal{L}} x$.

✓ Se $\mathcal{L}$ é isótona e $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ são filtros próprios de X com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, então

$$f(\mathcal{F}) \subseteq f(\mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{L}(f(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{L}(f(\mathcal{G})) \Rightarrow f^{-1}\left[\mathcal{L}(f(\mathcal{F}))\right] \subseteq f^{-1}\left[\mathcal{L}(f(\mathcal{G}))\right],$$

mostrando que $f^{-1}\mathcal{L}$ também é isótona.

Finalmente, note que se $f\colon (X, \lambda) \to (Y, \mathcal{L})$ é contínua e $x \in \lambda(\mathcal{F})$ para algum filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, então a continuidade acarreta $f(x) \in \mathcal{L}(f(\mathcal{F}))$ e, por definição, $x \in f^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Pela arbitrariedade do ponto x tomado, resulta $\lambda(\mathcal{F}) \subseteq f^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{F})$, como queríamos. □

Exercício 1.275. Nas notações acima, mostre que se $(Y, \mathcal{L})$ é um espaço pré-topológico, então $f^{-1}\mathcal{L}$ é uma pré-topologia em X. Dica: $G \subseteq f^{-1}\left[f[G]\right]$ para todo $G \subseteq X$. ■

Da *perspectiva* dos pontos de X, a definição de $f^{-1}\mathcal{L}$ fica quase óbvia:

$$\mathcal{F} \to_{f^{-1}\mathcal{L}} x \Leftrightarrow f(\mathcal{F}) \to_{\mathcal{L}} f(x),$$

onde "$\Leftarrow$" é a *direção* não-trivial da equivalência, pois qualquer convergência λ em X que torna f contínua deve satisfazer a *direção* "$\Rightarrow$". Em outras palavras, a minimalidade de $f^{-1}\mathcal{L}$ se obtém, precisamente, com a exigência da recíproca. Em particular, se $X \subseteq Y$, então a inclusão $i\colon X \hookrightarrow Y$ induz a convergência $i^{-1}\mathcal{L}$ em X, o que permite chamá-lo de *subespaço* (convergente, convergencial...?) de Y.

De modo análogo, dada uma família $\{(Y_i, \mathcal{L}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços de convergência e funções $f_i\colon X \to Y_i$, existe a convergência em X mais fraca do que todas as outras que tornam cada uma das funções f_i contínuas, como sugere o próximo

Exercício 1.276. Nas notações acima, mostre que a convergência procurada é dada pela regra

$$\mathcal{F} \mapsto \bigcap_{i \in \mathcal{I}} f_i^{-1}\left[\mathcal{L}_i(f_i(\mathcal{F}))\right].$$

O que ocorre se cada $\mathcal{L}_i$ for centrada, isótona ou pré-topológica? ■

Definição 1.4.11. Nas condições acima, a convergência do exercício anterior será chamada de (a) **convergência inicial** induzida pelas funções $f_i\colon X \to Y_i$, e será denotada com $\bigvee_{i \in \mathcal{I}} f_i^{-1}\mathcal{L}_i$ por razões de *parcialidade*[138]. ¶

[138]Ela é o *supremo* da família $\{f_i^{-1}\mathcal{L} : i \in \mathcal{I}\}$ no conjunto das convergências em X parcialmente ordenadas pela relação $\succeq$ de "ser mais fraca". Não custa lembrar: $a = \inf_{\leq} A$ em $(\mathbb{P}, \leq)$ se, e somente se, $a = \sup_{\geq} A$ em $(\mathbb{P}, \geq)$.

Proposição 1.4.12 (Compare com a Proposição 1.1.83)**.** *Nas notações acima, uma função* $g\colon (Z,\lambda) \to (X, \bigvee_{i\in\mathcal{I}} f_i^{-1}\mathcal{L}_i)$ *é contínua se, e somente se,* $f_i \circ g\colon (Z,\lambda) \to (Y_i, \mathcal{L}_i)$ *é contínua para cada* $i \in \mathcal{I}$.

Demonstração. É claro que $f_i \circ g$ é contínua sempre que g é contínua. Para a recíproca, note que se $\mathcal{H}$ é filtro próprio em Z e $\mathcal{H} \to_\lambda z$, então $(f_i \circ g)(\mathcal{H}) \to_{\mathcal{L}_i} f_i(g(z))$ para cada $i \in \mathcal{I}$, mostrando que $g(z) \in f_i^{-1}[\mathcal{L}_i((f_i \circ g)(\mathcal{H}))]$, donde o resultado segue pela descrição da convergência em X, bem como pela dica do Exercício 1.273. □

Exercício 1.277. Por meio das considerações acima, determine uma convergência natural para o produto $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, onde X_i é um espaço de convergência para cada $i \in \mathcal{I}$. ■

Observação 1.4.13. Sempre que se amplia *demais* um contexto tradicional, é conveniente indagar se as considerações feitas no novo cenário generalizam, de fato, o que se fazia no primeiro ambiente. No caso desta seção: se as convergências em questão forem topológicas, então as construções realizadas acima resultam nas mesmas convergências topológicas que teríamos sem filtros?

Por exemplo: se a convergência $\mathcal{L}$ em Y *for* induzida por uma *topologia*, então a convergência $f^{-1}\mathcal{L}$ também *será* induzida por uma topologia? Ao tentar responder tais perguntas, talvez o leitor se depare com outra, mais fundamental, e que será discutida adiante: *o que uma convergência precisa para ser topológica?* △

Um dos modos de abordar a última pergunta passa pela análise ~~do fecho~~ da *aderência* em espaços de convergência. Para tanto, fixados conjuntos A e $\mathcal{B}$, vamos escrever $\mathcal{B}\#A$ para indicar que $B \cap A \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Definição 1.4.14. Para um subconjunto S de um espaço de convergência $(X,\mathcal{L})$, chamaremos a família

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(S) := \bigcup_{\substack{\mathcal{F}\in\mathrm{Filt}(X)\\ \mathcal{F}\#S}} \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

de **aderência** do subconjunto S em X. ¶

Exercício 1.278. Mostre que se $\mathcal{L}$ é uma convergência isótona, então

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(S) = \bigcup_{\substack{\mathcal{F}\in\mathrm{Filt}(X)\\ S\in\mathcal{F}}} \mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{x \in X : \exists \mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)\ \ S \in \mathcal{F} \text{ e } \mathcal{F} \to x\},$$

para qualquer subconjunto $S \subseteq X$. ■

Exercício 1.279. Mostre que se $(X,\mathcal{T})$ é um espaço topológico, então $\overline{S} = \mathrm{ad}_{\lim_{\mathcal{T}}}(S)$, onde $\overline{S}$ denota o fecho (topológico) de S em X e $\lim_{\mathcal{T}}$ denota a convergência em X induzida pela topologia $\mathcal{T}$. ■

Não é difícil se convencer de que a correspondência $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(\bullet) : \wp(X) \to \wp(X)$ tem as seguintes propriedades para quaisquer $A, B \subseteq X$:

- ✓ $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(\emptyset) = \emptyset$;
- ✓ $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(B)$;
- ✓ $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(A \cup B) = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(A) \cup \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(B)$.

Exercício 1.280. Convença-se das relações acima. Dica: para a última, note que se $\neg(\mathcal{F} \# A)$ e $\neg(\mathcal{F} \# B)$, então $\neg(\mathcal{F} \# (A \cup B))$. ■

Exercício 1.281. Mostre que se $\mathcal{L}$ é uma convergência centrada, então $A \subseteq \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(A)$ para todo subconjunto A de X. ■

Ao combinar todas as observações acima, fica inevitável comparar aderência e fecho topológico. Há, porém, uma diferença fundamental e sutil: a *idempotência*.

Teorema 1.4.15. *Seja $(X, \mathcal{L})$ uma convergência. Então $\mathcal{L}$ é topológica se, e somente se, $\mathcal{L}$ é uma pré-topologia satisfazendo $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(A)) = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(A)$ para todo $A \subseteq X$.*

Demonstração. Se $\mathcal{T}$ é uma topologia com $\lim_{\mathcal{T}} = \mathcal{L}$, então é claro que $\mathcal{L}$ é uma pré-topologia satisfazendo $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}} \circ \mathrm{ad}_{\mathcal{L}} = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}$. Reciprocamente, suponha que a convergência $\mathcal{L}$ seja induzida por uma família $\mathcal{H} := \{\mathcal{H}_x : x \in X\}$ de filtros centrados e tal que $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}} \circ \mathrm{ad}_{\mathcal{L}} = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}$. A hipótese sobre $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}$ permite obter uma topologia $\mathcal{T}'$ declarando-se $F \subseteq X$ fechado se, e somente se, ocorrer $F = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(F)$ (Exercício 1.256, item (a)). Resta provar que $\lim_{\mathcal{T}'} = \mathcal{L}$.

Primeiramente, a convergência $\lim_{\mathcal{T}'}$ também é pré-topológica: seus filtros centrados são da forma $\mathcal{N}_x := \{W \subseteq X : \exists U \in \mathcal{T}' \text{ tal que } x \in U \subseteq W\}$. Dito isso, mostraremos que $\mathcal{N}_x = \mathcal{H}_x$ para cada $x \in X$.

- ✓ Por um lado, se $A \in \mathcal{N}_x$, então existe $F \subseteq X$ com $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(F) = F$ e $x \in X \setminus F \subseteq A$. Como $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$, deve existir $H \in \mathcal{H}_x$ com $H \cap F = \emptyset$ (caso contrário, ocorreria $x \in \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(F)$) e, por conseguinte, $H \subseteq X \setminus F$, acarretando $A \in \mathcal{H}_x$.

- ✓ Por outro lado, se $W \in \mathcal{H}_x$ e ocorrer $X \setminus W \subsetneq \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(X \setminus W)$, então

$$U := X \setminus \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(X \setminus W) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X) \\ \mathcal{F} \# X \setminus W}} X \setminus \mathcal{L}(\mathcal{F}) \subsetneq W,$$

  donde segue que $x \in U$ e $U \in \mathcal{T}'$: de fato, $x \in U$ pois, do contrário, existiria um filtro próprio $\mathcal{F}$ com $\mathcal{F} \# (X \setminus W)$ e $x \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, o que só poderia ocorrer com $\mathcal{H}_x \subseteq \mathcal{F}$, contrariando o fato de se ter $W \in \mathcal{H}_x$ e $W \cap (X \setminus W) = \emptyset$; por sua vez, $U \in \mathcal{T}'$ pois de $X \setminus U = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(X \setminus W)$ resulta $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(X \setminus U) = \mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(X \setminus W) = X \setminus U$. Logo, $W \in \mathcal{N}_x$ e, consequentemente, $\mathcal{H}_x \subseteq \mathcal{N}_x$.

Finalmente, como ambas são pré-topologias, tem-se

$$\mathcal{F} \to_{\mathcal{L}} x \Leftrightarrow \mathcal{H}_x \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to_{\lim_{\mathcal{T}'}} x,$$

como queríamos. □

Exercício 1.282. Seja $(Y, \mathcal{L})$ um espaço de convergência e $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre que se $\mathcal{L}$ é isótona, então

$$\mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}}(A) = f^{-1}[\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(f[A])]$$

para todo $A \subseteq X$. ■

Corolário 1.4.16 (Resposta para a pergunta da Observação 1.4.13)**.** *Seja $(Y, \mathcal{L})$ um espaço de convergência e $f\colon X \to Y$ uma função. Se $\mathcal{L}$ é topológica, então $f^{-1}\mathcal{L}$ também é topológica.*

Demonstração. Já vimos que se $\mathcal{L}$ for pré-topológica, então $f^{-1}\mathcal{L}$ também é pre-topológica, de modo que, pelo último teorema, basta mostrar a identidade $\mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}} \circ \mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}} = \mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}}$. Observe que para $A \subseteq X$, o exercício anterior dá

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}}\left(\mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}}(A)\right) = f^{-1}\left[\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}\left(f\left[f^{-1}\left[\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(f[A])\right]\right]\right)\right] \subseteq f^{-1}\left[\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}\left(\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(f[A])\right)\right] = \\ = f^{-1}\left[\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(f[A])\right] = \mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}}(A),\end{aligned}$$

donde a igualdade desejada segue do Exercício 1.281. □

Adaptações análogas podem ser feitas para diversos tópicos topológicos já abordados ao longo do capítulo. Por exemplo, um espaço de convergência é *compacto* se todo ultrafiltro converge e, como esperado, o produto arbitrário de espaços (de convergência) compactos é compacto: naturalmente, a demonstração com ultrafiltros apresentada para o caso topológico se aplica no presente contexto. Outras coisas, como coprodutos e quocientes, também admitem generalizações para o contexto dos espaços de convergência. No entanto, os fenômenos *sem* paralelo topológico costumam ser mais chamativos.

Breves considerações categoriais

Para X e Y espaços de convergência fixados, é natural esperar que o conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$, de todas as funções contínuas da forma $X \to Y$, admita estrutura (s) de convergência. No contexto topológico, o principal exemplo já explorado até aqui foi a topologia da convergência pontual, que também admite um paralelo no atual cenário de convergência. Porém, a generalidade dos espaços de convergência permite dotar objetos como $\mathcal{C}(X,Y)$ de uma convergência *mais* natural do que as outras – coisa que não costuma ocorrer com espaços topológicos. Vamos discorrer um pouco sobre isso a seguir, onde X e Y indicam espaços de convergência, ambas isótonas e centradas.

Denotemos por $e_{X,Y}\colon \mathcal{C}(X,Y)\times X \to Y$ a função de avaliação que associa *naturalmente* cada par $(f,x) \in \mathcal{C}(X,Y)\times X$ ao correspondente $f(x) \in Y$.

Definição 1.4.17. A **convergência contínua em** $\mathcal{C}(X,Y)$, também chamada de **convergência natural** e que será denotada por $\mathcal{C}$, é definida da seguinte forma: dado um filtro $\mathcal{F}$ em $\mathcal{C}(X,Y)$, diremos que $\mathcal{F}$ $\mathcal{C}$-converge para $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ se, para quaisquer $x \in X$ e $\mathcal{H} \in \mathrm{Filt}(X)$, valer que

$$\mathcal{H} \to_X x \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to_Y f(x), \tag{1.44}$$

onde $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ é o filtro gerado pelos conjuntos da forma $FH := \{f(h) : f \in F \text{ e } h \in H\}$, para $F \in \mathcal{F}$ e $H \in \mathcal{H}$. ¶

Não é difícil se convencer de que a convergência contínua $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ é isótona e centrada, desde que a convergência em Y também seja isótona. Dado que estamos supondo bem mais que isso, segue que $\mathcal{C}$ é uma convergência isótona e centrada em $\mathcal{C}(X,Y)$. Por que tanto alarde com tal convergência *estranha*?

Proposição 1.4.18. *Nas condições acima, $\mathcal{C}$ é a convergência mais fraca em $\mathcal{C}(X,Y)$ que torna contínua a função $e_{X,Y}$.*

Demonstração. Dado um filtro $\mathcal{G}$ em $\mathcal{C}(X,Y)\times X$ com $\mathcal{G} \to (f,x)$ na convergência produto, mostraremos que $e_{X,Y}(\mathcal{G}) \to f(x)$ em Y. Por um lado, fazendo $\mathcal{F} := \pi_{\mathcal{C}(X,Y)}(\mathcal{G})$ e $\mathcal{H} := \pi_X(\mathcal{G})$, a definição da convergência produto dá $\mathcal{F} \to_{\mathcal{C}} f$ e $\mathcal{H} \to_X x$, donde a definição de $\mathcal{C}$ garante que $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \to_Y f(x)$. Como a convergência de Y é isótona, esta primeira parte do trabalho estará terminada se provarmos que $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subseteq e_{X,Y}(\mathcal{G})$.

Com efeito, se $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, então existem $F \in \mathcal{F}$ e $H \in \mathcal{H}$ com $FH \subseteq A$, onde $F := \pi_{\mathcal{C}(X,Y)}[G_0]$ e $H := \pi_X[G_1]$ para certos $G_0, G_1 \in \mathcal{G}$. Logo, $G := G_0 \cap G_1 \in \mathcal{G}$ e $e_{X,Y}[G] \subseteq FH$, donde segue que $A \in e_{X,Y}(\mathcal{G})$.

Agora, se λ é outra convergência em $\mathcal{C}(X,Y)$ com tal propriedade e $\mathcal{F}$ é um filtro em $\mathcal{C}(X,Y)$ com $\mathcal{F} \to_\lambda f$, mostraremos que vale (1.44): dado um filtro $\mathcal{H}$ em X com $\mathcal{H} \to_X x$, a isotonia das convergências X e Y garante que

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{H} := \{F \times H : (F,H) \in \mathcal{F} \times \mathcal{H}\}^{\uparrow} \to (f,x),$$

enquanto a continuidade da avaliação resulta em $e_{X,Y}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}) \to f(x)$. Por fim, note que $e_{X,Y}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{H}) = \mathcal{F}(\mathcal{H})$. □

Exercício 1.283. Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Observação 1.4.19. Pode ser mais *natural* interpretar a convergência contínua por meio de *nets*. Primeiro, note que se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são conjuntos dirigidos, então $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ é dirigido pela ordem produto usual, i.e., aquela em que $(a,b) \leq (a',b')$ se, e somente se, $a \leq a'$ e $b \leq b'$. Agora, o critério de $\mathcal{C}$-convergência se traduz no seguinte: uma *net* $(f_a)_{a \in \mathbb{A}}$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ $\mathcal{C}$-converge para $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ se, e somente se, ocorrer

$$f\left[\lim_{b \in \mathbb{B}} x_b\right] \subseteq \lim_{(a,b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}} f_a(x_b)$$

para qualquer *net* $(x_b)_{b \in \mathbb{B}}$ em X, i.e., se $f_a(x_b) \to f(x)$ sempre que $x_b \to x$ em X, onde $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ é dirigido com a ordem produto. O leitor pode cuidar dos detalhes[139]. △

Exercício 1.284. Seja λ uma convergência em X.

a) Mostre que λ é centrada se, e somente se, toda *net* constante $(x)_d$ converge para x.

b) Mostre que λ é isótona se, e somente se, $\lim_d x_d \subseteq \lim_a y_a$ para quaisquer *nets* $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ e $(y_a)_{a \in \mathbb{A}}$ em X com $(y_a)_a$ sub*net* de $(x_d)_d$.

c) Sejam Y um espaço de convergência e $f \colon X \to Y$ uma função. Mostre que f é contínua se, e somente se, $f(x_d) \to f(x)$ em Y sempre que $x_d \to x$ em X.

Use as traduções acima, entre outras adaptações naturais, para demonstrar a Proposição 1.4.18 por meio de *nets*. Dica: para cada $b \in \mathbb{B}$, $(f_a, x_b)_{a \in \mathbb{A}}$ é sub*net* de $(f_a, x_b)_{(a,b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}}$. ■

Proposição 1.4.20 (Propriedade universal da convergência contínua)**.** *Sejam X, Y e Z espaços de convergência isótona e centrada. Para toda função contínua $h \colon Z \times X \to Y$ existe uma única função contínua $\widetilde{h} \colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ que torna comutativo o diagrama a seguir.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X,Y) \\ Z \arrow[u, dashed, "\widetilde{h}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}(X,Y) \times X \arrow[r, "e_{X,Y}"] & Y \\ Z \times X \arrow[u, dashed, "\widetilde{h} \times \mathrm{Id}_X"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

[139] Pode ser útil conferir a Observação 1.2.21.

Demonstração. A menos de continuidade, a existência e unicidade de $\widetilde{h}$ fica completamente garantida pela comutatividade do diagrama: se $\varphi\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ faz o diagrama comutar, então

$$h(z,x) = e_{X,Y}\left(\varphi \times \mathrm{Id}_X(z,x)\right) = \varphi(z)(x)$$

para qualquer $(z,x) \in Z \times X$, mostrando que $\varphi(z)\colon X \to Y$ é a função que faz $x \mapsto h(z,x)$. Logo, φ *só pode ser* $z \mapsto h(z,\bullet)$. Como a correspondência $x \mapsto h(z,x)$ determina uma função contínua para cada z fixado, basta nos preocuparmos com a continuidade da função $\widetilde{h}\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ dada por $z \mapsto h(z,\bullet)$.

Deve-se provar que se $z_d \to z$ é uma *net* convergente em Z, então $\widetilde{h}(z_d) \to_{\mathcal{C}} \widetilde{h}(z)$ em $\mathcal{C}(X,Y)$, que por sua vez equivale a mostrar que se $x_s \to x$ em X, então deve ocorrer $\widetilde{h}(z_d)(x_s) \to \widetilde{h}(z)(x)$, i.e., $h(z_d,x_s) \to h(z,x)$. Ora, pelo Exercício 1.299, tem-se $(z_d,x_s) \to (z,x)$ em $Z \times X$, donde a continuidade de h traz o resultado desejado. □

Exercício 1.285. Tente demonstrar a proposição anterior por meio de filtros. Dica: nem tente, é muito chato. ■

Secretamente, a proposição acima diz que o objeto $\mathcal{C}(X,Y)$ (em Conv) se comporta de modo análogo ao objeto Y^X (em Set) ou, em linguajar mais técnico, $\mathcal{C}(X,Y)$ é um *objeto exponencial* (Exercício K.98). Esta é a parte não-*trivial* na afirmação "a categoria Conv[140] é *cartesiana fechada*", o que por sua vez consiste em dizer que Conv tem *um* objeto final, admite *produtos finitos* e qualquer par de objetos X e Y tem um *exponencial* Y^X, aqui interpretado por $\mathcal{C}(X,Y)$. Grosso modo, $\mathcal{C}(X,Y)$ permite tratar qualquer função contínua em *dois parâmetros* da forma $Z \times X \to Y$ como uma função contínua *num parâmetro* da forma $Z \to \mathcal{C}(X,Y)$.

Esse tipo de propriedade se mostra curiosamente interessante no estudo de *caminhos* e *homotopias*. Tipicamente, uma **homotopia** entre duas funções contínuas $f,g \in \mathcal{C}(X,Y)$ é uma função contínua $H\colon [0,1] \times X \to Y$ satisfazendo $H(0,x) = f(x)$ e $H(1,x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Desse modo, se $\mathcal{C}(X,Y)$ é exponencial, então uma homotopia *é* um *caminho contínuo* $H\colon [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ satisfazendo $H(0) = f$ e $H(1) = g$.

O problema sutil, mas importante, reside no fato de que, em geral, a convergência contínua sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ não é induzida por uma topologia, mesmo que X e Y sejam espaços topológicos: para X de Hausdorff, por exemplo, a fim de que a convergência contínua de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ seja topológica, é necessário e suficiente que X seja *localmente compacto*. Tais assuntos serão abordados pelo menos mais uma vez, no Capítulo 6.

1.4.2 Espaços sequenciais (onde as sequências reinam)

Definição 1.4.21. Dado um conjunto X, diremos que uma função $l\colon X^\omega \to \wp(X)$ é uma **convergência sequencial**, e o par (X,l) será dito um **espaço de convergência sequencial**. Tal qual feito na subseção anterior, para uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X fixada, escreve-se $x_n \to_l x$ se ocorrer $x \in l\left((x_n)_{n\in\omega}\right)$. ¶

Definição 1.4.22. Sejam (X,l) e (Y,l') espaços de convergência sequencial. Diremos que uma função $f\colon X \to Y$ é **sequencialmente contínua** se para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X ocorrer $f\left[l\left((x_n)_{n\in\omega}\right)\right] \subseteq l'\left(f(x_n)_{n\in\omega}\right)$, ou, explicitamente, se $f(x_n) \to_{l'} f(x)$ em (Y,l') sempre que $x_n \to_l x$ em (X,l). ¶

[140] A rigor, a subcategoria dos espaços de convergência isótona (e centrada também, por via das dúvidas).

Exercício 1.286. Sejam X, Y e Z espaços de convergência sequencial. Mostre que Id_X é sequencialmente contínua e, se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são sequencialmente contínuas, então $g \circ f$ é sequencialmente contínua. Convença-se de que estamos diante de uma nova categoria. ■

Por simplicidade, denotaremos por $\textsc{Conv}_s$ a categoria dos espaços de convergência sequencial.

Observação 1.4.23 (Filtros vs. sequências)**.** O modo natural de induzir uma convergência sequencial a partir de uma convergência se reflete na *funtorialidade* da correspondência

$$\begin{tikzcd}
\textsc{Conv} \arrow[r] & \textsc{Conv}_s \\
(X,\mathcal{L}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "f"] & (X,\mathcal{L}|_s) \arrow[d, mapsto, "f"] \\
(Y,\mathcal{L}') \arrow[r, mapsto] & (Y,\mathcal{L}'|_s)
\end{tikzcd}$$

onde se declara $\mathcal{L}|_s\left((x_n)_{n\in\omega}\right) := \mathcal{L}((x_n)_n^{\uparrow})$ para cada sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X. Explicitamente, a convergência sequencial $\mathcal{L}|_s$ é a restrição da convergência $\mathcal{L}$ aos filtros induzidos por sequências – também chamados de... *filtros sequenciais*.

Nessa altura da vida, é de se esperar que a correspondência acima não seja sobrejetora, i.e., que existam espaços de convergência sequencial não oriundos de uma convergência (de filtros): o leitor interessado pode encontrar uma discussão cuidadosa em [10]. Todavia, dado o público alvo desta subseção, convém manter a atenção no nível topológico.

Secretamente[141], o Exemplo 1.4.5 apresentou um funtor $\textsc{Top} \to \textsc{Conv}$, que a cada espaço topológico $(X,\mathcal{T})$ associa o espaço de convergência $(X,\lim_{\mathcal{T}})$. Ao se compor tal funtor com a última correspondência $\textsc{Conv} \to \textsc{Conv}_s$, obtém-se um *novo* funtor $\textsc{Top} \to \textsc{Conv}_s$, que a cada espaço topológico $(X,\mathcal{T})$ associa o espaço de convergência sequencial $(X,\lim_{\mathcal{T}}|_s)$, onde $x_n \to_{\lim_{\mathcal{T}}|_s} x$ se, e somente se, para qualquer vizinhança $V \in \mathcal{N}_x$ existir $N \in \omega$ tal que $x_n \in V$ sempre que $n \geq N$ (compare com a Definição 1.2.3). Como no cenário anterior, é natural esperar que $\textsc{Top} \to \textsc{Conv}_s$ não seja sobrejetora e, certamente, deve ser satisfatório investigar quais espaços de convergência sequencial são oriundos de uma topologia[142].

Porém, do ponto de vista do que é *importante para a sociedade*, não se pode ignorar o fato de que este é o contexto ideal para entender quais topologias são *capturadas* pelas sequências convergentes – no sentido do que se discutiu no Exemplo 1.2.5. O primeiro passo será mimetizar o Exemplo 1.4.5. △

Fixado um espaço de convergência sequencial (X,l), seja

$$\mathcal{T}_l := \left\{A \subseteq X : \forall (x_n)_{n\in\omega} \in X^\omega \left(l((x_n)_{n\in\omega}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow A \in (x_n)_n^{\uparrow}\right)\right\}$$

ou, explicitamente, $A \in \mathcal{T}_l$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X tal que $x_n \to_l x$ para algum $x \in A$, existir $N \in \omega$ satisfazendo $\{x_n : n \geq N\} \subseteq A$.

Exercício 1.287. Convença-se de que $\mathcal{T}_l$ é uma topologia em X. Além disso, mostre que se $f\colon (X,l) \to (Y,l')$ é sequencialmente contínua, então $f\colon (X,\mathcal{T}_l) \to (Y,\mathcal{T}_{l'})$ é contínua. Conclua que a correspondência $\textsc{Conv}_s \to \textsc{Top}$ assim obtida é funtorial. ■

[141] Ou nem tanto, como revela o Exercício 1.305.

[142] Isso é feito, por exemplo, no final do primeiro capítulo de [10].

Observação 1.4.24. Note que em $(X, \mathcal{T}_l)$ não *se perdem* sequências convergentes: de fato, se $x_n \to_l x$ e $V \subseteq X$ é um aberto (membro de $\mathcal{T}_l$) tal que $x \in V$, então existe $N \in \omega$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq N$, garantindo que $x_n \to_{\mathcal{T}_l} x$ na topologia $\mathcal{T}_l$. △

Agora, a composição dos funtores $\mathrm{TOP} \to \mathrm{CONV}_s$ e $\mathrm{CONV}_s \to \mathrm{TOP}$ resulta num *novo* funtor $\mathrm{TOP} \to \mathrm{TOP}$ que associa um espaço topológico (X, τ) ao espaço topológico $(X, \mathcal{T}_{l_\tau})$. Um detalhe sutil, mas importante, é que no processo de transição de τ para $\mathcal{T}_{l_\tau}$ é possível que se *ganhem* abertos: $\mathrm{TOP} \to \mathrm{CONV}_s$ usa a topologia para determinar todas as sequências convergentes, ignorando os filtros que não são da forma $(x_n)_n^{\uparrow}$; por sua vez, $\mathrm{CONV}_s \to \mathrm{TOP}$ usa tais sequências (e apenas elas!) para determinar subconjuntos abertos em X; com *menos* filtros convergentes, obtêm-se *mais* abertos.

Exercício 1.288. Convença-se de que $\tau \subseteq \mathcal{T}_{l_\tau}$ para qualquer topologia τ em X. ■

Definição 1.4.25. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A, F \subseteq X$ subconjuntos.

(i) Diz-se que A é **sequencialmente aberto** se $A \in \mathcal{T}_{l_\tau}$.

(ii) Diz-se que F é **sequencialmente fechado** se $X \setminus F$ é sequencialmente aberto. ¶

Exercício 1.289. Nas condições acima, mostre que $F \subseteq X$ é sequencialmente fechado se, e somente se, $\lim_n x_n \subseteq F$ para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em F. ■

Dessa forma, o Exercício 1.288 diz que todo aberto (resp. fechado) de X é sequencialmente aberto (resp. fechado). Logo, a topologia dos sonhos do analista clássico é aquela em que as recíprocas são verdadeiras.

Teorema 1.4.26. *Seja (X, τ) um espaço topológico. São equivalentes:*

(seq$_1$) $\mathcal{T}_{l_\tau} \subseteq \tau$, *i.e., todo subconjunto sequencialmente aberto é aberto;*

(seq$_2$) *todo subconjunto sequencialmente fechado é fechado;*

(seq$_3$) *para qualquer espaço topológico Y, uma função $f\colon X \to Y$ é contínua se, e somente se, é sequencialmente contínua.*

Demonstração. A implicação (seq$_1$) ⇒ (seq$_2$) é automática. Agora, assumindo (seq$_2$), mostraremos a validade de (seq$_3$). Para isso, fixemos um espaço topológico Y e uma função $f\colon X \to Y$.

✓ Se $f\colon X \to Y$ é contínua, então f é sequencialmente contínua: se $x_n \to x$ em X e $U \subseteq Y$ é um aberto que contém $f(x)$, então $f^{-1}[U]$ é um aberto de X que contém x e daí o leitor já deve saber como proceder.

✓ Se $f\colon X \to Y$ é sequencialmente contínua e $F \subseteq Y$ é fechado, então para uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em $(f^{-1}[F])$ com $x_n \to x$, tem-se $f(x_n) \to f(x)$ (pela continuidade sequencial), com $f(x_n) \in F$ para todo $n \in \omega$, donde segue que $f(x) \in F$ e, por conseguinte, $f^{-1}[F]$ é sequencialmente fechado – donde a hipótese garante que $f^{-1}[F]$ é fechado.

Finalmente, assumindo (seq$_3$), mostraremos que vale (seq$_1$). Para isso, observe que a função $I\colon (X, \tau) \to (X, \mathcal{T}_{l_\tau})$ que faz $I(x) := x$ é sequencialmente contínua (pela Observação 1.4.24), donde a hipótese garante sua continuidade. Finalmente, note que isso se traduz precisamente na inclusão $\mathcal{T}_{l_\tau} \subseteq \tau$, como desejado. □

Definição 1.4.27. Dizemos que um espaço topológico X é **sequencial** se qualquer uma das condições no teorema anterior for satisfeita. ¶

Conforme antecipado no Exemplo 1.2.5, os espaços sequenciais são aqueles nos quais toda a informação topológica se *codificada* por meio de sequências convergentes. Porém, isto não significa que as sequências têm o mesmo poder verificado em espaços métricos.

A condição de Fréchet-Urysohn e o fecho sequencial

Se X é um espaço sequencial e $S \subseteq X$ não é fechado, então S não é sequencialmente fechado e, consequentemente, existe pelo menos uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em S satisfazendo $\lim x_n \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$. Em outras palavras, o fato de S não ser fechado é testemunhado por *alguma* sequência convergente.

Assim, é natural conjecturar que sequências convergentes também testemunhem *afirmativamente* sobre os conjuntos fechados. Mais precisamente, deveria ser verdade que num espaço sequencial X, um subconjunto $F \subseteq X$ é fechado se, e somente se, para todo $x \in F$ *existe* uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em F com $x_n \to x$. Certo? Não.

Para um subconjunto $A \subseteq X$, vamos denotar por

$$\overline{\operatorname{seq}}\,(A) := \{x \in X : \exists (x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega \text{ tal que } x_n \to x\} \tag{1.45}$$

o **fecho sequencial de** A.

Definição 1.4.28. Dizemos que X é um **espaço de Fréchet-Urysohn** se para todo subconjunto $A \subseteq X$ ocorrer $\overline{A} = \overline{\operatorname{seq}}\,(A)$. ¶

Com tal terminologia, a conjectura anterior se resume na afirmação (falsa): "todo espaço sequencial é de Fréchet-Urysohn". A diferença, porém, é bastante sutil:

- por um lado, se X é sequencial, então dizer que $F \subseteq X$ é fechado equivale a afirmar que F é sequencialmente fechado, ou seja, se *uma* sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em F convergir para algum x, então $x \in F$;
- por outro lado, se X é de Fréchet-Urysohn, então dizer que $F \subseteq X$ é fechado equivale a afirmar que para todo $x \in F$ *existe uma* sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em F com $x_n \to x$.

Explicitamente, enquanto a primeira condição trata de sequências que *já convergem*, a segunda garante a *existência* de sequências convergentes, algo bem mais forte. Há, naturalmente, uma relação de implicação entre as duas.

Proposição 1.4.29. *Todo espaço de Fréchet-Urysohn é sequencial.*

Demonstração. Deve-se mostrar que todo subconjunto sequencialmente fechado é fechado. Para isso, note que se $F \subseteq X$ é sequencialmente fechado e $x \in \overline{F}$, então, por X ser de Fréchet-Urysohn, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em F tal que $x_n \to x$, donde a hipótese sobre F resulta em $x \in F$, como queríamos. □

A discussão do exemplo clássico que atesta a falsidade da recíproca requer uma breve análise sobre o comportamento do fecho sequencial num espaço que *não* satisfaz a condição de Fréchet-Urysohn. Embora em tal espaço, digamos X, deva existir um subconjunto $A \subseteq X$ com $\overline{A} \neq \overline{\operatorname{seq}}\,(A)$, necessariamente deve ocorrer

$$A \subseteq \overline{\operatorname{seq}}\,(A) \subsetneq \overline{A}, \tag{1.46}$$

já que $x_n \to x$ com $(x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega$ acarreta $x \in \overline{A}$. E se o fecho sequencial for aplicado mais uma vez?

Exercício 1.290. Sejam X um espaço topológico e $C, D, E \subseteq X$ subconjuntos com $C \subseteq D$ e E sequencialmente fechado. Mostre que $\overline{\text{seq}}(C) \subseteq \overline{\text{seq}}(D)$ e $\overline{\text{seq}}(E) \subseteq E$. ■

Em vista do exercício anterior, as inclusões em (1.46) aliadas ao fato de $\overline{A}$ ser (sequencialmente) fechado acarretam em

$$A \subseteq \overline{\text{seq}}(A) \subseteq \overline{\text{seq}}(\overline{\text{seq}}(A)) \subseteq \overline{A},$$

com pelo menos uma das inclusões própria, indicando que, apesar do nome, o *fecho sequencial* pode não ser *sequencialmente fechado*. Em outras palavras, nada parece impedir a ocorrência de $\overline{\text{seq}}(A) \subsetneq \overline{\text{seq}}(\overline{\text{seq}}(A))$. De toda forma, fica implicitamente sugerida a possibilidade de aplicar o *operador* $\overline{\text{seq}}(\bullet)$ *sucessivamente*, obtendo-se assim uma cadeia ascendente de fechos sequenciais *limitada* por $\overline{A}$, o que se faz da seguinte maneira.

Definição 1.4.30. Para um espaço topológico X qualquer e um subconjunto $A \subseteq X$, define-se o **fecho sequencial iterado** de ordem ξ de A, fazendo

$$\overline{\text{seq}}_0(A) := A \quad \text{e} \quad \overline{\text{seq}}_\xi(A) := \overline{\text{seq}}\left(\bigcup_{\alpha<\xi} \overline{\text{seq}}_\alpha(A)\right)$$

para $\xi > 0$. ¶

Essa construção recursiva garante a validade da inclusão $\overline{\text{seq}}_\xi(A) \subseteq \overline{A}$, qualquer que seja o subconjunto $A \subseteq X$: de fato, se $\overline{\text{seq}}_\alpha(A) \subseteq \overline{A}$ para todo $\alpha < \xi$, então

$$\bigcup_{\alpha<\xi} \overline{\text{seq}}_\alpha(A) \subseteq \overline{A} \Rightarrow \overline{\text{seq}}_\xi(A) := \overline{\text{seq}}\left(\bigcup_{\alpha<\xi} \overline{\text{seq}}_\alpha(A)\right) \subseteq \overline{A}.$$

Obtém-se assim uma cadeia *crescente* de subconjuntos de $\overline{A}$ indexada por ordinais, i.e.,

$$A := \overline{\text{seq}}_0(A) \subseteq \overline{\text{seq}}_1(A) \subseteq \cdots \subseteq \overline{\text{seq}}_\xi(A) \subseteq \ldots \subseteq \overline{A}$$

de modo que deve haver um ordinal α a partir do qual ocorre $\overline{\text{seq}}_\xi(A) = \overline{\text{seq}}_\alpha(A)$ para para todo $\xi \geq \alpha$. De fato, a correspondência $\text{Ord} \to \wp\left(\overline{A}\right)$ dada por $\xi \mapsto \overline{\text{seq}}_\xi(A)$ não pode ser injetora, pois Ord não é um conjunto[143]. Logo, existem $\alpha, \beta \in \text{Ord}$ distintos satisfazendo a identidade $\overline{\text{seq}}_\alpha(A) = \overline{\text{seq}}_\beta(A)$. Agora, se $\alpha < \beta$, então $\overline{\text{seq}}_\xi(A) = \overline{\text{seq}}_\alpha(A)$ para todo $\xi \geq \alpha$, pois:

✓ se $\alpha \leq \xi < \beta$, então $\overline{\text{seq}}_\xi(A) \subseteq \overline{\text{seq}}_\beta(A) = \overline{\text{seq}}_\alpha(A) \subseteq \overline{\text{seq}}_\xi(A)$;

✓ se $\xi > \beta$ e $\overline{\text{seq}}_\gamma(A) = \overline{\text{seq}}_\alpha(A)$ para todo $\gamma \in [\beta, \xi)$, então

$$\overline{\text{seq}}_\alpha(A) \subseteq \overline{\text{seq}}_\xi(A) := \overline{\text{seq}}\left(\bigcup_{\gamma<\xi} \overline{\text{seq}}_\gamma(A)\right) = \overline{\text{seq}}\left(\overline{\text{seq}}_\alpha(A) \cup \bigcup_{\beta\leq\gamma<\xi} \overline{\text{seq}}_\gamma(A)\right) =$$
$$= \overline{\text{seq}}(\overline{\text{seq}}_\alpha(A) \cup \overline{\text{seq}}_\alpha(A)) = \overline{\text{seq}}(\overline{\text{seq}}_\alpha(A)) = \overline{\text{seq}}_{\alpha+1}(A) = \overline{\text{seq}}_\alpha(A).$$

Ao se repetir a argumentação acima para cada subconjunto $A \subseteq X$, pode-se tomar $\xi_0 \in \text{Ord}$ como o menor ordinal tal que $\overline{\text{seq}}_\xi(A) = \overline{\text{seq}}_{\xi_0}(A)$ para quaisquer $A \subseteq X$ e $\xi \geq \xi_0$, o qual certamente existe[144] e é dado como o supremo dos α's definidos para cada A. Por simplicidade, vamos escrever $\overline{\text{seq}}_*(A)$ em vez de $\overline{\text{seq}}_{\xi_0}(A)$ para denotar o fecho sequencial iterado de ordem ξ_0 – que, neste caso, será xingado de **fecho sequencial transfinito**.

[143] Lema K.1.99.

[144] Um curioso caso de invariante topológico *ordinal*.

Exercício 1.291. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto qualquer. Mostre que $\overline{\text{seq}}_*(A)$ é sequencialmente fechado. ■

Embora tediosa, essa construção ajuda a entender um pouco melhor a natureza da diferença entre os espaços sequenciais e os de Fréchet-Urysohn.

Teorema 1.4.31. *Um espaço topológico X é sequencial se, e somente se, $\overline{\text{seq}}_*(A) = \overline{A}$ para todo $A \subseteq X$.*

Demonstração. Se X é sequencial, então o exercício anterior garante que $\overline{\text{seq}}_*(A)$ é fechado em X, donde segue a identidade desejada. Reciprocamente, se X não é sequencial, então existe um subconjunto sequencialmente fechado F que não é fechado. Ora, por F ser sequencialmente fechado, deve-se ter $\overline{\text{seq}}(F) = F$, donde segue que $\overline{\text{seq}}_\xi(F) = F$ para todo $\xi \in \text{Ord}$ e, consequentemente, $\overline{\text{seq}}_*(F)$ não é fechado. □

Exemplo 1.4.32. Temos enfim o ferramental necessário para discutir a recíproca da Proposição 1.4.29. O contraexemplo clássico se deve a Richard Arens, razão pela qual o espaço costuma ser chamado de... **espaço de Arens**. Começa-se com o conjunto $A := \{\omega\} \cup \omega \cup (\omega \times \omega)$, cuja topologia é definida pelo seguinte *sistema fundamental de vizinhanças*[145] $\mathcal{V} := \{\mathcal{V}_a : a \in A\}$:

- pontos de $\omega \times \omega$ são isolados, i.e., $\mathcal{V}_{(m,n)} := \{\{(m,n)\}\}$;
- para $n \in \omega$, $\mathcal{V}_n := \{V_{n,m} : m \in \omega\}$, onde
$$V_{n,m} := \{n\} \cup \{(n,j) : j \geq m\};$$
- finalmente, $\mathcal{V}_\omega := \left\{U_{F,G} : F \in [\omega]^{<\aleph_0} \text{ e } G \in \prod_{n \in \omega \setminus F}[\mathcal{V}_{n,0} \setminus \{n\}]^{<\aleph_0}\right\}$, onde
$$U_{F,G} := A \setminus \left(\left(\bigcup_{n \in F} V_{n,0}\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \omega} G(n)\right)\right).$$

Primeiramente, vejamos porque A é sequencial. Como os pontos de $B := A \setminus \{\omega\}$ têm caráter enumerável, resulta que para quaisquer $S \subseteq A$ e $b \in B$, $b \in \overline{S}$ se, e somente se, existe $(s_n)_{n \in \omega}$ em S tal que $s_n \to b$. Por sua vez, o ponto $\omega \in A$ não tem caráter enumerável, posto que há tantos abertos em $\mathcal{V}_\omega$ quanto funções da forma $\omega \to \omega$. Apesar disso, se $S \subseteq A$ contém um subconjunto infinito de $\omega \subseteq A$, então $\omega \in \overline{\text{seq}}(S)$.

Logo, para qualquer $S \subseteq A$, ocorre $\overline{\text{seq}}(S) = S \cup \{n \in \omega : |V_{n,0} \cap S| \geq \aleph_0\}$ se $|S \cap \omega| < \aleph_0$, ou $\overline{\text{seq}}(S) = S \cup \{n \in \omega : |V_{n,0} \cap S| \geq \aleph_0\} \cup \{\omega\}$ caso contrário. Isso permite concluir, por meio da análise de cada caso, que *duas* iterações do fecho sequencial bastam para atingir o fecho topológico:

✓ se $S \subseteq A$ é tal que $\{n \in \omega : |V_{n,0} \cap S| \geq \aleph_0\}$ é finito ou $S \cap \omega$ é infinito, então $\overline{\text{seq}}(S)$ é fechado;

✓ por outro lado, se $S \cap \omega$ é finito com $\{n \in \omega : |V_{n,0} \cap S| \geq \aleph_0\}$ infinito, então $\overline{\text{seq}}(S)$ é fechado se, e somente se, $\omega \in S$;

✓ em particular, no último caso, se $\omega \notin S$, então $\omega \in \overline{\text{seq}}(\overline{\text{seq}}(S))$ posto que existem infinitos elementos na interseção $\overline{\text{seq}}(S) \cap \omega$.

[145] Confira o item (c) do Exercício 1.256.

Portanto, o espaço de Arens é sequencial, mas não é de Fréchet. ▲

Assim, no que tange a convergência de sequências em espaços topológicos, vale

(pseudo) metrizabilidade $\Rightarrow$ caráter enumerável $\Rightarrow$ Fréchet-Urysohn $\Rightarrow$ sequencial

(Exercício 1.319), uma cadeia de implicações que fica cada vez mais distante dos ambientes introdutórios da Análise. Uma condição ainda menos restritiva do que a expressa pelos espaços sequenciais é a de *tightness* enumerável.

Definição 1.4.33. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. Diz-se que X tem ***tightness* enumerável** em x, se para todo $A \subseteq X$ com $x \in \overline{A}$ existir um subconjunto enumerável $B \subseteq A$ com $x \in \overline{B}$. Diz-se que X tem ***tightness* enumerável** se a condição acima for satisfeita para todo $x \in X$. ¶

Exercício 1.292. Mostre que se X é sequencial, então X tem *tightness* enumerável. Dica: o que ocorre com x se valer $x \in \overline{A}$ com $x \notin A$? ■

Para tristeza dos analistas clássicos, há espaços bastante naturais (no contexto da Análise Funcional) que são sequenciais apenas nos casos triviais[146], o que transforma a condição de *tightness enumerável* num gratificante consolo. Porém, mesmo esta condição pode falhar: veremos, possivelmente na Parte II, um método prático de constatar que, por exemplo, $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}_S)$ não tem *tightness* enumerável, onde $\mathbb{R}_S$ denota a reta de Sorgenfrey, introduzida na Observação 1.1.120. Um exemplo mais simples é sugerido no Exercício 1.320.

Observação 1.4.34. As considerações desta seção não encerram a discussão sobre espaços de convergência ou espaços sequenciais: há outras propriedades intermediárias, além de generalizações ainda mais amplas, que serão discutidas em capítulos posteriores. Em particular, pode-se mostrar que espaços sequenciais são, precisamente, quocientes de espaços metrizáveis[147]. Porém, isto não será feito aqui. △

Exercícios complementares da seção

Convergências de filtros e sequências

Exercício 1.293. Mostre que a família das convergências definidas num conjunto X forma um reticulado completo com a relação de ordem $\preceq$ apresentada na Definição 1.4.9. Mais precisamente, mostre que se Λ é uma família de convergências em X, então existem convergências dignas de serem denotadas por $\sup_{\lambda\in\Lambda}\lambda$ e $\inf_{\lambda\in\Lambda}\lambda$. ■

Exercício 1.294. Mostre que a convergência inicial em X induzida por uma família de funções, digamos $\{f_i\colon X \to (Y_i, \mathcal{L}_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$, é o $\preceq$-supremo/$\succeq$-ínfimo das convergências $f_i^{-1}\mathcal{L}_i$ definidas em X. ■

Exercício 1.295. Nas notações do exercício anterior, mostre que se cada $(Y_i, \mathcal{L}_i)$ é topológica, então a convergência inicial em X também é topológica. ■

Exercício 1.296. Interprete a identidade $\mathrm{ad}_{f^{-1}\mathcal{L}}(A) = f^{-1}[\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}(f[A])]$ (Exercício 1.282) para o caso em que $X \subseteq Y$ e f é a inclusão. Soa familiar se Y for espaço topológico? ■

Exercício 1.297. Dualize os três últimos exercícios, i.e., enuncie e demonstre as versões duais para as convergências *finais*. ■

[146] *Spoiler*: espaços normados com a *topologia fraca* são sequenciais somente nos casos de dimensão finita (Proposição 5.2.101).

[147] O leitor interessado pode conferir o texto de Vinicius Rodrigues, na *Acta Legalicus* [92].

Exercício 1.298. Sejam X e Y espaços de convergência e $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre que se f é contínua, então $f[\operatorname{ad}(A)] \subseteq \operatorname{ad}(f[A])$ para qualquer subconjunto $A \subseteq X$. Mostre que a recíproca é válida se X e Y forem espaços pré-topológicos. ■

Exercício 1.299. Sejam X e Y espaços de convergência e considere *nets* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ em X e Y, respectivamente. Mostre que se as convergências de X e Y forem isótonas e ocorrer $x_d \to x$ e $y_s \to y$ para certos $x \in X$ e $y \in Y$, então $(x_d, y_s)_{(d,s)\in\mathbb{D}\times\mathbb{S}}$ converge para (x, y) com a convergência produto, onde $\mathbb{D}\times\mathbb{S}$ é dotado da ordem utilizada na Observação 1.4.19. ■

Exercício 1.300. Fixados um espaço de convergência $(X, \mathcal{L})$ e um ponto $x \in X$, considere

$$\mathcal{V}_x := \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\in\operatorname{Filt}(X)\\ \mathcal{F}\to x}} \mathcal{F},$$

o **filtro das vizinhanças de** X. Mostre que $(X, \mathcal{L})$ é pré-topológico se, e somente se, $\mathcal{L}$ é centrada, isótona e $\mathcal{V}_x \to x$ para cada $x \in X$. ■

Exercício 1.301. Dizemos que um espaço de convergência $(X, \mathcal{L})$ é de **Hausdorff** se $|\mathcal{L}(\mathcal{F})| \leq 1$ para todo filtro próprio $\mathcal{F}$ em X. Mostre que o produto de espaços de convergência de Hausdorff é um espaço de convergência de Hausdorff. ■

Exercício 1.302. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e λ a convergência em $\mathbb{R}^X$ definida no Exemplo 1.4.7. Mostre que se $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em $(\mathbb{R}^X, \lambda)$ tal que $f_d \to f$ e $f_d \to g$, então $f = g$ μ-qtp, i.e., existe $N \in \mathcal{A}$ com $\mu(N) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \setminus N$. ■

Exercício 1.303. Seja $(X, \mathcal{L})$ um espaço de convergência e considere $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ a topologia em X definida como em (1.43) (Exemplo 1.4.5). Mostre que um subconjunto $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, $\operatorname{ad}_{\mathcal{L}}(X \setminus A) = X \setminus A$. ■

Exercício 1.304. Qual a definição análoga do *operador interior* para espaços de convergência? ■

Exercício 1.305. Mostre que a correspondência $\textsc{Top} \to \textsc{Conv}$ que associa cada espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ ao espaço de convergência $(X, \lim_{\mathcal{T}})$ é um funtor. ■

Exercício 1.306. Nas condições da Proposição 1.4.20, mostre que os espaços $\mathcal{C}(X \times Y, Z)$ e $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ são naturalmente isomorfos na categoria $\textsc{Conv}$. ■

Exercício 1.307. Considere $(X_i, \mathcal{L}_i)$ um espaço de convergência para cada $i \in \mathcal{I}$. Munindo $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ com a convergência produto (confira o Exercício 1.277), mostre que um filtro $\mathcal{F}$ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ converge para $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ se, e somente se, $\pi_i(\mathcal{F}) \to_{\mathcal{L}_i} x_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$. ■

Exercício 1.308. Adapte o exercício anterior para *nets* (confira o Exercício 1.284). ■

Exercício 1.309. Sejam λ e μ convergências num conjunto X. Mostre que são equivalentes:

(i) $\mu \preceq \lambda$;

(ii) $\lim_\lambda x_d \subseteq \lim_\mu x_d$ para qualquer *net* $(x_d)_d$ em X;

(iii) $\operatorname{Id}\colon (X, \lambda) \to (X, \mu)$, que faz $x \mapsto x$ para todo $x \in X$, é contínua. ■

Exercício 1.310. Para X e Y espaços de convergência, ambas isótonas e centradas, denote por $\mathfrak{p}$ a convergência em $\mathcal{C}(X, Y)$ induzida pela convergência produto em $\prod_{x\in X} Y$. Mostre que $\mathfrak{p} \preceq \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ indica a convergência natural em $\mathcal{C}(X, Y)$. Dica: use os exercícios anteriores. ■

Exercício 1.311. Diremos que um espaço de convergência $(X, \mathcal{L})$ é compacto se todo ultrafiltro de X convergir com respeito à convergência $\mathcal{L}$. Com isso, mostre que se $f\colon X \to Y$ é contínua e sobrejetora, então Y é compacto. ■

Exercício 1.312. Enuncie e demonstre o Teorema de Tychonoff para espaços de convergência. ■

Exercício 1.313 (*For fun*)**.** Para um espaço topológico X, mostre que uma *net* $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $\mathcal{C}(X)$ converge continuamente para $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ se, e somente se, para todo $x \in X$ existe um aberto $V \subseteq X$ tal que $f_d|_V \to f|_V$ uniformemente. Dica: a noção de convergência uniforme é formalmente apresentada na Definição 4.1.35. ■

Exercício 1.314. Sejam (X, l) um espaço de convergência sequencial e $\mathcal{T}_l$ a topologia em X induzida por l. Mostre que se $F \subseteq X$ é fechado em tal topologia, então $l((x_n)_{n\in\omega}) \subseteq F$ sempre que $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em F. ■

Exercício 1.315. Uma convergência sequencial l em X é **isótona** se a inclusão $l((x_n)_{n\in\omega}) \subseteq l((y_n)_{n\in\omega})$ ocorre sempre que $(y_n)_{n\in\omega}$ é subsequência de $(x_n)_{n\in\omega}$. Mostre que se l é isótona, então vale a recíproca do exercício anterior. ■

Exercício 1.316. Dado um espaço topológico X e subconjuntos $C, D \subseteq X$, mostre que a identidade $\overline{\mathrm{seq}}(C \cup D) = \overline{\mathrm{seq}}(C) \cup \overline{\mathrm{seq}}(D)$ sempre se verifica. Que propriedades uma convergência sequencial deve ter a fim de satisfazer tal identidade? ■

Exercício 1.317. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Mostre que $\overline{\mathrm{seq}}_*(A)$ é fechado se, e somente se, $\overline{\mathrm{seq}}_*(A) = \overline{A}$. ■

Exercício 1.318. Seja ξ_0 a ordem do fecho sequencial transfinito de X. Mostre que $\xi_0 \leq \omega_1$. Dica: para $A \subseteq X$ fixado, mostre que $\overline{\mathrm{seq}}_{\omega_1}(A) = \overline{\mathrm{seq}}_{\omega_1+1}(A)$. ■

Exercício 1.319. Mostre que se X tem caráter enumerável, então X é de Fréchet-Urysohn. ■

Exercício 1.320. Pense rápido: $[0, \omega_1]$ é um espaço sequencial? ■

Exercício 1.321. Pense rápido: $[0, \omega_1)$ é um espaço sequencial? ■

Um pouco mais sobre filtros

Exercício 1.322 (Compare com o Lema 1.2.22)**.** Sejam $f : X \to Y$ uma função e $\mathcal{F}$ um filtro próprio em X. Mostre que $f\mathcal{F} := \{f[F] : F \in \mathcal{F}\}$ é um filtro se, e somente se, f é sobrejetora. ■

Exercício 1.323. Considere o filtro $\mathcal{F}_0 := \mathrm{cofin}(\omega)$ em ω e tome $P := \{p_n : n \in \omega\}$ uma enumeração dos números naturais primos. Para cada $n \in \omega$, note que tanto o conjunto $P_n := \{m \cdot p_n : m \in \omega\}$ quanto o seu complementar não pertencem a $\mathcal{F}_0$.

a) Defina $\mathcal{F}_1 := (\mathcal{F}_0 \cup \{P_1\})^{\Uparrow}$ e, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{F}_{n+1} := (\mathcal{F}_n \cup \{P_{n+1}\})^{\Uparrow}$.

b) Faça $\mathcal{F}_\omega := \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$.

Note que cada filtro na cadeia

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots$$

é próprio, bem como são próprias todas as inclusões, mas $\mathcal{F}_\omega$ é um filtro não-maximal. Dica: tanto P_0 quanto $\omega \setminus P_0$ não pertencem a $\mathcal{F}_n$, para qualquer $n \in \omega$. ■

Exercício 1.324. Seja $\mathfrak{u}$ um ultrafiltro num conjunto X. Mostre que $2|\mathfrak{u}| = 2^{|X|}$. Em particular, se X for infinito, então $|\mathfrak{u}| = 2^{|X|}$. ■

Exercício 1.325. Seja X um conjunto infinito e chame por $\mathrm{ult}(X)$ a família dos ultrafiltros de X. Mostre que $|\mathrm{ult}(X)| \leq 2^{2^{|X|}}$. ■

Exercício 1.326 (Hausdorff)**.** Seja X um conjunto não-vazio. Neste exercício, que complementa o anterior, vamos determinar $|\mathrm{ult}(X)|$.

a) Note que se $|X| < \aleph_0$, então $|\mathrm{ult}(X)| = |X|$.

b) Daqui em diante, suponha $|X| \geq \aleph_0$. Observe que $\mathscr{F} := [X]^{<\aleph_0}$ e $\mathscr{G} := [\mathscr{F}]^{<\aleph_0}$ têm ambos a mesma cardinalidade que X, i.e., $|\mathscr{F}| = |\mathscr{G}| = |X|$.

c) Para cada $A \subseteq X$, defina $B(A) := \{(F, \mathcal{F}) \in \mathscr{F} \times \mathscr{G} : A \cap F \in \mathscr{G}\}$ e chame $B(A)^- := \mathscr{F} \times \mathscr{G} \setminus B(A)$. Finalmente, para $S \subseteq \wp(X)$, chame

$$\mathcal{B}(S) := \{B(A) : A \in S\} \cup \{B(A)^- : A \in \wp(X) \setminus S\}.$$

Mostre que $\mathcal{B}(S)$ tem a p.i.f.. Dica: tome $A_0, \ldots, A_n \in S$, $D_0, \ldots, D_m \notin S$ dois a dois distintos e para cada $i \leq n$ e $j \leq m$ tome $a_{i,j}$ uma testemunha de que $A_i \neq D_j$; fazendo $F := \{a_{i,j} : i \leq n$ e $j \leq m\}$ e $\mathcal{F} := \{A_i \cap F : i \leq n\}$, observe que $(F, \mathcal{F}) \in \bigcap_{i\leq n} B(A_i) \cap \bigcap_{j\leq m} B(D_j)^-$.

d) Para cada $S \subseteq \wp(X)$ fixe $\mathfrak{u}(S)$ um ultrafiltro que contém $\mathcal{B}(S)$. Observe que a correspondência $S \mapsto \mathfrak{u}(S)$ define uma injeção $\wp(\wp(X)) \to \operatorname{ult}(\mathscr{F} \times \mathscr{G})$.

Com os itens acima, observe que $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$ tem pelo menos $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltros. Conclua que a mesma estimativa deve valer para X. ■

Observação 1.4.35. Uma prova muito mais *rápida* é proposta no Exercício E.45. O preço da rapidez é utilizar a compactificação de Stone-Čech, entre outros recursos mais sofisticados. △

Exercício 1.327. Dado um conjunto infinito X, quantas topologias existem em X? Dica: se $\mathcal{F}$ é um filtro em X, então $\mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ é uma topologia em X. ■

Exercício 1.328. Mostre que se $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro em X e $S \subseteq X$ é tal que $S \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathfrak{u}$, então $S \in \mathfrak{u}$. ■

Exercício 1.329 (Pode ser útil conferir os Exercícios 1.133 e 1.139)**.** Seja $\mathfrak{u}$ um ultrafiltro *livre* sobre um conjunto infinito X e considere uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que $\mathfrak{u} = \mathcal{A}^{\uparrow}$.

a) Mostre que se $S \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$, então $S \in \mathfrak{u}$.

b) Mostre que não pode ocorrer $|\mathcal{A}| < \aleph_0$. Dica: se ocorresse, $\mathfrak{u}$ não seria ultrafiltro.

c) Mostre que não pode ocorrer $|\mathcal{A}| = \aleph_0$. Dica: se ocorresse, então seria possível tomar $\{s_A, t_A\} \subsetneq A$ para cada $A \in \mathcal{A}$ de tal forma que $S := \{s_A : A \in \mathcal{A}\}$, $T := \{t_A : A \in \mathcal{A}\}$, $S, T \in \mathfrak{u}$ e $S \cap T = \emptyset$.

d) Conclua que ultrafiltros livres sobre conjuntos infinitos não têm bases enumeráveis. ■

Exercício 1.330. Adapte o exercício anterior para mostrar que ultrafiltros livres sobre conjuntos infinitos não têm sub-bases enumeráveis. Dica: se $\mathcal{B}$ é uma sub-base de um filtro, então $\mathcal{B}' := \{\bigcap \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ e $0 < |\mathcal{G}| < \aleph_0\}$ é uma base do mesmo filtro; qual a cardinalidade de $\mathcal{B}'$? ■

Capítulo 2

Separação e conexidade

Como o título sugere, este capítulo abordará como o ferramental topológico introduzido no capítulo anterior permite discutir diferentes *noções de separação*. Na primeira seção, isto será feito sob a mesma perspectiva da Definição 1.2.31, que introduziu os espaços de Hausdorff: veremos tanto *enfraquecimentos* da condição de Hausdorff (T_0 e T_1) quanto *fortalecimentos* (T_3 e T_4)[1]. A segunda seção refinará os resultados da primeira por meio de uma *mudança de perspectiva*: veremos como utilizar funções contínuas a fim de investigar propriedades de separação (com os espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ e, novamente, os T_4). Por fim, a terceira seção discutirá (*in*) *separação* por um viés *global* e mais próximo do sentido usual do termo: nela, serão estudados os *espaços conexos*.

2.1 Separação com abertos

Fixado um espaço topológico X, para $x, y \in X$ vamos escrever

$$x \preceq y \Leftrightarrow \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{N}_y, \tag{2.1}$$

i.e., $x \preceq y$ se toda vizinhança de x for vizinhança de y. Como a relação de inclusão é uma ordem parcial, segue que $(X, \preceq)$ é reflexiva e transitiva – ou, abreviadamente, é uma *pré-ordem*. Um modo mais conciso de interpretar essa pré-ordem faz uso do seguinte

Exercício 2.1. Mostre que para $x, y \in X$, ocorre $x \preceq y$ se, e somente se, $x \in \overline{\{y\}}$. ■

Assim, em geral, uma topologia sobre X induz um critério de comparação entre os seus pontos: pontos *abaixo* de um certo $y \in X$ estão arbitrariamente próximos de y, ao passo que y está arbitrariamente próximo de pontos acima dele. Naturalmente, essa pré-ordem não precisa ser total: basta que hajam pontos distintos cujos (unitários) tenham fechos disjuntos entre si para que tais pontos não sejam comparáveis. Em geral, essa pré-ordem pode ter comportamentos muito peculiares a depender do espaço topológico considerado.

Exemplo 2.1.1. Num conjunto X com pelo menos dois pontos e munido com a topologia *codiscreta* (apenas $\emptyset$ e X são abertos), quaisquer $x, y \in X$ satisfazem $x \preceq y$, um exemplo que viola dramaticamente a antissimetria. ▲

[1] Não exatamente fortalecimentos... Mas a liberdade poética das introduções permite certos abusos.

Exemplo 2.1.2 (*Spoiler alert*: $\mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_1$)**.** Se X é um espaço de Hausdorff, então para qualquer $x \in X$ vale $\overline{\{x\}} = \{x\}$: dado $y \in X \setminus \{x\}$, a condição de Hausdorff garante abertos disjuntos $A, B \subsetneq X$ com $x \in A$ e $y \in B$, e daí B atesta que y não pertence a $\overline{\{x\}}$. Logo, a relação $\preceq$ é antissimétrica por um motivo extremo: $y \preceq x$ e $x \preceq y$ implicam $x = y$ pois $y \preceq x$ só ocorre para $y = x$. ▲

Em certo sentido, a pré-ordem $\preceq$ mede a capacidade da topologia em distinguir os pontos do espaço, o que sugere utilizá-la para determinar quando dois pontos são *topologicamente iguais*. Observe que a relação binária $\simeq$ definida em X por

$$x \simeq y \Leftrightarrow x \preceq y \text{ e } y \preceq x$$

é uma relação de equivalência em X.

Definição 2.1.3. Pontos $x, y \in X$ são **topologicamente equivalentes** se valer $x \simeq y$.¶

Exercício 2.2. Nas condições anteriores, mostre que são equivalentes:

(i) $x \simeq y$;

(ii) $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$;

(iii) $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$;

(iv) um filtro/*net* em X converge para x, e somente se, converge para y. ■

Os dois primeiros *axiomas de separação* que abordaremos tratam justamente de dar condições para que a relação $\preceq$ tenha riqueza suficiente para distinguir topologicamente todos os pontos do espaço.

2.1.1 Menos do que se espera: $\mathbf{T_0}$ e $\mathbf{T_1}$

Definição 2.1.4. Um espaço topológico X é xingado de $\mathbf{T}_0$ se não existirem em X dois pontos distintos e topologicamente indistinguíveis[2], i.e., se a implicação "$x \simeq y \Rightarrow x = y$" for *verdadeira* para quaisquer $x, y \in X$. ¶

Apesar da definição acima, o leitor deve se sentir encorajado a memorizar a próxima caracterização equivalente, bem mais prática.

Proposição 2.1.5. *Um espaço topológico X é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe um subconjunto aberto $A \subseteq X$ tal que $|A \cap \{x, y\}| = 1$, i.e., $x \in A$ e $y \notin A$ ou $y \in A$ e $x \notin A$.*

Demonstração. Para $x, y \in X$, $x \simeq y$ ocorre se, e somente se, $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$, donde o resultado segue automaticamente. □

Espaços T_0 são modestos na mesma medida em que são abundantes: por ser uma condição muito fraca, todos os outro axiomas de separação que veremos fazem o trabalho de T_0, nem que para isso tenham que ser combinados. Por tal razão, não é muito comum estudar propriedades dos espaços T_0, o que não significa a inexistência de resultados interessantes.

[2]Embora seja raro, o leitor também pode encontrar a condição T_0 xingada como *condição de Kolmogorov*.

Proposição 2.1.6 (Compare com o Exercício 1.157)**.** *Seja (X, d) um espaço pseudométrico. A topologia em X induzida por d é T_0 se, e somente se, d for uma métrica.*

Demonstração. Note primeiramente que dois pontos $x, y \in X$ são topologicamente indistinguíveis se, e somente se, $d(x, y) = 0$. De fato, se $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$, então $y \in B_d(x, r)$ para qualquer $r > 0$, donde segue que $d(x, y) = 0$. Por outro lado, se $d(x, y) = 0$, então a desigualdade triangular (assegurada em pseudométricas) garante $B_d(x, r) = B_d(y, r)$ para qualquer $r > 0$, resultando em $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$.

Assim, se X é T_0, então $x \neq y$ obriga que se tenha $\mathcal{N}_x \neq \mathcal{N}_y$ e, pelo que se observou acima, $d(x, y) > 0$, mostrando que d é uma métrica. A recíproca segue pois espaços métricos são de Hausdorff e, por conseguinte, são espaços T_0 (Exemplo 2.1.2). □

Como ficará claro ao longo deste capítulo, a fim de que um espaço satisfaça um determinado *axioma de separação*, é preciso que sua topologia tenha abertos suficientes para distinguir os seus pontos – ou seus fechados, como veremos adiante. Curiosamente, isso impõe restrições à cardinalidade do próprio espaço. No caso da condição T_0, vale o seguinte

Teorema 2.1.7. *Se X é um espaço T_0 e $\mathcal{B}$ é uma base para X, então $|X| \leq 2^{|\mathcal{B}|}$.*

Demonstração. Para cada $x \in X$ consideremos $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\} \subseteq \wp(\mathcal{B})$. Como X é T_0, segue que $x \neq y$ acarreta $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$, e daí a correspondência $x \mapsto \mathcal{B}_x$ define uma injeção $X \hookrightarrow \wp(\mathcal{B})$, donde o resultado segue por valer $|\wp(\mathcal{B})| = 2^{|\mathcal{B}|}$. □

Exemplo 2.1.8. Se $|X| > \mathfrak{c}$, então nenhuma topologia T_0 sobre X pode ter base enumerável, já que $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Por exemplo, munindo o conjunto $X := \{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ com a topologia produto, onde $\{0, 1\}$ tem a topologia discreta, segue que X é de Hausdorff, *logo* T_0 e, por conseguinte, a topologia de X não admite base enumerável. Por futura conveniência, isto ficará registrado no próximo corolário, a menos de contraposição. ▲

Corolário 2.1.9. *Se X é T_0 e tem base enumerável, então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Observação 2.1.10. Um espaço X que *não* é T_0, necessariamente, admite pontos distintos topologicamente indistinguíveis. Como "ser topologicamente indistinguível" é uma relação de equivalência $\simeq$, pode-se considerar o conjunto quociente $X/\simeq$. O leitor atento talvez suspeite que a topologia quociente em $X/\simeq$ resulte num espaço T_0, afinal de contas, pontos topologicamente indistinguíveis em X são colapsados em $X/\simeq$. O leitor não só está certo, como também está convidado a demonstrar esse fato – mas só se quiser. △

Na discussão do último exemplo, usou-se algo que pode ter passado despercebido aos olhos do leitor, mas que já foi indicado no Exemplo 2.1.2: espaços de Hausdorff são T_0. Ocorre que uma análise mais calma do argumento revela que a conclusão segue não pela condição de Hausdorff, mas sim por uma condição intermediária: ~~pontos fechados~~ subconjuntos unitários fechados.

Proposição 2.1.11. *Para um espaço topológico X são equivalentes:*

(T_1.a) *para todo $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$;*

(T_1.b) *se $x, y \in X$ são distintos, então existem abertos $A, B \subsetneq X$ tais que $x \in A \setminus B$ e $y \in B \setminus A$.*

(T_1.c) *para todo $x \in X$ vale $\{x\} = \bigcap \mathcal{T}_x$.*

Demonstração. Se vale a primeira condição e $x, y \in X$ são distintos, então $A := X \setminus \{y\}$ e $B := X \setminus \{x\}$ são abertos que satisfazem a segunda condição. Se vale a segunda, então para $y \neq x$, *necessariamente*[3] existe $A \in \mathcal{T}_x$ com $y \notin A$, mostrando que $y \notin \bigcap \mathcal{T}_x$. Logo, se $y \in \bigcap \mathcal{T}_x$, então $y = x$ e, por valer $x \in \bigcap \mathcal{T}_x$, resulta $\{x\} = \bigcap \mathcal{T}_x$. Por fim, se vale a identidade da terceira condição, então

$$x \in \bigcap \{X \setminus U : x \notin U \in \mathcal{T}\} = X \setminus \bigcup \{U \in \mathcal{T} : x \notin U\} \subseteq \{x\},$$

onde a última inclusão ocorre pois $x \notin \{y\} = \bigcap \mathcal{T}_y$ para todo $y \neq x$. Logo, $\{x\}$ é uma interseção de fechados e, consequentemente, é fechado. □

Definição 2.1.12. Dizemos que X é um **espaço $\mathbf{T}_1$** se qualquer uma das condições da Proposição 2.1.11 for satisfeita[4]. ¶

Observação 2.1.13. Como a inclusão $\mathcal{T}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ garante $\bigcap \mathcal{N}_x \subseteq \bigcap \mathcal{T}_x$, pode-se substituir $\mathcal{T}_x$ por $\mathcal{N}_x$ nas equivalências anteriores. Assim, X é T_1 se, e somente se, o único ponto que pertence a todas as *vizinhanças* de x é x. △

Pelas caracterizações apresentadas, é imediato que

$$\mathrm{T}_1 \Rightarrow \mathrm{T}_0, \tag{2.2}$$

e um dos modos mais visuais de perceber isso é comparar a Proposição 2.1.5 com a condição $(\mathrm{T}_1.\mathrm{b})$: para $x, y \in X$ distintos, $(\mathrm{T}_1.\mathrm{b})$ garante, *simultaneamente*,

$$\underbrace{\text{um aberto } A \subsetneq X \text{ tal que } x \in A \text{ e } y \notin A}_{(\star)} \quad \& \quad \underbrace{\text{um aberto } B \subsetneq X \text{ tal que } y \in B \text{ e } x \notin B}_{(\star\star)},$$

enquanto a condição T_0 pede apenas que $(\star)$ ou $(\star\star)$ ocorram. Porém, a recíproca da implicação (2.2) é falsa.

Exercício 2.3. Reveja o Exemplo 1.1.45 e a Observação 1.1.47 (resp. páginas 150 e 152). Convença-se de que $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$ é um espaço T_0 que não é T_1. ■

Conforme se fortalecem os *axiomas de separação*, as propriedades de *convergência* resultantes passam a ficar mais interessantes. Isso já foi visto no capítulo anterior, com a condição de Hausdorff, que traduz a separação de pontos por abertos disjuntos em unicidade de limites[5]. Secretamente, e de modo mais modesto, filtros convergentes em espaços T_0 sabem, pelo menos, distinguir pontos[6]. Nesse sentido, espaços T_1 estão no meio do caminho, como indicado no Exercício 2.15, mas não só isso.

Proposição 2.1.14. *Um espaço topológico X infinito é T_1 se, e somente se, a seguinte equivalência se verifica para quaisquer $x \in X$ e $A \subseteq X$:*

$$x \text{ é ponto de acumulação de } A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{T}_x \quad |A \cap V| \geq \aleph_0. \tag{2.3}$$

[3] No caso T_0, poderia ser que não existisse um aberto $A \in \mathcal{T}_x$ com $y \notin A$ *para algum* $y \neq x$.

[4] Alguns textos se referem a tais espaços como *de Fréchet*, mas aqui essa nomenclatura traria problemas futuramente. Bourbaki [19] os chama de espaços *acessíveis*.

[5] Trataremos um pouco mais de espaços de Hausdorff na próxima subseção.

[6] Confira o Exercício 2.14 para ver isso de forma mais explícita.

Demonstração. Primeiramente, note que a implicação ($\Leftarrow$) em (2.3) é válida em qualquer espaço topológico. Agora, se X é T_1 e x é ponto de acumulação de A, então para um aberto $V \in \mathcal{T}_x$ fixado existe $y_0 \in V \cap (A \setminus \{x\})$. Supondo escolhidos $y_0, \ldots, y_n \in V \cap (A \setminus \{x\})$ dois a dois distintos, deve-se escolher y_{n+1}: por X ser T_1, segue que $F := \{y_0, \ldots, y_n\}$ é um fechado que não contém x, e por x ser ponto de acumulação de A, deve existir $y_{n+1} \in V \cap (X \setminus F) \cap (A \setminus \{x\})$. Dessa forma, obtém-se recursivamente o subconjunto $B := \{y_n : n \in \omega\} \subsetneq V \cap A$ com $|B| = \aleph_0$.

Reciprocamente, para $x, y \in X$ distintos, a equivalência (2.3) diz que o conjunto $A := \{x, y\}$ não tem pontos de acumulação. Em particular, x não é ponto de acumulação de A, e daí existe $V \in \mathcal{T}_x$ com $V \cap \{y\} = \emptyset$, i.e., tal que $y \notin V$. Analogamente, obtém-se $U \in \mathcal{T}_y$ com $x \notin U$. Portanto, X é T_1. $\square$

Observação 2.1.15. Espaços T_1 finitos não costumam ser interessantes. Como num espaço T_1 qualquer subconjunto finito é fechado, acrescentar a hipótese de finitude garante que todo subconjunto do espaço é fechado, e daí sua topologia é discreta. $\triangle$

Exercício 2.4 (Compare com o Exercício 1.72)**.** Mostre que se X é um espaço T_1 e $A \subseteq X$, então A^{d}, o conjunto dos pontos de acumulação de A, é fechado. Dica: $X \setminus \{x\}$ é aberto para qualquer $x \in X$. $\blacksquare$

Voltaremos a abordar exemplos e propriedades de espaços T_0 e T_1 na subseção de exercícios. Por ora, vale apenas destacar que ambas as condições são bem comportadas quando restritas a produtos e subespaços.

Proposição 2.1.16. *Seja $j \in \{0, 1\}$. Se $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços T_j, então o espaço produto $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é T_j.*

Demonstração. Para $j := 1$: dada $f \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, tem-se $\{f\} = \prod_{i \in \mathcal{I}} \{f(i)\}$, um produto de subespaços fechados em cada fator , logo um fechado do produto (Exercício 1.99). O caso $j := 0$ fica a cargo do leitor. $\square$

Proposição 2.1.17. *Seja $j \in \{0, 1\}$. Se X é um espaço T_j e $Y \subseteq X$, então Y é T_j como subespaço de X.*

Demonstração. Para $j := 1$: basta observar que os fechados de Y são da forma $Y \cap F$ com $F \subseteq X$ fechado. Novamente, o caso $j := 0$ será problema do leitor. $\square$

Exercício 2.5. Valem as recíprocas da Proposição 2.1.16? Dica: sim (use a proposição anterior). $\blacksquare$

Observação 2.1.18. ***Trennungsaxiom*** é a terminologia alemã para *axioma de separação*, razão pela qual as condições desta e da próxima seção serão indicadas por $\mathbf{T}_j$. No caso, a *separação* é no sentido explicitado pelas Proposições 2.1.5 e 2.1.11: a separação entre objetos disjuntos é testemunhada, de alguma forma, pela topologia do espaço. O índice j em $\mathbf{T}_j$ apenas *sugere* uma relação de *força* entre os axiomas, com $\mathrm{T}_i \Rightarrow \mathrm{T}_j$ se $i > j$. Apesar disso, a partir de $j := 3$, essa sugestão ficará um pouco menos clara. $\triangle$

2.1.2 Os espaços de Hausdorff ($\mathbf{T}_2$) revisitados

Para reaquecer a memória, recordemo-nos de que X é um espaço $\mathbf{T}_2$, ou de **Hausdorff** (Definição 1.2.31) se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existirem abertos $A, B \subseteq X$ disjuntos com $x \in A$ e $y \in B$, o que já se mostrou ser equivalente à unicidade de limites (tanto de filtros quanto de *nets*) na Proposição 1.2.30.

A caracterização via abertos disjuntos torna evidente que $T_2 \Rightarrow T_1$. Daí, por conta da implicação (2.2), resulta

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0, \tag{2.4}$$

cujas recíprocas não são válidas: um espaço T_0 que não é T_1 (Exercício 2.3) obviamente não pode ser T_2, e espaços infinitos com a topologia cofinita são espaços T_1 que não satisfazem a condição T_2 (Observação 1.1.26). A fim de tornar esta subseção menos redundante, convém apresentar mais algumas caracterizações para a condição de Hausdorff.

Proposição 2.1.19. *Para um espaço topológico X são equivalentes:*

(Haus_3) X *é* T_2*;*

(Haus_4) $\Delta := \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ *é subespaço fechado de* $X \times X$*;*

(Haus_5) *para cada* $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \overline{N}$*;*

(Haus_6) *quaisquer que sejam os espaços Z e D, com $D \subseteq Z$ denso, o mapa*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(Z, X) &\to \mathcal{C}(D, X) \\ f &\mapsto f|_D \end{aligned}$$

é injetor.

Demonstração. Se X é T_2 e $(x, y) \in \overline{\Delta}$, então existe uma *net* $(x_d, x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em $\Delta \subsetneq X \times X$ com $(x_d, x_d) \to (x, y)$, acarretando $x_d \to x$ e $x_d \to y$. Logo, $x = y$ pela unicidade de limites. Isso mostra (Haus_4).

Supondo (Haus_4) e tomando $x, y \in X$ distintos, tem-se $(x, y) \notin \Delta$, donde segue que existem abertos $A, B \subseteq X$ com $(x, y) \in A \times B \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$. Como os abertos A e B verificam $A \cap B = \emptyset$, obtém-se $A \in \mathcal{N}_x$ com $y \notin \overline{A}$. Portanto, $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_x} \overline{N} = \{x\}$, mostrando ($\text{Haus}_5$).

Assumindo (Haus_5) e tomando $f, g \in \mathcal{C}(Z, X)$ distintas, existe $z \in Z$ com $f(z) \neq g(z)$. Pela hipótese sobre os conjuntos unitários de X, existe um aberto $A \subseteq X$ com $f(z) \in A$ e $g(z) \in B := X \setminus \overline{A}$. Como tanto f quanto g são funções contínuas, infere-se que $V := f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$ é um aberto de Z, não-vazio pois $z \in V$. A densidade de D então *conjura* um $d \in D \cap V$, donde finalmente se obtém $f(d) \neq g(d)$, i.e., $f|_D \neq g|_D$, como desejado[7].

Enfim, provaremos (Haus_6) $\Rightarrow$ (Haus_3) pela contrapositiva. Para tanto, o leitor deve se recordar da Proposição 1.2.15: nela, para uma *net* $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em X, definiu-se $Z := \mathbb{D} \cup \{z\}$, onde z é qualquer objeto com $z \notin \mathbb{D}$, munido da topologia em que $A \subseteq Z$ é aberto se, e somente se, $z \notin A$ ou existe $d' \in \mathbb{D}$ tal que $\{d \in \mathbb{D} : d \geq d'\} \cup \{z\} \subseteq A$; em seguida, mostrou-se que $x_d \to x$ se, e somente se, a função $f \colon Z \to X$, dada por $f(d) := x_d$ para $d \in \mathbb{D}$ e $f(z) := x$, é contínua. Ora, como $\mathbb{D}$ é denso em Z, segue que se existir uma *net* $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em X que converge para limites distintos, então existe uma função contínua $\mathbb{D} \to X$ que admite duas extensões contínuas $Z \to X$ distintas, negando (Haus_6). □

Observação 2.1.20. A condição (Haus_5) costuma ser usada da seguinte maneira: se $x, y \in X$ são distintos, então existe um aberto $A \subseteq X$ tal que $x \in A$ e $y \notin \overline{A}$. △

[7] Essa não é a maneira mais econômica de mostrar que espaços Hausdorff satisfazem (Haus_6): a *melhor* alternativa, neste caso, seria trabalhar com *nets*. Confira a dica do Exercício 1.181.

Observação 2.1.21. Na prática, (Haus_6) diz que dada uma função contínua $f\colon D \to X$, com X de Hausdorff e D denso num espaço Z, existe no *máximo* uma extensão contínua $F\colon Z \to X$ de f, i.e., tal que $F|_D = f$. Para garantir a *existência* de funções, precisa-se de mais (Teorema 5.1.49). △

Como nos casos anteriores, a condição de Hausdorff também é bastante estável no que diz respeito a produtos e subespaços: isso já foi verificado para produtos no Corolário 1.2.37, ao passo que a preservação para subespaços é destacada na

Proposição 2.1.22. *Se X é T_2 e $Y \subseteq X$, então Y é T_2 com a topologia de subespaço.*

Demonstração. O resultado é imediato com a caracterização via abertos disjuntos. Ainda assim, *just for fun*, observe que para qualquer espaço topológico Z existe uma injeção

$$\begin{aligned} \psi_Z\colon \mathcal{C}(Z,Y) &\hookrightarrow \mathcal{C}(Z,X) \\ f &\mapsto i \circ f, \end{aligned}$$

onde $i\colon Y \to X$ é a inclusão. O restante segue do diagrama a seguir, em que $D \subseteq Z$ é denso e tanto γ quanto ρ são funções que fazem $f \mapsto f|_D$, como em (Haus_6).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(Z,Y) \arrow[r, hook, "\psi_Z"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{C}(Z,X) \arrow[r, hook, "\gamma"] & \mathcal{C}(D,X) \\ \mathcal{C}(D,Y) \arrow[urr, hook, "\psi_D"'] & & \end{tikzcd}$$

Figura 2.1: A demonstração fica muito mais simples assim, não?

Por X ser de Hausdorff, segue que γ é uma injeção. Daí, como o diagrama é comutativo, resulta que $\psi_D \circ \rho = \gamma \circ \psi_Z$ é uma injeção, o que garante a injetividade de ρ (Exercício K.11), mostrando que Y é de Hausdorff. □

Começa a se desenhar, ainda de forma sutil, uma relação tênue entre axiomas de separação e funções contínuas, o que ganhará contornos explícitos na próxima seção. Por ora, há propriedades de cardinalidade mais urgentes.

Como qualquer base $\mathcal{B}$ de um espaço topológico X induz um subconjunto denso D com $|D| \leq |\mathcal{B}|$ (Exercício 1.69), é natural perguntar sobre a possibilidade de substituir $\mathcal{B}$ por D no Teorema 2.1.7, o qual garante que $|X| \leq 2^{|\mathcal{B}|}$ se X for T_0. O exercício a seguir mostra que não há esperança de limitação *sem* Hausdorff.

Exercício 2.6. Seja X um conjunto infinito munido de sua topologia cofinita. Mostre que existe $D \subseteq X$ enumerável com $\overline{D} = X$. Dica: teste o primeiro subconjunto <u>infinito</u> enumerável que você encontrar. ■

Teorema 2.1.23. *Se X é um espaço T_2 e $D \subseteq X$ é denso, então $|X| \leq 2^{2^{|D|}}$.*

Demonstração. Defina $\psi\colon X \to \wp(\wp(D))$ por $\psi(x) := \left\{A \subseteq D : x \in \overline{A}\right\}$ e note que ψ é injetora: por exemplo, dados $x, y \in X$ distintos, existe $A \subseteq D$ com $x \in \overline{A}$ e $y \notin \overline{A}$ (tome $A := V \cap D$ no próximo exercício, onde V é aberto com $x \in \overline{V}$ e $y \notin \overline{V}$). □

Exercício 2.7. Sejam X um espaço topológico e $D \subseteq X$ denso. Mostre que $\overline{V} = \overline{V \cap D}$ para qualquer aberto $V \subseteq X$. ■

Exemplo 2.1.24. O teorema acima limita o tamanho de espaços de Hausdorff *em função* da cardinalidade de seus densos. Assim, se um conjunto X satisfaz $|X| > 2^{\mathfrak{c}}$ e $\mathcal{T}$ é uma topologia de Hausdorff em X, então certamente não existem densos enumeráveis em X. Equivalentemente, se um espaço de Hausdorff X tem pelo menos um subespaço enumerável e denso, então $|X| \leq 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$. Para leitores pouco familiarizados com cardinais, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e $2^{\mathbb{R}}$ são exemplos típicos de conjuntos com cardinalidade $2^{\mathfrak{c}}$. ▲

Como a condição de Hausdorff é hereditária para subespaços e $\mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_1$, segue que *qualquer* subconjunto finito de um espaço T_2 é discreto. Isso não pode ser estendido para subconjuntos enumeráveis: o conjunto

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$$

não é um subespaço discreto de $\mathbb{R}$ (contudo, confira o Exercício 2.20).

Observação 2.1.25 (Proposição 1.2.90 revisitada)**.** No capítulo anterior vimos como espaços T_2 se relacionam bem com a compacidade. Dada a proposta desta seção, parece um bom momento para observar um pouco da interação entre compacidade e axiomas de separação. Supondo que X seja um espaço de Hausdorff, tomemos $x \in X$ e $K \subseteq X$ tais que $x \notin K$. Nesse contexto geral, existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $x \in U$ e $K \subseteq V$?

Pela hipótese sobre X, podemos tomar para cada $y \in K$ um par de abertos disjuntos $A_y, B_y \subseteq X$ com $y \in A_y$ e $x \in B_y$. Obviamente, disso resulta

$$K \subseteq A := \bigcup_{y \in K} A_y,$$

com A aberto por ser reunião de abertos. Naturalmente, também ocorre $x \notin A$, mas não se pode garantir que o aberto $B := \bigcup_{y \in K} B_y$ satisfaça $A \cap B = \emptyset$: nada impede que ocorra $B_y \cap A_{y'} \neq \emptyset$ para $y, y' \in K$ distintos.

Uma solução fácil seria tomar $C := \bigcap_{y \in K} B_y$, pois tal subconjunto satisfaz $x \in C$ e $C \cap A = \emptyset$: cada $z \in A$ pertence a algum A_y, e daí $z \notin B_y$, acarretando $z \notin C$. Mas há um problema: C pode não ser aberto, pois o conjunto K pode ser infinito. Essa dificuldade desaparece com a suposição de K ser compacto.

De fato, com a adição dessa hipótese, é possível tomar um subconjunto finito $K' \subseteq K$ tal que

$$K \subseteq V := \bigcup_{y \in K'} A_y,$$

e agora $U := \bigcap_{y \in K'} B_y$ é um aberto com $x \in U$ e $U \cap V = \emptyset$, como desejado. △

O argumento usado na observação acima será muito recorrente. A fim de exercitá-lo, o leitor pode se debruçar brevemente sobre o próximo exercício, que encerra esta subseção.

Exercício 2.8. Sejam X um espaço de Hausdorff e $K, L \subseteq X$ subconjuntos satisfazendo $K \cap L = \emptyset$. Mostre que se K e L são ambos compactos, então existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $K \subseteq U$ e $L \subseteq V$. ■

2.1.3 Separando pontos (d)e fechados: T_3 e T_4

Nesta subseção, em vez de separar pontos distintos por meio de abertos disjuntos, *usaremos* abertos disjuntos para separar tanto pontos de subconjuntos fechados quanto fechados disjuntos entre si. O próximo exercício ilustra a ideia.

Exercício 2.9. Mostre que se X é de Hausdorff, compacto e $F, G \subseteq X$ são fechados disjuntos, então existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. ■

Como conjuntos unitários são fechados em espaços T_1, o exercício acima mostra que um espaço X compacto e de Hausdorff satisfaz duas *novas condições* de separação:

(T_3) para quaisquer $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado com $x \notin F$ existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $x \in U$ e $F \subseteq V$;

(T_4) para quaisquer $F, G \subseteq X$ fechados disjuntos existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$.

Nesta subseção discutiremos espaços não necessariamente compactos que satisfazem cada uma das condições acima.

Observação 2.1.26. Embora, em certo sentido, ainda exista uma terceira condição intermediária entre essas duas, ela se relaciona mais naturalmente com funções contínuas. Por isso, ela será discutida na próxima seção. △

Definição 2.1.27. Diremos que X é um **espaço $\mathbf{T}_3$** se a condição (T_3) indicada acima for satisfeita. Diremos que X é um espaço **regular** se, além de T_3, X também for T_1. ¶

Observação 2.1.28. O leitor deve ficar ciente de que não há consenso na nomenclatura dos axiomas de separação a partir daqui: há autores que chamam por "T_3" aquilo que, aqui, será chamado de "regular". A mesma coisa ocorre com os espaços *normais* e com os *completamente regulares*, próximos tópicos na fila. △

Acrescenta-se a condição T_1 pois T_3 sozinha não é capaz de garantir que pontos do espaço sejam fechados: veja que um espaço $X \neq \emptyset$ com pelo menos dois pontos e munido com a topologia codiscreta é T_3 (por vacuidade) mas não é T_1 – para um contraexemplo menos trivial, confira a Observação 2.1.40. É então fácil ver que

$$\underbrace{\text{regular}}_{=\mathrm{T}_3+\mathrm{T}_1} \Rightarrow \mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_1 \Rightarrow \mathrm{T}_0. \tag{2.5}$$

Embora existam espaços de Hausdorff não-regulares, não convém investigar tais contraexemplos agora – pelo menos uma dessas bizarrices será descrita na seção de exercícios. Por ora, é mais importante aprender as diferentes encarnações da condição T_3.

Proposição 2.1.29. *Dado um espaço topológico X, são equivalentes:*

(T_3.a) *X é T_3;*

(T_3.b) *se $x \in X$ e $A \subseteq X$ é aberto com $x \in A$, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $\overline{V} \subseteq A$;*

(T_3.c) *cada $x \in X$ admite uma base local de vizinhanças fechadas.*

Demonstração. Supondo que X é T_3 e tomando $A \subseteq X$ aberto com $x \in A$, segue que $F := X \setminus A$ é um fechado com $x \notin F$ e, consequentemente, existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $x \in V$ e $F \subseteq U$. Ora, como $V \subseteq X \setminus U \subseteq A$, com $X \setminus U$ fechado, conclui-se que $\overline{V} \subseteq A$, como desejado.

Agora, se vale (T_3.b), então $\mathcal{B}_x := \{\overline{V} : V \in \mathcal{T}_x\}$ é base de vizinhanças fechadas para $\mathcal{N}_x$. Finalmente, se vale a última condição e $x \notin F$ para algum fechado $F \subseteq X$, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $\overline{V} \subseteq X \setminus F$, donde segue que V e $U := X \setminus \overline{V}$ são abertos disjuntos com $x \in V$ e $F \subseteq U$, como queríamos. □

Como observado, axiomas de separação impõem certas restrições de cardinalidade aos espaços (Teoremas 2.1.7 e 2.1.23). Aqui, além das limitações herdadas da condição de Hausdorff, também *surgem* restrições de *minimalidade*[8] sobre a cardinalidade das bases, impostas pela regularidade, como mostra o próximo

Teorema 2.1.30. *Sejam X um espaço topológico e $D \subseteq X$ um subespaço denso. Se X é T_3, então existe uma base $\mathcal{B}$ para a topologia de X satisfazendo $|\mathcal{B}| \leq 2^{|D|}$.*

Demonstração. Mostraremos que $\mathcal{B} := \left\{\operatorname{int}\left(\overline{C}\right) : C \subseteq D\right\}$ é base para X. De fato, dados um aberto $U \subseteq X$ e $x \in U$, a condição T_3 garante um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $\overline{V} \subseteq U$. Como o Exercício 2.7 diz que $\overline{V} = \overline{V \cap D}$, resulta que $x \in \operatorname{int}\left(\overline{V \cap D}\right) \subseteq U$, com $V \cap D \subseteq D$. A desigualdade desejada segue pois $|\mathcal{B}| \leq |\wp(D)|$ e $|\wp(D)| = 2^{|D|}$. □

Exemplo 2.1.31. Se X é T_3 e tem um denso enumerável, então o teorema acima garante *pelo menos uma* base para a topologia de X cuja cardinalidade não excede a cardinalidade de $\mathbb{R}$. Na contrapositiva, isto significa que se toda base de X tem mais elementos do que $\mathbb{R}$, então X não admite um denso enumerável. ▲

A caracterização *local* dos espaços T_3, i.e., aquela dada em termos de bases locais, tem a vantagem de explicitar quase trivialmente que tal propriedade é hereditária para subespaços e preservada por produtos, fatos destacados a seguir para facilitar possíveis referências futuras.

Proposição 2.1.32. *Se X é T_3 e $Y \subseteq X$, então Y é T_3 com a topologia de subespaço.*

Demonstração. Se $\mathcal{B}$ é base de vizinhanças fechadas de X no ponto $y \in Y$, então a família $\mathcal{D} := \{F \cap Y : F \in \mathcal{B}_y\}$ é base de vizinhanças fechadas de Y no ponto y. Como y é qualquer, segue o resultado. □

Proposição 2.1.33. *Se $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços topológicos, então o espaço produto $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é T_3 se, e somente se, X_i é T_3 para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Seja $x := (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in X := \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ e, para cada $i \in \mathcal{I}$, fixe uma base local de vizinhanças fechadas (de X_i) em x_i, digamos $\mathcal{B}_i$. Note então que o fecho por interseções finitas da família $\mathcal{B} := \{\pi_i^{-1}[F] : i \in \mathcal{I} \text{ e } F \in \mathcal{B}_i\}$ é base local de vizinhanças fechadas (de X) em x. A recíproca segue pela proposição anterior. □

Observação 2.1.34. Como a mesma estabilidade se verifica para espaços T_1, segue que a regularidade é hereditária para subespaços e preservada por produtos arbitrários. △

Definição 2.1.35. Diremos que X é um **espaço topológico $\mathbf{T}_4$** se a condição (T_4) for satisfeita, i.e., se para quaisquer fechados disjuntos $F, G \subseteq X$ existirem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Diremos que X é um **espaço normal** se X for T_4 e T_1.¶

Mais uma vez, a condição T_1 foi adicionada pois o axioma T_4 não é capaz de garantir que subconjuntos finitos do espaço sejam fechados – nesse sentido, o Exemplo 2.1.37 a seguir será edificante. Com tal adição, e em vista das implicações destacadas em (2.5), é imediato que

$$\underbrace{\text{normal}}_{=\,\mathrm{T}_4+\mathrm{T}_1} \Rightarrow \underbrace{\text{regular}}_{=\,\mathrm{T}_3+\mathrm{T}_1} \Rightarrow \mathrm{T}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_1 \Rightarrow \mathrm{T}_0. \tag{2.6}$$

Diante dessa terminologia, o Exercício 2.9 se transforma no seguinte mantra:

[8] *Spoiler alert*: em linguajar profissional, o *peso* do espaço, denotado por $w(X)$, não excede $2^{d(X)}$, onde $d(X)$ indica a *densidade* de X. Resultados dessa natureza serão abundantes na intangível Seção E.2.

Proposição 2.1.36. *Todo espaço compacto de Hausdorff é normal*[9].

Exemplo 2.1.37 ($T_4 \not\Rightarrow T_i$ para $i \in \{0,1,2\}$)**.** Qualquer espaço pseudométrico (X,d) que não é métrico[10] serve como exemplo de espaço T_4 que não é T_i, para $i \in \{0,1,2\}$. Os dois próximos lemas ajudarão a estabelecer o resultado.

Lema 2.1.38. *Se (X,d) é um espaço pseudométrico e $A \subseteq X$ é não-vazio, então a regra $x \mapsto d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y)$ determina uma função contínua da forma $X \to \mathbb{R}$.*

Demonstração. Para $x_0, x \in X$ e $y \in A$ quaisquer ocorre $d(x_0,y) \leq d(x_0,x) + d(x,y)$, de modo que ao se tomar o ínfimo com respeito ao conjunto A, obtém-se

$$d(x_0,A) \leq d(x_0,x) + d(x,A) \Rightarrow d(x_0,A) - d(x,A) \leq d(x_0,x).$$

De maneira análoga, mostra-se $d(x,A) - d(x_0,A) \leq d(x,x_0)$, donde resulta

$$|d(x,A) - d(x_0,A)| \leq d(x_0,x).$$

A continuidade segue da desigualdade acima. □

Lema 2.1.39. *Sejam (X,d) um espaço pseudométrico e $A \subseteq X$ um subconjunto não-vazio. Então, para qualquer $x \in X$ vale que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(x,A) = 0$.*

Demonstração. Em vista da Proposição 1.2.4, basta mostrar que $d(x,A) = 0$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ em A com $x_n \to x$. Ora, se $d(x,A) = 0$, então para cada $n \in \omega$ existe $y_n \in A$ com $d(x,y_n) < \frac{1}{2^n}$, donde segue que $y_n \to x$ e, consequentemente, $x \in \overline{A}$. A recíproca segue da continuidade da função $x \mapsto d(x,A)$. □

Agora, sejam $F, G \subseteq X$ fechados não-vazios e disjuntos, bem como as funções $\psi \colon X \to \mathbb{R}$ e $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ dadas por $\psi(x) := d(x,G) - d(x,F)$ e $\varphi(x) := d(x,F) - d(x,G)$. Por um lado, o Lema 2.1.39 garante as inclusões $F \subseteq \psi^{-1}[(0,+\infty)] := U$ e $G \subseteq \varphi^{-1}[(0,+\infty)] := V$, com $U \cap V = \emptyset$. Por outro lado, o Lema 2.1.38 atesta a continuidade das funções $d(\bullet, F)$ e $d(\bullet, G)$ e, por conseguinte, a continuidade de ψ e φ. Logo, U e V são abertos disjuntos que separam os fechados F e G, mostrando que X é T_4 com a topologia induzida pela pseudométrica d.

Apesar disso, como um espaço pseudométrico é métrico se, e somente se, é T_0 (ou T_1, ou T_2), segue que qualquer espaço pseudométrico não-metrizável é T_4 mas não é T_i, para $i = 0,1,2$, como afirmado. ▲

Observação 2.1.40. Em vista do que se expôs acima, segue que espaços métricos são normais. Além disso, o mesmo argumento permite provar que todo espaço pseudométrico é T_3. O leitor pode encarar isso como exercício ou, alternativamente, esperar até o ~~canhão~~ Teorema 2.2.2. Seria o caso de que todo espaço T_4 é, necessariamente, T_3? △

Exemplo 2.1.41 ($T_4 \not\Rightarrow T_3$)**.** Considerando X como o conjunto $\mathbb{R}$ munido da topologia cujos abertos são da forma $(a,+\infty)$, segue por vacuidade que X é T_4, mas X não é T_3: de fato, o ponto $1 \in X$ não pode ser separado do fechado $(-\infty,0]$ por abertos disjuntos. No final desta seção veremos um espaço T_3 que não é T_4. ▲

[9] Trívia: nos meus tempos de criança, perdi duas horas da minha vida na vã tentativa de mostrar que espaços compactos são normais, tudo por não ter percebido que Engelking [39] adota a chamada "convenção francesa", que inclui a condição de Hausdorff na definição de compacidade. Tal prática é predominante entre os praticantes de Geometria Algébrica.

[10] O Exercício 2.27 ensina um modo muito simples de cozinhar espaços com tais propriedades.

Num primeiro momento, espaços normais parecem apenas um pouco mais restritivos do que seus antecessores regulares, como aliás sugere a Proposição 2.1.43 a seguir. Porém, veremos ao longo deste e dos próximos capítulos que, apesar de bem comportados quando sozinhos, espaços normais são extremamente selvagens quando interagem entre si.

Definição 2.1.42. Para um espaço topológico X e um subconjunto S, diremos que $V \subseteq X$ é uma **vizinhança** de S se $S \subseteq \operatorname{int}(V)$, e o filtro $\mathcal{N}_S := \{V \subseteq X : V \text{ é vizinhança de } S\}$ será chamado de **filtro de vizinhanças de** S. Finalmente, qualquer família $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_S$ que for base para o filtro $\mathcal{N}_S$ será chamada de **base local de vizinhanças** em S. ¶

Exercício 2.10. Convença-se de que $\mathcal{N}_S$ é, de fato, um filtro[11]. Mostre que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_S$ é uma base local de vizinhanças em S se, e somente se, para qualquer vizinhança $N \subseteq X$ de S existir $V \in \mathcal{B}$ com $S \subseteq V \subseteq N$. ■

Proposição 2.1.43. *Dado um espaço topológico X, são equivalentes:*

(T_4.a) *X é T_4;*

(T_4.b) *se $F \subseteq X$ é fechado e $A \subseteq X$ é aberto com $F \subseteq A$, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $F \subseteq V$ e $\overline{V} \subseteq A$;*

(T_4.c) *cada fechado $F \subseteq X$ admite uma base local de vizinhanças fechadas*[12].

Exercício 2.11. Demonstre a proposição acima. Dica: imite a Proposição 2.1.29. ■

Corolário 2.1.44. *Se X é T_4 e $Y \subseteq X$ é fechado, então Y é T_4 com a topologia de subespaço.*

Demonstração. Um subespaço fechado $F \subseteq Y$ é também um fechado de X, de modo que existe uma base local de vizinhanças fechadas (de X) em F, digamos $\mathcal{B}$. É então fácil ver que $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é base local de vizinhanças fechadas (de Y) em F. □

Observação 2.1.45. Em geral, se Y não é fechado, não se pode garantir que Y seja T_4. Na próxima seção veremos maneiras relativamente simples de obter contraexemplos. △

A riqueza topológica da condição T_4 se manifesta de diversas maneiras. Embora as mais impactantes estejam reservadas para a próxima seção, há alguns fatos marcantes que podem ser discutidos *aqui* e *agora*. A começar com a próxima

Proposição 2.1.46. *Um espaço topológico X é T_4 se, e somente se, vale o seguinte:*

(T_4.d) *para quaisquer $F, U \subseteq X$ com $F \subseteq U$, F fechado e U aberto, existe uma família enumerável $\mathcal{W}$ de abertos de X tal que $F \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ e $\overline{W} \subseteq U$ para todo $W \in \mathcal{W}$.*

Demonstração. Se X é T_4, então X satisfaz (T_4.d): basta tomar $\mathcal{W} := \{V\}$, onde V é uma vizinhança fechada de F com $V \subseteq U$. Para a recíproca, vamos utilizar a hipótese (T_4.d) duas vezes.

Se $F, G \subseteq X$ são fechados de X com $F \cap G = \emptyset$, então $X \setminus G$ é um aberto satisfazendo $F \subseteq X \setminus G$. Logo, por ($T_4$.d),

[11] O leitor preciosista pode preferir escrever $\mathcal{N}_{S,X}$ ou ainda $\mathcal{N}_{S,\mathcal{T}}$, onde $\mathcal{T}$ indica a topologia de X.

[12] Uma vizinhança fechada de S é, como as definições sugerem, um subconjunto fechado C tal que $S \subseteq \operatorname{int}(C)$.

(i) existe uma família enumerável $\mathcal{W}$ de abertos, com $F \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ e $\overline{W} \cap G = \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{W}$, e

(ii) existe uma família enumerável $\mathcal{V}$ de abertos, com $G \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ e $\overline{V} \cap F = \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{V}$.

Escrevendo $\mathcal{W} := \{W_n : n \in \omega\}$ e $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \omega\}$, note que não há perda de generalidade em supor que os abertos de tais coberturas sejam crescentes: por exemplo, se necessário, pode-se substituir $\mathcal{W}$ por $\mathcal{W}' := \{W'_n : n \in \omega\}$, onde $W'_n := \bigcup_{m \leq n} W_m$, que ainda satisfaz $F \subseteq \bigcup \mathcal{W}'$ e $\overline{W'_n} \cap G = \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Fica a cargo do leitor observar que os abertos $A_n := W_n \setminus \overline{V_n}$ e $B_n := V_n \setminus \overline{W_n}$, definidos para cada $n \in \omega$, são tais que $F \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_n$, $G \subseteq \bigcup_{n \in \omega} B_n$ e $(\bigcup_{n \in \omega} A_n) \cap (\bigcup_{n \in \omega} B_n) = \emptyset$. □

Corolário 2.1.47. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de X. Se X é T_3 e $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$, então X é T_4.*

Demonstração. Basta ver que X satisfaz as hipóteses da proposição anterior: observe que na presente configuração, pode-se tomar $U_x \in \mathcal{B}$ com $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq U$ para cada $x \in F$, de modo que $\mathcal{W} := \{U_x \in \mathcal{B} : x \in F\}$ tem as propriedades desejadas. □

A condição (T_4.d) dá o primeiro indício de que a *normalidade* (módulo T_1) admite caracterizações aparentemente alheias à definição original. Como motivação para a próxima caracterização, pode ser edificante quebrar um pouco a cabeça com o

Exercício 2.12. Mostre que um espaço topológico X é T_4 se, e somente se, para toda cobertura finita $\mathcal{U}$ de X por abertos existe uma cobertura $\mathcal{F} := \{F_U : U \in \mathcal{U}\}$ de X por fechados tal que $F_U \subseteq U$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Dica: para a ida, note que se $\{U_0, U_1\}$ é uma cobertura por abertos para X, então $F_0 := X \setminus U_1$ é um fechado contido em U_0, de modo que se V for vizinhança de F_0 com $\overline{V} \subseteq U_1$, então $F_1 := X \setminus V$ é um fechado contido em U_1; pergunte-se o que acontece com $F_0 \cup F_1$ e então use indução[13]. ■

Recordemo-nos de que para duas famílias $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, diz-se que $\mathcal{V}$ **refina** $\mathcal{W}$ (ou é um **refinamento** de $\mathcal{W}$) se para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $W \in \mathcal{W}$ com $V \subseteq W$. Em particular, quando $\mathcal{W}$ é uma cobertura de um conjunto X, subentende-se que um refinamento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{W}$ também satisfaz $\bigcup \mathcal{V} = X$, de modo que essa exigência será omitida daqui em diante a fim de não tornar o texto (mais) cansativo.

Adicionalmente, se os elementos de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são subconjuntos de um espaço topológico, diz-se que $\mathcal{V}$ é um refinamento **por abertos** (**por fechados**, etc.) se os elementos de $\mathcal{V}$ são abertos (fechados, etc.). Como no exercício anterior, pode também ser o caso de o refinamento $\mathcal{V}$ ser muito bem comportado, no sentido de ocorrer $\mathcal{V} = \{V_W : W \in \mathcal{W}\}$ com $V_W \subseteq W$ para cada $W \in \mathcal{W}$. Em tais situações, xingaremos $\mathcal{V}$ de **encolhimento** de $\mathcal{W}$ ou, alternativamente, diremos que $\mathcal{V}$ é **precisamente subordinada a** $\mathcal{W}$. Assim, o exercício acima pode ser reescrito da seguinte forma:

Proposição 2.1.48. *Um espaço topológico X é T_4 se, e somente se, vale o seguinte:*

(T_4.e) *toda cobertura finita por abertos de X admite um encolhimento por fechados.*

Definição 2.1.49. Uma cobertura $\mathcal{U}$ de X por abertos é dita **ponto-finita** se para cada $x \in X$ o conjunto $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ é finito. ¶

[13] O mesmo argumento será utilizado, implicitamente, no Teorema 2.1.51.

Exemplo 2.1.50. Para $X := [0,1)$, note que $\mathcal{U} := \{[0,\alpha) : \alpha < 1\}$ não é ponto-finita, ao passo que $\{[0,1)\} \cup \{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ é ponto-finita. ▲

Teorema 2.1.51 (Lema do Encolhimento)**.** *Um espaço topológico X é T_4 se, e somente se, vale o seguinte:*

(T_4.f) *toda cobertura ponto-finita por abertos de X admite um encolhimento por abertos cujos fechos ainda formam um encolhimento da cobertura original.*

Demonstração. Como toda cobertura finita é ponto-finita, a direção (T_4.f) $\Rightarrow \mathrm{T}_4$ segue da proposição anterior sem muito esforço. Para a direção não-trivial, fixemos uma cobertura ponto-finita $\mathcal{U}$ de X por abertos. O Teorema da Boa Ordem de Zermelo, *a.k.a.* Axioma da Escolha[14], permite munir $\mathcal{U}$ de uma boa ordem $\preceq$. Com isso, construiremos um encolhimento $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U}$, via *recursão*: fixado $U \in \mathcal{U}$ e *supondo escolhidos* abertos W_V com $\overline{W_V} \subseteq V$ para cada $V \prec U$ *já* satisfazendo

$$X = \left(\bigcup_{V \prec U} W_V\right) \cup \left(\bigcup_{V \succeq U} V\right), \tag{2.7}$$

escolheremos um aberto W_U com $\overline{W_U} \subseteq U$ de modo que se verifique a identidade

$$X = \left(\bigcup_{V \preceq U} W_V\right) \cup \left(\bigcup_{V \succ U} V\right). \tag{2.8}$$

Ora, como X é T_4 e

$$F_U := X \setminus \left(\left(\bigcup_{V \prec U} W_V\right) \cup \left(\bigcup_{V \succ U} V\right)\right)$$

é um fechado contido em U (certo?!), existe um aberto W_U com $F_U \subseteq W_U$ e $\overline{W_U} \subseteq U$, donde segue que a identidade (2.8) é satisfeita. Por *indução*, existe um *encolhimento* $\mathcal{W} := \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$ de $\mathcal{U}$ por abertos e tal que $\{\overline{W_U} : U \in \mathcal{U}\}$ ainda é um encolhimento de $\mathcal{U}$. Resta ver que $\bigcup \mathcal{W} = X$. Fixado $x \in X$, a hipótese de $\mathcal{U}$ ser ponto-finita garante que $T_x := \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ é finito. Em particular, para $\widetilde{U} := \max_{\preceq} T_x$ deve ocorrer $x \notin V$ para todo $V \succ \widetilde{U}$. Daí, por valer (2.8) para $U := \widetilde{U}$, resulta que $x \in \bigcup_{V \preceq \widetilde{U}} W_V$, i.e., $x \in W_V$ para algum $V \preceq \widetilde{U}$. □

Observação 2.1.52. Em certo sentido, a hipótese sobre a cobertura $\mathcal{U}$ ser ponto-finita garante que os W_U's da construção recursiva acima não *serão* simultaneamente vazios. Nesse contexto, é moralmente edificante tentar realizar a mesma construção com a cobertura $\{[0,\alpha) : \alpha < 1\}$ do espaço normal $[0,1)$ – o leitor pode, inclusive, tomar tal cobertura enumerável considerando apenas os $\alpha \in \mathbb{Q}$ com $0 < \alpha < 1$. No entanto, após falhar miseravelmente, nada impede que *outro* método de construção funcione.

Exercício 2.13. *Exiba* um encolhimento $\mathcal{V}$ por abertos para $\mathcal{U} := \{[0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1)\}$ de maneira que $\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$ ainda seja encolhimento de $\mathcal{U}$. ■

[14] Em sua forma (AC_4).

Um espaço topológico é **ajustável**[15] se *qualquer* cobertura por abertos admitir um encolhimento por abertos cujos fechos ainda sejam um encolhimento. Assim, o teorema anterior se reescreve como a afirmação "todo espaço ajustável é T_4". É então natural se perguntar sobre a validade da recíproca. Resposta: é falsa. Tais contraexemplos existem e, ainda melhor, vivem no acolhedor mundo de ZFC. Contudo, eles são invariavelmente *patológicos* e fogem do escopo desta parte do texto. O leitor interessado deve procurar por *Dowker spaces* a fim de encontrar tópicos relacionados. △

O *grand finale* desta seção será dedicado a revelar que espaços normais não se comportam bem com o produto. Na verdade, a situação é drástica: vamos exibir um espaço normal X cujo quadrado $X \times X$ não é normal[16]. O primeiro passo é demonstrar o próximo teorema, que tem a mesma *natureza cardinal* dos Teoremas 2.1.30, 2.1.23 e 2.1.7.

Teorema 2.1.53 (Lema de Jones)**.** *Sejam X um espaço T_4 e $D \subseteq X$ um subespaço denso. Se $F \subseteq X$ é fechado e discreto com a topologia de subespaço, então $|F| < 2^{|D|}$.*

Demonstração. Como F é discreto com sua topologia de subespaço, segue que qualquer subconjunto $G \subseteq F$ é fechado e, como F é fechado em X, resulta que G também é fechado em X. Logo, por X ser T_4, para cada $G \subseteq F$ existem abertos disjuntos $U(G), V(G) \subseteq X$ tais que $G \subseteq U(G)$ e $F \backslash G \subseteq V(G)$. Mostraremos a injetividade da função $\varphi\colon \wp(F) \to \wp(D)$ que faz $G \mapsto U(G) \cap D$.

De fato, se $G, G' \subseteq F$ são distintos, então $G \setminus G' \neq \emptyset$ ou $G' \setminus G \neq \emptyset$. Supondo o primeiro caso, observe que

$$\emptyset \neq G \setminus G' = G \cap (F \setminus G') \subseteq U(G) \cap V(G'),$$

donde a densidade de D garante a existência de $x \in U(G) \cap V(G') \cap D$. Em particular, tal x atesta que $U(G) \cap D$ e $U(G') \cap D$ são subconjuntos distintos de D. Logo, $2^{|F|} \leq 2^{|D|}$, acarretando $|F| < 2^{|D|}$ em virtude da desigualdade $|F| < 2^{|F|}$ (Corolário K.1.121). □

A contrapositiva do teorema acima dá um teste rápido para detectar espaços *anormais*: basta existir um denso D e um fechado discreto F com $|F| \geq 2^{|D|}$. Esse é o teste que usaremos no próximo

Exemplo 2.1.54 (A reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é normal, mas $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é)**.** É fácil concluir que $\mathbb{R}_S$ é de Hausdorff (e, por conseguinte, T_1) pelo fato de $\mathbb{R}$ (com a topologia usual) ser de Hausdorff. Como todo ponto de $\mathbb{R}_S$ admite uma base local de vizinhanças fechadas (confira o Exercício 2.38), segue de (T_3.c) que $\mathbb{R}_S$ é T_3 e, consequentemente, regular.

Agora, vamos nos convencer de que $\mathbb{R}_S$ é T_4. Dados $F, G \subseteq \mathbb{R}_S$ fechados disjuntos, o fato de $\mathbb{R}_S$ ser T_3 permite tomar, para $x \in F$ e $y \in G$, certos $u(x), v(y) \in \mathbb{R}_S$ com $u(x) > x$, $v(y) > y$, $[x, u(x)) \cap G = \emptyset$ e $[y, v(y)) \cap F = \emptyset$. Daí,

$$U := \bigcup_{x \in F} [x, u(x)) \quad \text{e} \quad V := \bigcup_{y \in G} [y, v(y))$$

são abertos disjuntos com $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$, como queríamos.

[15] Na literatura estrangeira tais espaços são chamados de *shrinking spaces*, algo como *espaço de encolhimento* ou *encolhível*, no sentido de que todas as coberturas são "encolhíveis".

[16] Em particular, como espaços normais são regulares e a regularidade se preserva para produtos, $X \times X$ é um exemplo de espaço T_3 que não é T_4. *Spoiler alert*: mais ainda, $X \times X$ é exemplo de espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ que não é T_4.

Isso mostra que $\mathbb{R}_S$ é de fato um espaço normal. A fim de provar que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal, deve-se recordar do Exercício 1.100: se $D_i \subseteq X_i$ é denso para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} D_i$ é denso em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Ora, por tal resultado, segue em particular que se $D \subseteq \mathbb{R}_S$ é denso, então $D \times D$ é denso em $\mathbb{R}_S$. Logo, por $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}_S$, infere-se que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ tem um denso enumerável.

Assim, em vista do Lema de Jones, basta mostrar que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ tem um subespaço F que seja fechado, discreto e ~~não-enumerável~~[17] com a cardinalidade de $\mathbb{R}$. Fica a cargo do leitor se convencer de que

$$F := \{(-x, x) \in \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S : x \in \mathbb{R}_S\}$$

satisfaz as condições desejadas. Dica: lembre-se do Exercício 1.13; feito isso, para $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}_S$, quais são os habitantes de $([-x, -x+\varepsilon) \times [x, x+\varepsilon)) \cap F$? ▲

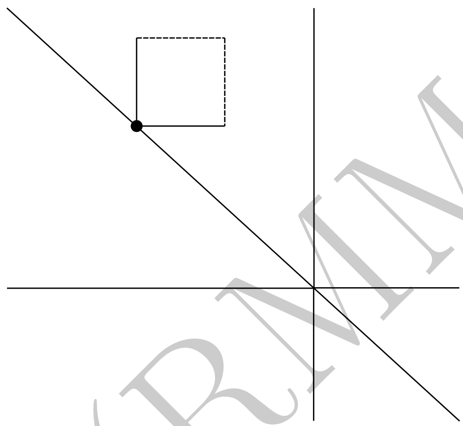


Figura 2.2: A infame diagonal oposta do *plano* de Sorgenfrey.

Exercícios complementares da seção

Espaços T_0, T_1 e T_2

Exercício 2.14. Sejam X um espaço T_0 e $x, y \in X$ distintos. Mostre que existe um filtro $\mathcal{F}$ que converge para somente um desses pontos. Vale a volta? ■

Exercício 2.15. Mostre que um espaço topológico X é T_1 se, e somente se, para quaiquer $x, y \in X$ distintos existe um filtro $\mathcal{F}$ em X tal que $\mathcal{F} \to x$ e $\mathcal{F} \not\to y$. ■

Exercício 2.16. Seja X um espaço T_0. Mostre que se $F \subseteq X$ é finito, então F (como subespaço) tem um ponto isolado. Conclua que se X não tem pontos isolados, então todo aberto não-vazio de X é infinito. Dica: indução em $|F|$. ■

Exercício 2.17. Mostre que X é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$ e toda base local $\mathcal{B}$ em x ocorrer $\bigcap \mathcal{B} = \{x\}$. ■

Exercício 2.18. Sejam X um espaço T_2 e $\mathcal{K}$ uma família finita de subconjuntos compactos de X dois a dois disjuntos. Mostre que existe uma família $\{V_K : K \in \mathcal{K}\}$ de abertos de X dois a dois disjuntos tais que $K \subseteq V_K$ para cada $K \in \mathcal{K}$. Dica: repita o Exercício 2.8, $|\mathcal{K}|$ vezes. ■

Exercício 2.19. Sejam X um espaço T_2 e $x_0, \ldots, x_n \in X$ pontos dois a dois distintos. Mostre que existem abertos dois a dois disjuntos $V_0, \ldots, V_n \subseteq X$ tais que $x_i \in V_i$ para cada $i \leq n$. Dica: confira o exercício anterior. ■

[17] Lembre-se: uma coisa é ser não-enumerável, outra coisa é ter a mesma cardinalidade da reta: a segunda implica a primeira, mas não há garantias (em ZFC) de que a primeira implique a segunda.

Exercício 2.20. Se X é espaço de Hausdorff com $|X| \geq \aleph_0$, então existe uma sequência $(V_n)_{n\in\omega}$ de abertos não-vazios dois a dois disjuntos. Em particular, X tem um discreto enumerável. Dica: se o conjunto dos pontos isolados de X for infinito, ótimo; se não, recursão. ■

Exercício 2.21. Uma função contínua $f: X \to X$ é chamada de **retração** se $f \circ f = f$. Mostre que se X é de Hausdorff e f é uma retração, então $f[X] \subseteq X$ é fechado. ■

Observação 2.1.55. Nas hipóteses do exercício anterior, a imagem $f[X]$ é chamada de **retrato** de X. △

Exercício 2.22. Se X é pseudometrizável, então X é T_2 se, e somente se, X é T_0. ■

Exercício 2.23. Seja A um anel comutativo. Mostre que se $\mathrm{Spec}\,(A)$ é de Hausdorff, então todo ideal primo de A também é maximal[18]. ■

Exercício 2.24 (Para algebristas)**.** Seja A um anel comutativo. Mostre que se $\mathrm{Spec}\,(A)$ é T_1, então $\mathrm{Spec}\,(A)$ é T_2. Conclua que vale a recíproca do exercício anterior. Dica: dados $P, Q \in \mathrm{Spec}\,(A)$ distintos, tome $p \in P \setminus Q$; observe que p é nilpotente em A_P (a localização de A por $S := A \setminus P$), o que se traduz numa igualdade da forma $sp^n = 0$ em A, com $s \notin P$; finalmente, $P \in D(s)$ e $Q \in D(p)$ são as vizinhanças disjuntas procuradas. ■

Exercício 2.25. Quais espaços têm a propriedade de que qualquer subconjunto é a interseção de uma família de abertos? ■

Exercício 2.26 (Compare com a Observação 1.1.97)**.** Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espaços T_1. Se $(\mathcal{T}, \subseteq)$ e $(\mathcal{S}, \subseteq)$ são ordens isomorfas, então X e Y são homeomorfos. Dica: os abertos maximais de X são da forma $X \setminus \{x\}$, e estes devem ser levados pelo isomorfismo de ordem em abertos da forma $Y \setminus \{y\}$ em Y. ■

Exercício 2.27. Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que a função $d: X \times X \to \mathbb{R}$ que faz

$$d_f(x, y) := |f(x) - f(y)|$$

é uma pseudométrica em X. Observe que d_f é métrica se, e somente se, f é injetora. ■

Exercício 2.28. Sejam X um conjunto, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias em X. Mostre que se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ e $(X, \mathcal{S})$ é T_i, então $(X, \mathcal{T})$ é T_i, onde $i \in \{0, 1, 2\}$. ■

Exercício 2.29. Seja X um espaço topológico. Mostre que se para cada sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X ocorre $|\lim_{n\in\omega} x_n| \leq 1$, então X é T_1. ■

Exercício 2.30. Sejam X e Y espaços topológicos, com Y Hausdorff, e $f: X \to Y$ uma função contínua. Mostre que o **gráfico** da função f, $\mathrm{graf}\,(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$. Dica: a função $f \times \mathrm{Id}: X \times Y \to Y \times Y$ que faz $f \times \mathrm{Id}(x, y) := (f(x), y)$ é contínua. ■

Exercício 2.31. Sejam X e Y espaços topológicos, com Y de Hausdorff, e $f: X \to Y$ uma função. Se $\mathrm{graf}\,(f)$ é fechado em $X \times Y$, então f é contínua? Dica: não limite sua imaginação, mas mantenha sempre os pés no chão. ■

Exercício 2.32. Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, suponha que exista um subespaço compacto $K \subseteq Y$ com $\mathrm{im}\,(f) \subseteq K$. Mostre que f é contínua. Dica: espere até o próximo capítulo, a fim de poder usar o fato de que a projeção $\pi: X \times K \to X$ é fechada – ou, agora que já sabe disso... ■

Exercício 2.33. Mostre que se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função limitada e com gráfico fechado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, então f é contínua. ■

Exercício 2.34. Seja $(X, \mathcal{G})$ um espaço de calibre. Mostre que a topologia de X induzida por $\mathcal{G}$ é de Hausdorff se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$ existir $d \in \mathcal{G}$ com $d(x, y) > 0$. ■

[18] Algebristas costumam dizer que um anel com tal propriedade tem *dimensão de Krull* 0.

Espaços T_3 e T_4

Exercício 2.35. Mostre que se um espaço X é T_3 e T_0, então é X é T_1. Conclua que X é regular se, e somente se, X é T_3 e T_0. ■

Exercício 2.36. Mostre que se X é T_4 e $\mathcal{F}$ é uma família finita de fechados de X dois a dois disjuntos, então para cada $F \in \mathcal{F}$ existe um aberto $A_F \subseteq X$ com $F \subseteq A_F$ e tal que $A_F \cap A_G = \emptyset$ se $F, G \in \mathcal{F}$ forem distintos. ■

Exercício 2.37. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $G \subseteq X$ é um **faberto**[19] se G for simultaneamente aberto e fechado. Suponha que exista uma família $\mathcal{G}$ de fabertos tal que todo aberto de X se escreve como reunião de elementos de $\mathcal{G}$ – uma família como $\mathcal{G}$ será chamada de **base de fabertos**. Prove que X é T_3. ■

Exercício 2.38. Mostre que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ admite uma base de fabertos. Conclua que $\mathbb{R}_S$ é T_3. Dica: observe que $[a, b)$ é um faberto. ■

Exercício 2.39. Mostre que um espaço de Hausdorff X é compacto se, e somente se, toda cobertura por abertos de X admite refinamento finito por fechados. O axioma T_2 é essencial? Dica: compacto + $T_2 \Rightarrow T_4$. ■

Exercício 2.40. Sejam X um espaço T_3 e $K, F \subseteq X$ subespaços disjuntos. Mostre que se K é compacto e F é fechado, então existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ com $K \subseteq U$ e $F \subseteq V$. ■

Exercício 2.41. Mostre que se X e Y são espaços pseudometrizáveis, então $X \times Y$ é pseudometrizável. Conclua que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ não é pseudometrizável. ■

Exercício 2.42. Considere $X := \mathbb{R}$ munido da topologia gerada pelas bases locais $\mathcal{B}_x$, onde: $\mathcal{B}_x := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$ se $x \neq 0$ e $\mathcal{B}_0 := \{(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus A : \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$, com $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Mostre que X é T_2 mas não é T_3. ■

Exercício 2.43. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ coberturas por abertos de X tal que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$. Mostre que se $\mathcal{V}$ é ponto-finita, então $\mathcal{U}$ admite um encolhimento ponto-finito $\mathcal{W}$ por abertos de X. Dica: para cada $V \in \mathcal{V}$ escolha um $U_V \in \mathcal{U}$ com $V \subseteq U_V$ e defina $W_U := \bigcup\{V \in \mathcal{V} : U_V = U\}$. ■

Observação 2.1.56. Um espaço topológico em que toda cobertura por abertos admite um refinamento ponto-finito por abertos é chamado de **metacompacto**. Assim, com o exercício acima é fácil ver que todo espaço metacompacto T_4 é ajustável. Futuramente, usaremos tal observação para concluir que espaços (pseudo) metrizáveis são ajustáveis. △

2.2 Separação com funções contínuas

Embora os axiomas de separação introduzidos anteriormente tratem explicitamente da *habilidade* de o espaço topológico separar pontos (ou fechados disjuntos) por meio de abertos disjuntos, vez ou outra funções contínuas fizeram o trabalho sujo:

- em (Haus$_6$), a habilidade de X separar pontos por abertos disjuntos se mostrou equivalente à habilidade de X *identificar* funções contínuas da forma $Z \to X$ por meio dos subespaços densos de Z;
- no Exemplo 2.1.37, funções contínuas definidas em termos de uma pseudométrica foram utilizadas para separar fechados disjuntos por meio de pré-imagens de abertos;
- um modo (não muito econômico) de resolver o Exercício 2.37 consiste em observar que se $x \notin F$, com F fechado, então existe um *faberto* B com $x \in B$ e $B \cap F = \emptyset$, o que garante a continuidade da função característica $\chi_B : X \to \{0, 1\}$, com $x \in \chi_B^{-1}[\{1\}] = B$ e $F \subseteq \chi_B^{-1}[\{0\}] = X \setminus B$, ambos abertos.

[19] Em alusão à expressão original *clopen*. Termo cunhado pelo Prof. Eduardo Tengan.

Os exemplos acima sugerem que o comportamento das funções contínuas influencia diretamente as propriedades de separação do espaço. Esta seção mostrará que essa sugestão, além de correta, é bastante útil.

2.2.1 Espaços $\mathbf{T}_{\mathbf{3}_{1/2}}$ e de Tychonoff

Definição 2.2.1. Um espaço topológico X será xingado de $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$ se ocorrer o seguinte: para quaisquer $x \in X$ e $F \subseteq X$ tais que F é fechado e $x \notin F$, existe uma função contínua $\varphi\colon X \to [0,1]$ tal que $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in F$. Espaços simultaneamente agraciados com os axiomas $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ e T_1 serão chamados de **completamente regulares** ou, como ocorre nos textos mais recentes, **espaços de Tychonoff**[20]. ¶

É fácil ver que espaços $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ são automaticamente T_3, o que levanta a pergunta bastante natural sobre esse subíndice fracionário estranho. Embora o axioma T_4 sozinho não seja capaz de garantir a validade de $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, veremos na próxima subseção que todo espaço normal é necessariamente um espaço de Tychonoff, mostrando que a condição introduzida acima se encaixa, de certa forma, entre as condições T_4 e T_3 previamente estabelecidas. No entanto, espaços $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ não são inéditos neste livro: na verdade, eles já espreitam desde o capítulo anterior.

Teorema 2.2.2. *Um espaço topológico X é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, e somente se, é calibrável.*

Demonstração. Para relembrar alguns detalhes sobre espaços calibráveis, convém rever os Exemplos 1.1.58 e 1.1.78. Assumindo que $(X, \mathcal{T})$ é $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, para cada função contínua $f\colon X \to [0,1]$, consideremos a função $d_f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$, que é uma pseudométrica no conjunto X (Exercício 2.27). Mostraremos que a topologia $\mathcal{S}$ gerada pelo calibre $\mathcal{G} := \{d_f : f \in \mathcal{C}(X,[0,1])\}$ coincide com a topologia original de X, que chamaremos de $\mathcal{T}$.

Primeiro, notemos que para uma função contínua $f\colon (X,\mathcal{T}) \to [0,1]$ fixada, uma d_f-bola aberta $B_{d_f}(x,r)$ é, precisamente, a pré-imagem do intervalo aberto $(-r,r)$ pela função *contínua* $|f(x) - f(\bullet)|\colon (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ dada pela correspondência $y \mapsto |f(x) - f(y)|$. Como os elementos de $\mathcal{S}$ são reuniões arbitrárias de interseções finitas de d_f-bolas abertas com f variando em $\mathcal{C}(X,[0,1])$, a inclusão $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ está provada.

Agora, dado um aberto $U \in \mathcal{T}$ e um ponto $x \in U$, tem-se $F := X \setminus U$ fechado com $x \notin F$. Logo, por X ser $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, existe $f \in \mathcal{C}(X,[0,1])$ tal que $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in F$. Mostraremos que $x \in B_{d_f}(x,1) \subseteq U$: se $y \notin U$, então $f(y) = 0$ e daí $d_f(x,y) = |f(x)| = 1$, acarretando em $y \notin B_{d_f}(x,1)$. Logo, todo elemento de $\mathcal{T}$ se escreve como reunião de elementos de $\mathcal{S}$, donde segue a inclusão $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

Tratemos da recíproca: supondo que $(X,\mathcal{G})$ é um espaço de calibre, mostraremos que *sua topologia* é $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$. Para isso, tomemos $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado com $x \notin F$. Fica a cargo do leitor observar que deve existir uma pseudométrica $d \in \mathcal{G}$ para a qual ocorra $r := d(x,F) > 0$. Com isso, definamos $\varphi\colon X \to [0,1]$ por meio da correspondência $z \mapsto \min\left\{1, \frac{1}{r}d(z,F)\right\}$. Claramente, a função φ satisfaz $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in F$. A continuidade de φ segue por $d(\bullet,F)\colon X \to \mathbb{R}$ ser contínua, bem como pelo Exercício 1.115. Os detalhes ficam sob os cuidados do analista interessado. □

[20]Mais uma vez cabe o alerta: não há consenso quanto a terminologia na literatura. Dito isso, a alcunha "espaço de Tychonoff" será, provavelmente, predominante no texto.

O teorema acima dá uma demonstração indireta de que todo espaço pseudometrizável é $T_{3\frac{1}{2}}$ (fato antecipado na Observação 2.1.40), donde segue que todo espaço metrizável é de Tychonoff. Em particular, em vista do Exercício 2.35 e do fato de que todo espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ é T_3, obtém-se ainda uma solução alternativa para o Exercício 2.22.

Corolário 2.2.3. *Se X é $T_{3\frac{1}{2}}$ e $Y \subseteq X$, então Y é $T_{3\frac{1}{2}}$ com a topologia de subespaço.*

Demonstração. Como subespaços de espaços calibráveis são calibráveis, o resultado segue do teorema anterior. □

Exercício 2.44. Prove o corolário anterior sem usar calibres. ■

Exemplo 2.2.4 (Ser calibrável $\neq$ ser pseudometrizável)**.** A solução alternativa para o Exercício 2.37, sugerida no início desta seção, torna claro que $\mathbb{R}_S$ é um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ e, consequentemente, é um espaço de Tychonoff[21]. Como $\mathbb{R}_S$ não é pseudometrizável (Exercício 2.41), segue do teorema anterior que $\mathbb{R}_S$ é um exemplo de espaço calibrável que não é pseudometrizável. Em particular, isso também mostra que o supremo de topologias T_4 não é necessariamente T_4 (compare isso com o Exercício 2.49). ▲

Proposição 2.2.5. *Se $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços topológicos, então o espaço produto $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, e somente se, X_i é $T_{3\frac{1}{2}}$ para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Por simplicidade, chamemos $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Supondo que cada X_i é $T_{3\frac{1}{2}}$, tomemos $x := (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in X$ e $F \subsetneq X$ fechado com $x \notin F$. Pode-se tomar um $\mathcal{I}$-retângulo $V := \prod_{i\in\mathcal{I}} V_i \subseteq X$ com $x \in V$, $V_i \subseteq X_i$ aberto para todo $i \in \mathcal{I}$, $|\operatorname{supp}(V)| < \aleph_0$ e $V \cap F = \emptyset$. Agora, para cada $j \in \operatorname{supp}(V)$, existe uma função contínua $f_j \colon X_j \to [0,1]$ tal que $f_j(x_j) = 1$ e $f_j(w) = 0$ se $w \in X_j \setminus V_j$. Finalmente, note que a função $f \colon X \to [0,1]$, dada pela regra

$$(y_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto \min\{f_j(y_j) : j \in \operatorname{supp}(V)\}$$

é contínua e satisfaz $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in F$. A recíproca segue do corolário anterior e do Exercício 1.105. □

Corolário 2.2.6. *Se $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços topológicos, então o espaço produto $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é de Tychonoff se, e somente se, X_i é de Tychonoff para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Observação 2.2.7. O leitor atento pode se perguntar o que há de tão especial nos pontos 0 e 1? Evidentemente, a resposta é uma só: nada.

Proposição 2.2.8. *Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ e $F \subsetneq X$ um subconjunto com $x \notin F$. Para $a, b \in \mathbb{R}$ fixados e distintos, existe uma função contínua $f \colon X \to \mathbb{R}$ com $f(x) = a$ e $f[F] = \{b\}$ se, e somente se, existe uma função contínua $g \colon X \to [0,1]$ com $g(x) = 1$ e $g[F] = \{0\}$.*

Demonstração. É mais simples do que parece. Primeiro, se a função f existe, defina $h \colon X \to [0,+\infty)$ fazendo $h(y) := |f(y) - b|$ para cada $y \in X$. Note que h é contínua, com $h(x) \neq 0$ e $h(y) = 0$ para todo $y \in F$. Agora, defina $g \colon X \to [0,1]$ por

$$g(y) := \min\left\{1, \frac{h(y)}{h(x)}\right\},$$

e note que g tem as propriedades exigidas.

Reciprocamente, se g é como no enunciado, então $f := \gamma \circ g$ satisfaz as condições desejadas[22], onde $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $\gamma(t) := (1-t)b + ta$ para cada $t \in [0,1]$. □

[21] *Seguirá* do Lema de Urysohn.
[22] E, de brinde, ocorre $\operatorname{im}(f) \subseteq [\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$.

Implicitamente, a proposição anterior nos livra de muitas picuinhas. Uma delas é que os pontos 0 e 1 na definição de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ tem papel puramente virtual: basta que exista uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$, constante em F e tal que $f(x) \notin f[F]$. Também é frequentemente útil notar que se pode considerar apenas as funções contínuas limitadas, pois uma função contínua e ilimitada que *faz o serviço* se substitui facilmente por uma função contínua, limitada e igualmente eficiente em separar $f(x)$ de $f[F]$. △

Exercício 2.45. Mostre que X é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, e somente se, X tem a topologia fraca induzida por uma família de funções $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$. Obtenha a Proposição 2.2.5 como corolário. Dica: o Exercício 1.259 pode ser útil aqui. ■

Embora ainda seja cedo para o leitor perceber, convém adiantar que "*a Análise acontece nos espaços de Tychonoff*[23]". Por um lado, a estrutura topológica dos espaços de Tychonoff os torna "ricos" em funções contínuas, o mínimo que um ~~bom~~ analista precisa para performar seus truques e malabarismos. Por outro lado, exigências bastante *razoáveis* costumam obrigar que o espaço seja de Tychonoff. Um exemplo típico, e surpreendente, se dá no próximo

Teorema 2.2.9. *Um espaço topológico X é de Tychonoff se, e somente se, existe um conjunto $\mathcal{I}$ tal que $X \subseteq [0,1]^{\mathcal{I}}$, a menos de mergulho*[24].

Demonstração. Assumindo que X seja um espaço de Tychonoff, definamos $\mathcal{I} := \mathcal{C}(X,[0,1])$, o conjunto das funções contínuas da forma $X \to [0,1]$. A *natureza* das $\mathcal{I}$-uplas de $[0,1]^{\mathcal{I}}$ para o conjunto $\mathcal{I}$ escolhido[25] sugere um modo muito maroto de obter uma função contínua da forma $\varphi\colon X \to [0,1]^{\mathcal{I}}$: faremos $x \overset{\varphi}{\longmapsto} (f(x))_{f\in\mathcal{I}}$, o que determina uma função contínua pois $\pi_f \circ \varphi = f$ para cada $f \in \mathcal{I}$. Agora, a estratégia para provar a "ida" deve parecer bem clara: basta mostrar que φ é um mergulho, i.e., que $\varphi\colon X \to \operatorname{im}(\varphi)$ é um homeomorfismo, donde a implicação desejada segue.

Por X ser de Tychonoff, para $x, y \in X$ distintos existe $f \in \mathcal{I}$ com $f(x) \neq f(y)$ e, consequentemente, φ é uma injeção. Agora, mostraremos que $\varphi\colon X \to \operatorname{im}(\varphi)$ é fechada[26]. Dados $F \subseteq X$ fechado e $x \in X$ com $\varphi(x) \in \overline{\varphi[F]}$, deve existir uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em F com $\varphi(x_d) \to \varphi(x)$, o que por sua vez equivale a dizer que para toda função contínua $f\colon X \to [0,1]$ ocorre $f(x_d) \to f(x)$. Ora, se ocorresse $x \notin F$, existiria uma função contínua $g\colon X \to [0,1]$ com $g(x) = 1$ e $g[F] = \{0\}$, o que resultaria em $g(x_d) \not\to g(x)$, contradizendo a conclusão anterior. Logo, $x \in F$ e, pela arbitrariedade do ponto tomado, $\overline{\varphi[F]} \cap \operatorname{im}(\varphi) = \varphi[F]$, mostrando que $\varphi\colon X \to \operatorname{im}(\varphi)$ é fechada, como queríamos.

Para a recíproca, o fato de $[0,1]$ ser de Tychonoff garante que $[0,1]^{\mathcal{I}}$ também é (Proposição 2.2.5), donde segue que $\operatorname{im}(\varphi)$ é um espaço de Tychonoff (Corolário 2.2.3). Como X é homeomorfo a $\operatorname{im}(\varphi)$, segue o resultado[27]. □

Observação 2.2.10. O leitor com aversão a convergência pode provar que a função $\varphi\colon X \to \operatorname{im}(\varphi)$ é fechada da seguinte maneira: nas notações da demonstração acima, a função g obtida permite tomar o $\mathcal{I}$-retângulo $V := \prod_{f\in\mathcal{I}} V_f$, onde $V_g := (0,1]$ e $V_f := [0,1]$ para $f \neq g$, o qual é um aberto de $[0,1]^{\mathcal{I}}$ satisfazendo $\varphi(x) \in V$ e $V \cap \varphi[F] = \emptyset$, uma contradição com a suposição de que $\varphi(x) \in \overline{\varphi[F]}$. △

[23] Mantra a mim ensinado pelo ex-analista Hugo C. Botós.

[24] Em outras palavras, X é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\mathcal{I}}$.

[25] Um habitante típico de $[0,1]^{\mathcal{I}}$ é uma $\mathcal{I}$-upla $(r_i)_{i\in\mathcal{I}}$, onde $r_i \in [0,1]$ para cada $i \in \mathcal{I}$.

[26] Poderíamos mostrar também que é aberta. Tanto faz, devido à Proposição 1.1.111.

[27] Caso não seja evidente: axiomas de separação são propriedades topológicas e, portanto, invariantes por homeomorfismo, no sentido da Definição 1.1.98.

Com certa razão, o leitor pode não ter considerado a suposição de que um espaço está contido num "hipercubo" da forma $[0,1]^{\mathcal{I}}$ como um exemplo típico de exigência razoável. Tal percepção virá na próxima subseção, em que melhoraremos tremendamente o teorema acima: provaremos que todo espaço normal é, necessariamente, de Tychonoff e, como consequência, concluiremos que *X é um espaço de Tychonoff se, e somente se, é subespaço de um compacto T_2.*

Isso seguirá como consequência do *Lema de Urysohn*, um resultado belíssimo – que só é chamado de "lema" por conta dos meandros da História. Trata-se da generalização, para espaços T_4, da próxima proposição: futuramente, a hipótese de compacidade exigida a seguir será substituída por fechamento.

Proposição 2.2.11 (não é o Lema de Urysohn)**.** *Sejam X um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ e $K, F \subseteq X$ subespaços disjuntos. Se K é compacto e F é fechado, então existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ com $f[K] = \{0\}$ e $f[F] = \{1\}$.*

Demonstração. Para cada $x \in K$, o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$ permite fixar uma função contínua $f_x\colon X \to [0,1]$ satisfazendo $f_x(x) = 0$ e $f_x[F] = \{1\}$. Chamando por $I \coloneqq [0, \frac{1}{2})$, resulta que $f_x^{-1}[I]$ é aberto para cada $x \in K$ e, por conseguinte, $K \subseteq \bigcup_{x\in K} f_x^{-1}[I]$.

Agora, como K é compacto, existem $x_0, \ldots, x_n \in K$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{j\leq n} f_{x_j}^{-1}[I],$$

donde segue que a função contínua $g\colon X \to [0,1]$ definida como $g \coloneqq \min_{j\leq n} f_{x_j}$ satisfaz $K \subseteq g^{-1}[I]$ e $g[F] = \{1\}$. Finalmente, basta notar que a função $f\colon X \to [0,1]$ dada por

$$f(x) \coloneqq 2 \cdot \max\left\{g(x) - \frac{1}{2}, 0\right\}$$

satisfaz as condições impostas. □

Corolário 2.2.12. *Sejam X um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ e $B, U \subseteq X$ subconjuntos de X, com B finito e U aberto. Se $B \subseteq U$, então existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in B$ e $f(x) = 1$ se $x \notin U$.*

Demonstração. Faça $K \coloneqq B$ e $F \coloneqq X \setminus U$ na proposição anterior. □

A recíproca do Exercício 1.166, que será provada a seguir, ilustra o poder destrutivo de um bom arsenal de funções contínuas.

Proposição 2.2.13. *Seja X um espaço de Tychonoff. Se $\mathcal{C}_p(X)$ tem caráter enumerável, então $|X| \leq \aleph_0$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base local em $\underline{0}$, com $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$ e, para cada $B \in \mathcal{B}$, escolha um subconjunto finito $F_B \subseteq X$ e um número real $\varepsilon_B > 0$ tal que

$$\langle F_B, \varepsilon_B\rangle[\underline{0}] \coloneqq \{f \in \mathcal{C}_p(X) : \forall x \in F_B \quad |f(x)| < \varepsilon_B\} \subseteq B,$$

o que pode ser feito pois $\langle F_B, \varepsilon_B\rangle[\underline{0}]$ é um *aberto básico*[28] de $\mathcal{C}_p(X)$ que *contém* $\underline{0}$: explicitamente,

$$\langle F_B, \varepsilon_B\rangle[\underline{0}] = \prod_{x\in X} W_x \cap \mathcal{C}_p(X),$$

[28]Não no sentido de que pertence a $\mathcal{B}$, mas no sentido de que é *um aberto básico* da topologia produto interceptado com $\mathcal{C}_p(X)$. Pode ser útil conferir a Observação 1.1.87.

onde $W_x := \mathbb{R}$ se $x \notin F_B$ e $W_x := (-\varepsilon_B, \varepsilon_B)$ caso contrário.

Para concluir a demonstração, mostraremos que $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} F_B$. Ora, se não for este o caso, então existe $x \in X$ com $x \notin F_B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Em particular, como $\langle\{x\}, 1\rangle[\underline{0}]$ é um aberto de $\mathcal{C}_p(X)$ *em torno de* $\underline{0}$, deve ocorrer $B \subseteq \langle\{x\}, 1\rangle[\underline{0}]$ para algum $B \in \mathcal{B}$ e, consequentemente,

$$\langle F_B, \varepsilon_B\rangle[\underline{0}] \subseteq \langle\{x\}, 1\rangle[\underline{0}].$$

Finalmente, por X ser T_1, segue que F_B é fechado e, por X ser $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ com $f(x) = 1$ e $f[F_B] = 0$, mostrando que $f \in \langle F_B, \varepsilon_B\rangle[\underline{0}]$ mas $f \notin \langle\{x\}, 1\rangle[\underline{0}]$, uma contradição. Logo, $|X| \leq |\bigcup_{B\in\mathcal{B}} F_B| \leq \aleph_0$, como queríamos. □

Observação 2.2.14. Pelo menos duas coisas merecem ser destacadas na demonstração anterior:

(i) moralmente, o resultado acima mostra que se $\mathcal{C}_p(X)$ é bem comportado (tem caráter enumerável), então é porque X é *sem graça* (enumerável);

(ii) a *enumerabilidade do caráter* foi mero detalhe.

De fato, o que *realmente* se provou foi: *se* $\mathcal{C}_p(X)$ *tem uma base local infinita* $\mathcal{B}$*, então* $|X| \leq |\mathcal{B}|$. Como também vale a recíproca[29], no sentido de que $\mathcal{C}_p(X)$ *sempre* tem bases locais com cardinalidade $\leq |X|$, segue que $|X|$ *é a menor cardinalidade* que uma base local em $\mathcal{C}_p(X)$ pode ter. Este foi mais um vislumbre do tipo de coisa que será discutida nos capítulos finais. Até lá, o leitor curioso pode conferir a Subseção K.1.6 para rever alguns fatos de aritmética cardinal. △

2.2.2 Os teoremas de Urysohn

Esta subseção se destina, integralmente, a discutir um dos resultados mais impressionantes da Topologia Geral *clássica*: o *Lema* de Urysohn.

Teorema 2.2.15 ("Lema" de Urysohn)**.** *Se X é um espaço T_4 e $F, G \subseteq X$ são subespaços fechados e disjuntos, então existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$.*

O leitor que nunca se deparou com o enunciado acima deve reservar algum tempo para reflexão e, após perceber o quão surpreendente a coisa é, contemplá-la com profunda admiração.

Observação 2.2.16. É sério. Faça isso. △

Observação 2.2.17. Você fez mesmo? Se não fez, faça. Se fez, repita mais uma vez. △

Para o leitor que meditou e não se surpreendeu com o enunciado, eu desenho: o Lema de Urysohn dá conta de cozinhar uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ a partir "do nada". É claro que, a rigor, a função não é obtida "do nada": a hipótese de que X é um espaço T_4 é vital. Ainda assim, não há qualquer menção a funções contínuas ou números reais na definição de espaços T_4 que possa sugerir a mera possibilidade de que tal fenômeno ocorra: pela caracterização (T_4.b), sabe-se apenas que para $F \subseteq U$, com F fechado e U aberto, existe um aberto V com $F \subseteq V$ e $\overline{V} \subseteq U$.

Dito isso, convém destacar: a recíproca é "absolutamente trivial", no seguinte sentido.

[29] Implícita na metadica do Exercício 1.166.

Exercício 2.46. Seja X um espaço topológico. Mostre que se existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$, então existem abertos disjuntos U e V tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Conclua que o Lema de Urysohn é, na verdade, uma caracterização para espaços T_4. ■

Exemplo 2.2.18. Diferente do que se fez no Exemplo 2.1.37, pode-se concluir que um espaço pseudométrico (X,d) é T_4 por meio da função $f\colon X \to [0,1]$ dada por

$$f(x) := \frac{d(x,F)}{d(x,G) + d(x,F)},$$

onde $F, G \subseteq X$ são fechados disjuntos, com $d(x,F)$ e $d(x,G)$ definidas como no Lema 2.1.38. Fica a cargo do leitor verificar que f satisfaz as exigências do exercício anterior. ▲

Apesar de toda a ênfase em torno do Lema de Urysohn, o leitor não deve esperar por uma demonstração complicada. Como alguém muito sábio certa vez me disse, "*as boas ideias, depois de descobertas, parecem óbvias*" e, como veremos, a argumentação para garantir a existência da função contínua é uma excelente ideia que *parecerá* natural.

Lema 2.2.19. *Sejam X um espaço topológico e D um subespaço denso de $\mathbb{R}$ para o qual exista uma família $\{U_d : d \in D\}$ de abertos de X com as duas propriedades a seguir:*

(U_1) $\bigcup_{d\in D} U_d = X$ *e* $\bigcap_{d\in D} U_d = \emptyset$; $\qquad$ (U_2) *se $s,t \in D$ e $s < t$, então $\overline{U_s} \subseteq U_t$.*

Nestas condições, a correspondência $x \mapsto \inf\{d \in D : x \in U_d\}$ define uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Fixado $x \in X$, a hipótese (U_1) dá $s,t \in D$ com $x \in U_s$ e $x \notin U_t$, e daí (U_2) garante $t \leq s$: se ocorresse $s < t$, teria-se $x \in U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_t$, contrariando a escolha de t. Logo, $\{d \in D : x \in U_d\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, não-vazio e limitado inferiormente, donde segue que $f(x)$ existe e está bem definido.

Mais geralmente, para $x \in X$ e $t \in D$, ocorre $x \in U_t$ sempre que $f(x) < t$ pois, pela definição de ínfimo, deve existir $q \in D$ com $x \in U_q$ e $f(x) \leq q < t$, acarretando $x \in U_q \subseteq \overline{U_q} \subseteq U_t$. Por outro lado, para $s \in D$, tem-se $f(x) \leq s$ sempre que $x \in \overline{U_s}$, pois (U_2) impõe $\overline{U_s} \subseteq U_t$ para todo $t \in D$ com $t > s$, donde se infere $f(x) \leq s$. Tais observações, juntamente com a densidade de D, garantem a continuidade de f.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existem $s,t \in D$ tais que $f(x) - \varepsilon < s < f(x) < t < f(x) + \varepsilon$. Logo, pelo que se viu acima, o subconjunto $V := U_t \setminus \overline{U_s}$ é um aberto de X, com $x \in V$ e $f[V] \subseteq [s,t] \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, como queríamos. □

Demonstração do Teorema 2.2.15 – a.k.a. *Lema de Urysohn.* Fixados os subespaços fechados e disjuntos F e G, obteremos uma família $\{U_d : d \in D\}$ de abertos como no lema anterior, onde $D := \mathbb{Q}$ é o subespaço denso[30] da hipótese, tais que para $d \in D$ qualquer se verifique, entre outras coisas,

$$d < 0 \Rightarrow U_d = \emptyset \quad \text{e} \quad d > 1 \Rightarrow U_d = X, \tag{2.9}$$

o que garantirá que a função f, definida como no lema anterior, satisfaz $\mathrm{im}(f) \subseteq [0,1]$.

[30]Para demonstrar a tese do modo como ela foi enunciada, bastaria que D fosse um subespaço denso com $0, 1 \in D$.

Em vista de (2.9), resta definir os abertos U_d para $0 \leq d \leq 1$. Para tanto, fixemos uma bijeção $d\colon \omega \to D \cap [0,1]$ que faz $d_0 := 0$ e $d_1 := 1$ e procedamos recursivamente. Primeiro, definamos $U_1 := X \setminus G$ e, por meio de (T$_4$.b), *tomemos* um aberto $U_0 \subseteq X$ com $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$.

Fixado $n \geq 2$ e supondo *escolhidos* abertos $U_{d_i} \subseteq X$ para cada $i \leq n$ satisfazendo a condição

$$d_s < d_t \Rightarrow \overline{U_{d_s}} \subseteq U_{d_t} \tag{2.10}$$

para quaisquer $s, t \leq n$, vamos *escolher* $U_{d_{n+1}}$ de modo que (2.10) ainda seja satisfeita para $s, t \leq n+1$: sejam $i, j \leq n$ tais que $d_i := \max\{d_s : d_s < d_{n+1}\}$ e $d_j := \min\{d_s : d_{n+1} < d_s\}$, que estão bem definidos pois $d_0 < d_{n+1} < d_1$; como $d_i < d_j$, ocorre $\overline{U_{d_i}} \subseteq U_{d_j}$ e, por (T$_4$.b), pode-se escolher um aberto $U_{d_{n+1}}$ satisfazendo $\overline{U_{d_i}} \subseteq U_{d_{n+1}} \subseteq \overline{U_{d_{n+1}}} \subseteq U_{d_j}$, donde é fácil concluir que (2.10) vale para quaisquer $s, t \leq n+1$, como desejado.

Fica a cargo do leitor a edificante tarefa de verificar que a família $\{U_d : d \in D\}$ satisfaz as condições (U$_1$) e (U$_2$) do lema anterior, bem como notar que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$. □

Observação 2.2.20. Convém refletir sobre o que de fato foi feito na demonstração acima. Começou-se com uma função "parcial" definida em $F \cup G$, $h\colon F \cup G \to [0,1]$ que faz $h(x) := 0$ para $x \in F$ e $h(y) := 1$ para $y \in G$. Em termos gráficos, a função h "pinta" F com a cor 0 (digamos, azul), enquanto "pinta" G com a cor 1 (digamos, branco). O que se busca daí é uma função que pinte a parte intermediária de modo a fazer uma transição *contínua* entre as partes branca e azul.

Nesse sentido, as aplicações sucessivas de (T$_4$.b) resultam em abertos intermediários cujas cores são misturas entre branco e azul, com os índices em $\mathbb{Q}$ controlando a *proporção* das cores em cada etapa. Novas aplicações melhoram o *degradê*, como na figura a seguir[31], de modo que ao se realizar o procedimento para todos os racionais entre 0 e 1, obtém-se uma variação contínua[32]. △

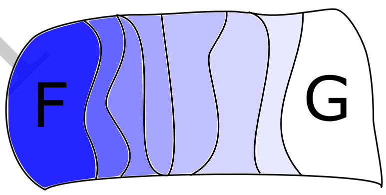


Figura 2.3: Cada aplicação de (T$_4$.b) "suaviza" um pouco mais a transição.

As consequências já antecipadas do Lema de Urysohn estão destacadas nos corolários a seguir.

Corolário 2.2.21. *Todo espaço normal é de Tychonoff.*

Corolário 2.2.22. *Espaços compactos de Hausdorff são de Tychonoff.*

Corolário 2.2.23. *Um espaço topológico X é de Tychonoff se, e somente se, existe um espaço compacto de Hausdorff K com $X \subseteq K$.*

[31] Descaradamente baseada na ilustração do ncatlab.

[32] A rigor, a escolha dos abertos U_d é feita por um processo recursivo. Explicitamente, a cada passo do processo se usa (T$_4$.b) a fim de garantir a não-vacuidade de abertos *intermediários*. Implicitamente, o Axioma da Escolha coleta uma testemunha em cada passo. Cabe ressaltar que o Axioma da Escolha pode ser substituído por uma versão mais fraca, chamada de *Axioma das Escolhas Dependentes*.

Demonstração. Automático em vista do Teorema 2.2.9. □

A Observação 2.2.20 colocou, secretamente, o problema de separar fechados disjuntos como um problema de extensão contínua de funções: a capacidade de estender uma função contínua $h\colon F \cup G \to [0,1]$ para uma função contínua $H\colon X \to [0,1]$ garante que os fechados F e G podem ser separados por uma função contínua e, consequentemente, por abertos disjuntos. Este é o cenário do *Teorema da Extensão de Urysohn*[33], que veremos a seguir num contexto geral, adaptado de Gillman e Jerison [47].

Definição 2.2.24. Dados subconjuntos A e B de um espaço topológico X, diremos que A e B são **completamente separados** (em X) se existir uma função contínua e limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f[A] = \{0\}$ e $f[B] = \{1\}$. ¶

Por simplicidade, daqui em diante, escreveremos

$$\mathcal{C}^*(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) : \exists M > 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M\} \tag{2.11}$$

para indicar o anel das funções reais contínuas e limitadas definidas em X. Note que com tal terminologia, o Lema de Urysohn se traduz na asserção "fechados disjuntos de um espaço T_4 são completamente separados". Note ainda que na definição acima, a exigência de limitação é puramente virtual e pode ser retirada via *truncamento* (confira o Exercício 2.50).

No teorema de extensão que se aproxima, a seguinte propriedade dos subconjuntos completamente separados será extremamente útil.

Lema 2.2.25. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ famílias finitas de subconjuntos de X, tais que para cada par $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ se tenha A e B completamente separados em X. Então $\bigcup \mathcal{A}$ e $\bigcup \mathcal{B}$ são completamente separados em X.*

Demonstração. Fixado $B \in \mathcal{B}$, para cada $A \in \mathcal{A}$ pode-se tomar uma função contínua $g_{A,B}\colon X \to [0,1]$ com $g_{A,B}[A] = \{0\}$ e $g_{A,B}[B] = \{1\}$. Note então que a função

$$\begin{aligned} g_B\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \prod_{A \in \mathcal{A}} g_{A,B}(x) \end{aligned}$$

é contínua e tal que $g_B\left[\bigcup \mathcal{A}\right] = \{0\}$ e $g_B[B] = \{1\}$. Finalmente, defina $g\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) := 1 - \prod_{B \in \mathcal{B}} (1 - g_B(x))$$

para cada $x \in X$, e observe que g é uma função contínua satisfazendo $g\left[\bigcup \mathcal{A}\right] = \{0\}$ e $g\left[\bigcup \mathcal{B}\right] = \{1\}$, como desejado. □

Exercício 2.47. Sejam X um espaço topológico e $A, B \subseteq X$ subconjuntos de X. Mostre que se A e $X \setminus B$ são completamente separados em X, então existe um aberto $U \subseteq X$ com $A \subseteq U$ e $\overline{U} \subseteq B$. Em particular, $A \subseteq \operatorname{int}(B)$. ■

Surpreendentemente, a propriedade de separação completa se relaciona intimamente com a extensão de funções contínuas.

[33] Geralmente creditado a Tietze, que provou o caso métrico. Muito sabiamente, Engelking [39] o chama de Teorema de Tietze-Urysohn.

Definição 2.2.26 (Gillman e Jerison [47]). Diremos que um subconjunto S de um espaço topológico X é **$\mathcal{C}^*$-mergulhado** em X se o morfismo $\mathcal{C}^*(X) \to \mathcal{C}^*(S)$ que faz $f \mapsto f|_S$ for uma sobrejeção, i.e., se toda função contínua e limitada da forma $g\colon S \to \mathbb{R}$ é a restrição de uma função contínua e limitada $F\colon X \to \mathbb{R}$. ¶

Embora as demonstrações do teorema de extensão a seguir frequentemente apelem para a noção de *convergência uniforme*, seria desonesto introduzir um conceito tão importante *apenas* para fazer *isso*[34]. Por essa razão, seguiremos uma abordagem *livre* de tais aparatos, o que exigirá um lema preliminar, adaptado de Mandelkern [70], que evita a convergência uniforme.

Lema 2.2.27 (Truque de Mandelkern). *Sejam X um espaço topológico, $A \subseteq X$ um subconjunto, $f\colon A \to [0,1]$ uma função contínua e $D \subseteq [0,1]$ um subespaço denso com $1 \in D$. Suponha que exista uma família $\{X_r\}_{r\in D}$ de subespaços fechados satisfazendo*

(M$_1$) *$X_1 := X$ e $X_r \cap A = f^{-1}[[0,r]]$ para cada $r \in D$;*

(M$_2$) *se $s,t \in D$ e $s < t$, então $X_s \subseteq \operatorname{int}(X_t)$.*

Nestas condições, a correspondência $x \mapsto \inf\{d \in D : x \in X_d\}$ define uma função contínua $F\colon X \to [0,1]$ que estende f.

Demonstração. Primeiro, note que cada $x \in X$ pertence, pelo menos, ao subconjunto X_1. Como não há $r \in D$ com $r < 0$, resulta que $0 \leq \inf\{d \in D : x \in X_d\} \leq 1$, garantindo assim a boa definição de F como função da forma $X \to [0,1]$. Agora, observe que para $x \in A$ deve ocorrer $F(x) = f(x)$: de fato, se $f(x) = \alpha$, então $x \in f^{-1}[[0,r]] = X_r \cap A$ para qualquer $r \in D$ com $r \geq \alpha$, donde segue que $F(x) := \inf\{d \in D : x \in X_r\} \leq \alpha$; se a desigualdade fosse estrita, deveria existir $d \in D$ com $F(x) \leq d < \alpha$ com $x \in X_d$, mas da igualdade $X_d = A \cap f^{-1}[[0,d]]$ resultaria $f(x) < \alpha$, uma contradição.

Enquanto (M$_1$) garantiu a extensão, (M$_2$) é a responsável pela continuidade de F: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $r, s \in D$ tais que

$$F(x) - \varepsilon < r < F(x) < s < F(x) + \varepsilon,$$

e daí $V := \operatorname{int}(X_s) \setminus X_r$ é um aberto de X com $x \in V$ e $F[V] \subseteq (F(x) - \varepsilon, F(x) + \varepsilon)$. Os detalhes ficam sob a responsabilidade do leitor[35]. □

O lema acima diz que para estender uma função contínua da forma $f\colon S \to [0,1]$, basta obter uma família esperta $\{X_d\}_{d\in D}$ de subespaços fechados de X, com $\overline{D} = [0,1]$. Isto será usado no próximo teorema, extraído de [47], e cuja demonstração é uma adaptação[36] da prova apresentada por Mandelkern [70].

Teorema 2.2.28 (da extensão de Urysohn). *Um subconjunto S de X é $\mathcal{C}^*$-mergulhado em X se, e somente se, quaisquer dois subconjuntos de S completamente separados (em S) são ainda completamente separados como subconjuntos de X.*

[34] A convergência uniforme requer mais informação do que a topologia de um espaço é capaz de capturar. Um sintoma disso é o Exercício 1.184. *Estruturas uniformes* serão tratadas com todo o respeito que merecem no Capítulo 4. O leitor interessado na demonstração do Teorema 2.2.28 *com convergência uniforme* pode conferir o Exemplo 4.1.67.

[35] A argumentação é análoga à do Lema 2.2.19.

[36] Devida a "user125932" e disponível em `https://math.stackexchange.com/a/3323640/128988`.

Demonstração. Comecemos com a direção simples: se S é um subconjunto $\mathcal{C}^*$-mergulhado em X e $A, B \subseteq S$ são completamente separados, então existe uma função contínua e limitada $f\colon S \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f[A] = \{0\}$ e $f[B] = \{1\}$, de modo que a hipótese sobre S dá uma extensão contínua e limitada $g\colon X \to \mathbb{R}$ que, por sua vez, atesta a separação completa entre A e B como subconjuntos de X.

Para a recíproca, notemos primeiramente que basta mostrar a propriedade de extensão para funções da forma $f\colon S \to [0,1]$: de fato, se $g\colon S \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada, tomam-se r e s com $r < s$ tais que $\operatorname{im}(g) \subseteq [r,s]$ e um homeomorfismo $\varphi\colon [r,s] \to [0,1]$, de modo que se $F\colon X \to [0,1]$ *for* uma extensão contínua de $f := \varphi \circ g\colon S \to [0,1]$, então $\varphi^{-1} \circ F$ *será* uma extensão contínua (e limitada) de g.

Agora, para uma função contínua $f\colon S \to [0,1]$, fixemos uma enumeração $\{(r_n, s_n)\}_{n\in\omega}$ para o conjunto $\mathcal{P} := \{(r,s) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : 0 < r < s < 1\}$, o que pode ser feito pois ω e $\mathcal{P}$ estão em bijeção, e para cada $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1] := D$, façamos $A_r := f^{-1}[[0,r]]$, $B_s := f^{-1}[[s,1]]$ e $C_s := X \setminus B_s$.

Note que para $(r,s) \in \mathcal{P}$ deve valer $f(x) \leq r$ se $x \in A_r$ e $f(x) \geq s$ se $x \in B_s$. Logo, ao substituir X por S, A por A_r e B por B_s no Exercício 2.50, resulta que A_r e B_s são completamente separados em S e, por conseguinte, devem ser completamente separados em X pela hipótese sobre S. Curiosamente, esta última observação é o único ponto em que tal hipótese será usada.

Mostraremos que existe uma família $\{H_n\}_{n\in\omega}$ de subespaços fechados de X tal que:

(i) para cada $n \in \omega$, A_{r_n} e $X \setminus \operatorname{int}(H_n)$ são completamente separados em X;

(ii) para cada $n \in \omega$, H_n e B_{s_n} são completamente separados em X;

(iii) se $j, k \in \omega$ são tais que $r_j < r_k$ e $s_j < s_k$, então H_j e $X \setminus \operatorname{int}(H_k)$ são completamente separados em X.

Fixado $n \in \omega$ e supondo definida uma família $\{H_j\}_{j<n}$ satisfazendo as condições acima, obteremos H_n de modo que $\{H_j\}_{j\leq n}$ também satisfaça as mesmas condições. Fazendo $J := \{j < n : r_j < r_n \text{ e } s_j < s_n\}$ e $K := \{k < n : r_n < r_k \text{ e } s_n < s_k\}$, mostraremos que $\mathcal{A} := \{H_j : j \in J\} \cup \{A_{r_n}\}$ e $\mathcal{B} := \{X \setminus \operatorname{int}(H_k) : k \in K\} \cup \{B_{s_n}\}$ satisfazem a condição do Lema 2.2.25:

✓ pela hipótese de indução e pela condição (iii), se $j \in J$ e $k \in K$, então H_j e $X \setminus \operatorname{int}(H_k)$ são completamente separados em X;

✓ por (ii), para cada $j \in J$, H_j e B_{s_j} são completamente separados em X e, como $B_{s_j} \supseteq B_{s_n}$ por valer $s_j < s_n$, tem-se H_j e B_{s_n} completamente separados em X;

✓ analogamente, por (i), $X \setminus \operatorname{int}(H_k)$ e A_{r_k} são completamente separados em X e, por valer $A_{r_n} \subseteq A_{r_k}$ devido à desigualdade $r_n < r_k$, infere-se que $X \setminus \operatorname{int}(H_k)$ e A_{r_n} são completamente separados em X;

✓ finalmente, como já se observou, A_{r_n} e B_{s_n} são completamente separados em X.

Portanto, o Lema 2.2.25 garante que existe uma função contínua $g\colon X \to [0,1]$ com $g\left[\bigcup \mathcal{A}\right] = \{0\}$ e $g\left[\bigcup \mathcal{B}\right] = \{1\}$, o que permite tomar $H_n := g^{-1}\left[\left[0, \frac{1}{2}\right]\right]$. Note que $\{H_j\}_{j<n} \cup \{H_n\}$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) acima.

Finalmente, utilizaremos a família $\{H_n\}_{n\in\omega}$ para obter uma família de fechados $\{X_r\}_{r\in D}$ como no lema anterior. Antes, para facilitar a notação, convém escrever $H_{r,s}$ em vez de H_n, onde $(r,s)\in\mathcal{P}$ é o único par tal que $(r,s)=(r_n,s_n)$. Pelo modo como se tomaram os $H_{r,s}$'s, bem como pelo Exercício 2.47, garante-se que para $(r,s)\in\mathcal{P}$ deve ocorrer

- $A_r\subseteq \operatorname{int}(H_{r,s})\subseteq H_{r,s}\subseteq C_s$,
- se $r<t$ e $s<u$, então $H_{r,s}\subseteq \operatorname{int}(H_{t,u})$.

Agora, basta definir $X_r := \bigcap\{H_{r,s} : s\in\mathbb{Q}\cap(r,1)\}$ para cada $r\in D\setminus\{1\}$ e $X_1 := X$. Note que se $(r,s)\in\mathcal{P}$, então existe $t\in\mathbb{Q}$ com $r<t<s$, e daí

$$X_r\subseteq H_{r,t}\subseteq \operatorname{int}(H_{t,s})\subseteq H_{t,s}\subseteq \bigcap\{H_{s,u} : u\in\mathbb{Q}\cap(s,1)\} := X_s,$$

mostrando que $\{X_r\}_{r\in D}$ satisfaz (M$_2$). Por fim,

$$\begin{aligned} f^{-1}[[0,r]] := A_r \subseteq A\cap X_r = A\cap\bigcap\{H_{r,s} : s\in\mathbb{Q}\cap(r,1)\}\subseteq \\ \subseteq A\cap\bigcap\{C_s : s\in\mathbb{Q}\cap(r,1)\} = A_r,\end{aligned}$$

donde segue que $\{X_r\}_{r\in D}$ satisfaz (M$_1$), como desejado. □

Corolário 2.2.29 (*A.k.a.* Teorema de Tietze-Urysohn)**.** *Sejam X um espaço T_4 e $S\subseteq X$ um subespaço fechado. Se $f\colon S\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe uma função contínua $F\colon X\to\mathbb{R}$ com $F|_S=f$.*

Demonstração. O Lema de Urysohn[37] diz que se $S\subseteq X$ é fechado, então S satisfaz as hipóteses do teorema anterior: de fato, se $A,B\subseteq S$ são completamente separados em S, então existe $g\colon S\to[0,1]$ contínua, com $g[A]=\{0\}$ e $g[B]=\{1\}$, donde segue que $C := g^{-1}[\{0\}]$ e $D := g^{-1}[\{1\}]$ são fechados (em S) e disjuntos; como S é fechado, segue que tanto C quanto D são fechados em X, e daí o Lema de Urysohn dá $G\colon X\to[0,1]$ com $G[C]=\{0\}$ e $G[D]=\{1\}$, mostrando que A e B também são completamente separados em X.

Logo, o Teorema 2.2.28 garante que S é $\mathcal{C}^*$-mergulhável em X. Assim, se a função f do enunciado for limitada, *acabou*. Se não, seja $\psi\colon\mathbb{R}\to(-1,1)$ um homeomorfismo e considere a função $h := \psi\circ f\colon S\to(-1,1)$. Como h é contínua e limitada, o fato de S ser $\mathcal{C}^*$-mergulhável dá uma extensão contínua $H\colon X\to[-1,1]$ de h. Agora, $T := H^{-1}[\{-1,1\}]$ e S são subespaços disjuntos e fechados em X, o que permite usar o Lema de Urysohn mais uma vez para conjurar uma função $\Gamma\colon X\to[0,1]$ com $\Gamma[T]=\{0\}$ e $\Gamma[S]=\{1\}$. Finalmente, note que $\psi^{-1}\circ\widetilde{H}\colon X\to\mathbb{R}$ é uma extensão de f, onde $\widetilde{H}(x) := \Gamma(x)H(x)$. □

Observação 2.2.30 (extensão de funções em $[0,1]$)**.** Convém destacar que se X é T_4 e $f\colon S\to[0,1]$ é uma função contínua com $S\subseteq X$ fechado, então a extensão contínua de f pode ser tomada com a imagem contida no intervalo $[0,1]$: isso está implícito nas demonstrações do corolário anterior e do Teorema 2.2.28. △

A conclusão do penúltimo corolário é, em certo sentido, mais forte do que a obtida no Teorema 2.2.28. De fato, se retirarmos a restrição de limitação das funções na Definição 2.2.26, obteremos o que geralmente se chama de subespaço $\mathcal{C}$-*mergulhável*:

[37] Na verdade, em certo sentido o próprio Lema de Urysohn é consequência do Teorema da Extensão de Urysohn. Confira o Exercício 2.54.

Definição 2.2.31. Nas condições anteriores, um subespaço $S \subseteq X$ é **$\mathcal{C}$-mergulhável** se o morfismo de anéis $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(S)$ dado por $f \mapsto f|_S$ for sobrejetor. ¶

Nesse sentido, o corolário acima diz, simplesmente, que *todo subespaço fechado de um espaço T_4 é $\mathcal{C}$-mergulhável.* Outra vantagem do Teorema da Extensão de Urysohn é sua versatilidade: acima, ele foi combinado com o Lema de Urysohn (um construtor de funções) para mostrar que subespaços fechados de espaços T_4 são $\mathcal{C}$-mergulháveis. Isso sugere que seja possível combiná-lo com outros métodos de construção de funções para obter resultados análogos. Há pelo menos um caso que merece atenção, que encerrará esta subseção.

Corolário 2.2.32. *Se X é um espaço de Tychonoff e $K \subseteq X$ é compacto, então K é $\mathcal{C}$-mergulhável. Explicitamente: se $f\colon K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe uma função contínua $F\colon X \to \mathbb{R}$ com $F|_K = f$.*

Demonstração. Sejam $A, B \subseteq K$ completamente separados em K e tome $g\colon K \to [0,1]$ uma função contínua com $g[A] = \{0\}$ e $g[B] = \{1\}$. Note que $A \subseteq C \coloneqq g^{-1}[\{0\}]$ e $B \subseteq D \coloneqq g^{-1}[\{1\}]$, com C e D disjuntos e fechados em K. Como K é compacto, a Proposição 2.2.11 diz que C e D são completamente separados em X e, consequentemente, A e B são completamente separados em X. Logo, o Teorema 2.2.28 garante que K é $\mathcal{C}^*$-mergulhável e, pela compacidade de K, $\mathcal{C}$-mergulhável (confira o Exercício 2.55). □

2.2.3 Partições da unidade

Nesta última subseção vamos abordar as chamadas *partições da unidade.* Embora elas se relacionem mais naturalmente com a chamada *paracompacidade*[38], que será abordada no próximo capítulo, espaços normais constituem, em certo sentido, o ambiente típico para a sua utilização.

Na longínqua Subseção K.2.3, para um subconjunto $P \subseteq [0, +\infty)$, definiu-se a *série* de P como

$$\sum P \coloneqq \sum_{p \in P} p \coloneqq \sup\left\{\sum_{x \in F} x : F \in [P]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\}\right\},$$

explicitamente, o supremo de todas as somas *finitas* de termos de P. Essa simples ideia leva a generalizações muito naturais e úteis. Primeiro, caso se tenha $P \coloneqq \operatorname{im}(g)$, onde $g\colon Y \to [0, +\infty)$ é uma função definida num certo conjunto Y, faz sentido considerar $\sum g$ como $\sum P$, i.e.,

$$\sum g \coloneqq \sum_{y \in Y} g(y). \tag{2.12}$$

Mais geralmente, fixados um conjunto X e uma família $\mathcal{F}$ de funções da forma $f\colon X \to [0, +\infty)$, pode-se definir, para cada $x \in X$, a série $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x)$ obtida de (2.12) ao se fazer $Y \coloneqq \mathcal{F}$ e $g\colon Y \to [0, +\infty)$ dada por $g(f) \coloneqq f(x)$. Como x foi tomado arbitrariamente em X, isso resulta numa função

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{F}} f\colon X &\to [0, +\infty] \\ x &\mapsto \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

[38]Classicamente, a última propriedade topológica útil para as outras áreas da Matemática. Entenda como quiser.

Observação 2.2.33. Note que, acima, o *ponto* $+\infty$ foi acrescentado pois, a princípio, nada impede a ocorrência de $\sum_{f\in F} f(x) = +\infty$ para algum $x \in X$, já que não foram feitas exigências sobre a natureza das funções em $\mathcal{F}$ ou mesmo sobre X. △

Nas condições anteriores, suponha que X seja um espaço topológico e, mais ainda, que toda função em $\mathcal{F}$ seja contínua e *real*, i.e., $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, [0, +\infty))$. O mundo seria um lugar melhor se a função $F := \sum_{f\in\mathcal{F}} f$ fosse contínua? Possivelmente – por isso mesmo, uma rápida olhada pela janela denuncia que tal função não é contínua (o leitor sem janelas pode conferir o Exercício 2.56). Ainda assim, sonhar pode trazer benefícios.

Definição 2.2.34. Nas condições acima, a família $\mathcal{F}$ será chamada de **partição da unidade**[39] (de X) se ocorrer $\sum_{f\in\mathcal{F}} f(x) = 1$ para cada $x \in X$. ¶

Tendo em vista a Proposição K.2.135, se $\mathcal{F}$ é uma partição da unidade, então deve ocorrer $|\{f \in \mathcal{F} : f(x) > 0\}| \le \aleph_0$ para cada x, i.e., a desigualdade $f(x) > 0$ ocorre para, no máximo, $\aleph_0$ funções da família $\mathcal{F}$. Esse comportamento se reflete de modo curioso no espaço X.

Observe que para $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ fixados, deve existir um subconjunto finito $F_x \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\sum_{f\in F_x} f(x) > 1 - \varepsilon$. Logo, o subconjunto

$$V_x := \left\{ y \in X : \sum_{f\in F_x} f(y) > 1 - \varepsilon \right\} = \left(\sum_{f\in F_x} f \right)^{-1} [(1 - \varepsilon, +\infty)]$$

é um aberto de X *em torno* de x com a seguinte propriedade: se $y \in V_x$ e $g \notin F_x$, então $g(y) < \varepsilon$, caso contrário ocorreria

$$1 = \sum_{f\in\mathcal{F}} f(y) \ge \sum_{f\in F_x} f(y) + g(y) > 1 - \varepsilon + \varepsilon = 1,$$

uma contradição. *Consequentemente*, é contínua a função $\mu\colon X \to (0, 1]$ dada pela correspondência $x \mapsto \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$ pois, *localmente*, ela se manifesta como uma função contínua: a saber, tomando-se V_x como acima, para $0 < \varepsilon < \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$, deve ocorrer $\mu(y) = \max\{f(y) : f \in F_x\}$ para cada $y \in V_x$. O exercício a seguir ajuda a explicitar o que foi feito.

Exercício 2.48. Seja $f\colon X \to Y$ uma função tal que para cada $x \in X$ existem um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e uma função contínua $g_V\colon X \to Y$ satisfazendo $g_V(y) = f(y)$ para todo $y \in V$. Mostre que f é contínua. ■

Lema 2.2.35 (Mather[40]). *Dada uma partição da unidade $\mathcal{F} := \{f_j : j \in \mathcal{J}\}$ de X, existe uma partição da unidade $\mathcal{G} := \{g_j : j \in \mathcal{J}\}$ de X, com $g_j^{-1}[(0, 1]] \subseteq f_j^{-1}[(0, 1]]$ para cada $j \in \mathcal{J}$ e tal que, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança V de x satisfazendo*

$$|\{j \in \mathcal{J} : V \cap g_j^{-1}[(0, 1]] \neq \emptyset\}| < \aleph_0.$$

Demonstração. Tomemos $\mu\colon X \to (0, 1]$ como acima e consideremos a função contínua $h_j := \max\{0, 2f_j - \mu\}$ para cada $j \in \mathcal{J}$. Observe que se $h_j(x) > 0$, então

$$2f_j(x) - \mu(x) > 0 \Rightarrow 2f_j(x) > \mu(x) > 0 \Rightarrow f_j(x) > 0,$$

[39] Esta definição é bem menos exigente do que a encontrada em outras referências, mas chegaremos lá.
[40] Resultado adaptado do *Lectures on Algebraic Topology* [36], de Albrecht Dold. Pois é.

mostrando que $h_j^{-1}[(0,1]] \subseteq f_j^{-1}[(0,1]]$. Por outro lado, para $x \in X$ fixado e $\varepsilon := \frac{\mu(x)}{4}$, a mesma argumentação que precede este lema permite obter uma vizinhança $V \subseteq X$ de x e um subconjunto finito $F_x \subseteq \mathcal{J}$ tais que $\mu(y) > 2\varepsilon$ e $f_j(y) < \varepsilon$ sempre que $y \in V$ e $j \notin F_x$. Logo, $h_j(y) = 0$ para todo $y \in V$ exceto, possivelmente, para $j \in F_x$, i.e.,

$$\left|\{j \in \mathcal{J} : V \cap h_j^{-1}[(0,1]] \neq \emptyset\}\right| < \aleph_0. \tag{2.14}$$

A prova só não está encerrada pois falta garantir que $\mathcal{H} := \{h_j : j \in \mathcal{J}\}$ é uma partição da unidade, o que pode ser facilmente remediado. Como μ é localmente dada como máximo de certas f_j's, para cada $x \in X$ existe $i \in \mathcal{J}$ com $\mu(x) = f_i(x)$, donde segue que $h_i(x) = f_i(x) = \mu(x) > 0$. Logo, a função $h\colon X \to [0,+\infty)$ dada por $h(x) := \sum_{j\in\mathcal{J}} h_j(x)$ satisfaz $h(x) > 0$ para todo $x \in X$ e, mais ainda, é contínua: embora h tenha sido definida como uma série, (2.14) garante que, localmente, ela é soma (finita) de funções contínuas e, devido ao exercício anterior, é contínua[41]. Enfim, basta notar que ao se fazer

$$g_i(x) := \frac{h_i(x)}{h(x)}$$

para cada $i \in \mathcal{J}$, obtém-se uma família de funções com as propriedades desejadas. □

Definição 2.2.36. Diz-se que uma família $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X é **localmente finita** se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que $|\{V \in \mathcal{V} : U \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. ¶

Observe que se $\mathcal{F} := \{f_j : j \in \mathcal{J}\}$ é uma partição da unidade de X, então a família $\mathcal{U} := \{f_j^{-1}[(0,1]] : j \in \mathcal{J}\}$ é uma cobertura por abertos de X, que chamaremos de **cobertura induzida pela partição**. Assim, o lema anterior diz que, fixada uma partição da unidade $\mathcal{F} := \{f_j : j \in \mathcal{J}\}$, existe uma partição da unidade $\mathcal{G} := \{g_j : j \in \mathcal{J}\}$ tal que a cobertura induzida $\mathcal{V} := \{g_j^{-1}[(0,1]] : j \in \mathcal{J}\}$ é um *encolhimento* da cobertura $\mathcal{U}$ (ou é um refinamento *precisamente subordinado a* $\mathcal{U}$, como preferir), com a propriedade adicional de ser localmente finita.

Definição 2.2.37. Por simplicidade, diremos que uma partição da unidade $\mathcal{G}$ de X é:

(i) **localmente finita** se sua cobertura induzida for localmente finita;

(ii) **subordinada** a uma cobertura $\mathcal{W}$ se para cada $g \in \mathcal{G}$ existir $W \in \mathcal{W}$ com $g^{-1}[(0,1]] \subseteq W$;

(iii) **precisamente subordinada** a uma cobertura $\mathcal{W}$ se ocorrer $\mathcal{G} := \{g_W : W \in \mathcal{W}\}$ com $g_W^{-1}[(0,1]] \subseteq W$ para cada $W \in \mathcal{W}$. ¶

O leitor já deve estar inquieto com toda essa discussão vaga: afinal de contas, por que alguém iria se importar com funções ~~aparentemente~~ tão artificiais e peculiares?

Exemplo 2.2.38 (Como colar funções contínuas)**.** Na minha curta experiência, partições da unidade são bem mais apelativas em nichos clássicos da Geometria Diferencial do que na própria Topologia Geral[42], o que *me* livra da tarefa de apresentar aplicações. Ainda assim, pode ser interessante descrever, em linhas gerais, uma situação típica em que elas são úteis.

[41] Isso também assegura que não ocorre $h(x) = +\infty$ para algum $x \in X$.

[42] O que não significa dizer que elas sejam inúteis aqui.

Seja Z um $\mathbb{R}$-espaço vetorial munido de uma topologia que torne suas operações contínuas[43], e suponha que um espaço topológico X admita uma cobertura por abertos localmente finita, digamos $\mathcal{U}$, bem como uma partição da unidade de X precisamente subordinada a $\mathcal{U}$, digamos $\mathcal{F} := \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$, com a propriedade adicional de que $\overline{f_U^{-1}[(0,1]]} \subseteq U$ ocorre para cada $U \in \mathcal{U}$.

Agora, se para cada $U \in \mathcal{U}$ existir uma função contínua $\chi_U \colon U \to Z$, pode-se definir $g_U \colon X \to Z$ por $g_U(x) := f_U(x) \cdot \chi_U(x)$ se $x \in U$ e $g_U(x) := 0_Z$ se $x \notin \overline{f_U^{-1}[(0,1]]}$, o que determina uma função contínua. Logo, a condição de finitude local garante que a correspondência

$$x \mapsto \sum_{U \in \mathcal{U}} g_U(x)$$

determina uma função contínua $g \colon X \to Z$. Em particular, para cada $x \in X$ existem finitos $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $f_{U_i}(x) > 0$ e $\sum_{i \leq n} f_{U_i}(x) = 1$, donde segue que

$$g(x) = \sum_{i \leq n} f_{U_i}(x) \chi_{U_i}(x),$$

i.e., $g(x)$ é uma combinação $\mathbb{R}$-linear *convexa* dos vetores $\chi_{U_i}(x)$. ▲

É bem pouco provável que o exemplo acima tenha atiçado a curiosidade do leitor. Ainda assim, qualquer um disposto a fingir interesse pelo assunto pode se perguntar sobre quais seriam os espaços nos quais a existência de partições da unidade como acima são garantidas. A resposta está no título desta subseção.

Teorema 2.2.39. *Um espaço topológico X é T_4 se, e somente se, toda cobertura por abertos localmente finita admite uma partição da unidade localmente finita e precisamente subordinada.*

Demonstração. Primeiro, observe que se $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos localmente finita e $\mathcal{F} := \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma partição da unidade precisamente subordinada a $\mathcal{U}$, então necessariamente $\mathcal{F}$ é localmente finita pois, para qualquer V, vale a inclusão

$$\{U \in \mathcal{U} : f_U^{-1}[(0,1]] \cap V \neq \emptyset\} \subseteq \{U \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset\}.$$

Agora, supondo que X é T_4, fixemos uma cobertura localmente finita $\mathcal{U}$ por abertos de X. Como $\mathcal{U}$ é, necessariamente, ponto-finita, o Teorema 2.1.51 dá um encolhimento por vizinhanças fechadas $\mathcal{V} := \{F_U : U \in \mathcal{U}\}$ de $\mathcal{U}$. Mais precisamente, para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in \operatorname{int}(F_U) \subseteq F_U \subseteq U$, com F_U fechado. Por sua vez, como F_U e $X \setminus U$ são fechados disjuntos, o Lema de Urysohn garante uma função contínua $f_U \colon X \to [0,1]$ com $f_U[F_U] = \{1\}$ e $f_U[X \setminus U] = \{0\}$.

Consequentemente, para $U \in \mathcal{U}$ deve ocorrer $\overline{f_U^{-1}[(0,1]]} \subseteq U$, donde segue que a família $\mathcal{W} := \{\overline{f_U^{-1}[(0,1]]} : U \in \mathcal{U}\}$ é um refinamento precisamente subordinado a $\mathcal{U}$ e, por conseguinte, $\mathcal{W}$ é localmente finita. Logo, a correspondência

$$x \mapsto \sum_{U \in \mathcal{U}} f_U(x),$$

determina uma função contínua $f \colon X \to (0, +\infty)$.

[43] Por exemplo, Z pode ser $\mathbb{R}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Se ocorrer $f(x) = 1$ para todo $x \in X$, então a partição da unidade procurada é, simplesmente, a família $\mathcal{F} := \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$. Se não, basta considerar, como no Lema 2.2.35, a família de funções $\{g_U : U \in \mathcal{U}\}$, onde

$$g_U(x) := \frac{f_U(x)}{f(x)}$$

para cada $x \in X$.

Reciprocamente, dados $F, G \subseteq X$ subespaços fechados e disjuntos, uma partição da unidade $\{f_{X\setminus F}, f_{X\setminus G}\}$ precisamente subordinada à cobertura $\{X \setminus F, X \setminus G\}$ é tal que $f_{X\setminus F}(x) = 0$ se $x \in F$ e $f_{X\setminus F}(x) = 1$ se $x \in G$, mostrando que vale o Lema de Urysohn. Os detalhes serão deixados a cargo do leitor. □

Em particular, em espaços normais *sempre* é possível obter partições da unidade subordinadas a coberturas abertas *localmente finitas*, o que sugere um problema aparentemente mais interessante: em quais espaços *toda* cobertura por abertos admite *refinamento localmente finito*? Os espaços *paracompactos* são a resposta para a pergunta, como veremos na Subseção 3.2.3.

Observação 2.2.40. As condições $\mathrm{T}_0, \ldots, \mathrm{T}_4$ não esgotam os axiomas de separação *conhecidos*, há outros – tanto mais exigentes do que T_4 quanto menos restritivos do que T_3 e T_2. Contudo, para um primeiro contato, a lista explorada ao longo das últimas seções me parece bem razoável. △

Exercícios complementares da seção

Exercício 2.49. Sejam X um conjunto e $\mathscr{A}$ uma família de topologias em X. Para $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, suponha que cada topologia $\mathcal{T} \in \mathscr{A}$ satisfaz o axioma T_i. É verdade que $\sup \mathscr{A}$ é uma topologia T_i? E o que dizer sobre $\bigcap \mathscr{A}$? ■

Exercício 2.50. Com respeito a um espaço topológico X e subconjuntos $A, B \subseteq X$, considere as afirmações a seguir:

(i) existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ com $f[A] = \{0\}$ e $f[B] = \{1\}$;

(ii) existe uma função contínua e limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ com $f[A] = \{0\}$ e $f[B] = \{1\}$;

(iii) existe uma função contínua e limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ com $f(x) \leq 0$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq 1$ para todo $x \in B$;

(iv) existem uma função contínua e limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ e números reais $r, s \in \mathbb{R}$ com $r < s$ tais que $f(x) \leq r$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq s$ para todo $x \in B$;

(v) existem uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ e números reais $r, s \in \mathbb{R}$ com $r < s$ tais que $f(x) \leq r$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq s$ para todo $x \in B$;

(vi) existem números reais $r, s \in \mathbb{R}$ com $r < s$ e uma função contínua $f\colon X \to [r, s]$ tais que $f[A] = \{r\}$ e $f[B] = \{s\}$.

Prove que todas as afirmações são equivalentes. Dica: max e min. ■

Exercício 2.51. Sejam X um espaço de Tychonoff. Mostre que $|X| \leq |\mathcal{C}(X)|$. ■

Exercício 2.52. Mostre que a desigualdade anterior não é válida para qualquer espaço topológico. ■

Exercício 2.53. Seja X um espaço de Tychonoff. Mostre que $\mathcal{C}_p(X)$ é subespaço denso de $\mathbb{R}^X$. Dica (para quem não quer sujar as mãos): use a tecnologia do Corolário 2.2.32. ■

Exercício 2.54. Adapte a demonstração do Teorema 2.2.28 para provar diretamente o Teorema de Tietze-Urysohn. A seguir obtenha o Lema de Urysohn como corolário. Dica: use a hipótese adicional de X ser T_4, que não está presente no Teorema 2.2.28, para obter a família de fechados $\{H_n\}_{n\in\omega}$. ■

Exercício 2.55. Seja K um subespaço compacto de X. Mostre que K é $\mathcal{C}^*$-mergulhável em X se, e somente se, K é $\mathcal{C}$-mergulhável em X. ■

Exercício 2.56. Seja X um espaço topológico. Uma função $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ é **inferiormente semicontínua** se $\{x \in X : f(x) > b\}$ é aberto em X para todo $b \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que se $\mathcal{F}$ é uma família de funções inferiormente semicontínuas, então $\sup \mathcal{F}$ é inferiormente semicontínua.

b) Mostre que se X é $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, então toda função inferiormente semicontínua definida em X é o supremo de uma família de funções contínuas da forma $X \to [-\infty, +\infty]$. Dica: troque $[-\infty, +\infty]$ por $[-1, 1]$ e mostre que para cada $x_0 \in X$ e $a < f(x_0)$ existe $g\colon X \to [-1, 1]$ contínua com $g \leq f$ e $g(x_0) \geq a$.

Conclua que o supremo de funções contínuas pode não ser contínuo. ■

Exercício 2.57 (Mergulho de Urysohn)**.** Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ uma família de funções contínuas. Considere $Z := Y^{\mathcal{F}}$ munido da topologia produto e chame por $\Delta_{\mathcal{F}}\colon X \to Z$ a função que faz $\Delta_{\mathcal{F}}(x) := (f(x))_{f\in\mathcal{F}}$.

a) Mostre que $\Delta_{\mathcal{F}}$ é contínua.

b) Mostre que se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existe $f \in \mathcal{F}$ com $f(x) \neq f(y)$, então $\Delta_{\mathcal{F}}$ é injetora.

c) Mostre que se para quaisquer $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado com $x \notin F$ existe $f \in \mathcal{F}$ com $f(x) \notin \overline{f[F]}$, então $\Delta_{\mathcal{F}}\colon X \to \Delta_{\mathcal{F}}[X]$ é fechada.

Conclua que se b) e c) são simultaneamente satisfeitas, então $\Delta_{\mathcal{F}}$ é um mergulho. Dica: confira a demonstração do Teorema 2.2.9. ■

Observação 2.2.41. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de funções satisfazendo as hipóteses do item b) **separa pontos**, enquanto aquelas que satisfazem as hipóteses do item c) **separam pontos de fechados**. △

Exercício 2.58. Repita o exercício anterior, substituindo Y por uma família $\{Y_i : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços topológicos, $\mathcal{F}$ por uma família $\{f_i\colon X \to Y_i | i \in \mathcal{I}\}$ de funções contínuas, $Y^{\mathcal{F}}$ por $\prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$ e defina $\Delta_{\mathcal{F}}$ fazendo $x \mapsto (f_i(x))_{i\in\mathcal{I}}$. ■

Exercício 2.59. Use o Corolário 2.2.23 juntamente com o Teorema de Tychonoff para mostrar que o produto arbitrário de espaços de Tychonoff é de Tychonoff. ■

Exercício 2.60. Convença-se de que o exercício acima generaliza simultaneamente os Exercícios 1.89, 1.95 e 1.102. ■

Exercício 2.61. Mostre que se um espaço topológico satisfaz a tese do Teorema de Tietze-Urysohn (Corolário 2.2.29), então X é T_4. ■

Exercício 2.62. Mostre que se X é T_4 e $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos localmente finita, então existe uma partição da unidade $\mathcal{F} = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$ tal que $\overline{f_U^{-1}[(0,1]]} \subseteq U$ para todo $U \in \mathcal{U}$. ■

Exercício 2.63 (Lema da Colagem)**.** Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura de X por subconjuntos quaisquer e $f\colon X \to Y$ uma função. Mostre que f é contínua em qualquer um dos casos a seguir:

(i) para todo $U \in \mathcal{U}$, U é aberto e $f|_U$ é contínua;

(ii) $\mathcal{U}$ é localmente finita e, para todo $U \in \mathcal{U}$, U é fechado e $f|_U$ é contínua. ■

Exercício 2.64 (Hu [56])**.** Um espaço Y é chamado de **sólido** se para qualquer subespaço fechado A de um espaço normal X dotado de uma função contínua $f\colon A \to Y$ existir uma extensão contínua $F\colon X \to Y$. Mostre que o produto de espaços sólidos é sólido. Use isso para obter extensões do Teorema de Tietze. ■

Exercício 2.65. Contemple o panorama das relações de implicação entre os axiomas de separação estudados neste capítulo.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Hausdorff} \arrow[d, equal] & \text{regular} \arrow[d, equal] & \text{Tychonoff} \arrow[d, equal] & \text{normal} \arrow[d, equal] & \text{metrizável} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, bend right] \\
\mathrm{T}_2 \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{T}_3+\mathrm{T}_1 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}+\mathrm{T}_1 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{T}_4+\mathrm{T}_1 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \\
\mathrm{T}_1 \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{T}_3 & \mathrm{T}_{3\frac{1}{2}} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \mathrm{T}_4 & \text{pseudometrizável} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "+\mathrm{T}_0"'] \arrow[ll, Rightarrow, bend left] \\
\mathrm{T}_0 & & \text{calibrável} & &
\end{tikzcd}
$$

Procure em sua memória (ou nas páginas anteriores) espaços que atestem a falsidade das recíprocas das implicações acima. ■

2.3 (des) Conexidade

Os axiomas de separação explorados até agora trataram de um tipo de separação *local*, voltada para a capacidade de distinguir pontos. Como isso se traduz eventualmente numa certa riqueza de funções contínuas, faz algum sentido dizer que tais propriedades têm caráter *analítico*[44]. Há, no entanto, uma noção de separação global, referente ao próprio espaço, com forte apelo *geométrico*: entram em cena a *conexidade* e suas variações. A ideia, em sua essência, é bastante simples.

Definição 2.3.1. Um espaço topológico X é **desconexo** se X for reunião disjunta de dois *pedaços* abertos não-vazios, i.e., se existirem abertos não-vazios $U, V \subseteq X$ tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$. Daí, um espaço topológico é **conexo** se não for desconexo. ¶

Intuitivamente, um espaço conexo é o seu único pedaço.

É comum que textos introdutórios de Topologia Geral se portem de maneira patologicamente obsessiva diante da conexidade pois, como veremos, ela garante algumas propriedades muito úteis para uma vasta gama de espaços *típicos*. Em certa medida, a mesma postura será adotada nas duas subseções a seguir. Contudo, a penúltima subseção fará o contrário: exaltará a *desconexidade*.

2.3.1 Espaços conexos e onde habitam

Comecemos nossa aventura com algumas caracterizações equivalentes de conexidade.

Proposição 2.3.2. *Para um espaço topológico X, são equivalentes:*

(con_1) *X é conexo;*

(con_2) *se $F, G \subseteq X$ são fechados não-vazios tais que $X = F \cup G$, então $F \cap G \neq \emptyset$;*

(con_3) *se $A \subseteq X$ é aberto e fechado, i.e., **faberto**, então $A \in \{\emptyset, X\}$;*

(con_4) *toda função contínua $f : X \to \{0, 1\}$ é constante*[45].

[44] No sentido de que se refletem no comportamento de funções, objeto típico d'A Análise.

[45] *Naturalmente*, $\{0, 1\}$ é assumido com a topologia discreta.

Demonstração. Todas as implicações serão provadas pela contrapositiva, a começar com (con$_1$) $\Rightarrow$ (con$_2$). Se $F, G \subseteq X$ são fechados disjuntos com $X = F \cup G$, então para $U := X \setminus F$ e $V := X \setminus G$ têm-se

$$X = F \cup G = (X \setminus G) \cup (X \setminus F) = V \cup U \subseteq X,$$

com U e V abertos disjuntos não-vazios, i.e., X não é conexo.

Agora, se $A \subseteq X$ é faberto, com $A \notin \{\emptyset, X\}$, então X se expressa como a reunião disjunta $A \cup (X \setminus A)$, com A e $X \setminus A$ fechados disjuntos não-vazios. Portanto, vale (con$_2$) $\Rightarrow$ (con$_3$).

Por sua vez, se $f \colon X \to \{0, 1\}$ é contínua e não-constante, então $f^{-1}[\{0\}] \neq \emptyset$ e $f^{-1}[\{0\}] \neq X$. Mas $\{0, 1\}$ é discreto e $\{0\}$ é *faberto*, donde a continuidade de f garante que $f^{-1}[\{0\}]$ também é faberto, resultando em (con$_3$) $\Rightarrow$ (con$_4$).

Finalmente, se X não é conexo, então existem abertos não-vazios e disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $X = U \cup V$. Daí, tomando-se $f \colon X \to \{0, 1\}$ como a função característica de U, tem-se f contínua e não-constante. $\square$

Exemplo 2.3.3 (Ordens conexas)**.** O arquétipo de espaço conexo, pelo menos quando pensamos no sentido típico do termo, é *realizado* pela reta real $\mathbb{R}$ com sua topologia usual: uma linha *conexa* e sem buracos ou *cortes*. Por isso, é de se esperar que $\mathbb{R}$ seja um espaço conexo. Tal palpite, além de correto, vale bem mais geralmente[46].

Teorema 2.3.4. *Um espaço totalmente ordenado $\mathbb{T}$ é conexo se, e somente se, $\mathbb{T}$ é uma ordem (Dedekind) completa e **densa**[47].*

Demonstração. Para um subconjunto não-vazio $A \subseteq \mathbb{T}$ limitado superiormente, consideremos os subconjuntos

$$A^{\downarrow} := \{t \in \mathbb{T} : \exists a \in A \text{ tal que } t < a\} \quad \text{e} \quad U(A) := \{t \in \mathbb{T} : \forall a \in A\ a \leq t\},$$

ambos subconjuntos não-vazios de $\mathbb{T}$ que satisfazem $A^{\downarrow} \cap U(A) = \emptyset$ e $A^{\downarrow} \cup U(A) = \mathbb{T}$. Agora, o leitor não deve ter dificuldades em observar que $A^{\downarrow}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{T}$, enquanto $U(A)$ *é aberto se, e somente se, A não tem supremo*. Logo, se $\mathbb{T}$ é conexo, então A tem supremo, donde a arbitrariedade de A mostra que $\mathbb{T}$ é uma ordem completa.

Analogamente, se $a, b \in \mathbb{T}$ satisfazem $a < b$, então a conexidade de $\mathbb{T}$ garante a existência de pelo menos um elemento $c \in \mathbb{T}$ com $a < c < b$, caso contrário os intervalos $(-\infty, b) := \{t \in \mathbb{T} : t < b\}$ e $(a, +\infty) := \{t \in \mathbb{T} : a < t\}$ seriam abertos disjuntos de $\mathbb{T}$ satisfazendo $\mathbb{T} = (-\infty, b) \cup (a, +\infty)$.

Faremos a recíproca por *absurdo*. Se $\mathbb{T}$ não é conexo, então existe um subconjunto não-vazio e aberto $W \subseteq \mathbb{T}$ tal que $\mathbb{T} \setminus W \neq \emptyset$ também é aberto. Tomando $x \in W$ e $y \in \mathbb{T} \setminus W$, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $x < y$. Agora, o subconjunto

$$B := W \cap (-\infty, y) = \{w \in W : w < y\}$$

é não-vazio e limitado superiormente, donde a hipótese sobre $\mathbb{T}$ permite tomar $\beta \in \mathbb{T}$ com $\beta := \sup B$. Em particular, note que $w \leq \beta \leq y$ para todo $w \in B$. A pergunta a se fazer então é: onde está β?

[46] Pode ser edificante rever o Exemplo 1.1.50, sobre a topologia da ordem.

[47] Definição K.2.124: tal que para quaisquer $a, b \in \mathbb{T}$ com $a < b$ existe $c \in \mathbb{T}$ com $a < c < b$.

- ✗ Se $\beta \in W$, então $\beta < y$, donde segue que existe $c \in \mathbb{T}$ com $\beta < c < y$. Por outro lado, o fato de W ser aberto dá $\alpha, \gamma \in \mathbb{T}$ tais que $\beta \in (\alpha, \gamma) \subseteq W$, donde a hipótese novamente permite tomar $d \in \mathbb{T}$ com $\beta < d < \gamma$. Como a ordem é total, existe $e := \min\{c, d\}$, um elemento de B maior do que β, contrariando sua escolha como supremo. Portanto, $\beta \notin W$.

- ✗ Em vista da observação acima, deve-se ter $\beta \in \mathbb{T} \setminus W$, certo? Vejamos. Se for o caso, então por $\mathbb{T} \setminus W$ ser aberto, existem $\alpha, \gamma \in \mathbb{T}$ com $\beta \in (\alpha, \gamma) \subseteq \mathbb{T} \setminus W$. Note então que se $w \in B$, então $w \leq \alpha$ ou $w \geq \gamma$, posto que o contrário resultaria em $w \notin W$. Por outro lado, $w \geq \gamma$ acarreta $w > \beta$, o que não pode ocorrer. Portanto, qualquer $c \in (\alpha, \beta)$ é um limitante superior de B menor do que β, contrariando sua escolha como supremo.

Os dois pontos anteriores mostram que tanto $\beta \in W$ quanto $\beta \in \mathbb{T} \setminus W$ não podem ocorrer, o que é, naturalmente, um absurdo. □

Corolário 2.3.5. *Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, C é um intervalo.*

Demonstração. Se C não é intervalo, então existem $a, b \in C$ e $c \in \mathbb{R} \setminus C$ tais que $a < c < b$, donde segue que $U := C \cap (-\infty, c)$ e $V := C \cap (c, +\infty)$ são abertos de C (na topologia induzida de subespaço), disjuntos e tais que $C = U \cup V$, mostrando que C não é conexo.

Reciprocamente, se C é um intervalo, então a ordem $(C, \leq)$ é completa e densa por ser isomorfa, como ordem, a uma ordem completa e densa: se, por exemplo, C é da forma $(\alpha, \beta]$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então existe um único isomorfismo de ordens $(\alpha, \beta] \to (-\infty, +\infty]$, e o último é completo e denso. Logo, pelo teorema anterior, a topologia em C induzida pela ordem faz dele um espaço conexo, donde segue que C é conexo como subespaço de $\mathbb{R}$, posto que as topologias da ordem e de subespaço coincidem neste caso (Exercício 1.25). Os detalhes ficam sob a responsabilidade do leitor. □

Exercício 2.66. Complete a demonstração do corolário anterior. Dica: observe que os intervalos de $\overline{\mathbb{R}}$ são da forma (α, β), $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ e $[\alpha, \beta]$, com $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ tais que $\alpha \leq \beta$, e note que todos eles têm ordens completas e densas – use e abuse dos Teoremas K.2.125 e 1.2.99, bem como de seus corolários. ■

Assim, fica estabelecido que, de fato, a conexidade enquanto propriedade topológica[48] captura a noção intuitiva de conexidade dos intervalos da reta real. O curioso a ressaltar aqui é que já *havíamos* capturado tal noção por meio da completude, posto que a existência de supremos em $\mathbb{R}$ *tampa* os buracos de $\mathbb{Q}$. Assim, o leitor não deve se espantar quando, na distante Subseção 5.1.2, demonstrarmos que conexidade e completude são duas faces da mesma moeda – desde que a *moeda* seja arquimediana. ▲

Observação 2.3.6. O leitor afoito pode duvidar da caracterização de ordens conexas apresentada no exemplo anterior. Por um lado, o intervalo $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ deve ser conexo; por outro lado, $(0, 1)$ é limitado superiormente mas não admite supremo em $(0, 1)$! Será que *provamos* um resultado falso?! Não desta vez: embora $(0, 1)$ seja limitado, sua limitação é testemunhada em $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$, já que seus limitantes inferiores e superiores não o habitam; portanto, *do ponto de vista da ordem de* $(0, 1)$, não existem extremos. △

[48] E o leitor desconfiado do termo pode verificar facilmente que se X e Y são homeomorfos, então X é conexo se, e somente se, Y é conexo.

Exemplo 2.3.7 (Fabertos)**.** Subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de um espaço topológico têm sido chamados **fabertos**, em alusão ao termo estrangeiro usual *clopen*. Naturalmente, se X é um espaço topológico, então $\emptyset$ e X são os fabertos *triviais*. Daí, em virtude da Proposição 2.3.2, qualquer espaço topológico dotado de pelo menos um faberto não-trivial é, automaticamente, desconexo. É o que ocorre com ordinais e, mais geralmente, em qualquer boa ordem $\mathbb{W}$ com pelo menos dois elementos: $\{\min \mathbb{W}\} \neq \mathbb{W}$ é simultaneamente aberto e fechado. O mesmo fenômeno também atesta a desconexidade da reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$, já que $[a, b)$ é um faberto para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_S$ com $a < b$. ▲

Exemplo 2.3.8 (Irredutibilidade – para algebristas)**.** Conexidade não é um fenômeno exclusivo de espaços bem comportados como os intervalos da reta real. Diremos que um espaço topológico X é **irredutível** se todo aberto não-vazio de X é denso. Segue daí que todo espaço irredutível é conexo, já que dois abertos não-vazios *nem chegam a ter a possibilidade* de apresentar interseção vazia. Pela mesma razão, um espaço irredutível com pelo menos dois pontos também não pode ser de Hausdorff, o que garante o selo de espaço *patológico* – pelo menos para quem não abre mão da unicidade de limites.

Em particular, as topologias cofinitas (em conjuntos infinitos), co-enumeráveis (em conjuntos não-enumeráveis) e codiscretas são conexas pois todas são irredutíveis. Apesar disso, a irredutibilidade floresce naturalmente em contextos menos artificiais, como o da Geometria Algébrica. A próxima proposição visa ilustrar isso – e o leitor pode se beneficiar de uma consulta rápida ao Exemplo 1.1.45.

Proposição 2.3.9. *Seja R um anel não-trivial, comutativo e com unidade. Então* $\operatorname{Spec}(R)$ *é irredutível se, e somente se, $\sqrt{\langle 0\rangle}$ é um ideal primo de R.*

Demonstração. No enunciado, $\sqrt{\langle 0\rangle}$ denota a coleção de todos os elementos *nilpotentes* de R, i.e., a família de todos os $r \in R$ para os quais existe $n \in \omega$ tal que $r^n \in \langle 0\rangle$. Uma aplicação simples do clássico *Binômio de Newton* dá conta de convencer que $\sqrt{I}$ é um ideal de R sempre que $I \subsetneq R$ é um ideal, trabalho *ideal* para o leitor detalhista[49].

Agora, suponha conhecida a identidade $\bigcap \operatorname{Spec}(R) = \sqrt{\langle 0\rangle}$, cuja interseção faz sentido pois $\operatorname{Spec}(R) \neq \emptyset$ sempre que $R \neq \{0\}$. Note então que se $p, q \notin \sqrt{\langle 0\rangle}$, então existem ideais primos $P, Q \in \operatorname{Spec}(R)$ tais que $p \notin P$ e $q \notin Q$, acarretando $D(p) \neq \emptyset$ e $D(q) \neq \emptyset$, ambos abertos da topologia de Zariski. Logo, se $\operatorname{Spec}(R)$ for irredutível, então $D(p) \cap D(q) \neq \emptyset$, mostrando que existe um ideal primo $S \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $p, q \notin S$, donde segue que $pq \notin \bigcap \operatorname{Spec}(R)$, atestando assim que $\sqrt{\langle 0\rangle}$ é um ideal primo. Se, por outro lado, $\sqrt{\langle 0\rangle} \in \operatorname{Spec}(R)$ e $D(a), D(b) \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ são abertos básicos não-vazios, então $a, b \notin \sqrt{\langle 0\rangle}$ e, por conseguinte, $ab \notin \sqrt{\langle 0\rangle}$, donde se infere que $\emptyset \neq D(ab) \subseteq D(a) \cap D(b)$.

O ponto chave da demonstração é, realmente, a identidade assumida. Por um lado, não é difícil se convencer da inclusão $\sqrt{\langle 0\rangle} \subseteq \bigcap \operatorname{Spec}(R)$. Por outro lado, se $h \notin \sqrt{\langle 0\rangle}$, então a família $\mathbb{P} := \{I \subseteq R : I \text{ é ideal tal que } n > 0 \Rightarrow h^n \notin I\}$ é não-vazia, parcialmente ordenada pela inclusão e tal que toda cadeia tem limitante superior. Pelo Lema de Zorn, existe $P \in \mathbb{P}$ maximal com respeito à inclusão. Resta mostrar que P é primo[50]: ora, para $a, b \notin P$, tem-se $P \subsetneq P + \langle a\rangle$ e $P \subsetneq P + \langle b\rangle$, donde a maximalidade de P em $\mathbb{P}$ garante que existem $n, m \in \omega$ tais que $h^m \in P + \langle a\rangle$, $h^n \in P + \langle b\rangle$ e, consequentemente, $h^{m+n} \in P + \langle ab\rangle$, donde se obtém que $ab \notin P$. □

[49] Dica: expanda $(a + b)^{m+n}$, onde m e n são tais que $a^m, b^n \in I$... ou faça algo parecido.

[50] Cuidado! A maximalidade de P é válida apenas com relação aos elementos de $\mathbb{P}$, o que não garante que P seja maximal perante *todos* os ideais próprios de R (o que garantiria sua *primalidade* facilmente).

Numa outra vida, haveria um capítulo que exploraria propriedades topológicas pertinentes a contextos algébricos, inclusive com a discussão de *feixes* e coisas do tipo. Mas acredito que não nesta vida – ou, pelo menos, não neste texto. ▲

Ao nos depararmos com famílias de espaços conexos, podemos manipulá-los de formas diversas na esperança de obter novos espaços conexos. A depender de como fizermos isso, pode ser que tenhamos algum sucesso – mas o contrário também pode ocorrer.

Exemplo 2.3.10 (Reunião de espaços conexos não precisa ser conexa)**.** É intuitivamente óbvio que a reunião de dois espaços conexos pode não ser conexa: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é um exemplo bastante preguiçoso deste fenômeno. Por ser uma observação tão trivial, ela suscita uma pergunta bem mais delicada: *quando* uma reunião de espaços conexos é conexa? Uma das respostas intuitivas vale bem mais geralmente:

Proposição 2.3.11. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{X}$ uma família de subespaços conexos de X tal que $X = \bigcup \mathcal{X}$. Se existir $x \in \bigcap \mathcal{X}$, então X é conexo.*

Demonstração. Mostraremos que X satisfaz a condição (con_4). Ora, dada uma função contínua $f : X \to \{0, 1\}$, para concluir que f é constante basta tomar $y \in X \setminus \{x\}$ e verificar que $f(y) = f(x)$. Por hipótese, existe $Y \in \mathcal{X}$ tal que $y \in Y$. Daí, como a restrição $f|_Y := f_Y : Y \to \{0, 1\}$ é contínua e Y é conexo, f_Y deve ser constante, donde se obtém $f(y) = f(x)$, como queríamos. □

Corolário 2.3.12. *Se $\mathcal{X}$ é uma família de espaços conexos, então $\prod_{X \in \mathcal{X}} X$ é conexo.*

Demonstração. Apenas a demonstração do caso $|\mathcal{X}| < \aleph_0$ será apresentada – o caso geral, embora não seja muito mais complicado, será roteirizado ao longo do Exercício 2.90. Por sua vez, o caso finito se reduz a $|\mathcal{X}| = 2$, pois daí o restante segue, facilmente, por indução.

Enfim, se X e Y são espaços conexos, então para $y \in Y$ fixado, o subespaço

$$U_x := (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y) \subseteq X \times Y$$

é conexo para cada $x \in X$, já que $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ são conexos e têm interseção não-vazia. Daí, por ocorrer $X \times Y = \bigcup_{x \in X} U_x$ com $X \times \{y\} \subseteq \bigcap_{x \in X} U_x$, resulta que $X \times Y$ é conexo.[51] □

Tal resultado amplia sobremaneira o acervo de espaços conexos: agora, sabemos não apenas que $\mathbb{R}$ é conexo, como também são conexas todas as suas potências $\mathbb{R}^\kappa$ e, em particular os idolatrados espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Porém, o leitor não deve esperar o mesmo tipo de comportamento dos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$ pois, como veremos, eles podem ser *selvagens*. ▲

Exercício 2.67. Mostre que a interseção arbitrária de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ ainda é conexa. Pense rápido: vale o mesmo em $\mathbb{R}^2$? ■

Há ainda outra intuição sobre espaços conexos em $\mathbb{R}^2$ que vale mais geralmente: ao se desenhar uma *curva* num pedaço de papel sem interromper o traço, *espera-se* que a figura obtida seja a ilustração de um subconjunto conexo. Ao se pensar na coisa como o gráfico de um *movimento* que varia em função do *tempo* (conexo!), têm-se um vislumbre pedagógico do

[51] Para quem gosta de interpretações geométricas: cobriu-se $X \times Y$ com subconjuntos da forma "+" ao longo do "eixo" X.

Teorema 2.3.13. *A imagem contínua de um espaço conexo é conexa.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos, $f\colon X \to Y$ uma sobrejeção contínua. Se X é conexo e $g\colon Y \to \{0,1\}$ é contínua, então $g \circ f\colon X \to \{0,1\}$ também é contínua e, consequentemente, constante. Logo, g é constante, donde segue que Y é conexo. □

Corolário 2.3.14. *Se X é um espaço de Tychonoff, conexo e com pelo menos dois pontos, então $|X| \geq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Se $x, y \in X$ são distintos, então existe uma função $f\colon X \to [0,1]$ contínua com $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Do corolário anterior, resulta que $\operatorname{im}(f)$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}$, donde segue que $\operatorname{im}(f)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ com pelo menos dois pontos. □

Exercício 2.68. Mostre que a função f da demonstração anterior é sobrejetora. ■

Observação 2.3.15. Subespaços *pequenos* de espaços de Tychonoff *grandes* não têm chances com a conexidade. Em particular, o corolário acima constitui mais uma prova de que $\mathbb{Q}$ não é um subespaço conexo de $\mathbb{R}$, o que já era óbvio em virtude da caracterização dos conexos da reta. △

Exemplo 2.3.16 (Caminhos e curvas)**.** Um modo muito comum de provar que algum subconjunto de um espaço topológico é conexo consiste em descrevê-lo[52] como imagem de uma função contínua cujo domínio é $[0,1]$ ou, mais geralmente, algum intervalo da reta real. É o caso da circunferência $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^2$, que foi descrita no Exemplo 1.3.19 como imagem de uma função contínua cujo domínio é $[0,1]$, a menos de (composição com) homeomorfismo.

Gráficos de funções reais contínuas com domínios conexos também são subespaços conexos de $\mathbb{R}^2$. Com efeito, se $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua, então o gráfico de γ é a imagem da função contínua $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\Gamma(x) := (x, \gamma(x))$. O leitor caprichoso pode inclusive usar tal observação para responder a pergunta do Exercício 2.67 sem esboçar desenhos.

A ingenuidade desta discussão se esvai completamente ao se considerar o problema oposto: quais são os subespaços de $\mathbb{R}^2$ que podem ser descritos como imagem contínua de intervalos de $\mathbb{R}$? Voltaremos brevemente a este problema no final da seção (Exemplo 2.3.52). Apenas para atiçar a curiosidade do leitor: o problema é não-trivial, dado que existem funções contínuas da forma $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ cuja imagem é $[0,1] \times [0,1]$, as chamadas *curvas de Peano*. ▲

Exemplo 2.3.17 (Teorema *Fundamental* da Álgebra)**.** Embora a conexidade não seja *explicitamente* importante no Exercício 1.237, que apresenta uma demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra (*a.k.a.* Teorema K.2.128), ela garante fatos importantes para outras demonstrações típicas, como mencionado na Observação K.2.127. Um dos mais importantes é o

Corolário 2.3.18 (*a.k.a.* Teorema do Valor Intermediário)**.** *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua, então para quaisquer $a, b \in I$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfazendo $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$, existe c entre a e b tal que $f(c) = \gamma$.*

Demonstração. Se I é um intervalo, então I é conexo. Logo, $\operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}$ e, portanto, é um intervalo. Isso se traduz, precisamente, na tese desejada. □

[52] Geômetras costumam usar o termo “parametrizar” para se referir a uma descrição dessa natureza. Eu não sou geômetra.

Apesar de parecer inócuo, o resultado acima é extremamente versátil para situações nas quais se busca garantir a existência de *raízes* de funções reais contínuas. Nas notações acima, por exemplo, se $f(a)f(b) < 0$, então $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais *trocados*, donde a garantia de que $\operatorname{im}(f)$ é um intervalo permite concluir que $0 \in \operatorname{im}(f)$ e, portanto, deve existir $c \in (a, b)$ com $f(c) = 0$, i.e., uma *raiz* de f. ▲

Exemplo 2.3.19 (Pontos fixos e outros fetiches)**.** Recordemo-nos de que para um conjunto Y fixado e uma função $f\colon Y \to Y$, $y \in Y$ é um *ponto fixo* de f se ocorrer $f(y) = y$. É típico dos pontos fixos aparecerem onde não se espera: solucionar uma equação $p(z) = 0$, por exemplo, para algum polinômio $p \in A[x]$, é o mesmo que encontrar um ponto fixo para a função $z \mapsto z - p(z)$. Por isso, não espanta que exista muito interesse em torno de fenômenos desse tipo, inclusive em ramos da Matemática que usufruem de Topologia Geral, como a Topologia Algébrica e a Análise Funcional. Ainda vamos nos deparar com mais alguns teoremas de ponto fixo ao longo do texto[53]. Por ora, basta uma ilustração:

Corolário 2.3.20 (Pontinho fixo de Brouwer)**.** *Se $f\colon [a, b] \to [a, b]$ é uma função contínua, então existe $c \in [a, b]$ com $f(c) = c$.*

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ não há o que provar. Desse modo, supondo $f(a) > a$ e $f(b) < b$, note que a função $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := x - f(x)$ é contínua e tal que $g(a)g(b) < 0$, donde segue que existe $c \in [a, b]$ com $g(c) = 0$, i.e., $f(c) = c$. □

O caso geral do corolário acima, para subespaços compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$, costuma ser chamado de Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Tradicionalmente, é um resultado demonstrado por meio dos recursos da Topologia Algébrica – embora seja *possível* prová-lo com arsenal da *teoria da dimensão*. ▲

Observação 2.3.21 (Borsuk-Ulam e pontos antipodais)**.** Como alguém que evita Topologia Algébrica sempre que pode, eu frequentemente confundo alguns resultados que costumam ser apresentados próximos uns dos outros em cursos introdutórios da disciplina. É o caso do *Teorema de Borsuk-Ulam*, o qual afirma que se $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, então existe $v \in \mathbb{S}^n$ com $f(v) = f(-v)$. Embora a versão geral deste resultado fuja do escopo deste texto, convém destacar que para $n := 1$ ele é imediato.

Exercício 2.69. Prove o Teorema de Borsuk-Ulam para $n := 1$. Dica: nas notações do enunciado acima, brinque com a função $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := f(x) - f(-x)$, e use a conexidade de $\mathbb{S}^1$. ■

Uma consequência inesperada (mas intuitiva) do resultado acima é que não existe subespaço de $\mathbb{R}$ homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, o que, *naturalmente*, vale para $n \in \mathbb{N}$ qualquer em virtude da versão geral do Teorema de Borsuk-Ulam. △

Temos visto que, intuitivamente, a conexidade significa "ser composto por um único pedaço aberto". Assim, é natural perguntar: quantos pedaços conexos compõem um espaço desconexo?

Definição 2.3.22. Dado um espaço topológico X e um ponto $x \in X$, a **componente conexa** de x é o *maior* subespaço conexo $A \subseteq X$ tal que $x \in A$. ¶

[53] Na verdade, há apenas o *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, que acrescentei sob protesto.

É importante notar que essa definição faz sentido: de fato, note que x pertence a cada membro da família

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq X : x \in A \text{ e } A \text{ é conexo}\},$$

mostrando que $x \in \bigcap \mathcal{F}$, donde a Proposição 2.3.11 garante que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq X$ é um subespaço conexo de X que contém x.

Exercício 2.70. Nas notações acima, convença-se de que, no sentido da inclusão, $\bigcup \mathcal{F}$ é o maior subespaço conexo de X que contém x. ■

Por ser o *maior* elemento de uma família numa ordem parcial, segue que a componente conexa de x é única, o que permite indicá-la por meio de uma notação particular. Escreveremos $\mathrm{cnx}_{x,X}$ para denotar a componente conexa de x no espaço X e, se X estiver claro pelo contexto, escreveremos apenas cnx_x.

Não é difícil ver que as componentes conexas de X definem uma partição de X em subespaços conexos. Logo, ao se declarar $x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{cnx}_x = \mathrm{cnx}_y$, obtém-se uma relação de equivalência, onde $\overline{x} := \{y \in X : x \sim y\} = \mathrm{cnx}_x$. Em particular, o cardinal $\mathrm{con}(X) := |\{\mathrm{cnx}_x : x \in X\}|$ é um invariante topológico de X, que conta o "número" de componentes conexas de X. É claro que X é conexo se, e somente se, $\mathrm{con}(X) = 1$.

Exemplo 2.3.23 (Os abertos de $\mathbb{R}$, revisitados[54])**.** As noções de conexidade em $\mathbb{R}$ permitem descrever de forma bem mais precisa como são os seus abertos, no seguinte sentido:

Proposição 2.3.24. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subespaço não-vazio. Se A é aberto, então existe uma única família $\mathcal{C}$ de intervalos abertos, não-vazios e dois a dois disjuntos, tal que $A = \bigcup \mathcal{C}$.*

Demonstração. Para cada $x \in A$ consideremos $\mathrm{cnx}_{x,A}$, o maior subespaço conexo de A que contém x. Como a conexidade é *intrínseca*[55], segue que $\mathrm{cnx}_{x,A}$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, que mostraremos ser aberto: ora, se $y \in \mathrm{cnx}_{x,A}$, então $y \in A$ e, por A ser aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in I := (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq A$; como $C := \mathrm{cnx}_{x,A} \cup I$ é um subespaço conexo de A que contém x, resulta que $\mathrm{cnx}_{x,A} \cup I = \mathrm{cnx}_{x,A}$, o que equivale a $I \subseteq \mathrm{cnx}_{x,A}$.

Como $\mathcal{C} := \{\mathrm{cnx}_{x,A} : x \in A\}$ é uma partição de A, existe uma classe de representantes $\mathcal{R} \subseteq A$ tal que $\mathcal{C} = \{\mathrm{cnx}_{r,A} : r \in \mathcal{R}\}$ e $\mathrm{cnx}_{r,A} \cap \mathrm{cnx}_{r',A} = \emptyset$ sempre que $r, r' \in \mathcal{R}$ com $r \neq r'$. A unicidade de $\mathcal{C}$ decorre de um truque sujo: se $\mathcal{D}$ é *outra* família de intervalos abertos não-vazios e dois a dois disjuntos tal que $\bigcup \mathcal{D} = A$, então para cada $D \in \mathcal{D}$ deve-se ter

$$D = D \cap A = D \cap \left(\bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathrm{cnx}_{r,A} \right) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} D \cap \mathrm{cnx}_{r,A},$$

donde a conexidade de D *obriga* que exista um único $r \in \mathcal{R}$ tal que $D \cap \mathrm{cnx}_{r,A} \neq \emptyset$, acarretando $D \cap \mathrm{cnx}_{r,A} = D$ e, por conseguinte, $D \subseteq \mathrm{cnx}_{r,A}$; ao se repetir o argumento num espelho, obtém-se $D = \mathrm{cnx}_{r,A}$ e, portanto, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$; analogamente, mostra-se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Em particular, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, deve-se ter $|\mathcal{C}| \leq \aleph_0$ na proposição acima: para cada $C \in \mathcal{C}$ existe $q_C \in \mathbb{Q} \cap C$, o que define uma injeção[56] $\mathcal{C} \to \mathbb{Q}$. ▲

[54] Este exemplo foi antecipado no Exercício 1.124.

[55] No sentido de não ser relativa a outros espaços. Mais precisamente: se X é subespaço de Y que é subespaço de Z, então X é subespaço *conexo* de Y se, e somente se, é subespaço *conexo* de Z.

[56] Note que, implicitamente, usa-se o Axioma da Escolha para cozinhar tal injeção.

Antes de discutir formas mais requintadas de conexidade, convém uma observação banal, mas tremendamente útil quando se busca mostrar que certos espaços artesanalmente construídos são conexos: intuitivamente, trata-se da ideia de que *adicionar* pontos a um conexo não altera a conexidade, desde que os pontos estejam suficientemente próximos.

Proposição 2.3.25. *Sejam X um espaço topológico e $C \subseteq X$ um subespaço conexo. Se $D \subseteq X$ é um subespaço tal que $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$, então D é conexo. Em particular, $\overline{C}$ é conexo.*

Demonstração. Por contraposição, suponha $D = A \cup B$ com A e B abertos em D, não-vazios e disjuntos. Sejam U e V abertos em X com $A = U \cap D$ e $B = V \cap D$. Note então que da inclusão $C \subseteq D$ resulta $C = (C \cap U) \cup (C \cap V)$, uma reunião disjunta de abertos de C. Ocorre que nenhum deles é vazio: de fato, a não-vacuidade de A garante um $x \in A := U \cap D \subseteq D \subseteq \overline{C}$ e, portanto, $U \cap C \neq \emptyset$; analogamente, $V \cap C \neq \emptyset$. Portanto, C não é conexo. □

Corolário 2.3.26. *Se um espaço topológico X tem um denso conexo, então X é conexo.*

2.3.2 Outras formas de conexidade

Definição 2.3.27. Dada uma propriedade topológica $\mathcal{P}$, costuma-se dizer que um espaço topológico X é **localmente** $\mathcal{P}$ se todo ponto $x \in X$ admite uma base local de vizinhanças com a propriedade $\mathcal{P}$. ¶

Muitas propriedades topológicas importantes são dadas como versões locais no sentido da definição acima. É o caso da próxima propriedade, que já deu as caras no recente Exemplo 2.3.23:

Proposição 2.3.28. *Para um espaço topológico X são equivalentes:*

(lcon$_1$) *todo ponto de X admite uma base local de vizinhanças conexas;*

(lcon$_2$) *as componentes conexas de subconjuntos abertos são abertas.*

Demonstração. Suponha a primeira condição. Se $A \subseteq X$ é aberto e $x \in A$, então $\mathrm{cnx}_{x,A}$ é um subespaço aberto de X: de fato, existe uma vizinhança conexa $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $V \subseteq A$, donde a maximalidade de $\mathrm{cnx}_{x,A}$ resulta em $V \subseteq \mathrm{cnx}_{x,A}$. Reciprocamente, dado $x \in X$ e $\mathcal{B}$ uma base local (de abertos) em torno de x, a hipótese garante que a família $\tilde{\mathcal{B}} := \{\mathrm{cnx}_{x,B} : B \in \mathcal{B}\}$ é base local de abertos conexos para x. □

Definição 2.3.29. Dizemos que X é um espaço **localmente conexo** se todo ponto de X admite uma base local de vizinhanças conexas. ¶

Desse modo, num primeiro momento, o resultado da Proposição 2.3.24 parece se dever, essencialmente, ao fato de $\mathbb{R}$ ser um espaço localmente conexo. A vida, como sabemos, não é assim tão simples.

Exemplo 2.3.30. Como o produto de espaços conexos é conexo, não é difícil se convencer de que o *produto finito de espaços localmente conexos é localmente conexo*. Em particular, $\mathbb{R}^2$ é um espaço localmente conexo. Podemos então nos perguntar sobre a validade de alguma versão análoga da Proposição 2.3.24 para $\mathbb{R}^2$, o que depende do que se utilizará para substituir os intervalos da proposição original.

Se optarmos por substituir intervalos por subconjuntos abertos, então o resultado desejado é apenas uma instância da última proposição. Por outro lado, se desejarmos provar que todo aberto de $\mathbb{R}^2$ é reunião disjunta de *bolas abertas*, teremos problemas – mesmo sem a exigência de unicidade! De fato, como veremos em breve, as bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ são abertos conexos de $\mathbb{R}^n$, donde segue que a reunião $\bigcup \mathcal{B}$ de uma coleção $\mathcal{B}$ de bolas abertas duas-a-duas disjuntas é conexa se, e somente se, $|\mathcal{B}| \leq 1$. O problema então aparece ao encontrarmos abertos conexos de $\mathbb{R}^2$ que não são (homeomorfos a) bolas abertas, como ocorre com $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por exemplo. ▲

Observação 2.3.31. O fato de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não ser homeomorfo a qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^2$ vale mais geralmente. Infelizmente, de um jeito ou de outro, as provas desse fato se alicerçam na formalização do que significa "ter um buraco", noção capturada com maestria por ferramentas da Topologia Algébrica. △

Por ser um claro enfraquecimento de conexidade, é natural esperar que existam espaços localmente conexos e não conexos (Exercício 2.92). O que talvez engane o leitor incauto seja o fato de que conexidade também não implica conexidade local.

Exemplo 2.3.32 (Espaço pente)**.** Para cada $n \in \omega$ considere $D_n := \left\{\left(\frac{1}{2^n}, y\right) : y \in \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$, $T := \{(0, y) : y \in \mathbb{R}_{>0}\}$, $H := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}_{>0}\}$ e defina $P := \left(\bigcup_{n\in\omega} D_n\right) \cup T \cup H$ o **espaço pente**[57], com a topologia de subespaço herdada de $\mathbb{R}^2$. Mostraremos que P é um espaço conexo que não é localmente conexo.

O *dente* T é claramente conexo, enquanto $C := \left(\bigcup_{n\in\omega} D_n\right) \cup H$ é conexo em virtude do Exercício 2.89 (ou ainda por ser *conexo por caminhos*, condição que discutiremos adiante). Como $C \subseteq C \cup T \subseteq \overline{C}$ com C conexo, o Corolário 2.3.25 garante a conexidade de $C \cup T = P$. Por outro lado, os pontos de T impedem que P seja localmente conexo.

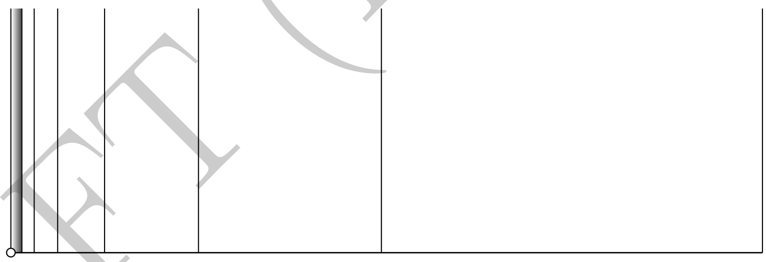


Figura 2.4: Esboço do espaço pente. Note que a origem $(0,0)$ não pertence a este espaço.

De fato, dado $(0, y) \in T$, o subconjunto $V := (-y, r) \times (y - r, y + r)$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$ que contém $(0, y)$. Não é difícil se convencer de que para $r > 0$ suficientemente pequeno, $V \cap P$ é um aberto de P que não contém vizinhanças conexas de $(0, y)$. O leitor pode lidar com os detalhes por conta própria. ▲

Outra variação de conexidade bastante intuitiva pode ser obtida por meio da noção de *caminhos*, já discutidos no Exemplo 2.3.16.

Definição 2.3.33. Um **caminho** ligando os pontos $a, b \in X$ do espaço topológico X é uma função contínua $\gamma \colon [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. ¶

[57] Variação do espaço conhecido como *comb space*. Os subespaços D_n e T são os *dentes* do pente, cuja haste é o espaço H. Conheci este exemplo em [7].

Definição 2.3.34. Dizemos que X é **conexo por caminhos** se para quaisquer pontos $a, b \in X$ existir um caminho que os liga. ¶

Dessa vez, diferente do que ocorreu com a conexidade local, a presença de conexidade por caminhos garante a (boa? e) velha conexidade:

Proposição 2.3.35. *Se X é um espaço conexo por caminhos, então X é conexo.*

Demonstração. Basta notar que X tem apenas uma componente conexa. De fato, para $x, y \in X$ quaisquer, existe um caminho γ ligando x e y, donde a continuidade de γ permite inferir que $\mathrm{im}(\gamma)$ é um subespaço conexo de X que contém x. Logo, $y \in \mathrm{im}(\gamma) \subseteq \mathrm{cnx}_{x,X}$ e, consequentemente, $X \subseteq \mathrm{cnx}_{x,X}$. □

Em particular, um modo intuitivamente imediato de verificar a conexidade de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para $n \geq 2$, consiste em notar que tal espaço é conexo por caminhos. A rigor, porém, é muito chato *descrever* os caminhos que ligam dois pontos arbitrários de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Uma alternativa é dada pelo próximo

Exercício 2.71. Sejam $A := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n > 0\}$ e $B := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n < 0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Convença-se de que A e B são subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tais que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Use isso para concluir que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é conexo. Por que isso falha para $n := 1$? ■

Exemplo 2.3.36 (Convexidade e bolas)**.** Dado um $\mathbb{C}$-espaço vetorial E, faz sentido definir a noção de *convexidade*[58] para subconjuntos de E: dizemos que um subconjunto $C \subseteq E$ é **convexo** se para quaisquer $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$ ocorrer $ty + (1 - t)x \in C$.

Geometricamente[59], um vetor da forma $v := ty + (1 - t)x$ pode ser pensado como um ponto no *segmento de reta* ligando x e y: a reta em questão se obtém com a translação da *reta* $\mathbb{R}u := \{ru : r \in \mathbb{R}\}$ para o ponto y, onde $u := x - y$; os pontos em questão ocorrem precisamente ao se fazer *r variar* entre 0 e 1, com $x = 0y + (1 - 0)x$ e $y = 1y + (1 - 1)x$. Isso é mais do que dizer que quaisquer dois pontos de V podem ser ligados por um caminho: aqui, estipula-se o tipo de caminho, a saber, linear.

Para relacionar isso de maneira mais firme com o tema desta seção, precisa-se que E seja munido de uma topologia razoável. Por ora, podemos nos contentar com a suposição de que E é um espaço cuja topologia é induzida por uma norma $\|\cdot\|$ (Definição 1.228). Neste caso, o leitor não deve ter dificuldades para notar que a função $\varphi \colon [0, 1] \to E$ dada por $t \mapsto ty + (1 - t)x$ é contínua para quaisquer $x, y \in E$ fixados. Isso mostra que qualquer subconjunto convexo de E é conexo por caminhos e, por conseguinte conexo. Em particular, o próprio espaço vetorial E é conexo.

Uma das instâncias dessa constatação geral é a conexidade das bolas: se $x, y \in E$ são tais que $\|x - z\| < r$ e $\|y - z\| < r$, então

$$\|ty+(1-t)x-z\| = \|ty+(1-t)x-z+tz-tz\| \leq |t|\|y-z\|+|1-t|\|x-z\| < tr+(1-t)r = r,$$

mostrando que a bola aberta de centro z e raio $r > 0$ é convexa. ▲

[58] Mais geralmente, a definição faz sentido sempre que $\mathbb{K}$ admite uma *norma*, como ocorre com $\mathbb{C}$. Esse tipo de coisa será discutido com mais atenção na Seção 5.2.

[59] Pff...

Exemplo 2.3.37 (Conexidade $\neq$ conexidade por caminhos)**.** O espaço pente também serve como exemplo de espaço conexo que não é conexo por caminhos. Embora isso fique *geometricamente* evidente com o esboço da Figura 2.4, desenhos ~~não provam porcaria nenhuma~~ não servem como demonstrações legítimas. Na justificativa a seguir, vamos usar as mesmas notações do Exemplo 2.3.32.

Suponha que $f\colon [0,1] \to P$ seja uma função contínua com $f(0) = (0,1)$ e $f(1) = (1,0)$. Como o conjunto $G := \{x \in [0,1] : f(x) \in T\}$ é não-vazio e limitado superiormente, existe o número real $\alpha := \sup G \in [0,1]$. Pergunta-se: $f(\alpha) \in T$ ou $f(\alpha) \in C$?

Se $f(\alpha) \in T$, então existe $r > 0$ tal que $B_{\|\cdot\|}(f(\alpha), r) \cap \overline{H} = \emptyset$. Pela continuidade de f, existe um intervalo aberto $V \subseteq [0,1]$ com $\alpha \in V$ e $f[V] \subseteq B_{\|\cdot\|}(f(\alpha), r)$. Daí, não é difícil[60] concluir que $f[V] \subseteq T$. Tomando-se $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + \varepsilon \in V$, o modo como se escolheu α garante a existência de $\beta \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$ com $f(\beta) \notin T$, o que contraria a conclusão anterior. Por outro lado, se $f(\alpha) \in C$, então os mesmos argumentos permitem obter uma contradição, *mutatis mutandis*.

Como um dos dois casos acima necessariamente deveria ocorrer, resulta que não existe uma função contínua com as propriedades assumidas. Portanto, P não é conexo por caminhos, como desejado. ▲

Apesar de o exemplo acima mostrar que conexidade não implica conexidade por caminhos, a adição de uma hipótese local torna os dois tipos de conexidade equivalentes.

Definição 2.3.38. Um espaço X é **localmente conexo por caminhos** se todo ponto de X admitir uma base local de vizinhanças conexas por caminhos. ¶

Teorema 2.3.39. *Se X é localmente conexo por caminhos e conexo, então X é conexo por caminhos.*

Demonstração. O argumento que usaremos é arquetípico de certas provas que utilizam conexidade: fixado $x_0 \in X$, vamos considerar o conjunto

$$A := \{x \in X : \exists c\colon [0,1] \to X \text{ contínua tal que } c(0) = x_0 \text{ e } c(1) = x\},$$

e daí mostraremos que $A \neq \emptyset$ é um faberto, donde a conexidade de X garantirá $A = X$. Como consequência, quaisquer dois pontos de x são ligáveis por um caminho (confira o Exercício 2.93).

Ora, $A \neq \emptyset$ pois $x_0 \in A$, trivialmente. Agora, se $x \in A$ e $U \subseteq X$ é um aberto conexo por caminhos que contém x, então para qualquer $y \in U$ pode-se *colar* os caminhos que ligam x_0 a x e x a y, o que resulta num caminho entre x_0 e y, mostrando que $U \subseteq A$. Logo, A é aberto. Por outro lado, se $x \notin A$, qualquer aberto V conexo por caminhos contendo x deve ser disjunto de A pois, do contrário, resultaria $x \in A$, garantindo que $X \setminus A$ é aberto, i.e., A é fechado, como queríamos. □

Exercício 2.72. Prove que o espaço pente não é localmente conexo por caminhos. ■

2.3.3 Desconexidade e os teoremas de Sierpiński e Brouwer

Assim como ocorre com a conexidade, a *desconexidade* também admite variações, que curiosamente são úteis em contextos mais... sofisticados. Ao longo desta subseção, veremos algumas dessas variações, bem como aplicações clássicas.

[60] Mas o Corolário b) pode ajudar, bem como o fato de $f[V]$ ser conexo.

Para motivar as ideias: note que, embora $[0,1)\cup[3,5)$ e $\mathbb{Q}$ sejam ambos desconexos com suas topologias usuais herdadas de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ leva essa brincadeira bem mais seriamente; de fato, enquanto o primeiro admite subespaços conexos infinitos, nenhum subespaço de $\mathbb{Q}$ com mais de dois pontos é conexo.

Definição 2.3.40. Um espaço topológico X é **hereditariamente desconexo**[61] se todo subespaço conexo de X tem cardinalidade menor do que ou igual a 1. ¶

Equivalentemente:

Exercício 2.73. Mostre que um espaço topológico X é hereditariamente desconexo se, e somente se, $\operatorname{cnx}_{x,X} = \{x\}$ para todo $x \in X$. ■

Observação 2.3.41 (Desconexidade vs. conexidade local e afins)**.** Uma vez que as formas de conexidade local vistas na subseção anterior não garantem conexidade, nada impede que um espaço topológico seja, por exemplo, hereditariamente desconexo e localmente conexo por caminhos: *espaços discretos são assim.* △

Definição 2.3.42. Um espaço topológico X é **zero-dimensional** se sua topologia admite uma base composta por fabertos[62]. ¶

Como espaços conexos são, precisamente, aqueles que admitem apenas fabertos triviais, é natural esperar que espaços zero-dimensionais se relacionem com desconexidade.

Proposição 2.3.43. *Se X é um espaço T_1 e zero-dimensional, então X é hereditariamente desconexo.*

Demonstração. Se $C \subseteq X$ e $|C| > 1$, então existem $x, y \in C$ distintos, com $X \setminus \{x\}$ aberto por X ser T_1. Como X é zero-dimensional, existe um faberto B tal que $y \in B \subseteq X \setminus \{x\}$. Note que tanto $B \cap C$ quanto $C \setminus B$ são não-vazios e separados, donde o Lema a) acarreta que C não é conexo. □

Observação 2.3.44. O axioma de separação T_1 não é supérfluo, dado que desconexidade hereditária implica T_1 em virtude do Exercício 2.91. △

Espaços zero-dimensionais não são novidade:

(i) discretos são, trivialmente, zero-dimensionais;

(ii) o Exercício 2.38 garante a mesma propriedade para a reta de Sorgenfrey;

(iii) o espaço dos racionais $\mathbb{Q}$ também é zero-dimensional, já que os subconjuntos da forma $(a,b)\cap\mathbb{Q}$, com $a, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, constituem uma base de fabertos para $\mathbb{Q}$.

Mais geralmente, vale a seguinte

Proposição 2.3.45. *Se (M, d) é um espaço métrico enumerável, então M tem uma base de fabertos, i.e., é zero-dimensional.*

[61] Ou *totalmente desconexo* a depender da referência utilizada.

[62] Como o nome sugere, tal propriedade se traduz em dizer que o espaço tem *dimensão* zero de acordo com uma definição *apropriada* de dimensão. Isto será minimamente discutido no Exercício E.58.

Demonstração. Seja $D := \{d(x,y) : x, y \in M\}$ coleção de todas as distâncias entre pontos de M. Como M é enumerável, ocorre $|D| \leq \aleph_0$ e, consequentemente, $|\mathbb{R} \setminus D| = \mathfrak{c}$. Agora basta notar que $\{B_d(x,r) : x \in M \text{ e } r \in \mathbb{R} \setminus D\}$ é base de fabertos para M, tarefa simples que fica a cargo do leitor cético. $\square$

De certa forma, a proposição acima apenas reforça o que já se estabeleceu no Corolário 2.3.14: espaços conexos com bons axiomas de separação devem ser grandes. Logo, espaços pequenos e tão bons quanto os métricos devem manifestar alguma forma *grave* de desconexidade. Curiosamente, exigir apenas um pouco mais do que *metrizabilidade* no enunciado acima *reduz tudo a* $\mathbb{Q}$.

Lema 2.3.46. *Um espaço zero-dimensional é de Hausdorff se, e somente se, é* T_0.

Exercício 2.74. Prove o lema acima. Dica: se $S \subseteq X$, então S e $X \setminus S$ são disjuntos. $\blacksquare$

Teorema 2.3.47. *Sejam X e Y espaços zero-dimensionais, T_0 e sem pontos isolados. Suponha que ambos tenham bases enumeráveis. Se $D \subseteq X$ e $E \subseteq Y$ são subespaços densos com $|D| = |E| = \aleph_0$, então existe um homeomorfismo $\varphi \colon D \to E$.*

Esboço da demonstração.[63] Primeiramente, note que para $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases enumeráveis de fabertos[64] de X e Y, respectivamente, não há perda de generalidade em supor que ambas são fechadas por complemento e reunião finitas. No caso de $\mathcal{B}$, por exemplo, pode-se substituir tal família por $\mathcal{B}' := \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$, onde $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}$ e, supondo $\mathcal{B}_n$ definido para $n \in \omega$, fazer $\mathcal{B}_{n+1} := \left\{G \subseteq X : \exists \mathcal{G} \in [\mathcal{B}_n]^{<\aleph_0} \text{ tal que } G = \bigcup \mathcal{G} \text{ ou } X \setminus G \in \mathcal{B}_n\right\}$. Note que $\mathcal{B}'$ é base de fabertos para X (pois $\mathcal{B}$ é base de fabertos para X), enumerável (pois cada $\mathcal{B}_n$ é enumerável) e fechada por complemento e reuniões finitas (por construção).

Feito isso, a estratégia da prova é quase simples, e o leitor pode tirar bastante proveito de uma consulta estendida aos Exercícios 1.126 – 1.130:

(i) vamos *construir* uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ apropriada, bem como uma família enumerável $\mathscr{D}$ de subconjuntos *densos* no sentido de ordem (como no Exercício 1.126);

(ii) daí, o Lema de Rasiowa-Sikorski *dará* um filtro $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}$ tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{D} \in \mathscr{D}$;

(iii) a última condição permitirá afirmar que $\bigcup \mathcal{F}$ é o homeomorfismo procurado.

Passo (i): *construção da ordem* $\mathbb{P}$.

Os elementos de $\mathbb{P}$ serão *ternas* da forma $(\mathcal{P}, f, \mathcal{Q})$, satisfazendo os seguintes critérios:

(a) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ é uma família finita de fabertos dois a dois disjuntos com $\bigcup \mathcal{P} = X$;

(b) $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{C}$ é uma família finita de fabertos dois a dois disjuntos com $\bigcup \mathcal{Q} = Y$;

(c) f é uma injeção tal que $\operatorname{dom}(f) \subseteq D$ e $\operatorname{im}(f) \subseteq E$;

(d) $\operatorname{dom}(f)$ é uma classe de representantes de $\mathcal{P}$;

(e) $\operatorname{im}(f)$ é uma classe de representantes de $\mathcal{Q}$.

[63] Adaptado da exposição em [32].

[64] Que existem em virtude das hipóteses aliadas ao Exercício 1.61.

Essencialmente, $\mathbb{P}$ é a coleção das *bijeções parciais* entre representantes em D de partições de X e representantes em E de partições de Y, onde tais partições são determinadas por subconjuntos finitos de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Por simplicidade, chamaremos os elementos em $\mathbb{P}$ de *condições*. Note que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ pois $X \in \mathcal{B}$ e $Y \in \mathcal{C}$. Agora, dadas condições $T_0 := (\mathcal{P}_0, f_0, \mathcal{Q}_0)$ e $T_1 := (\mathcal{P}_1, f_1, \mathcal{Q}_1)$ em $\mathbb{P}$, vamos escrever $T_0 \leq T_1$ se os seguintes critérios forem satisfeitos:

1. $\mathcal{P}_0$ refina $\mathcal{P}_1$, i.e., para todo $P \in \mathcal{P}_1$ existe $P' \in \mathcal{P}_0$ tal que $P' \subseteq P$;
2. $\mathcal{Q}_0$ refina $\mathcal{Q}_1$, i.e., para todo $Q \in \mathcal{Q}_1$ existe $Q' \in \mathcal{Q}_0$ tal que $Q' \subseteq Q$;
3. f_0 estende f_1, i.e., $f_1 \subseteq f_0$;
4. para quaisquer $d, d' \in \operatorname{dom}(f_0)$, existe $P \in \mathcal{P}_1$ tal que $d, d' \in P$ se, e somente se, existe $Q \in \mathcal{Q}_1$ tal que $f_0(d), f_0(d') \in Q$.

Os dois primeiros critérios estabelecem que "fragmentar" partições induz condições *menores*, enquanto os dois últimos impõem que a extensão de uma função na partição fragmentada deve ser compatível com a partição original. A ilustração a seguir deve ajudar o leitor a digerir e, mais importante, completar os detalhes omitidos acima.

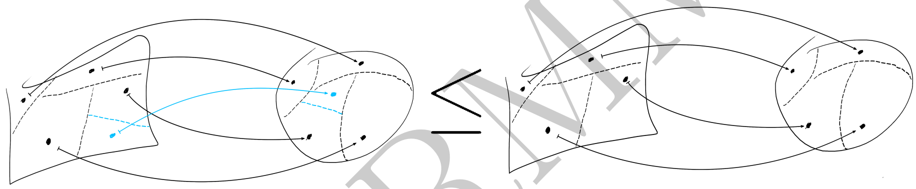


Figura 2.5: Duas "condições" comparáveis.

Passo (i)': *os densos.*

Para $a \in D$, $b \in E$, $U \in \mathcal{B}$ e $V \in \mathcal{C}$, definamos as famílias

$$\mathcal{D}_a := \{(\mathcal{P}, f, \mathcal{Q}) : a \in \operatorname{dom}(f)\}, \tag{2.15}$$
$$\mathcal{D}_b := \{(\mathcal{P}, f, \mathcal{Q}) : b \in \operatorname{im}(f)\}, \tag{2.16}$$
$$\mathcal{D}_U := \left\{(\mathcal{P}, f, \mathcal{Q}) : \text{existe } \mathcal{G} \in \wp(\mathcal{P}) \text{ tal que } U = \bigcup \mathcal{G}\right\} \text{ e} \tag{2.17}$$
$$\mathcal{D}_V := \left\{(\mathcal{P}, f, \mathcal{Q}) : \text{existe } \mathcal{H} \in \wp(\mathcal{Q}) \text{ tal que } V = \bigcup \mathcal{H}\right\}. \tag{2.18}$$

Todos os subconjuntos acima são densos em $\mathbb{P}$, no sentido do Exercício 1.126: para cada condição $T \in \mathbb{P}$ existe $T' \in \mathcal{D}_\bullet$ tal que $T' \leq T$, onde $\bullet$ pode ser qualquer um dos subíndices anteriores. Como as argumentações são análogas, apenas a demonstração da densidade da família (2.18) será apresentada.

Dados $V \in \mathcal{C}$ e uma condição $T := (\mathcal{P}, f, \mathcal{Q}) \in \mathbb{P}$, tem-se

$$V = V \cap Y = V \cap \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q\right) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} V \cap Q,$$

com cada $V \cap Q \in \mathcal{C}$, pois $\mathcal{C}$ é fechada por interseções finitas[65].

[65] Já que é fechada por reuniões finitas e complementos.

Agora, seja $Q \in \mathcal{Q}$ com $V \cap Q \neq \emptyset$ e $V \cap Q \notin \mathcal{Q}$. A densidade de E em Y garante um $y \in E \cap V \cap Q$, enquanto as hipóteses sobre f e Y permitem fazer isso de modo a assegurar $y \notin \operatorname{im}(f)$. Por sua vez, existe $x \in D$ com $f(x) \in Q$ e, por conseguinte, existe um único $P \in \mathcal{P}$ com $x \in P$. Como x não é ponto isolado, também existe $x' \in P \setminus \{x\}$, donde o fato de X ser T_2 (lema anterior) garante um $B \in \mathcal{B}$ com $x' \in B$, $B \subseteq P$ e $x \notin B$. Por fim, a densidade de D permite supor, adicionalmente, que $x' \in D$.

O leitor não deve ter dificuldades para observar que $(\mathcal{P}', f', \mathcal{Q}') \leq (\mathcal{P}, f, \mathcal{Q})$, onde $\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{P\}) \cup \{B, P \setminus B\}$, $\mathcal{Q}' := (\mathcal{Q} \setminus \{Q\}) \cup \{V \cap Q, Q \setminus V\}$ e $f' := f \cup \{(x', y)\}$. O argumento pode ser repetido para qualquer $Q' \in \mathcal{Q}'$ para o qual ocorra $V \cap Q' \neq \emptyset$ e $V \cap Q' \notin \mathcal{Q}'$, e assim sucessivamente, *ad nauseam*[66], donde se obtém $T' \in \mathcal{D}_V$ com $T' \leq T$.

Passo (ii): *a mágica de Rasiowa-Sikorski.*

Pelo Lema de Rasiowa-Sikorski (Exercício 1.129), existe um filtro próprio $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{D} \in \mathscr{D} := \{\mathcal{D}_\vartheta : \vartheta \in D \cup E \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}\}$, já que, em vista da argumentação acima, $\mathscr{D}$ é uma família enumerável de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$.

Passo (iii): *o homeomorfismo procurado.*

Escrevendo $T := (\mathcal{P}_T, f_T, \mathcal{Q}_T)$ para cada $T \in \mathcal{F}$, mostraremos que

$$\varphi := \bigcup_{T \in \mathcal{F}} f_T$$

define um homeomorfismo da forma $D \to E$.

(i) φ é função pois, se $(x, y), (x, y') \in \varphi$, então existem $T, T' \in \mathcal{F}$ com $f_T(x) = y$ e $f_{T'}(x) = y'$ e, por $\mathcal{F}$ ser filtro, existe $T'' \leq T, T'$, acarretando $y = y'$ pois $f_T(x) = f_{T''}(x)$ e $f_{T'}(x) = f_{T''}(x)$.

(ii) $\operatorname{dom}(\varphi) = D$ pois $\mathcal{D}_a$ é denso em $\mathbb{P}$ para todo $a \in D$.

(iii) $\operatorname{im}(\varphi) = E$ pois $\mathcal{D}_b$ é denso em $\mathbb{P}$ para todo $b \in E$.

(iv) φ é injetora pois, caso contrário, existiria $T \in \mathcal{F}$ tal que f_T não é injeção.

(v) φ é contínua já que para $V \in \mathcal{C}$ existe $T \in \mathcal{F}$ com $(\mathcal{P}_T, f_T, \mathcal{Q}_T) \in \mathcal{D}_V$, acarretando $\varphi^{-1}[V \cap E] = U \cap D$ para um único $U \in \mathcal{B}$.

(vi) φ é aberta já que para $U \in \mathcal{B}$ existe $T \in \mathcal{F}$ com $(\mathcal{P}_T, f_T, \mathcal{Q}_T) \in \mathcal{D}_U$, acarretando $\varphi[U \cap D] = V \cap E$ para um único $V \in \mathcal{C}$.

Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Exercício 2.75. Complete os detalhes da demonstração acima, com ênfase para os itens finais. Dicas: 1) lembre-se da condição (d) na definição da ordem parcial $\mathbb{P}$, ela é particularmente importante nos itens (v) e (vi) acima; 2) a Figura 2.5 pode ser um bom guia espiritual. ■

Corolário 2.3.48 (Sierpiński)**.** *Se (M, d) é um espaço métrico enumerável sem pontos isolados, então M e $\mathbb{Q}$ são homeomorfos.*

Corolário 2.3.49. *Todo ordinal enumerável é subespaço de $\mathbb{Q}$, a menos de mergulho.*

[66] O importante é não ser *ad infinitum*.

Exercício 2.76. Prove o corolário anterior. Dica[67]: note que se $\alpha \neq 0$ é ordinal enumerável, então $\alpha \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ são homeomorfos! ■

Observação 2.3.50 (Um teorema de Brouwer)**.** Nos itens (v) e (vi) da demonstração do Teorema 2.3.47, secretamente exibiu-se uma bijeção entre as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. De fato, para $U \in \mathcal{B}$ pode-se denotar por $\Psi(U) \in \mathcal{C}$ o único faberto de $\mathcal{C}$ tal que $\varphi[U \cap D] = \Psi(U) \cap E$, cuja inversa é dada pela correspondência análoga do item (e).

Disso segue que para $x \in X$ fixado, $\mathcal{V}_x := \{\Psi(B) : x \in B \text{ e } B \in \mathcal{B}\}$ é um pré-filtro de fabertos em Y: se $\Psi(B)$ e $\Psi(B')$ estão em $\mathcal{V}_x$, então deve valer a identidade $\Psi(B) \cap \Psi(B') = \Psi(B \cap B')$, mostrando que $\mathcal{V}_x$ é fechado por interseções finitas. Desse modo, ao se acrescentar a hipótese de compacidade para Y no último teorema[68], obtém-se um único $y \in \bigcap \mathcal{V}_x$. Com efeito, note que um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ com $\mathcal{V}_x \subseteq \mathfrak{u}$ converge para um único $y \in Y$ que satisfaz

$$y \in \bigcap_{S \in \mathfrak{u}} \overline{S} \subseteq \bigcap \mathcal{V}_x.$$

Agora, se $y' \in Y \setminus \{y\}$, então existe um faberto $V \in \mathcal{C}$ com $y' \in V$ e $y \notin V$. Daí, $U := \Psi^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ é tal que $x \notin U$, pois do contrário ocorreria $y \in V$. Logo, pelas hipóteses sobre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, resulta que $X \setminus U \in \mathcal{B}$ com $x \in X \setminus U$ e $\Psi(X \setminus U) = Y \setminus V$, donde segue que $y' \notin \bigcap \mathcal{V}_x$.

Isso permite definir uma função $\varphi^* \colon X \to Y$, onde $\varphi^*(x)$ é o único y em $\bigcap \mathcal{V}_x$. Mostraremos que φ^* é ~~uma~~ a extensão contínua e injetora de φ:

- é extensão pois, se $x \in D$, então $\varphi(x) \in \Psi(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B$, donde o modo como se tomou φ^* dá $\varphi^*(x) = \varphi(x)$;
- é contínua pois, para $V \in \mathcal{C}$ fixado, tem-se $x \in \Psi^{-1}(V)$ se, e somente se, $\varphi^*(x) \in V$;
- é injetora pois, se $x, x' \in X$ são distintos, então a existência de abertos disjuntos em X contendo x e x' garante que o mesmo y que pertence a $\bigcap \mathcal{V}_x$ não pode pertencer a $\bigcap \mathcal{V}_{x'}$.

Finalmente, ao se adicionar a hipótese de que X é compacto, segue que a extensão contínua φ^* se torna injeção contínua, fechada e, por sua imagem conter um denso do codomínio, sobrejetora. Portanto, neste último cenário, X e Y são homeomorfos. △

Em outras palavras, *provamos* o

Corolário 2.3.51 (Brouwer)**.** *A menos de homeomorfismo, existe no máximo um espaço compacto de Hausdorff, infinito, zero-dimensional com base enumerável e sem pontos isolados.*

Um dos modos mais fáceis de cozinhar um espaço com as propriedades do último corolário consiste em tomar o produto de $\aleph_0$ cópias do espaço discreto $2 := \{0, 1\}$, i.e., o espaço $\prod_{n\in\omega} 2 = 2^\omega$. Este animal é compacto em virtude do Teorema de Tychonoff, infinito pelo Teorema de Cantor, sem pontos isolados pela definição dos abertos da topologia produto e com base enumerável de fabertos pelas idiossincrasias da topologia discreta de 2.

Exercício 2.77. Convença-se de que 2^ω tem as propriedades mencionadas. ■

[67] Aprendi esse truque belíssimo com um dos costumeiros comentários brilhantes da Professora Ofélia Alas nos seminários do grupo de Topologia Geral do IME-USP.

[68] Note que Y já é automaticamente T_2 pelo Lema 2.3.46.

Há, porém, outra encarnação muito famosa dessa criatura: o *conjunto de Cantor*. Explicitamente, o **conjunto de Cantor** $\mathfrak{C}$ é o subespaço do intervalo $[0,1]$ definido como

$$\mathfrak{C} := [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^{3n-3} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right) \right) \right).$$

Para uma interpretação psicologicamente menos desgastante, vejamos a descrição apresentada por Dan Ma em seu excelente blog[69]. Por simplicidade, seja $S_n := \{0,1\}^n$ a coleção das sequências de 0's e 1's da forma $n \to \{0,1\}$: assim, $S_0 = \{\emptyset\}$, $S_1 = \{(0),(1)\}$, $S_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ e assim por diante. A construção de $\mathfrak{C}$ consiste em utilizar a estrutura de $S := \bigcup_{n\in\omega} S^n$ para definir uma sequência decrescente $(F_n)_{n\in\omega}$ de fechados de modo a garantir $\mathfrak{C} = \bigcap_{n\in\omega} F_n$.

Para $n := 0$, faz-se $B_\emptyset := F_0 := [0,1]$. Para $n := 1$, faz-se $B_{(0)} := \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $B_{(1)} := \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ e $F_1 := B_{(0)} \cup B_{(1)}$; note que, até agora, verifica-se $F_n = \bigcup_{s\in S_n} B_s$; a ideia é repetir o processo nos passos seguintes. Para $n := 2$, por exemplo, perceba que os elementos de S_2 se obtêm a partir dos elementos de S_1 por meio da concatenação de uma nova entrada: $(0,0)$ e $(1,0)$ obtidos com a concatenação de 0, $(0,1)$ e $(1,1)$ obtidos com a concatenação de 1. Com isso em mente, $B_{(0,0)}$ e $B_{(0,1)}$ se obtêm a partir de $B_{(0)}$ por meio da exclusão do *terço médio* $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, onde $a \cdot I := \{a \cdot x : x \in I\}$, de modo que $B_{(0,0)} := \left[0, \frac{1}{9}\right]$ e $B_{(0,1)} := \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$; analogamente, exclui-se o terço médio de $B_{(1)}$, a saber $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, onde $a + J := \{a + y : y \in J\}$, a fim de definir $B_{(1,0)} := \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ e $B_{(1,1)} := \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

O procedimento geral consiste em considerar o intervalo fechado $B_f \subseteq [0,1]$, para $f \in S_n$, definido num passo prévio, e daí definir $B_{(f,0)}$ e $B_{(f,1)}$ por meio da exclusão do terço médio $2\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(i)}{3^{i+1}}\right) + \left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)$, indicando que deve-se excluir de B_f o intervalo aberto obtido pela *translação* do intervalo aberto $\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)$ pelo número $2\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(i)}{3^{i+1}}\right)$. Ao fazer isso para cada $f \in S_n$, obtêm-se B_g para cada $g \in S_{n+1}$, o que permite definir $F_{n+1} := \bigcup_{g\in S_{n+1}} B_g$.

Exercício 2.78. Descreva B_g para cada $g \in S_3$. ■

Agora, com $\mathfrak{C} := \bigcap_{n\in\omega} F_n$:

(i) $\mathfrak{C}$ é compacto por ser um fechado do compacto $[0,1]$;

(ii) para cada função $f : \omega \to \{0,1\}$, $\left(B_{f|_n}\right)_{n\in\omega}$ é uma sequência decrescente de intervalos fechados limitados e não-vazios, donde a compacidade de $[0,1]$ assegura $x_f \in \bigcap_{n\in\omega} B_{f|_n} \subseteq \mathfrak{C}$;

(iii) dado que para $f, g \in 2^\omega$ distintas existe n tal que $B_{f|_n} \cap B_{g|_n} = \emptyset$, resulta que a correspondência $f \mapsto x_f$ define uma injeção $2^\omega \to \mathfrak{C}$, mostrando que o último é infinito;

(iv) por fim, não é difícil se convencer de que qualquer aberto $A \subseteq \mathbb{R}$ é tal que $A \cap \mathfrak{C}$ é um faberto em $\mathfrak{C}$, de modo que, com um pouco mais de reflexão, conclui-se que $\mathfrak{C}$ é zero-dimensional e sem pontos isolados, como desejado.

[69] https://dantopology.wordpress.com/2010/05/21/the-cantor-set-i/.

Exemplo 2.3.52 (Curvas de Peano)**.** Seja $\varphi\colon 2^\omega \to [0,1]$ a função que a cada $f \in 2^\omega$ faz corresponder o número

$$\psi(f) := \sup\left\{\sum_{j\leq n} \frac{f(j)}{2^{j+1}} : n \in \omega\right\}.$$

Com algum trabalho, o leitor pode mostrar que φ é contínua e sobrejetora. Agora, o Exercício 1.110 garante que 2^ω e $2^{\omega \amalg \omega}$ são espaços homeomorfos, onde $\omega \amalg \omega$ é o coproduto entre ω e ω (Exemplo 1.3.12). Daí, como $2^{\omega\amalg\omega}$ e $2^\omega \times 2^\omega$ são espaços homeomorfos[70], pode-se usar φ para obter uma função $\Phi\colon 2^\omega \to [0,1]\times[0,1]$, contínua e sobrejetora. Finalmente, como 2^ω é homeomorfo ao conjunto de Cantor, um subespaço fechado de $[0,1]$, o Teorema de Tietze-Urysohn (Observação 2.2.30) dá uma função $[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$, contínua e sobrejetora.

Classicamente, funções desse tipo são chamadas **curvas de Peano**. Entre outras coisas, elas mostram que a definição de continuidade é mais abrangente do que sugere a intuição. De modo geral, é *possível* caracterizar completamente os espaços topológicos que são imagens contínuas do intervalo $[0,1]$: a saber, são os espaços *metrizáveis*, *compactos*, *conexos* e *localmente conexos*. Evidentemente, tal resultado não é trivial: é o *Teorema de Hahn-Mazurkiewicz*. Embora o ferramental necessário para sua prova já esteja presente no texto, não me restou paciência para destrinchá-lo aqui. O leitor interessado pode encontrar uma demonstração no já recomendado texto de Willard [115]. ▲

Exercício 2.79. Seja $\kappa \leq \aleph_0$ um cardinal. Mostre que o espaço $[0,1]^\kappa$ é imagem contínua do intervalo $[0,1]$. ■

Observação 2.3.53. O leitor, possivelmente, se interessará em saber da existência de outras caracterizações puramente topológicas de espaços conhecidos: *pode-se* provar, por exemplo, que se X é um espaço

- ✓ metrizável,
- ✓ *separável*[71],
- ✓ conexo,
- ✓ localmente conexo
- ✓ e tal que $X \setminus \{x\}$ tem exatamente duas componentes conexas para cada $x \in X$,

então X é homeomorfo a $\mathbb{R}$. O leitor interessado na caracterização mencionada para a reta real pode conferir o trabalho original de Ward [111].

Neste texto, veremos uma caracterização semelhante para $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: a menos de homeomorfismo, o espaço dos irracionais é o único espaço topológico *completamente metrizável*, com base enumerável, zero-dimensional e no qual todo subespaço compacto tem interior vazio. Em particular, é por tal razão que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e ω^ω são homeomorfos. No entanto, vai demorar: esta caracterização será tratada apenas no Capítulo 6 (Teorema 6.2.23 e Exercício 6.50). △

[70] Em geral, 2^X é o espaço $\mathcal{C}_p(X,\{0,1\})$ *quando* X é dotado da topologia discreta e, neste cenário, $\mathcal{C}_p(A \amalg B, C)$ e $\mathcal{C}_p(A,C)\times\mathcal{C}_p(B,C)$ são homeomorfos (Exercício 6.27).

[71] Que contém um denso enumerável. Abordaremos tais espaços no próximo capítulo.

Exercícios complementares da seção

Exercício 2.80. Prove que se $\beta \in \mathbb{R}$ é tal que $\beta \geq 0$, então existe um único $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = \beta$. ■

Exercício 2.81 (Veja também o Exercício 1.120)**.** Generalize o exercício anterior para raízes n-ésimas quaisquer, com $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercício 2.82. Prove que todo polinômio não-constante em $\mathbb{R}[x]$ de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real. ■

Exercício 2.83. Dado um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, mostre que se $f: I \to \mathbb{R}$ é injetora e contínua, então f é estritamente monótona. Além disso, f é um homeomorfismo sobre sua imagem. Dica: para a primeira parte, note que negar a monotonicidade violaria a injetividade; para a segunda parte, observe que f leva intervalos abertos em intervalos abertos. ■

Exercício 2.84. Mostre que se $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo estritamente decrescente, então h tem ponto fixo. Dica: se $h(0) = 0$, acabou; se $h(0) \neq 0$, avalie a função contínua $g := h - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ em 0 e no ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ que satisfaz $h(x_0) = 0$. ■

Exercício 2.85. Existe alguma operação $*$ em $[0,1]$ que faça de $([0,1], *)$ um grupo topológico? ■

Exercício 2.86. É possível estender continuamente a operação de adição em $\mathbb{R}$ para $\overline{\mathbb{R}}$? Dica: use o exercício anterior ou a compacidade de $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Exercício 2.87. Mostre que para quaisquer números reais α e β existe $p \in (0,1)$ tal que $\alpha(\beta + p) \in \mathbb{Q}$. ■

Exercício 2.88. Recordemo-nos de que $\mathcal{B}[a,b]$ denota a família das funções limitadas da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$. Mostre que se $\varphi: \mathcal{B}[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função crescente e $\mathbb{Q}$-linear, então f é $\mathbb{R}$-linear. Dica: use o exercício anterior. ■

Exercício 2.89. Dados subconjuntos A e B de um espaço topológico X, dizemos que A e B são **separados**[72] se ocorrer $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$.

a) Seja $C \subseteq X$ um subconjunto. Mostre que C é conexo se, e somente se, para qualquer par $A, B \subseteq X$ de subespaços de X separados com $C = A \cup B$ valer que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

b) Para $C \subseteq X$, mostre que se C é conexo e $C \subseteq A \cup B$ com A e B separados, então $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$.

c) (Compare com a Proposição 2.3.11) Seja $\mathcal{X}$ uma família de subespaços conexos de X. Mostre que se existir $C \in \mathcal{X}$ tal que C não é separado de D para todo $D \in \mathcal{X}$, então $\bigcup \mathcal{X}$ é subespaço conexo de X.

d) Use o item anterior para (re) demonstrar a Proposição 2.3.25. ■

Exercício 2.90. Mostre que o produto arbitrário de espaços conexos é conexo. Dica: reduza ao caso finito; para isso, fixe uma upla $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ e, para cada subconjunto finito $S \subseteq \mathcal{I}$, defina $C_S := \prod_{i \in \mathcal{I}} C_S(i)$, onde $C_S(i) := \{a_i\}$ para $i \notin S$, e $C_S(s) := X_s$ para $s \in S$; por fim, note que cada C_S é conexo, com $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \in C := \bigcup_{S \in [\mathcal{I}]^{<\aleph_0}} C_S$ e C denso em $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$. ■

Exercício 2.91. Pense rápido: componentes conexas sempre são fechadas? ■

Exercício 2.92. Dê exemplos de espaços localmente conexos que não sejam conexos. ■

Exercício 2.93. Sejam X um espaço topológico e $x, y, z \in X$ pontos quaisquer. Mostre que se existe um caminho de x para y e outro de y para z, então existe um caminho de x para z. ■

Exercício 2.94. Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se f é sobrejetora, então $\mathrm{con}(Y) \leq \mathrm{con}(X)$, i.e., Y tem no máximo tantas componentes conexas quanto X. Dica: defina uma sobrejeção esperta entre $\{C : C \text{ é comp. conexa de } X\}$ e $\{D : D \text{ é comp. conexa de } Y\}$. ■

Exercício 2.95. Prove que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ são homeomorfos. ■

[72] Compare com a definição de subconjuntos completamente separados (página 286).

Exercício 2.96. Sejam X um espaço topológico, $\sim$ uma relação de equivalência em X e $\pi\colon X \to X/\sim$ a projeção. Mostre que se as classes de equivalência de $\sim$ são conexas e $X/\sim$ é conexo, então X é conexo. Dica: use a caracterização apropriada de conexidade. ■

Exercício 2.97 (For fun)**.** Mostre que se $X \times \mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, então $|X| = 1$. Dica: mostre que $\mathbb{R}$ seria reunião disjunta de $|X|$ subespaços fabertos não-vazios. ■

Exercício 2.98. Seja $(X, <)$ um espaço ordenado.

a) Mostre que se X não tem extremos, então existe uma família M de intervalos da forma $[a, b]$, com $|I \cap J| \leq 1$ para quaisquer $I, J \in M$ distintos e $\bigcup M = X$. Dica: fixado $x_0 \in M$, construa, recursivamente, uma *net* $(x_\alpha : \alpha < \gamma)$ estritamente crescente para algum ordinal limite γ, de modo que $[x, +\infty) = \bigcup_{\alpha<\gamma}[x_\alpha, x_{\alpha+1}]$; repita o processo *para baixo*.

b) Mostre que se $(X, <)$ é conexo e sem extremos, então X é normal. Dica: por Heine-Borel (Teorema 1.2.101), qualquer intervalo fechado e limitado de X é normal; note que os intervalos da cobertura M obtida no item anterior são normais, e use isso para separar fechados disjuntos contidos em X.

c) Assumindo que toda ordem total pode ser mergulhada numa ordem conexa e sem extremos, conclua que X é espaço normal. Dica: se X' é a ordem conexa e sem extremos que contém X, lembre-se de que $\mathrm{cl}_X(S) = \mathrm{cl}_{X'}(S) \cap X$ para qualquer $S \subseteq X$; em particular, para $A, B \subseteq X$ fechados disjuntos, investigue o espaço $Y := X' \setminus (\mathrm{cl}_{X'}(A) \cap \mathrm{cl}_{X'}(B))$, um aberto de X' que contém X. ■

Observação 2.3.54. O roteiro acima, adaptado do material disponível em https://math.stackexchange.com/a/322684/128988, dá um método indireto (mas elegante) para demonstrar que todo espaço ordenado é normal. Leitores interessados numa prova mais direta encontrarão sugestões no mesmo endereço. Os próximos exercícios dão conta das hipóteses assumidas no item (c). △

Exercício 2.99. Mostre que toda ordem total pode ser mergulhada numa ordem densa e sem extremos. Dica: Teorema da Compacidade (*a.k.a.* Teorema 1.251)! ■

Exercício 2.100. Mostre que toda ordem total pode ser mergulhada numa ordem Dedekind completa. Em particular, se a primeira for densa e sem extremos, então a ordem completa também será. Dica: construa o **completamento de Dedekind** por meio de cortes; mais precisamente, para uma ordem total $(\mathbb{T}, \leq)$, um *corte* é um par (A, B) de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{T}$, onde $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{T}$ e $a < b$ para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, de modo que a ordem completa procurada será $\mathfrak{D} := \{(A, B) : (A, B)$ é corte$\}$ com $(A, B) \leq (A', B')$ se, e somente se, $A \subseteq A'$. ■

Exercício 2.101. Mostre que o produto arbitrário de espaços hereditariamente desconexos é desconexo. ■

Exercício 2.102. Mostre que se X é hereditariamente desconexo e $Y \subseteq X$, então Y é hereditariamente desconexo. ■

Exercício 2.103 (Espaços **profinitos**)**.** Seja $\mathcal{F}\colon (\mathbb{D}, \leq) \to \textsc{Top}$ um funtor contravariante, com $(\mathbb{D}, \leq)$ dirigido.

a) Mostre que se cada $\mathcal{F}(d)$ é compacto e discreto, então $\varprojlim_{d\in\mathbb{D}} \mathcal{F}(d) \neq \emptyset$ é compacto, Hausdorff e hereditariamente desconexo.

b) Mostre que vale a volta, i.e.: se $X \neq \emptyset$ é compacto, Hausdorff e hereditariamente desconexo, então existe um conjunto dirigido $(\mathbb{D}, \leq)$ tal que X é homeomorfo a $\varprojlim_{d\in\mathbb{D}} \mathcal{F}(d)$ para algum funtor contravariante $\mathcal{F}\colon \mathbb{D} \to \textsc{Top}$ tal que $\mathcal{F}(d)$ é compacto discreto para todo $d \in \mathbb{D}$. Dica: considere $\mathbb{D}$ o conjunto das relações de equivalência R sobre X que são *abertas*, i.e., tais que $R \subseteq X \times X$ é subconjunto aberto de $X \times X$ com a topologia produto, dirigido pela ordem da inclusão reversa. ■

Capítulo 3

Propriedades de recobrimento

Assim como o capítulo anterior estendeu as considerações sobre axiomas de separação introduzidas no Capítulo 1, o presente capítulo fará o mesmo com as *propriedades de recobrimento*, i.e., sobre propriedades topológicas relativas a coberturas por abertos. A primeira seção abordará propriedades elementares, conhecidas como *axiomas de enumerabilidade*. A segunda se voltará para variações mais explícitas de compacidade. Finalmente, a última seção tratará do problema de *tornar compacto aquilo que não é*, ou algo próximo disso.

3.1 Os axiomas clássicos de enumerabilidade

De modo geral, pode-se dizer que um *axioma de enumerabilidade* é uma asserção que exige a enumerabilidade de alguma família num certo contexto. Em Topologia Geral, há três condições desta natureza classicamente estudadas.

Definição 3.1.1. Seja X um espaço topológico.

(i) Diz-se que X satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade**, ou **tem caráter enumerável**, se todo ponto do espaço tem uma base local enumerável.

(ii) Diz-se que X satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade**, ou **tem peso enumerável**, se o espaço tem uma base enumerável.

(iii) Diz-se que X ~~satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade~~ é **separável**, ou tem **densidade enumerável**, se existe pelo menos um subespaço denso e enumerável.¶

Observação 3.1.2. Os termos **caráter**, **peso** e **densidade** são alusões às *funções cardinais* que generalizam o primeiro, o segundo e o *terceiro* axioma de enumerabilidade, respectivamente. Neste texto, as terminologias clássicas para as duas primeiras não serão incentivadas, justamente para preparar o leitor para o que está por vir[1]. Porém, a *praticidade* do termo *separável* é incontestável – na mesma medida em que é infeliz[2]. △

[1] Livros mais tradicionais chamam espaços com caráter enumerável de *primeiro-contáveis*, em alusão à expressão estrangeira usual, 1^{st}-*countable space*. Analogamente, espaços com peso enumerável são xingados de *segundo-contáveis*.

[2] O termo foi cunhado por Fréchet no mesmo artigo em que espaços métricos foram introduzidos, com uma motivação bastante *real*: quaisquer dois números reais distintos $x < y$ podem ser *separados* por um número racional r, i.e., $x < r < y$. Uma discussão mais longa pode ser encontrada em https://mathoverflow.net/questions/51494/why-the-name-separable-space.

Não é difícil ver que as condições acima se relacionam. De fato, se $\mathcal{B}$ é base para a topologia de X, então ao escolher $d_B \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$, obtém-se um subespaço $D := \{d_B : B \in \mathcal{B}\}$ de X, denso e cuja cardinalidade é menor do que ou igual a $|\mathcal{B}|$. Analogamente, para $x \in X$ fixado, a família $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é base local em x, com $|\mathcal{B}_x| \leq |\mathcal{B}|$. Em outras palavras, o raciocínio acima demonstra a

Proposição 3.1.3. *Se um espaço topológico X tem peso enumerável, então X é separável e tem caráter enumerável.*

Exemplo 3.1.4. Como a reta real $\mathbb{R}$ tem peso enumerável, obtemos demonstrações indiretas de que $\mathbb{R}$ é separável e tem caráter enumerável. Por sua vez, $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ não tem caráter enumerável (Proposição 2.2.13) e, por conseguinte, não pode ter peso enumerável. No entanto, *pode-se provar* que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ é separável – infelizmente, demonstrar tal fato agora seria inoportuno.

Ainda assim, já vimos pelo menos um exemplo de espaço separável sem base enumerável: $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, onde $\mathbb{R}_S$ denota a reta de Sorgenfrey. De fato, no Exemplo 2.1.54, mostrou-se que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é um espaço separável, mas $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal, donde *seguirá*, pela próxima proposição, que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não tem peso enumerável. Embora $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ tenha caráter enumerável (confira o Exercício 3.3), há exemplos bem mais imediatos de espaços sem peso enumerável com caráter enumerável (Exercício 3.9). ▲

A combinação de bons axiomas de separação com algum axioma razoável de enumerabilidade costuma garantir comportamentos interessantes para o espaço. O Corolário 2.1.47, por exemplo, se traduz na seguinte

Proposição 3.1.5. *Se X é um espaço T_3 com peso enumerável, então X é T_4.*

Exercício 3.1. Mostre que a recíproca da proposição acima não é válida. Dica: olhe para a reta de Sorgenfrey depois de resolver o próximo exercício. ■

Exercício 3.2. Sejam X e Y espaços topológicos. Mostre que se ambos têm peso enumerável, então $X \times Y$ tem peso enumerável. ■

Exercício 3.3. Repita o exercício anterior, trocando "peso" por "caráter" e, depois, por "densidade". ■

Observação 3.1.6. É comum que a intuição sobre os conceitos tratados nesta seção confunda o leitor desavisado. Um dos principais motivos é que, no cenário metrizável no qual fomos educados, caráter enumerável é regra geral (Proposição 1.2.56), enquanto *peso* e *densidade* coincidem. Mais precisamente:

Proposição 3.1.7. *Se X é pseudometrizável, então são equivalentes:*

(i) *X é separável;*

(ii) *X tem peso enumerável.*

Demonstração. A direção (ii) $\Rightarrow$ (i) é verdadeira para qualquer espaço topológico. Para a recíproca, fixemos uma pseudométrica d compatível com a topologia de X e um subespaço $D \subseteq X$ denso e enumerável. Mostraremos que $\mathcal{B} := \{B_d(z, r) : z \in D \text{ e } r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ é base para a topologia de X. Ora, dado um aberto U de X e um ponto $x \in U$, existe $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ com $B_d(x, 2r) \subseteq U$. Em particular, como $B_d(x, r) \neq \emptyset$, existe $z \in D$ com $z \in B_d(x, r)$. O leitor deve notar que $x \in B_d(z, r) \subseteq U$. Como $|\mathcal{B}| \leq |D| \times |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, o resultado segue. □

Um olhar atento sobre a demonstração acima mostra que para cada ponto z de um *subespaço enumerável e denso* D, fixou-se uma *base local enumerável* $\mathcal{B}_z$ e, com isso, mostrou-se que $\mathcal{B} := \bigcup_{z\in D} \mathcal{B}_z$ é uma *base enumerável* para X. Isso leva a uma pergunta bastante razoável:

"X separável com caráter enumerável $\Rightarrow$ X tem peso enumerável?"

Surpreendentemente, a resposta é não: a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é separável e tem caráter enumerável mas, como já vimos, não tem peso enumerável. Por futura conveniência, isto segue destacado no Exercício 3.8.

Exercício 3.4. Ignore o contraexemplo anterior e tente (em vão) provar que se X é separável e tem caráter enumerável, então X tem peso enumerável. Aponte em qual trecho da demonstração a pseudométrica faz falta. ■

As pegadinhas não acabam por aí. Outra armadilha é sugerida no próximo

Exercício 3.5. Mostre que se X tem peso enumerável, então $Y \subseteq X$ também tem peso enumerável. ■

Em palavras mais burlescas, "ter peso enumerável" é uma propriedade hereditária para subespaços. Logo, se X é pseudometrizável e separável, então é seguro afirmar que qualquer subespaço de X também é separável. A conjectura natural seria a de que a hipótese de pseudometrizabilidade pode ser abandonada.

Exercício 3.6. Mostre que se $|X| \leq \aleph_0$, então X é separável. Observe que a recíproca é verdadeira se X for discreto. ■

Pelo exercício acima, a conjectura estará refutada se exibirmos um espaço separável com um subespaço discreto e não-enumerável. Mais uma vez, $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ faz o trabalho sujo de esvaziar a conjectura. Por fim, a primeira parte do exercício anterior serve de isca para o último (e mais perturbador) alerta.

A pergunta capciosa é muito simples: na implicação

$$|X| \leq \aleph_0 \Rightarrow X \text{ é separável },$$

pode-se trocar "separável" por "peso enumerável" ou "caráter enumerável"? A resposta é um aterrador **não**.

Fixado um *ultrafiltro livre*[3] $\mathfrak{u}$ de ω, pode-se munir o conjunto $X := \omega \cup \{\mathfrak{u}\}$ com a topologia que declara um subconjunto $A \subseteq X$ como aberto se, e somente se, $\mathfrak{u} \notin A$ ou existe $U \in \mathfrak{u}$ com $A = U \cup \{\mathfrak{u}\}$. O fato de $\mathfrak{u}$ ser ultrafiltro livre impede que $\mathfrak{u}$, enquanto *ponto* de X, tenha base local enumerável: se $\{A_n : n \in \omega\}$ é uma base local de $\mathfrak{u}$, então para cada $n \in \omega$ existe $U_n \in \mathfrak{u}$ tal que $A_n = U_n \cup \{\mathfrak{u}\}$, com a propriedade de que para cada $U \in \mathfrak{u}$ ocorre $U_n \cup \{\mathfrak{u}\} \subseteq U \cup \{\mathfrak{u}\}$ para algum n e, consequentemente, $U_n \subseteq U$. Em outras palavras, a família $\{U_n : n \in \omega\}$ *seria* uma base enumerável do ultrafiltro livre $\mathfrak{u}$, absurdo em vista do Exercício 1.329. △

Com respeito ao tema deste capítulo, as propriedades acima se relacionam de formas variadas com as propriedades de recobrimento, a depender do contexto do espaço. O mais geral que pode se dizer *no atual ponto do texto* está expresso na próxima proposição.

[3] Exercício 1.133.

Proposição 3.1.8. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para X. Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos de X, então existe uma subcobertura $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ com $|\mathcal{U}'| \leq |\mathcal{B}|$.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, tomemos $U_x \in \mathcal{U}$ com $x \in U$ e $B_x \in \mathcal{B}$ com $x \in B_x \subseteq U_x$. Como $\mathcal{B}' := \{B_x : x \in U\}$ é subconjunto de $\mathcal{B}$, tem-se $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$. Finalmente, ao se escolher $U_B \in \mathcal{U}$ com $B \subseteq U_B$ para cada $B \in \mathcal{B}'$, resulta que $\mathcal{U}' := \{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ tem as propriedades desejadas. □

Corolário 3.1.9. *Se X tem peso enumerável, então toda cobertura por abertos de X admite subcobertura enumerável.*

Observação 3.1.10. A Proposição 3.1.8 sugere que um espaço topológico com base finita é necessariamente compacto. Mas o quão relevante é essa informação? Não muito.

Se, por exemplo, X for um espaço de Hausdorff infinito, então não é possível que X tenha uma base finita, em virtude do Exercício 2.20. Em outras palavras, espaços de Hausdorff com base finita são, eles próprios, finitos e, por conseguinte, compactos.

É mais interessante, porém, notar que a compacidade *nem sempre* é capaz de garantir peso enumerável: curiosamente, com um pouco de imaginação e boa vontade, a contrapositiva da Proposição 3.1.3 pode ser usada para *perceber* um contraexemplo rápido (confira o Exercício 3.11), só que não-metrizável (confira o Exercício 3.15). △

3.1.1 Cantor-Bendixson e metrização de Urysohn

Embora a exigência de peso enumerável não seja capaz de garantir compacidade, ela é uma condição que ameniza as *patologias* encontradas no dia a dia do topólogo geral. Isto será ilustrado com dois exemplos curiosos. Comecemos revisitando os conjuntos *derivados*: convém lembrar que A^{d} é a coleção dos elementos de X que são pontos de acumulação de A.

Lema 3.1.11. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de X tal que $A \subseteq A^{\mathrm{d}}$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Então $\bigcup \mathcal{A} \subseteq (\bigcup \mathcal{A})^{\mathrm{d}}$.*

Demonstração. Dado $x \in \bigcup \mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ com $x \in A \subseteq A^{\mathrm{d}}$. Logo, para uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_x$ qualquer, ocorre

$$\emptyset \neq V \cap (A \setminus \{x\}) \subseteq V \cap \left(\left(\bigcup \mathcal{A}\right) \setminus \{x\}\right),$$

mostrando que $x \in (\bigcup \mathcal{A})^{\mathrm{d}}$ e, consequentemente, $\bigcup \mathcal{A} \subseteq (\bigcup \mathcal{A})^{\mathrm{d}}$. □

Teorema 3.1.12 (Cantor-Bendixson – caso geral)**.** *Dado um espaço topológico X, existem únicos subespaços $D, P \subseteq X$ tais que*

- *$D \cap P = \emptyset$ e $X = P \cup D$,*
- *$P = P^{\mathrm{d}}$ é fechado e*
- *D é disperso.*

Demonstração. A ideia da demonstração é considerar a família $\mathcal{P}$ de todos os subconjuntos de X que satisfazem a hipótese do lema anterior e mostrar que $P := \bigcup \mathcal{P}$ induz a decomposição desejada. Primeiramente, observemos que a inclusão $\overline{A} \subseteq \overline{A}^{\mathrm{d}}$ ocorre sempre que $A \subseteq A^{\mathrm{d}}$: basta tomar $x \in \overline{A}$ e notar que a inclusão $A \subseteq A^{\mathrm{d}}$ garante que $x \in \overline{A}^{\mathrm{d}}$.

Desse modo, se $\mathcal{P} := \left\{A \subseteq X : A \subseteq A^{\mathrm{d}}\right\}$, então o lema anterior assegura $\bigcup \mathcal{P} \in \mathcal{P}$ e, da última observação, obtém-se $\overline{\bigcup \mathcal{P}} \in \mathcal{P}$. Infere-se daí que $\overline{\bigcup \mathcal{P}} \subseteq \bigcup \mathcal{P}$ e, como a inclusão contrária é sempre válida, resulta que $P := \bigcup \mathcal{P}$ é *fechado*. Mostraremos que a decomposição desejada se obtém com $D := X \setminus P$.

A igualdade $P = P^{\mathrm{d}}$ segue da identidade (1.9) (página 154) e da inclusão $P \subseteq P^{\mathrm{d}}$, pois $\overline{P} = P \cup P^{\mathrm{d}} \subseteq P^{\mathrm{d}} \subseteq \overline{P}$. Enfim, D é *disperso* pois, se $\emptyset \neq H \subseteq D$ não tem pontos isolados, então pelo modo como se construiu P, conclui-se que $H \subseteq P = X \setminus D$, contrariando o modo como H foi tomado.

Agora, se $X = Q \cup S$ for outra decomposição de X, com $Q = Q^{\mathrm{d}}$ fechado, S disperso e $Q \cap S = \emptyset$, provaremos que $P = Q$ (e, consequentemente, $D = S$). Pelo modo como P foi definido, a inclusão $Q \subseteq P$ é automática. Por outro lado, se $P \nsubseteq Q$, então $P \cap S \neq \emptyset$, donde obtém-se $A \in \mathcal{P}$ (i.e., $A \subseteq A^{\mathrm{d}}$) com $A \cap S \neq \emptyset$. Note então que por S ser disperso, existe $x \in A \cap S$ isolado em $A \cap S$, i.e., existe uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_x$ com $V \cap (A \cap S) = \{x\}$. Ora, como S é aberto, a vizinhança $V \cap S \in \mathcal{N}_x$ atesta $x \notin A^{\mathrm{d}}$, contrariando $A \in \mathcal{P}$. Logo, $P \subseteq Q$, como desejado. □

Costuma-se chamar de **decomposição de Cantor-Bendixson** à decomposição de um espaço como no teorema acima. Naturalmente, pode ocorrer $P = \emptyset$ ou $D = \emptyset$ (ou ambos!). Em particular, X é disperso se, e somente se, $P = \emptyset$. Para facilitar futuras referências:

Definição 3.1.13. Diremos que um subconjunto $P \subseteq X$ tal que $P = P^{\mathrm{d}}$ é um **conjunto perfeito** (em X), enquanto subconjuntos $A \subseteq X$ satisfazendo $A \subseteq A^{\mathrm{d}}$ são **densos em si mesmos**[4]. ¶

No cenário acima, a adição da hipótese de peso enumerável restringe drasticamente a cardinalidade dos subespaços dispersos, o que resulta na forma "clássica" do Teorema de Cantor-Bendixson.

Proposição 3.1.14. *Se X é disperso e tem peso enumerável, então $|X| \leq \aleph_0$.*

Demonstração. Procederemos pela contrapositiva: mostraremos que se X tem peso enumerável e $|X| > \aleph_0$, então X não é disperso. Fixada uma base enumerável $\mathcal{B}$ para X, considere $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B} : |B| \leq \aleph_0\}$ e faça $A := \bigcup \mathcal{A}$. Como $|A| \leq \aleph_0$, deve-se ter $Y := X \setminus A$ não-enumerável, mas não só isso: Y não tem pontos isolados. Com efeito, dado $y \in Y$ e $B \in \mathcal{B}$ com $y \in B$, ocorre $|B| > \aleph_0$ (caso contrário, $y \in A$) e, por conseguinte, $|B \cap Y| = |B \setminus A| > \aleph_0$, donde em particular resulta $B \cap (Y \setminus \{y\}) \neq \emptyset$, como queríamos. □

Corolário 3.1.15 (Cantor-Bendixson – clássico)**.** *Se X tem peso enumerável, então existem únicos subespaços $P, D \subseteq X$ disjuntos, com P perfeito, D enumerável e disperso, tais que $X = P \cup D$.*

Observação 3.1.16. Deve-se tomar cuidado com as conclusões precipitadas que o corolário acima pode sugerir, principalmente diante de outros resultados que veremos ao longo do caminho. No Exemplo 4.2.51, provaremos que todo subespaço perfeito de um *espaço métrico completo* tem cardinalidade maior do que ou igual a $2^{\aleph_0}$. Com isso em mente, é quase irresistível argumentar da seguinte forma: *se $X \subseteq \mathbb{R}$ é não-enumerável, então $|X| = 2^{\aleph_0}$ pois existe $P \subseteq X$ perfeito.* Até parece que a Hipótese do Contínuo está provada, não é mesmo?

[4] *Dense in itself* nas referências estrangeiras.

Há diversos problemas com o raciocínio anterior. Para citar o mais imediato: a afirmação "se $P \subseteq X$ é perfeito em X, então P é perfeito em $\mathbb{R}$", implícita no *argumento*, é falsa. De fato, $\mathbb{Q}$ é perfeito quando visto como subespaço de si mesmo, mas $\mathbb{Q}$ não é perfeito em $\mathbb{R}$. No entanto, o argumento é aplicável se X for <u>fechado</u> (confira o Exercício 3.20). $\triangle$

Assim, a hipótese de peso enumerável permite "quebrar" um espaço (possivelmente) complexo em dois subespaços mais simples: um sem pontos isolados (perfeito), e outro disperso, espaços mais simples de se compreender[5]. Portanto, não impressiona que inserir hipóteses adicionais *melhore* ainda mais o espaço: é o que ocorre, por exemplo, com a regularidade, capaz de garantir (secretamente) metrizabilidade na presença de bases enumeráveis.

Teorema 3.1.17 (Metrizabilidade de Urysohn – camuflada)**.** *Se X é um espaço regular com peso enumerável, então X é homeomorfo a um subespaço de* $[0,1]^\omega$.

Demonstração. A ideia da demonstração é muito simples: usando a regularidade e uma base enumerável $\mathcal{B}$, obteremos uma família enumerável de funções contínuas da forma $X \to [0,1]$ nas hipóteses do Exercício 2.57.

A Proposição 3.1.5 diz que X é T_4, o que permite usar o Lema de Urysohn. Agora, se $\mathcal{B}$ é a base enumerável dada por hipótese, então para cada $B, C \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{B} \subseteq C$ existe $f_{B,C} \colon X \to [0,1]$ contínua com $f_{B,C}(x) = 1$ para $x \in \overline{B}$ e $f_{B,C}(x) = 0$ para $x \notin C$. Mostraremos que a família $\mathcal{F} := \{f_{B,C} : B, C \in \mathcal{B}\}$ separa pontos, bem como separa pontos de fechados, i.e., $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses dos itens b) e c) do Exercício 2.57.

Note que se $x \in X$ e $F \subseteq X$ é fechado com $x \notin F$, então existe $C \in \mathcal{B}$ com $x \in C$ e $C \subseteq X \setminus F$ e, por X ser T_3, existe $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq C$. Logo, a função $f_{B,C}$ satisfaz $f_{B,C}(x) = 1$ e $f_{B,C}(y) = 0$ para todo $y \in F$, mostrando que $f_{B,C}(x) \notin \overline{f_{B,C}[F]}$. Como X também é T_1, pontos são fechados e, por conseguinte, o mesmo argumento mostra que para $x, y \in X$ distintos existe $f_{B,C}$ com $f_{B,C}(x) \neq f_{B,C}(y)$.

Desse modo, a correspondência $\Delta_{\mathcal{F}} \colon X \to [0,1]^{\mathcal{F}}$ é um mergulho. Como $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$, ocorre $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$, o que leva a dois casos[6]: se $|\mathcal{F}| < \aleph_0$, então X é finito e, portanto, discreto, de modo que basta tomar algum subespaço discreto de $[0,1]^\omega$ com cardinalidade $|X|$; se $|\mathcal{F}| = \aleph_0$, então $[0,1]^{\mathcal{F}}$ e $[0,1]^\omega$ são homeomorfos (Exercício 1.110). $\square$

O mergulho do teorema acima costuma ser chamado de *Teorema de Metrizabilidade de Urysohn* pois o espaço $[0,1]^\omega$ *dentro* do qual *mergulhamos* X é, não de forma evidente, metrizável. Dito isso, ainda não é a hora de saber que $[0,1]^\omega$ é metrizável: isto será feito apenas no Capítulo 4, no contexto apropriado[7].

3.1.2 Um teorema de Arhangel'skii

Há um subterfúgio bastante imoral que ajuda a justificar a inserção desta seção neste capítulo: a *cardinalidade* do espaço é uma propriedade de recobrimento! De fato, embora seja relativamente inútil saber disso, é claro que se $|X| \leq \kappa$, então toda cobertura do espaço admite uma subcobertura cuja cardinalidade não excede κ: nesse sentido, o Exercício 1.174 é mera instância de tal fenômeno.

[5] Espaços dispersos podem ser decompostos numa cadeia de subconjuntos ainda mais simples, por meio dos conjuntos derivados (Exercício 3.29).

[6] Alternativamente, confira o Exercício 3.22.

[7] O leitor afoito que descubra, por conta própria, como utilizar séries para induzir uma métrica em $[0,1]^\omega$ a partir de uma métrica em $[0,1]$.

Com isso em mente, os *axiomas de enumerabilidade* apresentados nesta subseção influenciam diretamente a cardinalidade do espaço ao se combinarem com axiomas de separação interessantes. Por exemplo, os Teoremas 2.1.7 e 2.1.23, no atual contexto, se traduzem como abaixo.

Teorema 3.1.18. *Se X é um espaço T_0 com peso enumerável, então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Teorema 3.1.19. *Se X é um espaço T_2 separável, então $|X| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.*

Por tal razão, vamos encerrar esta seção com um teorema que relaciona caráter enumerável e compacidade em espaços de Hausdorff de maneira belíssima.

Teorema 3.1.20 (Arhangel'skii)**.** *Se X é um espaço topológico compacto, T_2 e com caráter enumerável, então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração.[8] Mostraremos que existe uma família $\mathcal{A} := \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos de X, com $|A_\alpha| \leq \mathfrak{c}$ para cada $\alpha < \omega_1$, satisfazendo $X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$, pois daí

$$\left|\bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha\right| \leq \sum_{\alpha<\omega_1} |A_\alpha| \leq \aleph_1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Antes de qualquer outra coisa, a hipótese sobre o caráter enumerável permite fixar bases locais enumeráveis $\mathcal{V}_x$ em x, para cada $x \in X$. Elas nos acompanharão pelo restante da demonstração. Agora, como primeiro passo da *construção*, fixemos um subconjunto $A_0 \subseteq X$ com $|A_0| = \mathfrak{c}$, e definamos a família $\mathcal{C}_0 := \{V : V \in \mathcal{V}_x \text{ e } x \in A\}$, cuja cardinalidade não excede $\mathfrak{c}$, pois $|\mathcal{C}_0| \leq \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Recordemo-nos de que $[\mathcal{C}_0]^{<\aleph_0}$ denota a família dos subconjuntos finitos de $\mathcal{C}_0$ e, mais importante, $|[\mathcal{C}_0]^{<\aleph_0}| = |\mathcal{C}_0| \leq \mathfrak{c}$ se $\mathcal{C}_0$ for infinito[9]. Agora, para cada $C \in [\mathcal{C}_0]^{<\aleph_0}$ com $\bigcup C \neq X$, tomemos $x_C \in X \setminus \bigcup C$ e consideremos conjunto

$$B_0 := A_0 \cup \left\{x_C : C \in [\mathcal{C}_0]^{<\aleph_0} \text{ e } \bigcup C \neq X\right\},$$

que ainda satisfaz $|B_0| \leq \mathfrak{c}$. Vamos então para o primeiro *pulo do gato*.

1º *Katzensprung*[10]: nas hipóteses do teorema, $\left|\overline{B}\right| \leq \mathfrak{c}$ sempre que $|B| \leq \mathfrak{c}$.

Para cada $x \in \overline{B}$ existe uma sequência $(x_n)_{n\in\omega} \in B^\omega$ com $x_n \to x$, pois X tem caráter enumerável (Proposição 1.2.50). Como X é T_2, a correspondência $x \mapsto (x_n)_{n\in\omega}$ determina uma injeção $\overline{B} \to B^\omega$. Por valer $|B^\omega| \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} := \mathfrak{c}$, o resultado segue.

Em virtude da afirmação acima, faz sentido considerar $A_1 := \overline{B_0}$, o que deixa o problema de definir os demais $\aleph_1 - 2$ subconjuntos desejados[11]. Naturalmente, faremos isso por recursão. Porém, antes de discutir o argumento geral, é conveniente explorar o passo seguinte: como a cardinalidade da família $\mathcal{C}_1 := \{V : V \in \mathcal{V}_x \text{ e } x \in A_1\}$ não excede $\mathfrak{c}$, ocorre $|B_1| \leq \mathfrak{c}$, onde

$$B_1 := A_1 \cup \left\{x_C : C \in [\mathcal{C}_1]^{<\aleph_0} \text{ e } X \setminus \bigcup C \neq \emptyset\right\},$$

com $x_C \in X \setminus \bigcup C$ *escolhido arbitrariamente*, o que permite fazer $A_2 := \overline{B_2}$.

De modo geral, suponha que para $\alpha < \omega_1$ tenha-se definido A_β para cada $\beta < \alpha$ com $|A_\beta| \leq \mathfrak{c}$. Neste caso, definem-se A_α e $\mathcal{C}_\alpha$ da seguinte forma:

[8] Argumento adaptado da exposição feita pela Professora Ofélia Alas.

[9] Para o leitor implicante: se $\mathcal{C}_0$ fosse finito, então, com ainda mais razão, ocorrerá $|[\mathcal{C}_0]^{<\aleph_0}| \leq \mathfrak{c}$.

[10] Confira também o Exercício 3.24.

[11] "$\aleph_1$ garrafas de cerveja no muro, $\aleph_1$ garrafas de cerveja! Se uma garrafa cair no chão..."

- se α é ordinal limite, faz-se $\mathcal{C}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta$ e $A_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, o qual ainda satisfaz $|A_\alpha| \leq \mathfrak{c}$;
- se $\alpha = \beta + 1$, faz-se $\mathcal{C}_\beta := \{V : V \in \mathcal{V}_x \text{ e } x \in A_\beta\}$, bem como

$$B_\beta := A_\beta \cup \left\{x_C : C \in [\mathcal{C}_\beta]^{<\aleph_0} \text{ e } X \setminus \bigcup C \neq \emptyset\right\},$$

  com $x_C \in X \setminus \bigcup C$ *escolhido arbitrariamente*, que satisfaz $|B_\beta| \leq \mathfrak{c}$ pois $|\mathcal{C}_\beta| \leq \mathfrak{c}$; daí, define-se $A_\alpha := \overline{B_\beta}$, que também satisfaz $|A_\alpha| \leq \mathfrak{c}$.

Obtém-se, dessa forma, uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ de subconjuntos de X com $|A_\alpha| \leq \mathfrak{c}$ para todo $\alpha < \omega_1$. Além disso, o procedimento recursivo garante que $A_\beta \subseteq A_\alpha$ sempre que $\beta \leq \alpha$. A essa altura, o leitor possivelmente está incomodado pois a hipótese de compacidade ainda não foi utilizada. Isso mudará após o

2º *Katzensprung*: $A := \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ é fechado em X.

De fato, se $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em A com $x_n \to x$. Ora, para cada $n \in \omega$, deve existir $\alpha_n < \omega_1$ com $x_n \in A_{\alpha_n}$ e, por ω_1 ser o primeiro ordinal não-enumerável, resulta que $\alpha := \sup_{n\in\omega} \alpha_n < \omega_1$ (pode ser útil rever o Lema K.1.136). Pelo que se observou acima, tem-se $A_{\alpha_n} \subseteq A_\alpha$ para todo $n \in \omega$, donde se conclui que $x \in \overline{A_\alpha} := A_{\alpha+1} \subseteq A$.

O 2º *Katzensprung*, aliado à hipótese de compacidade de X, permite inferir que A é compacto, o que será usado, finalmente, para garantir que $X = A$. Para isso, procederemos por contradição.

Se existe $b \in X \setminus A$, então o fato de X ser T_2 permite escolher, para cada $a \in A$, um aberto $V_a \in \mathcal{V}_a$ tal que $b \notin V_a$. Agora, $\mathcal{U} := \{V_a : a \in A\}$ é uma cobertura de A por abertos de X, que admite uma subcobertura finita devido a compacidade de A, digamos $C := \{V_{a_0}, \ldots, V_{a_m}\}$ para certos $a_0, \ldots, a_m \in A$. Como feito na justificativa do 2º *Katzensprung*, existe $\beta < \omega_1$ tal que $a_0, \ldots, a_m \in A_\beta$. Logo, deve-se ter $C \in [\mathcal{C}_\beta]^{<\aleph_0}$, enquanto o ponto b tomado garante que $X \setminus \bigcup C \neq \emptyset$, *legitimando* a escolha de $x_C \in X \setminus \bigcup C$. Ora, como $x_C \in B_\beta \subseteq \overline{B_\beta} := A_{\beta+1} \subseteq A$, resulta que C não é uma cobertura de A. □

Observação 3.1.21. O teorema acima se torna mais surpreendente[12] ao observarmos que um espaço topológico não-enumerável nas condições supostas *deve* conter uma cópia de 2^ω (Teorema 3.2.32). Em outras palavras, se X é um espaço infinito, compacto, de Hausdorff e com caráter enumerável, existem apenas duas possibilidades: $|X| = \aleph_0$ ou $|X| = 2^{\aleph_0}$. Embora, em vista do teorema anterior, a conclusão seja trivial em *universos* nos quais é *verdadeira* a Hipótese do Contínuo (CH), é um tanto surpreendente saber que isso também vale nos universos que *rejeitam* CH. △

Exercícios complementares da seção

Exercício 3.7. Mostre que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ não tem peso enumerável sem apelar para a não-normalidade de $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Dica: fixada uma base $\mathcal{B}$ para a topologia de $\mathbb{R}_S$, exiba uma função injetora da forma $\mathbb{R}_S \to \mathcal{B}$. ■

Exercício 3.8. Mostre que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ tem caráter enumerável. Conclua que caráter enumerável + separabilidade não implica em peso enumerável. ■

[12] Embora eu já conhecesse o Teorema 3.1.20, foi apenas no segundo semestre de 2019 que eu conheci o conteúdo desta observação, numa das frutíferas conversas que costumava ter com Pedro Pimenta.

Exercício 3.9. Obtenha um exemplo desonesto de que caráter enumerável não implica peso enumerável. Dica: qual a menor base local de um ponto isolado? ■

Exercício 3.10. Mostre que se X tem caráter enumerável, então X é T_2 se, e somente se, $|\lim_{n\in\omega} x_n| \leq 1$ para toda sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X. ■

Exercício 3.11. Mostre que $[0,1]^{\mathfrak{c}}$ não tem peso enumerável. Dica: o contrário violaria um teorema importante. ■

Exercício 3.12. O seu argumento para o exercício anterior prova que $[0,1]^{\aleph_1}$ não tem peso enumerável? Tem certeza? ■

Exercício 3.13. Caso não tenha feito ainda, mostre que $[0,1]^{\mathfrak{c}}$ tampouco tem caráter enumerável. ■

Exercício 3.14. Pense a respeito: poderia ser o caso de $[0,1]^{\mathfrak{c}}$ ser separável? ■

Observação 3.1.22 (*Spoiler alert*)**.** No Exercício E.39 da distante Seção E.2, veremos que a menor cardinalidade de uma base (local) para $[0,1]^{\kappa}$ é κ (para $\kappa \geq \aleph_0$). Porém, o leitor ambicioso já tem as ferramentas para mostrar, por exemplo, que $[0,1]^{\aleph_1}$ não admite base enumerável: basta obter um mergulho entre $D(\aleph_1)$ e $[0,1]^{\aleph_1}$, onde $D(\aleph_1)$ denota o cardinal $\aleph_1$ munido da topologia discreta; para obter tal mergulho, pode ser útil usar o Exercício 2.57. △

Exercício 3.15. Mostre que se X é um espaço compacto e metrizável, então X tem peso enumerável. Dica: use a compacidade *várias vezes*, ou então espere a próxima seção. ■

Exercício 3.16. Mostre que se $D \subseteq \mathbb{R}$ é não-enumerável, então D não é discreto. Dica: use o peso enumerável de $\mathbb{R}$. ■

Exercício 3.17. Repita o exercício anterior, substituindo "$\mathbb{R}$" por "espaço com peso enumerável". ■

Há outras propriedades topológicas relacionadas com a *inexistência* de discretos "grandes".

Exercício 3.18. Dizemos que um espaço topológico X tem **celularidade enumerável**, ou, para os íntimos, é um espaço **c.c.c.**[13], se não existe família não-enumerável de abertos não-vazios dois a dois disjuntos. Em outras palavras, X é um espaço c.c.c. se para qualquer família $\mathcal{A}$ de abertos de X dois a dois disjuntos ocorrer $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$.

a) Mostre que se X é separável, então X é c.c.c..

b) Mostre que se todo discreto de X é enumerável, então X é c.c.c..

c) Conclua que $\mathbb{R}$ é c.c.c. por uma tonelada de motivos. ■

Exercício 3.19. Sejam X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: $y \in Y$ é isolado em X se, e somente se, y é isolado em Y. Em caso negativo, alguma das implicações é verdadeira? ■

Exercício 3.20. Sejam R um espaço topológico com subespaços X e P. Mostre que se X é fechado em R e $P \subseteq X$ é perfeito em X, então P é perfeito em R. ■

Exercício 3.21. Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto de condensação** de A se $|V \cap A| > \aleph_0$ para toda vizinhança V de x. Vamos denotar por $\operatorname{cond}(A)$ o conjunto dos pontos de condensação de A.

a) Mostre que $\operatorname{cond}(A) \subseteq A^{\mathrm{d}}$, $\operatorname{cond}(A) = \overline{\operatorname{cond}(A)}$ e $\operatorname{cond}(A \cup B) = \operatorname{cond}(A) \cup \operatorname{cond}(B)$ para quaisquer $A, B \subseteq X$.

b) Mostre que se X tem peso enumerável, então $|A \setminus \operatorname{cond}(A)| \leq \aleph_0$ e $\operatorname{cond}(\operatorname{cond}(A)) = \operatorname{cond}(A)$.

c) Compare as afirmações acima com a Proposição 3.1.14 e com o Corolário 3.1.15. ■

[13] A sigla tem motivações históricas e linguísticas: c.c.c. abrevia *countable chain condition*, ou condição de cadeia contável, pois o contexto em que ela apareceu, originalmente, tratava de cadeias e não anticadeias. O termo "celularidade" faz menção à generalização do conceito no contexto das funções cardinais.

Exercício 3.22 (Convém rever o Exercício 1.110.)**.** Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ conjuntos com $|\mathcal{I}| \leq |\mathcal{J}|$ e X um espaço topológico. Mostre que existe uma injeção contínua $\Psi\colon X^{\mathcal{I}} \to X^{\mathcal{J}}$. Em particular, se X for compacto e T_2, então Ψ é um mergulho. Dica: para a primeira parte, use a Proposição K.9 duas vezes; para a segunda, use o Corolário 1.2.93. ■

Exercício 3.23. Repita o exercício anterior para um espaço topológico X qualquer. Dica: dessa vez use o Exercício 1.105, munido da resposta "sim". ■

Exercício 3.24. Sejam X um espaço de Hausdorff com caráter enumerável e $B \subseteq X$ com $|B| \leq \mathfrak{c}$. Mostre que $|\overline{B}| \leq \mathfrak{c}$. ■

Exercício 3.25. Mostre que se um espaço topológico X tem uma sub-base enumerável, então X tem peso enumerável. ■

Exercício 3.26. Seja $\mathcal{X}$ uma família enumerável de espaços topológicos. Mostre que se cada $X \in \mathcal{X}$ tem peso enumerável, então $\prod \mathcal{X}$ tem peso enumerável. ■

Exercício 3.27. Mostre que $\mathbb{R}^\omega$, ω^ω e 2^ω são espaços com peso enumerável. ■

Exercício 3.28. Dada uma propriedade topológica $\mathcal{P}$, dizemos que X é um espaço **localmente** $\mathcal{P}$ se para todo ponto x de X existe uma vizinhança V de x com a propriedade $\mathcal{P}$. Mostre que se X é um espaço de Hausdorff localmente T_3, então X é regular. ■

Observação 3.1.23. Para o leitor que já acredita na metrizabilidade do espaço $[0,1]^\omega$, o exercício acima garante que espaços de Hausdorff localmente regulares com peso enumerável são metrizáveis. Em particular, *variedades topológicas* ou *diferenciáveis* (para quem as conhece) são espaços metrizáveis. △

Exercício 3.29 (Derivada de Cantor)**.** Seja X um espaço topológico T_1. Para um ordinal α, $X^{(\alpha)}$ denota a **α-ésima derivada de Cantor**, definida da seguinte forma:

- $X^{(0)} := X$;
- $X^{(\alpha+1)} := \left(X^{(\alpha)}\right)^{\mathrm{d}}$ para todo ordinal α;
- $X^{(\gamma)} := \bigcap_{\alpha<\gamma} X^{(\alpha)}$ para todo ordinal limite $\gamma > 0$.

a) Mostre que $X^{(\alpha+1)} \subseteq X^{(\alpha)}$ para todo α. Dica: em geral, $\overline{A} = A^{\mathrm{d}} \cup A$ + Exercício 2.4.

b) Mostre que $X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} \neq \emptyset$ se, e somente se, $X^{(\alpha)}$ tem, pelo menos, um ponto isolado com a topologia de subespaço.

Definindo $\mathcal{I}_\alpha(X) := X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$ para cada ordinal α, conclua que vale a identidade

$$X = X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{I}_\beta(X)$$

para qualquer ordinal α. Dica: $\mathcal{I}_0(X^{(\alpha)}) = \mathcal{I}_\alpha(X)$. ■

Observação 3.1.24. Pode-se provar que existe um ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. O menor ordinal com tal propriedade costuma ser chamado de *altura de Cantor-Bendixson* de X, e denotada por $\operatorname{ht}(X)$. Em particular, para $\gamma := \operatorname{ht}(X)$, a decomposição do exercício anterior coincide com a decomposição do Teorema 3.1.12, onde $X^{(\gamma)}$ é o conjunto perfeito e $\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{I}_\beta(X)$ é o subespaço disperso. Portanto, se X é disperso, obtém-se uma decomposição de X nos subconjuntos da forma $\mathcal{I}_\beta(X)$, o que permite análises mais finas de sua estrutura. O leitor interessado pode conferir mais detalhes na dissertação de Rubens Onishi [87]. △

Exercício 3.30. Sejam τ e σ topologias de caráter enumerável sobre um conjunto X. Mostre que $\tau = \sigma$ se, e somente se, (X, τ) e (X, σ) têm as mesmas sequências convergentes. ■

3.2 Variações de compacidade

Nesta seção, o leitor será apresentado às principais generalizações de compacidade: a *σ-compacidade* e a *propriedade de Lindelöf* na primeira subseção, a *compacidade enumerável*, *sequencial* e a *pseudocompacidade* na segunda subseção e, finalmente, a *paracompacidade* na última subseção.

3.2.1 Espaços σ-compactos e de Lindelöf

As *variações de compacidade* tratadas nesta subseção são, possivelmente, as primeiras nas quais o leitor pensaria se fosse *obrigado* a fazê-lo.

Definição 3.2.1. Dizemos que um espaço topológico X é:

(i) **σ-compacto** se X tem uma cobertura enumerável por compactos;

(ii) **de Lindelöf** se toda cobertura de X por abertos admite subcobertura enumerável.¶

Naturalmente, todo espaço compacto é tanto σ-compacto quanto de Lindelöf. Em particular, note que seria irrelevante dar um nome para a propriedade de "ser reunião finita de compactos" pois, evidentemente, a reunião finita de compactos é compacta. Apesar disso, essa ideia esconde a solução do próximo

Exercício 3.31. Convença-se de que todo espaço σ-compacto é de Lindelöf. ■

Exemplo 3.2.2. Todo espaço enumerável é σ-compacto já que, por exemplo, é a reunião (dos conjuntos unitários) de seus pontos. Também não é difícil se convencer de que a reta real $\mathbb{R}$ é σ-compacta: os intervalos (compactos) da forma $[-a, a]$ para $a \in \mathbb{N}$ fazem o serviço de cobrir $\mathbb{R}$. Para o leitor que se sentir tentado a usar o mesmo tipo de argumento para verificar que $\mathbb{R}^n$ é σ-compacto, convém seguir uma abordagem mais geral.

Exercício 3.32. Mostre que se X e Y são σ-compactos, então $X \times Y$ é σ-compacto. ■

É claro que o exercício acima não resolve o problema de mostrar que espaços métricos são σ-compactos, o que é muito bom, já que em geral isto é falso. Um exemplo típico e desonesto é dado no exercício a seguir.

Exercício 3.33. Mostre que um espaço discreto X é de Lindelöf se, e somente se, $|X| \leq \aleph_0$. Conclua que espaços discretos não-enumeráveis são exemplos de espaços metrizáveis que não satisfazem a condição de σ-compacidade. ■

Vejamos um exemplo mais honesto: o espaço $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais, é um espaço de Lindelöf que não é σ-compacto. A primeira parte é fácil: $\mathbb{R}$ tem peso enumerável e tal propriedade é hereditária para subespaços (devido ao Exercício 3.5); por sua vez, a Proposição 3.1.9 pode ser traduzida como

Proposição 3.2.3. *Todo espaço com peso enumerável é de Lindelöf.*

Logo, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tem peso enumerável e, por conseguinte, é de Lindelöf. A conclusão de que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é σ-compacto segue, dentre outras coisas, da densidade de $\mathbb{Q}$: como todo aberto de $\mathbb{R}$ intercepta $\mathbb{Q}$, resulta que um compacto $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ deve ter interior vazio na reta[14]; logo, se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *fosse* σ-compacto, então $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ seria reunião enumerável de fechados com interior vazio e, por conseguinte, a reta seria reunião enumerável de fechados com interior vazio (pois $\mathbb{Q}$ também é!), contrariando o fato estabelecido no Exercício 1.219. ▲

Convém destacar que apesar das similaridades entre compacidade e σ-compacidade, boa parte da estabilidade da primeira se perde na segunda. Este será um fenômeno recorrente com os enfraquecimentos da compacidade.

[14]Os compactos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também têm interior vazio em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Exercício 3.71).

Proposição 3.2.4 (sem "Tychonoff" para espaços σ-compactos)**.** *Seja* $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ *uma família de espaços* σ*-compactos não-compactos. Então* $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *é* σ*-compacto se, e somente se,* $|\mathcal{I}| < \aleph_0$.

Demonstração. Se $|\mathcal{I}| < \aleph_0$, então a σ-compacidade de X segue com um simples argumento indutivo por meio do Exercício 3.32. Faremos a recíproca pela contrapositiva: supondo $|\mathcal{I}| \geq \aleph_0$, mostraremos que se $\mathcal{K}$ é uma família infinita enumerável[15] de subespaços compactos de X, então $X \setminus \bigcup \mathcal{K} \neq \emptyset$. Tomemos $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ com $|\mathcal{J}| \geq \aleph_0$ e fixemos enumerações $\mathcal{K} = \{K_n : n \in \omega\}$ e $\mathcal{J} = \{j_n : n \in \omega\}$.

Como $\pi_{j_n} : X \to X_{j_n}$ é contínua para cada j_n e K_n é compacto, segue que $\pi_{j_n}[K_n]$ é subespaço compacto de X_{j_n}, donde a hipótese de não-compacidade de X_{j_n} permite tomar $x_{j_n} \in X_{j_n} \setminus \pi_{j_n}[K_n]$. Fixando $x_i \in X_i$ para cada $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$, obtém-se $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in X \setminus \bigcup \mathcal{K}$, como queríamos. □

Exercício 3.34. Reflita: por que a volta precisa que $\mathcal{I}$ seja infinito? ■

Voltemo-nos, agora, para a propriedade de Lindelöf, que se obtém da compacidade com o *relaxamento* da exigência sobre as subcoberturas: em vez de finitas, basta que elas sejam enumeráveis. Como veremos ao longo deste catatau, essa mudança sutil na definição traz consequências *distópicas*. Ainda hoje, entender os desdobramentos do comportamento dos espaços de Lindelöf é campo fértil de pesquisa em Topologia Geral. Não se sabe, por exemplo, se existe (em ZFC) um espaço de Lindelöf L tal que $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times L$ não é de Lindelöf.

Dito isso, será edificante considerar uma generalização óbvia da condição de Lindelöf, que inclusive permitirá (re) obter resultados sobre compacidade.

Proposição 3.2.5 (Compare com a Proposição 1.2.77, (Comp$_5$))**.** *Para um espaço topológico* X *e uma cardinal* $\kappa \geq \aleph_0$*, são equivalentes:*

(i) *toda cobertura de* X *por abertos admite subcobertura com cardinalidade* $< \kappa$*;*

(ii) *se* $\mathcal{F}$ *é uma família de fechados tal que para todo subconjunto* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *com* $|\mathcal{G}| < \kappa$ *ocorre* $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$*, então* $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$*.*

Demonstração. Pelas leis de De Morgan, para qualquer coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X deve valer

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = X \Leftrightarrow \bigcap_{U\in\mathcal{U}} X \setminus U = \emptyset.$$

Logo, uma cobertura por abertos de X, digamos $\mathcal{U}$, tem subcobertura $\mathcal{U}'$ com $|\mathcal{U}'| < \kappa$ se, e somente se, a família de fechados $\mathcal{F}(\mathcal{U}) := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$, cuja interseção é vazia, admite um subconjunto $\mathcal{G}$ com $|\mathcal{G}| < \kappa$ e $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Definição 3.2.6. Nas condições acima, diremos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X tem a **propriedade da κ-interseção**, abreviada como **p.κ.i.**, se ocorrer $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ para todo subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ satisfazendo $|\mathcal{G}| < \kappa$. No caso em que $\kappa := \aleph_1$, diremos que $\mathcal{F}$ tem a **propriedade da interseção enumerável**, que será abreviada por **p.i.e.** ¶

Exercício 3.35. Convença-se de que p.i.f. = p.κ.i. para $\kappa := \aleph_0$. Aproveite e mostre que $\mathcal{F}$ tem a p.i.e. se, e somente se, $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ para todo subconjunto não-vazio e enumerável $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. ■

[15] Se $\mathcal{K}$ *fosse* finita e $X = \bigcup \mathcal{K}$, *seguiria* que X é compacto e, consequentemente, cada X_i seria compacto, contrariando as hipóteses da proposição.

Corolário 3.2.7. *Um espaço topológico X é de Lindelöf se, e somente se, toda família de fechados com a p.i.e. tem interseção não-vazia.*

Não há razões para esperar que a propriedade de Lindelöf admita traduções tão boas em termos de convergência como ocorre com a compacidade, pois a segunda já faz isso – e Lindelöf $\neq$ compacto. Ainda assim, algumas coisas podem ser recuperadas, módulo adaptações óbvias.

Definição 3.2.8. Nas condições anteriores, diremos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é um **κ-filtro** se $\mathcal{F}$ é um filtro em X tal que $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$ para qualquer subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ com $|\mathcal{G}| < \kappa$. ¶

Teorema 3.2.9. *Para um espaço topológico X e um cardinal $\kappa \geq \aleph_0$, são equivalentes:*

(i) *toda família de fechados com a p.κ.i. tem interseção não-vazia;*

(ii) *todo κ-filtro próprio de X tem ponto aderente.*

Demonstração. Se $\mathcal{F}$ é um κ-filtro próprio, então $\overline{F} \in \mathcal{F}$ para todo $F \in \mathcal{F}$ e, pela natureza de $\mathcal{F}$, qualquer subconjunto $\mathcal{G} \subseteq \left\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\}$ com $|\mathcal{G}| < \kappa$ deve ter interseção não-vazia. Logo, se X satisfaz a primeira condição, então $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$.

Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é uma família de fechados com a p.κ.i., então a coleção

$$\mathcal{H} := \left\{A \subseteq X : \exists \mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{<\kappa} \setminus \{\emptyset\} \text{ tal que } \bigcap \mathcal{G} \subseteq A\right\}$$

é um κ-filtro próprio que contém $\mathcal{F}$, o qual admite um ponto aderente por hipótese. Por fim, note que $\emptyset \neq \bigcap_{A \in \mathcal{H}} \overline{A} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. □

Corolário 3.2.10. *Um espaço topológico X é de Lindelöf se, e somente se, todo $\aleph_1$-filtro próprio tem ponto aderente.*

Usaremos o teorema acima para caracterizar a propriedade de Lindelöf em termos de projeções[16]. Com o intuito de resolver dois problemas de uma vez, para um cardinal $\kappa \geq \aleph_0$ fixado, convém introduzir a seguinte definição.

Definição 3.2.11. Um espaço topológico Y será chamado de **P_κ-espaço** se para toda família não-vazia $\mathcal{A}$ de abertos de Y com $|\mathcal{A}| < \kappa$ valer que $\bigcap \mathcal{A}$ é um aberto de Y. ¶

Observação 3.2.12. Note que $P_{\aleph_0}$-espaços são, precisamente, os espaços topológicos usuais. △

Teorema 3.2.13. *Para um espaço topológico X e um cardinal $\kappa \geq \aleph_0$, são equivalentes:*

(i) *toda cobertura de X por abertos admite uma subcobertura com cardinalidade $< \kappa$;*

(ii) *se Y é um P_κ-espaço, então a projeção $\pi_Y : X \times Y \to Y$ é fechada.*

[16]Embora este seja um dos resultados da minha tese [75], durante a redação deste texto descobri que seu conteúdo não é totalmente novo: a menos de terminologia e argumentação, o resultado data, pelo menos, de 1969, devido a N. Noble [83].

Demonstração. Assumamos a condição (i) e tomemos Y como em (ii), bem como um subespaço fechado $F \subseteq X \times Y$. Se $y \notin \pi_Y[F]$, então para cada $x \in X$ tem-se $(x, y) \notin F$, donde segue que existem abertos $U_x \subseteq X$, $V_x \subseteq Y$, com $(x, y) \in U_x \times V_x \subseteq (X \times Y) \setminus F$. Como a coleção $\mathcal{U} := \{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura por abertos de X, a hipótese garante $H \subseteq X$, com $|H| < \kappa$, tal que $\mathcal{U}' := \{U_x : x \in H\}$ ainda é uma cobertura aberta para X. Agora, por construção, ocorre $y \in V := \bigcap_{x \in H} V_x$, o qual é um aberto de Y que satisfaz $V \subseteq Y \setminus \pi_Y[F]$. Desse modo, mostrou-se que o complemento de $\pi_Y[F]$ é aberto e, por conseguinte, $\pi_Y[F]$ é fechado, como desejado.

Para demonstrar a recíproca, basta mostrar que se $\mathcal{F}$ é um κ-filtro próprio de X, então $\mathcal{F}$ tem ponto aderente – em virtude do Teorema 3.2.9 e da Proposição 3.2.5. Para isso, usaremos a hipótese (ii) com um espaço Y bastante especial: faremos $Y := X \cup \{\mathcal{F}\}$, onde $A \subseteq Y$ *será* declarado aberto se, e somente se, $\mathcal{F} \notin A$ ou existe $U \in \mathcal{F}$ com $A = U \cup \{\mathcal{F}\}$. Note que a suposição sobre $\mathcal{F}$ ser κ-filtro garante que Y é um P_κ-espaço, o que permite usar (ii) para inferir que $\pi_Y : X \times Y \to Y$ é fechada.

Agora, ao se considerar a *diagonal* $D := \{(x, x) : x \in X\} \subsetneq X \times Y$, deve ocorrer

$$\pi_Y \left[\overline{D} \right] = \overline{\pi_Y[D]} = \overline{X} = Y,$$

onde a primeira igualdade decorre da hipótese sobre π_Y ser fechada[17], enquanto a última ocorre pois $\mathcal{F} \in \overline{X}$ em Y. Logo, existe $x \in X$ com $(x, \mathcal{F}) \in \overline{D}$, que surpreendentemente é um ponto aderente de $\mathcal{F}$: de fato, para $U \in \mathcal{F}$ e $V \subseteq X$ aberto com $x \in V$, tem-se $V \times (U \cup \{\mathcal{F}\})$ uma vizinhança de $(x, \mathcal{F})$ em $X \times Y$, donde segue que existe $(p, p) \in D$ com $(p, p) \in V \times (U \cup \{\mathcal{F}\})$, i.e., $p \in V \cap U$. A arbitrariedade de V permite concluir que $x \in \overline{U}$, enquanto a arbitrariedade de U garante $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} \overline{U}$, como queríamos. $\square$

Observação 3.2.14. Essencialmente a mesma prova pode ser feita sem apelar de forma explícita para filtros: basta considerar $\mathcal{F}$ uma família de fechados com a p.κ.i. Também é possível usar diretamente uma cobertura por abertos $\mathcal{U}$, *mutatis mutandis*: isto é feito, por exemplo, em [106]. $\triangle$

Corolário 3.2.15. *Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, para todo espaço Y a projeção $\pi_Y : X \times Y \to Y$ é fechada.*

Corolário 3.2.16. *Um espaço topológico X é de Lindelöf se, e somente se, para todo $P_{\aleph_1}$-espaço Y a projeção $\pi_Y : X \times Y \to Y$ é fechada.*

Observação 3.2.17. A literatura costuma chamar como *P-espaços* os animais que, acima, foram xingados de $P_{\aleph_1}$-espaços. $\triangle$

Corolário 3.2.18. *Se X é um espaço compacto e Y é um espaço de Lindelöf, então $X \times Y$ é um espaço de Lindelöf.*

Demonstração. Como a composição de funções fechadas é fechada, o resultado segue dos corolários anteriores ao se observar atentamente o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Y \times Z \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

[17] Convém revisitar o Exercício 1.87.

onde as setas indicam as projeções óbvias e Z é um $P_{\aleph_1}$-espaço. $\square$

Corolário 3.2.19. *Se X é um espaço σ-compacto e Y é um espaço de Lindelöf, então $X \times Y$ é um espaço de Lindelöf.*

Os dois últimos resultados são relevantes pois, em geral, mesmo o produto de *dois* espaços de Lindelöf pode não ser de Lindelöf. Chegaremos a isso em breve. Por enquanto, ainda é tempo de boas notícias.

Lema 3.2.20. *Se X é um espaço de Lindelöf e $F \subseteq X$ é subespaço fechado, então F é de Lindelöf com a topologia de subespaço.*

Demonstração. Se Y é um $P_{\aleph_1}$-espaço, então a projeção $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$ é fechada. Como $F \times Y$ é subespaço fechado de $X \times Y$, segue que se $C \subseteq F \times Y$ é fechado, então C é fechado como subespaço de $X \times Y$ e, consequentemente, $\pi_Y[C]$ é fechado em Y. O resultado segue pois $\pi_Y[C]$ também é a imagem de C pela projeção $\pi'_Y \colon F \times Y \to Y$. $\square$

Proposição 3.2.21. *Todo espaço de Lindelöf e T_3 é T_4.*

Demonstração. Tudo se resume a usar a caracterização certa para T_4, neste caso (T_4.d): dados $F, U \subseteq X$, com F fechado, U aberto e $F \subseteq U$, busca-se uma família enumerável $\mathcal{W}$ de abertos com $F \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ e $\overline{W} \subseteq U$ para todo $W \in \mathcal{W}$.

Ora, para cada $x \in F$, a condição T_3 dá um aberto $V_x \subseteq X$ com $x \in V_x$ e $\overline{V_x} \subseteq U$. Note então que $\{V_x : x \in F\}$ cobre F, donde o restante segue, essencialmente, pelo lema anterior. Os detalhes ficam a cargo do leitor. $\square$

Corolário 3.2.22. *Espaços regulares de Lindelöf são normais.*

Exemplo 3.2.23 (Um espaço de Lindelöf cujo quadrado não é)**.** O quadrado $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ da reta de Sorgenfrey não é um espaço de Lindelöf pois, se fosse, seria normal em virtude do corolário anterior. Apesar disso, a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é de Lindelöf.

Dada uma cobertura $\mathcal{U}$ por abertos de $\mathbb{R}_S$, para cada $x \in \mathbb{R}_S$ tomemos um aberto $U_x \in \mathcal{U}$ e um ponto $y_x \in \mathbb{R}_S$ tais que $y_x > x$ e $x \in [x, y_x) \subseteq U_x$. Como $\mathbb{R}$, com sua topologia usual, tem peso enumerável, segue que $Y := \bigcup_{x \in \mathbb{R}_S} (x, y_x)$ tem peso enumerável com a topologia herdada de $\mathbb{R}$. Logo, Y é um espaço de Lindelöf, donde segue que existe um subconjunto enumerável $Z \subsetneq \mathbb{R}_S$ com $Y = \bigcup_{x \in Z} (x, y_x)$. Se mostrarmos que $\mathbb{R} \setminus Y$ é enumerável, *seguirá* que $\{U_x : x \in Z \cup (\mathbb{R} \setminus Y)\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$.

Faremos isso *explicitamente*: embora possa ocorrer $x \in \mathbb{R} \setminus Y$, a construção de Y garante $(x, y_x) \subseteq Y$ e, como $x < y_x$, existe $r_x \in \mathbb{Q}$ com $x < r_x < y_x$; se $x' \in \mathbb{R} \setminus Y$ com $x' \neq x$, então não pode ocorrer $x < x' < y_x$ ou $x' < x < y_{x'}$, o que implica em $r_x \neq r_{x'}$ e mostra que a correspondência $x \mapsto r_x$ determina uma injeção de $\mathbb{R} \setminus Y$ em $\mathbb{Q}$. $\blacktriangle$

No exemplo anterior, usou-se o peso enumerável de $\mathbb{R}$ (com a topologia usual) para garantir que o subespaço Y também é de Lindelöf. Não poderíamos ter usado o Lema 3.2.20 pois, para isso, Y deveria ser fechado – e, de modo geral, essa é uma hipótese importante.

Exercício 3.36. Exiba um espaço de Lindelöf com subespaços que não sejam de Lindelöf. Dica: espaços discretos admitem *compactificações* (confira a última seção do capítulo). $\blacksquare$

Desse modo, o peso enumerável impõe uma forma relativamente mais forte de *Lindelöfcidade*:

Definição 3.2.24. Diz-se que um espaço topológico é **hereditariamente de Lindelöf** se todos os seus subespaços também são de Lindelöf. ¶

Nesse sentido, a argumentação do último exemplo, essencialmente, demonstra a

Proposição 3.2.25. *Todo espaço com peso enumerável é hereditariamente de Lindelöf.*

A recíproca da proposição acima é falsa: uma simples adaptação dos argumentos apresentados no último exemplo mostra que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é hereditariamente de Lindelöf; ainda assim, $\mathbb{R}_S$ não tem peso enumerável. O leitor interessado em exemplos mais simples deve ser alertado de que procurar tais espaços em meio aos pseudometrizáveis é um exercício fadado ao fracasso:

Teorema 3.2.26. *Para um espaço pseudometrizável X, são equivalentes:*

(i) *X tem peso enumerável;*

(ii) *X é separável;*

(iii) *X é (hereditariamente) de Lindelöf.*

Demonstração. Em vista do que já se discutiu, basta mostrar que um espaço pseudometrizável de Lindelöf é separável. Para isso, fixemos uma pseudométrica d compatível com a topologia de X e, para cada $n \in \omega$, consideremos a cobertura por abertos

$$\left\{B_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X\right\}.$$

A condição de Lindelöf dá, para cada n, um subconjunto enumerável $X_n \subseteq X$ tal que $\left\{B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X_n\right\}$ ainda recobre X. Fica a cargo do leitor observar que $\bigcup_{n\in\omega} X_n$ é um subespaço denso e enumerável de X. □

Observação 3.2.27. O teorema acima é a razão pela qual, eventualmente, matemáticos envolvidos por muito tempo com espaços métricos se esquecem da condição de Lindelöf: ela se manifesta como separabilidade nos problemas que lhes interessam, algo mais útil para estimativas "braçais". △

Vamos encerrar esta subseção com um retorno ao último resultado da subseção anterior, a fim de generalizá-lo para o contexto de Lindelöf e, de brinde, torná-lo mais surpreendente, no sentido da Observação 3.1.21. Primeiramente, note que na demonstração do Teorema 3.1.20, embora a exigência de compacidade tenha sido importante, ela poderia ser relaxada.

De fato, com as mesmas notações, note que se $|\mathcal{C}_\alpha| \leq \mathfrak{c}$, então a cardinalidade de $[\mathcal{C}_\alpha]^{\leq\aleph_0}$ também não excede $\mathfrak{c}$, pois $|(\mathcal{C}_\alpha)^\omega| \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (pode ser útil conferir a Proposição K.1.132 e o Corolário K.1.133). Este é o ponto principal que o leitor deverá observar ao adaptar a demonstração do Teorema 3.1.20 para provar o próximo

Teorema 3.2.28 (Arhangel'skii)**.** *Se X é um espaço de Lindelöf, T_2 e com caráter enumerável, então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Exercício 3.37. Prove o teorema anterior. ■

Agora, no sentido do que foi adiantado na Observação 3.1.21, provaremos que *se* X *é compacto,* T_2*, com caráter enumerável e* $\aleph_0 < |X|$*, então* $|X| = \mathfrak{c}$. Em vista do teorema acima, a ideia é muito simples: mostrar que 2^ω é subespaço de X, a menos de bijeção. O argumento, que já faz parte do *folclore topológico*[18], consiste em tomar certos tipos de pontos de acumulação, sucessivamente, *até* que 2^ω apareça.

Dado um espaço topológico Z e um subconjunto não-enumerável $A \subseteq Z$, diremos que $z \in Z$ é **ponto de acumulação forte**[19] de A se ocorrer $\aleph_0 < |U \cap A|$ para todo aberto U de Z com $z \in U$. Note que tal condição é bem mais restritiva do que a definição de ponto de acumulação: cada aberto U *em torno* de z deve conter uma quantidade não-enumerável de pontos de A, e não apenas verificar $U \cap (A \setminus \{z\}) \neq \emptyset$.

Lema 3.2.29. *Se* Z *é um espaço de Lindelöf não-enumerável, então* Z *admite um ponto de acumulação forte.*

Demonstração. Se não for o caso, então para cada $z \in Z$ existe um aberto $U_z \subseteq Z$ com $z \in U_z$ e $|U_z \cap Z| = |U_z| \leq \aleph_0$. Daí, por Z ser de Lindelöf e $\{U_z : z \in Z\}$ ser uma cobertura por abertos de Z, resultaria que $|Z| \leq \aleph_0$, contrariando a hipótese. □

Lema 3.2.30. *Se* Z *é um espaço de Lindelöf,* T_1*, não-enumerável e com caráter enumerável, então* Z *admite pelo menos dois pontos de acumulação forte.*

Demonstração. Seja $z \in Z$ um ponto de acumulação forte, cuja existência é garantida pelo lema anterior. Se $\{B_n : n \in \omega\}$ é base local para z, então existe pelo menos um $n \in \omega$ tal que $Z \setminus B_n$ é não-enumerável: caso contrário, teria-se

$$\bigcup_{n\in\omega} Z \setminus B_n = Z \setminus \bigcap_{n\in\omega} B_n$$

enumerável e, por Z ser T_1, seguiria[20] que $|Z| \leq \aleph_0$. Agora, o Lema 3.2.20 garante que o subespaço não-enumerável $Z \setminus B_n$ é de Lindelöf, enquanto o lema anterior dá $z' \in Z \setminus B_n$ um ponto de acumulação forte em $Z \setminus B_n$ e, portanto, em Z. □

Lema 3.2.31. *Se* Z *é um espaço compacto,* T_2*, não-enumerável e com caráter enumerável, então* Z *tem pelo menos dois subespaços compactos, disjuntos e não-enumeráveis.*

Demonstração. Sejam $z, z' \in Z$ dois pontos de acumulação forte distintos, cuja existência é garantida pelo lema anterior. O fato de Z ser um espaço compacto T_2 permite tomar vizinhanças compactas U de z e V de z' tais que $U \cap V = \emptyset$, ambas não-enumeráveis em virtude da natureza de z e z'. □

Exercício 3.38. Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Teorema 3.2.32. *Se* X *é um espaço compacto,* T_2*, não-enumerável e com caráter enumerável, então existe um subespaço* C *tal que* $2^{\aleph_0} \leq |C|$.

Demonstração. Recordemo-nos de que $S := 2^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} 2^n$ é a coleção das sequências finitas de *zeros* e *uns*. Suponha que para cada $s \in S$ exista um subespaço compacto e não-enumerável $K_s \subseteq X$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

[18] Cujos detalhes adaptei de um dos excelentes *posts* do blog de Dan Ma: https://dantopology.wordpress.com/2010/06/15/the-cardinality-of-first-countable-compact-spaces-iii/.

[19] Não confundir com a noção de *ponto de acumulação completo* (Exercício E.56).

[20] Dica: Exercício 2.17.

(i) se $s, t \in S$ e $s \subseteq t$, então $K_s \subseteq K_t$;

(ii) para cada $s \in S$ ocorre $K_{s^\frown 0} \cap K_{s^\frown 1} = \emptyset$, onde $s^\frown j$ denota a sequência finita $s \cup \{(\mathrm{dom}(s), j)\}$, i.e., se $s := (s_0, \ldots, s_n)$, então $s^\frown j := (s_0, \ldots, s_n, j)$.

Em posse de tal família de compactos, faz-se $\mathcal{K}_n := \bigcup_{s \in 2^n} K_s$ e $C := \bigcap_{n\in\omega} \mathcal{K}_n$. Para aferir que C tem a cardinalidade desejada, define-se a correspondência $2^\omega \to C$ dada por $f \mapsto x_f$, onde x_f é *um* elemento *escolhido* do conjunto $\bigcap_{n\in\omega} K_{f|_n}$, onde $f|_n$ denota, como de costume, a restrição da função f ao conjunto $n := \{0, \ldots, n-1\}$, ou seja, $f|_n = (f(j) : j < n)$.

Tal correspondência *faz sentido* pois, em virtude da condição (i), $\{K_{f|_n} : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos não-vazios com a p.i.f., os quais são fechados por X ser de Hausdorff e, consequentemente, $\bigcap_{n\in\omega} K_{f|_n} \neq \emptyset$ pela compacidade de X. A injetividade dessa correspondência segue da condição (ii): se $f, g \in 2^\omega$ são distintas, então existe $n \in \omega$ com $f(n) \neq g(n)$, e daí $K_{f|_{n+1}} \cap K_{g|_{n+1}} = \emptyset$, obrigando que se tenha $x_f \neq x_g$.

Portanto, basta mostrar que existe uma família de subespaços compactos $\{K_s : s \in S\}$ com as propriedades desejadas, o que segue do última lema, por recursão: faz-se $K_\emptyset := X$ e, supondo K_s definido para todo $s \in 2^n$, tomam-se subespaços compactos $K_{s^\frown 0}$ e $K_{s^\frown 1}$ de K_s, não-enumeráveis e disjuntos, o que pode ser feito por K_s se adequar às hipóteses do lema anterior. O leitor fica encarregado de se convencer dos pormenores. □

Corolário 3.2.33. *Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Se X tem caráter enumerável, então $|X| \leq \aleph_0$ ou $|X| = \mathfrak{c}$.*

Observação 3.2.34. Não é possível provar, em ZFC, que o resultado anterior se mantém sem a exigência de compacidade mas com a condição de Lindelöf: qualquer subespaço L de $\mathbb{R}$ com $|L| = \aleph_1$ é de Hausdorff e tem caráter enumerável, mostrando que o resultado *seria* falso em *modelos* de ZFC que verificam "$\aleph_1 < \mathfrak{c}$". △

3.2.2 Formas mundanas de compacidade

Ao se deparar pela primeira vez com a definição de compacidade por meio de coberturas abertas (*toda cobertura por abertos* tem subcobertura finita), qual foi a importância dada à parte do "toda cobertura por abertos"? Mais precisamente, dada a trivialidade de tal critério para coberturas finitas, o que o leitor imaginou[21] ao pensar numa cobertura infinita? Embora a essa altura da vida já estejamos cientes sobre conjuntos infinitos e não-enumeráveis, é quase certo que, intimamente, o leitor tenha imaginado apenas coberturas enumeráveis. No entanto, é precipitado assumir que o escopo da definição possa ser reduzido para as coberturas enumeráveis. Ou será que pode?

Definição 3.2.35. Dizemos que um espaço topológico X é **enumeravelmente compacto** se toda cobertura enumerável por abertos de X admite subcobertura finita. ¶

Como a intuição muito acertadamente nos indica, é claro que todo espaço compacto é enumeravelmente compacto, o que está destacado no exercício a seguir.

Exercício 3.39. Mostre que todo espaço compacto é enumeravelmente compacto. ■

[21] Ou talvez ainda imagine.

Antes de investigar a recíproca, porém, convém introduzir outra variação. Como todo subconjunto infinito de um espaço compacto tem pelo menos um ponto de acumulação(Exercício 1.214), segue que se X for compacto com caráter enumerável, então toda sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X admite subsequência convergente. Do ponto de vista da parte *pré-histórica* da Análise, tal propriedade é bem mais atrativa do que a atual compacidade *per se*.

Definição 3.2.36. Dizemos que X é um espaço **sequencialmente compacto** se toda sequência admite subsequência convergente. ¶

Ao se retirar a condição de caráter enumerável da argumentação anterior, deixa de ser imediato decidir se todo espaço compacto é sequencialmente compacto. O contraexemplo que veremos em breve responde tanto esta quanto a pergunta anterior, posto que compacidade sequencial e compacidade enumerável são *idênticas*, *módulo* caráter enumerável.

Lema 3.2.37. *Para um espaço topológico X são equivalentes:*

(en. c_1) *X é enumeravelmente compacto;*

(en. c_2) *toda família enumerável $\mathcal{F}$ de fechados com a p.i.f. satisfaz $\bigcap\mathcal{F}\neq\emptyset$.*

Além disso, as condições acima acarretam

(en. c_3) *todo subconjunto infinito de X tem ponto de acumulação,*

com a recíproca válida se X for um espaço T_1.

Demonstração. A demonstração de (en. c_1) $\Leftrightarrow$ (en. c_2) segue os moldes da Proposição 3.2.5. Agora, se $A\subseteq X$ é um subconjunto infinito sem pontos de acumulação, então A é um fechado discreto e infinito (Proposição 1.1.57), o que permite tomar uma família $\{F_n : n\in\omega\}$ de subconjuntos fechados e não-vazios de A, decrescente com respeito à inclusão e tal que $\bigcap_{n\in\omega}F_n=\emptyset$, mostrando (en. c_2) $\Rightarrow$ (en. c_3) (pela contrapositiva).

Por fim, se $\mathcal{U}:=\{U_n : n\in\omega\}$ é uma cobertura enumerável por abertos de X sem subcobertura finita, então ao se tomar $x_n\in X\setminus\bigcup_{j\leq n}U_j$ para todo n, obtém-se um conjunto infinito $S:=\{x_n : n\in\omega\}$ sem pontos de acumulação: dado $x\in X$, existe $n\in\omega$ com $x\in U_n$ e, por construção, $U_n\cap S\subseteq\{x_j : j<n\}$, donde a hipótese de X ser T_1 assegura que x não pode ser ponto de acumulação de S, já que para isso deveria ocorrer $|U_n\cap S|\geq\aleph_0$ (pela Proposição 2.1.14). □

Lema 3.2.38. *Se X é sequencialmente compacto, então X é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Mostraremos que se uma cobertura enumerável por abertos de X, digamos $\mathcal{U}:=\{U_n : n\in\omega\}$, não tem sucobertura finita, então X não é sequencialmente compacto. Para isso, tomemos $x_n\in X\setminus\bigcup_{j\leq n}U_j$ para cada $n\in\omega$ e consideremos a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$. Note que para qualquer $x\in X$ existe $n\in\omega$ com $x\in U_n$ e, por *construção*, $x_m\notin U_n$ para todo $m\geq n$. Logo, $(x_n)_{n\in\omega}$ não admite subsequência convergente. □

Teorema 3.2.39. *Se X é um espaço T_1 com caráter enumerável, então X é sequencialmente compacto se, e somente se, X é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Por conta do lema anterior, resta apenas mostrar que se X é enumeravelmente compacto com caráter enumerável, então X é sequencialmente compacto. Para isso, fixada uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X, consideremos o subconjunto $A := \{x_n : n \in \omega\}$.

Se $|A| < \aleph_0$, então o Princípio da Casa dos Pombos dá uma subsequência constante (logo, convergente) de $(x_n)_{n\in\omega}$. Agora, se $|A| = \aleph_0$, então a compacidade enumerável de X garante que A tem um ponto de acumulação (por (en. c_3)), digamos x. Logo, por X ser T_1, a Proposição 2.1.14 assegura $|U \cap A| \geq \aleph_0$ para qualquer aberto $U \subseteq X$, em particular para os abertos numa base local enumerável de x, digamos $\{B_n : n \in \omega\}$, donde não é difícil obter a subsequência desejada: como $C_k := B_0 \cap \ldots \cap B_k \cap A$ deve ser infinito para cada $k \in \omega$, pode-se escolher $x_{n_k} \in A \cap C_k$ com $(n_k)_{k\in\omega}$ estritamente crescente, de tal maneira que $x_{n_k} \to x$. □

Observação 3.2.40. A hipótese de X ser T_1 acima pode ser ignorada ao se apelar para a noção de ω-limite. O leitor interessado em mais detalhes deve conferir o Exercício 3.65.△

Mais geralmente, a coincidência entre compacidade sequencial e enumerável ocorre na classe dos espaços *sequenciais* (Definição 1.4.27): em vez de se usar o caráter enumerável para obter uma sequência de $A \setminus \{x\}$ que converge para x, usa-se o fato de $A \setminus \{x\}$ *não* ser sequencialmente fechado (por *não* ser fechado e X ser sequencial) para obter uma sequência de $A \setminus \{x\}$ que converge para algum ponto de $X \setminus (A \setminus \{x\})$. Convém ressaltar que, apesar do nome, a compacidade sequencial *não* implica compacidade em espaços sequenciais, como atesta o próximo exemplo.

Exemplo 3.2.41 (O espaço $[0, \omega_1)$ é sequencialmente compacto e não-compacto)**.** Dada uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ de ordinais em $[0, \omega_1)$, tem-se $\alpha := \sup_{n\in\omega} \alpha_n < \omega_1$ e, por conseguinte, existe uma subsequência $(\beta_n)_{n\in\omega}$ de $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ que converge para $\alpha \in [0, \omega_1)$. Logo, $[0, \omega_1)$ é sequencialmente compacto e enumeravelmente compacto. Em particular, por ter caráter enumerável (Exemplo 1.2.55), segue que $[0, \omega_1)$ é sequencial. No entanto, $[0, \omega_1)$ não é compacto devido à Proposição 1.2.83. ▲

Embora o exemplo acima cumpra a tarefa de refutar a intuição (errada) de que coberturas enumeráveis deveriam bastar para detectar a compacidade de um espaço, ordinais são desconhecidos do *grande público*, o que sugere a busca por contraexemplos mais amigáveis. Nesse sentido, os dois próximos resultados impõem restrições a essa caçada, ao mesmo tempo em que justificam as predileções de alguns analistas pré-históricos.

Proposição 3.2.42. *Um espaço com peso enumerável é sequencialmente compacto se, e somente se, é compacto.*

Demonstração. Seja X um espaço com peso enumerável. Se X é compacto, então X é enumeravelmente compacto e, pela proposição anterior aliada ao fato de que peso enumerável acarreta caráter enumerável, segue que X é sequencialmente compacto. Reciprocamente, se X é sequencialmente compacto, então X é enumeravelmente compacto, o que em adição com a propriedade de Lindelöf (garantida pelo peso enumerável) acarreta a compacidade: toda cobertura de X tem subcobertura enumerável (por Lindelöf), que por sua vez tem subcobertura finita (pela compacidade enumerável). □

Teorema 3.2.43. *Para um espaço pseudometrizável X, são equivalentes:*

(i) *X é compacto;*

(ii) *X é enumeravelmente compacto;*

(iii) *X é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Devido aos dois últimos resultados, basta mostrar que se X é sequencialmente compacto, então X tem peso enumerável, o que por sua vez é equivalente a mostrar que X é separável (Proposição 3.1.7). Embora isso possa ser feito *no braço* (exercício?), será mais divertido apelar para o Lema de Zorn. Para tanto, fixemos uma pseudométrica d compatível com a topologia de X.

Katzensprung. *Para cada $n \in \omega$, $\mathbb{D}_n := \left\{D \subseteq X : \forall x, y \in D \left(x \neq y \Rightarrow d(x,y) > \frac{1}{2^n}\right)\right\}$ admite um elemento maximal D_n com respeito à inclusão.*

Note que $\mathbb{D}_n = \emptyset$ ocorre somente para $X = \emptyset$, caso desinteressante por satisfazer trivialmente todas as condições da tese. Agora, se $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{D}_n$ é uma cadeia, então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathbb{D}_n$ é um limitante superior de $\mathcal{C}$, donde a existência de D_n segue do Lema de Zorn.

O próximo passo é cozinhar o subconjunto $D := \bigcup_{n \in \omega} D_n$, o qual mostraremos ser um denso enumerável.

✓ A densidade decorre, precisamente, da maximalidade de cada D_n: se D não fosse denso, existiria $x \in X$ e $\frac{1}{2^n}$ para algum $n \in \omega$ com

$$B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \cap D = \emptyset,$$

e daí $D_n \subsetneq D_n \cup \{x\} \in \mathbb{D}_n$, contrariando a maximalidade de D_n.

✓ Por outro lado, a compacidade sequencial obriga que ocorra $|D| \leq \aleph_0$. Caso contrário, o Princípio da Casa dos Pombos *daria* $|D_n| > \aleph_0$ para algum $n \in \omega$, o que *permitiria* tomar uma sequência $(x_m)_{m \in \omega}$ em D_n sem subsequência convergente. □

Corolário 3.2.44. *Dado um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, são equivalentes:*

(i) *K é compacto;*

(ii) *K é fechado e limitado;*

(iii) *K é enumeravelmente compacto;*

(iv) *K é sequencialmente compacto.*

Exemplo 3.2.45 (Funções polinomiais são fechadas)**.** No distante Exemplo 1.1.115, afirmou-se que se $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial, então f é fechada. A justificativa para isso foi adiada até o presente momento para que pudéssemos argumentar com clareza.

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e $y \in \overline{f[C]}$, então pela Proposição 1.1.61 existe uma sequência $(y_n)_{n \in \omega}$ em $f[C]$ com $y_n \to y$. Logo, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ em C com $f(x_n) := y_n$ para cada n. Seria um sonho lindo poder afirmar que $x_n \to x$ para algum x, pois daí ocorreria $x \in C$ e $f(x) = y$ pela continuidade de f.

A vida, porém, é uma tragédia: note que para $f(x) := x^2$, $C := [-1, 1]$, $y \in \overline{f[C]} = [0, 1]$ e $(y_n)_{n \in \omega}$ em $[0, 1]$ com $y_n \to y$, pode-se tomar $x_n := (-1)^n \sqrt{y_n}$ para cada n, de modo que $(x_n)_{n \in \omega}$ é uma sequência em C, que só converge para $y = 0$. No entanto, a ideia acima pode ser salva, posto que a sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ é limitada.

De fato, se $(x_n)_{n\in\omega}$ fosse ilimitada, então existiria uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ com $x_{n_k} \to \alpha \in \{-\infty, +\infty\}$. Daí, é essencialmente um problema de Cálculo[22] observar que, se f é um polinômio não-constante, então

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \in \{-\alpha, +\alpha\},$$

contrariando a continuidade de f, segundo a qual deveria ocorrer $f(x_{n_k}) \to y$.

Logo, $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq [-M, M]$ para algum $M > 0$, um subespaço compacto de $\mathbb{R}$ que, pelo corolário anterior, é sequencialmente compacto. Disso, infere-se que existem $x \in [-M, M]$ e uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ de $(x_n)_{n\in\omega}$ com $x_{n_k} \to x$, donde se conclui que $x \in C$ (pois C é fechado) com $f(x) = y$, pois $f(x_{n_k}) \to y$. ▲

O exemplo acima ilustra o uso típico que se faz da compacidade em contextos pseudometrizáveis: quando o destino dá uma sequência que possivelmente não-converge, procura-se enxergá-la *dentro* de algum subespaço compacto para daí obter uma subsequência convergente. Quando o *espaço ambiente* é o familiar $\mathbb{R}^n$, basta mostrar que a sequência em questão é limitada[23].

Outro uso frequente da compacidade se dá por meio do Teorema de Weierstrass (*a.k.a.* Exercício 1.178), o qual garante que funções reais com domínios compactos têm máximo e mínimo. Curiosamente, isso não é exclusividade dos espaços compactos.

Proposição 3.2.46. *Sejam X e Y espaços topológicos com $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Se X é enumeravelmente compacto e f é sobre, então Y é enumeravelmente compacto.*

Exercício 3.40. Demonstre a proposição acima. Dica: imite a demonstração da Proposição 1.2.86. ■

Corolário 3.2.47 (*a.k.a.* Teorema de Weierstrass)**.** *Se X é enumeravelmente compacto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f[X]$ tem máximo e mínimo.*

Demonstração. Pela proposição anterior, $f[X]$ é enumeravelmente compacto em $\mathbb{R}$. Logo, $f[X]$ é fechado e limitado, donde segue que existem $\inf f[X]$ e $\sup f[X]$, os quais pertencem a $f[X]$ por este ser fechado. □

Definição 3.2.48. Dizemos que um espaço topológico X é **pseudocompacto** se toda função contínua $X \to \mathbb{R}$ é limitada. ¶

Como a classe dos espaços enumeravelmente compactos contém tanto a classe dos espaços compactos quanto a classe dos espaços sequencialmente compactos, segue que todos esses são exemplos de espaços pseudocompactos. Assim como nos casos anteriores, essa nova variação de compacidade só é distinguível em espaços muito peculiares. Mais precisamente:

Teorema 3.2.49. *Se X é um espaço normal e pseudocompacto, então X é enumeravelmente compacto.*

[22] Exercício 3.72.

[23] No entanto, mesmo em espaços vetoriais normados podem ocorrer subespaços fechados, limitados e não-compactos. Este é o conteúdo do Lema de Riesz, tema da futura Observação 5.2.31.

Demonstração. Pela contrapositiva. Se X não é enumeravelmente compacto, então o Lema 3.2.37 garante a existência de um conjunto infinito A sem pontos de acumulação (pois X é T_1). Sem perda de generalidade, pode-se assumir que A é infinito enumerável, digamos $A := \{x_n : n \in \omega\}$ com $x_i \neq x_j$ sempre que $i \neq j$. Logo, A é um fechado discreto, donde segue que a função $f\colon A \to \mathbb{R}$ dada por $x_n \mapsto n$ é contínua. Finalmente, o Teorema de Tietze-Urysohn (*a.k.a.* Corolário 2.2.29) dá uma extensão contínua $F\colon X \to \mathbb{R}$, mostrando que X não é pseudocompacto. □

Corolário 3.2.50. *Para um espaço metrizável, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *compacidade;*

(ii) *compacidade enumerável;*

(iii) *compacidade sequencial;*

(iv) *pseudocompacidade.*

Demonstração. Segue dos Teoremas 3.2.43, 3.2.49 e do Exemplo 2.1.37. □

Observação 3.2.51. Embora a demonstração apresentada para o Teorema 3.2.49 dependa da suposição de X ser T_1, as equivalências do último corolário permanecem válidas no contexto dos espaços pseudometrizáveis. Isto será discutido na próxima subseção. △

Antes de avançar para a próxima variação de compacidade, convém completar a discussão iniciada no Exemplo 3.2.41. Ao longo desta subseção vimos que

- espaços compactos são enumeravelmente compactos,
- espaços enumeravelmente compactos são pseudocompactos,
- espaços sequencialmente compactos são enumeravelmente compactos, com a recíproca verdadeira para espaços sequenciais (em particular, com caráter enumerável), e
- tudo coincide para espaços metrizáveis.

Logo, o espaço $[0, \omega_1)$ evidencia que nenhuma dessas variações de compacidade é capaz de garantir compacidade de modo geral. No entanto, ainda resta verificar duas coisas um pouco mais delicadas:

i) existem espaços compactos que não são sequencialmente compactos;

ii) existem espaços pseudocompactos que não são enumeravelmente compactos.

Exemplo 3.2.52 (Um espaço compacto que não é sequencialmente compacto)**.** Considere $J := 2^\omega$ e tome $X := [0,1]^J$, um espaço compacto em virtude do Teorema de Tychonoff. Vamos exibir uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\omega} \in X^\omega$ sem subsequência convergente.

Note que um habitante típico de X é uma função $\varphi\colon 2^\omega \to [0,1]$, que associa a cada sequência $f \in 2^\omega$ de 0's e 1's um número real $\varphi(f) \in [0,1]$. Agora, para cada $n \in \omega$, definamos $\varphi_n \in X$ por meio da regra $\varphi_n(f) := f(n)$, para cada $f \in 2^\omega$.

Suponha que $(\varphi_{n_k})_{k\in\omega}$ seja uma subsequência de $(\varphi_n)_{n\in\omega}$ que converge para algum *ponto* φ de X. Pelo Lema 1.2.36, isto significa que

$$f(n_k) := \varphi_{n_k}(f) := \pi_f(\varphi_{n_k}) \to \pi_f(\varphi) =: \varphi(f)$$

para qualquer $f \in 2^\omega$, donde em particular segue que a sequência $(f(n_k))_{k\in\omega}$ é convergente. Logo, se existir $f \in 2^\omega$ tal que $(f(n_k))_{k\in\omega}$ não converge em $[0,1]$, então tampouco a subsequência $(\varphi_{n_k})_{k\in\omega}$ converge em X. Fica a cargo do leitor cozinhar uma função f apropriada. ▲

Exemplo 3.2.53 (Um espaço pseudocompacto que não é enumeravelmente compacto). Sobre $X := \mathbb{R}$, considere a família $\mathcal{T} := \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \in A\}$, claramente uma topologia em X. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então necessariamente f é constante, donde segue que X é pseudocompacto. Por outro lado, X não é enumeravelmente compacto: note, por exemplo, que a família $\{[-n, n] : n \in \omega\}$ é uma cobertura por abertos de X que não tem subcobertura finita.

É claro que a escassez de axiomas de separação satisfeitos pelo espaço X acima pode incomodar o leitor mais exigente. No entanto, em virtude do Teorema 3.2.49, somos *obrigados* a nos contentar com menos do que a normalidade. O leitor interessado em mais contraexemplos pode conferir o clássico trabalho de Steen e Seebach [107]. ▲

Observação 3.2.54. Como veremos no Capítulo 5, nem sempre os espaços de interesse da Análise são (pseudo) metrizáveis – e menos ainda com peso enumerável – o que coloca em xeque a tão desejada equivalência entre compacidade e compacidade sequencial.

Ainda assim, note que com os argumentos utilizados, encontramos duas grandes classes de espaços nos quais vale a equivalência

$$\text{compacto} \Leftrightarrow \text{sequencialmente compacto}, \tag{3.1}$$

a saber:

(i) os espaços de Lindelöf sequenciais (confira o Exercício 3.62);

(ii) os espaços pseudometrizáveis.

Embora essas duas classes sejam sequenciais, existem classes de espaços não sequenciais em que ainda se verifica a equivalência (3.1): o celebrado *Teorema de Eberlein-Šmulian*, que abordaremos na Parte II, *mostrará* que a equivalência (3.1) é válida para espaços normados munidos da *topologia fraca*[24], que não é pseudometrizável e tampouco sequencial nos casos de dimensão infinita. △

3.2.3 Paracompacidade

Embora implicitamente presente em diversos cenários já explorados neste texto, só agora vamos destacar esta que, para muitos, delimita a fronteira entre o que é útil em Topologia Geral e o que é puro fetiche: a *paracompacidade*[25], propriedade ~~descoberta/inventada~~ introduzida por Dieudonné em 1944.

Definição 3.2.55. Um espaço topológico X é **paracompacto** se toda cobertura por abertos de X admite um refinamento localmente finito. ¶

Em outras palavras, X é paracompacto se para toda cobertura por abertos $\mathcal{U}$ de X existe um refinamento de $\mathcal{U}$ por abertos, digamos $\mathcal{V}$, tal que para todo $x \in X$ existe um aberto $W \subseteq X$ com $x \in W$ e $|\{V \in \mathcal{V} : V \cap W \neq \emptyset\}| < \aleph_0$.

Como subcoberturas finitas são, em particular, refinamentos localmente finitos, resulta que espaços compactos são paracompactos. Embora a falsidade da recíproca possa ser verificada de várias formas elementares, não há razão para adiar o

Teorema 3.2.56 (Stone[26]). *Se X é pseudometrizável, então X é paracompacto.*

[24] No sentido da Análise Funcional.

[25] Analistas *do* $\mathbb{R}^n$ ou geômetras costumam se importar com a paracompacidade em virtude das *partições da unidade*. Qualquer coisa mais geral do que isso, essencialmente, não existe ~~no vocabulário deles~~.

[26] Embora este resultado seja, originalmente, devido a Arthur Stone (não confundir com o Marshall Stone da *compactificação de Stone-Čech/dualidade de Stone*), a (fantástica) demonstração apresentada para este resultado é obra de Mary Ellen Rudin [97].

Demonstração. Sejam d uma pseudométrica sobre X compatível com sua topologia e $\mathcal{U}$ uma cobertura por abertos de X. A fim de obter um refinamento localmente finito $\mathcal{V}$ para $\mathcal{U}$, vamos conjurar uma boa ordem[27] $\preceq$ sobre $\mathcal{U}$, a fim de obter um refinamento localmente finito da forma $\mathcal{V} := \{V_{U,n} : U \in \mathcal{U} \text{ e } n \in \omega\}$, onde $V_{U,n} \subseteq U$ para quaisquer $U \in \mathcal{U}$ e $n \in \omega$. A boa ordem é necessária pois o procedimento será recursivo.

Para cada $U \in \mathcal{U}$ e $n \in \omega$, sejam

$$\mathcal{E}_{U,n} := \left\{x \in U : U = \min\{W \in \mathcal{U} : x \in W\} \text{ e } B_d\left(x, \frac{3}{2^n}\right) \subseteq U\right\} \setminus \bigcup_{j<n} \bigcup_{W \in \mathcal{U}} V_{W,j}$$

e

$$V_{U,n} := \bigcup_{x \in \mathcal{E}_{U,n}} B_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right).$$

Note que as definições acima fazem sentido até mesmo para $n := 0$, pois neste caso não há $V_{W,j}$'s definidos para $j < 0$ e daí $\mathcal{E}_{U,n}$ é apenas o conjunto dos pontos de X para os quais U é o primeiro elemento de $\mathcal{U}$ que os contém com uma *folga* de raio 3. É possível que se tenha certos $V_{U,n}$ vazios? Sim, certamente. Ainda assim, as ocorrências não-vazias *serão* suficientes para fazer de $\mathcal{V} := \{V_{U,n} : U \in \mathcal{U} \text{ e } n \in \omega\}$ uma cobertura por abertos de X, localmente finita e que refina $\mathcal{U}$.

De fato, se $x \in \mathcal{E}_{U,n}$, então $B_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \subseteq B_d\left(x, \frac{3}{2^n}\right) \subseteq U$, mostrando que $V_{U,n}$ é um aberto de X contido em U. Além disso, dado $x \in X$, existe algum $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$, donde segue que existe $U' := \min\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ e, consequentemente, para algum $n \in \omega$ ocorre $B_d\left(x, \frac{3}{2^n}\right) \subseteq U'$. Daí resultam duas possibilidades:

(i) ou existem $W \in \mathcal{U}$ e $j < n$ tais que $x \in V_{W,j}$ e, portanto, $x \in \bigcup \mathcal{V}$;

(ii) ou não existem tais entidades, mostrando que $x \in \mathcal{E}_{U',n}$ e, por conseguinte, $x \in V_{U',n}$.

Desse modo, $\mathcal{V}$ é uma cobertura por abertos que refina a cobertura original $\mathcal{U}$. Mostraremos, a seguir, a finitude local.

Para $x \in X$ fixado, seja $U := \min\{W \in \mathcal{U} : \exists n \in \omega \text{ tal que } x \in V_{W,n}\}$, o qual existe pois a cobertura $\mathcal{U}$ *está* bem ordenada e $\mathcal{V}$ é uma cobertura para X. Pelo modo como se definiu $V_{U,n}$, existe $x' \in \mathcal{E}_{U,n}$ tal que $x \in B_d\left(x', \frac{1}{2^n}\right)$ e, por conta disso, também existe $m > 0$ tal que $B_d\left(x, \frac{1}{2^m}\right) \subseteq V_{U,n}$: basta tomar $r > 0$ com $B_d(x, r) \subseteq B_d\left(x', \frac{1}{2^n}\right) \subseteq V_{U,n}$ e daí fixar $m \in \omega$ satisfazendo $\frac{1}{2^m} < r$. O último passo consiste em mostrar que $W := B_d\left(x, \frac{1}{2^{m+n+1}}\right)$ intercepta somente finitos elementos de $\mathcal{V}$. Para tanto, seja $j \in \omega$.

Por um lado, se $j \geq m+n+1$, então $V_{U',j} \cap W = \emptyset$ para qualquer $U' \in \mathcal{U}$. Com efeito, por valer $j > n$, tem-se $y \notin V_{U,n}$ para cada $y \in \mathcal{E}_{U',j}$, o que implica em $B_d\left(y, \frac{1}{2^j}\right) \cap W = \emptyset$ pois, se *algum* z *pertencesse* a tal interseção, teria-se

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{m+n+1}} \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m},$$

o que levaria a concluir que $y \in B_d\left(x, \frac{1}{2^m}\right) \subseteq V_{U,n}$, uma contradição. Como $V_{U',j}$ é reunião de tais bolas, resulta $V_{U',j} \cap W = \emptyset$, como afirmado.

Por outro lado, se $j < m+n+1$, então existe no máximo um $U' \in \mathcal{U}$ satisfazendo $V_{U',j} \cap W \neq \emptyset$. Para provar isso, fixados $U', U'' \in \mathcal{U}$ com $U' \prec U''$ e pontos $p, q \in X$

[27] O que pode ser feito em virtude do Axioma da Escolha, na encarnação do Teorema de Zermelo (AC_4).

com $p \in V_{U',j}$ e $q \in V_{U'',j}$, mostraremos que $d(p,q) \geq \frac{1}{2^{m+n}}$. Note que isso impede que os pontos p e q pertençam simultaneamente a W, já que o contrário permitiria concluir que $d(p,q) < \frac{1}{2^{m+n}}$. Agora, pela definição, existem $y \in \mathcal{E}_{U',j}$ e $z \in \mathcal{E}_{U'',j}$ tais que $p \in B_d\left(y, \frac{1}{2^j}\right)$ e $q \in B_d\left(z, \frac{1}{2^j}\right)$, com $B_d\left(y, \frac{3}{2^j}\right) \subseteq U'$ e $B_d\left(z, \frac{3}{2^j}\right) \subseteq U''$. Além disso, como U'' é o menor elemento de $\mathcal{U}$ que contém z e $U' \prec U''$, deve-se ter $d(z,y) \geq \frac{3}{2^j}$. Finalmente, note que

$$\frac{3}{2^j} \leq d(z,y) \leq d(z,q) + d(q,p) + d(p,y) \leq \frac{2}{2^j} + d(p,q)$$

acarretando $d(p,q) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^{m+n}}$, uma vez que $j \leq m+n$. □

Exemplo 3.2.57. O teorema acima permite dar contraexemplos muito rápidos para a recíproca da implicação

$$\text{compacto} \Rightarrow \text{paracompacto}, \tag{3.2}$$

já que qualquer espaço (pseudo) métrico é automaticamente paracompacto: tome a reta real $\mathbb{R}$, por exemplo.

Espaços paracompactos e não-pseudometrizáveis são um pouco mais estranhos, embora relativamente fáceis de se achar: se X é um espaço compacto de Hausdorff com $|X| > \mathfrak{c}$, como $X := [0,1]^{\mathfrak{c}}$ por exemplo, então X é paracompacto e não-pseudometrizável, já que em tais condições o Teorema 3.1.20 proíbe que X tenha caráter enumerável, propriedade partilhada por todos os espaços pseudometrizáveis (Proposição 1.2.56).

O exemplo acima tem a desvantagem de depender de um *canhão*: um espaço paracompacto e não-metrizável bem mais *simples* é $[0, \omega_1]$, paracompacto por ser compacto e não-metrizável por ter um ponto sem base local enumerável. É digno de nota que $\aleph_1$ é a menor cardinalidade que um espaço *regular* e não-paracompacto pode ter[28], posto que todo espaço enumerável é de Lindelöf e...

Proposição 3.2.58. *Se X é um espaço de Lindelöf e T_3, então X é paracompacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura por abertos de X e, para cada $x \in X$, escolha $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Como X é T_3, pode-se tomar abertos $V_x \subseteq X$ para cada x tais que $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Agora, como $\{V_x : x \in X\}$ é uma cobertura por abertos de X, a condição de Lindelöf garante um subconjunto enumerável $X' \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x \in X'} V_x$. Chamando $X' := \{x_n : n \in \omega\}$, mostraremos que $\mathcal{W} := \{W_n : n \in \omega\}$ é um refinamento localmente finito de $\mathcal{U}$, onde

$$W_n := U_{x_n} \setminus \bigcup_{j<n} \overline{V_{x_j}}$$

para cada $n \in \omega$.

De fato, $\mathcal{W}$ recobre X pois se $x \in X$, então $x \in W_{i(x)}$, onde $i(x) \in \omega$ é o menor número natural para o qual $x \in V_{x_{i(x)}}$. Tal família refina $\mathcal{U}$ pois cada W_n é um subconjunto de $U_{x_n} \in \mathcal{U}$. Finalmente, $\mathcal{W}$ é localmente finita pois, se $x \in V_{x_j}$, então $V_{x_j} \cap W_n = \emptyset$ para todo $n > j$. □

Em particular, como a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é um espaço de Lindelöf regular e não-metrizável, ela também serve de contraexemplo para a recíproca do Teorema 3.2.56.▲

[28] Sem a regularidade isto é falso: considere $X := \omega$ munido da topologia $\mathcal{T} := \{A \subseteq X : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$. Note que $\{\{0,n\} : n \in X\}$ é uma cobertura por abertos que não admite refinamento ponto-finito (Definição 2.1.49) e, por conseguinte, não admite refinamento localmente finito. Assim, X é um espaço *enumerável* que não é *paracompacto*. O leitor interessado num espaço de Lindelöf e T_2 que não é paracompacto deve conferir o Exercício 3.68.

Enquanto a discussão anterior revela a abrangência dos espaços paracompactos, os próximos apontamentos tratam de relacionar tal propriedade com as partições da unidade, já discutidas na Subseção 2.2.3, onde os termos usados adiante estão definidos. Como vimos na subseção mencionada, tais entidades se comportam relativamente bem em espaços T_4, no sentido do que foi expresso no Teorema 2.2.39: *toda cobertura por abertos localmente finita admite uma partição da unidade localmente finita e precisamente subordinada.* Consequentemente, tem-se o

Corolário 3.2.59. *Se X é um espaço paracompacto e T_4, então toda cobertura por abertos admite uma partição da unidade subordinada.*

Uma das maravilhas dos espaços paracompactos é que, *quase sempre*, a recíproca é verdadeira e, o mais surpreendente: já *provamos* isso! De fato, se $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos de X que admite uma partição da unidade subordinada, digamos $\mathcal{F}$, então o Lema 2.2.35 permite tomar outra partição da unidade da forma $\mathcal{G} := \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ tal que $g_f^{-1}[(0,1]] \subseteq f^{-1}[(0,1]]$ para cada $f \in \mathcal{F}$ e, mais ainda, com $\mathcal{V} := \{g_f^{-1}[(0,1]] : f \in \mathcal{F}\}$ localmente finita. Ora, como $\mathcal{V}$ é uma cobertura por abertos de X que refina a cobertura $\{f^{-1}[(0,1]] : f \in \mathcal{F}\}$ e esta, por sua vez, refina $\mathcal{U}$, segue que $\mathcal{V}$ é um refinamento localmente finito de $\mathcal{U}$. *Se* o mesmo procedimento puder ser feito para qualquer cobertura $\mathcal{U}$, *resultará* que X é paracompacto. Em síntese, esta é a prova da

Proposição 3.2.60. *Se X é um espaço topológico em que toda cobertura por abertos admite uma partição da unidade subordinada, então X é paracompacto.*

Apesar de a recíproca da proposição acima depender do axioma T_4, *virtualmente* precisa-se apenas de *pontos fechados*. Veremos isso adiante – mas, antes, precisamos de um lema.

Lema 3.2.61. *Sejam X um espaço paracompacto e $F, G \subseteq X$ subespaços fechados e disjuntos. Se para qualquer $x \in F$ existem abertos disjuntos $U_x, V_x \subseteq X$ tais que $x \in U_x$ e $G \subseteq V_x$, então existem abertos disjuntos A e B com $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$.*

Demonstração. A família $\mathcal{U} := \{U_x : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura por abertos de X. Logo, $\mathcal{U}$ admite um refinamento por abertos localmente finito, digamos $\mathcal{W}$. Definamos então $A := \bigcup\{W \in \mathcal{W} : \exists y \in F \text{ com } W \subseteq U_y\}$ e $B := X \setminus \overline{A}$, que satisfazem as condições desejadas.

De fato, dado $x \in F$ existem $W \in \mathcal{W}$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $x \in W$ e $W \subseteq U$. Como os únicos membros de $\mathcal{U}$ que interceptam F são da forma U_y para algum $y \in F$, resulta que $x \in A$ e, consequentemente, $F \subseteq A$. Agora, como a família $\mathcal{W}' := \{W \in \mathcal{W} : \exists y \in F$ com $W \subseteq U_y\}$ é localmente finita, o Exercício 3.69 garante que

$$\overline{A} := \overline{\bigcup_{W \in \mathcal{W}'} W} = \bigcup_{W \in \mathcal{W}'} \overline{W},$$

e, por valer $\overline{W} \cap G = \emptyset$ para cada $W \in \mathcal{W}'$, conclui-se que $G \subseteq X \setminus \overline{A} := B$, como queríamos. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Exercício 3.41. Nas notações acima, por que $\overline{W} \cap G = \emptyset$? Dica: dado $x \in G$, encontre um aberto que contém x e não intercepta W (lembre-se dos V_y's). ■

Teorema 3.2.62. *Se X é um espaço paracompacto de Hausdorff, então X é normal.*

Demonstração. A condição de Hausdorff aliada ao lema anterior permite provar que X é T_3. Daí, a condição T_3 recém conquistada aliada ao mesmo lema garante a normalidade. Os detalhes ficam para o leitor. □

Exercício 3.42. Complete os detalhes da demonstração acima. ■

Corolário 3.2.63. *Se X é um espaço T_1, então são equivalentes:*

(i) *X é paracompacto e de Hausdorff;*

(ii) *X é de Hausdorff e toda cobertura por abertos de X admite um encolhimento por abertos localmente finito;*

(iii) *toda cobertura de X por abertos admite partição da unidade precisamente subordinada;*

(iv) *toda cobertura de X por abertos admite partição da unidade subordinada.*

Demonstração. A maior parte do trabalho já está feita. De fato, se vale (i) e $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos de X, então existe uma cobertura por abertos $\mathcal{V}$ localmente finita tal que para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $s(V) \in \mathcal{U}$ com $V \subseteq s(V)$. Ora, em vista do Axioma da Escolha, isto define uma função $s\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, e ao se fazer $W_U := \bigcup_{V \in s^{-1}[\{U\}]} V$ para cada $U \in \mathcal{U}$, é fácil ver que $\mathcal{W} := \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma cobertura por abertos, localmente finita e tal que $W_U \subseteq U$, ou seja, é um encolhimento localmente finito de $\mathcal{U}$. Por outro lado, é claro que (i) decorre de (ii).

Da mesma forma, enquanto (iii) claramente implica (iv), pode-se provar que (iv) implica (iii) com um truque similar ao anterior. Assim, tudo se resume a provar, por exemplo, que (i) e (iv) são equivalentes. Ora, as discussões anteriores aliadas ao Teorema 3.2.62 acarretam $(i) \Rightarrow (iv)$. Por outro lado, se X satisfaz (iv), então X é paracompacto em virtude da Proposição 3.2.60. Portanto, só resta mostrar que se X satisfaz (iv), então X é de Hausdorff.

Pois bem, dados $x, y \in X$ pontos distintos, a suposição de X ser T_1 diz que a família $\mathcal{U} := \{X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}\}$ é uma cobertura por abertos de X, que deve ter uma partição da unidade subordinada, digamos $\mathcal{F}$. Ora, como $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = 1$, existe alguma função $g \in \mathcal{F}$ com $g(x) := \alpha \in (0, 1]$. As condições sobre $\mathcal{F}$ com relação a $\mathcal{U}$ garantem então que $g(y) = 0$, donde segue que $g^{-1}\left[\left[0, \frac{\alpha}{2}\right)\right]$ e $g^{-1}\left[\left(\frac{\alpha}{2}, 1\right]\right]$ são abertos disjuntos que contêm y e x, respectivamente. □

Observação 3.2.64 (Paracompacidade em espaços T_1)**.** De modo geral, as considerações anteriores deixam de ser válidas em espaços que não são de Hausdorff. Mais precisamente:

(i) *existem espaços paracompactos e T_0 ou T_1 que não são de Hausdorff*;

(ii) *existem espaços paracompactos que não têm a propriedade da partição da unidade.*

Para o primeiro caso, basta lembrar da existência de espaços compactos que não verificam T_2: é o caso de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, por exemplo, ou de qualquer espaço enumerável com a topologia cofinita[29]. O segundo é um pouco mais delicado, mas não tanto. Considere, por exemplo, $X := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0^-, 0^+\}$, onde 0^- e 0^+ são pontos distintos que não pertencem, originalmente, a $\mathbb{R}$. Para $A \subseteq X$, declaremos A aberto se, e somente se, $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com A aberto na topologia usual, ou se $(A \cap \mathbb{R}) \cup \{0\}$ é um aberto usual em torno de $0 \in \mathbb{R}$. Notemos os seguintes fatos.

[29] Na próxima seção veremos ainda a *compactificação de um ponto* de $\mathbb{Q}$, que não é de Hausdorff.

✓ Quaisquer dois abertos contendo 0^- ou 0^+ devem se interceptar, mostrando que X não é de Hausdorff.

✓ Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos de X, pode-se induzir duas coberturas por abertos para $\mathbb{R}$ com a topologia usual e, partir de refinamentos localmente finitos destas, obter um refinamento localmente finito para $\mathcal{U}$. O leitor pode cuidar dos detalhes.

✓ A cobertura $\mathcal{U} := \{X \setminus \{0^+\}, X \setminus \{0^-\}\}$ não admite partição da unidade subordinada. De fato, se $\{f, g\}$ *fosse* tal partição, *ocorreria*, por exemplo, $f(0^-) = 1$ e $g(0^+) = 1$. Daí, por continuidade, *existiria* um mesmo $\varepsilon \in X \cap \mathbb{R}$ com $f(\varepsilon) + g(\varepsilon) > 1$, contrariando o fato de $\{f, g\}$ ser uma partição da unidade.

Talvez para evitar essas discussões, a maioria dos autores costuma supor logo de saída que espaços paracompactos são de Hausdorff: é o que fazem Engelking [39], Willard [115] e, em certa medida, Schechter [104]. Contudo, a fim de manter claras as distinções entre propriedades de recobrimento e separação, optei pelo pedantismo. △

Exemplo 3.2.65. As caracterizações acima constituem um ferramental prático para encontrar espaços que não são paracompactos[30]: qualquer espaço T_1 e *não-normal* já serve. Nesse sentido, convém observar que há espaços normais e não-paracompactos: o espaço de ordinais $[0, \omega_1)$ é um desses casos.

De fato, o Exemplo 3.2.41 mostra que $[0, \omega_1)$ é um espaço enumeravelmente compacto (logo, pseudocompacto pelo Corolário 3.2.47), enquanto o Exercício 2.98 assegura a normalidade do espaço. Daí, em vista do próximo resultado, segue que $[0, \omega_1)$ *não pode ser* paracompacto: caso contrário, $[0, \omega_1)$ seria compacto! ▲

Teorema 3.2.66 (Pseudocompacidade em espaços $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$)**.** *Se X é um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *X é pseudocompacto;*

(ii) *toda família localmente finita de abertos é finita;*

(iii) *toda cobertura por abertos localmente finita é finita;*

(iv) *toda cobertura por abertos localmente finita tem subcobertura finita.*

Demonstração. Façamos $(i) \Rightarrow (ii)$ pela contrapositiva. Se $\mathcal{V}$ é uma família infinita e localmente finita de abertos de X, então é possível tomar um subconjunto infinito de $\mathcal{V}$, digamos $\{V_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{V}$ e, para cada $n \in \omega$, a condição $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ permite fixar um ponto $x_n \in V_n$ e uma função contínua $f_n \colon X \to [0, n]$ com $f_n(x_n) = n$ e $f_n[X \setminus V_n] \subseteq \{0\}$. Por $\mathcal{V}$ ser localmente finita, resulta que

$$x \mapsto \sum_{n \in \omega} f_n(x)$$

define uma função contínua $f \colon X \to [0, +\infty)$, ilimitada pois $f(x_n) \geq n$ para todo $n \in \omega$.

Como $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (iv)$ valem trivialmente, resta apenas provar $(iv) \Rightarrow (i)$. Ora, se $g \colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a família $\mathcal{U} := \{g^{-1}[J_z] : z \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura por abertos localmente finita, onde $J_z := (z, z+2)$ para cada $z \in \mathbb{Z}$. Logo, a hipótese dá uma subcobertura finita para $\mathcal{U}$, o que permite atestar que g deve ser limitada. □

[30] Quem em sã consciência quer isso?!

Corolário 3.2.67. *Se X é um espaço pseudocompacto, paracompacto e de Hausdorff, então X é compacto.*

Demonstração. Por ser paracompacto e de Hausdorff, X é normal e, portanto, de Tychonoff. Agora, se $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos de X, então $\mathcal{U}$ tem um refinamento localmente finito, que deve ser finito pela caracterização do lema anterior. □

Observação 3.2.68 (Compacidade em espaços pseudometrizáveis – o retorno)**.** Em posse dos últimos resultados, pode-se mostrar que as equivalências enunciadas no Teorema 3.2.43 e no Corolário 3.2.50 valem para espaços pseudometrizáveis, como alertado na Observação 3.2.51. De fato, se X é pseudometrizável, então X é tanto $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ quanto paracompacto (pelo Teorema de Stone). Logo, ao se adicionar pseudocompacidade, o último teorema garante que X é compacto. △

Deve ser claro, pelo menos para quem não se esqueceu do espaço $[0, \omega_1)$, que a paracompacidade não é hereditária para subespaços quaisquer. Por outro lado, *se X é paracompacto e $F \subseteq X$ é um subespaço fechado, então F é paracompacto*: dada uma cobertura $\mathcal{V}$ de F por abertos de F, para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U_V \subseteq X$ aberto tal que $V = U_V \cap F$, e daí $\mathcal{U} := \{U_V : V \in \mathcal{V}\} \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura para X por abertos de X que deve ter um refinamento localmente finito, donde é fácil obter um refinamento localmente finito para $\mathcal{V}$.

Em particular, um argumento semelhante mostra que, tal qual ocorre com a compacidade[31], a paracompacidade é um *fenômeno intrínseco*: se X e Y são espaços topológicos que contêm Z como subespaço, então Z é paracompacto como subespaço de X se, e somente se, é paracompacto como subespaço de Y.

Observação 3.2.69. Por meio de uma caracterização um pouco menos restritiva de paracompacidade válida em espaços regulares, o argumento utilizado acima também permite provar que se X é paracompacto e $S \subseteq X$ é um subespaço F_σ, i.e., uma reunião enumerável de subespaços fechados, então S é paracompacto. Note que tal argumento não se aplica a espaços compactos. △

Finalmente, como espaços de Lindelöf regulares são paracompactos de Hausdorff e estes, por sua vez, são normais, segue que o produto de espaços paracompactos também pode não ser paracompacto: a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$, como de costume, faz o trabalho sujo.

Observação 3.2.70 (Variedades e metrizabilidade)**.** Nos distantes campos da Geometria, costuma-se estudar um tipo de espaço topológico xingado de *variedade*, cuja definição difere de acordo com o escopo de generalidade desejado. Ainda assim, é quase um consenso que, no mínimo, uma **variedade topológica** seja um espaço topológico X, conexo e **localmente euclidiano**, i.e., tal que para cada ponto $x \in X$ exista uma vizinhança $V \subseteq X$ de x com V homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algum $n \in \omega$.

[31] Observação 1.2.88.

Contudo, para a maior parte dos geômetras, esse *mínimo* ainda é pouco: como o nome da área sugere, espera-se fazer geo*metria* e, portanto, é natural que se queira alguma *métrica*[32]. Nesse sentido, a paracompacidade captura precisamente a metrizabilidade de uma variedade. Por um lado, se a variedade é metrizável, então o Teorema de Stone garante sua paracompacidade. Por outro lado, se X é uma variedade paracompacta e de Hausdorff, então ela é metrizável, em vista do *Teorema de metrizabilidade de Smirnov*, que caracteriza metrizabilidade como "metrizabilidade local[33]+ paracompacidade + Hausdorff".

Tal teorema é um dos muitos resultados gerais de metrizabilidade que foram revelados após a invenção/descoberta da paracompacidade. Uma demonstração indireta para ele será apresentada no próximo capítulo, quando estivermos munidos de conhecimentos mais sólidos acerca de convergência uniforme. Contudo, não se engane: esse atraso é mero fruto do meu fetiche Bourbakista aliado à preguiça de redigir a prova *aqui* e *agora*[34].

Por fim, vale frisar que é comum adicionar as condições de Hausdorff e peso enumerável na definição de variedade. Daí não é difícil perceber que tais variedades são espaços regulares com bases enumeráveis, donde o Teorema 3.1.17 (da metrizabilidade de Urysohn) garante a metrizabilidade/paracompacidade da variedade – após alguns minutos de reflexão sobre séries, o que será feito no próximo capítulo. Apesar disso, essas considerações ainda não dão conta de facilitar completamente a vida do geômetra, que geralmente se preocupa com estruturas adicionais na variedade – como *diferenciabilidade*, tópico que não pretendo abordar neste texto. △

Exercícios complementares da seção

Compacidade revisitada

Exercício 3.43. Sejam X um espaço compacto e $Y \subseteq X$ um subconjunto. Mostre que se Y é infinito, então Y tem ponto de acumulação. ■

Exercício 3.44 (Leminha do tubo)**.** Sejam X e Y espaços topológicos, $y \in Y$ um ponto e $W \subseteq X \times Y$ um aberto com $X \times \{y\} \subseteq W$. Mostre que se X é compacto, então existe um aberto $V \subseteq Y$ com $y \in V$ tal que $X \times V \subseteq W$. Sugestão: use a caracterização de compacidade dada pelo Corolário 3.2.15 com o fechado $F := (X \times Y) \setminus W$. ■

Exercício 3.45 (Lema do tubo)**.** Sejam X e Y espaços topológicos, com $K_X \subseteq X$ e $K_Y \subseteq Y$ subespaços compactos. Mostre que se $W \subseteq X \times Y$ é um subconjunto aberto com $K_X \times K_Y \subseteq W$, então existem abertos $A_X \subseteq X$ e $A_Y \subseteq Y$ satisfazendo $K_X \times K_Y \subseteq A_X \times A_Y \subseteq W$. Dica: aplique o exercício anterior para $K_X \times \{y\}$ para cada $y \in K_Y$, daí use a compacidade de K_Y para corrigir os problemas. ■

Exercício 3.46 (Teorema de Wallace)**.** Seja $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos e, para cada $i \in \mathcal{I}$, fixe $K_i \subseteq X_i$ um subespaço compacto. Mostre que se $W \subseteq \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é um aberto com $\prod_{i \in \mathcal{I}} K_i \subseteq W$, então existem abertos $A_i \subseteq X_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$, com $|\{i \in \mathcal{I} : A_i \neq X_i\}| < \aleph_0$, tais que $\prod_{i \in \mathcal{I}} K_i \subseteq \prod_{i \in \mathcal{I}} A_i \subseteq W$. Dica: tome um aberto básico $V_f := \prod_{i \in \mathcal{I}} V_f(i) \subseteq W$ com $f \in V_f$ para cada $f \in K := \prod_{i \in \mathcal{I}} K_i$; use a compacidade de K para obter um subconjunto finito $L \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{f \in J} V_f$ e note que, essencialmente, ocorre

$$K = \prod_{j \in J} K_j \times \prod_{i \in \mathcal{I} \setminus J} K_i \subseteq \left(\bigcup_{f \in L} \prod_{j \in J} V_f(j) \right) \times \prod_{i \in \mathcal{I} \setminus J} X_i,$$

onde $J := \{i \in \mathcal{I} : \exists f \in L \text{ com } V_f(i) \neq X_i\}$; use o exercício anterior com $\prod_{j \in J} K_j$ para concluir. ■

[32]E o leitor deve tomar cuidado aqui: além das métricas com as quais estamos acostumados, geômetras também xingam de *métrica* correspondências que associam pontos a produtos internos. No caso, esse último tipo de correspondência é uma *métrica riemanniana*.

[33]Isto é, tal que todo ponto do espaço admite uma vizinhança metrizável.

[34]O leitor afoito pode conferir o texto de Reinhard Schultz, *Partitions of unity and a metrization theorem of Smirnov*, disponível em https://math.ucr.edu/~res/m205C/smirnov.pdf.

Variações de compacidade

Exercício 3.47. Sejam X um espaço de Lindelöf e $Y \subseteq X$ um subconjunto. Mostre que se $|Y| > \aleph_0$, então Y tem ponto de acumulação. O que se pode dizer sobre os subespacos discretos de X? Compare com o Exercício 3.43. ■

Exercício 3.48. Mostre que a propriedade de Lindelöf é intrínseca. Mais precisamente, mostre que se X é simultaneamente subespaço dos espaços Y e Z, então X é de Lindelöf como subespaço de Y se, e somente se, é de Lindelöf como subespaço de Z. ■

Exercício 3.49. Seja $f \colon X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se X é de Lindelöf, então $f[X]$ também é. ■

Exercício 3.50. Mostre que um espaço X é hereditariamente de Lindelöf se, e somente se, todo subespaço aberto de X é de Lindelöf. ■

Exercício 3.51. Se X é T_2 e $K \subseteq X$ é compacto, então K é fechado. Pense rápido: pode-se trocar "compacto" por "Lindelöf"? ■

Exercício 3.52. Por que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ não é σ-compacta? ■

Exercício 3.53. Prove que todo espaço σ-compacto e pseudometrizável é separável. ■

Exercício 3.54. Se X é de Hausdorff, σ-compacto e tem caráter enumerável, então $|X| \leq \aleph_0$ ou $|X| = \mathfrak{c}$. Verdadeiro ou falso? ■

Exercício 3.55. Mostre que toda sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{R}$ admite subsequência que converge em $[-\infty, +\infty]$. ■

Exercício 3.56. O espaço $[0, \omega_1)$ é de Lindelöf? ■

Exercício 3.57. Mostre que o espaço $[0, \alpha)$ não é metrizável, qualquer que seja o ordinal $\alpha \geq \omega_1$. ■

Exercício 3.58. Sejam X e Y espaços topológicos e $f \colon X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se f é sobrejetora e X é sequencialmente compacto, então Y é sequencialmente compacto. ■

Exercício 3.59 (Bolzano-Weierstrass)**.** Mostre que toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ tem subsequência convergente. ■

Exercício 3.60. Sejam X um espaço sequencialmente compacto, $\mathcal{B}$ uma base enumerável para a topologia e $\mathcal{U}$ uma cobertura por abertos de X.

a) Mostre que se $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$, então $\mathcal{V} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ para qualquer filtro convergente $\mathcal{F}$ em X.

b) Mostre que se $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \omega\}$ não admite subcobertura finita, então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X tal que $x_n \notin V_m$ para todo $m \geq n$.

c) Tomando uma subsequência convergente de $(x_n)_{n\in\omega}$, obtenha uma contradição com os dois itens anteriores.

Logo, espaços sequencialmente compactos com peso enumerável são compactos. ■

Observação 3.2.71. Embora o roteiro acima, adaptado de [10], demonstre de maneira mais indireta a parte não-trivial da Proposição 3.2.42, ele tem a vantagem de, com as definições certas, ser válido no contexto dos espaços de convergência (Subseção 1.4.1). △

Exercício 3.61. Mostre que X é um espaço compacto se, e somente se, X é um espaço de Lindelöf enumeravelmente compacto. ■

Exercício 3.62. Seja X um espaço de Lindelöf sequencial. Mostre que X é compacto se, e somente se, X é sequencialmente compacto. Dica: limpe a demonstração da Proposição 3.2.42. ■

Exercício 3.63. Um espaço topológico X é chamado de **limite-compacto**[35] se todo subconjunto infinito de X tem ponto de acumulação. Mostre que para espaços metrizáveis, tal noção de compacidade coincide com a compacidade usual. Dica: essa é a propriedade expressa no item (en. c_3) do Lema 3.2.37. ■

Exercício 3.64. Exiba um espaço limite-compacto que não é enumeravelmente compacto. Dica: ele não pode ser T_1. ■

Exercício 3.65. Dizemos que um ponto $p \in X$ é **ω-limite** de um subconjunto (infinito) A de X se $|U \cap A| \geq \aleph_0$ para todo aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$. Mostre que X é enumeravelmente compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito enumerável de X tem ponto ω-limite. Dica: note que um subconjunto infinito enumerável A sem ω-limite permite induzir uma cobertura por abertos $\left\{O(F) : F \in [A]^{<\aleph_0}\right\}$ sem subcobertura finita; para a volta, use uma cobertura enumerável sem subcobertura finita para cozinhar um conjunto infinito sem ω-limite. ■

Exercício 3.66. Mostre que se X é metrizável e não-compacto, então X admite uma métrica ilimitada compatível com sua topologia. Conclua que se toda métrica compatível com a topologia de X é limitada, então X é compacto. Dica: note que se d é uma métrica em X e $F\colon X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $d'(x, y) := d(x, y) + |F(x) - F(y)|$ determina uma métrica equivalente à métrica d, daí basta escolher uma F adequada. ■

Exercício 3.67. Prove versões análogas das Proposições 1.2.86 (imagem contínua de compacto é compacta) e 1.2.89 (subespaço fechado de compacto é compacto) para espaços sequencialmente compactos, enumeravelmente compactos e pseudocompactos. ■

Exercício 3.68. . Sejam $X := \mathbb{R}$, $K := \{\frac{1}{2^n} : n \in \omega\}$ e sobre X considere a topologia cujos abertos são subconjuntos da forma $U \setminus B$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}$ com a topologia usual e $B \subseteq K$ é um subconjunto qualquer. Mostre que X é um espaço de Lindelöf e T_2 que não é paracompacto. ■

Exercício 3.69. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{L}$ uma família de subconjuntos localmente finita. Mostre que

$$\bigcup_{L \in \mathcal{L}} \overline{L} = \overline{\bigcup_{L \in \mathcal{L}} L}.$$

Conclua, em particular, que $\bigcup_{L \in \mathcal{L}} \overline{L}$ é um subespaço fechado de X. ■

Exercício 3.70. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, [0, +\infty))$ um subconjunto não-vazio de funções contínuas. Mostre que se

$$\operatorname{supp}(\mathcal{F}) := \left\{f^{-1}\left[(0, +\infty)\right] : f \in \mathcal{F}\right\}$$

é uma família localmente finita de abertos de X, então a correspondência

$$x \mapsto \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

determina uma função contínua da forma $X \to [0, +\infty)$. ■

Sortidos

Exercício 3.71. Mostre que se $K \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é compacto, então K tem interior vazio em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dica: mostre que se K é compacto e $(a, b) \setminus \mathbb{Q} \subseteq K$ para certos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então $K \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. ■

Exercício 3.72. Diremos que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *eventualmente grande* se para todo $M > 0$ existe $r > 0$ tal que $|g(x)| > M$ sempre que $x > r$.

a) Mostre que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ é eventualmente grande.

b) Mostre que se $a \in \mathbb{R}$ e g é eventualmente grande, então $a + g$ é eventualmente grande.

[35] Não consegui tradução melhor para *limit point compact* – e *weakly countably compact* é uma notação terminologia que não agradaria analistas.

c) Mostre que se g é eventualmente grande, então $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \cdot g$ é eventualmente grande, i.e., a função que associa cada $\alpha \in \mathbb{R}$ ao número $\alpha \cdot g(\alpha)$.

d) Mostre que se g é eventualmente grande e $(a_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ com $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, então $\lim_{n\in\omega} g(a_n) \in \{-a, a\}$.

Conclua que se f é uma função polinomial não-constante e $(a_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ com $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \in \{-a, a\}$. ■

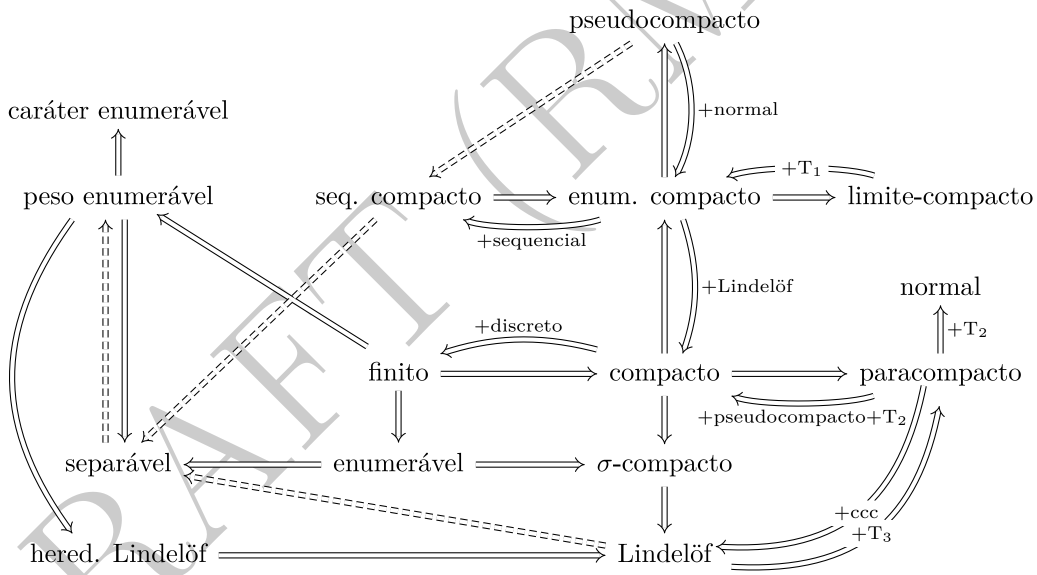
Exercício 3.73. Mostre que se X é (pseudo) metrizável, então X é *ajustável*, i.e., toda cobertura por abertos admite encolhimento por vizinhanças fechadas. Dica: confira a Observação 2.1.56. ■

Exercício 3.74. Seja X um espaço compacto de Fréchet-Urysohn (Definição 1.4.28). Mostre que X é sequencialmente compacto e tem *tightness* enumerável (Definição 1.4.33). ■

Exercício 3.75. Para uma família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços topológicos, uma upla $y \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e um subconjunto $A \subseteq \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, mostre que $y \in \overline{A}$ se, e somente se, $\pi_F(y) \in \overline{\pi_F[A]}$ para todo subconjunto finito $F \subseteq \mathcal{I}$, onde $\pi_F \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to \prod_{i\in F} X_i$ é a projeção óbvia. Dica: destrinche as definições. ■

Exercício 3.76. Prove o Teorema de Tychonoff por meio da caracterização dada no Corolário 3.2.15. Dica: suponha o conjunto de índices $\mathcal{I}$ bem ordenado e proceda por indução (transfinita); nos passos limite, use o exercício anterior para concluir que a projeção é fechada. ■

Exercício 3.77. No diagrama a seguir, as setas indicam implicação: as tracejadas valem no contexto de espaços (pseudo) metrizáveis; as contínuas no contexto de espaços topológicos, com possíveis hipóteses adicionais sinalizadas. A ausência de setas numa direção ou na outra (ou em ambas) indica que a implicação sugerida é falsa ou que ela segue por transitividade de outras implicações intermediárias.



Exiba contraexemplos para as implicações não válidas. Dica: já vimos contraexemplos suficientes neste capítulo. ■

3.3 Compactificações

Dentre muitas outras coisas, este capítulo mostrou maneiras paliativas de viver sem compacidade. Nesta seção, exploraremos outra abordagem: *mergulhar* um espaço não-compacto num espaço compacto.

Definição 3.3.1. Uma **compactificação** de um espaço topológico X é um par (Y, e) onde Y é um espaço compacto, $e\colon X \to Y$ é um mergulho e $e[X]$ é um subespaço denso de Y. ¶

Isso permite definir uma categoria $\mathrm{C}_{\text{OMP}}(X)$ cujos objetos são compactificações de X, em que uma seta $\varphi\colon (Y, e) \to (Y', e')$ é uma função contínua $\varphi\colon Y \to Y'$ tal que o diagrama abaixo comute.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\varphi"] & Y' \\
X \arrow[u, "e"] \arrow[ur, "e'"'] &
\end{tikzcd}$$

Como, moralmente, pode-se ver X como subespaço de Y por meio do mergulho e, é razoável supor $X \subseteq Y$ sempre que (Y, e) é uma compactificação de X.

Observação 3.3.2. Na literatura, a definição acima costuma ser restrita aos espaços de Hausdorff devido às boas propriedades que os espaços compactos de Hausdorff possuem. Ainda assim, neste começo vamos nos ater a um cenário razoavelmente generalizado. $\triangle$

Ao longo do texto já nos deparamos com alguns exemplos de compactificações:

- tanto $\mathbb{S}^1$ quanto $[0, 1]$ são compactificações[36] de $\mathbb{R}$;
- $[0, \omega]$ é uma compactificação de $[0, \omega)$ e, mais geralmente, $[0, \alpha]$ é uma compactificação de $[0, \alpha)$ para qualquer ordinal limite $\alpha \geq \omega$;
- se X é subespaço de um espaço compacto Y, então $\overline{X}$ é uma compactificação de X.

Os exemplos acima, embora importantes, não respondem uma pergunta bastante ingênua: dado X, há algum objeto em $\mathrm{C}_{\text{OMP}}(X)$? Em geral, a resposta é sim. Recordemo-nos de que para um conjunto X qualquer, denota-se por $\mathrm{ult}\,(X)$ a coleção de todos os ultrafiltros de X. A família $\mathrm{ult}\,(X)$ vem de fábrica com a injeção

$$\begin{aligned} p\colon X &\to \mathrm{ult}\,(X) \\ x &\mapsto \mathfrak{u}_x \end{aligned}$$

que a cada elemento x associa o ultrafiltro principal $\mathfrak{u}_x := \{A \subseteq X : x \in A\}$. Quando X é um espaço topológico, é possível dotar $\mathrm{ult}\,(X)$ de uma topologia *natural*[37]: para cada $U \subseteq X$ aberto, define-se $U^* := \{\mathfrak{u} \in \mathrm{ult}\,(X) : U \in \mathfrak{u}\}$.

Exercício 3.78. Convença-se de que os conjuntos da forma U^* acima determinam uma base para uma topologia sobre $\mathrm{ult}\,(X)$. ■

Teorema 3.3.3 (Salbany)**.** *Se X é um espaço topológico, então $(\mathrm{ult}\,(X), p)$ é uma compactificação de X, onde $\mathrm{ult}\,(X)$ tem a topologia definida acima.*

Demonstração. Talvez o que mais surpreenda o leitor seja a compacidade de $\mathrm{ult}\,(X)$. Para provar isso, usaremos a caracterização de compacidade por meio da p.i.f.[38], que aliada à Proposição 1.2.84 permite mostrar que um espaço topológico é compacto se, e somente se, toda família de *fechados básicos*[39] com a p.i.f. tem interseção não-vazia.

[36] O segundo caso é *óbvio*. O primeiro será discutido em breve.
[37] Compare com a definição da topologia de Zariski (Exemplo 1.1.45).
[38] Confira (Comp_5), na Proposição 1.2.77.
[39] Complementar de um aberto básico de uma base *implícita no contexto* (Definição 1.1.34).

Ora, se $\mathcal{F}$ é uma família de fechados básicos de $\operatorname{ult}(X)$ com a p.i.f., então para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $U_F \subseteq X$ aberto tal que $F = \operatorname{ult}(X) \setminus U_F^*$. Note que se $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, então existe $\mathfrak{u} \in \operatorname{ult}(X)$ com $X \setminus U_{F_0}, \ldots, X \setminus U_{F_n} \in \mathfrak{u}$, mostrando que o conjunto $\{X \setminus U_F : F \in \mathcal{F}\}$ tem p.i.f.. Logo, o Lema do Ultrafiltro garante um ultrafiltro $\mathfrak{v} \in \operatorname{ult}(X)$ com $X \setminus U_F \in \mathfrak{v}$ para cada $F \in \mathcal{F}$ e, consequentemente, $\mathfrak{v} \in \bigcap \mathcal{F}$.

Agora, resta ver apenas que $p\colon X \to \operatorname{ult}(X)$ é um mergulho, cuja imagem $\operatorname{im}(p)$ é densa em $\operatorname{ult}(X)$:

- ✓ a continuidade de p é quase automática, posto que se $U^* \subseteq \operatorname{ult}(X)$ é um aberto básico com $\mathfrak{u}_x \in U^*$, então $x \in U$ e todo ponto $y \in U$ é tal que $\mathfrak{u}_y \in U^*$;
- ✓ para qualquer subconjunto $A \subseteq X$ vale $p[A] = A^* \cap \operatorname{im}(p)$, donde segue que p é uma aplicação aberta de X sobre $\operatorname{im}(p)$;
- ✓ finalmente, se $U^* \subseteq \operatorname{ult}(X)$ é um aberto básico não-vazio, então existe $\mathfrak{u} \in \operatorname{ult}(X)$ com $U \in \mathfrak{u}$, donde segue que existe $x \in U$ e, consequentemente, $\mathfrak{u}_x \in \operatorname{im}(p) \cap U^*$. □

Apesar da resposta positiva dada pelo teorema anterior, não parece haver um estudo intenso sobre esse tipo de compactificação geral na literatura: além do artigo [101], em que Salbany define a compactificação acima e *destrincha* algumas considerações categoriais que fogem do escopo deste livro, encontrei apenas a dissertação de mestrado [84] de Nxumalo, que aborda os mesmos temas com um pouco mais de calma. Em contrapartida, a literatura sobre as compactificações de espaços de Hausdorff é bastante extensa, razão pela qual o restante da seção será dedicado a elas.

No contexto de Hausdorff, há duas compactificações particularmente importantes: a de *Alexandroff* e a de *Stone-Čech*. Porém, antes de apresentá-las, convém fazer algumas considerações gerais sobre compactificações de Hausdorff. *Daqui em diante*, uma compactificação (K, e) de um espaço de Hausdorff X é uma compactificação de X tal que K também é de Hausdorff.

Proposição 3.3.4. *Um espaço de Hausdorff X tem uma compactificação se, e somente se, X é um espaço de Tychonoff.*

Exercício 3.79. Convença-se de que o resultado acima é verdadeiro. ■

A condição de Hausdorff também permite simplificar a categoria $\mathrm{C}_{\text{OMP}}(X)$, num sentido bastante extremo: ela se torna, explicitamente, uma *pré-ordem*. De fato, para morfismos $\varphi, \psi\colon (K', e') \to (K, e)$ entre duas compactificações de X, φ e ψ coincidem no subconjunto $e'[X]$, um subespaço denso[40] de K', donde o fato de K ser de Hausdorff acarreta em $\varphi = \psi$ (confira o Exercício 1.181 ou a condição (Haus_6)). Daí, os demais axiomas categoriais garantem que $\mathrm{C}_{\text{OMP}}(X)$ é, *moralmente*, uma pré-ordem. A conclusão só não é literal pois $\mathrm{C}_{\text{OMP}}(X)$, a princípio, é uma classe própria e não um conjunto. Mas este é um problema contornável.

Proposição 3.3.5. *Se (K, e) é uma compactificação de um espaço de Hausdorff X, então K é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{2^X}$.*

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 2.2.9, K é subespaço de $[0,1]^T$, onde $T := \mathcal{C}(K, [0,1])$. Agora, $|T| = |\mathcal{C}(K, [0,1])| \leq |\mathcal{C}(X, [0,1])|$ por X ser denso em K (confira o Exercício 1.182), com $|\mathcal{C}(X, [0,1])| \leq \left|[0,1]^X\right| = 2^{\aleph_0 \cdot |X|} = 2^{|X|}$ (já que, implicitamente, tem-se X infinito). Como $[0,1]^\kappa$ é subespaço de $[0,1]^\lambda$ sempre que $\kappa \leq \lambda$ (Exercício 3.22), resulta que $[0,1]^T$ é subespaço de $[0,1]^{2^X}$ e, portanto, K também é. □

[40] Ou coincidem no denso X, caso se identifique X com sua imagem $e'[X]$.

Exercício 3.80. Mostre que, no enunciado acima, pode-se substituir X por qualquer subespaço denso de X. ■

Desse modo, toda compactificação de X se *manifesta* como *algum* subespaço de $[0,1]^{2^X}$, o que permite *escolher* um representante para cada compactificação. Em outras palavras, *pensa-se* em $\mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$ como a coleção dos subespaços compactos/fechados de $[0,1]^{2^X}$ cujo fecho coincide com X. Em particular, ao se escolher apenas um subespaço para cada classe de compactificações isomorfas em $\mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$, obtém-se uma ordem parcial, o que não é tão diferente do que se faz para obter uma ordem parcial a partir de uma pré-ordem.

Exercício 3.81. Use a unicidade dos morfismos entre compactificações para mostrar que se existem morfismos $(K',e') \to (K,e)$ e $(K,e) \to (K',e')$, então K e K' são espaços homeomorfos. ■

Definição 3.3.6. Sejam (K,e) e (K',e') compactificações do espaço de Hausdorff X. Escreveremos $(K',e') \succeq (K,e)$ para indicar a existência de ~~um morfismo~~ uma função contínua $\varphi\colon K' \to K$ satisfazendo $\varphi \circ e' = e$ ¶

Observação 3.3.7. Não custa frisar: a notação acima faz sentido pois, se tal φ existir, então ela é única. △

Como veremos na segunda subseção, $\mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$ sempre admite uma compactificação máxima $(\beta X, \beta)$, no sentido de que qualquer compactificação $(K,e) \in \mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$ é *menor do que ou igual a* $(\beta X, \beta)$, i.e., $(K,e) \preceq (\beta X, \beta)$: é a chamada *compactificação de Stone-Čech*. No entanto, começaremos de baixo, com as compactificações de um ponto, que *de brinde* revelarão outra variação de compacidade bastante útil.

3.3.1 Pontos no infinito e compacidade local

No distante e demasiadamente ilustrado Exemplo 1.3.17, definiu-se sobre o intervalo fechado $[0,1]$ a relação de equivalência $\sim$ que identifica os extremos 0 e 1 enquanto mantém *intactos* os pontos do interior $(0,1)$. Daí, como $[0,1]$ é compacto e o espaço $[0,1]/\sim$ é imagem contínua da projeção, segue que o último também é compacto. O que ainda não se discutiu, porém, é o fato de o quociente determinar uma compactificação de $(0,1)$.

De fato, a restrição π' da projeção $\pi\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]/\sim$ ao intervalo $(0,1)$ é contínua e injetora. Como todo aberto $V \subseteq (0,1)$ satisfaz $\pi^{-1}[\pi[V]] = V$, segue que $\pi[V]$ é aberto[41] e, consequentemente, a restrição $\pi'\colon (0,1) \to [0,1]/\sim$ é um mergulho. Por fim, a imagem de $(0,1)$ por π' é densa em $[0,1]/\sim$ já que os abertos deste espaço têm, essencialmente, duas opções: são imagens de intervalos da forma (α,β) ou de subconjuntos da forma $[0,\alpha) \cup (\beta,1]$, com $\alpha,\beta \in (0,1)$. Agora, *é claro* que por $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ serem homeomorfos, resulta que $[0,1]/\sim$ é uma compactificação de $\mathbb{R}$: a composição entre o mergulho π' e um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e $(0,1)$ é, necessariamente, um mergulho de $\mathbb{R}$ em $[0,1]/\sim$.

Disso tudo, o que *realmente* deveria chamar a atenção do leitor é a possibilidade de usar o comportamento da topologia quociente para *construir* uma compactificação de $\mathbb{R}$ diretamente, i.e., *sem quocientes*.

[41] Abertos $\sim$-saturados são apresentados na altura do Exercício 1.255.

Considere um ponto não pertencente a $\mathbb{R}$, digamos ∞ e, sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definamos uma topologia da seguinte forma: $A \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é aberto se, e somente se, $\infty \notin A$ e $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto *usual*, ou $\infty \in A$ e existe $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto tal que $A = (\mathbb{R} \setminus K) \cup \{\infty\}$. A figura abaixo deve ajudar a fazer as devidas comparações, onde a linha pontilhada representa um subespaço compacto definido como complementar dos abertos ilimitados (em cinza) que *contém* os *extremos* da reta.

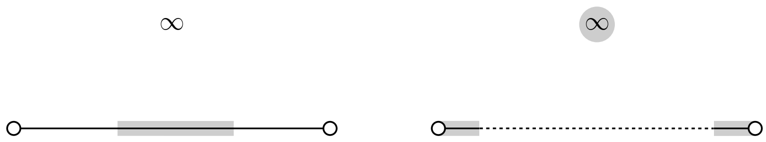


Figura 3.1: Os dois tipos de abertos da reta acrescida de um *ponto no infinito*.

Mesmo ao se ignorar a sensação de que existe um homeomorfismo entre os espaços $\mathbb{R}^+ := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\mathbb{S}^1$ (ou $[0,1]/\sim$, como preferir), é quase imediato perceber que *estamos* diante de uma compactificação legítima de $\mathbb{R}$.

✓ O mergulho é a inclusão.

✓ A compacidade segue pois, se $\mathcal{U}$ é uma cobertura por abertos de $\mathbb{R}^+$, então pelo menos um aberto $U \in \mathcal{U}$ contém ∞, e daí finitos membros de $\mathcal{U}$ dão conta de cobrir $\mathbb{R}^+ \setminus U$, já que tal subconjunto é um subespaço compacto de $\mathbb{R}$.

✓ Para a densidade, se $U \subseteq \mathbb{R}^+$ é um aberto não-vazio, então ou U é um aberto de $\mathbb{R}$ ou $\infty \in U$. Se ocorrer o segundo caso, então existe $K \subsetneq \mathbb{R}$ compacto com $U = (\mathbb{R} \setminus K) \cup \{\infty\}$, donde o *fato de* $\mathbb{R}$ *não ser compacto* garante um ponto $x \in \mathbb{R} \cap U$.

✓ Finalmente, $\mathbb{R}^+$ é um espaço de Hausdorff pois, dado $x \in \mathbb{R}$, existe um aberto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\overline{V}$ é compacto, digamos $V := (x-1, x+1)$, e daí $U := (\mathbb{R} \setminus \overline{V}) \cup \{\infty\}$ é um aberto que contém ∞ satisfazendo $U \cap V = \emptyset$.

Como a argumentação acima sugere, os procedimentos feitos com $\mathbb{R}$ se aplicam a qualquer espaço topológico, *mutatis mutandis*. É sobre tal cenário geral que esta subseção irá se dedicar – e, pelo menos no começo, sem menções a axiomas de separação.

Dado um espaço topológico X, *não necessariamente de Hausdorff*, consideremos um *ponto* $\infty \notin X$ qualquer e definamos $X^+ := X \cup \{\infty\}$ munido da topologia que declara como abertos:

- os subconjuntos $A \subseteq X$ originalmente abertos em X, e
- os subconjuntos da forma $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, para $K \subseteq X$ compacto e fechado[42].

Uma vez que a reunião finita de compactos fechados é compacta e fechada, não é difícil concluir que X^+ é um espaço topológico compacto que contém X *como subespaço topológico*. Mais precisamente,

Exercício 3.82. Convença-se de que a topologia definida acima faz de X^+ um espaço compacto tal que a inclusão $X \hookrightarrow X^+$ é um mergulho. ■

[42] A suposição de K ser fechado não foi necessária na compactificação de $\mathbb{R}$ pois subespaços compactos de espaços de Hausdorff são fechados (Proposição 1.2.90).

Como no caso do *círculo*, se X não for um espaço compacto, então X é denso em X^+, com a recíproca verdadeira: de fato, o único subconjunto de X^+ que pode ser um aberto não-vazio e disjunto de X é $\{\infty\}$ e, pela definição da topologia de X^+, $\{\infty\}$ é aberto se, e somente se, X é compacto. É precisamente a condição restante, de Hausdorff, que esconde a noção de *compacidade local*.

Por X ser um subespaço de X^+, segue que se X^+ for de Hausdorff, então X também é de Hausdorff, mas não só isso: dado $x \in X$, a existência de abertos disjuntos $U, V \subseteq X^+$ com $x \in U$ e $\infty \in V$ garante que *x tem uma vizinhança compacta* em X, a saber, $K := X^+ \setminus V$. Reciprocamente, se X é de Hausdorff e *todo ponto de X admite uma vizinhança compacta*, então X^+ é um espaço de Hausdorff.

Exercício 3.83. Convença-se de que as afirmações acima estão corretas. ■

Gramaticalmente, *faria* sentido chamar a condição enfatizada no parágrafo anterior de *compacidade local*, o que inclusive costuma ser feito em textos que abordam unicamente espaços de Hausdorff. Como este não é o caso, a definição será outra.

Definição 3.3.8. Diz-se que X é um espaço **localmente compacto** se todo ponto admite uma base local de vizinhanças compactas. ¶

É claro que, de acordo com a definição acima, todo ponto de um espaço localmente compacto tem *pelo menos* uma vizinhança compacta. Uma das vantagens dos espaços de Hausdorff é, justamente, a validade da recíproca.

Proposição 3.3.9. *Seja X um espaço de Hausdorff. Então X é localmente compacto se, e somente se, todo ponto tem pelo menos uma vizinhança compacta.*

Demonstração. Se $W \subseteq X$ é uma vizinhança compacta de $x \in X$, então W é um subespaço normal de X e, em particular, T_3, donde segue que x tem uma base local de vizinhanças fechadas em W, digamos $\mathcal{V}$, que por sua vez devem ser compactas em W. Ocorre que os membros de $\mathcal{V}$ são vizinhanças compactas de x em X: dado um compacto $K \in \mathcal{V}$, existe um aberto $A \subseteq X$ tal que $x \in A \cap W \subseteq K$, com $A \cap W$ uma vizinhança de x em X já que W é também uma vizinhança de x em X. Por fim, basta notar que $\mathcal{V}$ é uma base local de vizinhanças de x em X, trabalho deixado a cargo do leitor (confira também a Proposição 5.2.16). □

Exercício 3.84. Complete a demonstração da proposição anterior. ■

A condição de Hausdorff é realmente necessária para a validade da última proposição. Por exemplo: como todo compacto de $\mathbb{Q}$ tem interior vazio[43], resulta que nenhum ponto de $\mathbb{Q}$ admite uma vizinhança compacta (em $\mathbb{Q}$), donde segue que o espaço compacto $\mathbb{Q}^+$ não é localmente compacto, embora todo ponto tenha uma vizinhança compacta – a saber, o próprio $\mathbb{Q}^+$. Apesar de parecer uma desvantagem que espaços compactos não sejam (necessariamente) localmente compactos, a terminologia adotada está em consonância com outras definições de propriedades locais típicas de Análise (Funcional).

Corolário 3.3.10. *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é de Tychonoff.*

Demonstração. Segue pois a compactificação X^+ construída anteriormente é normal. □

[43] Basta adaptar o Exercício 3.71 para se convencer disso.

Definição 3.3.11. Em geral, o espaço compacto X^+ construído acima é chamado de *extensão de Alexandroff*[44] de X. Nos casos em que X não é compacto, passa-se a chamar X^+ de **compactificação de Alexandroff**[45]. ¶

Observação 3.3.12. Note que se X é de Hausdorff e não-compacto, então X^+ é uma compactificação de Hausdorff se, e somente se, X é localmente compacto[46]. △

No panorama geral, a compactificação de Alexandroff é *a menor* dentre todas as compactificações existentes, no sentido discutido na introdução desta seção. Mais precisamente:

Teorema 3.3.13. *Seja X um espaço não-compacto e de Hausdorff. Se X é localmente compacto e K é uma compactificação de X, então $X^+ \preceq K$. Reciprocamente, se existe uma compactificação K' de X tal que $K' \preceq K$ para toda compactificação K de X, então X é localmente compacto – em particular, K' e X^+ são espaços homeomorfos.*

Demonstração. Uma função que atesta $X^+ \preceq K$ deve ser da forma $f\colon K \to X^+$ com $f(x) = x$ para todo $x \in X$. Como X^+ pode ter sequências que convergem para ∞ e espera-se que f *comute* com tais limites, *somos obrigados* a definir $f(y) := \infty$ para todo $y \in K \setminus X$. Assim, para a primeira parte do teorema, basta mostrar que tal regra determina uma função contínua $K \to X^+$, donde a unicidade segue pela densidade de X em K e pela condição de Hausdorff em X^+, esta última garantida pela hipótese de compacidade local. Ora, dado um aberto $W \subseteq X^+$, há duas possibilidades: ou $f^{-1}[W] = W$ (caso $\infty \notin W$) ou $f^{-1}[W] = (X \setminus C) \cup (K \setminus X) = K \setminus C$ para algum subespaço compacto $C \subseteq X$, que deverá ser fechado em K.

Para a recíproca, suponha que existam dois pontos distintos $a, b \in K' \setminus X$. Como $K'' := K' \setminus \{a, b\}$ é um subespaço aberto de K', segue que K'' é localmente compacto[47] e, por conseguinte, admite sua própria compactificação de Alexandroff $K := (K'')^+$. Como K também é uma compactificação de X, a hipótese sobre K' garante uma função contínua $g\colon K \to K'$ que atesta $K' \preceq K$, o que implica em $g[\{\infty\}] = \{a, b\}$: por um lado, g deve ser sobrejetora pois sua imagem contém a imagem do denso $K \setminus \{\infty\} = K''$; por outro lado, as restrições de g e $\mathrm{Id}_{K''}$ no subespaço denso X coincidem, donde segue que $g(y) = y$ para todo $y \in K''$; como $K' = K'' \cup \{a, b\}$, a afirmação segue. Como tal conclusão é absurda, resulta que $|K' \setminus X| = 1$, mostrando que X é um aberto em K' e, portanto, é localmente compacto. Em particular, pela primeira parte, infere-se $X^+ \preceq K'$ e, portanto, X^+ e K' são homeomorfos. □

Observação 3.3.14 (Funtorialidade e funções próprias)**.** É possível interpretar a compactificação de Alexandroff como um *funtor*. Sejam LCH e CHAUS as *classes dos espaços localmente compactos de Hausdorff* e dos espaços *compactos de Hausdorff*, respectivamente. Vamos promover tais classes ao patamar de categorias, de modo que a correspondência $(\bullet)^+\colon \mathrm{LCH} \to \mathrm{CHaus}$ se torne um funtor. Para isso, precisamos escolher as setas apropriadas, o que é menos trivial do que parece, neste caso.

[44] Pois sua construção se deve a Pavel Alexandroff.

[45] Ou **compactificação de um ponto** para pessoas menos saudosistas.

[46] Alternativamente, se X é localmente compacto, então X^+ é T_2 se, e somente se, X é T_2.

[47] Confira o Exercício 3.91.

O impulso natural, de considerar LCH e CHAUS como subcategorias completas de TOP, i.e., tomando setas como funções contínuas, não funciona: apenas com a continuidade de uma função $f: X \to Y$ não é possível garantir a continuidade da *única* extensão $f^+: X^+ \to Y^+$, i.e., aquela que faz $f^+(x) := f(x)$ para cada $x \in X$ e $f^+(\infty_X) := \infty_Y$. A fim de que tal extensão f^+ seja contínua, é necessário e suficiente[48] que $f^{-1}[K] \subseteq X$ seja compacto para todo subespaço compacto $K \subseteq Y$, justamente a classe de funções conhecidas como *próprias*.

Definição 3.3.15. Uma função contínua $f: X \to Y$ entre espaços topológicos (quaisquer) X e Y é **própria** se a pré-imagem de subespaços compactos é compacta. ¶

Exercício 3.85. Mostre que Id_X é própria e $f \circ g$ é própria sempre que as funções f e g são próprias. ■

Agora, não é difícil se convencer de que se X e Y são espaços localmente compactos de Hausdorff e $f: X \to Y$ é uma função própria, então $f^+: X^+ \to Y^+$ definida como acima é contínua, o que faz da correspondência $(\bullet)^+: \mathrm{LCH} \to \mathrm{CHAUS}$ um funtor[49]. Em particular, como homeomorfismos são funções próprias, segue que se X e Y são espaços localmente compactos de Hausdorff homeomorfos, então X^+ e Y^+ também são homeomorfos. △

Exemplo 3.3.16 (Esferas e produtos)**.** É claro que o *produto finito de espaços de Hausdorff localmente compactos é localmente compacto* (Exercício 3.95). Em particular, $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, o que permite considerar a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$. Explicitamente, ela se obtém com a adição de um ponto $\infty \notin \mathbb{R}^n$, cujos abertos são complementares de subespaços fechados e limitados de $\mathbb{R}^n$. O leitor interessado em interpretações geométricas deve procurar por *projeção estereográfica* – no Google, não aqui. ▲

Exemplo 3.3.17. Já sabemos que um ordinal $\alpha = [0, \alpha)$ é compacto se, e somente se, α é sucessor (Proposição 1.2.83). Dito isso, se $\alpha > 0$ é um ordinal limite, então $[0, \alpha]$ é *a* compactificação de Alexandroff de $[0, \alpha)$. De fato, mais geralmente, vale a seguinte

Proposição 3.3.18. *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $p \in X$ um ponto qualquer. Se p não é isolado, então X é a compactificação de Alexandroff de $X \setminus \{p\}$.*

Demonstração. O espaço $D := X \setminus \{p\}$ é denso em X pois p não é isolado. Agora, como X é compacto de Hausdorff, segue que D é aberto em X e, pelo Exercício 3.91, é localmente compacto. Basta notar então que a correspondência óbvia entre X e D^+ é um homeomorfismo. □

Em particular, para pontos $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b < c$, tem-se $[a, b)^+ = [a, b]$ e $([a, b) \cup (b, c])^+ = [a, c]$. O leitor não deve ter dificuldades em notar que se $(x_n)_{n \in \omega}$ é uma sequência que converge para $x \in X$ num espaço de Hausdorff X, então $\{x_n : n \in \omega\} \cup \{x\}$ é a compactificação de Alexandroff de $\{x_n : n \in \omega\}$. ▲

Observação 3.3.19 (Lema de Urysohn em LCH?)**.** É comum que textos *intermediários* de Análise (Funcional) enunciem *um Lema de Urysohn* para espaços localmente compactos de Hausdorff[50], mas restrito à tarefa de separar compactos de fechados. Fazer a mesma coisa aqui seria *quase* redundante.

[48] Eu odeio essa expressão.

[49] Onde as setas de LCH são as funções próprias e as setas de CHAUS são funções contínuas. O categorista entusiasta fica a cargo de mostrar que $\mathrm{Id}_X^+ = \mathrm{Id}_{X^+}$ e $(f \circ g)^+ = f^+ \circ g^+$.

[50] Vide, por exemplo, Folland [43, 4.32] ou Rudin [98, 2.12].

Com efeito, o Corolário 3.3.10 garante a condição de Tychonoff para espaços localmente compactos de Hausdorff e, por sua vez, já provamos análogos do Lema de Urysohn e do Teorema de Tietze para espaços de Tychonoff: são, respectivamente, a Proposição 2.2.11 e o Corolário 2.2.32. Apesar disso, é bem mais fácil demonstrar tais resultados com a hipótese de compacidade local, razão pela qual convém enunciar e provar os dois próximos resultados.

Proposição 3.3.20 (Lema de Urysohn, para LCH)**.** *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff, $K \subseteq X$ um subespaço compacto e $F \subseteq X$ um subespaço fechado. Se $K \cap F = \emptyset$, então existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ com $f(x) = 1$ para todo $x \in K$ e $f(x) = 0$ para todo $x \in F$.*

Demonstração. A compactificação de Alexandroff de X é um espaço compacto de Hausdorff e, portanto, normal, o que permite usar o Lema de Urysohn clássico: pela condição de Hausdorff, K é um subespaço fechado de X^+; além disso, existe um subespaço fechado $G \subseteq X^+$ com $F = G \cap X$; como $|X^+ \setminus X| = 1$ e $K \cap F = \emptyset$ com $F \subsetneq X$, segue que $K \cap G = \emptyset$. Agora, o Lema de Urysohn conjura uma função contínua $\varphi\colon X^+ \to [0,1]$ satisfazendo $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in K$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in G$. Portanto, basta fazer $f := \varphi|_X$. □

Demonstração alternativa (*para quem não gosta de compactificações*). Com $U := X \setminus F$, note que K tem uma vizinhança V com $\overline{V} \subseteq U$ e $\overline{V}$ compacto (Exercício 3.94). Como $\overline{V}$ é normal, existe uma função contínua $g\colon \overline{V} \to [0,1]$ satisfazendo $g(x) = 1$ para todo $x \in K$ e $g(x) = 0$ para todo $x \in \overline{V} \setminus V$. Daí, basta definir $f\colon X \to [0,1]$ fazendo $f(x) := g(x)$ para $x \in \overline{V}$ e $f(x) := 0$ caso contrário. O leitor fica a cargo de provar a continuidade de f. □

Proposição 3.3.21 (Extensão de Tietze, para LCH)**.** *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff, $K \subseteq X$ um subespaço compacto e $f\colon K \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua, então existe uma função contínua $F\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $F|_K = f$. Além disso, pode-se tomar F de modo que exista um subespaço compacto K' tal que $F(x) = 0$ para todo $x \notin K'$.*

Demonstração. Novamente, X^+ é um espaço normal que contém o compacto K. Logo, pelo Teorema da Extensão de Tietze (Corolário 2.2.29) existe $\varphi\colon X^+ \to \mathbb{R}$ contínua com $\varphi|_K = f$, de modo que basta tomar $F := \varphi|_X$. Para o final, o Exercício 3.94 garante uma vizinhança V de K com $K' := \overline{V}$ compacto, o que permite substituir, se necessário, a função F por $F \cdot G$, onde G é uma função como na proposição anterior com respeito ao compacto K e ao fechado $X \setminus V$. □

Vale frisar que embora a última proposição seja, essencialmente, uma consequência do *verdadeiro* Teorema da Extensão de Tietze, a garantia de um compacto fora do qual a extensão F se anula, *a.k.a. suporte compacto*, é uma peculiaridade bastante útil dos espaços localmente compactos. △

Exemplo 3.3.22 (Teoria de *fins*)**.** Em vista do que se discutiu até aqui, é possível *compactificar* a reta com um ponto, via Alexandroff, ou com dois pontos, como em $[-\infty, +\infty]$. Seria possível *compactificar* a reta com *três* pontos? Não.

De fato, note que *se X é uma compactificação de $\mathbb{R}$ e $p \in X \setminus \mathbb{R}$, então toda vizinhança $U \subseteq X$ de p é tal que $U \cap \mathbb{R}$ é ilimitado*: caso contrário, então tomando um aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ e $\overline{V} \subseteq U$, resulta que $\overline{V} \cap \mathbb{R}$ é compacto e, portanto, fechado em X, o que contraria a densidade de $\mathbb{R}$ em X, posto que daí $p \in V \setminus (\overline{V} \cap \mathbb{R})$. Em posse disso, note que se X é uma compactificação de $\mathbb{R}$ com $|X \setminus \mathbb{R}| = n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, digamos $X \setminus \mathbb{R} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, então $n < 3$. Com efeito, como X é de Hausdorff, existem abertos $U_1, \ldots, U_n \subseteq X$, dois a dois disjuntos, com $x_i \in U_i$ para cada $i \leq n$. Pelo que se observou acima, cada $U_i \cap \mathbb{R}$ deve ser ilimitado em $\mathbb{R}$, o que impossibilita que se tenha $n \geq 3$: em $\mathbb{R}$, há apenas duas *direções* para as quais se *ilimitar*, $-\infty$ ou $+\infty$.

Em geral, pode-se provar que *para um espaço de Hausdorff X, são equivalentes*:

1. *X admite uma compactificação K com $|K \setminus X| = n$ e $n \in \mathbb{N}$;*
2. *X é localmente compacto e contém um subespaço compacto C tal que $X \setminus C$ é reunião de n abertos dois a dois disjuntos, digamos $A_1, \ldots, A_n$, tais que $C \cup A_i$ não é compacto para cada $i \leq n$.*

O leitor interessado no resultado acima, devido a Magill [69], pode encontrar um esboço da prova no trabalho de Susan J. Klein[51]. Secretamente, esse tipo de problema também se relaciona com a noção de *fim*, que aqui ganha um sentido topológico preciso.

Definição 3.3.23. Um espaço topológico X é chamado de **hemicompacto**[52] se existe uma família enumerável $\mathcal{K}$ de subespaços compactos de X tal que para todo subespaço compacto $C \subseteq X$ existe $K \in \mathcal{K}$ com $C \subseteq K$. ¶

Ao se escrever a família $\mathcal{K}$ anterior como $\mathcal{K} := \{K_n : n \in \omega\}$, não é difícil perceber que não há perda de generalidade em supor $\mathcal{K}$ crescente, no sentido de que $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo n. Neste cenário, um **fim** é uma sequência decrescente infinita $(C_n)_{n\in\omega}$ onde cada C_n é uma componente conexa de $X \setminus K_n$. Daí, a *compactificação dos fins* de X é o conjunto $\mathcal{F}(X) := X \cup \mathcal{E}(X)$, onde $\mathcal{E}(X)$ denota a família dos fins de X, com $A \subseteq \mathcal{F}(X)$ declarado aberto se, e somente se, $A \subseteq X$ é aberto na topologia oriunda de X ou para cada $e \in \mathcal{E}(X) \cap A$ existe um aberto $V \subseteq X$ com $e_i \subseteq V \subseteq A$ para algum i.

A letra $\mathcal{F}$ utilizada acima faz menção a Hans Freudenthal, que introduziu esse tipo de compactificação nos anos 30. No caso de $\mathbb{R}$, a família $\mathcal{K}$ de compactos pode ser tomada como $\{[-n, n] : n \in \mathbb{N}\}$, e não é difícil se convencer de que o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ obtido é, precisamente, a reta estendida. O leitor interessado em mais detalhes, bem como em referências, pode conferir a página correspondente no ncatlab[53]. Infelizmente, tal tópico é delicado demais para ser tratado com mais detalhes por aqui. ▲

O exemplo anterior pode levar o leitor a conclusões equivocadas sobre as compactificações de $\mathbb{R}$. O que realmente se mostrou foi que, se X é uma compactificação de $\mathbb{R}$ e $X \setminus \mathbb{R}$ é finito, então $|X \setminus \mathbb{R}| \in \{1, 2\}$. Porém, isto não exclui a possibilidade de que existam compactificações que acrescentem infinitos pontos. Na verdade, como veremos na próxima subseção, todas as outras compactificações de $\mathbb{R}$ introduzem, pelo menos, $\mathfrak{c}$ pontos.

[51] http://susanjkleinart.com/compactification/Wsr5.pdf.

[52] Note que todo espaço hemicompacto é σ-compacto, mas não vale a recíproca: pode parecer estranho, mas $\mathbb{Q}$ não é hemicompacto (Exercício 3.99).

[53] https://ncatlab.org/nlab/show/end+compactification

3.3.2 Čech, Stone e extensões de funções contínuas

Enquanto a subseção anterior tratou da *menor compactificação* de um espaço de Tychonoff, *factível* na classe dos espaços localmente compactos, a presente subseção apresentará a *maior compactificação* de um espaço de Tychonoff – sem condições adicionais. Para tanto, recordemo-nos de que o distante Teorema 2.2.9 mostrou que um espaço de Hausdorff X é completamente regular se, e somente se, existe um conjunto $\mathcal{I}$ tal que $X \subseteq [0,1]^{\mathcal{I}}$, onde "$\subseteq$" indica um *mergulho topológico*.

Mais precisamente, convém relembrar que o conjunto $\mathcal{I}$ foi tomado como sendo $\mathcal{C}(X,I)$, com $I := [0,1]$, enquanto o mergulho foi dado pela *avaliação diagonal*

$$\begin{aligned} \Delta_X \colon X &\to [0,1]^{\mathcal{C}(X,I)} \\ x &\mapsto (f(x))_{f\in\mathcal{C}(X,I)} \end{aligned}$$

que é contínua por satisfazer $\pi_f \circ \Delta_X = f$ para toda $f \in \mathcal{C}(X,I)$, injetiva por $\mathcal{C}(X,I)$ *separar os pontos* de X e fechada por $\mathcal{C}(X,I)$ *separar pontos de fechados* (Exercício 2.57), donde a Proposição 1.1.111 garante que Δ_X é um mergulho.

Definição 3.3.24. Para um espaço de Tychonoff X, diz-se que $(\beta X, e) \in \mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$ é *a* **compactificação de Stone-Čech** de X se para todo espaço compacto de Hausdorff K e toda função contínua $f\colon X \to K$, existir uma única função contínua $F\colon \beta X \to K$ com $F \circ e = f$, ou apenas $F|_X = f$ se o mergulho $e\colon X \to \beta X$ for a inclusão. ¶

Como já deve estar claro nessa altura da vida do leitor, *duas* compactificações de Stone-Čech de X, *se existirem*, são homeomorfas: isto segue pela condição de Hausdorff aliada à densidade de X, como (implicitamente) feito no Exercício 3.81. Além disso, pelo modo como se definiu a ordem parcial $\preceq$ em $\mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$, se uma compactificação $(K', e') \in \mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$ for a compactificação de Stone-Čech de X, então (K', e') será o $\preceq$-maior elemento de $\mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$. Mais adiante, veremos que vale a volta.

Exercício 3.86. Convença-se de que as afirmações acima estão certas. Dica: pode ser útil rever a Definição 3.3.6. ■

Há diversas formas de demonstrar a existência de compactificações de Stone-Čech. Neste texto, o caminho mais conveniente é usar o mergulho recordado acima juntamente com o Teorema de Tychonoff[54].

Teorema 3.3.25. *Todo espaço de Tychonoff tem uma compactificação de Stone-Čech.*

Demonstração. Pelo Teorema de Tychonoff, o espaço $Z := I^{\mathcal{C}(X,I)}$ é compacto, enquanto a hipótese de X ser de Tychonoff garante que $\Delta_X \colon X \to Z$ é um mergulho. Logo, $\beta X := \overline{\Delta_X[X]}$ é um subespaço compacto de Z que contém (uma cópia de) X como subespaço denso, mostrando que $(\beta X, \Delta_X) \in \mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$. O teorema estará demonstrado se provarmos que $(\beta X, \Delta_X)$ tem a propriedade universal desejada.

Ora, dado um compacto de Hausdorff K dotado de uma função contínua $f\colon X \to K$, tem-se $\varphi \circ f \in \mathcal{C}(X,I)$ para toda função $\varphi \in \mathcal{C}(K,I)$, o que permite definir a correspondência $F\colon I^{\mathcal{C}(X,I)} \to I^{\mathcal{C}(K,I)}$ que associa cada $\lambda \in I^{\mathcal{C}(X,I)}$ à função $F(\lambda)\colon \mathcal{C}(K,I) \to I$ dada por $F(\lambda)(\varphi) := \lambda(\varphi \circ f)$. Após alguma reflexão, não é difícil se convencer de que F *induz* a função βf procurada. De fato:

[54]Restrito aos espaços de Hausdorff (Exercício 3.105).

✓ F é contínua pois $\pi_\varphi \circ F = \pi_{\varphi\circ f}$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{C}(K, I)$ (Proposição 1.1.86), já que para $\lambda := (\lambda(\psi))_{\psi\in\mathcal{C}(X,I)}$, tem-se $F(\lambda) := (\lambda(\varphi \circ f))_{\varphi\in\mathcal{C}(K,I)}$ e, consequentemente,

$$\pi_\varphi(F(\lambda)) = \lambda(\varphi \circ f) = \pi_{\varphi\circ f}(\lambda);$$

✓ F é *extensão* pois, para quaisquer $x \in X$ e $\varphi \in \mathcal{C}(K, I)$, ocorre

$$F(\Delta_X(x))(\varphi) := \Delta_X(x)(\varphi \circ f) := (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) =: \Delta_K(f(x))(\varphi)$$

i.e., $F(\Delta_X(x)) = \Delta_K(f(x))$.

Por fim, note que $F[\beta X] = F\left[\overline{\Delta_X[X]}\right] \subseteq \overline{F[\Delta_X[X]]} = \overline{\Delta_K[f[X]]} \subseteq \overline{\Delta_K[K]} = \Delta_K[K]$, posto que K é compacto. Logo, $\beta := \Delta_K^{-1} \circ F|_{\beta X}$ cumpre as exigências da propriedade universal, onde Δ_K^{-1} indica a inversa do homeomorfismo $\Delta_K : K \to \Delta_K[K]$. □

Exercício 3.87. Revise a demonstração anterior até ter certeza de que a entendeu. Se precisar, use o diagrama a seguir como guia moral. ■

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[dl, "\varphi\circ f=\psi"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\Delta_K\circ f"] & \Delta_X[X] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "F|_{\Delta_X[X]}"] & \overline{\Delta_X[X]} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "F|_{\overline{\Delta_X[X]}}"] & I^{\mathcal{C}(X,I)} \arrow[d, "F"] \arrow[dr, "\pi_{\varphi\circ f}"] & \\
I & K \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\Delta_K"] & \Delta_K[K] \arrow[r, equal] \arrow[l, bend left, "\Delta_K^{-1}"] & \overline{\Delta_K[K]} \arrow[r, "i"] & I^{\mathcal{C}(K,I)} \arrow[r, "\pi_\varphi"] & I
\end{tikzcd}$$

Observação 3.3.26 (Extensões contínuas)**.** Dado que, na prática, tanto X quanto K são homeomorfos às suas imagens pelos mergulhos diagonais, pode-se supor que X e K *sempre foram* $\Delta_X[X]$ e $\Delta_K[K]$, respectivamente, bem como f *sempre foi* a função $\Delta_X[X] \to \Delta_K[K]$ correspondente (o que, sem identificações, corresponde a $\Delta_K \circ f$). Neste cenário simplificado, a função $F|_{\overline{X}} : \overline{X} \to K$ se revela, explicitamente, a única extensão contínua da função $f : X \to K$. Além disso, dada a importância do intervalo $[0, 1]$ na demonstração, o leitor não deve se surpreender em saber que bastaria garantir a propriedade universal que caracteriza βX para o compacto $K := [0, 1]$ ou, alternativamente, que toda função contínua e limitada $f : X \to \mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua $\beta f : \beta X \to \mathbb{R}$. Esse tipo de simplificação será feito sem maiores cuidados daqui em diante. Para mais detalhes, confira os Exercícios 3.100 e 3.101. △

Exemplo 3.3.27. Um argumento similar aos anteriores pode ser usado para demonstrar que se $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{C_{OMP}}(X)$, com $\mathcal{K} \neq \emptyset$, então existe uma compactificação $C \in \mathrm{C_{OMP}}(X)$ que se comporta como $\sup \mathcal{K}$: basta tomar o fecho da imagem de X pelo mergulho $X \to \prod_{K\in\mathcal{K}} K$. Em particular, segue que compactificações maximais existem mesmo num mundo em que ninguém pensou na *propriedade universal* da extensão de funções contínuas, que caracteriza a compactificação de Stone-Čech. Por isso é bastante natural se perguntar como uma *caracterização* se relaciona com a outra.

Como a *maximalidade*[55] de βX é clara, é mais pertinente investigar porque uma compactificação máxima é de Stone-Čech: ora, se $(mX, e) \in \mathrm{C}_{\mathrm{OMP}}(X)$ é a maior compactificação de X e $f\colon X \to K$ é uma função contínua, com K compacto de Hausdorff, então $(e, f)\colon X \to mX \times K$ é um mergulho, o que faz de $cX := \overline{(e, f)[X]}$ uma compactificação de X; logo, existe uma função contínua $g\colon mX \to cX$ satisfazendo $g \circ e = (e, f)$, donde não é difícil perceber que $F := p \circ g$ é a extensão procurada de f, onde p é a projeção $mX \times K \to K$. ▲

Em certo sentido, a compactificação de Stone-Čech de X permite *realizar* o conjunto $\mathcal{C}^*(X)$ como sendo $\mathcal{C}(\beta X)$: como toda função contínua e limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ se estende de forma única a uma função contínua $\beta f\colon \beta X \to \mathbb{R}$, a densidade de X em βX aliada à condição de Hausdorff garante que a correspondência $F \mapsto F|_X$ determina uma bijeção $\mathcal{C}(\beta X) \to \mathcal{C}^*(X)$.

Exemplo 3.3.28. Dado um espaço discreto D, costuma-se escrever $l_\infty(D)$ em vez de $\mathcal{B}(D)$ para denotar a família das funções limitadas da forma $D \to \mathbb{R}$. Neste caso, a correspondência anterior mostra que $l_\infty(D)$ está em bijeção com $\mathcal{C}(\beta D)$. Em particular, $l_\infty := l_\infty(\omega)$ e $\mathcal{C}(\beta\omega)$ têm a mesma cardinalidade. ▲

Observação 3.3.29. Na verdade, a bijeção entre $\mathcal{C}^*(X)$ e $\mathcal{C}(\beta X)$ não preserva apenas cardinalidade. Em geral, conjuntos da forma $\mathcal{C}^*(Y)$ admitem uma norma $\|\cdot\|_\infty$ que promove $(\mathcal{C}^*(Y), \|\cdot\|_\infty)$ ao patamar de *espaço de Banach*. Com isso dito, a bijeção $F \mapsto F|_X$ permite provar que $\mathcal{C}^*(X)$ e $\mathcal{C}(\beta X)$ são *isometricamente isomorfos*, no sentido de que a bijeção é compatível com a estrutura vetorial e métrica dos espaços. Isto será explorado com mais calma no capítulo sobre espaços de funções. △

Exemplo 3.3.30. Diferente da compactificação de Alexandroff, βX pode se apresentar de formas *imprevisíveis* a depender do X. É o caso de $X := \omega_1$, para o qual ocorre $\beta X = [0, \omega_1]$. Como $[0, \omega_1]$ é, claramente, uma compactificação de ω_1, basta mostrar que $[0, \omega_1]$ tem a propriedade universal e, para isso, é suficiente considerar $K := [0, 1]$ (pelo Exercício 3.100): isto segue pois se $f\colon \omega_1 \to [0, 1]$ é contínua, então existe $\alpha < \omega_1$ com $f(\beta) = f(\alpha)$ para todo $\beta \geq \alpha$ (Exercício 1.245), o que permite definir $F(\omega_1) := f(\alpha)$. ▲

O exemplo acima pode levar o leitor a pensar que $[0, \omega]$ seja a compactificação de Stone-Čech de ω, porém isto está longe de ser verdade. Em geral, quando D é um espaço discreto (e infinito), βD se realiza como a *compactificação de Salbany* introduzida no começo desta seção – o leitor pode relembrar algumas notações na demonstração do Teorema 3.3.3.

Com efeito, neste caso, o espaço de ultrafiltros $\mathrm{ult}\,(D)$ com a topologia gerada pelos subconjuntos da forma $U^* := \{\mathfrak{u} \in \mathrm{ult}\,(D) : U \in \mathfrak{u}\}$, com $U \subseteq D$, é de Hausdorff e tem a propriedade da extensão de funções contínuas.

(i) Para $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathrm{ult}\,(D)$ distintos, existe $U \in \mathfrak{u} \setminus \mathfrak{v}$, donde segue que U^* e $V^* := (D \setminus U)^*$ são abertos de $\mathrm{ult}\,(D)$, disjuntos, com $\mathfrak{u} \in U^*$ e $\mathfrak{v} \in V^*$, mostrando que $\mathrm{ult}\,(D)$ é um espaço de Hausdorff.

[55] No sentido de ser elemento máximo, e não de ser apenas maximal. Infelizmente, a linguagem natural tem dessas coisas...

(ii) Para mostrar a propriedade de extensão, considera-se a cópia $\mathcal{D} \subseteq \operatorname{ult}(D)$ de D em $\operatorname{ult}(D)$ dada pela correspondência $x \mapsto \mathfrak{u}_x$, onde $\mathfrak{u}_x := \{U \subseteq D : x \in D\}$. Agora, dada uma função $f\colon \mathcal{D} \to [0,1]$, cada subconjunto $A \subseteq D$ induz o subconjunto $A' := \{\mathfrak{u}_x : x \in A\}$ em $\mathcal{D}$. O grande *Katzensprung* é observar que $\mathcal{F}(\mathfrak{u}) := \bigcap_{A \in \mathfrak{u}} \overline{f[A']}$ é um conjunto com, precisamente, um elemento, por meio do qual se define a extensão desejada de f.

Demonstração do Katzensprung. Como $\mathfrak{u}$ é um filtro, $\left\{\overline{f[A']} : A \in \mathfrak{u}\right\}$ é uma família de fechados de $[0,1]$ com a p.i.f., acarretando $\mathcal{F}(\mathfrak{u}) \neq \emptyset$. Por sua vez, se $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(\mathfrak{u})$ fossem distintos, com $|\alpha - \beta| > 2r > 0$ para algum $r > 0$, então $T := \{x \in D : |f(\mathfrak{u}_x) - \alpha| < r\}$ seria tal que $T \in \mathfrak{u}$ ou $D \setminus T \in \mathfrak{u}$, e nenhum dos casos pode ocorrer: o primeiro viola a escolha de β, já que $\beta \notin \overline{f[T']}$, enquanto o segundo contraria a escolha de α, pois $\alpha \notin \overline{f\left[(D \setminus T)'\right]}$. □

Desse modo, para cada $\mathfrak{u} \in \operatorname{ult}(D)$ existe um único $F(\mathfrak{u}) \in [0,1]$ com $\mathcal{F}(\mathfrak{u}) = \{F(\mathfrak{u})\}$, o que permite definir $F\colon \operatorname{ult}(D) \to [0,1]$, que mostraremos ser uma extensão contínua da função f:

- ✓ $F(\mathfrak{u}_x) = f(\mathfrak{u}_x)$ pois $f(\mathfrak{u}_x) \in \overline{f[A']}$ para todo $A \in \mathfrak{u}_x$, em decorrência das definições de $\mathfrak{u}_x$ e A', bem como pela cardinalidade de $\mathcal{F}(\mathfrak{u}_x)$;
- ✓ dados $\mathfrak{u} \in \operatorname{ult}(D)$ e $\varepsilon > 0$, o conjunto $U := \{x \in D : |F(\mathfrak{u}) - f(\mathfrak{u}_x)| < \varepsilon\}$ é tal que $U \in \mathfrak{u}$, já que o contrário traria $F(\mathfrak{u}) \in \overline{f\left[(D \setminus U)'\right]}$, o que não pode ocorrer. Desse modo, $U^* \subseteq \operatorname{ult}(D)$ é um aberto tal que $\mathfrak{u} \in U^*$ e, se $\mathfrak{v} \in U^*$, então $F(\mathfrak{v}) \in \overline{f[U']}$ por construção e, portanto, $|F(\mathfrak{u}) - F(\mathfrak{v})| < 2\varepsilon$, como queríamos.

Em resumo, provou-se o

Teorema 3.3.31. *Se D é um discreto infinito, então $\beta D = \operatorname{ult}(D)$ com a topologia de Salbany.*

Em particular, segue daí que $\beta\omega$ é um espaço *muito grande*: mais precisamente, $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$ em virtude do Exercício 1.326, que determina a cardinalidade do conjunto dos ultrafiltros[56] de X infinito como sendo $2^{2^{|X|}}$. Curiosamente, isso permite ver que $\beta\mathbb{R}$ também está longe de ser qualquer uma das compactificações já explicitadas de $\mathbb{R}$:

Exercício 3.88. Mostre que $|\beta\mathbb{R}| = |\beta\omega|$. Dica: estenda uma função marota da forma $\omega \to \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \beta\mathbb{R}$ para ver que $|\beta\mathbb{R}| \leq |\beta\omega|$; para a outra desigualdade, use o Teorema de Tietze para mostrar que o fecho de ω em $\beta\mathbb{R}$ é $\beta\omega$. ■

O argumento acima pode ser reaproveitado para mostrar que os fechados de $\beta\omega$ ou são finitos ou têm cardinalidade $2^{\mathfrak{c}}$. Mais precisamente:

Proposição 3.3.32. *Se $F \subseteq \beta\omega$ é um fechado infinito, então F contém um subespaço homeomorfo a $\beta\omega$.*

Demonstração. Como $\beta\omega$ é um espaço de Hausdorff, existe $D \subseteq F$ um subespaço de F, discreto infinito e enumerável (Exercício 2.20). Agora, por $X := \omega \cup D$ ser enumerável, segue que X é normal: por exemplo, X é regular e de Lindelöf, logo paracompacto e de Hausdorff e, portanto, normal. Daí, por ω ser discreto, segue que D é fechado em X, donde o Teorema de Tietze permite estender toda função (contínua e) limitada da forma $f\colon D \to \mathbb{R}$ a uma função (contínua e) limitada da forma $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$. Ocorre que φ se estende a uma função da forma $\beta\varphi\colon \beta\omega \to \mathbb{R}$, em virtude do

[56] Caso prefira evitar o Exercício 1.326, confira o Exercício E.45.

Katzensprung. *Em geral, se $X \subseteq Y \subseteq \beta X$, então $\beta Y = \beta X$.*

Demonstração. É claro que $\overline{Y} = \beta X$, mostrando que βX é uma compactificação de Y. Agora, se $f\colon Y \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então $g := f|_X$ ainda é contínua e limitada, donde segue que existe uma única extensão $\beta g\colon \beta X \to \mathbb{R}$. Agora, basta notar que $\beta g(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$: como X é denso em βX, existe uma *net* $(x_d)_d$ em X com $x_d \to y$, e daí a continuidade de βg acarreta $\beta g(x_d) \to \beta g(y)$, enquanto a condição de extensão assegura $\beta g(x_d) = f(x_d)$, com $f(x_d) \to f(y)$ pela continuidade de f. □

Por fim, a restrição de $\beta\varphi$ ao compacto $\overline{D} \subseteq F$ mostra que $\overline{D}$ *é* a compactificação de Stone-Čech de D, com $\overline{D}$ e $\beta\omega$ homeomorfos em virtude de D ser discreto, infinito e enumerável, i.e., D é homeomorfo a ω. □

Exercício 3.89. Mostre que a correspondência $(f\colon X \to Y) \mapsto (\beta f\colon \beta X \to \beta Y)$ define um funtor (covariante) da forma $\beta\colon \mathrm{TYCH} \to \mathrm{CHAUS}$, onde TYCH denota a categoria dos espaços de Tychonoff. Conclua que se X e Y são espaços de Tychonoff homeomorfos, então βX e βY são homeomorfos. ■

Corolário 3.3.33. *O espaço $\beta\omega$ não é sequencialmente compacto. Em particular, $\beta\omega$ não é metrizável.*

Exercício 3.90. Prove o corolário anterior. ■

Exemplo 3.3.34 (Resíduos e compactificações de $\mathbb{R}$)**.** Costuma-se chamar de **resíduo**[57] **de** X numa compactificação K ao subconjunto $K \setminus X$. Em particular, quando $K := \beta X$, escreve-se X^* para denotar o resíduo de X em βX. Por incrível que pareça, resíduos podem fornecer informações relevantes sobre seus espaços.

Um caso bastante ilustrativo se observa com a análise de $\mathbb{R}^* := \beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$. Pode-se mostrar (Exercício 3.104) que $\mathbb{R}^*$ tem exatamente duas componentes conexas. Com isso, se K é *uma* compactificação de $\mathbb{R}$, então a inclusão $\mathbb{R} \to K$ se estende a função contínua e sobrejetora $\beta X \to K$, donde o próximo teorema garante que $K \setminus \mathbb{R}$ é imagem de $\mathbb{R}^*$.

Teorema 3.3.35. *Se $\varphi\colon E \to Y$ é uma função contínua, com E de Hausdorff, tal que $\varphi|_X$ é um mergulho para algum denso $X \subseteq E$, então $\varphi[E \setminus X] \subseteq Y \setminus \varphi[X]$.*

Demonstração. Suponha que $\varphi(p) = \varphi(x)$ para certos $p \in E \setminus X$ e $x \in X$. Seja então $V \subseteq E$ um aberto com $x \in V$ e $p \notin \overline{V}$. Como $V \cap X$ é uma vizinhança de x em X, segue que $\varphi[V \cap X]$ é uma vizinhança de $\varphi(x)$ em $\varphi[X]$, i.e., $\varphi[V \cap X] = W \cap \varphi[X]$ para alguma vizinhança $W \subseteq Y$ de $\varphi(x)$. Agora, W é uma vizinhança de $\varphi(p)$ que atesta a não-continuidade de φ em p: de fato, se $U \subseteq E$ é uma vizinhança de p, então a densidade de X garante um ponto $q \in X \cap U \setminus \overline{V}$ e, pelo modo como se tomou W, deve ocorrer $\varphi(q) \notin W$. □

E daí? Ora, como $K \setminus \mathbb{R}$ é imagem contínua de $\mathbb{R}^*$, segue que $K \setminus \mathbb{R}$ tem, no máximo, duas componentes conexas (Exercício 2.94). Logo, o Corolário 2.3.14 garante que se $K \setminus \mathbb{R}$ for finito, então $0 < |K \setminus \mathbb{R}| \leq 2$, enquanto que se $K \setminus \mathbb{R}$ for infinito, então $\mathfrak{c} \leq |K \setminus \mathbb{R}| \leq 2^{\mathfrak{c}}$ (onde a última desigualdade segue do Exercício 3.88 e do teorema anterior). O leitor pode cuidar dos detalhes. ▲

[57] Usualmente xingado de *remainder* ou *growth* em referências estrangeiras.

Dado o caráter introdutório deste texto, é conveniente encerrar a exposição por aqui. Leitores interessados em mais aspectos da compactificação de Stone-Čech encontrarão farto material no livro de R. Walker [110], inteiramente dedicado ao tema[58].

Exercícios complementares da seção

Exercício 3.91. Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $A \subseteq X$ um subconjunto. Mostre que se A é aberto, então A é localmente compacto. ■

Exercício 3.92. Seja X um espaço de Tychonoff. Mostre que X é localmente compacto se, e somente se, $\beta X \setminus X$ é fechado em βX. Dica: para a recíproca, considere $\beta X \to X^+$ e investigue a pré-imagem do *ponto* $\infty \in X^+$. ■

Exercício 3.93 (Prancha de Tychonoff[59])**.** Seja $X := [0,\omega] \times [0,\omega_1] \setminus \{(\omega,\omega_1)\}$, i.e., X é o produto $[0,\omega] \times [0,\omega_1]$ *sem ~~a quina~~* o par ordenado (ω,ω_1). Mostre que X é um espaço localmente compacto de Hausdorff que não é normal. Dica: use o exercício anterior para concluir a compacidade local; note que $[0,\omega) \times \{\omega_1\}$ e $\{\omega\} \times [0,\omega_1)$ são fechados disjuntos não separáveis por abertos disjuntos. ■

Exercício 3.94 (Compare com o Exercício 2.40)**.** Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff $K, U \subseteq X$ subespaços de X, com $K \subseteq U$. Mostre que se K é compacto e U é aberto, então existe um aberto $V \subseteq X$ tal que $K \subseteq V$, $\overline{V} \subseteq U$ com $\overline{V}$ compacto. ■

Exercício 3.95. Mostre que se X e Y são localmente compactos, então $X \times Y$ é localmente compacto.■

Exercício 3.96. Sejam X e Y espaços topológicos, com $f\colon X \to Y$ contínua e aberta. Mostre que se X é localmente compacto e f é sobre, então Y é localmente compacto. ■

Exercício 3.97. Para um espaço localmente compacto X, mostre que X é de Lindelöf se, e somente se, X é σ-compacto. ■

Exercício 3.98. Suponha que $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é localmente compacto. Mostre que X_i é localmente compacto para todo $i \in \mathcal{I}$ e, mais ainda, $\{i \in \mathcal{I} : X_i \text{ não é compacto}\}$ é finito. Dica: tome uma vizinhança compacta e lembre-se da definição dos abertos básicos de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. ■

Exercício 3.99. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é hemicompacto. Dica: se $\mathcal{K} := \{K_n : n \in \omega\}$ é família de subespaços compactos de $\mathbb{Q}$, então para cada $n \in \omega$ pode-se tomar pelo menos um ponto $x_n \in (0, \frac{1}{2^n}) \cap \mathbb{Q} \setminus K_n$. ■

Exercício 3.100. Sejam Y uma compactificação de um espaço de Tychonoff X. Mostre que são equivalentes:

i) Y é a compactificação de Stone-Čech de X;

ii) para toda função contínua $f\colon X \to [0,1]$ existe uma única função contínua $F\colon Y \to [0,1]$ satisfazendo $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Dica: para (ii) $\Rightarrow$ (i), observe que um espaço compacto de Hausdorff K pode ser visto como subespaço de $[0,1]^{\mathcal{I}}$ para algum $\mathcal{I}$, o que permite usar o item (ii) para cada $i \in \mathcal{I}$. ■

Exercício 3.101. Mostre uma compactificação Y de um espaço de Tychonoff X é a compactificação de Stone-Čech de X se, e somente se, para toda função contínua e limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$ existe uma única função contínua $F\colon Y \to \mathbb{R}$ tal que $F|_X = f$. ■

Exercício 3.102. Mostre que se X é espaço normal e $D \subseteq X$ é um fechado, discreto, infinito, então $|\beta X| \geq 2^{2^{|D|}}$. ■

Exercício 3.103. Seja X um espaço compacto de Hausdorff e $(A_n)_{n\in\omega}$ uma sequência decrescente de subconjuntos fechados e conexos. Mostre que $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ é conexo. Dica: suponha que não, e use a normalidade de X para obter uma contradição. ■

[58] O leitor interessado em aplicações mais diversificadas pode conferir o texto de Carothers [25], especificamente o Capítulo 16. Já os vanguardistas podem procurar pelos chamados *conjuntos condensados*, recentemente desenvolvidos por Peter Scholze.

[59] *Tychonoff's plank.*

Exercício 3.104. O objetivo deste exercício é mostrar que $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ tem duas componentes conexas.

a) Mostre que $\beta\mathbb{R} \setminus (-1, 1) = \beta(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))$. Dica: mostre que o primeiro tem a propriedade da extensão de funções contínuas referente a $X := \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

b) Mostre que se $I \subseteq X$ é um intervalo de $\mathbb{R}$, então $\beta I = \mathrm{cl}_{\beta X}(I)$.

c) Chame $F_0 := \mathrm{cl}_{\beta X}([1, +\infty))$ e $F_1 := \mathrm{cl}_{\beta X}((-\infty, -1])$. Mostre que $\beta X = F_0 \cup F_1$, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, com F_0 e F_1 conexos. Conclua que $\beta\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ tem duas componentes conexas.

d) Mostre que $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ tem duas componentes conexas. Dica: note que $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \beta\mathbb{R} \setminus (-n, n)$, e daí use o exercício anterior. ■

Exercício 3.105 (Pode ser conveniente conferir o Exercício 1.250)**.** Neste exercício veremos um roteiro para demonstrar as equivalências, em ZF, entre afirmações a seguir.

- **TK**: Teorema de Tychonoff restrito a produtos de espaços compactos de Hausdorff.
- **SČ**: *todo espaço de Tychonoff tem uma compactificação de Stone-Čech.*
- **TC**: Teorema de Tychonoff restrito a produtos do espaço $2 := \{0, 1\}$.

Atenção: ao longo deste roteiro, o uso do Axioma da Escolha está PROIBIDO.

a) Note que TK $\Rightarrow$ SČ já foi feito (Teorema 3.3.25).

b) Mostre que SČ $\Rightarrow$ TC. Dica: para qualquer conjunto X, 2^X é um espaço de Tychonoff com a topologia produto, donde SČ garante a existência de $\beta(2^X)$; como as projeções $\pi_x \colon 2^X \to 2$ são contínuas e 2 é compacto, elas se estendem continuamente de forma única a funções da forma $\beta\pi_x \colon \beta(2^X) \to 2$, o que permite definir uma função contínua e sobrejetora $\beta \colon \beta(2^X) \to 2^X$.

c) Use o Exercício 1.250 para concluir o restante. ■

Exercício 3.106 (For fun)**.** Assumindo SČ, prove diretamente o Teorema de Tychonoff para espaços compactos de Hausdorff. ■

Interlúdio

Antes de começar...

Embora um dos grandes méritos dos espaços topológicos seja viabilizar uma análise *qualitativa* e ~~sobretudo~~ não-numérica das questões que envolvem convergência, não é completamente honesto suprimir uma discussão séria a respeito das noções de *distância*.

A princípio, a estrutura topológica de um espaço topológico é capaz de decidir *apenas* se, digamos, uma *net* em X converge ou não para um ponto do espaço[1]. Por outro lado, a discussão acerca de uma determinada distância, digamos r, exige um critério capaz de decidir, para qualquer par de pontos (x, y) em $X \times X$, se a distância entre x e y é menor, maior ou igual a r.

Um *espaço uniforme* é um *meio-termo* entre espaços métricos e topológicos no qual as noções de distância ainda podem ser tratadas de modo qualitativo. Como a distância independe de referenciais, em tais espaços passa a fazer sentido a discussão de convergências uniformes, bem como de sequências de Cauchy[2] – temas adorados por 10 a cada 5 analistas.

O objetivo deste interlúdio é apresentar o maravilhoso mundo das *uniformidades*. Não acidentalmente, a maioria dos assuntos abordados na Parte II depende (em maior ou menor grau) das considerações que serão feitas a seguir. Além disso, o leitor com fixação por métricas encontrará aqui o ambiente ideal para discutir épsilons e deltas.

[1] E o leitor não deve entender isso como restritivo, já que as *nets* convergentes determinam a topologia.
[2] Além de filtros e *nets* de Cauchy.

Capítulo 4

Distâncias sem números

Neste capítulo, serão apresentados os espaços nos quais faz sentido discutir convergência e continuidade sem um *referencial*, i.e., no qual existe uma noção *razoável* de distância. Porém, tudo isso será feito sem apelar, *explicitamente*, para a reta real[1].

4.1 A categoria dos espaços uniformes

Uma pseudométrica $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ sobre um conjunto X, como já sabemos, determina o número real $d(x, y)$ para cada par de pontos $(x, y) \in X \times X$, que se entende como a distância entre x e y. No entanto, o *valor exato* de $d(x, y)$ não costuma importar: geralmente, basta saber que $d(x, y) < r$ para algum $r > 0$.

Em outras palavras, é suficiente saber quais pontos de $X \times X$ pertencem à *faixa*

$$E_r := \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < r\} \tag{4.1}$$

para cada $r > 0$. A ideia que subjaz a definição de *espaço uniforme* consiste em considerar uma família $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ que se comporte de maneira semelhante à família $\mathcal{E} := \{E_r : r > 0\}$ das faixas definidas acima.

Observação 4.1.1. Assim como Engelking [39], o leitor pode escrever $d(x, y) < U$ para indicar que $(x, y) \in U$ para $U \in \mathcal{U}$, a fim de deixar a coisa toda psicologicamente explícita, embora simbolicamente questionável. △

Para entender quais exigências devem ser feitas sobre a família $\mathcal{U}$, costuma ser útil analisar com mais calma a coleção $\mathcal{E}$ de faixas definida acima. Mesmo as trivialidades escondem informações importantes. Por exemplo, uma vez que $d(x, x) = 0$ sempre ocorre, tem-se a inclusão

$$\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\} \subseteq E_r$$

para todo $r > 0$. Analogamente, nota-se que $\mathcal{E}$ é um pré-filtro em $X \times X$: de fato, para $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{E}$, tem-se $\Delta_X \subseteq E_{\min\{\alpha,\beta\}} \subseteq E_\alpha \cap E_\beta$.

Definição 4.1.2. Fixado um conjunto X, diremos que um pré-filtro $\mathcal{U}$ em $X \times X$ é *uniformemente razoável* se ocorrer $\Delta_X \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Os elementos de $\mathcal{U}$ serão chamados de ***entourages*** (de X)[2]. ¶

[1] Porém, implicitamente, a reta real estará presente, em virtude do Teorema 4.1.54.

[2] Embora, a rigor, U seja subconjunto de $X \times X$. Além disso, seguiremos a tradição mundial de não alterar o termo francês "*entourage*" que, muito provavelmente, significa algo como "entorno".

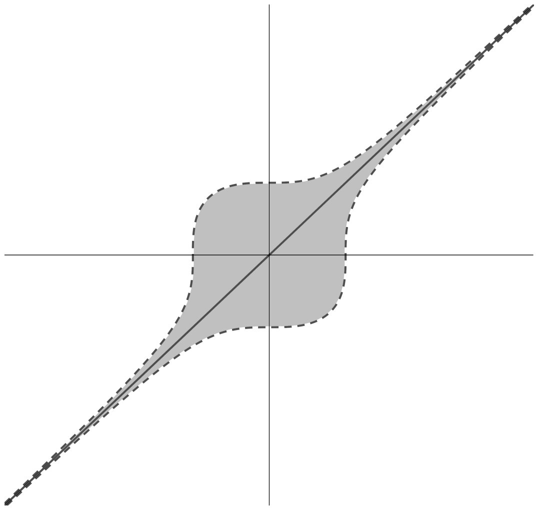


Figura 4.1: Uma *entourage* (pouco usual) de $\mathbb{R}$ (confira o Exemplo 4.1.61).

A condição $\Delta_X \subseteq \bigcap \mathcal{U}$ sintetiza a ideia de que cada *entourage* é uma "faixa" em torno da diagonal Δ_X. Num primeiro momento, é aceitável pensar que as *entourages* de um pré-filtro uniformemente razoável se comportam como as faixas induzidas por uma métrica. Averiguemos isso.

Definição 4.1.3. Nas condições acima, para $U \in \mathcal{U}$ e $x \in X$ fixados, o subconjunto

$$U[x] := \{y \in X : (x, y) \in U\},$$

será xingado de **bola uniforme de centro** x **e raio** U. ¶

Proposição 4.1.4. *Sejam* X *um conjunto e* $\mathcal{U}$ *um pré-filtro em* $X \times X$*. Se* $\mathcal{U}$ *é uniformemente razoável, então a família*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} := \{A \subseteq X : \forall x \in A \quad \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U[x] \subseteq A\} \tag{4.2}$$

é uma topologia em X.

Demonstração. Tem-se $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ por vacuidade, enquanto $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ pois $x \in U[x] \subseteq X$ para quaisquer $U \in \mathcal{U}$ e $x \in X$. Se $A, B \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ e $x \in A \cap B$, então existem $U, V \in \mathcal{U}$ com $U[x] \subseteq A$ e $V[x] \subseteq B$, donde a condição de $\mathcal{U}$ ser um pré-filtro garante $W \in \mathcal{U}$ com $W \subseteq U \cap V$, acarretando $W[x] \subseteq A \cap B$. É claro que se $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, então $\bigcup \mathcal{W} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. □

A proposição acima indica um caminho promissor na generalização dos espaços pseudométricos: tal qual ocorre com as bolas abertas, as bolas uniformes também *induzem* uma topologia. No entanto, há um detalhe muito sutil escondido na definição acima.

Exercício 4.1 (Exemplo patológico)**.** Considere $X := \mathbb{R}$, $U := \Delta_X \cup \{(0, 1), (1, 2)\}$ e $\mathcal{U} := \{U\}$. Convença-se de que $\mathcal{U}$ é um pré-filtro uniformemente razoável em $X \times X$ e $U[0] = \{0, 1\}$. Conclua que $U[0]$ não é uma vizinhança de 0 na topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. ■

O exercício acima escancara que, embora consigamos mimetizar a construção da topologia de um espaço pseudométrico, ainda não há garantias de que as bolas no atual contexto sejam vizinhanças. A fim de remediar isso, convém investigar um pouco melhor o comportamento das bolas abertas num espaço pseudométrico.

Exemplo 4.1.5. Vejamos como mostrar que a identidade

$$\mathrm{int}\,(A) = \{x \in X : \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(x, r) \subseteq A\}$$

é válida para qualquer subconjunto A de um espaço pseudométrico (X, d).

Chamando por $W := \{x \in X : \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(x, r) \subseteq A\}$, deve-se mostrar que W é o maior aberto contido em A. Daí, como a definição de W garante tanto $W \subseteq A$ quanto $V \subseteq W$ para todo aberto $V \subseteq A$, resta apenas provar que W é aberto. Superficialmente, isto segue da *desigualdade triangular*: dados $w \in W$ e $r > 0$ tais que $B_d(w, 2r) \subseteq A$, qualquer $u \in B_d(w, r)$ satisfaz $B_d(u, r) \subseteq A$, pois se $x \in B_d(u, r)$, então

$$d(x, w) \leq d(x, u) + d(u, w) < r + r = 2r, \tag{4.3}$$

mostrando que $B_d(w, r) \subseteq W$. ▲

O leitor certamente percebeu que o *Katzensprung* se encontra, precisamente, na desigualdade triangular, bem como na estrutura *aditivo-ordenada* de $\mathbb{R}$. A questão é: como traduzir essa exigência para um pré-filtro $\mathcal{U}$ em $X \times X$?

Embora ~~pareça~~ seja bastante inusitado, chamo a atenção do leitor para o seguinte: em (4.3), a ocorrência simultânea de $(x, u) \in E_r$ e $(u, w) \in E_r$ permitiu concluir que $(x, w) \in E_{2r}$. Ora, como E_r é um conjunto de pares ordenados, *a.k.a.* relação binária, é legítimo considerar $E_r \circ E_r$, explicitamente definido como

$$E_r \circ E_r := \{(a, b) \in X \times X : \exists c \in X \text{ tal que } (a, c) \in E_r \text{ e } (c, b) \in E_r\}$$

o que está em consonância com o Exercício K.15, apresentado no *Kindergarten*. Logo, a desigualdade (4.3) se traduz na inclusão $E_r \circ E_r \subseteq E_{2r}$, que pode ser estrita (Exercício 4.16).

Observação 4.1.6. Convém ressaltar que existe uma abordagem equivalente para espaços uniformes que não menciona *entourages* ou composições entre elas. Todavia, ela não tem paralelos tão óbvios com argumentos métricos, o que a torna bem mais desagradável do que as reconfortantes *entourages* desenvolvidas por André Weil. O leitor curioso pode conferir o texto de Willard [115]. △

Definição 4.1.7. Uma **quase-uniformidade** $\mathcal{U}$ sobre um conjunto X é um filtro em $X \times X$ tal que

(q. un$_1$) $\Delta_X \subseteq \bigcap \mathcal{U}$, i.e., $\Delta_X \subseteq U$ para todo $U \in \mathcal{U}$, e

(q. un$_2$) para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$. ¶

Em momentos de pouca preguiça, o par $(X, \mathcal{U})$ será chamado de **espaço quase-uniforme**, embora seja mais comum dizer apenas que X é um espaço *quase*-uniforme. Além disso, a menos de menção explícita contrária, o espaço quase-uniforme X sempre será munido da topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ induzida por $\mathcal{U}$ e descrita na Proposição 4.1.4, razão pela qual $(X, \mathcal{U})$ será *tratado* como espaço topológico[3].

O "quase", impetuosamente acoplado antes da palavra "uniforme", destaca a ausência de uma última exigência, que será feita oportunamente a fim de obter *simetria*. Apesar disso, muita coisa interessante pode ser feita nesse "quase-contexto".

[3] Tal qual se faz com um espaço métrico (M, d) quando se diz, por exemplo, que $K \subseteq M$ é *compacto*.

Proposição 4.1.8. *Se* $(X,\mathcal{U})$ *é um espaço quase-uniforme, então para qualquer subconjunto* $A \subseteq X$ *se verifica* $\operatorname{int}(A) = \{x \in X : \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U[x] \subseteq A\}$.

Demonstração. Por razões pedagógicas convém repetir a demonstração feita no contexto pseudométrico. Assim como antes, basta mostrar que o subconjunto

$$W := \{x \in X : \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U[x] \subseteq A\}$$

é um aberto da topologia $\mathcal{T}$. Para tanto, toma-se $w \in W$ a fim de encontrar $V \in \mathcal{U}$ tal que $V[w] \subseteq W$. Ora, como $w \in W$, existe $U \in \mathcal{U}$ com $U[w] \subseteq A$, enquanto (q. un$_2$) garante um $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \circ V \subseteq U$. Mostraremos que $V[w] \subseteq W$: para provar que $u \in V[w]$ implica em $u \in W$, deve-se obter uma *entourage* $V' \in \mathcal{U}$ com $V'[u] \subseteq A$; note que $V' := V$ já faz o serviço pois, se $x \in V[u]$, então $(u, x) \in V$ e $(w, u) \in V$, donde segue que $(w, x) \in V \circ V \subseteq U$ e, consequentemente, $x \in U[w] \subseteq A$, como queríamos. □

Corolário 4.1.9. *Sejam* $(X,\mathcal{U})$ *um espaço quase-uniforme e* $x \in X$ *um ponto. Se* $U \in \mathcal{U}$, *então* $U[x]$ *é vizinhança de* x.

Demonstração. Pela proposição anterior temos $x \in \operatorname{int}(U[x]) \subseteq U[x]$. □

Note que a demonstração da última proposição seguiu o *modus operandi* do Exemplo 4.1.5, em que se utiliza a desigualdade triangular para caracterizar o interior de um subconjunto num espaço pseudométrico[4]: onde antes havia um raio $s := 2r > 0$, considerou-se a *entourage* U e, no lugar de $r > 0$, tomou-se a *entourage* V; assim como $r + r \leq s$, agora ocorre $V \circ V \subseteq U$. Por tal razão, costuma ser mnemonicamente interessante escrever $1V := V$ e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)V := nV \circ V, \tag{4.4}$$

o que está de acordo com a intuição pseudométrica. Vejamos outra ilustração.

Teorema 4.1.10 (*Entourage* de Lebesgue). *Se* $(X,\mathcal{U})$ *é um espaço quase-uniforme compacto e* $\mathcal{W}$ *é uma cobertura por abertos de* X, *então existe uma* entourage $L \in \mathcal{U}$ *tal que para todo* $S \subseteq X$,

$$S \times S \subseteq L \Rightarrow \exists W \in \mathcal{W} \text{ tal que } S \subseteq W. \tag{4.5}$$

Demonstração. Para cada $x \in X$, tomemos $W_x \in \mathcal{W}$ e *entourages* $V_x, U_x \in \mathcal{U}$ tais que $x \in W_x$, $U_x[x] \subseteq W_x$ e $2V_x \subseteq U_x$. Como a família $\{V_x[x] : x \in X\}$ é uma cobertura por vizinhanças de X, segue que existe um subconjunto finito $F \subseteq X$ com $X = \bigcup_{x \in F} V_x[x]$.

Fixemos a *entourage* $V := \bigcap_{x \in F} V_x$, que aqui faz o papel da *menor entourage*[5] do conjunto $\{V_x : x \in F\}$. Mostraremos que para cada $x \in X$ existe um aberto $W \in \mathcal{W}$ satisfazendo $V[x] \subseteq W$: se $y \in V[x]$, então $(x, y) \in V$ e $x \in V_w[w]$ para algum $w \in F$, donde segue que $(w, x), (x, y) \in V_w$ e, consequentemente, $(w, y) \in 2V_w \subseteq U_w$, acarretando $y \in U_w[w] \subseteq W_w$.

Finalmente, a implicação (4.5) segue com qualquer $L \in \mathcal{U}$ verificando $L \subseteq V$. Com efeito, para $z \in S$ fixado, tem-se $(x, z) \in S \times S \subseteq L \subseteq V$ para qualquer $x \in S$, donde segue que $x \in V[z]$. Como x foi tomado arbitrariamente, resulta $S \subseteq V[z]$ e este, por sua vez, está contido em algum $W \in \mathcal{W}$ (pela discussão do parágrafo anterior). □

[4]Embora implícito, convém frisar: espaços pseudométricos são, naturalmente, quase-uniformes.

[5]Se fosse um argumento clássico com ε's e δ's, em vez de U_x e V_x com as propriedades estipuladas, teríamos, respectivamente ε_x com $B(x, \varepsilon_x) \subseteq W_x$ e $\delta_x := \frac{\varepsilon_x}{2}$. Analogamente, em vez de V, teríamos $\delta := \min\{\delta_x : x \in F\}$.

Observação 4.1.11. Costuma ser conveniente, do ponto de vista psicológico, "traduzir" as afirmações na linguagem das *entourages* para os espaços pseudométricos. Para isso, considera-se a quase-uniformidade $\mathcal{E}_d$ em $X \times X$ gerada pelos conjuntos da forma E_r (como definidos em (4.1))[6]. A menos de menção explícita em contrário, espaços pseudométricos sempre serão considerados com esta quase-uniformidade.

Agora, por exemplo, a implicação (4.5) do teorema anterior afirma que existe um número real $L > 0$ tal que se $S \subseteq X$ satisfaz $d(x, y) < L$ para quaisquer $x, y \in S$, então existe $W \in \mathcal{W}$ com $S \subseteq W$. Ao se denotar $\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}$ para um subconjunto S de um espaço pseudométrico (X, d), *a.k.a.* **diâmetro** de S, obtém-se o

Corolário 4.1.12 (*A.k.a.* número de Lebesgue)**.** *Se (X, d) é um espaço pseudométrico compacto e $\mathcal{W}$ é uma cobertura por abertos de X, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $S \subseteq X$ com $\operatorname{diam}(S) \leq \delta$ existe $W \in \mathcal{W}$ com $S \subseteq W$.*

Demonstração. Segue do teorema anterior ao se notar que a inclusão $S \times S \subseteq E_\delta$ é equivalente à desigualdade $\operatorname{diam}(S) \leq \delta$. □

Exercício 4.2. Prove diretamente o corolário anterior sem aplicar o Teorema 4.1.10. Sugestão: troque adequadamente as *entourages* utilizadas na demonstração por números reais positivos. ■

Na literatura, o número δ no enunciado do Corolário 4.1.12 costuma ser chamado de (um) **número de Lebesgue** da cobertura $\mathcal{W}$. Veremos algumas aplicações deste celebrado resultado ao longo do capítulo. △

As conclusões anteriores podem levar o leitor incauto a duvidar da necessidade de axiomas adicionais para os espaços quase-uniformes, já que tudo parece se encaixar como uma luva. A necessidade é, de fato, discutível: o livro *Quasi-uniform spaces*, de Peter Fletcher e William F. Lindgren [42], por exemplo, desenvolve (e expande!) os tópicos abordados neste capítulo no contexto dos espaços quase-uniformes. No entanto, o tratamento das noções de *completude* é bem mais delicado sem a suposição de *simetria*.

Definição 4.1.13 (Bourbaki [19])**.** Diremos que um subconjunto A de um espaço quase-uniforme $(X, \mathcal{U})$ é ***U*-pequeno**, para $U \in \mathcal{U}$, se $A \times A \subseteq U$. Daí, um filtro *próprio* $\mathcal{F}$ em X será chamado de **filtro de Cauchy** se para todo $U \in \mathcal{U}$ existe um subconjunto $A \in \mathcal{F}$ que é U-pequeno. ¶

Exemplo 4.1.14 (Sequências de Cauchy, revisitadas)**.** Recordemo-nos de que uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ num espaço pseudométrico (X, d) é dita **de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N$. Como esperado, tal condição é *completamente* capturada pelos filtros.

Mais precisamente, uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em X é de Cauchy se, e somente se, o filtro induzido $(x_n)_n^{\uparrow}$ é de Cauchy. De fato, a condição de Cauchy para o filtro $(x_n)_n^{\uparrow}$ equivale a exigir que para todo $r > 0$ exista $N \in \omega$ tal que $\{x_n : n \geq N\} \times \{x_n : n \geq N\} \subseteq E_r$, i.e., que para $n, m \geq N$ se tenha $d(x_n, x_m) < r$. ▲

Uma vez que *toda sequência convergente de um espaço pseudométrico é de Cauchy*, a noção métrica de completude ("ser de Cauchy" implica "ser convergente") diz, em certo sentido, que toda sequência que *poderia ser convergente* necessariamente é. O problema dos espaços quase-uniformes reside na *dificuldade* de adaptar a afirmação destacada.

[6]Ou seja, $\mathcal{E}_d$ é o filtro gerado pelos conjuntos da forma E_r definidos em (4.1).

Recordar a argumentação típica usada para provar que toda sequência convergente é de Cauchy ajuda a perceber a delicadeza da situação: dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$, donde segue que para $n, m \geq N$ deve-se ter

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) = d(x, x_n) + d(x, x_m) < 2\varepsilon.$$

Por que o mesmo raciocínio não se adapta para espaços quase-uniformes? Vejamos. Se $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência convergente em $(X, \mathcal{U})$ e $U \in \mathcal{U}$, tomam-se $V \in \mathcal{U}$ e $N \in \omega$ tais que $2V \subseteq U$ e $x_n \in V[x]$ para todo $n \geq N$, donde segue que para $n, m \geq N$ deve-se ter $x_n, x_m \in V[x]$, i.e., $(x, x_n), (x, x_m) \in V$. *Gostaríamos* de concluir que $(x_n, x_m) \in 2V \subseteq U$, mas para isso é preciso garantir que $(x_n, x) \in V$. Em resumo, *precisa-se*[7] exigir simetria de certas *entourages* de X.

Definição 4.1.15. Um filtro $\mathcal{U}$ em $X \times X$ é chamado de **uniformidade** em X se $\mathcal{U}$ for uma quase-uniformidade tal que $U^{-1} \in \mathcal{U}$ sempre que $U \in \mathcal{U}$, para toda *entourage* $U \in \mathcal{U}$, onde U^{-1} indica a relação inversa de U. Em tal caso, o par $(X, \mathcal{U})$ passa a ser chamado de **espaço uniforme**, e os elementos de $\mathcal{U}$ são as *entourages* de X. ¶

Naturalmente, tudo o que já se discutiu sobre espaços quase-uniformes é aplicável aos espaços uniformes.

Exemplo 4.1.16. Todo espaço pseudométrico é uniforme, já que sua quase-uniformidade natural é, devido à simetria da pseudométrica, uma uniformidade. ▲

Exemplo 4.1.17 (Um espaço quase-uniforme e não-uniforme)**.** Uma vez que a métrica usual de $\mathbb{R}$ é dada pela regra $d(x, y) := |x - y|$, é claro que as *entourages* da forma

$$S_r := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| < r\}$$

induzem uma uniformidade em $\mathbb{R}$ conforme r varia em $\mathbb{R}_{>0}$, chamada de **uniformidade usual da reta**[8]. O que acontece se esquecermos de escrever os traços do valor absoluto?

Mais precisamente, para cada $r > 0$ consideremos $A_r := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y < r\}$ e façamos $\mathcal{A} := (\{A_r : r > 0\})^{\uparrow}$ o filtro gerado pelas *entourages* acima. Após se convencer de que $\mathcal{A}$ é uma quase-uniformidade em $\mathbb{R}$, observe que $\mathcal{A}$ não é uma uniformidade: note, por exemplo, que não existe $r > 0$ com $A_r \subseteq A_1^{-1}$, mostrando que $A_1^{-1} \notin \mathcal{A}$. ▲

Proposição 4.1.18. *Num espaço uniforme, todo filtro convergente é de Cauchy.*

Exercício 4.3. Demonstre a proposição acima. ■

Na parte final deste capítulo, trataremos com mais cuidado dos espaços uniformes *completos*, nos quais a recíproca da proposição acima é verdadeira. Por ora, vamos prosseguir com o passeio pela *categoria* dos espaços uniformes. Como o leitor versado nas runas de Eilenberg e MacLane deve saber, isso exige que se definam as setas: elas são, naturalmente, as funções *uniformemente contínuas*[9]!

[7] Pode-se provar que todo espaço topológico é *quase-uniformizável*. Dito isso, vale destacar que é *possível* trabalhar com filtros de Cauchy e completude em espaços quase-uniformes, mas com uma definição diferente para a condição de Cauchy. O leitor interessado encontrará mais detalhes em [42].

[8] Note que a uniformidade usual da reta induz a topologia usual da reta.

[9] A ênfase aqui se deve à estranheza que sempre senti ao estudar convergência uniforme enquanto infante: ela parecia mais arbitrária do que as outras coisas – e o mero fato de obter mais ferramental para a realização de cálculos nunca foi um apelativo para mim. Talvez como um sinal do destino, Pryscilla já me confidenciou ter sentimentos parecidos.

4.1.1 O *habitat* natural da continuidade uniforme

Definição 4.1.19. Sejam $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ espaços uniformes[10]. Dizemos que uma função $f\colon X \to Y$ é **uniformemente contínua** se para toda *entourage* $V \in \mathcal{V}$ existe uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ tal que $(a,b) \in U \Rightarrow (f(a), f(b)) \in V$. ¶

Fazendo jus à referência topológica, tem-se a seguinte caracterização alternativa:

Proposição 4.1.20. *Sejam $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ espaços uniformes. Uma função $f\colon X \to Y$ é uniformemente contínua se, e somente se, $(f\times f)^{-1}[V] \in \mathcal{U}$ para toda* entourage *$V \in \mathcal{V}$.*

Demonstração. Note que a existência de $U \in \mathcal{U}$ satisfazendo a implicação da Definição 4.1.19 se traduz na inclusão $U \subseteq (f\times f)^{-1}[V]$, donde o fato de $\mathcal{U}$ ser filtro garante que $(f\times f)^{-1}[V] \in \mathcal{U}$. O leitor insatisfeito pode completar os detalhes. □

Corolário 4.1.21. *Toda função uniformemente contínua é contínua.*

Demonstração. Com as notações da proposição anterior, note que se $W \subseteq Y$ é aberto e $f(x) \in W$, então existe $V \in \mathcal{V}$ com $V[f(x)] \subseteq W$. Daí, para $E := (f\times f)^{-1}[V] \in \mathcal{U}$, qualquer $x' \in E[x]$ deve satisfazer $f(x') \in V[f(x)]$. Isso mostra que para todo $x \in f^{-1}[W]$ existe $E \in \mathcal{U}$ tal que $E[x] \subseteq f^{-1}[W]$ ou, em outras palavras, $f^{-1}[W]$ é um aberto de $(X,\mathcal{U})$. □

Exercício 4.4. Dados espaços uniformes X e Y, convença-se de que uma função $f\colon X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo ponto $x \in X$ e toda *entourage* V de Y existir uma *entourage* U de X tal que $f[U[x]] \subseteq V[f(x)]$. ■

Como o nome desta seção sugere, estamos diante de uma nova categoria: ao se considerarem objetos como espaços uniformes e setas como as funções uniformemente contínuas, obtém-se Unif, a **categoria dos espaços uniformes**. Em linguagem *cristã*, isto significa dizer, essencialmente[11], que a função identidade é uniformemente contínua e a composição de funções uniformemente contínuas ainda é uniformemente contínua.

Exercício 4.5. Convença-se de que Unif é uma categoria. ■

Assim, do ponto de vista categorial, Unif pode ser encarada como uma *subcategoria* de Top: a correspondência $\mathcal{T}\colon$ Unif $\to$ Top que leva uma seta $f\colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ de Unif (*a.k.a.* função uniformemente contínua) na seta $f\colon (X,\mathcal{T}_{\mathcal{U}}) \to (Y,\mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ de Top (*a.k.a.* função contínua) é um *mergulho de categorias*[12]. No entanto, tal mergulho não é *total*, no sentido de que existem funções contínuas entre $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ que não são uniformemente contínuas.

Exemplo 4.1.22. O leitor que já enfrentou um bom curso de Cálculo – ou um curso medíocre de Análise – deve conhecer diversos exemplos de funções contínuas que não são uniformemente contínuas. Talvez o caso mais simples seja o da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$.

[10] O leitor atento notará que muitas definições e resultados tratados nesta subseção não dependem da hipótese de simetria sobre a uniformidade.

[11] Também precisa-se verificar que a composição definida na categoria seja associativa, o que é evidente no atual contexto, uma vez que funções uniformemente contínuas entre espaços uniformes são, em particular, funções entre conjuntos. O leitor pode conferir uma breve introdução sobre categorias nas primeiras páginas da Seção K.3.

[12] Injetor para objetos e fiel, i.e., injetor para setas (discutimos isso na Subseção K.3.3).

Pela definição da uniformidade usual de $\mathbb{R}$, f *seria* uniformemente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ *existisse* $\delta > 0$ satisfazendo $|x^2 - y^2| < \varepsilon$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $|x - y| < \delta$. No entanto, para $x, \gamma \in \mathbb{R}$ com $x, \gamma > 0$, ao se fazer $y := x + \gamma$ resulta

$$|x^2 - y^2| = y^2 - x^2 = 2x\gamma + \gamma^2,$$

de modo que para $\varepsilon := 1$ e $\delta > 0$ qualquer, basta tomar $x \geq \dfrac{1}{\delta} - \dfrac{\delta}{4}$ e $\gamma := \dfrac{\delta}{2}$ a fim de obter $|x^2 - (x + \gamma)^2| \geq 1$. ▲

Este exemplo também ilustra que a continuidade uniforme não se comporta muito bem do ponto de vista algébrico: embora $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ seja uniformemente contínua, a função $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ não é uniformemente contínua, posto que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ é precisamente a função que faz $x \mapsto x^2$. Isso nos coloca diante de um problema de natureza pedagógica urgente: existe alguma função uniformemente contínua que não seja a função identidade? A próxima proposição responde tal indagação de maneira bastante satisfatória.

Proposição 4.1.23 (Heine-Cantor)**.** *Sejam X e Y espaços uniformes e $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Se X é compacto, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Dada uma *entourage* V de Y, busca-se uma *entourage* U de X tal que $(f(a), f(b)) \in V$ sempre que $(a, b) \in U$. Para isso, fixemos uma *entourage* W de Y tal que $2W \subseteq V$, donde a continuidade de f permite escolher, para cada $x \in X$, uma *entourage* U_x de X tal que $f[U_x[x]] \subseteq W[f(x)]$. Note que isso dá uma cobertura por abertos $\{\mathrm{int}(U_x[x]) : x \in X\}$ para o espaço compacto X.

Agora, apelaremos para o Teorema 4.1.10: existe uma *entourage* L de X tal que para todo $S \subseteq X$,

$$S \times S \subseteq L \Rightarrow \exists x \in X \quad \text{tal que} \quad S \subseteq \mathrm{int}(U_x[x]) \subseteq U_x[x],$$

de modo que basta mostrar que $U := L \cap L^{-1}$ satisfaz a condição desejada. De fato, se $(a, b) \in U$, então a implicação acima dá um $x \in X$ com $a, b \in U_x[x]$, donde segue que $(f(a), f(x)), (f(b), f(x)) \in W$. Note então que, se *ocorresse* $W = W^{-1}$, resultaria $(f(a), f(b)) \in 2W \subseteq V$, como desejado. Embora possa ser o caso de que W e W^{-1} sejam *entourages* distintas, o próximo exercício mostra que poderíamos ter tomado W com tal propriedade desde o começo. □

Exercício 4.6. Seja $\mathcal{U}$ uma quase-uniformidade em X. Mostre que $\mathcal{U}$ é uma uniformidade se, e somente se, para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W = W^{-1}$ e $W \subseteq V$. Conclua que, na demonstração da proposição anterior, poderíamos ter tomado W satisfazendo simultaneamente as condições $W = W^{-1}$ e $2W \subseteq V$. Dica: pode ser útil conferir o Exercício 4.20. ■

Observação 4.1.24. Em contraponto ao que se observou após o Exercício 4.5, a proposição anterior mostra que a restrição do funtor UNIF → TOP à subcategoria dos espaços uniformes compactos, digamos KUNIF[13], permite enxergá-la como subcategoria *completa* de TOP, já que toda função contínua entre espaços uniformes compactos é uniformemente contínua. △

Assim como fizemos em nossas digressões sobre espaços topológicos na Parte I, aqui também é salutar investigar um pouco mais de perto o comportamento das *entourages* de X com respeito a subconjuntos dados, em busca de análogos para bases e sub-bases. São esperadas sensações de *déjà-vu* e, possivelmente, náusea.

[13]Não conheço notação *standard* para tal categoria.

Gastronomia com *entourages*

O primeiro aspecto que vamos investigar são os análogos de bases e sub-bases e, mais geralmente, como *gerar uniformidades* a partir de famílias de subconjuntos de $X \times X$. Ao se mimetizar o *modus operandi* clássico para esse tipo de situação, deve-se começar com a seguinte pergunta: se $\mathscr{S} \neq \emptyset$ for uma família não-vazia de uniformidades sobre X, será verdade que $\mathcal{U} := \bigcap \mathscr{S}$ é uma uniformidade em X?

O leitor que se aventurar na pergunta acima não terá dificuldades para verificar que $\mathcal{U}$ é um filtro em $X \times X$ satisfazendo $\Delta_X \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Os problemas aparecem nas condições adicionais, que generalizam a simetria e a desigualdade triangular das pseudométricas. Por exemplo, deveria ser possível mostrar que para cada $U \in \mathcal{U} := \bigcap \mathscr{S}$ existe $V \in \mathcal{U}$ com $2V \subseteq U$, mas sabe-se apenas que para cada uniformidade $\mathcal{V} \in \mathscr{S}$ existe $V_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ com $2V_{\mathcal{V}} \subseteq U$. Como não há razões para crer que ocorra $V_{\mathcal{V}} = V_{\mathcal{V}'}$ para quaisquer $\mathcal{V}, \mathcal{V}' \in \mathscr{S}$, ficamos impedidos de concluir o raciocínio[14].

Dito isso, existem algumas propriedades que uma família de subconjuntos de $X \times X$ deve ter a fim de gerar uma uniformidade de maneira razoável. Sem mais rodeios, considere as seguintes condições, relativas a uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X \times X$:

(UB_1) $\Delta_X \subseteq \bigcap \mathcal{B}$;

(UB_2) se $B \in \mathcal{B}$, então existe $C \in \mathcal{B}$ com $2C \subseteq B$;

(UB_3) se $B \in \mathcal{B}$, então existe $C \in \mathcal{B}$ com $C^{-1} \subseteq B$.

Exercício 4.7. Convença-se de que se $\mathcal{B}$ satisfaz as três condições acima, então $\mathcal{B}^{\Uparrow}$ é uma uniformidade em X. Dica: a única parte possivelmente não imediata já foi feita no Exercício 4.6. ■

Definição 4.1.25. Seja X um conjunto. Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ satisfazendo as condições (UB_1), (UB_2) e (UB_3) será chamada de **sub-base da uniformidade** $\mathcal{B}^{\Uparrow}$. Nos felizes casos em que $\mathcal{B}$ também é base para o filtro $\mathcal{B}^{\Uparrow}$, diremos que $\mathcal{B}$ é **base da uniformidade**[15] $\mathcal{B}^{\Uparrow}$. ¶

Naturalmente, para uma uniformidade $\mathcal{U}$ em X fixada, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ é (sub) base de $\mathcal{U}$ se ocorrer $\mathcal{B}^{\Uparrow} = \mathcal{U}$, onde o fato de $\mathcal{U}$ ser uniformidade de antemão garante que $\mathcal{B}$ satisfaz as condições anteriores (confira o Exercício 4.24).

Definição 4.1.26. Uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ satisfazendo $U = U^{-1}$ é dita **simétrica**[16]. ¶

Exercício 4.8 (Compare com o Exercício 4.6)**.** Uma quase-uniformidade $\mathcal{U}$ em X é uma uniformidade se, e somente se, admite uma base composta por *entourages* simétricas. ■

Exemplo 4.1.27. Para um espaço pseudométrico (X, d), a uniformidade $\mathcal{E}_d$ induzida pela pseudométrica d tem a família $\mathcal{E} := \{E_r : r > 0\}$ como uma de suas bases, onde $E_r := \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < r\}$. No entanto, ela não é única: como sugerido no Exercício 4.17, a família $\mathcal{F} := \{F_r : r > 0\}$ também é base da uniformidade $\mathcal{E}_d$, onde $F_r := \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \leq r\}$.

[14] Pelo menos por meio de alguma argumentação natural. O leitor empenhado na dúvida deve conferir o Exercício 4.23.

[15] Em consonância com as terminologias anteriores, estabelecidas na Seção 1.1.1, faria mais sentido chamar $\mathcal{B}$ de *pré-uniformidade*. Contudo, não tenho fibra moral suficiente para enfrentar as tradições.

[16] Como *entourages* são relações binárias, isso está de acordo com a definição anterior, de relação simétrica, dada no *Kindergarten*.

Por mais peculiares que sejam, bases de uniformidades ainda são bases de filtros, de modo que o inócuo Exercício 1.137 ainda se aplica a fim de determinar as relações de inclusões entre ~~filtros~~ uniformidades geradas por bases distintas. Para a conveniência do leitor, isto segue explicitado na próxima proposição, que é uma aplicação direta do exercício supracitado.

Proposição 4.1.28. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sub-bases de uniformidades em X. Se $\mathcal{A}$ refina $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}^{\Uparrow} \subseteq \mathcal{A}^{\Uparrow}$. Em particular, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são bases para a mesma uniformidade se, e somente se, para quaisquer $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ existem $A' \in \mathcal{A}$ e $B' \in \mathcal{B}$ com $B' \subseteq A$ e $A' \subseteq B$.*

Por fim, note que no caso das bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ com as quais esta discussão começou, para qualquer $r > 0$ se verifica $F_r \subseteq E_{2r} \subseteq F_{2r}$, donde se conclui $\mathcal{E}^{\Uparrow} = \mathcal{F}^{\Uparrow}$. *Spoiler alert*: esta é a solução do Exercício 4.17. ▲

Antes de prosseguir, é importante frisar o papel desempenhado por (sub) bases de uniformidades na análise da continuidade uniforme: tal qual ocorre com (sub) bases de topologias, basta verificar o comportamento de uma função nas *entourages* de (sub) bases fixadas. Explicitamente:

Exercício 4.9. Sejam $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ espaços uniformes e $f\colon X \to Y$ uma função. Se $\mathcal{B}$ é uma sub-base da uniformidade $\mathcal{V}$, mostre que são equivalentes:

a) f é uniformemente contínua;

b) $(f \times f)^{-1}[B] \in \mathcal{U}$ para toda *entourage* $B \in \mathcal{B}$.

Conclua que a definição clássica de continuidade uniforme em espaços pseudométricos faz uso da caracterização dada no item (b). ■

Em posse disso, vamos adaptar as considerações realizadas sobre topologias iniciais. Dessa vez a coisa se desenrola sem grandes dificuldades, como provaremos com a próxima

Proposição 4.1.29. *Sejam $\{(X_i, \mathcal{V}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços uniformes, X um conjunto e $\mathscr{F} := \{f_i\colon X \to X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma coleção de funções. Então o conjunto*

$$\mathscr{U}_{\mathscr{F}} := \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ é uniformidade em } X \text{ e } \forall i \in \mathcal{I}\ f_i\colon (X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{V}_i) \text{ é unif. contínua}\}$$

admite um menor elemento $\mathcal{U}_{\mathscr{F}}$, i.e., existe $\mathcal{U}_{\mathscr{F}} \in \mathscr{U}_{\mathscr{F}}$ tal que $\mathcal{U}_{\mathscr{F}} \subseteq \mathcal{U}$ para toda uniformidade $\mathcal{U} \in \mathscr{U}_{\mathscr{F}}$.

Demonstração. Primeiramente, note que em virtude da Proposição 4.1.20, uma uniformidade $\mathcal{U} \in \mathscr{U}_{\mathscr{F}}$ deve satisfazer $(f_i \times f_i)^{-1}[V] \in \mathcal{U}$ para quaisquer $i \in \mathcal{I}$ e $V \in \mathcal{V}_i$. Assim, a tese estará demonstrada se provarmos que $\mathcal{B} := \{(f_i \times f_i)^{-1}[V] : i \in \mathcal{I} \text{ e } V \in \mathcal{V}_i\}$ é sub-base de uniformidade em X, pois daí basta fazer $\mathcal{U}_{\mathscr{F}} := \mathcal{B}^{\Uparrow}$. Por fatores pedagógicos, é salutar deixar o restante a cargo do leitor. □

Exercício 4.10. Demonstre a proposição anterior. ■

Definição 4.1.30. A uniformidade da proposição anterior é chamada de **uniformidade fraca** induzida pela família de funções $\mathscr{F}$, também xingada de **uniformidade inicial** e denotada por $\mathcal{U}_{\mathscr{F}}$. ¶

Explicitamente, a uniformidade inicial induzida por $\mathscr{F}$ é a menor uniformidade sobre X a tornar todas as funções $f_i\colon X \to X_i$ uniformemente contínuas. Nessa altura da vida, o leitor atento já deve intuir qual o critério para decidir se uma função $g\colon (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{U}_{\mathscr{F}})$ é uniformemente contínua:

Proposição 4.1.31 (Compare com a Proposição 1.1.83)**.** *Sejam X e $\mathscr{F}$ como acima, $(Y, \mathcal{V})$ um espaço uniforme e $g\colon Y \to X$ uma função. Então $g\colon (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{U}_{\mathscr{F}})$ é uniformemente contínua se, e somente se, a composta $f_i \circ g\colon (Y, \mathcal{V}) \to (X_i, \mathcal{V}_i)$ é uniformemente contínua para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Suponha que $f_i \circ g$ seja uniformemente contínua para cada $i \in \mathcal{I}$. A fim de concluir que g é uniformemente contínua, deve-se tomar $U \in \mathcal{U}_{\mathscr{F}}$ e mostrar que $(g \times g)^{-1}[U] \in \mathcal{V}$. Todavia, o Exercício 4.9 garante que é suficiente fazer isso para $U := (f_i \times f_i)^{-1}[V_i]$ com $V_i \in \mathcal{V}_i$. Torna-se então um mero exercício observar que

$$(g \times g)^{-1}[U] := (g \times g)^{-1}\left[(f_i \times f_i)^{-1}[V_i]\right] = ((f_i \circ g) \times (f_i \circ g))^{-1}[V_i] \in \mathcal{V},$$

como desejado. A recíproca é automática. □

Exemplo 4.1.32 (Uniformidade produto)**.** Um caso particular importante da construção realizada acima ocorre ao se tomar $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e $f_j := \pi_j\colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$, a projeção canônica sobre X_j, para cada $j \in \mathcal{I}$. Tal uniformidade, que denotaremos por $\mathcal{U}_\pi$, é formada pelos subconjuntos S de $X \times X$ que contêm interseções finitas de subconjuntos da forma

$$(\pi_j \times \pi_j)^{-1}[V] := \{((x_i)_{i\in\mathcal{I}}, (y_i)_{i\in\mathcal{I}}) \in X \times X : (x_j, y_j) \in V\}$$

para $j \in \mathcal{I}$ e $V \in \mathcal{V}_j$.

Se $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\pi}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{V}_i}$ denotam, respectivamente, as topologias em X e X_i induzidas pelas uniformidades $\mathcal{U}_\pi$ e $\mathcal{V}_i$, para cada $i \in \mathcal{I}$, então o Corolário 4.1.21 garante que cada projeção $\pi_i\colon (X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_\pi}) \to (X, \mathcal{T}_{\mathcal{V}_i})$ é contínua. Isso mostra que a topologia produto em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, a menor a tornar todas as projeções contínuas[17], deve estar contida em $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\pi}$. Num momento de rara beleza, a vida nos saúda com a inclusão oposta.

Proposição 4.1.33. *Sejam X e $\mathscr{F}$ como na Proposição 4.1.29. Então a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathscr{F}}}$ em X, induzida pela uniformidade $\mathcal{U}_{\mathscr{F}}$, é a menor topologia sobre X a tornar contínuas as funções $f_i\colon (X, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathscr{F}}}) \to (X_i, \mathcal{T}_{\mathcal{V}_i})$ para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. O leitor deve se convencer de que basta mostrar a inclusão $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathscr{F}}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, onde $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathscr{F}}}$ é a topologia induzida pela uniformidade inicial $\mathcal{U}_{\mathscr{F}}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ é a topologia inicial induzida por $\mathscr{F}$. Agora, dado $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathscr{F}}}$ e $x \in A$, encontraremos um subconjunto finito e não-vazio $F \subseteq \mathcal{I}$ e abertos $O_i \subseteq X_i$ para cada $i \in F$ tais que

$$x \in \bigcap_{i\in F} f_i^{-1}[O_i] \subseteq A, \tag{4.6}$$

pois isto assegura que $A \in \mathcal{T}_{\mathscr{F}}$ (em virtude da arbitrariedade de x).

Por A pertencer a $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\mathscr{F}}}$, existe $U \in \mathcal{U}_{\mathscr{F}}$ tal que $U[x] \subseteq A$. Daí, pela definição da uniformidade $\mathcal{U}_{\mathscr{F}}$, existem um subconjunto finito e não-vazio $F \subseteq \mathcal{I}$ e *entourages* $V_i \in \mathcal{V}_i$, para cada $i \in F$, tais que

$$\bigcap_{i\in F} (f_i \times f_i)^{-1}[V_i] \subseteq U.$$

Será do leitor o prazer de perceber que, com as notações acima, basta considerar $O_i := \operatorname{int}(V_i[f_i(x)])$ para cada $i \in F$ a fim de obter a inclusão (4.6). □

[17] Pode ser útil recordar a Definição 1.1.80.

Em particular, o produto cartesiano $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ munido da uniformidade produto é o *produto* dos espaços uniformes $(X_i, \mathcal{U}_i)$ no sentido categorial, ou seja: *se* $(Y, \mathcal{V})$ *é um espaço uniforme munido de funções uniformemente contínuas* $f_i \colon Y \to X_i$ *para cada* $i \in \mathcal{I}$, *então existe uma única função uniformemente contínua* $(f_i)_{i\in\mathcal{I}} \colon Y \to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *tal que* $\pi_j \circ (f_i)_{i\in\mathcal{I}} = f_j$ *para cada* $j \in \mathcal{I}$. Consequentemente, qualquer outro espaço uniforme com a mesma propriedade deve ser isomorfo a $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ na categoria Unif, i.e., deve existir uma *bijeção uniformemente contínua cuja inversa é uniformemente contínua.* Por simplicidade, tais funções serão chamadas, daqui em diante, de **isomorfismos uniformes**. ▲

Exemplo 4.1.34 (Subespaços uniformes)**.** Outro caso particular da uniformidade fraca se dá quando $(Y, \mathcal{V})$ é um espaço uniforme e $X \subseteq Y$ é um subconjunto: a inclusão $i \colon X \hookrightarrow Y$ induz sobre X a uniformidade $\mathcal{V}_i$, que tem como base as *entourages* da forma

$$(i \times i)^{-1}[V] := \{(a, b) \in X \times X : (a, b) \in V\} = (X \times X) \cap V.$$

Em outras palavras, a uniformidade em X induzida pela uniformidade $\mathcal{V}$ de Y é gerada pelas interseções das *entourages* de Y com o subconjunto $X \times X$. Em particular, a última proposição diz que a topologia de X como subespaço de $(Y, \mathcal{T}_{\mathcal{V}})$ coincide com a topologia induzida por $\mathcal{V}$. Por isso, em vez de dizer que X é um **subespaço uniforme** de Y, como demandam as regras de etiqueta, diremos simplesmente que X é um *subespaço* de Y. ▲

Há agora dois caminhos naturais para os quais a discussão poderia ser levada:

i) adaptar os procedimentos culinários realizados para espaços topológicos na Seção 1.3 e investigar a existência de limites e colimites de espaços uniformes;

ii) ainda com a Seção 1.3 em mente, ignorar limites e colimites e tratar apenas dos quocientes de espaços uniformes, adaptando o que foi feito na Subseção 1.3.2.

Seguiremos, porém, uma *terceira via*[18]: vamos encerrar as discussões sobre construções de espaços uniformes por aqui. A existência de *limites* de espaços uniformes pode ser mostrada, sem grandes dificuldades, com uma adaptação dos argumentos apresentados para provar que tais aberrações existem no reino dos espaços topológicos (Proposição 1.3.2). Por outro lado, *colimites* de espaços uniformes, embora existam em certo sentido, não se comportam de maneira muito amigável com suas contrapartes topológicas, o que torna o seu estudo bem mais intrincado – mesmo no caso particular dos quocientes. Sugiro o livro de Warren Page [88] para o leitor interessado em se aprofundar nas tecnicalidades de ambos os tópicos. Há, porém, um último fôlego sobre gastronomia uniforme que merece, inclusive, um subtítulo.

Convergência uniforme: primeiros contatos

Recordemo-nos de que para um conjunto de índices $\mathcal{I}$ e um espaço topológico X, a topologia produto em $X^{\mathcal{I}}$ determina que uma *net* $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $X^{\mathcal{I}}$ converge para uma função $f \colon \mathcal{I} \to X$ se, e somente se, $f_d(i) \to f(i)$ em X para todo $i \in \mathcal{I}$, razão pela qual tal topologia também é chamada de *topologia da convergência pontual.*

Por motivos que serão explorados no Capítulo 6, tal noção de convergência, embora natural, nem sempre é suficiente para o nível de exigência requerido por certos problemas de Análise. Ocorre que nas frequentes situações em que X é um espaço uniforme, é possível considerar outros tipos interessantes de *convergências* sobre $X^{\mathcal{I}}$. A mais famosa delas será apresentada a seguir.

[18]Nota: esta frase foi escrita em meados de 2021.

Definição 4.1.35. Sejam $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme, $\mathcal{I}$ um conjunto de índices e $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* em $X^{\mathcal{I}}$. Para uma função $f\colon \mathcal{I}\to X$ fixada, dizemos que a *net* $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ **converge uniformemente** para f se para toda *entourage* $U\in\mathcal{U}$ existe $d\in\mathbb{D}$ tal que $a\geq d$ implica em $(f(i),f_d(i))\in U$ para todo $i\in\mathcal{I}$. ¶

Embora seja tentador estabelecer uma notação para abreviar a convergência uniforme, veremos que ela corresponde a uma *convergência* em $X^{\mathcal{I}}$ proveniente de uma topologia que, por sua vez, é oriunda de uma uniformidade. O leitor não deve esperar que tal uniformidade coincida com a uniformidade produto, pois a última induz precisamente a convergência pontual em vista da Proposição 4.1.33. Em geral, essa *topologia da convergência uniforme* que iremos exibir contém a topologia da convergência pontual, em virtude do Exercício 1.196.

Para cada $U\in\mathcal{U}$, consideremos o conjunto

$$U^{\mathcal{I}} := \{(f,g)\in X^{\mathcal{I}}\times X^{\mathcal{I}} : \forall i\in\mathcal{I}\,(f(i),g(i))\in U\}\subseteq X^{\mathcal{I}}\times X^{\mathcal{I}}, \tag{4.7}$$

cuja notação é motivada pela bijeção natural existente entre o conjunto acima e a coleção de todas as funções da forma $\mathcal{I}\to U$. O leitor atento já deve suspeitar do próximo passo.

Proposição 4.1.36. *Sejam $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme e $\mathcal{I}$ um conjunto de índices. Então a família $\mathcal{U}^{\mathcal{I}} := \{U^{\mathcal{I}} : U\in\mathcal{U}\}$ é base para uma uniformidade sobre $X^{\mathcal{I}}$.*

Demonstração. Basta verificar que $\mathcal{U}^{\mathcal{I}}$ é um pré-filtro em $X^{\mathcal{I}}$ satisfazendo as condições (UB_1), (UB_2) e (UB_3), enunciadas na altura do Exercício 4.7. Os detalhes ficam sob os cuidados do leitor responsável. □

Exercício 4.11. Complete a demonstração acima. ■

Definição 4.1.37. A uniformidade descrita acima costuma ser chamada de **uniformidade da convergência uniforme**, enquanto a topologia induzida em $X^{\mathcal{I}}$ por tal uniformidade será xingada de **topologia da convergência uniforme**[19]. ¶

Explicitamente, a topologia da convergência uniforme declara como abertos os subconjuntos $W\subseteq X^{\mathcal{I}}$ tais que para todo $f\in W$ existe $U\in\mathcal{U}$ com $U^{\mathcal{I}}[f]\subseteq W$. Consequentemente, uma *net* $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $X^{\mathcal{I}}$ converge para uma função $f\in X^{\mathcal{I}}$ se, e somente se, para todo $U\in\mathcal{U}$ existe $d\in\mathbb{D}$ tal que $f_a\in U^{\mathcal{I}}[f]$ sempre que $a\geq d$, i.e., se $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ *converge uniformemente para* f. Por isso, em vez de atribuir uma nova notação para a convergência uniforme, escreveremos apenas "$f_d\to f$ uniformemente", indicando que a topologia em questão é a da convergência uniforme.

Como ocorre no caso da convergência pontual, a coisa fica ainda mais interessante quando o conjunto de índices é munido de uma uniformidade ou de uma topologia. Em particular, no caso em que X é um espaço topológico e $(Y,\mathcal{U})$ é um espaço uniforme, o conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ das funções contínuas da forma $X\to Y$ é um subconjunto de Y^X. Em vista disso, a próxima proposição ajuda a entender o *interesse* na convergência uniforme.

Proposição 4.1.38. *Nas notações acima, considere Y^X dotado da uniformidade da convergência uniforme. Então o subconjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ é fechado em Y^X.*

[19] O leitor atento deve esperar que a uniformidade induzida em $X^{\mathcal{I}}$ dependa da uniformidade em X, e não apenas da *topologia induzida* em X. Isto será explorado com mais calma na Seção 6.2.

Demonstração. Dada $f \in Y^X$ com $f \in \overline{\mathcal{C}(X,Y)}$, deve-se mostrar que f é contínua. Ora, por f pertencer ao fecho de $\mathcal{C}(X,Y)$, existe uma *net* $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ de funções contínuas tal que $f_d \to f$ uniformemente. A fim de concluir que f é contínua, tomaremos uma *net* $(x_s)_{s\in\mathbb{S}}$ em X e $x \in X$ um ponto com $x_s \to x$ e mostraremos que $f(x_s) \to f(x)$.

Fixada uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$, seja $V \in \mathcal{U}$ uma *entourage* simétrica com $3V \subseteq U$, o que pode ser feito em virtude do Exercício 4.22. Como $f_d \to f$ uniformemente, existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $(f(z), f_a(z)) \in V$ sempre que $a \geq d$ e $z \in X$. Daí, por f_d ser contínua, tem-se $f_d(x_s) \to f_d(x)$, donde segue que existe $s_0 \in \mathbb{S}$ tal que $s \geq s_0$ acarreta $(f_d(x), f_d(x_s)) \in V$. Logo, para $s \geq s_0$ deve-se ter $(f(x), f_d(x)), (f_d(x), f_d(x_s)), (f_d(x_s), f(x_s)) \in V$, mostrando que $(f(x), f(x_s)) \in 3V \subseteq U$ e, portanto, $f(x_s) \in U[f(x)]$. Da arbitrariedade de U, resulta $f(x_s) \to f(x)$, como desejado. □

Exercício 4.12. Reescreva os argumentos acima supondo Y pseudométrico. ■

Definição 4.1.39. Nas condições anteriores, escreveremos $\mathcal{C}_u(X,Y)$ para denotar o conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ munido da topologia/uniformidade da convergência uniforme[20]. Em particular, para $Y := \mathbb{R}$ dotado de sua uniformidade/topologia usual, escreveremos $\mathcal{C}_u(X)$ em vez de $\mathcal{C}_u(X,\mathbb{R})$. ¶

Secretamente, a última proposição dá ferramentas para observar que a topologia da convergência uniforme pode conter estritamente a topologia da convergência pontual: em geral, $\mathcal{C}_p(X,Y)$ não é fechado em Y^X quando o último tem a topologia produto.

Exemplo 4.1.40. Um exercício clássico de Análise na Reta consiste em provar que se $\alpha \in [0,1)$, então $\alpha^n \to 0$. Logo, a sequência de funções reais contínuas $(f_n)_{n\in\omega}$, onde cada $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(x) := x^n$, é tal que $f_n \to f$ em $\mathbb{R}^{[0,1]}$ com a topologia produto, onde $f(x) := 0$ se $x \in [0,1)$ e $f(1) := 1$. Contudo, $f \notin \mathcal{C}_p([0,1])$. ▲

A topologia da convergência uniforme é bastante recorrente em contextos elementares de Análise, em que *integrar* à moda de Riemann ainda é incentivado. Na terminologia usual, se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$ e $\mathcal{R}[a,b]$ denota a coleção das funções reais *Riemann-integráveis* definidas em $[a,b]$, então a função

$$\begin{aligned} \int_a^b : \mathcal{R}[a,b] &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

torna-se contínua caso $\mathcal{R}[a,b]$ seja munido da topologia da convergência uniforme herdada de $\mathbb{R}^{[a,b]}$. Isto será explorado com mais alguns detalhes na Seção 6.1.3.

4.1.2 A influência das bases

Assim como ocorre em Análise na Reta ou, mais geralmente, no estudo de espaços métricos, há diversos argumentos *básicos* de espaços uniformes que tornam a vida do leitor menos problemática. Como veremos, eles são todos, realmente, *básicos*: secretamente, quando se trabalha com ε's e δ's, o que se faz, na verdade, é trabalhar com a base usual da uniformidade induzida por uma pseudométrica.

[20] Lê-se "cê u de X Y". Somos todos adultos aqui, certo?

Observação 4.1.41. A ideia de trabalhar com bases para uma uniformidade $\mathcal{U}$ em vez de tratar da própria uniformidade é tão natural que, por exemplo, Engelking [39] chama de *uniformidade* aquilo que aqui foi xingado como "base de uniformidade composta por *entourages* simétricas" (vide o Exercício 4.8), tamanha a frequência com que os argumentos são facilitados ao se considerar tal tipo de subfamília. $\triangle$

Proposição 4.1.42. *Sejam X um espaço uniforme e $\mathcal{B}$ uma base para a uniformidade de X composta por* entourages *simétricas. Então X é um espaço de Hausdorff se, e somente se, ocorre*

$$\bigcap \mathcal{B} = \Delta_X \tag{4.8}$$

Demonstração. Supondo X de Hausdorff e $x, y \in X$ distintos, existem abertos disjuntos $A, B \subseteq X$ tais que $x \in A$ e $y \in B$, donde segue que existem *entourages* U e V de X tais que $U[x] \subseteq A$ e $V[x] \subseteq B$. Como $U \cap V$ é um *entourage* de X e $\mathcal{B}$ é base, existe uma *entourage* $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subseteq U \cap V$, e deve valer $(x, y) \notin W$: caso contrário, ocorreria $y \in W[x] \subseteq A$, uma contradição.

Reciprocamente, se vale (4.8) e $x \neq y$, então existem $B, C \in \mathcal{B}$ tais que $(x, y) \notin B$ e $2C \subseteq B$ com C simétrica, donde segue que $C[x]$ e $C[y]$ são vizinhanças disjuntas de x e y, respectivamente: a existência de $z \in C[x] \cap C[y]$ acarretaria $(x, z), (z, y) \in C$, o que traria $(x, y) \in 2C \subseteq B$. $\square$

Observação 4.1.43. Em particular, como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ e $\Delta_X \subseteq \bigcap \mathcal{U}$, resulta que $(X, \mathcal{U})$ é de Hausdorff se, e somente se, $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$. $\triangle$

No cotidiano, bases também surgem de modo natural nas caracterizações mais concretas do interior e do fecho de subconjuntos de um espaço uniforme. De fato, adaptando a demonstração da Proposição 4.1.8, não é difícil se convencer de que

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B[x] \subseteq A\}$$

sempre que $\mathcal{B}$ é base para uma uniformidade em X e $A \subseteq X$ é um subconjunto qualquer. Essencialmente a mesma ideia se aplica para caracterizar o fecho.

Exercício 4.13. Nas notações acima, mostre que

$$\overline{A} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B[A],$$

onde $B[A] := \{y \in X : \exists a \in A \text{ tal que } (a, y) \in B\}$. $\blacksquare$

Exemplo 4.1.44. O exercício acima generaliza situações como as observadas em $\mathbb{R}$, em que, por exemplo,

$$\overline{(a, b)} = \bigcap_{n \in \omega} \left(a - \frac{1}{2^n}, b + \frac{1}{2^n}\right),$$

pois $\mathcal{A} := \{A_n : n \in \omega\}$ é uma base para a uniformidade usual de $\mathbb{R}$, onde

$$A_n := \left\{(x, y) : |x - y| < \frac{1}{2^n}\right\}$$

para cada $n \in \omega$: note que, neste caso, tem-se $\left(a - \frac{1}{2^n}, b + \frac{1}{2^n}\right) = A_n[(a, b)]$. $\blacktriangle$

Observação 4.1.45 (Bolas uniformes – *spoiler* do Exercício 4.21)**.** Fixados um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$, uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ e um ponto $x \in X$, sabemos que $U[x]$ é uma vizinhança de x, no sentido de que existe um aberto A com $x \in A \subseteq U[x]$, que em particular pode ser $A := \operatorname{int}(U[x])$, como destacado no Corolário 4.1.9. No entanto, o leitor pode ter deixado passar um detalhe importante: não há garantias de que $U[x]$ seja aberto, fechado ou qualquer outra coisa.

Isso já foi sugerido, implicitamente, no caso mais familiar dos espaços pseudométricos, no Exemplo 4.1.27. De fato, fixado um espaço pseudométrico (Z, d) e um número real $r > 0$, tanto $U := \{(x, y) : d(x, y) < r\}$ quanto $V := \{(x, y) : d(x, y) \leq r\}$ são *entourages* legítimas, tais que $U[z] = B_d(z, r)$ e $V[x] = B_d[z, r]$, para qualquer $z \in Z$: enquanto no primeiro caso $U[z]$ é uma bola aberta, no segundo caso $V[z]$ é uma bola fechada. Mais ainda, como qualquer subconjunto $W \subseteq Z \times Z$ que contém U deve ser uma *entourage*, não é difícil construir exemplos em que $W[z]$ não seja uma bola (aberta ou fechada) com respeito à pseudométrica d.

Apesar disso, se X é um espaço uniforme e U é uma *entourage* de X aberta (ou fechada) em $X \times X$ com a topologia produto, então a bola uniforme $U[x]$ correspondente *será* aberta (ou fechada, respectivamente) para qualquer $x \in X$. Isto segue da continuidade do mapa $x' \overset{\varphi}{\longmapsto} (x, x')$: a pré-imagem de U por φ deve ser aberta em X se a *entourage* U for aberta (ou fechada em X se U for fechada), e esta é a bola uniforme $U[x]$. △

É claro que se $\mathcal{B}$ é base para a uniformidade de um espaço uniforme X e toda *entourage* $B \in \mathcal{B}$ é aberta em $X \times X$, então a família $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} := \{B[x] : B \in \mathcal{B} \text{ e } x \in X\}$ é base para a topologia induzida pela uniformidade. Embora não seja difícil provar que *alguma* base como $\mathcal{B}$ deva existir[21] (Exercício 4.25), sem tal hipótese pode-se provar *apenas* que $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ é uma **base de vizinhanças** para a topologia de X, no seguinte sentido[22]: para cada $x \in X$, sempre que $V \subseteq X$ é uma vizinhança de x, existe $U \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{N}_x$ com $U \subseteq V$. Na verdade, basta fazer x variar num conjunto denso de X a fim de obter uma base de vizinhanças. Mais precisamente:

Proposição 4.1.46. *Sejam $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme, $\mathcal{B}$ uma base para $\mathcal{U}$ composta por* entourages *simétricas e $D \subseteq X$ um subconjunto denso. Então a família*

$$\mathcal{B}_D := \{B[x] : B \in \mathcal{B} \text{ e } x \in D\}$$

é base de vizinhanças para a topologia de X induzida pela uniformidade.

Demonstração. Dados um aberto $W \subseteq X$ e um ponto $x \in W$, a definição da topologia induzida pela uniformidade garante uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ com $U[x] \subseteq W$. Agora, tomando $B \in \mathcal{B}$ com $2B \subseteq U$ e $d \in D \cap B[x]$, mostraremos que $x \in B[d]$ com $B[d] \subseteq W$: como B é simétrica e $(x, d) \in B$, tem-se $x \in B[d]$; agora, se $y \in B[d]$, então $(d, y) \in B$ e, consequentemente, $(x, y) \in 2B \subseteq U$, mostrando que $y \in U[x] \subseteq W$, como queríamos. □

O próximo lema pode dar uma pista importante para o leitor que ainda não percebeu a graça da proposição acima.

Lema 4.1.47. *Sejam $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme e $\mathcal{B}$ uma base para a uniformidade $\mathcal{U}$. Então $\mathcal{U}$ admite uma base $\mathcal{C}$ por* entourages *simétricas tal que $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}|$.*

[21] Bem como bases cujas *entourages* são fechadas em $X \times X$, o que será provado no vindouro Lema 4.2.42.

[22] Também chamada de *sistema fundamental de vizinhanças*. Em certo sentido, a diferença de nomenclatura segue os mesmos moldes das bases locais e das bases locais de vizinhanças.

Demonstração. Para cada $B \in \mathcal{B}$ existem $C_B, D_B \in \mathcal{B}$ tais que $2C_B \subseteq B$ e $D_B^{-1} \subseteq C_B$. Basta agora fazer $\mathcal{C} := \{D_B \cap D_B^{-1} : B \in \mathcal{B}\}$. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

A consequência interessante das duas últimas observações se dá no seguinte

Corolário 4.1.48. *Seja $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme. Se a uniformidade $\mathcal{U}$ admite uma base enumerável, então são equivalentes:*

(i) *X é separável;*

(ii) *X tem peso enumerável*[23]*.*

Demonstração. Em geral, peso enumerável acarreta separabilidade (Proposição 3.1.3). Por outro lado, se $\mathcal{B}$ é base enumerável para a uniformidade $\mathcal{U}$, então o lema anterior garante uma base enumerável $\mathcal{C}$ composta por *entourages* simétricas. Logo, pela proposição anterior, a família $\mathcal{C}_D := \{\mathrm{int}\,(C[d]) : C \in \mathcal{C} \text{ e } d \in D\}$ é base de abertos para a topologia de X, onde $D \subseteq X$ é subespaço denso de X. Daí, por valer $|\mathcal{C}_D| \leq \aleph_0 \cdot |D|$ e a hipótese permitir tomar D enumerável, o resultado segue. □

Quem tem boa memória deve ter notado a semelhança com a Proposição 3.1.7: nela, provou-se a equivalência acima para espaços pseudometrizáveis. Como a uniformidade usual de espaços pseudométricos admite uma base enumerável natural, num primeiro momento somos levados a crer que a proposição mencionada acima foi generalizada pelo último corolário. Surpreendentemente, este não é o caso, como veremos ao analisar mais profundamente as relações existentes entre os diversos tipos de *estruturas topológicas* vistos até aqui.

Mais precisamente, como pseudométricas induzem tanto topologias quanto uniformidades e estas induzem topologias, as três perguntas a seguir são inevitáveis.

(i) Quando uma topologia é induzida por uma uniformidade?

(ii) Quando uma uniformidade é induzida por uma pseudométrica?

(iii) Quando uma topologia é pseudometrizável?

O restante desta seção se dedica a responder as perguntas acima, bem como as outras que por ventura surgirem pelo caminho. Em particular, os importantes *teoremas de metrizabilidade*, deliberadamente negligenciados até aqui, serão apresentados com o devido respeito que merecem, finalmente.

Topologias uniformizáveis

A classe de espaços que responde a primeira pergunta já é de nosso conhecimento: são os espaços completamente regulares (ou $T_{3\frac{1}{2}}$). Isso não deve surpreender o leitor que se lembra do Teorema 2.2.2: um espaço é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, e somente se, é calibrável. É (quase) claro que se a topologia de um espaço é induzida por um calibre de pseudométricas, então existe uma uniformidade que induz a mesma topologia, i.e., a topologia é **uniformizável**.

Proposição 4.1.49. *Todo espaço calibrável é uniformizável.*

[23] Caso tenha se esquecido: a topologia do espaço admite uma base enumerável.

Demonstração. Se $\mathcal{G}$ é a família de pseudométricas que induz a topologia de X, então os conjuntos da forma $E_{G,r} := \bigcap_{g\in G} E_{g,r}$ determinam uma base para uma uniformidade $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ em X, onde $G \in [\mathcal{G}]^{<\aleph_0}$, $r > 0$ e $E_{g,r} := \{(x,y) \in X \times X : g(x,y) < r\}$. Agora não deve ser difícil notar que os abertos da topologia induzida pela uniformidade $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ são os abertos da topologia induzida pelo calibre $\mathcal{G}$. O leitor fica a cargo dos detalhes. $\square$

Exercício 4.14. Complete a demonstração da proposição acima. $\blacksquare$

A recíproca da última proposição, contudo, não tem qualquer chance de ser imediata: um ataque direto depende, evidentemente, da construção de pseudométricas que induzam a mesma topologia oriunda da uniformidade; uma abordagem indireta, com a *primeira* definição de espaços completamente regulares, exige a construção de funções contínuas que separem pontos de fechados. Em ambos os casos, a ~~pseudométrica~~ pedra angular do argumento[24] se deve a Weil (Teorema 4.1.52 a seguir).

Lema 4.1.50. *Sejam X um conjunto e $f\colon X \times X \to [0,+\infty)$ uma função simétrica, i.e., tal que $f(x,y) = f(y,x)$ para quaisquer $x,y \in X$. Para uma sequência finita $s := (s_0,\ldots,s_m) \in X^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, defina $\sum f(s) := \sum_{j<m} f(s_j,s_{j+1})$. Então, a função $d\colon X \times X \to [0,+\infty)$ definida pela regra*

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ \inf\left\{\sum f(s) : s \in X^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}, s_0 = x \text{ e } s_m = y\right\}, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

é uma pseudométrica em X.

Demonstração. Claramente, $d(x,y)$ existe e é maior do que ou igual a 0 para quaisquer $x,y \in X$. Agora, como f é uma função simétrica, para $x \neq y$, os conjuntos

$$A := \left\{\sum f(s) : s_0 = x, s_m = y\right\} \text{ e } B := \left\{\sum f(s) : s_0 = y, s_m = x\right\}$$

são iguais, dado que os números $\sum f(x,s_1,\ldots,s_{m-1},y)$ e $\sum f(y,s_{m-1},\ldots,s_1,x)$ coincidem, acarretando $d(x,y) := \inf A = \inf B := d(y,x)$. A desigualdade triangular segue do fato de que para subconjuntos apropriados C, D e E de números reais não-negativos, tem-se $C + D \subseteq E$ com $\inf C = d(x,z)$, $\inf D = d(z,y)$ e $\inf E = d(x,y)$, donde segue que $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$. Fica a cargo do leitor determinar os conjuntos C, D e E. $\square$

Observação 4.1.51. Intuitivamente, podemos pensar que para cada par de pontos (x,y) existe um caminho fixado $\gamma_{x,y}$ que os liga, de modo que o número $f(x,y)$ mede o comprimento de $\gamma_{x,y}$. Assim, embora possa existir um caminho $\gamma_{x,y}$ com comprimento 5, poderia existir um desvio por z capaz de determinar um trajeto mais *curto*.

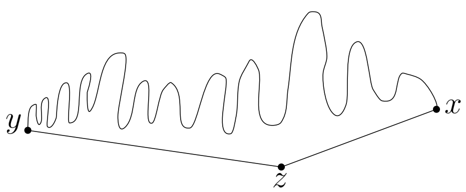


Figura 4.2: Nem sempre o caminho direto disponível é o mais curto.

[24] Existe outra abordagem para espaços uniformes que, em vez de uniformidades, faz uso de tipos especiais de coberturas por abertos. Com tal definição, a demonstração de que espaços uniformes são completamente regulares segue argumentos diferentes. O leitor interessado pode conferir o texto de Willard [115].

Nesse sentido, $d(x, y)$ é meramente o *atalho ideal*, que pode ou não ser realizável por um caminho específico. Em particular, é imediato que a desigualdade $d(x, y) \leq f(x, y)$ vale para quaisquer $x, y \in X$. △

Teorema 4.1.52 (Pseudométrica de Weil)**.** *Para um espaço uniforme* $(X,\mathcal{U})$ *e uma sequência* $(V_n)_{n\in\omega}$ *de* entourages *simétricas, com* $V_0 = X \times X$ *e* $3V_{n+1} \subseteq V_n$ *para todo* $n \in \omega$*, existe uma pseudométrica* $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ *tal que*

$$A_n := \left\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq V_n \subseteq \left\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}\right\} =: B_n$$

para todo $n \in \omega$*.*

Demonstração. A ideia é construir uma função simétrica $f\colon X \times X \to [0, +\infty)$ apropriada para daí obter a pseudométrica desejada com o lema anterior. Definamos $f(x, y) := 0$ se $(x, y) \in V_n$ para todo $n \in \omega$ e $f(x, y) := \frac{1}{2^n}$ se $(x, y) \in V_n \setminus V_{n+1}$ para algum $n \in \omega$. Tal definição faz sentido pois se $(x, y) \notin \bigcap_{n\in\omega} V_n$, então é único o número natural $n \in \omega$ com $(x, y) \in V_n \setminus V_{n+1}$: com efeito, se $i < j$ e $(x, y) \in V_j$, então $(x, y) \in V_i$, já que $V_j \subseteq 3V_j \subseteq V_i$. Além disso, como cada *entourage* V_n é simétrica, resulta que f é simétrica e, portanto, a função $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ definida no último lema é uma pseudométrica em X. Resta apenas mostrar que as inclusões desejadas ocorrem.

A segunda inclusão é mais fácil: ela decorre do fato de que se $(x, y) \in V_n$, então $f(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$, donde segue que $(x, y) \in B_n$ pois $d \leq f$. A primeira desigualdade, porém, requer uma análise mais cuidadosa da função f. Primeiro, observe que para quaisquer $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$ deve ocorrer

$$f(x_0, x_3) \leq 2 \max\{f(x_0, x_1), f(x_1, x_2), f(x_2, x_3)\}, \tag{4.9}$$

pois, de duas uma:

- ✓ $f(x_i, x_{i+1}) = 0$ para todo $i < 3$ ocorre somente se $(x_i, x_{i+1}) \in V_n$ para todo n, donde segue que $(x_0, x_3) \in 3V_{n+1} \subseteq V_n$ para todo n e, portanto, $f(x_0, x_3) = 0$;
- ✓ se $\frac{1}{2^n} = \max\{f(x_0, x_1), f(x_1, x_2), f(x_2, x_3)\}$ para algum n, então $(x_i, x_{i+1}) \in V_n$ para todo $i < 3$ e daí $(x_0, x_3) \in 3V_n \subseteq V_{n-1}$, resultando em $f(x_0, x_3) \leq \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \frac{1}{2^n}$.

Agora, por indução, mostraremos que

$$f(x_0, x_m) \leq 2 \cdot \sum_{i<m} f(x_i, x_{i+1}) \tag{4.10}$$

para quaisquer $m \in \omega$ e pontos $x_0, \ldots, x_m \in X$ fixados. O resultado é óbvio para $m := 0$. Supondo o resultado válido para todo $k < m$ com $m > 0$, mostraremos sua validade para m.

Por simplicidade, chamemos $\alpha := \sum_{i<m} f(x_i, x_{i+1})$. Note que se $\alpha = 0$, então, com argumentos análogos ao da primeira verificação acima, pode-se concluir que $f(x_0, x_m) = 0$. Se ocorrer $\alpha > 0$, note que para β e γ tais que $\alpha = \beta + \gamma$ com $\beta > \frac{\alpha}{2}$, deve-se ter $\gamma < \frac{\alpha}{2}$: ora, o contrário traria $\beta + \gamma > \alpha$. Essa observação inócua permite mostrar que se $j < m - 1$ é o maior tal que

$$\sum_{i<j} f(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\alpha}{2}, \tag{4.11}$$

então $\sum_{i\leq j} f(x_i, x_{i+1}) > \frac{\alpha}{2}$ e daí

$$\sum_{i=j+1}^{m-1} f(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\alpha}{2}. \tag{4.12}$$

Como tanto (4.11) quanto (4.12) são somas de um número de termos menor do que m, a hipótese de indução se aplica a ambas e, consequentemente, obtêm-se as desigualdades $f(x_0, x_j), f(x_{j+1}, x_m) \leq \alpha$. Daí, por valer $f(x_j, x_{j+1}) \leq \alpha$, a desigualdade em (4.9) garante $f(x_0, x_m) \leq 2\alpha$, como afirmado.

As informações acima reunidas acerca da função f permitem, enfim, provar a primeira inclusão. Se $(x, y) \in A_n$ para algum $n \in \omega$, então existe uma sequência $s := (x_0, x_1, \ldots, x_m, y)$ satisfazendo $\sum f(s) < \frac{1}{2^n}$, donde a desigualdade (4.10) implica em $f(x, y) < \frac{1}{2^{n-1}}$. Ora, pelo modo como f foi definida, essa última desigualdade estrita resulta em $f(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$ e, portanto, $(x, y) \in V_n$. □

Corolário 4.1.53. *Para um espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$ e uma* entourage *simétrica V, existe uma pseudométrica $\rho_V\colon X \times X \to [0, +\infty)$ satisfazendo a inclusão*

$$\{(x, y) \in X \times X : \rho_V(x, y) < 1\} \subseteq V$$

e tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\rho_V(x, y) < \varepsilon$ sempre que $(x, y) \in U$.

Demonstração. Chame $V_0 := X \times X$, $V_1 := V$ e, recursivamente[25], tome *entourages* simétricas $V_n \in \mathcal{U}$, com $n > 1$, satisfazendo $3V_{n+1} \subseteq V_n$. Agora, o Teorema de Weil garante uma pseudométrica d tal que

$$\left\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq V_n \subseteq \left\{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}\right\}$$

para todo $n \in \omega$. Logo, a pseudométrica $\rho_V := 2 \cdot d$ satisfaz a inclusão desejada, de modo que resta apenas verificar a *continuidade moralmente uniforme*[26]: ora, dado $\varepsilon > 0$ e $n \in \omega$ com $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, a *entourage* V_n atesta que se $(x, y) \in V_n$, então

$$\rho_V(x, y) := 2 \cdot d(x, y) \leq 2 \cdot \frac{1}{2^n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

como desejado. □

Teorema 4.1.54. *A topologia de um espaço uniforme é completamente regular.*

Demonstração. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme, $x \in X$ um ponto qualquer, $F \subseteq X$ um fechado com $x \notin F$ e tome uma *entourage* simétrica $V \in \mathcal{U}$ tal que $V[x] \cap F = \emptyset$. Agora, se ρ_V denota a pseudométrica dada pelo corolário anterior, então a regra $y \mapsto \min\{1, \rho_V(x, y)\}$ determina uma função contínua $f\colon X \to [0, 1]$, com $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. Da arbitrariedade de x e F segue que a topologia de X é completamente regular. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Exercício 4.15. Complete a demonstração do teorema anterior. ■

Em decorrência do poderoso teorema acima, sempre que nos depararmos com uniformidades de Hausdorff, teremos a garantia automática de que a topologia induzida é de Tychonoff, e *vice-versa*. Será o caso dos *grupos* e *espaços vetoriais topológicos*, ambos dotados de estruturas uniformes naturais. Por ora, vamos ver como a cardinalidade de uma base para a uniformidade afeta (e, possivelmente, simplifica) a topologia do espaço.

[25] Use o Exercício 4.22 *quantas vezes* achar necessário.

[26] A rigor, a condição pedida não é o que se chama de continuidade uniforme. Ainda assim, tal condição é suficiente para garantir a continuidade (no sentido usual) da pseudométrica (Exercício 4.26).

Uniformidades (pseudo) metrizáveis

Se uma uniformidade $\mathcal{U}$ sobre um conjunto X é induzida por alguma pseudométrica d, isto é, a uniformidade $\mathcal{U}$ é **pseudometrizável**, e $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de números reais maiores do que zero satisfazendo $\varepsilon_n \to 0$, então as *entourages* da forma

$$D_n := \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < \varepsilon_n\}$$

constituem uma base para a uniformidade $\mathcal{U}$: a convergência da sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ garante que $\mathcal{D} := \{D_n : n \in \omega\}$ é $\supseteq$-*cofinal*[27] em $\mathcal{E} := \{E_r : r > 0\}$, onde E_r são os protótipos de *entourages* definidas em (4.1); como $\mathcal{E}$ é base de $\mathcal{U}$ por definição, resulta que $\mathcal{D}$ também é. Em outras palavras:

Proposição 4.1.55. *Toda uniformidade pseudometrizável tem base enumerável.*

Nesse contexto, a discussão anterior sobre topologias completamente regulares permite mostrar a *validade da recíproca*. De fato, se $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \omega\}$ é base enumerável para uma uniformidade $\mathcal{U}$ sobre um conjunto X, então duas coisas são imediatas:

- ✓ pode-se supor $\mathcal{B}$ decrescente com respeito à inclusão;
- ✓ existe uma sequência $(V_n)_{n\in\omega}$ de *entourages* simétricas tais que $V_0 := X \times X$, $V_n \subseteq B_n$ e $3V_{n+1} \subseteq V_n$ para todo $n \in \omega$.

Logo, a pseudométrica d associada à sequência $(V_n)_{n\in\omega}$ (como no Teorema 4.1.52) induz a mesma uniformidade gerada por $\mathcal{B}$: como

$$\left\{(x,y) : d(x,y) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq V_n \subseteq \left\{(x,y) : d(x,y) \leq \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq \left\{(x,y) : d(x,y) < \frac{1}{2^{n-1}}\right\} \subseteq V_{n-1}$$

para todo $n > 0$, resulta que a uniformidade gerada por $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \omega\}$ coincide com a uniformidade gerada por d; por $\mathcal{V}$ ser $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{B}$, ambas devem gerar a mesma uniformidade[28]. Em suma, a combinação desse argumento com a última proposição demonstra o importante

Teorema 4.1.56. *Um espaço uniforme é pseudometrizável se, e somente se, sua uniformidade admite base enumerável.*

Como uma pseudométrica é métrica se, e somente se, a topologia induzida por ela é de Hausdorff[29], a Proposição 4.1.42 aliada ao Lema 4.1.47 e ao Exercício 4.8 trazem o

Corolário 4.1.57. *Uma uniformidade $\mathcal{U}$ sobre X é metrizável se, e somente se, $\mathcal{U}$ admite uma base enumerável $\mathcal{B}$ tal que $\bigcap \mathcal{B} = \Delta_X$.*

Exemplo 4.1.58 (Metrizabilidade de Urysohn revisitada)**.** No (não tão) distante Teorema 3.1.17, mostramos ser possível mergulhar espaços regulares com base enumerável em $[0,1]^\omega$. Na ocasião, foi mencionado que isso garante a metrizabilidade de tais espaços, dado que $[0,1]^\omega$ é metrizável. Contudo, essa última afirmação acerca de $[0,1]^\omega$ ainda não foi demonstrada – por questões puramente estéticas.

[27] Como na Definição K.1.143: para todo $E \in \mathcal{E}$ existe $D \in \mathcal{D}$ com $D \supseteq E$.
[28] Proposição 4.1.28.
[29] Confira, por exemplo, o Exercício 1.157.

Note que, se para cada $n \in \omega$ for dado um espaço uniforme $(X_n, \mathcal{U}_n)$ com uma base enumerável $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{U}_n$, então a uniformidade produto $\mathcal{U}_\pi$ de $X := \prod_{n\in\omega} X_n$ tem uma base enumerável: tal uniformidade tem como *entourages* usuais os subconjuntos $U \subseteq X \times X$ que contêm interseções finitas de subconjuntos da forma $(\pi_n \times \pi_n)^{-1}[B]$ com $n \in \omega$ e $B \in \mathcal{B}_n$; a família de tais interseções finitas constitui, precisamente, uma base enumerável para a uniformidade $\mathcal{U}_\pi$. Logo, como a topologia produto de X coincide com a topologia induzida pela uniformidade produto, segue o

Teorema 4.1.59. *O produto enumerável de espaços topológicos* (*pseudo*) *metrizáveis é* (*pseudo*) *metrizável com a topologia produto.*

Em particular, $[0, 1]^\omega$ é metrizável pois $[0, 1]$ é metrizável. Com isso, pode-se finalmente enunciar o

Corolário 4.1.60 (Metrizabilidade de Urysohn – sem máscaras)**.** *Se X é um espaço regular com peso enumerável, então X é metrizável.*

A recíproca é falsa, como qualquer espaço discreto e não-enumerável é capaz de testemunhar. A rigor, o Teorema da Metrizabilidade de Urysohn caracteriza apenas os espaços métricos *separáveis*. As caracterizações gerais de (pseudo) metrizabilidade dependem, em maior ou menor grau, de variações de finitude local e paracompacidade, e serão discutidos em breve. ▲

Este é um bom momento para observar as “inclusões”

$$\text{métrica} \subsetneq \text{pseudométrica} \subsetneq \text{uniformidade} \subsetneq \text{topologia}$$

pois elas escondem uma sutileza bastante importante. Geralmente, duas (pseudo) métricas sobre um mesmo conjunto são ditas (topologicamente) **equivalentes** se as topologias induzidas por elas forem idênticas. Contudo, a negligência usual do termo entre parênteses na frase anterior contribui para que questões uniformes sejam esquecidas.

Mais precisamente, é claro que se d_0 e d_1 são (pseudo) métricas topologicamente equivalentes sobre um mesmo conjunto X (Exercício 1.82), então as uniformidades correspondentes $\mathcal{U}_{d_0}$ e $\mathcal{U}_{d_1}$ devem induzir a mesma topologia. Porém, não há razão para esperar que $\mathcal{U}_{d_0}$ e $\mathcal{U}_{d_1}$ coincidam! Em outras palavras, duas métricas podem induzir a mesma topologia e, ainda assim, suas uniformidades induzidas não coincidirem.

Exemplo 4.1.61. Sobre $\mathbb{R}$, consideremos as métricas $d_0, d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $d_0(x, y) := |x-y|$ e $d_1(x, y) = |x^3-y^3|$, respectivamente. Tais métricas são (métricas, certo?) topologicamente equivalentes pois a correspondência $x \mapsto x^3$ define um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é dotado de sua topologia usual.

Evidentemente, h é uma função contínua e fechada[30], injetora por $\mathbb{R}$ ser um corpo ordenado[31] e sobrejetora pela conexidade[32] de $\mathbb{R}$; logo, em virtude da Proposição 1.1.111, h é um homeomorfismo. Com isso, a equivalência topológica entre as métricas d_0 e d_1 segue pois a continuidade de h atesta $\mathcal{T}_{d_0} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$, enquanto a continuidade h^{-1} garante a inclusão oposta. O leitor pode cuidar dos detalhes.

[30] Por ser polinomial, vide o Corolário 1.1.94 e o Exemplo 3.2.45.

[31] Dica: se $x^3 = y^3$, então $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$.

[32] Use o Teorema do Valor Intermediário (Corolário 2.3.18), por exemplo.

O importante a destacar aqui, porém, é outra coisa: as uniformidades induzidas por d_0 e d_1 são distintas, essencialmente pelo fato de h não ser uniformemente contínua[33]. Note que se ocorresse $\mathcal{U}_{d_0} \subseteq \mathcal{U}_{d_1}$, então para todo $\varepsilon > 0$ existiria $\delta > 0$ tal que

$$\{(x, y) : |x^3 - y^3| < \delta\} \subseteq \{(x, y) : |x - y| < \varepsilon\}$$

ou, em outras palavras, h seria uniformemente contínua, coisa que não ocorre (em caso de dúvida, confira a Figura 4.1). ▲

Assim, faz sentido dizer que duas (pseudo) métricas sobre um mesmo conjunto são **uniformemente equivalentes** se as uniformidades induzidas por elas forem idênticas. Analogamente, pode-se dizer que duas uniformidades são **topologicamente equivalentes** se as topologias induzidas por elas coincidirem. O leitor interessado em mais discussões sobre a relação entre (pseudo) métricas e uniformidades pode conferir as referências bibliográficas já mencionadas no capítulo. Por aqui, seguiremos para o cenário topológico.

Topologias (pseudo) metrizáveis

Em virtude do Teorema 4.1.56 e do Corolário 4.1.57, um espaço topológico é pseudometrizável se, e somente se, existe *ao menos uma* uniformidade com base enumerável que induz sua topologia, com uma equivalência análoga para metrizabilidade ao se adicionar a condição de Haudorff "dos dois lados".

Observação 4.1.62. Dizer que um espaço X é (pseudo) metrizável não garante que toda uniformidade *compatível* tenha base enumerável. Um exemplo marcante desse fenômeno é dado por Engelking [39]: a topologia discreta!

De fato, a topologia discreta sobre um conjunto X pode ser induzida, por exemplo, pela uniformidade $\mathcal{D} := \{U \subseteq X \times X : \Delta_X \subseteq U\}$: como $\Delta_X \in \mathcal{D}$, o subconjunto $\Delta_X[x] = \{x\}$ deve ser uma vizinhança de x e, portanto, deve ser aberto, para qualquer $x \in X$. Até aqui nada de novo, já que $\mathcal{B} := \{\Delta_X\}$ é um conjunto finito (logo enumerável[34]), o que condiz com a metrizabilidade já conhecida dos espaços discretos. No entanto, para X não-enumerável, existe uma uniformidade $\mathcal{U}$ sobre X que induz a topologia discreta mas que não admite bases enumeráveis.

Com efeito, para cada $F \in [X]^{<\aleph_0}$, basta fazer

$$V(F) := \{(x, y) \in X \times X : x = y \text{ ou } \{x, y\} \cap F = \emptyset\}$$

e considerar $\mathcal{U} := \left\{V(F) : F \in [X]^{<\aleph_0}\right\}^{\Uparrow}$.

Pela definição, é fácil ver que

✓ $\Delta_X \subseteq V(F)$ para todo $F \in [X]^{<\aleph_0}$,

✓ $V(F) \circ V(F) = V(F)$, e

✓ $V(F) = (V(F))^{-1}$,

donde segue que $\mathcal{U}$ é, de fato, *uma* uniformidade. A topologia induzida por $\mathcal{U}$ é discreta pois ocorre $V(\{x\})[x] = \{x\}$ para qualquer x.

[33] A argumentação é parecida com a do Exemplo 4.1.22.

[34] É sempre bom lembrar que neste texto, dizer que S é enumerável consiste em afirmar $|S| \leq \aleph_0$.

Dito isso, mostraremos que $\mathcal{U}$ não admite base enumerável: suponha que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ seja uma base enumerável para a uniformidade $\mathcal{U}$ e, para cada $x \in X$, tome $B_x \in \mathcal{B}$ com $B_x \subseteq V(\{x\})$, o que determina uma função $X \to \mathcal{B}$; como X é não-enumerável, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A := \{x \in X : B_x = B\}$ é não-enumerável; em particular, como $B \in \mathcal{U}$, existe um subconjunto finito $F \in [X]^{<\aleph_0}$ tal que $V(F) \subseteq B$; por fim, como a inclusão $V(C) \subseteq V(D)$ ocorre[35] se, e somente se, $D \subseteq C$, chega-se a $A \subseteq F$, o que é impossível em vista da cardinalidade do conjunto A. $\triangle$

Assim, a caracterização de (pseudo) metrizabilidade por meio de uniformidades é moralmente idêntica à definição original, em que se precisa da (pseudo) métrica certa a fim de verificar a compatibilidade. O interessante, na verdade, seria obter critérios como o do Corolário 4.1.60, em que *a partir* de propriedades topológicas garante-se a *existência* de uma métrica. Há diversos teoremas dessa natureza que capturam facetas distintas, mas *equivalentes*, do que significa ser (pseudo) metrizável. Para tanto, seremos obrigados a, ~~infelizmente~~ finalmente, considerar alguns fatos elementares sobre *séries* de números reais.

Observação 4.1.63. Até agora, as séries que figuraram no texto foram supremos de somas de números não-negativos[36] ou mesmo somas finitas vendidas como séries (partições da unidade). Dado que o aparato teórico sobre convergência apresentado até aqui já é bem mais robusto do que o necessário para discutir séries, deve ficar claro para o leitor que isso ainda não foi feito por mera preguiça de quem vos escreve. Isso já rendeu *problemas* nas demonstrações dos Teoremas de Urysohn na Subseção 2.2.2, por exemplo. Como, desta vez, evitar séries traria ~~ainda~~ mais dor de cabeça, convém abandonar o senso estético. $\triangle$

Definição 4.1.64. Para uma sequência fixada $(a_n)_{n\in\omega}$ de números reais, denotaremos por $\sum_{n\in\omega} a_n$ o limite, caso exista, da sequência $(a_0 + \ldots + a_n)_{n\in\omega}$ das *somas parciais* da sequência, que chamaremos de **série** de $(a_n)_{n\in\omega}$. A série será dita **convergente** se tal limite existir em $\mathbb{R}$, caso contrário ela será dita divergente. ¶

O único detalhe técnico que precisaremos usar sobre séries advém da *completude da reta real*, no sentido do que será aprofundado na próxima seção [37]: uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ de números reais converge em $\mathbb{R}$ se, e somente se, é de Cauchy. Em particular, se a sequência das somas parciais de uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ for de Cauchy, então $\sum_{n\in\omega} a_n$ converge.

É claro que se X é um conjunto e $(f_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de funções reais da forma $X \to \mathbb{R}$, também se pode considerar, de modo análogo, a série $\sum_{n\in\omega} f_n$ definida como o *limite* da sequência $(f_0 + \ldots + f_n)_{n\in\omega}$, se tal limite existir. Todavia, como neste caso a convergência ocorre em $\mathbb{R}^X$, é preciso destacar segundo qual topologia a convergência acontece. Aqui, consideraremos $\mathbb{R}^X$ dotado da *topologia da convergência uniforme*, caso em que se diz que a série $\sum_{n\in\omega} f_n$ *converge uniformemente*. Com isso dito, tem-se a seguinte

Proposição 4.1.65 (Teste M de Weierstrass)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de funções reais definidas sobre um conjunto X. Suponha que para cada $n \in \omega$ exista $M_n > 0$ tal que $|f_n| \leq M_n$ e $\sum_{n\in\omega} M_n \in \mathbb{R}$. Então a série $\sum_{n\in\omega} f_n$ converge uniformemente*[38] *e, em particular, é contínua.*

[35] Desde que X seja infinito.
[36] Definição K.2.133.
[37] No caso específico da reta real, ela será ainda mais destrinchada na Subseção 5.1.2.
[38] Pode ser edificante rever a Definição 4.1.35.

Demonstração. Para $x \in X$ fixado e $m, n \in \omega$ com $m < n$, tem-se

$$\left|\sum_{j\leq m} f_j(x) - \sum_{j\leq n} f_j(x)\right| = \left|\sum_{j=m+1}^{n} f_j(x)\right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |f_j(x)| \leq \sum_{j=m+1}^{n} M_j := E_{m,n}.$$

Ora, como a série $\sum_{n\in\omega} M_n$ converge, a sequência de suas somas parciais é de Cauchy e, portanto, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que $E_{m,n} < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N$. Isso mostra que a sequência das somas parciais de $(f_n(x))_{n\in\omega}$ é de Cauchy e, pela completude de $\mathbb{R}$, convergente. Em particular, como o índice N obtido independe do ponto x escolhido, resulta que a convergência é uniforme. □

Observação 4.1.66. O conjunto $\mathbb{R}^X$ munido da topologia da convergência uniforme é metrizável, já que sua uniformidade admite base enumerável[39]. Um modo esperto de exibir uma (métrica) consiste em truncar aquela que *gostaríamos* de usar, mas que poderia atingir $+\infty$. Mais precisamente:

$$\widehat{\rho}\,(f, g) := \min\left\{1, \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|\right\}$$

para quaisquer $f, g \in \mathbb{R}^X$. O leitor interessado fica a cargo de suprir os detalhes. △

Exemplo 4.1.67 (O Teorema da extensão de Urysohn, revisitado)**.** Uma vez em posse do Teste M de Weierstrass, deixa de fazer sentido basear o importante Teorema 2.2.28 (da extensão de Urysohn) no intrincado "Truque de Mandelkern". Para o que segue, pode ser útil rever a definição de separação completa (Definição 2.2.24), bem como o Exercício 2.50.

Lema 4.1.68. *Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subespaço. Se quaisquer dois subconjuntos de S completamente separados em S são completamente separados em X, então toda função contínua e limitada $f\colon S \to \mathbb{R}$ admite uma extensão $F\colon X \to \mathbb{R}$ contínua e limitada.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in S$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$r_n := \frac{M}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

e façamos $f_1 := f$. Vamos obter uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $\mathcal{C}^*(S)$ satisfazendo $|f_n(x)| \leq 3r_n$ para quaisquer $x \in S$ e $n \in \mathbb{N}$. Para tanto, observe que:

(i) f_1 satisfaz $|f_1| \leq 3r_1$ por construção;

(ii) supondo $n > 1$ e $f_1, \ldots, f_n$ definidas, a função f_n atesta que os subconjuntos

$$A_n := \{s \in S : f_n(s) \leq -r_n\} \text{ e } B_n := \{s \in S : f_n(s) \geq r_n\}$$

são completamente separados em S, donde a hipótese acerca de S garante uma função $g_n\colon X \to \mathbb{R}$, limitada e contínua, tal que $g_n(x) = -r_n$ se $x \in A_n$ e $g_n(x) = r_n$ se $x \in B_n$, isso tudo com $|g_n| \leq r_n$.

Mostraremos que $f_{n+1} := f_n - g_n|_S$ satisfaz a desigualdade desejada. Com efeito, se $x \in S$, então há três casos:

[39] Basta cozinhar uma base apropriada por meio da Proposição 4.1.36.

✓ $x \in A_n$, e daí $-3r_n \leq f_n(x) \leq -r_n$, acarretando $-2r_n \leq f_n(x) + r_n \leq 0 \leq 2r_n$, i.e., $|f_n(x) - g_n(x)| \leq 2r_n$;

✓ $x \in B_n$, donde resulta, de modo análogo, $|f_n(x) - g_n(x)| \leq 2r_n$;

✓ ou $-r_n < f_n(x) < r_n$, donde o fato de se ter $-r_n \leq g_n(x) \leq r_n$ também permite inferir que $|f_n(x) - g_n(x)| \leq 2r_n$.

A desigualdade desejada segue, então, da identidade $2r_n = 3r_{n+1}$.

A extensão procurada de f, porém, será dada por meio da sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implícita no argumento. Mais precisamente, definamos

$$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$$

para todo $x \in X$. Como $|g_n(x)| \leq r_n$ para todo n e

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{M}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

converge[40], o Teste M de Weierstrass garante que g é contínua. Por fim, para $x \in S$, o modo como se tomaram f_n e g_n acarretam em

$$\begin{aligned} g_1(x) + \ldots + g_n(x) &= (f_1(x) - f_2(x)) + (f_2(x) - f_3(x)) + \ldots + (f_n(x) - f_{n+1}(x)) = \\ &= f_1(x) - f_{n+1}(x), \end{aligned}$$

donde a identidade $g(x) = f(x)$ decorre de se ter $f_n(x) \to 0$. O leitor pode cuidar dos detalhes. □

Assim, fica (re) demonstrado o Teorema da Extensão de Urysohn, mesmo para leitores dependentes da convergência uniforme. ▲

Agora é um bom momento para recordar que, pelo Lema de Urysohn (Teorema 2.2.15), um espaço X é T_4 se, e somente se, para quaisquer fechados disjuntos F e G existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(y) = 1$ para todo $y \in G$. Aqui, veremos que algo mais forte é válido para espaços métricos.

Lema 4.1.69. *Sejam X um espaço T_4 e $F \subseteq X$ um subconjunto. Então F é um G_δ fechado*[41] *de X se, e somente se, existe uma função contínua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $F = f^{-1}[\{0\}]$.*

Demonstração. Como $\{0\}$ é um G_δ fechado de $[0,1]$, é claro que se existe uma função como no enunciado, então F é um G_δ fechado. Por outro lado, se F é um G_δ fechado, então seu complementar é um F_σ, i.e., uma reunião enumerável de fechados, digamos

$$X \setminus F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

O Lema de Urysohn *conjura* uma função contínua $f_n\colon X \to [0,1]$ para cada $n \in \omega$, com $f_n(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f_n(y) = 1$ para todo $y \in F_n$. Agora, note que a correspondência

$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

define uma função contínua $X \to [0,1]$. De fato:

[40] Se $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < 1$, então $\sum_{n\in\omega} a^n = \frac{1}{1-a}$, como sugere o Exercício 4.33.

[41] Ou seja: é um subespaço fechado que se escreve como interseção de enumeráveis abertos.

✓ para cada $m \in \mathbb{N}$, a função $\sum_{j\leq m} \frac{1}{2^j} f_j \colon X \to \mathbb{R}$ é contínua por ser soma de funções contínuas;

✓ como $|f_n| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo n e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$, o Teste M de Weierstrass assegura que as somas parciais do item anterior convergem uniformemente para a função definida acima;

✓ a Proposição 4.1.38 garante a continuidade da função f, por esta ser limite uniforme de funções contínuas;

✓ deve ocorrer $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$ pois

$$0 \leq \sum_{j\leq m} \frac{1}{2^j} f_j(x) \leq \sum_{j\leq m} \frac{1}{2^j}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, e daí a desigualdade desejada decorre do Exercício 1.224.

Por fim, note que f satisfaz a identidade desejada: por um lado, se $x \in F$, então $f_n(x) = 0$ para todo $n \in \omega$, acarretando $f(x) = 0$; por outro lado, se $x \notin F$, então existe $n \in \omega$ com $x \in F_n$, e daí $f(x) \geq \frac{1}{2^n} > 0$. Portanto, $f^{-1}[\{0\}] = F$, como queríamos. □

Observação 4.1.70. O intervalo $[0, 1]$ é, naturalmente, irrelevante: basta que exista uma função real contínua e limitada tal que F seja a pré-imagem de um número real. Em particular, com o intervalo $[0, 2]$ como codomínio, os índices da série construída poderiam percorrer ω em vez de $\mathbb{N}$. △

Corolário 4.1.71. *Todo fechado de um espaço pseudométrico é G_δ.*

Demonstração. Segue do Exercício 1.94 e dos Lemas 2.1.38 e 2.1.39. □

Diremos que X é um espaço **perfeitamente T_4** se X for T_4 e todo subespaço fechado for um subconjunto G_δ – ou, equivalentemente, *se todo subespaço aberto for um F_σ*, i.e., uma reunião enumerável de subespaços fechados. Na literatura, porém, é mais comum considerar os espaços **perfeitamente normais**, obtidos com a suposição adicional de que pontos são fechados (ou seja: adiciona-se o axioma T_1). Naturalmente, todo espaço métrico é perfeitamente normal, enquanto espaços pseudométricos são perfeitamente T_4. No principal teorema de (pseudo) metrizabilidade que veremos, a próxima proposição facilitará muito as coisas.

Proposição 4.1.72. *Para um espaço topológico X, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *X é perfeitamente T_4;*

(ii) *para todo fechado $F \subseteq X$ existe uma função contínua $f \colon X \to [0, 1]$ satisfazendo $f^{-1}[\{0\}] = F$;*

(iii) *para todo aberto $A \subseteq X$ existe uma função contínua $f \colon X \to [0, 1]$ satisfazendo $f^{-1}[(0, 1]] = A$;*

(iv) *se $F, G \subseteq X$ são fechados disjuntos, então existe uma função contínua $f \colon X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}[\{0\}] = F$ e $f^{-1}[\{1\}] = G$.*

Demonstração. O lema anterior garante $(i) \Rightarrow (ii)$, enquanto $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ decorre da identidade $g^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus g^{-1}[A]$, válida para toda função $g\colon X \to Y$ e qualquer subconjunto $A \subseteq Y$. Agora, (iv) segue de (ii) pois, se $f\colon X \to [0,1]$ e $g\colon X \to [0,1]$ são funções contínuas com $f^{-1}[\{0\}] = F$ e $g^{-1}[\{0\}] = G$, então a correspondência

$$x \mapsto \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$$

define uma função contínua $h\colon X \to [0,1]$ tal que $h^{-1}[\{0\}] = F$ e $h^{-1}[\{1\}] = G$. Finalmente, a implicação $(iv) \Rightarrow (i)$ é praticamente automática, e será deixada para o leitor. □

Funções contínuas como as do item 3 da proposição acima serão utilizadas na construção de pseudométricas. Os abertos correspondentes serão membros de um tipo especial de base de abertos, presente em todo espaço pseudometrizável.

Definição 4.1.73. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é **σ-localmente finita** se existe uma coleção enumerável $\mathscr{L}$ de famílias localmente finitas de subconjuntos de X satisfazendo $\mathcal{A} = \bigcup \mathscr{L}$. ¶

Lema 4.1.74. *Todo espaço pseudometrizável admite base de abertos σ-localmente finita.*

Demonstração. Seja (X, d) um espaço pseudométrico e para cada $n \in \omega$ considere a cobertura por bolas abertas $\mathcal{B}_n := \left\{B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X\right\}$. Como X é paracompacto, pelo Teorema 3.2.56 (de Stone), cada cobertura $\mathcal{B}_n$ admite um refinamento localmente finito, digamos $\mathcal{V}_n$. Não é difícil se convencer que $\mathcal{V} := \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ é uma base σ-localmente finita. □

Até agora, sabemos que espaços pseudometrizáveis são T_3 e admitem bases de abertos σ-localmente finitas. O Teorema de Nagata-Smirnov, a cereja desta seção, dará a recíproca. Precisamos somente de mais dois lemas técnicos.

Lema 4.1.75. *Se X é T_3 e admite uma base de abertos σ-localmente finita, então X é perfeitamente T_4.*

Demonstração. Deve-se mostrar duas coisas: i) X é T_4 e ii) todo aberto de X é um F_σ. Seja então $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$ uma base para a topologia de X, com $\mathcal{B}_n$ localmente finita para cada $n \in \omega$. Para um aberto não-vazio $W \subseteq X$ fixado, a condição T_3 permite tomar, para cada $x \in W$, um número natural $n_x \in \omega$ e um aberto $B_{n_x} \in \mathcal{B}_{n_x}$ tais que $x \in B_{n_x} \subseteq \overline{B_{n_x}} \subseteq W$. Agora, o *Katzensprung* consiste em definir

$$W_j := \bigcup \{B_{n_x} : x \in W \text{ e } n_x = j\}$$

para cada $j \in \omega$. É claro que $W = \bigcup_{j\in\omega} W_j$, enquanto o Exercício 3.69 garante

$$\overline{W_j} = \overline{\bigcup \{B_{n_x} : x \in W \text{ e } n_x = j\}} = \bigcup \left\{\overline{B_{n_x}} : x \in W \text{ e } n_x = j\right\} \subseteq W,$$

onde a última inclusão decorre do modo como os abertos básicos de $\mathcal{B}$ foram escolhidos. Curiosamente, isso já mostra que $W = \bigcup_{j\in\omega} \overline{W_j}$, i.e., W é um F_σ. O axioma T_4 segue automaticamente de sua formulação equivalente (T_4.d) dada pela Proposição 2.1.46: se um subconjunto fechado F está contido em W, então a família $\mathcal{W} := \{W_j : j \in \omega\}$ satisfaz $F \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ e $\overline{W_j} \subseteq W$ para todo $j \in \omega$. □

Lema 4.1.76. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{G} := \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de pseudométricas contínuas e limitadas por 1. Se para quaisquer ponto $x \in X$ e subconjunto fechado $F \subseteq X$ com $x \notin F$ existir $n \in \mathbb{N}$ com $d_n(x, F) := \inf\{d_n(x, y) : y \in F\} > 0$, então a função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(x, y) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(x, y)$$

define uma pseudométrica compatível com a topologia de X.

Demonstração. O Teste M de Weierstrass garante que d é uma função bem definida em $X \times X$, enquanto os demais axiomas de uma pseudométrica seguem automaticamente. A fim de mostrar que d induz a topologia de X, mostraremos que

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

para qualquer $A \subseteq X$. Note que em posse disso, se $U \subseteq X$ *for* aberto e $x \in U$, então para $F := X \setminus U$, a identidade acima *implicará* que $d(x, F) := r > 0$, acarretando $B(x, r) \subseteq U$.

Pois bem, se $x \notin \overline{A}$, então a hipótese sobre a família $\mathcal{G}$ assegura um $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $d_n\left(x, \overline{A}\right) := 2^n r > 0$ para algum $r > 0$, o que acarreta $d(x, A) \geq d\left(x, \overline{A}\right) \geq r > 0$. Por outro lado, como cada d_n é contínua, a própria função d é contínua[42], o que implica na continuidade da função $f\colon X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := d(x, A)$: basta adaptar a parte final dos argumentos do Lema 2.1.38, tarefa que fica a cargo do leitor. Finalmente, se $x \in \overline{A}$, então $f(x) \in f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]} = \{0\}$, i.e., $f(x) := d(x, A) = 0$. □

Depois de toda essa luta... é chegada a hora de pagar mais uma dívida.

Teorema 4.1.77 (Nagata-Smirnov)**.** *Um espaço topológico é pseudometrizável se, e somente se, é T_3 e tem uma base σ-localmente finita.*

Demonstração. A Observação 2.1.40 e o Lema 4.1.74 garantem a direção "óbvia". Para a recíproca, seja $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{B}_n$ uma base de abertos, com $\mathcal{B}_n$ localmente finita para cada $n \in \omega$. Como X também é T_3, o Lema 4.1.75 garante que X é perfeitamente T_4, e daí o item 3 da Proposição 4.1.72 dá, para cada $B \in \mathcal{B}$, uma função contínua $f_B\colon X \to [0, 1]$ satisfazendo $B = f_B^{-1}[(0, 1]]$. A família de funções $\{f_B : B \in \mathcal{B}\}$ é o ingrediente principal na construção da pseudométrica procurada – mas há muitos temperos.

Para cada $B \in \mathcal{B}$, definamos $C_B := (B \times X) \cup (X \times B) \subseteq X \times X$, de modo que $g_B\colon X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $g_B(x, y) := |f_B(x) - f_B(y)|$ é uma função contínua satisfazendo $g_B(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \notin C_B$. Como $\mathcal{B}_n$ é uma família de abertos de X localmente finita, segue que $\mathcal{W}_n := \{C_B : B \in \mathcal{B}_n\}$ é uma família localmente finita de abertos de $X \times X$ e, consequentemente, a função

$$h_n := \sum_{B \in \mathcal{B}_n} g_B\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

é contínua. O penúltimo passo da construção consiste em tomar $d_n := \min\{1, h_n\}$, claramente uma pseudométrica sobre X, limitada por 1. Em posse disso, vamos mostrar que a família $\mathcal{G} := \{d_n : n \in \omega\}$ satisfaz as hipóteses do lema anterior, donde o resultado desejado seguirá.

[42]Novamente, por ser limite uniforme de funções contínuas. Em particular, tal continuidade assegura que as d-bolas abertas são abertos da topologia *original* de X.

Dados um ponto $x \in X$ e um subconjunto fechado $F \subseteq X$ com $x \notin F$, existe um aberto $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B \subseteq X \setminus F$ e, consequentemente, $F \subseteq X \setminus B$. Por construção, tem-se $0 < f_B(x) \leq 1$ enquanto $f_B(y) = 0$ para todo $y \in F$. Logo, para $n \in \omega$ tal que $B \in \mathcal{B}_n$, ocorre

$$0 < f_B(x) \leq \inf\{d_n(x, y) : y \in F\},$$

como queríamos... Suspiro. □

Observação 4.1.78 (Sobre pontos fechados)**.** O poderoso teorema acima também garante metrizabilidade se a hipótese de que o espaço topológico é T_1 for adicionada. Mais precisamente: *um espaço topológico é metrizável se, e somente se, é regular e admite uma base de abertos σ-localmente finita.*

Neste caso, a estrutura da prova é idêntica, exceto pelo último lema, que até então cozinha apenas uma pseudométrica. Ocorre que, nas hipóteses do Lema 4.1.76, a adição da hipótese T_0 já basta para fazer de d uma métrica: o que segue, essencialmente, da Proposição 2.1.6. △

Exemplo 4.1.79 (Metrizabilidade para geômetras e *afins*)**.** Como já alertado por Álvaro de Campos[43] n'*A Tabacaria*,

> [...]
> *O mundo é para quem nasce para conquistar*
> *E não para quem sonha que pode conquistá-lo, ainda que tenha razão.* [...]

Dito isso, muitos dos resultados apresentados neste texto não interessam à grande maioria daqueles que conquistaram o mundo. A metrizabilidade, porém, é uma exceção: ter um critério prático para determinar a metrizabilidade de espaços estranhos ajuda a torná-los mais afáveis. O crivo para estabelecer o que é ou não prático, obviamente, depende de quem detém o controle do mundo...

Para a imensa turma que se debruça diariamente sobre *variedades diferenciáveis* ou mesmo *topológicas*, a metrizabilidade é um conceito local: cada ponto de uma *variedade* admite uma vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, para algum $n \in \omega$. Assim, embora possa parecer sem importância, ter metrizabilidade local como critério de metrizabilidade global pode agradar muita gente. Dito isso: ▲

Teorema 4.1.80 (Metrizabilidade de Smirnov)**.** *Um espaço topológico é metrizável se, e somente se, é de Hausdorff, paracompacto e localmente metrizável.*

Demonstração.[44] Como as hipóteses de paracompacidade e Hausdorff garantem (em particular) regularidade, o Teorema de Nagata-Sminorv permite reduzir a prova da implicação não-trivial[45] à "construção" de uma base de abertos σ-localmente finita.

Seja $\mathcal{V} := \{V_x : x \in X\}$ uma cobertura para X por abertos metrizáveis e considere $\mathcal{U}$ um refinamento localmente finito de $\mathcal{V}$ por abertos. Como cada $U \in \mathcal{U}$ é metrizável, existe uma métrica $d_U : U \times U \to \mathbb{R}$ que induz a topologia de subespaço de U e, mais ainda, por U ser aberto, cada bola

$$B_U(x, r) := \{y \in U : d_U(x, y) < r\}$$

é um subconjunto aberto de X.

[43] *A.k.a.* Fernando Pessoa.

[44] Argumento adaptado da exposição de James Munkres [79], o que não surpreende.

[45] É claro que todo espaço metrizável é paracompacto, de Hausdorff e localmente metrizável...

Definamos $\mathcal{C}_n := \left\{B_U\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in U \in \mathcal{U}\right\}$ para cada $n \in \omega$, uma cobertura por abertos de X. Pela paracompacidade, existe um refinamento por abertos localmente finito, digamos $\mathcal{B}_n$, de modo que a família $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$ se torna σ-localmente finita. Enfim, basta mostrar que $\mathcal{B}$ é base para a topologia de X.

Dados um aberto $W \subseteq X$ e um ponto $x \in W$, existem finitos elementos da cobertura $\mathcal{U}$ que contêm x, digamos $U_0, \ldots, U_m$, de modo que $W \cap U_i$ é uma vizinhança de U_i. Consequentemente, para cada $i \leq m$ existe um número real $r_i > 0$ tal que

$$B_{U_i}(x, r_i) \subseteq W \cap U_i.$$

Agora, para cada $n \in \omega$, existe $B_n \in \mathcal{B}_n$ com $x \in B_n$ e, pelo modo como se tomou $\mathcal{B}_n$, também existem $U'_n \in \mathcal{U}$ e $y_n \in U'_n$ tais que $B_n \subseteq B_{U'_n}\left(y_n, \frac{1}{2^n}\right)$, donde segue que $U'_n = U_j$ para algum $j \leq m$. Observe então que para n satisfazendo $\frac{1}{2^{n-1}} < \min\{r_0, \ldots, r_m\}$, deve-se ter $B_{U'_n}\left(y_n, \frac{1}{2^n}\right) = B_{U_j}\left(y_n, \frac{1}{2^n}\right) \subseteq B_{U_j}(x, r_j) \subseteq W$. Em particular, conclui-se que $B_n \in \mathcal{B}$ é um subconjunto de W, como desejado. $\square$

Observação 4.1.81. Essencialmente, a condição de Hausdorff acima foi usada apenas para garantir a validade do axioma T_3, necessária no Teorema de Nagata-Smirnov. Nesse sentido, se definíssemos paracompacidade por meio de partições da unidade, bastaria pedir T_1, em virtude do Corolário 3.2.63. $\triangle$

Há muitos outros critérios de metrizabilidade equivalentes entre si, mas esses costumam utilizar mecanismos e definições bem mais intrincadas de Topologia Geral e que, por isso, não se enquadram no presente interlúdio. Um último comentário, eco da observação acima, pode interessar aos leitores que preferem partições da unidade: o Teorema de Smirnov pode ser provado, diretamente, por meio de partições da unidade, usadas para "colar" as métricas cuja existência é garantida localmente. Embora tal argumento seja mais complicado do que parece, ele não é tão intrincado quanto o que foi apresentado aqui, e pode ser útil para quem tem pressa. Um roteiro para fazer isso é o seguinte:

1. Mostre que todo espaço métrico é homeomorfo a um subespaço de um *espaço real normado*.

2. Supondo que X é paracompacto, de Hausdorff e localmente metrizável, tome uma cobertura localmente finita por abertos localmente metrizáveis, digamos $\mathcal{U}$, e seja $\Phi := \{\varphi_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ uma partição da unidade precisamente subordinada a $\mathcal{U}$.

3. Para cada $U \in \mathcal{U}$, considere um *espaço real normado* L_U e um mergulho $f_U \colon U \to L_U$, existentes em vista do primeiro passo.

4. Seja $M := (\bigoplus_{U\in\mathcal{U}} L_U) \times \mathbb{R}$ e defina sobre tal conjunto a *norma da soma*.

5. Defina $F \colon X \to M$ por $F(x) := (\varphi_U(x) f_U(x), \varphi_U(x))_{U\in\mathcal{U}}$ e convença-se de que tal função é um mergulho.

O leitor interessado encontrará mais detalhes no texto de Reinhard Schultz, *Partitions of unity and a metrization theorem of Smirnov*, disponível em https://math.ucr.edu/~res/m205C/smirnov.pdf. Por aqui, encerra-se a primeira grande seção deste capítulo, e fica a cargo da próxima retornar ao contexto de espaços uniformes para *completar* nosso entendimento acerca do critério de Cauchy.

Exercícios complementares da seção

Uniformidades

Exercício 4.16. Para um espaço (pseudo)métrico (M, d), mostre que a inclusão $E_r \circ E_r \subseteq E_r$ pode ser estrita. ■

Exercício 4.17. Dado um espaço pseudométrico (M, d), mostre que os conjuntos da forma

$$F_r := \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) \leq r\}$$

para $r > 0$, induzem uma uniformidade em M. Convença-se de que esta é a uniformidade usual de M. ■

Exercício 4.18. Mostre que se $U \subseteq X \times X$ satisfaz $\Delta_X \subseteq U$, então $U \subseteq U \circ U$. ■

Exercício 4.19. Pense rápido: se $(X, \mathcal{U})$ é um espaço uniforme e $x \in X$, então $U[x]$ é um aberto de X, qualquer que seja $U \in \mathcal{U}$? ■

Exercício 4.20. Seja X um conjunto qualquer.

a) Mostre que se $V \subseteq X \times X$, então $W := V \cap V^{-1}$ satisfaz $W = W^{-1}$.

b) Mostre que se $W \subseteq W' \subseteq X \times X$, então $2W \subseteq 2W'$.

Conclua que se $\mathcal{U}$ é uma uniformidade sobre X e $V, W, W' \in \mathcal{U}$ são *entourages* satisfazendo $2W' \subseteq V$ e $W = W^{-1} \subseteq W'$, então $2W \subseteq V$. ■

Exercício 4.21. Pense rápido: se $\mathcal{U}$ é uma quase-uniformidade e $U, V \in \mathcal{U}$ são *entourages* tais que $2V \subseteq U$, então $V \subseteq U$? ■

Exercício 4.22. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $U \in \mathcal{U}$ uma *entourage*. Mostre que para todo $n \in \omega$ existe uma *entourage* simétrica $V \in \mathcal{U}$ tal que $nV \subseteq U$. Dica: responda ao exercício anterior afirmativamente e então use o Exercício 4.6 quantas vezes julgar necessário. ■

Exercício 4.23. Seja $X := [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$ e considere a família

$$\mathcal{D}_x := \{D \subseteq X \times X : \Delta_X \cup \{(x, 1), (1, x)\} \subseteq D\}$$

para $x \in X$ fixado.

a) Mostre que $\mathcal{D}_x$ é uma uniformidade sobre X.

b) Para $a, b \in X \setminus \{0, 1\}$ com $a \neq b$, mostre que $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \{A \subseteq X \times X : T \subseteq A\}$, onde $T := \Delta_X \cup \{(a, 1), (1, a), (b, 1), (1, b)\}$.

c) Para os mesmos pontos a e b do item anterior, mostre que $(a, b) \in A \circ A$ para todo $A \in \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$. Pode ocorrer $A \circ A \subseteq T$ para algum $A \in \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$?

Conclua que a interseção de uniformidades sobre um conjunto pode não ser uma uniformidade. ■

Exercício 4.24. Sejam $\mathcal{U}$ um filtro em $X \times X$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ uma base (no sentido usual de filtro) para $\mathcal{U}$. Mostre que se $\mathcal{U}$ é uma uniformidade sobre X, então $\mathcal{B}$ é uma base para a uniformidade $\mathcal{U}$, i.e., satisfaz as condições (UB_1), (UB_2) e (UB_3). ■

Exercício 4.25. Mostre que se $(X, \mathcal{U})$ é um espaço uniforme, então $\mathcal{U}$ admite uma base composta por *entourages* abertas em $X \times X$. Dica: note que se W é uma *entourage* simétrica de X tal que $3W \subseteq V$, então $W \subseteq \operatorname{int}(V)$, onde o interior é tomado em $X \times X$. ■

Exercício 4.26. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $\rho \colon X \times X \to [0, +\infty)$ uma pseudométrica tal que para todo ε existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$ sempre que $(x, y) \in U$. Mostre que ρ é contínua com respeito às topologias usuais de $\mathbb{R}$ e $X \times X$. ■

Exercício 4.27. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $K \subseteq X$ um subespaço compacto. Mostre que se $V \subseteq X$ é um aberto com $K \subseteq V$, então existe uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ tal que $U[K] \subseteq V$. Note que U pode ser tomada simétrica. Dica: adapte a demonstração do Teorema 4.1.10. ■

Exercício 4.28 (Heine-Cantor, versão suporte)**.** Sejam X um espaço uniforme e $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se existir um subespaço compacto $K \subseteq X$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \notin K$, então f é uniformemente contínua. Dica: como $f|_K \colon K \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, o problema quase acabou; a fim de assegurar $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ nas situações em que $x \in K$ e $y \notin K$, note que $J := \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é subespaço fechado contido no interior de K, o que permite usar o exercício anterior para evitar a ocorrência simultânea de $x \in J$ e $y \notin K$. ■

Sortidos

Exercício 4.29. Mostre que um espaço compacto de Hausdorff é metrizável se, e somente se, tem peso enumerável. ■

Exercício 4.30. Sejam X um conjunto, (M,d) um espaço métrico e $f\colon X \to M$ uma função. Mostre que a topologia inicial induzida por f é a topologia induzida pela pseudométrica $d_f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d_f(x,y) := d(f(x), f(y))$. ■

Exercício 4.31. Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}$ uma família de pseudométricas em X. Mostre que a uniformidade induzida pelo calibre $\mathcal{F}$ tem uma base de cardinalidade menor do que ou igual a $|\mathcal{F}|$. ■

Exercício 4.32. Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}$ uma família de funções da forma $X \to \mathbb{R}$. Mostre que se $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$, então a topologia inicial induzida por $\mathcal{F}$ é pseudometrizável. Dica: entre outras coisas, use a equivalência (1.29) do Exemplo 1.2.42, os dois exercícios anteriores e o Teorema 4.1.56. ■

Exercício 4.33. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < 1$.

a) Mostre que $a^n \to 0$. Dica: use o Exercício 1.194 para concluir que a sequência converge para algum $L \in \mathbb{R}$, e daí use as propriedades operatórias usuais dos limites para concluir que $L = 0$.

b) Mostre que $1 + a + \ldots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1-a}$.

c) Conclua que $\displaystyle\sum_{n\in\omega} a^n = \frac{1}{1-a}$. ■

4.2 O critério de Cauchy

Recordemo-nos de que um subconjunto A de um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ é **U-pequeno**, para $U \in \mathcal{U}$, se $A \times A \subseteq U$. Daí, um filtro *próprio* $\mathcal{F}$ em X é chamado de **filtro de Cauchy** se para todo $U \in \mathcal{U}$ existe um subconjunto $A \in \mathcal{F}$ que é U-pequeno. Naturalmente, há uma definição análoga para *nets*:

Definição 4.2.1. Diz-se que uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X é **de Cauchy** se o filtro induzido $(x_d)_d^{\uparrow}$ é de Cauchy. ¶

Explicitamente, por ocorrer

$$(x_d)_d^{\uparrow} := \{S \subseteq X : \exists d' \in \mathbb{D} \text{ tal que } \{x_d : d \geq d'\} \subseteq S\},$$

segue que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy se, e somente se, para toda *entourage* $U \in \mathcal{U}$ existe $d' \in \mathbb{D}$ tal que $\{x_d : d \geq d'\}$ é U-pequeno, ou seja, tal que $(x_d, x_e) \in \mathcal{U}$ sempre que $d, e \geq d'$.

Exercício 4.34. Reescreva a definição de *net* de Cauchy para uma sequência num espaço (pseudo) métrico. Percebeu a semelhança? ■

Observação 4.2.2. Mais uma vez nos encontramos numa encruzilhada: que tipo de ferramenta deve-se usar a fim de estudar a condição de Cauchy, filtros ou *nets*? Na distante Observação 1.2.21, vimos que a *correspondência*

$$\begin{aligned}(\bullet)^{\uparrow}\colon\ \mathrm{Nets}\,(X) &\to \mathrm{Filt}(X)\\ (x_d)_{d\in\mathbb{D}} &\mapsto (x_d)_d^{\uparrow}\end{aligned}$$

admite uma *inversa à direita*, i.e., uma função $\Gamma\colon \mathrm{Filt}(X) \to \mathrm{Nets}\,(X)$ satisfazendo $(\Gamma(\mathcal{F}))^{\uparrow} = \mathcal{F}$ para todo filtro $\mathcal{F} \in \mathrm{Filt}(X)$.

Como a correspondência $(\bullet)^{\uparrow}$ preserva limites, no sentido de que $\lim x_d = \lim (x_d)_d^{\uparrow}$ para qualquer *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X, tanto faz qual aparato escolher, já que para a *net* $\Gamma(\mathcal{F})$ associada ao filtro $\mathcal{F}$ ocorre $\lim \Gamma(\mathcal{F}) = \lim (\Gamma(\mathcal{F}))^{\uparrow} = \lim \mathcal{F}$.

O mesmo argumento vale para o critério de Cauchy: por definição, a *função* (de classes) $(\bullet)^{\uparrow} : \mathrm{Nets}\,(X) \to \mathrm{Filt}(X)$ preserva a condição de Cauchy e, consequentemente, a correspondência $\Gamma\colon \mathrm{Filt}(X) \to \mathrm{Nets}\,(X)$ também deve preservá-la. Moral da história: podemos usar tanto filtros quanto *nets* conforme a conveniência. △

Como mencionado anteriormente, a exigência de que uniformidades admitam uma base composta por *entourages* simétricas (Exercício 4.8) permite provar que todo filtro convergente é de Cauchy. Este é o conteúdo da Proposição 4.1.18, cuja demonstração foi deixada como exercício. No entanto, a fim de ilustrar a equivalência entre filtros e *nets*, convém apresentar uma demonstração.

Demonstração da Proposição 4.1.18. Seja $\mathcal{F}$ um filtro convergente em X e, por simplicidade, denotemos por $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ a *net* induzida por $\mathcal{F}$, i.e., $(x_d)_{d\in\mathbb{D}} := \Gamma(\mathcal{F})$. Por ocorrer $(x_d)_d^{\uparrow} = \mathcal{F}$ e $\lim \mathcal{F} = \lim x_d$, a hipótese sobre $\mathcal{F}$ dá $x \in X$ com $x_d \to x$. Se mostrarmos que a *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy, seguirá que $\mathcal{F}$ é de Cauchy, posto que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy se, e somente se, $(x_d)_d^{\uparrow} = \mathcal{F}$ é de Cauchy.

Agora, seja $U \in \mathcal{U}$ uma *entourage* qualquer e tome $V \in \mathcal{U}$ tal que $V = V^{-1}$ e $2V \subseteq U$, o que pode ser feito em vista do Exercício 4.6. Como $x_d \to x$, existe $d' \in \mathbb{D}$ tal que $x_d \in V[x]$ sempre que $d \geq d'$, e mostraremos que d' atesta que a *net* é de Cauchy: de fato, se $d, e \geq d'$, então $(x_d, x), (x_e, x) \in V$ e, por V ser simétrica, tem-se $(x_d, x), (x, x_e) \in V$ e, consequentemente, $(x_d, x_e) \in 2V \subseteq U$, como queríamos. □

Exercício 4.35. Adapte a demonstração acima, trocando "espaço uniforme" por "espaço (pseudo) métrico" e "*net* convergente" por "sequência convergente", respectivamente. ■

Em certo sentido, o critério de Cauchy se coloca como um teste que permite detectar se um filtro/*net* tem alguma chance de ser convergente, sem que para isso precisemos "adivinhar" qualquer um de seus limites[46]. Embora isso soe relativamente inútil para o leitor que deseja saber, efetivamente, quais são os limites do filtro/*net* em questão, do ponto de vista teórico costuma ser útil a mera certeza de que *algum limite existe*[47]. Em particular, se um filtro/*net* de Cauchy apresenta algum indício mais forte de que pode ser convergente, como admitir uma extensão convergente (no caso dos filtros) ou uma sub*net* convergente (no caso das *nets*), então o filtro/*net* é, necessariamente, convergente[48].

Proposição 4.2.3. *Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme, $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy em X. Então $\lim \mathcal{G} \subseteq \lim \mathcal{F}$ para todo filtro próprio*[49] *$\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.*

Demonstração. Se $\lim \mathcal{G} = \emptyset$, então não há o que provar. Por isso, vamos supor $x \in X$ com $\mathcal{G} \to x$ e mostrar que $\mathcal{F} \to x$. Para tanto, dado $V \in \mathcal{U}$, deve-se concluir que $V[x] \in \mathcal{F}$. Ora, por $\mathcal{F}$ ser de Cauchy, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \times A \subseteq U$, onde $U \in \mathcal{U}$ é uma *entourage* (simétrica?) satisfazendo $2U \subseteq V$. Por ocorrer $\mathcal{G} \to x$, resulta $U[x] \in \mathcal{G}$ e, da inclusão $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, infere-se que $A \cap U[x] \in \mathcal{G}$. Agora, a hipótese de que $\mathcal{G} \neq \wp(X)$ acarreta $A \cap U[x] \neq \emptyset$, i.e., existe $a' \in A \cap U[x]$, o que permite concluir que $V[x] \in \mathcal{F}$: de fato, dado $a \in A$, tem-se $(a', a) \in U$ e, pelo modo como a' foi tomado, segue que $(x, a') \in U$; logo, $(x, a) \in 2U \subseteq V$ e, consequentemente, $A \subseteq V[x]$. □

[46] Ou o seu único limite, se o espaço uniforme for T_2.

[47] Além disso, uma vez garantida a existência do limite de uma sequência num espaço de Hausdorff, por exemplo, pode-se encontrar uma *subsequência* cujo limite seja mais fácil determinar.

[48] Compare com a Proposição 1.2.58 e com o Exercício 1.170.

[49] Exclui-se o filtro trivial $\wp(X)$ pois $\lim \wp(X) = X$ e $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ qualquer que seja $\mathcal{F}$.

Exercício 4.36. Demonstre a versão análoga da proposição anterior para *nets*. Mais precisamente, mostre que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy no espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ e $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$ é uma sub*net* de $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, então $\lim y_s \subseteq \lim x_d$. Por que não é preciso impor restrições sobre a sub*net* $(y_s)_{s\in\mathbb{S}}$? ■

Exemplo 4.2.4. O critério de Cauchy, eventualmente, dá falsos positivos, i.e., em certos espaços podem existir filtros/*nets* de Cauchy que não convergem. Tais espaços são bem mais comuns do que gostaríamos. Um exemplo bastante preguiçoso é o seguinte: dado $p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ dá uma sequência $(q_n)_{n\in\omega} \in \mathbb{Q}^\omega$ com $q_n \to p$. Como $(q_n)_{n\in\omega}$ é convergente, segue que $(q_n)_{n\in\omega}$ é de Cauchy $\underline{\text{em } \mathbb{R}}$. Como a próxima proposição irá mostrar, $(q_n)_{n\in\omega}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}$ e, por $\mathbb{R}$ ser de Hausdorff, o único ponto para o qual $(q_n)_{n\in\omega}$ poderia convergir é p, que não pertence a $\mathbb{Q}$. ▲

Proposição 4.2.5. *Sejam $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme e $Y \subseteq X$ um subespaço. Então uma* net *$(y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em Y é de Cauchy em X se, e somente se, é de Cauchy em Y.*

Demonstração. Segue do fato de que as *entourages* de Y são da forma $(Y\times Y)\cap U$ para $U \in \mathcal{U}$. Os detalhes ficam por conta do leitor. □

Definição 4.2.6. Um espaço uniforme é **completo** se o critério de Cauchy detecta precisamente os filtros e *nets* convergentes, i.e., se todo filtro/*net* de Cauchy converge. ¶

A sensação de *déjà vu* que leitores mais experientes podem ter com respeito aos recorrentes *espaços métricos completos* não é apenas compreensível, mas esperada.

Proposição 4.2.7. *Seja $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme cuja uniformidade tem uma base enumerável. Então X é completo se, e somente se, toda sequência de Cauchy converge.*

Demonstração. Se X é completo, então claramente toda sequência de Cauchy converge, em vista do Exemplo 4.1.14. Para a recíproca, fixemos uma *net* $(x_d)_d$ em X e uma base $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \omega\}$ para $\mathcal{U}$ composta por *entourages* simétricas, que podemos supor ser decrescente, i.e., tal que $B_n \subseteq B_m$ sempre que $n \geq m$. Agora, para cada $n \in \omega$, a condição de Cauchy assegura um $d_n \in \mathbb{D}$ tal que $a, b \geq d_n \Rightarrow (x_a, x_b) \in B_n$.

Por $\mathbb{D}$ ser dirigido, pode-se assumir ainda que $d_{n+1} \geq d_n$ para todo $n \in \omega$: se for preciso, basta tomar $(d'_n)_{n\in\omega}$ recursivamente, com $d'_0 := d_0$ e $d'_n, d_{n+1} \leq d'_{n+1}$ para todo $n \in \omega$, pois assim ainda se mantém a implicação $a, b \geq d'_n \Rightarrow (x_a, x_b) \in B_n$.

O fato de $\mathcal{B}$ ser base para $\mathcal{U}$ garante que $(x_{d_n})_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy em X (confira o Exercício 4.52), que por sua vez é convergente pela hipótese[50], digamos que $x_{d_n} \to x$. Em posse disso, mostraremos que $x_d \to x$.

Note que para uma *entourage* V qualquer, o fato de $\mathcal{B}$ ser base permite, novamente, tomar $N \in \omega$ com $2B_N \subseteq V$. Agora, por valer $x_{d_n} \to x$, existe $n' \in \omega$ tal que $(x, x_{d_n}) \in B_N$ para todo $n \geq n'$. Logo, tomando $M := \max\{n', N\}$, resulta que se $d \geq d_M$, então

- $d, d_M \geq d_N$, donde segue que $(x_{d_M}, x_d) \in B_N$, e
- como $M \geq n'$, tem-se $(x, x_{d_M}) \in B_N$,

acarretando $(x, x_d) \in 2B_N$, i.e., $x_d \in 2B_N[x] \subseteq V[x]$, como queríamos. □

Exercício 4.37. Adapte os argumentos acima para espaços pseudometrizáveis. Por que este caso bastaria para demonstrar o resultado? ■

[50]Importante frisar que $(x_{d_n})_{n\in\omega}$ converge *como sequência*, i.e., com respeito à ordem usual de ω.

Definição 4.2.8. Um espaço (pseudo) métrico (M, d) é dito **completo** se toda sequência de Cauchy em M é convergente. ¶

Como a uniformidade de um espaço (pseudo) metrizável tem base enumerável, segue que a noção de completude (uniforme) definida no começo desta seção generaliza a noção de completude métrica anterior. Ainda assim, convém notar que para espaços uniformes não-(pseudo) metrizáveis, faz sentido considerar a noção mais fraca de *completude sequencial* (*toda sequência de Cauchy converge*), que não coincide com a noção mais ampla de completude de filtros/*nets*. No entanto, tais pormenores não serão abordados.

O objetivo desta seção é investigar com mais cuidado as principais questões referentes à noção de completude: na primeira subseção, discutiremos as interações entre compacidade e completude no contexto dos espaços uniformes, enquanto na segunda trataremos do problema natural de *tornar completo* algo que não é.

4.2.1 Compacidade "uniforme"

Nas distantes Proposições 1.2.89 e 1.2.90, mostramos que

- se X é um espaço compacto e $K \subseteq X$ é fechado, então K é compacto, e
- se X é um espaço de Hausdorff e $K \subseteq X$ é compacto, então K é fechado em X,

respectivamente. O propósito dessa breve recordação é servir como parâmetro comparativo para os dois próximos resultados.

Proposição 4.2.9. *Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço completo e $K \subseteq X$ um subespaço. Se K é fechado, então K é completo.*

Demonstração. Deve-se mostrar que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy em K, então existe $x \in K$ com $x_d \to x$. Ora, a Proposição 4.2.5 assegura que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy em X, enquanto a completude de X garante um $x \in X$ com $x_d \to x$, que deve pertencer a K por K ser fechado. □

Proposição 4.2.10. *Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme de Hausdorff e $K \subseteq X$ um subespaço. Se K é completo, então K é fechado em X.*

Demonstração. Deve-se mostrar que se $x \in \overline{K}$, então $x \in K$. Ora, como $x \in \overline{K}$, existe uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em K tal que $x_d \to x$. Logo, $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy em X e, pela Proposição 4.2.5, $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ deve ser de Cauchy em K. Consequentemente, a completude de K dá um $y \in K$ tal que $x_d \to y$ em K, enquanto a condição de Hausdorff impõe $x = y$, como desejado. □

Corolário 4.2.11. *Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço completo de Hausdorff. Então um subespaço $K \subseteq X$ é completo se, e somente se, é fechado em X.*

A evidente semelhança com a compacidade não é mera coincidência:

Exercício 4.38. Mostre que se $(X, \mathcal{U})$ é um espaço uniforme compacto, então X é um espaço completo. Dica: use a Proposição 4.2.3 junto com a *encarnação apropriada* de compacidade. ■

A coincidência, porém, não é *total*, posto que nem todo espaço completo é compacto: a reta real $\mathbb{R}$, como *veremos*, é um espaço uniforme completo por ser completa como espaço métrico, mas sua topologia não é compacta[51]. A fim de garantir compacidade, precisa-se adicionar à completude uma noção adequada de *limitação*, como sugere o Teorema de Heine-Borel (Corolários 1.2.101 e 1.2.105).

Definição 4.2.12. Dizemos que um subconjunto T de um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ é **totalmente limitado** se para toda *entourage* $U \in \mathcal{U}$ existe um subconjunto finito $F \subseteq T$ tal que $T \subseteq U[F]$, onde $U[F] := \bigcup_{x\in F} U[x]$. O espaço X é dito **totalmente limitado** se for totalmente limitado como subconjunto de si mesmo. ¶

Exercício 4.39. Mostre que se $(X,\mathcal{U})$ é um espaço uniforme compacto, então X é totalmente limitado. Dica: use a compacidade? ■

Observação 4.2.13 (Trívia)**.** Adiante, discutiremos uma das generalizações mais amplas do clássico Teorema de Heine-Borel, que originalmente caracteriza os subconjuntos compactos da reta real. Foi ao pesquisar banalidades sobre tal resultado que conheci o adorável *Handbook of Analysis and its Foundations*, de Eric Schechter [104], que direta ou indiretamente inspira todas as linhas deste texto... Mas enfim, como diria Dorothy, "(...) *we're not in Kansas anymore.*" △

Lema 4.2.14. *Um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ é totalmente limitado se, e somente se, todo filtro próprio de X admite uma extensão de Cauchy.*

Teorema 4.2.15 (Heine-Borel – para espaços uniformes)**.** *Um espaço uniforme $(X,\mathcal{U})$ é compacto se, e somente se, X é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Os exercícios 4.38 e 4.39 garantem a direção *óbvia*. Para a recíproca, tomaremos um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X a fim de estendê-lo a um filtro convergente, precisamente a primeira definição de compacidade adotada neste texto. Ora, por X ser totalmente limitado, o lema anterior conjura um filtro de Cauchy $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, donde a completude de X garante $\lim \mathcal{G} \neq \emptyset$, como desejado. □

Como o argumento acima evidencia, o lema anterior encapsula toda a complexidade do teorema[52]. Portanto, vamos à prova.

Demonstração do Lema 4.2.14. Se X é totalmente limitado e $\mathcal{F}$ é um filtro próprio sobre X, então qualquer ultrafiltro $\mathfrak{u}$ que estende $\mathcal{F}$ deve ser de Cauchy. De fato, para $U, V \in \mathcal{U}$ com $V = V^{-1}$ e $2V \subseteq U$, o conjunto $V[x]$ é U-pequeno para todo $x \in X$. Daí, a hipótese sobre X garante um subconjunto finito $F \subseteq X$ com $\bigcup_{x\in F} V[x] = X$. Finalmente, como $X \in \mathfrak{u}$, a condição (UF_3) que caracteriza ultrafiltros assegura que $V[x] \in \mathfrak{u}$ para algum $x \in F$, como queríamos.

Faremos a recíproca pela contrapositiva. Se X não é totalmente limitado, então existe uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ tal que $X \setminus U[F] \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $F \subseteq X$. Consequentemente, a família $\mathcal{B} := \{X \setminus U[F] : F \in [X]^{<\aleph_0}\}$ é um pré-filtro[53]. Mostraremos que o filtro $\mathcal{F} := \mathcal{B}^{\uparrow}$ não admite extensões de Cauchy: na verdade, *nenhum filtro próprio $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ contém um subconjunto U-pequeno.*

[51] Vale frisar que no próximo capítulo, todos os principais fatos da reta real serão demonstrados, já que ela será construída ao longo da Subseção 5.1.2.

[52] Na verdade, bastava a *ida*.

[53] Caso tenha caído aqui de paraquedas: $[X]^{<\aleph_0}$ é a família dos subconjuntos finitos de X. Não tenha medo de usar o "Dicionário" (página 51) ou Lista de Símbolos e siglas (página 613).

Note que se $G \in \mathcal{G}$, então por valer $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ resulta $G \cap (X \setminus U[F]) = G \setminus U[F] \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $F \subseteq X$, i.e., existe $x_F \in G \setminus U[F]$, o que não pode ocorrer se G for U-pequeno: caso contrário, teria-se $G \subseteq U[x_F]$ para qualquer subconjunto finito $F \subseteq X$ fixado e, consequentemente, $G \setminus U[F \cup \{x_F\}] = \emptyset$, contrariando o que se observou acerca de G, posto que $F \cup \{x_F\}$ é um subconjunto finito de X. □

Observação 4.2.16. Como espaços completos são aqueles em que todo filtro de Cauchy converge, o lema anterior revela que, na prática, a condição de limitação total foi apenas o modo mais preguiçoso de *resolver* a "equação"

$$\text{todo filtro de Cauchy converge} + ?? = \text{todo filtro tem extensão convergente.}$$

O mesmo tipo de raciocínio permite provar, diretamente, que espaços métricos compactos são, precisamente, os completos e totalmente limitados. Embora isto seja corolário do que se discutiu acima, eventualmente o leitor pode se encontrar em contextos que proíbam o uso explícito de espaços uniformes (se for o seu caso, confira o Exercício 4.54). △

Exercício 4.40 (Heine-Borel – clássico)**.** Mostre que um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado. Dica: além do teorema acima, note que $L \subseteq \mathbb{R}^n$ é totalmente limitado se, e somente se, é limitado. ■

Teorema 4.2.17 (Heine-Borel – para espaços completos de Hausdorff)**.** *Seja* $(X,\mathcal{U})$ *um espaço uniforme de Hausdorff e completo. Um subespaço* $K \subseteq X$ *é compacto se, e somente se, é fechado e totalmente limitado.*

Exercício 4.41. Demonstre o teorema acima. ■

Como alicerces da compacidade na categoria dos espaços uniformes, as propriedades de completude e limitação total têm os seus próprios "Teoremas de Tychonoff", i.e.:

Teorema 4.2.18. *Sejam* $(X_i,\mathcal{U}_i)$ *um espaço uniforme para cada* $i \in \mathcal{I}$ *e* $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *o produto munido de sua uniformidade natural.*

(Tyc$_1$) *Se* X_i *é completo para cada* $i \in \mathcal{I}$*, então* X *é completo.*

(Tyc$_2$) *Se* X_i *é totalmente limitado para cada* $i \in \mathcal{I}$*, então* X *é totalmente limitado.*

Demonstração. O primeiro item segue de uma observação simples, mas importante, feita no Exercício 4.53: se Y e Z são espaços uniformes e $f\colon Y \to Z$ é uniformemente contínua, então f leva filtros/*nets* de Cauchy em Y em filtros/*nets* de Cauchy em Z. Assim, se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy em X, então $(\pi_i(x_d))_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy em X_i para cada $i \in \mathcal{I}$, donde segue que existe $x_i \in X_i$ com $\pi_i(x_d) \to x_i$, resultando em $x_d \to x := (x_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Para o segundo item, tomemos uma *entourage* U de X e outra *entourage* $V \subseteq U$ da forma $V := \bigcap_{j\in F}(\pi_j \times \pi_j)^{-1}[V_j]$, onde $F \subseteq \mathcal{I}$ é um subconjunto finito e $V_j \in \mathcal{U}_j$ para cada $j \in F$. Como cada X_j é totalmente limitado para cada $j \in F$, existe um subconjunto finito $G_j \subseteq X_j$ tal que $X_j = V_j[G_j]$. Daí não é difícil obter um subconjunto finito $G \subseteq X$ tal que $X = V[G]$, provando o resultado. □

Em particular, se para cada $n \in \omega$ for dado um espaço (pseudo) métrico completo (M_n, d_n), então a uniformidade produto de $\prod_{n\in\omega} M_n$, (pseudo) metrizável por conta do Teorema 4.1.56, *será* completa em virtude do teorema acima. Consequentemente:

Corolário 4.2.19. *O produto enumerável de espaços pseudometrizáveis completos é completamente pseudometrizável, i.e., existe uma pseudométrica completa que induz a topologia produto*[54].

Exemplo 4.2.20. A uniformidade produto de $\mathbb{R}^\omega$ é completa. Consequentemente, um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^\omega$ é compacto se, e somente se, é fechado e totalmente limitado. Ainda assim, existem subespaços fechados e "limitados" (no sentido da métrica de $\mathbb{R}^\omega$) que não são compactos. O leitor pode pensar a respeito. ▲

4.2.2 Completamento à moda Bourbaki

A Seção 3.3 discutiu a possibilidade de corrigir a falta de compacidade inerente a alguns espaços por meio de *compactificações*. Nesse sentido, a subseção anterior abriu caminho para uma abordagem menos agressiva de *correção*, pelo menos para espaços uniformes: em vez de buscar compactos que contenham o espaço original, pode-se simplesmente *acrescentar* os pontos que *faltam* para que ele se torne completo. Embora isso não garanta compacidade, a completude por si só já assegura boas propriedades para os analistas.

O *modus operandi* típico nessa situação consiste em considerar o espaço cujos pontos são todos os filtros que *deveriam* convergir, quocientado por alguma relação de equivalência marota capaz de corrigir eventuais bizarrices. Curiosamente, Bourbaki [19][55] apresenta um modo mais *concreto* de fazer a mesma coisa, por meio de uma seleção esperta de (filtros) *representantes* que evita explicitar os asquerosos quocientes de espaços uniformes.

Teorema 4.2.21. *Sejam $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme e $\mathcal{F}$ um filtro próprio em X. Se $\mathcal{F}$ é de Cauchy em X, então a família dos filtros de Cauchy contidos em $\mathcal{F}$ admite um menor elemento com respeito à inclusão.*

Demonstração. Fixada uma base $\mathcal{G}$ para o filtro $\mathcal{F}$ e uma base $\mathcal{B}$ de *entourages* simétricas para a uniformidade $\mathcal{U}$, mostraremos que $\mathcal{H} := \{B[G] : B \in \mathcal{B} \text{ e } G \in \mathcal{G}\}$ é base para um filtro de Cauchy em X, digamos $\mathcal{F}_0 := \mathcal{H}^\uparrow$, tal que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{C}$ para todo filtro de Cauchy $\mathcal{C}$ em X satisfazendo $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$.

A coleção $\mathcal{H}$ é um pré-filtro pois, para $B[G], B'[G'] \in \mathcal{H}$, existem $B'' \in \mathcal{B}$ e $G'' \in \mathcal{G}$ tais que $B'' \subseteq B \cap B'$ e $G'' \subseteq G \cap G'$, acarretando $B''[G''] \subseteq B[G] \cap B'[G']$. Por $\mathcal{F}$ ser de Cauchy e $\mathcal{G}$ ser base para $\mathcal{F}$, resulta que para uma *entourage* simétrica $U \in \mathcal{U}$ qualquer existe um subconjunto $G \in \mathcal{G}$ com $G \times G \subseteq U$, donde segue que $U[G] \in \mathcal{F}_0$ é $3U$-pequeno, o que permite concluir que $\mathcal{F}_0$ é de Cauchy[56]. Por valer $G \subseteq B[G]$ para quaisquer $G \in \mathcal{G}$ e $B \in \mathcal{B}$, infere-se $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{G}^\uparrow = \mathcal{F}$. Resta apenas mostrar a minimalidade do filtro $\mathcal{F}_0$.

Ora, se $\mathcal{C}$ é um filtro de Cauchy em X com $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, então $B[G] \in \mathcal{C}$ para quaisquer $B \in \mathcal{B}$ e $G \in \mathcal{G}$. De fato, por $\mathcal{C}$ ser de Cauchy existe $C \in \mathcal{C}$ com $C \times C \subseteq B$, donde as inclusões $\mathcal{G}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ asseguram que $C \cap G \neq \emptyset$ e, consequentemente, $C \subseteq B[G]$, acarretando $B[G] \in \mathcal{C}$, como queríamos. □

Observação 4.2.22. Já sabemos que toda família não-vazia $\mathscr{F}$ de filtros em X admite um menor elemento na ordem parcial $(\mathrm{Filt}(X), \subseteq)$, dado explicitamente como a interseção $\bigcap \mathscr{F}$. No entanto, se $\mathscr{F}$ tem apenas filtros de Cauchy, não há garantias de que $\bigcap \mathscr{F}$ seja um filtro de Cauchy. △

[54] Mais detalhes serão discutidos no Exemplo 4.2.44.

[55] E devido, especificamente, a Pierre Samuel, um de seus membros.

[56] Implicitamente se usou o Exercício 4.22. Em certo sentido, isso não é diferente de concluir, em $\mathbb{R}$, que $|x| = 0$ sempre que $|x| < 3\varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$.

Definição 4.2.23. O filtro construído na demonstração acima é um exemplo do que será chamado de **filtro de Cauchy minimal**, i.e., um filtro de Cauchy em X que é $\subseteq$-minimal na família dos filtros de Cauchy. Explicitamente, um filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ em X é minimal se não existe um filtro de Cauchy $\mathcal{G}$ em X satisfazendo $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$. ¶

Daqui em diante, nossa tarefa será dotar a família

$$\widehat{X} := \{\mathcal{F} \in \operatorname{Filt}(X) : \mathcal{F} \text{ é filtro de Cauchy minimal}\} \tag{4.13}$$

de uma uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$, completa e de Hausdorff, de modo que exista uma função uniformemente contínua $\widehat{\bullet}\colon (X,\mathcal{U}) \to (\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ com a seguinte propriedade universal: *se $(Y,\mathcal{V})$ é um espaço completo de Hausdorff munido de uma função uniformemente contínua $f\colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$, então existe uma única função $\widehat{f}\colon (\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}) \to (Y,\mathcal{V})$ uniformemente contínua tal que $\widehat{f} \circ \widehat{\bullet} = f$*. Em outras palavras, $\widehat{f}$ é a única seta na categoria dos espaços uniformes que torna comutativo o diagrama a seguir.

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}}) \arrow[r, dashed, "\widehat{f}"] & (Y,\mathcal{V}) \\
(X,\mathcal{U}) \arrow[u, "\widehat{\bullet}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Como as diversas discussões já feitas até aqui apontam, a propriedade universal, uma vez verificada, garante a unicidade do espaço $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ a menos de *isomorfismo uniforme*. De tal unicidade, passa a fazer sentido dar um nome especial para o espaço uniforme $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$: ele costuma ser chamado de *o* **completamento Hausdorff** do espaço $(X,\mathcal{U})$. Naturalmente, em momentos de menos preciosismo, ambas as uniformidades $\mathcal{U}$ e $\widehat{\mathcal{U}}$ serão omitidas.

Dor e sofrimento

Apesar dos detalhes técnicos envolvidos na construção da uniformidade sobre $\widehat{X}$, a função $\widehat{\bullet}$ que faz o *mergulho* $X \mapsto \widehat{X}$ é deveras simples: basta considerar a correspondência $x \mapsto \mathcal{N}_x$, posto que $\mathcal{N}_x$ é um filtro de Cauchy minimal.

Proposição 4.2.24. *Se $(X,\mathcal{U})$ é um espaço uniforme e $x \in X$, então $\mathcal{N}_x$ é um filtro de Cauchy minimal.*

Demonstração. O filtro $\mathcal{N}_x$ é convergente por definição e, consequentemente, de Cauchy. Logo, pelo teorema anterior, existe um único filtro de Cauchy minimal $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{N}_x$, donde a Proposição 4.2.3 assegura $\lim \mathcal{N}_x \subseteq \lim \mathcal{F}_0$, acarretando $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}_0$. □

A estrutura uniforme $\widehat{\mathcal{U}}$ sobre $\widehat{X}$ será descrita em termos de uma base esperta. Fixada uma base $\mathcal{B}$ para a uniformidade $\mathcal{U}$ composta por *entourages* simétricas, para cada $B \in \mathcal{B}$ se considera o subconjunto

$$\widehat{B} := \left\{(\mathcal{F},\mathcal{G}) \in \widehat{X} \times \widehat{X} : \exists A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ tal que } A \text{ é } B\text{-pequeno}\right\}.$$

Mostraremos que $\widehat{\mathcal{B}} := \left\{\widehat{B} : B \in \mathcal{B}\right\}$ é base para uma uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$ sobre $\widehat{X}$ com as propriedades desejadas.

(a) *A família $\widehat{\mathcal{B}}$ é um pré-filtro em $\widehat{X}\times\widehat{X}$.*

Dadas *entourages* $B, B' \in \mathcal{B}$, existe $B'' \in \mathcal{B}$ satisfazendo $B'' \subseteq B \cap B'$. Logo, se $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widehat{B''}$, então existe $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tal que A é B''-pequeno e, da inclusão $B'' \subseteq B \cap B'$, segue que A é simultaneamente B-pequeno e B'-pequeno, acarretando $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widehat{B} \cap \widehat{B'}$ e, consequentemente, $\widehat{B''} \subseteq \widehat{B} \cap \widehat{B'}$.

(b) *O pré-filtro $\widehat{\mathcal{B}}$ satisfaz a condição (UB$_1$).*

Para qualquer *entourage* $B \in \mathcal{B}$ ocorre $\Delta_{\widehat{X}} \subseteq \widehat{B}$, posto que se $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy minimal, então existe um subconjunto $F \in \mathcal{F}$ satisfazendo $F \times F \subseteq B$, donde segue que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \in \widehat{B}$.

(c) *O pré-filtro $\widehat{\mathcal{B}}$ satisfaz a condição (UB$_2$).*

Para $B \in \mathcal{B}$, existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $2B' \subseteq B$, donde se infere que $2\widehat{B'} \subseteq \widehat{B}$. Com efeito, se $(\mathcal{F}, \mathcal{G}), (\mathcal{G}, \mathcal{H}) \in \widehat{B'}$, então existem subconjuntos B'-pequenos F e G tais que $F \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e $G \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$. Por ocorrer $F, G \in \mathcal{G}$, resulta que $F \cap G \neq \emptyset$, o que permite concluir que $F \cup G \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ é um subconjunto $2B'$-pequeno, logo, B-pequeno, mostrando que $(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \in \widehat{B}$.

(d) *O pré-filtro $\widehat{\mathcal{B}}$ satisfaz a condição (UB$_3$).*

Por construção, $\widehat{B} = \left(\widehat{B}\right)^{-1}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

(e) *O pré-filtro $\widehat{\mathcal{B}}$ satisfaz a condição (4.8).*

Se $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widehat{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$, deve-se concluir que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Para isso, observe que o filtro $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ é de Cauchy, o que segue da hipótese sobre o par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ pois, dada uma *entourage* $B \in \mathcal{B}$, ocorre $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widehat{B}$, o que garante um subconjunto B-pequeno $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Agora, como $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é minimal, resulta $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$, i.e., $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. De maneira análoga, conclui-se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, donde a igualdade desejada segue.

Exercício 4.42. Complete os detalhes nas demonstrações acima. Dica: no item (c), a existência de $z \in F \cup H$ é importante para garantir que se $x \in F$ e $y \in G$, então $(x, y) \in 2B'$, pois $(x, z), (z, y) \in B'$. ■

Corolário 4.2.25. *A uniformidade $\widehat{\mathcal{U}} := \left(\widehat{\mathcal{B}}\right)^{\uparrow}$ é de Hausdorff.*

Antes de mostrar que $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ é um espaço uniforme completo, vamos verificar que *a função $\widehat{\bullet}\colon X \to \widehat{X}$ é, de fato, uniformemente contínua.* Dada uma *entourage* $\mathcal{W} \in \widehat{\mathcal{U}}$, busca-se uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$ se tenha

$$(x, y) \in U \Rightarrow (\widehat{x}, \widehat{y}) := (\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y) \in \mathcal{W}.$$

Ora, pelo modo como $\widehat{\mathcal{U}}$ foi definida, existe uma *entourage* $B \in \mathcal{B}$ com $\widehat{B} \subseteq \mathcal{W}$. Mostraremos que basta fazer $U := B' \in \mathcal{B}$, onde B' é tal que $3B' \subseteq B$. De fato, se $(x, y) \in B'$, então $A := B'[x] \cup B'[y]$ é um subconjunto $3B'$-pequeno e, por conseguinte, B-pequeno, com $A \in \mathcal{N}_x \cap \mathcal{N}_y$. Logo, $(\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y) \in \widehat{B} \subseteq \mathcal{W}$, como desejado.

O próximo passo é demonstrar que o espaço uniforme $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ é, de fato, completo. Para isso, será conveniente fazer as seguintes abreviações:

$$\widehat{[H]} := \{\widehat{x} : x \in H\} \qquad \text{se } H \subseteq X; \tag{4.14}$$

$$\widehat{\mathcal{H}} := \left\{\widehat{[H]} : H \in \mathcal{H}\right\}^{\uparrow} \qquad \text{se } \mathcal{H} \subseteq \wp(X), \tag{4.15}$$

$$\widehat{\mathscr{H}}^{-1} := \{x \in X : \widehat{x} \in \mathscr{H}\} \qquad \text{se } \mathscr{H} \subseteq \widehat{X}; \tag{4.16}$$

onde $\widehat{x} := \mathcal{N}_x$ para cada $x \in X$. Dito isso, o roteiro do argumento é quase simples:

(i) dado um filtro de Cauchy $\mathfrak{C}$ em $\widehat{X}$, vamos fixar o menor filtro de Cauchy contido em $\mathfrak{C}$, digamos $\mathfrak{F}$, que provaremos ser convergente, donde seguirá que $\mathfrak{C}$ é convergente;

(ii) para tanto, mostraremos que $\mathcal{G} := \left\{\widehat{\mathscr{H}}^{-1} : \mathscr{H} \in \mathfrak{F}\right\}^{\uparrow}$ é um filtro de Cauchy em X;

(iii) daí, tomaremos um filtro de Cauchy minimal $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ a fim de verificar que $\widehat{\mathcal{H}}$ é um filtro de Cauchy em $\widehat{X}$ satisfazendo $\widehat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ em $\widehat{\widehat{X}}$;

(iv) finalmente, concluiremos que $\mathfrak{F} \to \mathcal{H}$ por meio das inclusões $\widehat{\mathcal{H}} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$ e $\mathfrak{F} \subseteq \hat{\mathcal{G}}$.

A fim de verificar o segundo item, será útil generalizar o método apresentado séculos atrás para empurrar filtros por meio de funções.

Lema 4.2.26 (Compare com o Lema 1.2.22)**.** *Sejam A e B conjuntos e $R \subseteq A \times B$ uma relação binária. Se $\mathcal{F}$ é um pré-filtro em A, então $R\mathcal{F} := \{R[F] : F \in \mathcal{F}\}$ é um pré-filtro em B se, e somente se, $R[F] \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Como $R[F \cap G] \subseteq R[F] \cap R[G]$ para quaisquer $F, G \in \mathcal{F}$, segue que $R\mathcal{F}$ é pré-filtro em B se, e somente se, $\emptyset \notin R\mathcal{F}$, donde se obtém o resultado. □

Observação 4.2.27. No caso em que R é uma função com $\operatorname{dom}(R) := A$, a condição "$R[F] \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$" é automaticamente satisfeita, de modo que se reobtém o Lema 1.2.22. Por outro lado, para uma função $\varphi \colon A \to B$ e $R := \varphi^{-1}$ a (relação!) inversa de φ, o lema acima garante que se $\mathcal{F}$ é um pré-filtro em B, então $\varphi^{-1}\mathcal{F}$ é um pré-filtro em A se, e somente se, ocorrer $\varphi^{-1}[F] \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. △

Fazendo $\varphi := \widehat{\bullet}$, resulta que o filtro $\mathcal{G}$ definido no item (ii) é, na verdade, o filtro $(\varphi^{-1}\mathfrak{F})^{\uparrow}$, que mostraremos ser próprio ao longo dos três próximos lemas.

Lema 4.2.28. *Nas notações anteriores, se $\mathcal{F} \in \widehat{X}$, então $\mathcal{F}$ admite uma base de abertos. Mais precisamente, se $\mathcal{F}$ é filtro de Cauchy minimal e $F \in \mathcal{F}$, então $\operatorname{int}(F) \in \mathcal{F}$.*

Demonstração (*compare com a Proposição 4.1.8*). Como $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy minimal, a demonstração do Teorema 4.2.21 garante a igualdade $\mathcal{F} = \{B[F] : B \in \mathcal{B} \text{ e } F \in \mathcal{F}\}^{\uparrow}$. Logo, se $F \in \mathcal{F}$, então existem $B \in \mathcal{B}$ e $G \in \mathcal{F}$ tais que $B[G] \subseteq F$. Tomando $B' \in \mathcal{B}$ com $2B' \subseteq B$, mostraremos que $B'[G] \subseteq \operatorname{int}(F)$, donde seguirá a pertinência desejada.

Com efeito, dado $x \in B'[G]$, deve ocorrer $B'[x] \subseteq F$: de fato, se $y \in B'[x]$, então por valer $x \in B'[G]$, existe $g \in G$ com $(g, x) \in B'$, o que resulta em $(g, x), (x, y) \in B'$ e, por conseguinte, $(g, y) \in 2B'$, mostrando que $y \in 2B'[g] \subseteq B[G] \subseteq F$, como queríamos. □

Lema 4.2.29. *Nas notações anteriores, $\widehat{[X]}$ é denso em $\widehat{X}$.*

Demonstração. Dado um *ponto* $\mathcal{F} \in \widehat{X}$ e uma *entourage* $B \in \mathcal{B}$, deve-se mostrar que existe $x \in X$ tal que $\mathcal{N}_x := \widehat{x} \in \widehat{B}[\mathcal{F}]$ e, para isso, precisa-se exibir um subconjunto B-pequeno $A \in \mathcal{N}_x \cap \mathcal{F}$. Ora, por $\mathcal{F}$ ser de Cauchy, existe $D \in \mathcal{F}$ um subconjunto B-pequeno, e daí $\operatorname{int}(D) \in \mathcal{N}_x \cap \mathcal{F}$ para todo $x \in \operatorname{int}(D)$. □

Lema 4.2.30. *A família $\mathcal{G}$ definida no item (ii) é um filtro de Cauchy.*

Demonstração. Como $\mathfrak{F}$ é um filtro de Cauchy minimal em $\widehat{X}$, o Lema 4.2.28 permite inferir que cada $\mathscr{H} \in \mathfrak{F}$ tem interior não-vazio em $\widehat{X}$. Daí, o Lema 4.2.29 garante um $x \in X$ com $\mathcal{N}_x \in \mathscr{H}$. Logo, $\widehat{\mathscr{H}}^{-1} \neq \emptyset$ para todo $\mathscr{H} \in \mathfrak{F}$, mostrando que $\mathcal{G}$ é um filtro próprio em X, pelo Lema 4.2.26. Resta apenas mostrar que $\mathcal{G}$ é de Cauchy.

Ora, dada uma *entourage* $B \in \mathcal{B}$, o fato de $\mathfrak{F}$ ser de Cauchy em $\widehat{X}$ garante um subconjunto $\widehat{B}$-pequeno $\mathscr{H} \in \mathfrak{F}$. Mostraremos que $\widehat{\mathscr{H}}^{-1} \in \mathcal{G}$ é B-pequeno: de fato, se $x, y \in \widehat{\mathscr{H}}^{-1}$, então $\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y \in \mathscr{H}$, acarretando $(\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y) \in \widehat{B}$, i.e., deve existir $A \in \mathcal{N}_x \cap \mathcal{N}_y$ com $A \times A \subseteq B$, donde se infere $(x, y) \in B$, como desejado. □

Embora os dois próximos itens, (iii) e (iv), sejam relativamente mais simples, o leitor tem todo o direito de pausar a leitura para tomar uma água, um café ou olhar um pouco o céu pela janela[57]...

Lema 4.2.31. *Vale o item (iii).*

Demonstração. A existência de $\mathcal{H}$ segue do Teorema 4.2.21. Agora, o Lema 4.2.26 garante que $\widehat{\mathcal{H}}$ é um filtro próprio em $\widehat{X}$. A fim de concluir que $\widehat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$, basta mostrar que $\widehat{B}[\mathcal{H}] \in \widehat{\mathcal{H}}$ para qualquer *entourage* $B \in \mathcal{B}$. Ora, por $\mathcal{H}$ ser de Cauchy em X, existe um subconjunto B-pequeno $H \in \mathcal{H}$, enquanto a minimalidade de $\mathcal{H}$ atesta $\operatorname{int}(H) \in \mathcal{H}$, em virtude do Lema 4.2.28. Ocorre que $[\widehat{\operatorname{int}(H)}] \subseteq \widehat{B}[\mathcal{H}]$: de fato, se $h \in \operatorname{int}(H)$, então o próprio subconjunto $\operatorname{int}(H)$ atesta que $(\mathcal{H}, \mathcal{N}_h) \in \widehat{B}$. Portanto, $\widehat{B}[\mathcal{H}] \in \widehat{\mathcal{H}}$. □

Lema 4.2.32. *Vale o item (iv).*

Demonstração. A inclusão $\widehat{\mathcal{H}} \subseteq \widehat{\mathcal{G}}$ segue do Exercício 1.150, enquanto a inclusão $\mathfrak{F} \subseteq \widehat{\mathcal{G}}$ advém da sutil combinação da Observação K.14 com o Exercício 1.137. Portanto, $\mathfrak{F} \to \mathcal{H}$, em virtude da Proposição 4.2.3. □

Exercício 4.43. Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Essa lenta e dolorosa construção garantiu *apenas* a existência de um espaço completo de Hausdorff $\widehat{X}$ que contém a imagem de X por uma função uniformemente contínua, com um adendo importante: a imagem de X é densa em $\widehat{X}$. Esse fato será crucial na verificação da propriedade universal do completamento Hausdorff.

Teorema 4.2.33 (Extensões de funções uniformemente contínuas)**.** *Sejam $(Y, \mathcal{V})$ e $(Z, \mathcal{W})$ espaços uniformes, com Z completo de Hausdorff, e considere uma função $f \colon D \to Z$ uniformemente contínua, onde $D \subseteq Y$ é um subespaço qualquer. Se D é denso, então existe uma única função uniformemente contínua $\tilde{f} \colon Y \to Z$ tal que $\tilde{f}|_D = f$.*

[57] Pelo menos enquanto eu escrevo esta seção, o mundo ~~se encontra~~ deveria estar em isolamento social. Por isso, fique em casa!

Demonstração. Pela densidade de D, para cada $y \in Y$ existe um filtro $\mathcal{F}_y$ em Y com $D \in \mathcal{F}_y$ e $\mathcal{F}_y \to y$, donde segue que $\mathcal{F}_y$ é de Cauchy em Y. Logo, o Exercício 4.58 garante que $\mathcal{F}_y|_D := \{F \cap D : F \in \mathcal{F}_y\}^{\uparrow}$ é um filtro de Cauchy em D. Daí, o fato de f ser uniformemente contínua assegura que o filtro induzido $f(\mathcal{F}_y|_D)$ é de Cauchy em Z (pelo Exercício 4.53), donde a completude dá $\tilde{f}(y) \in Z$ com $f(\mathcal{F}_y|_D) \to \tilde{f}(y)$, único pela condição de Hausdorff. Mostraremos que a correspondência $y \mapsto \tilde{f}(y)$ tem as propriedades desejadas – em particular, a unicidade de $\tilde{f}$ *seguirá* da condição de Hausdorff e da continuidade uniforme ((Haus$_6$) + Corolário 4.1.21).

Comecemos observando que $\tilde{f}(d) = f(d)$ para todo $d \in D$: por valer $\mathcal{N}_{d,Y} \subseteq \mathcal{F}_d$ em Y, resulta que $\mathcal{N}_{d,D} = \mathcal{N}_{d,Y}|_D \subseteq \mathcal{F}_d|_D$ em D e, daí, obtém-se $f(\mathcal{N}_{d,D}) \subseteq f(\mathcal{F}_d|_D)$, com $\mathcal{N}_{f(d),Z} \subseteq f(\mathcal{N}_{d,D})$ devido à continuidade da função f, acarretando $f(\mathcal{F}_d|_D) \to f(d)$ e, consequentemente, $\tilde{f}(d) = f(d)$. Provaremos que $\tilde{f}$ é uniformemente contínua.

Fixada uma *entourage* $W \in \mathcal{W}$, sejam $\widetilde{W} \in \mathcal{W}$ uma *entourage* simétrica em Z satisfazendo $6\widetilde{W} \subseteq W$ e $V \in \mathcal{V}$ uma *entourage* de Y tal que $(a,b) \in V \cap (D \times D)$ implique em $(f(a), f(b)) \in \widetilde{W}$. Mostraremos que *se* $\widetilde{V} \in \mathcal{V}$ *é uma* entourage *simétrica satisfazendo* $2\widetilde{V} \subseteq V$, então $(y,y') \in \widetilde{V}$ acarreta $(\tilde{f}(y), \tilde{f}(y')) \in 6\widetilde{W} \subseteq W$, encerrando o argumento.

Ora, para $y, y' \in Y$ tais que $(y,y') \in \widetilde{V}$, tem-se $\widetilde{V}[y] \cap \widetilde{V}[y'] \neq \emptyset$, donde a densidade de D traz um $d \in \widetilde{V}[y] \cap \widetilde{V}[y'] \cap D$. Agora, por valer $\mathcal{F}_y \to y$ e $\mathcal{F}_{y'} \to y'$, segue que $\widetilde{V}[y] \in \mathcal{F}_y$, $\widetilde{V}[y'] \in \mathcal{F}_{y'}$, donde se obtém $\widetilde{V}[y] \cap D \in \mathcal{F}_y|_D$ e $\widetilde{V}[y'] \cap D \in \mathcal{F}_{y'}|_D$. Logo, os subconjuntos $f\left[\widetilde{V}[y] \cap D\right]$ e $f\left[\widetilde{V}[y'] \cap D\right]$ pertencem aos filtros $f(\mathcal{F}_y|_D)$ e $f(\mathcal{F}_{y'}|_D)$, respectivamente.

Como $f(\mathcal{F}_y|_D) \to \tilde{f}(y)$ e $f(\mathcal{F}_{y'}|_D) \to \tilde{f}(y')$, o esquecido Exercício 1.200 garante as pertinências $\tilde{f}(y) \in \overline{f\left[\widetilde{V}[y] \cap D\right]} := A$ e $\tilde{f}(y') \in \overline{f\left[\widetilde{V}[y'] \cap D\right]} := B$. Agora, o ~~pulo do gato~~ *Katzensprung* consiste em mostrar que *tanto* A *quanto* B *são subconjuntos* $3\widetilde{W}$*-pequenos*. De fato, em posse disso, resulta que $A \cup B$ é $6\widetilde{W}$, pois $f(d) \in A \cap B$ e daí $(z, f(d)), (f(d), z') \in 3\widetilde{W}$ para quaisquer $z, z' \in A \cup B$. Em particular, conclui-se que $(\tilde{f}(y), \tilde{f}(y')) \in 6\widetilde{W}$, como desejado.

Tratemos do *Katzensprung*: mostraremos que se $M \subseteq Y$ é um subconjunto $2\widetilde{V}$-pequeno, então $\overline{f[M \cap D]} \subseteq Z$ é um subconjunto $3\widetilde{W}$-pequeno, donde o resultado seguirá para A e B ao se substituir M por $\widetilde{V}[y]$ e $\widetilde{V}[y']$, respectivamente. Pois bem: se $z, z' \in \overline{f[M \cap D]}$, então existem $d, d' \in M \cap D$ tais que $f(d) \in \widetilde{W}[z]$ e $f(d') \in \widetilde{W}[z']$; finalmente, pelo modo como $\widetilde{V}$ e V foram tomados, tem-se necessariamente $(f(d), f(d')) \in \widetilde{W}$, donde se obtém $(z, f(d)), (f(d), f(d')), (f(d'), z) \in \widetilde{W}$ e, portanto, $(z, z') \in 3\widetilde{W}$. $\square$

Observação 4.2.34. Note que $\tilde{f}$, enquanto função, *sempre* esteve bem definida: de fato, não há ambiguidade na escolha $\tilde{f}(y)$, uma vez que para cada $y \in Y$ *fixou-se* um filtro $\mathcal{F}_y$ por meio do qual se obteve $\tilde{f}(y)$. Garantir que $\tilde{f}(y)$ independe da escolha do filtro $\mathcal{F}_y \to y$ é um luxo que equivale, precisamente, à continuidade de $\tilde{f}$. Logo, preocupar-se com isso é supérfluo, dado que o argumento assegura a continuidade uniforme de $\tilde{f}$. $\triangle$

Teorema 4.2.35 (Propriedade universal do completamento Hausdorff)**.** *Seja* $(X, \mathcal{U})$ *um espaço uniforme e considere o espaço completo de Hausdorff* $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$*, bem como a função uniformemente contínua* $\widehat{\bullet}\colon (X, \mathcal{U}) \to (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$*, definidos anteriormente. Se* $(Y, \mathcal{V})$ *é um espaço completo de Hausdorff munido de uma função* $f\colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ *uniformemente contínua, então existe uma única função uniformemente contínua* $\widehat{f}\colon (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}) \to (Y, \mathcal{V})$ *tal que* $\widehat{f} \circ \widehat{\bullet} = f$.

Demonstração. Em vista do teorema anterior, é suficiente mostrar que existe uma única função uniformemente contínua $\widehat{[f]}\colon \widehat{[X]} \to Y$ tal que $\widehat{[f]} \circ \widehat{\bullet} = f$, pois daí a função $\widehat{f}$ procurada *será*, simplesmente, a (única) extensão $\widehat{\widehat{[f]}}\colon \widehat{X} \to Z$, cuja existência decorre do fato de $\widehat{[X]}$ ser denso em $\widehat{X}$.

Note que se $g\colon \widehat{[X]} \to Y$ satisfaz $g \circ \widehat{\bullet} = f$, então $g(\mathcal{N}_x) = f(x)$ para qualquer ponto $x \in X$. Desse modo, não há escapatória: deve-se mostrar que $\mathcal{N}_x \mapsto f(x)$ define uma função uniformemente contínua. Diferente do que se passou na última demonstração, aqui é preciso alguma preocupação com a boa-definição, já que pode ocorrer $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x'}$ para $x \neq x'$. É justamente por f ser contínua e Y ser de Hausdorff que tudo dá certo: como $f(\mathcal{N}_x) \to f(x)$ e $f(\mathcal{N}_{x'}) \to f(x')$, se valer $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x'}$, então $f(x) = f(x')$, pois Y é T_2.

A continuidade uniforme de $\mathcal{N}_x \to f(x)$ é, praticamente, automática: dada uma *entourage* $V \in \mathcal{V}$ de Y, existe uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ tal que $(x, x') \in \mathcal{U}$ implica em $(f(x), f(x')) \in V$; agora, como feito no final da demonstração do Lema 4.2.30, tomando-se $U \in \mathcal{U}$ simétrica, segue que se $(\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_{x'}) \in \widehat{U}$, então $(x, x') \in U$ e, por conseguinte, $(f(x), f(x')) \in V$, como desejado. □

Nas frequentes e felizes ocasiões em que o espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$ também é de Hausdorff, pode-se garantir que a função $\widehat{\bullet}\colon (X, \mathcal{U}) \to (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ é, na verdade, um isomorfismo uniforme entre X e $\widehat{[X]}$. De fato, pela construção de $\widehat{\bullet}$, se $x, y \in X$ são tais que $\widehat{x} := \mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y := \widehat{y}$, então por X ser de Hausdorff resulta $x = y$, mostrando que $\widehat{\bullet}$ é bijeção sobre sua imagem. Daí, como já vimos que

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow (\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y) \in \widehat{B}$$

para qualquer *entourage* simétrica $B \in \mathcal{U}$, segue que $\widehat{\bullet}^{-1}\colon \widehat{[X]} \to X$ também é uniformemente contínua, um fenômeno bastante especial (confira os Exercícios 4.60 e 4.61).

Neste caso, é legítimo supor $X \subseteq \widehat{X}$, com $\overline{X} = \widehat{X}$, já que X e $\widehat{[X]}$ são uniformemente isomorfos e o último é subespaço de $\widehat{X}$. Assim, uma curiosa vantagem do cenário T_2, encapsulada no Teorema 4.2.33, é explicitada no próximo

Exercício 4.44. Sejam X e K espaços uniformes de Hausdorff, tais que X é subespaço uniforme de K. Mostre que se K é completo, então $\overline{X}$ é o completamento Hausdorff de X. Dica: a propriedade universal do completamento Hausdorff, neste caso, se traduz numa propriedade de extensão. ■

Quando o espaço uniforme $(X, \mathcal{U})$ vem de fábrica com a condição de Hausdorff, seu completamento $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ é chamado simplesmente de **completamento de** X, sem menções a axiomas de separação. Nesse sentido, *uma pulga* pode incomodar o leitor ao lembrá-lo do fato de que a construção do completamento $\widehat{X}$ apresentada aqui, adaptada de Bourbaki [19], satisfaz o axioma de Hausdorff independentemente do que o espaço X possa pensar a respeito.

Poderíamos ter considerado, em vez da família $\widehat{X}$ de todos os filtros de Cauchy minimais, a família $\widetilde{X}$ de *todos os filtros de Cauchy* e, a partir de uma base $\mathcal{B}$ de *entourages* simétricas para a uniformidade $\mathcal{U}$ de X, obter uma base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de *entourages* simétricas sobre $\widetilde{X}$ com a mesma ideia: $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \widetilde{B}$ se, e somente se, existe um subconjunto B-pequeno $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Com tal construção, a uniformidade $\widetilde{\mathcal{U}}$ sobre $\widetilde{X}$, gerada por $\widetilde{\mathcal{B}}$, é completa e tal que o mapa $\widetilde{\bullet}\colon X \to \widetilde{X}$, que faz $x \mapsto \mathcal{N}_x$, é um isomorfismo uniforme com a imagem, que por sua vez é densa em $\widetilde{X}$. Mas há problemas.

O primeiro, e talvez mais urgente, é que *mesmo quando X é um espaço de Hausdorff*, tal construção não garante que $\widetilde{X}$ seja de Hausdorff – um problema pior do que aquele levantado pela pulga! Isso se resolve de maneira relativamente técnica por meio de uma relação de equivalência sobre $\widetilde{X}$ que identifica os *pontos* topologicamente equivalentes. Porém, a composição de $\widetilde{\bullet}$ com a projeção correspondente aniquila a injetividade obtida no parágrafo anterior, exceto nos casos em que X é de Hausdorff!

O segundo problema é de natureza moral: sem a garantia de que $\widetilde{X}$ seja de Hausdorff, não se pode assegurar sua propriedade universal e, consequentemente, sua unicidade a menos de isomorfismo uniforme. Nesse sentido, a construção adaptada de Bourbaki tem a vantagem de levar diretamente ao completamento Hausdorff sem exigir o estudo de quocientes em espaços uniformes[58]. De qualquer forma, o leitor interessado na abordagem descrita acima pode conferir os detalhes no trabalho de James [57].

Metrizabilidade completa e outros transtornos de Cauchy

Embora dolorosa e sangrenta, a construção do completamento uniforme Hausdorff tem a vantagem de generalizar, numa tacada só, os dois principais tipos de completamento da Análise:

- o completamento de espaços métricos e
- o completamento dos racionais, que traz os números reais.

O trajeto usual para dar conta dos dois completamentos acima passa pela *construção da reta real* (seja por *cortes de Dedekind* ou por *quocientes de sequências de Cauchy racionais*) e, posteriormente, a construção do completamento métrico (por *quocientes de sequências de Cauchy*[59]). Aqui, os completamentos uniformes já existem: todo o trabalho se resumirá a provar que eles são aquilo que se espera.

Como já assumimos a existência da reta, não há razão para ter pressa em construí-la: convém esperar um pouco mais a fim de fazer isso no contexto de grupos topológicos, no próximo capítulo. Por ora, vamos nos convencer de que o completamento uniforme generaliza o completamento de espaços métricos. Comecemos com um lema simples.

Lema 4.2.36. *Se a uniformidade $\mathcal{U}$ sobre X é induzida por uma pseudométrica d, então a uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$ de $\widehat{X}$ é induzida por* alguma *métrica completa $\widetilde{d}$.*

Demonstração. De fato, pela *direção trivial* do Teorema 4.1.56, pode-se tomar uma base <u>enumerável</u> $\mathcal{B}$ de *entourages* simétricas para a uniformidade $\mathcal{U}$, donde segue que a uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$ tem base enumerável, já que $|\widehat{\mathcal{B}}| \leq |\mathcal{B}|$. Logo, pela *direção não-trivial* do mesmo teorema, deve existir uma métrica $\widetilde{d}$ sobre $\widehat{X}$ que induz a uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$. Consequentemente, o completamento Hausdorff de (X, d) é um espaço métrico no qual toda sequência de Cauchy converge, i.e., é completo (Exercício 4.59). $\square$

Corolário 4.2.37. *Nas condições anteriores, $\widehat{X}$ tem caráter enumerável.*

Em particular, o completamento Hausdorff de um espaço pseudométrico (X, d) é um espaço métrico completo $(\widehat{X}, \widetilde{d})$ caracterizado, na *categoria dos espaços uniformes*, pela seguinte propriedade universal:

---

[58] Algo bem mais delicado do que o quociente de espaços topológicos.

[59] Ou mergulhos em espaços de Banach, etc.

Teorema 4.2.38 (Propriedade universal do completamento métrico)**.** *Seja (X, d) um espaço pseudométrico e considere o espaço métrico completo $(\widehat{X}, \widetilde{d})$, bem como a função uniformemente contínua $\widehat{\bullet}\colon (X, d) \to (\widehat{X}, \widetilde{d})$. Se (Y, ρ) é um espaço métrico completo munido de uma função uniformemente contínua $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$, então existe uma única função uniformemente contínua $\widehat{f}\colon (\widehat{X}, \widetilde{d}) \to (Y, \rho)$ tal que $\widehat{f} \circ \widehat{\bullet} = f$.*

Embora a coisa funcione como esperado, há uma sutileza inerente às (pseudo) métricas que pode trazer algumas ambiguidades de caráter categorial. De fato, além das funções uniformemente contínuas, a estrutura dos espaços pseudométricos admite outro tipo de seta *natural*: as *isometrias*.

Definição 4.2.39. Uma função $f\colon X \to Y$ entre os espaços pseudométricos (X, d) e (Y, ρ) é uma **isometria** se a identidade $\rho(f(x), f(x')) = d(x, x')$ é satisfeita para quaisquer $x, x' \in X$. ¶

Alternativamente, e de uma perspectiva mais categorial, $f\colon X \to Y$ é uma isometria se o seguinte diagrama for comutativo, onde $f \times f\colon X \times X \to Y \times Y$ é o mapa que faz $(x, x') \mapsto (f(x), f(x'))$.

$$\begin{tikzcd}
Y \times Y \arrow[r, "\rho"] & \mathbb{R} \\
X \times X \arrow[u, "f \times f"] \arrow[ur, "d"'] &
\end{tikzcd}$$

De um jeito ou de outro, o leitor não deve ter dificuldades para se convencer de que a composição de isometrias resulta numa isometria. Como $\mathrm{Id}_X\colon X \to X$ é uma isometria sempre que (X, d) é um espaço pseudométrico, acabamos de nos deparar com mais uma categoria.

Assim, ao considerar espaços pseudométricos como objetos, temos ao nosso dispor três tipos de setas e, por conseguinte, três categorias distintas com os mesmos objetos:

(*i*) $\mathbf{PMet}_{\mathrm{Top}}$, cujas setas são funções contínuas com respeito às topologias induzidas pelas métricas;

(*ii*) $\mathbf{PMet}_{\mathrm{Unif}}$, cujas setas são funções contínuas com respeito às uniformidades induzidas pelas métricas;

(*iii*) $\mathbf{PMet}_{d}$, cujas setas são as isometrias.

Por isso, o analista usual não ficaria impressionado com o Teorema 4.2.38, que caracteriza o completamento uniforme de um espaço (pseudo) métrico com respeito às setas *uniformes*. Para eles, o completamento (pseudo) métrico deve ser caracterizado por meio de isometrias. *So be it.*

Teorema 4.2.40. *Se (X, d) é um espaço ~~pseudo~~métrico e $\mathcal{U}_d$ é a uniformidade induzida por d, então existe uma métrica completa $\widehat{d}$ sobre $\widehat{X}$ que induz a uniformidade $\widehat{\mathcal{U}_d}$ de tal maneira que a função $\widehat{\bullet}\colon (X, d) \to (\widehat{X}, \widehat{d})$ é uma <u>isometria</u> com a seguinte propriedade universal: para qualquer espaço métrico completo (Y, ρ) dotado de uma <u>isometria</u> $f\colon X \to Y$, existe uma única <u>isometria</u> $\widehat{f}\colon (\widehat{X}, \widehat{d}) \to (Y, \rho)$ com $\widehat{f} \circ \widehat{\bullet} = f$.*

Por simplicidade, provaremos o teorema acima apenas para o caso de espaços métricos[60]. Para tanto, mostraremos que $\widehat{X \times X}$, o completamento Hausdorff de $X \times X$, se encarna como o produto $\widehat{X} \times \widehat{X}$ munido da uniformidade produto, donde a existência da métrica $\widehat{d}$ será garantida como a única *extensão uniforme* da pseudométrica d.

Proposição 4.2.41. *Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto e X_i um espaço uniforme de Hausdorff para cada $i \in \mathcal{I}$. Então o produto $\prod_{i\in\mathcal{I}} \widehat{X}_i$ é o completamente uniforme de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$.*

Demonstração. Já vimos que o produto de espaços completos é completo (Teorema 4.2.18) e que o produto de espaços de Hausdorff é de Hausdorff (Proposição 1.2.37). Como cada X_i é denso em seu completamento $\widehat{X}_i$, o resultado segue dos Exercícios 1.100 e 4.44. □

Demonstração do Teorema 4.2.40. A métrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ da hipótese é, automaticamente, uma função contínua uniforme, donde segue que existe uma única extensão uniformemente contínua $\widehat{d}\colon \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$. Agora, por $\widehat{d}$ ser uma extensão contínua de d e $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ ter caráter enumerável (Corolário 4.2.37), pode-se afirmar que se $u, v \in \widehat{X}$, $(u_n)_{n\in\omega}, (v_n)_{n\in\omega}$ são sequências em X com $u_n \to u$ e $v_n \to v$, então

$$\widehat{d}(u, v) = \lim_{n\in\omega} d(u_n, v_n). \tag{4.17}$$

Daí, em vista do Exercício 1.224, é fácil concluir que $\widehat{d}$ é uma pseudométrica sobre o conjunto $\widehat{X}$. Mostraremos então que $\widehat{d}$ induz a uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$: a continuidade uniforme de $\widehat{d}$ garante que a uniformidade $\mathcal{U}_{\widehat{d}}$, gerada pelas *entourages* da forma

$$\mathcal{E}_{\widehat{d},r} := \left\{(u, v) \in \widehat{X} \times \widehat{X} : \widehat{d}(u, v) < r\right\}$$

está contida na uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$; já a outra inclusão segue de um lema que eu tentei evitar com todas as minhas forças[61].

Lema 4.2.42. *Se $(Z, \mathcal{V})$ é um espaço uniforme e $\mathcal{G}$ é base para $\mathcal{V}$ por* entourages *simétricas, então a família $\mathcal{H} := \left\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\right\}$ é base para $\mathcal{V}$, onde o fecho é tomado em $Z \times Z$ dotado da topologia produto.*

Demonstração. Note que se $G \in \mathcal{G}$, então existe $H \in \mathcal{G}$ com $3H \subseteq G$, e disso segue que $\overline{H} \subseteq G$: se $(u, v) \in \overline{H}$, então em particular existe $(h, h') \in H \cap (H[u] \times H[v])$, acarretando em $(u, v) \in 3H \subseteq G$. O leitor deve cuidar dos detalhes. □

Exercício 4.45. *Complete* a demonstração acima. ■

Agora, a fim de encerrar a discussão sobre $\widehat{d}$, para uma *entourage* $W \in \widehat{\mathcal{U}}$, o último lema garante uma *entourage* simétrica $V \in \widehat{\mathcal{U}}$ com $\overline{V} \subseteq W$. Daí, por $V \cap (X \times X)$ ser uma *entourage* típica de X, o fato de d induzir a *entourage* $\mathcal{U}$ assegura a existência de $r > 0$ tal que

$$\mathcal{E}_{d,r} := \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < r\} \subseteq V \cap (X \times X).$$

Consequentemente, a densidade de $X \times X$ em $\widehat{X} \times \widehat{X}$ aliada ao Exercício 2.7 permite inferir que $\overline{\mathcal{E}_{d,r}} \subseteq \overline{V \cap (X \times X)} = \overline{V} \subseteq W$, donde segue $\mathcal{E}_{\widehat{d},\frac{r}{2}} \subseteq W$, posto que

$$\overline{\mathcal{E}_{d,r}} = \left\{(u, v) \in \widehat{X} \times \widehat{X} : \widehat{d}(u, v) \leq r\right\},$$

[60] Mas ele é válido mesmo sem a condição T_0. Essa restrição se deve à dificuldade de provar a imprescindível Proposição 4.2.41 acima *sem* a condição de Hausdorff. O leitor interessado no cenário geral pode tentar a sorte, por exemplo, com Bourbaki [19].

[61] Por nenhum motivo mais forte do que senso estético.

mostrando que $\widehat{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}_{\widehat{d}}$. Em particular, por $\widehat{X}$ ser um espaço de Hausdorff, a pseudométrica $\widehat{d}$ é, na verdade, uma métrica. Dessa forma, a uniformidade $\widehat{\mathcal{U}}$ do completamento $\widehat{X}$ é induzida por uma métrica completa $\widehat{d}$ e, em virtude da identidade (4.17), segue que a inclusão $i\colon X \to \widehat{X}$ é uma isometria.

Finalmente, se (Y, ρ) for um espaço métrico completo e $f\colon X \to Y$ for uma isometria, então f é, em particular, uma função uniformemente contínua, donde segue que existe uma única extensão uniformemente contínua $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to Y$ de f, que mostraremos ser uma isometria.

De fato, dados $u, v \in \widehat{X}$, existem sequências $(u_n)_{n\in\omega}$ e $(v_n)_{n\in\omega}$ em X com $u_n \to u$ e $v_n \to v$, donde a continuidade de $\widehat{f}$ garante que $\widehat{f}(u_n) \to \widehat{f}(u)$, $\widehat{f}(v_n) \to \widehat{f}(v)$. Por fim, como a métrica ρ é contínua, resulta que

$$\begin{aligned}\rho\left(\widehat{f}(u), \widehat{f}(v)\right) &= \lim_{n\in\omega} \rho\left(\widehat{f}(u_n), \widehat{f}(v_n)\right) = \lim_{n\in\omega} \rho\left(f(u_n), f(v_n)\right) = \\ &= \lim_{n\in\omega} d(u_n, v_n) = \widehat{d}(u, v)\end{aligned}$$

como desejado. □

Portanto, mesmo o leitor com fetiche por preservação de métricas deve se contentar com o completamento uniforme, posto que no caso métrico, o completamento uniforme é um espaço métrico completo – que deve ser único, a menos de isometria.

Observação 4.2.43. A suposição de (X, d) ser um espaço métrico (e não apenas pseudométrico) foi usada para concluir que $\widehat{X} \times \widehat{X}$ é o completamento uniforme de $X \times X$, como uma instância da Proposição 4.2.41. Uma vez que tal resultado é válido para quaisquer espaços uniformes, resulta que a mesma construção subsequente pode ser feita, de modo que a função $\widehat{\bullet}\colon (X, d) \to (\widehat{X}, \widehat{d})$ é uma isometria mesmo no caso em que d é uma pseudométrica. △

Em particular, por $\widehat{\bullet}$ não ser injetiva se d não for uma métrica, percebe-se que a hipótese sobre o domínio da função f no próximo exercício é indispensável.

Exercício 4.46. Sejam X e Y espaços pseudométricos e $f\colon X \to Y$ um isometria. Mostre que se a pseudométrica de X é uma métrica, então f é injetora. ■

Exemplo 4.2.44 (Completude métrica vs. completude uniforme)**.** O Corolário 4.2.11 estabeleceu que um subconjunto S de um espaço uniforme de Hausdorff completo é completo (com a uniformidade induzida) se, e somente se, é fechado. Com as mesmas ideias, o leitor não deve ter dificuldades em mostrar o seguinte:

Exercício 4.47. Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $S \subseteq M$ um subconjunto. Mostre que S é completo com a métrica induzida se, e somente se, S é fechado. ■

Frequentemente, o exercício acima costuma camuflar um fato simples, mas confuso: um subespaço de (M, d) pode ser *completamente metrizável* mesmo sem ser fechado. Mais precisamente:

Definição 4.2.45. Um espaço topológico é **completamente (pseudo) metrizável** se existe *uma* (pseudo) métrica completa que induz sua topologia. ¶

A diferença evidente está na liberdade dada à métrica na definição acima, coisa que não ocorre no exercício anterior. Um exemplo ilustrativo se dá com a observação de que *subespaços abertos* de espaços métricos completos são completamente metrizáveis. De fato, se (M, d) é um espaço métrico completo, com d limitada[62], e $A \subseteq M$ é aberto, então a função $\rho\colon A \times A \to \mathbb{R}$ que faz $\rho(x, y) := d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ é uma métrica completa em A compatível com sua topologia, onde f é a correspondência dada por

$$x \mapsto \frac{1}{d(x, M \setminus A)}$$

para cada $x \in A$.

Exercício 4.48. Convença-se das afirmações acima. ■

Mais geralmente, vale o seguinte

Proposição 4.2.46. *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $G \subseteq M$ um subconjunto. Se G é um G_δ, então G é completamente metrizável.*

Demonstração. Para cada $n \in \omega$, seja $G_n \subseteq M$ um aberto tal que $G = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Agora, cada G_n admite uma métrica completa, de modo que $\prod_{n\in\omega} G_n$ é completamente metrizável (Corolário 4.2.19). Finalmente, como a função $\varphi\colon G \to \prod_{n\in\omega} G_n$ dada por $\varphi(x) := (x)_{n\in\omega}$ é um mergulho, resulta que G é homeomorfo a $\varphi[G]$, um subespaço fechado de $\prod_{n\in\omega} G_n$. □

Exercício 4.49. Complete os detalhes da demonstração acima. ■

Em particular, embora $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não seja fechado em $\mathbb{R}$, segue que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é completamente metrizável[63]. Por outro lado, $\mathbb{Q}$ não é completamente metrizável, em virtude do próximo teorema.

Definição 4.2.47. Dizemos que X é um **espaço de Baire** se para qualquer sequência $(A_n)_{n\in\omega}$ de abertos densos de X valer que $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ é denso em X. ¶

Teorema 4.2.48 (de Baire)**.** *Todo espaço completamente (pseudo) metrizável é de Baire.*

Demonstração. Sejam X um espaço e d uma pseudométrica completa compatível com sua topologia. Para uma sequência $(A_n)_{n\in\omega}$ de abertos densos de X e um aberto não-vazio $V \subseteq X$, exibiremos $x \in V \cap \bigcap_{n\in\omega} A_n$. A ideia é quase simples: como A_0 é aberto e denso, existem $x_0 \in A_0 \cap V$ e $r_0 \in (0, 1)$ com $B_d[x_0, r_0] \subseteq A_0 \cap V$; supondo escolhidos $x_j \in X$ e $r_j \in (0, \frac{1}{2^j})$ com $B[x_{j+1}, r_{j+1}] \subseteq A_{j+1} \cap B_d(x_j, r_j)$ para todo j com $0 < j \leq n$, o fato de A_{n+1} ser aberto e denso garante que existem $x_{n+1} \in A_{n+1} \cap B_d(x_n, r_n)$ e $r_{n+1} \in (0, \frac{r_n}{2})$ com $B_d[x_{n+1}, r_{n+1}] \subseteq A_{n+1} \cap B_d(x_n, r_n)$. Por construção, $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em X, donde a completude garante $x \in X$ com $x_n \to x$. Por sua vez, dado que $x_j \in B_d[x_n, r_n]$ para todo $j \geq n$, segue que $x \in B_d[x_n, r_n]$ e, portanto,

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} B_d[x_n, r_n] \subseteq V \cap \bigcap_{n\in\omega} A_n,$$

como desejado. □

[62] Exercício 1.94.

[63] Mais um indício do homeomorfismo entre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e o espaço ω^ω, que será provado no Capítulo 6.

Exemplo 4.2.49. *O espaço $\mathbb{Q}$ não é de Baire.* De fato, $\mathbb{Q} \setminus \{q\}$ é um aberto denso para cada $q \in \mathbb{Q}$, e $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \setminus \{q\} = \emptyset$. Note que o mesmo argumento se aplica a espaços T_1, enumeráveis e sem pontos isolados. Em particular, espaços como $\mathbb{Q}$ não são completamente metrizáveis. ▲

Observação 4.2.50. Abertos densos constituem uma família de subconjuntos *grandes* do espaço topológico, no sentido de que formam um filtro no espaço (Observação 1.1.2). Em particular, espaços de Baire são *tão grandes* que mesmo a interseção enumerável de subconjuntos grandes não dá conta de ser *pequena*. O Exercício 4.70 ajuda a reforçar essa ideia. △

Exemplo 4.2.51 (Subespaços perfeitos)**.** Espaços métricos completos *sem pontos isolados* devem ser *grandes*. Uma aplicação direta do Teorema de Baire já dá conta de mostrar que tais espaços são não-enumeráveis (vide o exemplo anterior). Porém, pode-se dizer mais.

Proposição 4.2.52. *Seja M um espaço métrico sem pontos isolados*[64]*. Se M é completo, então $\mathfrak{c} \leq |M|$.*

Demonstração. Seja $x_\emptyset \in M$ e considere a bola aberta $U_\emptyset := B(x_\emptyset, 1)$. Como $x_\emptyset$ é um ponto de acumulação, existem $x_0, x_1 \in X \setminus \{x_\emptyset\}$ distintos[65] com $x_0, x_1 \in U_\emptyset$. Supondo definidos abertos *infinitos* $U_s \subseteq M$ para todo $s \in 2^n$, pode-se tomar $x_{s^\frown 0}, x_{s^\frown 1} \in U_s$ distintos, onde $s^\frown j$ indica a sequência $(s_0, \ldots, s_{n-1}, j)$. Agora, a condição de Hausdorff garante um número real $0 < r \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ tal que para $U_{s^\frown i} := B(x_{s^\frown i}, r)$ e $i \in \{0, 1\}$ tenha-se $U_{s^\frown 0} \cap U_{s^\frown 1} = \emptyset$.

Em posse da construção recursiva *sugerida* acima, note que se $f \in 2^\omega$, então a completude da métrica assegura a não-vacuidade do conjunto $\bigcap_{n\in\omega} U_{f|_n}$, enquanto a condição de Hausdorff obriga que tal interseção tenha somente um ponto, digamos x_f. Por fim, basta notar que $f \mapsto x_f$ é uma função injetora. □

Exercício 4.50. Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

Em particular, se P é um subespaço perfeito de um espaço métrico completo, então $|P| \geq \mathfrak{c}$, o que segue pois, neste caso, P também é um espaço métrico completo sem pontos isolados. ▲

Observação 4.2.53. Uma versão mais geral do Teorema de Baire se dá no seguinte

Teorema 4.2.54. *Todo G_δ de um espaço compacto de Hausdorff é um espaço de Baire.*

Demonstração. Não é difícil adaptar a demonstração do Teorema de Baire para mostrar que espaços compactos de Hausdorff são espaços de Baire: no lugar das bolas fechadas $B_d[x_n, r_n]$, tomam-se vizinhanças V_n satisfazendo $\overline{V_n} \subseteq A_n \cap V_{n-1}$, donde a encarnação da compacidade em termos da p.i.f. garante o ponto $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n}$.

Agora, para o caso proposto, considera-se $G := \bigcap_{n\in\omega} H_n$, onde cada H_n é um aberto de um espaço compacto de Hausdorff X fixado. Trocando X por $\overline{G}$ se necessário, pode-se assumir que G (e, por conseguinte, cada H_n) é denso em X, para então proceder da seguinte forma: se $(A_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de abertos densos de G, então cada A_n é denso em X (Exercício 1.65) e, mais ainda, existem abertos B_n em X satisfazendo $A_n = B_n \cap G$; como cada B_n também é denso em X, resulta que

$$\bigcap_{n\in\omega} B_n \cap \bigcap_{n\in\omega} H_n = \bigcap_{n\in\omega} A_n$$

é denso em X e, portanto, denso em G, como desejado. □

[64] Tal hipótese é importante já que todo espaço discreto é completo com (a métrica discreta).
[65] Na verdade, há infinitos, em virtude da Proposição 2.1.14.

Por que a versão acima é mais geral do que a anterior? Simples: por exemplo, todo espaço métrico completo é um G_δ de sua compactificação de Stone-Čech (Exercício 4.69) e, portanto, deve ser um espaço de Baire. Outra consequência quase automática é o seguinte

Corolário 4.2.55. *Todo espaço localmente compacto de Hausdorff é de Baire.*

O “quase” depende, é claro, da atenção do leitor: espaços localmente compactos de Hausdorff são abertos (em particular, G_δ's) em suas compactificações de Stone-Čech (Exercício 3.92). Isto não impede que se prove diretamente: basta adaptar os argumentos da última proposição. △

Secretamente, a observação acima trata de uma noção de completude (*Čech completude*) que foge do escopo deste texto[66]. Com isso dito, há outra noção de completude à espreita, bastante óbvia dentro deste capítulo:

Definição 4.2.56. Um espaço topológico é **completamente uniformizável**[67] se existe uma uniformidade completa que induz sua topologia. ¶

É claro que todo espaço completamente metrizável é completamente uniformizável. O leitor experiente deve imaginar, pela força do hábito, que a recíproca é falsa. Ainda assim, o próximo exercício pode soar surpreendente:

Exercício 4.51. Mostre que todo espaço metrizável é completamente uniformizável. Dica: tome uma métrica d sobre X e mergulhe-o adequadamente no espaço uniforme completo $\prod_{p\in\widehat{X}\setminus X}\widehat{X}\setminus\{p\}$. ■

Ou seja: “ser completamente uniformizável” é algo tão mais amplo do que “ser completamente metrizável” que mesmo espaços metrizáveis e não-completamente metrizáveis são completamente uniformizáveis. Mais geralmente, pode-se mostrar que *todo espaço paracompacto regular é completamente uniformizável*: o leitor interessado deve conferir Kelley [60]. ▲

A noção de completude discutida neste capítulo não estende apenas os resultados referentes à completude de espaços métricos. No próximo capítulo, mostraremos que *grupos topológicos* podem ser vistos como espaços uniformes de maneira natural e, mais ainda, seus completamentos (no sentido discutido aqui) são grupos topológicos. Em particular, este será o caminho por meio do qual obteremos a reta real $\mathbb{R}$: como completamento uniforme do grupo topológico $(\mathbb{Q}, +, 0)$. Finalmente, um detalhe curioso que pode ter passado despercebido: dado que espaços métricos são, em certo sentido, os espaços uniformes de Hausdorff com bases enumeráveis, o ferramental deste capítulo permite, *secretamente*, tratar de espaços métricos sem qualquer menção a números reais.

Exercícios complementares da seção

Exercício 4.52. Sejam $(X,\mathcal{U})$ um espaço uniforme, $\mathcal{B}$ uma base para a uniformidade $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$ um filtro próprio em X. Mostre que $\mathcal{F}$ é de Cauchy se, e somente se, para todo $B\in\mathcal{B}$ existe um subconjunto B-pequeno $F\in\mathcal{F}$. ■

Exercício 4.53. Sejam $(X,\mathcal{U})$ e $(Y,\mathcal{V})$ espaços uniformes e $f\colon X\to Y$ uma função uniformemente contínua. Mostre que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy em X, então $(f(x_d))_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy em Y. Enuncie e demonstre o análogo para filtros. ■

[66] Mas confira o Exercício 4.69.

[67] Também chamado de **Dieudonné completo**.

Exercício 4.54. Seja (X, d) um espaço (pseudo) métrico. Mostre que $L \subseteq X$ é totalmente limitado se, e somente se, toda sequência em L tem subsequência de Cauchy. ■

Exercício 4.55. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $K \subseteq X$ um subconjunto. Mostre que se K é totalmente limitado, então $\overline{K}$ é totalmente limitado. Dica: use *entourages* simétricas; se for preciso, prove primeiro para o caso métrico. ■

Exercício 4.56. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme totalmente limitado. Mostre que se $K \subseteq X$, então K é totalmente limitado. ■

Exercício 4.57. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme de Hausdorff. Mostre que X é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento Hausdorff é compacto. Dica: a condição de Hausdorff serve para garantir que X é, moralmente, subespaço de seu completamento. ■

Exercício 4.58 (Compare com a Proposição 4.2.5)**.** Sejam X um conjunto, $(Y, \mathcal{V})$ um espaço uniforme, $f \colon X \to Y$ uma função e $\mathcal{F}$ um filtro de Cauchy em Y. Mostre que se $\mathcal{U}$ é a uniformidade inicial em X induzida por f e $f^{-1}\mathcal{F}$ é um pré-filtro em X, então $f^{-1}(\mathcal{F}) := \left(f^{-1}\mathcal{F}\right)^{\uparrow}$ é um filtro de Cauchy em X. Dica: pode ser útil rever as discussões sobre uniformidades iniciais e pré-filtros induzidos por relações, respectivamente realizadas na Proposição 4.1.29 e no Lema 4.2.26. ■

Exercício 4.59. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e d uma pseudométrica compatível com $\mathcal{U}$. Mostre que $(X, \mathcal{U})$ é completo se, e somente se, (X, d) é completo. ■

Exercício 4.60. Fixada uma enumeração $\mathbb{Q} := \{q_n : n \in \omega\}$, convença-se de que a bijeção $q \colon \omega \to \mathbb{Q}$ dada por $n \mapsto q_n$ é uniformemente contínua. Mostre que $q^{-1} \colon \mathbb{Q} \to \omega$ não é contínua. ■

Exercício 4.61. Sejam X e Y espaços uniformes e $f \colon X \to Y$ uma bijeção uniformemente contínua. Mostre que se X é compacto, então f^{-1} é uniformemente contínua. ■

Exercício 4.62. Sejam $(X, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $\mathcal{B}$ uma base para a uniformidade $\mathcal{U}$. Mostre que se $\mathcal{B}$ é enumerável, então $(X, \mathcal{U})$ tem caráter enumerável. ■

Exercício 4.63 (*For fun*)**.** Sem apelar para o Exercício 4.38, mostre que todo espaço métrico compacto é completo. Dica: mergulhe o compacto X em seu completamento e abra bem os olhos. ■

Exercício 4.64. Quais espaços métricos admitem compactificações metrizáveis? Dica: métricos compactos têm peso enumerável. Dica bônus: Teorema 3.1.17. ■

Exercício 4.65. Reflita: limitação é uma propriedade métrica, enquanto limitação total é uma propriedade uniforme. ■

Exercício 4.66. Mostre que se X é um espaço compacto de Hausdorff, então existe uma única uniformidade que induz sua topologia. Dica: X é um espaço de Tychonoff e, portanto, sua topologia é uniformizável; em posse disso, mostre que tal uniformidade é, necessariamente, a família de todos os subconjuntos abertos de $X \times X$ que contêm a diagonal Δ_X. ■

Exercício 4.67. Diremos que um espaço metrizável X é de **Heine-Borel** se existir uma métrica d compatível com a topologia de X tal que todo subconjunto fechado e d-limitado seja compacto em X. Mostre que X é de Heine-Borel se, e somente se, X é separável e localmente compacto. Dica: para a volta, note que a compactificação de Alexandroff de um espaço metrizável, separável e localmente compacto é, necessariamente, metrizável. ■

Exercício 4.68. Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Mostre que se X é homogêneo e enumerável, então X é discreto. Dica: o que acontece se ao menos um ponto de X não for isolado? ■

Exercício 4.69 (Completude de Čech)**.** Seja X um espaço de Tychonoff.

a) Mostre que as condições a seguir são equivalentes entre si:

   (i) X é um G_δ em qualquer compactificação cX de X (alt. $cX \setminus X$ é um F_σ);

   (ii) X é um G_δ em βX (alt. $\beta X \setminus X$ é um F_σ);

(iii) existe uma compactificação cX de X em que X é um G_δ em cX (alt. $cX \setminus X$ é um F_σ).
Dica: observe que (i) $\Rightarrow$ (ii) e (ii) $\Rightarrow$ (iii) são óbvias, de modo que basta mostrar (iii) $\Rightarrow$ (ii) e (ii) $\Rightarrow$ (i); para obter tais implicações, a maximalidade de βX assegura uma função contínua $f\colon \beta X \to cX$ satisfazendo $f[X] = X$, enquanto o Teorema 3.3.35 permite tanto "empurrar" a condição F_σ de $\beta X \setminus X$ para $cX \setminus X$, quanto "puxar" a condição F_σ de $cX \setminus X$ para $\beta X \setminus X$.

b) O espaço X é xingado de **Čech-completo** se qualquer uma das condições acima for satisfeita. Mostre que X é Čech-completo se, e somente se, existe uma sequência $(\mathcal{A}_n)_{n\in\omega}$ de coberturas por abertos para X com a seguinte propriedade: sempre que uma família $\mathcal{F}$ de fechados de X com p.i.f. for tal que para cada n existirem $F_n \in \mathcal{F}$ e $A_n \in \mathcal{A}_n$ com $F_n \subseteq A_n$, valer que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Dica: para a volta, use os abertos da sequência de coberturas para expressar X como uma interseção enumerável de abertos de βX; para a ida, use os abertos de βX que permitem expressar X como um G_δ a fim de obter a sequência de coberturas abertas (lembre-se ainda que βX é espaço regular).

c) Mostre que se X é completamente metrizável, então X é Čech-completo. Em particular, conclua que todo espaço completamente metrizável é um G_δ de sua compactificação de Stone-Čech. Dica: tome $\mathcal{A}_n := \left\{B_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X\right\}$ para cada $n \in \omega$ e use o item anterior aliado à completude da métrica para concluir que X é Čech-completo. ■

Observação 4.2.57. Na verdade, vale a recíproca do último item, i.e.: *se X é metrizável e Čech-completo, então X é completamente metrizável.* Para se dar conta disso, tome uma compactificação $c\widetilde{X}$ do completamento $\widetilde{X}$ de X e note que $c\widetilde{X}$ também é uma compactificação de X, donde segue que X é um G_δ de $c\widetilde{X}$ e, por conseguinte, um G_δ em $\widetilde{X}$ (por quê?). Dessa forma, a Proposição 4.2.46 assegura a metrizabilidade completa de X. Tal roteiro, adaptado de Engelking [39], permite evitar a extensão de funções contínuas em G_δ's por meio de *oscilações* (*a.k.a. Teorema de Lavrentieff*), como feito por Willard [115], por exemplo. △

Exercício 4.70 (Confira o Exercício 1.75)**.** Mostre que para um espaço topológico X, são equivalentes:

(i) toda vizinhança não-vazia de X é não-magra;

(ii) reunião enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio;

(iii) X é de Baire.

Conclua que se X é um espaço de Baire, então X é não-magro. ■

Exercício 4.71. A recíproca da conclusão anterior não é válida em geral.

a) Seja $X := \mathbb{Q} \cup (0,1)$ com a topologia herdada de $\mathbb{R}$. Mostre que X é um espaço não-magro que não é de Baire. Dica: para ver que X não é de Baire, observe que X contém uma vizinhança não-vazia e magra; para ver que X é não-magro, observe que X contém um aberto que é não-magro com a topologia de subespaço.

b) Considere $X := (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \{1\})$ com a topologia herdada de $\mathbb{R}^2$. Mostre que X é um espaço não-magro que não é Baire. Dica: use a dica anterior. ■

Observação 4.2.58. Na construção de contraexemplos como os anteriores, é importante que o subespaço não-magro seja aberto. Com efeito, $X := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ visto como subespaço de $\mathbb{R}^2$, é um espaço magro em si mesmo: basta notar que tanto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{R} \times \{0\}$ são magros em X. Com isso dito, convém adiantar que a implicação "não-magro $\Rightarrow$ Baire" é verdadeira para espaços vetoriais topológicos. △

Exercício 4.72 (ponto fixo de Banach)**.** Mostre que se (X, d) é um espaço métrico completo e $f\colon X \to X$ é uma função para a qual existe $K \in (0,1)$ satisfazendo a desigualdade $d(f(x), f(y)) < K d(x,y)$ para quaisquer $x, y \in X$, então f tem um único ponto fixo. ■

Parte II

Análise Abstrata

Capítulo 5

Álgebra topológica

Antes de qualquer outra coisa, é importante deixar clara a distinção semântica entre as expressões "Topologia Algébrica" e "Álgebra Topológica": enquanto a primeira, mais conhecida no meio matemático, lida com o trabalho de associar estruturas algébricas a espaços topológicos de modo *funtorial*, a segunda se interessa por tratar de estruturas algébricas munidas de topologias compatíveis com suas operações.

Desse modo, objetos como *grupos topológicos*, *anéis topológicos*, *espaços vetoriais topológicos* e outras quinquilharias fazem parte do dia a dia da Álgebra Topológica, enquanto *grupos fundamentais*, *módulos de homologia* e coisas do tipo pertencem à rotina da Topologia Algébrica. Portanto, apesar do título, este capítulo tem muito mais a ver com Análise (em seus aspectos fundamentais) do que com qualquer coisa que tangencie o interesse usual do topólogo algébrico.

A ideia geral do que será feito aqui é a seguinte: fixada uma linguagem algébrica $\mathscr{L}$[1], uma **$\mathscr{L}$-álgebra topológica** é uma $\mathscr{L}$-álgebra X munida de uma topologia que torna a operação $p_X\colon X^n \to X$ contínua para cada símbolo p de operação n-ária[2], onde X^n é dotado da topologia produto usual. Neste caso, diremos que a topologia de X é **compatível** com a $\mathscr{L}$-estrutura algébrica X.

Em particular, não é difícil se convencer de que se $Y \subseteq X$ é uma $\mathscr{L}$-subálgebra de X, então a topologia de subespaço sobre Y herdada de X é compatível com a estrutura algébrica de Y, situação em que Y será xingado de **$\mathscr{L}$-subálgebra topológica** de X. Ao longo de todo o capítulo, sempre consideraremos a topologia de subespaço quando tratarmos de subálgebras topológicas.

A *categoria das $\mathscr{L}$-álgebras topológicas* tem como objetos as $\mathscr{L}$-álgebras topológicas e, como setas, os **$\mathscr{L}$-morfismos contínuos**, i.e., funções que são simultaneamente setas da categoria das $\mathscr{L}$-álgebras e da categoria dos espaços topológicos. Em particular, um **isomorfismo topológico** $f\colon A \to B$ entre as $\mathscr{L}$-álgebras topológicas A e B é um $\mathscr{L}$-isomorfismo contínuo entre A e B cuja inversa é contínua.

Apesar das definições acima, não é frequente que se estudem álgebras topológicas tão gerais quanto os objetos típicos da Álgebra Universal, pois o seu tratamento já é bastante delicado mesmo em casos simples, exatamente aqueles que tomarão nossa atenção ao longo deste capítulo.

[1]Pode ser útil rever a definição dada na Subseção K.2.1.

[2]Operações de aridade 0 são contínuas, independentemente da topologia sobre X.

Grupos topológicos serão os protagonistas da primeira seção, com *anéis e corpos topológicos* como coadjuvantes num dos ápices do capítulo: a *construção da reta real*. Por sua vez, a segunda seção será um resumo de aspectos básicos de Análise Funcional vistos sob a perspectiva da Topologia Geral, ou seja: serão estudados os *espaços vetoriais topológicos*. Finalmente, na Seção Bônus, grupos topológicos serão revisitados sob ~~duas óticas distintas~~ a ótica da Teoria da Medida, com a construção da integral de Haar em grupos localmente compactos[3].

5.1 Grupos Topológicos Anônimos

Definição 5.1.1. Um **grupo topológico** consiste de um grupo $(G, \cdot, e)$ munido de uma topologia que torna contínuas as funções

$$\begin{aligned} \cdot\colon G\times G &\to G \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \operatorname{inv}\colon G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

onde $G \times G$ tem a topologia produto. ¶

Observação 5.1.2. Por conveniência, o símbolo "$\cdot$" será frequentemente omitido, de modo que escreveremos "xy" em vez de "$x \cdot y$", como de costume. △

A primeira coisa a observar é que um grupo topológico G vem de fábrica com um homeomorfismo: dado que $\operatorname{inv} \circ \operatorname{inv} = \mathrm{Id}_G$, segue que inv é a sua própria inversa contínua e, portanto, é um homeomorfismo. Porém, não costuma ser verdade que inv também seja um isomorfismo de grupos, dado que $\operatorname{inv}(xy) = y^{-1}x^{-1} = \operatorname{inv} y \operatorname{inv} x$, a ordem oposta daquela que *elevaria* inv ao posto de morfismo de grupos[4]. Nesse sentido, pode ser interessante conferir o Exercício 5.20.

Além disso, fixado $g \in G$, também *é contínua a função* $\psi_g\colon G \to G$ *dada pela* **translação por** g **pela direita**, i.e., $\psi_g(h) := hg$ para cada $h \in G$: ao se denotar por $\underline{g}\colon G \to G$ a função contínua que faz $\underline{g}(h) := g$ para todo $h \in G$, pode-se expressar ψ_g como uma composta de duas funções contínuas[5], $\psi_g = \cdot \circ (\mathrm{Id}_G, \underline{g})$, igualdade válida pois

$$\cdot \circ (\mathrm{Id}_G, \underline{g})(h) = \cdot(h, g) = h \cdot g$$

para todo $h \in G$. Analogamente, a **translação por** g **pela esquerda**, que faz corresponder cada $h \in G$ ao elemento $gh \in G$, também é contínua.

Exercício 5.1. Prove que as translações pela direita e pela esquerda são homeomorfismos de G em G. ■

Observação 5.1.3. Dada a *naturalidade* dos homeomorfismos acima, é frequente a prática de omitir os símbolos que os denotam. Para subconjuntos $A, B \subseteq G$, vamos escrever

$$A^{-1} := \operatorname{inv}[A] \quad \text{e} \quad AB := \{ab : a \in A \text{ e } b \in B\}. \tag{5.1}$$

Em particular, para os casos em que $A := \{x\}$ ou $B := \{y\}$, escreveremos xB ou Ay em vez de $\{x\}B$ ou $A\{y\}$, respectivamente.

[3] Originalmente, haveria mais uma subseção bônus, voltada para *extensões de Galois infinitas*. Desisti.

[4] O xingamento usual para esse tipo de situação é *antimorfismo*: uma função $f\colon A \to B$, entre os conjuntos A e B munidos de operações binárias $*$ e $\star$, respectivamente, é um **antimorfismo** se para quaisquer $a, a' \in A$ ocorrer $f(a * a') = f(a') \star f(a)$.

[5] A continuidade da função $(\mathrm{Id}_G, \underline{g})$, que faz $h \mapsto (h, g)$, segue da Proposição 1.1.85.

Na próxima seção, em que grupos topológicos darão lugar aos espaços vetoriais topológicos, a adição do espaço vetorial será denotada de maneira aditiva e, por isso, escreveremos

$$-A := \mathrm{inv}[A] \quad \text{e} \quad A + B := \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\} \tag{5.2}$$

onde $\mathrm{inv}\colon E \to E$ faz $\mathrm{inv}(v) := -v$ para cada v pertencente ao espaço vetorial E. △

A primeira (boa) propriedade que distingue grupos topológicos de espaços mais gerais é a homogeneidade. Recordemo-nos de que um espaço topológico X é **homogêneo** se para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$ existir um homeomorfismo $\psi\colon X \to X$ tal que $\psi(x) = y$. Tem-se então a seguinte

Proposição 5.1.4. *Todo grupo topológico é homogêneo.*

Demonstração. Dados $x, y \in G$ distintos, note que a translação $h \mapsto h \cdot (x^{-1}y)$ é um homeomorfismo que faz $x \mapsto y$. □

Em outras palavras, saber as *propriedades locais*[6] de um ponto *específico* garante conhecimento sobre as propriedades locais de *todos* os pontos do espaço, como ilustrado pelo Exercício 1.164. Nesse sentido, a vantagem dos grupos topológicos é ainda maior, pois sabe-se explicitamente quais homeomorfismos fazem o trabalho de *transportar* os filtros de vizinhanças: as translações. Consequentemente, ao se estudar propriedades locais de grupos topológicos, basta investigar o comportamento do elemento neutro e. Por futura conveniência, isto será destacado na próxima proposição.

Proposição 5.1.5. *Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico, $V \subseteq G$ tal que $e \in V$ e $g \in G$ um ponto qualquer. Então:*

i) *V é aberto se, e somente se, Vg e gV são abertos;*

ii) *se $\mathcal{V}$ é uma (sub) base do filtro de vizinhanças $\mathcal{N}_e$, então $\mathcal{V}g := \{Vg : V \in \mathcal{V}\}$ e $g\mathcal{V} := \{gV : V \in \mathcal{V}\}$ são (sub) bases do filtro de vizinhanças $\mathcal{N}_g$;*

iii) *com as notações acima, $\mathcal{N}_g = g\mathcal{N}_e = \mathcal{N}_e g$.*

Exercício 5.2. Demonstre a proposição acima. Dica: Vg e gV são as imagens do subconjunto V pelos homeomorfismos dados pelas translações por g. ■

Exemplo 5.1.6 (Teste da divergência)**.** Seja $(a_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de elementos de um grupo topológico abeliano[7] $(G, +, 0)$. Pode-se induzir uma nova sequência em G, recursivamente, por meio da operação de G e da sequência $(a_n)_{n\in\omega}$. Mais precisamente, declaremos $s_0 := a_0$ e $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$ para todo $n > 0$. Embora a operação de G seja finitária, sua topologia permite extrapolar os *limites* da Álgebra: *pode* existir $s \in G$ tal que $s_n \to s$, o que moralmente corresponde ao resultado do que seria fazer $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, pelo menos se G for um grupo de Hausdorff.

Como sugerido na distante Subseção K.2.3 do *Kindergarten*, esta é a generalização natural das *séries* da Análise Real, que precisam apenas dos dois ingredientes acima: um operação binária para determinar as somas parciais, e uma topologia para decidir (extrapolar) o caráter finitário da operação. Como ilustração, vamos ver que mesmo neste contexto geral é possível realizar o *teste da divergência*.

[6]Pode-se pensar numa *propriedade local* como qualquer propriedade caracterizada pelos filtros de vizinhança do espaço. Por exemplo, ter caráter enumerável num ponto x significa dizer que o filtro $\mathcal{N}_x$ tem uma base enumerável.

[7]Eu não tenho a mínima ideia se tal resultado é válido em grupos topológicos não-abelianos.

Proposição 5.1.7 (Teste da Divergência). *Nas notações acima, se $s_n \to s$ para algum $s \in G$, então $a_n \to 0$.*

Demonstração. A menos da notação aditiva, o Exercício 5.25 garante a continuidade da função $\psi\colon G \times G \to G$ dada por $\psi(x, y) := x - y$. Agora, como $s_n \to s$ por hipótese, sua subsequência $(s_{n+1})_{n\in\omega}$ também deve convergir para s. Assim, $(s_{n+1}, s_n) \to (s, s)$ em $G \times G$, donde a continuidade de ψ acarreta

$$a_{n+1} = \psi(s_{n+1}, s_n) \to \psi(s, s) = s - s = 0,$$

donde segue que $a_n \to 0$, como queríamos. □

Em situações como a anterior, escreveremos

$$\sum_{n\in\omega} a_n := \lim \left(\sum_{j\leq n} a_j \right)_{n\in\omega} \tag{5.3}$$

para indicar a *coleção* de todos os limites da sequência $(s_n)_{n\in\omega}$ das *somas parciais* da sequência $(a_n)_{n\in\omega}$, que será chamada de **série da sequência** $(a_n)_{n\in\omega}$. Aqui, faz-se a convenção usual de que se G for de Hausdorff, então $\sum_{n\in\omega} a_n$ denota o único elemento de G, caso exista, para o qual a sequência $(s_n)_{n\in\omega}$ converge, tal qual fizemos com a notação "lim" para filtros e *nets* (Observação 1.2.34). ▲

Outro fato marcante dos grupos topológicos, frequentemente apresentado no começo dos cursos de Análise Funcional (Exemplo 5.1.9 a seguir), é a facilidade com que se pode determinar quais *morfismos* de grupos são contínuos. De fato, embora a continuidade de uma função dependa de seu comportamento local em cada ponto do espaço, a situação se simplifica drasticamente com a hipótese de compatibilidade algébrica.

Proposição 5.1.8. *Sejam G e H grupos topológicos e $f\colon G \to H$ um morfismo de grupos. Então a função f é contínua se, e somente se, f é contínua em e_G, onde e_G denota o elemento neutro do grupo G.*

Demonstração. Supondo que f é contínua em e_G, verificaremos que f é contínua em $g \in G$: para isso, basta tomar uma *net* $(g_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em G com $g_d \to g$ e mostrar que $f(g_d) \to f(g)$. Ora, pela continuidade das translações (no grupo G), resulta

$$g_d g^{-1} \to g g^{-1} = e_G,$$

e, pela continuidade de f em e_G, obtém-se

$$f(g_d)f(g)^{-1} = f(g_d g^{-1}) \to f(e_G) = e_H,$$

donde o restante segue pela continuidade da translação por $f(g)$ pela direita (dessa vez no grupo H). A recíproca é automática. □

Exemplo 5.1.9 (Continuidade em espaços normados)**.** No distante Exercício 1.229, o leitor foi convidado a provar que as operações de um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ são contínuas com respeito à topologia induzida por *alguma* norma no espaço. Logo, espaços normados são grupos topológicos[8]. Daí, se X e Y são espaços normados e $T\colon X \to Y$ é uma função $\mathbb{K}$-linear, *a.k.a.* transformação linear, então, em particular, T é um morfismo de grupos. Assim, pela proposição anterior, resulta que $T\colon X \to Y$ é contínua se, e somente se, T é contínua em 0_X. ▲

[8]Também são *espaços vetoriais topológicos*, mas é cedo para isso.

Para um grupo topológico $(G, \cdot, e)$, note que se $U \in \mathcal{N}_e$, então a continuidade da operação $\cdot$ assegura vizinhanças $V, W \in \mathcal{N}_e$ tais que $VW \subseteq U$, enquanto a continuidade da inversão garante uma vizinhança $\widetilde{V} \in \mathcal{N}_e$ com $\widetilde{V}^{-1} \subseteq U$. Com uma argumentação similar, o leitor não terá dificuldades com o próximo

Exercício 5.3. Dados um grupo topológico $(G, \cdot, e)$ e um filtro próprio $\mathcal{F}$ em G, considere as seguintes condições:

($\mathrm{GT_i}$) para todo $U \in \mathcal{F}$ existem $V, W \in \mathcal{F}$ tais que $VV \subseteq U$ e $W^{-1} \subseteq U$;

($\mathrm{GT_{ii}}$) para todo $U \in \mathcal{F}$ existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$;

($\mathrm{GT_{iii}}$) para quaisquer $g \in G$ e $U \in \mathcal{F}$ ocorre $gUg^{-1} \in \mathcal{F}$.

Mostre que ($\mathrm{GT_i}$) e ($\mathrm{GT_{ii}}$) são equivalentes e, se $\mathcal{F} := \mathcal{N}_e$, então $\mathcal{F}$ satisfaz todas as condições elencadas acima. Dica para ($\mathrm{GT_{ii}}$) $\Rightarrow$ ($\mathrm{GT_i}$): será bastante útil notar que se $\mathcal{F}$ satisfaz a condição ($\mathrm{GT_{ii}}$), então $e \in \bigcap \mathcal{F}$. ■

Curiosamente, se $(G, \cdot, e)$ é um grupo *desprovido de topologia* e $\mathcal{F}$ é um filtro em G satisfazendo as condições do exercício anterior, então, na verdade, G não é desprovido de uma topologia.

Teorema 5.1.10. *Nas condições acima, existe uma única topologia sobre o grupo G que faz dele um grupo topológico com $\mathcal{F} = \mathcal{N}_e$.*

Demonstração. Por um lado, em virtude da Proposição 5.1.5, existe no máximo uma topologia com tal propriedade: se $\mathcal{F} = \mathcal{N}_e$, então $\mathcal{N}_g = g\mathcal{F}$ para todo $g \in G$, e já vimos de diversas maneiras que os filtros de vizinhança determinam a topologia[9].

Já para a existência, basta declarar

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq G : \forall g \in A \quad \exists V \in \mathcal{F} \quad gV \subseteq A\},$$

e observar que esta é a topologia procurada.

✓ Como no Exercício 1.257, chame $g\mathcal{F} := \{gU : U \in \mathcal{F}\}$ e note que

$$\{A \subseteq G : \forall g \in A \quad A \in g\mathcal{F}\} = \{A \subseteq G : \forall g \in A \quad \exists U \in \mathcal{F} \quad gU \subseteq A\} = \mathcal{T}.$$

Mostraremos que a família de filtros $\{g\mathcal{F} : g \in G\}$ satisfaz a condição do exercício, donde seguirá que $\mathcal{T}$ é uma topologia com $\mathcal{N}_g = g\mathcal{F}$ para todo $g \in G$ e, em particular, $\mathcal{N}_e = \mathcal{F}$. Para tanto, fixemos $xV \in x\mathcal{F}$ arbitrário e tomemos $W \in \mathcal{F}$ com $WW \subseteq V$. Com isso, $xW \in x\mathcal{F}$ e se $z \in xW$, então $zW \in z\mathcal{F}$ e

$$zW \subseteq xWW \subseteq xV,$$

mostrando que $xV \in z\mathcal{F}$, como desejado.

✓ Dados $g, h \in G$ e $U \in \mathcal{F}$, a condição ($\mathrm{GT_{ii}}$) permite tomar $V \in \mathcal{F}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$, enquanto ($\mathrm{GT_{iii}}$) assegura $W := h^{-1}Vh \in \mathcal{F}$, donde segue, pelo item anterior, que o subconjunto $Z := g(h^{-1}Vh) \times h(h^{-1}Vh) \subseteq G \times G$ é uma vizinhança de (g, h) tal que

$$\psi[Z] = gh^{-1}Vh(h(h^{-1}Vh))^{-1} = gh^{-1}Vhh^{-1}V^{-1} = gh^{-1}VV^{-1} \subseteq gh^{-1}U,$$

mostrando que $\psi \colon (x, y) \mapsto xy^{-1}$ é contínua. Em vista do Exercício 5.25, conclui-se que $\mathcal{T}$ faz de G um grupo topológico, como desejado. □

[9] Confira, por exemplo, os Exercícios 1.190 e 1.256.

Em vista do último teorema, segue que para definir uma topologia sobre um grupo G que faça dele um grupo topológico, é suficiente determinar um filtro $\mathcal{F}$ em G satisfazendo as condições ($\mathrm{GT_i}$) (ou ($\mathrm{GT_{ii}}$)) e ($\mathrm{GT_{iii}}$) do Exercício 5.3. Como filtros costumam ser definidos por pré-filtros, a próxima proposição é bastante natural.

Proposição 5.1.11. *Sejam* $(G, \cdot, e)$ *um grupo e* $\mathcal{B}$ *um pré-filtro em* G*. Se* $\mathcal{B}$ *é tal que*

- *para qualquer* $B \in \mathcal{B}$ *existem* $C, D \in \mathcal{B}$ *tais que* $CC \subseteq B$ *e* $D^{-1} \subseteq B$*, e*
- *para quaisquer* $g \in G$ *e* $B \in \mathcal{B}$ *existe* $C \in \mathcal{B}$ *tal que* $C \subseteq gBg^{-1}$*,*

então existe uma única topologia sobre G *que faz dele um grupo topológico com* $\mathcal{N}_e = \mathcal{B}^{\uparrow}$*.*

Exercício 5.4. Demonstre a proposição acima. Dica: use o teorema anterior. ■

Exemplo 5.1.12. Considere $(\mathbb{R}, +, 0)$, i.e., a reta real com sua estrutura aditiva de grupo abeliano. Como a família

$$\mathcal{B} := \{(-\varepsilon, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

satisfaz as condições da proposição acima[10], segue que existe uma única topologia sobre $\mathbb{R}$ que torna a adição contínua com $\mathcal{N}_0 = \mathcal{B}^{\uparrow}$. Naturalmente, tal topologia é, precisamente, a topologia usual da reta. ▲

Observação 5.1.13. No exemplo acima, os elementos da base $\mathcal{B}$ satisfazem uma condição adicional bastante *peculiar*: para todo $B \in \mathcal{B}$ ocorre $B = -B$. Em geral, dizemos que um subconjunto S de um grupo $(G, \cdot, e)$ é **simétrico** se ocorrer $S = S^{-1}$. Embora nem toda base seja tão boa quanto a anterior, bases compostas por subconjuntos simétricos *sempre existem*. △

Exercício 5.5. Mostre que se $(G, \cdot, e)$ é um grupo topológico, então o filtro de vizinhanças $\mathcal{N}_e$ admite uma base de abertos $\mathcal{B}$ tal que $B = B^{-1}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Dica: note que se $N \in \mathcal{N}_e$, então $N^{-1} \in \mathcal{N}_e$ e, consequentemente, $N \cap N^{-1} \in \mathcal{N}_e$. ■

Exemplo 5.1.14 (A topologia I-ádica)**.** Fixados um anel A comutativo e com unidade e um ideal I, consideremos o ideal I^n definido da seguinte forma:

$$I^0 := A \quad \text{e} \quad I^{n+1} := I^n I \text{ para } n \in \omega,$$

onde o produto entre os ideais I^n e I é definido como o menor ideal de A contendo todos os elementos da forma $ab \in A$, com $a \in I^n$ e $b \in I$ (Definição K.2.87).

Vamos mostrar que a família de subconjuntos $\mathcal{B} := \{I^n : n \in \omega\}$ satisfaz as condições da Proposição 5.1.11 para $(G, \cdot, e) := (A, +, 0)$ e, por conseguinte, determina uma única topologia sobre A que torna a função $(a, b) \mapsto a - b$ contínua e satisfaz $\mathcal{N}_0 = \mathcal{B}^{\uparrow}$. De fato, como cada I^n é um ideal de A, tem-se $I^n + I^n = I^n$ e $-I^n = I^n$, provando a primeira condição. A segunda vale trivialmente devido à comutatividade da adição. Note que uma vizinhança de $x \in A$ é da forma $x + I^n$ para algum $n \in \omega$.

Na verdade, a topologia descrita acima, chamada de **topologia I-ádica** do anel A, é compatível com a estrutura de anel de A e, por conseguinte, faz de A um *anel topológico*.

[10] O leitor deve se atentar para o fato de que a Proposição 5.1.11 foi enunciada com a notação multiplicativa. Note, por exemplo, que a condição "$CC \subseteq B$" se escreve como "$C + C \subseteq B$" com a notação aditiva.

Definição 5.1.15. Dizemos que um anel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ é um **anel topológico** se existe uma topologia que faz de $(A, +, 0)$ um grupo topológico tal que a operação $\cdot : A \times A \to A$ é contínua. ¶

A multiplicação do anel A é contínua pois se $(a_d)_{d \in \mathbb{D}}$ e $(b_d)_{d \in \mathbb{D}}$ são *nets*[11] em A com $a_d \to a$ e $b_d \to b$, então $a_d b_d \to ab$: de fato, dada uma vizinhança básica $ab + I^n$ de ab, existem $d_a, d_b \in \mathbb{D}$ tais que $a_d \in a + \in I^n$ e $b_d \in b + I^n$ sempre que $d \geq d_a, d_b$; logo, para $\tilde{d} \geq d_a, d_b$ e $d \geq \tilde{d}$ deve-se ter

$$a_d b_d \in (a + I^n)(b + I^n) = ab + I^n + I^n + I^{2n} \subseteq ab + I^n.$$

A Subseção E.1 discutirá mais alguns fatos sobre a topologia I-ádica de um anel, que provavelmente chamarão a atenção do algebrista interessado. Fora desse contexto, anéis topológicos só aparecerão explicitamente (neste texto!) na construção da reta real, realizada na Subseção 5.1.2. ▲

Proposição 5.1.16. *Todo grupo topológico é T_3.*

Demonstração. Para um grupo topológico $(G, \cdot, e)$, provaremos que e admite uma base local de vizinhanças fechadas, donde o resultado seguirá da homogeneidade aliada à caracterização (T_3.c) para espaços T_3. Ora, se $U \in \mathcal{N}_e$, então existe $V \in \mathcal{N}_e$ com $VV \subseteq U$ e, consequentemente, $W := V \cap V^{-1} \in \mathcal{N}_e$. Mostremos que $\overline{W} \subseteq U$: dado $g \in \overline{W}$, note que gW é uma vizinhança que contém g, donde segue que $gW \cap W \neq \emptyset$ e, consequentemente, existem $a, b \in W$ tais que $ga = b$, acarretando $g = ba^{-1} \in WW^{-1} \subseteq VV \subseteq U$. Isso mostra que a família $\left\{\overline{W} : W \in \mathcal{N}_e\right\}$ é base local de vizinhanças fechadas para e, como desejado. □

Embora grupos topológicos sejam espaços T_3 por direito[12], a condição de Hausdorff deve ser conquistada com muito esforço e luta. Ou talvez nem tanto.

Teorema 5.1.17. *Um grupo topológico $(G, \cdot, e)$ é de Hausdorff se, e somente se, $\{e\}$ é fechado em G.*

Demonstração. Se G é de Hausdorff, então G é T_1 e, consequentemente, $\{e\}$ é fechado. Para a recíproca, note que a função $\psi : G \times G \to G$ dada por $\psi(x, y) := xy^{-1}$ é contínua (Exercício 5.25), donde segue que a pré-imagem $\psi^{-1}[\{e\}] = \Delta_X$ é fechada, por $\{e\}$ ser fechado. O resultado segue então da caracterização (Haus_4) para espaços de Hausdorff, dada na Proposição 2.1.19. □

Exercício 5.6. Mostre que se $(G, \cdot, e)$ é um grupo topológico T_0, então G é de Hausdorff. Dica: mostre que $G \setminus \{e\}$ é aberto em G (o exercício anterior pode ser útil). ■

Corolário 5.1.18. *Para um grupo topológico $(G, \cdot, e)$ são equivalentes:*

(i) *G é T_0;*

(ii) *G é T_1;*

(iii) *G é T_2;*

(iv) *G é regular* (a.k.a. $T_3 + T_1$).

Exercício 5.7. Convença-se de que o corolário acima é verdadeiro. ■

[11] *Spoiler alert*: neste caso, o leitor que preferir usar sequências em vez de *nets* está liberado, já que $\{I^n : n \in \omega\}$ é base local enumerável de $\mathcal{N}_e$.

[12] Até mais do que isso, na verdade (Observação 5.1.19).

Observação 5.1.19. Na próxima subseção veremos que todo grupo topológico é um espaço $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ (apelando para resultados sobre uniformidades). Além de transformar a Proposição 5.1.16 num corolário automático, isso mostra que as equivalências anteriores englobam mais um item: a saber, G é T_0 se, e somente se, G é um espaço de Tychonoff (*a.k.a.* $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}} + T_1$). △

Antes de discutir as *construções universais* que podem ser feitas com grupos topológicos, será útil destacar as seguintes propriedades – que serão revisitadas na próxima seção, no contexto dos *espaços vetoriais topológicos*.

Proposição 5.1.20. *Seja $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico. Então para quaisquer subconjuntos $A, B \subseteq G$ ocorre*

($\mathrm{PGT_i}$) $\overline{A} = \bigcap_{V\in\mathcal{N}_e} VA = \bigcap_{V\in\mathcal{N}_e} AV$;

($\mathrm{PGT_{ii}}$) $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{AB}$;

($\mathrm{PGT_{iii}}$) *se A é subgrupo de G, então $\overline{A}$ é subgrupo de G.*

Demonstração. Para a primeira propriedade, note que se $V \in \mathcal{N}_e$, então existe $S \in \mathcal{N}_e$ com $S = S^{-1}$ e $S \subseteq V$. Logo, se $x \in \overline{A}$, então por xS ser uma vizinhança de x, deve existir $a \in A \cap xS$, donde a simetria de S implica $x \in aS \subseteq AV$. Por outro lado, se $x \in AV$ para todo $V \in \mathcal{N}_e$, então para cada $V \in \mathcal{N}_e$ existem $v \in V$ e $a \in A$ tais que $x = av$, acarretando $a = xv^{-1} \in xV^{-1}$, donde o resultado segue ao se tomar tomar V simétrica. A outra igualdade é análoga.

A segunda propriedade decorre da continuidade da operação de G, aliada à Proposição 1.1.71 e ao Exercício 1.99. Finalmente, para a terceira propriedade, deve-se mostrar que se $x, y \in \overline{A}$, então $xy^{-1} \in \overline{A}$ (Proposição K.2.70). Ora, por ocorrer

$$(x, y) \in \overline{A} \times \overline{A} = \overline{A \times A},$$

existe uma *net* $(x_d, y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $A \times A$ tal que $(x_d, y_d) \to (x, y)$, donde a continuidade da função $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ garante $x_d y_d^{-1} \to xy^{-1}$, com cada $x_d y_d^{-1} \in A$ pela hipótese de A ser subgrupo. Portanto, $xy^{-1} \in \overline{A}$, como queríamos. □

Exercício 5.8. Reescreva a demonstração anterior com a notação aditiva. ■

São frequentes as ocasiões em que se precisa *construir* um novo grupo topológico a partir de uma família de grupos topológicos dados. Embora os métodos já discutidos no contexto topológico se apliquem aqui, deve-se ter em mente que para receber a alcunha de “grupo topológico”, a topologia sobre a nova estrutura deve ser compatível com as operações do grupo. Comecemos com uma ilustração simples.

Proposição 5.1.21. *Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico e $H \subseteq G$ um subgrupo. Então a topologia de H como subespaço de G torna H um grupo topológico.*

Exercício 5.9. Prove a proposição acima. Dica: use a continuidade da inclusão. ■

De modo análogo, a topologia produto sobre um produto de grupos topológicos dá ao grupo produto uma topologia compatível com suas operações naturais. Mais geralmente, tanto essa afirmação quanto a última proposição são reflexo do

Teorema 5.1.22. *Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto não-vazio e considere, para cada $i \in \mathcal{I}$, um morfismo de grupos $f_i \colon X \to G_i$, onde X é um grupo fixado e G_i é um grupo topológico. Se $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ é a topologia inicial sobre X induzida pela família de morfismos $\mathcal{G} := \{f_i : X \to G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, então $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ é compatível com a estrutura de grupo de X.*

Demonstração. Pelo Exercício 5.25, basta mostrar que a “subtração” $X \times X \to X$, que faz $(x, y) \mapsto xy^{-1}$, é contínua. Para isso, tomemos uma *net* $((x_d, y_d))_{d\in\mathbb{D}}$ em $X \times X$ tal que $(x_d, y_d) \to (x, y)$ e provemos que $x_d y_d^{-1} \to xy^{-1}$. Ora, pelo Exercício 1.241, a convergência desejada ocorre se, e somente se, para cada $i \in \mathcal{I}$ valer

$$f_i(x_d y_d^{-1}) \to f_i(xy^{-1}),$$

o que de fato ocorre pois $x_d \to x$, $y_d \to y$ e a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ sobre X torna f_i contínua, donde segue que $f_i(x_d) \to f_i(x)$ e $f_i(y_d) \to f_i(y)$ – o restante decorre da continuidade da “subtração” em G_i e do fato de f_i ser um morfismo. □

Exercício 5.10. Use o teorema acima para provar que a topologia produto sobre um produto de grupos topológicos é compatível com a estrutura algébrica do produto. Aproveite para enunciar e demonstrar a propriedade universal do produto de grupos topológicos. ■

O quociente é a outra construção típica. Por estarmos interessados em grupos, o teorema a seguir é feito para o contexto de subgrupos normais, precisamente o caso em que as regras usuais de operação fazem do conjunto das classes de equivalência um grupo *natural*, como discutido na introdução da Subseção K.2.2. O leitor interessado em contextos mais abrangentes pode conferir [19].

Teorema 5.1.23. *Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico e $H \subseteq G$ um subgrupo normal. Então G/H é um grupo topológico quando munido da topologia quociente induzida pela projeção canônica $\pi \colon G \to G/H$. Além disso, G/H é um espaço de Hausdorff se, e somente se, H é fechado em G.*

Demonstração. Pelo Exercício 5.25, a fim de mostrar que a topologia quociente sobre G/H é compatível com sua estrutura algébrica, é suficiente provar que a correspondência

$$(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{xy^{-1}}$$

é contínua. Para tanto, note que é suficiente mostrar que a função $\psi \colon G \times G \to G/H$ dada por $(x, y) \mapsto \overline{xy^{-1}}$ é contínua: de fato, para a relação de equivalência $\sim$ sobre $G \times G$ dada por

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{c} \text{ e } \overline{b} = \overline{d},$$

tem-se $\psi(a, b) = \psi(c, d)$ sempre que $(a, b) \sim (c, d)$, donde o Teorema 1.3.18 assegura uma única função contínua $\overline{\psi} \colon (G \times G)/\sim \to G/H$ tal que $\overline{\psi} \circ \pi = \psi$; o restante segue do Exercício 1.270.

Agora, ψ é contínua pois $\psi = \pi \circ \varphi$, onde $\varphi \colon G \times G \to G$ faz $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ e $\pi \colon G \to G/H$ é a projeção canônica. Em particular, G/H é de Hausdorff se, e somente se, $\{\overline{e}\}$ é fechado em G/H, e pelo modo como a topologia quociente é definida[13], isso equivale a pedir que $\pi^{-1}[\{e\}] = H$ seja fechado em G. □

[13] Confira a discussão logo no começo da Subseção 1.3.2.

Exercício 5.11 (Demonstração alternativa)**.** Sem usar o teorema anterior, prove que o filtro $\mathcal{N}_{\overline{e}}$ das vizinhanças de $\overline{e}$ em G/H munido da topologia quociente satisfaz as condições (GT$_{\mathrm{i}}$) (ou (GT$_{\mathrm{ii}}$)) e (GT$_{\mathrm{iii}}$). Conclua que G/H é um grupo topológico com a topologia quociente. Dica: comece provando que a projeção canônica é aberta (para isso, confira o Exercício 5.28). ■

Exercício 5.12. Enuncie e demonstre a propriedade universal do quociente de grupos topológicos. Dica: use as propriedades universais do grupo quociente e da topologia quociente. ■

Antes de prosseguir, convém fazer um breve comentário a respeito da *conexidade* em grupos topológicos. Primeiro, se $(G, \cdot, e)$ é um grupo topológico e $V \in \mathcal{N}_e$ é uma vizinhança simétrica de e, então o subgrupo gerado $\langle V \rangle$, i.e., o menor subgrupo[14] de G que contém V, é um faberto de G: por um lado, $\langle V \rangle = \bigcup_{h \in \langle V \rangle} hV$ é uma união de vizinhanças; por outro lado, se $x \in \overline{\langle V \rangle}$ e U é um vizinhança simétrica de e, então $V \cap U$ é uma vizinhança de e, donde segue que $x(U \cap V)$ é uma vizinhança de x que deve interceptar $\langle V \rangle$, i.e., existem $w \in \langle V \rangle$ e $u \in U \cap V$ com $xu = w$, acarretando $x = wu^{-1} \in \langle V \rangle$. Logo:

Proposição 5.1.24. *Se G é um grupo topológico conexo, então $G = \langle V \rangle$ para toda vizinhança V de e.*

5.1.1 Uniformidades induzidas pela operação

Para um grupo topológico $(G, \cdot, e)$ fixado, é possível usar as vizinhanças do elemento neutro e a fim de estipular uma noção de *distância não-numérica* em G por meio da operação $\cdot$. Mais precisamente, para uma vizinhança $V \subseteq G$ de e, consideremos o subconjunto

$$V_{\mathrm{r}} := \left\{(g, h) \in G \times G : hg^{-1} \in V\right\}. \tag{5.4}$$

Proposição 5.1.25. *Nas condições acima, a família $\mathscr{D}_G := \{V_{\mathrm{r}} : V \in \mathcal{N}_e\}$ é base de* entourages *para uma uniformidade em G*

Demonstração. De fato:

- ✓ para quaisquer $V \in \mathcal{N}_e$ e $g \in G$ tem-se $g \cdot g^{-1} = e \in V$, mostrando que $\Delta_G \subseteq V_{\mathrm{r}}$;
- ✓ uma vez que para quaisquer $g, h \in G$ e $A \subseteq G$ ocorre $gh^{-1} \in A$ se, e somente se, $hg^{-1} \in A^{-1}$, resulta que $(A_{\mathrm{r}})^{-1} = (A^{-1})_{\mathrm{r}}$, donde não é difícil perceber que para cada $V_{\mathrm{r}} \in \mathscr{D}_G$ existe $U_{\mathrm{r}} \in \mathscr{D}_G$ com $(U_{\mathrm{r}})^{-1} \subseteq V_{\mathrm{r}}$;
- ✓ para $A, B \subseteq G$ com $A \subseteq B$, deve-se ter tanto $A_{\mathrm{r}} \subseteq B_{\mathrm{r}}$ quanto $A_{\mathrm{r}} \circ A_{\mathrm{r}} \subseteq (A \cdot A)_{\mathrm{r}}$, donde não é difícil concluir[15] que para $U_{\mathrm{r}} \in \mathscr{D}_G$ existe $V \in \mathcal{N}_e$ com $V_{\mathrm{r}} \circ V_{\mathrm{r}} \subseteq U_{\mathrm{r}}$.

As três condições acima atestam que $\mathscr{D}_G$ é sub-base para uma uniformidade em G, que se eleva ao patamar de base por $\mathscr{D}_G$ ser um pré-filtro em $G \times G$. □

Por sorte, a topologia induzida pela uniformidade $(\mathscr{D}_G)^{\uparrow}$ coincide com a topologia oriunda de G: isto se deve, essencialmente, à identidade $V_{\mathrm{r}}[g] = Vg$, válida para quaisquer $V \in \mathcal{N}_e$ e $g \in G$, onde o primeiro indica a *bola uniforme* de centro g e raio V_{r}, e o segundo denota a translação de V pelo elemento g.

[14] Ou o conjunto das expressões da forma $v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$, para $n \in \omega$ e $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$.

[15] Dica: lembre-se da condição (GT$_{\mathrm{i}}$) satisfeita pelo filtro $\mathcal{N}_e$.

Exercício 5.13. Convença-se de que as afirmações feitas acima estão corretas. ■

Exemplo 5.1.26 (*Heurística* da definição)**.** Considere $G := \mathbb{R}$ com a operação de adição. Fixada uma vizinhança $V := (-\varepsilon, \varepsilon)$ de $0 \in \mathbb{R}$, a *entourage* V_{r} é, explicitamente, a coleção dos pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y - x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ou, equivalentemente, tais que $|y - x| < \varepsilon$. Em outras palavras: V_{r} é apenas uma das já conhecidas *entourages* da uniformidade usual de $\mathbb{R}$. ▲

Exemplo 5.1.27 (A uniformidade da convergência pontual)**.** Para um espaço topológico X, o espaço $\mathcal{C}_p(X)$ é um anel topológico com respeito às suas operações (Proposição 1.1.92); em particular, $\mathcal{C}_p(X)$ é um grupo topológico abeliano. Implicitamente, a uniformidade induzida por sua estrutura algébrica já foi utilizada na descrição de seus abertos.

Recordemo-nos de que um aberto básico de $\mathcal{C}_p(X)$ é da forma $\mathcal{C}_p(X) \cap \prod_{x \in X} W_x$, com $W_x \subseteq \mathbb{R}$ aberto para cada $x \in X$ e cujo suporte $\operatorname{supp}(W) := \{x \in X : W_x \neq \mathbb{R}\}$ é finito. Substituindo os abertos W_x por intervalos, a finitude do suporte permite tomar subconjuntos da forma

$$\langle F, \varepsilon\rangle[\underline{0}] := \{f \in \mathcal{C}_p(X) : \forall x \in F \quad |f(x)| < \varepsilon\}$$

como abertos básicos da função nula $\underline{0} \colon X \to \mathbb{R}$, onde $F \in [X]^{<\aleph_0}$ e $\varepsilon > 0$.

A notação acima, já utilizada na Proposição 2.2.13, esconde a *origem uniforme* da topologia produto. De fato, para $V := \langle F, \varepsilon\rangle[\underline{0}]$, a *entourage* induzida como em (5.4) corresponde ao conjunto

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{r}} &:= \{(f, g) \in \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X) : g - f \in V\} = \\ &= \{(f, g) \in \mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(X) : \forall x \in F \quad |g(x) - f(x)| < \varepsilon\} := \langle F, \varepsilon\rangle. \end{aligned}$$

Daí, para $g \in \mathcal{C}_p(X)$, a bola uniforme de centro g e raio $\langle F, \varepsilon\rangle$ é

$$\langle F, \varepsilon\rangle[g] := \{f \in \mathcal{C}_p(X) : (f, g) \in \langle F, \varepsilon\rangle\} = \{f \in \mathcal{C}_p(X) : \forall x \in F \quad |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

precisamente um aberto básico *em torno de* g com respeito à topologia produto – ainda bem, já que as considerações anteriores indicaram que isso deveria ocorrer.

Essa descrição uniforme dos abertos do espaço $\mathcal{C}_p(X)$ será mais explorada no próximo capítulo, que tratará precisamente de diferentes aspectos de topologias que podem ser definidas sobre o conjunto $\mathcal{C}(X)$. ▲

Observação 5.1.28. Duas perguntas podem incomodar o leitor neste momento:

1. por que considerar as *entourages* induzidas por translações pela direita e não pela esquerda?

2. faria alguma diferença considerar *entourages* induzidas por translações pela esquerda?

As respostas para tais perguntas são, respectivamente, "porque sim" e "depende". *Porque sim* pois, se tivéssemos considerado os subconjuntos da forma

$$V_{\mathrm{l}} := \{(g, h) \in G \times G : g^{-1}h \in V\},$$

agora a pergunta seria pelas razões que teriam levado a preferir as translações pela esquerda! Aliás, convém destacar que $\mathscr{E}_G := \{V_{\mathrm{l}} : V \in \mathcal{N}_e\}$ é base para uma uniformidade em G.

Exercício 5.14. Nas notações acima, convença-se de que $\mathscr{E}_G$ é base para uma uniformidade sobre G, cuja topologia induzida coincide com a topologia original de G. ■

Definição 5.1.29. Vamos xingar $(\mathscr{D}_G)^{\uparrow}$ e $(\mathscr{E}_G)^{\uparrow}$ de **uniformidades direita** e **esquerda** de G, respectivamente. A menos de menção explícita, grupos topológicos sempre serão considerados munidos de uma dessas uniformidades. ¶

Agora, a resposta da segunda pergunta *depende* da categoria em mente. Note, primeiramente, que para propósitos topológicos, a orientação é apenas um detalhe virtual.

Exercício 5.15. Convença-se de que as uniformidades direita e esquerda de G são topologicamente equivalentes. ■

Para propósitos uniformes a orientação também é irrelevante, posto que o mapa $(G, (\mathscr{D}_G)^{\uparrow}) \to (G, (\mathscr{E}_G)^{\uparrow})$ dado pela regra $g \mapsto g^{-1}$ é um *isomorfismo uniforme*[16]. É apenas do ponto de vista conjuntista que as uniformidades direita e esquerda de G podem ser distintas – naturalmente, apenas nos casos em que o grupo G não for abeliano[17] ou compacto (pelo Exercício 4.66). △

Por serem espaços uniformes legítimos, todas as conclusões do Capítulo 4 se aplicam ao contexto de grupos. Por exemplo:

Corolário 5.1.30. *Todo grupo topológico é $T_{3\frac{1}{2}}$. Em particular, um grupo topológico é de Tychonoff se, e somente se, é T_0.*

Demonstração. Segue pois grupos topológicos são uniformes e estes são completamente regulares (Proposição 4.1.54), além do fato de que $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_1$ em grupos topológicos (Corolário 5.1.18). □

Outro resultado, menos modesto que o anterior, é a caracterização quase automática dos grupos (pseudo) metrizáveis, extremamente importante para Análise Funcional e áreas afins.

Proposição 5.1.31. *Um grupo topológico é pseudometrizável se, e somente se, tem caráter enumerável.*

Demonstração. Um espaço uniforme é pseudometrizável se, e somente se, sua uniformidade tem base enumerável (Teorema 4.1.56). Ora, se G é um grupo topológico e $\mathcal{B}$ é uma base local para seu elemento neutro e, então $\mathcal{B}_{\mathrm{r}} := \{B_{\mathrm{r}} : B \in \mathcal{B}\}$ é base para sua uniformidade direita, com $|\mathcal{B}_{\mathrm{r}}| \leq |\mathcal{B}|$. O resultado, então, segue diretamente da hipótese acerca do caráter de G. □

Exercício 5.16. Convença-se de que um grupo topológico com elemento neutro $e \in G$ é metrizável se, e somente se, e tem base local enumerável e $\{e\}$ é fechado. ■

Exemplo 5.1.32 (A uniformidade de um produto de grupos)**.** O Exercício 5.10, proposto anteriormente, explicita que se $\{G_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de grupos topológicos, então a topologia produto sobre $G := \prod_{i\in\mathcal{I}} G_i$ é compatível com a estrutura *canônica* de grupo de G. Isso nos coloca numa encruzilhada: por um lado, G tem as uniformidades direita e esquerda induzidas pela topologia produto; por outro lado, G também admite uma estrutura uniforme induzida como produto das uniformidades de cada G_i, como no Exemplo 4.1.32. Por sorte, tudo coincide.

[16] Mas não necessariamente um isomorfismo de grupos! O abuso de notação pode ser perigoso.
[17] O leitor implicante encontrará um exemplo no Exercício 5.34.

Embora a verificação de tal coincidência possa ser feita no contexto de produtos arbitrários sem maiores dificuldades, as aplicações subsequentes desta observação exigem apenas o caso do produto $G \times H$ entre dois grupos topológicos G e H, o que torna a leitura bem mais simples. Fixado um aberto básico $U \times V \subseteq G \times H$ do elemento neutro (e_G, e_H), note que

$$\begin{aligned}(U \times V)_{\mathrm{r}} &:= \left\{((x,y),(a,b)) \in G \times H : (a,b)(x,y)^{-1} \in U \times V\right\} = \\ &= \left\{((x,y),(a,b)) \in G \times H : (ax^{-1}, by^{-1}) \in U \times V\right\} = \\ &= (\pi_G \times \pi_G)^{-1}[U_{\mathrm{r}}] \cap (\pi_H \times \pi_H)^{-1}[V_{\mathrm{r}}],\end{aligned}$$

precisamente as *entourages* básicas da uniformidade produto definida em $G \times H$. Portanto, a uniformidade (direita) induzida em $G \times H$ pela topologia produto é a uniformidade induzida pelo produto das uniformidades (direitas) induzidas pelas topologias de G e H. Deve ser óbvio que o mesmo raciocínio vale para as uniformidades esquerdas. ▲

O advento dessa *nova* estrutura em grupos topológicos traz um problema de ordem prática: determinar os morfismos uniformemente contínuos. Curiosamente, isso é trivial em virtude da

Proposição 5.1.33. *Morfismos contínuos são uniformemente contínuos com respeito às uniformidades de mesma orientação.*

Demonstração. Se G e H são grupos topológicos, tanto G quanto H são dotados de suas uniformidades direitas e $f\colon G \to H$ é um morfismo contínuo, então f é uniformemente contínuo: dada uma vizinhança V de e_H, tem-se $U := f^{-1}[V]$ uma vizinhança de e_G, de modo que se $(x,y) \in U_{\mathrm{r}}$, então $yx^{-1} \in U$ e daí $f(yx^{-1}) = f(y)(f(x))^{-1} \in V$, i.e., $(f(x), f(y)) \in V_{\mathrm{r}}$. □

Nesse contexto, faz sentido analisar os filtros e *nets* de Cauchy em grupos e, por conseguinte, investigar questões de completude e completamento. Embora, para os propósitos do texto, o completamento seja mais interessante, e por isso, tenha uma *subsubseção* própria, há dois fatos simples que o leitor deve saber sobre **grupos completos**, i.e., grupos topológicos completos com respeito à uma de suas uniformidades[18].

Proposição 5.1.34. *Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico e V uma vizinhança de e. Se V é completa com respeito a qualquer uma das uniformidades induzidas de G, então G é completo.*[19]

Demonstração. Consideremos uniformidades direitas. Dada uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ de Cauchy em G, existe $d_0 \in \mathbb{D}$ tal que $(x_d, x_{d'}) \in V_{\mathrm{r}}$ para quaisquer $d, d' \geq d_0$, de modo que $(y_d)_{d \geq d'}$, com $y_d := x_d$, é agora uma *net* em V que é de Cauchy. Logo, existe $y \in V$ tal que $y_d \to y$, donde é fácil concluir que $x_d \to y$. □

Corolário 5.1.35. *Grupos topológicos localmente compactos são completos.*

Demonstração. Segue da última proposição e do Teorema 4.2.17. □

[18] A orientação é indiferente, dado que ambas induzem isomorfismos na categoria dos espaços uniformes.

[19] Em particular, se G é de Hausdorff, então V é uma vizinhança fechada (Proposição 4.2.10).

Completamento – caso abeliano

O completamento Hausdorff de um grupo topológico de Hausdorff G, digamos $\widehat{G}$, é um espaço uniforme completo de Hausdorff que contém G como subespaço denso. Até aqui, nada novo sob o sol. Contudo, a estrutura algébrica adicional presente neste contexto torna natural esperar que $\widehat{G}$ também seja um grupo topológico e, mais ainda, que tenha G como subgrupo. Veremos que isso de fato ocorre se G for abeliano.

Comutatividade à parte, *o espaço completo $\widehat{G}$ tem, no máximo, uma operação contínua capaz de torná-lo um grupo topológico*: ora, se $\widehat{\cdot}\colon \widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G}$ *for* tal operação binária, com $\widehat{\imath}\colon \widehat{G} \to \widehat{G}$ a função que associa cada $\widehat{g} \in \widehat{G}$ ao seu inverso, ambas contínuas, então tanto $\widehat{\cdot}$ quanto $\widehat{\imath}$ ficam completamente determinadas por suas restrições aos densos $G \times G$ e G, respectivamente (Exercício 1.181). Em outras palavras, a estrutura algébrica sobre $\widehat{G}$ deve ser a *única* extensão contínua da estrutura oriunda de G, *caso exista*.

Como o caso não-abeliano é mais delicado, vamos nos ater ao cenário comutativo, que permite uma abordagem bem mais simples[20]. Só para começo de conversa, tal suposição já nos livra de levar em consideração o *posicionamento político* das uniformidades, dado que ambas coincidem. Mais ainda, se G é abeliano, então suas operações admitem extensões uniformemente contínuas, em vista da Proposição 4.2.41 e do Teorema 4.2.33, posto que "$+$" e "$-$" são uniformemente contínuas.

Lema 5.1.36. *As operações de um grupo topológico abeliano são uniformemente contínuas.*

Demonstração. Fixada uma vizinhança V de 0, tomemos uma vizinhança U de 0 satisfazendo $U + U \subseteq V$. Note então que a *entourage*[21] $(U \times U)_{\mathrm{r}}$ em $G \times G$ tem como elementos os pares *de pares*[22] $((x, y), (a, b))$ tais que $(x, a), (y, b) \in U_{\mathrm{r}}$. Ora, isto significa que tanto $a - x$ quanto $b - y$ pertencem a U, donde segue que

$$(a - x) + (b - y) = (a + b) - (x + y) \in U + U \subseteq V \Rightarrow (x + y, a + b) \in V_{\mathrm{r}}.$$

Como a *entourage* V_{r} foi tomada arbitrariamente, resulta que a operação $+\colon G \times G \to G$ é uniformemente contínua. Por sua vez, a operação $-\colon G \to G$ que faz $g \mapsto -g$ determina um isomorfismo uniforme (e agora sim, de grupos) entre $(G, (\mathscr{D}_G)^{\uparrow})$ e $(G, (\mathscr{E}_G)^{\uparrow})$, donde a continuidade uniforme segue da igualdade $(\mathscr{D}_G)^{\uparrow} = (\mathscr{E}_G)^{\uparrow}$, válida por G ser abeliano. $\square$

Teorema 5.1.37. *Seja G um grupo topológico de Hausdorff. Se G é abeliano, então o completamento Hausdorff de G é um grupo abeliano completo que contém G como um subgrupo denso.*

Demonstração. Se $\widehat{G}$ é o completamento Hausdorff de G, então a Proposição 4.2.41 garante que $\widehat{G} \times \widehat{G}$ é o completamento Hausdorff de $G \times G$. Assim, o lema anterior permite tomar $\widehat{+}$ e $\widehat{-}$, as únicas extensões uniformemente contínuas de $+\colon G \times G \to G$ e $-\colon G \to G$, respectivamente. Mostraremos que $\widehat{+}$ e $\widehat{-}$ fazem de $\widehat{G}$ um grupo.

✓ $\widehat{+}$ *é associativa.* Se $(x, y, z) \in \widehat{G} \times \widehat{G} \times \widehat{G}$, então existem *nets* $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$, $(y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ e $(z_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em G tais que $x_d \to x$, $y_d \to y$ e $z_d \to z$, de modo que

$$\begin{aligned}(x \,\widehat{+}\, y) \,\widehat{+}\, z &= \left(\left(\lim_d x_d\right) \widehat{+} \left(\lim_d y_d\right)\right) \widehat{+} \lim_d z_d = \left(\lim_d (x_d + y_d)\right) \widehat{+} \lim_d z_d = \\ &= \lim_d ((x_d + y_d) + z_d) = \lim_d (x_d + (y_d + z_d)) = \ldots = x \,\widehat{+}\, (y \,\widehat{+}\, z).\end{aligned}$$

[20] O leitor interessado em aspectos mais gerais pode conferir Bourbaki [19], por exemplo.

[21] Confira a discussão no recente Exemplo 5.1.32.

[22] Lembre-se: uma *entourage* em X é um subconjunto de $X \times X$, enquanto uma *entourage* em $X \times X$ deve ser, naturalmente, um subconjunto de $(X \times X) \times (X \times X)$.

✓ $\widehat{+}$ *é comutativa.* Análogo ao anterior.

✓ *Elemento neutro.* Os mesmos argumentos acima permitem mostrar que para $x \in \widehat{G}$, ocorre $x \,\widehat{+}\, 0 = x = 0 \,\widehat{+}\, x$, i.e., $0 \in G \subseteq \widehat{G}$ é elemento neutro da operação.

✓ *Inversos.* Dado $x \in \widehat{G}$, existe uma *net* $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em G com $x_d \to x$, donde segue que $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy em G (pela versão "*net*" da Proposição 4.1.18). Daí, o Exercício 4.53 garante que $(-x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ é uma *net* de Cauchy em G e, pela Proposição 4.2.5, também é de Cauchy em $\widehat{G}$. Finalmente, a completude de $\widehat{G}$ assegura a existência de $y \in \widehat{G}$ com $-x_d \to y$. Consequentemente,

$$x \,\widehat{+}\, y = \lim_d x_d \,\widehat{+}\, \lim_d -x_d = \lim_d (x_d + (-x_d)) = \lim_d 0 = 0.$$

Analogamente, mostra-se que $y \,\widehat{+}\, x = 0$. Em outras palavras, y é o inverso de x.

Das ponderações acima, resulta que $(\widehat{G}, \widehat{+}, 0)$ é um grupo topológico abeliano (com a topologia induzida por sua uniformidade completa). O leitor fica a cargo de se convencer de que G é subgrupo de $\widehat{G}$. □

Exercício 5.17 (Propriedade universal do completamento de grupo)**.** Nas notações acima, mostre que se H é um grupo de Hausdorff completo e dotado de um morfismo contínuo de grupos $f\colon G \to H$, então existe um único morfismo contínuo de grupos $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to H$ tal que $\widehat{f}|_G = f$. Conclua que $\widehat{G}$ é único a menos de isomorfismo topológico. ■

Encaminhamo-nos para uma das subseções mais importantes do texto: aquela em que o Axioma da Preguiça Infinita será *completamente* abandonado. Porém, ainda resta discutir um pequeno detalhe acerca do completamento de um grupo topológico: como expressar, em termos de vizinhanças de G, as vizinhanças da identidade de $\widehat{G}$?

Proposição 5.1.38. *Sejam G um grupo topológico de Hausdorff e $\widehat{G}$ seu completamento. Se $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças do elemento neutro de G, então $\widehat{\mathcal{B}} := \left\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\right\}$ é base de vizinhanças do elemento neutro de $\widehat{G}$.*

Demonstração. Segue da regularidade de $\widehat{G}$ (Proposição 2.1.29) aliada à densidade de G (Exercício 2.7). O leitor pode cuidar dos detalhes. □

5.1.2 A libertação do Axioma da Preguiça Infinita

Nesta subseção vamos, finalmente, exibir/construir/conjurar um *corpo* ordenado completo. Isto será feito por meio do completamento do *grupo* topológico abeliano $(\mathbb{Q}, +, 0)$, mas não de forma automática, dado que:

- o completamento deve ser um corpo ordenado, o que requer tanto uma multiplicação quanto uma ordem compatível com as operações e, a princípio, isto não é garantido pelo completamento uniforme;

- a expressão "completo" é usada com sentidos diferentes em "espaço uniforme *completo*" e "corpo ordenado *completo*", e não é evidente que o primeiro tenha qualquer relação com o segundo, e *vice-versa*.

A fim de intensificar o suspense, comecemos pelo segundo último.

Um retrato incompleto da completude

Ao longo desta subsubseção[23], denotaremos por $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, i.e., um corpo munido de uma ordem total compatível com suas operações, como já descrito na Definição K.2.55. Convém recordar que em tal contexto, $\mathbb{K}$ é munido de uma função $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}_{\geq 0}$ chamada de *valor absoluto*, com as seguintes propriedades:

(va_0) $|x| = \max\{x, -x\} \geq 0$;

(va_1) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(va_2) $|xy| = |x||y|$;

(va_3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Isso permite ver que a topologia em $\mathbb{K}$ induzida por sua ordem (Exemplo 1.1.50) é a topologia induzida pelas *entourages* da forma

$$V_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : |x - y| < \varepsilon\} \tag{5.5}$$

para cada $\varepsilon \in \mathbb{K}_{>0}$. Por preciosismo, convém demonstrar isso.

Proposição 5.1.39. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado, então $\mathbb{K}$ é um grupo topológico.*

Demonstração. Primeiro, note que se $A \subseteq \mathbb{K}$ é um aberto com $x \in A$, então existe $r \in \mathbb{K}_{>0}$ com $(x - r, x + r) \subseteq A$: certamente existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ com $x \in (\alpha, \beta)$ e $(\alpha, \beta) \subseteq A$, donde segue que $r_0 := x - \alpha$ e $r_1 := \beta - x$ são ambos estritamente maiores do que 0, de modo que para $r := \min\{r_0, r_1\}$ ocorre a inclusão desejada. Note ainda que $\gamma \in (x - r, x + r)$ se, e somente se, $|x - \gamma| < r$.

Agora, para quaisquer $a, b, x, y \in \mathbb{K}$, tem-se

$$|(x - y) - (a - b)| \leq |x - a| + |y - b|,$$

donde é fácil concluir, em vista da discussão inicial, que a correspondência $(x, y) \mapsto x - y$ define um mapa contínuo $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Logo, pelo Exercício 5.25, $\mathbb{K}$ é um grupo topológico. □

Exemplo 5.1.40. Mais do que grupo topológico, $\mathbb{K}$ é um anel topológico, posto que sua multiplicação é contínua: de fato, dada uma *net* $(x_d, y_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ que converge para um par (x, y), faz-se[24]

$$\begin{aligned} |xy - x_d y_d| = |xy - x_d y + x_d y - x_d y_d| = |x_d| \cdot |y - y_d| + |y| \cdot |x - x_d| \leq \\ \leq (|x - x_d| + |x|) \cdot |y - y_d| + |y| \cdot |x - x_d|, \end{aligned}$$

donde é fácil concluir que $x_d y_d \to xy$. Na verdade, *mais do que anel topológico*, $\mathbb{K}$ é um *corpo topológico*, no seguinte sentido:

Definição 5.1.41. Um corpo $(K, +, \cdot, 0, 1)$ é um **corpo topológico** se existe uma topologia que faz de $(K, +, \cdot, 0, 1)$ um anel topológico no qual a *função* $K \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\}$ dada por $x \mapsto x^{-1}$ é contínua[25]. ¶

[23] Baseada na surpreendente monografia *Completeness of Ordered Fields* [49], de James F. Hall.

[24] Não há suposição sobre bases locais enumeráveis aqui que permitam usar sequências em vez de *nets*. O leitor interessado em utilizá-las se divertirá com o Exercício 5.35.

[25] A definição foge do padrão estabelecido no começo do capítulo? Sim, mas a própria definição de corpo foge do escopo da Álgebra (Universal), e eu nunca vi brigas por conta disso.

Agora, fixada uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ com $x_d \to x \neq 0$, tem-se

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_d}\right| = \frac{|x_d - x|}{|x_d x|},$$

que pode ser controlado pois, se $d' \in \mathbb{D}$ é tal que $|x_d - x| < \frac{|x|}{2}$ para todo $d \geq d'$, então $|x_d| \geq \frac{|x|}{2}$ e, consequentemente,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_d}\right| \leq \frac{2}{|x|}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot|x_d - x|,$$

e a última expressão pode ser novamente controlada, dado que x está fixo.[26] ▲

Em vista das considerações acima, *dispositivos* como *sequências de Cauchy*, *sequências convergentes* e *sequências limitadas* são perfeitamente aplicáveis em $\mathbb{K}$, o que sugere outras definições naturais de completude.

Definição 5.1.42. Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é:

(c_i) **Cantor completo** se toda família enumerável $\{[a_n, b_n] : n \in \omega\}$ de intervalos fechados com p.i.f. for tal que $\bigcap_{n\in\omega}[a_n, b_n] \neq \emptyset$;

(c_{ii}) **Monotonicamente completo** se toda sequência monótona e limitada converge;

(c_{iii}) **Bolzano-Weierstrass completo** se toda sequência limitada tem subsequência convergente;

(c_{iv}) **Bolzano completo** se todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{K}$ tem ponto de acumulação;

(c_v) **Cauchy completo** se toda sequência de Cauchy converge;

(c_{vi}) **Dedekind completo** se todo subconjunto não-vazio limitado superiormente tem supremo. ¶

Antes de se debruçar sobre o próximo teorema, pode ser conveniente para o leitor rever a Proposição K.2.111, bem como as discussões da Subseção K.2.2 sobre propriedades elementares de corpos arquimedianos.

Teorema 5.1.43. *As definições acima são equivalentes entre si para corpos arquimedianos.*

Demonstração. A estrutura da prova é bem simples: mostrar as implicações

$$(c_i) \Rightarrow (c_{ii}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (c_{vi}) \Rightarrow (c_i).$$

(c_i) ⇒ (c_{ii}). Seja $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em $\mathbb{K}$, monótona e limitada. Definiremos sequências $(a_n)_{n\in\omega}$ e $(b_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{K}$ tais que $\{[a_n, b_n] : n \in \omega\}$ tem p.i.f. e, no máximo um elemento em comum; daí, a hipótese dará, precisamente, um elemento na interseção de tais intervalos, que será justamente o limite da sequência $(x_n)_{n\in\omega}$. Vamos discutir o caso em que a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ é crescente – o outro caso ficará a cargo do leitor.

[26] Confira o Exercício 1.111 para uma versão mais *limpa*.

✓ Como a sequência é limitada, existe $M_0 \in \mathbb{K}$ que limita superiormente os termos da sequência. Daí, para $p_0 := \frac{1}{2}(x_0 + M_0)$, pergunta-se: p_0 ainda limita a sequência superiormente? Se sim, faz-se $a_0 := x_0$ e $b_0 := p_0$; se não, define-se $a_0 := p_0$ e $b_0 := M_0$. Em ambos os casos, ocorre $a_0 \leq b_0$, com apenas finitos termos de $(x_n)_{n\in\omega}$ *fora* de $[a_0, b_0]$: o contrário contradiz a hipótese sobre a sequência ser crescente.

✓ Suponha definidos $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ e $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tais que:

$$\text{i) } [a_{j+1}, b_{j+1}] \subseteq [a_j, b_j] \text{ para cada } j < n \text{ e ii) } b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j},$$

com b_j limitando superiormente a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$, para todo $j \leq n$. Agora, para $p_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ pergunta-se: p_{n+1} é limitante superior da sequência? Se sim, faz-se $a_{n+1} := a_n$ e $b_{n+1} := p_{n+1}$; se não, define-se $a_{n+1} := p_{n+1}$ e $b_{n+1} := b_n$. Note que $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ com $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ e $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$. Além disso, há no máximo finitos termos de $(x_n)_{n\in\omega}$ *fora* de $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

✓ Dessa forma, a família $\{[a_n, b_n] : n \in \omega\}$ tem a p.i.f. pois os intervalos fechados são *encaixantes*. Logo, a hipótese garante um $x \in \bigcap_{n\in\omega}[a_n, b_n]$. Mostraremos que, na verdade, ocorre $\bigcap_{n\in\omega}[a_n, b_n] = \{x\}$: por $\mathbb{K}$ ser arquimediano[27], tem-se

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \to 0, \tag{5.6}$$

donde segue que se $y \in [a_n, b_n]$ para todo n, então $x = y$.

✓ Finalmente, veremos que $x_n \to x$: pela construção da sequência $(a_n)_{n\in\omega}$, para cada m existem apenas finitos termos da sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ que não pertencem ao intervalo $[a_m, b_m]$; logo, para $r \in \mathbb{K}_{>0}$ fixado, a convergência (5.6) garante um $N \in \omega$ com $|b_n - a_n| < r$ para todo $n \geq N$. Fica a cargo do leitor notar que isso garante a convergência da sequência.

(c$_{ii}$) ⇒ (c$_{iii}$). É suficiente mostrar que toda sequência em $\mathbb{K}$ admite uma subsequência monótona. *Ora*, dada uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$, pode-se considerar o conjunto $[\omega]^2$ de todos os subconjuntos de ω com precisamente dois elementos, e daí definir a função $c\colon [\omega]^2 \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ que faz $c(\{m, n\}) := \mathsf{A}$ se $m < n$ e $x_m < x_n$, e $c(\{m, n\}) := \mathsf{V}$ se $m < n$ com $x_m \geq x_n$. O leitor, com certa razão, pode se perguntar: *quê?!*

Intuitivamente, a construção acima consiste em considerar o *grafo infinito* cujos vértices são todos os números naturais e cujas arestas são todas as possíveis ligações entre eles. Nesse sentido, a função c *pinta* a aresta $m < n$ de Azul se ocorrer $x_m < x_n$, ou de Vermelho caso contrário. Por que alguém faria isso? *Muito simples*! Um subconjunto infinito $M \subseteq \omega$ no qual qualquer aresta ligando seus vértices tenha a mesma cor se traduz numa subsequência monótona: (estritamente) crescente se a cor for Azul; decrescente se a cor for Vermelha[28].

[27] A propriedade arquimediana diz que ω é ilimitado em $\mathbb{K}$, e vale $2^n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[28] Por exemplo, se $\mathsf{c} := \mathsf{A}$, então $x_m < x_n$ sempre que $m, n \in M$ com $m < n$, ou seja: a subsequência $(x_m)_{m\in M}$ é estritamente crescente. O raciocínio é análogo para $\mathsf{c} := \mathsf{V}$.

O passo fundamental na demonstração de que existe um subconjunto $M \subseteq \omega$ com a propriedade desejada faz uso (de um caso particular) do Princípio da Casa dos Pombos, como expresso na Proposição K.1.146: *se* $|X| = \aleph_0$ *e* $A, B \subseteq X$ *são tais que* $A \cap B = \emptyset$ *e* $A \cup B = X$*, então* $|A| = \aleph_0$ *ou* $|B| = \aleph_0$. Em particular, se $P \subseteq [\omega]^2$ é infinito, então P é união disjunta dos subconjuntos $\{p \in P : c(p) = \mathsf{A}\}$ e $\{p \in P : c(p) = \mathsf{V}\}$, donde segue que pelo menos um deles deve ser infinito.

Katzensprung. *Fixados um subconjunto infinito* $A \subseteq \omega$ *e um elemento* $a \in A$*, existe um subconjunto infinito* $M(A, a) \subseteq A$ *tal que* $a < \min M(A, a)$ *e* $c(\{a, n\}) = c(\{a, m\})$ *para quaisquer elementos* $m, n \in M(A, a)$.

Demonstração. Em outras palavras, existe um subconjunto infinito de A cujas arestas que ligam seus elementos ao número a têm todas a mesma cor. Para se dar conta disso, note que o subconjunto $P := \{\{a, n\} : n > a \text{ e } n \in A\} \subseteq [\omega]^2$ é infinito e, pelo argumento do parágrafo anterior, existe uma cor $\mathsf{C} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ tal que $Q := \{p \in P : c(p) = \mathsf{C}\}$ é infinito. Daí, basta tomar $M(A, a) := (\bigcup Q) \setminus \{a\}$. $\square$

Dito isso, mostraremos que existe uma sequência estritamente crescente $(k_n)_{n\in\omega}$ de números naturais tais que, para todo $n \in \omega$, existe $\mathsf{c}_n \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $c(\{k_n, k_m\}) = \mathsf{c}_n$ para todo $m > n$. De fato, em vista da argumentação anterior, basta proceder recursivamente:

- ✓ $A_0 := \omega$ e $k_0 := \min A_0$;
- ✓ $A_1 := M(A_0, k_0)$ e $k_1 := \min A_1$;
- ✓ para $n > 1$, e supondo $A_0, \ldots, A_n \subseteq \omega$ definidos com $A_n \subsetneq A_{n-1} \subsetneq \ldots \subsetneq A_0$, todos infinitos, com $k_i \in A_i$ para cada $i \leq n$, faz-se $A_{n+1} := M(A_n, k_n)$ e $k_{n+1} := \min A_{n+1}$.

Finalmente, a função $\varphi\colon \omega \to \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ que faz $\varphi(n) := \mathsf{c}_n$ tem imagem finita, donde o Princípio da Casa dos Pombos garante um subconjunto infinito $M \subseteq \omega$ e $\mathsf{c} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{V}\}$ com $\varphi(m) = \mathsf{c}$ para todo $m \in M$. Ora, isto significa, precisamente, que $c(\{k_m, k_n\}) = \mathsf{c}$ para quaisquer $m, n \in M$, como queríamos.

(c$_{iii}$) ⇒ (c$_{iv}$). Se $A \subseteq \mathbb{K}$ é infinito e limitado, então existe uma sequência injetiva $(x_n)_{n\in\omega}$ de elementos de A, que tem uma subsequência convergente por hipótese. Não é difícil se convencer de que o limite de tal subsequência é ponto de acumulação de A.

(c$_{iv}$) ⇒ (c$_v$). Em vista do Exercício 4.36, basta mostrar que toda sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\omega}$ tem subsequência convergente: ora, se $\{x_n : n \in \omega\}$ for um conjunto finito, então o problema está resolvido; se não, então $\{x_n : n \in \omega\}$ tem um ponto de acumulação por hipótese[29], donde ~~é fácil~~ não é difícil construir uma subsequência convergente.

(c$_v$) ⇒ (c$_{vi}$). Pode-se repetir a construção dos intervalos encaixados da primeira implicação ((c$_i$) ⇒ (c$_{ii}$)) substituindo a sequência limitada por um subconjunto S limitado superiormente. Daí, ao se tomar $x_n \in [a_n, b_n]$ para cada $n \in \omega$, a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ correspondente é de Cauchy, essencialmente por valer $|x_n - x_m| < |a_N - b_N|$ para quaisquer $m, n, N \in \omega$ com $m, n \geq N$. Finalmente, observe que o limite dessa sequência é o supremo de S. Os detalhes ficam a cargo do leitor.

[29] Já que uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\omega}$ é limitada por $M := \max\{|x_0|, \ldots, |x_N|\} + 1$, onde $N \in \omega$ é tal que $|x_n - x_m| < 1$ para quaisquer $m, n \geq N$.

(c$_{vi}$) ⇒ (c$_i$). Para ordens totais, a completude no sentido de Dedekind equivale à compacidade de intervalos fechados e limitados (Corolário 1.2.101). Logo, a fim de concluir a validade de (c$_i$), basta reescrever a família de intervalos de modo decrescente e daí aplicar a caracterização de compacidade via p.i.f. (Proposição 1.2.77, (Comp$_5$)). □

Observação 5.1.44 (A condição arquimediana)**.** Embora a completude no sentido de Dedekind acarrete a propriedade arquimediana (Teorema K.2.111), nem todas as noções de completude anteriores têm a mesma força: é o que ocorre com as completudes de Cantor e Cauchy, por exemplo[30]. O artigo de James Propp [91], *Real Analysis in Reverse*, discute contraexemplos para este e outros casos. Assim, não custa frisar: o teorema anterior só é válido com a suposição de que $\mathbb{K}$ é arquimediano. △

Enfim, no reino dos corpos arquimedianos, pode-se escolher qualquer uma das noções de completude anteriores como *a* definição de completude característica da reta real. Para leitores mais apegados ao pensamento geométrico, há outra caracterização, já implícita na discussão sobre conexidade, feita no Teorema 2.3.4.

Corolário 5.1.45. *Um corpo ordenado é Dedekind completo se, e somente se, é conexo.*

Demonstração. Se $\mathbb{K}$ é Dedekind completo, então em particular $\mathbb{K}$ é arquimediano (Teorema K.2.111) e, pela Proposição K.2.111, é uma ordem densa no sentido do Teorema 2.3.4, o que garante sua conexidade. Reciprocamente, se $\mathbb{K}$ é conexo, então o mesmo teorema garante que $\mathbb{K}$ é Dedekind completo. □

Observação 5.1.46. O *retrato* apresentado nesta subsubseção está longe de ser *completo*. O leitor interessado numa discussão um pouco mais aprofundada pode conferir a monografia [49] de James Hall ou o surpreendente *survey* [33] de Michael Deveau e Holger Teismann, que lista 72 caracterizações de completude (e 42 caracterizações da propriedade arquimediana); para uma exposição aprofundada, confira [102]. △

A reta real à moda Bourbaki

Como a reta real foi usada tacitamente em diversos pontos do texto, convém recapitular passagens fundamentais que não fizeram uso do Axioma da Preguiça Infinita.

(I) O Axioma do Infinito postula um conjunto indutivo,

(II) por meio do qual se define o conjunto ω dos números naturais,

(III) por sua vez utilizado na construção do grupo abeliano dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, 0)$,

(IV) posteriormente elevado ao patamar de anel,

(V) cujo corpo de frações $\mathbb{Q}$ foi construído e totalmente ordenado pela relação definida no Exemplo K.2.102, esta herdada da ordem de $\mathbb{Z}$ que, por sua vez, é herança da boa ordem de ω, e

(VI) finalmente, a Proposição 5.1.39 garante que $(\mathbb{Q}, +, 0)$ é um grupo topológico.

Portanto, em vista do Teorema 5.1.37, é seguro fazer a seguinte

[30] Todas as outras noções de completude listadas, porém, implicam a propriedade arquimediana. O leitor interessado pode conferir [49].

Definição 5.1.47 (A mais lenta[31])**.** $(\mathbb{R}, +, 0)$ é o completamento uniforme do grupo topológico $(\mathbb{Q}, +, 0)$. ¶

A *definição* acima traz alguns brindes:

✓ $(\mathbb{R}, +, 0)$ é um grupo topológico abeliano que contém $\mathbb{Q}$ como subgrupo denso;

✓ $\mathbb{Q}$ tem caráter enumerável por ser arquimediano[32], o que garante uma base enumerável para sua uniformidade[33] e, portanto, a uniformidade do completamento $(\mathbb{R}, +, 0)$ também tem uma base enumerável[34] e, consequentemente[35], tem caráter enumerável;

✓ como toda *net* de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge, segue que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge.

Restam, portanto, apenas duas coisas:

- definir uma multiplicação em $\mathbb{R}$ que torne $\mathbb{R}$ num corpo que estende $\mathbb{Q}$; e
- definir uma relação de ordem total em $\mathbb{R}$, que estenda a ordem usual de $\mathbb{Q}$ e seja compatível tanto com as operações quanto com a topologia de $\mathbb{R}$.

Uma vez realizadas, as tarefas acima *garantirão* que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, arquimediano[36] e Cauchy completo, donde as discussões anteriores acerca de completude em corpos arquimedianos *encerrarão* o trabalho, demonstrando o

Teorema 5.1.48 (do Trabalho Infinito)**.** *O Axioma da Preguiça Infinita é consequência dos axiomas de ZFC*[37]*.*

Diferente do que se fez até aqui, não é possível utilizar a propriedade universal de extensão do completamento uniforme a fim de lidar com a primeira tarefa, pelo simples fato de que, em geral, tanto a multiplicação $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ quanto a inversão $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ não serem funções uniformemente contínuas.

Exercício 5.18. Mostre que as funções mencionadas acima não são uniformemente contínuas. Dica: para a multiplicação, use $\varepsilon := \frac{1}{2}$; para a inversão, note que a imagem da sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ não é de Cauchy – violando o Exercício 4.53. ■

Ainda assim, a completude de $\mathbb{R}$ permite estender a multiplicação de $\mathbb{Q}$:

Teorema 5.1.49. *Sejam X um espaço topológico, Y espaço regular e $D \subseteq X$ um subespaço denso. Se $f\colon D \to Y$ é uma função contínua tal que para todo $x \in X$ o filtro $f(\mathcal{N}_x|_D)$ converge em Y, então f tem uma única extensão contínua $X \to Y$.*

[31] Trívia: durante muito tempo, esta foi a única definição explicitamente destacada como "**Definição**", com um parágrafo totalmente dedicado a ela; (in?) felizmente, o peso da exclusividade se perdeu depois que adotei o formato de texto proposto por Pryscilla Silva.

[32] Exercício 5.35, em particular a equivalência entre os itens b) e c).

[33] Confira a demonstração da Proposição 5.1.31.

[34] Corolário 4.2.37.

[35] Confira o Exercício 4.62.

[36] Pois $\mathbb{Q}$ *será* denso em $\mathbb{R}$ (Proposição K.2.111).

[37] Construções mais cuidadosas podem ser feitas no sentido de obter um modelo para a reta real sem apelar para o Axioma da Escolha – na verdade, é até possível que a construção realizada aqui não o utilize, embora a demonstração de certas *propriedades da reta* dependam dele. Contudo, o ponto é que nessa altura do campeonato eu, sinceramente, pouco me importo.

Demonstração. É claro que a unicidade da extensão contínua é sintoma da condição de Hausdorff (Exercício 1.181). Além disso, convém destacar que por D ser denso, $\mathcal{N}_x|_D := \{U \cap D : U \in \mathcal{N}_x\}^{\uparrow}$ é um filtro em D e, por conseguinte, $f(\mathcal{N}_x|_D)$ é um filtro legítimo em Y. Agora, definamos $\tilde{f}(x) := \lim f(\mathcal{N}_x|_D)$ para cada $x \in X$. Note que para $x \in D$, tem-se $\mathcal{N}_x|_D = \mathcal{N}_{x,D}$, onde $\mathcal{N}_{x,D}$ indica o filtro de vizinhanças de x em D, donde a continuidade de f garante $\tilde{f}(x) = f(x)$. Para ver que $\tilde{f}$ é contínua, dados $x_0 \in X$ e um aberto $V \subseteq Y$, com $\tilde{f}(x_0) \in V$, a regularidade assegura um aberto $W \subseteq Y$ satisfazendo $\tilde{f}(x_0) \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Como o filtro $f(\mathcal{N}_{x_0}|_D)$ converge para $\tilde{f}(x_0)$ por hipótese, existe uma vizinhança $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ tal que $f[D \cap U] \subseteq W$. Mostraremos que $f[U] \subseteq V$.

Para $u \in U$ fixado, a coleção $\mathcal{B}_u := \{W \cap f[D \cap A] : A \in \mathcal{N}_u\}$ é base para um filtro em Y: para cada $A \in \mathcal{N}_u$, $U \cap A \in \mathcal{N}_u$ e, pela densidade de D, $D \cap U \cap A \neq \emptyset$, acarretando $\emptyset \neq f[D \cap U \cap A] \subseteq W \cap f[D \cap A]$, donde conclui-se que $\mathcal{B}_u$ tem a p.i.f.. Agora, a construção do filtro $\mathcal{F}_u := \mathcal{B}_u^{\uparrow}$ e as hipóteses sobre f dão $\mathcal{F}_u \to \tilde{f}(u)$, com $W \in \mathcal{F}_u$. Portanto, $\tilde{f}(u) \in \overline{W} \subseteq V$, como queríamos. □

Corolário 5.1.50. *A multiplicação em $\mathbb{Q}$ admite uma única extensão contínua em $\mathbb{R}$. Em particular, $\mathbb{R}$ é um corpo que estende $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Em vista do teorema anterior, para a primeira parte *basta* mostrar que

$$\mathcal{F} := \{\{ab : (a,b) \in (S \times T) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\} : S \in \mathcal{N}_x \text{ e } T \in \mathcal{N}_y\}^{\uparrow}$$

é um filtro de Cauchy[38] em $\mathbb{R}$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Explicitamente, dada uma *entourage* E de $\mathbb{R}$, busca-se $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \times A \subseteq E$. No caso, como as *entourages* de $\mathbb{R}$ são induzidas pelo filtro de vizinhanças de 0, deve-se mostrar que para qualquer vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha - \beta \in U$ para quaisquer $\alpha, \beta \in A$. *Suspiro...*

No argumento que se segue, a identidade abaixo

$$a'b' - ab = \underbrace{(a' - a)(b' - \tilde{b}) + (a - \tilde{a})(b' - b)}_{(\dagger)} + \underbrace{(a' - a)\tilde{b}}_{(2\dagger)} + \underbrace{\tilde{a}(b' - b)}_{(3\dagger)}, \tag{5.7}$$

válida para quaisquer $a, a', \tilde{a}, b, b', \tilde{b} \in \mathbb{Q}$, será fundamental.

Fixada uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}$, a continuidade da multiplicação $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dá vizinhanças S' e T' de 0 em $\mathbb{R}$ tais que se $\alpha \in S' \cap \mathbb{Q}$ e $\beta \in T' \cap \mathbb{Q}$, então $\alpha\beta \in V$. Logo, para vizinhanças simétricas de 0, digamos S'' e T'', satisfazendo $S'' + S'' \subseteq S'$ e $T'' + T'' \subseteq T'$, os conjuntos $\widetilde{S} := S'' + x$ e $\widetilde{T} := T'' + y$ são vizinhanças de x e y em $\mathbb{R}$, respectivamente, tais que se $a, a' \in \widetilde{S} \cap \mathbb{Q}$ e $b, b' \in \widetilde{T} \cap \mathbb{Q}$, então $(a - a')(b - b') \in V$: por um lado, tem-se $a - x, a' - x \in S''$, acarretando $a - a' = (a - x) + (x - a') \in S'' + S'' \subseteq S'$; por outro lado, $b - b' \in T'$ e, pelo modo como S' e T' foram tomados, segue a afirmação.

Então, para $\tilde{a} \in \widetilde{S} \cap \mathbb{Q}$ e $\tilde{b} \in \widetilde{T} \cap \mathbb{Q}$ fixados, para quaisquer $a, a' \in \widetilde{S} \cap \mathbb{Q}$ e $b, b' \in \widetilde{T} \cap \mathbb{Q}$ deve ocorrer

$$(a' - a)(b' - \tilde{b}) + (a - \tilde{a})(b' - b) \in V + V,$$

mostrando que a escolha de $\widetilde{S}$ e $\widetilde{T}$ já "controla" a parcela *auxiliar* (†) da identidade (5.7).

[38] Deveria-se mostrar que $\mu(\mathcal{N}_{(x,y)}|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}})$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, onde μ é a multiplicação $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ e $\mathcal{N}_{(x,y)}$ é o filtro de vizinhanças do par (x, y) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ora, como $\mathcal{N}_{(x,y)}$ é o filtro em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gerado pela família $\{S \times T : S \in \mathcal{N}_x \text{ e } T \in \mathcal{N}_y\}$ e $\mu(\mathcal{N}_{(x,y)}|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}})$ é o filtro cuja base é $\{\mu[N \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})] : N \in \mathcal{N}_{(x,y)}\}$, a validade da *simplificação* proposta segue, após alguma reflexão, do Exercício 1.150.

Com o ponto $\tilde{b} \in \mathbb{Q}$ fixado, a correspondência $q \mapsto q\tilde{b}$ define uma função $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ contínua em 0. Novamente, para o mesmo aberto V, existe uma vizinhança W' de 0 em $\mathbb{R}$ tal que $\gamma\tilde{b} \in V$ sempre que $\gamma \in W' \cap \mathbb{Q}$. Tomando então uma vizinhança simétrica de 0, digamos W'', satisfazendo $W'' + W'' \subseteq W'$, segue $W \coloneqq W'' + x$ é uma vizinhança de x em $\mathbb{R}$ tal que $(a' - a)\tilde{b} \in V$ para quaisquer $a', a \in W$: novamente, isto segue pois $a' - x, a - x \in W''$ e $a' - a = (a' - x) + (x - a) \in W'' + W'' \subseteq W'$, donde se infere $(a' - a)\tilde{b} \in V$.

Ao fazer $S \coloneqq (S'' \cap W'') + x = \tilde{S} \cap W$, para $a, a' \in S \cap \mathbb{Q}$ segue que $(a' - a)\tilde{b} \in V$, mostrando que a parcela (2†) da identidade (5.7) também está "controlada".

De modo análogo, pode-se obter uma vizinhança T de y em $\mathbb{R}$ tal que para quaisquer $b, b' \in T \cap \mathbb{Q}$ ocorra $\tilde{a}(b' - b) \in V$, "controlando" a parcela (3†) da identidade (5.7).

Portanto, $A \coloneqq \{ab : (a, b) \in (S \times T) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\} \in \mathcal{F}$ é tal que $A \times A \subseteq V + V + V + V$, o que demonstra a condição de Cauchy, dado que para qualquer vizinhança U de 0 é possível obter uma vizinhança V de 0 satisfazendo $V + V + V + V \subseteq U$.

Agora, seja $* \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a única extensão contínua da multiplicação em $\mathbb{Q}$. Tal operação é comutativa pois as funções $(x, y) \mapsto x * y$ e $(x, y) \mapsto y * x$ coincidem no subespaço denso $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Analogamente, as demais condições da definição de anel se verificam e, por construção, $\mathbb{Q}$ é um subanel de $\mathbb{R}$. Resta, por fim, assegurar a existência de inversos multiplicativos.

Dado $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, a condição de Hausdorff e a densidade de $\mathbb{Q}$ garantem um intervalo $I \coloneqq (-r, r)$ em $\mathbb{Q}$ e uma sequência $(q_n)_{n \in \omega}$ em $\mathbb{Q} \setminus I$ com $q_n \to x$. Embora a inversão $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ não seja uniformemente contínua, ela é uniforme no complementar de qualquer vizinhança de 0 (Exercício 5.36), donde segue que $(q_n^{-1})_{n \in \omega}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e, por conseguinte, de Cauchy em $\mathbb{R}$, acarretando a existência de $y \in \mathbb{R}$ com $q_n^{-1} \to y$. A continuidade de $*$ então impõe as identidades $x * y = 1 = y * x$. □

Observação 5.1.51. A menos de notação, a demonstração acima, adaptada do livro *Topological Rings* [113] de Warner[39], se aplica ao contexto em que se tem grupos abelianos E, F e G, todos (topológicos) completos e de Hausdorff, com $A \subseteq E$ e $B \subseteq F$ subgrupos densos munidos de uma função $\mathbb{Z}$-*bilinear*[40] contínua $f \colon A \times B \to G$. No caso, o argumento mostra que existe uma única extensão contínua e $\mathbb{Z}$-bilinear $E \times F \to G$. △

Embora já tenhamos nos convencido de que $\mathbb{R}$ é um *corpo algébrico*, falta provar que $\mathbb{R}$ é um *corpo topológico*, posto que, para isso, a inversão também deve ser contínua. A promoção do posto de anel topológico para o de corpo topológico virá da definição de uma ordem total em $\mathbb{R}$, compatível com a ordem de $\mathbb{Q}$ e com a topologia de $\mathbb{R}$, que *fará* deste um corpo ordenado e completo.

Observação 5.1.52. Evidentemente, a continuidade da inversão em $\mathbb{R}$ não depende *exclusivamente* da ordem de $\mathbb{R}$, podendo ser mostrada diretamente. Contudo, fazer isso no texto seria desnecessário, posto que precisaremos definir a ordem em $\mathbb{R}$, o que *dará* a continuidade da inversão de modo automático (Exemplo 5.1.40). O leitor interessado numa abordagem sem ordem pode conferir o Exercício 5.37. △

[39] Que por sua vez parece adaptar a prova apresentada por Bourbaki [19], com a diferença de ser bem mais inteligível. É digno de nota que há uma identidade errada na versão de Bourbaki.

[40] A $\mathbb{Z}$-bilinearidade abstrai a distributividade da multiplicação com respeito à operação aditiva: significa que as correspondências $a \mapsto f(a, y)$ e $b \mapsto f(x, b)$ são $\mathbb{Z}$-lineares para quaisquer $y \in B$ e $x \in A$ fixados.

Definamos uma relação $\preceq$ em $\mathbb{R}$ por meio da regra

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \tag{5.8}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

✓ *A relação $\preceq$ é reflexiva*, pois $x - x = 0 \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

✓ *A relação $\preceq$ é antissimétrica*, pois $\overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \cap \overline{\mathbb{Q}_{\leq 0}} = \{0\}$. De fato, se tal igualdade ocorre e $x, y \in \mathbb{R}$ *forem* tais que $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x - y \in \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \cap \overline{\mathbb{Q}_{\leq 0}}$, acarretando $x = y$. Por sua vez, a igualdade é válida pois, se $x \neq 0$, então existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}$ com $x \in U$ e $0 \notin U$, que deve ser da forma $U := V + x$ para alguma vizinhança V de 0. Dado que a Proposição 5.1.38 garante uma identidade do tipo $V = \overline{W}$ para alguma vizinhança $W \subseteq \mathbb{Q}$ de 0, segue de $0 \notin U$ que $W \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}$ ou $W \subseteq \mathbb{Q}_{\leq 0}$, o que implica em $x \notin \overline{\mathbb{Q}_{\leq 0}}$ ou $x \notin \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$, respectivamente[41].

✓ *A relação $\preceq$ é transitiva* em decorrência da continuidade da adição. De fato, se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então existem sequências $(q_n)_{n\in\omega}$ e $(r_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ com $q_n \to y - x$, $r_n \to z - y$ e daí

$$q_n + r_n \to y - x + z - y = z - x,$$

com $q_n + r_n \geq 0$ para todo $n \in \omega$, mostrando que $x \preceq z$.

✓ *A relação $\preceq$ é total*, pois $\overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}} \cup \overline{\mathbb{Q}_{\leq 0}} = \mathbb{R}$. Com efeito, a ocorrência de tal identidade dá precisamente duas possibilidades para $y - x$: ou $y - x \in \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$ (e daí $x \preceq y$) ou $y - x \in \overline{\mathbb{Q}_{\leq 0}}$, donde segue que $x - y = -(y - x) \in -\overline{\mathbb{Q}_{\leq 0}} = \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$ (e daí $y \preceq x$). A igualdade desejada segue da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, aliada à identidade $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

✓ *A relação $\preceq$ estende a relação $\leq$ de $\mathbb{Q}$*, já que se $x, y \in \mathbb{Q}$ e $x \leq y$, então $y - x \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Como já é de costume, escreveremos "$x \prec y$" para abreviar "$x \preceq y$ e $x \neq y$". Dito isso, e denotando a multiplicação de números reais obtida pelo último teorema com a mesma notação da multiplicação de racionais, tem-se o

Teorema 5.1.53. *Nas notações anteriores, $(\mathbb{R}, \preceq)$ é um corpo ordenado.*

Demonstração. É bem mais fácil do que parece: dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \prec b$, tem-se $a + c \prec b + c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$, pois $a + c \neq b + c$ com $b + c - (a + c) = b - a \in \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}}$; se $a \succ 0$ e $b \succ 0$, então $a \neq 0$, $b \neq 0$ e existem sequências $(p_n)_{n\in\omega}$ e $(q_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ com $p_n \to a$ e $q_n \to b$, donde a continuidade da multiplicação implica em $p_n q_n \to ab \neq 0$, i.e., $ab \succ 0$. □

Finalmente... provaremos que a topologia induzida pela ordem acima *é* a topologia de $\mathbb{R}$ enquanto completamento uniforme do grupo topológico abeliano $(\mathbb{Q}, +, 0)$. Para o alento do leitor – e meu – isto é *quase* trivial.

Teorema 5.1.54. *Intervalos fechados (resp. abertos) de $\mathbb{R}$ com respeito à ordem $\preceq$ são fechados (resp. abertos) com respeito à topologia de grupo de $\mathbb{R}$. Além disso, a família $\mathcal{B} := \{[-r, r] : r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ é base de vizinhanças para $0 \in \mathbb{R}$ com respeito à topologia de grupo. Consequentemente, as topologias de $\mathbb{R}$ enquanto grupo topológico e corpo ordenado coincidem.*

[41] Faça um desenho se parecer confuso.

Demonstração. Note que $[-\alpha, \alpha] = \left(\alpha + \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}}\right) \cap \left(-\alpha - \overline{\mathbb{Q}_{\geq 0}}\right)$, donde segue que *intervalos fechados* são *fechados*[42] e, consequentemente, *intervalos abertos* são *abertos*. Para a segunda parte, em vista da Proposição 5.1.38, basta mostrar que $\overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}} = [-r, r]$ para qualquer $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, i.e., o fecho em $\mathbb{R}$ do intervalo *racional* $(-r, r) \cap \mathbb{Q}$ com respeito à topologia de grupo de $\mathbb{R}$ é o intervalo *real* fechado $[-r, r]$:

- ✓ tem-se $\overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}} \subseteq [-r, r]$;
- ✓ se $x \in (-r, r)$, então existe uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}$ com $x \in V \subseteq (-r, r)$, donde a densidade de $\mathbb{Q}$ dá um $r' \in V \cap \mathbb{Q}$ e, por conseguinte, $V \cap ((-r, r) \cap \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, mostrando que $x \in \overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}}$;
- ✓ $r \in \overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}}$, pois se $V \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto que contém r, então (pela Proposição 5.1.38) existe $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ com

  $$\overline{\{q \in \mathbb{Q} : -s < q < s\}} + r = \overline{\{q \in \mathbb{Q} : -s + r < q < s + r\}} \subseteq V,$$

  donde não é difícil obter[43] $q \in V \cap ((-r, r) \cap \mathbb{Q})$;
- ✓ analogamente, mostra-se que $-r \in \overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}}$, resultando em $[-r, r] \subseteq \overline{(-r,r) \cap \mathbb{Q}}$.

Por fim, a argumentação acima assegura que $\mathcal{B}$ é base do filtro de vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}$ com respeito à topologia de grupo de $\mathbb{R}$. Ocorre que $\mathcal{B}$ também é base para o filtro de vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}$ com respeito à topologia da ordem: dado $\alpha \succ 0$, o fato de $(-\alpha, \alpha)$ também ser aberto na topologia de grupo garante que existe $2q \in \mathbb{Q} \cap (-\alpha, \alpha)$, acarretando $[-q, q] \subseteq (-\alpha, \alpha)$. Como a topologia da ordem também é compatível com a estrutura de grupo[44], o Exercício 5.22 atesta a coincidência das duas topologias. □

Demonstração do Teorema 5.1.48. Mostraremos que a ordem $\preceq$ definida em (5.8) faz de $\mathbb{R}$ um corpo ordenado completo. Como a topologia induzida por $\preceq$ *é a* topologia de $\mathbb{R}$ como completamento uniforme de $\mathbb{Q}$, segue que a uniformidade induzida por meio das *entourages* descritas em (5.5) é completa. Logo, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, com respeito a tal uniformidade, converge. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, por ter $\mathbb{Q}$ como subespaço denso, o Teorema 5.1.43 garante que $\mathbb{R}$ é Dedekind completo com a ordem $\preceq$, como desejado. □

Daqui em diante, a ordem de $\mathbb{R}$ voltará a ser denotada com o símbolo usual $\leq$. A rigor, a partir deste ponto os ferramentais da Topologia Geral podem/poderiam ser utilizados para desenrolar o panorama típico da Análise, com o estudo de limites específicos, como séries e integrais (de Riemann, a princípio), ou ainda com limites uniformes de funções contínuas – e, com elas, trazer as funções trigonométricas e exponenciais para a jogada. Este é o roteiro feito, por exemplo, por Bourbaki em [19, 20]. Entretanto, salvo pelas funções exponenciais, tratadas *en passant* na última seção deste capítulo, tais tópicos não serão abordados aqui.

---

[42] Lembre-se: tanto as translações quanto a inversão aditiva são homeomorfismos.

[43] Sugestão: $q := r - \frac{s}{2}$. Pode ser necessário *ajustar* o s, o que é inofensivo, posto que a inclusão obtida com um $s > 0$ particular também se verifica para qualquer $s' \in \mathbb{Q}_{>0}$ com $s' < s$.

[44] Proposição 5.1.39.

Exercícios complementares da seção

Generalidades

Exercício 5.19. Sejam X, Y e Z espaços topológicos e $f\colon X \times Y \to Z$ uma função contínua. Convença-se de que para $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ fixados, as funções

$$\begin{aligned} f_{x_0}\colon Y &\to Z \\ y &\mapsto f(x_0, y) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} f_{y_0}\colon X &\to Z \\ x &\mapsto f(x, y_0) \end{aligned}$$

são contínuas. Dica: repita o argumento utilizado para mostrar que as tranlações num grupo topológico são contínuas. ■

Exercício 5.20. Mostre que inv: $G \to G$ é um morfismo de grupos se, e somente se, G é abeliano. ■

Exercício 5.21. Sejam X um espaço topológico e $h\colon X \to X$ um homeomorfismo tal que $h(x) = y$, para $x, y \in X$ fixados.

a) Mostre que $V \in \mathcal{N}_x$ se, e somente se, $h[V] \in \mathcal{N}_y$.

b) Mostre que se $\mathcal{V}$ é uma (sub)base do filtro de vizinhanças $\mathcal{N}_x$, então a família $h\mathcal{V} := \{h[V] : V \in \mathcal{V}\}$ é uma (sub)base do filtro de vizinhanças $\mathcal{N}_y$.

c) Convença-se de que $\mathcal{N}_y = h\mathcal{N}_x$.

Em posse disso, reflita sobre a sentença "em espaços homogêneos, quaisquer dois filtros de vizinhanças são indistinguíveis". ■

Exercício 5.22. Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo munido de duas topologias, digamos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, compatíveis com sua estrutura de grupo. Mostre que se $\mathcal{N}_{e,\mathcal{S}} = \mathcal{N}_{e,\mathcal{T}}$, então $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. ■

Exercício 5.23. Mostre que se G é um grupo, então a topologia discreta sobre G faz de G um grupo topológico. ■

Exercício 5.24. Seja $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico e $H \subseteq G$ um subgrupo. Mostre que se H é normal, então $\overline{H}$ é um subgrupo normal. ■

Exercício 5.25. Sejam G um grupo e $\mathcal{T}$ uma topologia sobre G. Mostre a topologia $\mathcal{T}$ faz de G um grupo topológico se, e somente se, a função $\varphi\colon G \times G \to G$ dada por $\varphi(x, y) := xy^{-1}$ é contínua, onde $G \times G$ tem a topologia produto. ■

Exercício 5.26. Seja $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico. Para cada $A \subseteq G$, denote $A^1 := A$ e, para $n \in \omega$ com $n > 1$, faça $A^{n+1} := A^n A$. Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, mostre que se $\mathcal{B}$ é uma base do filtro $\mathcal{N}_e$, então $\{B^n : B \in \mathcal{B}\}$ também é base para $\mathcal{N}_e$. ■

Exercício 5.27. Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico e $A, B \subseteq G$ subconjuntos. Mostre que se A e B são abertos (ou fechados), então $AB \subseteq G$ é aberto (fechado, respectivamente). Vale a recíproca? ■

Exercício 5.28. Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico e $H \subseteq G$ um subgrupo normal. Mostre que a projeção canônica $\pi\colon G \to G/H$ é uma função aberta. Dica: note que o subconjunto $HV := \bigcup_{h \in H} hV \subseteq G$ é aberto em G sempre que $V \subseteq G$ é aberto. ■

Exercício 5.29. Sejam $(G, \cdot, e)$ um grupo topológico e $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças para o filtro $\mathcal{N}_e$. Mostre que G é de Hausdorff se, e somente se, $\bigcap \mathcal{B} = \{e\}$. ■

Exercício 5.30. Seja $(G, \cdot, e)$ um grupo munido de uma topologia $\mathcal{T}$ que torna a operação $\cdot$ contínua. Mostre que se $(G, \mathcal{T})$ é compacto, então $(G, \mathcal{T})$ é grupo topológico. Dica: encontre uma bijeção contínua e marota da forma $G \times G \to G \times G$. ■

Exercício 5.31. Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo. Mostre que G é compacto se, e somente se, H e G/H são compactos. Depois, repita com "conexidade" em vez de compacidade. ■

Especificidades

Exercício 5.32. Mostre que se I é um intervalo de $\mathbb{R}$ que contém 0, então o subgrupo aditivo $\langle I\rangle$ gerado por I é $\mathbb{R}$. ■

Exercício 5.33. Seja $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

a) Mostre que $(\mathbb{T}, \cdot, 1)$ é grupo topológico compacto de Hausdorff com a topologia herdada de $\mathbb{C}$.

b) Mostre que $\mathbb{T}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dica: basta obter um morfismo de grupos, contínuo e sobrejetor, da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$; a menos de contas muito chatas, basta fazer $r \mapsto e^{2\pi i r}$. ■

Exercício 5.34. Seja $G := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ com a operação $*$ definida por

$$(x, y) * (x', y') := (x \cdot x', x \cdot y' + y),$$

onde $\cdot$ denota a multiplicação usual de $\mathbb{R}$.

a) Note que $e := (1, 0)$ é elemento neutro de $(G, *)$.

b) Observe que o filtro $\mathcal{F}$ em G, gerado pelos conjuntos da forma

$$A_\varepsilon := \{(x, y) \in G : |x - 1| < \varepsilon \text{ e } |y| < \varepsilon\}$$

para cada $\varepsilon > 0$, determina uma topologia em G compatível com sua estrutura algébrica.

c) Fixado $\varepsilon > 0$, faça $\alpha := \left(\frac{\varepsilon}{4}, 0\right)$, $\beta := \left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{8}\right)$ e mostre que $\beta\alpha^{-1} \in A_\varepsilon$ enquanto $\alpha^{-1}\beta \notin A_1$.

Conclua que as uniformidades direita e esquerda de G são distintas. ■

Exercício 5.35. Dado um corpo ordenado $\mathbb{K}$, mostre que são equivalentes[45]:

a) $\mathbb{K}$ é metrizável;

b) $\mathbb{K}$ tem caráter enumerável;

c) existe um subconjunto enumerável $C \subseteq \mathbb{K}_{>0}$ tal que para todo $r \in \mathbb{K}_{>0}$ existe $c \in C$ com $0 < c < r$.

Conclua que tanto corpos ordenados enumeráveis quanto corpos ordenados arquimedianos são metrizáveis. ■

Observação 5.1.55. Existem corpos ordenados enumeráveis não-arquimedianos, bem como existem corpos arquimedianos não-enumeráveis ($\mathbb{R}$, por exemplo). Mais geralmente, dado um cardinal $\kappa \geq \aleph_0$, existem corpos ordenados $\mathbb{K}_0$ e $\mathbb{K}_1$ com $|\mathbb{K}_0| = |\mathbb{K}_1| = \kappa$, $\mathbb{K}_0$ metrizável e $\mathbb{K}_1$ não-metrizável. O leitor pode encontrar mais detalhes em [35]. △

Exercício 5.36. Fixado $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, mostre que a correspondência $x \mapsto x^{-1}$ determina uma função $\mathbb{Q} \setminus (-r, r) \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ uniformemente contínua. ■

Exercício 5.37. Seja $(G, \cdot, e)$ um grupo dotado de uma topologia.

a) Suponha que as translações $x \mapsto xg$ e $x \mapsto gx$ sejam contínuas, para qualquer $g \in G$. Mostre que se a inversão $g \mapsto g^{-1}$ for contínua em e, então ela é contínua em G.

b) Suponha que a operação $\cdot$ seja contínua. Mostre que se a restrição da inversão $g \mapsto g^{-1}$ for contínua num subgrupo denso de G, então a inversão é contínua em G.

Conclua que, no Corolário 5.1.50, já teríamos como garantir que $\mathbb{R}$ é um corpo topológico. Dica: $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ é subgrupo (multiplicativo) denso do grupo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cuja operação é contínua[46]. ■

Exercício 5.38. Existe alguma topologia compacta de Hausdorff sobre $\mathbb{Z}$ compatível com sua estrutura de grupo[47]? Dica: Exercício 4.68. ■

Exercício 5.39. Sejam G um grupo topológico de Hausdorff e H um subgrupo. Mostre que se H é localmente compacto, então H é fechado. ■

Exercício 5.40. Sejam G_0 e G_1 grupos topológicos, H_0 e H_1 subgrupos densos de G_0 e G_1, respectivamente, e $f : H_0 \to H_1$ um morfismo contínuo. Mostre que se G_1 é completo e de Hausdorff, então existe um único morfismo contínuo $F : G_0 \to G_1$ que estende f. Além disso, se G_0 também for completo e de Hausdorff, e f for um isomorfismo topológico de grupos, então F é um isomorfismo topológico. ■

---

[45] Convém observar que os itens b) e c) são equivalentes entre si, independentemente de noções de metrizabilidade.

[46] Créditos a Seth Warner [112].

[47] Note que uma topologia localmente compacta de Hausdorff existe: a topologia discreta.

5.2 Análise Funcional para adultos disfuncionais

Embora a expressão "Análise Funcional" tenha hoje um significado bastante amplo, de um ponto de vista puramente linguístico faria mais sentido chamar esta seção de "Análise Abstrata" ou algo do tipo, já que o termo "funcional" se aplica muito melhor ao próximo capítulo. No entanto, o próprio desenrolar histórico dessa área, que surgiu com o estudo de problemas de convergência em espaços de funções, fez com que os seus praticantes atribuíssem tal nomenclatura ao estudo de espaços vetoriais dotados de alguma noção de *convergência*[48].

Definição 5.2.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo topológico. Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial E dotado de uma topologia será chamado de **espaço vetorial topológico** se for um grupo topológico com a operação de soma e a multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$ for contínua. ¶

Exemplo 5.2.2. Como adiantado no Exemplo 5.1.9, um $\mathbb{R}$-espaço vetorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$ é um espaço vetorial topológico. Por sua vez, fixado um espaço topológico X, segue que $\mathcal{C}_p(X)$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico (Exemplo 5.1.27). ▲

Cursos introdutórios de Análise Funcional costumam tratar de espaços normados, enquanto os casos particulares de espaços vetoriais topológicos que *escapam* das normas, como $\mathcal{C}_p(X)$, são deixados para seus capítulos mais avançados. Esta seção, porém, propõe um meio termo: discutiremos noções básicas de Análise Funcional, mas sob o escopo de espaços vetoriais topológicos quaisquer (ou quase isso). O leitor interessado numa introdução mais adequada às *normas vigentes* pode conferir o recente, brasileiro e excelente[49] *Fundamentos de Análise Funcional* [18], de Botelho, Pellegrino & Teixeira.

Para a comodidade do leitor, a primeira subseção relembrará os resultados da seção anterior, que se aplicam ao presente contexto por razões óbvias[50]. As duas subseções posteriores abordarão $\mathbb{K}$-espaços vetoriais topológicos para o caso em que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Algebristas incomodados com o excesso de Análise devem conferir a Seção E.1, em que algumas das ferramentas deste capítulo são usadas num contexto típico da Álgebra.

5.2.1 Reminiscências grupais

Dados um corpo topológico $\mathbb{K}$ e um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico E, a estrutura de grupo topológico da adição garante que as correspondências

$$v \overset{\text{op}}{\longmapsto} -v \quad \text{e} \quad v \overset{t_u}{\longmapsto} v + u = u + v \tag{5.9}$$

determinam homeomorfismos da forma $E \to E$, para $u \in E$ fixado[51]. Em particular, a função op é, na verdade, um isomorfismo linear[52]. Por sua vez, a continuidade da multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$ e o Exercício 5.19 atestam que a função $v \overset{m_k}{\longmapsto} kv$ também é contínua, para cada $k \in \mathbb{K}$ fixado.

[48] Nesse sentido, o leitor generalista pode considerar interessante o livro *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis*, de Beattie e Butzmann [10], no qual resultados clássicos da Análise Funcional são discutidos sob a ótica dos *espaços de convergência* (Seção 1.4).

[49] Meu critério de excelência: "fala de *nets* ⇒ ótimo".

[50] Contudo, a maioria das demonstrações será omitida.

[51] Confira a discussão para grupos na página 428.

[52] Pode ser útil rever o Exercício 5.20 e a Proposição K.2.15.

Exercício 5.41. Nas condições anteriores, mostre que se $k \neq 0$, então m_k é um homeomorfismo, cuja inversa é $m_{k^{-1}}$. ■

Como já destacado na Observação 5.1.3, para subconjuntos $A, B \subseteq E$, escreve-se $-A$ e $A + B$ para indicar as imagens de A e $A \times B$ pelas operações op e $+$, respectivamente. De modo inteiramente análogo, faz-se $kA := \{ka : a \in A\}$ para cada $k \in \mathbb{K}$. Em particular, a versão vetorial da Proposição 5.1.5 é a seguinte:

Proposição 5.2.3. *Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, V um subconjunto de E, $u \in E$ um ponto e $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ um escalar. Então:*

i) *V é aberto se, e somente se, $u + V$ é aberto se, e somente se, kV é aberto;*

ii) *se $\mathcal{V}$ é uma (sub)base do filtro de vizinhanças $\mathcal{N}_0$, então $u + \mathcal{V} := \{u + V : V \in \mathcal{V}\}$ e $k\mathcal{V} := \{kV : V \in \mathcal{V}\}$ são (sub)bases do filtro de vizinhanças $\mathcal{N}_u$;*

iii) *$\mathcal{N}_u = u + \mathcal{N}_0$ e $\mathcal{N}_0 = k\mathcal{N}_0$.*

Demonstração. Este é só mais um caso particular do Exercício 5.21. □

Conforme mencionado acima, a Proposição 5.2.3 é uma simples consequência da homogeneidade do espaço E, que por sua vez decorre de sua estrutura de grupo topológico. É também a estrutura aditiva de grupo de V que suporta a próxima

Proposição 5.2.4. *Sejam X e Y $\mathbb{K}$-espaços vetoriais topológicos e $f : X \to Y$ um função $\mathbb{K}$-linear. Então a função f é contínua se, e somente se, f é contínua em 0_X.*

Demonstração. O enunciado é só um caso particular da Proposição 5.1.8. □

A próxima tarefa de tradução/recordação consiste em caracterizar os filtros sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial que induzem topologias compatíveis com a estrutura algébrica em questão. Naturalmente, devido à estrutura de grupo abeliano da adição num espaço vetorial, o resultado a seguir é consequência direta do que já se sabe sobre grupos.

Proposição 5.2.5. *Dados um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico E e um filtro próprio $\mathcal{F}$ em E, consideremos as seguintes asserções:*

(GA$_{\text{i}}$) *para todo $U \in \mathcal{F}$ existem $V, W \in \mathcal{F}$ tais que $V + V \subseteq U$ e $-W \subseteq U$;*

(GA$_{\text{ii}}$) *para todo $U \in \mathcal{F}$ existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V - V \subseteq U$.*

(GA$_{\text{iii}}$) *para todo $U \in \mathcal{F}$ existe $S \in \mathcal{F}$ tal que $S = -S$ e $S + S \subseteq U$.*

Então as condições (GA$_{\text{i}}$) e (GA$_{\text{ii}}$) são equivalentes, e ambas implicam (GA$_{\text{iii}}$)[53]. Além disso, o filtro $\mathcal{F} := \mathcal{N}_0$ satisfaz tais condições.

Demonstração. A equivalência entre (GA$_{\text{i}}$) e (GA$_{\text{ii}}$) já foi provada no Exercício 5.3. Para a comodidade do leitor, vejamos que (GA$_{\text{i}}$) $\Rightarrow$ (GA$_{\text{iii}}$): note que (GA$_{\text{i}}$) implica em $-U \in \mathcal{F}$ para todo $U \in \mathcal{F}$, pois $\mathcal{F}$ é filtro[54] e existe $W \in \mathcal{F}$ com $W \subseteq -U$; agora, para obter S como desejado, basta tomar $V \in \mathcal{F}$ com $V + V \subseteq U$ e fazer $S := V \cap (-V)$, pois

$$-S = -(V \cap (-V)) = V \cap (-V) = S \quad \text{e} \quad S + S \subseteq V + V \subseteq U. \qquad \square$$

[53] Originalmente, a condição (GT$_{\text{iii}}$) do Exercício 5.3 estipularia o seguinte: "para quaisquer $v \in E$ e $U \in \mathcal{F}$ ocorre $v + U - v \in \mathcal{F}$". No entanto, como isso é trivial no atual contexto (já que $v + U - v = U$), pareceu mais conveniente explicitar uma condição *útil*.

[54] Lembre-se de que um filtro $\mathcal{F}$ é fechado por interseções finitas ($A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$) e fechado "para cima" ($A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$).

Secretamente, a condição (GA$_\mathrm{i}$) (ou (GA$_\mathrm{ii}$)) acima caracteriza o que um filtro $\mathcal{F}$ centrado em $0 \in E$ deve satisfazer a fim de induzir uma (única!) topologia sobre o $\mathbb{K}$-espaço vetorial E que faça dele um *grupo topológico com a adição*: a argumentação do Teorema 5.1.10 se aplica diretamente, com a vantagem de que a comutatividade da adição simplifica a prova de que $u + \mathcal{F} := \{u + V : V \in \mathcal{F}\}$ é o filtro de vizinhanças de u, para cada $u \in E$. Mais precisamente, tem-se a seguinte

Proposição 5.2.6. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo topológico, E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\mathcal{F}$ um filtro próprio em E. Se $\mathcal{F}$ satisfaz a condição* (GA$_\mathrm{i}$) *(ou* (GA$_\mathrm{ii}$)*) da Proposição 5.2.5, então existe uma única topologia $\mathcal{T}$ sobre E que faz de $(E, +, 0)$ um grupo topológico tal que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{F}$. Explicitamente, $\mathcal{T} := \{A \subseteq E : \forall x \in A \quad \exists U \in \mathcal{F} \quad x + U \subseteq A\}$.*

Exercício 5.42. Demonstre a proposição acima. Dica: confira o Teorema 5.1.10. ■

Observação 5.2.7. As duas últimas proposições caracterizam apenas os filtros que induzem topologias compatíveis com a *estrutura aditiva* de E. Para que E seja um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico, deve-se assegurar a continuidade da multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$. Porém, diferente do que ocorre com a adição, que é intrínseca[55], a multiplicação depende de $\mathbb{K}$ e, por conseguinte, de sua topologia.

Teorema 5.2.8. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo topológico e E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico. Para um filtro próprio $\mathcal{F}$ sobre E, consideremos as seguintes asserções:*

(M$_\mathrm{i}$) *para todo $v \in E$ e $U \in \mathcal{F}$ existe $W \subseteq \mathbb{K}$ aberto com $0_\mathbb{K} \in W$ e $Wv \subseteq U$;*

(M$_\mathrm{ii}$) *para cada $k \in \mathbb{K}$ e $U \in \mathcal{F}$ existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $kV \subseteq U$;*

(M$_\mathrm{iii}$) *para cada $U \in \mathcal{F}$ existem $V \in \mathcal{F}$ e $W \subseteq \mathbb{K}$ aberto com $0_\mathbb{K} \in W$ tais que $WV \subseteq U$.*

Então $\mathcal{F} := \mathcal{N}_0$ satisfaz as condições acima. Reciprocamente, se um filtro próprio $\mathcal{F}$ satisfaz as condições (GA$_\mathrm{i}$) *(ou* (GA$_\mathrm{ii}$)*) da Proposição 5.2.5 e as condições acima, então existe uma única topologia $\mathcal{T}$ sobre E compatível com sua estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial satisfazendo $\mathcal{N}_0 = \mathcal{F}$.*

Demonstração. A primeira parte segue da continuidade da multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$. Para a segunda, em vista da Proposição 5.2.6, falta apenas mostrar que a multiplicação é contínua. Ora, dados $k \in \mathbb{K}$ e $v \in E$, uma vizinhança de kv é da forma $kv + N$ para $N \in \mathcal{F}$, e busca-se uma vizinhança de (k, w) em $\mathbb{K} \times E$ cuja imagem pela multiplicação esteja contida em $kv + N$. Para isso:

- (GA$_\mathrm{i}$) (duas vezes) garante um $L \in \mathcal{F}$ com $L + L + L \subseteq N$;
- (M$_\mathrm{i}$) permite obter $W_0 \subseteq \mathbb{K}$ aberto, com $0_\mathbb{K} \in W_0$, tal que $W_0 v \subseteq L$;
- (M$_\mathrm{ii}$) permite obter $U \in \mathcal{F}$ com $kU \subseteq L$;
- (M$_\mathrm{iii}$) permite obter $V \in \mathcal{F}$ e $W_1 \subseteq \mathbb{K}$ aberto com $0_\mathbb{K} \in W_1$ tais que $W_1 V \subseteq L$;
- como $W := W_0 \cap W_1 \subseteq \mathbb{K}$ é aberto com $0_\mathbb{K} \in W$ resulta em $k + W \subseteq \mathbb{K}$ é um aberto que contém k;
- como $O := U \cap V \in \mathcal{F}$ é uma vizinhança de $0 \in E$, segue que $v + O \subseteq E$ é uma vizinhança de v.

[55]No sentido de depender apenas de E.

Toda essa informação permite concluir que $(k+W)\times(v+O)$ é uma vizinhança de (k,v) com a propriedade desejada, pois

$$\begin{aligned}(k+W)\cdot(v+O) = kv + kO + Wv + WO \subseteq kv + kU + W_0 v + W_1 V \subseteq \\ \subseteq kv + L + L + L \subseteq kv + N.\end{aligned}$$ □

A caracterização dada pelo teorema acima, adaptada de Bourbaki [19], embora intrincada, engloba o cenário geral de corpos topológicos quaisquer[56]. Dito isso, é importante frisar que em contextos nos quais se consideram corpos topológicos mais amigáveis, caracterizações mais simples podem ser obtidas. Por exemplo, no caso em que a topologia do corpo $\mathbb{K}$ é discreta[57], a caracterização do teorema anterior se simplifica sobremaneira:

Exercício 5.43. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo topológico e E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico. Para um filtro próprio $\mathcal{F}$ sobre E, consideremos a seguinte condição:

($\mathrm{M_d}$) para quaisquer $U\in\mathcal{F}$ e $k\in\mathbb{K}$ existe $V\in\mathcal{F}$ tal que $kV\subseteq U$.

Mostre que se a topologia do corpo $\mathbb{K}$ no Teorema 5.2.8 é discreta, então as condições ($\mathrm{M_i}$), ($\mathrm{M_{ii}}$) e ($\mathrm{M_{iii}}$) podem ser substituídas pela condição $\mathrm{M}\mathbb{K}_\mathrm{d}$ acima. ■

Como grande parte dos casos interessantes de corpos topológicos não-discretos consiste de corpos munidos de um *valor absoluto*[58], a maioria das referências sobre espaços vetoriais topológicos realiza a presente discussão apenas para tais contextos: mesmo clássicos como Bourbaki [21] e Schaefer [103] consideram apenas tais situações[59]. Por essa razão, o leitor poderá encontrar diferenças ao comparar as caracterizações apresentadas acima com as que são discutidas em outros textos (Exercício 5.69). △

Antes de encerrar esta subseção de recordações, convém dar alguma atenção aos axiomas de separação no contexto vetorial. Mais uma vez, o fato de espaços vetoriais topológicos serem grupos topológicos garante as próximas propriedades de separação, como corolários da Proposição 5.1.16 e do Teorema 5.1.17, respectivamente.

Corolário 5.2.9. *Espaços vetoriais topológicos são T_3. Explicitamente: se E é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico e $U\subseteq E$ é uma vizinhança de 0, então existe uma vizinhança V de 0 com $\overline{V}\subseteq U$.*

Corolário 5.2.10. *Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico E é de Hausdorff se, e somente se, $\{0\}$ é fechado em E.*

Observação 5.2.11. Mais geralmente, a estrutura uniforme induzida pela adição de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico assegura que o espaço sempre é $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$. Questões análogas sobre completamento de espaços vetoriais topológicos fazem uso do ferramental desenvolvido no Capítulo 4. O leitor interessado em tais meandros pode conferir a subsubseção “Métrica e limitação” (na página 478). Leitores mais exigentes podem preferir bons livros sobre o tema, como o clássico Schaefer [103] ou o mais recente [11] de Beckenstein e Narici. △

[56] Reflita: a hipótese sobre $\mathbb{K}$ ser *corpo topológico* foi usada ou bastaria que $\mathbb{K}$ fosse um *anel topológico*?

[57] Espaços vetoriais topológicos sobre corpos discretos são também chamados de *grupos vetoriais topológicos*. O leitor interessado em tais animais pode conferir o artigo de P. Kenderov [61].

[58] Essencialmente é uma função *norma* no corpo.

[59] E o sucinto *Functional Analysis* [99], de Walter Rudin, o faz apenas para os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, postura que será adotada ao longo desta seção.

5.2.2 Banalidades reais e complexas

Ao longo desta seção, $\mathbb{K}$ denota um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munido da topologia induzida pela *norma* $|\cdot|$, que a cada elemento $a + bi \in \mathbb{K}$ faz corresponder o número real $\sqrt{a^2 + b^2}$. Desse modo, o próprio corpo $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado e, pelo Exercício 1.229, é tal que as operações de adição e multiplicação são contínuas: no linguajar deste capítulo, isto se resume a dizer que $\mathbb{K}$ é um anel topológico. Por desencargo de consciência, vamos promover $\mathbb{K}$ ao *status* de corpo topológico.

Proposição 5.2.12. *Nas notações acima, $\mathbb{K}$ é um corpo topológico quando munido de suas operações e topologia usuais.*

Demonstração. A Proposição 5.1.39 e o Exemplo 5.1.40 garantem que $\mathbb{R}$ é corpo topológico. Agora, para o caso Complexo, a ideia é expressar a função

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C}\\ z &\mapsto z^{-1}\end{aligned}$$

como a composição de uma função *polinomial*[60] com os homeomorfismos *óbvios* entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, digamos ψ e ψ^{-1}. Mais precisamente, como $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, segue que para $a + bi \neq 0$ deve ocorrer

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i.$$

Como a correspondência $T_j\colon (r_0, r_1) \mapsto \dfrac{r_j}{r_0^2 + r_1^2}$ determina uma função contínua da forma $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, segue que $\varphi = \psi^{-1} \circ (T_0, -T_1) \circ \psi$, como desejado. □

A proposição acima permite considerar $\mathbb{K}$-espaços vetoriais topológicos dentro do escopo definido no início deste capítulo. Em particular, como não trataremos de outros corpos que não sejam $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ao longo desta e da próxima subseção, pode-se suprimir o sufixo $\mathbb{K}$, exceto, possivelmente, quando os resultados valerem especificamente para $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Além disso, como faremos *Análise*, assumiremos com bastante frequência que os espaços vetoriais topológicos são de Hausdorff, o que será destacado de acordo com a conveniência. Por fim, e não menos importante, abreviaremos por "**e.v.t.**" a tediosa expressão "espaço vetorial topológico".

Definição 5.2.13. Fixados um e.v.t. E e um subconjunto $S \subseteq E$, diremos que S é

(i) **convexo** se $tS + (1 - t)S \subseteq S$ para qualquer $t \in [0, 1]$,

(ii) **balanceado** se $\alpha S \subseteq S$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$, e

(iii) **linearmente limitado** se para toda vizinhança U de 0 (em E) existe $s > 0$ tal que $S \subseteq tU$ para todo $t > s$. ¶

Observação 5.2.14 (Alerta terminológico)**.** Ao longo desta seção, o trabalho de Rudin [99] será seguido com bastante proximidade, salvo por algumas terminologias. Por exemplo, os objetos que xingaremos como "linearmente limitados" são chamados apenas de "limitados" por Rudin. Outra diferença sutil, mas que pode ser perigosa: para Rudin, "vizinhanças" são as coisas que aqui têm sido chamadas de "abertos". △

[60] "Ah, mas neste caso, o correto seria dizer que a função é racional". Dane-se.

Proposição 5.2.15. *Sejam E um e.v.t. e subconjuntos $A, B \subseteq E$. Então:*

(PVT_1) $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0} V + A$;

(PVT_2) $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$;

(PVT_3) *se A é subespaço vetorial de E, então $\overline{A}$ é subespaço vetorial de E*

(PVT_4) *se A é convexo, então $\overline{A}$ e $\mathrm{int}\,(A)$ são convexos;*

(PVT_5) *se B é balanceado, então $\overline{B}$ é balanceado;*

(PVT_6) *se B é balanceado e $0 \in \mathrm{int}\,(B)$, então $\mathrm{int}\,(B)$ é balanceado*[61]*;*

(PVT_7) *se B é linearmente limitado, então $\overline{B}$ também é.*

Demonstração. Os itens (PVT_1) e (PVT_2) são os correspondentes aditivos de ($\mathrm{PGT}_{\mathrm{i}}$) e ($\mathrm{PGT}_{\mathrm{ii}}$), respectivamente, ambos demonstrados na Proposição 5.1.20. Na mesma proposição, o item ($\mathrm{PGT}_{\mathrm{iii}}$) garante que se A *for* subespaço vetorial de E, então $\overline{A}$ *será* subgrupo aditivo de $(E, +, 0)$, de modo que para atestar (PVT_3)[62] basta verificar que se $v \in \overline{A}$ e $k \in \mathbb{K}$, então $kv \in \overline{A}$: como $v \in \overline{A}$, existe uma *net* $(v_d)_{d \in \mathbb{D}}$ em A com $v_d \to v$, donde a continuidade da multiplicação acarreta $kv_d \to kv$, com $kv_d \in A$ para todo $d \in \mathbb{D}$ e, consequentemente, $kv \in \overline{A}$.

Para (PVT_4), mostraremos, primeiramente, que $\overline{A}$ é convexo: como a multiplicação por escalares de $\mathbb{K}$ é contínua, segue que $k\overline{A} \subseteq \overline{kA}$ para qualquer $k \in \mathbb{K}$; em particular, se $t \in [0, 1]$, então

$$t\overline{A} + (1-t)\overline{A} \subseteq \overline{tA} + \overline{(1-t)A} \subseteq \overline{tA + (1-t)A} \subseteq \overline{A},$$

onde a segunda inclusão segue de (PVT_2). Para a segunda parte, note que para um escalar $t \in (0, 1)$, as multiplicações por t e $(1-t)$ são homeomorfismos, donde segue que $t\,\mathrm{int}\,(A)$ e $(1-t)\,\mathrm{int}\,(A)$ são abertos e, por conseguinte (Exercício 5.27), $t\,\mathrm{int}\,(A) + (1-t)\,\mathrm{int}\,(A)$ é um aberto. Daí, por valer $\mathrm{int}\,(A) \subseteq A$, resulta

$$t\,\mathrm{int}\,(A) + (1-t)\,\mathrm{int}\,(A) \subseteq tA + (1-t)A \subseteq A,$$

mostrando que $t\,\mathrm{int}\,(A) + (1-t)\,\mathrm{int}\,(A)$ é um aberto contido em A e, portanto, contido em $\mathrm{int}\,(A)$. Para $t \in \{0, 1\}$, basta notar que $t\,\mathrm{int}\,(A) + (1-t)\,\mathrm{int}\,(A) = \mathrm{int}\,(A)$.

As propriedades (PVT_5) e (PVT_6) se provam de maneira análoga – em particular, para a segunda, a exigência de $0 \in \mathrm{int}\,(B)$ se faz a fim de garantir que $0 \cdot \mathrm{int}\,(B) \subseteq \mathrm{int}\,(B)$. Finalmente, a propriedade (PVT_7) segue da regularidade de E (Corolário 5.2.9). De fato, para uma vizinhança U de 0, existe outra vizinhança V de 0 tal que $\overline{V} \subseteq U$, donde a hipótese de B ser linearmente limitado garante um $s > 0$ tal que $B \subseteq tV \subseteq t\overline{V}$ para todo $t > s$. Daí, por $t\overline{V}$ ser fechado, resulta $\overline{B} \subseteq t\overline{V} \subseteq tU$, como queríamos. $\square$

As propriedades acima, juntamente com as propriedades dos filtros de vizinhanças destacadas no começo da seção, serão a foice e o martelo de nossa luta diária para ~~derrubar o capitalismo~~ estabelecer os fundamentos da Análise Funcional, pelo menos neste primeiro momento. As verificações de outras propriedades menos urgentes serão sugeridas na distante subseção de exercícios.

[61]Note que, por definição, $0 \in B$ sempre que B é balanceado e não-vazio.

[62]A argumentação apresentada se aplica no caso de qualquer corpo topológico $\mathbb{K}$.

Dimensão vs. compacidade local

Vamos conhecer a primeira grande classe de e.v.t's desta subseção: os espaços vetoriais *localmente compactos*, que já devem ser familiares para o leitor que enfrentou a Subseção 3.3.1. Um e.v.t. E é chamado de **espaço vetorial localmente compacto** se o vetor nulo $0 \in E$ tem base local de vizinhanças compactas.

Exercício 5.44. Mostre que se E é um e.v.t. localmente compacto, então todo ponto de E tem uma base local de vizinhanças compactas. Dica: homogeneidade. ■

Convém recordar uma caracterização mais simples, válida para espaços de Hausdorff.

Proposição 5.2.16. *Um e.v.t. de Hausdorff E é localmente compacto se, e somente se, o vetor nulo $0 \in E$ tem pelo menos uma vizinhança compacta.*

Demonstração. Trata-se de um caso particular da Proposição 3.3.9. Para a comodidade do leitor, vejamos a prova mais uma vez, mas dentro do contexto vetorial. Se o vetor nulo 0 tem uma base local de vizinhanças compactas, então 0 tem uma vizinhança compacta. Reciprocamente, se $W \subseteq E$ é uma vizinhança compacta de 0, vamos obter uma base local de vizinhanças compactas para 0. Note que por E ser de Hausdorff e W ser compacto, resulta[63] que o último é um espaço T_3 e, consequentemente, 0 admite uma base local de vizinhanças fechadas em W, digamos $\mathcal{C}$. Mostraremos que tal família também é uma base local de vizinhanças compactas para 0 em E:

✓ como cada $C \in \mathcal{C}$ é fechado em W e este é compacto, resulta que C é compacto em W e, por conseguinte, compacto em E;

✓ dado um aberto $U \subseteq E$ com $0 \in U$, segue que $U \cap W$ é um aberto de W que contém 0, donde o fato de $\mathcal{C}$ ser uma base local de vizinhanças de 0 em W garante um $C \in \mathcal{C}$ com $0 \in C \subseteq U \cap W$;

✓ finalmente, cada $C \in \mathcal{C}$ é uma vizinhança de 0 em E, pois existe um aberto $A \subseteq E$ tal que $0 \in A \cap W \subseteq C$ e, consequentemente, $V := A \cap \operatorname{int}(W)$ é um aberto de E com $0 \in V \subseteq C \subseteq U$. □

Observação 5.2.17. Em breve, veremos que a compacidade local é uma condição muito restritiva: *os e.v.t. de Hausdorff localmente compactos são precisamente aqueles com dimensão finita*, no sentido de Hamel (Definição K.2.94). Na verdade, mostraremos que se E é localmente compacto, então E e $\mathbb{K}^n$ são topologicamente isomorfos, i.e., existe um isomorfismo topológico entre E e o espaço $\mathbb{K}^n$, para algum $n \in \omega$, onde $\mathbb{K}^n$ é dotado da topologia produto. Aliás, é conveniente destacar que $\mathbb{K}^n$ é, de fato, um e.v.t.. △

Exercício 5.45. Dado um conjunto $\mathcal{I}$, mostre que a topologia produto sobre $\mathbb{K}^{\mathcal{I}}$ é compatível com sua estrutura vetorial. ■

A observação anterior pode levar o leitor curioso a se indagar sobre a existência de e.v.t. compactos. Bem...

Exercício 5.46 (Compare com o Exemplo 1.2.87)**.** Mostre que um e.v.t. de Hausdorff cuja dimensão é 1 deve ser *homeomorfo* ao corpo topológico $\mathbb{K}$. Conclua que se E for um e.v.t. compacto de Hausdorff, então $E = \{0\}$. Dica: fixado $v \in E \setminus \{0\}$, mostre que $k \mapsto kv$ é um isomorfismo linear contínuo; para mostrar que a inversa também é contínua em $0 \in E$, use a hipótese de que E é de Hausdorff juntamente com o Exercício 5.68. ■

[63] Pode ser útil relembrar as implicações em (2.6), bem como as Proposições 2.1.29 e 2.1.36, na Subseção 2.1.3.

Observação 5.2.18 (Dica estendida)**.** Embora o resultado acima, adaptado de Bourbaki [21], pareça óbvio num contexto puramente linear, é um advento marcante que ele seja verdadeiro para espaços vetoriais topológicos. Em certo sentido, isto evidencia a profundidade dos axiomas para espaços vetoriais topológicos. Vale, portanto, *uma dica estendida*: para mostrar que a inversa de $k \mapsto kv$ é contínua, tome $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança balanceada $V \subseteq E$ de $0 \in E$ tal que $\varepsilon v \notin V$; note que se $\lambda v \in V$, então $\lambda \leq \varepsilon$. △

Uma instância da unicidade topológica mencionada na Observação 5.2.17 já foi explorada no Exercício 1.236: quaisquer duas normas sobre $\mathbb{K}^n$ determinam a mesma topologia. Desse modo, o leitor que enfrentou um bom curso de Álgebra Linear já sabe, secretamente, *tudo* o que há para saber sobre espaços vetoriais localmente compactos (de Hausdorff!), de modo que resta apenas demonstrar o resultado prometido.

Embora o ferramental *mínimo* para cumprir tais demandas já tenha sido apresentado no texto, a abordagem seria mais braçal e menos conceitual, o que não condiz com um texto que se propõe a abordar os *fundamentos*. Dito isso, seguiremos um roteiro alternativo e mais *algébrico*, como feito por Schaefer [103], que apesar de ser mais demorado, tem a vantagem de motivar resultados importantes sobre quocientes de espaços vetoriais topológicos. O leitor mais interessado no *destino* do que nos *amigos feitos durante a jornada* pode conferir o roteiro apresentado no Exercício 5.113.

Recordemo-nos de que se X é um espaço topológico e $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X, então $X/\sim$ admite uma topologia natural induzida pela projeção *canônica* $\pi \colon X \to X/\sim$ que faz $x \mapsto \overline{x}$ para cada $x \in X$. Explicitamente, um subconjunto $W \subseteq X/\sim$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}[W] \subseteq X$ é aberto.

Agora, fixado um e.v.t. E e um subespaço vetorial $S_0 \subseteq E$, existe um *complemento vetorial*[64] S_1 de S_0, i.e., um subespaço vetorial $S_1 \subseteq E$ tal que $E = S_0 \oplus S_1$. Explicitamente, isto significa que $S_0 \cap S_1 = \{0\}$ e para cada $v \in E$ existem únicos $v_0 \in S_0$ e $v_1 \in S_1$ tais que $v = v_0 + v_1$, o que permite considerar a *projeção* $\pi_j \colon E \to S_j$ que faz $\pi_j(v) := v_j$ para cada $j \in \{0, 1\}$. Como tais correspondências são lineares e sobrejetoras, segue da propriedade universal dos quocientes (de módulos) que os mapas

$$\begin{aligned} \overline{\pi_0} \colon {}^{E}/_{\ker \pi_0} &\to S_0 \\ \overline{v} &\mapsto v_0 \end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned} \overline{\pi_1} \colon {}^{E}/_{\ker \pi_1} &\to S_1 \\ \overline{v} &\mapsto v_1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais, com $\ker \pi_0 = S_1$ e $\ker \pi_1 = S_0$. O leitor atento deve notar que isso dá uma receita para obter um *complemento vetorial* de qualquer subespaço vetorial de E: a menos de isomorfismo, E/S_j é um complemento de S_j.

No entanto, não há garantias de que π_j seja contínua, e tampouco se estabeleceram condições para $E/\ker \pi_j$ ser de Hausdorff com a topologia quociente. Tratemos dessas questões, a começar pela última.

Teorema 5.2.19. *Sejam E um e.v.t. (não necessariamente Hausdorff) e $S \subseteq E$ um subespaço vetorial. Então a topologia quociente sobre E/S induzida pela projeção canônica $\pi \colon E \to E/S$ é compatível com a estrutura vetorial de E/S. Além disso, E/S é um espaço de Hausdorff se, e somente se, o subespaço S é fechado em E.*

Demonstração. O Teorema 5.1.23 já garante que a topologia quociente sobre E/S é compatível com sua estrutura de grupo, bem como o fato de que E/S é de Hausdorff se, e somente se, S é fechado em E. Resta apenas verificar que a operação $\mathbb{K} \times E/S \to E/S$ é contínua.

[64]Observação K.2.98.

Como no Teorema 5.1.23, basta mostrar que a correspondência $(k, v) \mapsto \overline{kv}$ determina uma função contínua $\psi \colon \mathbb{K} \times E \to E/S$: de fato, note que para a relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathbb{K} \times E$ dada por

$$(\alpha, u) \sim (\beta, v) \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ e } \overline{u} = \overline{v},$$

tem-se $\psi(\alpha, u) = \psi(\beta, v)$ sempre que $(\alpha, u) \sim (\beta, v)$, donde o Teorema 1.3.18 garante uma única função contínua $\overline{\psi} \colon (\mathbb{K} \times E)/{\sim} \to E/S$ tal que $\overline{\psi} \circ \pi = \psi$; o restante segue do Exercício 1.270. Finalmente, como tanto a multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$ quanto a projeção canônica $E \to E/S$ são contínuas, resulta que ψ é contínua, por ser a composição de ambas. □

Exercício 5.47 (Demonstração alternativa)**.** Sem usar o teorema anterior, prove que o filtro $\mathcal{N}_{\overline{0}}$ das vizinhanças de $\overline{0}$ em E/S munido da topologia quociente satisfaz as condições $(\mathrm{M_i})$, $(\mathrm{M_{ii}})$ e $(\mathrm{M_{iii}})$. Conclua que E/S é um espaço vetorial topológico. Dica: confira *a dica* do Exercício 5.11. ■

Voltemo-nos para o primeiro problema, sobre a continuidade das projeções em complementos vetoriais. Note que *se $E = S_0 \oplus S_1$, então a função $L \colon S_0 \times S_1 \to E$, que faz $(v_0, v_1) \mapsto v_0 + v_1$, é uma bijeção linear e contínua*:

- ✓ tanto a bijetividade quanto a linearidade seguem da definição de soma direta;
- ✓ a continuidade de L segue pois $L = \pi_0^E + \pi_1^E$, onde $\pi_j^E \colon S_0 \times S_1 \to E$ é a projeção $S_0 \times S_1 \to S_j$ composta com a inclusão $S_j \hookrightarrow E$, com ambas contínuas, para cada $j \in \{0, 1\}$.

Lema 5.2.20. *Nas condições acima, a função*

$$\begin{aligned} \pi_j \colon E &\to S_j \\ v &\mapsto v_j \end{aligned}$$

é aberta, onde $v_j \in S_j$ é o único tal que $v = v_0 + v_1$, com $v_0 \in S_0$ e $v_1 \in S_1$.

Demonstração. Se $V \subseteq E$ é um aberto, então

$$\pi_j[V] \coloneqq \{v_j : v \in V\} = (V + S_{1-j}) \cap S_j,$$

um aberto de S_j com a topologia de subespaço. □

Por outro lado, a continuidade de π_j, exatamente o que se busca, ocorre *quando L é um homeomorfismo*.

Exercício 5.48. Nas notações anteriores, mostre que se L é um homeomorfismo, então π_0 e π_1 são contínuas. Reciprocamente, mostre que basta garantir a continuidade de uma das projeções π_j a fim de concluir que L é um homeomorfismo. Dica: depois de se lembrar que $\mathrm{Id}_E = \pi_0 + \pi_1$, explicite a inversa $L^{-1} \colon E \to S_0 \times S_1$. ■

Definição 5.2.21. Diremos que o e.v.t. E é **soma direta topológica** dos subespaços S_0 e S_1 se a função $L \coloneqq S_0 \times S_1 \to E$ definida acima *for* um homeomorfismo, o que será abreviado por meio da expressão $E = S_0 \oplus_{\mathrm{Top}} S_1$. ¶

Lema 5.2.22. *Nas notações anteriores, ocorre $E = S_0 \oplus_{\mathrm{Top}} S_1$ se, e somente se, qualquer um dos mapas $\overline{\pi_0}$ e $\overline{\pi_1}$ definidos em (5.10) for um homeomorfismo.*

Demonstração. Primeiramente, note que para cada $j \in \{0,1\}$, a projeção $\pi_j\colon E \to S_j$ induzida pela soma direta $E = S_0 \oplus S_1$ se decompõe como a composição das funções

$$\begin{array}{rl} p_{1-j}\colon E \to {}^{E}/_{S_{1-j}} \\ v \mapsto \overline{v} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} \overline{\pi_j}\colon {}^{E}/_{S_{1-j}} \to S_j \\ \overline{v} \mapsto v_0 \end{array}$$

onde $p_{1-j}\colon E \to E/S_{1-j}$ é a projeção canônica do quociente, que é contínua. Além disso, vale a identidade $p_{1-j}\left[\pi_j^{-1}[V]\right] = \overline{\pi_j}^{-1}[V]$, para qualquer $V \subseteq S_j$.

Agora, se $E = S_0 \oplus_{\mathrm{Top}} S_1$, então $L\colon S_0 \times S_1 \to E$ é um homeomorfismo, donde o Exercício 5.48 garante que π_j é contínua para cada j. Logo, a bijeção linear $\overline{\pi_j}$ é:

- ✓ *contínua*, pois se $V \subseteq S_j$ é aberto, então $\pi_j^{-1}[V]$ é aberto (dado que π_j é contínua) e $p_{1-j}\left[\pi_j^{-1}[V]\right]$ é aberto (pois a projeção canônica é aberta, pelo Exercício 5.28), donde a continuidade segue da identidade anterior;

- ✓ *aberta*, pois se $W \subseteq E/S_{1-j}$ é aberto, então $p_{1-j}^{-1}[W] \subseteq E$ é aberto (pela continuidade da projeção canônica p_{1-j}), donde o Lema 5.2.20 assegura que π_j é aberta e, por conseguinte,
$$\pi_j\left[p_{1-j}^{-1}[W]\right] = (\overline{\pi_j} \circ p_{1-j})\left[p_{1-j}^{-1}[W]\right] = \overline{\pi_j}[W]$$

é aberto em S_j. Em vista da Proposição 1.1.111, segue que $\overline{\pi_j}$ é um homeomorfismo.

Reciprocamente, se $\overline{\pi_j}$ é um homeomorfismo para algum $j \in \{0,1\}$, então a decomposição $\pi_j = \overline{\pi_j} \circ p_{1-j}$ permite concluir que π_j é composta de funções contínuas, donde o resultado segue do Exercício 5.48. □

Exemplo 5.2.23. Para quaisquer $m, n \in \omega$ vale $\mathbb{K}^{m+n} = \mathbb{K}^m \oplus_{\mathrm{Top}} \mathbb{K}^n$. Embora isto seja óbvio em certo sentido[65], o leitor pode obter um isomorfismo topológico $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{m+n}$ por meio do lema anterior, ao notar que a correspondência

$$\overline{(k_1, \ldots, k_{m+n})} \mapsto (k_{m+1}, \ldots, k_{m+n})$$

se comporta, essencialmente, como a função identidade $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. ▲

A demonstração de que existe uma única topologia T_2 compatível com a estrutura topológica de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial E de dimensão finita será feita por indução na dimensão de E, com um roteiro quase simples:

- o Exercício 5.46 garante o primeiro passo da indução;
- se E tem dimensão $n+1$, então existem subespaços vetoriais $S_0, S_1 \subseteq E$ com $\dim_{\mathbb{K}} S_0 = n$, $\dim_{\mathbb{K}} S_1 = 1$ e $E = S_0 \oplus S_1$;
- pela hipótese de indução, S_0 e S_1 são homeomorfos a $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}$, respectivamente;
- *por meio de algum truque*, mostraremos que S_0 é fechado e, consequentemente, E/S_0 é um e.v.t. de Hausdorff cuja dimensão é 1;
- finalmente, a descrição explícita de um homeomorfismo entre E/S_0 e S_1 permitirá usar o Lema 5.2.22 para concluir $E = S_0 \oplus_{\mathrm{Top}} S_1$, que por sua vez é homeomorfo ao espaço $\mathbb{K}^{n+1}$ com a topologia produto.

[65] A correspondência $((k_1, \ldots, k_m), (k_{m+1}, \ldots, k_{m+n})) \mapsto (k_1, \ldots, k_{m+n})$ é, claramente, um isomorfismo topológico.

O truque mencionado no esboço acima é um caso particular da Proposição 4.2.10, cuja demonstração será reapresentada, para comodidade do leitor.

Lema 5.2.24. *Sejam E um e.v.t. de Hausdorff e $S \subseteq E$ um subespaço vetorial. Se existir uma norma $\|\cdot\|$ sobre S compatível com a sua topologia e cuja métrica induzida seja completa, então S é um subespaço fechado de E.*

Demonstração. Seja $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma *net* em S com $x_d \to x$ para algum $x \in E$. Vamos mostrar que $x \in S$. Como a *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é convergente, segue que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy em E com respeito à a uniformidade induzida por sua estrutura aditiva[66] e, consequentemente, é de Cauchy com respeito à uniformidade induzida sobre S (Proposição 4.2.5). Como a norma $\|\cdot\|$ é compatível com a topologia/uniformidade de S, resulta que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é de Cauchy com respeito à norma $\|\cdot\|$, donde a completude garante $y \in S$ com $x_d \to y$. Finalmente, como E é de Hausdorff, deve ocorrer $x = y$. □

Teorema 5.2.25. *Se E é um e.v.t. de Hausdorff cuja dimensão é $n \in \omega$, então E é topologicamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Mais precisamente, para cada base $\mathcal{B} := \{x_1, \ldots, x_n\}$ de E, o mapa $\mathbb{K}$-linear $\varphi^{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to E$ dado pela regra*

$$(k_1, \ldots, k_n) \mapsto k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre $n := \dim_{\mathbb{K}} E$. Note que o caso $n := 0$ é trivial, enquanto o caso $n := 1$ é o Exercício 5.46. Supondo a hipótese verdadeira para todo e.v.t. de Hausdorff cuja dimensão é $n > 1$, tomemos E com dimensão $n+1$ e consideremos $\mathcal{B} := \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ uma base para E. Agora, os subespaços vetoriais $S_0 := \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ e $\langle x_{n+1}\rangle$ se enquadram na hipótese indutiva, portanto: as correspondências

$$(k_1, \ldots, k_n) \mapsto k_1x_1 + \ldots + k_nx_n \quad \text{e} \quad k_{n+1} \mapsto k_{n+1}x_{n+1}$$

definem isomorfismos topológicos $f : \mathbb{K}^n \to S_0$ e $g : \mathbb{K} \to S_1$, respectivamente. Daí, por $\mathbb{K}^n$ ser um espaço métrico completo, o lema anterior garante que S_0 é fechado em E.

Assim, o espaço quociente E/S_0 é de Hausdorff e tem dimensão 1, sendo gerado, por exemplo, pela classe de equivalência do vetor x_{n+1}, digamos $\overline{x_{n+1}}$. Logo, como no Exercício 5.46, a correspondência $k \mapsto \overline{kx_{n+1}}$ define um homeomorfismo $\mathbb{K} \to E/S_0$. Com as notações do Lema 5.2.22, tal correspondência é, precisamente, o mapa $\overline{\pi_1}$ e, por conseguinte, o mapa

$$\begin{aligned} L : S_0 \times S_1 &\to E \\ (v_0, v_1) &\mapsto v_0 + v_1 \end{aligned}$$

é um isomorfismo topológico. Finalmente, note que $\varphi^{\mathcal{B}} = L \circ (f, g)$ e, portanto, é um homeomorfismo. □

Observação 5.2.26. Em geral, se E é um e.v.t. de Hausdorff cuja dimensão é um cardinal κ, finito ou infinito, então E é isomorfo (como espaço vetorial) a $\mathbb{K}^{\oplus\kappa} := \bigoplus_{\alpha<\kappa} \mathbb{K}$, explicitamente o conjunto das κ-uplas $(k_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in \mathbb{K}^\kappa$ tais que $\{\alpha < \kappa : k_\alpha \neq 0\}$ é finito. Como $\mathbb{K}^\kappa$ é um e.v.t. com a topologia produto, $\mathbb{K}^{\oplus\kappa}$ também é um e.v.t. com a topologia de subespaço. Então, por que a mesma argumentação do teorema anterior não permite mostrar que o isomorfismo entre E e $\mathbb{K}^{\oplus\kappa}$ é topológico?

[66] Pode ser útil rever a Subseção 5.1.1.

O problema aparece nos passos limites da indução, o que inexiste[67] na demonstração anterior. Se $\kappa := \omega$ e $\mathcal{B} := \{x_n : n \in \omega\}$ é uma base de E, não é uma tarefa trivial mostrar que o isomorfismo algébrico

$$\begin{aligned}\varphi_B \colon \mathbb{K}^{\oplus\omega} &\to E\\ (k_n)_{n\in\omega} &\mapsto \sum_{n\in\omega} k_n x_n\end{aligned}$$

é topológico. Ainda bem, já que, em geral, não há razões para ser[68].

Teorema 5.2.27 (Kwon[69])**.** *Se E é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com $\dim_{\mathbb{K}} E \geq \aleph_0$, então existem $2^{\dim_{\mathbb{K}} E}$ normas sobre E, duas a duas não equivalentes.*

Demonstração. Seja $\kappa := \dim_{\mathbb{K}} E$ e fixe $\mathcal{B} := \{x_{\alpha,n} : (\alpha, n) \in \kappa \times \omega\}$ uma base para E, que indexaremos pelo conjunto $\kappa \times \omega$ por pura conveniência, já que $|\kappa \times \omega| = \kappa$. Para cada subconjunto $A \subseteq \kappa$, definamos a função $\|\cdot\|_A \colon E \to \mathbb{R}$ fazendo

$$\left\| \sum_{(\alpha,n)\in\kappa\times\omega} a_{\alpha,n} x_{\alpha,n} \right\|_A := \sum_{(\alpha,n)\in A\times\omega} \frac{1}{2^n}|a_{\alpha,n}| + \sum_{(\alpha,n)\in(\kappa\setminus A)\times\omega} |a_{\alpha,n}|,$$

que determina uma norma em E, pelo Exercício 5.89.

Mostraremos que se $A, B \subseteq \kappa$ são subconjuntos distintos, então as normas $\|\cdot\|_A$ e $\|\cdot\|_B$ não induzem a mesma topologia. De fato, note que se $\alpha \in A \setminus B$, então

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_{\alpha,n}\|_A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \|x_{\alpha,n}\|_B = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

mostrando que há *pelo menos* $|\wp(\kappa)| = 2^\kappa$ normas duas a duas não equivalentes sobre E.

A fim de obter a outra desigualdade, usaremos o Exercício 5.90, que afirma, secretamente, o seguinte: se $\|\cdot\|$ é uma norma sobre E, então existe um subconjunto denso $\mathcal{D} \subseteq E$ com $|\mathcal{D}| \leq \aleph_0 \cdot \dim_{\mathbb{K}} E$. Daí, por $\|\cdot\| \colon (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ ser contínua, $\|\cdot\|$ fica completamente determinada pela sua restrição em $\mathcal{D}$ (em virtude do distante Exercício 1.181). Logo, há no máximo $|\mathbb{R}^{\mathcal{D}}|$ normas em E, e

$$\left|\mathbb{R}^{\mathcal{D}}\right| = \left|2^{\aleph_0}\right|^{|\mathcal{D}|} = 2^{\aleph_0\cdot\mathcal{D}} \leq 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\dim_{\mathbb{K}} E} = 2^{\dim_{\mathbb{K}} E}$$

como queríamos. $\square$

Voltaremos a discutir normas no contexto dos *espaços localmente convexos.* $\triangle$

Ao comparar o resultado principal da observação acima com o conteúdo do Teorema 5.2.25, fica claro o quão selvagens os e.v.t. infinito-dimensionais podem se tornar. Entre outras coisas, isso justifica a adoção de técnicas diferentes das utilizadas nos contextos euclidianos, que exploraremos depois de discutirmos o último resultado referente à dimensão finita.

Em virtude da caracterização dos subconjuntos compactos de $\mathbb{K}^n$, vista repetidas vezes ao longo deste texto[70], o Teorema 5.2.25 diz que todo e.v.t. de Hausdorff cuja dimensão é finita deve ser localmente compacto. Independentemente da opinião que o leitor possa ter sobre essa variação da compacidade, é fácil aceitar que a propriedade algébrica mais marcante de um espaço vetorial influencie suas topologias. O *curioso* é que a compacidade local também influencia, de maneira fulminante, a dimensão algébrica.

[67] A rigor, 0 é cardinal limite. Mas convenhamos, né?

[68] Confira também o Exercício 5.115.

[69] Embora o resultado possa ser folclórico, eu o conheci no artigo de Miyeon Kwon [67].

[70] A primeira delas foi no Corolário 1.2.105.

Teorema 5.2.28 (Riesz-Weil)**.** *Se E é um e.v.t. de Hausdorff e localmente compacto, então* $\dim_{\mathbb{K}} E < \aleph_0$.

A demonstração que veremos para este belíssimo resultado, adaptada de Rudin [99], se alicerça sobre duas observações curiosamente intuitivas, bem como sobre um corolário bastante razoável.

Lema 5.2.29. *Sejam E um e.v.t., $V \subseteq E$ uma vizinhança de $0 \in E$ e $(r_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de números reais maiores do que zero.*

(i) *se $(r_n)_{n\in\omega}$ é ilimitada, então $E = \bigcup_{n\in\omega} r_n V$.*

(ii) *se $(r_n)_{n\in\omega}$ é tal que $r_n \to 0$ e V é linearmente limitado, então $\{r_n V : n \in \omega\}$ é base local de vizinhanças para 0.*

Demonstração. Para o item (i), note que para $x \in E$ fixado, a multiplicação $k \to kx$ é contínua em 0, donde segue que existe um aberto $W \subseteq \mathbb{K}$ com $0 \in W$ tal que $wx \in V$ para todo $w \in W$. Em particular, por $(r_n)_{n\in\omega}$ ser ilimitada, existe $N \in \omega$ tal que $\frac{1}{r_N} \in W$, acarretando $\frac{1}{r_N} x \in V$ ou, equivalentemente, $x \in r_N V$, como afirmado.

Para o segundo item, dada uma vizinhança U de $0 \in E$, o fato de V ser linearmente limitado assegura um $s > 0$ tal que $V \subseteq tU$ para todo $t > s$. Em particular, como $r_n \to 0$, existe $n \in \omega$ tal que $r_n < \frac{1}{s}$ e, consequentemente, $\frac{1}{r_n} > s$, acarretando $V \subseteq \frac{1}{r_n} U$ ou, equivalentemente, $r_n V \subseteq U$, como desejado. □

Corolário 5.2.30. *Se K é um subconjunto compacto de um e.v.t. E, então K é linearmente limitado.*

Demonstração. Segue do primeiro item no lema anterior. Dada uma vizinhança U de $0 \in E$, deve-se obter $s > 0$ tal que $K \subseteq tU$ para todo $t > s$. Antes de fazer isso, porém, vamos tomar $V \subseteq U$ uma vizinhança de $0 \in E$ balanceada: isto é possível pois, como a multiplicação é contínua em $(0, 0) \in \mathbb{K} \times E$, existem um $\delta > 0$ e uma vizinhança W de $0 \in E$ tais que $\alpha W \subseteq U$ sempre que $|\alpha| < \delta$, de modo que basta tomar $V := \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha W$, que é uma vizinhança balanceada de $0 \in E$ com $V \subseteq U$ (confira também o Exercício 5.68).

Agora, com tal V fixado, o lema anterior garante $E = \bigcup_{n\in\omega} nV$, donde a compacidade de K conjura um subconjunto finito $F \subsetneq \omega$ tal que $K \subseteq FV$. Enfim, por V ser balanceado, note que se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ satisfazem $|\alpha| < |\beta|$, então $\alpha V \subseteq \beta V$ (Exercício 5.70), donde segue que basta tomar $s := \max F$. Os detalhes ficam sob a responsabilidade do leitor. □

Demonstração do Teorema 5.2.28. A hipótese dá um subconjunto compacto $K \subseteq E$ que é vizinhança de $0 \in E$. Como a família $\left\{x + \frac{1}{2}K : x \in E\right\}$ é uma cobertura por vizinhanças para E, a compacidade de K garante um subconjunto finito $F \subseteq E$ satisfazendo a inclusão $K \subseteq F + \frac{1}{2}K$. Em particular, o subespaço $Y := \langle F \rangle$ tem dimensão $r \leq |F| < \aleph_0$, donde segue que Y é homeomorfo a $\mathbb{K}^r$ e, pelo Lema 5.2.24, é um subespaço fechado de E (e aqui a condição de Hausdorff é usada com força). Mostraremos que $E = Y$.

Primeiramente, a inclusão $F \subseteq Y$ acarreta $K \subseteq Y + \frac{1}{2}K$. Agora, como Y é um subespaço vetorial, tem-se $Y + \lambda Y = Y$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, donde segue que a ocorrência de uma inclusão do tipo $K \subseteq Y + \lambda K$ para algum $\lambda \neq 0$ implica em

$$K \subseteq Y + \frac{1}{2}K \subseteq Y + \frac{1}{2}(Y + \lambda K) = Y + \frac{1}{2}Y + \frac{\lambda}{2}K = Y + \frac{\lambda}{2}K.$$

Ao se repetir recursivamente o argumento acima para $\lambda := \frac{1}{2^n}$ com $n \in \omega$, conclui-se que $K \subseteq \bigcap_{n\in\omega} Y + \frac{1}{2^n}K$.

O *Katzensprung* da demonstração vem agora: por K ser compacto, o último corolário diz que K é linearmente limitado, o que permite usar o segundo item do lema anterior para concluir que a família $\left\{\frac{1}{2^n}K : n \in \omega\right\}$ é base local para $0 \in E$; ao se aliar tal informação com a última inclusão, segue do item (PVT$_1$) da Proposição 5.2.15 que $K \subseteq \overline{Y} = Y$ e, consequentemente, $\lambda K \subseteq Y$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$; finalmente, tal inclusão aliada ao item (i) do último lema resulta $E = \bigcup_{n\in\omega} nK \subseteq Y$, como queríamos. $\square$

Observação 5.2.31. O clássico **Lema de Riesz** trata de um certo tipo de estimativa que sempre pode ser realizada em espaços normados e, a princípio, *nada* tem a ver com limitações dimensionais.

Lema 5.2.32 (de Riesz)**.** *Se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e $S \subseteq E$ é um subespaço vetorial com $\overline{S} \neq E$, então para todo $\alpha \in (0,1)$ existe $x \in E$ com $\|x\| = 1$ e $\|s - x\| \geq \alpha$ para todo $s \in S$.*

Demonstração. Tome $x_0 \in E \setminus \overline{S}$ e chame $R := \inf_{s\in S} \|s - x_0\|$. Note que pelo distante Lema 2.1.39 deve-se ter $R > 0$. Agora, fixado qualquer[71] $x_1 \in S$ satisfazendo a desigualdade $\|x_0 - x_1\| \leq \frac{R}{\alpha}$, basta fazer $x := \frac{1}{\|x_0 - x_1\|}(x_0 - x_1)$. O leitor interessado pode completar os detalhes. $\square$

Ocorre que *se o espaço E no Lema de Riesz tem dimensão infinita*, pode-se mostrar que a *bola unitária fechada* $B_{\|\cdot\|}[0,1] := \{v \in E : \|v\| \leq 1\}$ *não é compacta*: fixado $\alpha := \frac{1}{2}$, o Lema de Riesz permite tomar uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ com $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \omega$ e tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ para quaisquer $m, n \in \omega$, mostrando que $(x_n)_{n\in\omega}$ não admite subsequências convergentes. Logo, $B_{\|\cdot\|}[0,1]$ não é sequencialmente compacto ou, equivalentemente, $B_{\|\cdot\|}[0,1]$ não é compacto, em virtude do Corolário 3.2.50 (que caracteriza compacidade em espaços metrizáveis). Consequentemente, $0 \in E$ não tem vizinhanças compactas.

Talvez por isso seja comum creditar a Frigyes Riesz o resultado provado no Teorema 5.2.28, como feito por Brézis [22], por exemplo. Por outro lado, Terence Tao menciona[72] que a primeira demonstração para o teorema supracitado da qual Ele tem notícia é devida a André Weil [114]. Na dúvida, ambos foram creditados. $\triangle$

Funcionais lineares, convexidade e o Teorema de Hahn-Banach

Definição 5.2.33. Para um espaço vetorial E, costuma-se dizer que um mapa linear da forma $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ é um **funcional linear**. ¶

Dado o contexto topológico, é natural *querer* funcionais lineares *contínuos*. Nesse sentido, uma consequência indireta do Exercício 5.46 se dá no seguinte

Teorema 5.2.34. *Seja E um e.v.t. (não necessariamente Hausdorff)*[73]*. Um funcional linear $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ é contínuo se, e somente se, $\ker\varphi$ é um subespaço fechado de E.*

[71] Algum certamente existe, pois $R < \frac{R}{\alpha}$ e R é o ínfimo de tais números.

[72] https://terrytao.wordpress.com/2011/05/24/locally-compact-topological-vector-spaces/.

[73] Ao longo desta subsubseção a condição de Hausdorff não será usada, exceto por menções explícitas.

Demonstração. Nesta altura da vida, é provável que a única afirmação não-trivial contida no enunciado seja a implicação "*se* $\ker\varphi$ *é um subconjunto fechado e próprio de* E, *então* φ *é contínuo*". Por isso, a investigação de pré-imagens de fechados, que dá conta da direção fácil, será deixada a cargo do leitor.

Por $\ker\varphi$ ser um subespaço vetorial fechado de E, o Teorema 5.2.19 diz que $E/\ker\varphi$ é um e.v.t. de Hausdorff. O que talvez não salte aos olhos seja o fato de que $\dim_{\mathbb{K}} E/\ker\varphi = 1$: isto segue pois $E/\ker\varphi$ e $\operatorname{im}(\varphi) = \mathbb{K}$ são espaços vetoriais isomorfos, em virtude da propriedade universal do quociente. Em particular, o isomorfismo de espaços vetoriais $\overline{\varphi}\colon E/\ker\varphi \to \mathbb{K}$ dado por $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \varphi(v)$ é contínuo: se $w \in E\setminus\ker\varphi$, então $\{\overline{w}\}$ é base para $E/\ker\varphi$, e daí $\overline{\varphi}$ é a inversa do homeomorfismo $k \mapsto k\overline{w}$ (Exercício 5.46). Finalmente, como a projeção do quociente $\pi\colon E \to E/\ker\varphi$ é contínua e satisfaz $\varphi = \overline{\varphi}\circ\pi$, o resultado desejado segue. □

Corolário 5.2.35. *Sejam* E *um e.v.t. de Hausdorff e* $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ *um funcional linear. Se* $\dim_{\mathbb{K}} E < \aleph_0$, *então* φ *é contínuo.*

Demonstração. Deve-se ter $\dim_{\mathbb{K}}\ker\varphi < \aleph_0$, donde o resultado segue do teorema anterior em virtude do Exercício 5.105. □

Os dois últimos resultados inócuos são apenas a ponta de um *iceberg* gigantesco que espreita sob a superfície ilusoriamente calma dos funcionais lineares. Mesmo a pergunta mais imediata que nos vemos obrigados a fazer, sobre a recíproca do último corolário, tangencia problemas profundos: seria a vida boa o bastante para garantir a continuidade de *todos* os funcionais lineares, mesmo para e.v.t. com dimensão infinita?

Exemplo 5.2.36. *Se a topologia de um e.v.t.* E *tem caráter enumerável e* $\dim_{\mathbb{K}} E \geq \aleph_0$, *então existe um funcional linear* $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ *que não é contínuo.*

De fato, sejam $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \omega\}$ uma base local de vizinhanças em $0 \in E$ e $\mathcal{X} := \{x_n : n \in \omega\} \subseteq E$ um subconjunto l.i. infinito enumerável. Supondo que $\mathcal{V}$ é decrescente e fixando $n \in \omega$, a continuidade da multiplicação $k \mapsto kx_n$ permite tomar $t_n \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ tal que $t_n x_n \in V_n$, donde segue que $t_n x_n \to 0$. Considerando uma base (de Hamel) $\mathcal{B}$ que contém $\mathcal{X}$, pode-se definir um funcional linear $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ declarando $\varphi(x_n) := \frac{1}{t_n}$ e $\varphi(b) := 0$ se $b \in \mathcal{B}\setminus\mathcal{X}$. Logo, $\varphi(t_n x_n) \to 1$ com $t_n x_n \to 0$, mostrando que φ não é contínua em $0 \in E$. Esta é a parte que faltava na demonstração do

Teorema 5.2.37. *Um e.v.t. de Hausdorff* E *com caráter enumerável tem dimensão finita se, e somente se, todo funcional linear* $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ *é contínuo.*

Embora seja tentador conjecturar que o resultado acima deva valer sobre todo o reino dos e.v.t., um truque muito simples, adaptado de [11], permite cozinhar contraexemplos de maneira quase elementar: fixado um espaço vetorial E, considera-se sobre E a topologia fraca induzida pela família de *todos* os funcionais lineares sobre E, o que faz de E um e.v.t.. Mais precisamente, considera-se $\mathcal{T}$ a menor topologia sobre E tal que $\varphi\colon (E,\mathcal{T}) \to \mathbb{K}$ é contínuo para todo funcional linear φ definido em E. Tal topologia torna contínuas tanto a soma quanto a multiplicação por escalar.

- ✓ Se $((x_d, y_d))_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em $E \times E$ com $(x_d, y_d) \to (x, y)$, deve-se mostrar que $x_d - y_d \to x - y$. Ora, pelo Exercício 1.241, a última convergência ocorre se, e somente se, $\varphi(x_d - y_d) \to \varphi(x - y)$ para todo funcional linear φ definido em E. Daí, por ocorrer $x_d \to x$ e $y_d \to y$ em E, o modo como se definiu $\mathcal{T}$ assegura $\varphi(x_d) \to \varphi(x)$ e $\varphi(y_d) \to \varphi(y)$, donde o restante segue por $\mathbb{K}$ ser grupo topológico com a soma.

✓ Analogamente, se $((k_d, x_d))_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em $\mathbb{K} \times E$ tal que $(k_d, x_d) \to (k, x)$, mostra-se que $k_d x_d \to kx$.

✓ Como um brinde, $(E, \mathcal{T})$ é um espaço de Hausdorff, pois se $x \in \overline{\{0\}}$, então existe uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $\{0\}$ com $x_d \to x$: por um lado, isto ocorre se, e somente se, valer $\varphi(x_d) \to \varphi(x)$ em $\mathbb{K}$ para todo funcional φ; por outro lado, $x_d = 0$ para todo $d \in \mathbb{D}$, donde segue que $\varphi(x) = 0$ para todo funcional φ definido sobre E e, consequentemente[74], $x = 0$.

Assim, $(E, \mathcal{T})$ é um e.v.t. (de Hausdorff!) em que todo funcional linear é contínuo. Como a dimensão de E foi irrelevante para a construção, segue que existem e.v.t's com dimensão infinita nos quais todo funcional linear é contínuo. Porém, em virtude do teorema acima, tais espaços não têm caráter enumerável. ▲

Observação 5.2.38. Na próxima subsubseção, veremos que a condição de caráter enumerável, na verdade, se traduz em pseudometrizabilidade (ou metrizabilidade, no caso Hausdorff). Logo, o último teorema é verdadeiro na vasta classe dos e.v.t. metrizáveis. △

Portanto, como o leitor pessimista suspeitava, a vida não é boa, no sentido de que são amplas as possibilidade de nos depararmos com funcionais lineares descontínuos. Isso justifica a definição adicional do chamado *espaço dual topológico*, em contraponto ao *espaço dual algébrico*, definido no *Kindergarten*.

Recordemo-nos de que na distante página 87, o *dual algébrico* de um espaço vetorial[75] X foi denotado por $X^* := \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(X, \mathbb{K})$, explicitamente a coleção de todas as funções lineares da forma $X \to \mathbb{K}$.

Definição 5.2.39. No caso em que E é um e.v.t., seu **dual topológico** será definido como o subconjunto $E^\star := \{\varphi \in E^* : \varphi \text{ é contínuo}\}$. ¶

Naturalmente, se $\varphi, \psi \in E^\star$, então $\alpha\varphi + \beta\psi \in E^\star$ para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tal observação, aliada ao fato de que a função nula $\underline{0}: E \to \mathbb{K}$ é linear e contínua, garante que $E^\star$ é, na verdade, um subespaço vetorial de E^* e, por conseguinte, é ele próprio um espaço vetorial legítimo. A primeira questão natural que se coloca então é saber se existe algum $\varphi \in E^\star \setminus \{\underline{0}\}$.

Exemplo 5.2.40. Se X é um espaço vetorial não-trivial, então a topologia codiscreta sobre X, i.e., aquela em que apenas $\emptyset$ e X são declarados abertos, faz de X um e.v.t. não-Hausdorff (por quê?!). Em particular, as únicas funções contínuas da forma $X \to \mathbb{K}$ são constantes. Logo, se $\varphi \in X^\star$, então $\varphi = \underline{0}$, posto que $\varphi(0) = 0$. O leitor interessado em espaços *patológicos* desse tipo deve procurar pelos chamados *espaços* L^p, com $0 < p < 1$, o que pode ser feito em [43, 99], por exemplo. ▲

Casos como o do exemplo acima são extremos. Na verdade, veremos ao longo desta subseção que a não-trivialidade do dual topológico pode ser garantida numa *gigantesca* classe de e.v.t's. Inclusive, já conhecemos um pedaço dessa classe: em virtude do Teorema 5.2.37, espaços normados com dimensão finita maior do que zero possuem duais topológicos idênticos aos seus respectivos duais algébricos e, consequentemente, não-triviais pelo Exercício K.60. No entanto, como conhecer tal classe em sua vastidão completa?

[74] Se $v \in E$ é um vetor não-nulo, então existe uma base de Hamel $\mathcal{B}$ para E com $v \in \mathcal{B}$, donde é fácil obter um funcional $\varphi: E \to \mathbb{K}$ que não se anula em v.

[75] *Bastidores*: quando o corpo algébrico em questão não é dotado de uma topologia, costumo escrevê-lo com letras simples, como k, K, F, L, etc.; se o corpo algébrico estiver dotado de uma topologia/ordem compatível com as operações, prefiro escrevê-lo com letras de traçado duplo, como $\mathbb{K}$, $\mathbb{F}$, etc.

Um modo um tanto malandro consiste em supor a existência de um funcional linear contínuo e não-nulo $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$, para daí investigar possíveis consequências sobre o espaço E. Com sorte, tais consequências podem também implicar a existência de funcionais contínuos, o que levaria a uma caracterização desses espaços. Há outro modo, mais artesanal e, num primeiro momento, menos ambicioso, que consiste em partir de um contexto no qual o resultado já seja conhecido, para daí estendê-lo, *um passo de cada vez* – ou, no caso, *uma dimensão de cada vez*.

Mais precisamente, assumindo a existência de um *funcional* contínuo e não-nulo $\varphi\colon M \to \mathbb{K}$, onde M é subespaço próprio de E, vamos obter *uma* extensão de φ, digamos, $\Phi\colon E \to \mathbb{K}$, linear e contínua. Em linhas gerais, este é o *Teorema de Hahn-Banach*, que será usado para dar cabo da investigação proposta.

No lema a seguir (o *passo indutivo* do Teorema de Hahn-Banach), uma função $s\colon X \to \mathbb{R}$ será chamada de **sublinear** se $s(x+y) \leq s(x) + s(y)$ e $s(\alpha x) = \alpha s(x)$ para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$.

Lema 5.2.41. *Sejam X um $\mathbb{R}$-espaço vetorial*[76]*, $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial próprio e $s\colon X \to \mathbb{R}$ uma função sublinear. Se $z \in X \setminus M$ e $\varphi \in M^*$ satisfaz $\varphi(y) \leq s(y)$ para todo $y \in M$, então existe $\Phi \in N^*$ tal que $\Phi|_M = \varphi$ e $\Phi(x) \leq s(x)$ para todo $x \in N := M \oplus \langle z \rangle$.*

Demonstração. Pela definição do subespaço N, para cada $x \in N$ existem únicos $\alpha_x \in \mathbb{R}$ e $y_x \in M$ tais que $x = y_x + \alpha_x z$, donde segue que um funcional linear $N \to \mathbb{R}$ capaz de estender φ deve ser dado pela regra $x \mapsto \varphi(y_x) + \alpha_x c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Tudo o que resta fazer é escolher um escalar c apropriado. Observe que para $u, v \in M$ quaisquer deve-se ter

$$\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(u+v) \leq s(u+v) = s(u-z+z-v) \leq s(u-z) + s(z+v),$$

donde segue que $\varphi(u) - s(u-z) \leq s(z+v) - \varphi(v)$. Ao fixar $v := v_0 \in M$ na última desigualdade, segue que o conjunto $A := \{\varphi(u) - s(u-z) : u \in M\}$ deve ser limitado superiormente pelo número $s(z+v_0) - \varphi(v_0)$, acarretando em $r := \sup A \leq s(z+v_0) - \varphi(v_0)$. De modo inteiramente análogo, mostra-se que $\varphi(u_0) - s(u_0 - z) \leq \inf B := R$ para qualquer $u_0 \in M$ fixado, onde $B := \{s(z+v) - \varphi(v) : v \in M\}$. Fica a cargo do leitor observar que $r \leq R$ e, se $c \in [r, R]$, então

$$\begin{aligned} \Phi_c\colon N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(y_x) + \alpha_x c \end{aligned} \tag{5.11}$$

tem as propriedades desejadas. □

Teorema 5.2.42 (Hahn-Banach – cru)**.** *Sejam X um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $s\colon X \to \mathbb{R}$ uma função sublinear e $M \subsetneq X$ um subespaço próprio. Se $\varphi \in M^*$ satisfaz $\varphi(y) \leq s(y)$ para todo $y \in M$, então existe $\Phi \in X^*$ com $\Phi|_M = \varphi$ e $\Phi(x) \leq s(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. A ideia da demonstração é quase ingênua: estender φ para o subespaço $N_0 := M \oplus \langle z_0 \rangle$, onde $z_0 \in X \setminus M$ é algum vetor que não pertence a M; se N_0 ainda for um subespaço próprio, repete-se o processo para N_1, N_2, e assim, recursivamente, até que não seja mais possível encontrar vetores que não pertençam a N_α, para algum ordinal α, o que só pode significar $N_\alpha = X$. O lema anterior garante o fôlego para dar cada passo, enquanto o Axioma da Escolha e a Recursão Transfinita cuidam do resto. Porém, é muito mais fácil varrer a sujeira para debaixo do tapete e apelar para o Lema de Zorn.

[76] Sem qualquer topologia considerada.

Para cada par (N, ψ), onde $N \subseteq X$ é um subespaço vetorial e $\psi \colon N \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, diremos que (N, ψ) é *maroto* se $M \subseteq N$, $\psi|_M = \varphi$ e $\psi(x) \leq s(x)$ para todo $x \in N$. Daí, consideremos a família $\mathbb{P} := \{(N, \psi) : (N, \psi) \text{ é maroto}\}$, parcialmente ordenada pela relação $\preceq$ onde $(N_0, \psi_0) \preceq (N_1, \psi_1)$ se, e somente se, $N_0 \subseteq N_1$ e $\psi_1|_{N_0} = \psi_0$.

Note que $(M, \varphi) \in \mathbb{P}$, mostrando que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ e se $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ *for* uma cadeia, então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathbb{P}$ limita superiormente todos os pares $(N, \psi) \in \mathcal{C}$. Logo, o Lema de Zorn garante um par $(P, \Phi) \in \mathbb{P}$ maximal com respeito à relação $\preceq$. Resta apenas mostrar que $P = X$: ora, se não fosse este o caso, então o lema anterior daria $(P', \Phi_c) \in \mathbb{P}$ com $(P, \Phi) \prec (P', \Phi_c)$, contrariando a maximalidade do par maroto (P, Φ). □

A extensão do resultado acima para $\mathbb{C}$-espaços vetoriais requer que as funções sublineares sejam substituídas por ~~pseudonormas~~ *seminormas*: uma função $s \colon X \to \mathbb{R}$ é uma **seminorma** se s satisfaz tudo o que uma *norma*[77] satisfaz, exceto pela condição "$s(v) = 0 \Rightarrow v = 0$".

Corolário 5.2.43 (Hahn-Bana$\mathbb{K}$h – cru)**.** *Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $s \colon X \to \mathbb{R}$ uma seminorma e $M \subsetneq X$ um subespaço próprio. Se $\varphi \in M^*$ satisfaz $|\varphi(y)| \leq s(y)$ para todo $y \in M$, então existe $\Phi \in X^*$ com $\Phi|_M = \varphi$ e $|\Phi(x)| \leq s(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Se $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, então o resultado segue automaticamente do último teorema, pois aqui s é uma seminorma e não apenas uma função sublinear. Já para $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, o truque consiste em usar o teorema anterior com a *parte real* de φ, $\mathrm{r}\,\varphi \colon X \to \mathbb{R}$, que associa cada $x \in X$ ao número real $\mathrm{r}(\varphi(x)) \in \mathbb{R}$, em que $\mathrm{r}(a + bi) := a$ para cada par $a, b \in \mathbb{R}$ de números reais. Por simplicidade, vamos denotar $\mathrm{r}\,\varphi$ por ψ.

Como a seminorma s é, em particular, uma função sublinear e ψ é tal que $\psi(y) \leq s(y)$ para todo $y \in M$, o teorema anterior garante um funcional $\mathbb{R}$-linear $\Psi \colon E \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\Psi|_M = \psi$ e $\Psi(x) \leq s(x)$ para todo $x \in X$. Mostraremos, por fim, que $\Phi \colon X \to \mathbb{C}$, dado pela regra $x \mapsto \Psi(x) - i\Psi(ix)$, é um funcional $\mathbb{C}$-linear com as propriedades desejadas. É (realmente) fácil ver que Φ é $\mathbb{C}$-linear e estende φ. A desigualdade imposta, por sua vez, segue de um truque sujo: para $x \in X$ com $\Phi(x) \neq 0$, tem-se

$$|\Phi(x)| = \frac{\Phi(x)}{\Phi(x)} \cdot |\Phi(x)| = \Phi\left(\frac{|\Phi(x)|}{\Phi(x)} \cdot x\right) := \Psi\left(\frac{|\Phi(x)|}{\Phi(x)} \cdot x\right) - i\Psi\left(i \cdot \frac{|\Phi(x)|}{\Phi(x)} \cdot x\right) =$$
$$= \Psi\left(\frac{|\Phi(x)|}{\Phi(x)} \cdot x\right) \leq s\left(\frac{|\Phi(x)|}{\Phi(x)} \cdot x\right) = \left|\frac{|\Phi(x)|}{\Phi(x)}\right| s(x) = s(x),$$

onde $\Psi\left(i \cdot \frac{|\Phi(x)|}{\Phi(x)} \cdot x\right) = 0$ pois $|\Phi(x)| \in \mathbb{R}$. □

Do modo como foi exposto, o Teorema de Hahn-Banach parece mais um resultado de Álgebra Linear avançada do que de Análise, já que não há qualquer menção à continuidade sobre os funcionais considerados. Ocorre que as seminormas, implicitamente, traduzem a continuidade em contextos vetoriais, no seguinte sentido:

Teorema 5.2.44 (Dominância = continuidade)**.** *Seja E um e.v.t.. Um funcional linear $\varphi \colon E \to \mathbb{K}$ é contínuo se, e somente se, existe uma seminorma contínua $s \colon E \to \mathbb{R}$ tal que $|\varphi(x)| \leq s(x)$ para todo $x \in E$.*

[77] Exercício 1.228.

Demonstração. Se φ é contínuo, então $|\varphi| := |\cdot| \circ \varphi$ é uma seminorma (Exercício 5.80), contínua por ser composta de funções contínuas, e daí basta tomar $s := |\varphi|$. Para a recíproca, note que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma *net* em E com $x_d \to 0$, então a seminorma contínua s dada pela hipótese satisfaz $s(x_d) \to 0$, donde é fácil inferir que $\varphi(x_d) \to 0$ uma vez que $0 \leq |\varphi(x_d)| \leq s(x_d)$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Logo, φ é contínuo em 0 e, portanto, é contínuo. □

Observação 5.2.45. O último teorema remete a um fato tipicamente provado em cursos introdutórios de Análise Funcional: a caracterização da continuidade de um operador linear $T: V \to W$ entre os espaços (semi) normados V e W por meio da limitação de T, no sentido de que existe $M > 0$ com $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in V$. Secretamente, é a continuidade da seminorma $x \mapsto M\|x\|$ que faz a coisa toda funcionar[78]. △

Ainda não temos ferramentas para usar o Teorema de Hahn-Banach no processo de extensão contínua: em virtude do último teorema, um funcional linear contínuo $\varphi: M \to \mathbb{K}$ é limitado por uma seminorma $s: M \to \mathbb{R}$; porém, para aplicar Hahn-Banach, precisaríamos de uma seminorma contínua S definida em E que limitasse φ, pois daí sua extensão ainda seria limitada por S e, por conseguinte, seria contínua. É no processo de resolver tal problema que *surgem* os *espaços localmente convexos*.

Tal qual normas induzem métricas e topologias em espaços vetoriais, seminormas induzem pseudométricas e topologias em espaços vetoriais. Mas não só isso. Se X é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $s: X \to \mathbb{R}$ é uma seminorma, então o subconjunto

$$B_s := \{x \in X : s(x) < 1\}$$

é *convexo*: de fato, para $t \in [0, 1]$ e $u, v \in B_s$ tem-se

$$s(tu + (1-t)v) \leq ts(u) + (1-t)s(v) < t + 1 - t = 1,$$

mostrando que $tB_s + (1-t)B_s \subseteq B_s$. Em particular, se X for munido da topologia induzida por s, obtém-se aí uma vizinhança convexa de 0, já que B_s é, além de tudo, aberto na topologia induzida pela seminorma.

Definição 5.2.46. Um e.v.t. E é **localmente convexo** se o vetor nulo $0 \in E$ admitir uma base local de vizinhanças convexas. ¶

Embora, no caso acima, tenha se mostrado apenas que o vetor nulo de um espaço seminormado (X, s) tem *uma* vizinhança convexa, pode-se dilatá-la e contraí-la arbitrariamente de modo a se obter uma base local. Mais geralmente, como a interseção finita de abertos convexos é um aberto convexo, segue que o mesmo resultado vale para e.v.t's cuja topologia é induzida por um *calibre* de seminormas[79].

Proposição 5.2.47. *Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\mathcal{G}$ uma família de seminormas definidas em X. Se $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ denota a topologia induzida pelo calibre $\mathcal{G}$, então $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ é um e.v.t. localmente convexo.*

[78] Embora se aplique apenas a funcionais lineares, o Teorema 5.2.44 pode ser estendido para mapas lineares da forma $X \to Y$, desde que Y seja um espaço *localmente convexo*: o leitor interessado pode conferir o Exercício 5.94.

[79] No sentido do Exemplo 1.1.58: a menor topologia que torna *abertas* as *bolas abertas* com respeito às pseudométricas. Esta *não é* a menor topologia que torna as pseudométricas contínuas: o Exercício 5.82 pode ajudar a perceber isso.

Demonstração. Por definição, $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ é a menor topologia que torna a inclusão $X \hookrightarrow (X, \|\cdot\|)$ contínua para cada seminorma $\|\cdot\| \in \mathcal{G}$. Tal topologia é compatível com a estrutura algébrica de X pois a topologia de cada um dos espaços $(X, \|\cdot\|)$ é compatível com a estrutura algébrica de X. Por exemplo, a fim de mostrar que $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ torna $(X, +, 0)$ num grupo topológico com a adição, deve-se tomar uma *net* $(x_d, y_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em $X \times X$ tal que $(x_d, y_d) \to (x, y)$ para certos $x, y \in X$ a fim de concluir que $x_d - y_d \to x - y$: em virtude do Exercício 1.241, isso consiste em mostrar que $x_d - y_d \to x - y$ em $(X, \|\cdot\|)$ para cada seminorma $\|\cdot\|$ de $\mathcal{G}$, o que de fato ocorre pois $(X, \|\cdot\|)$ é e.v.t. (Exercício 5.79) e $(x_d, y_d) \to (x, y)$ em $(X, \|\cdot\|) \times (X, \|\cdot\|)$. O leitor pode verificar os detalhes[80].

A convexidade local segue do Exercício 5.72 aliada à observação de que $B_{\|\cdot\|}(0, r)$ é um aberto convexo para cada seminorma $\|\cdot\| \in \mathcal{G}$ e $r > 0$. De fato, como

$$\mathcal{B} := \{B_D(x, r) : D \in [\mathcal{G}]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\}, x \in X \text{ e } r > 0\}$$

é base para a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$, onde $B_D(x, r) := \bigcap_{\|\cdot\|\in D} B_{\|\cdot\|}(x, r)$, segue que a família $\mathcal{B}_0 := \{B_D(0, r) : D \in [\mathcal{G}]^{<\aleph_0} \setminus \{\emptyset\} \text{ e } r > 0\}$ é base local em 0, cujos abertos são interseções de conjuntos convexos e, portanto, também são convexos. $\square$

Assim, calibres de seminormas induzem topologias vetoriais localmente convexas. Um fato marcante sobre tais espaços é que a recíproca, surpreendentemente, é verdadeira:

Teorema 5.2.48. *Se E é um e.v.t. localmente convexo, então existe um calibre $\mathcal{S}$ de seminormas sobre E que induz sua topologia.*

A parte mais delicada na demonstração do teorema acima será mostrar que existe ao menos uma seminorma contínua, pelo simples fato de que iremos cozinhar uma *a partir do nada*, ou quase isso: usaremos um tipo especial de vizinhança convexa para exibir uma seminorma contínua[81] sobre E. Depois que isso for feito, o resultado se reduzirá a considerar $\mathcal{S}$ como a família de todas as seminormas contínuas sobre E e verificar que $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ é a topologia de E.

Definição 5.2.49. Diremos que um subconjunto $D \subseteq E$ é um **disco** se as seguintes condições acerca de D forem satisfeitas:

- ✓ D é convexo;
- ✓ D é balanceado; e
- ✓ D é **expansível**[82] **em torno de** 0, i.e., para qualquer $x \in E$ existe $\beta > 0$ tal que $\alpha x \in D$ para todo α com $|\alpha| \leq \beta$. ¶

Se $D \subseteq E$ é um disco, então para qualquer $x \in E$ existe $r > 0$ tal que $x \in rD$: de fato, por D ser expansível em torno de 0, existe $\beta > 0$ tal que $\alpha x \in D$ sempre que $|\alpha| \leq \beta$, donde segue que basta tomar $r := \beta^{-1}$. Logo, o conjunto $S_x := \{r > 0 : x \in rD\}$ é não-vazio e limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, o que assegura a existência do número real $\|x\|_D := \inf S_x$.

Definição 5.2.50. Nas condições acima, a função $\|\cdot\|_D : E \to \mathbb{R}$ será chamada de **seminorma de Minkowski**. ¶

[80] E pode também preferir já resolver o problema no caso geral, como no Exercício 5.81.
[81] Similar ao que se faz na prova do Teorema 4.1.56.
[82] Também chamado de "*absorbent*" ou "*absorbing*" em referências estrangeiras, como [11].

Teorema 5.2.51 (Minkowski)**.** *Como o nome sugere, a seminorma de Minkowski é uma seminorma em E. Além disso, $\|\cdot\|_D$ é contínua*[83] *se, e somente se, D é uma vizinhança de $0 \in E$.*

Demonstração. Vejamos, primeiramente, que $\|\cdot\|_D$ é uma seminorma. Por construção, $\|x\|_D \geq 0$ ocorre para todo $x \in E$, e daí resta verificar a ocorrência de

$$\|x+y\|_D \leq \|x\|_D + \|y\|_D \quad \text{e} \quad \|\lambda x\|_D = |\lambda|\|x\|_D$$

para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Note que se $r, s > 0$ são tais que $r \in S_x$ e $s \in S_y$, então $x \in rD$ e $y \in sD$, acarretando $x + y \in rD + sD = (r+s)D$, onde a última igualdade se deve à convexidade de D (Exercício 5.77). Logo, $r + s \in S_{x+y}$, mostrando que $S_x + S_y \subseteq S_{x+y}$ e, consequentemente,

$$\|x+y\|_D := \inf S_{x+y} \leq r + s \leq \inf S_x + \inf S_y = \|x\|_D + \|y\|_D.$$

Para a outra igualdade, tomemos $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Observe que para $r > 0$, $\lambda x \in rD$ se, e somente se, $x \in \frac{r}{\lambda}D$. Agora, por D ser balanceado e $r > 0$, o Exercício 5.71 diz que $\frac{r}{\lambda}D = \frac{r}{|\lambda|}D$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_D &:= \inf\{r > 0 : \lambda x \in rD\} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|}\inf\left\{r > 0 : x \in \frac{r}{\lambda}D\right\} = \\ &= |\lambda| \inf\left\{\frac{r}{|\lambda|} > 0 : x \in \frac{r}{|\lambda|}D\right\} = |\lambda|\inf\{\gamma > 0 : x \in \gamma D\} = |\lambda|\|x\|_D\end{aligned}$$

como desejado.

Voltemo-nos para a continuidade de $\|\cdot\|_D$. Por um lado, se $\|\cdot\|_D$ é contínua, então a pré-imagem do intervalo aberto $(-1, 1) \subsetneq \mathbb{R}$ é um aberto em torno de $0 \in E$: a saber, é a bola aberta $B_{\|\cdot\|_D} := \{x \in E : \|x\|_D < 1\}$. Note que se $\|x\|_D := \alpha < 1$, então 1 não pode ser limitante inferior de S_x, donde segue que existe $\beta \in [\alpha, 1)$ tal que $x \in \beta D$, mas $\beta D \subseteq D$ por D ser balanceado (Exercício 5.70). Logo, $B_{\|\cdot\|_D} \subseteq D$, mostrando que D é vizinhança de 0.

Por outro lado, se D é uma vizinhança de 0, então $\overline{B}_{\|\cdot\|_D} := \{x \in E : \|x\|_D \leq 1\}$ é uma vizinhança de 0, pois $D \subseteq \overline{B}_{\|\cdot\|_D}$, uma vez que se $x \in D$, então $1 \in S_x$ e daí $\|x\|_D \leq 1$. Agora, se $(v_d)_{d \in \mathbb{D}}$ é uma *net* em E com $v_d \to v$ para algum $v \in E$, então $\|v_d\|_D \to \|v\|_D$: fixado $\varepsilon > 0$, a correspondência $x \mapsto \varepsilon x + v$ é um homeomorfismo da forma $E \to E$, donde segue que $U := \varepsilon\overline{B}_{\|\cdot\|_D} + v$ é uma vizinhança $v \in E$, o que traz um $d' \in \mathbb{D}$ com $v_d \in U$ para todo $d \geq d'$. Logo, se $d \geq d'$, então existe $u \in \overline{B}_{\|\cdot\|_D}$ tal que $v_d = \varepsilon u + v$, acarretando

$$|\|v_d\|_D - \|v\|_D| \leq \|v_d - v\|_D = \|\varepsilon u\|_D \leq \varepsilon,$$

mostrando que $\|v_d\|_D \to \|v\|_D$, como queríamos. $\square$

Demonstração do Teorema 5.2.48. Seja $\mathcal{S}$ a família das seminormas contínuas definidas em E. Usaremos o teorema anterior para mostrar que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, o que exige a cocção de um disco que contenha $0 \in E$ em seu *interior*. Como diria Jack...

✓ Por E ser localmente convexo, existe um aberto convexo $V \subseteq E$ com $0 \in V$.

[83] Com respeito à topologia nativa de E. Não faria sentido se perguntar sobre a continuidade de $\|\cdot\|_D$ com respeito à topologia induzida por ela própria, já que isso ocorre trivialmente.

✓ Como todo e.v.t. admite uma base local de vizinhanças balanceadas (Exercício 5.68), existe um aberto balanceado $U \subseteq V$ com $0 \in U$.

✓ Daí, por V ser convexo, tem-se $\operatorname{conv}(U) \subseteq V$, onde $\operatorname{conv}(U)$ denota a **envoltória convexa de** U, definida como o menor subconjunto convexo de E que contém U. Equivalentemente[84], como sugerido no Exercício 5.74, mostra-se que

$$\operatorname{conv}(U) = \left\{ \sum_{j\leq n} \lambda_j u_j : n \in \omega, u_0, \ldots, u_n \in U \text{ e } \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in [0,1] \text{ com } \sum_{j\leq n} \lambda_j = 1 \right\},$$

caracterização que permite mostrar que $\operatorname{conv}(U)$ é aberto e balanceado (confira também os Exercícios 5.75 e 5.76):

- $\operatorname{conv}(U)$ é balanceado pois, para $x \in \operatorname{conv}(U)$, existem escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ com $\sum_{j\leq n} \lambda_j = 1$ e vetores $u_0, \ldots, u_n \in U$ satisfazendo $x = \sum_{j\leq n} \lambda_j u_j$; logo, se $\alpha \in \mathbb{K}$ é tal que $|\alpha| \leq 1$, então $\alpha u_j \in U$ por U ser balanceado, e daí

$$\alpha x = \sum_{j\leq n} \lambda_j \alpha u_j \in \operatorname{conv}(U);$$

- $\operatorname{conv}(U)$ é aberto pois, se $x \in \operatorname{conv}(U)$, então $x \in \sum_{j\leq n} \lambda_j U$ para certos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tais que $\sum_{j\leq n} \lambda_j = 1$; como a multiplicação $v \mapsto \lambda_j v$ é um homeomorfismo para cada $\lambda_j \neq 0$, segue que $\sum_{j\leq n} \lambda_j U$ é um aberto (contido em $\operatorname{conv}(U)$ em virtude da descrição dada no Exercício 5.74).

✓ Finalmente, $\operatorname{conv}(U)$ é um aberto convexo, balanceado e *expansível* em torno de $0 \in E$: esta última parte segue pela continuidade da multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$, por meio da qual prova-se que *qualquer* vizinhança de 0 é expansível[85].

Chamemos por $\mathcal{V}$ o filtro de vizinhanças de 0 na topologia *original* de E e por $\mathcal{N}$ o filtro de vizinhanças de 0 na topologia induzida por $\mathcal{S}$; se mostrarmos que $\mathcal{N} = \mathcal{V}$, seguirá do Teorema 5.2.8 que as duas topologias são idênticas. Fixada uma seminorma contínua $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$, as bolas $B_{\|\cdot\|}(0,r)$ são abertas na topologia de E precisamente por estas serem as pré-imagens de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ pela seminorma. Logo, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$. Por outro lado, se $V \in \mathcal{V}$, então a argumentação anterior mostra que existe um disco aberto $U \subseteq V$ com $0 \in U$. Logo, pelo Teorema 5.2.51, $\|\cdot\|_U \colon E \to \mathbb{R}$ é uma seminorma contínua, com $B_{\|\cdot\|_U} \subseteq U \subseteq V$. Enfim, como $B_{\|\cdot\|_U}$ é aberto na topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, conclui-se que $V \in \mathcal{N}$ e, portanto, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$, como queríamos. □

Exercício 5.49. Nas condições acima, mostre que $\mathcal{S}' := \{\|\cdot\|_D : D \subseteq E \text{ é disco aberto}\}$ induz a topologia de E como calibre de seminormas. ■

Observação 5.2.52. A dificuldade na demonstração do surpreendente resultado acima tem a ver com a profundidade do que se estabelece: uma conexão entre noções geométricas (convexidade) e *analíticas* (seminormas) de um e.v.t.. Em certo sentido, isso é análogo ao Teorema de Tietze-Urysohn (Corolário 2.2.29), que cozinha extensões contínuas de funções a partir de propriedades de separação do espaço. △

[84] Alternativamente, $\operatorname{conv}(U)$ é a interseção de todos os subconjuntos convexos de E que contêm U. Isto faz sentido pois o próprio E é convexo e contém U. Note que a envoltória convexa $\operatorname{conv}(U)$ é convexa em virtude do Exercício 5.72.

[85] A pré-imagem de uma vizinhança de 0 deve ser aberta em $\mathbb{K} \times E$ e, para todo $x \in E$, deve-se ter $(0,x)$ pertencente a tal pré-imagem (Exercício 5.67).

Corolário 5.2.53 (Extensão de Hahn-Banach – para espaços localmente convexos)**.** *Sejam E um espaço localmente convexo e $M \subsetneq E$ um subespaço próprio. Se $\varphi \in M^\star$, então existe $\Phi \in E^\star$ tal que $\Phi|_M = \varphi$.*

Demonstração.[86] Por $\varphi\colon M \to \mathbb{K}$ ser contínuo, o subconjunto $V := \{x \in M : |\varphi(x)| \leq 1\}$ é uma vizinhança de 0 em M. Logo, existe um aberto $U \subseteq E$ com $0 \in U$ e $U \cap M \subseteq V$. Agora, como na demonstração do Teorema 5.2.48, pode-se supor que U é um disco aberto, de modo que a seminorma de Minkowski $\|\cdot\|_U\colon E \to \mathbb{R}$ é contínua e tal que $|\varphi(x)| \leq \|x\|_U$ para todo $x \in M$: se $r > 0$ e $u \in U$ são tais que $x = ru$, então $u \in U \cap M \subseteq V$ e assim $|\varphi(x)| = r|\varphi(u)| \leq r$, acarretando $|\varphi(x)| \leq \inf\{r > 0 : x \in rU\} := \|x\|_U$.

Isso nos coloca nas hipóteses do Teorema de Hahn-Bana𝕂h (Corolário 5.2.43), que conjura um funcional linear $\Phi\colon E \to \mathbb{K}$ satisfazendo $\Phi|_M = \varphi$ e $|\Phi(x)| \leq \|x\|_U$ para todo $x \in E$, o que significa dizer que Φ é contínuo, em virtude do Teorema 5.2.44. □

Apesar do tortuoso desvio feito para abordar convexidade local, a pergunta que motivou toda a atual discussão depende apenas da seminorma de Minkowski e do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 5.2.54. *Seja E um e.v.t.. O dual topológico $E^\star$ é não-trivial se, e somente se, $0 \in E$ tem pelo menos uma vizinhança convexa diferente de E.*

Demonstração. Se $\varphi \in E^\star$ e $\varphi \neq 0$, então $V := \{x \in E : |\varphi(x)| \leq 1\}$ é uma vizinhança convexa de 0 com $V \neq E$: V é uma vizinhança de 0 pois contém a pré-imagem (aberta) da bola $B_{|\cdot|}(0,1) \subsetneq \mathbb{K}$; V é convexa pois, se $|\varphi(x)|, |\varphi(y)| \leq 1$ e $t \in [0,1]$, então

$$|t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)| \leq t + 1 - t = 1;$$

finalmente, $V \neq E$ pois existe x com $\varphi(x) \neq 0$, donde segue que para $r \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$ com $r := \frac{2}{|\varphi(x)|}$ ocorre $|\varphi(rx)| = |r||\varphi(x)| = 2 > 1$, e daí $rx \notin V$. A parte delicada é a recíproca.

Se $V \subsetneq E$ é uma vizinhança convexa de $0 \in E$, pode-se tomar um disco aberto $D \subseteq V$ com $0 \in E$ seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 5.2.48. Logo, pelo Teorema 5.2.51, $\|\cdot\|_D\colon E \to \mathbb{R}$ é uma seminorma (contínua!) e, por ocorrer $D \neq E$, existe $w \in E$ com $\|w\|_D > 0$: lembre-se de que se $x \in E$ satisfaz $\|x\|_D < 1$, então $x \in D$, donde segue que qualquer $w \in E \setminus D$ deve ser tal que $\|w\|_D \geq 1$. Agora, para $M := \langle w \rangle$ e $\psi\colon M \to \mathbb{K}$ o funcional dado por $\psi(\lambda w) := \lambda\|w\|_D$, note que

- ✓ ψ é funcional linear, e
- ✓ $|\psi(\lambda w)| \leq \|\lambda w\|_D$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

donde o Teorema de Hahn-Bana𝕂h (Corolário 5.2.43) garante a existência de um funcional linear $\Psi\colon E \to \mathbb{K}$ com $\Psi(w) = \|w\|_D \neq 0$ e $|\Psi(x)| \leq \|x\|_D$ para todo $x \in E$. A continuidade de Ψ segue, finalmente, do Teorema 5.2.44. □

Corolário 5.2.55. *Se E é localmente convexo <u>e de Hausdorff</u>, então $E^\star \neq \{0\}$.*

Num curso usual de Análise Funcional, a rota provável seria aprofundar o estudo de algumas consequências de HB, principalmente no estudo dos *duais* topológicos. Uma parte desse roteiro será seguida na próxima subseção; outra parte será sugerida ao longo dos exercícios da seção.

[86] Se não fosse pela sugestão de Fabíola Loterio, esta demonstração estaria tão (ou mais) confusa quanto a apresentada por Beckenstein e Narici [11].

Observação 5.2.56. Acima, provamos que todo espaço localmente convexo tem a *propriedade da extensão de Hahn-Banach*, no sentido de que todo funcional linear contínuo definido num subespaço se estende a um funcional linear contínuo cujo domínio é o próprio espaço. Nesse sentido, vale frisar que a recíproca é falsa: há espaços com tal propriedade de extensão, mas cujas topologias não são localmente convexas. O leitor interessado numa discussão mais elaborada pode conferir o texto de Beckenstein e Narici [11], que fundamentou boa parte desta subsubseção. △

Observação 5.2.57 (Comentários adicionais)**.** Embora o Teorema de Hahn-Banach (**HB**) tenha sido apresentado como *um meio para um fim*, ele constitui um interessante objeto de estudo por si só, pelo menos da perspectiva dos Fundamentos da Matemática. A fim de quebrar o gelo, considere o seguinte questionamento natural: se $\varphi\colon M \to \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo dado por alguma *regra explícita*, qual seria a descrição *explícita* de uma extensão linear contínua $\Phi\colon E \to \mathbb{K}$?

A resposta geral para a pergunta é modesta: *não há como descrever*. De fato, o funcional Φ foi obtido como *um* elemento maximal de uma ordem parcial, por meio do Lema de Zorn, ou seja: é mais um objeto *mágico*[87] cuja existência é garantida axiomaticamente – mas cuja descrição escapa ou, nas palavras traduzidas de Schechter [104], é *intangível*.

Nesse sentido, a asserção expressa em HB pode ser tratada como uma variação do Axioma da Escolha. Na verdade, é possível demonstrar HB a partir do Lema do Ultrafiltro e, mais ainda, prova-se que em ZF não é possível obter o último com a adição de HB como um axioma. Naturalmente, tais resultados fogem do escopo deste texto[88].

Além disso, há formulações equivalentes de HB que se adequam melhor a outros tipos de contextos ou problemas. Por exemplo, como mencionado na Observação 5.2.52, no reino dos espaços localmente convexos, HB serve como uma especialização do Teorema de Extensão de Tietze-Urysohn (Corolário 2.2.29) no reino dos espaços T_4. Isso pode levar o leitor a se perguntar sobre a existência de análogos vetoriais para o Lema de Urysohn, que trata sobre a separação de abertos por meio de funções contínuas.

Tais análogos existem, de fato, e costumam ser chamados de *formas geométricas* do Teorema de Hahn-Banach[89]. O leitor interessado em tais variações pode conferir o cuidadoso *Topological Vector Spaces* [11], de Beckenstein e Narici – ou o já exaustivamente citado HAF [104], onde mais de vinte versões equivalentes de HB são apresentadas.

Por último, e menos importante, o leitor familiarizado com o *Paradoxo de Banach-Tarski* talvez se interesse em saber que não se precisa de toda a força do Axioma da Escolha para obtê-lo: o Teorema de Hahn-Banach já basta para garantir a decomposição *polêmica* de uma esfera de $\mathbb{R}^3$ em dois subconjuntos disjuntos que, rearranjados, resultam em duas novas esferas com o mesmo volume da original. O livro de Schechter [104] discute tal resultado (sem provas), onde o leitor interessado encontrará referências para uma abordagem mais técnica sobre o assunto. △

[87]Como a *função escolha*, a *classe de representantes*, a *boa ordenação* e tantas outras *entidades* presentes nas encarnações do Axioma da Escolha: existem e pronto.

[88]O leitor interessado pode encontrar referências e discussões complementares no HAF [104] ou ainda no livro [54] de Howard e Rubin, devotado exclusivamente ao Axioma da Escolha e suas consequências.

[89]Embora o primeiro resultado dessa natureza tenha sido provado por S. Mazur. A terminologia “forma geométrica” foi popularizada por Bourbaki, de acordo com [11].

Métrica e limitação

Em contextos introdutórios de Análise Funcional, é comum que as únicas (pseudo) métricas consideradas sejam aquelas induzidas por (semi) normas. Porém, isto não é uma regra, dado que métricas e normas têm *naturezas* distintas. De fato, se $\|\cdot\|$ é uma (semi) norma sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial E, então a (pseudo) métrica $d\colon E\times E\to[0,+\infty)$ definida por $d(x,y):=\|x-y\|$ satisfaz as duas condições a seguir.

Definição 5.2.58. Diremos que uma métrica d num $\mathbb{K}$-espaço vetorial E é:

(i) **invariante por translações** se $d(x+z,y+z)=d(x,y)$ para quaisquer $x,y,z\in E$;

(ii) **compatível com produtos** se $d(rx,ry)=|r|d(x,y)$ para quaisquer $r\in\mathbb{K}$ e $x,y\in E$. ¶

Consequentemente, uma métrica sem qualquer uma das propriedades acima não pode ser induzida por uma norma. É o caso, por exemplo, da métrica ρ em $\mathbb{R}$ que faz

$$\rho(x,y):=\frac{|x-y|}{|x-y|+1},$$

compatível com a topologia usual de $\mathbb{R}$ e sua estrutura aditiva, mas incompatível com produtos no sentido acima. Naturalmente, se $d\colon E\times E\to[0,+\infty)$ é uma (pseudo) métrica invariante por translações e compatível com produtos, então a regra $x\mapsto d(x,0)$ define uma (semi) norma cuja (pseudo) métrica induzida é, precisamente d.

Exercício 5.50. Convença-se de que as afirmações acima são verdadeiras. ■

Isso suscita algumas perguntas naturais:

(i) quando a topologia de um e.v.t. é (pseudo) metrizável?

(ii) quando a topologia de um e.v.t. é **(semi) normável**[90]?

A primeira pergunta já foi respondida algumas vezes ao longo deste e do último capítulo por meio da noção de *entourages*: como todo e.v.t. é um grupo topológico e esses são espaços uniformes, tudo segue do Teorema 4.1.56 que caracteriza as uniformidades pseudometrizáveis. Para facilitar possíveis referências, vale destacar isso no

Corolário 5.2.59 (da Proposição 5.1.31)**.** *Um e.v.t. E é pseudometrizável se, e somente se, $0\in E$ tem base enumerável, i.e., se E tem caráter enumerável.*

Exercício 5.51. Mostre que um e.v.t. E é metrizável se, e somente se, E tem caráter enumerável e $\{0\}$ é fechado em E. ■

A resposta para a segunda pergunta é apenas um pouco mais delicada, mas não muito. Recordemo-nos de que no começo desta seção, mostramos que a existência de *uma* vizinhança compacta em e.v.t's de Hausdorff implica a existência de um isomorfismo topológico com $\mathbb{K}^n$ para algum $n\in\mathbb{N}$. Em particular, como $\mathbb{K}^n$ é normado, é natural conjecturar que algum enfraquecimento de compacidade possa estar envolvido numa caracterização *topológica* de (semi) normabilidade. Nesse sentido, a sugestão foi implicitamente dada pelo Corolário 5.2.30.

[90] No sentido de ser induzida pela (pseudo) métrica definida por uma (semi) norma. Em tempo, note que a outra expressão possível, "normalizável", poderia passar a ideia de *normalidade topológica* (T_4+T_1), que a princípio nada tem a ver com normas – embora toda topologia induzida por uma seminorma seja, necessariamente, T_4.

Teorema 5.2.60. *A topologia de um e.v.t. E é induzida por uma seminorma se, e somente se, $0 \in E$ tem uma vizinhança convexa e linearmente limitada.*

Demonstração. Se $\|\cdot\|$ é uma seminorma que induz a topologia de E, então a bola aberta $V := \{x \in E : \|x\| < 1\}$ é uma vizinhança convexa e linearmente limitada: se $U \subseteq E$ é um vizinhança do vetor 0, então existe $r > 0$ com $\{x \in E : \|x\| < r\} \subseteq U$, donde segue que $V \subseteq tU$ para todo $t > \frac{1}{r}$.

Reciprocamente, se $B \subseteq E$ é uma vizinhança convexa e linearmente limitada do vetor $0 \in E$, então existe um aberto balanceado que contém 0, digamos $D' \subseteq B$ (Exercício 5.68), cuja envoltória convexa $D := \operatorname{conv}(D') \subseteq B$ ainda é aberta e balanceada (Exercícios 5.75 e 5.76). Portanto, $D \subseteq B$ é um disco aberto que contém 0. Mostraremos que a topologia $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_D}$ induzida pela seminorma $\|\cdot\|_D$ é a topologia de E, onde $\|\cdot\|_D$ é a seminorma de Minkowski associada ao disco D, contínua em virtude de D ser aberto.

A continuidade da seminorma garante que toda bola aberta induzida por ela pertence à topologia nativa de E. Por outro lado, dada uma vizinhança $V \subseteq E$ de $0 \in E$, o fato de B ser linearmente limitado dá $s > 0$ tal que $B \subseteq tV$ para todo $t > s$, donde segue que

$$C := \left\{x \in E : \|x\|_D < \frac{1}{t}\right\} \subseteq V,$$

posto que $\{x \in E : \|x\|_D < 1\} \subseteq D \subseteq B$. Como C é uma bola aberta induzida pela seminorma $\|\cdot\|_D$, resulta que $V \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_D}$, como desejado. □

Exercício 5.52. Convença-se de que um e.v.t. é normável se, e somente se, é seminormável e de Hausdorff. ■

Exercício 5.53. Mostre que se um e.v.t. E tem *uma* vizinhança linearmente limitada, então E é pseudometrizável. ■

Observação 5.2.61 (Limitação métrica vs. limitação linear)**.** Como a noção de limitação linear requer apenas estrutura vetorial e topológica, é imediato que a limitação do contexto métrico deve ser diferente. Por um lado, a limitação linear *implica* a limitação métrica, no seguinte sentido: *se E é um e.v.t. pseudometrizável e $L \subseteq E$ é linearmente limitado, então L é limitado nas pseudométricas compatíveis com a estrutura de grupo topológico de E.*

Para provar isso, é conveniente revisar a construção da Pseudométrica de Weil (Teorema 4.1.52) no atual contexto algébrico, a fim de obter uma pseudométrica *compatível com a estrutura de grupo*, i.e., *invariante por translações*.

Teorema 5.2.62. *Seja $(G, +, 0)$ um grupo topológico abeliano*[91]*. Se G tem caráter enumerável, então existe uma pseudométrica d invariante por translações e compatível com a topologia de E.*

Demonstração. Ao utilizar as *entourages* induzidas pelas vizinhanças de 0 (Subseção 5.1.1) na construção da pseudométrica de Weil (Teorema 4.1.52), a função f correspondente *deverá* satisfazer $f(x, y) = f(x + z, y + z)$ para quaisquer $x, y, z \in G$, donde segue que a pseudométrica d obtida a partir de f satisfaz a identidade análoga. □

Exercício 5.54. Complete a demonstração anterior. ■

Corolário 5.2.63. *Se E é um e.v.t. pseudometrizável, então existe uma pseudométrica invariante por translações que induz a topologia de E.*

[91] Em particular, um e.v.t..

Agora, seja E um e.v.t. pseudometrizável e considere d uma pseudométrica compatível com sua topologia e invariante por translações. Note que a invariância por translações implica uma *desigualdade triangular aditiva* no primeiro parâmetro, no seguinte sentido: *se* $x, y \in E$*, então* $d(x+y,0) \leq d(x+y,y)+d(y,0) = d(x,0)+d(y,0)$. Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$ deve valer $n \cdot B_d(0,1) \subseteq B_d(0,n)$. Desse modo, se $L \subseteq E$ *for* linearmente limitado, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L \subseteq n \cdot B_d(0,1) \subseteq B_d(0,n)$, mostrando que L *é* limitado (no sentido da pseudométrica d).

A recíproca, porém, não é verdadeira. De certa forma, é justamente essa sutileza que separa as topologias (pseudo) metrizáveis das topologias (semi) normáveis. Nesse sentido, os espaços da forma $\mathcal{C}_p(X)$, com X um espaço de Tychonoff, ajudam a ilustrar bem as diferenças. $\triangle$

Exemplo 5.2.64. Em vista do Exercício 1.166 e da Proposição 2.2.13, $\mathcal{C}_p(X)$ é metrizável[92] se, e somente se, $|X| \leq \aleph_0$. Caso tenha-se $|X| < \aleph_0$, então $\mathcal{C}_p(X) = \mathbb{R}^{|X|}$ e, portanto, é normável. Por outro lado, se $|X| = \aleph_0$, então $\mathcal{C}_p(X)$ não tem vizinhanças linearmente limitadas, mesmo tendo vizinhanças limitadas com respeito às métricas que induzem sua topologia.

Com efeito, um aberto básico da função nula $\underline{0}$ é da forma

$$V := \langle F, r\rangle[\underline{0}] := \{f \in \mathcal{C}_p(X) : \forall x \in F \quad |f(x)| < r\},$$

para algum subconjunto finito $F \subsetneq X$ e $r > 0$. Agora, note que por X ser infinito, existe $y \in X \setminus F$, de modo que a vizinhança $U := \langle\{y\}, 1\rangle[\underline{0}]$ atesta que V não é linearmente limitado: ora, como X é de Tychonoff, para qualquer $s > 0$ existe uma função contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(y) = s$, acarretando $f \in V \setminus sU$.

Em tempo, note que a argumentação acima prova apenas que a topologia de $\mathcal{C}_p(X)$, com $|X| = \aleph_0$, não é normável. Isto não inviabiliza a existência de normas sobre $\mathcal{C}(X)$, mas tão somente estabelece que nenhuma delas induz a (topologia da) convergência pontual. ▲

Observação 5.2.65 (Limitação em seminormas)**.** Feitas as ressalvas da observação anterior, convém destacar que, no contexto das (pseudo) métricas induzidas por (semi) normas, os dois tipos de limitação coincidem. Por um lado, já vimos que a limitação linear implica a limitação usual. Reciprocamente, se $\|\cdot\|$ é uma (semi) norma em X e $L \subseteq X$ é limitado com respeito à (pseudo) métrica $d(x,y) := \|x-y\|$, então existe $M > 0$ tal que $\|x-y\| \leq M$ para quaisquer $x, y \in L$, donde segue $L \subseteq tB_d(0,r)$ para quaisquer $r > 0$, $t > \frac{M+\|y\|}{r}$ e $y \in L$. $\triangle$

Diante das revelações anteriores, o analista atento certamente notou o seguinte: e.v.t's são dotados de uma uniformidade natural induzida por sua estrutura algébrica aditiva, o que permite discutir *nets* (preferencialmente, sequências!) de Cauchy e, por conseguinte, completude. Mais precisamente, uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ num e.v.t. E é de Cauchy se para toda vizinhança $V \subseteq E$ do vetor nulo $0 \in E$ existir $d' \in \mathbb{D}$ tal que $x_d - x_e \in V$ sempre que $d, e \geq d'$, explicitamente a tradução do critério de Cauchy para *nets* em espaços uniformes com relação à uniformidade induzida pela estrutura de grupo de E (em caso de dúvidas, confira a Seção 4.2 e a Subseção 5.1.1). Por extensão, um e.v.t. E é **completo** se for completo enquanto grupo topológico.

Teorema 5.2.66. *Se E é um e.v.t. de Hausdorff, então existe um e.v.t. completo e de Hausdorff $\widehat{E}$ que contém E como subespaço vetorial denso.*

[92]E não apenas pseudometrizável, já que $\mathcal{C}_p(X)$ sempre é de Hausdorff.

Demonstração. Evidentemente, deve-se tomar $\widehat{E}$ como o completamento Hausdorff do grupo topológico $(E, +, 0)$. Pelo Teorema 5.1.37, tal completamento tem uma estrutura de grupo topológico que estende a adição do grupo E, que por sua vez se torna um subgrupo (aditivo) denso de $\widehat{E}$. Mais ainda, como a multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$ é $\mathbb{Z}$-bilinear, segue que existe uma extensão $\mathbb{Z}$-bilinear contínua $\mathbb{K} \times \widehat{E} \to \widehat{E}$ (Observação 5.1.51). Por fim, a densidade de E permite mostrar que tal ação promove $\widehat{E}$ ao patamar de e.v.t. que contém E como subespaço vetorial (denso). □

Exercício 5.55. Adapte o Exercício 5.17 para o contexto de e.v.t's. ■

No entanto, a completude no sentido uniforme não é suficiente para que os mágicos da Análise executem seus truques: em geral, ela é usada juntamente com a métrica (quando esta existe) a fim de garantir a condição de Baire (Definição 4.2.47), que por sua vez é o principal ingrediente secreto no

Teorema 5.2.67 (Banach-Steinhauss)**.** *Sejam X e Y e.v.t's, $\mathcal{E}$ uma família de morfismos lineares contínuos da forma $X \to Y$ e B a coleção dos pontos $x \in X$ tais que o conjunto $\mathcal{E}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{E}\}$ seja linearmente limitado (em Y). Se B é não-magro em X, i.e., não é reunião enumerável de subconjuntos cujos fechos têm interior vazio*[93]*, então*

(i) $B = X$, e

(ii) para toda vizinhança $W \subseteq Y$ de $0 \in Y$ existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de $0 \in X$ tal que $f[V] \subseteq W$ para qualquer $f \in \mathcal{E}$.

Note que no caso em que as topologias de X e Y são induzidas por (semi) normas, a limitação linear dos conjuntos $\mathcal{E}(x)$ se traduz na boa e velha limitação (Observação 5.2.65). Assim, se, por exemplo, $(X, \|\cdot\|)$ é completo e $\mathcal{E}(x)$ é limitado para todo $x \in X$, então a condição (ii), usualmente chamada de *equicontinuidade*, é satisfeita.

Definição 5.2.68. Fixados um espaço topológico X e um espaço uniforme Y, uma família $\mathcal{E}$ de funções da forma $X \to Y$ é **equicontínua em** $x \in X$ se para toda *entourage* U de Y existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de x tal que $(f(x), f(x')) \in U$ para quaisquer $f \in \mathcal{E}$ e $x' \in V$. A família $\mathcal{E}$ é dita **equicontínua** se for equicontínua em todo $x \in X$. ¶

Grosso modo, a equicontinuidade de uma família de funções significa que para cada *entourage* de Y (ou para cada $\varepsilon > 0$, no caso métrico), um mesmo aberto em torno de x é capaz de atestar a continuidade de todas as funções da família no ponto x. Evidentemente, se X também é uniforme, faz sentido a noção análoga de *equicontinuidade uniforme*.

Definição 5.2.69. Nas condições anteriores, a família $\mathcal{E}$ é **uniformemente equicontínua** se para toda *entourage* U de Y existe uma *entourage* V de X tal que $(f(x), f(x')) \in U$ sempre que $(x, x') \in V$, independentemente da função $f \in \mathcal{E}$. ¶

Exercício 5.56. Sejam X e Y e.v.t's e $\mathcal{E}$ uma família de funções lineares da forma $X \to Y$. Mostre que são equivalentes:

a) $\mathcal{E}$ é equicontínua em $0 \in X$;

b) $\mathcal{E}$ é equicontínua;

c) $\mathcal{E}$ é uniformemente equicontínua.

[93] Pode ser útil rever o Exercício 1.75.

Conclua que a condição (ii) no Teorema 5.2.67 expressa, precisamente, a equicontinuidade da família $\mathcal{E}$. Dica: pode ser útil rever a Subseção 5.1.1 para notar que em vez de pensar em *entourages* $U \subseteq Y \times Y$ e $V \subseteq X \times X$ com $(x, x') \in V$ e $(f(x), f(x')) \in U$, basta considerar *vizinhanças* $U \subseteq Y$ e $V \subseteq X$ de $0 \in Y$ e $0 \in X$, respectivamente, tais que $x - x' \in V$ e $f(x) - f(x') \in U$. ■

Observação 5.2.70 (Linearidade + continuidade = continuidade uniforme)**.** Tomando $\mathcal{E} := \{f\}$, (re) obtém-se uma instância particular das Proposições 5.1.8 e 5.1.33, provadas para o contexto geral dos grupos topológicos mas, possivelmente, esquecidas pelo leitor. △

No próximo capítulo, veremos que a condição de equicontinuidade é parte fundamental do que significa "ser compacto" para subconjuntos de $\mathcal{C}(X, Y)$ com respeito a certas topologias. Por ora, a equicontinuidade uniforme expressa na condição (ii) do último teorema garante uma noção de *limitação uniforme*, no seguinte sentido.

Proposição 5.2.71 (da limitação uniforme)**.** *Sejam X e Y e.v.t's e $\mathcal{E}$ uma família equicontínua de funções lineares da forma $X \to Y$. Se $B \subseteq X$ é linearmente limitado, então existe $L \subseteq Y$ linearmente limitado tal que $f[B] \subseteq L$ para toda função $f \in \mathcal{E}$.*

Demonstração. Basta fazer $L := \bigcup_{f \in \mathcal{E}} f[B]$. De fato, se $W \subseteq Y$ é uma vizinhança de $0 \in Y$, então existe uma vizinhança $V \subseteq X$ de $0 \in X$ tal que $f[V] \subseteq W$ para todo $f \in \mathcal{E}$. Daí, a limitação linear de B assegura um $s > 0$ com $B \subseteq tV$ para todo $t > s$. Logo,

$$f[B] \subseteq f[tV] = tf[V] \subseteq tW$$

para todo $t > s$. Da arbitrariedade da função $f \in \mathcal{E}$, segue que $L \subseteq tW$. □

Observação 5.2.72 (Continuidade e limitação)**.** A proposição acima, implicitamente, sugere que mapas lineares contínuos preservam limitação linear. De fato, vale o

Exercício 5.57. Sejam X e Y e.v.t's e $f\colon X \to Y$ uma função linear. Mostre que se f é contínua, então $f[B] \subseteq Y$ é linearmente limitado para todo subconjunto linearmente limitado $B \subseteq X$. ■

Assim, em certo sentido, a equicontinuidade permite uniformizar o modo como as funções preservam limitação, daí o nome dado para a proposição. △

Demonstração do Teorema 5.2.67. Em vista da proposição anterior e do Exercício 5.78, basta mostrar que $\mathcal{E}$ satisfaz a condição (ii), pois daí $\mathcal{E}(x)$ será linearmente limitado para todo $x \in X$ (tome $B := \{x\}$ na proposição anterior), garantindo assim a validade da condição (i).

Agora, para uma vizinhança $W \subseteq Y$ de $0 \in Y$ fixada, tomemos uma vizinhança $U \subseteq Y$ de $0 \in Y$ que satisfaz $\overline{U} - \overline{U} \subseteq W$ para daí definir $E := \bigcap_{f \in \mathcal{E}} f^{-1}\left[\overline{U}\right]$. Como $\mathcal{E}(x)$ é linearmente limitado para cada $x \in B$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{E}(x) \subseteq nU$. Ora, pela definição de $\mathcal{E}(x)$, isto garante $f(x) \in nU$ para todo $f \in \mathcal{E}$ e, por conseguinte, $x \in nE$. Logo, deve-se ter a inclusão

$$B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE.$$

Note que se nE *fosse* magro para todo $n \in \mathbb{N}$, então o subconjunto B também seria[94]. Logo, nenhum nE pode ser magro e, uma vez que a multiplicação por escalares não-nulos é um homeomorfismo, resulta que E também é não-magro. Em particular, como cada $f \in \mathcal{E}$ é contínua[95], segue que o próprio subespaço E é fechado e, por seu interior ser não-vazio, existem $x \in E$ e uma vizinhança V de $0 \in X$ satisfazendo $x \in V + x \subseteq E$. Finalmente, deve ocorrer $f[V] \subseteq W$: tem-se $V \subseteq -x + E$ e, consequentemente, $f[V] \subseteq -f(x) + f[E]$, enquanto a definição de E assegura $-f(x) + f[E] \subseteq -\overline{U} + \overline{U} \subseteq W$. □

Corolário 5.2.73. *Sejam X e Y e.v.t's, $\mathcal{E}$ uma família de morfismos lineares da forma $X \to Y$. Se X é um espaço de Baire e $\mathcal{E}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{E}\}$ é linearmente limitado em Y para todo $x \in X$, então*

(i) $\mathcal{E}$ é equicontínua e

(ii) para todo $B \subseteq X$ linearmente limitado existe $L \subseteq Y$ linearmente limitado com $f[B] \subseteq L$ para todo $f \in \mathcal{E}$.

Exemplo 5.2.74 (Limitação uniforme em espaços de Banach)**.** O bom comportamento da limitação linear com respeito às normas torna razoável analisar o caso em que os espaços vetoriais são normados, enquanto a condição de Baire sugere procurar pelas normas completas. Para alívio dos analistas, é chegado o momento dos *espaços de Banach*.

Definição 5.2.75. Dizemos que um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é **de Banach** se a métrica induzida pela norma é completa. ¶

Para uma família $\mathcal{E}$ de funções lineares entre espaços normados X e Y, o subconjunto $\mathcal{E}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{E}\}$ é linearmente limitado em Y se, e somente se, existe $M_x > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M_x$ para todo $f \in \mathcal{E}$. Logo, se X é de Banach e $\mathcal{E}(x)$ é limitado para todo $x \in X$, então $\mathcal{E}$ é equicontínua e, para $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, existe $M > 0$ satisfazendo $\|f(x)\| \leq M$ para toda função $f \in \mathcal{E}$ e todo ponto $x \in B$. Portanto, M satisfaz

$$\|f(x)\| \leq M\|x\|$$

para quaisquer $x \in X$ e $f \in \mathcal{E}$. Definindo $\|f\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$, as últimas conclusões se reescrevem da seguinte forma:

$$\text{se } \sup_{f \in \mathcal{E}} \|f(x)\| < +\infty \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \sup_{f \in \mathcal{E}} \|f\| < +\infty,$$

um dos enunciados clássicos do *Teorema da Limitação Uniforme* em contextos introdutórios de Análise Funcional. ▲

Resultados como o exemplificado acima ajudam a justificar a predileção por espaços de Banach em detrimento de e.v.t's mais gerais. É obrigação moral dos bons textos de Análise Funcional explorar as diversas aplicações do que se discutiu aqui, bem como restringir ainda mais o escopo das normas e investigar *produtos internos*, *projeções ortogonais*, *espaços de Hilbert*, etc. Como este não é um bom livro (de Análise Funcional), discussões dessa natureza serão relegadas à seção de exercícios. Assim, a festa dos espaços de Banach acabou... por enquanto.

[94]Exercício 1.75.
[95]Exercício 5.109.

5.2.3 Dualidade e topologias fracas

Embora atualmente o termo *dualidade* seja matematicamente carregado de significados categoriais, o contexto vetorial que exploraremos nesta subseção tem certo pioneirismo no uso do termo[96].

Definição 5.2.76. Sejam X, Y e Z espaços vetoriais sobre um corpo K. Uma função $f\colon X \times Y \to Z$ é K-**bilinear**[97] se f é K-linear em cada coordenada, i.e., se para cada $x \in X$ e $y \in Y$ fixados, as correspondências $y' \mapsto f(x, y')$ $x' \mapsto f(x', y)$ definirem mapas K-lineares da forma $Y \to Z$ e $X \to Z$, respectivamente. Como de costume, o sufixo "K-" será abandonado quando o contexto permitir. ¶

Exemplo 5.2.77. A multiplicação $K \times K \to K$ do corpo K é bilinear. Outro caso natural, mas menos trivial, se dá entre um K-espaço vetorial X e seu dual algébrico X^*, por meio do *mapa* de avaliação.

De fato, a correspondência $\mathrm{ev}\colon X \times X^* \to K$ que faz $\mathrm{ev}(v, f) := f(v)$ é linear em cada *entrada*, como o leitor não deve ter dificuldades para perceber.

Exercício 5.58. Convença-se de que as afirmações acima estão corretas. ■

Em situações como as descritas acima, em que o mapa bilinear $f\colon X \times Y \to Z$ tem $Z := K$, costuma-se chamar f de **funcional bilinear** ou **forma bilinear**. Além disso, por serem funções em "dois parâmetros" com valor *unidimensional*, é relativamente comum substituir a notação do tipo "$f(\cdot, \cdot)$" por algo do tipo "$\langle \cdot, \cdot \rangle$", em alusão à multiplicação e, mais geralmente, aos produtos internos[98]. ▲

Dados K-espaços vetoriais X e Y, dizemos que X e Y estão **pareados**, e nos referimos a eles como o **par** $\langle X, Y \rangle$, se existe uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X \times Y \to K$. Os casos interessantes ocorrem quando X e Y são capazes de distinguir os elementos um do outro por meio da forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 5.2.78. Diz-se que X **distingue os pontos de** Y se para todo $y \in Y \setminus \{0\}$ existe $x \in X$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Dizer que Y **distingue os pontos de** X tem o significado análogo. ¶

Semanticamente, se X distingue os pontos de Y, por exemplo, e $y, y' \in Y$ são pontos distintos, então existe um ponto $x \in X$ que *testemunha* tal distinção, no sentido de que $\langle x, y - y' \rangle \neq 0$ ou, equivalentemente, tal que $\langle x, y \rangle \neq \langle x, y' \rangle$.

Definição 5.2.79. Finalmente, diremos que um par $\langle X, Y \rangle$ é **dual** (ou se encontra em **dualidade**) se X e Y distinguem os pontos um do outro. ¶

Exemplo 5.2.80. Como o nome sugere, um K-espaço vetorial X forma um par dual com seu dual algébrico X^* por meio do *mapa* de avaliação. A definição de X^* torna automática a verificação de que X distingue os pontos de X^*. Por sua vez, dado $x \in X \setminus \{0\}$, é fácil obter um funcional linear $\varphi \in X^*$ tal que $\langle x, \varphi \rangle := \varphi(x) \neq 0$: tomando uma base $B \subseteq X$ com $x \in B$, por exemplo, pode-se definir $\psi\colon B \to K$ fazendo $\psi(x) = 1$ e $\psi(b) = 0$ para $b \in B \setminus \{x\}$, de modo que sua (única) extensão linear tem a propriedade desejada.

[96] Difundido por Bourbaki, segundo Beckenstein e Narici [11].

[97] A definição se adapta naturalmente para o contexto de módulos.

[98] Um alerta breve: produtos internos não são formas bilineares quando $K = \mathbb{C}$, dado que a compatibilidade com a multiplicação por escalar ocorre "a menos de conjugação" no segundo parâmetro.

Moralmente, todos os casos de dualidade são da forma acima, ou quase. De fato, se $\langle X, Y\rangle$ é um par dual, então para cada $y \in Y$ a correspondência $\langle \cdot, y\rangle : X \to K$ determina um funcional linear em X, digamos φ_y. Ocorre que a dualidade entre X e Y garante a injetividade do mapa linear $\varphi_\bullet : Y \to X^*$ e, portanto, Y é isomorfo ao subespaço vetorial $\varphi_\bullet[Y] \subseteq X^*$: a linearidade de $\varphi_\bullet$ segue da linearidade de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ na segunda coordenada[99], enquanto sua injetividade advém do fato de X *distinguir* os pontos de Y. Daí, é claro que o par $\langle X, \varphi[Y]\rangle$ é dual por meio do mapa de avaliação restrito a $X \times \varphi_\bullet[Y]$. Analogamente, por Y também distinguir os pontos de X, pode-se *enxergar* X como um subespaço de Y^* que também é dual a Y.

Esse tipo de argumento permite interpretar os pontos de Y como se estes fossem funcionais lineares sobre X e, de modo análogo, os pontos de X podem ser interpretados como funcionais lineares sobre Y. No caso inicial em que $Y := X^*$, um ponto $x \in X$ induz o funcional linear usualmente denotado por $\widehat{x} : X^* \to K$ que a cada funcional linear $f \in X^*$ associa o escalar $\widehat{x}(f) := f(x)$. ▲

O exemplo acima sugere que para o estudo de pares duais basta considerar o caso em que X é um espaço vetorial e Y é um subespaço vetorial de X^*, ponto a partir do qual a coisa começa a ficar (topologicamente) interessante. Quando $\mathbb{K}$ é um corpo topológico e E é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{K}$, o seu dual topológico $E^\star \subseteq E^*$ é um candidato bastante natural para que se investiguem questões referentes a dualidade, o que faremos ao longo desta subseção.

Daqui em diante, $\mathbb{K}$ denotará (novamente) os corpos topológicos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com suas topologias usuais. Para aquecer os motores, comecemos com uma consequência imediata do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 5.2.81. *Seja E um e.v.t. sobre $\mathbb{K}$. Se E é localmente convexo e de Hausdorff, então o par $\langle E, E^\star\rangle$ é dual por meio do mapa bilinear $\langle \cdot, \cdot\rangle : E \times E^\star \to \mathbb{K}$ dado por $\langle x, \varphi\rangle := \varphi(x)$.*

Demonstração. Em geral, E distingue os pontos de $E^\star$ independentemente das hipóteses sobre a topologia de E. Agora, se E é um espaço de Hausdorff e $x \in E \setminus \{0\}$, então existe um isomorfismo topológico $\varphi : \langle x\rangle \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi(x) = 1$ (vide o Exercício 5.46). Logo, a convexidade local de E e o *Teorema de Hahn-Banach* (Corolário 5.2.53) dão um funcional linear contínuo $\Phi : E \to \mathbb{K}$ satisfazendo $\Phi|_{\langle x\rangle} = \varphi$ e, portanto, deve ocorrer $\langle x, \Phi\rangle := \Phi(x) = \varphi(x) \neq 0$, como queríamos. □

Embora o teorema acima dê mais um exemplo de par dual, ele ainda não responde algo que tem sido deixado de lado por muito tempo ao longo deste capítulo: que topologia considerar sobre o dual topológico $E^\star$ de um e.v.t. E?

A convergência pontual reencarnada

No longínquo Exercício 2.27, vimos que para um conjunto X e uma função $f : X \to \mathbb{R}$, o mapa $d_f : X \times X \to \mathbb{R}$ dado por $d_f(x, x') := |f(x) - f(y)|$ é uma pseudométrica em X, com a condição de métrica satisfeita precisamente quando f é injetora. No caso em que X é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $f : X \to \mathbb{K}$ é uma função $\mathbb{K}$-linear, pode-se definir $\|\cdot\|_f : X \to \mathbb{R}$ da maneira *óbvia*, com $\|x\|_f := |f(x)|$, onde $|\cdot|$ denota a norma usual de $\mathbb{K}$, o que dá uma seminorma em X (vide o Exercício 5.80).

[99]Note que a linearidade na primeira coordenada é usada para atestar que $\varphi_y \in X^*$ para todo $y \in Y$.

Como no caso das pseudométricas, a seminorma $\|\cdot\|_f$ em X é uma norma se, e somente se, f é injetora, exigência bem mais restritiva do que parece: em virtude do Teorema do Núcleo e da Imagem (Teorema K.2.97), a injetividade de f acarretaria

$$\dim_{\mathbb{K}} X = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1,$$

i.e., $X = \{0\}$ ou $X = \mathbb{K}$. Ainda assim, essa ideia pode ser reciclada de modo menos restritivo e ainda render topologias de Hausdorff.

Dados um par $\langle X, Y\rangle$ de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $y \in Y$, denotaremos por $p_y \colon X \to \mathbb{R}$ a seminorma dada pela regra $x \mapsto |\langle x, y\rangle|$, o que determina um calibre de seminormas $\mathcal{P}_Y := \{p_y : y \in Y\}$ sobre X. Analogamente, $\mathcal{P}_X := \{p_x : x \in X\}$ denota o calibre em X onde cada $p_x \colon Y \to \mathbb{R}$ é a seminorma que faz $y \mapsto |\langle x, y\rangle|$.

Definição 5.2.82. Nas condições acima, costuma-se escrever $\sigma(X, Y)$ para indicar a topologia induzida pelo calibre $\mathcal{P}_Y$, i.e., a menor topologia que torna todas as inclusões $i_y \colon X \to (X, p_y)$ contínuas, xingada de **topologia fraca em** X induzida pelo par $\langle X, Y\rangle$. Analogamente, a **topologia fraca em** Y induzida pelo par $\langle X, Y\rangle$, denotada por $\sigma(Y, X)$, é a topologia induzida pelo calibre $\mathcal{P}_X$. ¶

Nesse contexto, a condição de Hausdorff da topologia fraca se manifesta na

Proposição 5.2.83. *Para um par $\langle X, Y\rangle$ de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *X distingue os pontos de Y;*

(ii) *a função $\varphi_\bullet \colon Y \to X^*$, que faz $\varphi_y(\bullet) := \langle \bullet, y\rangle$, é injetora;*

(iii) *$\sigma(Y, X)$ é uma topologia de Hausdorff.*

Demonstração. A implicação $(i) \Rightarrow (ii)$ já foi discutida no Exemplo 5.2.80. Para a implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$, é suficiente mostrar que $\{0\}$ é fechado em Y, já que a topologia $\sigma(Y, X)$ é compatível com a estrutura vetorial de Y, por ser induzida por um calibre de seminormas. Agora, se $y \in \overline{\{0\}}$, então existe uma *net* $(y_d)_d$ de elementos de $\{0\}$ (pois é...) com $y_d \to y$, o que permite concluir que $y = 0$:

✓ por um lado, a definição de $\sigma(Y, X)$, o Exemplo 1.2.42 e o Exercício 1.241 garantem que para todo $x \in X$ deve ocorrer $|\langle x, y_d\rangle| \to |\langle x, y\rangle|$;

✓ por outro lado, como ocorre $y_d = 0$ para todo d, resulta que $|\langle x, y_d\rangle| = 0 \to 0$;

logo, a condição de Hausdorff em $\mathbb{R}$ implica em $|\langle x, y\rangle| = 0$ para todo $x \in X$, donde a hipótese (ii) obriga que se tenha $y = 0$.

Finalmente, vejamos que $(iii) \Rightarrow (i)$: dado $y \neq 0$, a hipótese sobre a topologia $\sigma(Y, X)$ ser de Hausdorff dá um subconjunto finito $F \subseteq X$ e números reais $\varepsilon_x > 0$ para cada $x \in F$ tais que $y \notin \bigcap_{x \in F} B_{p_x}(0, \varepsilon_x)$, donde segue que para algum $x \in F$ deve ocorrer $|p_x(y)| \neq 0$, i.e., $|\langle x, y\rangle| \neq 0$. □

Exercício 5.59. Compare a demonstração anterior de que $\overline{\{0\}} = \{0\}$ com a construção do contraexemplo para a recíproca do Teorema 5.2.37, apresentada no Exemplo 5.2.36. ■

Corolário 5.2.84. *Para um par $\langle X, Y\rangle$ de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *o par $\langle X, Y\rangle$ é dual;*

(ii) *as correspondências*

$$\begin{aligned} Y &\to X^* \\ y &\mapsto \langle \bullet, y\rangle \end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned} X &\to Y^* \\ x &\mapsto \langle x, \bullet\rangle \end{aligned}$$

são injetoras;

(iii) *as topologias $\sigma(X, Y)$ e $\sigma(Y, X)$ são de Hausdorff.*

Observação 5.2.85. Em particular, $\sigma(Y, X)$ e $\sigma(X, Y)$ são topologias localmente convexas sobre Y e X, respectivamente. △

Um modo alternativo e possivelmente útil de tratar a topologia $\sigma(X, Y)$ em X induzida pelo par $\langle X, Y\rangle$ consiste em considerar os funcionais lineares $\widehat{y}\colon X \to \mathbb{K}$ que fazem $\widehat{y}(x) := \langle x, y\rangle$ para cada $x \in X$ e $y \in Y$. Mais precisamente:

Proposição 5.2.86. *$\sigma(X, Y)$ é a menor topologia que torna contínuos os funcionais lineares $\widehat{y}$ para cada $y \in Y$.*

Demonstração. De fato, se τ denota a topologia fraca induzida pelos funcionais $\widehat{y}$, então as inclusões $\tau \subseteq \sigma(X, Y)$ e $\sigma(X, Y) \subseteq \tau$ decorrem, essencialmente, do fato de que para uma *net* $(w_d)_{d\in\mathbb{D}}$ num espaço seminormado $(W, \|\cdot\|)$ vale

$$w_d \to 0 \Leftrightarrow \|w_d\| \to 0,$$

o que é uma instância da equivalência (1.29) obtida no contexto de espaços pseudométricos no Exemplo 1.2.42. Os detalhes ficam a cargo do leitor. □

Exercício 5.60. Nas notações acima, convença-se de que $\tau = \sigma(X, Y)$. ■

Exercício 5.61 (Talvez ajude)**.** Sejam τ e σ topologias compatíveis com a estrutura de um espaço vetorial E. Mostre que $\tau \subseteq \sigma$ se, e somente se, para toda *net* $(x_d)_d$ em E valer que $x_d \to_\sigma 0 \Rightarrow x_d \to_\tau 0$. Dica: Exercício 1.196. ■

Tal caracterização da topologia $\sigma(X, Y)$ ainda acarreta outra encarnação útil. Considere $\mathbb{K}_y := \mathbb{K}$ para cada $y \in Y$ e tome a aplicação $\mathbb{K}$-linear *diagonal*

$$\Delta\colon X \to \prod_{y\in Y} \mathbb{K}_y = \mathbb{K}^Y$$

que a cada $x \in X$ associa a Y-upla $\Delta(x) := (\widehat{y}(x))_{y\in Y} = (\langle x, y\rangle)_{y\in Y}$. Se X é munido da topologia $\sigma(X, Y)$, então $\widehat{y}$ é contínua para cada $y \in Y$ e, consequentemente, a função Δ acima é contínua[100]. Para a surpresa do leitor desatento, a recíproca também verdadeira: se Δ é contínua, então $\pi_y \circ \Delta = \widehat{y}$ é contínua para cada $y \in Y$. Logo, a menor topologia sobre X que torna a função Δ contínua também torna todos os funcionais lineares $\widehat{y}$ contínuos, donde segue que $\sigma(X, Y)$ é necessariamente tal topologia.

[100] Ao dotar $\mathbb{K}^Y$ da topologia produto, como de costume.

Corolário 5.2.87. *Nas notações acima, $\sigma(X, Y)$ é a topologia fraca induzida pelo mapa $\Delta\colon X \to \mathbb{K}^Y$.*

Uma vez que $\mathbb{K}^Y$ é um e.v.t. de Hausdorff, pode ser o caso de que o mapa Δ também permita determinar condições para que a topologia $\sigma(X, Y)$ seja de Hausdorff. Ora, já sabemos que X é um espaço de Hausdorff quando munido da topologia $\sigma(X, Y)$ se, e somente se, Y distingue os pontos de X. Agora, note que se Y distingue os pontos de X, então Δ é um mergulho! De fato, a hipótese sobre Y distinguir os pontos de X dá a injetividade de Δ, enquanto o modo como a topologia de X foi tomada garante que $\Delta\colon X \to \Delta[X]$ é aberta: se $U \subseteq X$ é aberto, então existe $V \subseteq \mathbb{K}^Y$ aberto com $\Delta^{-1}[V] = U$ e, consequentemente, $\Delta[U] = V \cap \Delta[X]$. Por sua vez, se Δ for um mergulho, então X é topologicamente isomorfo a um subespaço de $\mathbb{K}^Y$ e, por conseguinte, é de Hausdorff.

Observação 5.2.88. Naturalmente, toda a discussão feita acima acerca da topologia $\sigma(X, Y)$ sobre X também vale para a topologia $\sigma(Y, X)$ sobre Y, *mutatis mutandis.* △

Exemplo 5.2.89 (A topologia fraca*)**.** Fixado um e.v.t. E, pode-se formar um par $\langle E, E^\star\rangle$ por meio da aplicação bilinear usual $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E \times E^\star \to \mathbb{K}$ dada pela avaliação, i.e., $\langle x, \varphi\rangle \coloneqq \varphi(x)$ para cada $x \in E$ e $\varphi \in E^\star$. Como os pontos de $E^\star$, i.e., os funcionais lineares contínuos de E, sempre são distinguidos pelos pontos de E, a Proposição 5.2.83 diz que a topologia $\sigma(E^\star, E)$ é de Hausdorff ou, equivalentemente, o mapa linear

$$\begin{aligned}\Delta\colon E^\star &\to \mathbb{K}^E\\ \varphi &\mapsto (\langle x, \varphi\rangle)_{x\in E}\end{aligned}$$

é um mergulho. Embora seja um caso particular do que se discutiu acima, o presente cenário é bem mais explícito: $E^\star$ é ~~conjuntisticamente~~ literalmente um subconjunto de $\mathbb{K}^E$, e o mapa Δ acima é apenas a inclusão, já que

$$\Delta(\varphi)(x) \coloneqq (\langle x, \varphi\rangle)_{x\in E}(x) = \langle x, \varphi\rangle \coloneqq \varphi(x)$$

para todo $x \in E$, mostrando que $\Delta(\varphi) = \varphi$ para qualquer $\varphi \in E^\star$.

Nesse contexto, é comum xingar $\sigma(E^\star, E)$ de **topologia fraca***, lida exatamente assim: *topologia fraca estrela*. É quase certo que em textos introdutórios de Análise Funcional o leitor se depare com tal topologia definida como a menor (sobre $E^\star$) que torna contínuos os funcionais

$$\begin{aligned}\widehat{x}\colon E^\star &\to \mathbb{K}\\ \varphi &\mapsto \varphi(x)\end{aligned}$$

para cada $x \in E$. Isto é mero reflexo do que se discutiu anteriormente, como o leitor já deve ter intuído a partir da notação adotada. Em particular, *a topologia fraca* é apenas a topologia da convergência pontual reencarnada.* ▲

Exercício 5.62. Convença-se de que a topologia fraca* sobre $E^\star$ é a topologia de subespaço herdada de $\mathbb{K}^E$. ■

A relação entre topologias fracas e espaços da forma $\mathbb{K}^E$ discutida acima permite usar o bom comportamento da compacidade em $\mathbb{K}^E$ (por meio do Teorema de Tychonoff) para compreender os compactos relativos a tais topologias fracas.

Teorema 5.2.90 (Banach-Alaoglu-Bourbaki[101]). *Sejam E um e.v.t. e considere $U \subseteq E$ uma vizinhança de $0 \in E$. Então o subconjunto*

$$U^\circ := \{\psi \in E^\star : \forall x \in U \ |\langle x, \psi \rangle| \leq 1\} \subseteq E^\star$$

é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração. Como U é uma vizinhança de 0, segue que U é expansível em torno de 0 e, por conseguinte, fica bem definido o número $\|x\|_U := \inf\{r > 0 : x \in rU\}$ para todo $x \in E$. O que talvez escape aos olhos do leitor num primeiro momento seja a igualdade

$$U^\circ = \underbrace{\left(\prod_{x \in E} B_{\mathbb{K}}\left[0, \|x\|_U\right]\right)}_{C} \cap E^*, \tag{5.12}$$

onde E^* denota o dual algébrico de E. É justamente a igualdade acima que permitirá usar o Teorema de Tychonoff para concluir que U° é subespaço compacto de $E^\star$ quando este é dotado da topologia fraca estrela $\sigma(E^\star, E)$.

Primeiro, note que se $\varphi \in C$ e $\varphi \in E^*$, então φ é um funcional linear $E \to \mathbb{K}$ tal que $|\varphi(x)| \leq 1$ para todo $x \in U$: de fato, se $x \in U$, então $\|x\|_U \leq 1$ e daí $|\varphi(x)| \leq \|x\|_U \leq 1$. Secretamente, isso garante que φ é contínua em 0 e, consequentemente, é contínua, já que para $\varepsilon > 0$ o subconjunto εU é uma vizinhança de 0 tal que $|\varphi(x)| < 2\varepsilon$ para todo $x \in \varepsilon U$. Portanto, vale que $C \cap E^* \subseteq U^\circ$.

Por sua vez, se $\psi \in U^\circ$, então não pode ocorrer $|\psi(x)| > \|x\|_U$, qualquer que seja o ponto $x \in E$ tomado: de fato, se $\lambda > \|x\|_U$, então existe $\alpha > 0$ com $\|x\|_U \leq \alpha < \lambda$ satisfazendo $x \in \alpha U$, donde segue que $\dfrac{1}{\alpha} x \in U$, acarretando

$$\left|\psi\left(\frac{1}{\alpha} x\right)\right| \leq 1 \Rightarrow |\psi(x)| \leq \alpha < \lambda.$$

Portanto, $U^\circ \subseteq C \cap E^*$.

Agora, como $B_{\mathbb{K}}\left[0, \|x\|_U\right]$ é subespaço compacto de $\mathbb{K}$ para cada $x \in E$, segue que $C \subseteq \mathbb{K}^E$ é um subespaço compacto com a topologia produto, pelo Teorema de Tychonoff. Assim, se mostrarmos que U° é subespaço fechado de C, *seguirá* que U° é subespaço compacto de $\mathbb{K}^E$ e, pelo Exercício 5.62, seguirá que U° é subespaço compacto de $E^\star$ com a topologia fraca estrela. Ora, em vista da identidade (5.12), basta notar que E^* é subespaço fechado de $\mathbb{K}^E$, o que nesta fase da vida não *deveria* ser um exercício complicado. □

Exercício 5.63. Mostre que E^* é subespaço fechado de $\mathbb{K}^E$ com a topologia produto. Conclua que $C \cap E^*$ deve ser subespaço fechado de C e, assim, encerre a demonstração do teorema anterior. Dica: use *nets*; por exemplo, se $\varphi \in \overline{E^*}$, então existe uma *net* $(\varphi_d)_d$ de funções lineares com $\varphi_d \to \varphi$ pontualmente, o que permite usar as propriedades operatórias da convergência de *nets* para concluir. ■

[101] Beckenstein e Narici [11] observam que há tantas *pessoas* cujos trabalhos se relacionam com tal resultado que seria melhor chamá-lo de *Teorema da compacidade fraca estrela*. Em contextos normados (vide Corolário 5.2.93) é comum xingar a coisa de "Banach-Alaoglu", enquanto a menção a Bourbaki costuma ser deixada apenas para a versão geral em espaços vetoriais topológicos.

Observação 5.2.91. Embora o Teorema de Tychonoff tenha sido utilizado na demonstração acima[102], ele não é necessário em sua *generalidade máxima*. De fato, como $\mathbb{K}$ é de Hausdorff, precisa-se apenas saber que o produto arbitrário de espaços compactos *de Hausdorff* é um espaço compacto (de Hausdorff). Logo, em virtude do Exercício 1.250, segue que o Lema do Ultrafiltro implica o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. O Exercício 5.118 mostrará que a recíproca também é verdadeira em ZF. $\triangle$

Exemplo 5.2.92 (O contexto normado)**.** Quando E é um espaço vetorial normado, é possível definir uma norma em $E^\star$ por meio da regra

$$\|\varphi\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |\varphi(x)|,$$

cuja topologia induzida em $E^\star$ costuma ser chamada de (topologia) **forte**.

Em tal cenário faz sentido considerar a *bola fechada unitária* de $E^\star$, que por falta de inspiração será denotada por $\overline{B_{E^\star}}$, composta por todos os funcionais lineares cuja norma é menor do que ou igual a 1. Dito isso, é muito comum encontrar o seguinte caso particular do último teorema:

Corolário 5.2.93 (Banach-Alaoglu)**.** *Se E é um espaço normado, então $\overline{B_{E^\star}}$ é subespaço compacto de $E^\star$ com a topologia fraca estrela.*

A tese proposta acima segue como corolário imediato do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, tomando-se $U := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, pois isso dá exatamente a identidade $U^\circ = \overline{B_{E^\star}}$. $\blacktriangle$

Observação 5.2.94 (Sobre as vizinhanças da topologia fraca estrela)**.** É importante destacar que tanto no Teorema 5.2.90 quanto no Corolário 5.2.93 não se demonstra que $E^\star$ é localmente compacto quando dotado da topologia $\sigma(E^\star, E)$. Se fosse o caso, em vista do Teorema de Riesz-Weil (Teorema 5.2.28), resultaria que $E^\star$ tem dimensão finita independentemente da dimensão de E, o que nem sempre ocorre.

Por exemplo, se E é um espaço normado com dimensão infinita, então pode-se considerar $E^\star$ dotado da topologia induzida pela norma de E (como no último exemplo) e daí passa a fazer sentido definir o *bidual* topológico $E^{\star\star}$ cujos elementos são funcionais lineares $E^\star \to \mathbb{K}$ contínuos com respeito à topologia forte em $E^\star$. Agora, a correspondência $x \mapsto \widehat{x}$ determina um mapa $J: E \to E^{\star\star}$ linear e injetor:

- ✓ J é claramente linear;
- ✓ se $x \neq 0$, então o Teorema de Hahn-Banach dá $\varphi \in E^\star$ com $\varphi(x) \neq 0$, donde segue que $\widehat{x} \neq 0$;
- ✓ $J(x): E^\star \to \mathbb{K}$ é contínuo para todo $x \in E$ pois se $\varphi_d \to 0$ em $E^\star$, então para $\varepsilon > 0$ existe d' tal que $d \geq d'$ acarreta $\|\varphi_d\| < \varepsilon$ e, com isso, $|\widehat{x}(\varphi_d)| \leq \|x\| \cdot \|\varphi_d\| < \varepsilon\|x\|$, mostrando que $\widehat{x}(\varphi_d) \to 0$.

Consequentemente, o Teorema K.2.97 (do Núcleo e da Imagem) permite inferir que $\aleph_0 \leq \dim_{\mathbb{K}} E \leq \dim_{\mathbb{K}} E^{\star\star}$. Por outro lado, se $\dim_{\mathbb{K}} E^\star < \aleph_0$, então $\dim_{\mathbb{K}} E^\star = \dim_{\mathbb{K}} E^{\star\star}$, contrariando a última conclusão. Embora tal argumento dimensional tenha a vantagem de ser prático, ele camufla o *verdadeiro* motivo pelo qual o espaço $E^\star$ não pode ser σ-compacto com a topologia fraca estrela: o subconjunto U° tem interior vazio com respeito à topologia fraca estrela quando E tem dimensão infinita! $\triangle$

[102] Adaptada do recente (e sucinto!) trabalho de Jürgen Voigt [109].

Exercício 5.64. Seja E um e.v.t. e considere $E^\star$ dotado da topologia fraca estrela.

a) Note que se $W \subseteq E^\star$ é uma vizinhança do funcional $0 \in E^\star$, então W contém um subconjunto da forma $\langle F, \varepsilon \rangle := \{\varphi \in E^\star : \forall x \in F \, |\varphi(x)| < \varepsilon\}$ onde $F \subseteq E$ é um subconjunto finito e $\varepsilon > 0$. Dica: como são os abertos básicos de $E^\star$?

b) Considere um subconjunto $F \subseteq E$ que não gera E. Mostre que para qualquer $x \in E \setminus \langle F \rangle$ existe um funcional linear $\varphi \colon \langle F \cup \{x\} \rangle \to \mathbb{K}$ satisfazendo $|\varphi(x)| > 1$ e $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in F$.

c) Suponha que a topologia de E seja localmente convexa e de Hausdorff, com $\dim_{\mathbb{K}} E \geq \aleph_0$. Mostre que se $U \subseteq E$ é uma vizinhança do vetor $0 \in E$, então para qualquer subconjunto da forma $\langle F, \varepsilon \rangle$ existe um funcional linear contínuo $\Phi \colon E \to \mathbb{K}$ com $\Phi \in \langle F, \varepsilon \rangle$ e $\Phi(x) > 1$ para algum $x \in U$. Dica: item anterior + Exercício 5.73.

d) Note que se E é dotado da topologia codiscreta, então seu dual topológico $E^\star$ é trivial[103].

Conclua que: 1) nas hipóteses do item (c), U° não pode ser uma vizinhança do funcional $0 \in E^\star$ e, pela homogeneidade da topologia, não pode ser vizinhança de *algum* funcional, 2) a vida fica muito boa com convexidade local e 3) afirmações perigosas podem ser feitas quando se está com preguiça. ■

Observação 5.2.95. Subconjuntos como o "U°" utilizado no Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que costumam ser chamados de *polares*[104], generalizam a relação entre a norma de um espaço normado e seus funcionais lineares, como ficou sugerido no último exemplo. O leitor interessado no estudo de polares pode conferir [109]. △

Os resultados discutidos nesta subsubseção costumam ser relevantes no estudo dos *espaços reflexivos*, que em certo sentido são espaços (natural e) topologicamente isomorfos a seus *biduais*. Tratar de tais tópicos é o que distingue os livros de Análise dos livros de Topologia Geral presunçosos. Como este texto se enquadra na segunda classe, as discussões sobre dualidade em contextos vetoriais se encerram aqui, a menos de duas exceções:

✓ a seção de exercícios, em particular o Exercício 5.118, que mostrará, em certo sentido, que toda aplicação do Lema do Ultrafiltro é uma aplicação do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki;

✓ a próxima subsubseção, que demonstra a equivalência entre compacidade clássica e sequencial para certos tipos de topologias fracas, *a.k.a. Teorema de Eberlein-Šmulian*[105].

[103] Os espaços L^p, para $p \in (0, 1)$, são e.v.t. de Hausdorff com a mesma propriedade.

[104] *Polar sets* nas referências estrangeiras. Vale destacar que a depender da região de origem do autor do texto, existem ainda definições de *polares absolutos*, *prepolares*, etc.

[105] Por que eu faço isso comigo mesmo?

Compacidade vs. compacidade sequencial em e.v.t's

Muito do que se faz em Análise depende da convergência de sequências ou, mais geralmente, de *nets*. Como são os abertos de um espaço topológico que determinam o quão difícil é convergir, *enfraquecer uma topologia*, i.e., tomar uma topologia com menos abertos do que a topologia original, favorece a convergência[106].

O Teorema de Banach-Alaoglu (Corolário 5.2.93), demonstrado na última subsubseção, é uma boa ilustração desse fenômeno: enquanto o conjunto dos funcionais lineares $\varphi \in E^\star$ satisfazendo $\|\varphi\| \leq 1$ não é compacto (em geral) com a topologia induzida pela norma do Exemplo 5.2.92, a topologia *fraca** torna tal subconjunto compacto. E ocorre que a topologia fraca* é, de fato, mais fraca do que a topologia induzida pela norma: por um lado, a última torna contínuos todos os funcionais da forma $\widehat{x}\colon E^\star \to \mathbb{K}$, pois[107] $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$; por outro lado, a topologia fraca* é, por definição, a menor capaz de fazer a mesma coisa.

O ponto é que, para o analista, faz sentido investigar a compacidade em topologias fracas nos contextos vetoriais, dado que isso pode dar boas *ferramentas* para o estudo de convergências. Embora a finalidade de tais ferramentas não faça parte do interesse da Topologia Geral, investigá-las acaba por revelar um cenário não-metrizável em que compacidade e compacidade sequencial coincidem, como adiantado na Observação 3.2.54, o que torna pertinente a presente subsubseção.

Observação 5.2.96. Recordemo-nos de que o Exercício 5.46 sugere que o único e.v.t. compacto de Hausdorff é $\{0\}$: se $v \in E \setminus \{0\}$, então $\langle v \rangle$ é topologicamente isomorfo a $\mathbb{K}$, e consequentemente, é fechado[108], donde segue que se E fosse compacto, então $\mathbb{K}$ também seria, o que não ocorre. Contudo, $\mathbb{K}$ tampouco é enumeravelmente compacto ou sequencialmente compacto[109], posto que tais propriedades são hereditárias para subespaços fechados[110]. Assim, a investigação da compacidade no contexto vetorial só faz sentido para subconjuntos próprios e, mais ainda, que não contenham subespaços vetoriais. △

Teorema 5.2.97 (Eberlein-Šmulian, versão não-linear[111])**.** *Sejam X um espaço compacto e $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^X$ um subconjunto de funções. Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$ e todo subconjunto infinito de $\mathcal{F}$ tem ponto de acumulação em $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$, então:*

(i) $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathbb{K}^X$ *é compacto;*

(ii) $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$*;*

(iii) se $S \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ é separável, então S é metrizável;

(iv) se $f \in \overline{\mathcal{F}}$, então existe uma sequência $(f_n)_{n\in\omega}$ em $\mathcal{F}$ com $f_n \to f$.

[106] Confira o Exercício 1.196 ou, alternativamente, a discussão mais geral no contexto dos espaços de convergência, como na Definição 1.4.9.

[107] Pode ser útil conferir o Exercício 5.95.

[108] Pela Proposição 4.2.10 ou pelo Lema 5.2.24.

[109] A rigor, o que usaremos é a condição de *limite-compacidade*, introduzida no item (en. c_3) do Lema 3.2.37 e explicitada no Exercício 3.63. Porém, como no presente contexto os espaços são de Hausdorff, a distinção é puramente sintática.

[110] Exercício 3.67.

[111] Ou Eberlein-Grothendieck, de acordo com Voigt [109]. A alcunha "não-linear" é baseada na exposição de Schechter [104], embora o enunciado deste seja sutilmente distinto.

Antes que esta subsubseção se encerre, o teorema acima será provado. Porém, a fim de afagar os possíveis leitores da Análise, vamos primeiro mostrar como tal resultado pode ser usado para demonstrar o *misterioso*[112]

Teorema 5.2.98 (Eberlein-Šmulian, versão linear). *Sejam E um espaço normado e $A \subseteq E$ um subconjunto. Seja $\sigma := \sigma(E, E^\star)$ a topologia fraca em E induzida pelo dual $E^\star$. Então, com respeito à topologia σ, as seguintes condições são equivalentes:*

(wC$_1$) *toda sequência em A tem subsequência que converge em E;*

(wC$_2$) *todo subconjunto infinito de A tem ponto de acumulação em E;*

(wC$_3$) *$\overline{A}$ é compacto.*

Demonstração. A ideia da prova é mergulhar (E, σ) em $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$, onde $X := \overline{B_{E^\star}}$, i.e., o conjunto dos funcionais lineares contínuos $\varphi \colon E \to \mathbb{K}$ satisfazendo $\|\varphi\| \leq 1$, que dotado da topologia fraca* se torna um espaço compacto. De fato, se isso for feito, então quase tudo segue do teorema anterior, com $\mathcal{F} := A$.

✓ (wC$_1$) $\Rightarrow$ (wC$_2$). Basta aplicar a hipótese para a imagem de uma sequência infinita.

✓ (wC$_2$) $\Rightarrow$ (wC$_3$). A hipótese do enunciado e as suposições acima permitem usar o item (i) do teorema anterior para assegurar a compacidade de $\overline{A}$ enquanto subespaço de $\mathbb{K}^X$. Assim, para finalizar o argumento, precisa-se verificar a inclusão $\overline{A} \subseteq E$, que de fato ocorre: se $\varphi \in \mathbb{K}^X$ é tal que $\varphi \in \overline{A}$, então o item (iv) do teorema anterior dá uma sequência $(a_n)_n$ em A com $a_n \to \varphi$; novamente pela condição (wC$_2$), deve existir um $v \in E$ com uma *subnet* $a_{n_k} \to v$, mostrando que $\varphi = v$, ou seja, $\varphi \in E$.

✓ (wC$_3$) $\Rightarrow$ (wC$_2$). $\overline{A}$ deve ser enumeravelmente compacto e daí A satisfaz (wC$_2$).

✓ (wC$_2$) $\Rightarrow$ (wC$_1$). Segue do item (iii) (ou (iv)) do último teorema, com $\mathcal{F} := A$ e $S := \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$, onde $(x_n)_{n \in \omega}$ é uma sequência em A.

O mergulho é muito simples: basta fazer $\mathrm{ev} \colon E \to \mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$, dada por $\mathrm{ev}(v)(\varphi) := \varphi(v)$ para cada $\varphi \in X$ e $v \in E$.

✓ Tem-se $\mathrm{ev}(v) \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$ para cada $v \in E$, pois $\mathrm{ev}(v)$ é meramente a restrição da avaliação $\widehat{v} \colon E^\star \to \mathbb{K}$ ao subconjunto X.

✓ A função ev é contínua ao se dotar E da topologia fraca σ. De fato, se $v_d \to 0$ em E na topologia fraca, então $\varphi(v_d) \to 0$ em $\mathbb{K}$ para todo funcional $\varphi \in E^\star$, donde em particular segue que o mesmo ocorre para toda $\varphi \in X$ e, portanto, $\mathrm{ev}(v_d) \to 0$ em $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$.

✓ O Teorema de Hahn-Banach garante a injetividade de ev em virtude do Exercício 5.97.

✓ A aplicação ev é um homeomorfismo sobre a imagem: se $\mathrm{ev}(v_d) \to 0$ em $\mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$, então $v_d \to 0$ em (E, σ) pois, caso contrário, existiria $\varphi \in E^\star$ com $\varphi(v_d) \not\to 0$, e daí $\psi := \frac{1}{\|\varphi\|}\varphi \in X$ atestaria que $\mathrm{ev}(v_d) \not\to 0$. □

A demonstração do Teorema 5.2.97 depende de um lema técnico acerca de topologias fracas em contexto geral.

[112] É relativamente comum que textos *intermediários* de Análise Funcional não apresentem demonstrações para o Teorema de Eberlein-Šmulian: é o caso de Brézis [22] e, surpreendentemente, Rudin [99].

Lema 5.2.99. *Sejam A e B conjuntos, $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon A\times B\to\mathbb{K}$ uma função, ρ a topologia inicial em A induzida pelas funções $a\mapsto\langle a,b\rangle$ para cada $b\in B$, e σ a topologia inicial em B induzida pelas funções $b\mapsto\langle a,b\rangle$ para cada $a\in A$.*

(i) Se (A,ρ) é compacto e $B_0\subseteq B$ é denso em (B,σ), então ρ é a topologia inicial induzida pelas funções $a\mapsto\langle a,b\rangle$ com $b\in B_0$.

(ii) Além disso, se B_0 for enumerável, então (A,ρ) é metrizável e separável.

Demonstração. Pelo Corolário 5.2.87, ρ é a topologia induzida pela função $\Delta\colon A\to\mathbb{K}^B$ que faz $\Delta(a):=(\langle a,b\rangle)_{b\in B}$ para cada $a\in A$. Logo, $C:=\Delta[A]$ é subespaço compacto de $\mathbb{K}^B$. Agora, tudo se resume a mostrar a projeção

$$\begin{aligned}\pi_{B_0}\colon \mathbb{K}^B&\to\mathbb{K}^{B_0}\\ (k_b)_{b\in B}&\mapsto(k_b)_{b\in B_0}\end{aligned}$$

restrita ao subespaço C é um mergulho: se $a,a'\in A$ são tais que $\pi_{B_0}(\Delta(a))=\pi_{B_0}(\Delta(a'))$, então as funções contínuas $\langle a,\bullet\rangle\colon B\to\mathbb{K}$ e $\langle a',\bullet\rangle\colon B\to\mathbb{K}$ coincidem no denso B_0, acarretando $\Delta(a)=\Delta(a')$, donde segue que $\pi_{B_0}|_C$ é uma bijeção contínua sobre sua imagem e, portanto, é um mergulho. Logo, a topologia de A é a topologia inicial induzida pela composição $\pi_{B_0}\circ\Delta$ (Exercício 1.259) ou, equivalentemente, é a topologia inicial induzida pelas funções $a\mapsto\langle a,b\rangle$ com $b\in B_0$. Em particular, se B_0 é enumerável, então a topologia de A é metrizável, em virtude do Exercício 4.32, donde a separabilidade segue da compacidade (Teorema 3.2.26). $\square$

Demonstração do Teorema 5.2.97. O primeiro item é o mais fácil: por um lado, tem-se

$$\mathcal{F}\subseteq\prod_{x\in X}\{f(x):f\in\mathcal{F}\};$$

por outro lado, o Exercício 1.99 dá

$$\overline{\mathcal{F}}\subseteq\overline{\prod_{x\in X}\{f(x):f\in\mathcal{F}\}}=\prod_{x\in X}\overline{\{f(x):f\in\mathcal{F}\}},$$

onde o último é compacto por ser produto de compactos[113]. Consequentemente, $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto. Infelizmente, o restante é um pouco mais técnico.

O próximo passo é mostrar que $\overline{\mathcal{F}}$ está contido em $\mathcal{C}_p(X,\mathbb{K})$. Na falta de algo melhor a se fazer, vamos supor que existe $g\in\overline{\mathcal{F}}\setminus\mathcal{C}_p(X,\mathbb{K})$. Por definição, existe pelo menos um ponto $\tilde{x}\in X$ em que a função g não é contínua. Explicitamente, isto significa que existe $r>0$ tal que $g[U]\not\subseteq B(g(\tilde{x}),r)$ para toda vizinhança $U\subseteq X$ de $\tilde{x}$. Logo, existe $M\subseteq X$ com $\tilde{x}\in\overline{M}$ satisfazendo

$$|g(x)-g(\tilde{x})|\geq r \tag{5.13}$$

para todo $x\in M$.

Agora, vamos construir sequências infinitas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}$ e $(x_n)_{n\in\omega}$ em M, com $\tilde{x}:=x_0$, satisfazendo

$$|f_n(x_k)-g(x_k)|\leq\frac{1}{n}\quad\forall k\in[0,n), \tag{5.14}$$

$$|f_k(x_n)-f_k(x_0)|\leq\frac{1}{n}\quad\forall k\in[1,n]. \tag{5.15}$$

Por que alguém faria isso? Pelo seguinte:

[113] Pelo Exercício 5.116.

(a) a hipótese sobre $\mathcal{F}$ garante um *ponto* de acumulação da sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $f \in \mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$;

(b) em vista disso, a desigualdade (5.14) implica em $f(x_n) = g(x_n)$ para todo $n \in \omega$, enquanto a desigualdade (5.15) acarreta $f_k(x_n) \to f_k(x_0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

(c) desse modo, deve-se ter $x_n \to x$ na topologia inicial ρ induzida pela família de funções $B_0 := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, evidentemente mais fraca do que a topologia de X;

(d) portanto, (X, ρ) é compacto e o lema anterior se aplica com $B := \overline{B_0}$;

(e) finalmente, como $f \in B$, segue que f é contínua na topologia ρ e, pelo item (c), $g(x_n) = f(x_n) \to f(x_0) = g(x_0)$, contrariando (5.13).

O procedimento para construir tais sequências é recursivo: se $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ e $x_1, \ldots, x_n$ estão definidos, então, em virtude do modo como g foi tomada, existe $f_{n+1} \in \mathcal{F}$ satisfazendo (5.14)[114], enquanto a existência de x_{n+1} satisfazendo (5.15) decorre da continuidade das funções $f_1, \ldots, f_{n+1}$.

O terceiro item segue do último lema aliado aos itens anteriores. De fato, para um subespaço separável $S \subseteq \overline{\mathcal{F}}$, existe $S_0 \subseteq S$ enumerável com $\overline{S_0} = S$. Pelo item (*i*), $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto e, pelo item (*ii*), $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{C}_p(X, \mathbb{K})$, donde segue que S é compacto. Agora, como no item (d) anterior, (X, ρ) é um espaço metrizável e separável, onde ρ é a topologia inicial induzida por S. Desse modo, o lema anterior se aplica à função[115] $\langle\cdot,\cdot\rangle : S \times X \to \mathbb{K}$ dada por $\langle f, x\rangle := f(x)$, donde segue que S é metrizável.

Finalmente, para o item (*iv*), basta mostrar que existe um subconjunto enumerável S_0 de $\mathcal{F}$ que tem f como ponto de acumulação: disso, o item anterior dará $S := \overline{S}$ metrizável, com $f \in S$, donde o restante segue automático. Fixado $k \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathcal{F}$, seja

$$B(g, k) := \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in X^k : \forall j \leq k \quad |g(x_j) - f(x_j)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Explicitamente, $B(g,k) = \left((g - f)^{-1}\left[\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right]\right)^k$ é um produto de abertos de X, donde segue que $B(g, k)$ é um aberto de X^k. Mais do que isso, a família

$$\mathcal{V}_k := \{B(g, k) : g \in \mathcal{F} \text{ e } k \in \mathbb{N}\}$$

é uma cobertura por abertos de X^k: dado $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$, existe pelo menos uma função $g \in \mathcal{F} \cap \left\langle \{x_1, \ldots, x_k\}, \frac{1}{k}\right\rangle [f]$, que atesta $(x_1, \ldots, x_k) \in B(g, k)$. Como X^k é compacto para todo k, existe uma subcobertura finita $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{V}_k$ de X^k. Daí, é fácil concluir que $S_0 := \{g_U \in \mathcal{F} : \exists k \in \omega \text{ tal que } U \in \mathcal{U}_k\}$ satisfaz as condições impostas, onde g_U é uma função escolhida, para cada $U \in \mathcal{U}_k$, atestando $U = B(g_U, k)$. □

Observação 5.2.100. O teorema demonstrado acima vale, mais geralmente, se o espaço X for σ-compacto; porém, a demonstração é desgraçadamente mais detalhada. Em particular, é possível estender a versão linear do Teorema de Eberlein-Šmulian (Teorema 5.2.98): a equivalência entre as noções de compacidade vale para uma classe de topologias localmente convexas definidas em termos da chamada *topologia de Mackey*. O leitor interessado pode conferir o Capítulo 13 do texto de Voigt [109]. △

[114] Pode ser conveniente recordar a definição dos abertos básicos, como no Exemplo 5.1.27.

[115] Note que são duas aplicações sucessivas do lema: na primeira, $A := X$ e $B := S$, com S separável por definição e (X, ρ) compacto por ter uma topologia mais fraca do que a topologia de X, esta compacta por hipótese; na segunda, usamos $A := S$ e $B := X$, com B separável pela aplicação anterior.

Por fim, vale destacar que tais resultados *não* são subcasos do que já se explorou na Subseção 3.2.2 pois, em geral, a topologia fraca não é metrizável, pelo menos não nos casos que interessam.

Proposição 5.2.101. *Para um espaço normado* $(E, \|\cdot\|)$ *são equivalentes:*

(i) $\dim_{\mathbb{K}} E < \aleph_0$;

(ii) *a topologia fraca* $\sigma(E, E^\star)$ *é metrizável;*

(iii) *a topologia fraca* $\sigma(E, E^\star)$ *tem caráter enumerável;*

(iv) *a topologia fraca* $\sigma(E, E^\star)$ *é sequencial.*

Demonstração. Apenas as implicações $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(iv) \Rightarrow (i)$ carecem de demonstração, dado que as outras implicações decorrem das Proposições 1.2.50, 1.2.56 e 1.4.29. Quem preferir evitar espaços sequenciais pode conferir o Exercício 5.100.

Para $(i) \Rightarrow (ii)$, basta notar que $\sigma(E, E^\star)$ é a topologia induzida pela norma de E. Já a implicação $(iv) \Rightarrow (i)$ pode ser demonstrada pela contrapositiva:

✓ se $\dim_{\mathbb{K}} E \geq \aleph_0$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ pode-se tomar um subespaço $E_k \subseteq E$ cuja dimensão é k;

✓ segue-se que $S_k := \{x \in E_k : \|x\| = k\}$ é compacto e, portanto, totalmente limitado;

✓ enfim, o subconjunto $S := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, onde $F_k \subseteq S_k$ é um subconjunto finito satisfazendo $S_k \subseteq \bigcup_{x \in F_k} B_{\|\cdot\|}(x, \frac{1}{k})$ para cada k, é tal que $0 \in \overline{S}$ com respeito à topologia $\sigma(E, E^\star)$ e $\lim x_n \notin S$ para toda sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ em S que for $\sigma(E, E^\star)$-convergente.

Os detalhes da primeira parte ficam a cargo do leitor (Exercício 5.99). □

A literatura especializada chama de **angelicais** os espaços que satisfazem as equivalências do Teorema de Eberlein-Šmulian. Em particular, é desse contexto que surgem os chamados *compactos de Eberlein*, frequentemente estudados em $\mathcal{C}_p$-teoria. O leitor interessado pode conferir a primeira seção do Capítulo K de [27].

Exercícios complementares da seção

A seguir, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, embora em alguns casos tal hipótese possa ser afrouxada.

Convexidade, balanceamento e limitação linear

Exercício 5.65. Seja $X := \mathbb{C}$.

a) Mostre que ao encarar X como $\mathbb{C}$-espaço vetorial, X, $\emptyset$, $\{0\}$ e as bolas (abertas ou fechadas) centradas na origem são os únicos subconjuntos balanceados de X. Dica: note que se B for balanceado e ilimitado, então $B = X$; para B limitado, investigue $r := \inf\{r > 0 : B \subseteq B(0, r)\}$.

b) Mostre que ao encarar X como $\mathbb{R}$-espaço vetorial, passam a existir outros subconjuntos balanceados. Dica: verifique os segmentos da forma $[-v, v]$, onde $[x, y] := \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$.

c) Dê exemplos de subconjuntos balanceados e não-convexos, bem como de subconjuntos convexos e não-balanceados. Dica: $+$ e $-\!\bullet\!-$. ■

Exercício 5.66. Sejam A e B subconjuntos de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X. Mostre que $A + B$ é convexo (resp. balanceado) se A e B forem convexos (resp. balanceados). ■

Exercício 5.67. Mostre que se E é um e.v.t., então toda vizinhança de $0 \in E$ é expansível em torno de 0 (Definição 5.2.49). Dica: use a continuidade da multiplicação $\mathbb{K} \times E \to E$. ■

Exercício 5.68. Mostre que se E é um e.v.t., então 0 tem uma base local de vizinhanças abertas e balanceadas. Dica: confira o começo da demonstração do Corolário 5.2.30. ■

Exercício 5.69. Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\mathcal{F}$ um filtro próprio em X, com uma base composta por subconjuntos balanceados, tais que

($\mathrm{VT_i}$) para todo $V \in \mathcal{F}$ existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $W + W \subseteq V$,

($\mathrm{VT_{ii}}$) todo $V \in \mathcal{F}$ é expansível em torno de 0,

($\mathrm{VT_{iii}}$) $kV \in \mathcal{F}$ para quaisquer $V \in \mathcal{F}$ e $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Nas condições acima, mostre que existe uma única topologia sobre X compatível com suas operações satisfazendo a identidade $\mathcal{F} = \mathcal{N}_0$. Dica/Sugestão: mostre que as condições acima asseguram as condições ($\mathrm{GA_i}$) (ou ($\mathrm{GA_{ii}}$)) e ($\mathrm{M_i}$), ($\mathrm{M_{ii}}$) e ($\mathrm{M_{iii}}$) da Proposição 5.2.5 e do Teorema 5.2.8, respectivamente. ■

Exercício 5.70. Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $B \subseteq X$ um subconjunto balanceado e $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ escalares quaisquer. Mostre que se $|\alpha| < |\beta|$, então $\alpha B \subseteq \beta B$. Dica: use a desigualdade de um jeito esperto. ■

Exercício 5.71. Com as notações do exercício anterior, prove que $\alpha B = |\alpha| B$ ■

Exercício 5.72. Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\mathcal{C}$ uma família não-vazia de subconjuntos de X. Mostre que se os elementos de $\mathcal{C}$ são convexos, então $\bigcap \mathcal{C}$ é um subconjunto convexo. Troque "convexidade" por "balanceamento" e refaça o exercício. ■

Exercício 5.73. Sejam E um e.v.t. e $M \subsetneq E$ um subespaço vetorial próprio. Mostre que M tem interior vazio. Dica: vizinhanças de $0 \in E$ são expansíveis em torno de 0. ■

Exercício 5.74. Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Dizemos que uma combinação $\mathbb{K}$-linear $\sum_{j \leq n} \lambda_j v_j$ dos vetores $v_0, \ldots, v_n$ é uma **combinação convexa** se $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ e $\sum_{j \leq n} \lambda_j = 1$. Mostre que se $S \subseteq E$ é um subconjunto não-vazio, então a coleção das combinações convexas de elementos de S é um subconjunto convexo de E que contém S. Conclua que $\operatorname{conv}(S)$ é a coleção de tais combinações convexas. Dica: note que se $\sum_{j \leq n} \lambda_j = \sum_{j \leq n} \sigma_j = 1$ e $a + b = 1$, então $\sum_{j \leq n} a\lambda_j + \sum_{j \leq n} b\sigma_j = a + b = 1$. ■

Exercício 5.75. Sejam E um e.v.t. e $U \subseteq E$ um subconjunto aberto. Mostre que a envoltória convexa de U é aberta. Dica: confira a demonstração do Teorema 5.2.48. ■

Exercício 5.76. Sejam E um e.v.t. e $B \subseteq E$ um subconjunto balanceado. Mostre que a envoltória convexa de B é balanceada. Dica: confira a dica anterior. ■

Exercício 5.77. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b > 0$ e C um subconjunto convexo de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X. Mostre que $(a + b)C = aC + bC$. ■

Exercício 5.78. Sejam E um e.v.t.. Mostre que se $C, D \subseteq E$, com $C \subseteq D$ e D linearmente limitado, então C é linearmente limitado. ■

Normas, seminormas e convexidade local

Exercício 5.79. Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ uma seminorma. Mostre que a topologia induzida por $\|\cdot\|$ faz de X um espaço vetorial topológico. Quando X é de Hausdorff? ■

Exercício 5.80. Sejam X e Y $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $\|\cdot\|\colon Y \to \mathbb{R}$ uma seminorma. Mostre que se $\varphi\colon X \to Y$ é linear, então $\|\varphi\| := \|\cdot\| \circ \varphi$ é uma seminorma em X. ■

Exercício 5.81. Sejam $\{Y_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais topológicos, X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e, para cada $i \in \mathcal{I}$, fixe uma função $\mathbb{K}$-linear $\varphi_i\colon X \to Y_i$. Mostre que a topologia fraca induzida pela família $\{\varphi_i : i \in \mathcal{I}\}$ é compatível com a estrutura algébrica de X. Dica: use e abuse de *nets*, da $\mathbb{K}$-linearidade de cada φ_i e do Exercício 1.241. ■

Exercício 5.82. Seja $\mathcal{T}$ a menor topologia sobre $\mathbb{R}$ que torna contínua a norma usual $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é um espaço de Hausdorff. ■

Observação 5.2.102. O exercício acima mostra que é preciso cuidado na hora de descrever topologias fracas no contexto de espaços vetoriais topológicos. △

Exercício 5.83. Seja $\|\cdot\|$ uma seminorma sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial E. Mostre que a topologia induzida pela (pseudométrica induzida pela) seminorma é a menor topologia que torna as funções $y \mapsto \|x - y\|$ contínuas, para cada $x \in E$. ■

Exercício 5.84. Considere o enunciado do Exercício 5.81, com a hipótese adicional de que Y_i é localmente convexo para cada $i \in \mathcal{I}$. Mostre que X é localmente convexo. ■

Exercício 5.85. Seja E um e.v.t. localmente convexo. Mostre que E é de Hausdorff se, e somente se, para todo $x \neq 0$ existe uma seminorma contínua $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $\|x\| > 0$. Dica: use o Teorema 5.2.48 aliado ao Exercício 2.34. ■

Exercício 5.86. Mostre que o produto de espaços localmente convexos é localmente convexo. ■

Exercício 5.87. Mostre que a convexidade local é hereditária para subespaços. ■

Exercício 5.88. Mostre que $\mathcal{C}_p(X)$ é localmente convexo para qualquer espaço X. ■

Exercício 5.89. Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\mathcal{B}$ uma base de E e $(\alpha_b)_{b\in\mathcal{B}}$ uma $\mathcal{B}$-upla de números reais com $\alpha_b > 0$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Mostre que a correspondência

$$\left\|\sum_{b\in\mathcal{B}} k_b b\right\| := \sum_{b\in\mathcal{B}} \alpha_b |k_b|$$

define uma norma em E. ■

Exercício 5.90. Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado, $\mathcal{B}$ uma base para E e $D \subseteq \mathbb{K}$ um subconjunto denso. Mostre que a família $\mathcal{D}$, das combinações D-lineares de elementos de $\mathcal{B}$, é densa em E e satisfaz $|\mathcal{D}| \leq \aleph_0 \cdot \|\mathcal{B}|$. Conclua que se $\mathcal{B}$ é enumerável, então E é separável. ■

Exercício 5.91. Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ uma seminorma.

a) Mostre que $B := \{x \in E : \|x\| < 1\}$ é um disco (Definição 5.2.49) em E.

b) Mostre que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_B$, onde $\|\cdot\|_B$ é a seminorma de Minkowski (Definição 5.2.50). Dica: mostre que $\|x\|$ é o maior limitante inferior do conjunto $\{r > 0 : \|x\| < r\}$. ■

Exercício 5.92. Sejam E um e.v.t. e $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ uma seminorma. Mostre que $\|\cdot\|$ é contínua se, e somente se, existe uma seminorma contínua $s\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $\|x\| \leq s(x)$ para todo $x \in E$. Dica: note que $A := \{x : s(x) < 1\} \subseteq \{x : \|x\| < 1\} := B$, com A aberto pela continuidade de s; daí use o exercício anterior juntamente com o Teorema 5.2.51. ■

Exercício 5.93. Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e considere a topologia em E induzida por uma seminorma $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$. Mostre que uma seminorma $q\colon E \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $q(x) \leq r\|x\|$ para todo $x \in E$. Dica: o que significa a continuidade de q em 0 em termos de bolas? ■

Exercício 5.94. Sejam X e Y e.v.t's com Y localmente convexo. Mostre que um mapa linear $\varphi\colon X \to Y$ é contínuo se, e somente se, para toda seminorma contínua $\|\cdot\|\colon Y \to \mathbb{R}$ existe uma seminorma contínua $s\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\|\varphi(x)\| \leq s(x)$ para todo $x \in X$. Dica: para a recíproca, mostre que se $x_d \to 0$ em X, então $\varphi(x_d) \to 0$ em Y; para tanto, note que a convexidade local de Y garante que a convergência desejada ocorre se, e somente se, $\|\varphi(x_d)\| \to 0$ em $\mathbb{R}$ para toda seminorma contínua $\|\cdot\|\colon Y \to \mathbb{R}$; finalmente, use a seminorma dada por hipótese e proceda como na demonstração do Teorema 5.2.44. ■

Exercício 5.95. Sejam V e W espaços (semi) normados e $T\colon V \to W$ um mapa linear. Mostre que T é contínuo se, e somente se, existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in V$. Dica: use e abuse dos exercícios anteriores. ■

Exercício 5.96. Para espaços (semi) normados V e W, seja $\mathcal{L}(V, W)$ a família dos mapas lineares contínuos da forma $V \to W$. Mostre que a regra $\|\cdot\|: \mathcal{L}(V, W) \to \mathbb{R}$, que faz $\|T\| := \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\|$ para cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$, é uma (semi) norma em $\mathcal{L}(V, W)$. Em quais situações $\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço de Banach? Dica: para a segunda parte, observe que $\mathcal{L}(V, W)$ é de Banach se, e somente se, W também é de Banach. ■

Observação 5.2.103. Quando V e W são normados, a norma acima é a *norma usual* de $\mathcal{L}(V, W)$. Em particular, $E^\star$ é um espaço de Banach com tal norma sempre que E é normado. △

Exercício 5.97. Sejam E um espaço normado. Mostre que se $x \in E \setminus \{0\}$, então existe $\varphi \in E^\star$ satisfazendo $\varphi(x) = \|x\|$ e $\|\varphi\| = \sup_{\|v\|=1} |\varphi(v)| = 1$. Dica: Hahn-Banach. ■

Exercício 5.98. Pense rápido: a topologia produto em $\mathbb{K}^\omega$ é normável? Dica/*spoiler*: Exemplo 5.2.64.■

Exercício 5.99. Seja E um espaço normado. Mostre que se B é uma base finita de E, então existem funcionais $\varphi_b \in E^\star$ tais que para cada $r > 0$

$$\bigcap_{b \in B} \varphi_b^{-1}[(-\gamma, \gamma)] \subseteq B_{\|\cdot\|}(0, r)$$

para algum $\gamma > 0$. Conclua que se $\dim_{\mathbb{K}} E < \aleph_0$, então a topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ é a topologia gerada pela norma $\|\cdot\|$. ■

Exercício 5.100. Seja E um espaço normado. Mostre que se a topologia fraca $\sigma(E, E^\star)$ tem caráter enumerável, então E tem dimensão finita. Dica: note que os abertos básicos de $\sigma(E, E^\star)$ em torno de $0 \in E$ são da forma $(F, \varepsilon) := \{x \in E : \forall \varphi \in F\ |\varphi(x)| \leq \varepsilon\}$, para $F \subseteq E^\star$ finito e $\varepsilon > 0$; depois, fixada uma base local enumerável $\mathcal{B}$ para $0 \in E$, use o distante Exercício K.68 para concluir que $E^\star = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} E_B$, onde $B := (F_B, \varepsilon_B)$ e $E_B := \langle F_B \rangle$; use a completude de $E^\star$ com sua norma usual para concluir que $\dim_{\mathbb{K}} E < \aleph_0$ (via Teorema de Baire). ■

Sortidos

Exercício 5.101. Sejam E um e.v.t. sobre um corpo topológico $\mathbb{K}$ e $v \in E$ um vetor fixado. Mostre que a função $\mathbb{K} \to E$ que faz $k \mapsto kv$ é contínua. ■

Exercício 5.102. Mostre que todo e.v.t. sobre $\mathbb{K}$ é conexo. Dica: escreva E como reunião de conexos com um ponto em comum. ■

Exercício 5.103. Sejam E um e.v.t. sobre $\mathbb{K}$ e V uma vizinhança de 0. Mostre que V contém uma base de E. Conclua que subespaços próprios tem interior vazio. Dica: Proposição 5.1.24 + exercício anterior.■

Exercício 5.104. Mostre que os subespaços vetoriais de um e.v.t. são rarefeitos ou densos. Dica: encare o exercício anterior até que ele te encare de volta (e lembre-se de que o fecho topológico de um subespaço vetorial é um subespaço vetorial). ■

Exercício 5.105. Sejam E um e.v.t. de Hausdorff e $F \subseteq E$ um subespaço vetorial. Mostre que se $\dim_{\mathbb{K}} F < \aleph_0$, então F é fechado em E. Dica: note que F é de Hausdorff. ■

Exercício 5.106. Mostre que se E é um espaço de Banach, então $\dim_{\mathbb{K}} E \neq \aleph_0$. ■

Exercício 5.107. Como generalizar o resultado anterior para e.v.t's de Hausdorff? ■

Exercício 5.108 (Não-magro ⇒ Baire)**.** Mostre que se E é um e.v.t. não-magro, então E é de Baire. Dica: note que se E não é de Baire, então $0 \in E$ tem uma vizinhança magra em E (Exercício 4.70). ■

Exercício 5.109. Sejam X um espaço topológico, Y um espaço uniforme e $\mathcal{E}$ uma família de funções da forma $X \to Y$. Mostre que se $\mathcal{E}$ é equicontínua, então f é contínua para toda $f \in \mathcal{E}$. ■

Exercício 5.110. Sejam X e Y e.v.t's e $f: X \to Y$ uma função linear. Mostre que se existe uma vizinhança U de $0 \in X$ com $f[U]$ linearmente limitada, então f é contínua. Dica: use a definição de limitação linear juntamente com o continuidade da multiplicação. ■

Exercício 5.111. Uma função $f\colon X \to Y$ entre e.v.t's é dita **localmente limitada** se $f[B]$ é linearmente limitado para todo subconjunto $B \subseteq X$ linearmente limitado.

a) Mostre que se f é linear e contínua, então f é localmente limitada.

b) Assuma que f seja linear e localmente limitada. Mostre que se X for pseudometrizável, então f é contínua. Dica: a pseudometrizabilidade permite tomar uma base local enumerável e decrescente de abertos para $0 \in X$, de modo que se f não fosse contínua, seria possível tomar uma sequência convergente esperta da forma $(nu_n)_n$ com $nu_n \to 0$ e $f(u_n) \notin V$ para uma vizinhança balanceada V de 0; daí, a hipótese sobre f aliada ao balanceamento de V permitem encerrar o argumento (pode ainda ser útil lembrar do Corolário 5.2.30). ■

Exercício 5.112. Supondo E um espaço normado, prove o Teorema 5.2.34 sem apelar para quocientes. Dica: suponha $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ não nula com $\ker\varphi$ fechado; agora, se φ não for contínua, então o Exercício 5.110 garante que toda vizinhança V de $0 \in E$ é tal que $\varphi[V]$ é ilimitada; use isso para obter uma sequência $(y_n)_n$ em $\ker\varphi$ com $y_n \to x$ para algum $x \notin \ker\varphi$. ■

Exercício 5.113. Para $n \in \omega$, denote por X o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ munido de uma topologia de Hausdorff compatível com sua estrutura vetorial, enquanto $\mathbb{K}^n$ denota o próprio espaço com a topologia produto.

a) Exiba uma norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{K}^n$ que induza a topologia produto. Dica: embora qualquer norma sirva *a posteriori*, é mais fácil trabalhar com a norma do máximo.

b) Mostre que $\mathrm{Id}\colon \mathbb{K}^n \to X$ é contínua. Dica: note que Id é soma finita de funções lineares da forma $f\colon \mathbb{K}^n \to X$, com $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im}(f) = 1$, de modo que pode-se usar o exercício anterior, juntamente com o Exercício 5.46, a fim de adaptar a demonstração do Corolário 5.2.35 e mostrar que cada f é contínua.

c) Mostre que $S := \{v \in \mathbb{K}^n : \|v\| = 1\}$ é compacto em $\mathbb{K}^n$ e conclua que S também é compacto na topologia de X. Dica: Heine-Borel para a primeira parte.

d) Usando o fato de X ser de Hausdorff, obtenha uma vizinhança V de 0 que não intercepta S. Faça isso de modo que V seja balanceado. Dica: use o Exercício 5.68 para a última parte.

e) Observe que deve-se ter $V \subseteq B$, onde $B := \{v \in \mathbb{K}^n : \|v\| < 1\}$. Dica: se algum $v \in V$ satisfaz $\|v\| \geq 1$, o que ocorreria com $\frac{1}{\|v\|} \cdot v$ com relação ao item anterior?

f) Mostre que B é uma vizinhança de $0 \in X$ e, com isso, conclua que Id é um homeomorfismo. ■

Exercício 5.114. Sejam X um espaço topológico com uma função contínua $X \to \mathbb{R}$ ilimitada. Mostre que a topologia da convergência uniforme em $\mathcal{C}(X)$ não é compatível com sua estrutura vetorial. Dica: investigue a continuidade da multiplicação no par $(0, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}(X)$, cuja imagem pela multiplicação é a função nula; será útil lembrar da Proposição 4.1.36 que descreve as *entourages* básicas de $\mathcal{C}(X)$ como os conjuntos da forma $E_r^X := \{(g, h) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) : \forall x \in X\, |g(x) - h(x)| < r\}$, para $r > 0$. ■

Exercício 5.115. Mostre que a topologia de $\mathbb{K}^{\oplus\omega}$ herdada da topologia produto em $\mathbb{K}^\omega$ não é oriunda de uma norma. Dica: imite o que se faz no Exemplo 5.2.64. ■

Exercício 5.116. Sejam X um espaço topológico e $K \subseteq X$. Dizemos que K é **condicionalmente limite-compacto** se todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em X.

a) Mostre que se $f\colon X \to Y$ é contínua e K é condicionalmente limite-compacto, então $f[K]$ é condicionalmente limite-compacto.

a) Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ com a topologia usual. Mostre que se $K \subseteq \mathbb{K}$ é condicionalmente limite-compacto, então K é limitado. Dica: suponha que não.

Conclua que se $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^X$ é condicionalmente limite-compacto, então $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{K}$ é limitado, para todo $x \in X$ fixado. Dica: π_x é contínua. ■

Exercício 5.117. Seja E um e.v.t. localmente convexo tal que $\overline{\{0\}} \neq E$. Mostre que E é topologicamente isomorfo a um e.v.t. da forma $Y \times \mathbb{K}$. Dica: use o Teorema de Hahn-Banach para encontrar um funcional contínuo e não-nulo $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$, e faça $Y := \ker\varphi$. ■

Exercício 5.118 (Pode ser conveniente conferir os Exercícios 1.250 e 3.105)**.** Neste exercício veremos um roteiro para demonstrar a equivalência, em ZF, entre as asserções indicadas abaixo.

- **UF**: Lema do Ultrafiltro (*Ultrafilter Lemma*).
- **TK**: Teorema de Tychonoff restrito a produtos de espaços compactos de Hausdorff.
- **BA**: Teorema de Banach-Alaoglu.

Atenção: ao longo deste roteiro, o uso do Axioma da Escolha está PROIBIDO.

a) Note que (UF) $\Rightarrow$ (TK) e (TK) $\Rightarrow$ (BA) já foram estabelecidos no texto.

b) ((BA) $\Rightarrow$ (UF)). Para um conjunto Ω e um filtro próprio $\mathcal{F}$ em Ω, vamos obter um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ em Ω com $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{u}$.

   (i) Convença-se de que $X := \mathcal{B}(\Omega) := \{f \in \mathbb{R}^\Omega : f \text{ é limitada}\}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, normado pela função $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}$ que faz $\|f\| := \sup_{w\in\Omega} |f(w)|$.

   (ii) Seja $V := B_{\|\cdot\|}[0,1] := \{\varphi \in X^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$, onde $\|\varphi\|$ indica a norma de funcional definida no Exemplo 5.2.92. Note que V é compacto com a topologia fraca estrela. Dica: (BA).

   (iii) Para cada $w \in \Omega$, considere $\mathrm{ev}_w \colon X \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{ev}_w(f) := f(w)$ para cada $f \in X$. Mostre que a correspondência $w \mapsto \mathrm{ev}_w$ determina uma função injetora da forma $\mathrm{ev} \colon \Omega \to V$.

   (iv) Por conta do item anterior, não há risco em assumir $\Omega \subseteq V$. Em particular, os elementos de $\mathcal{F}$ podem ser vistos, por meio de tal suposição, como subconjuntos de V. Com isso em mente, mostre que o fecho topológico (tomado em $X^\star$) de cada $F \in \mathcal{F}$ está contido em V, de tal forma que $\mathcal{K} := \left\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\}$ é uma família de fechados de V com a p.i.f.. Dica: V é compacto no espaço de Hausdorff $X^\star$; além disso, $\mathcal{F}$ já tem p.i.f. por ser um filtro.

   (v) Mostre que existe $v \in \bigcap \mathcal{K}$. Dica: Proposição 1.2.77 + Observação 1.2.78.

   (vi) Mostre que $|v(f)| \leq \|f\|$ para qualquer $f \in X$. Dica: $v \in V$.

   (vii) Para $S \subseteq \Omega$, mostre que $v(\chi_S) \in \{0,1\}$. Dica: note que para $S \subseteq \Omega$, $\chi_S \in X$, de maneira que $\widehat{\chi_S} \colon X^\star \to \mathbb{R}$ deve ser contínuo na topologia fraca estrela (Exemplo 5.2.89); em particular, se $U \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto com $0,1 \notin U$ e $v(\chi_S) \in U$, então $v \in \widehat{\chi_S}^{-1}[U]$; pelo modo como v foi tomado, para $F \in \mathcal{F}$ fixado deve existir $w \in F$ com $\mathrm{ev}_w \in \widehat{\chi_S}^{-1}[U]$, porém $\mathrm{ev}_w(\chi_S) = \chi_S(w) \in \{0,1\}$.

   (viii) Finalmente, defina $\mu \colon \wp(\Omega) \to \mathbb{R}$ fazendo $\mu(S) := v(\chi_S)$. Mostre que a família
$$\mathfrak{u} := \{G \in \wp(\Omega) : \mu(G) = 1\}$$
é o ultrafiltro procurado. Dica: adapte o item anterior para mostrar que $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{u}$; já para mostrar que $\mathfrak{u}$ é ultrafiltro, mostre antes que μ é uma medida *finitamente aditiva*[116], e depois use as propriedades de medida na verificação das condições de ultrafiltro dadas pelo Exercício 1.139 (sugestão: prefira a condição (UF$_2$)). ■

Observação 5.2.104. O roteiro acima corrige um pequeno erro na exposição de Schechter [104], que faz uso da *existência* de *nets* convergentes, o que depende do Axioma da Escolha[117]. Cabe destacar que a técnica utilizada na demonstração se vale de uma relação curiosa entre ultrafiltros num conjunto X e medidas finitamente aditivas (não-triviais) sobre a σ-álgebra $\wp(X)$. O leitor pode pensar a respeito. △

5.3 Bônus: Como integrar em grupos

Como o nome desta seção sugere, vamos estabelecer um método para realizar *integração* em grupos topológicos. Porém, a fim de não entrar demasiadamente nos domínios da Teoria da Medida, muitas considerações técnicas e aplicações sobre *medidas* serão omitidas – confira, porém, a última subseção. Em tal jornada, a exposição de Leopoldo Nachbin [81] será seguida com pouquíssimas alterações[118].

[116] $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ sempre que A e B são subconjuntos disjuntos.

[117] Trívia: o (ex-) professor Schechter foi muito atencioso ao responder minhas mensagens em meados de 2017, quando encontrei o problema; a correção já está disponível em sua página oficial (confira a seção 28.29 em https://math.vanderbilt.edu/schectex/ccc/addenda/partd.html).

[118] Estas, por sua vez, adaptadas do manuscrito de Linus Kramer, disponível em https://www.uni-muenster.de/AGKramer/content/LCManuscript.pdf.

Definição 5.3.1. Sejam X um espaço topológico e $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ uma função. O **suporte** da função φ é o subconjunto $\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}}$. ¶

Exercício 5.119. Mostre que o suporte de uma função φ é o menor fechado de X tal que φ se anula no complementar. ■

Fixado um espaço topológico X, vamos considerar

$$\mathcal{K}(X) := \{\varphi \in \mathcal{C}(X) : \operatorname{supp}(\varphi) \text{ é compacto}\}, \tag{5.16}$$

explicitamente, a família de todas funções reais contínuas em X com *suporte compacto*.

Exercício 5.120. Nas condições anteriores, mostre que $\mathcal{K}(X)$ é subespaço vetorial do espaço $\mathcal{C}(X)$. Observe que a igualdade $\mathcal{C}(X) = \mathcal{K}(X)$ ocorre se, e somente se, X é compacto. ■

Dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(X)$, escreveremos $\varphi \leq \psi$ para indicar que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in X$, notação que já foi adotada implicitamente em trechos anteriores, principalmente quando φ ou ψ são funções constantes. Dito isso, para um subconjunto $\mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$, escreveremos $\mathcal{S}_+(X) := \{\varphi \in \mathcal{S} : \varphi \geq 0\}$.

Exercício 5.121. Seja $\mathcal{S}(X) \in \{\mathcal{C}(X), \mathcal{K}(X)\}$. Mostre que $\varphi + \alpha\psi \in \mathcal{S}_+(X)$ sempre que $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_+(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$. ■

Observação 5.3.2 (*Espaços vetoriais ordenados*)**.** Na Definição K.2.55, corpos (totalmente) ordenados foram apresentados como corpos munidos de uma ordem explícita compatível com suas operações. Alternativamente, tais objetos poderiam ter sido introduzidos por meio de *cones totais*: um subconjunto C de $\mathbb{K}$, fechado por adição e multiplicação, satisfazendo $C \cap (-C) = \{0\}$ e $C \cup (-C) = \mathbb{K}$. No caso, se C é um cone total de um corpo $\mathbb{K}$, então ao se declarar $x \leq y$ se $y - x \in C$, resulta que $(\mathbb{K}, \leq)$ é um corpo totalmente ordenado.

Aqui, a situação é semelhante: $\mathcal{K}_+(X)$ e $\mathcal{C}_+(X)$ são *cones* de $\mathcal{K}(X)$ e $\mathcal{C}(X)$, respectivamente, que induzem as ordens parciais $\leq$ definidas pontualmente entre funções. Porém, como não ocorre $\mathcal{S}_+(X) \cup (-\mathcal{S}_+(X)) = \mathcal{S}(X)$, resulta que tais ordens não são totais. O leitor interessado em discussões dessa natureza deve procurar por *espaços de Riesz* na literatura. △

Definição 5.3.3. Um funcional linear $\mu\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ será chamado de **integral positiva** em X se ocorrer $\mu(\varphi) \geq 0$ para toda função $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$. ¶

Como o nome sugere, *integrais* clássicas, como a de *Riemann*, são integrais positivas no sentido acima. Mas o *jardim* das integrais é bem mais amplo[119].

Exemplo 5.3.4. Seja X um espaço topológico discreto. Como os subconjuntos compactos de X são, precisamente, aqueles com cardinalidade finita, segue que $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ se, e somente se, $|\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}| < \aleph_0$. Daí, não é difícil perceber que a função $\mu\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ que faz

$$\mu(\varphi) := \sum_{x \in X} \varphi(x)$$

determina uma integral positiva em X. ▲

[119] Mais do que uma figura de linguagem, a expressão foi uma referência ao livro *A Garden of Integrals* [24], de Frank Burk.

Se, no exemplo anterior, X for um grupo com operação $\cdot$, então a integral positiva μ definida acima é compatível com sua operação, no seguinte sentido: para $s \in X$ fixado e $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, a função

$$\begin{aligned} s\varphi\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(s^{-1}x) \end{aligned}$$

ainda tem *suporte compacto* e satisfaz a identidade $\mu(s\varphi) = \mu(\varphi)$.

Adotando a notação mais sugestiva $\mu(\varphi) := \int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, pode-se reescrever a identidade acima, de modo bem mais apelativo, como

$$\int \varphi(s^{-1}x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

que ganha contornos familiares com a notação aditiva: $\int \varphi(x-s)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

O leitor familiarizado com a *integral de Lebesgue* em $\mathbb{R}^n$ deve estar acostumado com a última identidade, usualmente chamada de *invariância por translação*. Ocorre que, secretamente, é a topologia (de grupo localmente compacto) de $\mathbb{R}^n$ que garante a existência dessa integral. Nesta seção, veremos que algo análogo se verifica para *qualquer* grupo topológico localmente compacto (de Hausdorff!).

5.3.1 Funcionais invariantes por translação

Definição 5.3.5. Sejam G um grupo, $s \in G$ um elemento e $\mathcal{A}$ um conjunto. Para $\varphi \in \mathcal{A}^G$, denotaremos por $s\varphi \in \mathcal{A}^G$ a função $G \to \mathcal{A}$ que faz $x \mapsto \varphi(s^{-1}x)$. ¶

Exercício 5.122 (Confira o Exercício K.66). Mostre que a correspondência $(s, \varphi) \mapsto s\varphi$ define uma ação de G à esquerda de $\mathcal{A}^G$. ■

Proposição 5.3.6. *Sejam G um grupo topológico. Se $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, então $s\varphi \in \mathcal{K}(X)$ para qualquer $s \in G$.*

Demonstração. Note que

$$\{x \in G : \varphi(s^{-1}x) \neq 0\} = \{sx : \varphi(x) \neq 0\} = \Psi_s\left[\{x \in G : \varphi(x) \neq 0\}\right],$$

onde Ψ_s é a translação que faz $x \mapsto sx$. O resultado segue então da compacidade de $\operatorname{supp}(\varphi)$ e do fato de Ψ_s ser um homeomorfismo. □

Em vista da proposição acima, faz sentido procurar por integrais positivas *invariantes*.

Definição 5.3.7. Sejam G um grupo topológico e $\mu\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ uma integral positiva. Diremos que μ é **invariante por translações à esquerda** se $\mu(s\varphi) = \mu(\varphi)$ para quaisquer $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ e $s \in G$. ¶

Observação 5.3.8. Definindo $\varphi s\colon G \to \mathbb{R}$ por $\varphi s(x) := \varphi(xs^{-1})$, obtêm-se uma ação à direita e, de modo análogo, mostra-se que $\varphi s \in \mathcal{K}(G)$ sempre que $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ e $s \in G$. Daí, a definição de *integrais invariantes à direita* segue a mesma estrutura do que se apresentou acima. Evidentemente, esta observação é irrelevante para grupos abelianos. △

Dado um grupo topológico G, a função $\mu\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ que a cada $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ associa o número real $\mu(\varphi) := 0$ é uma integral positiva e invariante por translações (certo?!). A questão é: existe uma integral positiva μ, invariante por translações e tal que $\mu \neq 0$?

Definição 5.3.9. Diremos que μ é uma **integral de Haar** num grupo topológico G se μ for uma integral positiva e invariante por translações (à esquerda) tal que $\mu(\varphi) \neq 0$ para alguma função $\varphi \in \mathcal{K}(G)$. ¶

O nome "Haar" faz referência ao matemático Alfréd Haar, o primeiro a estabelecer a existência de integrais invariantes e não-triviais em grupos topológicos (compactos de Hausdorff e separáveis). A demonstração de existência que veremos, válida para grupos localmente compactos de Hausdorff, se deve a André Weil.

Como $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq G$ é compacto para cada $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, fica bem definido o número

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in G} |\varphi(x)|,$$

que por motivos *óbvios*[120] será chamado de **norma de** φ.

Observação 5.3.10. A fim de facilitar as próximas notações, convém (re) introduzir a *álgebra monoidal*, apresentada no *Kindergarten* (Exercício K.63) para monoides, mas que aqui será utilizada com grupos.

Fixados um anel R, comutativo e com unidade, e um grupo $(G, *, e)$ (não necessariamente topológico), $A[G]$ denota o A-módulo livre com base G dotado de uma multiplicação induzida por G: explicitamente, dados *vetores* $u := \sum_{g \in G} u_g g$ e $v := \sum_{g \in G} v_g g$ de $A[G]$, define-se

$$u * v := \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} u_g v_h (g * h) \right),$$

o que eleva $A[G]$ ao patamar de anel com unidade, mas não necessariamente comutativo.

O ponto importante aqui é outro: *se M for um A-módulo e $G \times M \to M$ for uma ação à esquerda de M, então a correspondência*

$$(v, m) \mapsto vm := \sum_{g \in G} v_g g m$$

determina uma ação $A[G] \times M \to M$. Moralmente, M se torna um $A[G]$-módulo.

Em particular, fica bem definida a correspondência

$$\begin{aligned} \varepsilon \colon A[G] &\to A \\ \sum_{g \in G} v_g g &\mapsto \sum_{g \in G} v_g \end{aligned} \tag{5.17}$$

e o leitor não deve ter dificuldades em verificar que ε é um morfismo de anéis[121]. △

Exercício 5.123. Nas condições anteriores, mostre que $\varepsilon(gu) = \varepsilon(u)$ e $\varepsilon(au) = a\varepsilon(u)$ para quaisquer $g \in G$, $u \in A[G]$ e $a \in A$. ■

Exemplo 5.3.11. Se G é um grupo topológico, então G *age* sobre o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{K}(G)$ por meio da ação $(s, \varphi) \mapsto s\varphi$. Daí, tomando-se $A := \mathbb{R}$ na observação anterior, segue que a ação induzida, de $\mathbb{R}[G]$ sobre $\mathcal{K}(G)$, toma uma soma formal $v := \sum_{g \in G} v_g g$ em $\mathbb{R}[G]$, uma função $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, e as associa à função

$$v\varphi := \sum_{g \in G} v_g (g\varphi),$$

[120]Exercício 5.137.
[121]Na verdade, é um morfismo de A-álgebras.

que, explicitamente, nada mais é do que a soma das funções

$$\begin{aligned} v_g(g\varphi)\colon G &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto v_g \cdot \varphi(g^{-1}x) \end{aligned}$$

para os finitos $g \in G$ tais que $v_g \neq 0$. ▲

Exercício 5.124. Nas condições anteriores, seja

$$\mathbb{R}_+[G] := \{v \in \mathbb{R}[G] : \forall g \in G \quad v_g \geq 0\}.$$

Mostre que se $v \in \mathbb{R}_+[G]$ e $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$, então $v\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$. ■

Lema 5.3.12. *Sejam G um grupo topológico e funções $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_+(G)$. Se $\psi \neq 0$, então existe $v \in \mathbb{R}_+[G]$ tal que $\varphi \leq v\psi$.*

Demonstração. Sejam $\alpha := \|\varphi\|_\infty$ e $\beta := \|\psi\|_\infty$. Pela hipótese sobre ψ resulta $\beta > 0$ e daí, pela definição de supremo, deve-se ter $\emptyset \neq U := \psi^{-1}\left[\left(\frac{\beta}{2}, +\infty\right)\right]$. Agora, a continuidade de ψ garante que U é aberto e, por conseguinte, $\{gU : g \in G\}$ é uma cobertura de G por abertos. Dado que $C := \operatorname{supp}(\varphi)$ é compacto por hipótese, existem $s_0, \ldots, s_n \in G$ tais que $C \subseteq \bigcup_{i \leq n} s_i U$. Note que se $x \in C$, então existem $k \leq n$ e $u \in U$ tais que $x = s_k u$, acarretando

$$(s_k\psi)(x) := \psi(s_k^{-1}s_k u) = \psi(u) > \frac{\beta}{2}.$$

Daí, não é difícil perceber que $v := \dfrac{2\alpha}{\beta}(s_0 + \ldots + s_n) \in \mathbb{R}_+[G]$ satisfaz $\varphi \leq v\psi$, como desejado. □

Definição 5.3.13. Nas condições acima, define-se

$$(\varphi : \psi) := \inf\{\varepsilon(v) : v \in \mathbb{R}_+[G] \text{ e } \varphi \leq v\psi\},$$

onde $\varepsilon\colon \mathbb{R}[G] \to \mathbb{R}$ é o mapa definido em (5.17). ¶

Exercício 5.125. Convença-se de que a definição acima faz sentido. Dica: o lema anterior não foi provado em vão. ■

Intuitivamente, o número $(\varphi : \psi)$ tenta dar a melhor estimativa da função φ por meio de *translações* e *dilatações* finitas de ψ. Um pouco menos precisamente, mas de modo mais visual, pode-se imaginar subespaços compactos $C, K \subseteq G$, com $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$, o que garante finitos elementos $s_0, \ldots, s_n \in G$ tais que

$$C \subseteq \bigcup_{i \leq n} s_i K.$$

Daí, se existisse uma *medida* μ para subconjuntos compactos de G que fosse crescente e invariante por translações, teria-se $\mu(C) \leq n\mu(K)$, de modo que o número natural n seria tal que

$$n \geq \frac{\mu(C)}{\mu(K)},$$

uma estimativa bastante crua de *quantas vezes* K cabe *dentro* de C. Nesse contexto, o menor natural com a propriedade acima poderia ser xingado de $(C : K)$ numa alusão à Definição 5.3.13.

Lema 5.3.14. *Sejam G um grupo topológico e funções $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_+(G)$. Se $\rho, \sigma \in \mathcal{K}_+(G)$ com $\rho, \sigma \neq 0$, então:*

(i) $(g\varphi : \rho) = (\varphi : \rho)$ *para todo* $g \in G$;

(ii) $(r\varphi : \rho) = r(\varphi : \rho)$ *para todo* $r \geq 0$;

(iii) *se* $\varphi \leq \psi$, *então* $(\varphi : \rho) \leq (\psi : \rho)$;

(iv) $(\varphi + \psi : \rho) \leq (\varphi : \rho) + (\psi : \rho)$;

(v) $(\varphi : \sigma) \leq (\varphi : \rho)(\rho : \sigma)$;

(vi) $\|\varphi\|_\infty \leq (\varphi : \rho)\|\rho\|_\infty$.

Demonstração. Ao longo da demonstração, u e v denotarão elementos de $\mathbb{R}_+[G]$.

(i) Note que se $\varphi \leq u\rho$, então para todo $x \in G$ ocorre

$$\varphi(x) \leq \sum_{h \in G} u_h \rho(h^{-1}x),$$

de modo que para $g \in G$ deve-se ter

$$g\varphi(x) := \varphi\left(g^{-1}x\right) \leq \sum_{h\in G} u_h \rho\left(h^{-1}g^{-1}x\right) = \sum_{h\in G} u_h \rho\left((gh)^{-1}x\right) =$$
$$= g\left(\sum_{h\in G} u_h h\right)\rho(x) = gu\,\rho(x),$$

mostrando que $g\varphi \leq gu\,\rho$. Como $(\varphi : \rho) \leq \varepsilon(u)$ e $\varepsilon(u) = \varepsilon(gu)$ pelo Exercício 5.123, resulta que $(g\varphi : \rho) \leq (\varphi : \rho)$. A desigualdade oposta se obtém de modo análogo, pois $(\varphi : \rho) = (g^{-1}g\varphi : \rho) \leq (g\varphi : \rho)$.

(ii) De modo análogo, para o segundo item basta verificar $(r\varphi : \rho) \leq r(\varphi : \rho)$ para qualquer $r > 0$, já que $(0 : \rho) = 0$ vale em geral. Para tanto, note que se $\varphi \leq u\rho$, então $r\varphi \leq ru\,\rho$, com $ru \in \mathbb{R}_+[G]$, acarretando

$$r(\varphi : \rho) \leq r\varepsilon(u) = \varepsilon(ru)$$

e, consequentemente, $(r\varphi : \rho) \leq r(\varphi : \rho)$.

(iii) Note que se $\psi \leq u\rho$, então $\varphi \leq u\rho$, acarretando $(\varphi : \rho) \leq (\psi : \rho)$.

(iv) Agora, se u e v são tais que $\varphi \leq u\rho$ e $\psi \leq v\rho$, então $\varphi + \psi \leq (u + v)\rho$, acarretando

$$\{\varepsilon(u) : \varphi \leq u\rho\} + \{\varepsilon(v) : \psi \leq v\rho\} \subseteq \{\varepsilon(w) : \varphi + \psi \leq w\rho\}$$

em virtude de se ter $u + v \in \mathbb{R}_+[G]$ e $\varepsilon(u + v) = \varepsilon(u) + \varepsilon(v)$, donde segue que $(\varphi + \psi : \rho) \leq (\varphi : \rho) + (\psi : \rho)$.

(v) Justifica-se a desigualdade $(\varphi : \sigma) \leq (\varphi : \rho)(\rho : \sigma)$ de modo análogo ao anterior, valendo-se da identidade $\varepsilon(uv) = \varepsilon(u)\varepsilon(v)$ e do fato de que $uv \in \mathbb{R}_+[G]$.

(vi) Finalmente, note que se $\varphi \leq u\rho$, então

$$\varphi(x) \leq \sum_{h \in G} u_h \rho\left(h^{-1}x\right) \leq \sum_{h \in G} u_h \|\rho\|_\infty = \varepsilon(u)\|\rho\|_\infty$$

para qualquer $x \in G$, acarretando $\|\varphi\|_\infty \leq (\varphi : \rho)\|\rho\|_\infty$, como desejado. □

Exercício 5.126. Nas condições do lema anterior, mostre que vale a identidade

$$(\varphi : \rho) = (\varphi : g\rho)$$

para quaisquer $\varphi, \rho \in \mathcal{K}_+(G)$ e $g \in G$ com $\rho \neq 0$. ■

Exercício 5.127. Sejam $\varphi, \rho \in \mathcal{K}_+(G)$ com $\rho \neq 0$. Mostre que se $\varphi \neq 0$, então $(\varphi : \rho) > 0$. Dica: use o item (vi) do último lema juntamente com o Exercício 5.137. ■

Observação 5.3.15. Pensando em $(\varphi : \rho)$ como uma noção *crua* de integral de φ, o lema anterior garante parte dos comportamentos que esperaríamos de uma integral *assada*. Em particular, até agora, nenhuma hipótese topológica adicional foi considerada sobre o grupo topológico G. Isso mudará em breve. △

Definição 5.3.16. Sejam G um grupo topológico e funções $\varphi^*, F \in \mathcal{K}_+(G)$, com $\varphi^*, F \neq 0$. A **integral aproximada** referente a φ^* e F é a função $\mu_F : \mathcal{K}_+(G) \to \mathbb{R}$ que faz

$$\mu_F(\varphi) := \frac{(\varphi : F)}{(\varphi^* : F)}$$

para cada $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$. ¶

Exercício 5.128. Convença-se de que a definição acima faz sentido. Aproveite para notar que $\mu_F(\varphi^*) = 1$. Dica: use o exercício anterior. ■

Lema 5.3.17 (Propriedades da integral aproximada)**.** *Nas condições anteriores, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_+(G)$ verifica-se:*

(i) $\mu_F(\varphi) > 0$ *se* $\varphi \neq 0$*;*

(ii) $\mu_F(g\varphi) = \mu_F(\varphi)$ *para qualquer* $g \in G$*;*

(iii) $\mu_F(\varphi + \psi) \leq \mu_F(\varphi) + \mu_F(\psi)$*;*

(iv) $\mu_F(\lambda\varphi) = \lambda\mu_F(\varphi)$ *se* $\lambda > 0$*;*

(v) $\mu_F(\varphi) \leq \mu_F(\psi)$ *se* $\varphi \leq \psi$*;*

(vi) $\dfrac{1}{(\varphi^* : \varphi)} \leq \mu_F(\varphi) \leq (\varphi : \varphi^*)$ *se* $\varphi \neq 0$*.*

Exercício 5.129. Demonstre o lema anterior. Dica: use o Lema 5.3.14. ■

5.3.2 A construção de *uma* integral de Haar

Vamos utilizar os resultados anteriores na construção de uma integral de Haar. E, para garantir a validade do processo, precisaremos adicionar uma hipótese ao grupo topológico, além de apelar para a estrutura uniforme subjacente[122].

Lema 5.3.18. *Seja G um grupo topológico localmente compacto e de Hausdorff. Dadas funções $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{K}_+(G)$ e um número real $r > 0$, existe uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$ tal que*

$$\mu_F(\varphi_0) + \mu_F(\varphi_1) \leq \mu_F(\varphi_0 + \varphi_1) + r$$

para qualquer função $F \in \mathcal{K}_+(G)$ com $F \neq 0$ e $\operatorname{supp}(F) \subseteq V$.

Demonstração. Note que nada precisa ser feito se $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Supondo que pelo menos uma delas é diferente de 0, seja $K := \operatorname{supp}(\varphi_0) \cup \operatorname{supp}(\varphi_1)$ e note que existe $\psi \in \mathcal{K}_+(G)$ tal que $\psi(x) = 1$ para todo $x \in K$: se ocorrer $K = G$, então basta tomar $\psi := 1$; caso contrário, as hipóteses adicionais sobre G permitem usar a Proposição 3.3.21, que garante uma extensão contínua $F : G \to \mathbb{R}$ da função $f : K \to \mathbb{R}$ que faz $f(x) := 1$ para todo $x \in K$ e, mais ainda, um compacto $K' \subseteq G$ com $F(x) = 0$ para todo $x \notin K'$, acarretando $\operatorname{supp}(F) \subseteq K'$ e, portanto, $\psi := |F| \in \mathcal{K}_+(G)$.

Para $\delta > 0$, definamos $\varphi_\delta := \varphi_0 + \varphi_1 + \delta\psi$, bem como funções auxiliares $h_0, h_1 \in \mathcal{K}_+(G)$, fazendo:

$$h_i(x) := \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_\delta(x)} \quad \text{se } \varphi_\delta(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad h_i(x) := 0 \quad \text{caso contrário,}$$

para $i \in \{0, 1\}$. Verifica-se $h_i \in \mathcal{K}_+(G)$ pois h_i é contínua tanto no aberto $U_\delta \subseteq G$ em que φ_δ não se anula quanto no complementar de K, já que para $x \notin K$ ocorre $\varphi_i(x) = 0$ e, portanto, $h_i(x) = 0$. Como $K \subseteq U_\delta$, tem-se $G = U_\delta \cup (G \setminus K)$ e, por conseguinte, h_i é contínua. Daí, a inclusão $\operatorname{supp}(h_i) \subseteq K$, com $h_i \geq 0$, assegura $h_i \in \mathcal{K}_+(G)$. Será muito conveniente não esquecer de duas coisas: $\varphi_\delta h_i = \varphi_i$ e $h_0 + h_1 \leq 1$.

Agora, apelaremos para a continuidade uniforme. Como $\operatorname{supp}(h_i) := K_i$ é compacto, o Exercício 4.28 garante que h_i é uniformemente contínua. Logo, para $\delta' > 0$ fixado, existe uma vizinhança $V_i \in \mathcal{N}_e$ tal que

$$y^{-1}x \in V \Rightarrow |h_i(x) - h_i(y)| < \delta', \tag{5.18}$$

de modo que $V := V_0 \cap V_1$ satisfaz a condição acima para $i \in \{0, 1\}$. Mostraremos que a vizinhança V tem a propriedade desejada.

Com efeito, para $F \in \mathcal{K}_+(G)$ com $\operatorname{supp}(F) \subseteq V$, fixemos $u \in \mathbb{R}_+[G]$ satisfazendo $\varphi_\delta \leq uF$. Note que $(\varphi_\delta : F) \leq \varepsilon(u)$. Explicitamente, tal desigualdade se traduz em

$$\varphi_\delta(x) \leq \sum_{g \in G} u_g F(g^{-1}x)$$

para cada $x \in G$, onde o subconjunto $\{g \in G : u_g \neq 0\}$ é finito. Logo,

$$\varphi_\delta(x) h_i(x) \leq \sum_{g \in G} u_g h_i(x) F(g^{-1}x). \tag{5.19}$$

Agora, para $x, g \in G$ fixados, com $u_g \neq 0$, têm-se dois casos: $g^{-1}x \in V$ ou $g^{-1}x \notin V$. Se ocorrer o primeiro caso, então a condição (5.18) garante que $|h_i(x) - h_i(g)| < \delta'$, donde

[122] Conferir brevemente a Subseção 5.1.1 pode ser útil.

em particular resulta $h_i(x) \leq h_i(g) + \delta'$. Se ocorrer o segundo caso, então $F(g^{-1}x) = 0$, pois $\operatorname{supp}(F) \subseteq V$. Daí, a identidade $\varphi_\delta h_i = \varphi_i$ e a desigualdade (5.19) asseguram

$$\varphi_i(x) \leq \sum_{g\in G} u_g(h_i(g) + \delta')F(g^{-1}x),$$

i.e., $\varphi_i \leq \sum_{g\in G} u_g(h_i(g) + \delta' gF$ e, por conseguinte, $(\varphi_i : F) \leq \sum_{g\in G} u_g(h_i(g) + \delta')$. Logo, em decorrência da desigualdade $h_0 + h_1 \leq 1$, obtém-se

$$(\varphi_0 : F) + (\varphi_1 : F) \leq \sum_{g\in G} u_g(h_0(g) + h_1(g) + 2\delta') \leq \sum_{g\in G} u_g(1 + 2\delta') = \varepsilon(u)(1 + 2\delta'),$$

donde o modo como se tomou $u \in \mathbb{R}_+[G]$ implica $(\varphi_0 : F) + (\varphi_1 : F) \leq (1 + 2\delta')(\varphi_\delta : F)$.

Estamos quase no fim: ao se dividir a última desigualdade pelo número $(\varphi^* : F) > 0$, infere-se que

$$\begin{aligned}\mu_F(\varphi_0) + \mu_F(\varphi_1) &\leq (1 + 2\delta')\mu_F(\underbrace{\varphi_0 + \varphi_1 + \delta\psi}_{\varphi_\delta}) \leq \\ &\leq \mu_F(\varphi_0 + \varphi_1) + 2\delta'(\varphi_0 + \varphi_1 : \varphi^*) + \delta(1 + 2\delta')(\psi : \varphi^*),\end{aligned}$$

onde a última desigualdade se deve aos itens (iii), (iv) e (vi) do último lema. Portanto, basta escolher δ' e δ apropriados a fim de assegurar a desigualdade desejada. □

Teorema 5.3.19 (A. Weil, H. Cartan[123]). *Se G é um grupo topológico localmente compacto de Hausdorff, então existe $\mu\colon \mathcal{K}_+(G) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as quatro condições a seguir:*

(i) *(invariância à esquerda) $\mu(s\varphi) = \mu(\varphi)$ para quaisquer $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ e $s \in G$;*

(ii) *(aditividade) $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_+(G)$;*

(iii) *(homogeneidade) $\mu(\lambda\varphi) = \lambda\mu(\varphi)$ para quaisquer $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ e $\lambda > 0$;*

(iv) *(não-trivialidade) $\mu \neq 0$, i.e., existe $\varphi^* \in \mathcal{K}_+(G)$ tal que $\mu(\varphi^*) \neq 0$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{I} := \mathcal{K}_+(G)\setminus\{0\}$ e $\varphi^* \in \mathcal{I}$. Tomando-se μ_F como na Definição 5.3.16 para $F \in \mathcal{I}$, o item (vi) do Lema 5.3.17 garante que

$$\mu_F(\varphi) \in \left[\frac{1}{(\varphi^* : \varphi)}, (\varphi : \varphi^*)\right] := K_\varphi$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{I}$, o que permite considerar o espaço compacto e não-vazio

$$X := \prod_{\varphi\in\mathcal{I}} K_\varphi.$$

Note que, por construção, ocorre $p_F := (\mu_F(\varphi))_{\varphi\in\mathcal{I}} \in X$ para cada $F \in \mathcal{I}$. Agora, chamando $P_V := \{p_F : F \in \mathcal{I} \text{ e } \operatorname{supp}(F) \subseteq V\}$ para cada vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$, mostraremos que existe $\mu := (\mu_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{I}} \in \bigcap_{V\in\mathcal{N}_e} \overline{P_V}$, o que será bem mais simples do que parece: basta observar que se $V, V_0, V_1 \in \mathcal{N}_e$ são tais que $V \subseteq V_0 \cap V_1$, então $P_V \subseteq P_{V_0} \cap P_{V_1}$, com $P_V \neq \emptyset$, pois daí $\{P_V : V \in \mathcal{N}_e\}$ *será* uma família de subconjuntos de X com a p.i.f., donde a compacidade de X garantirá a $\mathcal{I}$-upla μ desejada. O prazer de verificar isso será deixado a cargo do leitor.

[123] A demonstração que será apresentada se deve a André Weil (1940) e usa o Axioma da Escolha de forma fundamental. Já a prova apresentada por Henri Cartan no mesmo ano não sofre de tal "vício", embora seja bem mais intrincada. O leitor interessado na abordagem de Cartan pode conferir a seção correspondente no maravilhoso texto de Nachbin [81].

Enfim, tal $\mathcal{I}$-upla μ induz uma função (xingada com a mesma letra) $\mu\colon \mathcal{K}_+(G) \to \mathbb{R}$ com as propriedades desejadas, bastando para isso estipular $\mu(\varphi) := \mu_\varphi$ para $\varphi \in \mathcal{I}$ e $\mu(0) := 0$. De fato, a observação fundamental é a de que para $n \in \omega$, $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{I}$, $r > 0$ e $V \in \mathcal{N}_e$ quaisquer, existe $F \in \mathcal{I}$ com $\operatorname{supp}(F) \subseteq V$ tal que

$$|\mu(\varphi_i) - \mu_F(\varphi_i)| < r \tag{5.20}$$

para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$: chamando $U_\varphi := (\mu_\varphi - r, \mu_\varphi + r) \cap K_\varphi$ se $\varphi \in \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ e $U_\varphi := K_\varphi$ caso contrário, segue que $U := \prod_{\varphi \in \mathcal{I}} U_\varphi$ é um aberto de X que contém μ e, por conta de $\mu \in \overline{P_V}$, deve existir $p_F \in P_V \cap U$. Verifiquemos as condições impostas.

(i) Para $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ e $s \in G$, basta tomar $\varphi_0 := \varphi$ e $\varphi_1 := s\varphi$ em (5.20), com $V := G$, pois daí

$$|\mu(\varphi) - \mu(s\varphi)| \leq |\mu(\varphi) - \mu_F(\varphi)| + |\mu_F(\varphi) - \varphi(s\varphi)| < r + |\mu_F(s\varphi) - \mu(s\varphi)| < 2r,$$

onde se usou o fato de que $\mu_F(\varphi) = \mu_F(s\varphi)$, garantido pelo item (i) do Lema 5.3.17.

(ii) Para $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_+(G)$ e $r > 0$, o lema anterior garante *uma* vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $\mu_F(\varphi) + \mu_F(\psi) \leq \mu_F(\varphi + \psi) + r$ para qualquer $F \in \mathcal{I}$ com $\operatorname{supp}(F) \subseteq V$. Logo, tomando-se F como em (5.20) com relação a $\varphi_0 := \varphi$, $\varphi_1 := \psi$ e $\varphi_2 := \varphi + \psi$, obtém-se

$$|\mu(\varphi + \psi) - (\mu(\varphi) + \mu(\psi))| < 4r.$$

(iii) Analogamente, mostra-se que $\mu(\lambda\varphi) = \lambda\mu(\varphi)$ para quaisquer $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ e $\lambda > 0$.

(iv) Finalmente, $|\mu(\varphi^*) - 1| \leq |\mu(\varphi^*) - \mu_F(\varphi^*)| + |\mu_F(\varphi^*) - 1|$ para algum $F \in \mathcal{I}$ como em (5.20), donde segue que $|\mu(\varphi^*) - 1| < r$, posto que $\mu_F(\varphi^*) = 1$. □

Exercício 5.130. Complete os detalhes da demonstração acima. Dica: em particular, para verificar que $\{P_V : V \in \mathcal{N}_e\}$ tem a p.i.f., lembre-se de usar a compacidade local de G para garantir que $P_V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{N}_e$. ■

Exercício 5.131. Nas condições anteriores, mostre que

$$\mu(\varphi) \geq \frac{1}{(\varphi^* : \varphi)} > 0$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{I}$. ■

Apesar de poderosíssimo, o teorema anterior ainda não garante a existência de uma integral de Haar em G. No entanto, em virtude do que se provou, a existência decorre automaticamente do próximo

Exercício 5.132. Seja $\mu\colon \mathcal{K}_+(G) \to \mathbb{R}$ uma função com as propriedades (i) – (iv) do teorema anterior. Mostre que existe um único funcional linear $\widetilde{\mu}\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ que estende μ. Em particular, note que μ é uma integral invariante por translações. Dica: note que cada $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ se escreve como $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, com $\varphi^+, \varphi^- \in \mathcal{K}_+(G)$, e defina $\widetilde{\mu}(\varphi) := \mu(\varphi^+) - \mu(\varphi^-)$. ■

Corolário 5.3.20. *Se G é um grupo localmente compacto de Hausdorff, então existe uma integral de Haar sobre G.*

5.3.3 Convoluções, Fubini e *unicidade*

A *lenta* (e nem tão dolorosa) construção da integral de Haar feita acima dependeu da escolha de uma função $\varphi^* \in \mathcal{K}_+(G) \setminus \{0\}$ que funcionou como *a unidade padrão* da medida, i.e., uma função que satisfaz $\mu(\varphi^*) = 1$. Contudo, qualquer função $\varphi \in \mathcal{K}_+(G) \setminus \{0\}$ poderia ter sido usada em seu lugar, o que resultaria em *outra* integral de Haar, digamos $\nu\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$. Ocorre que, embora possam ser distintas, quaisquer duas integrais de Haar estão *intrinsecamente* relacionadas. Dedicaremo-nos a entender isso nesta subseção.

Definição 5.3.21. Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subespaço. Denotaremos por $\mathcal{K}(X, S)$ a família das funções $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ tais que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq S$. ¶

Lema 5.3.22. *Seja X um espaço topológico. Se $\mu\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ é uma integral positiva em $\mathcal{K}(X)$, então μ é crescente.*

Demonstração. Se $f, g \in \mathcal{K}(X)$ são tais que $f \leq g$, então $g - f \in \mathcal{K}_+(X)$ e daí $\mu(g - f) \geq 0$, donde a linearidade de μ acarreta $\mu(g) - \mu(f) \geq 0$ e, portanto, $\mu(g) \geq \mu(f)$. □

Proposição 5.3.23. *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff dotado de uma integral positiva $\mu\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$. Se $K \subseteq X$ é compacto, então a restrição de μ ao subespaço $\mathcal{K}(X, K)$ é contínua com a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demonstração. Seja $F \in \mathcal{K}_+(X)$ tal que $F(x) := 1$ para todo $x \in K$, o que pode ser feito pois X é localmente compacto de Hausdorff (Proposição 3.3.21). Dada uma função $\varphi \in \mathcal{K}(X, K)$, verifica-se

$$-\|\varphi\|_\infty F(x) \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty F(x)$$

para todo $x \in X$. Logo, pelo lema anterior, deve ocorrer

$$-\|\varphi\|_\infty \mu(F) \leq \mu(\varphi) \leq \|\varphi\|_\infty \mu(F)$$

e, consequentemente, $|\mu(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \mu(F)$. A continuidade de μ decorre então do Teorema 5.2.44, posto que a correspondência $\varphi \mapsto \|\varphi\|_\infty \mu(F)$ determina uma seminorma contínua em $\mathcal{K}(X, K)$. Alternativamente, note que se $(\varphi_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência em $\mathcal{K}(X, K)$ com $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$, então $|\mu(\varphi_n)| \to 0$, mostrando que μ é contínua em 0. □

A argumentação para garantir a unicidade da integral de Haar usará a noção de *convolução* e, para isso, será conveniente canonizar a notação clássica para integrais.

Definição 5.3.24. Sejam X um espaço topológico e $\mu\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ uma integral positiva sobre X. Escreveremos

$$\int_X \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

para indicar o número $\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$, para cada $\varphi \in \mathcal{K}(X)$. ¶

Observação 5.3.25. Evidentemente, a variável "x" acima é *muda* e pode ser *trocada* por qualquer outra letra. Por exemplo, se $x \in X$ estiver fixado e $\psi \in \mathcal{K}(X)$, então faz sentido escrever

$$\int_X \psi(x)\varphi(y)\, \mathrm{d}\mu(y) = \psi(x) \int_X \varphi(y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

já que, neste caso, $\psi(x)$ é *constante* em relação a y. Note que, alternativamente, a identidade acima também se escreveria como $\mu(\psi(x)\varphi) = \psi(x)\mu(\varphi)$. △

Definição 5.3.26. Sejam G um grupo topológico e μ uma integral positiva sobre G. Para $\varphi, \psi \in \mathcal{K}(G)$, define-se a função $\varphi * \psi \colon G \to \mathbb{R}$ por meio da regra

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_G \varphi(y)\psi(y^{-1}x)\, \mathrm{d}\mu(y),$$

chamada de **convolução das funções φ e ψ com respeito à integral μ.** ¶

Observação 5.3.27. O leitor avesso à notação integral clássica pode escrever

$$(\varphi * \psi)(x) = \mu\left(\varphi \cdot \check{\psi}x^{-1}\right),$$

onde $\check{\psi} \colon G \to \mathbb{R}$ é a função que faz $\check{\psi}(y) := \psi(y^{-1})$. Igualmente precisa? Sim. Mas bem menos prática. △

A convolução carece de muitas considerações. A mais urgente delas é a própria definição, que só faz sentido se for possível verificar que $\varphi \cdot \check{\psi}x^{-1} \in \mathcal{K}(G)$ para todo $x \in G$:

✓ como $\check{\psi} = \psi \circ \mathrm{inv}$, com $\mathrm{inv} \colon G \to G$ um homeomorfismo e $\psi \in \mathcal{K}(G)$, segue que $\check{\psi} \in \mathcal{K}(G)$, e daí mostra-se que $\check{\psi}x^{-1} \in \mathcal{K}(G)$ como na Proposição 5.3.6;

✓ como $\varphi, \check{\psi}x^{-1} \in \mathcal{K}(G)$, conclui-se que $\varphi \cdot \check{\psi}x^{-1} \in \mathcal{K}(G)$ em virtude do próximo

Exercício 5.133. Sejam X um espaço topológico e $\varphi, \psi \in \mathcal{K}(X)$. Mostre que $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{K}(X)$. Dica: se $\varphi(x)\psi(x) \neq 0$, então $\varphi(x) \neq 0$ e $\psi(x) \neq 0$. ■

A discussão acima atesta, tão somente, que $\varphi * \psi$ é uma função da forma $G \to \mathbb{R}$. Contudo, para o que faremos, será preciso *integrar* a função $\varphi * \psi$. Portanto, deve-se garantir que $\varphi * \psi \in \mathcal{K}(G)$. Isto é bem mais delicado.

Lema 5.3.28 (Exponencialidade)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos, com $K \subseteq X$ compacto e $\varphi \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que para cada $y \in Y$ a função*

$$\begin{aligned} \varphi_y \colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x, y) \end{aligned}$$

seja contínua e com $\operatorname{supp}(\varphi_y) \subseteq K$. Então a função

$$\begin{aligned} \Phi \colon Y &\to (\mathcal{K}(X), \|\cdot\|_\infty) \\ y &\mapsto \varphi_y \end{aligned}$$

é contínua se, e somente se, φ é contínua.

Demonstração. Suponha que Φ é contínua. Para $(a, b) \in X \times Y$ e $r > 0$ fixados, existe um aberto $V \subseteq Y$ com $b \in Y$ tal que $\|\Phi(y) - \Phi(b)\|_\infty < r$ para todo $y \in V$, o que acarreta $|\varphi(x, y) - \varphi(x, b)| < r$ para todo $x \in X$. Como $\Phi(b) := \varphi_b$ é contínua por hipótese, existe um aberto $U \subseteq X$ com $a \in U$ e $|\varphi(x, b) - \varphi(a, b)| < r$ sempre que $x \in U$. Daí, se $(x, y) \in U \times V$, então

$$|\varphi(x, y) - \varphi(a, b)| < |\varphi(x, y) - \varphi(x, b)| + |\varphi(x, b) - \varphi(a, b)| < 2r,$$

mostrando que φ é contínua em (a, b).

Para a recíproca, fixemos $b \in Y$ e $r > 0$. Em virtude da continuidade de φ, para cada $a \in X$ existem abertos $U_a \subseteq X$ e $V_a \subseteq Y$ com $(a, b) \in U_a \times V_a$ tais que $|\varphi(x, y) - \varphi(a, b)| < r$ para qualquer $(x, y) \in U_a \times V_a$. Agora, pela compacidade de K, existe um subconjunto finito $F \subseteq K$ com $K \subseteq \bigcup_{a \in F} U_a$, donde é fácil concluir que se $y \in V := \bigcap_{a \in F} V_a$, então $|\varphi(x, y) - \varphi(x, b)| < 2r$ para todo $x \in X$. Logo, $\|\Phi(y) - \Phi(b)\|_\infty \leq 2r$ para todo $y \in V$, mostrando que Φ é contínua em b. □

Proposição 5.3.29. *Sejam X e Y espaços topológicos, com ambos localmente compactos de Hausdorff*[124]*. Se $\varphi \in \mathcal{K}(X \times Y)$, então $\varphi_y \in \mathcal{K}(X)$ para todo $y \in Y$. Além disso, se $\mu\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ é uma integral positiva sobre X, então a correspondência*

$$y \mapsto \mu(\varphi_y) := \int_X \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{5.21}$$

define uma função contínua da forma $Y \to \mathbb{R}$ com suporte compacto.

Demonstração. Sejam $K_X := \pi_X[\operatorname{supp}(\varphi)]$ e $K_Y := \pi_Y[\operatorname{supp}(\varphi)]$ as projeções de $\operatorname{supp}(\varphi)$ sobre X e Y, respectivamente, que satisfazem $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K_X \times K_Y$. Com as notações do lema anterior, note que $\varphi_y \in \mathcal{K}(X)$ para cada $y \in Y$: a continuidade de φ_y decorre do fato de que tal função se dá como a composição $x \mapsto (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$, enquanto a compacidade do suporte segue da inclusão $\{x \in X : \varphi_y(x) \neq 0\} \subseteq K_X$.

Em vista disso, o lema anterior garante que

$$\begin{aligned} \Phi\colon Y &\to \mathcal{C}(X) \\ y &\mapsto \varphi_y \end{aligned}$$

é contínua. Como a imagem de Φ é, na verdade, subespaço de $\mathcal{K}(X, K_X)$, a Proposição 5.3.23 assegura a continuidade da composição $\mu \circ \Phi$, e esta é, precisamente, a correspondência indicada em (5.21). Por fim, observe que $\{y \in Y : \mu \circ \Phi(y) \neq 0\} \subseteq K_Y$, donde se infere $\operatorname{supp}(\mu \circ \Phi) \subseteq K_Y$ e, portanto, $\mu \circ \Phi \in \mathcal{K}(Y)$. □

Corolário 5.3.30. *Sejam G um grupo localmente compacto de Hausdorff e $\mu\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ uma integral positiva sobre G. Então $\varphi * \psi \in \mathcal{K}(G)$ para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{K}(G)$.*

Demonstração. De fato, a correspondência $\gamma\colon (x,y) \mapsto \varphi(y)\psi(y^{-1}x)$ é contínua, e seu suporte está contido em $\operatorname{supp}(\varphi)\operatorname{supp}(\psi) \times \operatorname{supp}(\varphi)$, posto que se $\gamma(x,y) \neq 0$, então $y \in \operatorname{supp}(\varphi)$ e $w := y^{-1}x \in \operatorname{supp}(\psi)$. Logo, $\gamma \in \mathcal{K}(G \times G)$, o que permite aplicar a proposição anterior a fim de assegurar que

$$x \mapsto \mu(\gamma_x) := \int_G \gamma(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_G \varphi(y)\psi\left(y^{-1}x\right)\mathrm{d}\mu(y) = (\varphi * \psi)(x)$$

é contínua e com suporte compacto, como queríamos. □

Exercício 5.134. Nas condições acima, mostre que $\operatorname{supp}(\varphi * \psi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)\operatorname{supp}(\psi)$. ■

Enfim, vamos usar os conceitos estabelecidos acima para mostrar que quaisquer duas integrais de Haar num grupo localmente compacto de Hausdorff são múltiplas uma da outra (Teorema 5.3.35). Daqui em diante, G denotará um grupo topológico localmente compacto de Hausdorff.

Exercício 5.135. Seja μ uma integral de Haar sobre G. Mostre que

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_G \varphi(xy)\psi\left(y^{-1}\right)\mathrm{d}\mu(y)$$

para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{K}(G)$ e $x \in G$. Dica: invariância (à esquerda), ora bolas. ■

Restam três resultados técnicos para que possamos, enfim, provar a unicidade das integrais de Haar - módulo proporcionalidade.

[124]Na verdade, basta que X seja localmente compacto de Hausdorff e Y seja de Hausdorff.

Lema 5.3.31. *Uma função $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua com respeito à uniformidade esquerda*[125] *se, e somente se, para todo $r > 0$ existe uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $|\varphi(xy) - \varphi(x)| < r$ para quaisquer $x \in G$ e $y \in V$.*

Demonstração. Se φ é uniformemente contínua e $r > 0$, então existe uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $h^{-1}g \in V$ acarreta $|\varphi(g) - \varphi(h)| < r$. Agora, note que se $x \in G$ e $y \in V$, então para $h \coloneqq x$ e $g \coloneqq xy$ tem-se $h^{-1}g \in V$ e, portanto, $|\varphi(xy) - \varphi(y)| < r$. A recíproca é similar. □

Proposição 5.3.32. *Sejam μ uma integral positiva sobre G e $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ uma função. Para qualquer $\delta > 0$, existe uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $|(\varphi * \check{\psi})(x) - \varphi(x)| \leq \delta$ para quaisquer $x \in G$ e $\psi \in \mathcal{K}_+(G, V)$ com $\mu(\psi) = 1$.*

Demonstração. Como $\varphi \in \mathcal{K}(G)$, segue que φ é uniformemente contínua (Exercício 4.28). Pelo lema anterior, existe uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $|\varphi(xy) - \varphi(x)| < \delta$ para quaisquer $x \in G$ e $y \in V$. Agora, fixados $\psi \in \mathcal{K}_+(G, V)$ com $\mu(\psi) = 1$ e $x \in G$, deve-se ter $x^{-1}\varphi \in \mathcal{K}(G)$ e, consequentemente, $x^{-1}\varphi \cdot \psi \in \mathcal{K}(G)$. Logo

$$\left|\int_G x^{-1}\varphi(y)\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) - \varphi(x)\right| = \left|\int_G \varphi(xy)\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) - \int_G \psi(y)\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| = \\ = \left|\int_G (\varphi(xy) - \varphi(x))\,\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|.$$

Pelo modo como se tomou V, ocorre $|\varphi(xy) - \varphi(x)|\psi(y) \leq \delta\psi(y)$ para qualquer $y \in G$: se $y \notin V$, então $\psi(y) = 0$ e tudo fica bem; se $y \in V$, então $|\varphi(xy) - \varphi(x)| < \delta$, e daí a desigualdade sugerida segue. Dado que ambas as funções são contínuas e com suporte compacto, o Lema 5.3.22 garante que

$$\int_G |\varphi(xy) - \varphi(x)|\,\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \leq \delta \int_G \psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \delta.$$

Finalmente, em virtude do Exercício 5.138, que assegura $|\mu(\gamma)| \leq \mu(|\gamma|)$ para qualquer $\gamma \in \mathcal{K}(G)$, resulta $|(\varphi * \check{\psi})(x) - \varphi(x)| \leq \delta$ (Exercício 5.135), como desejado. □

Proposição 5.3.33. *Seja $\mu\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ uma integral de Haar sobre G. Se $\varphi \in \mathcal{K}_+(G)$ e $\varphi \neq 0$, então $\mu(\varphi) > 0$.*

Demonstração. Para $\psi \in \mathcal{K}_+(G)$, o Lema 5.3.12 assegura um elemento $v \in \mathbb{R}[G]$ tal que $\psi \leq v\varphi$ e, por μ ser crescente e invariante, $\mu(\psi) \leq \varepsilon(v)\mu(\varphi)$. Em particular, como $\mu \neq 0$, o Exercício 5.139 garante uma função $\psi \in \mathcal{K}_+(G)$ com $\mu(\psi) > 0$, donde segue o resultado. □

Observação 5.3.34. Não confunda a proposição anterior com o Exercício 5.139: acima, garante-se que *qualquer* função positiva e não-nula tem integral (estritamente) positiva, enquanto o exercício mencionado parte de uma função que tem integral não-nula. Dito isso, convém ressaltar: a argumentação acima independe da definição particular de μ. △

Teorema 5.3.35. *Sejam $\mu, \nu\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ integrais de Haar sobre G. Então existe um número real $\rho > 0$ tal que $\mu = \rho\nu$.*

[125] Verifica-se um resultado análogo para a uniformidade direita, trocando-se "$\varphi(xy)$" por "$\varphi(yx)$".

Demonstração. Suponha que saibamos do seguinte

Katzensprung. *Se existe $\varphi^* \in \mathcal{K}_+(G)$ com $\mu(\varphi^*) = \nu(\varphi^*) = 1$, então $\mu = \nu$.*

Com tal suposição, para $\mu, \nu \colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ integrais de Haar arbitrárias, o Exercício 5.139 garante funções $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{K}_+(G) \setminus \{0\}$ com $\mu(\varphi_0) > 0$ e $\nu(\varphi_1) > 0$, donde segue que $\varphi^* := \varphi_0 + \varphi_1$ satisfaz $\mu(\varphi^*) > 0$ e $\nu(\varphi^*) > 0$ simultaneamente. Agora,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu} \colon \mathcal{K}(G) &\to \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \frac{\mu(\psi)}{\mu(\varphi^*)} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \widetilde{\nu} \colon \mathcal{K}(G) &\to \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \frac{\nu(\psi)}{\nu(\varphi^*)} \end{aligned}$$

também são integrais de Haar sobre G, como o leitor não terá dificuldade em verificar. Em particular, φ^* satisfaz $\widetilde{\mu}(\varphi^*) = \widetilde{\nu}(\varphi^*) = 1$ e, pelo *Katzensprung*, deve ocorrer $\widetilde{\mu} = \widetilde{\nu}$. Explicitamente,

$$\mu(\psi) = \left(\frac{\mu(\varphi^*)}{\nu(\varphi^*)}\right) \cdot \nu(\psi)$$

para qualquer $\psi \in \mathcal{K}(G)$, como desejado.

Tratemos do *Katzensprung*. Para $\varphi, \psi \in \mathcal{K}(G)$ quaisquer, já vimos que a regra

$$h(x) := (\varphi * \check{\psi})(x) := \int_G \varphi(y)\check{\psi}\left(y^{-1}x\right) \mathrm{d}\mu(y)$$

determina uma função $h \in \mathcal{K}(G)$. Logo, é possível *avaliar* h com respeito à integral ν:

$$\int_G h(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_G \left(\int_G \varphi(y)\check{\psi}\left(y^{-1}x\right) \mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\nu(x) = \int_G \left(\varphi(y) \int_G \check{\psi}\left(y^{-1}x\right) \mathrm{d}\nu(x)\right) \mathrm{d}\mu(y),$$

onde a última igualdade não é um erro, mas sim um fruto do *Teorema de Fubini*, que será provado em breve. Consequentemente, deve valer

$$\nu(h) = \mu(\varphi)\nu(\check{\psi}). \tag{5.22}$$

Para $\delta > 0$ arbitrário, a Proposição 5.3.32 garante uma vizinhança $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $\|h - \varphi\|_\infty < \delta$ sempre que $\psi \in \mathcal{K}_+(G, V)$ com $\mu(\psi) = 1$. Como G é localmente compacto de Hausdorff, pode-se supor que V é uma vizinhança compacta e, mais ainda, por meio da Proposição 3.3.20, garante-se a existência de uma função contínua $\psi' \in \mathcal{K}_+(G, V)$. Logo, a última proposição assegura que $\mu(\psi') > 0$ e, consequentemente, $\psi_V := \dfrac{\psi'}{\mu(\psi)'}$ é tal que $\mu(\psi_V) = 1$. Portanto, $\|h - \varphi\|_\infty < \delta$.

Agora, basta usar a continuidade da integral ν, no sentido da Proposição 5.3.23. Primeiramente, o Exercício 5.134 garante que $\operatorname{supp}(h) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)\, V^{-1} := K$, um subespaço compacto de G. Como $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, tem-se $\varphi \in \mathcal{K}(G, K)$ e daí, pela continuidade da restrição de ν ao subespaço $(\mathcal{K}(G, K), \|\cdot\|_\infty)$, para $r > 0$ qualquer existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\int_G \vartheta(x)\,\mathrm{d}\nu(x) - \int_G \varphi(x)\,\mathrm{d}\nu(x)\right| < r$$

para qualquer $\vartheta \in \mathcal{K}(G, K)$ satisfazendo $\|\vartheta - \varphi\|_\infty < \delta$.

Logo, tomando-se $r_n > 0$ com $r_n \to 0$ e usando tais r_n's em vez de δ, as observações anteriores permitem obter uma cadeia decrescente de vizinhanças compactas $(V_n)_{n\in\omega}$ com

$\psi_{V_n} \in \mathcal{K}_+(G, V_n) \subseteq \mathcal{K}_+(G, K)$ e $h_n := \varphi * \check{\psi}_{V_n}$ satisfazendo $\|h_n - \varphi\|_\infty < r_n$ para cada n, acarretando

$$\int_G h_n(x)\,\mathrm{d}\nu(x) \to \int_G \varphi(x)\,\mathrm{d}\nu(x).$$

Repetindo-se o argumento com $h_n^* := \varphi^* * \check{\psi}_{V_n}$, a convergência acima aliada à identidade (5.22) asseguram

$$\int_G h_n^*(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \underbrace{\int_G \varphi^*(y)\,\mathrm{d}\mu(y)}_{=1} \int_G \check{\psi}_{V_n}(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_G \check{\psi}_{V_n}(x)\,\mathrm{d}\nu(x) \to \int_G \varphi^*(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = 1$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_G \varphi(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \lim_{n\in\omega} \int_G h_n(x)\,\mathrm{d}\nu(x) &= \left(\int_G \varphi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \cdot \lim_{n\in\omega} \int_G \check{\psi}_{V_n}(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \\ &= \int_G \varphi(y)\,\mathrm{d}\mu(y),\end{aligned}$$

como queríamos. □

Exercício 5.136. Complete os detalhes da demonstração acima. ■

Observação 5.3.36 (Sobre a ordem de integração)**.** A fim de justificar a identidade (5.22), foi fundamental *inverter* a ordem de integração: secretamente, utilizou-se

$$\int_G \left(\int_G \varphi(y)\check{\psi}\left(y^{-1}x\right)\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\nu(x) = \int_G \left(\int_G \varphi(y)\check{\psi}\left(y^{-1}x\right)\mathrm{d}\nu(x)\right)\mathrm{d}\mu(y) \tag{5.23}$$

o que permitiu *extrair* $\varphi(y)$ da integral no lado direito da igualdade, para daí apelar à invariância por translações de ν e obter

$$\int_G \check{\psi}\left(y^{-1}x\right)\mathrm{d}\nu(x) = \int_G \check{\psi}(x)\,\mathrm{d}\nu(x).$$

Por que a "ordem" de integração pode ser alterada em *integrais iteradas*?

Teorema 5.3.37 (Fubini)**.** *Sejam X e Y espaços localmente compactos de Hausdorff dotados de integrais positivas μ e ν, respectivamente. Então*

$$\int_Y \left(\int_X \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y) = \int_X \left(\int_Y \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{K}(X \times Y)$.

Demonstração. Primeiro, convém observar que as identidades acima fazem sentido em virtude da Proposição 5.3.29. Agora, se $\varphi(x,y) = \psi(x)\vartheta(y)$, com $\psi \in \mathcal{K}(X)$ e $\vartheta \in \mathcal{K}(Y)$, então

$$\begin{aligned}\int_Y \left(\int_X \psi(x)\vartheta(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y) &= \int_Y \vartheta(y)\left(\int_X \psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y) = \\ &= \int_X \psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\left(\int_Y \vartheta(y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) = \\ &= \int_X \left(\int_Y \psi(x)\vartheta(y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Analogamente, se $\varphi = \sum_{j\leq n} \varphi_j\vartheta_j$, com $\varphi_j \in \mathcal{K}(X)$ e $\vartheta_j \in \mathcal{K}(Y)$ para todo $j \leq n$, então vale a identidade desejada. Finalmente, no caso geral, para $r > 0$ fixado, $K := \pi_X[\operatorname{supp}(\varphi)]$

e $L := \pi_Y[\mathrm{supp}\,(\varphi)]$, *existem* $n \in \omega$ e funções $\psi_j \in \mathcal{K}(X, K)$ e $\vartheta_j \in \mathcal{K}(Y, L)$ para cada $j \leq n$, satisfazendo

$$\left\| \varphi - \sum_{j \leq n} \psi_j \vartheta_j \right\|_\infty < r,$$

donde a identidade desejada segue por continuidade: como

$$\begin{aligned} \rho_{XY} \colon \mathcal{K}(X \times Y) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_X \left(\int_Y \varphi(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \rho_{YX} \colon \mathcal{K}(X \times Y) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_Y \left(\int_X \varphi(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

são integrais positivas (Exercício 5.141), ambas devem ser contínuas quando restritas a $\mathcal{K}(X \times Y, K \times L)$, e daí a desigualdade acima aliada aos primeiros casos permite concluir que $\rho_{XY}(\varphi) = \rho_{YX}(\varphi)$. O leitor pode cuidar desses detalhes finais. □

A existência das funções ψ_j e ρ_j que *aproximam* φ pode ser provada diretamente. Porém, como abordaremos o *Teorema de Stone-Weierstrass* no próximo capitulo, será mais prático esperar até lá para economizar alguns parágrafos de argumentação (confira os Exercícios 6.38 e 6.39). △

5.3.4 A reta revisitada (for fun)

Diferente do que as terminologias adotadas ao longo desta seção sugerem, a integral de Haar que se construiu não é uma *integral* no sentido da Teoria da Medida, como esboçado na Subseção K.2.3: a rigor, seria mais correto dizer que se discutiram *apenas* a existência e unicidade de um *funcional* de Haar. Todavia, existe uma *correspondência* entre funcionais desse tipo e medidas *propriamente ditas*.

Teorema 5.3.38 (Riesz-Markov). *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff e $\mu \colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ um funcional positivo. Em tais condições, existe uma única medida de Radon m_μ sobre a σ-álgebra de Borel de X satisfazendo*

$$\int f \, \mathrm{d}m_\mu = \mu(f) \tag{5.24}$$

para toda função $f \in \mathcal{K}(X)$.

Acima, $\int f \, \mathrm{d}m_\mu$ indica a integral da função f com respeito à medida m_μ, como feito na Definição K.2.147, enquanto a **σ-álgebra de Borel** de X é a σ-álgebra gerada pelos abertos de X (Definições K.2.139 e K.2.152), que será denotada por $\mathcal{B}_X$. O significado do termo "de Radon" será apresentado adiante.

Definição 5.3.39. Fixados um espaço topológico X, uma medida $m \colon \mathcal{B}_X \to [0, +\infty]$ e um boreliano $B \in \mathcal{B}_X$, diremos que

(i) m é **regular por fora**[126] de B se $m(B) = \inf\{m(U) : B \subseteq U \subseteq X \text{ e } U \text{ aberto}\}$;

(ii) m é **regular por dentro** de B se $m(B) = \sup\{m(K) : K \subseteq B \text{ e } K \text{ compacto}\}$;

[126] Seria mais correto dizer que m é *externamente regular*, a fim de traduzir precisamente a expressão *outer regular*, mas considero a versão coloquial mais *simpática*. Comentário análogo se aplica às medidas *regulares por dentro*.

(iii) m é **medida de Radon em** X se $m(K) < +\infty$ para todo $K \subseteq X$ compacto e, adicionalmente, for regular por fora de todos os borelianos de X e regular por dentro de todos os abertos de X. ¶

As simples exigências de compatibilidade acima já garantem a unicidade *das* medidas satisfazendo (5.24). De fato, escrevendo $f \preceq U$ para indicar que $f \in \mathcal{K}(X)$ satisfaz tanto $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ quanto $0 \leq f \leq 1$, segue que qualquer medida m verificando (5.24) deve ser tal que $\mu(f) \leq m(U)$ sempre que ocorrer $f \preceq U$ com U aberto, pois

$$\mu(f) = \int f \, \mathrm{d}m \leq \int \chi_U \, \mathrm{d}m = m(U),$$

dado que $f \leq \chi_U$ e a integral definida por uma medida m deve ser monótona sobre funções não-negativas (Exercício K.86). Por outro lado, para qualquer $K \subseteq X$ compacto com $K \subseteq U$, que deve existir por conta da compacidade local[127], segue pelo Lema de Urysohn para espaços localmente compactos de Hausdorff (Proposição 3.3.20) que existe $f \in \mathcal{K}(X)$ com $f \preceq U$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in K$, acarretando

$$m(K) = \int \chi_K \, \mathrm{d}m \leq \int f \, \mathrm{d}m = \mu(f).$$

Desse modo, se a medida m for regular por dentro dos abertos de X, então

$$\begin{aligned} m(U) = \sup\{m(K) : K \subseteq U \text{ e } K \text{ compacto}\} \leq \\ \leq \sup\{\mu(f) : \chi_K \leq f \preceq U, K \subseteq U \text{ e } K \text{ compacto}\} \leq m(U). \end{aligned}$$

Logo, se m e m' forem medidas de Radon em X satisfazendo (5.24), então a regularidade por fora dos borelianos aliada à estimativa anterior garante $m(B) = m'(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}_X$, i.e., $m = m'$.

Como de costume nos teoremas de existência e unicidade, a parte existencial – mais técnica – consiste em mostrar que a *caracterização* implícita na prova da unicidade satisfaz as condições do objeto procurado. No caso, as estimativas acima indicam que para $U \subseteq X$ aberto, *bastaria* definir $m(U) := \sup\{\mu(f) : f \preceq U\}$, o que ainda não responde como estender m para os borelianos, mas pelo menos dá conta dos geradores da σ-álgebra de Borel.

Tal problema de extensão é resolvido pelo *Teorema de Carathéodory* (Exercício 5.145): ao fazer

$$m^*(S) := \inf\{m(U) : S \subseteq U \subseteq X \text{ e } U \text{ aberto}\}, \tag{5.25}$$

obtém-se uma *medida exterior*, i.e., uma função da forma $m^* \colon \wp(X) \to [0, +\infty]$ que satisfaz as condições

✓ $m^*(\emptyset) = 0$, e

✓ $m^*(\bigcup_{n\in\omega} S_n) \leq \sum_{n\in\omega} m^*(S_n)$.

Como indicado no Exercício 5.145, o Teorema de Carathéodory é, essencialmente, uma máquina de transformar medidas exteriores em medidas: ao considerar $\mathcal{M}$ a família dos subconjuntos de X que satisfazem uma condição de mensurabilidade[128], prova-se que $\mathcal{M}$ é

[127] Definição 3.3.8 + Proposição 3.3.9, por exemplo.

[128] Um subconjunto M se diz mensurável se $m^*(S) \geq m^*(M \cap S) + m^*(S \setminus M)$ para qualquer $S \subseteq X$ com $m^*(S) < +\infty$.

uma σ-álgebra em X sobre a qual a restrição de m^* é uma medida (completa) propriamente dita. Nesse contexto, pode-se provar que todo aberto U de X é um membro de $\mathcal{M}$ e, consequentemente, a σ-álgebra de Borel de X deve ser um subconjunto de $\mathcal{M}$, donde segue que a restrição de m^* a $\mathcal{B}_X$ é uma medida. Com um pouco mais de esforço, mostra-se que tal medida é, precisamente, uma medida de Radon satisfazendo a condição (5.24), além da identidade (que será útil em breve):

$$m_\mu(U) = \sup\{\mu(f) : f \preceq U\} \tag{5.26}$$

para qualquer $U \subseteq X$ aberto. O leitor interessado pode encontrar os detalhes em [43].

Agora, se X for, adicionalmente, um grupo topológico (localmente compacto e de Hausdorff) e o funcional μ utilizado na construção de m_μ for uma *integral* de Haar, então a medida m_μ induzida também *será* invariante por translações, i.e., valerá a identidade $m_\mu(xB) = m_\mu(B)$ para todo *boreliano* de X e todo ponto $x \in X$. Por não se tratar de algo óbvio, convém destacar.

Proposição 5.3.40. *Sejam G um grupo topológico localmente compacto de Hausdorff e $\mu\colon \mathcal{K}(G) \to \mathbb{R}$ um funcional de Haar sobre G. Se m_μ é a medida de Radon induzida por μ, então $m_\mu(sB) = m_\mu(B)$ para todo boreliano $B \subseteq G$ e todo ponto $s \in G$.*

Demonstração. A identidade (5.26) permite estabelecer a tese proposta para qualquer $B \subseteq G$ aberto: com efeito,

$$m_\mu(sB) = \sup\{\mu(f) : f \preceq sB\} = \sup\{\mu(s^{-1}f) : f \preceq B\} = \sup\{\mu(f) : f \preceq B\} = m_\mu(B),$$

já que $f \preceq sB$ se, e somente se, $s^{-1}f \preceq B$ (Exercício 5.142). O caso geral segue pela regularidade por fora dos borelianos. $\square$

Esse comportamento pode ser usado num monumental exercício de futilidade, que encerrará o capítulo. Primeiro, note que se o grupo topológico da proposição anterior não é discreto, então deve-se ter $m_\mu(\{x\}) = 0$ para qualquer $x \in G$: fixada uma vizinhança compacta C do elemento neutro de G, digamos $e \in G$, C deve ser infinito; logo, para qualquer $n \in \omega$, existe um subconjunto finito $F \subseteq C$ com $|F| = n$, de modo que $m_\mu(F) \leq m_\mu(C)$; como m_μ é de Radon, deve-se ter $m_\mu(C) < +\infty$; ao combinar a aditividade da medida m_μ com a proposição anterior, resulta que

$$m_\mu(F) = \sum_{x\in F} m_\mu(\{x\}) = \sum_{x\in F} m_\mu(\{e\}) = n \cdot m_\mu(\{e\}) \leq m_\mu(C) < +\infty,$$

acarretando $m_\mu(\{e\}) = 0$ e, por conseguinte, $m_\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in G$. E daí?

Teorema 5.3.41. *Se G é um grupo topológico (apenas) homeomorfo a $\mathbb{R}$, então existe um isomorfismo topológico de grupos entre G e $(\mathbb{R}, +, 0)$.*

Demonstração. Seja $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ o homeomorfismo dado por hipótese. Para $x, y \in G$, vamos escrever $x <' y$ para indicar que $\varphi(x) < \varphi(y)$ em $\mathbb{R}$. Pela natureza de φ, resulta que $(G, \leq')$ é uma ordem completa cuja topologia induzida é a topologia nativa de G, que por sua vez é homeomorfa à topologia de $\mathbb{R}$. Em particular, G é localmente compacto de Hausdorff e, portanto, tem direito a um funcional de Haar μ que induz uma medida de Radon m_μ como discutido acima[129]. Seja $u \in G$ o elemento neutro de G com respeito à sua operação $*$; sem perda de generalidade, suponha $\varphi(u) = 0$.

[129]Na prática, pode-se assumir $G = \mathbb{R}$ como espaço topológico, mas com outra estrutura de grupo compatível com sua topologia.

Katzensprung. *A função* $\ell\colon (G, *, u) \to (\mathbb{R}, +, 0)$ *que faz*

$$x \mapsto \begin{cases} m_\mu([u, x]'), & \text{se } x \geq' u \\ -m_\mu([x, u]'), & \text{se } x <' u \end{cases}$$

é um isomorfismo topológico de grupos, onde $[x, y]' := \{z \in G : x \leq' z \leq' y\}$ *para quaisquer* $x, y \in G$.

Note que por G não ser discreto, tem-se $\ell(u) = 0$. Agora, para $x >' u$, a função $y \mapsto x*y$ determina um homeomorfismo entre G e G que não pode ter pontos fixos: se tivesse, então ocorreria $u = x$. Logo, $y \mapsto x * y$ deve ser estritamente crescente (Exercícios 2.83 e 2.84). Com isso, torna-se um exercício de paciência verificar que ℓ é um isomorfismo topológico entre G e $\mathbb{R}$.

(i) Para $x >' u$, e escrevendo x^{-1} para indicar o inverso de x com respeito à operação $*$ de G, deve-se ter $x^{-1} <' u$ pelo que se observou acima, donde segue que

$$\ell(x^{-1}) = -m_\mu([x^{-1}, u]') = -m_\mu(x * [x^{-1}, u]') = -m_\mu([u, x]') = -\ell(x),$$

já que $x * [x^{-1}, u]' = [u, x]'$;

(ii) Para $y \in G$ com $y >' u$ deve-se ter $x*y >' x$, de modo que $[u, x*y]' = [u, x]' \cup [x, x*y]'$ e daí

$$\ell(x * y) = \underbrace{m_\mu([u, x * y]')}_{(\dagger)} = \underbrace{m_\mu([u, x]') + m_\mu([x, x * y]')}_{(2\dagger)} = \underbrace{m_\mu([u, x]') + m_\mu([u, y]')}_{(3\dagger)} =$$
$$= \ell(x) + \ell(y),$$

onde a identidade $(\dagger) = (2\dagger)$ decorre da não discretude de G aliada à aditividade da medida, que acarreta

$$m_\mu(B) = m_\mu(B \setminus \{b\}) + m_\mu(\{b\}) = m_\mu(B \setminus \{b\})$$

para qualquer boreliano B de G com $b \in B$, enquanto a identidade $(2\dagger) = (3\dagger)$ se deve à proposição anterior, com $[x, x * y]' = x * [u, y]'$.

(iii) As demais combinações de casos podem ser verificadas de maneira análoga, e levam à conclusão de que ℓ é um morfismo (algébrico) de grupos.

(iv) Agora, para ver que ℓ é injetora, basta observar que se $\ell(x) = 0$, então $x = u$, o que segue essencialmente da Proposição 5.3.33: com efeito, se $x >' u$, por exemplo, então existe uma função $\psi \in \mathcal{K}_+(G)$ com $\psi \neq 0$ e $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq (u, x)'$, donde a proposição assegura $\mu(\psi) > 0$ e, por (5.26), resulta $0 < \mu(\psi) \leq m_\mu((u, x)') \leq \ell(x)$.

(v) O penúltimo passo é observar que ℓ é contínua (em u). Para uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em G com $x_n \to u$, mostraremos que $\ell(x_n) \to 0$. Supondo que $(x_n)_{n\in\omega}$ é monótona, crescente por exemplo, tem-se $\bigcap_{n\in\omega}[x_n, u]' = \{u\}$, donde o Exercício K.83 assegura

$$\ell(x_n) = -m_\mu([x_n, u]') \to -m_\mu\left(\bigcap_{n\in\omega}[x_n, u]'\right) = -m_\mu(\{u\}) = 0.$$

Com isso, no caso geral, não é difícil concluir que qualquer subsequência de $(\ell(x_n))_{n\in\omega}$ tem uma (sub) subsequência que converge para 0 (apelando para o raciocínio anterior juntamente com a prova de que $(c_{ii}) \Rightarrow (c_{iii})$ no Teorema 5.1.43), donde o inócuo Exercício 1.239 assegura que $\ell(x_n) \to 0$.

(vi) Dos itens acima, infere-se que ℓ é um isomorfismo de grupos de G sobre sua imagem (Exercício 2.83), de modo que para encerrar, basta mostrar que $\mathrm{im}(\ell) = \mathbb{R}$. Fixado $\alpha >' u$, a argumentação usada para a injetividade assegura que $\ell(\alpha) > 0$, enquanto a condição de morfismo garante que $\ell(\alpha^n) = n \cdot \ell(\alpha)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Em particular, para $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$ qualquer, existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo a ocorrer $\ell(\alpha^n) = n \cdot \ell(\alpha) > M$, donde o resultado desejado segue pelo Teorema do Valor Intermediário combinado com o item (i). □

Dado que $\mathbb{R}$ é um corpo topológico, o intervalo $\mathbb{R}_{>0} := (0, +\infty)$ deve ser um grupo topológico com a operação de multiplicação. A princípio, $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ e $(\mathbb{R}, +, 0)$ seriam apenas homeomorfos mas, em vista do último teorema, *existem* isomorfismos topológicos entre ambos: explicitamente, homeomorfismos $l \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $l(1) = 0$ e $l(x \cdot y) = l(x) + l(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Parece familiar?

Proposição 5.3.42. *Se $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um morfismo contínuo de grupos, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, f é isomorfismo topológico se, e somente se, $a \neq 0$.*

Demonstração. Não é difícil concluir que $f(qx) = qf(x)$ para quaisquer $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$, donde segue por continuidade que $f(rx) = rf(x)$ para qualquer $r \in \mathbb{R}$. Portanto, basta fazer $a := f(1)$. Em particular, se f é iso, então $f(1) \neq 0$ já que $f(0) = 0$, acarretando $a := f(1) \neq 0$; por outro lado, se $a \neq 0$, então $x \mapsto \frac{1}{a}x$ é a inversa de $x \mapsto ax$. □

Corolário 5.3.43. *Se G é um grupo topologicamente isomorfo a $\mathbb{R}$, então para cada $g \in G$ existe um único morfismo contínuo $p_g \colon \mathbb{R} \to G$ tal que $p_g(1) = g$. Em particular, p_g é isomorfismo topológico sempre que g não for o elemento neutro de G.*

Demonstração. Sejam $\sigma \colon \mathbb{R} \to G$ um isomorfismo topológico e $r \in \mathbb{R}$ tais que $\sigma(r) = g$. Como $x \mapsto rx$ é um morfismo contínuo de grupos do tipo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, segue que $p_g \colon \mathbb{R} \to G$ dado por $p_g(x) := \sigma(rx)$ ainda é um morfismo contínuo, satisfazendo $p_g(1) = \sigma(r) = g$. Por outro lado, se $p' \colon \mathbb{R} \to G$ é morfismo contínuo de grupos, então $f := \sigma^{-1} \circ p' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é morfismo contínuo, donde a proposição anterior assegura $r' \in \mathbb{R}$ com $f(x) = r'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, se $p'(1) = g$, então $r' = f(1) = \sigma^{-1}(p'(1)) = \sigma^{-1}(g) = r$, acarretando $p'(x) = \sigma(rx)$ para todo x, i.e., $p' = p_g$. Por fim, se g não é o elemento neutro de G, então r também não é o neutro (aditivo) de $\mathbb{R}$, donde a proposição anterior revela que p_g foi definida como a composição de dois isomorfismos topológicos. □

Exemplo 5.3.44 (Exponenciais e logarítmos)**.** Enquanto o Teorema 5.3.41 assegura a existência de isomorfismos topológicos entre $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ e $(\mathbb{R}, +, 0)$, o último corolário mostra que para $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, existe um único isomorfismo topológico $p_r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ satisfazendo $p_r(1) = r$. Em particular, por ser um morfismo de grupos, valem as identidades

(i) $p_r(0) = 1$,

(ii) $p_r(a + b) = p_r(a) \cdot p_r(b)$,

(iii) $p_r(-a) = \dfrac{1}{p_r(a)}$ e

(iv) $p_r(n) = p_r(1)^n = r^n$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, é legítimo escrever $p_r(x) := r^x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, como a *definição formal*[130] da função *potência* de base $r > 0$. Classicamente, a inversa de $x \mapsto r^x$ é denotada por $\log_r \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, que satisfaz as condições *inversas* de r^x:

(i) $\log_r(1) = 0$,

(ii) $\log_r(a \cdot b) = \log_r(a) + \log_r(b)$,

(iii) $\log_r\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log_r(a)$,

(iv) $\log_r(r^n) = n$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ e $n \in \mathbb{N}$. É claro que por serem inversas uma da outra, valem as clássicas identidades $r^{\log_r(y)} = y$ e $\log_r(r^x) = x$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Nesse sentido, convém observar que ao realizar a construção do isomorfismo ℓ do Teorema 5.3.41 para o caso de $G := \mathbb{R}_{>0}$, tem-se necessariamente $\ell = \log_r$ para algum $r > 0$, essencialmente pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração do corolário anterior, *mutatis mutandis*. Em particular, como a função ℓ lá construída dependia da medida de Radon m_μ induzida por um funcional de Haar μ, a unicidade de tais funcionais *a menos de multiplicação por uma constante* reflete a caracterização obtida para os morfismos contínuos da reta (Proposição 5.3.42). ▲

Naturalmente, o leitor deve imaginar que as construções feitas ao longo desta seção bônus não têm a formalização de funções logarítmicas como motivação principal[131]: para citar dois casos importantes, integrais de Haar são particularmente interessantes na *Análise Harmônica* e – para minha surpresa – em certos nichos da Álgebra Abstrata que lidam com grupos topológicos oriundos de contextos típicos da Teoria dos Números. Nada disso será tratado aqui, já que a minha vida é finita.

Exercícios complementares da seção

Exercício 5.137. Seja X um espaço topológico. Mostre que a regra $f \mapsto \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ determina uma norma no espaço $\mathcal{K}(X)$. ■

Exercício 5.138. Sejam X um espaço topológico e μ um integral positiva sobre X. Mostre que se $\gamma \in \mathcal{K}(X)$, então $|\gamma| \in \mathcal{K}(X)$ e $|\mu(\gamma)| \leq \mu(|\gamma|)$. Dica: escreva $\gamma = \gamma^+ - \gamma^-$ para certas $\gamma^+, \gamma^- \in \mathcal{K}_+(X)$ que satisfaçam $|\gamma| = \gamma^+ + \gamma^-$. ■

Exercício 5.139. Nas notações do exercício anterior, mostre que se $\gamma \in \mathcal{K}(X)$ com $\mu(\gamma) \neq 0$, então $|\gamma| \in \mathcal{K}_+(X)$ e $\mu(|\gamma|) > 0$. ■

Exercício 5.140. Sejam X um espaço topológico, μ uma integral positiva sobre X, $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ uma função contínua e $a \in X$ um ponto fixado. Mostre que para qualquer $\delta > 0$, existe uma vizinhança V de a tal que

$$\left| \int_X \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \varphi(a) \right| \leq \delta$$

para qualquer função $\psi \in \mathcal{K}_+(X, V)$ satisfazendo $\displaystyle\int_X \psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 1$. Dica: use o Exercício 5.138. ■

[130] Definindo $r^{\frac{p}{q}} := \frac{r^p}{r^q}$ para inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$, pode-se mostrar que a correspondência $q \mapsto r^q$ é contínua. Ocorre que com tal definição, também obtém-se $p_r(q) = r^q$, mostrando que p_r é *a* extensão contínua de $q \mapsto r^q$.

[131] Convém destacar que a maior parte da *rigidez* de $\mathbb{R}$ enquanto grupo topológico se deve à sua estrutura ordenada, e não tanto aos seus aspectos de medida. Com efeito, a discussão que se fez aqui foi uma adaptação das demonstrações de unicidade apresentadas em [20] e [102], que apelam explicitamente para a estrutura de $\mathbb{R}$ enquanto *grupo ordenado* – mas não chegam a mencionar integrais de Haar.

Exercício 5.141 (Confira o Teorema 5.3.37)**.** Sejam X e Y espaços localmente compactos de Hausdorff dotados de integrais positivas μ e ν, respectivamente. Mostre que as correspondências

$$\varphi \mapsto \int_X \left(\int_Y \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{e} \quad \varphi \mapsto \int_Y \left(\int_X \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y)$$

determinam integrais positivas sobre $X \times Y$. ■

Exercício 5.142. Com as notações da Subseção 5.3.4, sejam X um grupo topológico, $f \in \mathcal{K}(X)$ uma função, $s \in X$ um ponto e $U \subseteq X$ um aberto. Mostre que se $f \preceq sU$, então $s^{-1}f \preceq U$, onde $s^{-1}f(x) := f(s * x)$ para cada $x \in X$. Dica: primeiro, observe que se $s^{-1}f(x) \neq 0$, então $x \in U$; depois, use *nets*. ■

Exercício 5.143. Demonstre as propriedades clássicas das funções exponenciais e logarítmicas por meio da definição dada nesta seção. ■

Exercício 5.144 (Para quem estiver confortável com integrais de Riemann)**.** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com suporte compacto. Mostre que se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [a,b] \cap [c,d]$, então

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

onde as integrais acima indicam a *integral de Riemann* da restrição de f aos respectivos intervalos. Com isso, defina um funcional linear $\varphi\colon \mathcal{K}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ invariante por translações. Soa familiar? ■

Exercício 5.145 (Teorema de Carathéodory)**.** Dizemos que uma função $m^*\colon \wp(X) \to [0, +\infty]$ é uma **medida exterior** se $m^*(\emptyset) = 0$ e $m^*(\bigcup \mathcal{S}) \leq \sum_{S \in \mathcal{S}} m^*(S)$ para qualquer família enumerável $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X.

a) Mostre que para quaisquer $A, E \subseteq X$ se verifica $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$. Dica: $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$.

b) Diremos que $A \subseteq X$ é m^***-mensurável** se ocorrer $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ para qualquer subconjunto $E \subseteq X$ satisfazendo $m^*(E) < +\infty$. Mostre que se $A \subseteq X$ é m^*-mensurável, então $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$ para qualquer subconjunto $E \subseteq X$.

c) Mostre que $\mathcal{M} := \{A \subseteq X : A \text{ é } m^*\text{-mensurável}\}$ é uma *álgebra* em X, i.e., $\emptyset, X \in \mathcal{M}$ e tanto $X \setminus A$ quanto $A \cup B$ pertencem a $\mathcal{M}$ sempre que $A, B \in \mathcal{M}$. Dica: note que $X \setminus (X \setminus A) = A$ e $E \cap (A \cup B) = (E \cap A \cap B) \cup (E \cap A \cap (X \setminus B)) \cup (E \cap (X \setminus A) \cap B)$.

d) Mostre que a restrição de m^* a $\mathcal{M}$ é *finitamente aditiva*, i.e., $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ sempre que $A, B \in \mathcal{M}$ com $A \cap B = \emptyset$. Dica: faça $E := A \cup B$ e use que $A \in \mathcal{M}$.

e) Mostre que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra. Dica: em vista do Exercício K.84 e do item (c) acima, basta mostrar que $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{M}$ sempre que $A_n \in \mathcal{A}$ para todo n com $A_m \cap A_n = \emptyset$ se $m \neq n$; para isso, escreva $B_n := \bigcup_{j \leq n} A_n$ e $B := \bigcup_{n\in\omega} B_n$ e note que $m^*(E \cap B_n) = \sum_{j\leq n} m^*(E \cap A_j)$ e $m^*(E \cap B_n) \geq m^*(E \cap B_n) + m^*(E \setminus B)$ para qualquer $E \subseteq X$, donde a arbitrariedade de n e a igualdade $\bigcup_{n\in\omega} A_n = B$ permitem concluir a desigualdade desejada.

f) Por fim, mostre que a restrição de m^* a $\mathcal{M}$ é uma medida. Dica: na argumentação acima, troque E por $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ e seja feliz. ■

Observação 5.3.45. Na verdade, a σ-álgebra $\mathcal{M}$ exibida acima é tal que a restrição de m^* sobre $\mathcal{M}$ é *completa*, no seguinte sentido: *sempre que* $N \in \mathcal{M}$ *satisfaz* $m^*(N) = 0$ *e* $F \subseteq N$, *tem-se* $F \in \mathcal{M}$. O leitor interessado pode verificar isso por conta própria. △

Exercício 5.146. Seja G um grupo de Hausdorff. Mostre que se G admite uma integral de Haar, então G é localmente compacto. *Dica*: $K \subseteq G$ compacto com $\mu(K) > 0$; note que $K' := K \cup K^{-1}$ também satisfaz $\mu(K') > 0$; *basta* então mostrar que $K'K'$ contém o *aberto* $\{x \in G : \mu(K' \cap x(K')^{-1}) > 0\}$. ■

Exercício 5.147. Seja F um corpo topológico localmente compacto de Hausdorff. Mostre que F é metrizável. *Dica*: encontre um compacto $K \subseteq F$ tal que $\mu(K) > 0$ e $K = -K$, onde μ é a medida de Haar de F; ao definir $n\colon F \to [0, +\infty)$ como $n(x) := \dfrac{\mu(xS)}{\mu(S)}$, segue que $d(x,y) := n(x - y)$ é uma métrica com as propriedades procuradas. ■

Capítulo 6

Espaços de funções contínuas

Dada uma categoria minimamente razoável[1] $\mathscr{C}$ e objetos $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, sabemos apenas que as setas da forma $a \to b$ constituem um conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, b)$, que a rigor é um objeto da categoria Set. Assim, pela *perspectiva* de $\mathscr{C}$, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, b)$ é uma entidade que extrapola seus limites e só pode ser manipulada extrinsecamente, em Set. Eventualmente pode ser o caso de que $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, b)$ seja um objeto de $\mathscr{C}$: Group, Ring, ${}_K$Vect e, naturalmente, Set, são exemplos claros de que coisas assim acontecem.

No caso da categoria Top, as setas entre dois espaços topológicos X e Y formam o conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$, sobre o qual *diversas* topologias podem ser consideradas:

(i) como sempre, as topologias discreta e codiscreta estão disponíveis;

(ii) a topologia da convergência pontual, herdada da topologia produto sobre Y^X;

(iii) a ~~uniformidade~~ topologia da convergência uniforme se Y for um espaço uniforme...

Há uma *infinidade* de topologias disponíveis[2], o que suscita a pergunta: do ponto de vista de Top, qual dessas topologias seria a correta? Neste capítulo, veremos algumas respostas possíveis para essa pergunta, dentre outros fatos importantes dos espaços de funções *contínuas*.

6.1 Generalidades

Uma vez que categorias só falam de objetos e setas, como expressar que um objeto *representa* a coleção dos morfismos entre dois objetos fixados? A abordagem usual consiste em imitar, na categoria em questão, o comportamento de Y^X em Set com respeito às funções entre conjuntos. O resultado dessa adaptação é o que costuma se chamar de *objeto exponencial* (Exercício K.98), mas que será relembrado ao longo desta seção – camuflado por notações conjuntistas e topológicas.

Para *conjuntos* X, Y e Z fixados, define-se de maneira *natural* uma bijeção entre as famílias de funções $Y^{Z\times X}$ e $\left(Y^X\right)^Z$: basta associar cada $f\colon Z \times X \to Y$ à função $\Delta(f)\colon Z \to Y^X$ que faz $\Delta(f)(z)(x) := f(z, x)$ para cada $z \in Z$ e $x \in X$ fixados. Secretamente, o caráter bijetivo de Δ está atrelado à propriedade universal dos conjuntos da forma B^A.

[1]Leia-se: localmente pequena, i.e., tal que $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, b)$ é um conjunto para cada par de objetos $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

[2]Quando os espaços são infinitos, obviamente (Exercícios 1.326 e 1.327).

Mais precisamente, a família de funções B^A vem munida de uma ~~seta~~ função *avaliação* $\mathrm{ev}\colon B^A \times A \to B$ que faz $\mathrm{ev}(f,a) := f(a)$ para quaisquer $f \in B^A$ e $a \in A$ e que tem a seguinte propriedade universal: para cada conjunto C e função $g\colon C \times A \to B$ existe uma única função $\widehat{g}\colon C \to B^A$ que faz o diagrama abaixo *comutar*.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\widehat{g}"'] & C \times A \arrow[d, dashed, "\widehat{g}\times \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B^A & B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & B \end{tikzcd}$$

Em outras palavras, cada $g \in B^{C\times A}$ se associa injetivamente à função $\widehat{g} \in (B^A)^C$. Porém, tal injeção também é sobrejetiva pois, se $h\colon C \to B^A$ é uma função, então $\check{h}\colon C \times A \to B$ dada por $\check{h}(c,a) := h(c)(a)$ é tal que

$$\mathrm{ev} \circ (h \times \mathrm{id}_A)(c,a) := \mathrm{ev}\left((h \times \mathrm{id}_A)(c,a)\right) = \mathrm{ev}(h(c),a) := h(c)(a) := \check{h}(c,a),$$

i.e., $\mathrm{ev} \circ (h \times \mathrm{id}_A) = \check{h}$, donde a unicidade na propriedade universal garante $\widehat{\check{h}} = h$.

Exercício 6.1. Fazendo $X := A$, $Y := B$ e $Z := C$, convença-se de que a bijeção proposta $\Delta\colon Y^{Z\times X} \to \left(Y^X\right)^Z$ é tal que $\Delta(f) := \widehat{f}$. ■

O que o leitor deve se perguntar agora é o seguinte: se em vez de meros conjuntos, X, Y e Z fossem espaços topológicos, faria sentido restringir as correspondências acima para o cenário de funções contínuas apenas? Em outras palavras, existem topologias *interessantes* em espaços de funções contínuas que façam de $\Delta\colon \mathcal{C}(Z \times X, Y) \to \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y))$ um homeomorfismo? A argumentação acima sugere que a continuidade de *avaliações* da forma $\mathcal{C}(A,B) \times A \to B$ deve ter algo a ver com a resposta. Como veremos adiante, este é um problema mais delicado do que parece[3].

6.1.1 Topologias de cisão vs. topologias admissíveis

Para espaços topológicos X, Y e Z fixados, a restrição da função Δ ao conjunto $\mathcal{C}(Z\times X, Y)$ *produz*, a princípio, uma função (que será denotada pelo mesmo símbolo)

$$\begin{aligned} \Delta\colon \mathcal{C}(Z \times X, Y) &\to \mathcal{C}(X,Y)^Z \\ f &\mapsto \Delta(f) \end{aligned}$$

em que $\Delta(f)(z)(x) := f(z,x)$: de fato, se $(x_d)_d$ é uma *net*[4] em X com $x_d \to x$ para algum $x \in X$, então $(z, x_d) \to (z,x)$ em $Z \times X$, donde a continuidade de f assegura $f(z,x_d) \to f(z,x)$, i.e., $\Delta(f)(z)(x_d) \to \Delta(f)(z)(x)$, mostrando que $\Delta(f)(z) \in \mathcal{C}(X,Y)$.

Observação 6.1.1. Note que a argumentação acima nada diz sobre a continuidade de $\Delta(f)$ ou mesmo de Δ, que dependem de topologias nos espaços de funções. △

Definição 6.1.2. Diremos que uma topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é **de cisão**[5] se para quaisquer espaço Z e função contínua $f\colon Z \times X \to Y$, a função $\Delta(f)\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ for contínua.¶

[3] E o leitor que gostou da Subseção 1.4.1 deve se preparar para episódios de nostalgia.

[4] Dado que frequentemente é irrelevante explicitar o conjunto dirigido, a partir deste capítulo a redação sucumbirá à preguiça e omitirá sua transcrição em quase todas as ocasiões.

[5] Oriundo do termo anglófono correspondente, *splitting*. Outra alternativa seria chamar de "topologia própria", como Engelking [39], mas particularmente considero este um adjetivo muito preguiçoso.

Exercício 6.2. Mostre que a topologia codiscreta sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é de cisão. ■

Observação 6.1.3. Em certo sentido, o exercício acima sugere que quanto *menor* a topologia, *maiores* as chances de que ela seja de cisão (vide o Lema 6.1.6). △

Analogamente, dada uma função $g\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$, tem-se de modo natural a função $\Delta^{-1}(g)\colon Z \times X \to Y$ dada por $\Delta^{-1}(g)(z,x) := g(z)(x)$. Embora a continuidade de $\Delta^{-1}(g)$ seja, a princípio, alheia ao conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$, é pertinente perguntar se alguma topologia em $\mathcal{C}(X,Y)$ segundo a qual g seja contínua permite inferir a continuidade de $\Delta^{-1}(g)$.

Definição 6.1.4. Diremos que uma topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é **admissível** se para quaisquer espaço Z e função contínua $g\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$, a função $\Delta^{-1}(g)\colon Z \times X \to Y$ for contínua. ¶

Alternativamente, denotando por $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ a função que faz $(f,x) \mapsto f(x)$ para cada $(f,x) \in \mathcal{C}(X,Y) \times X$, mostra-se que a *admissibilidade* é apenas um modo menos imediato de expressar a continuidade da avaliação.

Proposição 6.1.5. *Uma topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é admissível se, e somente se, a avaliação $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ é contínua (ao se dotar $\mathcal{C}(X,Y)$ com tal topologia).*

Demonstração. Supondo a topologia admissível, basta tomar $Z := \mathcal{C}(X,Y)$ e $g := \mathrm{id}_{\mathcal{C}(X,Y)}$ pois, em tal caso, $\Delta^{-1}(g) = \mathrm{ev}$. A recíproca segue pois, nas presentes condições, verifica-se $\Delta^{-1}(g) = \mathrm{ev} \circ (g \times \mathrm{id}_X)$. □

Lema 6.1.6. *Sejam X e Y espaços topológicos, bem como $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ topologias em $\mathcal{C}(X,Y)$.*

(i) Se $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ é de cisão, então $\mathcal{T}'$ é de cisão.

(ii) Se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}$ é admissível, então $\mathcal{T}'$ é admissível.

(iii) Se $\mathcal{T}$ é de cisão e $\mathcal{T}'$ é admissível, então $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Demonstração. A primeira afirmação é evidente, enquanto a segunda segue sem grandes dificuldades da última proposição. Para a última, chamemos $Z := (\mathcal{C}(X,Y), \mathcal{T})$ e $Z' := (\mathcal{C}(X,Y), \mathcal{T}')$, por simplicidade. Como a topologia de Z é de cisão, segue que $\Delta(f)\colon Z' \to Z$ é contínua sempre que $f\colon Z' \times X \to Y$ for contínua, enquanto a *admissibilidade* da topologia de Z' garante que $\Delta^{-1}(g)\colon Z' \times X \to Y$ é contínua sempre que $g\colon Z' \to Z'$ é contínua. Por fim, basta tomar $g := \mathrm{id}_{Z'}$ a fim de concluir que

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}(X,Y)} = \Delta\left(\Delta^{-1}(\mathrm{id}_{Z'})\right) : Z' \to Z$$

é contínua, donde se obtém a inclusão desejada. □

Corolário 6.1.7. *Para espaços topológicos X e Y, $\mathcal{C}(X,Y)$ admite, no máximo, uma topologia simultaneamente admissível e de cisão.*

Exercício 6.3. Demonstre o corolário anterior. Dica: note que uma topologia com as condições pedidas é o $\subseteq$-menor elemento na família das topologias admissíveis sobre $\mathcal{C}(X,Y)$, em virtude do último lema. ■

Engelking [39] chama como *aceitável* à única topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$, caso exista, simultaneamente admissível e de cisão. Porém, em vista do seu caráter categorial (Exercício 6.16), pode ser mais *aceitável* estabelecer a próxima

Definição 6.1.8. Diremos que uma topologia $\mathcal{C}(X,Y)$ é **exponencial** se ela for simultaneamente admissível e de cisão. ¶

Exemplo 6.1.9 (A convergência pontual é de cisão)**.** Para X, Y e Z espaços quaisquer e uma função contínua $f\colon Z \times X \to Y$, a função $\Delta(f)\colon Z \to \mathcal{C}_p(X,Y)$ é contínua pois, para cada $x \in X$, $(\pi_x \circ \Delta(f))(z) = f(z,x)$, donde é fácil ver que $\pi_x \circ \Delta(f)$ é contínua e, pela arbitrariedade do x tomado, $\Delta(f)$ é contínua (Proposição 1.1.86).

No entanto, a convergência pontual não costuma ser admissível. De fato, mesmo para o familiar caso em que $X \coloneqq Y \coloneqq \mathbb{R}$, podemos *encontrar* uma sequência convergente em X, digamos $(x_n)_n$, juntamente com funções $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, contínuas e com $f_n(x_n) = 1$ para todo n, de tal maneira que $f_n \to 0$ em $\mathcal{C}_p(X,Y)$. Porém, se $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}_p(X,Y) \times X \to Y$ fosse contínua, ocorreria $f_n(x_n) \to 0$. ▲

Exemplo 6.1.10 (A convergência uniforme é admissível)**.** Fixados um espaço topológico X e um espaço uniforme Y, a função avaliação $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}_u(X,Y) \times X \to Y$ é contínua, onde $\mathcal{C}_u(X,Y)$ indica que o conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ está munido da uniformidade da convergência uniforme (Definição 4.1.39). De fato, se $(f_d, x_d)_d$ é uma *net* em $\mathcal{C}_u(X,Y) \times X$ com $(f_d, x_d) \to (f, x)$, então $f_d(x_d) \to f(x)$:

- ✓ fixada uma *entourage* simétrica U de Y, existe d' tal que $(f(x'), f_d(x')) \in U$ para todo $d \geq d'$ e $x' \in X$;
- ✓ por sua vez, a continuidade de f dá um aberto $W \subseteq X$ com $x \in W$ e $f(z) \in U[f(x)]$ para todo $z \in W$;
- ✓ por fim, de $x_d \to x$ existe d'' com $x_d \in W$ sempre que $d \geq d''$;

logo, para $d \geq d', d''$ deve-se ter $x_d \in W$ e, consequentemente, $(f_d(x_d), f(x)) \in 2U$. O leitor incomodado com uniformidades pode substituir Y por $\mathbb{R}$ e U por ε a fim de demonstrar que $|f_d(x_d) - f(x)| < 2\varepsilon$ para todo $d \geq d', d''$.

Todavia, a convergência uniforme não costuma ser de cisão. Com efeito, a função contínua $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) \coloneqq xy$ é tal que $\Delta(f)\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$ não é contínua: se fosse, então para qualquer sequência $(x_n)_n$ em $\mathbb{R}$ com $x_n \to x$ para algum x, deveria ocorrer $\Delta(f)(x_n) \to \Delta(f)(x)$ em $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$, o que por sua vez corresponde à garantia de que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \omega$ com $|xy - x_n y| < \varepsilon$ para quaisquer $n \geq N$ e $y \in \mathbb{R}$; fica a cargo do leitor encontrar instâncias não satisfeitas dessa última afirmação. ▲

Como os exemplos acima evidenciam, nenhuma das topologias usuais sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é exponencial em geral, o que leva à pergunta: tal topologia existe?

6.1.2 A convergência contínua revisitada

A distante (e até agora opcional) Definição 1.4.17 apresentou a chamada *convergência contínua* sobre o espaço $\mathcal{C}(X,Y)$ das funções contínuas entre X e Y, mas no caso em que X e Y são *espaços de convergência isótona e centrada*. Por sua vez, as Proposições 1.4.18 e 1.4.20 sugerem que, na categoria desses espaços, tal convergência cumpre o papel análogo de ser admissível e de cisão. Assim, parece razoável supor que $\mathcal{C}(X,Y)$ tem uma *topologia* exponencial se, e somente se, a convergência contínua em $\mathcal{C}(X,Y)$ é *topologizável*. Como não se trata de uma sugestão inteiramente óbvia, convém uma discussão prolongada.

Recordemo-nos de que uma *net* $(f_a)_a$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ **converge continuamente** para $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, o que se abrevia com $f_a \to_{\mathcal{C}} f$, se $f_a(x_b) \to f(x)$ para toda *net* $(x_b)_b$ em X com $x_b \to x$, onde o conjunto dirigido da *net* $(f_a(x_b))_{a,b}$ é o produto dos conjuntos dirigidos das *nets* $(f_a)_a$ e $(x_b)_b$ (Observação 1.4.19). Note que isto define uma convergência *per se*, no sentido do que se fez na Subseção 1.4.1, e não depende de qualquer topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$. Com isso dito:

Teorema 6.1.11. *Sejam X e Y espaços topológicos e $(f_a)_a$ uma* net *em $\mathcal{C}(X,Y)$. Se $\mathcal{C}(X,Y)$ tem uma topologia exponencial, então $f_a \to f$ para alguma $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ se, e somente se, $f_a \to_{\mathcal{C}} f$.*

Demonstração.[6] A ida decorre da continuidade da avaliação $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$: se $(x_b)_b$ é uma *net* em X com $x_b \to x$, então $(f_a, x_b)_{a,b} \to (f,x)$, donde segue que

$$f_a(x_b) := \mathrm{ev}(f_a, x_b) \to \mathrm{ev}(f,x) := f(x),$$

i.e., $f_a \to_{\mathcal{C}} f$. A recíproca é um pouco mais delicada.

Supondo $f_a \to_{\mathcal{C}} f$, a ideia é exibir uma topologia admissível $\mathcal{T}'$ sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ segundo a qual ocorra $f_a \to_{\mathcal{T}'} f$, donde a conclusão segue pelo item (iii) do último lema aliado ao Exercício 1.196. Fazendo $\mathcal{T}' := \{U \subseteq \mathcal{C}(X,Y) : f \in U \Rightarrow \exists a' \text{ com } \{f_a : a \geq a'\} \subseteq U\}$, fica a cargo do leitor verificar que $\mathcal{T}'$ é uma topologia em $\mathcal{C}(X,Y)$ tal que $f_a \to_{\mathcal{T}'} f$. Agora, para um par $(g,x) \in \mathcal{C}(X,Y) \times X$, mostraremos que ev é contínua em (g,x): fixado um aberto $O \subseteq Y$ com $g(x) \in O$,

- ✓ se $g \neq f$, então $\{g\} \in \mathcal{T}'$ e a continuidade de g garante um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ tal que $\mathrm{ev}[\{g\} \times V] \subseteq O$;
- ✓ se $g := f$, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $f[V] \subseteq O$ (pois f é contínua), enquanto a convergência contínua $f_a \to_{\mathcal{C}} f$ assegura um aberto W com $x \in W$ e um índice a' com $f_a[W] \subseteq O$ para todo $a \geq a'$ (pelo próximo lema), o que permite tomar $U := \{f\} \cup \{f_a : a \geq a'\} \in \mathcal{T}'$, que satisfaz $(f,x) \in U \times (V \cap W)$ e $\mathrm{ev}[U \times (V \cap W)] \subseteq O$. □

Lema 6.1.12 (Folclore[7]). *Nas condições anteriores, $f_a \to_{\mathcal{C}} f$ se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo aberto O em torno de $f(x)$ existem a' no conjunto dirigido e $W \subseteq X$ aberto em torno de x tal que $f_a[W] \subseteq O$ para todo $a \geq a'$.*

Demonstração. Se $f_a \to_{\mathcal{C}} f$ e x e O são como no enunciado, então $f_a(x_\beta) \to f(x)$ para *qualquer net* $(x_\beta)_\beta$ em X que converge para x, e o pulo do gato é tomar $(x_\beta)_\beta$ apropriada: seja $\mathbb{B}_x := \{(z,U) : \{z,x\} \subseteq U \text{ e } U \subseteq X \text{ é aberto}\}$, dirigido pela relação que declara $(z,U) \leq (z',U')$ se, e somente se, $U' \subseteq U$; note que $(\pi_X(z,U))_{(z,U)\in\mathbb{B}_x}$ é uma *net* que converge para x (pois $\pi_X(z,U) := z \in U$). Logo, $f_a(\pi_X(z,U)) \to f(x)$, o que assegura tanto o índice a' quanto o aberto $W \subseteq X$ procurados. Para a recíproca, precisa-se mostrar que $f_a(x_\beta) \to f(x)$ sempre que $x_\beta \to x$: ora, com $O \subseteq Y$ aberto em torno de $f(x)$, a hipótese assegura a' e $W \subseteq X$ abertos com $f_a[W] \subseteq O$ sempre que $a \geq a'$, de modo que agora basta tomar β' satisfazendo $x_\beta \in W$ sempre que $\beta \geq \beta'$. □

[6] Adaptada de [106].

[7] Ou nem tanto: tal caracterização, implicitamente sugerida em [106], já estava presente em trabalhos de Frink (1942) e Kuratowski (1948). A formulação aqui apresentada se baseia em [46]. Porém, eu a vi numa formulação equivalente, pela primeira, vez num post muito interessante de Simon Henry, no mathoverflow (https://mathoverflow.net/a/187474/41407).

Isso mostra que uma topologia exponencial em $\mathcal{C}(X,Y)$ é, precisamente, aquela que atesta a *topologizabilidade* da convergência contínua. Daí, como a convergência contínua é capaz de garantir o *isomorfismo* entre os espaços de convergência $\mathcal{C}(Z\times X,Y)$ e $\mathcal{C}(Z,\mathcal{C}(X,Y))$ (Exercício 1.306), segue que topologias exponenciais respondem ao problema proposto no começo desta seção. Em outras palavras:

Corolário 6.1.13. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos tais que $\mathcal{C}(X,Y)$, $\mathcal{C}(Z\times X,Y)$ e $\mathcal{C}(Z,\mathcal{C}(X,Y))$ tenham topologias exponenciais. Então $\Delta\colon \mathcal{C}(Z\times X,Y)\to\mathcal{C}(Z,\mathcal{C}(X,Y))$ é um homeomorfismo com respeito a tais topologias.*

Demonstração. Basta observar que uma *net* $(g_d)_d$ em $\mathcal{C}(Z\times X,Y)$ converge *continuamente* para g em $\mathcal{C}(Z\times X,Y)$ se, e somente se, $\Delta(g_d)\to_{\mathcal{C}}\Delta(g)$ em $\mathcal{C}(Z,\mathcal{C}(X,Y))$, e daí apelar para o último teorema. Os detalhes ficam por conta do leitor. □

Exercício 6.4. Mostre que se $\mathcal{C}(X,Y)$ é exponencial, então $f\colon Z\times X\to Y$ é contínua se, e somente se, $\Delta(f)\colon Z\to\mathcal{C}(X,Y)$ é contínua. Compare com o Lema 5.3.28. ■

Seria o mundo cruel a ponto de existirem espaços topológicos X e Y para os quais $\mathcal{C}(X,Y)$ *não* admite uma topologia exponencial? Alternativamente: há espaços X e Y para os quais a convergência contínua em $\mathcal{C}(X,Y)$ **não** advém de uma topologia?

Teorema 6.1.14 (Arens [3] – Fox [44]: o mundo é cruel)**.** *Seja X um espaço de Tychonoff. Então $\mathcal{C}(X)$ admite uma topologia exponencial se, e somente se, X é localmente compacto.*

Em particular, não existe topologia exponencial sobre $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, posto que $\mathbb{Q}$ não é localmente compacto[8]. Pelo mesmo teorema, deve *existir* uma topologia exponencial sobre $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, mas que ainda não foi apresentada neste texto, posto que as únicas conhecidas não podem ser (Exemplos 6.1.9 e 6.1.10). Como encerramento desta subseção, provaremos a *ida* do último teorema na proposição a seguir, enquanto a volta será explorada na última seção, por meio da *topologia compacto-aberta*.

Proposição 6.1.15. *Seja X um espaço de Tychonoff. Se $\mathcal{C}(X)$ admite uma topologia exponencial, então X é localmente compacto.*

Demonstração. Sejam $f\colon X\to\mathbb{R}$ a função nula e $x_0\in X$ um ponto fixado. Em vista da Proposição 3.3.9, basta obter um aberto $V\subseteq X$ com $x_0\in V$ e $\overline{V}$ compacto. Para isso, a admissibilidade da topologia de $\mathcal{C}(X)$ permite tomar abertos $W\subseteq\mathcal{C}(X)$ e $V\subseteq X$ com $(f,x_0)\in W\times V$ tais que $\operatorname{ev}[W\times V]\subseteq(-1,1)$, i.e., $|g(v)|<1$ para quaisquer $g\in W$ e $v\in V$. O objetivo agora é mostrar que $\overline{V}$ é um subespaço compacto de X.

Para uma coleção $\mathcal{U}$ de abertos de X com $\overline{V}\subseteq\bigcup\mathcal{U}$, considera-se sobre $\mathcal{C}(X)$ a topologia $\mathcal{T}'$ definida da seguinte forma: abertos *sub-básicos* de $\mathcal{T}'$ são subconjuntos da forma

$$[F,O]:=\{g\in\mathcal{C}(X):g[F]\subseteq O\},\tag{6.1}$$

onde os pares (F,O) são tais que $O\subseteq\mathbb{R}$ é aberto e $F\subseteq X$ é um fechado para o qual existe um aberto $U\in\mathcal{U}\cup\{X\setminus\overline{V}\}$ com $F\subseteq U$. O *Katzensprung* é notar que $\mathcal{T}'$ é uma topologia admissível: dados $g\in\mathcal{C}(X)$, $x\in X$ e um aberto $O\subseteq\mathbb{R}$ com $g(x)\in O$, a continuidade de g aliada à regularidade de X dão um aberto $A\subseteq X$ com $x\in A$ e $\overline{A}\subseteq g^{-1}[O]\cap U$ para algum $U\in\mathcal{U}\cup\left\{X\setminus\overline{V}\right\}$, donde segue que a vizinhança $N:=\left[\overline{A},O\right]\times\overline{A}$ satisfaz $(g,x)\in N$ e $\operatorname{ev}[N]\subseteq O$, mostrando que a avaliação $\operatorname{ev}\colon(\mathcal{C}(X),\mathcal{T}')\times X\to\mathbb{R}$ é contínua.

[8] Por conta do Corolário 4.2.55 e do Exemplo 4.2.49. Leitores avessos a canhões podem provar diretamente: basta adaptar os argumentos do Exercício 3.71.

Agora, como a topologia nativa de $\mathcal{C}(X)$ é de cisão por hipótese, o item (iii) do Lema 6.1.6 garante que os abertos nativos de $\mathcal{C}(X)$ pertencem à topologia $\mathcal{T}'$. Em particular, o subconjunto aberto $W \subseteq \mathcal{C}(X)$ tomado no começo da demonstração pertence a $\mathcal{T}'$. Logo, existem $F_0, \ldots, F_n \subseteq X$ fechados e $O_0, \ldots, O_n \subseteq \mathbb{R}$ abertos com $f \in \bigcap_{j \leq n}[F_j, O_j] \subseteq W$.

Ocorre que em tais condições, deve-se ter $V \setminus \bigcup_{j \leq n} F_j = \emptyset$: o contrário permitiria tomar uma função $g \in \mathcal{C}(X)$ com $g(x) := 0$ para todo $x \in \bigcup_{j \leq n} F_j$, com $g(z) = 1$ para algum $z \in V \setminus \bigcup_{j \leq n} F_j$, que satisfaz $g \in \bigcap_{j \leq n}[F_j, O_j]$ enquanto $g \notin W$, posto que $g(z) \notin (-1, 1)$. Portanto, $V \subseteq \bigcup_{j \leq n} F_j$, de modo que basta tomar os correspondentes $U_j \in \mathcal{U}$ satisfazendo $F_j \subseteq U_j$ a fim de obter uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ para $\overline{V}$, como desejado. □

Exercício 6.5. Complete os detalhes da demonstração anterior. ■

6.1.3 Topologias de convergência uniforme

A demonstração da última proposição esconde um método muito prático de atribuir topologias para espaços da forma $\mathcal{C}(X, Y)$, onde X e Y são espaços topológicos: basta considerar os subconjuntos da forma $[F, O]$, como em (6.1), permitindo que F e O pertençam a famílias particulares de subconjuntos de X e Y, respectivamente.

De forma um pouco mais precisa, para $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$, consideram-se os subconjuntos da forma

$$[S, T] := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f[S] \subseteq T\},$$

de modo que, para $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ coleções de subconjuntos de X e Y, respectivamente, pode-se chamar de **topologia $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$** à menor topologia em $\mathcal{C}(X, Y)$ que torna abertos os membros da família $[\mathcal{S}, \mathcal{T}] := \{[S, T] : S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}\}$ (como na Proposição 1.1.29).

Exercício 6.6. Sejam $S, S' \subseteq X$ e $T, T' \subseteq Y$ subconjuntos quaisquer. Mostre que:

a) $[S \cup S', T] = [S, T] \cap [S', T]$;

b) $[S, T \cap T'] = [S, T] \cap [S, T']$;

c) $S \subseteq S' \Rightarrow [S', T] \subseteq [S, T]$;

d) $T \subseteq T' \Rightarrow [S, T] \subseteq [S, T']$;

e) $[S \cup S', T \cap T'] \subseteq [S, T] \cap [S', T']$;

f) $[\emptyset, T] = [S, Y] = \mathcal{C}(X, Y)$ e, se $S \neq \emptyset$, então $[S, \emptyset] = \emptyset$. ■

Pelo exercício acima, um modo simples de garantir que $[\mathcal{S}, \mathcal{T}]$ seja uma *sub-base* no sentido clássico (Observação 1.1.30) seria exigir $\emptyset \in \mathcal{S}$ ou $Y \in \mathcal{T}$. Além disso, em vista dos itens (a) e (b), seria inofensivo supor $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ fechadas por reuniões finitas e interseções finitas, respectivamente, já que a topologia gerada por uma sub-base $\mathcal{B}$ tem como base as interseções finitas de membros de $\mathcal{B}$. Por fim, note que se Y é de Hausdorff, $\{x\} \in \mathcal{S}$ para todo $x \in X$ e $O \in \mathcal{T}$ para todo $O \subseteq Y$ aberto, então a topologia $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}$ em $\mathcal{C}(X, Y)$ também *será* de Hausdorff, algo bastante razoável.

Exercício 6.7. Verifique as afirmações acima. Dica: para a condição de Hausdorff em $\mathcal{C}(X, Y)$, note que $[\{x\}, O] \cap [\{x\}, O'] = \emptyset$ se $O, O' \subseteq Y$ forem (abertos) disjuntos. ■

Definição 6.1.16. Para X e Y espaços topológicos e $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X, escreve-se $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X, Y)$ para indicar o conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ dotado da $\mathcal{S}$-$\mathcal{T}_Y$-topologia, onde $\mathcal{T}_Y$ denota a topologia de Y. Em tal situação, a topologia de $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X, Y)$ passa a ser xingada de *topologia $\mathcal{S}$-aberta*, o que costuma variar de acordo com a família $\mathcal{S}$ escolhida. ¶

Exercício 6.8. Sejam X, Y e $\mathcal{S}$ como acima.

a) Mostre que as topologias de $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X, Y)$ e $\mathcal{C}^{\mathcal{S}'}(X, Y)$ coincidem, onde $\mathcal{S}'$ indica o "fecho" de $\mathcal{S}$ por reuniões finitas.

b) Observe que se $\mathcal{S}$ é fechada por reuniões finitas, então os conjuntos da forma $[S, O]$, para $S \in \mathcal{S}$ e $O \subseteq Y$ aberto, constituem uma base (e não apenas uma sub-base) para a topologia $\mathcal{S}$-aberta.

c) Mostre que se $\{x\} \in \mathcal{S}$ para todo $x \in X$ e Y é de Hausdorff, então $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X, Y)$ é de Hausdorff. ■

Exemplo 6.1.17 (A topologia da convergência pontual, mais uma vez)**.** O caso mais simples de topologia satisfazendo a condição do último item do exercício acima se obtém com $\mathcal{S} := [X]^{<\aleph_0}$, i.e., a família dos subconjuntos finitos de X: a princípio, bastaria tomar $\mathcal{S} := \{\{x\} : x \in X\}$, porém, o primeiro item do mesmo exercício mostra que tal $\mathcal{S}$ pode ser substituído por seu fecho por reuniões finitas, o que resulta, precisamente, na coleção dos subconjuntos finitos de X.

Ocorre que $\mathcal{C}^{[X]^{<\aleph_0}}(X, Y)$ não traz nada de novo para a discussão, por se tratar tão somente da boa e velha topologia da convergência pontual (*a.k.a.* topologia produto) em $\mathcal{C}(X, Y)$: com efeito, para $F \subseteq X$ e $O \subseteq Y$ quaisquer, deve-se ter

$$[F, O] = \mathcal{C}(X, Y) \cap \bigcap_{x \in F} \pi_x^{-1}[O],$$

o que permite ver que os abertos de ambas as topologias são os mesmos. ▲

O exemplo acima, aliado ao título da subseção, pode ter chamado a atenção do leitor que se lembra do Exemplo 5.1.27, que descreveu a topologia produto de $\mathcal{C}_p(X)$ como oriunda de uma uniformidade em $\mathcal{C}(X)$. Em geral, se X é um espaço topológico e Y é um espaço uniforme, digamos que com uniformidade $\mathcal{U}$, então os conjuntos da forma

$$\langle F, U \rangle := \{(f, g) \in \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Y) : \forall x \in F \quad (f(x), g(x)) \in U\},$$

com $F \subseteq X$ finito e $U \in \mathcal{U}$, constituem uma base de *entourages* para uma uniformidade em $\mathcal{C}(X, Y)$. A combinação desta observação com o exemplo anterior sugere que a topologia de $\mathcal{C}_p(X, Y)$ é uniformizável, precisamente, por essa uniformidade. Além de certa, tal sugestão vale bem mais geralmente.

Definição 6.1.18. Sejam X um espaço topológico, $(Y, \mathcal{U})$ um espaço uniforme e $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X. Indicaremos por $\langle \mathcal{S}, \mathcal{U} \rangle$ a uniformidade em $\mathcal{C}(X, Y)$ gerada pelas *entourages* da forma

$$\langle S, U \rangle := \{(f, g) \in \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Y) : \forall x \in S \quad (f(x), g(x)) \in U\},$$

com $S \in \mathcal{S}$ e $U \in \mathcal{U}$, que será chamada de **uniformidade da convergência uniforme em $\mathcal{S}$**. Escreve-se $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ para indicar o conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ munido de tal uniformidade. Em particular, a topologia em $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ induzida por sua uniformidade é chamada de **topologia da convergência uniforme em $\mathcal{S}$**. ¶

Exercício 6.9. Convença-se de que, realmente, a família $\{\langle S, U\rangle : S \in \mathcal{S}, U \in \mathcal{U}\}$ é base para uma uniformidade em $\mathcal{C}(X, Y)$, no sentido da Definição 4.1.25. Dica: segue, essencialmente, por $\mathcal{U}$ já ser uma uniformidade em Y. ■

A alcunha atribuída à uniformidade $\langle \mathcal{S}, \mathcal{U}\rangle$ se deve ao seguinte fenômeno:

Proposição 6.1.19. *Seja $(f_d)_d$ uma* net *em $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, Y)$. Para $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ qualquer, ocorre $f_d \to f$ se, e somente se, $f_d|_S \to f|_S$ uniformemente (no sentido da Definição 4.1.35) para cada $S \in \mathcal{S}$.*

Demonstração. Trata-se de um exercício de tradução: se $f_d \to f$, então para $S \in \mathcal{S}$ fixado, $\langle S, U\rangle[f]$ é uma vizinhança de f para cada *entourage* U de Y, donde segue que existe d' com $f_d \in \langle S, U\rangle[f]$ para todo $d \geq d'$, i.e., tal que $(f(x), f_d(x)) \in U$ para todo $x \in S$, ou seja, $f_d|_S \to f|_S$ uniformemente. A recíproca é idêntica. □

A fim de simplificar as notações futuras, variações da notação $(X, \tau) \leq (X, \sigma)$ serão utilizadas para indicar que $\tau \subseteq \sigma$. Por exemplo:

Exercício 6.10. Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ famílias de subconjuntos de X. Mostre que se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, então $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, Y) \leq \mathcal{C}_{\mathcal{S}'}(X, Y)$, i.e., a topologia da convergência uniforme em $\mathcal{S}$ está contida na topologia da convergência uniforme em $\mathcal{S}'$. Dica: use o Exercício 1.196. ■

Observação 6.1.20. É evidente que a uniformidade $\langle \mathcal{S}, \mathcal{U}\rangle$ poderia ser definida sobre o conjunto de *todas* as funções da forma $X \to Y$, e não apenas sobre $\mathcal{C}(X, Y)$, bem como a topologia $\mathcal{S}$-aberta faria sentido em Y^X (isto será útil no Corolário 6.2.32). No entanto, é frequente que os membros de $\mathcal{S}$ se comportem melhor com as funções contínuas, o que justifica o escopo restrito das definições apresentadas. Com isso dito, convém ressaltar que a proposição anterior se mantém válida quando adaptada para Y^X e, nesse sentido, trata-se apenas de uma generalização "parcial" do distante Lema 1.2.36: de fato, fazendo $\mathcal{S} := \{\{x\} : x \in X\}$, segue que $f_d \to f$ em Y^X com a topologia produto se, e somente se, $f_d|_{\{x\}} \to f|_{\{x\}}$ uniformemente para todo $x \in X$, i.e., se $f_d \to f$ pontualmente. △

Proposição 6.1.21. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos compactos de X e $(Y, \mathcal{U})$ um espaço uniforme. Em tais condições, $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X, Y) \leq \mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, Y)$.*

Demonstração. Pela definição da topologia $\mathcal{S}$-aberta, basta mostrar que conjuntos da forma $[S, O]$ são abertos na topologia induzida pela uniformidade $\langle \mathcal{S}, \mathcal{U}\rangle$. Ora, para uma função $f \in [S, O]$, a compacidade de $S \in \mathcal{S}$ e a continuidade de f asseguram que $f[S]$ é um subconjunto compacto do aberto O de Y. Com isso, a variação do Teorema da *entourage* de Lebesgue discutida no Exercício 4.27 garante uma *entourage* $U \in \mathcal{U}$ com $U[f[S]] \subseteq O$, o que permite conjurar a vizinhança $\langle S, U\rangle[f]$ de f na topologia da convergência uniforme em $\mathcal{S}$, que *trivialmente* satisfaz $\langle S, U\rangle[f] \subseteq [S, O]$. □

Exercício 6.11. Convença-se de que o final da demonstração anterior é, *realmente*, trivial. Dica: troque $(Y, \mathcal{U})$ por $\mathbb{R}$ com sua uniformidade usual e note que a *entourage* U obtida corresponde a um $\delta > 0$ que satisfaz $\bigcup_{x \in S} B(f(x), \delta) \subseteq O$. ■

A inclusão oposta é um pouco mais delicada, embora seja verdadeira na "maioria" dos casos que importam. A fim de simplificar a exposição, os argumentos a seguir tratam apenas do caso $Y := \mathbb{R}$ munido de sua uniformidade usual[9]. Em tal cenário, as *entourages* de $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X) := \mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, \mathbb{R})$ serão denotadas por $\langle S, \varepsilon\rangle$ em vez de $\langle S, E_\varepsilon\rangle$.

[9] O Exercício 6.18 trata dos demais casos.

Proposição 6.1.22. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos compactos de X fechada para inclusão, i.e., tal que $S \subseteq S'$ com $S' \in \mathcal{S}$ e S compacto acarrete $S \in \mathcal{S}$. Em tais condições, $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X) \leq \mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X)$.*

Demonstração. Explicitamente, para $A \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X)$ aberto e $f \in A$, deve-se encontrar $C_0, \ldots, C_n \in \mathcal{S}$ e $V_0, \ldots, V_n \subseteq \mathbb{R}$ abertos com $f \in \bigcap_{i \leq n}[C_i, V_i] \subseteq A$. Ora, pela definição da topologia de $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X)$, existem $S \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0$ com $\langle S, 3\varepsilon\rangle[f] \subseteq A$. Agora, da compacidade de S e da continuidade de f, resulta que $f[S]$ é compacto, o que permite obter $x_0, \ldots, x_n \in S$ satisfazendo $f[S] \subseteq \bigcup_{i \leq n} B(f(x_i), \varepsilon)$. Dessa forma, com $F_i := B[f(x_i), \varepsilon]$, $C_i := f^{-1}[F_i] \cap S$ e $V_i := B(f(x_i), 2\varepsilon)$ para cada $i \leq n$, não é difícil perceber que os conjuntos $[C_i, V_i]$ satisfazem as condições desejadas. □

Exercício 6.12. Conclua a demonstração. Dica: note que $\bigcap_{i \leq n}[C_i, V_i] \subseteq \langle S, 3\varepsilon\rangle[f]$, posto que $F_i \subseteq V_i$; além disso, C_i é um subconjunto fechado do compacto S. ■

Embora a compacidade seja importante, *a posteriori*, por garantir certa invariância topológica para as topologias de convergência uniforme, o seu trunfo está em permitir que os ferramentais de Análise Funcional sejam aplicados. Mais precisamente:

Proposição 6.1.23. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X. Então a adição usual de funções faz de $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X)$ um grupo topológico. Se, além disso, cada $S \in \mathcal{S}$ estiver contido em algum compacto $K_S \in \mathcal{S}$, então $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X)$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico com a multiplicação usual.*

Exercício 6.13. Demonstre a proposição acima. Dica: para a última parte, note que se $\alpha_d \to \alpha$ em $\mathbb{R}$ e $f_d \to f$ em $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X)$, então

$$|\alpha_d f_d(s) - \alpha f(s)| \leq |\alpha_d - \alpha| \cdot |f(s)| + (|\alpha_d - \alpha| + |\alpha|) \cdot |f_d(s) - f(s)|$$

para quaisquer d no conjunto dirigido e $s \in K_S$, com $\sup_{s \in K_S} |f(s)| < +\infty$ em virtude da compacidade de K_S, o que permite utilizar adequadamente a hipótese de que $f_d|_{K_S} \to f|_{K_S}$ uniformemente. ■

Exemplo 6.1.24 (Confira o Exercício 5.114)**.** Se existir uma função ilimitada $f\colon X \to \mathbb{R}$, então a multiplicação $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_{\{X\}}(X) \to \mathcal{C}_{\{X\}}(X)$ não é contínua no par $(0, f)$. Logo, alguma forma de compacidade (no caso, pseudocompacidade) deve ser exigida a fim de garantir o resultado da proposição anterior. ▲

Para completar o quadro usual de exigências sobre a família de subconjuntos $\mathcal{S}$, note que se $X = \bigcup \mathcal{S}$, então $\bigcap\{\langle S, \varepsilon\rangle : S \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0\} = \{(f, f) : f \in \mathcal{C}(X)\}$, mostrando que em tais situações, $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X)$ é um espaço de Hausdorff (Proposição 4.1.42). Portanto, a fim de garantir que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X)$ seja:

(a) espaço vetorial topológico, pede-se cada $S \in \mathcal{S}$ contido num compacto $K_S \in \mathcal{S}$ (ou, se X for de Hausdorff, $\overline{S} \in \mathcal{S}$ com $\overline{S}$ compacto para cada $S \in \mathcal{S}$);

(b) de Hausdorff, pede-se $x \in \bigcup \mathcal{S}$ para cada $x \in X$.

Em particular, por ocorrer $\langle A, \varepsilon\rangle \subseteq \langle B, \varepsilon\rangle$ sempre que $B \subseteq A$, não se *ganham* vizinhanças com a suposição de $\mathcal{S}$ ser fechado por inclusões (Exercício 6.20). Ao associar tais observações com a Proposição 6.1.22 e o Exercício 6.8, resulta que $\mathcal{S}$ deve ser uma *bornologia* com *base compacta*.

Definição 6.1.25. Uma **bornologia** $\mathcal{B}$ num conjunto X é um *ideal* de subconjuntos de X com $X = \bigcup \mathcal{B}$, i.e.,

(i) $B, B' \in \mathcal{B} \Rightarrow B \cup B' \in \mathcal{B}$,

(ii) $A \subseteq B$ e $B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \mathcal{B}$, e

(iii) $\{x\} \in \mathcal{B}$ para todo $x \in X$.

Uma **base** para a bornologia $\mathcal{B}$ em X é um subconjunto $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ cofinal em $\mathcal{B}$, i.e., tal que $\mathcal{B} = \{C \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}' \text{ e } C \subseteq B\}$. Finalmente, se X é um espaço topológico, diz-se que $\mathcal{B}$ tem **base compacta** se existe uma base $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$ com cada $B' \in \mathcal{B}'$ compacto. ¶

Teorema 6.1.26. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma bornologia em X. Se a família $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} : B \text{ é compacto}\}$ for base para a bornologia $\mathcal{B}$, então $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X) = \mathcal{C}^{\mathcal{B}'}(X)$.*

Demonstração. Para cada $B' \in \mathcal{B}'$ e $O \subseteq \mathbb{R}$ aberto, a Proposição 6.1.21 garante que $[B', O]$ é aberto na topologia da convergência uniforme em $\mathcal{B}'$ e, por conseguinte, aberto na topologia da convergência uniforme em $\mathcal{B}$ (Exercício 6.10). Segue assim a *desigualdade* $\mathcal{C}^{\mathcal{B}'}(X) \leq \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$. Para a outra, a Proposição 6.1.22 garante $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X) \leq \mathcal{C}^{\mathcal{B}'}(X)$, já que $\mathcal{B}'$ satisfaz a hipótese de hereditariedade exigida. □

Observação 6.1.27 (Dependência topológica)**.** Do ponto de vista prático, a topologia da convergência uniforme em $\mathcal{B}$ se mostra mais adequada para fazer Análise. No entanto, como as *entourages* de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ são definidas a partir dos membros de $\mathcal{B}$ e de certas *entourages* de $\mathbb{R}$, a uniformidade $\langle \mathcal{B}, \mathcal{U} \rangle$ de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ depende, *a priori*, tanto de $\mathcal{B}$ quanto da uniformidade $\mathcal{U}$ escolhida em $\mathbb{R}$. Um efeito colateral dessa dependência é que ao trocar $\mathcal{U}$ por outra uniformidade $\mathcal{U}'$ topologicamente equivalente, *poderia* ocorrer $\langle \mathcal{B}, \mathcal{U} \rangle \neq \langle \mathcal{B}, \mathcal{U}' \rangle$ e – eis o problema – as respectivas topologias induzidas poderiam diferir.

Nesse sentido, o teorema acima nos exime de preocupações por mostrar que a topologia induzida em $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ é a topologia de $\mathcal{C}^{\mathcal{B}'}(X)$, que por sua vez depende apenas dos abertos de $\mathbb{R}$ e dos membros (compactos) de $\mathcal{B}$. Esse tipo de liberdade moral não existe, por exemplo, com a topologia da convergência uniforme usual – exceto nos casos em que o domínio das funções é compacto. △

Exemplo 6.1.28 (Subconjuntos finitos e $\mathcal{C}_p(X)$)**.** Como o Exemplo 6.1.17 adiantou, a topologia da convergência pontual sobre $\mathcal{C}(X)$ é aquela que se obtém da bornologia $\mathcal{F}_X := [X]^{<\aleph_0}$, i.e., da convergência uniforme em subconjuntos finitos de X. Em particular, como toda bornologia $\mathcal{B}$ em X contém $\mathcal{F}_X$, deve-se ter

$$f_d \to f \text{ em } \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X) \Rightarrow f_d \to f \text{ em } \mathcal{C}_p(X)$$

para toda *net* $(f_d)_d$ e f em $\mathcal{C}(X)$, donde segue que a topologia de $\mathcal{C}_p(X)$ é a menor (ou mais fraca) das topologias de convergência uniforme induzidas por bornologias (Exercício 6.10). Embora alguns fatos de $\mathcal{C}_p(X)$ já tenham sido coletados ao longo dos capítulos anteriores, a próxima seção abordará tais espaços com atenção especial. ▲

Exemplo 6.1.29 (Compactos e $\mathcal{C}_k(X)$)**.** Chama-se de **topologia compacto-aberta**[10] em $\mathcal{C}(X,Y)$, para X e Y espaços topológicos quaisquer, à topologia gerada pelos conjuntos da forma $[K,O]$, conforme K e O variam entre os subconjuntos compactos de X e abertos de Y, respectivamente. Com a terminologia utilizada nesta subseção, trata-se da topologia $\mathcal{K}_X$-aberta, em que $\mathcal{K}_X$ denota a família dos subconjuntos compactos de X. Todavia, escreveremos $\mathcal{C}_k(X,Y)$ em vez de $\mathcal{C}^{\mathcal{K}_X}(X,Y)$ para indicar que $\mathcal{C}(X,Y)$ está munido da topologia compacto-aberta. Embora isso pareça conflitar com as topologias de convergência uniforme, as duas topologias coincidem.

De fato, para $Y := \mathbb{R}$, o Teorema 6.1.26 juntamente com o Exercício 6.20 garantem que $\mathcal{C}_k(X,Y) = \mathcal{C}_{\mathcal{K}_X}(X,Y)$, onde a última é a frequentemente utilizada **topologia da convergência uniforme em compactos**[11], caracterizada pelo que seu título sugere (Proposição 6.1.19): uma *net* de funções contínuas $(f_d)_d$ converge para f contínua se, e somente se, $f_d|_K \to f|_K$ uniformemente em cada subconjunto compacto $K \subseteq X$. Em particular, note que $\mathcal{C}_p(X,Y) \leq \mathcal{C}_k(X,Y)$. A última subseção deste capítulo será dedicada a explorar algumas propriedades de $\mathcal{C}_k(X) := \mathcal{C}_k(X,\mathbb{R})$. ▲

Observação 6.1.30 (Bornologias em Análise Funcional)**.** É evidente que uma terminologia própria não seria introduzida na literatura apenas para colocar no mesmo saco subconjuntos finitos e pré-compactos. A noção de bornologia[12] visa capturar a ideia de limitação: reunião finita de conjuntos limitados é limitada; subconjuntos de limitados são limitados e conjuntos finitos são limitados.

Assim, se (X,d) é um espaço pseudométrico, a família dos subconjuntos limitados constitui uma bornologia por excelência. De forma análoga, para um e.v.t. E, os subconjuntos *linearmente limitados* constituem outra bornologia típica. Em particular, é no contexto vetorial que as bornologias se mostram mais interessantes, dado que continuidade e limitação interagem muito bem em tais cenários. O leitor interessado em aplicações pode conferir [11], onde inclusive mais referências são sugeridas. △

A próxima seção encerrará o capítulo com a discussão dos três casos mais importantes de topologias de convergência uniforme: a convergência uniforme usual[13], a convergência pontual e a convergência uniforme em compactos. Em particular, esta última encerrará a busca por uma topologia exponencial em $\mathcal{C}(X,Y)$.

Exercícios complementares da seção

Exercício 6.14. Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathcal{T}$ uma topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$.

a) Mostre que $\mathcal{T}$ é de cisão se, e somente se, a implicação

$$f_d \to_{\mathcal{C}} f \Rightarrow f_d \to_{\mathcal{T}} f \tag{6.2}$$

valer para qualquer *net* $(f_d)_d$ e f em $\mathcal{C}(X,Y)$. Dica: para a ida, adapte a prova do Teorema 6.1.11; para a volta[14], apenas apele com calma para as definições.

b) Mostre que $\mathcal{T}$ é admissível se, e somente se, valer a recíproca de (6.2) para qualquer *net* $(f_d)_d$ e f em $\mathcal{C}(X,Y)$.

[10] Por rigor linguístico, deveria ser *topologia compacto-aberto*, mas eu não sou obrigado.

[11] Em particular, o Exercício 6.18 permite estender tal conclusão para qualquer Y uniforme.

[12] Termo cunhado por Bourbaki, como apontado em [11].

[13] Mesmo nos casos em que X não é (pseudo) compacto.

[14] Cuidado! Não é a recíproca da implicação em destaque, mas sim a recíproca da afirmação toda, ou seja: se "$f_d \to_{\mathcal{T}} f$ sempre que $f_d \to_{\mathcal{C}} f$", então a topologia $\mathcal{T}$ é de cisão.

Exercício 6.15. Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathcal{T}$ uma topologia sobre $\mathcal{C}(X,Y)$. Mostre que $\mathcal{T}$ é exponencial se, e somente se, $\mathcal{T}$ é a menor topologia admissível sobre $\mathcal{C}(X,Y)$. Dica: para a ida, use a definição e o Lema 6.1.6; para a volta, encare a demonstração do Teorema 6.1.11 até que ela te encare de volta. ■

Exercício 6.16. Mostre que se $\mathcal{C}(X,Y)$ tem a topologia exponencial, digamos $\mathcal{T}$, então $(\mathcal{C}(X,Y),\mathcal{T})$, juntamente com a avaliação $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}(X,Y)\times X\to Y$, corresponde ao objeto exponencial Y^X na categoria Top, i.e.: para todo espaço topológico Z e toda função contínua $f\colon Z\times X\to Y$, existe uma única função contínua $\Delta(f)\colon Z\to\mathcal{C}(X,Y)$ tal que $\mathrm{ev}\circ(\Delta(f)\times \mathrm{Id}_X)=f$. ■

Exercício 6.17. Seja $\Sigma\colon \mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Z,X)\to\mathcal{C}(Z,Y)$ a função de composição, i.e., que faz $(g,f)\mapsto g\circ f$.

a) Mostre que, em geral, Σ não é contínua com a topologia da convergência pontual.

b) Suponha $X:=Y:=Z:=\mathbb{R}$ e mostre que Σ também não é contínua com respeito à topologia da convergência uniforme.

c) Suponha que $\mathcal{C}(X,Y)$ e $\mathcal{C}(Z,X)$ tenham topologias admissíveis e $\mathcal{C}(Z,Y)$ tenha uma topologia de cisão. Em tais condições, mostre que Σ é contínua. ■

Exercício 6.18. As relações entre as topologias $\mathcal{S}$-aberta e da convergência uniforme em $\mathcal{S}$ discutidas ao longo da Subseção 6.1.3 valem, mais geralmente, para funções da forma $X\to Y$, com $(Y,\mathcal{U})$ uniforme.

a) (Aquecimento) Note que a demonstração apresentada para a Proposição 6.1.22 funciona para qualquer Y métrico.

b) Para estender a Proposição 6.1.22 para Y uniforme, com as mesmas notações da demonstração original: tome uma *entourage* U de Y, fechada e simétrica (Lema 4.2.42, por exemplo[15]) tal que $\langle S,3U\rangle[f]\subseteq A$; repita o restante dos argumentos, com $F_i:=U[f(x_i)]$ (fechado pela Observação 4.1.45) e $V_i:=\mathrm{int}\,(U\circ U[f(x_i)])$.

c) Observe que o Teorema 6.1.26 vale para o caso em que Y é uniforme.

d) Mostre que se Y é um grupo topológico, então $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X,Y)$ é um grupo topológico com a adição usual, para qualquer bornologia $\mathcal{B}$ em X. Dica: adapte a demonstração típica de que $\mathcal{C}_p(X)$ é um grupo topológico com a adição.

e) Nas hipóteses do item anterior, mostre que a uniformidade de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X,Y)$ é gerada por *entourages* da forma $\langle B,V\rangle:=\{(f,g):\forall x\in B\,(f(x),g(x))\in V\}$, com $B\in\mathcal{B}$ e $V\subseteq Y$ vizinhança simétrica do elemento neutro de Y. Em particular, mostre que em tais condições, $\langle B,V\rangle$ é *entourage* simétrica.

f) Mostre que se $\mathcal{B}$ é uma bornologia com base compacta e Y é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico, então $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X,Y)$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico. Dica: a multiplicação $\mathbb{R}\times Y\to Y$ é contínua em $(\lambda,0)$ para qualquer $\lambda\in\mathbb{R}$ e, além disso, se $B\in\mathcal{B}$ é compacto e $f\in\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X,Y)$, então $f[B]\subseteq Y$ deve ser linearmente limitado, o que permite adaptar a demonstração usual de que $\mathcal{C}_p(X)$ é $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico.

g) Repita o item anterior, trocando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$. ■

Exercício 6.19. Para famílias $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ de subconjuntos de X, mostre que se valer $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{S}'$, então $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X,Y)\leq\mathcal{C}^{\mathcal{S}'}(X,Y)$. Dica: Exercício 1.196, de novo. ■

Exercício 6.20. Sejam $(f_d)_d$ uma *net* em $\mathcal{C}(X,Y)$, com Y uniforme, e subconjuntos $S,S'\subseteq X$.

a) Para qualquer $f\in\mathcal{C}(X,Y)$, mostre que $f_d|_{S\cup S'}\to f|_{S\cup S'}$ uniformemente se, e somente se, $f_d|_S\to f|_S$ e $f_d|_{S'}\to f|_{S'}$ (ambas) uniformemente.

b) Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ famílias de subconjuntos de X tais que para cada $S\in\mathcal{S}$ exista um subconjunto finito $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{S}'$ com $S\subseteq\bigcup\mathcal{C}$. Em tais condições, mostre que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X,Y)\leq\mathcal{C}_{\mathcal{S}'}(X,Y)$.

c) Mostre que se $\mathcal{B}'$ é base para uma bornologia $\mathcal{B}$ em X, então $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X,Y)=\mathcal{C}_{\mathcal{B}'}(X,Y)$. Dica: além dos itens anteriores, lembre-se do Exercício 6.10.

d) Em particular, com as notações do Exemplo 6.1.29, conclua que $\mathcal{C}_{\mathcal{K}_X}(X,Y)=\mathcal{C}^{\mathcal{K}_X}(X,Y)$, i.e., a topologia compacto-aberta é a topologia da convergência uniforme em compactos. ■

[15] Convém notar que o fecho (em $Y\times Y$) de uma *entourage* simétrica é simétrico.

Exercício 6.21. Para $B \subseteq X$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, mostre que valem as inclusões $\langle B, \frac{\varepsilon}{3}\rangle \subseteq \langle \overline{B}, \varepsilon\rangle \subseteq \langle B, \varepsilon\rangle$, onde as funções consideradas são contínuas. Conclua que para uma bornologia $\mathcal{B}$ em X, deve-se ter $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X) = \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{B}}}(X)$, onde $\overline{\mathcal{B}}$ indica a bornologia gerada por $\left\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\right\}$. ■

Observação 6.1.31. Moral da história: ao tratar de espaços da forma $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$, não há perda de generalidade em assumir que a bornologia $\mathcal{B}$ tenha base fechada. △

Exercício 6.22 (Metrizabilidade)**.** Seja $\mathcal{B}$ uma bornologia em X.

a) Mostre que se $\mathcal{B}$ tem uma base enumerável, então $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ tem caráter enumerável. Opcional: mostre que a uniformidade de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ tem base enumerável. Dica: lembre-se que a definição da topologia induzida pela uniformidade de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ garante que $\{\langle B, \varepsilon\rangle[f] : B \in \mathcal{B} \text{ e } \varepsilon > 0\}$ é uma base local de vizinhanças para f; note então que a hipótese permite jogar fora muitos excessos.

b) Suponha que X seja um espaço de Tychonoff e $\mathcal{B}$ tenha base fechada. Mostre que se $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ tem caráter enumerável, então $\mathcal{B}$ admite uma base enumerável. Dica: se $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \omega\}$ é uma base da função nula $\underline{0} \colon X \to \mathbb{R}$, então para cada $n \in \omega$ existem $B_n \in \mathcal{B}$ fechado e $r_n > 0$ com $\langle B_n, r_n\rangle[\underline{0}] \subseteq V_n$; use a condição de Tychonoff para concluir que todo $B \in \mathcal{B}$ está contido em algum B_n; para isso, lembre-se que $\langle B_n, r_n\rangle[\underline{0}] \subseteq \langle B, 1\rangle[\underline{0}]$ para algum $n \in \omega$.

c) Conclua que se X é espaço de Tychonoff e $\mathcal{B}$ tem base fechada, então $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ é metrizável se, e somente se, $\mathcal{B}$ tem base enumerável. ■

Exercício 6.23. Generalize o exercício anterior para espaços da forma $\mathcal{C}(X, Y)$, com (Y, d) métrico – ou, se preferir, para $(Y, \mathcal{U})$ uniforme e $\mathcal{U}$ com base enumerável, o que *dá na mesma*. ■

Exercício 6.24. Mostre que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ é um anel topológico se $\mathcal{B}$ for uma bornologia em X com base compacta. ■

Exercício 6.25 (Completude)**.** Sejam X um espaço de Tychonoff e $\mathcal{B}$ uma bornologia em X com base compacta.

a) Mostre que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ é completo (como espaço uniforme) se, e somente se, toda função $f \colon X \to \mathbb{R}$ cuja restrição a cada $B \in \mathcal{B}$ é contínua, for (globalmente) contínua. Dica: para a ida, note que se $f|_B$ é contínua para cada $B \in \mathcal{B}$, então $(f|_B)_B$ pode ser encarada como uma *net* de Cauchy em $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$; para a volta, observe que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(B) = \mathcal{C}_k(B)$ sempre que $B \in \mathcal{B}$ é compacto.

b) Mostre que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ é completamente metrizável se, e somente se, X tem a propriedade do item anterior e $\mathcal{B}$ tem base enumerável.

c) Mostre que $\mathcal{C}_p(X)$ é completo (como espaço uniforme) se, e somente se, X é discreto. Em quais situações $\mathcal{C}_p(X)$ é completamente metrizável? ■

Exercício 6.26 (Convexidade local)**.** Seja $\mathcal{B}$ um bornologia em X.

a) Mostre que $\langle B, \varepsilon\rangle[f]$ é convexo para quaisquer $B \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$ e $f \in \mathcal{C}(X)$.

b) Suponha que $\mathcal{B}$ tenha base compacta e, para cada $B \in \mathcal{B}$, considere a função $\|\cdot\|_B \colon \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ que faz $\|f\|_B := \sup_{x \in \overline{B}} |f(x)|$. Mostre que $\mathcal{N}(\mathcal{B}) := \{\|\cdot\|_B : B \in \mathcal{B}\}$ é uma família de seminormas que induz a topologia da convergência uniforme em $\mathcal{B}$ sobre $\mathcal{C}(X)$.

c) Conclua (da forma que preferir) que se $\mathcal{B}$ tem base compacta, então $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ é um e.v.t. localmente convexo[16]. ■

Exercício 6.27 (Distributividade)**.** Seja $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ família de espaços topológicos dois a dois disjuntos e, para cada $i \in \mathcal{I}$, considere $\mathcal{B}_i$ uma bornologia em X_i.

a) Mostre que a família $\left\{\coprod_{i \in \mathcal{I}} B_i : (B_i)_i \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i \text{ e } |\{i \in \mathcal{I} : B_i \neq \emptyset\}| < \aleph_0\right\}$ é base para uma bornologia em $\coprod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, que será denotada por $\coprod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$. Em particular, convença-se de que se cada $\mathcal{B}_i$ tem base compacta, então $\coprod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ tem base compacta.

b) Mostre que $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_{\mathcal{B}_i}(X_i)$ e $\mathcal{C}_{\coprod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i}\left(\coprod_{i \in \mathcal{I}} X_i\right)$ são (anéis) topologicamente isomorfos. Em particular, conclua que $\mathcal{C}_p(X) \times \mathcal{C}_p(Y)$ e $\mathcal{C}_p(X \amalg Y)$ são topologicamente isomorfos. ■

[16] Note que a exigência de base compacta serve *apenas* para garantir que a topologia de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ seja compatível com sua estrutura vetorial, e nada tem a ver com a convexidade dos abertos básicos $\langle B, \varepsilon\rangle[f]$.

Exercício 6.28 (Espaços de Tychonoff bastam)**.** Seja X um espaço topológico.

a) Para $x, y \in X$, escreva $x \sim y$ para indicar que $f(x) = f(y)$ para toda função $f \in \mathcal{C}(X)$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

b) Seja $Y := \{\overline{x}^{\sim} : x \in X\}$ o conjunto das classes de equivalência da relação acima e, para cada $f \in \mathcal{C}(X)$, defina $\varphi_f : Y \to \mathbb{R}$ fazendo $\varphi_f(\overline{x}^{\sim}) = f(x)$. Com $\tau_f := \{\varphi_f[V] : V \subseteq \mathbb{R} \text{ é aberto}\}$, mostre que $\tau := \bigcup_{f \in \mathcal{C}(X)} \tau_f$ é sub-base para uma topologia de Tychonoff sobre Y.

c) Mostre que $\varphi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, dada por $\varphi(f) := \varphi_f$, é um isomorfismo de anéis.

d) Fixada uma bornologia $\mathcal{B}$ em X, use a projeção $\pi : X \to Y$ para induzir uma bornologia $\pi(\mathcal{B})$ em Y de tal forma que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(X)$ e $\mathcal{C}_{\pi(\mathcal{B})}(Y)$ sejam topologicamente isomorfos. ■

6.2 Particularidades

A última seção introduziu as topologias de convergência uniforme num contexto bastante geral, em termos de uma bornologia fixada no domínio das funções consideradas. Embora diversas propriedades possam ser estabelecidas em tal cenário amplo[17], certas bornologias específicas têm peculiaridades interessantes que justificam a análise particularizada de cada uma delas, justamente o que será feito nesta seção.

6.2.1 Convergência uniforme clássica

Assim como um filtro $\mathcal{F}$ em X se trivializa completamente com a ocorrência de $\emptyset \in \mathcal{F}$, um ideal $\mathcal{I}$ é trivial, i.e., $\mathcal{I} = \wp(X)$, precisamente nos casos em que $X \in \mathcal{I}$ (Exercício 1.132). Em particular, em tal situação, $\mathcal{B} := \wp(X)$ é uma bornologia em X que tem $\mathcal{B}_0 := \{X\}$ como base. Em tais condições, é claro que $\mathcal{B}$ tem base compacta se, e somente se, o próprio X é compacto.

Exercício 6.29. Verifique as afirmações acima. ■

Para um espaço uniforme $(Y, \mathcal{U})$ fixado, a (topologia da) convergência uniforme nos membros de $\wp(X)$ nada mais é do que a convergência uniforme usual definida em $\mathcal{C}(X, Y)$, i.e., $\mathcal{C}_{\wp(X)}(X, Y) = \mathcal{C}_u(X, Y)$ (Exercício 6.20). Desse modo, diversos resultados da seção anterior se aplicam de forma imediata:

(i) como $\{X\}$ é base de $\wp(X)$, $\mathcal{C}_u(X, M)$ é metrizável sempre que M também é;

(ii) se G é um grupo topológico, então $\mathcal{C}_u(X, G)$ também é um grupo topológico;

(iii) se E é e.v.t. e X é (pseudo) compacto, então $\mathcal{C}_u(X, E)$ é um e.v.t.

Exercício 6.30. Prove as afirmações acima. Dica: para (i), adapte a Observação 4.1.66; para (ii) e (iii), reveja o Exercício 6.18. ■

No caso do último item, $\mathcal{C}_u(X, E)$ herda a convexidade local de E se este o for: com efeito, se $V \subseteq E$ é vizinhança convexa de $0 \in E$, então $\langle B, V\rangle[\underline{0}]$ é vizinhança convexa da função nula $\underline{0} : X \to E$, posto que para $t \in [0, 1]$ e $f, g \in \langle B, V\rangle[\underline{0}]$, tem-se $f(x), g(x) \in V$ para todo $x \in B$ e, consequentemente, $tf + (1-t)g \in \langle B, V\rangle[\underline{0}]$. Em particular, na situação

[17] Vide os exercícios anteriores.

mais recorrente em que a topologia de E é induzida por uma norma $\|\cdot\|$, e.g. $E := \mathbb{K}$, a topologia de $\mathcal{C}_u(X,E)$ se mostra induzida pela clássica **norma do supremo**,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|, \tag{6.3}$$

cuja boa definição segue da (pseudo) compacidade de X e da continuidade de f.

Exercício 6.31. Convença-se de que nas condições acima, a topologia de $\mathcal{C}_u(X,E)$ é induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$. Dica: como ambas têm caráter enumerável, basta mostrar que as duas topologias induzem as mesmas sequências convergentes (Exercício 3.30). ■

No que concerne aos *transtornos de Cauchy*, dado que $\mathcal{C}_u(X,Y)$ é subespaço fechado de Y^X (Proposição 4.1.38) e o último é completo se Y também for (Teorema 4.2.18), segue pela Proposição 4.2.9 que $\mathcal{C}_u(X,Y)$ é um espaço (uniforme) completo sempre que Y é (uniforme) completo.

Exercício 6.32. Mostre que se X é (pseudo) compacto e E é de Banach, então $\mathcal{C}_u(X,E)$ é espaço de Banach[18]. ■

As observações acima sugerem que a convergência uniforme é bastante conveniente para tratar de $\mathcal{C}(X)$ nas situações em que X é compacto ~~de Hausdorff~~. No entanto, o mérito dessas boas propriedades se deve mais ao fato de tais cenários verificarem $\mathcal{C}_u(X) = \mathcal{C}_k(X)$, isto é:

Exercício 6.33. Convença-se de que se X é compacto, então as topologias compacto-aberta e da convergência uniforme em X coincidem. ■

Todavia, nas típicas situações em que X apresenta falhas de compacidade, o comportamento de $\mathcal{C}_u(X)$ se torna *errático*. A começar pela compatibilidade vetorial: como já observado no Exemplo 6.1.24, a presença de uma função contínua e ilimitada $X \to \mathbb{R}$ impede que a multiplicação $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_u(X) \to \mathcal{C}_u(X)$ seja contínua. Como e.v.t's são conexos, o mesmo tipo de conclusão segue da (para mim) surpreendente

Proposição 6.2.1. *$\mathcal{C}^*(X)$ é um faberto de $\mathcal{C}_u(X)$, onde $\mathcal{C}^*(X)$ indica o subconjunto das funções contínuas e limitadas da forma $X \to \mathbb{R}$. Em particular, se X não é pseudocompacto, então $\mathcal{C}_u(X)$ não é conexo.*

Demonstração. O argumento para mostrar que $\mathcal{C}^*(X)$ é fechado em $\mathcal{C}_u(X)$ usa, como de costume, a desigualdade triangular. Dado que $\mathcal{C}_u(X)$ é metrizável, para uma função $f \in \overline{\mathcal{C}^*(X)}$, existe uma sequência $(f_n)_n$ em $\mathcal{C}^*(X)$ com $f_n \to f$ em $\mathcal{C}_u(X)$. Explicitamente, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ e $n \geq N$, já que $\mathcal{C}_u(X)$ tem os conjuntos da forma

$$\langle X, r\rangle := \{(g,h) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) : \forall x \in X\, |g(x) - h(x)| < \varepsilon\} \tag{6.4}$$

como *entourages* básicas (Proposição 4.1.36). Logo, para $x \in X$ qualquer e $N \in \mathbb{N}$ com $\sup |f_N - f| < 1$, tem-se

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + \sup_{x\in X} |f_N(x)|,$$

[18]Mais geralmente, se X é compacto e E é um **F-espaço**, i.e., um e.v.t. completamente metrizável, então $\mathcal{C}_u(X,E)$ também é um F-espaço.

mostrando que $f \in \mathcal{C}^*(X)$.

Por sua vez, se $g \in \mathcal{C}^*(X)$, então $\langle X, r\rangle[g] \subseteq \mathcal{C}^*(X)$ para qualquer $r > 0$: basta notar que se $h\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua e tal que $|h(x) - g(x)| < r$ para todo $x \in X$, então

$$|h(x)| \leq |h(x) - g(x)| + |g(x)| \leq r + \sup_{x \in X} |g(x)|,$$

i.e., $h \in \mathcal{C}^*(X)$. Em particular, se X não é pseudocompacto, então $\mathcal{C}^*(X) \neq \mathcal{C}(X)$. Logo, a primeira parte da proposição mostra que $\mathcal{C}_u(X)$ tem um faberto não-trivial sendo, portanto, desconexo (Proposição 2.3.2). $\square$

Observação 6.2.2 (Dependência topológica, parte II)**.** Há uma sutileza na definição da (topologia da) convergência uniforme, relativamente difícil de se perceber no caso de $\mathcal{C}_u(X)$, mas bastante aparente para contradomínios metrizáveis gerais: trata-se do fato de que a topologia de $\mathcal{C}_u(X, M)$ depende da *métrica* de M – e não de sua topologia, como já antecipado na Observação 6.1.27.

Considere, por exemplo, $M := (\mathbb{R}, \rho)$, onde ρ é a métrica em $\mathbb{R}$ induzida por um homeomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$: explicitamente, $\rho(s, t) := |\varphi(s) - \varphi(t)|$. Dado que ρ induz a topologia usual de $\mathbb{R}$ por construção, segue que $\mathbb{R}$ e M são homeomorfos. Porém, a definição da convergência uniforme em $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, M)$ determina como *entourages* básicas os conjuntos da forma

$$\langle \mathbb{R}, r\rangle_\rho := \{(g, h) : \forall x \in \mathbb{R} \quad \rho(g(x), h(x)) < r\},$$

que em geral não coincidem com as *entourages* da forma $\langle \mathbb{R}, r\rangle$ descritas em (6.4). Ocorre que apesar da aparente similaridade, $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, M)$ e $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$ não são homeomorfos, posto que o primeiro é conexo, diferente do segundo. De fato:

✓ dado que φ é uma bijeção, a correspondência $f \mapsto \varphi \circ f$ determina uma bijeção Φ entre $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, M)$ e $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, (-1, 1))$, cuja inversa faz $g \mapsto \varphi^{-1} \circ g$, onde o intervalo $(-1, 1)$ é considerado com sua métrica usual;

✓ Φ é contínua por construção, posto que para $\varepsilon > 0$ e $h \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R}, M)$ qualquer, $\langle \mathbb{R}, \varepsilon\rangle_\rho[h]$ é uma vizinhança de h em $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, M)$ tal que $\Phi\left[\langle \mathbb{R}, \varepsilon\rangle_\rho[h]\right] \subseteq \langle \mathbb{R}, \varepsilon\rangle[\Phi(h)]$;

✓ de forma inteiramente análoga, mostra-se a continuidade de Φ^{-1}, garantindo-se assim que Φ é um homeomorfismo entre $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, M)$ e $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, (-1, 1))$;

✓ finalmente, $\mathcal{C}_u(\mathbb{R}, (-1, 1))$ é conexo por caminhos, haja vista que para uma função $f \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R}, (-1, 1))$ fixada, a correspondência $t \mapsto tf$ determina um caminho contínuo $\psi\colon [0, 1] \to \mathcal{C}_u(\mathbb{R}, (-1, 1))$ entre a função nula e f.

Exercício 6.34. Complete os argumentos acima. Dica: para a parte final, note que $|tf(x) - sf(x)| \leq |t - s| \cdot |f(x)| \leq |t - s|$ para quaisquer $s, t \in [0, 1]$ e $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, (-1, 1))$. $\blacksquare$

Secretamente, a razão de tal dependência se deve ao fato de a uniformidade de $\mathcal{C}_u(X, Y)$ ser definida em termos do *conjunto* X e das *entourages* de Y, de modo que métricas (em Y) topologicamente equivalentes mas não uniformemente equivalentes podem induzir uniformidades distintas em $\mathcal{C}(X, Y)$. Ocasionalmente, porém, a topologia de X sobrepõe esse fenômeno: se X é compacto, por exemplo, então a topologia de $\mathcal{C}_u(X, Y)$ depende apenas das topologias de X e Y já que $\mathcal{C}_u(X, Y) = \mathcal{C}_k(X, Y)$ em tal situação[19]. $\triangle$

[19] Confira, porém, o Exercício 6.57.

Na ausência de compacidade, uma alternativa razoável para tornar a convergência uniforme menos rebelde consiste em *ignorar* as funções ilimitadas e lidar tão somente com $\mathcal{C}^*(X)$: neste caso, não é difícil perceber que a regra (6.3) define uma norma em $\mathcal{C}^*(X)$, cuja topologia induzida coincide com aquela herdada de $\mathcal{C}_u(X)$ como subespaço topológico; em particular, por $\mathcal{C}^*(X)$ ser fechado em $\mathcal{C}_u(X)$, resulta que $(\mathcal{C}^*(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um legítimo espaço de Banach[20].

Exercício 6.35. Prove as afirmações acima. Dica: note que se $(f_n)_n$ é sequência de funções limitadas, então $f_n \to f$ com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$ se, e somente se, $f_n \to f$ uniformemente. ■

Nas situações em que X é um espaço de Tychonoff, tal mudança de perspectiva é quase esquecível em vista do próximo teorema – pode ser conveniente conferir a Observação 3.3.29 antes de prosseguir.

Teorema 6.2.3. *Para um espaço de Tychonoff X, a função*

$$\begin{aligned} R_X \colon (\mathcal{C}(\beta X), \|\cdot\|_\infty) &\to (\mathcal{C}^*(X), \|\cdot\|_\infty) \\ F &\mapsto F|_X \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico de espaços de Banach. Em particular, a topologia em $\mathcal{C}^*(X)$ induzida pela norma do supremo independe da norma considerada sobre $\mathbb{R}$.

Demonstração. Evidentemente, a restrição R_X está bem definida e é $\mathbb{R}$-linear, enquanto a propriedade universal de βX garante a sobrejetividade[21]. Agora, para $F \in \mathcal{C}(\beta X)$ qualquer, a definição das normas dá

$$\|R_X(F)\|_\infty := \sup_{x\in X} |R_X(F)(x)| = \sup_{x\in X} |F(x)| \leq \sup_{y\in\beta X} |F(y)| := \|F\|_\infty,$$

enquanto a outra desigualdade segue das hipóteses *subjacentes*: para $y_0 \in \beta X$ satisfazendo $|F(y_0)| = \|F\|_\infty$ e $\varepsilon > 0$, existe $A \subseteq \beta X$ aberto com $y_0 \in A$ e $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon$ sempre que $y \in A$; em particular, como existe pelo menos um $x \in X \cap A$, resulta

$$\|F\|_\infty = |F(y_0)| \leq |F(y_0) - F(x)| + |F(x)| \leq \varepsilon + \|R_X(F)\|_\infty,$$

como desejado[22]. □

Observação 6.2.4. Essencialmente o mesmo argumento se aplica a $\mathcal{C}^*(X, M)$ e $\mathcal{C}(\beta X, M)$ nos casos em que M é um espaço métrico com a *propriedade de Heine-Borel* (Exercício 4.67), i.e., no qual ser fechado e limitado garanta compacidade: tal condição assegura a bijetividade da correspondência $F \mapsto F|_X$, enquanto a identificação das métricas segue quase os mesmos passos.

Exercício 6.36. Prove as afirmações acima. Dica: para $F, G \in \mathcal{C}(\beta X, M)$ e $y_0 \in \beta X$ fixados, as correspondências $y \mapsto d(F(y), F(y_0))$, $y \mapsto d(G(y), G(y_0))$ e $y \mapsto d(F(y), G(y))$ são contínuas. ■

---

[20]Na verdade, dado que a multiplicação $\mathcal{C}^*(X) \times \mathcal{C}^*(X) \to \mathcal{C}^*(X)$ também é contínua (por quê?), o correto seria dizer que $\mathcal{C}^*(X)$ é uma *álgebra de Banach*.

[21]Na verdade, a bijetividade, já que a extensão $\beta f \colon \beta X \to \mathbb{R}$ de uma função limitada e contínua $f \colon X \to \mathbb{R}$ é única.

[22]Note que a isometria também garante a injetividade de R_X.

É claro que, em tais casos, a alcunha "isomorfismo isométrico de espaços de Banach" dá lugar para "isometria de espaços métricos" – a não ser que o próprio M seja um espaço de Banach com a propriedade de *Heine-Borel*. $\triangle$

Exemplo 6.2.5 (Convergência uniforme e integração)**.** Existe uma relação *natural*[23] entre as noções de convergência oriundas das *teorias de integração* e a convergência uniforme desenvolvida neste capítulo. Com efeito, para um espaço topológico X e uma integral positiva[24] $\mu\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$, a correspondência $\|\cdot\|_1$ dada por $f \mapsto \mu(|f|)$ determina uma *seminorma* em $\mathcal{K}(X)$. Dado que $\mathcal{K}(X)$ é subespaço de $\mathcal{C}^*(X)$, o primeiro também herda a convergência uniforme induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$.

Nesse contexto, a desigualdade $|f| \leq \|f\|_\infty$ aliada à monotonicidade da integral μ mostram que a (topologia induzida pela) seminorma $\|\cdot\|_1$ é *mais fina*[25] do que a (topologia induzida pela) norma $\|\cdot\|_\infty$ quando X é compacto, já que a bijeção linear

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}(X), \|\cdot\|_\infty) &\to (\mathcal{K}(X), \|\cdot\|_1)\\ f &\mapsto f\end{aligned}$$

é contínua em virtude da desigualdade $\|f\|_1 \leq \mu(\mathrm{Id}_X)\|f\|_\infty$. $\blacktriangle$

O último exemplo torna oportuna a discussão do *Teorema de Stone-Weierstrass*, conjurado no capítulo anterior durante a demonstração da *unicidade* das integrais de Haar (vide a Observação 5.3.36). Classicamente, o Teorema da *Aproximação de Weierstrass* afirma que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe uma sequência $(p_n)_n$ de funções polinomiais tal que, no intervalo $[a,b]$, $p_n \to f$ uniformemente. (Marshall) Stone entra na jogada ao lidarmos com a generalização desse singelo resultado.

Teorema 6.2.6 (Stone-Weierstrass)**.** *Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_u(X)$ é uma álgebra fechada e que separa pontos, então $\mathcal{A} = \mathcal{C}_u(X)$.*

No enunciado acima, uma família $\mathcal{A}$ de funções da forma $X \to \mathbb{R}$ é chamada de **álgebra** se $\mathcal{A}$ contém todas as funções constantes e, para quaisquer $f, g \in \mathcal{A}$ ocorrer $f + g \in \mathcal{A}$ e $f \cdot g \in \mathcal{A}$. Por sua vez, $\mathcal{A}$ **separa pontos** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existe $h \in \mathcal{A}$ satisfazendo $h(x) \neq h(y)$. Finalmente, a condição de fechamento sobre $\mathcal{A}$ se refere à topologia da convergência uniforme em $\mathcal{C}_u(X)$.

Antes de proceder com a prova do teorema, que depende de três lemas simples, convém observar como o enunciado acima se relaciona com sua versão clássica e, para os propósitos deste texto, como utilizá-lo para dar cabo da *aproximação* na demonstração do Teorema 5.3.37 (de Fubini). A primeira coisa a notar é que a condição de fechamento no enunciado de *Stone-Weierstrass* pode ser retirada desde que se mude a conclusão: qualquer álgebra de funções que separa pontos é *densa* em $\mathcal{C}_u(X)$, o que segue do

Lema 6.2.7. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_u(X)$ uma álgebra de funções. Se as funções de $\mathcal{A}$ são limitadas, então $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ ainda é uma álgebra de funções.*

Demonstração. É claro que $\mathcal{B}$ contém todas as funções constantes. Agora, se $f, g \in \mathcal{B}$, então $f + g$ e $f \cdot g$ pertencem a $\mathcal{B}$: de fato, existem sequências $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ em $\mathcal{A}$, com $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente; como $f_n + g_n, f_n \cdot g_n \in \mathcal{A}$ e $f_n + g_n \to f + g$ e $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente, o resultado segue. $\square$

[23] Não no sentido categorial... eu acho...
[24] Definição 5.3.3.
[25] Observação 1.1.119.

Exercício 6.37. Assumindo a validade do Teorema 6.2.6, mostre que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe uma sequência $(p_n)_n$ de funções polinomiais da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $p_n \to f$ uniformemente. Dica: além do lema anterior, observe que a função identidade, que separa pontos trivialmente, é polinomial. ■

Exercício 6.38. Sejam X e Y espaços compactos de Hausdorff e $h\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que para $\varepsilon > 0$ dado, existem $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(X)$, $g_0, \ldots, g_n \in \mathcal{C}(Y)$ tais que

$$\left\| h - \sum_{j\leq n} f_j \otimes g_j \right\|_\infty < \varepsilon,$$

onde $f_j \otimes g_j\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ faz $(x,y) \mapsto f_j(x)g_j(y)$. Dica: observe que $f \otimes g$ é contínua para quaisquer $f \in \mathcal{C}(X)$ e $g \in \mathcal{C}(Y)$; depois, mostre que a família $\mathcal{A}$ das somas finitas de funções dessa forma constitui uma álgebra em $\mathcal{C}(X \times Y)$ que separa pontos; por fim, aplique o lema anterior e o Teorema 6.2.6. ■

Exercício 6.39. Mostre que se X e Y são espaços de Hausdorff e $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ é contínua com suporte compacto C, então para cada $r > 0$ existem $n \in \omega$ e $\psi_j \in \mathcal{K}(X)$, $\vartheta_j \in \mathcal{K}(Y)$ com $\operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq \pi_X[C]$ e $\operatorname{supp}(\vartheta_j) \subseteq \pi_Y[C]$ para todo $j \leq n$, satisfazendo $\left\|\varphi - \sum_{j\leq n} \psi_j \otimes \vartheta_j\right\|_\infty < r$. ■

O leitor interessado em mais aplicações de Stone-Weierstrass pode conferir a seção de exercícios – mas sem grandes expectativas. Por aqui, é chegado o momento de demonstrá-lo. O primeiro pré-requisito é um típico resultado de bons cursos de Análise.

Lema 6.2.8 (*a.k.a.* Teorema de Dini)**.** *Sejam $(f_n)_n$ uma sequência de funções contínuas e f uma função contínua, todas da forma $X \to \mathbb{R}$, com X enumeravelmente compacto*[26]*. Se $f_n \to f$ pontualmente e $(f_n(x))_n$ é crescente para cada $x \in X$, então $f_n \to f$ uniformemente.*

Demonstração. Para $\varepsilon > 0$ fixado e $n \in \omega$ qualquer, o subconjunto

$$F_n := \{x \in X : f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$$

é um fechado de X e, por $(f_n(x))_n$ ser crescente para todo x, tem-se $F_n \supseteq F_{n+1}$ para cada n. Uma vez que a convergência pontual impede a existência de pontos em $\bigcap_{n\in\omega} F_n$ (Exercício 1.194), a Proposição 3.2.37 garante que $F_N = \emptyset$ para algum $N \in \mathbb{N}$, acarretando $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para quaisquer $x \in X$ e $n \geq N$, como desejado. □

O segundo ingrediente consiste numa etapa técnica que pode passar despercebida para o leitor desatento durante a prova final, mas que é indispensável para o terceiro ingrediente. Curiosamente, trata-se de uma versão bastante particular do Teorema da Aproximação de Weierstrass.

Lema 6.2.9. *Existe uma sequência $(w_n)_n$ de polinômios tal que $w_n(x) \to \sqrt{x}$ uniformemente em $[0,1]$.*

[26]É comum enunciar tal resultado com a exigência de compacidade, um exagero perdoável em cursos voltados para espaços métricos.

Demonstração. Para cada $x \in [0,1]$, sejam $w_0(x) := 0$, $w_1(x) := w_0(x) + \frac{1}{2}(x - w_0^2(t))$ e, supondo a função polinomial $w_n(x)$ definida para $n > 0$,

$$w_{n+1}(x) := w_n(x) + \frac{1}{2}(x - w_n^2(x)). \tag{6.5}$$

Para aquecer os motores, observe que $w_n(x) \leq \sqrt{x}$ para qualquer $n \in \omega$ e $x \in [0,1]$. Isto é claro para $n := 0$. Supondo a afirmação válida para $n > 0$, note que

$$\sqrt{x} - w_{n+1}(x) = \sqrt{x} - w_n(x) - \frac{1}{2}(x - w_n^2(x)) = \sqrt{x} - w_n(x) - \frac{1}{2}(\sqrt{x} - w_n(x))(\sqrt{x} + w_n(x)) =$$
$$= (\sqrt{x} - w_n(x))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + w_n(x))\right).$$

Como $0 \leq x \leq 1$, tem-se $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, donde a hipótese de indução dá tanto $\sqrt{x} - w_n(x) \geq 0$ quanto $\sqrt{x} + w_n(x) \leq 2$ e, consequentemente, $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + w_n(x)) \geq 0$. Logo, $\sqrt{x} - w_{n+1}(x) \geq 0 \cdot 0 = 0$, mostrando que $w_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ em $[0,1]$, como afirmado.

Isso garante que $x - w_n^2(x) \geq 0$ para todo n e, por conseguinte, a sequência $(w_n(x))_n$ é crescente[27] para cada ponto $x \in [0,1]$. Logo, existe $f(x) \in [0,1]$ com $w_n(x) \to f(x)$. Ao fazer $n \to +\infty$ em (6.5), resulta

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x - f^2(x)) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}(x - f^2(x)) \Rightarrow f^2(x) = x$$
$$\Rightarrow f(x) = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{x}.$$

A uniformidade da convergência segue então pelo Teorema de Dini. □

Lema 6.2.10. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de funções contínuas e limitadas definidas em X. Se $\mathcal{A}$ é fechada em $\mathcal{C}_u(X)$, então* $\max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{A}$ *para quaisquer $f, g \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. O primeiro *Katzensprung* consiste em notar que

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|) \quad \text{e} \quad \max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|).$$

Por conta disso, é suficiente mostrar que $|f| \in \mathcal{A}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$. O segundo *Katzensprung* é ainda mais legal: podemos supor $|f| \leq 1$. De fato, se $|f| > 1$, a hipótese de que as funções de $\mathcal{A}$ são limitadas assegura um $c > 0$ com $|f| \leq c$, de modo que a suposição se aplica a $\frac{1}{c}f \in \mathcal{A}$. Finalmente, o terceiro *Katzensprung* usa o lema anterior: como $|f| \leq 1$ e $f \in \mathcal{A}$, tem-se $f^2 \in \mathcal{A}$ e $w_n \circ f^2 \in \mathcal{A}$ (vide o exercício a seguir), com $w_n \circ f^2 \to \sqrt{f^2} = |f|$ uniformemente (pelo lema anterior), donde a pertinência $|f| \in \mathcal{A}$ segue por $\mathcal{A}$ ser fechada em $\mathcal{C}_u(X)$. □

Exercício 6.40. Sejam $\mathcal{A}$ um álgebra de funções e $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Mostre que $p \circ g \in \mathcal{A}$ para qualquer $g \in \mathcal{A}$. ■

Demonstração do Teorema de Stone-Weierstrass. Pela hipótese de $\mathcal{A}$ ser fechada por convergência uniforme, basta mostrar que para $f \colon X \to \mathbb{R}$ contínua e $\varepsilon > 0$ fixados, existe $f_\varepsilon \in \mathcal{A}$ com $\|f_\varepsilon - f\|_\infty \leq \varepsilon$. De fato, com tal resultado *em mãos*, ao fazer $g_n := f_{\frac{1}{2^n}}$ para cada $n \in \omega$ resulta $g_n \to f$ em $\mathcal{C}_u(X)$ e, portanto, $f \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

[27]Ou *não-decrescente* para quem preferir adotar terminologias externas a este texto.

Não é difícil perceber que a função f_ε desejada, na prática, deve tão somente satisfazer

$$f(x) - \varepsilon < f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon \tag{6.6}$$

para todo $x \in X$. A compacidade de X será essencial nesta busca, que se inicia a seguir.

Fixados $a, b \in X$ pontos distintos, a hipótese de que $\mathcal{A}$ separa pontos dá uma função $h \in \mathcal{A}$ com $h(a) \neq h(b)$. Daí, para

$$g := \frac{1}{h(b) - h(a)}(h(x) - h(a)),$$

deve-se ter $g \in \mathcal{A}$, $g(a) = 0$ e $g(b) = 1$, bem como $f_{a,b} := (f(b) - f(a))g + f(a) \in \mathcal{A}$, já que $f(b) - f(a)$ e $f(a)$ são constantes. Enfim, por valerem as identidades $f_{a,b}(a) = f(a)$ e $f_{a,b}(b) = f(b)$, resulta que os abertos

$$U_{a,b} := \{x \in X : f_{a,b}(x) < f(x) + \varepsilon\} \quad \text{e} \quad V_{a,b} := \{x \in X : f_{a,b}(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

são tais que $a, b \in U_{a,b} \cap V_{a,b}$. Em certo sentido, a função $f_{a,b}$ faz em $U_{a,b} \cap V_{a,b}$ o que gostaríamos que f_ε fizesse em todo o X. O restante da prova consiste em usar a compacidade para cozinhar a função f_ε a partir das funções $f_{a,b}$'s.

Primeiro, para $b \in X$ fixado, a família $\{U_{a,b} : a \in X \setminus \{b\}\}$ é uma cobertura por abertos para X. Logo, a compacidade de X *fornece* $a_0, \ldots, a_n \in X$ tais que $X = U_{a_0,b} \cup \ldots \cup U_{a_n,b}$. Da compacidade de X e da continuidade das funções em $\mathcal{A}$ segue que todas são limitadas, o que permite usar o lema anterior, por indução, a fim de estabelecer

$$f_b := \min(f_{a_0,b}, \ldots, f_{a_n,b}) \in \mathcal{A}.$$

Note que para $x \in X$ qualquer, existe $i \leq n$ com $x \in U_{a_i,b}$, o que garante a desigualdade $f_b(x) \leq f_{a_i,b}(x) < f(x) + \varepsilon$, "metade" do que se estipulou em (6.6).

Por sua vez, ocorre $b \in \bigcap_{i \leq n} V_{a_i,b} := V_b$ e, para cada $y \in V_b$, $f(y) - \varepsilon < f_{a_i,b}(y)$, donde segue que $f(y) - \varepsilon < f_b(y)$. Nossos problemas estariam resolvidos se ocorresse $V_b = X$. Embora isso não aconteça, pode-se remediar a situação, apelando-se mais uma vez para a compacidade.

Repetindo o procedimento anterior para cada $b \in X$, obtêm-se $b_0, \ldots, b_m \in X$ satisfazendo a identidade $X = V_{b_0} \cup \ldots \cup V_{b_m}$. Novamente, o lema anterior assegura $f_\varepsilon := \max(f_{b_0}, \ldots, f_{b_m}) \in \mathcal{A}$, que é digna de tal abreviação: de fato, por termos $f_{b_i}(x) < f(x) + \varepsilon$ para cada $i \leq m$, deve ocorrer $f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon$; por outro lado, dado $x \in X$ qualquer, existe b_j com $x \in V_{b_j}$, e daí $f(x) - \varepsilon < f_{b_j}(x) \leq f_\varepsilon(x)$, como desejado. $\square$

Observação 6.2.11. O leitor preciosista pode se perguntar: onde a condição de Hausdorff foi utilizada? A resposta pode surpreender: lugar nenhum. No entanto, se $\mathcal{C}(X)$ admite uma álgebra que separa pontos, então X é de Hausdorff (por quê?). Logo, não há perda de generalidade em acrescentar tal condição, o que permite tornar o enunciado mais amigável para analistas. $\triangle$

Embora a compacidade seja indispensável para garantir a convergência *uniforme* (Exercício 6.59), ela pode ser abandonada se a topologia sobre $\mathcal{C}(X)$ for substituída pela compacto-aberta, como veremos oportunamente.

6.2.2 A convergência pontual revisitada

É chegado o momento de prestar as devidas reverências à topologia da convergência pontual, frequentemente utilizada ao longo dos capítulos anteriores mas que, até agora, não protagonizou sua própria (sub) seção. Dado que ela se caracteriza naturalmente como um subcaso da topologia produto, também é oportuno refinar algumas considerações acerca de espaços da forma $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$.

Ainda no Capítulo 1, vimos que a topologia produto é bem comportada de forma *irrestrita* com respeito a certos aspectos de convergência:

(i) uma *net* $(x_d)_d$ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ converge para $(x_i)_i$ se, e somente se, $x_d(i) \to x_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$;

(ii) um filtro $\mathcal{F}$ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ converge para $(x_i)_i$ se, e somente se, $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$;

(iii) $\overline{\prod_{i\in\mathcal{I}} S_i} = \prod_{i\in\mathcal{I}} \overline{S_i}$ para qualquer $\mathcal{I}$-upla $(S_i)_i$ com $S_i \subseteq X_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$;

(iv) $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é compacto se, e somente se, cada X_i é compacto.

Já nos capítulos seguintes, observou-se que fenômenos como acima não são regra:

(i) produto arbitrário de espaços sequencialmente compactos pode não ser sequencialmente compacto;

(ii) produto enumerável de espaços σ-compactos pode não ser;

(iii) mesmo o produto finito de espaços de Lindelöf/paracompactos pode não ser de Lindelöf/paracompacto.

Assim, um modo natural de prosseguir a investigação da topologia produto consiste em considerar o comportamento de outras propriedades topológicas importantes. *Peso* e *caráter*, por exemplo, já foram implicitamente consideradas no Teorema 3.1.17 e em alguns exercícios da seção correspondente. Explicitamente, vale o seguinte:

Teorema 6.2.12. *Sejam $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos e $\mathcal{T}$ a coleção composta pelos $i \in \mathcal{I}$ tais que a topologia de X_i é codiscreta*[28].

(i) $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ tem peso enumerável se, e somente se, cada X_i tem peso enumerável e $|\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}| \leq \aleph_0$.

(ii) $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ tem caráter enumerável se, e somente se, cada X_i tem caráter enumerável e $|\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}| \leq \aleph_0$.

Demonstração. Nesta altura da vida, a direção ($\Leftarrow$) deve ser elementar em ambos os casos: chamando por $\mathcal{B}_i$ uma base enumerável para cada X_i, tem-se

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}[B_j] : J \in [\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}]^{<\aleph_0} \text{ e } B_j \in \mathcal{B}_j \text{ para cada } j \in J \right\}$$

que deve ser enumerável pois $\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}$ é enumerável, e é uma base pois $\mathcal{B}_t = \{X_t\}$ para todo $t \in \mathcal{T}$; o caso local é análogo. A delicadeza se esconde na recíproca.

[28] Também chamada de *antidiscreta*, *indiscreta* ou *caótica*: é a menor topologia possível num conjunto.

Suponha $|\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}| > \aleph_0$ e escolha uma $\mathcal{I}$-upla $(x_i)_i$ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ tal que para cada $j \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{T}$ exista um aberto $V_j \subsetneq X_j$ com $x_j \in V_j$. Mostraremos que nenhuma família enumerável $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \omega\}$ de abertos básicos em torno de $(x_i)_i$ pode ser base local. Pela definição da topologia produto, cada B_n é da forma $\prod_{i\in\mathcal{I}} B_{n,i}$, com $B_{n,i} \subseteq X_i$ aberto e $\operatorname{supp}(B_n) := \{i \in \mathcal{I} : B_i \neq X_i\}$ finito. Ora, como $\mathcal{S} := \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{supp}(B_n)$ é enumerável, existe $j \in \mathcal{I}\setminus\mathcal{T}$ com $j \notin \mathcal{S}$, e daí não é difícil perceber que $(x_i)_i \in \pi_j^{-1}[V_j]$ com $\pi_j^{-1}[V_j] \nsubseteq B_n$ para cada $n \in \omega$. Analogamente, mostra-se que $|\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}| > \aleph_0$ impede a existência de uma base enumerável[29]. O restante segue do próximo exercício. □

Exercício 6.41. Seja $f\colon X \to Y$ uma função contínua, sobrejetora e aberta. Mostre que se X tem peso/caráter enumerável, então Y também tem peso/caráter enumerável. Dica: teste a primeira ideia que você tiver. ■

Exemplo 6.2.13. Segue diretamente do último teorema que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ não tem peso e nem caráter enumeráveis. Também ficam trivializados os Exercícios 3.11, 3.12 e 3.13. Em particular, como $\mathcal{C}_p(X,Y)$ é subespaço de Y^X, vê-se que $\mathcal{C}_p(X,Y)$ tem peso/caráter enumerável sempre que Y tem peso/caráter enumerável e $|X| \leq \aleph_0$, o que generaliza o distante Exercício 1.166. Com isso em mente, é relativamente fácil determinar quando $\mathcal{C}_p(X)$ tem peso enumerável. ▲

Exercício 6.42. Mostre que $\mathcal{C}_p(X)$ tem peso enumerável se, e somente se, $|X| \leq \aleph_0$. Dica: use o teorema anterior juntamente com a Proposição 2.2.13. ■

Ao seguir a trilha de exercícios recordados no último exemplo, chega-se ao *desonesto* Exercício 3.14, que pergunta pela *densidade*/separabilidade do espaço $[0,1]^{\mathfrak{c}}$. A julgar pelo comportamento das bases de abertos, seria natural apostar numa resposta negativa. Esta seria uma aposta perdida.

Teorema 6.2.14 (**H**ewitt-**M**arczewski-**P**ondiczery[30], versão *baby*)**.** *Se $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de espaços separáveis, com $|\mathcal{I}| \leq \mathfrak{c}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é separável.*

Demonstração. Embora a presente instância do teorema admita uma prova alternativa que se aproveita da topologia de $\mathbb{R}$, é conveniente apresentar o argumento que permitirá, no próximo capítulo, generalizar o resultado para o contexto das *funções cardinais*.

O primeiro passo consiste em mostrar que $Y := \omega^{\mathcal{I}}$ é separável. Para isso, considera-se $T := \{0,1\}^\omega$ com a topologia produto, que tem uma base enumerável em virtude do teorema anterior[31]. Dado que $|\mathcal{I}| \leq \mathfrak{c} := 2^{\aleph_0} = |T|$, não há perda de generalidade em assumir $\mathcal{I} \subseteq T$. Logo, enquanto subespaço de T, $\mathcal{I}$ admite uma base enumerável, digamos $\mathcal{B}$. Agora, basta utilizar $\mathcal{B}$ na construção de um denso enumerável $\mathcal{D}$ para Y, o que será feito em breve.

Antes de construir $\mathcal{D}$, porém, convém observar como o passo anterior permite encerrar a demonstração: fixando um subespaço denso enumerável $D_i \subseteq X_i$ para cada i, existe uma função (contínua) e sobrejetora $f_i\colon \omega \to D_i$, o que permite definir

$$\begin{aligned} \varphi\colon \omega^{\mathcal{I}} &\to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \\ (n_i)_i &\mapsto (f_i(n_i))_{i\in\mathcal{I}} \end{aligned}$$

[29] Alternativamente, pode-se supor $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ com caráter enumerável, digamos, para daí mostrar que $|\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}| \leq \aleph_0$: a fim de proceder com esse argumento, basta observar que $\mathcal{I} \setminus \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

[30] Trívia: *E. S. Pondczery* foi o pseudônimo usado por Ralph P. Boas Jr. no artigo em que a primeira prova desse teorema foi apresentada, em 1944. Provavelmente ele não quis ter sua reputação manchada por lidar com Topologia Geral publicamente.

[31] Confira, porém, o Exercício 6.61.

uma função contínua ($\pi_i \circ \varphi = f_i \circ \pi'_i$ para cada i)[32] cuja imagem é $\prod_{i\in\mathcal{I}} D_i$, um subespaço denso de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ (Exercício 1.100); logo, se $\omega^{\mathcal{I}}$ tem um denso enumerável, então $\operatorname{im}(\varphi)$ tem um denso enumerável (Exercício 1.79) que, por conseguinte, será um denso enumerável de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ (Exercício 1.65), como desejado. Portanto, tudo se resume a construir o denso $\mathcal{D}$ mencionado no parágrafo anterior.

Enfim, xingando por $\mathcal{V}$ a família dos subconjuntos finitos $\mathcal{G}$ de $\mathcal{B}$ compostos por abertos dois a dois disjuntos[33], segue que

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in \omega^{\mathcal{I}} : \exists \mathcal{G} \in \mathcal{V} \text{ tal que } f|_G \text{ é constante para todo } G \in \mathcal{G} \text{ e } f|_{\mathcal{I}\setminus\bigcup\mathcal{G}} \text{ é constante} \right\}$$

satisfaz as condições impostas. Primeiro, $\mathcal{D}$ é enumerável pois cada $f \in \mathcal{D}$ fica completamente caracterizada pelos valores constantes assumidos nos finitos membros da família $\mathcal{G}$ presente na definição: mais precisamente, para $f \in \mathcal{D}$, pode-se escolher $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$, digamos $\mathcal{G} := \{U_0, \ldots, U_n\}$, bem como números naturais $u_0, \ldots, u_n, u \in \omega$, tais que $f|_{U_i} = u_i$ e $f(m) = u$ para todo $m \in \omega \setminus \bigcup_{j\le n} U_j$, o que define uma função

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\to \mathcal{V} \times \omega^{<\aleph_0} \\ f &\mapsto ((U_0, \ldots, U_n), (u_0, \ldots, u_n, u)) \end{aligned}$$

injetora pelo modo como se definiu $\mathcal{V}$, o que estabelece a desigualdade $|\mathcal{D}| \le \aleph_0$, já que $|\mathcal{V}|, |\omega^{<\aleph_0}| \le \aleph_0$. Resta a densidade: para um aberto básico $V := \prod_{i\in\mathcal{I}} V_i$ de $\omega^{\mathcal{I}}$ cujo *suporte* é $\{i_0, \ldots, i_n\}$, existem abertos $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$, dois a dois disjuntos, com $i_j \in U_j$ para cada j (pois $\mathcal{I} \subseteq T$ e T é de Hausdorff), com os quais não é difícil construir uma função $f \in \mathcal{D} \cap V$. □

Exercício 6.43. Conclua a demonstração anterior. Dica: tome $v_j \in V_{i_j}$ para cada $j \le n$, $v \in \omega$ qualquer, e defina $f : \mathcal{I} \to \omega$ por $f(i) := v_j$ se $i \in U_j$ para algum j e $f(i) := v$ caso contrário. ■

Exemplo 6.2.15 (Anticadeias contáveis)**.** Embora o árduo teorema anterior (**HMP**) não ajude a determinar em quais situações $\mathcal{C}_p(X)$ é separável[34], é possível utilizá-lo para garantir que $\mathcal{C}_p(X)$ é um espaço c.c.c. sempre que X é de Tychonoff.

Primeiro, recordemo-nos de que um espaço topológico é c.c.c. se toda família $\mathcal{A}$ de abertos dois a dois disjuntos tem *tamanho*, no máximo, enumerável. Chamando tais famílias de abertos de **anticadeias**, segue que um espaço é c.c.c. se, e somente se, toda anticadeia é enumerável. A relação dessa propriedade com a separabilidade foi discutida no Exercício 3.18, em que o leitor, supostamente, demonstrou que todo espaço separável é c.c.c.: dado que cada membro de $\mathcal{A}$ deve conter um elemento do denso *enumerável*, obtém-se uma função injetora $\mathcal{A} \to \omega$. Considere então os exercícios a seguir.

Exercício 6.44. Mostre que se D é denso em X e X é c.c.c., então D é c.c.c.. ■

Exercício 6.45 (*a.k.a.* Exercício 2.53)**.** Mostre que se X é de Tychonoff, então $\mathcal{C}_p(X)$ é denso em $\mathbb{R}^X$. Dica: mostre que todo aberto básico de $\mathbb{R}^X$ contém uma função contínua; para isso, apele para o suporte finito dos abertos de $\mathbb{R}^X$ e para a condição de Tychonoff. ■

[32] Onde π_i indica as projeções de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e π'_i indica as projeções de $\omega^{\mathcal{I}}$.

[33] Note que $|\mathcal{V}| \le \left|[\mathcal{B}^{<\aleph_0}]\right| \le \aleph_0$, pelo Corolário K.1.133.

[34] É um problema bem mais árduo, na minha opinião, e com uma resposta esteticamente pouco satisfatória: $\mathcal{C}_p(X)$ é separável se, e somente se, a topologia de X é *mais fina* do que uma topologia metrizável e separável sobre X. O leitor interessado pode conferir [108].

Proposição 6.2.16 (Šanin)**.** *Se X_i é separável para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é c.c.c..*

Demonstração. Embora isto seja corolário de um fato mais geral que será provado no próximo capítulo, pode-se usar a versão *baby* do último teorema de maneira bastante engenhosa. Supondo que $\mathcal{A}$ é uma família não-enumerável de abertos dois a dois disjuntos de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, digamos que com $\aleph_0 < |\mathcal{A}| \leq \mathfrak{c}$, pode-se assumir que cada aberto $A \in \mathcal{A}$ é básico, o que permite definir $\mathcal{J} := \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{supp}(A)$, um subconjunto de $\mathcal{I}$ satisfazendo $|\mathcal{J}| \leq \mathfrak{c}$. Logo, HMP garantiria a separabilidade de $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, o que não pode ocorrer: por um lado, se fosse separável, então $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ não teria anticadeias não-enumeráveis; por outro lado, $\mathcal{A}|_{\mathcal{J}} := \left\{\prod_{j\in\mathcal{J}} A_j : A \in \mathcal{A}\right\}$ deve ser uma anticadeia de $\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$, com $|\mathcal{A}|_{\mathcal{J}}| = |\mathcal{A}|$. □

Corolário 6.2.17 (Arhangel'skii)**.** *Para todo X, $\mathcal{C}_p(X)$ é c.c.c..*

Demonstração. Se X for espaço de Tychonoff, a afirmação segue dos últimos resultados. Para o caso geral, basta usar o Exercício 6.28, segundo o qual $\mathcal{C}_p(X)$ é homeomorfo a $\mathcal{C}_p(Y)$ para um espaço de Tychonoff Y. □

Embora soe inócuo, o resultado acima coloca os espaços da forma $\mathcal{C}_p(X)$ numa classe curiosa de animais: aqueles em que vale a recíproca da Proposição 3.2.58, i.e., aqueles para os quais a condição de Lindelöf coincide com paracompacidade.

Teorema 6.2.18. *Se X é paracompacto e c.c.c., então X é de Lindelöf.*

Demonstração. O argumento maroto a seguir adapta a exposição de Tkachuk [108]. Embora a elegância possa ser intimidadora, uma breve reflexão mostra que não existem muitas alternativas de ataque: como a única hipótese que trata de alguma condição de enumerabilidade é c.c.c., em algum momento uma anticadeia deveria brotar.

Katzensprung. *Se X é c.c.c., então toda cobertura loc. finita por abertos é enumerável.*

Evidentemente, em posse do *Katzensprung*, o problema está resolvido. Tratemos, portanto, do *pulo do gato*. Fixada uma cobertura localmente finita por abertos para X, digamos $\mathcal{U}$, existe uma anticadeia $\mathcal{A}$, maximal dentre as anticadeias cujos membros interceptam, no máximo, finitos elementos de $\mathcal{U}$. Com efeito, ao considerar $\mathbb{P}$ a família de tais anticadeias, parcialmente ordenada pela inclusão, toda *cadeia* em $\mathbb{P}$ tem limitante superior (tome a reunião da cadeia). Logo, o Lema de Zorn se aplica.

Agora, por X ser c.c.c., tem-se $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$, enquanto a finitude local de $\mathcal{U}$ aliada à maximalidade de $\mathcal{A}$ garantem a densidade de $\bigcup \mathcal{A}$: se não fosse denso, existiria um aberto não-vazio $V \subseteq X$ com $V \cap \bigcup \mathcal{A} = \emptyset$ e $|\{U \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$, de tal forma que $\mathcal{A} \cup \{V\} \in \mathbb{P}$, contrariando a maximalidade de $\mathcal{A}$.

Por fim, se $\mathcal{U}$ fosse não-enumerável, o Princípio da Casa dos Pombos levaria à conclusão de que $\mathcal{A} \notin \mathbb{P}$: como $\bigcup \mathcal{A}$ é denso, cada $U \in \mathcal{U}$ intercepta algum dos enumeráveis abertos $A \in \mathcal{A}$, de modo que com $|\mathcal{U}| > \aleph_0$ existiria $A \in \mathcal{A}$ com $|\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}| > \aleph_0$. □

Como $\mathcal{C}_p(X)$ nunca é compacto[35], pode-se perguntar quais condições X deve satisfazer, em geral, a fim de que $\mathcal{C}_p(X)$ seja de Lindelöf/paracompacto. Bom, se descobrir, me avise – mas antes, confira o Teorema E.9.11 ▲

[35]Exceto para $X := \emptyset$ (Exemplo 1.2.87 ou, alternativamente, Exercícios 5.46 e 6.18).

Exemplo 6.2.19 (*Funtorialidade*)**.** O distante Exercício 1.91 sugeriu mostrar que a correspondência $X \mapsto \mathcal{C}_p(X)$ determina um funtor contravariante da forma $\textsc{Top} \to \textsc{Top}$. Parte da solução desse problema passa pela definição da correspondência *natural* entre as setas: a saber, para $f\colon X \to Y$, $\mathcal{C}_p(f)\colon \mathcal{C}_p(Y) \to \mathcal{C}_p(X)$ faz cada $g\colon Y \to \mathbb{R}$ contínua corresponder à função contínua $\mathcal{C}_p(f)(g) := g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$, com $\mathcal{C}_p(f)$ contínua em virtude da identidade $\pi_y \circ \mathcal{C}_p(f) = \pi_{f(y)}\colon \mathcal{C}_p(Y) \to \mathbb{R}$, válida para cada $y \in Y$.

No entanto, o enunciado do exercício foi limitado pelo contexto introdutório do capítulo em que se inseriu: na verdade, tem-se $\mathcal{C}_p\colon \textsc{Top} \to \textsc{TopRing}$, onde $\textsc{TopRing}$ indica a categoria dos anéis topológicos. Com efeito, para $* \in \{+, \cdot\}$, ocorre

$$\mathcal{C}_p(f)(g * h) = \mathcal{C}_p(f)(g) * \mathcal{C}_p(f)(h)$$

para quaisquer $g, h \in \mathcal{C}_p(Y)$, bem como $\mathcal{C}_p(f)(\underline{1}) = \underline{1}$. Consequentemente, se $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ não forem *topologicamente* isomorfos como anéis – em particular, se não forem isomorfos como anéis (topológicos) –, então X e Y não podem ser homeomorfos. Com isso dito, cabe destacar: a recíproca se verifica para espaços de Tychonoff.

Teorema 6.2.20 (Nagata)**.** *Sejam X e Y espaços de Tychonoff. Se $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ são isomorfos em* $\textsc{TopRing}$*, então X e Y são homeomorfos.*

A prova do teorema acima se alicerça sobre três observações importantes:

(i) X é (a menos de homeomorfismo) subespaço (fechado) de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$;

(ii) $\mathcal{C}_p(X)^\star$ é gerado, como espaço vetorial, pela cópia de X em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$;

(iii) se $\psi\colon \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ é morfismo de anéis topológicos, então $\psi \in X$ (no sentido da primeira afirmação).

A primeira delas se dá por meio da correspondência $x \mapsto \widehat{x}$, em que $\widehat{x}\colon \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ faz $\widehat{x}(f) := f(x)$, para quaisquer $x \in X$ e $f \in \mathcal{C}_p(X)$: pode-se apelar para o Mergulho de Urysohn (Exercício 2.57), com $Y := \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} := \mathcal{C}_p(X)$, donde a condição de Tychonoff garante automaticamente que $\widehat{\bullet}\colon X \to \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ é um mergulho. Alternativamente, para leitores inclinados a provas menos sofisticadas: se $\widehat{x_d} \to \widehat{x}$ e não ocorresse $x_d \to x$, então existiria um aberto $V \subseteq X$ testemunhando isso, de modo que para $f\colon X \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo $f(x) = 1$ e $f[X \setminus V] = \{0\}$, teria-se $f(x_d) \not\to f(x)$. Como o fato de ser subespaço fechado de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ não será usado, convém deixá-lo a cargo do leitor.

Exercício 6.46. Mostre que $\widehat{X} := \{\widehat{x} : x \in X\}$ é fechado em $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$. Dica: espere a terceira observação e, daí, use *nets*. ■

O mergulho utilizado na prova da primeira afirmação indica como proceder na demonstração da segunda: se $\varphi\colon \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ é funcional linear contínuo, então existem $x_0, \ldots, x_n \in X$ e escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi = \sum_{j \leq n} \lambda_j \widehat{x_j}$, o que faz sentido já que $\widehat{x}\colon \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ é linear e contínuo para cada $x \in X$. Para verificar tal afirmação, basta usar a linearidade de φ junto com a continuidade:

✓ da linearidade, tem-se $\varphi(\underline{0}) = 0$;

✓ pela continuidade, existem um subconjunto finito $F \subseteq X$ e um escalar $\varepsilon > 0$ com $\varphi\left[\langle F, \varepsilon\rangle[\underline{0}]\right] \subseteq (-1, 1)$;

✓ deve-se ter $\varphi(f) = 0$ sempre que $f \in \mathcal{C}_p(X)$ for tal que $f[F] = \{0\}$, já que tal f verifica $kf \in \langle F, \varepsilon\rangle[0]$ para todo $k > 0$, donde o item anterior acarreta $|\varphi(kf)| < 1$ e, por linearidade, $|\varphi(f)| < \frac{1}{k}$;

✓ novamente por conta da linearidade, verifica-se $\varphi(f) = \varphi(g)$ sempre que $f, g \in \mathcal{C}_p(X)$ coincidem nos pontos de F;

✓ por fim, tomando $U_x \subseteq X$ aberto com $x \in U_x$ para cada $x \in F$ e $U_x \cap U_y = \emptyset$ caso $x \neq y$, a condição de Tychonoff assegura funções contínuas da forma $f_x \colon X \to [0, 1]$ com $f_x(x) = 1$ e $f_x[X \setminus U_x] = \{0\}$;

✓ finalmente, de tudo o que se destacou acima, basta fazer $\lambda_x := \varphi(f_x)$ para cada $x \in F$.

Exercício 6.47. Complete os detalhes da argumentação acima. Dica: considere a função $g := \sum_{y\in F} f(y)f_y$ e note que $\varphi(f) = \varphi(g)$. ■

A terceira e última afirmação decorre da observação anterior, dado que um morfismo de anéis topológicos $\psi \colon \mathcal{C}_p(X) \to \mathbb{R}$ deve ser, em particular, $\mathbb{R}$-linear: se $\psi = \sum_{j\leq n} \lambda_j \widehat{x_j}$ com $\lambda_j \neq \lambda_i$ não-nulos para certos $i, j \leq n$, então basta usar a condição de Tychonoff para conjurar funções contínuas $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ apropriadas que verifiquem $\psi(fg) = 0$ e $\psi(f)\psi(g) \neq 0$; agora, se $\psi := \lambda\widehat{x}$, então $\lambda = 1$ já que $\psi(\underline{1}) = 1$.

Exercício 6.48. Complete os detalhes da argumentação anterior. Em particular, mostre que a conclusão permanece válida mesmo nas situações em que ψ é um morfismo contínuo de anéis *sem unidade*. ■

Demonstração do Teorema de Nagata. Se $J \colon \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ é um isomorfismo de anéis topológicos, então $\mathcal{C}_p(J) \colon \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(Y)) \to \mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ é um homeomorfismo. Dado que X e Y podem ser tratados como subespaços de $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(X))$ e $\mathcal{C}_p(\mathcal{C}_p(Y))$, respectivamente, tudo se resolve se mostrarmos que a restrição de $\mathcal{C}_p(J)$ ao subespaço $\widehat{Y}$ determina um homeomorfismo sobre $\widehat{X}$. Ora, para $y \in Y$, $\mathcal{C}_p(J)(\widehat{y}) := \widehat{y} \circ J$ e este, por sua vez, é um morfismo de anéis topológicos, donde a última observação acarreta $\mathcal{C}_p(J)(\widehat{y}) \in \widehat{X}$. Analogamente, para $x \in X$, tem-se $\mathcal{C}_p(J)^{-1}(\widehat{x}) = \widehat{x} \circ J^{-1} \in \widehat{Y}$. □

Antes de seguir adiante, convém reforçar que a continuidade do isomorfismo de anéis $J \colon \mathcal{C}_p(X) \to \mathcal{C}_p(Y)$ não pode ser abandonada: dado que $\omega_1 = [0, \omega_1)$ é espaço pseudocompacto (e não-compacto), tem-se $\mathcal{C}(\omega_1) = \mathcal{C}^*(\omega_1)$, de modo que ao combinar o Exemplo 3.3.30 com o Teorema 6.2.3, conclui-se que $\mathcal{C}(\omega_1)$ e $\mathcal{C}(\beta\omega_1)$ são *anéis isomorfos*[36], embora ω_1 e $\beta\omega_1 = [0, \omega_1]$ não sejam homeomorfos. ▲

Observação 6.2.21 (O caso compacto de Hausdorff)**.** É importante destacar que a situação apresentada no parágrafo anterior só foi possível pela ausência de compacidade num dos espaços, como indica o próximo teorema. △

Teorema 6.2.22 (Gelfand-Kolmogorov)**.** *Sejam X e Y espaços compactos de Hausdorff. Se $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$ forem anéis isomorfos, então X e Y são homeomorfos.*

[36] Não é difícil perceber que a função R_X definida no Teorema 6.2.3 é um isomorfismo de anéis.

Demonstração. Dada a natureza puramente algébrica da hipótese, é razoável esperar que a prova dependa pesadamente das propriedades algébricas dos anéis $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$. De fato, parte da ideia é "recuperar" X e Y a partir dos ideais maximais de $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$, respectivamente.

Katzensprung. *Para Z compacto de Hausdorff, chame $I_{Z,z} \coloneqq \{f \in \mathcal{C}(Z) : f(z) = 0\}$ para cada $z \in Z$. Em tais condições, a correspondência $z \mapsto I_{Z,z}$ determina uma bijeção entre Z e os ideais maximais de $\mathcal{C}(Z)$.*

No presente caso, se $\Phi\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ é um isomorfismo de anéis, então $I \subseteq \mathcal{C}(X)$ é ideal maximal se, e somente se, $\Phi[I] \subseteq \mathcal{C}(Y)$ é ideal maximal, o que permite estabelecer uma bijeção $\varphi\colon X \to Y$ fazendo $\varphi(x) \coloneqq y$, onde $y \in Y$ é o único a satisfazer $\Phi[I_{X,x}] = I_{Y,y}$. A continuidade de φ segue pois, para um espaço de Tychonoff Z qualquer, verifica-se

$$\overline{A} = \left\{ z \in Z : \bigcap_{y \in A} I_{Z,y} \subseteq I_{Z,z} \right\}$$

para qualquer subespaço $A \subseteq Z$: por um lado, se $z \in \overline{A}$, então existe uma *net* $(z_d)_d$ em A com $z_d \to z$, de modo que se $f(y) = 0$ para todo $y \in A$, então $f(z) = 0$; por outro lado, se $z \notin \overline{A}$, então existe $f\colon Z \to \mathbb{R}$ com $f(z) = 1$ e $f\left[\overline{A}\right] = \{0\}$.

Agora, para a continuidade de φ: dado $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$, tem-se $\bigcap_{w \in A} I_{X,w} \subseteq I_{X,x}$ e, pela bijetividade de Φ,

$$\bigcap_{y \in \varphi[A]} I_{Y,y} = \bigcap_{w \in A} I_{Y,\varphi(w)} = \bigcap_{w \in A} \Phi[I_{X,w}] = \Phi\left[\bigcap_{w \in A} I_{X,w}\right] \subseteq \Phi[I_{X,x}] = I_{Y,\varphi(x)},$$

i.e., $\varphi(x) \in \overline{\varphi[A]}$, mostrando que $\varphi\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{\varphi[A]}$. Em particular, por X ser compacto e Y de Hausdorff, conclui-se que φ é homeomorfismo. □

Exercício 6.49. Demonstre o *Katzensprung.* Para isso, siga o roteiro a seguir.

a) Note que a avaliação $\mathrm{ev}_z\colon \mathcal{C}(Z) \to \mathbb{R}$, dada por $f \mapsto f(z)$, é um morfismo sobrejetor de anéis com $\ker \mathrm{ev}_z = I_{Z,z}$ e, com isso, conclua que tais ideais são maximais.

b) Mostre que se $M \subseteq \mathcal{C}(Z)$ é ideal próprio, então existe $p \in Z$ com $M \subseteq I_{Z,p}$. Conclua que $z \mapsto I_{Z,z}$ é uma correspondência sobrejetora entre pontos de Z e ideais maximais de $\mathcal{C}(Z)$. Dica: suponha o contrário e utilize a compacidade de Z a fim de obter $g \in M$ com $g(z) > 0$ para todo $z \in Z$, donde segue que $\mathcal{C}(Z) = M$.

c) Mostre que se $z \neq z'$, então $I_{Z,z} \neq I_{Z,z'}$. Dica: por Z ser compacto de Hausdorff, resulta que Z é normal e, portanto, digno do Lema de Urysohn. ■

Os poucos resultados abordados ao longo desta subseção arranham muito superficialmente o majestoso subcampo da Topologia Geral chamado de $\mathcal{C}_p$-teoria, que lida com os espaços da forma $\mathcal{C}_p(X, Y)$, com ênfase especial para os casos em que $Y \coloneqq \mathbb{R}$. Dado que já existem coleções inteiras dedicadas ao assunto[37], não vejo uma linha clara que delimite em que momento seria adequado encerrar uma introdução como esta. Assim, por questões afetivas, o *grand finale* será o

[37] O texto [108] de Tkachuk é apenas o primeiro de quatro volumes que abordam $\mathcal{C}_p$-teoria, por exemplo.

Teorema 6.2.23 (Alexandroff-Urysohn[38]). *A menos de homeomorfismo, existe um único espaço completamente metrizável, zero-dimensional, separável e cujos compactos têm interior vazio. Em particular, $\omega^\omega := \mathcal{C}_p(\omega, \omega)$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são homeomorfos.*

Demonstração. Dado X com as propriedades acima, mostraremos que existe um homeomorfismo $\varphi\colon \omega^\omega \to X$. Para tanto, fixada uma métrica completa $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, note que existe uma cobertura enumerável para X, digamos $\mathcal{U}_{X,\varepsilon}$, inteiramente composta por fabertos dois a dois disjuntos e com $\operatorname{diam}(U) \leq \varepsilon$ para todo $U \in \mathcal{U}_{X,\varepsilon}$: as hipóteses (e o Exercício 1.61) garantem uma base enumerável de fabertos, digamos $\mathcal{B}$, donde segue que $\mathcal{B}_\varepsilon := \{B \in \mathcal{B} : \operatorname{diam}(B) \leq \varepsilon\}$ é uma base; agora, escrevendo $\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_n : n \in \omega\}$, basta definir $\mathcal{U}_{X,\varepsilon} := \{U_n : n \in \omega\}$, onde $U_0 := B_0$ e, para $n \in \omega$ qualquer, $U_{n+1} := B_{n+1} \setminus \bigcup_{j \leq n} U_j$.

Para $\varepsilon := 1$, deve-se ter $\mathcal{V}_\emptyset := \mathcal{U}_{X,1}$ infinita já que o próprio X não é compacto por hipótese. Desse modo, pode-se escrever $\mathcal{V}_\emptyset = \{V_n : n \in \omega\}$ com $V_m \neq V_n$ sempre que $m \neq n$. Novamente, a hipótese sobre os compactos de X assegura que nenhum dos V_n's pode ser compacto, o que permite aplicar a observação anterior para cada V_n de modo a obter uma cobertura infinita e enumerável $\mathcal{V}_{(n)} = \{V_{n,m} : m \in \omega\}$ para V_n, composta por fabertos dois a dois disjuntos tais que $\operatorname{diam}(V_{n,m}) \leq \frac{1}{2}$ para cada $m \in \omega$: com as notações sugeridas no parágrafo anterior, basta fazer $\mathcal{V}_{(n)} = \mathcal{U}_{V_n, \frac{1}{2}}$. Novamente, nenhum $V_{n,m}$ é compacto, o que permite reproduzir o processo sucessivamente, *ad nauseam*.

Explicitamente, para cada sequência finita $s := (s_0, \ldots, s_n) \in \omega^{<\omega}$, obtém-se uma coleção infinita $\mathcal{V}_s := \{V_{s,m} : m \in \omega\}$ composta por fabertos dois a dois disjuntos, de tal forma que $V_s = \bigcup \mathcal{V}_s$ e $\operatorname{diam}(V_{s,m}) \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $m \in \omega$; em particular, $X = \bigcup \mathcal{V}_\emptyset$.

Agora, a grande sacada é perceber que para uma função $f\colon \omega \to \omega$, as sequências finitas $(f(0), \ldots, f(n))$ determinam um único ponto em X: com efeito, ao tomar $x_n \in V_{f(0),\ldots,f(n)}$ para cada n, a escolha dos diâmetros garante que $(x_n)_n$ é de Cauchy e, portanto, convergente para um ponto x_f, que deve pertencer a $\bigcap_{n\in\omega} V_{f(0),\ldots,f(n)}$ já que os conjuntos interceptados são fechados; a condição de Hausdorff, por sua vez, assegura que x_f é o único ponto em tal interseção. Daí, não é difícil perceber que $f \mapsto x_f$ determina uma bijeção φ, que é contínua e tem inversa contínua pois $\{V_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ e $\{\varphi^{-1}[V_s] : s \in \omega^{<\omega}\}$ constituem bases para as topologias de X e ω^ω, respectivamente. O restante fica por conta do leitor. □

Exercício 6.50. Complete os detalhes da demonstração. Dica: para se convencer de que $\{V_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ é base para a topologia de X, pode ser útil rever as demonstrações da Proposição 3.1.7 e do Teorema 3.2.26; para ver que $\{\varphi^{-1}[V_s] : s \in \omega^{<\omega}\}$ é base para ω^ω, note que $\varphi^{-1}[V_s] = \prod_{n\in\omega} O^s_n$, onde $O^s_i := \{s(i)\}$ para cada i no domínio de s, e $O^s_n := \omega$ para $n \notin \operatorname{dom}(s)$; finalmente, o homeomorfismo entre ω^ω e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ segue pois o último tem as propriedades exigidas (Proposição 3.1.7 + Exercício 3.5 + Exercício 3.71 + Proposição 4.2.46). ■

6.2.3 A topologia compacto-aberta na natureza

Além de apresentar a topologia compacto-aberta como uma topologia de convergência uniforme nos casos pertinentes (Exemplo 6.1.29), a Seção 6.1 introduziu a noção de *exponencialidade*, com a sugestão de que sua realização se dá, quando possível, por meio da topologia compacto-aberta. Embora se trate de uma simplificação perigosa, pode ser interessante promover parcialmente esta mentira.

[38]Embora se trate da adaptação de um argumento devido a Baire.

Lema 6.2.24. *Para espaços topológicos X e Y quaisquer, tem-se $\mathcal{C}_k(X,Y) \leq (\mathcal{C}(X,Y),\mathcal{T})$ para qualquer topologia admissível $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{C}(X,Y)$.*

Demonstração. Por conta da generalidade dos espaços X e Y considerados, deve-se usar a manifestação da topologia compacto-aberta dada pelos conjuntos da forma $[K,O]$, com $K \subseteq X$ compacto e $O \subseteq Y$ aberto. Ora, para $f \in [K,O]$, a continuidade da avaliação $\mathrm{ev}\colon (\mathcal{C}(X,Y),\mathcal{T}) \times X \to Y$ garante, para cada $x \in K$, um aberto $V_x \subseteq X$ e um $\mathcal{T}$-aberto $A_x \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ tal que $(f,x) \in A_x \times V_x$ e $g[V_x] \subseteq O$ para toda função $g \in A_x$. Por conta da compacidade de K, existem $x_0,\ldots,x_n \in K$ com $K \subseteq \bigcup_{i\leq n} V_{x_i}$. Para encerrar, note que $f \in \bigcap_{i\leq n} A_{x_i} := A$ e $A \subseteq [K,O]$. □

Observação 6.2.25 (*Cindabilidade*[39] revisitada)**.** Um modo alternativo de obter o resultado do último lema consiste em observar que a topologia compacto-aberta é de cisão. Com efeito, se $f\colon Z \times X \to Y$ é contínua e $[K,O] \subseteq \mathcal{C}_k(X,Y)$ é um aberto básico com $\Delta(f)(z) \in [K,O]$, então para cada $x \in K$ ocorre $f(z,x) \in O$, o que permite obter abertos $B_x \subseteq Z$, $V_x \subseteq X$ com $(z,x) \in B_x \times V_x$ e $f[B_x \times V_x] \subseteq O$. Daí, não é difícil usar a compacidade de K para encontrar um aberto $B \subseteq Z$ com $z \in B$ e $\Delta(f)[B] \subseteq O$. △

Ao combinar o lema acima com o Exercício 6.15, resulta que a topologia compacto-aberta *será* exponencial precisamente quando for admissível já que, em tais situações, ela *será* a menor topologia admissível.

Proposição 6.2.26 (*volta* do Teorema 6.1.14)**.** *Se X é localmente compacto, então $\mathcal{C}_k(X,Y)$ é admissível para qualquer espaço Y.*

Demonstração. Em vista da Proposição 6.1.5 e do lema anterior, basta mostrar que $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}_k(X,Y) \times X \to Y$ é contínua. Ora, para $V \subseteq Y$ aberto com $(f,x) \in \mathrm{ev}^{-1}[V]$, i.e., com $f(x) \in V$, existe $U \subseteq X$ aberto com $x \in U$ e $f[U] \subseteq V$ e, pela compacidade local de X, existe uma vizinhança compacta $K \subseteq U$ com $x \in \mathrm{int}\,(K)$ e $K \subseteq U$. Para encerrar, note que $(f,x) \in [K,V] \times \mathrm{int}\,(K)$ e $\mathrm{ev}\,[[K,V] \times \mathrm{int}\,(K)] \subseteq V$. □

Corolário 6.2.27. *Se X é localmente compacto, então $\mathcal{C}_k(X,Y)$ é exponencial para qualquer espaço Y.*

Exercício 6.51. Reveja o enunciado do Teorema 6.1.14.

a) Convença-se de que as Proposições 6.1.15 e 6.2.26 demonstram, respectivamente, a *ida* e a *volta* do teorema.

b) Para um espaço de Tychonoff X, mostre que são equivalentes:

   (i) a convergência contínua $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ é topologizável;

   (ii) o espaço X é localmente compacto;

   (iii) $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X) = \mathcal{C}_k(X)$, i.e., para toda *net* $(f_d)_d$ em $\mathcal{C}(X)$ e $f \in \mathcal{C}(X)$, $f_d \to_{\mathcal{C}} f$ se, e somente se, $f_d \to f$ em $\mathcal{C}_k(X)$ (ou ainda: a convergência contínua é a convergência induzida pela topologia compacto-aberta).

   Dica: para (ii) ⇒ (iii), use o Teorema 6.1.11. ■

[39] Ou a *propriedade de ser de cisão*. Pode não parecer, mas eu odeio essa palavra.

Observação 6.2.28 (*Exponencialidade*)**.** Grosso modo, um espaço topológico X é dito **exponenciável** se $\mathcal{C}(X, Y)$ admitir a topologia exponencial para todo espaço Y. A junção do exercício anterior com o último corolário garante que para espaços de Tychonoff, *exponencialidade* é sinônimo de compacidade local, caracterizando assim uma propriedade, extrínseca por definição, em termos intrínsecos. Embora tal conclusão seja correta, ela não constitui a última palavra em generalidade.

Pode-se mostrar que *um espaço topológico X é exponenciável se, e somente se, para quaisquer $x \in X$ e $V \subseteq X$ aberto com $x \in V$, existe um aberto $U \subseteq V$ com $x \in U$ e tal que toda cobertura por abertos para V tem uma subcoleção finita que cobre U.* A literatura costuma chamar de **núcleo-compactos**[40] os espaços com tal propriedade.

Talvez o único alento seja saber que, no reino de Hausdorff, núcleo-compacidade e compacidade local coincidem! O leitor interessado em mais detalhes pode conferir o surpreendentemente legível trabalho de Escardó e Heckmann [40]. △

Exemplo 6.2.29 (Homotopias)**.** Recordemo-nos de que uma homotopia entre funções contínuas $f, g \colon X \to Y$ é uma função contínua $H \colon [0,1] \times X \to Y$ satisfazendo as identidades $H(0, x) = f(x)$ e $H(1, x) = g(x)$ para qualquer $x \in X$. Note que se X é localmente compacto, então $[0,1] \times X$ também é localmente compacto e, por conseguinte, $\mathcal{C}_k(X, Y)$, $\mathcal{C}_k([0,1] \times X, Y)$ e $\mathcal{C}_k([0,1], \mathcal{C}_k(X, Y))$ são exponenciais. Logo, em virtude do Corolário 6.1.13, resulta que a correspondência $H \mapsto \Delta(H)$, onde $\Delta(H)(t)(x) := H(t, x)$ para quaisquer $t \in [0,1]$ e $x \in X$, determina um homeomorfismo entre $\mathcal{C}_k([0,1] \times X, Y)$ e $\mathcal{C}_k([0,1], \mathcal{C}_k(X, Y))$. Em outras palavras, nesse contexto, homotopias podem ser encaradas, formalmente, como caminhos entre funções[41]. ▲

Ignorando-se as motivações categoriais implícitas na discussão acima, o que se mostrou, na prática, é que para X localmente compacto, a convergência uniforme em compactos é a convergência contínua (Teorema 6.1.11). Que bem isso poderia trazer?

Teorema 6.2.30. *Sejam X e Y espaços topológicos, com Y espaço T_3. Se $(f_d)_d$ é uma* net *de funções da forma $X \to Y$, possivelmente descontínuas, com $f_d \to_{\mathcal{C}} f$ para alguma função $f \colon X \to Y$, então f é contínua.*

Demonstração. Antes de começar a prova, convém reforçar que, diferente do que se fez na Definição 1.4.17 e na Observação 1.4.19, a condição de convergência acima, $f_d \to_{\mathcal{C}} f$, expressa que $f_d(x_a) \to f(x)$ sempre que $x_a \to x$, o que faz sentido mesmo sem assumir a continuidade das funções f_d. Em particular, é claro que $f_d(z) \to f(z)$ para todo $z \in X$ (Exercício 1.310). Agora, para mostrar que f é contínua, basta tomar uma *net* $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ em X com $x_a \to x$ e verificar $f(x_a) \to f(x)$.

Ora, se $f(x_a) \not\to f(x)$, então existe um aberto $\widetilde{V} \subseteq Y$ com $f(x) \in \widetilde{V}$ tal que para todo $a \in \mathbb{A}$, algum $t(a) \geq a$ satisfaz $f(x_{t(a)}) \notin \widetilde{V}$. Todavia, deve ocorrer $f_d(x_a) \to f(x)$, o que assegura $d' \in \mathbb{D}$ e $a' \in \mathbb{A}$ tais que $f_d(x_a) \in \widetilde{V}$ sempre que $d \geq d'$ e $a \geq a'$. É a condição T_3 satisfeita por Y que encerrará a prova: por existir $U \subseteq X$ aberto com $f(x) \in U$ e $\overline{U} \subseteq \widetilde{V}$, algum $t(a') \geq a'$ satisfaz $f(x_{t(a')}) \in Y \setminus \overline{U} := W$; dado que $f_d(x_{t(a')}) \to f(x_{t(a')})$, existe $d'' \in \mathbb{D}$ com $f_d(x_{t(a')}) \in W$ sempre que $d \geq d''$; por fim, note que para $d \geq d'', d'$, deveria ocorrer tanto $f_d(x_{t(a')}) \in \widetilde{V}$ (pois $t(a') \geq a'$) quanto $f_d(x_{t(a')}) \in W$ (pois $d \geq d''$), o que é absurdo em vista de se ter $\widetilde{V} \cap W = \emptyset$. □

[40] *Core-compact.*

[41] Mesmo se X não for localmente compacto, a continuidade de uma homotopia H equivale à continuidade de $\Delta(H)$ (confira o Exercício 6.4). Já para o homeomorfismo entre os espaços de funções, basta que X seja T_3 (Exercício 6.64).

Observação 6.2.31. O leitor interessado na reformulação do resultado acima para o contexto dos espaços de convergência deve conferir [37], mas prepare-se: Dolecki e Mynard não usam *nets* em suas elucubrações. △

Corolário 6.2.32 (Confira a Observação 6.1.20)**.** *Sejam X um espaço localmente compacto e Y um espaço uniforme. Se $(f_d)_d$ é uma* net *de funções contínuas da forma $X \to Y$ tal que $f_d \to f$ uniformemente em compactos, então f é contínua. Em outras palavras, $\mathcal{C}_k(X, Y)$ é fechado em Y^X, onde o último é dotado da topologia da convergência uniforme em compactos.*

Demonstração. Segue do teorema anterior, posto que: (i) a topologia de Y é T_3; (ii) a convergência uniforme em compactos sobre $\mathcal{C}_k(X, Y)$ é a convergência induzida pela topologia compacto-aberta (Exemplo 6.1.29); (iii) por X ser localmente compacto, a topologia compacto-aberta de $\mathcal{C}_k(X, Y)$ é induzida pela convergência contínua. Em caso de dúvidas, confira o Exercício 6.70. □

Se, por um lado, a compacidade local pode ser uma hipótese muito restritiva[42], por outro lado a convergência uniforme *global* clássica exigida para assegurar a continuidade de limites de funções (Proposição 4.1.38) é um luxo do qual nem sempre podemos nos valer. Como diria o Estadão, é uma escolha muito difícil – exceto na presença de compacidade *plena* (Exercício 6.33). Nesse sentido, pode ser edificante refletir acerca do próximo

Exercício 6.52. Para um espaço de Tychonoff X, mostre que $\mathcal{C}_k(X) = \mathcal{C}_p(X)$ se, e somente se, todo subespaço compacto de X é finito. Em particular, *se X é discreto*[43], então $\mathcal{C}_k(X) = \mathcal{C}_p(X) = \mathbb{R}^X$. Dica: para a volta, suponha, por absurdo, a existência de $K \subseteq X$ compacto e infinito; considere então $p\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $p(0) \neq p(1)$ e fixe $h\colon X \to \mathbb{R}$ a função constante $x \mapsto p(0)$; para $0 < \varepsilon < |p(0) - p(1)|$, a hipótese garante um subconjunto finito $F \subseteq X$ com $\langle F, \varepsilon\rangle[h] \subseteq \langle K, \varepsilon\rangle[h]$; finalmente, use a condição de Tychonoff para conjurar $f\colon X \to [0, 1]$ contínua de tal forma que $p \circ f \in \langle F, \varepsilon\rangle[h] \setminus \langle K, \varepsilon\rangle[h]$. ■

Observação 6.2.33. Note que o argumento sugerido para a volta permite substituir $\mathbb{R}$ por qualquer espaço métrico M dotado de um caminho contínuo não-trivial. O leitor interessado em outras discussões dessa natureza pode conferir [73]. △

Embora a coincidência *global* da topologia produto com a compacto-aberta se dê apenas no cenário restrito indicado pelo exercício anterior, tal fenômeno pode ocorrer em subconjuntos próprios de $\mathcal{C}(X, Y)$ de maneira bem mais corriqueira – e útil. Para o que se segue, pode ser conveniente rever a definição de equicontinuidade discutida no último capítulo (Definição 5.2.68), a fim facilitar a digestão de sua contraparte topológica.

Definição 6.2.34. Para espaços topológicos X e Y, uma família de funções $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ é **regularmente contínua**[44] em $x \in X$ se para todo $y \in Y$ e todo aberto $U \subseteq Y$ com $y \in U$, existem abertos $V \subseteq X$ e $W \subseteq Y$ com $(x, y) \in V \times W$ e $\mathrm{ev}[(\mathcal{H} \cap [\{x\}, W]) \times V] \subseteq U$, i.e., com $f[V] \subseteq U$ sempre que $f \in \mathcal{H}$ for tal que $f(x) \in W$. Quando tal condição é satisfeita para todo $x \in X$, diz-se apenas que $\mathcal{H}$ é **regularmente contínua**. ¶

[42] Vide o Teorema 5.2.28 (de Riesz-Weil).

[43] E sim: existem espaços de Tychonoff não-discretos cujos únicos subespaços compactos são os finitos. O leitor interessado em tal discussão pode começar com [105].

[44] *Evenly continuous.*

Um modo menos intrincado de lidar com a condição acima consiste em reescrevê-la com uma linguagem mais adequada.

Lema 6.2.35. *Para $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ e $x \in X$, são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{H}$ é regularmente contínua em x;*

(ii) *$\lim f_d(x_a) \subseteq \lim f_d(x)$ para quaisquer* nets *$(f_d)_d$ em $\mathcal{H}$ e $(x_a)_a$ em X com $x_a \to x$, i.e., se ocorrer $f_d(x_a) \to y$ sempre que $x_a \to x$ e $f_d(x) \to y$ para algum y.*

Demonstração. Dado $U \subseteq Y$ aberto com $y \in U$, sejam $V \subseteq X$ e $W \subseteq Y$ abertos satisfazendo $(x,y) \in V \times W$ e $\mathrm{ev}[(\mathcal{H} \cap [\{x\}, W]) \times V] \subseteq U$. Com isso, basta tomar d' e a' tais que $f_d(x) \in W$ e $x_a \in V$ sempre que $d \geq d'$ e $a \geq a'$, respectivamente, pois assim $f_d(x_a) \in U$.

Para a recíproca, suponha que $\mathcal{H}$ não seja regularmente contínua em $x \in X$, i.e., existem $y \in Y$ e $U \subseteq Y$ aberto com $y \in U$ de tal forma que para quaisquer abertos $V \subseteq X$ e $W \subseteq Y$ com $(x,y) \in V \times W$ existe $f_{V,W} \in \mathcal{C}(X,Y)$ com $f_{V,W}(x) \in W$ e $f_{V,W}[V] \nsubseteq U$. Isso permite escolher $x_{V,W} \in V$ com $f_{V,W}(x_{V,W}) \notin U$ para cada par $(V,W) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$. Sobre $\mathcal{D} := \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$, consideremos enfim as pré-ordens $\preceq_X$ e $\preceq_Y$ dadas por

$$(V,W) \preceq_X (V',W') \Leftrightarrow V' \subseteq V \quad \text{e} \quad (V,W) \preceq_Y (V',W') \Leftrightarrow W' \subseteq W,$$

donde segue que $(x_{V,W})_{(V,W)\in(\mathcal{D},\preceq_X)}$ e $(f_{V,W}(x_{V,W}))_{(V,W)\in(\mathcal{D},\preceq_Y)}$ são *nets* legítimas com $x_{V,W} \to x$, $f_{V,W}(x) \to y$, mas $f_{V,W}(x_{V',W'}) \not\to y$. □

Exercício 6.53. Sejam X um espaço topológico, Y um espaço métrico e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ uma família de funções contínuas. Mostre que se $\mathcal{H}$ é equicontínua em x, então $\mathcal{H}$ é regularmente contínua em x. Dica: se ρ indica a métrica de Y, então com as notações do item (ii) do último lema, $\rho(y, f_d(x_a)) \leq \rho(y, f_d(x)) + \rho(f_d(x), f_d(x_a))$. ■

Teorema 6.2.36. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ uma família regularmente contínua de funções. Se $(f_d)_d$ é uma* net *em $\mathcal{H}$ tal que $f_d \to f$ em Y^X com respeito à convergência pontual, então $f_d \to_{\mathcal{C}} f$.*

Demonstração. Por hipótese, $f_d(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$. Para concluir que $f_d \to_{\mathcal{C}} f$, deve-se mostrar que $f_d(x_a) \to f(x)$ sempre que $x_a \to x$. Ora, como $\mathcal{H}$ é regularmente contínua em todo x, basta tomar $y := f(x)$ na condição (ii) do último lema. □

Corolário 6.2.37. *Se X é localmente compacto e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ é regularmente contínua, então as topologias de $\mathcal{H}$ enquanto subespaço de $\mathcal{C}_p(X,Y)$ e $\mathcal{C}_k(X,Y)$ coincidem.*

Demonstração. Convergência contínua acarreta convergência pontual de forma irrestrita (Exercícios 1.310 ou 6.74). Já na presença de continuidade regular, vale a recíproca (pelo teorema anterior). Como $\mathcal{C}_k(X,Y)$ tem a convergência contínua nos casos em que X é localmente compacto, segue o resultado (Exercício 1.196). □

A coincidência entre as convergências acima é o principal ingrediente na caracterização parcial dos subespaços compactos da topologia compacto-aberta, que será abordada a seguir – mas de maneira indireta, por meio da convergência contínua.

Teorema 6.2.38 (Arzelà-Ascoli, "ida")**.** *Sejam X e Y espaços topológicos, com Y um espaço regular. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ é uma família regularmente contínua de funções, com $\overline{\{h(x) : h \in \mathcal{H}\}}$ compacto em Y para cada $x \in X$, então o fecho de $\mathcal{H}$ com respeito à topologia compacto-aberta é subespaço compacto de $\mathcal{C}_k(X,Y)$.*

Demonstração. A prova, adaptada de [80], é bastante simples – desde que se conheçam os truques certos. A primeira coisa é aceitar que, diferente da postura defendida ao longo da Seção 1.2.3, *nets* universais (*a.k.a. ultra*nets) são mais adequadas do que ultrafiltros para dar cabo do presente teorema; em particular, convém recordar da caracterização de *nets* universais proposta no Exercício 1.173. A segunda coisa é observar o

Katzensprung. *Se Z é espaço topológico e $S \subseteq Z$, então $\overline{S}$ é compacto se, e somente se, toda* net *universal em S converge em Z.*

Com isso em mente, note que se $(f_d)_d$ é uma *net* universal em $\mathcal{H}$, então $(f_d(x))_d$ ainda é uma *net* universal em $\{h(x) : h \in \mathcal{H}\}$. Isso permite combinar o *Katzensprung* com a hipótese a fim de conjurar $f(x) \in Y$ com $f_d(x) \to f(x)$. Como $f_d \to f$ pontualmente e $\mathcal{H}$ é regularmente contínua, resulta que a convergência é contínua pelo último teorema e, portanto, $f : X \to Y$ é contínua

Há, porém, um problema: sem assumir a compacidade local de X, a topologia de $\mathcal{C}_k(X, Y)$ não é induzida pela convergência contínua, de modo que, a rigor, o argumento acima mostrou apenas a compacidade de $\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ enquanto subespaço de $\mathcal{C}(X, Y)$, ambos vistos como espaços de convergência. Todavia, isto é facilmente remediável.

Katzensprung. *A função $\mathrm{Id} : \mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathcal{C}_k(X, Y)$, que faz $\mathrm{Id}(g) := g$ para cada $g \in \mathcal{C}(X, Y)$, é um mapa contínuo entre espaços de convergência.*

Prova do Katzensprung. Basta notar que as definições de admissibilidade e cisão se aplicam a espaços de convergência e, em particular, o Lema 6.1.6 permanece válido. Logo, dado que a convergência da topologia compacto-aberta é de cisão (vide a Observação 6.2.25), resulta que ela é mais fraca do que a convergência contínua, donde o resultado segue pelo Exercício 1.309 (para mais detalhes, confira o Exercício 6.72). □

Enfim, segue do Exercício 1.311 que $\mathrm{Id}[\mathcal{K}] = \mathcal{K}$ é compacto em $\mathcal{C}_k(X, Y)$ para todo subconjunto $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ compacto com respeito à convergência contínua. Em particular, $\overline{\mathcal{H}}$ é compacto em $\mathcal{C}_k(X, Y)$ por ser subespaço fechado[45] do compacto $\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. □

Exercício 6.54. Prove o primeiro *Katzensprung*. Em particular, observe que o resultado permanece válido para espaços de convergência centrada, trocando-se o fecho topológico pela aderência (Definição 1.4.14). Dica: para a última parte, é lícito traduzir o Exercício 1.278 para *nets*[46]. ■

Observação 6.2.39 (Convergências sob o tapete)**.** O leitor que preferir evitar convergências explicitamente pode, de modo alternativo, mostrar que a topologia compacto-aberta é a menor capaz de fazer $\mathrm{ev} : \mathcal{C}(X, Y) \times K \to Y$ contínua para cada subespaço compacto $K \subseteq X$ (confira o Exercício 6.65). △

Corolário 6.2.40 (Arzelà-Ascoli, "ida" clássica)**.** *Sejam X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}_k(X, Y)$ é equicontínua e $\overline{\{h(x) : h \in \mathcal{H}\}}$ é compacto em Y para cada $x \in X$, então $\overline{\mathcal{H}}$ é compacto.*

Demonstração. Segue diretamente do último teorema (em virtude do Exercício 6.53). □

[45] Na verdade se trata de uma igualdade, dado que $\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \subseteq \overline{\mathcal{H}}$ pela continuidade de Id.

[46] Lembre-se de que a convergência contínua em $\mathcal{C}(X, Y)$ é isótona e centrada sempre que a convergência de Y é centrada, o que é o caso já que Y é espaço topológico.

Observação 6.2.41 (Demonstração alternativa)**.** Pelo vindouro Exercício 6.74, que assegura as implicações

$$f_d \to_{\mathcal{C}} f \Rightarrow f_d \to_k f \Rightarrow f_d \to f \tag{6.7}$$

para qualquer *net* $(f_d)_d$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ e $f\colon X \to Y$ contínua, segue que as inclusões

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{cl}_k(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{cl}_p(\mathcal{H}) \tag{6.8}$$

valem de forma *irrestrita* para *qualquer* família $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ (pelo Exercício 1.298), onde os subíndices "k" e "p" indicam os fechos tomados em $\mathcal{C}_k(X,Y)$ e $\mathcal{C}_p(X,Y)$, respectivamente.

Dessa forma, se mostrarmos que a família $\mathrm{cl}_p(\mathcal{H})$ é equicontínua, o Teorema 6.2.36 garantirá as recíprocas em (6.7) para *nets* em $\mathrm{cl}_p(\mathcal{H})$, acarretando assim que os três conjuntos em (6.8) são iguais e têm a mesma topologia.

Exercício 6.55. Mostre que se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ é equicontínua, então $\mathrm{cl}_p(\mathcal{H})$ é equicontínua. Dica: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $V \subseteq X$ aberto satisfazendo $d(h(x), h(x')) < \varepsilon$ sempre que $x' \in V$ e $h \in \mathcal{H}$; mostre que para qualquer $f \in \mathrm{cl}_p(\mathcal{H})$ e $x' \in V$ ocorre $d(f(x), f(x')) < 3\varepsilon$ (será útil notar que $\langle\{x, x'\}, \varepsilon\rangle[f]$ é uma vizinhança de f em $\mathcal{C}_p(X,Y)$ para cada $x' \in V$ fixado). ■

Finalmente, como $\mathcal{H} \subseteq \prod_{x\in X} \overline{\mathcal{H}(x)}$ e o segundo é compacto (Teorema de Tychonoff), segue que $\mathrm{cl}_p(\mathcal{H})$ é compacto e, portanto, $\mathrm{cl}_k(\mathcal{H})$ é compacto, como desejado. △

Exemplo 6.2.42. Já sabemos que nas situações em que K é compacto de Hausdorff, tem-se a igualdade $\mathcal{C}_k(K,M) = \mathcal{C}_u(K,M)$ para qualquer espaço métrico M e, em particular, o próprio $\mathcal{C}_k(K,M)$ se eleva ao patamar de espaço métrico – na verdade, trata-se de um espaço de Banach com a norma do supremo (Exercícios 6.31 + 6.33).

Nesse sentido, condições capazes de garantir a compacidade de subespaços de funções, como as que foram expressas pelo último corolário, costumam ser o que mais interessa ao uso cotidiano, já que compacidade e compacidade sequencial coincidem em $\mathcal{C}_k(K,M)$. Especificamente:

Corolário 6.2.43. *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $(f_n)_n$ uma sequência de funções contínuas da forma $X \to \mathbb{R}^m$, para $m \in \mathbb{N}$ fixado. Se $\{f_n : n \in \omega\}$ é equicontínua e $\{f_n(x) : n \in \omega\}$ é limitado para todo $x \in X$, então existe uma subsequência $\left(f_{n_j}\right)_j$ de $(f_n)_n$ que converge uniformemente para alguma função contínua.*

Pode-se trocar $\mathbb{R}^m$ por qualquer espaço métrico com a propriedade de Heine-Borel ou, alternativamente, trocar a condição de limitação pontual por compacidade pontual. Também é lícito considerar espaços uniformes em vez de métricos, desde que se mantenha a exigência de compacidade pontual. ▲

Observação 6.2.44 (Opcional: as "voltas" de Arzelà-Ascoli)**.** Feita a ressalva do último exemplo, é importante destacar que em certo sentido, o critério de Arzelà-Ascoli é *ótimo* numa vasta gama de espaços. Primeiro, uma versão geral:

Teorema 6.2.45 (Arzelà-Ascoli, "volta geral")**.** *Sejam X e Y espaços topológicos, com Y de Hausdorff. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ é tal que $\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ é espaço de convergência compacto, então*

(i) $\mathcal{H}(x) := \{h(x) : h \in \mathcal{H}\}$ tem fecho compacto em Y para cada $x \in X$, e

(*ii*) *$\mathcal{H}$ é regularmente contínua.*

Demonstração. Como $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}(X,Y)\times X\to Y$ é contínua, tem-se $\mathrm{ev}_x(\bullet):\mathcal{C}(X,Y)\to Y$ contínua para cada x, donde segue que $\mathcal{K}(x) \coloneqq \{k(x) : k\in\mathcal{K}\}$ é compacto em Y sempre que $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{C}(X,Y)$ é compacto. No caso, $\mathrm{ev}_x[\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})]$ é compacto em Y e, portanto, fechado; como a convergência contínua é centrada no presente contexto, tem-se $\mathcal{H}\subseteq\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ e, por conseguinte, $\overline{\mathrm{ev}_x[\mathcal{H}]}\subseteq\mathrm{ev}_x[\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})]$, donde segue (i).

Para provar a validade de (ii), apelaremos explicitamente para filtros desta vez[47] – e o leitor ficará encarregado de checar/adaptar os lemas anteriores para o contexto de filtros (para isso, pode ser útil relembrar as notações utilizadas na Definição 1.4.17 e na Proposição 1.4.18). A fim de verificar que $\mathcal{H}$ é regularmente contínua em $x\in X$, tomaremos um filtro $\mathscr{F}$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ com $\mathcal{H}\in\mathscr{F}$ e $\mathrm{ev}_x(\mathscr{F})\to y$, bem como um filtro $\mathcal{G}$ em X tal que $\mathcal{G}\to x$, e mostraremos que $\mathscr{F}(\mathcal{G})\to y$. Para isso, basta mostrar que qualquer ultrafiltro $\mathcal{W}$ em Y com $\mathscr{F}(\mathcal{G})\subseteq\mathcal{W}$ satisfaz $\mathcal{W}\to y$, pois daí o resultado segue pelo Exercício 1.188.

Pelo modo como $\mathcal{W}$ foi tomado, existe um filtro próprio $\mathscr{J}$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ tal que $\mathrm{ev}^{-1}(\mathcal{W})\cup\mathscr{F}\subseteq\mathscr{J}$ e $\mathcal{H}\in\mathscr{J}$. Por conta da compacidade *relativa* de $\mathcal{H}$, existe um ultrafiltro $\mathscr{U}$ com $\mathscr{J}\subseteq\mathscr{U}$ e $\mathscr{U}\to_{\mathcal{C}} f$ para alguma $f\in\mathcal{C}(X,Y)$, donde a definição da convergência contínua assegura $\mathscr{U}(\mathcal{G})\to f(x)$. Como $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{U}$, tem-se $\lim\mathrm{ev}_x(\mathscr{F})\subseteq\lim\mathrm{ev}_x(\mathscr{U})$, bem como $\mathrm{ev}_x(\mathscr{U})\to f(x)$ (Exercício 1.310), donde a condição de Hausdorff acarreta $f(x)=y$. Por fim, por $\mathcal{W}$ ser ultrafiltro e satisfazer $U[G]\cap W\neq\emptyset$ para quaisquer $U\in\mathscr{U}, G\in\mathcal{G}$ e $W\in\mathcal{W}$, resulta $\mathscr{U}(\mathcal{G})\subseteq\mathcal{W}$ e, portanto, $\mathcal{W}\to y$, como desejado. □

Corolário 6.2.46 (Arzelà-Ascoli *full*, para localmente compactos)**.** *Para X localmente compacto e Y regular, um subconjunto $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{C}_k(X,Y)$ tem fecho compacto se, e somente se, $\mathcal{H}$ é regularmente contínua e $\mathcal{H}(x)$ tem fecho compacto em Y para cada $x\in X$.*

Existe outra versão *topológica*, "intermediária" entre o *restritivo* corolário anterior e o Teorema 6.2.45, que permite afrouxar um pouco a condição de compacidade local.

Definição 6.2.47. Um espaço de Hausdorff X é xingado de **k-espaço** se os subespaços fechados de X forem precisamente aqueles cujas interseções com os subespaços compactos de X são fechadas[48]. ¶

Espaços de Hausdorff sequenciais são k-espaços: se X satisfaz tal condição e $A\subseteq X$ não é fechado, então existe uma sequência $(x_n)_n$ em A que converge para um ponto $x\notin A$, de modo que $K\coloneqq\{x_n : n\in\omega\}\cup\{x\}$ é um compacto de X tal que $K\cap A$ não é fechado. Em particular, espaços com caráter enumerável, dentre os quais se destacam os metrizáveis, são k-espaços. Com ainda mais razão, espaços de Hausdorff localmente compactos são k-espaços: com efeito, se $A\cap K$ é fechado para qualquer $K\subseteq X$ compacto e $x\notin A$, então para qualquer vizinhança compacta de x deve-se ter $A\cap N$ fechado e, por conseguinte, $N\setminus A = X\setminus(N\cap A)$ é um aberto *em torno de* x que não intercepta A.

Teorema 6.2.48 (Arzelà-Ascoli *full*, para k-espaços)**.** *Para X um k-espaço e Y um espaço regular, um subconjunto $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{C}_k(X,Y)$ tem fecho compacto se, e somente se, $\mathcal{H}$ é regularmente contínua e $\mathcal{H}(x)$ tem fecho compacto em Y para cada $x\in X$.*

[47] Adaptar o argumento de [80] para *nets* tem a desvantagem de depender explicitamente da topologia de Y. A vantagem de argumentar via filtros é que o mesmo raciocínio se aplica para espaços *pseudotopológicos*.

[48] A literatura é relativamente confusa sobre a definição dos k-espaços na ausência da condição de Hausdorff, caso em que são chamados de *compactamente gerados*: existem os espaços *compactamente-Hausdorff* gerados e os espaços de Hausdorff *compactamente gerados*. Como todas as condições colapsam se X for Hausdorff, a definição adotada aqui exigirá a condição de Hausdorff, como feito por Engelking [39].

Demonstração. A fim de usar o Teorema 6.2.45, basta mostrar que $\overline{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{C}_k(X,Y)$ é compacto se, e somente se, $\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ é compacto com a convergência contínua – note que se isso for feito, o resultado segue automático do teorema em questão. Dado que a direção "$\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ compacto $\Rightarrow \overline{\mathcal{H}}$ compacto" já foi feita ao longo da prova do Teorema 6.2.38, podemos nos preocupar apenas com a outra direção. Para isso, consideremos os seguintes fatos (cujas provas serão omitidas):

(i) se Z_0 é (localmente) compacto de Hausdorff e Z_1 é um k-espaço, então $Z_0 \times Z_1$ é um k-espaço;

(ii) em geral, para um k-espaço Z, $f\colon Z \to Z'$ é contínua se, e somente se, $f|_K\colon K \to Z'$ é contínua para cada subespaço compacto $K \subseteq Z$;

(iii) tem-se $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}_k(X,Y) \times K \to Y$ contínua para cada subespaço compacto $K \subseteq X$.

Agora, supondo $\overline{\mathcal{H}}$ compacto em $\mathcal{C}_k(X,Y)$, resulta que $\overline{\mathcal{H}} \times X$ é um k-espaço (fato (i)), o que permite usar a caracterização do fato (ii) na verificação de que $\mathrm{ev}\colon \overline{\mathcal{H}} \times X \to Y$ é contínua: se $K \subseteq \overline{\mathcal{H}} \times X$ é subespaço compacto, então $K \subseteq \overline{\mathcal{H}} \times \pi_X[K]$, com $\pi_X[K] \subseteq X$ compacto e $\mathrm{ev}\colon \overline{\mathcal{H}} \times \pi_X[K] \to Y$ contínua (pelo fato (iii)). O que isso tem a ver com o que gostaríamos de provar? A resposta é quase simples: nas condições acima, $\mathrm{Id}\colon \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é contínua e sua imagem é $\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$; logo, por $\overline{\mathcal{H}}$ ser compacto, segue que $\mathrm{ad}_{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ é compacto com a convergência contínua. □

Exercício 6.56. Complete os detalhes da demonstração anterior. Dica: note que se $(g_d)_d$ é uma *net* em $\overline{\mathcal{H}}$ com $g_d \to g$ na topologia compacto-aberta, então $g_d \to_{\mathcal{C}} g$ em virtude da continuidade da avaliação restrita a $\overline{\mathcal{H}}$; use a continuidade da correspondência $\mathrm{Id}\colon \mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathcal{C}_k(X,Y)$ para o restante. ■

Observação 6.2.49. Os fatos (i) e (ii) omitidos acima são, de fato, corriqueiros. O leitor interessado encontrará demonstrações em qualquer referência razoável de Topologia Geral, como Engelking [39] ou Willard [115], embora ambos sejam bons exercícios. O terceiro fato, por sua vez, é o Exercício 6.65. △

Ainda pode ser o caso de que o leitor esteja interessado especificamente nas situações em que Y é um espaço métrico, ambiente em que a equicontinuidade é mais adequada do que a continuidade regular. Ou será que não?

Teorema 6.2.50. *Sejam X um espaço topológico e $(Y,\mathcal{U})$ um espaço uniforme. Se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ é uma família regularmente contínua e $\mathcal{H}(x)$ tem fecho compacto para todo $x \in X$, então $\mathcal{H}$ é equicontínua.*

Demonstração. A fim de tornar a leitura da prova mais compreensível, Y será assumido métrico – o leitor interessado no caso uniforme não terá dificuldades em fazer as devidas traduções, como indicado na Observação 4.1.11. Para $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ fixados, para cada $y \in \overline{\mathcal{H}(x)}$ tome $U_y := B(y,\varepsilon)$, de modo que a continuidade regular de $\mathcal{H}$ garanta $V_y \subseteq X$ e $W_y \subseteq Y$ abertos, com $x \in V_y$ e $y \in W_y$, tais que $f[V_y] \subseteq \overline{U_y}$ sempre que $f \in \mathcal{H}$ e $f(x) \in W_y$. Como $\overline{\mathcal{H}(x)}$ é compacto, existem finitos $y_0, \ldots, y_n \in \overline{\mathcal{H}(x)}$ com $\overline{\mathcal{H}(x)} \subseteq \bigcup_{j \leq n} W_{y_j}$. Agora, $V := \bigcap_{j \leq n} V_{x_j}$ é uma vizinhança de x que atesta a equicontinuidade de $\mathcal{H}$ em x com respeito a 2ε. □

Portanto, na presença de Y métrico (ou uniforme de Hausdorff), a condição de continuidade regular coincide com a equicontinuidade, o que resulta na forma usual da recíproca de Arzelà-Ascoli nesses contextos (com X, pelo menos, um k-espaço). Além disso, convém comparar a caracterização dos compactos de $\mathcal{C}_k(X)$ com os Teoremas de Heine-Borel: na prática, tem-se $K \subseteq \mathcal{C}_k(X)$ compacto se, e somente se, K for fechado, pontualmente limitado e equicontínuo, mostrando que “Arzelà-Ascoli” funciona como um “Heine-Borel” para espaços de funções. △

Exercícios complementares da seção

Exercício 6.57. Mostre que se X é pseudocompacto de Hausdorff, então $\mathcal{C}_u(X,(Y,d_1)) = \mathcal{C}_u(X,(Y,d_2))$ para quaisquer métricas equivalentes d_1 e d_2 sobre Y. Dica: a imagem contínua de pseudocompactos é pseudocompacta e, em espaços métricos, pseudocompacidade equivale a compacidade. ■

Exercício 6.58. Seja $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$. Mostre que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ é subespaço separável de $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Dica: além da versão clássica da *aproximação* de Weiertrass, lembre-se de que $\mathbb{R}$ é σ-compacto. ■

Exercício 6.59. Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := 0$ se $x \notin [-1,1]$, $f(x) := 1 + x$ se $x \in [-1,0]$ e $f(x) := 1 - x$ se $x \in [0,1]$, não é limite uniforme de funções polinomiais. ■

Exercício 6.60. Suponha que X_i seja um espaço compacto de Hausdorff para cada $i \in \mathcal{I}$. Mostre que a única topologia sobre $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ a tornar X compacto e as projeções contínuas é a topologia produto. Dica: Exercício 1.209. ■

Exercício 6.61. Mostre que se Y tem peso enumerável e X é infinito, então Y^X tem uma base com cardinalidade $\leq |X|$. ■

Exercício 6.62. Exiba espaços X e Y com $\mathcal{C}_p(X)$ e $\mathcal{C}_p(Y)$ isomorfos enquanto anéis, mas não topologicamente isomorfos. ■

Exercício 6.63. Mostre que o Teorema de Stone-Weierstrass permanece válido em $\mathcal{C}_k(X)$ se X for um espaço de Hausdorff. ■

Exercício 6.64. Sejam X, Y e Z espaços topológicos.

a) Mostre que $\Delta\colon \mathcal{C}_k(X \times Z, Y) \to \mathcal{C}_k(Z, \mathcal{C}_k(X,Y))$ é sempre contínua. Dica: avalie os abertos básicos da topologia compacto-aberta.

b) Mostre que se X é localmente compacto, então Δ é uma bijeção contínua. Dica: utilize a propriedade exponencial da topologia compacto-aberta (válida por X ler localmente compacto), aliada ao item anterior.

c) No item anterior, assuma que Z também é T_3. Com tal suposição, mostre que Δ é aberta. Conclua que se X é localmente compacto e Z é T_3, então Δ é homeomorfismo. ■

Exercício 6.65. Mostre que a topologia compacto-abeta sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é a menor com a seguinte propriedade: $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}(X,Y) \times K \to Y$ é contínua para todo compacto $K \subseteq X$. Dica: o Exercício 6.74 pode ser útil para quem estiver com pressa. ■

Exercício 6.66. Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **de Baire** se existe uma sequência $(f_n)_n$ de funções contínuas da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f_n \to f$ em $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ com a topologia produto.

a) Mostre que se f é de Baire e $U \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, então $f^{-1}[U]$ é um F_σ. Dica: observe que U é uma reunião enumerável de fechados com *interior não-vazio*.

b) Mostre que se f é de Baire, então o conjunto dos pontos em que f é descontínua é magro, i.e., é reunião enumerável de fechados com interior vazio[49]. Dica: seja $\{I_n : n \in \omega\}$ a família dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ com extremos racionais e note que f é descontínua em x se, e somente se, existe n tal que $x \in f^{-1}[I_n] \setminus \operatorname{int}\left(f^{-1}[I_n]\right)$.

[49] Exercício 1.75.

c) Mostre que não existe métrica em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ cuja convergência induzida para sequências seja a convergência pontual. Dica: observe que $\chi_{\mathbb{Q}}$, a função característica dos racionais, é de Baire; para isso, escreva f como limite pontual das funções características de subconjuntos finitos de $\mathbb{Q}$; por fim, note que isso permitiria concluir que f é limite pontual de funções contínuas, contrariando o item anterior. $\blacksquare$

Exercício 6.67. Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções em $\mathcal{C}_p(X,Y)$ tal que $f_n \to f$. Mostre que se X é de Baire e Y tem peso enumerável, então $\{x \in X : f \text{ é descontínua em } X\}$ é magro em X. $\blacksquare$

Exercício 6.68. Mostre que ao estender as definições de equicontinuidade e continuidade regular para uma família $\mathcal{H}$ de funções não necessariamente contínuas, obtêm-se ainda $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$. $\blacksquare$

Convergências revisitadas

Exercício 6.69. Mostre que $\mathcal{C}(X,Y)$ é um espaço de convergência de Hausdorff com a convergência contínua se, e somente se, Y é de Hausdorff. $\blacksquare$

Exercício 6.70. Sejam X um espaço topológico, Y um espaço uniforme e $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X. Para uma *net* $(f_d)_d$ de funções da forma $X \to Y$, defina

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}}((f_d)_d) := \left\{f \in Y^X : \forall S \in \mathcal{S} \quad f_d|_S \to f|_S \text{ uniformemente}\right\}.$$

a) Mostre que $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ é a convergência (no sentido da Definição 1.4.1)[50] induzida pela (topologia induzida pela) uniformidade gerada pelas *entourages* da forma $\langle S, U\rangle$ sobre Y^X (no sentido da Observação 6.1.20). Dica: adapte a prova da Proposição 6.1.19.

b) Mostre que a convergência uniforme em $\mathcal{S}$ definida em $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X,Y)$ (Definição 6.1.18) é induzida como "convergência de subespaço" da convergência de $\left(Y^X, \mathcal{L}_{\mathcal{S}}\right)$. $\blacksquare$

Exercício 6.71. Mostre que se $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ é um filtro tal que $\mathcal{F} \to_{\mathcal{C}} f$, então f é contínua. Dica: adapte o Exercício 1.284 para mostrar que $\mathcal{F} \to_{\mathcal{C}} f$ se, e somente se, $(f_d)_d^{\uparrow} \to_{\mathcal{C}} f$, para qualquer *net* satisfazendo $\mathcal{F} = (f_d)_d^{\uparrow}$; daí basta usar o Teorema 6.2.30. $\blacksquare$

Exercício 6.72. Para espaços de convergência (X,λ) e (Y,μ), diremos que uma convergência η sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é

(i) **de cisão** se $\Delta(f)\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ for contínua para qualquer espaço de convergência Z e qualquer função contínua $f\colon Z \times X \to Y$, onde $\Delta(f)(z)(x) := f(z,x)$ para quaisquer $z \in Z$ e $x \in X$,

(ii) **admissível** se $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ for contínua.

Com isso em mente, adapte o Lema 6.1.6 para o presente contexto.

a) Mostre que se $\eta' \preceq \eta$ são convergências em $\mathcal{C}(X,Y)$ e η é de cisão, então η' é de cisão.

b) Mostre que se $\eta \preceq \eta'$ são convergências em $\mathcal{C}(X,Y)$ e η é admissível, então η' é admissível.

c) Mostre que se η é de cisão e η' é admissível, então $\eta \preceq \eta'$. Dica: adapte a prova do Lema 6.1.6, sem esquecer do Exercício 1.309.

d) Em particular, mostre que se η é uma convergência em $\mathcal{C}(X,Y)$ induzida por alguma topologia $\mathcal{T}$, então η é de cisão (respectivamente, admissível) se, e somente se, a topologia $\mathcal{T}$ é de cisão (respectivamente, admissível) no sentido topológico. $\blacksquare$

Exercício 6.73. Mostre que uma convergência ρ sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ é de cisão (resp. admissível) se, e somente se, $\rho \preceq \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C} \preceq \rho$). Dica: observe que a convergência contínua é exponencial (i.e., de cisão e admissível) e daí use o item (c) do exercício anterior. $\blacksquare$

Exercício 6.74. Para X espaço topológico e Y um espaço métrico, considere u, $\mathcal{C}$, k e p as convergências uniforme, contínua, uniforme em compactos e pontual, respectivamente. Mostre que $u \succeq \mathcal{C} \succeq k \succeq p$, i.e., para uma *net* $(f_d)_d$ em $\mathcal{C}(X,Y)$ e uma função contínua $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, valem as implicações $f_d \to f$ unif. $\Rightarrow f_d \to_{\mathcal{C}} f \Rightarrow f_d|_K \to f|_K$ unif. em todo compacto $K \subseteq X \Rightarrow f_d \to f$ pontualmente. Dica: para $\mathcal{C} \succeq k$, use o exercício anterior. $\blacksquare$

[50] Atente-se para o abuso na definição de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$: a rigor, deve-se fazer $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) = \mathcal{L}_{\mathcal{S}}((f_d)_d^{\uparrow})$, onde $(f_d)_d$ é qualquer *net* com $(f_d)_d^{\uparrow} = \mathcal{F}$ (vide a Observação 1.2.21).

Exercício 6.75 (Completude da convergência contínua)**.** Diremos que uma *net* $(f_d)_d$ em $\mathcal{C}_\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é **de Cauchy** se $f_d - f_{d'} \to_\mathcal{C} 0$. Mostre que toda *net* de Cauchy em $\mathcal{C}_\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ converge. Compare com o Exercício 6.25 e o Fato (ii) na demonstração do Teorema 6.2.48. ■

Exercício 6.76. Para espaços de convergência isótona e centrada X, Y e Z, mostre que $f \colon Z \to \mathcal{C}_\mathcal{C}(X, Y)$ é contínua se, e somente se,

$$\begin{aligned} \Delta(f) \colon Z \times X &\to Y \\ (z, x) &\mapsto f(z)(x) \end{aligned}$$

é contínua. Use isso para concluir que $\mathcal{C}_\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ é um *espaço vetorial de convergência* sempre que X é espaço topológico, onde a definição do que significa ser "espaço vetorial de convergência" é aquela que deveria ser. Generalize. ■

Exercício 6.77 (*For fun*)**.** Para um espaço topológico X, diremos que uma *net* $(f_d)_d$ em $\mathcal{C}(X)$ converge local e uniformemente para $f \in \mathcal{C}(X)$ se para todo $x \in X$ existir um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $f_d|_V \to f|_V$ uniformemente. Verifique que esta é a convergência uniforme em compactos se X for localmente compacto. ■

Rapsódia

Ainda gente ruim lá fora.
Ainda gente precisando de Klunc.
Klunc um dia descansa.
Hoje não.

Klunc, o Bárbaro (por Marcelo Cassaro em “A Guilda do Macaco”).

Epílogo

Todo jovem blasfemo e com inclinações literárias acredita ser capaz de escrever sua própria *Bíblia* – comigo não foi diferente, embora eu tenha escolhido tratar de Topologia Geral em vez de “regras morais arbitrárias” ~~não parece a mesma coisa~~?. Porém, como (quase) sempre acontece, a crença morreu: é muito difícil escrever uma Bíblia sem o suporte de um Império Romano. Nesse sentido, este epílogo apresenta brevemente vários assuntos que eu exploraria de forma mais calma se ainda me restasse paciência para escrever[1].

E.1 Análise... para algebristas

Dado que espaços vetoriais podem ser definidos sobre quaisquer corpos, é razoável pensar que alguns resultados de Análise Funcional possam ser realizados com corpos (topológicos) diferentes de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, o que costuma ser interessante para algebristas. Naturalmente, nem tudo tem paralelos idênticos, posto que a *ordem* de $\mathbb{R}$ costuma ser fundamental. O propósito desta seção é apresentar um pouco das coisas que podem ser feitas sem apelar ~~explicitamente~~ para a reta real e seus εpsilons e δeltas.

Fixado um anel topológico de Hausdorff, digamos A (Definição 5.1.15), sua topologia faz de $(A, +, 0)$ um grupo topológico abeliano de Hausdorff. Logo, em vista do Teorema 5.1.37, A é subgrupo denso de um grupo completo $\widehat{A}$. Daí, como a multiplicação $A \times A \to A$ é $\mathbb{Z}$-bilinear, a Observação 5.1.51 garante que tal operação se estende continuamente à uma operação $\widehat{A} \times \widehat{A} \to \widehat{A}$, que faz de $\widehat{A}$ um anel topológico completo que contém A como subanel. Em outras palavras:

Teorema E.1.1 (Compare com o Teorema 5.2.66)**.** *Se A é um anel topológico de Hausdorff, então existe um anel topológico completo e de Hausdorff $\widehat{A}$ que contém A como subanel denso.*

Exercício E.1. Convença-se de que as afirmações anteriores estão corretas. ■

No distante Exemplo 5.1.14, para um anel comutativo A e um ideal I de A fixados, definiu-se uma topologia compatível com a estrutura algébrica de A por meio do pré-filtro $\mathcal{P}_I := \{I^n : n \in \omega\}$, chamada de **topologia I-ádica**. Por simplicidade, vamos escrever A_I para denotar A munido desta topologia.

[1]Sob outra ótica, pode-se considerar como uma sugestão de tópicos para um Volume II, a ser escrito por mãos mais competentes do que as minhas. Ou por um Concílio de ~~Toronto~~ Trento.

Ao se considerar a uniformidade induzida pelo filtro de vizinhanças de $0 \in A$, segue que uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ em A é de Cauchy se, e somente se, para todo $d \in \omega$ existe $N \in \omega$ tal que $a_m - a_n \in I^d$ para quaisquer $m, n \geq N$: de fato, aqui as *entourages* são subconjuntos de $A \times A$ da forma $(I^d)_{\mathrm{r}} := \{(x, y) : x - y \in I^d\}$, o que torna a tradução da Definição 4.2.1 praticamente automática. Em particular, como $|\mathcal{P}_I| \leq \aleph_0$, segue que o completamento $\widehat{A_I}$ também tem base enumerável[2] e, consequentemente, sequências de Cauchy são suficientes para atestar a completude de $\widehat{A_I}$, como indicado na Proposição 4.2.7.

Note que se $\alpha \in \widehat{A_I}$, então existe uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ em A_I com $a_n \to \alpha$ em $\widehat{A_I}$. Em particular, a sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ é de Cauchy em A_I e, para cada $d \in \omega$ fixado, existe $N_d \in \omega$ com $a_m - a_n \in I^d$ para quaisquer $m, n \geq N_d$. Chamando por $a + I^d$ a classe de equivalência de a em A/I^d, segue que a sequência

$$(a_{N_n} + I^n)_{n\in\omega} \in \prod_{n\in\omega} A/I^n$$

é tal que $\pi_{n+1}(a_{N_{n+1}} + I^{n+1}) = a_{N_n} + I^n$ para cada n, onde $\pi_{n+1} \colon A/I^{n+1} \to A/I^n$ associa cada classe $a + I^{n+1} \in A/I^{n+1}$ à classe $a + I^n \in A/I^n$, que está bem definida pois $I^{n+1} \subseteq I^n$. Secretamente, a sequência assim obtida é um elemento típico do limite projetivo $\varprojlim_{n\in\omega} A/I^n$, com respeito às projeções $\pi_{n+1} \colon A/I^{n+1} \to A/I^n$.

Não é difícil perceber então que a correspondência

$$\begin{aligned} \varprojlim_{n\in\omega} A/I^n &\to \widehat{A_I} \\ (a_n + I^n)_{n\in\omega} &\mapsto \lim_{n\in\omega} a_n \end{aligned}$$

é um isomorfismo de anéis.

Exercício E.2. Prove a afirmação acima. Dica/Observação: não se esqueça de mostrar que a correspondência acima está bem definida; feito isso, observe que se $(a_n + I^n)_{n\in\omega}$ for uma sequência em $\varprojlim_{n\in\omega} A/I^n$, então a sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ é de Cauchy em A_I, e daí existe $\lim_{n\in\omega} a_n \in \widehat{A_I}$. ■

Na verdade, como A_I é um anel topológico, seria legítimo considerar os espaços quocientes A_I/I^n para daí tomar o limite projetivo desses espaços, como feito na Proposição 1.3.2. Ao fazer isso, não é difícil perceber que a correspondência anterior também é um isomorfismo na categoria dos anéis topológicos. O leitor interessado pode cuidar dos detalhes.

Observação E.1.2. Por se tratar de um espaço uniforme com base enumerável, é possível realizar as construções acima a partir de (pseudo) métricas. Neste caso, a pseudométrica de Weil (Teorema 4.1.52) para o espaço A_I se reduz à regra

$$\partial(x, y) := \frac{1}{2^n}, \tag{E.1}$$

onde $n \in \omega$ é tal que $x - y \in I^n$ com $x - y \notin I^{n+1}$, ou $\partial(x, y) := 0$ se ocorrer $x - y \in I^n$ para todo n. De fato, a princípio a pseudométrica faria $d(x, y) := 0$ se $x = y$, e

$$d(x, y) := \inf\{\partial(x, y_0) + \ldots + \partial(y_n, y) : n \in \omega \text{ e } y_0, \ldots, y_n \in A\}$$

[2] Veja a demonstração do Lema 4.2.36.

se $x \neq y$. Agora: se $x - y \in \bigcap_{n\in\omega} I^n$, então o ínfimo que caracteriza $d(x, y)$ é 0; se não, então $\partial(x, y) = \frac{1}{2^n}$ *será* o ínfimo acima, pois o contrário levaria a concluir que $x - y \in I^{n+1}$, contradizendo a definição de $\partial(x, y)$.

Em particular, note que tal pseudométrica satisfaz uma forma *forte* de desigualdade triangular: para quaisquer $x, y, z \in A$ deve valer $\partial(x, y) \leq \max\{\partial(x, z), \partial(z, y)\}$. Esse tipo de fenômeno, mais comum do que parece, é muito frequente na *Análise Funcional* feita sobre *corpos não-arquimedianos*. △

Exemplo E.1.3. Para $A := \mathbb{Z}$ e $I := \langle p\rangle$, para $p \in \mathbb{N}$ primo, os elementos do anel $\widehat{\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}}$ costumam ser chamados de **inteiros p-ádicos**. Neste caso, é mais comum substituir a *métrica* definida em (E.1) pela função $d\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que faz $d(x, y) := \frac{1}{p^n}$ se $n \in \mathbb{N}$ for o maior satisfazendo $p^n|x - y$, e $d(x, y) := 0$ para $x = y$. Primeiramente, note que isso faz sentido pois a função identidade $\mathrm{Id}\colon (\mathbb{Z}, \partial) \to (\mathbb{Z}, d)$ é um isomorfismo topológico. Em segundo lugar, a garantia de que d, neste caso, é uma métrica, nada tem a ver com d, mas sim com a identidade $\bigcap_{n\in\omega}\langle p^n\rangle = \{0\}$, que assegura a condição de Hausdorff para o espaço $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$, em virtude do

Exercício E.3. Sejam A um anel e $I \subseteq A$ um ideal. Mostre que A_I é de Hausdorff se, e somente se, $\bigcap_{n\in\omega} I^n = \{0\}$. Dica: use o Exercício 5.29. ■

Vale destacar que $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ é drasticamente diferente de $\mathbb{Z}$ enquanto subespaço de $\mathbb{R}$: com a topologia herdada de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ é um espaço discreto, ao passo que $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ é repleto de sequências convergentes, como $(p^n)_{n\in\omega}$, que converge para 0, o que pode se verificar tanto por meio da métrica quanto por meios topológicos. De fato, um aberto $V \subseteq \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ deve conter $\langle p^n\rangle$ para algum n, donde segue que $p_m \in V$ para todo $m \geq n$.

Em todo caso, a métrica no completamento $\widehat{\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}}$ pode ser definida como a extensão uniforme de d, como feito em (4.17) (Proposição 4.2.41): $\widehat{d}(\alpha, \beta) := \lim_{n\in\omega} d(a_n, b_n)$, onde $(a_n)_{n\in\omega}$ e $(b_n)_{n\in\omega}$ são sequências em $\mathbb{Z}$ que convergem para α e β, respectivamente, com respeito à métrica d.

Frequentemente, o isomorfismo entre $\widehat{\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}}$ e $\varprojlim_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}/\langle p^n\rangle$ costuma ser utilizado para provar que $\widehat{\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}}$ é compacto, pois o último é subespaço fechado de $\prod_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}/\langle p^n\rangle$, um produto de espaços compactos. Ocorre que há um modo bem mais simples de provar a mesma coisa:

Proposição E.1.4. *O anel $\mathbb{Z}$ é totalmente limitado na topologia $\langle p\rangle$-ádica.*

Demonstração. Fixada uma *entourage* $\langle p^n\rangle_{\mathrm{r}}$ de $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$, existe um subconjunto finito $T \subseteq \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ tal que

$$\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} = \bigcup_{t\in T} \langle p^n\rangle_{\mathrm{r}}[t] = \bigcup_{t\in T} t + \langle p^n\rangle.$$

Basta fazer $T := \{m \in \omega : m < p^n\}$. De fato, para cada $z \in \mathbb{Z}$ existem únicos $q, t \in \mathbb{Z}$, com $t \in T$, tais que $z = qp^n + t$, mostrando que $z \in t + \langle p^n\rangle$. Os detalhes ficam a cargo do leitor interessado. □

Em particular, segue que o espaço $\widehat{\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}}$ é compacto – por ser o completamento de um espaço totalmente limitado (Exercício 4.57). O leitor entusiasta pode verificar ainda que $\widehat{\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}}$ é zero-dimensional, tem peso enumerável e não tem pontos isolados ou, em outras palavras: $\widehat{\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}}$ é o *conjunto de Cantor*, a menos de homeomorfismo. ▲

Estas foram apenas considerações introdutórias sobre topologias *ádicas*, tipicamente discutidas em bons textos de Álgebra Comutativa e *afins*. O leitor interessado encontrará mais detalhes em [6] e [17].

E.2 Funções cardinais

As protagonistas desta seção generalizam diversas propriedades discutidas ao longo do texto, que lidam implícita ou explicitamente com invariantes cardinais. Uma tentativa de definição *uniforme* poderia ser algo como a próxima

Definição E.2.1. Uma **função cardinal** (global) é uma função de classes da forma $\mathcal{F}\colon \mathscr{C} \to \textsc{Card}$, onde $\mathscr{C}$ é alguma subclasse de espaços topológicos, de tal forma que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$ sempre que X e Y forem homeomorfos. ¶

O exemplo mais trivial de função cardinal é, sem sombra de dúvidas, a cardinalidade, que satisfaz $|X| = |Y|$ sempre que X e Y são homeomorfos. Dito isso, diversos exemplos menos triviais já foram sugeridos ao longo do texto, inclusive por meio das terminologias utilizadas.

Observação E.2.2. A prática comum de ignorar possíveis valores finitos para as funções cardinais será assumida daqui em diante. Isto é inofensivo posto que, invariavelmente, os espaços de interesse nesta altura do campeonato são infinitos e, exceto em casos muito *patológicos* ou triviais, vêm de fábrica com valores infinitos para as funções consideradas. △

Exemplo E.2.3 (Densidade e peso)**.** Para um espaço topológico X, $\mathrm{d}(X)$ e $\mathrm{w}(X)$ denotam a **densidade** e o **peso** de X, definidos como as menores cardinalidades de um subconjunto denso de X e de uma base para (a topologia de) X, respectivamente. Para evitar possíveis confusões, convém explicitar:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(X) &:= \aleph_0 + \min\left\{|D| : D \subseteq X \text{ e } \overline{D} = X\right\}, \\ \mathrm{w}(X) &:= \aleph_0 + \min\left\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é base para a topologia de } X\right\}. \end{aligned}$$

Acima, a adição de $\aleph_0$ serve apenas para garantir a infinitude dos cardinais $\mathrm{d}(X)$ e $\mathrm{w}(X)$, de modo que mesmo nas situações triviais em que X tenha um denso finito ou uma base finita[3], os valores atribuídos serão infinitos. Com isso dito, para fixar as ideias:

Exercício E.4. Seja X um espaço topológico.

a) Mostre que $\mathrm{d}(X) = \aleph_0$ se, e somente se, X é separável.

b) Mostre que $\mathrm{w}(X) = \aleph_0$ se, e somente se, X satisfaz *o segundo axioma de enumerabilidade* (item (ii) da Definição 3.1.1).

c) Mostre que $\mathrm{d}(X) \leq \mathrm{w}(X) \leq |X|$. ■

Foi por conta do cenário revelado nesta seção que o leitor já foi *treinado* a chamar espaços dotados de bases enumeráveis como espaços de "peso enumerável". O que levanta a pergunta: qual a vantagem em tratar desses velhos axiomas de enumerabilidade como funções cardinais? Dentre outras coisas: escopo.

Teorema E.2.4. *Se X é pseudometrizável, então* $\mathrm{d}(X) = \mathrm{w}(X)$.

Demonstração. Como $\mathrm{d}(X) \leq \mathrm{w}(X)$ vale em geral, basta mostrar a outra desigualdade. Para tanto, basta tomar um subconjunto infinito denso $D \subseteq X$ e obter uma base $\mathcal{B}$ para X com $|\mathcal{B}| \leq |D|$. Ocorre que, a menos de cardinalidade, isto já foi feito na Proposição 3.1.7: ao repetir a construção feita originalmente no caso enumerável, resulta que $|\mathcal{B}| \leq |D| \times |\mathbb{Q}| = |D|$, onde a última igualdade segue do Corolário K.1.130. □

[3] Note que se X é de Hausdorff, esse tipo de situação só ocorre se o próprio X for finito.

Situações semelhantes ocorreram também no Capítulo 2.

Teorema E.2.5. *Seja X um espaço topológico.*

(*i*) (*Teorema 2.1.7*) *Se X é T_0, então $|X| \leq 2^{\mathrm{w}(X)}$.*

(*ii*) (*Teorema 2.1.23*) *Se X é T_2, então $|X| \leq 2^{2^{\mathrm{d}(X)}}$.*

(*iii*) (*Teorema 2.1.30*) *Se X é T_3, então $\mathrm{w}(X) \leq 2^{\mathrm{d}(X)}$.*

Portanto, num primeiro momento, funções cardinais permitem extrair, em certa medida, a *verdadeira essência topológica* subjacente em fenômenos típicos de contextos elementares: note que a Proposição 3.1.7, como enunciada, se aplicaria apenas para uma classe restrita de espaços pseudométricos, enquanto o Teorema E.2.4 é válido sem restrições, i.e., para qualquer espaço pseudométrico. Nesse sentido, pode-se dizer que funções cardinais trazem novas perspectivas para resultados *velhos*. ▲

Exemplo E.2.6 (Grau de Lindelöf)**.** O **grau de Lindelöf** de um espaço topológico X, que será denotado por $\mathrm{L}(X)$, indica o menor número cardinal infinito κ tal que para toda cobertura por abertos $\mathcal{U}$ de X existe subcobertura $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ com $|\mathcal{V}| \leq \kappa$. Nesse sentido, dizer que X é um espaço de Lindelöf equivale a afirmar que $\mathrm{L}(X) = \aleph_0$.

Como o grau de Lindelöf é incapaz de distinguir espaços compactos de espaços de Lindelöf[4], pode ser útil estabelecer a variação óbvia capaz de separar as duas noções: o **grau de compacidade** de X, denotado por $\mathrm{K}(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que toda cobertura $\mathcal{U}$ de X por abertos admite subcobertura $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ com $|\mathcal{V}| < \kappa$. A sutil troca do "$\leq$" por "$<$" permite caracterizar os compactos como os espaços X para os quais vale $\mathrm{K}(X) = \aleph_0$, enquanto os espaços de Lindelöf não-compactos[5] são, precisamente, os que satisfazem $\mathrm{K}(X) = \aleph_1$. De modo geral:

Exercício E.5. Mostre que $\mathrm{K}(X) \leq \mathrm{L}(X)^+$ para todo X. Mostre que se $\mathrm{K}(X)$ for cardinal sucessor, então vale a igualdade. ■

Com tais terminologias, pode-se enunciar o Teorema 3.2.13 de maneira bem mais eficiente:

Teorema E.2.7 (*a.k.a.* Teorema 3.2.13)**.** *Para um espaço topológico X e um cardinal infinito κ, $\mathrm{K}(X) \leq \kappa$ se, e somente se, a projeção $\pi_Y : X \times Y \to Y$ é fechada para todo P_κ-espaço Y.*

Para finalizar este primeiro contato com o grau de Lindelöf, o leitor é convidado a lidar com o exercício seguinte: uma das possíveis repaginações do Teorema 3.2.26 por meio de funções cardinais. ▲

Exercício E.6. Mostre que $\mathrm{d}(X) = \mathrm{w}(X) = \mathrm{L}(X)$ para qualquer espaço X pseudometrizável. ■

Todas as funções cardinais definidas acima lidam com propriedades topológicas *globais*, i.e., que tratam do espaço por inteiro. As propriedades topológicas *locais* também podem ser consideradas sob a ótica das funções cardinais.

[4] Isto é, se X é compacto, então $\mathrm{L}(X) = \aleph_0$.

[5] Infelizmente, se X é compacto, por exemplo, então $\mathrm{K}(X) = \mathrm{L}(X)$. Nesse sentido, confira o Exercício E.38.

Definição E.2.8. Uma **função cardinal** (local) é uma função de classes da forma $\mathcal{F}\colon \mathscr{C} \to \textsc{Card}$, onde $\mathscr{C}$ é uma subclasse de $\textsc{Top}_* := \{(X,x) : X$ é espaço topológico e $x \in X\}$, de tal forma que $\mathcal{F}(X,x) = \mathcal{F}(Y,y)$ sempre que existir um homeomorfismo entre X e Y que faça $x \mapsto y$. ¶

Exemplo E.2.9 (Caráter)**.** Como adiantado na distante Observação 1.2.51, o **caráter** do espaço X **no ponto** $x \in X$, denotado por $\chi(X,x)$, é a menor cardinalidade de uma base para o filtro de vizinhanças de x, i.e.,

$$\chi(X,x) := \aleph_0 + \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é base de } \mathcal{V}_x\},$$

ao passo que o **caráter de** X, $\chi(X)$, é o *supremo* de seus caráteres locais ou, simbolicamente: $\chi(X) := \sup_{x\in X} \chi(X,x)$.

Desse modo, espaços de caráter enumerável (ou que satisfazem o "1º axioma de enumerabilidade") são, precisamente, os espaços... cujo caráter é enumerável. Assim, alguns refraseamentos óbvios de resultados já vistos são os seguintes:

✓ se X é um espaço pseudometrizável, então $\chi(X) = \aleph_0$;

✓ $\chi(X) \leq \mathrm{w}(X)$ para qualquer espaço X;

✓ $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma *net* $(x_d)_{d\in\mathbb{D}_x}$ em A com $x_d \to x$ e $|\mathbb{D}_x| \leq \chi(X,x)$ (Proposição 1.2.48);

✓ se X é de Hausdorff e $|B| \leq 2^{\chi(X)}$, então $\left|\overline{B}\right| \leq 2^{\chi(X)}$ (Exercício 3.24 + item anterior).

Embora o último item não seja exatamente um refraseamento e sim uma generalização, o argumento segue *ipsis litteris* os passos do 1º *Katzensprung* na prova do Teorema 3.1.20. Por falar nisso, sua versão generalizada para espaços de Lindelöf, expressa no Teorema 3.2.28, admite mais uma extensão, enunciada a seguir. ▲

Teorema E.2.10 (Arhangel'skii)**.** *Se X é de Hausdorff, então $|X| \leq 2^{\mathrm{L}(X)\cdot\chi(X)}$.*

Demonstração. Antes de proceder com a prova, note que com $\mathrm{L}(X) = \chi(X) = \aleph_0$, recupera-se o resultado enunciado no Teorema 3.2.28, o que sugere alternativas para generalizar seus argumentos: na demonstração do Teorema 3.1.20, *basta* trocar as ocorrências de "$< \aleph_0$", "ω_1" e "$\mathfrak{c}$" por "$\leq \kappa$", "κ^+" e "2^κ", respectivamente, onde $\kappa := \mathrm{L}(X)\cdot\chi(X)$. □

Exercício E.7. Complete a prova do teorema anterior. ■

Exemplo E.2.11 (*Tightness*)**.** A distante e subutilizada Definição 1.4.33 introduziu a noção de *tightness enumerável* num ponto. Após revisitá-la, não é difícil perceber que se trata de um caso particular de função cardinal local.

O **tightness** de um espaço X num ponto $x \in X$ é o cardinal

$$\mathrm{t}(X,x) := \aleph_0 + \min\left\{\kappa : \forall A \subseteq X\left(x \in \overline{A} \Rightarrow \exists B \in [A]^{\leq\kappa}\left(x \in \overline{B}\right)\right)\right\},$$

ou, mais verbalmente, $\mathrm{t}(X,x)$ é o menor cardinal infinito κ com a propriedade de que sempre se pode extrair um subconjunto $B \subseteq A$ com $x \in \overline{B}$ e $|B| \leq \kappa$ caso se verifique $x \in \overline{A}$: é como um grau de Lindelöf referente ao fecho[6]. Como no caso do caráter, o ***tightness*** de X é o supremo de seus *tightness pontuais*, i.e., $\mathrm{t}(X) := \sup_{x\in X} \mathrm{t}(X,x)$.

Dessa forma, o Exercício 1.292 se reescreve sucintamente como "se X é sequencial, então $\mathrm{t}(X) \leq \aleph_0$". Em particular, dado que X é sequencial sempre que $\chi(X) \leq \aleph_0$ (Exercício 1.319 + Proposição 1.4.29), obtém-se um primeiro indício da

[6]Tal analogia é mais literal do que parece, mas ainda é cedo para anunciar.

Proposição E.2.12. *Para todos X e $x \in X$ se verifica* $\mathrm{t}(X, x) \leq \chi(X, x)$.

Demonstração. Ora, se $x \in \overline{A}$ e $\mathcal{C}$ é uma base local em x, então $B := \{x_C : C \in \mathcal{C}\} \subseteq A$ é tal que $x \in \overline{C}$ e $|B| \leq |\mathcal{C}|$, onde $x_C \in A \cap C$ para cada $C \in \mathcal{C}$. □

Dado que todas essas condições de convergência são indistinguíveis em contextos pseudometrizáveis, é natural que elas só chamem a atenção onde não exista ~~esperança~~ garantia de sequências convergentes, o que pode fazer do *tightness enumerável* um alento mínimo para o analista que se vê obrigado a trabalhar com topologias não-metrizáveis (e.g. Proposição 5.2.101). Nesse sentido, a próxima incursão em $\mathcal{C}_p$-teoria promete ser reconfortante (e para aproveitá-la melhor, pode ser útil revisitar a Subseção 6.1.3 ou o Exemplo 5.1.27 para recordar como são os abertos básicos de $\mathcal{C}_p(X)$).

Teorema E.2.13 (Arhangel'skii-Pytkeev)**.** *Para um espaço de Tychonoff X, vale a igualdade* $\mathrm{t}(\mathcal{C}_p(X)) = \sup_{n\in\omega} \mathrm{L}(X^n)$.

Demonstração. Para uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, diremos que uma cobertura por abertos de X, digamos $\mathcal{U}$, é uma *$\mathcal{F}$-cobertura* se para todo $F \in \mathcal{F}$ existir $U \in \mathcal{U}$ com $F \subseteq U$. Com isso em mente, chame por $\mathrm{L}_{\mathcal{F}}(X)$ o menor cardinal $\kappa \geq \aleph_0$ tal que toda $\mathcal{F}$-cobertura tem $\mathcal{F}$-subcobertura com cardinalidade $\leq \kappa$.

Katzensprung. *Para $\mathcal{F} := [X]^{<\aleph_0}$, $\mathrm{L}_{\mathcal{F}}(X) = \sup_{n\in\omega} \mathrm{L}(X^n)$.*

Com $\mathcal{F}$ como acima, se $\mathrm{t}(\mathcal{C}_p(X)) \leq \kappa$ e $\mathcal{U}$ é uma $\mathcal{F}$-cobertura para X, então a família $A(\mathcal{U}) := \left\{f \in \mathcal{C}_p(X) : \exists U \in \mathcal{U}\left(f|_{X\setminus U} = 1\right)\right\}$ é tal que $\underline{0} \in \overline{A(\mathcal{U})}$: um aberto de $\mathcal{C}_p(X)$ em torno da função nula $\underline{0}$ é da forma $\langle F, \varepsilon\rangle[\underline{0}]$, onde F é um subconjunto finito de X e $\varepsilon > 0$; como existe $U \in \mathcal{U}$ com $F \subseteq U$, a condição de Tychonoff dá $f \in \mathcal{C}_p(X)$ com $f|_F = 0$ e $f|_{X\setminus U} = 1$ (Corolário 2.2.12), i.e., $f \in A(\mathcal{U}) \cap \langle F, \varepsilon\rangle[\underline{0}]$. Agora, se $B \subseteq A(\mathcal{U})$ satisfaz $\underline{0} \in \overline{B}$ e $|B| \leq \kappa$, então $\mathcal{U}' := \{U_f : f \in B\}$ é uma $\mathcal{F}$-subcobertura de $\mathcal{U}$, onde $U_f \in \mathcal{U}$ é tal que $f|_{X\setminus U_f}$: com efeito, dado $G \subseteq X$ finito, existe $f \in B \cap \langle G, 1\rangle[\underline{0}]$, o que obriga a ocorrência de $G \subseteq U_f$. Isto mostra que $\mathrm{L}_{\mathcal{F}}(X) \leq \mathrm{t}(\mathcal{C}_p(X))$.

Por sua vez, se $\mathrm{L}_{\mathcal{F}}(X) \leq \kappa$ e $\underline{0} \in \overline{A}$, então para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n(A) := \{f^{-1}[I_n] : f \in A\}$ é uma $\mathcal{F}$-cobertura para X, onde $I_n := \left(-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$: com efeito, para $F \in \mathcal{F}$ e $n \in \omega$, deve existir $f \in A \cap \left\langle F, \frac{1}{2^n}\right\rangle[\underline{0}]$, acarretando $F \subseteq f^{-1}[I_n]$. Daí, a hipótese garante $A_n \subseteq A$ com $|A_n| \leq \kappa$ para todo $n \in \omega$, de tal forma que $\mathcal{U}_n(A_n)$ ainda é uma $\mathcal{F}$-cobertura para X, donde não é difícil concluir que $B := \bigcup_{n\in\omega} A_n$ satisfaz $|B| \leq \kappa$, com $\underline{0} \in \overline{B}$ e $B \subseteq A$. □

Exercício E.8. Prove o *Katzensprung* (*a.k.a.* Teorema de Gerlits-Nagy). Dica: para $\mathrm{L}_{\mathcal{F}}(X) \leq \sup_{n\in\omega} \mathrm{L}(X^n)$, note que se $\mathcal{U}$ é $\mathcal{F}$-cobertura, então $\mathcal{U}_n := \{U^n : U \in \mathcal{U}\}$ é cobertura aberta para X^n; para a outra desigualdade, mostre que

i) $\mathrm{L}(Z) \leq \mathrm{L}_{\mathcal{F}_Z}(Z)$ para qualquer espaço Z e $\mathcal{F}_Z := [Z]^{<\aleph_0}$, e

ii) fixados $n \in \omega$ e $\mathcal{V}$ uma $\mathcal{F}_{X^n}$-cobertura por abertos de X^n, observe que

$$\widetilde{\mathcal{V}} := \left\{\bigcap_{j\leq n} V_j : V_j \subseteq X \text{ é aberto para cada } j \leq n \text{ e } \prod_{j\leq n} V_j \subseteq V \text{ para algum } V \in \mathcal{V}\right\}$$

é uma $\mathcal{F}_X$-cobertura, e a partir de uma $\mathcal{F}_X$-subcobertura de $\widetilde{\mathcal{V}}$, induza uma $\mathcal{F}_{X^n}$-subcobertura de $\mathcal{V}$. ■

Em particular, tem-se $\mathrm{t}(\mathcal{C}_p(X)) = \aleph_0$ sempre que X é σ-compacto, já que espaços σ-compactos são de Lindelöf e o produto finito de espaços σ-compactos ainda é σ-compacto. Assim, por exemplo, $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ é um espaço com *tightness* enumerável[7], o que pode ser relevante em vista do

Exercício E.9 (Arhangel'skii)**.** Mostre que $\mathrm{w}(\mathcal{C}_p(X)) = \chi(\mathcal{C}_p(X)) = |X|$ para qualquer espaço de Tychonoff X. Dica: revise a Observação 2.2.14 e o Exercício 6.42 com os conceitos discutidos nesta seção. ■

O que isso tudo tem a ver com a *esperança*? Na distante Subseção 5.2.3, o Corolário 5.2.93 (Banach-Alaoglu) mostrou que para um $\mathbb{R}$-espaço normado E, a bola fechada unitária de $E^\star$, $\overline{B_{E^\star}} := \{\varphi \in E^\star : \|\varphi\| \leq 1\}$, é um subespaço compacto de $E^\star$ se o último estiver munido com a topologia fraca estrela. Dado que $E^\star = \bigcup_{n\in\omega} n\overline{B_{E^\star}}$, segue que $E^\star_{w^\star} := (E^\star, \sigma(E^\star, E))$, i.e., $E^\star$ com a topologia fraca estrela, é um espaço σ-compacto e, por conseguinte, $\mathrm{t}(\mathcal{C}_p(E^\star_{w^\star})) = \aleph_0$. E daí?

Por um lado, a intrincada demonstração do Teorema 5.2.98 (Eberlein-Šmulian) mostrou como mergulhar $E_w := (E, \sigma(E, E^\star))$ em $\mathcal{C}_p(E^\star_{w^\star})$: basta considerar a correspondência $x \mapsto \mathrm{ev}(x) \colon E^\star \to \mathbb{R}$ que faz $\mathrm{ev}(x)(\varphi) := \varphi(x)$. Por outro lado, a Proposição 5.2.101 estabeleceu que E_w só tem caráter enumerável (ou é meramente sequencial) nos casos em que $\dim_{\mathbb{R}} E < \aleph_0$. Dado que $\mathcal{C}_p(E^\star_{w^\star})$ é homogêneo, tal argumentação *essencialmente* demonstra o

Teorema E.2.14 (Kaplansky)**.** *Para todo* $\mathbb{R}$*-espaço normado* E*,* $\mathrm{t}(E_w) = \aleph_0$*.*

Portanto, independentemente da dimensão de E, pode-se garantir pelo menos que $\mathrm{t}(E_w) = \aleph_0$ para qualquer espaço normado E, o que pode ser um alento para analistas em busca de *nets* enumeráveis e convergentes. ▲

De modo geral, o estudo sistemático de funções cardinais envolve o processo de analisar uma propriedade topológica a fim de extrair algum condicionante cardinal para, daí, investigar relações com outras propriedades – possivelmente a partir de resultados previamente conhecidos. Por exemplo:

Exercício E.10. Defina a **extensão** de um espaço topológico X, $\mathrm{ext}(X)$, como o supremo dos cardinais da forma $|F|$, conforme F percorre a família dos subespaços fechados e discretos de X. Em tais condições, mostre que se X é T_4, então $\mathrm{ext}(X) \leq 2^{\mathrm{d}(X)}$. Dica: trata-se do Lema de Jones (Teorema 2.1.53). Sugestão: apenas para agitar as coisas, tente provar por meio do Teorema de Tietze-Urysohn. ■

A partir disso, pode-se perguntar se o mesmo tipo de limitação ocorre para outras funções cardinais relacionadas com a densidade, uma pergunta razoável – mas que não saltaria aos olhos sob a roupagem clássica. O leitor interessado em mais discussões sobre funções cardinais pode consultar os exercícios correspondentes nas obras de Engelking [39] e Tkachuk[8] [108]; para uma discussão mais aprofundada, o capítulo de Hodel [53] no clássico *Handbook of Set-Theoretic Topology* é a recomendação padrão para quem pretende se aventurar em artigos recentes sobre o tema.

[7]Enquanto $\mathrm{t}(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}_S)) > \aleph_0$ já que $\mathrm{L}(\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S) > \aleph_0$.

[8]Cabe destacar que o livro [108] é composto por 500 problemas de Topologia Geral e, como se não bastasse, suas respectivas soluções completas.

E.3 Princípios seletivos e jogos topológicos

Para cada objeto A numa classe $\mathscr{A}$ de objetos existe um objeto B numa classe $\mathscr{B}$ de objetos que se relaciona com A de alguma forma bem determinada.

A sentença acima, tão vaga quanto a linguagem natural permite, é o arquétipo de diversas propriedades típicas de objetos matemáticos, principalmente no contexto da Topologia Geral. Por exemplo:

(i) chamando por $\mathscr{O}_X$ a família das coberturas por abertos de X, a condição $\mathrm{L}(X) \leq \kappa$ significa que para cada $\mathcal{U} \in \mathscr{O}_X$ existe $\mathcal{V} \in \mathscr{O}_X$ tal que $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq\kappa}$;

(ii) chamando por $\mathscr{O}_X^{\text{loc.fin}}$ a coleção das coberturas localmente finitas compostas por abertos de X, a condição de paracompacidade de X significa que para cada $\mathcal{U} \in \mathscr{O}_X$ existe $\mathcal{V} \in \mathscr{O}_X^{\text{loc.fin}}$ tal que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$;

(iii) chamando por $\Omega_{X,x} := \left\{A \subseteq X : x \in \overline{A}\right\}$, a condição $\mathrm{t}(X, x) \leq \kappa$ significa que para $A \in \Omega_{X,x}$ existe $B \in \Omega_{X,x}$ com $B \in [A]^{\leq\kappa}$; ...

ad nauseam. No entanto, é possível ser um pouco mais imaginativo.

Considere, por exemplo, um espaço σ-compacto, digamos $X := \bigcup_{n\in\omega} K_n$, com cada K_n compacto. O processo de mostrar que um espaço como X deve ser de Lindelöf desperdiça muito do que de fato significa ser σ-compacto: é claro que toda cobertura por abertos para X tem subcobertura enumerável, já que ela recobre cada um dos enumeráveis compactos; no entanto, se para cada $n \in \omega$ fosse atribuída uma cobertura por abertos $\mathcal{U}_n$ para X, ainda seria possível obter uma cobertura para X por meio da escolha de um subconjunto finito $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ para cada n.

Definição E.3.1. Diremos que X é um **espaço de Menger** se para toda sequência $(\mathcal{U}_n)_n$ de coberturas por abertos para X existir uma sequência $(\mathcal{V}_n)_n$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ é uma cobertura para X, onde cada $\mathcal{V}_n$ é um subconjunto finito de $\mathcal{U}_n$. ¶

Exercício E.11. Mostre que espaços σ-compactos são de Menger. Mostre que espaços de Menger são de Lindelöf. ■

Exemplo E.3.2 (Lindelöf $\neq$ Menger)**.** O espaço $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, testemunha honesta de que nem todo espaço de Lindelöf é σ-compacto, também demonstra que nem todo espaço de Lindelöf tem a propriedade de Menger. Para isso, convém considerar sua outra encarnação, ω^ω com a topologia produto (ou $C_p(\omega, \omega)$, como preferir)[9]: para $m, n \in \omega$, note que $C_{m,n} := \{f \in \omega^\omega : f(m) = n\}$ é um aberto de ω^ω, de tal que forma $\mathcal{U}_m := \{C_{m,n} : n \in \omega\}$ é uma cobertura por abertos de ω^ω; fixando-se arbitrariamente subconjuntos finitos $\mathcal{V}_n \subsetneq \mathcal{U}_n$ para cada n, não é difícil cozinhar uma função $f \colon \omega \to \omega$ satisfazendo $f \notin \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$. Logo, $(\mathcal{U}_n)_n$ atesta que ω^ω não é de Menger. ▲

A discussão da outra recíproca (Menger $\Rightarrow$ σ-compacto?) é um pouco mais delicada e, de certa forma, indireta. Em vez de tomar uma sequência $(\mathcal{U}_n)_n$ de coberturas abertas para X dadas simultaneamente, vamos considerar duas *entidades imortais*, digamos Player A e Player B[10], envolvidas num *jogo* regido pelas seguintes regras:

(i) uma partida *do jogo* é composta por ω turnos;

[9] Teorema 6.2.23.

[10] Ana e Bob, Um e Dois, Brancas e Pretas (em alusão estrita ao Xadrez), etc.

(ii) no n-ésimo turno, a entidade Player A joga primeiro, e seu movimento consiste em escolher uma cobertura por abertos $\mathcal{U}_n$ para X; a resposta de Player B, que encerra o turno, consiste na escolha de um subconjunto finito $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$;

(iii) a vitória é de Player B se $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ for uma cobertura por abertos para X, caso contrário, a vitória é de Player A.

Nesse contexto, para C $\in$ {A,B}, uma **estratégia** para Player C é uma *regra* que determina como responder a qualquer jogada possível realizada pela entidade oponente dentro de uma partida.

Exemplo E.3.3 (Jogando como Player A)**.** Uma *boa* estratégia para Player A no jogo deve *dificultar* a vida de Player B: assim, por exemplo, uma estratégia que indica a cobertura $\{X\}$ em alguma rodada de uma partida é bem estúpida, já que ela praticamente obriga que Player B vença. O ponto que deve começar a chamar a atenção do leitor é que a depender das propriedades de X, a vida de Player A pode ser bastante facilitada.

Se, por exemplo, $\mathrm{L}(X) > \aleph_0$, então existe uma cobertura por abertos $\mathcal{U}$ para X que não admite subcobertura enumerável. Com isso, é muito fácil determinar uma estratégia *imbatível* para Player A: para todo $n \in \omega$, no n-ésimo turno, *escolha* $\mathcal{U}_n := \mathcal{U}$. Com tal estratégia, independentemente de como Player B realizar suas escolhas ao longo dos turnos, o resultado final será o *mesmo*: a reunião das escolhas de Player B ao longo dos ω turnos constitui um subconjunto enumerável de $\mathcal{U}$ que não pode cobrir X. ▲

Exemplo E.3.4 (Jogando como Player B)**.** Nesse tipo de jogo, as ações de Player B são limitadas pelas escolhas de Player A, já que suas respostas devem ser subconjuntos finitos dos lances feitos por Player A. Assim, num primeiro momento, parece que a vida será invariavelmente injusta com Player B, já que Player A poderia escolher coberturas compostas por abertos cada vez menores, de modo a impedir que X fosse coberto pela reunião das escolhas de Player B. No entanto, assim como certas propriedades topológicas favorecem Player A, há outras que favorem Player B.

Por exemplo, se X for σ-compacto, digamos $X := \bigcup_{n\in\omega} K_n$ com cada K_n compacto, então é possível descrever uma estratégia *imbatível* para Player B: para todo $n \in \omega$, no n-ésimo turno, escolha um subconjunto finito $\mathcal{V}_n$ do lance $\mathcal{U}_n$ feito por Player A, de tal forma que $K_n \subseteq \bigcup \mathcal{V}_n$. Note que com tal estratégia, independentemente de como Player A realizar suas escolhas ao longo dos turnos, o resultado final será o *mesmo*: como a escolha do turno n recobre K_n, ao final dos ω turnos ocorre $\bigcup_{n\in\omega} K_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{V}_n$, mostrando que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ é uma cobertura por abertos para X. ▲

Em cada um dos exemplos acima, vimos estratégias que não podem ser derrotadas por seus oponentes: o termo técnico usual é **estratégia vencedora**.

Observação E.3.5 (Como acabar com a graça?)**.** A definição rigorosa do *que* é uma estratégia depende de outras informações acerca do que se espera (ou se permite) da estratégia. Por exemplo, dado que a estratégia de Player A no Exemplo E.3.3 independe dos lances de Player B, pode-se pensar na estratégia como uma função $\sigma\colon \omega \to \mathscr{O}_X$, onde $\sigma(n)$ determina o lance de Player A na n-ésima rodada: no caso específico do exemplo mencionado, a estratégia σ seria a função constante $n \mapsto \mathcal{U}$.

No entanto, numa situação menos favorável – ou mais justa? – seria lícito permitir que uma estratégia para Player A dependesse dos lances anteriores de Player B. Neste caso, pode-se definir uma estratégia para Player A como uma função $\sigma\colon \left([\mathcal{T}]^{<\aleph_0}\right)^{<\omega} \to \mathscr{O}_X$, onde $\mathcal{T}$ indica a topologia de X: explicitamente, σ tem como domínio todas as sequências finitas de coleções finitas de abertos de X.

Note que tal estratégia cumpre o dever de sempre dizer como Player A deve iniciar a partida: seu lance inicial é, invariavelmente, $\sigma(\emptyset)$. Diante disso, Player B pode escolher qualquer subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\emptyset)$, o que determina a sequência finita $(\mathcal{F})$. Como $(\mathcal{F})$ está no domínio de σ, a resposta de Player A na 1-ésima rodada será $\sigma((\mathcal{F}))$; se Player B tivesse escolhido $\mathcal{F}'$ em vez de $\mathcal{F}$, a resposta de Player A seria $\sigma((\mathcal{F}'))$; em geral, $\left\{\sigma((\mathcal{F})) : \mathcal{F} \in [\sigma(\emptyset)]^{<\aleph_0}\right\}$ coleta todos os lances de Player A na 1-ésima rodada. Novamente, Player B escolhe um subconjunto finito $\mathcal{G} \subseteq \sigma((\mathcal{F}))$, o que determina a sequência finita $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ pertencente ao domínio de σ, que será respondida por $\sigma((\mathcal{F}, \mathcal{G}))$, e assim por diante[11].

Portanto, uma estratégia σ para Player A é uma *árvore*, cujos nós correspondem aos lances determinados pela estratégia e cujas ramificações em cada nó representam cada resposta possível de Player B. Dessa forma, uma partida no jogo segundo uma estratégia fixada para Player A nada mais é do que um caminho completo ao longo de um ramo (cadeia) da árvore, caminho este a ser determinado por Player B.

Analogamente, uma estratégia para Player B neste jogo pode ser pensada como uma função $\rho\colon \mathscr{O}_X^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to [\mathcal{T}]^{<\aleph_0}$, com a restrição adicional de que $\rho((\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n)) \subseteq \mathcal{U}_n$ para qualquer sequência $(\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n)$ de coberturas por abertos para X. Note que a ausência de restrições no domínio de ρ reflete a liberdade de *ação* de Player A.

Assim, uma estratégia ρ para Player B é como uma árvore com várias raízes (ou uma *floresta*?): cada cobertura $\mathcal{U} \in \mathscr{O}_X$ dá início a uma partida, cuja resposta de Player B é representada pelo nó $\rho((\mathcal{U}))$; uma vez que Player A pode escolher qualquer cobertura no próxima turno, cada cobertura por abertos para X determina uma ramificação em torno do nó inicial, que será respondida por ρ pelo próximo nó, e assim sucessivamente. Do ponto de vista de Player A, enfrentar tal estratégia ρ consiste em escolher uma dessas árvores (o 0-ésimo lance) e escalá-la ao longo de um ramo. △

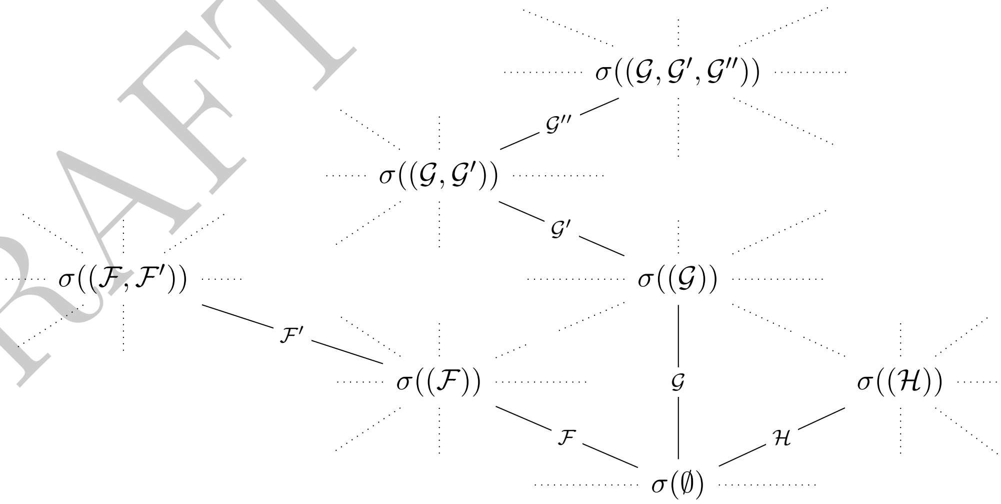


Figura E.1: Esboço de uma árvore/estratégia σ para Player A, vista de cima.

[11] Como as sequências finitas que não correspondem a lances válidos de Player B são irrelevantes para o jogo, sua resposta por σ pode ser padronizada como $\{X\}$, por exemplo.

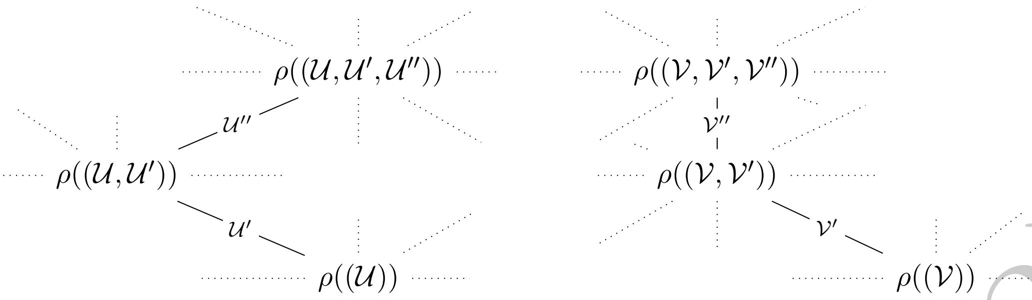


Figura E.2: Esboço de uma floresta/estratégia ρ para Player B, vista de cima.

Por se inspirar na propriedade de Menger, o jogo definido acima costuma ser chamado de **jogo de Menger**. Com tais terminologias, a discussão do Exemplo E.3.4 se resume no seguinte

Exercício E.12. Mostre que se X é σ-compacto, então Player B tem estratégia vencedora no jogo de Menger. ■

Agora, a antiga implicação "X é σ-compacto $\Rightarrow X$ é de Menger" se refina como as implicações

$$X \text{ é } \sigma\text{-compacto } \Rightarrow \mathrm{B}\!\uparrow \textsc{Menger}(X) \Rightarrow X \text{ é de Menger},$$

em que "C$\uparrow$ Menger(X)" abrevia a afirmação "Player C tem estratégia vencedora no jogo de Menger com respeito ao espaço X": de fato, se Player B tem uma estratégia vencedora ρ no jogo de Menger, então para concluir que X é de Menger basta tomar uma sequência $(\mathcal{U}_n)_n$ de coberturas abertas para X e utilizá-las *contra* a estratégia ρ a fim de obter os subconjuntos finitos $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ satisfazendo $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n \in \mathscr{O}_X$; explicitamente, $\mathcal{V}_n := \rho((\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n))$ para cada $n \in \omega$ dá conta do trabalho.

De volta à pergunta: todo espaço de Menger é σ-compacto? Bom... quase e, essencialmente, para espaços metrizáveis.

Teorema E.3.6 (Telgársky)**.** *Seja X um espaço regular cujos compactos estejam contidos em subconjuntos compactos G_δ de X. Se B$\uparrow$ Menger(X), então X é σ-compacto.*

Demonstração (Scheepers). Seja ρ a estratégia vencedora de Player B existente por hipótese. Para uma sequência finita $z := (\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n)$ de coberturas abertas e $\mathcal{U} \in \mathscr{O}_X$, vamos xingar $z^\frown\mathcal{U} := (\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{U})$. Note que para cada sequência finita z como acima, faz sentido tratar de $\rho(z^\frown\mathcal{U})$, que por sua vez é um subconjunto finito de abertos de $\mathcal{U}$. Em particular, $\bigcup \rho(z^\frown\mathcal{U})$ é um subconjunto legítimo de X. Para finalizar o preâmbulo notacional, para cada família $\mathscr{A}$ de coberturas por abertos e cada sequência finita z de coberturas abertas, considere

$$S_{\mathscr{A},z} := \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathscr{A}} \overline{\bigcup \rho(z^\frown\mathcal{U})}.$$

Agora teremos uma sequência de *acrobacias felinas*:

(i) *$S_{\mathscr{O}_X,z}$ é compacto para qualquer z;*

(ii) *para cada z existe uma família enumerável $\mathscr{O}_z$ de coberturas abertas para X de tal forma que $S_{\mathscr{O}_z,z}$ é (subconjunto de) um compacto de X;*

(iii) *X é reunião de enumeráveis subconjuntos da forma $S_{\mathscr{O}_z,z}$.*

Note que se o item (iii) for demonstrado, então a σ-compacidade de X seguirá de (ii), já que cada um dos enumeráveis subconjuntos do item (iii) é subconjunto de um compacto de X.

Para provar (iii), vamos supor que (ii) já esteja estabelecido. Tomando $z_\emptyset := \emptyset$, o item (ii) garante uma coleção enumerável $\mathscr{O}_\emptyset := \{\mathcal{U}_j : j \in \omega\}$ de coberturas abertas, o que permite reaplicar o item (ii) para cada sequência unitária $z_m := (\mathcal{U}_m)$ a fim de obter a coleção enumerável $\mathscr{O}_{z_m} := \{\mathcal{U}_{m,j} : j \in \omega\}$, o que permite reaplicar o item (ii) para cada sequência $z_{m,n} := (\mathcal{U}_m, \mathcal{U}_{m,n})$ a fim de obter a coleção enumerável $\mathscr{O}_{z_{m,n}} := \{\mathcal{U}_{m,n,j} : j \in \omega\}$, o que permite...

De modo geral, para cada sequência finita $s \in \omega^{<\omega}$, obtém-se uma coleção enumerável $\mathscr{O}_s := \mathscr{O}_{z_s} := \{\mathcal{U}_{s^\frown j} : j \in \omega\}$. Ocorre que $\omega^{<\omega}$ é enumerável e, por ρ ser estratégia vencedora, deve-se ter

$$X = \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} S_{\mathscr{O}_s, z_s}.$$

Com efeito, um ponto $x \in X$ fora da reunião acima *dispararia* uma partida em que Player B perde ao jogar com a estratégia *vencedora* ρ: dado que $x \notin S_{\mathscr{O}_\emptyset, z_\emptyset}$, existe $\mathcal{U}_{n_0} \in \mathscr{O}_\emptyset$ tal que $x \notin \overline{\bigcup \rho(\mathcal{U}_{n_0})}$, donde em particular segue que os finitos abertos escolhidos em $\mathcal{U}_{n_0}$ não cobrem o ponto x; dado que também deve-se ter $x \notin S_{\mathscr{O}_{n_0}, z_{n_0}}$, existe algum $\mathcal{U}_{n_0,n_1} \in \mathscr{O}_{n_0}$ tal que

$$x \notin \overline{\bigcup \rho(z_{n_0}{}^\frown \mathcal{U}_{n_0,n_1})} = \overline{\bigcup \rho((\mathcal{U}_{n_0}, \mathcal{U}_{n_0,n_1}))},$$

ou seja, x também não é coberto pelos finitos abertos que a estratégia ρ escolheria em resposta à cobertura $\mathcal{U}_{n_0,n_1}$, isto numa partida que teve $\mathcal{U}_{n_0}$ como lance anterior, que tampouco cobriu x; em geral, para $s := (n_0, \ldots, n_k)$, a ocorrência de

$$x \notin \bigcup \rho((\mathcal{U}_{n_0}, \ldots, \mathcal{U}_{n_0,n_1,\ldots,n_k}))$$

permite utilizar $z_s := (\mathcal{U}_{n_0}, \ldots, \mathcal{U}_{n_0,n_1,\ldots,n_k})$ juntamente com a garantia de que $x \notin S_{\mathscr{O}_s, z_s}$ a fim de obter outra cobertura cuja escolha determinada por ρ também não cobrirá x no próximo turno. Em outras palavras, ρ foi vencida. Portanto, se vale (ii), então vale (iii).

Para provar (ii), assumiremos (i). Se $S_{\mathscr{O}_X, z}$ é compacto para qualquer sequência finita z de coberturas abertas, então e a hipótese no enunciado assegura a existência de um subconjunto K, simultaneamente compacto e G_δ, com $S_{\mathscr{O}_X, z} \subseteq K$, digamos $K := \bigcap_{n \in \omega} G_n$. Agora, pelas velhas leis de de Morgan, não é difícil perceber que a família $\mathcal{H} := \left\{X \setminus \overline{\bigcup \rho(z^\frown \mathcal{U})} : \mathcal{U} \in \mathscr{O}_X\right\}$ é uma cobertura por abertos para $X \setminus S_{\mathscr{O}_X, z}$, donde segue que $\mathcal{H}_n := \mathcal{H} \cup \{G_n\}$ é uma cobertura por abertos para X. Enfim, como as hipóteses asseguram que X é de Lindelöf, deve existir $\mathscr{O}_{z,n} \subseteq \mathscr{O}_X$ tal que $\left\{X \setminus \overline{\bigcup \rho(z^\frown \mathcal{U})} : \mathcal{U} \in \mathscr{O}_{z,n}\right\} \cup \{G_n\}$ é uma cobertura para X; daí, basta fazer $\mathscr{O}_z := \bigcup_{n \in \omega} \mathscr{O}_{z,n}$, já que cada $\mathscr{O}_{z,n}$ é enumerável e

$$S_{\mathscr{O}_z, z} = \bigcap_{n \in \omega} \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathscr{O}_{z,n}} \overline{\bigcup \rho(z^\frown \mathcal{U})} \subseteq \bigcap_{n \in \omega} G_n := K,$$

onde a última inclusão segue pois se $x \in \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathscr{O}_{z,n}} \overline{\bigcup \rho(z^\frown \mathcal{U})}$, então o modo como $\mathscr{O}_{z,n}$ foi tomado obriga a ocorrência de $x \in G_n$.

Finalmente, tratemos de (i). Fixada uma cobertura por abertos (de X) para $S_{\mathscr{O}_X,z}$, digamos $\mathcal{V}$, a ideia é induzir uma cobertura por abertos $\mathcal{U}$ para X a fim de usar a estratégia ρ marotamente: primeiro, para $x \in S_{\mathscr{O}_X,z}$, existe $V_x \in \mathcal{V}$ com $x \in V_x$ e, pela regularidade de X, existe $U_x \subseteq X$ aberto com $x \in U_x$ e $\overline{U_x} \subseteq V_x$; já para $x \in X \setminus S_{\mathscr{O}_X,z}$, existe $U_x \subseteq X$ aberto com $x \in U_x$ e $\overline{U_x} \subseteq X \setminus S_{\mathscr{O}_X,z}$. Dado que $\mathcal{U} := \{U_x : x \in X\}$ é uma cobertura por abertos para X, existe um subconjunto finito $F \subseteq X$ tal que $\rho(z^\frown\mathcal{U}) = \{U_x : x \in F\}$. Finalmente, note que $\{U_x : x \in F \cap S_{\mathscr{O}_X,z}\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ que, por conseguinte, induz uma subcobertura finita para $\mathcal{V}$. □

Exercício E.13. Complete os detalhes da demonstração acima. ■

Corolário E.3.7. *Se X é metrizável e* B↑ MENGER(X)*, então X é σ-compacto.*

Demonstração. No caso, todo compacto de X é fechado e, em espaços metrizáveis, todo fechado é um G_δ (Corolário 4.1.71). □

Agora, a resposta para a pergunta "todo Menger é σ-compacto?" ganha bem mais impacto: existem exemplos de subespaços da reta real (em particular, metrizáveis) que não são σ-compactos mas, ainda assim, satisfazem a condição de Menger, mostrando que tampouco vale a recíproca da implicação "B↑ MENGER$(X) \Rightarrow X$ é de Menger". No entanto, isto não será discutido aqui.

Essencialmente, esta seção apresentou *um* princípio seletivo e *um jogo topológico* induzido. Ocorre que a literatura da área está repleta de princípios seletivos e jogos induzidos, que lidam com a seleção de funções, sequências convergentes, densos, abertos dentro de abertos, pontos dentro de abertos e toda a sorte de variação imaginável. Dado que se trata de um tema relativamente novo da Topologia Geral, ainda não existe um livro-texto onde se possa encontrar tudo o que há para ser encontrado sobre jogos topológicos. Com isso dito, a dissertação de mestrado de Matheus D. Costa [31] pode ser um bom ponto de partida para o leitor interessado em estudar artigos da área.

E.4 Produtos de Lindelöf

Entre outras coisas, a longínqua Subseção 3.2.1 mostrou que espaços σ-compactos têm a peculiar propriedade de serem *produtivos* com relação à condição de Lindelöf (Corolário 3.2.19), no sentido de que $X \times Y$ é de Lindelöf sempre que X é σ-compacto e Y é de Lindelöf. Dado que nem todo espaço apresenta tal comportamento (Exemplo 3.2.23), pode ser interessante investigar a classe dos espaços *produtivamente Lindelöf*.

Definição E.4.1. Diremos que X é **produtivamente Lindelöf** se $X \times Y$ é de Lindelöf sempre que Y é de Lindelöf. ¶

Evidentemente, o propósito em se definir tal classe está em caracterizá-la intrinsecamente[12]: apenas por meio das propriedades de X, determinar se todo produto $X \times Y$ será de Lindelöf caso Y seja de Lindelöf. A esperança é que com uma caracterização desse tipo, perguntas como a próxima possam ser respondidas trivialmente.

Pergunta. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *é produtivamente Lindelöf?*

[12]Moralmente, é como a caracterização de exponencialidade discutida no capítulo anterior.

Exemplo E.4.2 (A reta de Michael)**.** Considere fixados um espaço topológico X e um subespaço M. Seja então $\mathcal{T} := \{U \cup K : U \subseteq X$ é aberto e $K \subseteq X \setminus M\}$, e note que $\mathcal{T}$ é uma topologia em X mais fina do que sua topologia original. Escrevendo X_M para indicar o conjunto X munido da topologia $\mathcal{T}$, não é difícil se convencer de que $X \setminus M$ é subespaço aberto e discreto de X_M, enquanto M é fechado e homeomorfo a si próprio com a topologia de subespaço herdada de X.

Exercício E.14. Mostre que se X é T_i para $i \in \{0, 1, 2\}$, então X_M é T_i. Além disso, se X é regular (ou de Tychonoff), então X_M é regular (ou de Tychonoff, respectivamente). Dica: para $i \leq 2$, use a inclusão das topologias; para os outros dois casos, lembre-se de que pontos são fechados. ■

Em particular, com $X := \mathbb{R}$ e $M := \mathbb{Q}$, o espaço $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ costuma ser chamado de **reta de Michael**, por ter sido introduzida por E. Michael nos anos 60 como um contraexemplo prático para certas conjecturas relacionadas a propriedades de recobrimento em produtos[13]. No caso:

Proposição E.4.3. *O espaço $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não é normal. Mais geralmente, $X \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não é normal para qualquer subespaço $X \subseteq \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ com $\mathbb{Q} \subseteq X$, desde que $\mathbb{Q}$ não seja um G_δ de X. Em particular, se $X \subseteq \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ é um subespaço de Lindelöf não-enumerável com $\mathbb{Q} \subseteq X$, então $X \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não é normal.*

Demonstração. Por simplicidade, vamos chamar $P := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Agora, para mostrar que $X \times P$ não é normal, basta exibir dois subconjuntos fechados de $X \times P$, digamos F e G, de tal forma que $F \cap G = \emptyset$ e qualquer aberto $A \subseteq X \times P$ satisfazendo $F \subseteq A$ seja tal que $G \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Para tanto, sejam $F := \{(p, p) : p \in X \cap P\}$ e $G := \mathbb{Q} \times P$.

Dado que $\mathbb{Q}$ é fechado em $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, tem-se $\mathbb{Q} = X \cap \mathbb{Q}$ fechado em X, acarretando que G é fechado. Para o caso de F, basta notar que tanto X quanto P são espaços de Hausdorff. Em particular, a hipótese de $\mathbb{Q}$ não ser um G_δ de X obriga que X seja não-enumerável (o contrário daria $\mathbb{Q} = \bigcap_{x \in X \setminus \mathbb{Q}} X \setminus \{x\}$, um legítimo G_δ) e, por conseguinte, $F \neq \emptyset$. Além disso, por P ser subespaço de $\mathbb{R}$ e este ser métrico separável, segue que existe um subconjunto $D \subseteq P$, enumerável e denso, digamos $D := \{d_n : n \in \omega\}$.

Seja então $A \subseteq X \times P$ aberto com $F \subseteq A$. Para cada $p \in X \cap P$, a definição da topologia de $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ e, por conseguinte, de X, garante que $\{p\} \subseteq X$ é um aberto em torno de p, ao passo que deve existir um aberto $U_p \subseteq P$ com $p \in U_p$ e $\{p\} \times U_p \subseteq A$. Além disso, a densidade de D assegura $n_p \in \omega$ com $d_{n_p} \in U_p$.

Chamando $C_n := \{y \in X \cap P : n_y = n\}$ para cada $n \in \omega$, verifica-se $X \cap P = \bigcup_{n \in \omega} C_n$. Porém, ao tomar os fechos de C_n em $\mathbb{R}$, a hipótese acerca de $\mathbb{Q}$ com respeito a X acarreta $X \cap P \neq \bigcup_{n \in \omega} \overline{C_n}$: o contrário levaria a concluir que $\mathbb{Q}$ é um G_δ de X com a topologia herdada de $\mathbb{R}$ e, portanto, um G_δ de X com a topologia herdada de $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Logo, existem $n' \in \omega$ e $q \in \mathbb{Q}$ com $q \in \overline{C_{n'}}$.

Com isso, tem-se $(q, d_{n'}) \in G$, justamente o ponto que será usado para mostrar que $G \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Note que se $U \times W$ é um aberto de $X \times P$ em torno de $(q, d_{n'})$, então $U = (V \cup K) \cap X$ para certos $V \subseteq \mathbb{R}$ aberto e $K \subseteq P$, de modo que em virtude de se ter $q \in \overline{C_{n'}}$, garante-se a existência de $y \in C_{n'} \cap V$ e, por conseguinte, $y \in U$. Posto que $y \in C_{n'}$, deve-se ter $n_y = n'$, acarretando $d_{n'} = d_{n_y} \in U_y$, com $\{y\} \times U_y \subseteq A$. Portanto, $(y, d_{n'}) \in (U \times W) \cap A$.

[13] Em particular, boa parte da exposição neste exemplo segue de perto o trabalho de Michael [77], além dos Exemplos 5.1.22 e 5.1.32 no cânone de Engelking [39].

Para a parte final do enunciado, note que se $X \subseteq \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ é não-enumerável, de Lindelöf e $\mathbb{Q} \subseteq X$, então $\mathbb{Q}$ não pode ser um G_δ de X: com efeito, se $A \subseteq X$ é um aberto com $\mathbb{Q} \subseteq A$, então $\{A\} \cup \{\{p\} : p \in X \setminus A\}$ é uma cobertura por abertos para X e, portanto, deve ter subcobertura enumerável, mostrando que $|X \setminus A| \leq \aleph_0$; logo, se ocorresse $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ com cada $A_n \subseteq X$ aberto, resultaria que $X \setminus \mathbb{Q}$ é enumerável. □

Em particular, como espaços regulares de Lindelöf são normais, infere-se que se for possível obter um subespaço não-enumerável de $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ satisfazendo a condição de Lindelöf, então a resposta para a pergunta anterior é negativa. Existe uma subespaço em tais condições? A situação é mais delicada do que aparenta.

Recordemo-nos de que a *Hipótese do Contínuo* (CH) consiste na *identidade* "$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$", o que posto de outra forma significa afirmar que se $X \subseteq \mathbb{R}$ é infinito, então $|X| = |\mathbb{N}|$ ou $|X| = |\mathbb{R}|$. *Prova-se* que CH é independente de ZFC, no sentido de que existem modelos M e M' para ZFC com $M \models \mathrm{ZFC} + \mathrm{CH}$ e $M' \models \mathrm{ZFC} + \neg\,\mathrm{CH}$. Com isso dito, a pergunta acerca de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tem uma resposta bem determinada... nos universos em que vale CH.

Teorema E.4.4 (Michael)**.** *Assumindo* CH*, se X é T_1, com* $\mathrm{w}(X) \leq 2^{\aleph_0}$ *e $A \subseteq X$ é um subconjunto enumerável que não é G_δ, então existe $Y \subseteq X$ não-enumerável, com $A \subseteq Y$ e* $\mathrm{L}(Y) \leq \aleph_0$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base para X com $|\mathcal{B}| \leq 2^{\aleph_0}$. Em virtude do Corolário K.1.133, pode-se supor que $\mathcal{B}$ é fechada por reuniões enumeráveis, i.e., se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ e $|\mathcal{C}| \leq \aleph_0$, então $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{B}$: tem-se $\left|[\mathcal{B}]^{\leq\aleph_0}\right| \leq 2^{\aleph_0}$ e, dessa forma, ao fazer $\mathcal{B}' := \left\{\bigcup \mathcal{C} : \mathcal{C} \in [\mathcal{B}]^{\leq\aleph_0}\right\}$, obtém-se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, com $\mathcal{B}'$ uma base fechada por reuniões enumeráveis e satisfazendo $|\mathcal{B}'| \leq 2^{\aleph_0}$.

Com $\mathcal{B}^* := \{B \in \mathcal{B} : A \subseteq U\}$, tem-se a princípio $|\mathcal{B}^*| \leq 2^{\aleph_0}$, o que na presença de CH se torna $|\mathcal{B}^*| \leq \aleph_1$, permitindo escrever $\mathcal{B}^* = \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Agora, o truque consiste em obter uma ω_1-*sequência* $(x_\alpha : \alpha < \omega_1)$ em $X \setminus A$ tal que

$$x_\alpha \in \left(\bigcap_{\beta<\alpha} B_\beta \setminus \{x_\gamma : \gamma < \alpha\}\right) \setminus A$$

para todo $\alpha < \omega_1$. Para se convencer de que isso é possível, observe que se $C \subseteq X \setminus A$ é enumerável, então $A \cup C$ não pode ser um G_δ, já que o contrário permitiria escrever $A \cup C = \bigcap_{n\in\omega} G_n$ para certos abertos G_n's de X, de modo que a condição T_1 acarretaria em

$$A = \left(\bigcap_{n\in\omega} G_n\right) \cap \left(\bigcap_{c\in C} X \setminus \{c\}\right),$$

contrariando a hipótese sobre A. Daí, é um simples trabalho recursivo obter uma ω_1-sequência com a propriedade indicada. Em posse dela, mostraremos que

$$Y := A \cup \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

satisfaz a condição imposta.

Primeiro, é claro que Y é não-enumerável. Mais ainda, para cada $\alpha < \omega_1$, $|Y \setminus B_\alpha| \leq \aleph_0$, já que $Y \setminus B_\alpha \subseteq A \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Por fim, se $\mathcal{V}$ é uma cobertura para Y por abertos de X, pode-se supor que $\mathcal{V}$ é uma cobertura por abertos básicos, de modo que se $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ é uma subcoleção enumerável de $\mathcal{V}$, então $\bigcup \mathcal{W} \in \mathcal{B}^*$, i.e., $\bigcup \mathcal{W} = B_\alpha$ para algum $\alpha < \omega_1$, donde segue que $Y \setminus \bigcup \mathcal{W}$ é enumerável. □

Exercício E.15. Complete a demonstração anterior. Dica: se $\mathcal{W}$ cobre Y a menos de enumeráveis pontos, o que fazer com os pontos que faltam? ■

Portanto, se vale CH, então $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é produtivamente Lindelöf, o que sugere a pergunta: e em ZFC? Note que na presença de CH, afirmar que X é um espaço de Lindelöf consiste em dizer que toda cobertura por abertos para X admite subcobertura com cardinalidade $< 2^{\aleph_0}$, o que deixa de significar (necessariamente) enumerabilidade caso se assuma a negação de CH, i.e., $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$.

Com isso dito, a resposta é: ainda não há exemplos, em ZFC, de espaços de Lindelöf cujo produto com $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não seja de Lindelöf; como agravante, a literatura já conhece pelo menos uma caracterização intrínseca para espaços produtivamente Lindelöf[14], e mesmo assim o *status* de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em ZFC segue incógnito. ▲

A condição de Lindelöf é uma das muitas propriedades *rebeldes* que suscitam pesquisa da *produtividade*, i.e., da preservação em produtos. Investigações semelhantes já foram (e têm sido) feitas acerca de paracompacidade, compacidade enumerável, compacidade sequencial, além de propriedades locais, como *tightness* enumerável, a condição de Fréchet-Urysohn, etc. Esse é o tipo de *assunto de nicho* que o leitor dificilmente encontrará concentrado numa única referência: a melhor opção é procurar artigos em acervos mais especializados, como o zbMATH Open (`https://zbmath.org`), ou tentar a sorte com um *reference request* no Mathoverflow. Por aqui, o assunto está encerrado.

E.5 Combinatória infinitária

Classicamente, *Combinatória* (ou *Análise Combinatória*) lida com problemas de contagem de estruturas e conjuntos finitos. No caso, a ideia da *combinatória infinitária* é análoga, só que em contexto infinito. Com a analogia proposta por Kunen [65], pode-se pensar na combinatória infinitária, a princípio, como a subárea da Teoria dos Conjuntos interessada tão somente em problemas *a respeito de* conjuntos, sem se importar com questões de *Fundamentos* – o que não impede que a ala *fundamentalista* se aproveite dos resultados *combinatórios*, e *vice-versa*.

Assim, os teoremas sobre aritmética cardinal da Subseção K.1.6, por exemplo, podem ser encarados como *pertencentes* à Combinatória Infinitária. No entanto, para os propósitos deste texto, será mais interessante prestar atenção a resultados como o Princípio da Casa dos Pombos (Proposição K.1.146), que têm aplicações mais imediatas para o cenário topológico, como o que se fez no Teorema 5.1.43, especificamente na prova da implicação $(c_{ii}) \Rightarrow (c_{iii})$.

Definição E.5.1 (Relações de partição)**.** Para cardinais κ, λ, μ e ν, a notação $\kappa \to (\lambda)^{\mu}_{\nu}$ abrevia a seguinte asserção[15]: para toda função $f\colon [\kappa]^{\mu} \to \nu$, existe um subconjunto $H \subseteq \kappa$, com $|H| = \lambda$, tal que a restrição de f a $[H]^{\mu}$ é constante. ¶

[14] Como provado no artigo de Aurichi e Zdomskyy, sugestivamente intitulado *Internal characterizations of productively Lindelöf spaces* (2018). No mesmo ano, obtive uma caracterização relativamente mais geral em minha tese de doutorado, mas igualmente inútil para resolver o *problema de Michael*, i.e., o problema de determinar em ZFC se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é, ou não, produtivamente Lindelöf.

[15] Nas situações em que alguém é obrigado a pronunciar "$\kappa \to (\lambda)^{\mu}_{\nu}$", o comum é esbravejar algo como "κ seta λ, μ, ν". Parece-me que tal notação, introduzida por Erdős e Rado, embora conveniente para a escrita, nunca teve a intenção de ser agradável aos ouvidos, tal qual "*Ph'nglui mglw'nafh Cthulhu R'lyeh wgah'nagl fhtagn*".

Exemplo E.5.2. Note que na supracitada demonstração da implicação (c_{ii}) ⇒ (c_{iii}), a maior parte do argumento foi dedicada a verificar $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$: qualquer *coloração* sobre o *grafo completo* $[\aleph_0]^2$ em $\nu := 2$ cores admite um conjunto H de vértices cuja cardinalidade é $\lambda := \aleph_0$, de tal forma que quaisquer duas arestas de H têm a mesma cor. O restante da prova se resume a obter uma *coloração* que atenda aos critérios da afirmação.

A terminologia acima, que apela para noções de grafos e cores, serve para facilitar a digestão das informações envolvidas nesse tipo de problema:

(i) como $[\kappa]^2$ consiste na coleção de todos os subconjuntos de κ com precisamente dois elementos, resulta que $\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2$ sempre que $\alpha, \beta \in \kappa$ são elementos distintos, de modo que ao *interpretar* $\{\alpha, \beta\}$ como uma aresta entre os *vértices*, resulta que $[\kappa]^2$ é o grafo cujos vértices são os elementos de κ e em que todas as arestas possíveis estão presentes, exceto *loops*;

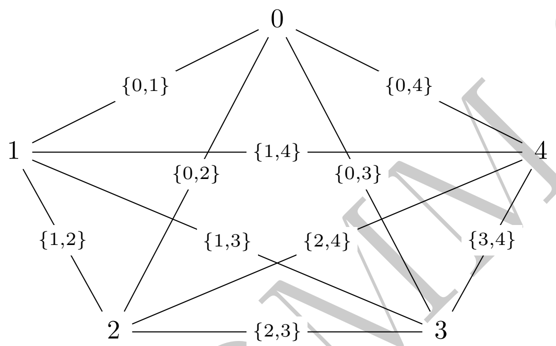


Figura E.3: Contemplem $[5]^2$.

(ii) em geral, qualquer função $f\colon X \to \mathcal{I}$ induz uma partição de X ao se considerar $\mathcal{P} := \{f^{-1}[\{i\}] : i \in \mathcal{I}\}$, o que pode se imaginar como a *pintura* de cada bloco $f^{-1}[\{i\}]$ da partição com a *cor* i correspondente, justificando xingar f de $\mathcal{I}$-*coloração* para X;

(iii) finalmente, dizer que um subconjunto H de X é *homogêneo* para a coloração $f\colon X \to \mathcal{I}$ indica que todos os seus elementos têm a mesma cor segundo f; por simplicidade, xingar H de λ-homogêneo apenas abrevia que H é homogêneo e tem cardinalidade λ.

Dessa forma, uma afirmação do tipo $\kappa \to (\lambda)^2_\nu$ diz que qualquer ν-coloração para o grafo $[\kappa]^2$ admite um conjunto λ-*homogêneo* de vértices! ▲

Observação E.5.3. O apelo intuitivo dos grafos se perde para $[\kappa]^\mu$ com $\mu > 2$, já que mesmo no caso de $\mu := 3$ a interpretação seria de faces triangulares ligando vértices, algo bem menos visualizável. Não obstante, o apelo das colorações permanece, de modo que para simplificar futuras discussões, funções da forma $c\colon [\kappa]^\mu \to \nu$ serão chamadas de ν-**colorações** sobre $[\kappa]^\mu$. Analogamente, um subconjunto $H \subseteq \kappa$ será chamado de λ-**homogêneo** para uma ν-coloração c sobre $[\kappa]^\mu$ se $|H| = \lambda$ e a restrição de c ao subconjunto $[H]^\mu$ for uma função constante. △

Exemplo E.5.4 (O caso $\mu := 1$)**.** Em geral, assume-se $\mu > 1$ já que $[\kappa]^0 = \{\emptyset\}$ e, moralmente, $[\kappa]^1 = \kappa$. Ainda assim, note que $\kappa \to (\lambda)^1_\nu$ tem a seguinte tradução: toda ν-coloração sobre κ tem um subconjunto λ-homogêneo, que por sua vez significa que toda função $f\colon \kappa \to \nu$ admite um conjunto $H \subseteq \kappa$ com $|H| = \lambda$ e cuja restrição de f a H é constante. Se, por exemplo, $\lambda := \kappa \geq \aleph_0$ e $\nu := \aleph_0$, então $\kappa \to (\kappa)^1_{\aleph_0}$ equivale a pedir $\operatorname{cof}(\kappa) \geq \aleph_1$: como κ é infinito, $\operatorname{cof}(\kappa) = \aleph_0$ significa afirmar que $\kappa = \sum_{n\in\omega} \alpha_n$, com cada $\alpha_n < \kappa$, o que por sua vez equivale a expressar uma partição de κ em $\aleph_0$ subconjuntos dois a dois disjuntos onde cada um tem cardinalidade $< \kappa$, precisamente uma coloração sem subconjunto κ-homogêneo. Em particular, $\aleph_\omega \not\to (\aleph_\omega)^1_{\aleph_0}$.

Assim, assumir $\mu := 1$ recai num problema que já tem suas próprias notações[16], justificando a postura padrão de considerar $\mu \geq 2$. ▲

Como sugerido no exemplo anterior, nem sempre as relações de partição são válidas. Um caso bastante ilustrativo é proposto no próximo

Exercício E.16. Mostre que $\mathfrak{c} \not\to (\aleph_1)^2_2$. Dica: troque $\mathfrak{c}$ por $\mathbb{R}$ e indique por $\preceq$ uma boa ordem sobre $\mathbb{R}$; defina $c(\{x, y\}) := 0$ se a ordem usual de $\mathbb{R}$ concordar com a ordem $\preceq$ em $\{x, y\}$, e $c(\{x, y\}) := 1$ caso contrário; note que um subconjunto homogêneo para Z, se existir, deve ser bem ordenado tanto por $\preceq$ quanto por $\leq$, donde segue que $|Z| \leq \aleph_0$. ■

Com tudo isso dito, o objetivo desta discussão não é aprofundar o estudo das relações de partição, mas sim evidenciar como elas podem ser usadas para resolver problemas oriundos de contextos não-combinatórios.

Teorema E.5.5. *Seja $\kappa \geq \aleph_0$. Se X é um espaço de Hausdorff com $|X| > 2^{2^\kappa}$, então X tem um subespaço discreto D com $|D| = \kappa^+$.*

Demonstração. Para $x, y \in X$ distintos, sejam $U_{x,y}, V_{x,y} \subseteq X$ abertos disjuntos com $x \in U_{x,y}$ e $y \in V_{x,y}$. Considere também uma família $\mathcal{A} := \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$, onde $\lambda := \left(2^{2^\kappa}\right)^+$, o que pode ser feito em virtude da hipótese acerca da cardinalidade de X. Agora, considere uma coloração c sobre $[\lambda]^3$ de tal forma que para $\alpha < \beta < \gamma$ em λ, $c(\{\alpha, \beta, \gamma\})$ informe se $y_{\sigma(\alpha)}$ pertence ou não a $U_{y_{\sigma(\beta)}, y_{\sigma(\gamma)}}$ ou $V_{y_{\sigma(\beta)}, y_{\sigma(\gamma)}}$, para todas as permutações $\sigma \in \Sigma(\{\alpha, \beta, \gamma\})$, o que deve exigir uma imagem com aterradores 27 elementos.

Katzensprung. *Tal coloração admite um subconjunto κ^+-homogêneo.*

Para encerrar, basta mostrar que se $H := \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ é um subconjunto κ^+-homogêneo, então $\{x_{\alpha+1} : \alpha < \kappa^+\}$ é discreto: para cada $\alpha < \kappa^+$, seja

$$W_\alpha := U_{x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}} \cap V_{x_\alpha, x_{\alpha+1}};$$

pelo modo como os abertos do tipo U e V foram tomados, tem-se $x_{\alpha+1} \in W_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa^+$, bem como $x_\alpha, x_{\alpha+2} \notin W_\alpha$; ocorre que pela homogeneidade, W_α é tal que $x_\gamma \notin W_\alpha$ se $\gamma < \alpha$ e $x_\gamma \notin W_\alpha$ se $\gamma > \alpha + 2$, i.e., $W_\alpha \cap \{x_{\xi+1} : \xi < \kappa^+\} = \{x_{\alpha+1}\}$, como desejado. □

O argumento acima, devido a Hajnal e Juhász, se vale do formidável *Deus ex machina* fornecido pelo *Katzensprung*. No caso, a intervenção é caso particular de um teorema de coloração devido a Erdős e Rado.

Teorema E.5.6 (Erdős-Rado)**.** *Para $\kappa \geq \aleph_0$, seja $\exp_0(\kappa) := \kappa$ e, para $r \in \omega$, defina $\exp_{r+1}(\kappa) := 2^{\exp_r(\kappa)}$. Em tais condições, vale $\exp_r(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^{r+1}_\kappa$ para qualquer $r \in \omega$, i.e., toda κ-coloração para $[\exp_r(\kappa)^+]^{r+1}$ admite um subconjunto κ^+-homogêneo.*

[16] O leitor interessado em discussões mais sérias encontrará farto material em [55, 58, 65].

Note que no Teorema de Hajnal-Juhász anterior, utilizou-se a instância $r := 2$ do Teorema de Erdős-Rado, já que $\exp_2(\kappa) := 2^{\exp_1(\kappa)} := 2^{2^\kappa}$, $2+1=3$ e $27<\kappa$. Como o que se busca ilustrar nesta seção é a aplicabilidade dos resultados combinatórios, o último teorema não será demonstrado: o leitor interessado encontrará um roteiro bastante detalhado no Capítulo 24 de [62].

Outro tipo curioso de resultado combinatório que costuma ser aplicado fora de contextos conjuntistas faz uso dos chamados Δ-*sistemas*.

Definição E.5.7. Uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ é um **Δ-sistema** com raiz R se $X \cap Y = R$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{A}$ distintos. ¶

Exemplo E.5.8. Qualquer família de conjuntos dois a dois disjuntos constitui um Δ-sistema legítimo com raiz $\emptyset$. No caso, a graça dos Δ-sistemas é generalizar esse tipo de ocorrência. ▲

Teorema E.5.9 (*a.k.a.* Lema do Δ-sistema)**.** *Se $\mathcal{A}$ é uma família não-enumerável de conjuntos finitos, então existe um subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, também não-enumerável, tal que $\mathcal{B}$ é um Δ-sistema*[17].

Embora a ideia da prova seja simples[18], ela será omitida nesta seção, com o atenuante de que na próxima seção uma demonstração alternativa será apresentada por meio de *submodelos elementares*.

Teorema E.5.10. *Se $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ não é c.c.c., então existe um subconjunto finito $J \subseteq \mathcal{I}$ tal que $\prod_{j\in J} X_j$ não é c.c.c..*

Demonstração. Fixada uma anticadeia não-enumerável de abertos $\mathcal{V}$ para $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, pode-se supor que cada $V \in \mathcal{V}$ é um aberto básico, de modo que $\mathcal{A} := \{\mathrm{supp}\,(V) : V \in \mathcal{V}\}$ é uma família de subconjuntos finitos de $\mathcal{I}$. Se ocorresse $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$, então existiria um subconjunto finito $J \subseteq \mathcal{I}$ tal que $\{V \in \mathcal{V} : \mathrm{supp}\,(V) = J\}$ é não-enumerável, e daí $\prod_{j\in J} X_j$ não seria c.c.c.. Se, por outro lado, $|\mathcal{A}| > \aleph_0$, então o Lema do Δ-sistema assegura um subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, também não-enumerável, que constitui um Δ-sistema de raiz J: i.e., $\mathrm{supp}\,(U) \cap \mathrm{supp}\,(V) = J$ para quaisquer $\mathrm{supp}\,(U), \mathrm{supp}\,(V) \in \mathcal{B}$. Isto permite usar $\mathcal{B}$ para induzir uma anticadeia não-enumerável de abertos em $\prod_{j\in J} X_i$. □

Exercício E.17. Complete a demonstração anterior. Dica: fixando $V_F \in \mathcal{V}$ para cada $F \in \mathcal{B}$, note primeiro que $\{V_F : F \in \mathcal{B}\}$ é uma anticadeia não-enumerável de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$; depois, observe que se $V_F \cap V_G = \emptyset$, então $V_F(i) \cap V_G(i) = \emptyset$ para algum $i \in \mathcal{I}$ e, justamente, deve-se ter $i \in J$ pela condição de Δ-sistema. ■

Em particular, se $\prod_{j\in J} X_j$ é c.c.c. para qualquer subconjunto finito J de um conjunto de índices $\mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é c.c.c., o que permite reobter o Teorema de Šanin (Proposição 6.2.16), já que qualquer produto finito de espaços separáveis é c.c.c.. Isto pode chamar a atenção para a questão da *produtividade* de espaços c.c.c., no sentido do que se discutiu na seção anterior. Eis aí uma situação curiosa.

[17] Há versões mais gerais, em que a cardinalidade de $\mathcal{A}$ é um cardinal regular κ específico. O leitor interessado pode conferir [65].

[18] Utilizar o Princípio da Casa dos Pombos para encontrar $n \in \omega$ tal que $\{F \in \mathcal{A} : |F| = n\}$ é não-enumerável, e daí proceder por indução em n.

Dado que todo espaço separável é c.c.c., na caracterização topológico-ordenada para a reta real do Teorema K.2.125, a condição de separabilidade poderia ser substituída por celularidade enumerável? Em outras palavras, um espaço totalmente ordenado, sem extremos, conexo e c.c.c. é, necessariamente, separável? Tal pergunta foi levantada por Suslin por volta de 1920, o que justifica a

Definição E.5.11. Uma **reta de Suslin** é um espaço totalmente ordenado, com celularidade enumerável e não separável[19]. ¶

Assim, uma reta de Suslin responderia negativamente à pergunta de Suslin. Embora Suslin só tenha feito a pergunta, os meandros da História tornaram a afirmação "não existe uma reta de Suslin" conhecida como **Hipótese de Suslin**, o que curiosamente faz de uma reta de Suslin uma testemunha negativa para a hipótese que leva seu nome. E daí?

Proposição E.5.12. *Se X é uma reta de Suslin, então $X \times X$ não é c.c.c..*

Demonstração. Note que por X ser c.c.c., $I := \{x \in X : x \text{ é isolado}\}$ é tal que $|\mathcal{I}| \leq \aleph_0$. Como I não pode ser denso, existe um intervalo não-vazio J_0 com $J_0 \cap I = \emptyset$. Em particular, existem $a_0, b_0, c_0 \in J_0$ com $a_0 < b_0 < c_0$. Agora, para $\alpha < \omega_1$, suponha escolhidos a_β, b_β e c_β para todo $\beta < \alpha$, de forma que

(i) $a_\beta < b_\beta < c_\beta$,

(ii) $(a_\beta, b_\beta) \neq \emptyset$ e $(b_\beta, c_\beta) \neq \emptyset$, e

(iii) $b_\gamma \notin (a_\beta, c_\beta)$ sempre que $\gamma < \beta$.

Dado que $I_\alpha := I \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ é enumerável, a não-separabilidade de X assegura um intervalo não-vazio J_α com $J_\alpha \cap I_\alpha = \emptyset$, o que permite tomar $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in J_\alpha$ com as propriedades (i), (ii) e (iii) acima.

Com tal construção realizada, observe que $\mathcal{A} := \{(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ é uma anticadeia não-enumerável de abertos de $X \times X$, mostrando que $X \times X$ não é c.c.c.: pela terceira condição, se $\gamma < \alpha$, então $b_\gamma \leq a_\alpha$ (e daí $(a_\gamma, b_\gamma) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \emptyset$) ou $b_\gamma \geq c_\alpha$ (e daí $(b_\gamma, c_\gamma) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \emptyset$). O leitor pode cuidar dos detalhes. □

Então a conclusão é a de que espaços c.c.c. se comportam como espaços de Lindelöf, no sentido de que mesmo o quadrado de um espaço c.c.c. pode não ser c.c.c.? A resposta depende dos axiomas considerados: há *modelos* para ZFC onde existem retas de Suslin e, portanto, em tais modelos, a conclusão é *verdadeira*; por outro lado, também há modelos em que qualquer produto de espaços c.c.c. é c.c.c., logo a conclusão é falsa nesses modelos – que, em particular, não admitem retas de Suslin. No entanto, aprofundar a discussão é algo que foge das intenções modestas deste volume: o leitor interessado pode encontrar mais informações em [65].

[19] A rigor, ainda faltam as condições de conexidade, ausência de extremos, etc. No entanto, na presença de *uma* reta de Suslin com as propriedades pedidas na definição, é possível conseguir *outra* com as propriedades que faltam. Para mais detalhes, veja [65].

E.6 Submodelos elementares

Recordemo-nos da despretensiosa Definição K.2.58: para uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}$-estruturas N e M, com M subestrutura de N, diz-se que M é (subestrutura) *elementar* de N se vale a *propriedade de substituição de testemunhas*, i.e., sempre que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ for uma $\mathscr{L}$-fórmula, $a_1, \ldots, a_n \in M$ e $b \in N$ forem tais que $N \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b]$, *existirá* $a \in M$ tal que $M \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a]$. Na prática: uma afirmação expressa na linguagem $\mathscr{L}$ em termos de elementos de M é válida em N (a $\mathscr{L}$-estrutura maior) se, e somente se, também for válida em M (a $\mathscr{L}$-estrutura menor).

O escopo do que se fará aqui é bem menos amplo, já que $\mathscr{L}$ será meramente a linguagem da teoria dos conjuntos, i.e., $\mathscr{L} := \{\in\}$. Em particular, $\in$-subestruturas elementares serão chamadas de **submodelos elementares**. A ideia do que se pretende fazer é quase simples:

(i) a fim de demonstrar determinada afirmação φ acerca de um objeto X, vamos considerar um conjunto H *suficientemente grande* de modo que se possa garantir $X \in H$ e $O \in H$ para todo *objeto O necessário* para o problema;

(ii) feito isso, ao tratar H como $\in$-estrutura, o Teorema de Löwenheim-Skolem (*a.k.a.* Teorema K.2.60, ou suas variações) garante um submodelo elementar $M \subseteq H$ *pequeno*, que satisfaz todas as $\in$-sentenças de primeira ordem que H satisfaz.

Com esse tipo de procedimento, espera-se usar a informação *externa* de que M é pequeno a fim de demonstrar a validade de φ em M, donde a elementaridade garantirá a validade de φ em H. Em outras palavras: vamos *hackear* ZFC por meio de um *exploit*[20] com o intuito de provar coisas. Para motivar as ideias, os próximos exemplos ilustram o *modus operandi* – ao custo de muitas suposições *incríveis*.

Exemplo E.6.1 (Demonstração do Lema do Δ-sistema)**.** Fixado um conjunto não-enumerável $\mathcal{A}$ composto por conjuntos finitos, vamos abreviar por $\Delta(R, \mathcal{D})$ a seguinte asserção acerca de um conjunto finito R e um subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$: "$R \subseteq X$ para todo $X \in \mathcal{D}$ e $X \cap Y = R$ para quaisquer $X, Y \in \mathcal{D}$ distintos" ou, de forma mais sucinta, $\Delta(R, \mathcal{D})$ é a afirmação "$\mathcal{D}$ é um Δ-sistema com raiz R". Por sua vez, $\max \Delta(R, \mathcal{B})$ será a afirmação de "vale $\Delta(R, \mathcal{B})$ e $\mathcal{B}$ é subconjunto maximal de $\{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} : \Delta(R, \mathcal{D})\}$".

Exercício E.18. Mostre que para qualquer R, existe $\mathcal{B}$ satisfazendo $\Delta(R, \mathcal{B})$. Dica: use o Lema de Zorn sem pensar muito. ■

Nada novo sob o sol até aqui. Para mudar isso, suponha que exista um conjunto H *suficientemente grande* de modo que se tenha $\mathcal{A} \in H$ e $\wp(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Com isso, conjuremos M um submodelo elementar de H tal que $\mathcal{A} \in M$ e $|M| \leq \aleph_0$. Por não poder ocorrer $\mathcal{A} \subseteq M$, deve existir $X_0 \in \mathcal{A}$ com $X_0 \notin M$; *oportunamente*, veremos que *pode-se garantir* que $R := X_0 \cap M \in M$.

Dado que o exercício anterior garante a existência de subconjuntos $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo $\max \Delta(R, \mathcal{B})$, basta mostrar que qualquer $\mathcal{B}$ dessa forma deve ser não-enumerável. Ora, se algum $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$ enumerável satisfizesse $\max \Delta(R, \mathcal{B}')$, então a asserção

$$\exists \mathcal{B}\, (\max \Delta(R, \mathcal{B}) \wedge |\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$$

seria uma $\in$-sentença acerca de $\mathcal{A}$, um membro do submodelo M, verificada por uma testemunha $\mathcal{B}'$ de H.

[20]No contexto da computação, um *exploit* pode ser pensado como uma sequência de comandos que tomam vantagem de um defeito ou vulnerabilidade do sistema.

Logo, devido à elementaridade de M, algum $\mathcal{B} \in M$ satisfaz a mesma fórmula, i.e., existe $\mathcal{B} \in M$, com $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$ e tal que $\max \Delta(R, \mathcal{B})$. *Oportunamente*, veremos que *é possível assegurar* tanto $\mathcal{B} \subseteq M$ quanto $\bigcup_{Y \in \mathcal{B}} Y \subseteq M$, donde se conclui $\Delta(R, \mathcal{B} \cup \{X_0\})$, o que contraria a maximalidade de $\mathcal{B}$. Portanto, todo $\mathcal{B}$ satisfazendo $\max \Delta(R, \mathcal{B})$ é não-enumerável, o que demonstra o Teorema E.5.9. ▲

Exemplo E.6.2 (O Teorema de Arhangel'skii, revisitado)**.** Vamos demonstrar, mais uma vez, o Teorema 3.1.20: *se X é um espaço topológico compacto, T_2 e com caráter enumerável, então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Para isso, seja $\mathcal{T}$ a topologia de X e suponha que exista um conjunto H, *suficientemente grande*, de modo que se tenha $X, \mathcal{T} \in H$, e no qual *todas as construções a seguir possam ser realizadas*. Feito isso, considere um submodelo elementar M de H, tal que $X, \mathcal{T} \in M$ e $|M| \leq \mathfrak{c}$. Com isso, tudo se resume a provar a inclusão $X \subseteq M$.

A primeira coisa a observar é que $X \cap M$ é um subespaço fechado de X e, portanto, compacto com a topologia de subespaço. De fato, se $a \in \overline{X \cap M}$, então por X ter caráter enumerável, existe uma sequência $(x_n)_n$ em $X \cap M$ tal que $x_n \to a$. *Oportunamente*, veremos que pode-se tomar M de tal forma que a sequência $(x_n)_n$ seja um elemento do submodelo M. Desse modo, a sentença "a sequência $(x_n)_n$ é convergente", que trata de um elemento de M (a sequência!), é satisfeita por uma testemunha em H (o ponto $a \in X$) e, por elementaridade, deve ser satisfeita em $X \cap M$, i.e., deve existir $b \in X \cap M$ tal que $x_n \to b$. A condição de Hausdorff, por fim, assegura $a = b$.

Analogamente, para $y \in X \cap M$, a afirmação "y tem base local enumerável", que trata de um elemento de M (o ponto y), é satisfeita por alguma base local enumerável $\mathcal{B}_y$ que vive em H. Logo, por elementaridade, existe $\mathcal{B}'_y \in M$ que satisfaz a mesma afirmação. Em particular, (*oportunamente*...) veremos que é lícito assumir $\mathcal{B}'_y \subseteq M$.

Se existisse $b \in X \setminus M$, para todo $y \in X \cap M$ existiria $B_y \in \mathcal{B}'_y$ tal que $b \notin B_y$, donde a compacidade de $X \cap M$ asseguraria $y_0, \ldots, y_n \in X \cap M$, para algum $n \in \omega$, com $X \cap M \subseteq \bigcup_{j \leq n} B_{y_j}$.

Porém, o ponto b seria uma testemunha em H para a validade da sentença

$$\exists x \in X \left(x \notin \bigcup_{j \leq n} B_{y_j} \right),$$

novamente uma afirmação sobre elementos de M, que deveria ser satisfeita por algum $x' \in X \cap M$, contrariando a conclusão obtida no final do parágrafo anterior. ▲

Nos exemplos anteriores, a crença do leitor certamente deve ter fraquejado nos mesmos dois pontos.

(i) O que seria, e por que existiria, um conjunto H tão grande quanto se supôs?

(ii) O que garante a existência dos submodelos com as propriedades desejadas?

Moralmente, gostaríamos que um conjunto H suficientemente grande fosse um modelo para ZFC: assim, certamente, todas as construções e subconjuntos tomados pertenceriam a H. O problema, conforme já se adiantou no final da Subseção K.2.1, é a combinação dos teoremas de Gödel: por um lado, a *completude* diz que a consistência de ZFC "equivale" à existência de um modelo para ZFC; por outro lado, a *incompletude* diz que ZFC não pode demonstrar sua própria consistência (desde que ZFC seja consistente). Por sorte, não costuma ser preciso utilizar um conjunto H tão grande.

Para um conjunto S qualquer, considere o *fecho transitivo* de S, $\operatorname{trcl}(S)$, definido no inócuo Exercício K.37. Com isso em mente:

Definição E.6.3. Para um cardinal infinito κ, escreve-se $\mathbb{H}(\kappa) := \{x : |\operatorname{trcl}(x)| < \kappa\}$ para denotar a *classe* de todos os conjuntos com *cardinalidade hereditariamente* menor do que κ. ¶

Observação E.6.4. A ideia é que $X \in \mathbb{H}(\kappa)$ se $|X| < \kappa$ e, mais ainda, $|Y| < \kappa$ para todo $Y \in X$, e $|Z| < \kappa$ para todo $Z \in Y$ com $Y \in X$, e assim sucessivamente. Apesar da terminologia ("classe") utilizada, $\mathbb{H}(\kappa)$ é um conjunto para todo $\kappa \geq \aleph_0$: na verdade, $\mathbb{H}(\kappa)$ é subconjunto de $\mathbb{V}_\kappa$, onde o último é definido como no Exercício K.37.

Com efeito, se $X \in \mathbb{H}(\kappa)$ e $T := \operatorname{trcl}(X)$, então a coleção $S := \{\operatorname{rank}(y) : y \in T\}$ é um ordinal, onde $\operatorname{rank}(y) := \min\{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e } y \in \mathbb{V}_\alpha\}$, já que

- ✓ para $\alpha_0 := \min \mathrm{ORD} \setminus S$ (que deve existir pois T é um conjunto),
- ✓ deve-se ter $\alpha_0 \subseteq S$ (por minimalidade),
- ✓ bem como $S \subseteq \alpha_0$ (o contrário daria $y \in T$ com $\operatorname{rank}(y) > \alpha_0$ de modo minimal, acarretando $\operatorname{rank}(z) < \alpha_0$ para todo $z \in y$, donde as propriedades usuais do *rank* acarretariam $\operatorname{rank}(y) = \sup\{\operatorname{rank}(z) + 1 : z \in y\} \leq \alpha_0$)[21];

desse modo, tem-se $|\alpha_0| = |S| \leq |T| < \kappa$, resultando em $\alpha_0 < \kappa$; o restante segue pois, em geral, verifica-se $\mathbb{V}_\alpha = \{x : \operatorname{rank}(x) < \alpha\}$ e $\operatorname{rank}(C) = \{\operatorname{rank}(c) : c \in \operatorname{trcl}(C)\}$. Para mais detalhes, confira [63]. △

O que o conjunto $\mathbb{H}(\kappa)$ tem de especial? Em resumo, para $\kappa > \aleph_0$ regular[22], mostra-se que $\mathbb{H}(\kappa)$ é transitivo[23] e, mais ainda, $\mathbb{H}(\kappa) \models \mathrm{ZFC} - \mathrm{P}$, i.e., todos os axiomas de ZFC são satisfeitos quando restritos a elementos de $\mathbb{H}(\kappa)$, exceto o Axioma das Partes (P). Na prática, isto significa que todas as construções conjuntistas com membros de $\mathbb{H}(\kappa)$ que não envolvam (P) resultam em elementos de $\mathbb{H}(\kappa)$ – e daí a vantagem de *construir* produtos cartesianos por meio do Axioma da Substituição (Exercício K.2) em vez de usar conjuntos das partes.

Exemplo E.6.5. No caso do Exemplo E.6.1, chamando $\lambda := |\operatorname{trcl}(\mathcal{A})|$, basta tomar $\kappa := \lambda^+$ e $H := \mathbb{H}(\kappa)$, pois daí $\mathcal{A} \in H$. Em particular, note que por H satisfazer o Axioma da Separação[24], qualquer subconjunto de $\mathcal{A}$ também pertence a $\mathcal{H}$, o que é importante para garantir que a testemunha $\mathcal{B}'$ obtida ao longo da argumentação pertença a H.

Já no caso do Exemplo E.6.2, precisa-se de um $\mathbb{H}(\kappa)$ suficientemente grande de modo a conter X e $\mathcal{T}$ como elementos, além de qualquer sequência da forma $\omega \to X$ (para a argumentação posterior de que $X \cap M$ é fechado) e qualquer sequência da forma $\omega \to \mathcal{T}$ (para a argumentaçaõ posterior com bases locais enumeráveis). Ora, como $X \in \mathcal{T}$, basta tomar $\lambda := |\operatorname{trcl}(\mathcal{T})|$ e $\kappa := \lambda^+$, pois daí $\mathcal{T} \in \mathbb{H}(\kappa) := H$ e, por transitividade, $X \in H$, enquanto as demais ocorrências seguem por H ser modelo de ZFC$-$P e, consequentemente, ser capaz de construir tanto ω quanto (todas as) funções da forma $\omega \to X$ e $\omega \to \mathcal{T}$. ▲

[21] *Slow motion*: a princípio, a minimalidade de $\operatorname{rank}(y)$ daria $\operatorname{rank}(z) \leq \alpha_0$ para todo $z \in y$, mas $\operatorname{rank}(z) = \alpha_0$ acarretaria $\alpha_0 \in S$, já que $z \in T$. Para mais detalhes, veja o Capítulo IV de [63].

[22] Isto é, que satisfaz $\operatorname{cof}(\kappa) = \kappa$. Não é o caso de $\kappa := \aleph_\omega$, por exemplo. Por outro lado, todo cardinal sucessor, i.e., da forma $\aleph_{\alpha+1}$ (ou λ^+, como preferir), é regular. O leitor encontrará mais detalhes nas referências já sugeridas ao longo desta seção (ou da anterior).

[23] Se $x \in \mathbb{H}(\kappa)$, então $x \subseteq \mathbb{H}(\kappa)$.

[24] Note que isto não contradiz o que se afirmou acerca da não-satisfabilidade do Axioma das Partes: uma coisa é dizer que todo subconjunto de X é membro de H; outra coisa é dizer que $\wp(X) \in H$.

Como o exemplo acima sugere, na prática é irrelevante se preocupar com o tamanho específico de κ, já que podemos tomar cardinais regulares arbitrariamente grandes. É como se preocupar em regular o $\delta > 0$ específico numa demonstração de Análise Básica a fim de obter precisamente a desigualdade $< \varepsilon$: na prática, é apenas no final do argumento que se percebe qual δ deveria ser tomado[25]. Assim, resta o problema de justificar os submodelos mágicos nos Exemplos E.6.1 e E.6.2.

No caso do primeiro exemplo, não há truques novos: basta tomar um submodelos elementar enumerável por meio da versão já demonstrada do Teorema de Löwenheim-Skolem (Teorema K.2.60). Com efeito, ao tomar T como o conjunto das sentenças satisfeitas por $\mathbb{H}(\kappa)$ no enunciado do Teorema de Löwenheim-Skolem, segue que T admite um modelo infinito enumerável M, construído precisamente como um submodelo elementar de $\mathbb{H}(\kappa)$. Observe então que, na discussão realizada na parte final do Exemplo E.6.1, precisa-se assegurar que $R = X_0 \cap M \in M$ para um conjunto finito $X_0 \in \mathcal{A}$, bem como $\mathcal{B} \subseteq M$ e $\bigcup_{Y \in \mathcal{B}} Y \subseteq M$ para um certo $\mathcal{B} \in M$ enumerável: tudo isso segue, precisamente, por M ser submodelo elementar de $\mathbb{H}(\kappa)$. Para mais detalhes, veja o Lema III.7.12 de [65].

O submodelo do segundo exemplo é mais delicado, não só pela exigência sobre sua cardinalidade, como também pela sutil passagem da sequência convergente: o fato de se ter uma função $f\colon \omega \to M$ acarretar $f \in M$. Neste caso, a existência do submodelo M se obtém com uma adaptação da demonstração apresentada para o Teorema K.2.60, a fim de garantir um submodelo elementar infinito satisfazendo, adicionalmente, a condição $[M]^{\aleph_0} \subseteq M$. O leitor encontrará mais detalhes em [65] ou, para variar a lista de recomendações, no capítulo de preliminares da dissertação de mestrado [34], de Rodrigo "Rockdays" Dias.

Como a discussão acima deve ter deixado evidente, justificar os métodos subjacentes dos submodelos elementares é bem mais difícil do que usá-los, e o ponto é precisamente este: não é tão difícil utilizá-los, pelo menos depois que se *aceita* toda a tecnologia por trás das alavancas. Embora seja relativamente recente, a técnica dos submodelos elementares já é responsável pela preservação de florestas inteiras em virtude da economia de papel proveniente de suas provas curtas e elegantes. De qualquer forma, esta seção cumpriu a missão autoimposta de propiciar um primeiro contato – o leitor interessado em mais exemplos de aplicação pode começar com o convidativo artigo de Alan Dow, *An Introduction to Applications of Elementary Submodels to Topology* (Topology Proc. 1988).

E.7 Topologia sem pontos

Em algum *ponto* da História, a percepção de que objetos *sólidos* costumam ser fragmentáveis em porções *cada vez menores* nos trouxe o *atomismo*, precursor filosófico da *teoria atômica*: essencialmente, trata-se da ideia de que toda a matéria é composta por partículas indivisíveis, os átomos. Em certo sentido, a matéria parece se comportar como os conjuntos regidos pelo Axioma da Extensão, que são determinados por seus elementos.

É claro que, ao desenvolver a ideia em ZFC, tem-se $\emptyset$ como o átomo por excelência, e todos os demais conjuntos descritíveis como moléculas (no sentido do último item no Exercício K.37). A despeito disso, a prática matemática costuma tratar todos os elementos de um determinado conjunto como átomos: fora dos círculos conjuntistas, por exemplo, não é comum pensar em $\pi \in \mathbb{R}$ como um conjunto de *sacos de sacos de sacos... vazios* (como no exercício supracitado), mas sim como um *ponto indivisível* e bem determinado da reta real; analogamente, um par (a, b) em $\mathbb{R}^2$ expressa um ponto do plano, etc.

[25] O que nem costuma ser feito quando a pessoa já morreu por dentro, caso em que me incluo.

Curiosamente, esse *modus operandi* apenas ecoa as concepções *idealizadas* da Geometria Clássica, que descrevem o espaço composto por planos, planos compostos por retas e retas compostas por pontos, com estes últimos indivisíveis. Daí o *plot twist*: tal prática, que vem de uma idealização da experiência empírica com aproximações sucessivas, não é executável *na prática*[26]: ao se pressupor a tangibilidade de processos intangíveis, chega-se a embaraços epistemológicos, como o clássico comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1.

Obviamente, a Matemática tem liberdade criativa para estipular o que bem entender, dado que ela não é cerceável pela realidade imediata. Justamente por isso, a investigação de abordagens mais fiéis à imprecisão não deveria ser descartada logo de início. Diga-se de passagem, o ferramental já existe: ao dizer, por exemplo, que uma família decrescente de intervalos compactos da reta tem interseção unitária, o que se faz é dar uma sequência de aproximações cada vez melhores para um *ponto ideal*. A proposta implícita na presente discussão, e um dos *slogans* da Topologia Sem Pontos[27], é evitar o uso explícito de um ponto idealizado e concentrar as investigações no que puder ser feito com as aproximações. Em Português claro: vamos tratar os abertos como os *átomos* da teoria.

Para isso, a primeira coisa a ser feita é decidir sob qual ótica enxergar a topologia de um espaço. Certamente, fixado um espaço topológico $(X, \mathcal{T}_X)$, sua topologia $\mathcal{T}_X$ é uma ordem parcial com respeito à inclusão, mas ela tem bem mais propriedades do que uma ordem parcial qualquer que alguém poderia encontrar vagando pelos becos de uma metrópole. Parte do que veremos a seguir já foi sugerido ao longo do texto, como na discreta Observação 1.2.100.

Definição E.7.1. Para uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ e elementos $p, q \in \mathbb{P}$, denotam-se por $p \vee q := \sup\{p, q\}$ e $p \wedge q := \inf\{p, q\}$, caso existam, os elementos de $\mathbb{P}$ xingados, respectivamente, de **junção** e **encontro**[28] entre p e q. Mais geralmente, $\bigvee A := \sup A$ e $\bigwedge A := \inf A$ denotam, respectivamente, a junção e o encontro de um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$, caso existam.

(i) Diz-se que $\mathbb{P}$ é um **reticulado** se $p \vee q$ e $p \wedge q$ existem para quaisquer $p, q \in \mathbb{P}$. O reticulado é **completo** se $\bigvee A$ e $\bigwedge A$ existirem para qualquer $A \subseteq \mathbb{P}$.

(ii) Um reticulado completo é um ***frame*** se a identidade de distributividade

$$\left(\bigvee A\right) \wedge b = \bigvee_{a \in A} a \wedge b$$

for satisfeita para quaisquer $A \subseteq \mathbb{P}$ e $b \in \mathbb{P}$. ¶

Exemplo E.7.2 (Fundamental)**.** Topologias são *frames* com a ordem da inclusão. De fato, os axiomas satisfeitos por uma topologia $\mathcal{T}_X$ sobre X automaticamente garantem que $\mathcal{T}_X$ é um reticulado, bem como atestam o *fechamento* por junções arbitrárias, já que a reunião arbitrária de abertos é aberta; também é evidente a validade da identidade distributiva, que se verifica mais geralmente em $\wp(X)$. O único ponto não imediato é o fechamento por encontros arbitrários, posto que a interseção arbitrária de abertos pode não ser aberta: neste caso, para uma família $\mathcal{A}$ de abertos de X, tem-se $\bigwedge \mathcal{A} = X$ para $\mathcal{A} := \emptyset$, enquanto $\bigwedge \mathcal{A} = \operatorname{int}\left(\bigcap \mathcal{A}\right)$ para $\mathcal{A} \neq \emptyset$. ▲

[26]Se não fosse pelo meu amadorismo, eu poderia estender a discussão para as incertezas intrínsecas nos processos de medição. Diferente do que fazem (muit) os físicos, não darei pitacos fora da minha área.

[27]*Point-free topology* nas referências anglófonas mais modernas – ou *pointless topology* nas referências mais antigas e bem humoradas (trata-se de um trocadilho entre “sem pontos” e “inútil”, duas traduções possíveis para *pointless*).

[28]Tradução direta das terminologias anglófonas usuais, *join* e *meet*, respectivamente.

Para elevar a correspondência $X \mapsto \mathcal{T}_X$ entre espaços topológicos e suas topologias ao patamar de funtor (contravariante), deve-se primeiro definir apropriadamente o que é um *morfismo* entre *frames*, coisa quase óbvia nesta altura da vida.

Definição E.7.3. Um **morfismo** entre *frames* $\mathbb{F}$ e $\mathbb{G}$ é uma função $h\colon \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ que preserva as *operações apropriadas*, i.e., tal que $h\left(\bigvee A\right) = \bigvee h[A]$ e $h\left(\bigwedge B\right) = \bigwedge h[B]$ para quaisquer $A \subseteq \mathbb{F}$ e $B \subseteq \mathbb{F}$, com a restrição de que B deve ser finito. ¶

Exercício E.19. Seja $h\colon \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ um morfismo de *frames*.

a) Mostre que (qualquer *frame*) $\mathbb{F}$ tem tanto um (único) maior elemento $1_{\mathbb{F}}$ quanto um (único) menor elemento $0_{\mathbb{F}}$. Em particular, não existem *frames* vazios.

b) Mostre que valem as identidades $h(0_{\mathbb{F}}) = 0_{\mathbb{G}}$ e $h(1_{\mathbb{F}}) = 1_{\mathbb{G}}$. Dica: expresse $0_{\mathbb{F}}$ e $1_{\mathbb{F}}$ como junções e encontros de um subconjunto finito (e adequado) de $\mathbb{F}$.

c) Mostre que h é crescente. Dica: $p \leq q$ se, e somente se, $p \vee q = q$. ■

Dado que a composição de morfismos de *frames* é um morfismo de *frames*, bem como o fato de $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}}$ sempre ser um morfismo de *frames* (exercício?), obtém-se de maneira legítima a categoria $\textsc{Frm}$, cujos objetos são *frames* e cujas setas são morfismos de *frames*. Dessa forma, a delirante discussão travada em (1.15), nas primeiras páginas da Subseção 1.1.3, quase demonstra que a correspondência

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_{\bullet}\colon \textsc{Top} \arrow[r] & \textsc{Frm} \\
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \mathcal{T}_X \\
Y \arrow[r, mapsto] & \mathcal{T}_Y \arrow[u, "\mathcal{T}_f"']
\end{tikzcd}
$$

é um funtor contravariante, onde $\mathcal{T}_f(V) := f^{-1}[V]$ para cada $V \in \mathcal{T}_Y$.

Exercício E.20. Convença-se de que a correspondência anterior é, de fato, um funtor contravariante. ■

Se, por um lado, o cenário dos *frames* torna evidente a possibilidade de generalização de diversas propriedades topológicas[29], o vício oriundo de uma sociedade baseada em *pontos* faz com que nos indaguemos, antes de qualquer outra coisa, por um funtor na direção oposta, ou seja: associar um *espaço* topológico $\mathcal{S}(\mathbb{F})$ a cada *frame* $\mathbb{F}$, de tal maneira que os elementos de $\mathbb{F}$ sejam os abertos de $\mathcal{S}(\mathbb{F})$. Isto impõe um problema de caráter (quase) *prático*: como *recuperar* os pontos de um espaço topológico a partir de seus abertos? Embora isso já tenha sido superficialmente discutido na Observação 1.1.97 e no Exercício 1.1.97, o funtor $\mathcal{T}$ tem mais algumas coisas a dizer.

[29]O que pode ser feito mesmo em ordens mais gerais. Por exemplo, uma ordem parcial $\mathbb{P}$ é c.c.c. se $\mathbb{P}$ não tem anticadeias não-enumeráveis, onde uma anticadeia é um subconjunto de elementos dois a dois *incompatíveis* (p e q são *incompatíveis* se não existe $r \leq p, q$); note que X é c.c.c. se, e somente se, a ordem parcial composta por seus abertos não-vazios é c.c.c.. Analogamente, uma ordem parcial $\mathbb{P}$ com máximo pode receber a alcunha *de Lindelöf* se todo subconjunto cofinal $C \subseteq \mathbb{P}$ tiver um subconjunto cofinal enumerável, etc.

O modo mais imediato de encontrar os *pontos* de um *frame* consiste em observar os pontos de espaços topológicos sob uma ótica categorial: eles correspondem, bijetivamente[30], às funções (contínuas) da forma $\{0\} \to X$. Agora, $\mathcal{T}$ associa um *ponto* $\dot{p}\colon \{0\} \to X$ ao morfismo de *frames* $\mathcal{T}_{\dot{p}}\colon \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_{\{0\}}$, onde $\mathcal{T}_{\{0\}}$ é a topologia de $\{0\}$ com a ordem oriunda da inclusão, i.e.: $\mathcal{T}_{\{0\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ou, *moralmente*, $\mathcal{T}_{\{0\}} = \{0,1\} := 2$, já que $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$.

Exercício E.21. Reflita com calma sobre as considerações anteriores. Em particular, note que a identificação $\mathcal{T}_{\{0\}} = \{0,1\}$ é *literal*, com $\emptyset = 0$ e $\{\emptyset\} = 1$. ■

Assim, num primeiro momento, pode-se dizer que *pontos* num *frame* $\mathbb{F}$ correspondem a morfismos da forma $\mathbb{F} \to 2$. No entanto, há outras noções de *ponto* igualmente úteis – e que serão exploradas a seguir. A fim de acompanhar as próximas discussões, convém rever os Exercícios 1.125 e 1.132. Seja $\mathfrak{p}\colon \mathbb{F} \to 2$ um morfismo.

(i) A pré-imagem $\mathfrak{p}^{-1}[\{0\}] := \mathcal{I}$ é um *ideal* de $\mathbb{F}$, i.e., $\mathcal{I}$ satisfaz condições duais às que um filtro satisfaz numa ordem parcial. Na verdade, por $\mathbb{F}$ ser reticulado completo, existe um elemento $e_{\mathfrak{p}} := \bigvee \mathcal{I}$, que deve pertencer a $\mathcal{I}$ já que

$$\mathfrak{p}(e_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}\left(\bigvee \mathcal{I}\right) = \bigvee \mathfrak{p}[\mathcal{I}] = \bigvee \{0\} = 0,$$

donde segue que $\mathcal{I} = \{a \in \mathbb{F} : a \leq e_{\mathfrak{p}}\}$. Animais desse tipo são chamados de **ideais principais**[31] e, no caso particular deste, acrescenta-se ainda a alcunha de *ideal principal* **primo**, posto que $\mathcal{I} \neq \mathbb{F}$ e $a \in \mathcal{I}$ ou $b \in \mathcal{I}$ sempre que $a \wedge b \in \mathcal{I}$.

(ii) Dado que $\mathcal{I}$ é um ideal próprio[32], o subconjunto $\mathcal{F} := \mathbb{F} \setminus \mathcal{I} = \mathfrak{p}^{-1}[\{1\}]$ é um filtro próprio (no sentido de ordem). Na verdade, pode-se dizer mais: $\mathcal{F}$ é o que costuma se chamar de **filtro completamente primo**, o que significa que além das condições impostas no Exercício 1.125, para *qualquer* subconjunto não-vazio $A \subseteq \mathbb{F}$, a ocorrência de $\bigvee A \in \mathcal{F}$ garante a existência de algum $a \in A \cap F$, algo bem mais forte do que se pede de um ultrafiltro, por exemplo[33]. Por que $\mathcal{F}$ tem tal propriedade? Ora, se $A \subseteq \mathbb{F}$ é não-vazio e $A \cap \mathcal{F} = \emptyset$, então $\mathfrak{p}(a) = 0$ para todo $a \in A$, acarretando $a \leq e_{\mathfrak{p}}$ e, consequentemente, $\bigvee A \in \mathcal{I}$.

(iii) Por fim, o elemento $e_{\mathfrak{p}}$ tem uma propriedade peculiar que será discutida um pouco mais adiante: $e_{\mathfrak{p}}$ é **primo** (ou $\wedge$-*irredutível*), no sentido de que $e_{\mathfrak{p}} \neq 1_{\mathbb{F}}$ e para quaisquer $a, b \in \mathbb{F}$, a ocorrência de $a \wedge b \leq e_{\mathfrak{p}}$ acarreta $a \leq e_{\mathfrak{p}}$ ou $b \leq e_{\mathfrak{p}}$.

O que talvez choque o leitor seja a constatação de que todas as entidades acima são, em certo sentido, ~~criptomorfas~~ *equivalentes*.

Exercício E.22. Seja $\mathbb{F}$ um *frame* não-trivial, i.e., com $0_{\mathbb{F}} \neq 1_{\mathbb{F}}$.

a) Mostre que se $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{F}$ é um *ideal principal primo* de $\mathbb{F}$, então a função $\varphi\colon \mathbb{F} \to 2$ que faz $\varphi(a) := 0$ se $a \in \mathcal{I}$ e $\varphi(a) := 1$ caso contrário, é um morfismo de *frames*.

[30] Na verdade, homeomorficamente, ao se considerar $\mathcal{C}(\{0\}, X)$ com a topologia produto, por exemplo.

[31] A semelhança com as definições de ideais principais no contexto de anéis, ou de (ultra) filtros principais no contexto de subconjuntos, deve ter saltado aos olhos do leitor. Apegue-se a isso.

[32] Pois $1_{\mathbb{F}} \notin \mathcal{I}$. Em particular, se $0_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}}$, então $\mathbb{F}$ não tem morfismos da forma $\mathbb{F} \to 2$, i.e., $\mathbb{F}$ não tem *pontos*.

[33] Compare com a condição (UF$_2$) no Exercício 1.139.

b) Mostre que se $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{F}$ é um ideal principal primo de $\mathbb{F}$, então $\bigvee \mathcal{I}$ é um elemento primo de $\mathbb{F}$. Reciprocamente, mostre que se $p \in \mathbb{F}$ é primo, então $\{a \in \mathbb{F} : a \leq p\}$ é um ideal principal primo.

c) Mostre que se $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{F}$ é um filtro completamente primo, então $\mathbb{F} \setminus \mathcal{I}$ é um ideal principal primo. Em particular, a função $\varphi\colon \mathbb{F} \to 2$ que faz $\varphi(a) := 1$ se $a \in \mathcal{P}$ e $\varphi(a) := 0$ caso contrário, é um morfismo de *frames*. ■

Dessa forma, as quatro entidades discutidas acima,

- ✓ morfismos $\mathbb{F} \to 2$,
- ✓ filtros completamente primos de $\mathbb{F}$, e
- ✓ ideais principais primos de $\mathbb{F}$,
- ✓ elementos primos de $\mathbb{F}$,

parecem ser candidatas razoáveis para determinar o conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{F})$ (dos *pontos*) sobre o qual $\mathbb{F}$ deveria ser uma topologia[34]. A fim de facilitar os próximos argumentos, vamos definir $\mathcal{S}(\mathbb{F}) := \mathrm{Mor}_{\mathrm{FRM}}(\mathbb{F}, 2)$, i.e., o conjunto de todos os morfismos da forma $\mathbb{F} \to 2$. Agora, para cada $a \in \mathbb{F}$, seja $\Sigma^{\mathbb{F}}(a) := \{p \in \mathcal{S}(\mathbb{F}) : p(a) = 1\}$, a coleção de todos os *pontos* de $\mathbb{F}$ que *estão no "aberto" a.*

Exercício E.23. "Traduza" as definições de $\mathcal{S}(\mathbb{F})$ e $\Sigma^{\mathbb{F}}(a)$ para as outras concepções de *ponto* discutidas. ■

Lema E.7.4. *A família $\mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})} := \left\{\Sigma^{\mathbb{F}}(a) : a \in \mathbb{F}\right\}$ é uma topologia sobre $\mathcal{S}(\mathbb{F})$.*

Demonstração. Primeiro, note que $\Sigma^{\mathbb{F}}(0_{\mathbb{F}}) = \emptyset$ e $\Sigma^{\mathbb{F}}(1_{\mathbb{F}}) = \mathcal{S}(\mathbb{F})$. Agora, para $a, b \in \mathbb{F}$,

$$\Sigma^{\mathbb{F}}(a) \cap \Sigma^{\mathbb{F}}(b) = \{p \in \mathcal{S}(\mathbb{F}) : p(a) = 1 \text{ e } p(b) = 1\} = \{p \in \mathcal{S}(\mathbb{F}) = p(a \wedge b) = 1\} = \Sigma^{\mathbb{F}}(a \wedge b),$$

posto que $p(a \wedge b) = p(a) \wedge p(b)$ pela condição de morfismo.

Por fim, se $A \subseteq \mathbb{F}$, então $\bigcup_{a \in A} \Sigma^{\mathbb{F}}(a) = \Sigma^{\mathbb{F}}\left(\bigvee A\right)$, já que se $p \in \bigcup_{a \in A} \Sigma^{\mathbb{F}}(a)$, então $p(a) = 1$ para algum $a \in A$ e, consequentemente, $1 \leq p(a) \leq p\left(\bigvee A\right) \leq 1$, ao passo que se $q \notin \bigcup_{a \in A} \Sigma^{\mathbb{F}}(a)$, então $q(a) = 0$ para todo $a \in A$, acarretando $q\left(\bigvee A\right) = 0$. □

Proposição E.7.5. *A correspondência $\mathbb{F} \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{F})$ determina um funtor contravariante da forma $\mathcal{S}(\bullet)\colon$ FRM $\to$ TOP.*

Demonstração. O vago enunciado acima não explicita como definir o funtor $\mathcal{S}(\bullet)$ no nível das setas, mas isto é quase automático quando se observa o diagrama dos *pontos*.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "q \circ \varphi"'] & \mathbb{G} \arrow[d, "q"] \\
& 2
\end{tikzcd}$$

Figura E.4: Diga aí se não é o triângulo mais bonito que existe?

[34]Em particular, a abordagem dos elementos primos me parece a mais *palpável*. Observe que num espaço topológico X, digamos T_1, o modo mais certeiro pelo qual a topologia $\mathcal{T}_X$ pode *detectar* o ponto x é por meio do aberto $X \setminus \{x\}$, como se a detecção ocorresse *em negativo*. Com isso dito, observe que $X \setminus \{x\}$ é um elemento primo de $\mathcal{T}_X$ segundo a definição dada: com efeito, se $U \cap V \subseteq X \setminus \{x\}$, então $x \notin U \cap V$, i.e., $U \subseteq X \setminus \{x\}$ ou $V \subseteq X \setminus \{x\}$.

Explicitamente: se $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ é um morfismo de *frames*, define-se $\mathcal{S}(\varphi)\colon \mathcal{S}(\mathbb{G}) \to \mathcal{S}(\mathbb{F})$ por meio da regra $\mathcal{S}(\varphi)(q) \coloneqq q \circ \varphi$, pois isto faz o *ponto* q de $\mathcal{S}(\mathbb{G})$ corresponder ao morfismo $q \circ \varphi\colon \mathbb{F} \to 2$, um *ponto* legítimo de $\mathcal{S}(\mathbb{F})$. A continuidade de $\mathcal{S}(\varphi)$ segue da identidade

$$\mathcal{S}(\varphi)^{-1}\left[\Sigma^{\mathbb{F}}(a)\right] = \Sigma^{\mathbb{G}}(\varphi(a)), \tag{E.2}$$

cujo prazer da verificação será deixado para o leitor. Para a funtorialidade, observe que $\mathcal{S}(\mathrm{Id}_{\mathbb{F}})(p) \coloneqq p \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{F}} = p$ para qualquer $p \in \mathbb{S}(\mathbb{F})$, mostrando que $\mathcal{S}(\mathrm{Id}_{\mathbb{F}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})}$, enquanto que para morfismos $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ e $\psi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$, a identidade $\mathcal{S}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{S}(\varphi) \circ \mathcal{S}(\psi)$ decorre da comutatividade do diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] \arrow[rrd, "(r\circ\psi)\circ\varphi"] \arrow[rrd, bend right, "r\circ(\psi\circ\varphi)"'] & \mathbb{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[rd, "r\circ\psi"] & \mathbb{H} \arrow[d, "r"] \\
 & & 2
\end{tikzcd}$$

o que encerra a prova. $\square$

Exercício E.24. Demonstre o teorema acima por meio das traduções obtidas no exercício anterior. $\blacksquare$

Exercício E.25. Chamando por $1 \coloneqq \{0\}$ o *frame* trivial, descubra quem é $\mathcal{S}(1)$. $\blacksquare$

Enfim, conseguimos funtores $\mathcal{T}_{\bullet}\colon \textsc{Top} \to \textsc{Frm}$ e $\mathcal{S}(\bullet)\colon \textsc{Frm} \to \textsc{Top}$, um na *direção* inversa do outro. No entanto, essa oposição deve ser considerada com cautela: em geral, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ não são inversos um do outro, como veremos ao longo desta seção.

Perceba que, inadvertidamente, a demonstração de que $\mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})}$ é uma topologia consistiu em provar que a correspondência $\Sigma^{\mathbb{F}}\colon \mathbb{F} \to \mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})}$ é um morfismo de *frames*! Secretamente, também há uma função *natural* σ_X entre X e $\mathcal{S}(\mathcal{T}_X)$: justamente a interpretação dos pontos de X enquanto funções da forma $\{0\} \to X$ ou, mais precisamente, a versão de tais pontos como morfismos $\mathcal{T}_X \to 2$. Explicitamente: para $p \in X$, $\sigma_X(p) \coloneqq \mathcal{T}_{\dot{p}}\colon \mathcal{T}_X \to 2$, onde $\mathcal{T}_{\dot{p}}$ é a imagem pelo funtor $\mathcal{T}$ da função $\dot{p}\colon \{0\} \to X$ que faz $\dot{p}(0) \coloneqq p$, o que na prática significa $\sigma_X(p)(A) \coloneqq 1$ se, e somente se, $p \in A$.

Exercício E.26. Mostre que $\sigma_X\colon X \to \mathcal{S}(\mathcal{T}_X)$ é contínua. Dica: basta observar que deve valer a identidade $\sigma_X^{-1}\left[\Sigma^{\mathcal{T}_X}(A)\right] = A$, para cada aberto $A \in \mathcal{T}_X$. $\blacksquare$

Parece haver algo *acontecendo*, não é mesmo? *Naturalmente*: os quadrados comutam!

$$\begin{tikzcd}
\textsc{Frm} \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\textsc{Frm}}"] & \mathbb{F} \arrow[r, "\Sigma^{\mathbb{F}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})} \arrow[d, "\mathcal{T}_{\mathcal{S}(\varphi)}"] & \textsc{Frm} \arrow[d, "\mathcal{T}\circ\mathcal{S}"] \arrow[rd, "\mathcal{S}"] & \\
 & & & & \textsc{Top} \arrow[ld, "\mathcal{T}"] \\
\textsc{Frm} & \mathbb{G} \arrow[r, "\Sigma^{\mathbb{G}}"'] & \mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{G})} & \textsc{Frm} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\textsc{Top} \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\textsc{Top}}"] & X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{S}(\mathcal{T}_X) \arrow[d, "\mathcal{S}(\mathcal{T}_f)"] & \textsc{Top} \arrow[d, "\mathcal{S}\circ\mathcal{T}"] \arrow[rd, "\mathcal{T}"] & \\
 & & & & \textsc{Frm} \arrow[ld, "\mathcal{S}"] \\
\textsc{Top} & Y \arrow[r, "\sigma_Y"'] & \mathcal{S}(\mathcal{T}_Y) & \textsc{Top} &
\end{tikzcd}$$

Os jargões introduzidos na Subseção K.3.3 permitem resumir as situações acima dizendo que $\Sigma^{\bullet} := \left(\Sigma^{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \in \textsc{Frm}\right)$ determina uma transformação natural da forma $\Sigma^{\bullet}\colon \mathrm{Id}_{\textsc{Frm}} \Rightarrow \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$, enquanto $\sigma_{\bullet} := (\sigma_X : X \in \textsc{Top})$ determina uma transformação natural da forma $\sigma_{\bullet}\colon \mathrm{Id}_{\textsc{Top}} \Rightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{T}$. Profissionais costumam dizer que definiu-se uma **adjunção dual** entre as categorias Top e Frm, onde o designador "dual" indica a *contravariância* dos funtores $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ envolvidos na composição[35].

Exercício E.27. Convença-se de que os quadrados no diagrama anterior são, realmente, comutativos. Dica: para o primeiro quadrado, encare a identidade (E.2) na demonstração do último teorema até que ela te encare de volta; para o segundo quadrado, reveja a definição de $\sigma_{\bullet}$ antes do Exercício E.26 e lembre-se de que $\mathcal{T}_f(V) := f^{-1}[V]$ para cada $V \in \mathcal{T}_Y$. ■

Na prática, uma adjunção entre Top e Frm *institui* o que a intuição talvez já *sugerisse*: embora ambas as categorias sejam parecidas, pode haver ruído na passagem de uma para a outra por meio de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$. Porém, na maior parte das vezes, o ruído é desprezível, no sentido de que as transformações naturais $\Sigma^{\bullet}$ e $\sigma_{\bullet}$ podem ser encaradas como *isomorfismos* naturais. Para isso, basta entender em quais situações $\Sigma^{\mathbb{F}}$ é um isomorfismo em Frm (*a.k.a.* um isomorfismo de *frames*), bem como em quais situações σ_X é um isomorfismo em Top (*a.k.a.* um homeomorfismo).

Exercício E.28. Sejam X um espaço topológico e $\mathbb{F}$ um *frame*.

a) Mostre que $\sigma_X\colon X \to \mathcal{S}(\mathcal{T}_X)$ é um homeomorfismo se, e somente se, for bijetora. Dica: contemple o Exercício E.26 com bastante atenção.

b) Note que $\Sigma^{\mathbb{F}}\colon \mathbb{F} \to \mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})}$ sempre é sobrejetora, e mostre que $\Sigma^{\mathbb{F}}$ é um isomorfismo se, e somente se, for injetora. Dica: reveja a demonstração do Lema E.7.4. ■

Agora, dizer que σ_X é bijetora significa afirmar que para todo morfismo $\mathfrak{p}\colon \mathcal{T}_X \to 2$, existe um único $q \in X$ tal que $\dot{q} = \mathfrak{p}$, i.e., tal que $\mathfrak{p}(A) = 1$ se, e somente se, $q \in A$, para qualquer aberto A de X. Ao traduzir isso em termos de filtros completamente primos, e observar que σ_X associa cada $q \in X$ ao seu filtro de vizinhanças abertas $\mathcal{T}_q := \{A \in \mathcal{T}_X : q \in A\}$, obtém-se boa parte do argumento utilizado na prova da próxima

Proposição E.7.6. *Para um espaço topológico X, são equivalentes:*

(i) *σ_X é um homeomorfismo;*

(ii) *se $\mathcal{F}$ é um filtro de abertos completamente primo, então existe um único $q \in X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{T}_q$;*

(iii) *se $U \subseteq X$ é um aberto primo, então existe um único $q \in X$ tal que $U = X \setminus \overline{\{q\}}$.*

Exercício E.29. Demonstre o teorema acima. Dica: (i) ⇒ (ii) foi feito acima; para (ii) ⇒ (iii), note primeiramente que, em geral, $V := X \setminus \overline{\{x\}}$ é primo e satisfaz a identidade $\{A \in \mathcal{T}_X : A \nsubseteq V\} = \mathcal{T}_x$, que por sua vez sempre é (filtro) completamente primo; a seguir, mostre que se U é primo, então $\{A \in \mathcal{T}_X : A \nsubseteq U\}$ é filtro completamente primo; a última implicação segue da tradução de σ_X em termos de elementos primos. ■

[35] Para corrigir isso, basta considerar $\textsc{Frm}^{\mathrm{op}} := \textsc{Loc}$, a categoria oposta dos *frames*, que embora tenha os mesmos objetos, têm suas setas formalmente invertidas. Apesar de serem formalmente *frames*, os objetos de Loc são quase sempre xingados de *locales*.

Definição E.7.7. Um espaço topológico X é chamado de **sóbrio** se qualquer uma das condições equivalentes no exercício anterior for satisfeita. ¶

Exercício E.30. Mostre que $T_2 \Rightarrow$ sóbrio $\Rightarrow T_0$. ■

Por sua vez, para que $\Sigma^{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \to \mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})}$ seja injetora, deve-se garantir que $\Sigma^{\mathbb{F}}(a) \neq \Sigma^{\mathbb{F}}(b)$ sempre que $a, b \in \mathbb{F}$ forem distintos, i.e., as coleções

$$\{p \in \mathcal{S}(\mathbb{F}) : p(a) = 1\} \quad \text{e} \quad \{p \in \mathcal{S}(\mathbb{F}) : p(b) = 1\}$$

devem ser distintas. Note que se $a \neq b$, então $a \not\leq b$ ou $b \not\leq a$, de modo que a injetividade se assegura precisamente no seguinte cenário:

Exercício E.31. Mostre que $\Sigma^{\mathbb{F}}$ é injetora se, e somente se, sempre que $a \not\leq b$, existir $p \in \mathbb{F}$ primo tal que $b \leq p$ e $a \not\leq p$. Dica: se $\Sigma^{\mathbb{F}}$ é injetora, então é um isomorfismo; em particular, a inversa de $\Sigma^{\mathbb{F}}$ é crescente. ■

Definição E.7.8. Um *frame* $\mathbb{F}$ é dito **espacial**[36] se as condições do exercício anterior forem satisfeitas. ¶

Dessa forma, a sobriedade é a propriedade topológica (corriqueira, diga-se de passagem) que garante o *status* de homeomorfismo para as funções $\sigma_{\bullet}$, enquanto a espacialidade garante que os morfismos $\Sigma^{\bullet}$ são isomorfismos. Com tudo isso dito:

(i) $\mathcal{S}(\mathbb{F})$ é, invariavelmente, um espaço sóbrio, já que $\sigma_{\mathcal{S}(\mathbb{F})} : \mathcal{S}(\mathbb{F}) \to \mathcal{S}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathbb{F})})$ é sempre bijetora; e

(ii) $\mathcal{T}_X$ é, invariavelmente, um *frame* espacial, já que $\Sigma^{\mathcal{T}_X} : \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_{\mathcal{S}(\mathcal{T}_X)}$ é sempre bijetora.

Exercício E.32. Convença-se de que as afirmações acima estão corretas. Dica: basta escrever as definições de cada função com cuidado; é bem mais simples do que parece. ■

Portanto, os funtores $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ podem ser restringidos aos funtores da forma $\textsc{Sob} \to \textsc{Esp}$ e $\textsc{Esp} \to \textsc{Sob}$, respectivamente, onde

✓ $\textsc{Sob}$ é a subcategoria completa de $\textsc{Top}$ composta pelos espaços sóbrios, e

✓ $\textsc{Esp}$ é a subcategoria completa de $\textsc{Frm}$ composta pelos *frames* espaciais.

Em suma, provou-se o

Teorema E.7.9 (Dualidade de Stone)**.** *Os funtores $\mathcal{T} : \textsc{Sob} \to \textsc{Esp}$ e $\mathcal{S} : \textsc{Esp} \to \textsc{Sob}$ são duais.*

Historicamente, o primeiro teorema a ficar conhecido como *dualidade de Stone* foi o que determina a dualidade entre (a categoria d) os espaços compactos, de Hausdorff e zero-dimensionais[37] e (a categoria d) as *álgebras de Boole*. Diga-se de passagem, tal resultado, obtido em meados dos anos 30, foi um dos precursores da Teoria das Categorias, justamente por expressar um tipo de correspondência *natural* entre objetos de *naturezas* distintas.

[36] Costuma-se dizer que um *reticulado* satisfazendo a mesma condição tem *primos suficientes*. Em particular, não é difícil perceber que um reticulado é *espacial* (i.e., é o *frame* de abertos de algum espaço topológico) se, e somente se, é completo e tem primos suficientes.

[37] Atualmente chamados de *espaços de Stone*.

Esse tipo de comportamento permite *transitar* entre uma categoria e outra, além de considerar problemas de uma na outra – e, eis a graça, *transportar* as soluções de uma para a outra. Apesar disso, não é como se as categorias fossem (anti)-isomorfas: nem tudo o que se reflete de um lado para o outro preserva os comportamentos conhecidos. Nesse sentido, há um caso marcante que ilustra bem o fenômeno: ao traduzir, em Frm, o significado da paracompacidade, pode-se mostrar que todo *coproduto*[38] de *frames* paracompactos é paracompacto, o que difere drasticamente da paracompacidade em Top. Além disso, é frequente que argumentos em Frm, por lidarem com estruturas menos rebeldes do que conjuntos arbitrários de pontos, possam ser realizados sem apelar para o Axioma da Escolha e outras noções *não-construtivas*, fato que pode chamar a atenção de leitores mais *exigentes*.

No entanto, nada disso será tratado aqui: o leitor interessado encontrará farto material na obra de Picado e Pultr [89], ou no clássico de Johnstone [59]. Este texto, finalmente, se encaminha para o seu término, mas antes...

E.8 Parece o final, mas não é

A princípio, eu gostaria de ter feito de cada uma das seções anteriores um capítulo próprio, com mais exemplos, resultados e discussões, mas o volume de material atual já é maior do que qualquer editora no Brasil aceitaria (aceitarão?) revisar[39]. Apesar disso, os planos originais envolviam ainda mais tópicos, que no final das contas precisaram ser extirpados pela força invencível da vida real. Assim, apenas para deixá-los cientes de minhas boas intenções (ou falta de senso), listo-os a seguir com brevíssimas discussões.

1. ***Grupos profinitos.*** Tratam-se dos grupos topológicos exprimíveis como limites (inversos) de grupos discretos e finitos. Meu primeiro contato com tais animais foi ao estudar Teoria de Galois: no caso, ao se considerar o grupo G dos automorfismos de uma *extensão de Galois* L/K, pode-se munir G de uma topologia que o eleva ao patamar de grupo profinito, por meio da qual a *verdadeira* correspondência de Galois se revela, a saber, as subextensões de L/K correspondem bijetivamente aos subgrupos fechados de G. Tratar disso exigiria uma introdução mais cuidadosa dos aparatos algébricos, além de lidar com mais ferramentas de limites inversos, algo que também evitei neste texto, para desgosto dos analistas mais sofisticados. O leitor interessado pode conferir *Profinite Groups* (de Ribes e Zalesskii) ou ainda o sugestivo *Galois groups and fundamental groups* (de Tamás Szamuely); caso busque apenas uma discussão breve, o Apêndice de [17] deve bastar.

   Mais geralmente, *espaços profinitos*, aqueles dados como limites de espaços discretos finitos, constituem precisamente os espaços compactos de Hausdorff totalmente desconexos, i.e., os espaços de Stone vistos na seção anterior[40]! Para minha surpresa, esse tipo de objeto tem se mostrado bastante útil em desenvolvimentos recentes dos chamados *conjuntos condensados*[41].

2. ***Feixes.*** Grosso modo, feixes são funtores parecidos com o funtor $\mathcal{C}_X : \mathcal{T}^* \to \text{Ring}$, que a cada aberto não-vazio V de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ fixado, associa o anel $\mathcal{C}(V)$, onde a estrutura categorial de $\mathcal{T}^*$ é tomada como a oriunda da relação de inclusão inversa ($V \preceq U$ se, e somente se, $U \subseteq V$). Esse tipo de objeto é bastante apelativo (leia-se: essencial) para praticantes de Geometria Algébrica *Moderna*, bem como para apreciadores das versáteis entidades usualmente xingadas de *topoi* (plural de *topos*). Abordar tais temas exigiria, além de uma introdução categorial bem mais extensa, o investimento de tempo considerável para eu *aprender* alguns resultados que tornassem a exposição dos temas um pouco mais atrativa, já que só conheço o básico do assunto (talvez menos). O leitor interessado pode conferir o despretensioso *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, de Robert Goldblatt.

[38] O correspondente (dual) em Frm dos produtos em Top.

[39] E não tiro a razão delas.

[40] Confira também o Exercício 2.103.

[41] E o leitor que quiser saber sobre o assunto pode tentar a sorte com os textos de Peter Scholze ou procurar pela monografia de Luiz Felipe Garcia, que em algum momento ficará disponível em https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/74675.

3. ***Outras noções de espaço.*** A redação deste material permitiu que eu aprofundasse um pouco os breves contatos que tive com espaços uniformes na época do mestrado, além de me apresentar ao maravilhoso mundo dos espaços de convergência. Espero que os leitores que, por ventura, tenham conhecido tais animais neste texto, também tenham gostado da experiência. Em todo caso, ainda há muitas outras classes de espaços merecedoras de algum tipo de menção.

   (a) ***Espaços de Riesz.*** Ou, mais precisamente, *espaços vetoriais ordenados*, são espaços vetoriais dotados de uma ordem compatível com suas operações, de modo análogo ao que se faz com corpos ordenados (a alcunha *de Riesz* se reserva àqueles que são completos no sentido de Dedekind). Pode ser útil para leitores interessados em convergências compatíveis com alguma noção de ordem, algo típico em contextos de integração. Um ponto de partida pode ser o livro *Positive Operators*, de Aliprantis e Burkinshaw.

   (b) ***Espaços de fecho*** (*a.k.a. closure spaces*)**.** São conjuntos dotados de um operador fecho, i.e., conjuntos C para os quais existe uma função $\mathrm{cl}\colon \wp(C) \to \wp(C)$ satisfazendo a condição $A \subseteq \mathrm{cl}(B) \Leftrightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$. Evidentemente, todo espaço topológico é um espaço de fecho, mas não vale a volta. Esse tipo de tecnologia generalista tem aplicações surpreendentes: além das óbvias em Topologia Geral e Análise [104], elas ocorrem com frequência em Lógica, como o leitor pode conferir no sugestivo *Closure Spaces and Logic*, de Martin e Pollard.

   (c) ***Espaços de proximidade.*** São animais parecidos com os espaços uniformes. Mais precisamente, um *espaço de proximidade* é um par (X, δ) em que δ abstrai o significado de *estar próximo* entre subconjuntos de X: δ deve ser simétrica ($A\delta B \Leftrightarrow B\delta A$), "$\cup$-*distributiva*" ($A\delta(B \cup C) \Leftrightarrow A\delta B$ ou $A\delta C$), T_1 ($\{x\}\delta\{y\} \Leftrightarrow x = y$), não-trivial ($\emptyset \not\delta X$) e outra coisa que eu não sei nomear (se $A \not\delta B$, então existem subconjuntos C e D com $A \not\delta C$, $B \not\delta D$ e $C \cup D = X$). Um dos fatos que pode chamar a atenção é que proximidades, em certo sentido, permitem classificar as uniformidades sobre um espaço. O leitor interessado encontrará farto material no cânone de Engelking [39].

4. ***Dualidade de Pontryagin.*** Eu nunca tinha ouvido falar até começar a estudar grupos topológicos para o presente texto. Grosso modo, trata-se de uma *dualidade*, em sentido categorial, entre grupos abelianos localmente compactos de Hausdorff e seus *biduais*, onde o *dual* de um grupo topológico G é definido como o espaço dos morfismos contínuos entre G e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, digamos $G^\star$, com a topologia compacto-aberta (!!). Ainda mais interessante foi saber que, em certo sentido, esse tipo de resultado generaliza a *transformada de Fourier*, tema muito bem quisto tanto em Matemática Pura quanto em Matemática Aplicada. Se algum dia eu conseguir estudar um pouco mais sobre o tema, devo começar[42] com o *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, do sempre sucinto Gerald Folland.

5. ***Misceleanous.*** Teoria da dimensão ([39]), caracterizações equivalentes para $\beta\omega$ em termos de espectros de anéis ([110, 47]), ou ainda por meio do Teorema do Funtor Adjunto (nlab), Análise Não-Standard e não-arquimediana, *pequenos cardinais*, *grandes cardinais*, mais exemplos de espaços clássicos, como a *reta longa*, o *plano de Niemytzki* e os espaços de Mrówka (*a.k.a.* Ψ-espaços), construções topológicas com *forcing*, etc. etc. Talvez o meu problema seja ter uma vida só.

Ainda assim, há espaço para uma última seção.

E.9 Outros truques que aprendi com a Ofélia

No segundo semestre de 2018, durante o meu estágio de pós-doutoramento no IME-USP, tive a oportunidade de assistir algumas aulas de Topologia Conjuntística/Conjuntista[43] com a Professora Ofélia Teresa Alas.

[42] Mas não necessariamente terminar, já que é comum precisar de referências paralelas para suprir a falta de lubrificação dos textos *do* Folland.

[43] Não sei se há consenso nacional com respeito à tradução de "*set-theoretic*".

Se, por um lado, tais momentos revelaram, para mim, um patamar de requinte que julgo ser incapaz de alcançar em prosa falada ou escrita ~~o que quase me fez desistir deste texto~~, por outro, senti-me na obrigação de repassar parte do que aprendi com ela – mesmo que com as minhas palavras tortas. Embora muito disso já tenha sido feito ao longo texto, ainda restam alguns argumentos maravilhosos que conheci em suas aulas, mas que não couberam nas *trocentas* páginas anteriores. Expor tais pérolas (com quase nenhum contexto) é o único objetivo desta seção que, finalmente, dará cabo deste monstro.

Importante. Eventuais erros no texto a seguir são frutos exclusivos de minha incompetência e péssima memória.

Não é novidade que se X é compacto de Hausdorff, então o fecho de qualquer um de seus discretos é compacto: em geral, qualquer subespaço fechado de um compacto é compacto. Ocorre que um notável resultado de Vladimir Tkachuk estabelece a recíproca.

Lema E.9.1. *Sejam X um espaço de Hausdorff, $\kappa \geq \aleph_0$ um cardinal e $(F_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ uma κ-upla decrescente de fechados não-vazios. Então existe um subconjunto discreto $D \subseteq F_0$ tal que $\overline{D} \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$.*

Demonstração. Note que nada precisa ser feito se ocorrer $\bigcap_{\alpha<\kappa} F_\alpha \neq \emptyset$. Para o caso em que $\bigcap_{\alpha<\kappa} F_\alpha = \emptyset$, procederemos por absurdo, o que permite fixar, para cada subconjunto discreto D contido em F_0, um ordinal $\xi(D) < \kappa$ com a propriedade de ser o menor satisfazendo $\overline{D} \cap F_{\xi(D)} = \emptyset$. Com isso, vamos obter κ-uplas $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ em X e $(\xi_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ em κ tais que:

(i) cada $D_\alpha := \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ seja discreto;

(ii) $\overline{D_\alpha} \cap F_{\xi_\alpha} = \emptyset$ para cada $\alpha < \kappa$;

(iii) $x_\alpha \in F_{\xi_\alpha}$ para cada $\alpha < \kappa$;

(iv) $(\xi_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ crescente, com $\xi_\alpha = \xi(D_\alpha)$ para todo $\alpha < \kappa$.

Observe que se isso for feito, então $D_\kappa := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ será um discreto de X, com $D_\kappa \subseteq F_0$ e $\overline{D_\kappa} \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$: a primeira afirmação decorre da identidade

$$\{x_\alpha\} = (X \setminus F_{\xi_{\alpha+1}}) \cap (X \setminus \overline{D_\alpha}) \cap D_\kappa,$$

válida por conta dos itens (ii), (iii) e (iv), que também acarretam $D_\kappa \subseteq F_0$ e $D_\kappa \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$ (em particular, $\overline{D_\kappa} \cap F_\alpha \neq \emptyset$); a condição (i) será importante para permitir a construção.

Fixado $\xi_0 := 0$ e $x_0 \in F_{\xi_0}$, tem-se $\{x_0\}$ discreto, o que permite tomar $\xi_1 := \xi(\{x_0\})$ e $x_1 \in F_{\xi_1}$ arbitrário. Supondo escolhidos $(x_\beta)_{\beta<\alpha}$ e $(\xi_\beta)_{\beta<\alpha}$ com as condições acima para algum $\alpha < \kappa$, como escolher x_α e ξ_α?

✓ Se $\alpha := \gamma + 1$ para algum γ, então $D_{\gamma+1} = D_\gamma \cup \{x_\gamma\}$ é discreto, posto que $x_\gamma \in F_{\xi_\gamma}$ e $\overline{D_\gamma} \cap F_{\xi_\gamma} = \emptyset$, o que permite expressar $\{x_\gamma\} = D_{\gamma+1} \cap (X \setminus \overline{D_\gamma})$, enquanto que para $\beta < \gamma$, existe um aberto V_β com $D_\gamma \cap V_\beta = \{x_\beta\}$, acarretando

$$D_{\gamma+1} \cap (V_\beta \setminus \{x_\gamma\}) = \{x_\beta\},$$

com $V_\beta \setminus \{x_\gamma\}$ aberto por $\{x_\gamma\}$ ser fechado[44]. Assim, é lícito tomar $\xi_{\gamma+1} := \xi(D_{\gamma+1})$ e $x_{\gamma+1} \in F_{\xi_{\gamma+1}}$. Em particular, $\xi_{\gamma+1} > \xi_\gamma$ pois o contrário violaria as hipóteses (iii) ou (iv) a depender do caso.

[44]Talvez baste T_1?

✓ Se $\alpha \neq 0$ é limite, então $D_\alpha := \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ é discreto por argumentação análoga às anteriores, o que permite tomar $\xi_\alpha := \xi(D_\alpha)$ e $x_\alpha \in F_{\xi_\alpha}$ arbitrário. Em particular, não pode ocorrer $\xi_\alpha \leq \xi_\beta$ para algum $\beta < \alpha$, acarretando $\xi_\alpha \geq \sup_{\beta<\alpha} \xi_\beta$. □

Teorema E.9.2 (Tkachuk)**.** *Um espaço de Hausdorff X é compacto se, e somente se, todo discreto de X tem fecho compacto.*

Demonstração. Supondo que todo discreto de X tenha fecho compacto, considere uma família de fechados com a p.i.f., digamos $\mathcal{F} := \{F_\gamma : \gamma < \lambda\}$, de tal forma que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, onde $\lambda \geq \aleph_0$ é um cardinal qualquer. Agora, para cada $\alpha \leq \lambda$, seja $G_\alpha := \bigcap_{\beta \leq \alpha} F_\beta$ e note que $(G_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ é uma λ-upla decrescente de fechados.

Katzensprung. *A família $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tem p.i.f., onde $\kappa := \min\{\alpha \leq \lambda : G_\alpha = \emptyset\} \geq \aleph_0$.*

Agora, o lema anterior garante um discreto $D \subseteq G_0$ tal que $\overline{D} \cap G_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$. Ocorre que, por hipótese, $\overline{D}$ é compacto, de modo que a forma como se tomaram os fechados G_α garante que $\mathcal{G}' := \left\{\overline{D} \cap G_\alpha : \alpha < \kappa\right\}$ é uma família de fechados com p.i.f. do compacto $\overline{D}$, acarretando $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. Absurdo. □

Exercício E.33. Prove o *Katzensprung*. ■

Observação E.9.3. O teorema acima se torna mais revelador quando expresso na contrapositiva: se um espaço de Hausdorff X *não* é compacto, então existe pelo menos um subespaço discreto de X cujo fecho não é compacto. Trata-se de um dos primeiros resultados do que se tornou conhecido como *reflexão de funções cardinais*, subárea da Topologia Conjuntista interessada em caracterizar funções cardinais a partir do seu "reflexo" em certas classes de subespaços. △

Mudando de assunto, mas não tanto, embora já tenhamos visto que espaços σ-compactos preservam a condição de Lindelöf em produtos finitos (Corolário 3.2.19), pode-se provar bem mais do que isso.

Lema E.9.4 (Henriksen-Isbell-Johnson)**.** *Sejam Z um espaço compacto de Hausdorff e $X \subseteq Z$ um subespaço. Se existir uma família enumerável $\mathcal{F}$ de fechados de Z tal que para quaisquer $x \in X$ e $y \in Z \setminus X$ exista algum $F \in \mathcal{F}$ com $x \in F$ e $y \notin F$, então X é de Lindelöf.*

Demonstração. Fixada uma cobertura $\mathcal{U} := \{U_s : s \in \mathcal{S}\}$ de abertos (de X) para X, note que ao fazer $V_s := Z \setminus \overline{X \setminus U_s}$ para cada $s \in \mathcal{S}$ (onde o fecho é tomado em Z), a família $\mathcal{V} := \{V_s : s \in \mathcal{S}\}$ constitui uma cobertura de X por abertos de Z: com efeito, se $x \in X$, então $x \in U_s$ para algum s, o que impede a ocorrência de $x \in \overline{X \setminus U_s}$, pois para $W \subseteq Z$ aberto tal que $U_s = X \cap W$, tem-se $x \in W$ e $W \cap (X \setminus U_s) = (W \cap X) \setminus U_s = \emptyset$. Agora, algo que não costuma ser contado por aí é o seguinte: se $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ e $X \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}'} V_s$, então $X \subseteq \bigcup_{s\in\mathcal{S}'} U_s$! Afinal de contas, se $s \in \mathcal{S}'$ é tal que $x \in X \cap V_s$, então em particular x não pode pertencer a $X \setminus U_s$, i.e., $x \in U_s$. Embora banal, tal observação será fundamental para encerrar a demonstração.

O próximo passo consiste em considerar

$$\mathcal{G} := \left\{\bigcap_{F\in J} F : J \subseteq \mathcal{F} \text{ é finito e } \left(Z \setminus \bigcup \mathcal{V}\right) \cap \left(\bigcap_{F\in J} F\right) = \emptyset\right\},$$

certamente uma família enumerável de fechados (logo, compactos) de Z.

Katzensprung. $X \subseteq \bigcup \mathcal{G}$.

Antes de demonstrar a afirmação acima, convém observar como ela dá cabo do presente lema: dado que cada $G \in \mathcal{G}$ não intercepta $Z \setminus \bigcup \mathcal{V}$, deve-se ter $G \subseteq \bigcup \mathcal{V}$, donde a compacidade de G assegura um subconjunto finito $\mathcal{S}_G \subseteq \mathcal{S}$ tal que $G \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{S}_G} V_s$; daí, a inócua observação feita no final do primeiro parágrafo permite concluir que $\{U_s : s \in \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{S}_G\}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$ para X.

Por fim, o pulo do gato: por simplicidade, chame $V := \bigcup \mathcal{V}$ e note que se $x \in X$ fosse tal que $x \notin \bigcup \mathcal{G}$, então $\mathcal{H} := \{F \cap (Z \setminus V) : x \in F \in \mathcal{F}\}$ seria uma família de fechados com p.i.f. do fechado (logo, compacto) $Z \setminus V$, acarretando a existência de $y \in \bigcap \mathcal{H}$, o que viola a hipótese acerca de $\mathcal{F}$, que em tais condições garante algum $F \in \mathcal{F}$ com $x \in F$ e $y \notin F$, posto que $y \in Z \setminus V \subseteq Z \setminus X$. $\square$

Teorema E.9.5. *Se Y_n é σ-compacto de Hausdorff para cada $n \in \omega$, então $\prod_{n \in \omega} Y_n$ é de Lindelöf.*

Demonstração. Seja K_n uma compactificação Hausdorff de Y_n para cada n, e considere $Z := \prod_{n \in \omega} K_n$ e $X := \prod_{n \in \omega} Y_n$. Como as letras sugerem, a ideia é usar o lema anterior, o que exige uma família enumerável de fechados *adequados*: posto que cada Y_n é σ-compacto, existe uma família $\{C_{m,n} : m \in \omega\}$ de compactos em Y_n com $Y_n = \bigcup_{m \in \omega} C_{m,n}$, o que permite definir $F_{m,n} := \pi_n^{-1}[C_{m,n}]$, um fechado legítimo de Z. Por fim, note que se $f := (f_n)_n \in X$ e $g := (g_n)_n \in Z \setminus X$, então $g_n \notin Y_n$ para algum n, de modo que para $m \in \omega$ satisfazendo $f_n \in C_{m,n}$, deve-se ter $f \in F_{m,n}$ e $g \notin F_{m,n}$. $\square$

Corolário E.9.6. *O espaço $\mathbb{R}^\omega$ é de Lindelöf*[45].

Observação E.9.7 (Trívia)**.** Embora eu tenha encontrado o esboço da demonstração anterior em minhas anotações, o trecho que deveria a prova do lema apresentava apenas a desesperançosa palavra "Foto", como (provável) indicativo de que fotografei a lousa. Evidentemente, não faço ideia de onde tal foto foi salva.

Ao procurar por referências, encontrei o (relativamente) recente artigo *Some thoughts on countable Lindelöf products*, de N. Noble, que faz uma síntese bastante abrangente dos principais resultados (e suas referências!) relacionados a produtos de espaços de Lindelöf, algo bastante útil para leitores interessados no assunto. Em particular, foi no texto de Noble que encontrei a referência para o Lema E.9.4: trata-se do Lema 2.2 em [50], que também pode ser encontrado em [39] como exercício (3.8.F(a)). $\triangle$

Acredito que o público alvo desta seção se interesse em saber que o teorema anterior é *ótimo*, no sentido de que não é possível estendê-lo para cardinais maiores, em virtude do próximo resultado, adaptado de uma discussão no mathoverflow[46].

Proposição E.9.8. *Se X é um espaço de Hausdorff tal que X^{ω_1} é de Lindelöf, então X é compacto.*

Demonstração. (Hamkins) A ideia é mostrar que se X tem uma cobertura enumerável sem subcobertura finita, então X^{ω_1} tem uma cobertura sem subcobertura enumerável. Seja então $\{U_n : n \in \omega\}$ uma cobertura por abertos para X, que sem perda de generalidade pode ser assumida crescente.

[45] A vantagem do presente argumento é ser mais direto, já que o resultado, por si só, já segue do Mergulho de Urysohn e de HMP (por quê?).

[46] https://mathoverflow.net/a/9651/41407.

Agora, para cada subconjunto finito $J \subsetneq \omega_1$, seja

$$V_J := \left\{ s \in X^{\omega_1} : \forall \alpha \in J \quad s(\alpha) \in U_{|J|} \right\},$$

um legítimo aberto de X^{ω_1}. Note que para $s\colon \omega_1 \to X$, o Princípio da Casa dos Pombos conjura $n \in \omega$ com $B_{s,n} := \{\alpha \in \omega_1 : s(\alpha) \in U_n\}$ não-enumerável, de modo que certamente existe *um* subconjunto $J \subseteq B_{s,n}$ com $|J| = n$, que por sua vez testemunha a pertinência $s \in V_J$. Em outras palavras: $\left\{ V_J : J \in [\omega_1]^{<\aleph_0} \right\}$ é uma cobertura por abertos para X^{ω_1}.

Pois bem, fixada uma coleção enumerável $\mathcal{J}$ de subconjuntos finitos de ω_1, é possível obter $s \in X^{\omega_1}$ tal que $s \notin \bigcup_{J \in \mathcal{J}} V_J$:

(i) se $\bigcup \mathcal{J}$ é finito, então basta tomar $s(\alpha) \notin U_n$ para $n > |J|$ para todo $J \in \mathcal{J}$;

(ii) se $\bigcup \mathcal{J}$ é infinito, então pode-se obter uma partição $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{J}$ tal que $|P_n| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que qualquer $s\colon \omega_1 \to X$ satisfazendo $s(\alpha) \notin U_{n+1}$ sempre que $\alpha \in P_n$, será tal que $s \notin V_J$ para qualquer $J \in \mathcal{J}$. □

Exercício E.34. Complete os detalhes do argumento anterior. ■

Por sua vez, a proposição acima é sintoma de um fato mais geral provado por Arthur Stone (não o Marshall!) que, a princípio, pode parecer uma observação sem importância.

Lema E.9.9. *O espaço $\mathcal{C}_p(\omega_1, \omega) := \omega^{\omega_1}$ não é normal.*

Demonstração. Basta exibir dois subespaços de $X := \omega^{\omega_1}$ que sejam fechados, não-vazios e disjuntos, e que não possam ser *separados* por abertos disjuntos. Para $i \in \{0, 1\}$, seja

$$H_i := \{f \in X : \forall m \in \omega \setminus \{i\} \quad |\{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = m\}| \leq 1\},$$

explicitamente, a família das ω_1-uplas de números naturais em que cada valor $m \neq i$ ocorre em, no máximo, uma coordenada $\alpha < \omega_1$. Não é difícil se convencer de que H_0 e H_1 são fechados não-vazios e disjuntos: enquanto a disjunção e não-vacuidade são imediatas, se existissem $g \in \overline{H_i}$ e $\alpha \neq \beta$ tais que $g(\alpha) = g(\beta) \neq i$, então existiria alguma upla $h \in H_i \cap \langle\{\alpha, \beta\}, 1\rangle[g]$, acarretando $h(\alpha) = h(\beta) \neq i$ e, portanto, $h \notin H_i$.

Agora, se X fosse normal, existiriam abertos $U_0, U_1 \subseteq X$ tais que $H_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{0, 1\}$, com $\overline{U_0} \cap \overline{U_1} = \emptyset$ (por quê?)[47], o que veremos ser *impossível*. Primeiro, por ω ser separável e $|\omega_1| \leq 2^{\aleph_0}$, HMP assegura um subconjunto enumerável e denso $D \subseteq X$, por meio do qual definimos $D_i := U_i \cap D$ para cada $i \in \{0, 1\}$. Com isso, para cada $x \in D_i$, seja $B_x \subseteq X$ um aberto básico da topologia produto tal que $x \in B_x \subseteq U_i$, e daí considere $V_i := \bigcup_{x \in D_i} B_x$.

Katzensprung. *Para cada $i \in \{0, 1\}$ ocorre $\overline{V_i} \cap \overline{U_i} = \emptyset$.*

Seja então $C := \bigcup_{x \in D_0 \cup D_1} \operatorname{supp}(B_x)$, um subconjunto enumerável de ω_1, que corresponde à reunião dos finitos índices que determinam os abertos básicos B_x conforme x percorre a família enumerável $D_0 \cup D_1$. Para uma função injetora $\psi\colon C \to \omega$, seja $h_i \in H_i$ definido da seguinte forma: $h_i(\xi) := \varphi(\xi)$ se $\xi \in C$; caso contrário, $h_i(\xi) := i$. Finalmente, como abundam as uplas $z \in X$ satisfazendo $z|_C = \psi$, podemos fixar uma e nos perguntar: $z \in \overline{U_i}$? Ocorre que a resposta *será* sim tanto para $i := 0$ quanto para $i := 1$, o que encerrará o argumento.

[47]É um exercício clássico que eu quase nunca uso: para se convencer, use a condição T_4 *duas* vezes.

De fato, para um aberto básico $W \subseteq X$ com $z \in W$, digamos $W := \prod_{\alpha<\omega_1} W_\alpha$, onde $|\mathrm{supp}\,(W)| < \aleph_0$, pode-se supor $W_\alpha = \{z(\alpha)\}$ sempre que $\alpha \in \mathrm{supp}\,(W)$. Daí, o truque é investigar $F := \mathrm{supp}\,(W) \cap C$: se ocorrer $F = \emptyset$, então as coordenadas que importam para W são irrelevantes para V_i, e *vice-versa*, de modo que basta tomar $y \in B_x$ para qualquer $x \in D_i$, satisfazendo a restrição adicional de que $y(\alpha) = z(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathrm{supp}\,(W)$; se ocorrer $F \neq \emptyset$, então $O_i := \prod_{\alpha<\omega_1} O_i(\alpha)$ é um aberto em torno de h_i, onde

$$O_i(\alpha) := \{h_i(\alpha)\} = \{z(\alpha)\} = \{\psi(\alpha)\}$$

se $\alpha \in F$, e $O_i(\alpha) := \omega$ caso contrário; como $h_i \in H_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i} = \overline{V_i}$, deve existir $x \in D_i$ com $B_x \cap O_i \neq \emptyset$, i.e., existe $y \in B_x$ tal que $y(\alpha) = z(\alpha)$ para todo $\alpha \in F$; como alterar as coordenadas de y em $\mathrm{supp}\,(W) \setminus C$ não altera sua pertinência a B_x, pode-se supor $y(\alpha) = z(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathrm{supp}\,(W)$ e, portanto, $W \cap V_i \neq \emptyset$, como desejado. □

Exercício E.35. Demonstre o *Katzensprung* anterior. ■

Corolário E.9.10 (Stone). *Seja $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços T_1. Se $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é normal, então $|\{i \in \mathcal{I} : X_i$ não é enum. compacto$\}| \leq \aleph_0$.*

Demonstração. Note que se X_i não é enumeravelmente compacto, então existe um subespaço discreto, fechado e enumerável $D_i \subseteq X_i$: aplicação direta da Proposição 1.1.57 e do item (en. c_3) no Lema 3.2.37. Logo, se não valesse a tese do enunciado, seria possível “mergulhar” ω^{ω_1} como um subespaço fechado de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, o que impede a normalidade do último, já que esta é uma propriedade hereditária para subespaços fechados (Corolário 2.1.44). □

Exercício E.36. Obtenha a Proposição E.9.8 como corolário do resultado anterior. ■

Para encerrar ~~esta seção~~, convém uma última aplicação (compare com o final da Observação 6.2.15).

Teorema E.9.11 (Corson e Lindenstrauss). *Para um espaço metrizável X, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}_k(X)$ é de Lindelöf;

(ii) $\mathcal{C}_p(X)$ é de Lindelöf;

(iii) X é separável.

Esboço da demonstração. Como a topologia de $\mathcal{C}_k(X)$ tem mais abertos do que a topologia de $\mathcal{C}_p(X)$, (i) $\Rightarrow$ (ii) é automática. Os pontos não triviais são (ii) $\Rightarrow$ (iii) e (iii) $\Rightarrow$ (i).Para (ii) $\Rightarrow$ (iii), note primeiramente que $\mathrm{ext}(X) \leq \aleph_0$, i.e., o tamanho máximo de um discreto fechado de X deve ser $\aleph_0$. De fato, o contrário daria um discreto fechado $D \subseteq X$ com $|D| = \aleph_1$, o que em vista da metrizabilidade imposta a X assegura que $\mathcal{C}_p(X)$ tem um subespaço fechado e homeomorfo a $\mathbb{R}^{\omega_1}$, que por sua vez não pode ser normal em virtude do último corolário. Como espaços de Lindelöf regulares são normais, segue a afirmação. Ocorre que no contexto métrico, isto basta para assegurar separabilidade.

Para (iii) $\Rightarrow$ (i), as hipóteses garantem uma base enumerável para X, digamos $\mathcal{B}$, que juntamente com uma base enumerável $\mathcal{C}$ para $\mathbb{R}$, permitem mostrar que o fecho da família $\{[B, C] : B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}\}$ por interseções finitas, onde $[B, C] := \{f \in \mathcal{C}_k(X) : f[B] \subseteq C\}$, é uma cobertura (não necessariamente de abertos) enumerável para $\mathcal{C}_k(X)$ que refina qualquer cobertura por abertos de $\mathcal{C}_k(X)$. □

Exercício E.37. Complete a prova do teorema anterior. Dica: confira o Problema 215 em [108] e o Teorema 3.17 em [86]. ■

Exercícios complementares do capítulo

Funções cardinais

Exercício E.38. Mostre que se $\mathrm{K}(X)$ é cardinal limite, então $\mathrm{K}(X) = \mathrm{L}(X)$. Exiba um espaço X com $\mathrm{K}(X) = \aleph_\omega$. Dica: faça $X := [0, \aleph_\omega]$ com uma topologia esperta. ■

Exercício E.39 (Compare com o Teorema 6.2.12)**.** Sejam $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de espaços topológicos, $\mathcal{T}$ a coleção composta pelos $i \in \mathcal{I}$ tais que a topologia de X_i é codiscreta, e $\kappa \geq \aleph_0$ um cardinal.

a) Mostre que $\mathrm{w}\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i\right) \leq \kappa$ se, e somente se, $\mathrm{w}(X_i) \leq \kappa$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e $|\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}| \leq \kappa$.

b) Mostre que $\chi\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i\right) \leq \kappa$ se, e somente se, $\chi(X_i) \leq \kappa$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e $|\mathcal{I} \setminus \mathcal{T}| \leq \kappa$. ■

Exercício E.40. Para $\kappa \geq \aleph_0$, mostre que $\mathrm{w}([0,1]^\kappa) = \chi([0,1]^\kappa) = \kappa$. Dica: como a topologia de $[0,1]$ não é codiscreta, o teorema anterior permite mostrar as desigualdades $\Phi\left([0,1]^\kappa\right) \leq \kappa$ e $\Phi\left([0,1]^\kappa\right) > \lambda$ para qualquer cardinal infinito $\lambda < \kappa$, para $\Phi \in \{\mathrm{w}, \chi\}$. ■

Exercício E.41. Mostre que se X é homogêneo, então $\mathrm{t}(X) = \mathrm{t}(X, x)$ para qualquer $x \in X$. ■

Exercício E.42 (HMP, versão geral)**.** Mostre que se $|\mathcal{I}| \leq 2^\kappa$ e $\mathrm{d}(X_i) \leq \kappa$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\mathrm{d}\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i\right) \leq \kappa$. Dica: imite a prova do Teorema 6.2.14. ■

Exercício E.43. Encontre o erro: para mostrar que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ é separável, basta observar que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ é denso no espaço separável $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Observação: o resultado em si, i.e., a separabilidade de $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$, é verdadeiro. ■

Exercício E.44. Para um espaço X, defina $\mathrm{c}(X) := \aleph_0 + \sup\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ é anticadeia de abertos de $X\}$, a **celularidade** de X.

a) Mostre que X é c.c.c. se, e somente se, $\mathrm{c}(X) = \aleph_0$.

b) Mostre que $\mathrm{c}(X) \leq \mathrm{d}(X)$.

c) (Šanin, geral) Mostre que se $\sup_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{d}(X_i) \leq \kappa$, então $\mathrm{c}\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i\right) \leq \kappa$. Dica: imite a prova da Proposição 6.2.16. ■

Exercício E.45 (Compare com o Exercício 1.326)**.** Mostre que se X é infinito, então X tem $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltros. Dica: note que basta determinar $|\beta X|$ ao se considerar X com a topologia discreta (Teorema 3.3.31); como βX é de Hausdorff e X é denso, tem-se $|\beta X| \leq 2^{2^{|X|}}$ (item (ii) do Teorema E.2.5); para a outra desigualdade, use a versão geral de HMP para obter um denso $D \subseteq [0,1]^{2^{|X|}}$ com $|D| \leq |X|$ e, daí, conjure uma sobrejeção (contínua) $\beta f\colon \beta X \to [0,1]^{2^{|X|}}$; note que $\left|[0,1]^{2^{|X|}}\right| = 2^{2^{|X|}}$. ■

Exercício E.46. Mostre que $\mathrm{t}(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}_S)) = 2^{\aleph_0}$, onde $\mathbb{R}_S$ denota a reta de Sorgenfrey. ■

Exercício E.47. Complete a demonstração do Teorema E.2.14 (de Kaplansky). Dica: há dois detalhes que não foram discutidos no texto, a identidade $E^\star = \bigcup_{n\in\omega} n\overline{B_{E^\star}}$ e a compacidade de cada $K_n := n\overline{B_{E^\star}}$; a identidade segue pois todo funcional contínuo tem norma finita; já a compacidade de K_n segue por $E^\star$ ser um e.v.t. com a topologia fraca estrela – em particular, multiplicar por uma constante não-nula determina um homeomorfismo. ■

Exercício E.48 (Šapirowski)**.** Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos de X. Se X não contém discretos não-enumeráveis, então existem $A \subseteq X$ e $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, ambos enumeráveis, tais que $\overline{A} \cup \left(\bigcup \mathcal{C}'\right) = X$. Generalize em termos de funções cardinais. Dica: para a primeira parte, suponha que não e, com isso, obtenha (recursivamente) um subconjunto discreto D satisfazendo $|D| = \aleph_1$. ■

Exercício E.49. Seja X um espaço T_2 em que todo discreto seja enumerável. Mostre que todo ponto de X é um subconjunto $\mathrm{G}_\mathfrak{c}$, i.e., para cada $p \in X$ existe uma família G de abertos de X com $|G| \leq \mathfrak{c}$ e $\{p\} = \bigcap G$. Dica: para cada $x \neq p$, tome um aberto W_x com $x \in W_x$ e $p \notin \overline{W_x}$ e observe que $\mathcal{C} := \{W_x : x \in X \setminus \{p\}\}$ cobre $X \setminus \{p\}$; utilize o Exercício E.48 para obter $A \subseteq X \setminus \{p\}$ e $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, ambos enumeráveis, tais que $\overline{A} \cup \bigcup \mathcal{C}' \supseteq X \setminus \{p\}$; mostre que $G := \mathcal{V} \cup \mathcal{U}$ satisfaz as condições impostas, onde $\mathcal{V} := \{X \setminus \overline{C} : C \subseteq A$ e $p \notin \overline{C}\}$ e $\mathcal{U} := \{X \setminus \overline{W} : W \in \mathcal{C}'\}$. ■

Jogos topológicos

Exercício E.50. Demonstre o Corolário E.3.7 diretamente. Dica: note que por X ser metrizável e de Lindelöf, X deve ter uma base enumerável, o que permite supor que todas as coberturas por abertos são compostas por abertos de tal base; use isso para simplificar as reduções feitas na demonstração do Teorema E.3.6. ■

Exercício E.51. Dizemos que X é um **espaço de Rothberger** se para toda sequência $(\mathcal{U}_n)_n$ de coberturas por abertos para X existir uma sequência de abertos $(U_n)_n$, com $U_n \in \mathcal{U}_n$ para todo n, tal que $X = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Mostre que 2^ω não é um espaço de Rothberger. ■

Exercício E.52. Mostre que a soma direta de enumeráveis espaços de Menger é de Menger. ■

Exercício E.53. Para um espaço de Tychonoff X, traduza em $\mathcal{C}_p(X)$ o que significa dizer que X é de Menger. Dica: adapte o Teorema E.2.13. ■

Exercício E.54 (Ponto-aberto)**.** Fixado um espaço topológico X, considere $\bigodot(X)$ o jogo entre Player A e Player B que segue as seguintes regras:

(i) na n-ésima rodada, Player A escolhe um ponto, ao que Player B responde com um aberto que contém o ponto escolhido na rodada;

(ii) ao *final* de ω rodadas, Player A vence a partida se a reunião dos abertos escolhidos por Player B cobrir X, caso contrário, Player B vence.

a) Mostre que A$\uparrow \bigodot(X)$ se, e somente se, B$\uparrow$ Rothberger(X). Dica: para $(\Rightarrow)$, chamando por σ a estratégia vencedora de Player A em $\bigodot(X)$, basta fazer com que na n-ésima rodada, Player B escolha $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $\sigma(\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_{n-1}) \in U_n$, onde $\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_{n-1}$ indicam as coberturas escolhidas por Player A no jogo de Menger nas rodadas anteriores; para $(\Leftarrow)$, fixada uma estratégia vencedora ρ para Player B em Rothberger(X), note que para cada sequência finita $s := (\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_n)$ de coberturas por abertos para X, existe $p \in X$ tal que todo aberto em torno de p pertence à família $\{\rho(s^\frown\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathscr{O}_X\}$, o que pode ser usado para definir uma estratégia vencedora para Player A em $\bigodot(X)$, já que neste jogo, Player A deve escolher pontos.

b) Mostre que B$\uparrow \bigodot(X)$ se, e somente se, A$\uparrow$ Rothberger(X). Dica: para $(\Rightarrow)$, como uma estratégia vencedora de Player B em $\bigodot(X)$ deve responder qualquer ponto escolhido por Player A, pode-se utilizá-la para fornecer coberturas para Player A em Rothberger(X); para $(\Leftarrow)$, Player B pode escolher abertos das coberturas indicadas pela estratégia vencedora de Player A em Rothberger(X) a fim de cobrir os pontos escolhidos por Player A em $\bigodot(X)$. ■

Sortidos

Exercício E.55 (Ostaszewski)**.** *Mostre* que uma ordem total $(K, \leq)$ é compacta e separável se, e somente se, existem um intervalo fechado $F \subseteq [0,1]$ e $Y \subseteq F$ tais que K é isomorfa (no sentido de ordem) ao conjunto $(F \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ munido da ordem lexicográfica. Dica: procure pelo artigo original de Ostaszewski, *A characterization of compact, separable ordered spaces* (1974), que apresenta um roteiro bastante acompanhável ao longo de suas três páginas. ■

Exercício E.56. Para um espaço X e um subconjunto A, diz-se que $x \in X$ é um **ponto de acumulação completo** de A se $|U \cap A| = |A|$ para todo aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$. Mostre que para X espaço T_1, X é compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito de X tem ponto de acumulação completo. Dica: se um subconjunto infinito A não tiver ponto de acumulação completo, é possível coletar as testemunhas de modo a formar uma cobertura por abertos para X sem subcobertura finita; agora, se X não for compacto, pode-se tomar uma cobertura por abertos $\mathcal{U} := \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ sem subcobertura finita, cuja cardinalidade $\kappa \geq \aleph_0$ é minimal na classe das cardinalidades das coberturas sem subcoberturas finitas; use isso para construir um subconjunto infinito $A := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ sem ponto de acumulação completo. ■

Exercício E.57 (Compare com o HMP)**.** Seja $\mathcal{I}$ um conjunto de índices com $|\mathcal{I}| > \mathfrak{c}$ e, para cada $i \in \mathcal{I}$, considere um espaço de Hausdorff X_i com pelo menos dois pontos. Mostre que $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ não é separável. Dica: para $A := \{x_n : n \in \omega\} \subseteq \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, a ideia é exibir um aberto W de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ que não intercepta A; como cada X_i é de Hausdorff com pelo menos dois pontos, existem abertos não-vazios e disjuntos U_i e V_i em X_i; use a última observação para definir $g_n \colon \mathcal{I} \to \{0,1\}$ tal que $g_n(i) := 0$ se $x_n(i) \in U_i$ e $g_n(i) := 1$ se $x_n(i) \in V_i$; com isso, defina $g \colon \mathcal{I} \to 2^\omega$ apropriadamente de modo a garantir pelo menos dois $j, k \in \mathcal{I}$ distintos com $g_n(j) = g_n(k)$ para qualquer $n \in \omega$, o que permitirá obter o aberto W desejado. ■

Exercício E.58 (Dimensão de Menger-Urysohn)**.** Para um espaço regular X, define-se $\operatorname{ind}(X)$, a chamada **dimensão indutiva** de X, da seguinte forma:

(i) $\operatorname{ind}(X) \coloneqq -1$ se $X = \emptyset$;

(ii) para $n \in \omega$, $\operatorname{ind}(X) \leq n$ se para todo ponto x de X e toda vizinhança V de x existe um aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$, $U \subseteq V$ e $\operatorname{ind}(\partial U) \leq n - 1$, onde ∂U indica a (subtilizada) *fronteira* de U (Exercício 1.73);

(iii) para $n \in \omega$, $\operatorname{ind}(X) \coloneqq n$ se $\operatorname{ind}(X) \leq n$ e não ocorrer $\operatorname{ind}(X) \leq n - 1$;

(iv) $\operatorname{ind}(X) \coloneqq \infty$ se para todo $n \in \omega$ não ocorrer $\operatorname{ind}(X) \leq n$.

Mostre que para X regular, se $\operatorname{ind}(X) = 0$, então X é zero-dimensional. ■

Observação E.9.12. Há outras definições de dimensão, como a *dimensão de Brouwer-Čech* e a dimensão de Čech-Lebesgue, mais propícias para o contexto da Análise. O leitor interessado pode encontrar muita informação em [39]. Algebristas podem preferir a chamada *dimensão de Krull*, que não costuma ser útil para espaços de Hausdorff, mas que se comporta bem com os espaços típicos da área, como espectros. △

Exercício E.59. Seja X um espaço compacto de Hausdorff e $A \subseteq X$. Mostre que se A não é fechado, então existe um discreto $D \subseteq A$ tal que $\overline{D} \setminus A \neq \emptyset$. ■

Lista de símbolos e siglas

$A[x]$	polinômios na indeterminada x e coeficientes em A, 88
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais, 88
$\mathbb{K}_{\geq 0}$	cone positivo, 89
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais, 92
$\mathfrak{c}$	número cardinal de $\mathbb{R}$, ou *continuum*, 92
$-\infty$ e $+\infty$	pontos no infinito da reta estendida, 94
$\overline{\mathbb{R}}$	reta estendida, 94
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos, 94
TFA	Teorema Fundamental da Álgebra, 94
$\operatorname{char}(A)$	característica do anel A, 104
$A \Delta B$	diferença simétrica entre A e B, 105
$\operatorname{supp}_{\mathcal{I}}(f)$	suporte da função $f\colon \mathcal{I} \to A$, 105
$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i$	soma algébrica de upla com suporte finito, 105
$\operatorname{supp}_A(p)$	suporte de uma sequência/função/etc. num anel A, 106
$\deg_x p$ ou $\deg p(x)$	grau do polinômio p na indeterminada x, 106
$\operatorname{ev}_\beta(p)$	avaliação em β do polinômio p, 107
$\bigoplus \mathcal{N}$ ou $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} N_i$	soma direta externa (interna) dos (sub)módulos N_i, 108
$[-\infty, \beta)$	intervalo na reta estendida, fechado em $-\infty$ e aberto em β, 109
$(\alpha, +\infty]$	intervalo na reta estendida, aberto em α e fechado em $+\infty$, 109
(a, b)	intervalo real aberto em a e b, 109
$[a, b)$	intervalo fechado em a e aberto em b, 110
$(a, b]$	intervalo aberto em a e fechado em b, 110
$[a, b]$	intervalo fechado em a e b, 110
$(-\infty, b)$	intervalo ilimitado inferiormente e aberto em b, 110
$(-\infty, b]$	intervalo ilimitado inferiormente e fechado em b, 110
$(a, +\infty)$	intervalo ilimitado superiormente e aberto em a, 110
$[a, +\infty)$	intervalo ilimitado superiormente e fechado em a, 110
$\mathcal{B}[a, b]$	família das funções limitadas da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$, 110
$\sigma(\mathcal{E})$	σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$, 112
$\mathcal{B}_X$	σ-álgebra de Borel de X, 112
$\operatorname{Obj}(\mathscr{C})$	classe de objetos da categoria $\mathscr{C}$, 113
$\operatorname{Arr}(\mathscr{C})$	classe de morfismos da categoria $\mathscr{C}$, 113
$\operatorname{cod}(f)$	codomínio da seta f, 113
$\operatorname{Mor}_{\mathscr{C}}(x, y)$	classe dos morfismos entre x e y na categoria $\mathscr{C}$, 113
Set	categoria dos conjuntos, 114
Ring	categoria dos anéis com unidade, 114

$\mathcal{C}\textsc{Ring}$	categoria dos anéis comutativos e com unidade, 114
${}_A\textsc{Mod}$	categoria dos A-módulos, 114
$\textsc{Group}$	categoria dos grupos, 114
$\textsc{Cat}$	categoria das categorias, 114
id_a	morfismo identidade do objeto a, 116
$x \simeq_{\mathscr{C}} y$	x e y são $\mathscr{C}$-isomorfos, 117
$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$	categoria oposta de $\mathscr{C}$, 122
$a \amalg b$ ou $a \oplus b$	coproduto categorial entre a e b, 124
$A \sqcup B$ ou $A \dot{\cup} B$	reunião disjunta (coproduto) entre A e B, 124
$\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$	categoria dos funtores de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$, 125
$\tau_\bullet \colon F \Rightarrow G$	transformação natural do funtor F para o funtor G, 125
$\textsc{Poset}^{\uparrow}$	categoria das ordens parciais com setas crescentes, 128
$\textsc{Total}^{\uparrow}$	categoria das ordens totais, 128
$\coprod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$	coproduto categorial dos objetos $\varphi(i)$, 129
$\mathcal{G}^{\uparrow}$	fecho da família $\mathcal{G}$ para cima/, 136
$G^{\uparrow}$	abreviação para $\{G\}^{\uparrow}$, 136
$\mathcal{H}^{\Uparrow}$	filtro gerado por $\mathcal{H}$, 137
$\overline{\mathcal{H}}^{\cap}$	fecho de $\mathcal{H}$ por interseções finitas, 137
p.i.f.	propriedade da interseção finita, 138
$\mathfrak{u}_g$	ultrafiltro principal gerado por g, 138
$\chi(\mathcal{F})$	caráter do filtro $\mathcal{F}$, 139
$\mathcal{T}_x$ ou $\mathcal{T}_{x,X}$	base do filtro de vizinhanças de x, 142
$\mathcal{N}_x$, $\mathcal{N}_{x,X}$ ou $\mathcal{N}_{x,\mathcal{T}}$	filtro de vizinhanças de x (com respeito à topologia $\mathcal{T}$), 142
$\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$	família dos fechados de $(X, \mathcal{T})$, 142
$\mathscr{T}(X)$	coleção das topologias em X, 144
$\mathcal{T}(\mathcal{A})$	topologia gerada pela família $\mathcal{A}$, 144
$\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$	topologia usual da reta, 146
$\overline{A}$, $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(A)$ ou $\mathrm{cl}_X(A)$	fecho topológico de A (com respeito à topologia $\mathcal{T}$), 148
$\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A)$ ou $\mathrm{int}_X(A)$	interior de A (com respeito à topologia $\mathcal{T}$), 148
$\mathrm{Spec}(R)$	espectro do anel R, 151
$V(I)$	fechado básico do espectro de R, 151
$D(r)$ ou $D_R(r)$	aberto básico de $\mathrm{Spec}(R)$, 151
$\mathcal{T}\vert_Y$	topologia induzida em Y, 152
A^{d}	conjunto derivado de A, 154
$B_d(x, r)$	d-bola aberta de centro x e raio r, 156
$B_d[x, r]$	d-bola fechada de centro x e raio r, 156

$\mathrm{conv}\,(A)$	envoltória convexa de A, 475
HB	Teorema de Hahn-Banach, 477
$\sigma(X, Y)$	topologia fraca em X induzida pelo par dual $\langle X, Y\rangle$, 486
$\mathcal{L}(V, W)$	família dos mapas lineares $V \to W$ contínuos, 499
$\mathrm{supp}\,(\varphi)$	fecho dos pontos em que φ não se anula, 502
$\mathcal{K}(X)$	família das funções reais contínuas em X com suporte compacto, 502
$\mathcal{K}_+(X)$	funções contínuas, positivas e com suporte compacto, 502
$\lVert f\rVert_\infty$	norma de uma função com suporte compacto, 504
$\mathbb{R}[G]$	$\mathbb{R}$-álgebra do grupo G, 504
$\mathbb{R}_+[G]$	somas formais positivas de $\mathbb{R}[G]$, 505
$\mathcal{K}(X, S)$	funções com suporte compacto e contido em S, 511
$\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$	integral de φ com respeito a μ, 511
$\varphi * \psi$	convolução das funções φ e ψ, 512
$\check{\psi}$	$\check{\psi}(y) := \psi(y^{-1})$, 512
$\mathcal{B}_X$	σ-álgebra de Borel de X, 517
$\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(X, Y)$	$\mathcal{C}(X, Y)$ com a topologia $\mathcal{S}$-aberta, 532
$[S, O]$	aberto sub-básico típico da topologia $\mathcal{S}$-aberta, 532
$\langle S, U\rangle$	*entourage* básica da convergência uniforme em $\mathcal{S}$, 532
$\mathcal{C}_{\mathcal{S}}(X, Y)$	$\mathcal{C}(X, Y)$ com a topologia/uniformidade da convergência uniforme em $\mathcal{S}$, 532
$(X, \tau) \leq (X, \sigma)$	τ e σ topologias, $\tau \subseteq \sigma$, 533
$\mathcal{C}_k(X, Y)$	$\mathcal{C}(X, Y)$ munido da topologia compacto-aberta, 536
$\mathcal{C}_k(X)$	$\mathcal{C}_k(X, Y)$ com $Y = \mathbb{R}$, 536
HMP	Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, 549
A_I	anel A dotado da topologia I-ádica, 571
$\mathrm{d}(X)$	densidade de X, 574
$\mathrm{w}(X)$	peso de X, 574
$\mathrm{L}(X)$	grau de Lindelöf de X, 575
$\mathrm{K}(X)$	grau de compacidade de X, 575
$\chi(X, x)$	caráter de X em x, 576
$\chi(X)$	caráter de X, 576
$\mathrm{t}(X, x)$	*tightness* de X em x, 576
$\mathrm{t}(X)$	*tightness* de X, 576
$\mathrm{ext}(X)$	extensão de X, 578
$\mathrm{C}\uparrow \textsc{Menger}(X)$	Player C tem estratégia vencedora no jogo de Menger em X, 582
$\kappa \to (\lambda)^\mu_\nu$	toda ν-coloração sobre $[\kappa]^\mu$ tem um λ-homogêneo, 587
$p \vee q$ ou $\bigvee A$	junção entre p e q; junção de A, 596

Referências Bibliográficas

[1] J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. Dover, 2004.

[2] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Springer, 2006.

[3] R. F. Arens. A topology for spaces of transformations. *Annals of Mathematics*, 47(3):480–495, 1946.

[4] A. Arhangel'skii and V. I. Ponomarev. *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*. Mathematics and Its Applications. D.Reidel, 1983.

[5] A. Arhangel'skii and M. Tkachenko. *Topological groups and related structures*. Atlantis, 2008.

[6] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview, 1969.

[7] L. F. Aurichi. Notas de aula, 2017. Notas de aula do curso de Topologia Geral, ministrado em 2017 no ICMC-USP.

[8] B. Banaschewski. A new proof that "Krull implies Zorn". *Mathematical Logic Quarterly*, 40:478–480, 1944.

[9] A. F. Beardon. *Limits: a new approach to real analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[10] R. Beattie and H.-P. Butzmann. *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis*. Springer, 2002.

[11] E. Beckenstein and L. Narici. *Topological Vector Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall/CRC, 2 edition, 2011.

[12] M. Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer, 2012.

[13] B. Blackdar. A bump in the road in elementary topology, 2018. arXiv:1802.04689.

[14] A. Blass. Existence of bases implies the Axiom of Choice. *American Journal of Mathematics*, 31:31–33, 1984.

[15] P. Błaszczyk. A purely algebraic proof of the Fundamental Theorem of Algebra, 2015. arXiv:1504.05609v1.

[16] V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. *Topological Vector Spaces and Their Applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer International Publishing, 1 edition, 2017.

[17] H. Borges and E. Tengan. *Álgebra Comutativa em quatro movimentos*. Projeto Euclides. IMPA, 2014.

[18] G. M. A. Botelho, D. M. Pellegrino, and E. V. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, 2 edition, 2015.

[19] N. Bourbaki. *General Topology, part 1*. Addison-Wesley, London, 1966.

[20] N. Bourbaki. *General Topology, part 2*. Addison-Wesley, London, 1966.

[21] N. Bourbaki. *Topological Vector Spaces: Chapters 1-5*. Springer, 1987.

[22] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 1 edition, 2010.

[23] L. Bukovský. *The structure of the real line.* Monografie Matematyczne 71. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2011.

[24] F. E. Burk. *A Garden of Integrals.* Dolciani Mathematical Expositions. Mathematical Association of America, 2007.

[25] N. L. Carothers. *A short course on Banach space theory.* Cambridge University Press, 2004.

[26] H. Cartan. Théorie des filtres. *Acad. Paris*, 205:595–598, 1937.

[27] B. Cascales, I. Namioka, J. Orihuela, and M. Raja. k-1 - Banach spaces and topology (I). In K. P. Hart, J. Nagata, and J. E. Vaughan, editors, *Encyclopedia of General Topology*, chapter K, pages 49–52. Elsevier, Amsterdam, 2003.

[28] P. L. Clark. General topology, 2017. Notas de aula, University of Georgia.

[29] P. M. Cohn. *Universal Algebra.* Mathematics and Its Applications 6. Springer, 1 edition, 1981.

[30] P. M. Cohn. *Algebra*, volume 3. John Wiley & Sons, 1991.

[31] M. D. F. Costa. Topological games and selection principles. Master's thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos – SP, Brasil, 2019.

[32] A. Dasgupta. Countable metric spaces without isolated points. *Topology explained*, 2005.

[33] M. Deveau and H. Teismann. $72 + 42$: Characterizations of the Completeness and Archimedean Properties of Ordered Fields. *Real Analysis Exchange*, 39(2):261 – 304, 2014.

[34] R. R. Dias. Reflexão de funções cardinais e da metrizabilidade. Master's thesis, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo – SP, Brasil, 2008.

[35] D. E. Dobbs. When is an ordered field a metric space? *Tsukuba J. Math*, 24(2):325–336, 2000.

[36] A. Dold. *Lectures on algebraic topology.* Classics in Mathematics. Springer, 2 edition, 1980.

[37] S. Dolecki and F. Mynard. *Convergence Foundations of Topology.* World Scientific, 2016.

[38] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas. *Mathematical Logic.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 3 edition, 2021.

[39] R. Engelking. *General Topology: Revised and completed edition.* Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[40] M. Escardo and R. Heckmann. Topologies on spaces of continuous functions. *Topology Proc.*, 26, 01 2001.

[41] B. Fine and G. Rosenberger. *The fundamental theorem of algebra.* Undergraduate texts in mathematics. Springer, 1 edition, 1997.

[42] P. Fletcher. and W. Lindgren. *Quasi-Uniform Spaces.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. CRC Press, 1 edition, 1982.

[43] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* Wiley, 2 edition, 1999.

[44] R. H. Fox. On topologies for function spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51(6.P1):429 – 432, 1945.

[45] S. A. Gaal. *Point set topology.* Academic Press, 1964.

[46] D. Georgiou and S. Iliadis. On the greatest splitting topology. *Topology and its Applications*, 156(1):70–75, 2008.

[47] L. Gillman and M. Jerison. *Rings of continuous functions,.* Van Nostrand, 1960.

[48] L. Halbeisen and R. Krapf. *Gödel's Theorems and Zermelo's Axioms: A Firm Foundation of Mathematics.* Springer, 2020.

[49] J. F. Hall. *Completeness of Ordered Fields.* California Polytechnic State University, 2010. Monografia de graduação.

[50] M. Henriksen, J. Isbell, and D. Johnson. Residue class fields of lattice-ordered algebras. *Fundamenta Mathematicae*, 50:107–117, 1961.

[51] H. Herrlich. *Axiom of Choice.* Lecture Notes in Mathematics 1876. Springer, 1 edition, 2006.

[52] H. Herrlich and G. E. Strecker. *Category theory.* Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann, 3 edition, 2007.

[53] R. Hodel. Cardinal functions i. In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 1–62. North-Holland, 1984.

[54] P. Howard and J. E. Rubin. *Consequences of the axiom of choice.* Mathematical Surveys and Monographs 059. American Mathematical Society, 1998.

[55] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to set theory.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 220. M. Dekker, New York, 3 edition, 1999.

[56] S.-T. Hu. *Homotopy theory.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1959.

[57] I. M. James. *Topologies and Uniformities.* Undergraduate Mathematics Series. Springer, 1999.

[58] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[59] P. T. Johnstone. *Stone spaces.* Cambridge studies in advanced mathematics 3. Cambridge University Press, 1 edition, 1982.

[60] J. L. Kelley. *General Topology.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1955.

[61] P. Kenderov. On topological vector groups. *Mat. Sbornik*, 40(4):531–546, 1970.

[62] P. Komjath and V. Totik. *Problems and Theorems in Classical Set Theory.* Problem books in mathematics. Springer, 1 edition, 2006.

[63] K. Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102. North Holland, 1 edition, 1983.

[64] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics.* Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations 19. College Publications, 2009.

[65] K. Kunen. *Set Theory.* College Publications, London, 2011.

[66] D. S. Kurtz and C. W. Swartz. *Theories of integration - The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane.* Series in Real Analysis. World Scientific, 2004.

[67] M. Kwon. Dimension, linear functionals, and norms in a vector space. *The American Mathematical Monthly*, 117(8):738–740, 2010.

[68] E. L. Lima. *Elementos de Topologia Geral.* SBM, 3 edition, 2009.

[69] K. D. Magill. N-point compactifications. *The American Mathematical Monthly*, 72(10):1075–1081, 1965.

[70] M. Mandelkern. A short proof of the Tietze-Urysohn Extension Theorem. *Arch. Math.*, 60:364–366, 1993.

[71] Y. I. Manin. *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2 edition, 2010.

[72] T. Matos-Wiederhold. An alternative to back-and-forth, 2020. arXiv:2008.07460 [math.LO].

[73] R. A. McCoy, S. Kundu, and V. Jindal. *Function Spaces with Uniform, Fine and Graph Topologies.* Springer, 2018.

[74] R. A. McCoy and I. Ntantu. *Topological properties of spaces of continuous functions.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[75] R. M. Mezabarba. *Selection principles in hyperspaces.* PhD thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Sao Carlos – SP, Brazil, 2018.

[76] R. M. Mezabarba. Um curso fechado e limitado de Análise na reta, 2025.

[77] E. Michael. Paracompactness and the lindelöf property in finite and countable cartesian products. *Compositio Mathematica*, 23:199–214, 1971.

[78] E. H. Moore and H. L. Smith. A General Theory of Limits. *American Journal of Mathematics*, 44(2):102–121, 1922.

[79] J. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, Inc, 2nd ed edition, 2000.

[80] F. Mynard. A Convergence-Theoretic Viewpoint on the Arzelá-Ascoli Theorem. *Real Analysis Exchange*, 38(2):431 – 444, 2012.

[81] L. Nachbin. *The Haar integral.* Van Nostrand, 1965.

[82] S. Negri and J. V. Plato. *Structural Proof Theory.* Cambridge, 2008.

[83] N. Noble. Products with closed projections. *Trans. Am. Math. Soc.*, 140:181–191, 1969.

[84] M. S. Nxumalo. Ultrafilters and compactifications. Master's thesis, University of the Western Cape, Cidade do Cabo - África do Sul, 2019.

[85] E. A. Ok. *Real Analysis with Economic Applications.* Princeton University, 2007.

[86] A. Okuyama and T. Terada. Function spaces. In K. Morita and J. iti Nagata, editors, *Topics in General Topology*, chapter 11, pages 411–458. North Holland, Amsterdam, 1989.

[87] R. R. Onishi. Uma introdução ao cálculo das partições para espaços topológicos. Master's thesis, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo – SP, Brasil, 2019.

[88] W. Page. *Topological Uniform Structures.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1989.

[89] J. Picado and A. Pultr. *Frames and Locales: Topology Without Points.* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser, 1 edition, 2010.

[90] G. Preuss. *Foundations of topology: an approach to convenient topology.* Springer, 2002.

[91] J. Propp. Real analysis in reverse. *The American Mathematical Monthly*, 120(5):392–408, 2013.

[92] V. O. Rodrigues. Quando sequências caracterizam fechados. *Acta Legalicus*, 8, 2018.

[93] P. Rothmaler. *Introduction to model theory.* CRC Press, 2000.

[94] J. J. Rotman. *Advanced Modern Algebra, Part 1.* Graduate Studies in Mathematics 165. American Mathematical Society, 3rd edition, 2015.

[95] J. J. Rotman. *Advanced Modern Algebra, Part 2.* Graduate Studies in Mathematics 180. American Mathematical Society, 3rd edition, 2017.

[96] H. Royden. *Real analysis.* Macmillan; Collier Macmillan, 3ed edition, 1988.

[97] M. E. Rudin. A new proof that metric spaces are paracompact. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54(10), 1968.

[98] W. Rudin. *Real and complex analysis.* MGH, 1987.

[99] W. Rudin. *Functional Analysis.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 2nd ed edition, 1991.

[100] B. Russell. *Introduction to Mathematical Philosophy.* Dover, 2 edition, 1993.

[101] S. Salbany. Ultrafilter spaces and compactifications. *Portugaliae Mathematica*, 57(4), 2000.

[102] H. Salzmann, T. Grundhöfer, H. Hähl, and R. Löwen. *The Classical Fields: Structural Features of the Real and Rational Numbers.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2007.

[103] H. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 5th printing edition, 1966.

[104] E. Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations.* Academic Press, 1996.

[105] P. L. Sharma. A class of spaces in which compact sets are finite. *Canadian Mathematical Bulletin*, 24(3):373–375, 1981.

[106] T. B. Singh. *Elements of Topology.* CRC Press, 2013.

[107] L. A. Steen and J. A. Seebach. *Counterexamples in Topology.* Dover, 1995.

[108] V. V. Tkachuk. *A C_p-theory problem book: Topological and function spaces.* Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2011.

[109] J. Voigt. *A Course on Topological Vector Spaces.* Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser, 1 edition, 2020.

[110] R. C. Walker. *The Stone-Čech compactification.* Springer, 1974.

[111] A. J. Ward. The topological characterisation of an open linear interval. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-41(1):191–198, 1936.

[112] S. Warner. *Topological Fields.* North Holland, 1989.

[113] S. Warner. *Topological rings.* North-Holland, 1 edition, 1993.

[114] A. Weil. *Basic Number Theory.* Springer, 1967.

[115] S. Willard. *General Topology.* Addison-Wesley, New York, 1970. Reprinted in 2004 by Dover.

Índice Remissivo