As aventuras de Alice no país das convergências;

ou,

Meu depoimento de Topologia Geral

© 2026 por Renan M. Mezabarba[†]

Última atualização: 23 de fevereiro de 2026.

I knew who I was this morning, but I've changed a few times since then†.

Lewis Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865.

†Eu sabia quem eu era de manhã, mas desde então já mudei algumas vezes.

Sumário

Prefácio

Como muitas pessoas parecem ignorar prefácios em livros de Matemática, tentarei ser bastante breve. Conseguirei? Não[†]. Em contrapartida, *você*[‡] provavelmente não o lerá, então estamos quites.

O presente texto é fruto da reestruturação de um manuscrito não publicado, *Fundamentos de Topologia Geral* [27], cuja redação se estendeu por tanto tempo ($2017 - \infty$) que, ao *final*, percebi não ser mais a mesma pessoa que começou a escrevê-lo. Parte dessa metamorfose vem do fato de que redigir esses "manuais" é, entre outras coisas, meu método de estudo favorito — e aprender acarreta transformação[††]. Outro motivo foi a docência, que me permitiu conhecer melhor o público potencial e perceber que, na prática, meu manuscrito original parecia mais um caderno pessoal de receitas. O último motivo pode ter sido a vida, que me tornou mais pragmático com as notações.

Mas vamos ao que interessa.

Primeiro, convém explicar que os títulos dos capítulos (e do próprio livro) são referências diretas a "Alice no País das Maravilhas"[‡‡]. Péssima ideia, eu sei. Ainda assim, seguir essa estrutura narrativa me obrigou a apresentar as ideias de modo mais convidativo a princípio ("Oh! Veja só um Coelho Branco correndo com um relógio!") para, depois de conquistar a curiosidade, revelar o verdadeiro pano de fundo ("Você já percebeu como a sociedade é arbitrária e caótica?").

Aqui, o Coelho Branco será a noção de *convergência*, mas não se assuste: *ela* não será apresentada desde o princípio de forma abstrata e idealista por meio de *filtros* e *redes*, como em [27], mas de modo modesto e quase tradicional, dentro de um contexto *metrizável*. Armadilha? ~~Óbvio~~ Talvez. Mas foi a maneira menos traumática que encontrei para promover o uso de convergência *fora* do contexto métrico, o tipo de coisa que eu mais gosto de fazer (em Matemática). Eu não conseguiria escrever este texto de outra forma. Afinal, parafraseando o Professor Elon Lages Lima em seu *Elementos de Topologia Geral*, "este livro constitui meu depoimento pessoal sobre que TOPOLOGIA GERAL gostaria que fosse sabida por todos os matemáticos" e, devo acrescentar, matemáticas.

É claro que essa estrutura narrativa poderia ser empregada sem referências explícitas à obra de Lewis Carroll, mas o resultado ficaria esteticamente menos interessante. Assim, para compensar o caos oriundo da minha futilidade e tornar o trabalho simultaneamente *navegável* e útil (tanto para estudantes independentes quanto para docentes sem tempo), *quase todos* os capítulos são subdivididos em duas partes excessivamente organizadas.

[†]Esta obra é contraindicada para pessoas com intolerância a sarcasmo, ironia ou notas de rodapé.

[‡]Esta é a forma que encontrei de escrever sem assumir o gênero de quem lê.

[††]Como já diria Heráclito, *ninguém prova duas vezes o mesmo teorema.*

[‡‡]De Lewis Carroll, segundo a tradução de Maria Luiza X. Borges, de 2013, pela editora Zahar. Há também uma referência indireta a "Frankenstein; ou, O Prometeu Moderno", de Mary Shelley.

A primeira parte, Essencial, reúne (em ordem de *urgência*) os tópicos do capítulo correspondente que considero *essenciais* para um curso *intenso* de Topologia Geral destinado a *pessoas familiarizadas com Matemática Abstrata*. Naturalmente, diversas (sub) seções podem ser omitidas a fim de obter uma versão *menos intensa*. Se for o seu caso, os títulos (quase) autoexplicativos das (sub (sub...)) seções devem ajudar na escolha do que omitir. E não se preocupe: como eu já aprendi a usar `\label` e `\ref`, você saberá para onde ir caso perca algum pré-requisito menos óbvio pelo caminho. Por sua vez, a segunda parte, Extras, traz discussões adicionais que considero importantes, embora menos urgentes — desde revisões de alguns pré-requisitos até "aplicações" dos tópicos essenciais tratados nos capítulos correspondentes. Use-as como preferir.

Para navegar por esse emaranhado de subseções, assumirei que você tem (alguma) familiaridade com teoremas e exemplos clássicos de Análise Real. Tenho dois motivos para isso. Primeiro, fica combinado que você sabe (ou deveria saber) o que são *grupos*, *anéis* e *corpos*, *espaços vetoriais*, *morfismos entre essas estruturas*, relações de *ordem* e de *equivalência*, além de não ter medo de Teoria (Axiomática) dos Conjuntos. Segundo, quem já passou por Análise Real teve seu primeiro contato com as noções de convergência em cenários mais amigáveis, o que deve diminuir o trauma ao reencontrá-las em situações hostis[†].

Agora, independentemente de sua bagagem, fica o pedido: não *ignore* os exercícios! Estes estão distribuídos ao longo de todo o texto, classificados em três grandes classes[‡] descritas a seguir.

- $(\star)$ Verificações que, na prática, dependem apenas dos pré-requisitos. É possível que você já tenha visto muitos dos exercícios nesta classe, ou que consiga resolvê-los mentalmente, de modo *contemplativo* e quase automático. Quando for o caso, você *pode* avançar sem grandes preocupações — mas faça isso por sua conta e risco.

- $(^{\star}_{\star})$ Problemas que envolvem assuntos fora do escopo dos pré-requisitos. Consistem na adaptação de argumentos previamente apresentados ou supostamente conhecidos. Se for o seu primeiro contato com o assunto, não os evite — mas se algum deles parecer muito difícil, avance e retorne depois de um tempo.

- $(^{\ \star}_{\star\star})$ As questões deste grupo são *epistemologicamente* mais complexas do que as anteriores pois suas soluções não dependem apenas de técnicas previamente apresentadas, mas sobretudo de sua *disposição* para perceber padrões implícitos. Elas tendem a se tornar triviais após a introdução de algum conceito numa seção posterior do material. Não se preocupe caso não consiga resolver algumas delas (ou todas) — mas não perca a oportunidade de se divertir tentando.

Você também encontrará diversas perguntas do tipo "(por quê?)*", "(certo?!)$^{\star}_{\star}$", ... distribuídas ao longo do texto, bem como pedidos da forma "(verifique!)*", "(perceba!)$^{\star}_{\star}$", etc. Essas passagens visam escancarar que <u>você</u> *deveria*, pelo menos, refletir sobre as perguntas antes de avançar, afinal de contas, não se estuda Matemática como se lê um romance. Trate tais intervenções como exercícios, por gentileza.

[†]É *possível* acompanhar o texto sem ter feito um curso de Análise? Acredito que sim. Porém, esse não é o perfil do público imaginário que eu tenho em mente ao escrever.

[‡]Há outras variações bem menos frequentes, como $\star/n$ com $n \geq 2$, para exercícios *ridiculamente fáceis*, ou $\star^n$ com $n \geq 4$, para exercícios *ridiculamente difíceis*. Em tempo: a classificação é subjetiva e depende apenas do meu julgamento. Você é livre para discordar.

Alguns avisos finais.

- O objetivo deste texto não é te ensinar *tudo* sobre espaços métricos†. Aqui você encontrará um mínimo sobre espaços métricos, o que espero ser suficiente para que você tenha um bom curso de Topologia Geral.

- O objetivo deste texto não é te ensinar *tudo* sobre Análise Funcional. Aqui você encontrará um mínimo do assunto, o que espero ser suficiente para motivar e contextualizar alguns resultados importantes de Topologia Geral.

- O objetivo deste texto não é te ensinar *tudo* sobre... acho que já deu para entender.

Com isso dito, é importante frisar que o objetivo deste texto também não é te ensinar *tudo* sobre Topologia Geral: na melhor das hipóteses, essa é uma tentativa de *transmitir* o máximo possível do pouco que eu aprendi. Apesar disso, espero que seja material suficiente para te convencer do quão maravilhoso pode ser estudar Topologia Geral.

Por fim, os agradecimentos — que se referem tanto ao presente material quanto ao apócrifo [27]. No universo das coisas que não atrapalharam, destaca-se uma lista importante de elementos *maximais* que me ajudaram, direta ou indiretamente, na dolorosa (re) redação deste texto.

- Minha família, pois para escrever é preciso existir‡.

- As professoras Lúcia Junqueira e Ofélia Alas, por existirem e serem quem são.

- Os professores Marcelo Dias Passos e Rodrigo Roque Dias, que de certa forma foram os responsáveis pelo meu interesse inicial em Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos.

- Os professores Alexandre/“Sasha” Ananin (*in memoriam*), Carlos Grossi, Eduardo Tengan, Leandro Aurichi e Samuel Gomes da Silva, pela inspiração literária.

- Minhas primeiras cobaias, dentre as quais destaco: Alex Pereira, Galvão e Leonardo Cavenaghi — além da minha *leitora constante*, Pryscilla Silva††. A leitura cuidadosa de Caio “*the evil*” Oliveira, nas primeiras etapas da redação, merece atenção especial, bem como uma pontuação adequada. :)

- A ~~falta de juízo~~ coragem de Gisele Paula, que usou parte deste material com (pelo menos) uma de suas turmas de Topologia Geral na UFPR — seus comentários me levaram a reformular o apócrifo [27], o que contribuiu indiretamente para a publicação de [28]. Aproveito para registrar minhas desculpas para com a turma.

- Thales Paiva, meu consultor especial de Topologia Algébrica (e amigo de longa data).

- *Meus* estudantes da UFES (sob o risco de cometer injustiças, não posso deixar de mencionar Fabíola Loterio, João Perim, Lucca Dias e Pedro Schineider).

†Em particular, não espere por *muitos* exercícios básicos ou discussões sobre noções topológicas elementares restritas à reta real. A suposição de que você já sabe o mínimo de Análise Real será levada à sério. Embora isso possa ter como efeito colateral o *gatekeeping*, quero apenas manter o número de páginas abaixo de $\aleph_0$.

‡Exceto para divindades e outras entidades fictícias, como Bourbaki e Stephen King, respectivamente.

††Não só por isso (͡° ͜ʖ ͡°)

- A *turma* da disciplina Topologia II (de 2023), ministrada na UESC, composta por João Santos, Gabriel França, Hellen Pinheiro, Lucas Brasil, Rodrigo Monteiro e Thiago Castro — além do sempre entusiasmado Prof. Germán Gomero. Esse foi o estopim para que eu aceitasse os espaços de convergência como parte oficial dos meus interesses acadêmicos. A turma de 2025, composta por Samilla Santana e Ismar Santos, também me ajudou a consolidar diversas ideias.

- Artur Tomita, Brenno Barbosa, Hugo (tanto o Botós quanto o Ribeiro), Ivo Terek, Júlio Barczyszyn, Luiz Felipe Garcia, Marcos Mercandeli Rodrigues, Pedro Pimenta e Victor Ronchim — por incentivarem esta loucura todas as vezes em que toquei no assunto.

- O professor Eric Schechter, por ter escrito o HAF [38].

- O teorista de tipos Varkor, por ter criado o `quiver`[†].

- Thiago Dourado, pelas enfáticas palavras de incentivo após a publicação de [28]: elas foram um dos principais combustíveis para a reestruturação deste trabalho.

Renan M. Mezabarba

Ilhéus-BA, 23 de fevereiro de 2026.

P.S.: Sempre que possível, leia as notas de rodapé. E não se preocupe, eu pesei a mão deliberadamente neste Prefácio.

P.P.S.: Traçados ~~deste tipo~~ são resquícios (intencionais) dos meus tempos de entusiasta da Desciclopédia. É provável que esse recurso gráfico-narrativo seja ~~censurado~~ suprimido numa eventual versão impressa. *C'est la vie.*

[†] `https://q.uiver.app/`.

Capítulo 1

Pela toca do coelho

Este primeiro capítulo encapsula dois objetivos. Um deles é revisar notações e noções básicas que serão utilizadas ao longo do texto, mostrando o (mínimo do) que você deveria saber antes de avançar para os demais capítulos a fim de ter uma jornada menos dolorosa. O outro é mais nobre, e faz referência direta ao título: motivar a introdução de *espaços topológicos* como uma ferramenta *necessária*, e não como um mero acidente útil[‡]. Evidentemente, você pode pular este capítulo (e retornar ao sentir falta de alguma definição, discussão introdutória, etc.).

1.1 Essencial: métricas, sequências e topologias

1.1.1 Da reta à convergência uniforme

Ao estudar Análise Real, uma das primeiras definições *novas* que se encontra é, possivelmente, a de *sequência convergente*.

Definição 1.1.1. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais **converge** na *reta real*, denotada por $\mathbb{R}$, se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $N \in \mathbb{N}$ de maneira que $|x_n - L| < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. Em tal situação, dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para** o número real L, ou que L é *um* **limite** da sequência. ¶

Secretamente, a definição acima estabelece uma *relação binária*[††] $\to_{\mathbb{R}}$ entre $\operatorname{Fun}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, o conjunto das ~~funções~~ sequências $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, e o conjunto $\mathbb{R}$. Explicitamente:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{R}} L \Leftrightarrow L \text{ é um limite da sequência } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Geralmente após estudar propriedades operatórias dessa relação de convergência, são discutidas as funções *compatíveis* com tal relação, xingadas de *funções contínuas*. Voltaremos a elas em breve, não se preocupe.

O tempo passa, as dimensões aumentam e, mais cedo ou mais tarde, alguém te conta que muito do que você fez em Análise poderia *ter sido feito* num *espaço métrico*, simplesmente trocando as ocorrências de $|x - y| < \varepsilon$ por $d(x, y) < \varepsilon$. Recordar é viver:

Definição 1.1.2. Um **espaço métrico** é um par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma função da forma $X \times X \to \mathbb{R}$, chamada de **métrica**, satisfazendo as quatro condições a seguir:

[‡]Não que as duas situações sejam mutuamente excludentes.

[††]Lembre-se: uma **relação binária** R entre os conjuntos X e Y é, formalmente, um subconjunto $R \subseteq X \times Y$. No entanto, em vez de escrever $(x, y) \in R$, grafa-se $x\ R\ y$ por questões psicológicas.

(i) (*não negatividade*)[†] $d(x,y) \geq 0$;

(ii) (*discernimento*) $d(x,y) = 0$ **sse**[‡] $x = y$,

(iii) (*simetria*) $d(x,y) = d(y,x)$ e

(iv) (*desigualdade triangular*) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

para quaisquer $x, y, z \in X$. Com isso dito, não se preocupe: geralmente iremos nos referir a (X,d) por seu apelido, X, e deixaremos seu sobrenome, a métrica d, subentendida. ¶

Como dito antes, ao trocar "$|x_n - L| < \varepsilon$" por "$d(x_n, L) < \varepsilon$" na Definição 1.1.1, obtém-se a definição de convergência num espaço métrico. Explicitamente, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico X **converge** para um ponto $L \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, L) < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. Como no caso real, isto define uma relação $\to_d$ entre as sequências de $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, X)$ e os pontos de X, o que permite interpretar as funções contínuas entre espaços métricos como aquelas que são compatíveis com suas relações de convergência subjacentes.

Proposição 1.1.3. *Seja $f\colon X \to Y$ uma função entre espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y). Para um ponto $x \in X$ fixado, as duas afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) *para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X vale a implicação*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{d_X} x \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to_{d_Y} f(x);$$

(ii) *para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ sempre que $d_X(x,y) < \delta$.*

Exercício 1.1.1 ($\star$). Prove a proposição anterior. Dica: faça (i) $\Rightarrow$ (ii) pela contrapositiva, i.e., supondo que (ii) falha, obtenha uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X que converge para x em X, mas tal que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f(x)$ em Y; para (ii) $\Rightarrow$ (i), use o $\delta > 0$ da hipótese para obter $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_n, x) < \delta$ sempre que $n \geq N$; se parecer abstrato demais, finja que $X = Y = \mathbb{R}$ e perceba que, no fundo, trata-se apenas de um exercício de ANÁLISE REAL que você já fez. ■

Definição 1.1.4. Sob as hipóteses acima, dizemos que f é **contínua em** x se qualquer uma das condições (i) ou (ii) anteriores for satisfeita. Dizemos que f é **contínua** se f for contínua em todos os pontos de seu domínio. ¶

Justificar o apelo dos espaços métricos é relativamente fácil: abrangência e simplicidade. Essencialmente, ao reescrever o que já se fazia no contexto de $\mathbb{R}$, é possível estender diversos resultados para uma gama bem grande de contextos mais selvagens[††]. Talvez o exemplo fundamental para ilustrar este ponto seja o da *convergência uniforme* entre funções. Para mais alguns exemplos, confira a Subseção 1.2.1.

Definição 1.1.5. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções da forma $X \to \mathbb{R}$, onde X é um conjunto fixado. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** para uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para quaisquer $n \geq N$ e $x \in X$. Daqui em diante, tal situação será abreviada com $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{u}} f$. ¶

[†] É supérfluo em vista de (ii), (iii) e (iv)? Sim. Mas quem liga?
[‡] Abreviação para "se, e somente se".
[††] Por isso é tão fundamental que você tenha cursado ANÁLISE REAL: os truques clássicos com desigualdades usados na disciplina serão reciclados corriqueiramente, de modo que se você não tiver familiaridade com a coisa, tudo parecerá mais difícil do que realmente é.

Você supostamente já estudou convergência uniforme e sabe o quão importante ~~e exigente!~~ ela é. O que você pode não saber é o seguinte: ela é induzida por um métrica em $\operatorname{Fun}(X,\mathbb{R})$.

Proposição 1.1.6. *A função* $\rho\colon \operatorname{Fun}(X,\mathbb{R})\times\operatorname{Fun}(X,\mathbb{R})\to[0,+\infty)$ *dada por*

$$\rho(f,g) := \min\left\{1, \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|\right\}$$

é uma métrica em $\operatorname{Fun}(X,\mathbb{R})$ *com a seguinte propriedade:* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\to_\rho f$ *se, e somente se,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\to_{\mathrm{u}} f$.

Demonstração. As condições (i), (ii) e (iii) na definição de métrica são automáticas, mas se discordar, verifique-as ($\star$). Para a desigualdade triangular, note que para funções $f,g,h\in\operatorname{Fun}(X,\mathbb{R})$ e um ponto $z\in X$, temos

$$|f(z)-g(z)|\leq|f(z)-h(z)|+|h(z)-g(z)|\leq\sup_{x\in X}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in X}|h(x)-g(x)|,$$

acarretando

$$\underbrace{\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|}_{\alpha}\leq\underbrace{\sup_{x\in X}|f(x)-h(x)|}_{\beta}+\underbrace{\sup_{x\in X}|h(x)-g(x)|}_{\gamma}.$$

Para encerrar esta primeira parte, basta notar que para $\alpha,\beta,\gamma\in[0,+\infty]$, a desigualdade $\alpha\leq\beta+\gamma$ acarreta

$$\min\{1,\alpha\}\leq\min\{1,\beta+\gamma\}\leq\min\{1,\beta\}+\min\{1,\gamma\}$$

onde a última desigualdade vale em geral. De fato, como $\beta,\gamma\geq 0$, há dois casos:

- $1\geq\beta+\gamma\geq\beta,\gamma$, e daí $\min\{1,\beta+\gamma\}=\beta+\gamma=\min\{1,\beta\}+\min\{1,\gamma\}$;
- $1<\beta+\gamma$, acarretando $\min\{1,\beta+\gamma\}=1$, de modo que a única forma de a desigualdade desejada falhar seria com $\beta,\gamma<1$, mas disso também resulta

$$\min\{1,\beta\}+\min\{1,\gamma\}=\beta+\gamma\geq 1$$

Para o restante, vamos começar assumindo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\to_\rho f$ e fixando $\varepsilon>0$. Pela hipótese, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n,f)<\min\{\frac{1}{2},\varepsilon\}$ sempre que $n\geq N$. Pela definição de ρ, resulta $\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ e, consequentemente, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ para quaisquer $n\geq N$ e $x\in X$. Para a recíproca, basta tomar $N'\in\mathbb{N}$ tal que $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ para quaisquer $n\geq N'$ e $x\in X$, pois daí $\rho(f_n,f)<\varepsilon$. Os detalhes ficam por sua conta ($\star$). $\square$

Pode parecer bobagem, mas é justamente com esse tipo de observação que ideias elementares têm seu alcance ampliado. Por exemplo, o *Teorema de Arzelà-Ascoli*, que dá condições para que certas sequências de funções contínuas tenham subsequências uniformemente convergentes, nada mais é do que uma generalização métrica de uma das caracterizações de *compacidade* na reta real. Assim, saber que uma certa noção de convergência é oriunda de uma métrica é, *quase sempre*, uma boa notícia para quem pratica Análise.

1.1.2 Métricas não bastam

Apesar do que se ponderou acima, e para a infelicidade de algumas pessoas, nem toda noção de convergência razoável pode ser induzida por uma métrica. Esta subseção se dedica a apresentar uma dessas situações, num contexto bastante natural. Ela se baseia na exposição de Preuss [35] com alguns argumentos adaptados de Kechris [26].

Se você estudou convergência uniforme, então (provavelmente) também estudou convergência pontual. Por via das dúvidas, não custa lembrar.

Definição 1.1.7. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções da forma $X \to \mathbb{R}$, onde X é um conjunto fixado. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge pontualmente** para uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ se para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Daqui em diante, tal situação será abreviada com $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$. ¶

A convergência pontual lembra a convergência uniforme, mas é bem menos restritiva: para ocorrer $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$, basta que se tenha $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{R}} f(x)$ para qualquer $x \in X$. Na prática, para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ fixados, deve existir algum $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tal que uma condição é satisfeita. Por outro lado, na convergência uniforme, para um $\varepsilon > 0$ fixado, um mesmo $N \in \mathbb{N}$ deve satisfazer a condição independentemente do ponto x escolhido. Se isso lhe parecer estranho, é sinal de que precisa revisar algumas coisas de ANÁLISE. Por aqui, prosseguiremos.

Apesar de ser tecnicamente menos exigente em sua definição, a convergência pontual costuma ser mais *selvagem* do que a convergência uniforme. O próximo teorema ilustra isso:

Teorema 1.1.8. *Não existe métrica d em* $\mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *que induza a convergência pontual.*

Mais precisamente, fixada qualquer métrica d em $\mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, a equivalência

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d f \Leftrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$$

deverá ser falsa para alguma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções reais e uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A demonstração desse teorema será uma *desculpa* para revisar alguns conceitos úteis — mas se você estiver com muita pressa, avance para a Observação 1.1.18, na página 19.

Definição 1.1.9. Fixados um conjunto X e um subconjunto $S \subseteq X$, a correspondência $\chi_{X,S}\colon X \to \{0,1\}$ dada por $\chi_{X,S}(x) := 1$ sse $x \in S$ será chamada de **função característica de** S **em** X. Quando X estiver claro pelo contexto, escreveremos apenas χ_S. ¶

Lema 1.1.10. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma sequência $(g_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas do tipo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $(g_{m,n})_{m\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f_n$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} \chi_{\mathbb{Q}}$.*

Demonstração. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, podemos escrever $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ com $a_i \neq a_j$ sempre que $i \neq j$. Fazendo $F_n := \{a_j : j \leq n\}$ e $f_n := \chi_{F_n}$, segue sem grandes dificuldades que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} \chi_{\mathbb{Q}}$ (certo?)*. Agora, basta observar que cada f_n é limite pontual de uma sequência de funções contínuas, trabalho que também será seu ($^\star_\star$). □

Exercício 1.1.2 ($^\star_\star$)**.** Conclua a demonstração. Dica: perceba que, a menos de indução, você só precisa saber que, para um ponto $r \in \mathbb{R}$ qualquer, existe uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ~~triângulos~~ funções contínuas da forma $\mathbb{R} \to [0,1]$, com $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} \chi_{\{r\}}$; também será útil observar que $\chi_{S\cup S'} = \chi_S + \chi_{S'}$ sempre que $S \cap S' = \emptyset$. ■

Para o passo seguinte, convém revisar certas noções típicas de ANÁLISE sob a luz dos espaços métricos[†].

Definição 1.1.11. O **fecho** de um subconjunto S de um espaço métrico X é o conjunto

$$\overline{S} := \left\{x \in X : \text{ existe } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Fun}(\mathbb{N}, S) \text{ tal que } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d x\right\}.$$

Diremos que S é **fechado** se ocorrer $\overline{S} = S$. ¶

Exercício 1.1.3 ($\star$)**.** Mostre que se F e G são fechados, então $F \cap G$ é fechado. Dica: note que a definição já te dá, quase de graça, $\overline{F \cap G} \subseteq \overline{F} \cap \overline{G}$. ■

Lema 1.1.12. *O fecho de S é fechado, i.e., $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.*

Demonstração. Sequências constantes asseguram que $S \subseteq \overline{S}$ para qualquer S, acarretando $\overline{S} \subseteq \overline{\overline{S}}$ (concorda?)*. Para a inclusão oposta, tomamos $x \in \overline{\overline{S}}$ arbitrário a fim de obter uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d x$. Para tanto, observe que por $x \in \overline{\overline{S}}$ temos, a princípio, uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $\overline{S}$ com $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d x$. Agora, por $y_n \in \overline{S}$, existe $x_n \in S$ satisfazendo $d(y_n, x_n) < \frac{1}{2^{n+1}}$ (por quê?)*, e justamente a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem a propriedade procurada: para qualquer $n \in \mathbb{N}$, verifica-se

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x),$$

de modo que para $\varepsilon > 0$ fixado, basta tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ com $d(y_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $n \geq N$. □

Corolário 1.1.13. *Se existe uma métrica d em $\operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que induz a convergência pontual, então $\chi_{\mathbb{Q}}$ é limite pontual de funções contínuas.*

Demonstração. Fazendo $S := \{f \in \operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ é contínua}\}$ e assumindo que d existe, o Lema 1.1.10 assegura que $\chi_{\mathbb{Q}} \in \overline{\overline{S}}$, donde o restante segue do lema anterior. □

Como veremos em breve, o *problema* do corolário anterior é o seguinte: se $\chi_{\mathbb{Q}}$ fosse limite pontual de funções contínuas, então $\chi_{\mathbb{Q}}$ seria descontínua num conjunto *relativamente pequeno* de $\mathbb{R}$.

Observação 1.1.14. A fim de evitar *spoilers*, algumas noções topológicas importantes serão camufladas nas próximas demonstrações. Assim, se você achar que já viu algo parecido antes, saiba que sua memória/intuição está boa. E não se preocupe: tudo será revisto de forma limpa com ferramentas topológicas, oportunamente. △

Lema 1.1.15. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Se existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$, então existe uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$ tais que*

$$D(f) := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ é descontínua em } x\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n,$$

onde nenhum F_n contém um intervalo aberto não vazio.

[†]Futuramente elas serão generalizadas para outros contextos, não se preocupe.

Demonstração (adaptada de Kechris [26]). O passo mais difícil é mostrar que, sob as presentes condições, $f^{-1}[(\alpha,\beta)]$ se expressa como reunião enumerável de fechados, para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ com $\alpha<\beta$. Vamos assumir que tal fato é conhecido por enquanto.

Considere então $\mathcal{B}:=\{I_n : n\in\mathbb{N}\}$ uma *enumeração* de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ da forma (p,q), com $p,q\in\mathbb{Q}$ e $p<q$, o que pode ser feito pois $\mathbb{Q}$ é enumerável[†]. Agora, para um subconjunto $S\subseteq\mathbb{R}$ qualquer, vamos denotar por $i(S)$ ~~o interior de S~~ a reunião de todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ contidos em S. Provemos o seguinte:

⌜**Afirmação.** *A função f é descontínua em $x\in\mathbb{R}$ se, e somente se, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x\in f^{-1}[I_n]\setminus i(f^{-1}[I_n])$.*

Prova da Afirmação. Lembre-se de que f é descontínua em x sse existe $\varepsilon>0$ tal que para qualquer $\delta>0$, existe $y\in\mathbb{R}$ com $|x-y|<\delta$ e $|f(y)-f(x)|\geq\varepsilon$. Assim, assumindo f descontínua em x e tomando o $\varepsilon>0$ assegurado, a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ garante $n\in\mathbb{N}$ tal que $f(x)\in I_n\subseteq(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)$, mostrando que $x\in f^{-1}[I_n]$. Por outro lado, $x\notin i(f^{-1}[I_n])$, caso contrário existiria algum $\delta>0$ com $(x-\delta,x+\delta)\subseteq f^{-1}[I_n]$ e, consequentemente, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ valeria sempre que $|x-y|<\delta$ (percebeu?)*. Portanto, $x\in f^{-1}[I_n]\setminus i(f^{-1}[I_n])$.

Reciprocamente, se $x\in f^{-1}[I_n]\setminus i(f^{-1}[I_n])$, então f é descontínua em x. Com efeito, tomando $\varepsilon>0$ tal que $(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)\subseteq I_n$, note que por $x\notin i(f^{-1}[I_n])$, para qualquer $\delta>0$ deve-se $(x-\delta,x+\delta)\nsubseteq f^{-1}[I_n]$, donde segue que algum y satisfaz $|x-y|<\delta$ com $f(y)\notin I_n$ e, consequentemente, $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$. ⌟

Agora, pela suposição feita no começo da demonstração, $f^{-1}[I_n]$ se expressa como reunião enumerável de fechados, digamos $(F_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$, enquanto a definição de $i(f^{-1}[I_n])$ permite mostrar que $G_n:=\mathbb{R}\setminus i(f^{-1}[I_n])$ é fechado (lembra?)$^{\star}_{\star}$. Logo,

$$f^{-1}[I_n]\setminus i(f^{-1}[I_n])=\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}F_{n,j}\right)\cap\left(\mathbb{R}\setminus i\left(f^{-1}[I_n]\right)\right)=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(F_{n,j}\cap G_n)$$

é reunião enumerável de fechados (pelo exercício anterior). Para encerrar, basta observar que, para quaisquer $n,j\in\mathbb{N}$, $F_{n,j}\cap G_n$ não contém intervalos abertos não vazios: se $I\subseteq\mathbb{R}$ *fosse* intervalo aberto tal que $I\subseteq F_{n,j}\cap G_n$ e $x\in I$, então I *testemunharia* que $x\notin G_n$ (por quê?)*, uma contradição. Portanto, a *família*[‡] de fechados procurada é $\{F_{n,j}\cap G_n : n,j\in\mathbb{N}\}$, a menos de re-enumeração. Resta a parte difícil, não é mesmo? □

Exercício 1.1.4 ($^{\star}_{\star}$)**.** Considere f_n e f como no lema anterior.

a) Para $c\in\mathbb{R}$ qualquer, mostre que $f(x)\geq c$ sse para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $m>n$ tal que $f_m(x)>c-\frac{1}{2^n}$. Conclua que $f^{-1}[[c,+\infty)]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m>n}f_m^{-1}\left[\left(c-\frac{1}{2^n},+\infty\right)\right]$.

b) Para $m\in\mathbb{N}$, mostre que $f_m^{-1}[I]$ é reunião de intervalos abertos sempre que I é um intervalo aberto. Dica: f_m é contínua.

c) Mostre que $f^{-1}[(\alpha,\beta)]$ é reunião enumerável de fechados. Dica: lembre-se (ou note...) que se $I\subseteq\mathbb{R}$ é reunião de intervalos abertos, então $\mathbb{R}\setminus I$ é fechado; depois, expresse $(\alpha,\beta)=\mathbb{R}\setminus((-\infty,\alpha]\cup[\beta,+\infty))$ e utilize os dois itens anteriores[††]. ■

[†]Explicitamente: a função $\pi\colon\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathcal{B}$ que faz $\pi(p,q):=(p,q)$ se $p<q$ e $\pi(p,q):=(0,1)$ caso contrário, é sobrejetora, acarretando em $|\mathcal{B}|\leq|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|$; portanto, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{B}$, dado que $\mathcal{B}$ é infinito e $|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$. Acostume-se o quanto antes com esse tipo de argumento.

[‡]Neste texto, as expressões "família", "coleção" e "conjunto" serão tratadas como sinônimos.

[††]Você também vai precisar das Leis de De Morgan para interseções e reuniões quaisquer. Não sabe do que se trata? Parabéns! Acabou de descobrir algo que precisa revisar!

Corolário 1.1.16. *Se existe uma métrica d em $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que induz a convergência pontual, então existe uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fechados de $\mathbb{R}$ tal que*

(i) $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$;

(ii) $i(F_n) = \emptyset$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *i.e., nenhum* F_n *contém um intervalo aberto não vazio.*

Demonstração. Em vista do lema anterior, tudo segue por valer $D(\chi_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{R}$, i.e., a função característica dos racionais é descontínua em todos os pontos da reta (lembra?)*. □

São justamente os dois itens acima que se revelam incompatíveis com a (*completude* da) reta real. Antes de prosseguir, recorde-se do seguinte

Exercício 1.1.5 ($\star$). Mostre que intervalos fechados são fechados em $\mathbb{R}$. Explicitamente: para $a, b \in \mathbb{R}$, $\overline{[a, b]} = [a, b]$. Dica: monotonicidade. ■

Teorema 1.1.17 (de Baire, em $\mathbb{R}$). *Se $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de fechados de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $i(F_n) \neq \emptyset$, i.e., pelo menos um dos fechados F_n contém um intervalo aberto não vazio.*

Demonstração. Primeiro, observe que se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto não vazio de $\mathbb{R}$ e $F \subseteq \mathbb{R}$ é um fechado com $i(F) = \emptyset$, então não apenas vale $I \setminus F \neq \emptyset$ (evidente, certo?)*, mas também $i(I \setminus F) \neq \emptyset$, i.e., $I \setminus F$ contém um intervalo aberto não vazio: para $x \in I \setminus F$ fixado, algum $r > 0$ satisfaz $(x - r, x + r) \subseteq I \setminus F$, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos tomar $x_n \in F$ com $|x_n - x| < \frac{1}{2^n}$, acarretando $(x_n)_n \to_{\mathbb{R}} x$ e, consequentemente, $x \in F$. Com isso em mente, vamos assumir $i(F_n) = \emptyset$ para todo n.

Dessa forma, começando com $I_0 := (-1, 1)$ e F_0, existem $x_0 \in I_0 \setminus F_0$ e $r_0 \in \mathbb{R}$ com $0 < r_0 < 1$ tais que $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subseteq I_0 \setminus F_0$ (percebeu?)*. Reaplicando o raciocínio, desta vez com $I_1 := (x_0 - r_0, x_0 + r_0)$ e F_1, existem $x_1 \in I_1$ e $r_1 \in \mathbb{R}$, com $0 < r_1 < \frac{1}{2}$, tais que $[x_1 - r_1, x_1 + r_1] \subseteq I_1 \setminus F_1$. Procedendo recursivamente, obtemos uma sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais com $0 < r_n < \frac{1}{2^n}$ para todo n, bem como uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $[x_{n+1} - r_{n+1}, x_{n+1} + r_{n+1}] \subseteq (x_n - r_n, x_n + r_n)$ e $[x_n - r_n, x_n + r_n] \cap F_n = \emptyset$ para todo n.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sequência de Cauchy*[†] (certo?)*, existe um ponto $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{R}} x$, justamente o ponto que não pertence a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. De fato, como o intervalo $J_n := [x_n - r_n, x_n + r_n]$ é fechado e $(x_m)_{m\geq n}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *totalmente contida* em J_n, resulta que $x \in J_n$ (percebeu?)* e, consequentemente, $x \notin F_n$. Como n foi arbitrário, a conclusão desejada segue *pela contrapositiva* (por quê?)*. □

Demonstração do Teorema 1.1.8. Ora, a existência de uma métrica como no enunciado violaria as consequências do teorema anterior (cf. Corolário 1.1.16). □

Observação 1.1.18 (Roteiro alternativo). Há um caminho bem mais simples[‡] para provar o Teorema 1.1.8, que pode ser útil para quem está com pressa (ou com preguiça). A coisa toda se baseia no seguinte:

[†]Lembre-se: "ser **de Cauchy**" significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N$. Uma das propriedades fundamentais de $\mathbb{R}$ é, justamente, que toda sequência de Cauchy converge. Mas você já viu isso em ANÁLISE REAL, certo? Em tempo: sequências de Cauchy em espaços métricos são definidas de maneira análoga.

[‡]Eu conheci esse argumento na obra de Buskes e van Rooji [13], meses depois de ter redigido o roteiro anterior. Como acredito que ambos os argumentos tenham seus méritos, mantive os dois.

Exercício 1.1.6 ($\star$). Num espaço métrico (X, d), mostre que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $p \in X$ sse $(d(x_n, p))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ em $\mathbb{R}$. ■

Com o resultado acima em mãos, suponha que d seja uma métrica em $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que induza a convergência pontual. Observe que para qualquer sequência injetiva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, a sequência correspondente $\left(\chi_{\{x_n\}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ converge pontualmente para a função nula $\underline{0}_{\mathbb{R}}$: afinal, para $r \in \mathbb{R}$ fixado, ou $r \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, e daí $\chi_{\{x_n\}}(r) = 0$ para todo n, ou existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r = x_N$, e daí $\chi_n(r) = 0$ para todo $n > N$. Logo, pelo exercício anterior, $\left(d(\chi_{\{x_n\}}, \underline{0}_{\mathbb{R}})\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ em $\mathbb{R}$.

Consequentemente, para cada $m \in \mathbb{N}$, a coleção $S_m := \left\{x \in \mathbb{R} : d(\chi_{\{x\}}, \underline{0}_{\mathbb{R}}) > \frac{1}{2^m}\right\}$ é finita, caso contrário existiria uma sequência injetiva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais em S_m, o que se mostra incompatível com a observação no final do parágrafo anterior. No entanto, por d ser métrica e $\chi_{\{x\}} \neq \underline{0}_{\mathbb{R}}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, resulta $d(\chi_{\{x\}}, \underline{0}_{\mathbb{R}}) > 0$, acarretando $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$, donde se concluiria que $\mathbb{R}$ é enumerável! Absurdo. △

1.1.3 A topologia de um espaço métrico

Num primeiro momento, a subseção anterior explicitou a ineficácia das métricas para englobar noções razoáveis de convergência, o que sugere a busca por estruturas mais gerais. Dado que o apego às distâncias nos levou à noção de métrica, precisamos nos ater a comportamentos mais sutis ou indiretos que estejam presentes nas convergências que conhecemos a fim de identificar alguma boa *estrutura*.

No caso de um espaço métrico (X, d), por exemplo, para uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e um ponto $x \in X$, a ocorrência ou falha de "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d x$" depende de *testemunhas* bem específicas.

Definição 1.1.19. Fixados um ponto $x \in X$ num espaço métrico (X, d) e um número real $r > 0$,

$$B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

indica a **d-bola aberta de centro** x e raio r. Naturalmente, quando a métrica d estiver clara pelo contexto, d-bolas abertas serão chamadas meramente de *bolas abertas*, e o subíndice d poderá ser esquecido. ¶

Exercício 1.1.7 ($\star$). Para uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico (X, d) e um ponto $x \in X$, mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d x$ sse para toda *bola aberta* B com $x \in B$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ sempre que $n \geq N$. Dica: observe que se $B = B_d(y, r)$ e $x \in B$, então $\varepsilon := r - d(x, y) > 0$ satisfaz $B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_d(y, r)$. ■

O exercício anterior assegura que as bolas abertas são testemunhas de convergência em espaços métricos, no seguinte sentido: uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto x sse *toda* bola aberta B *em torno de* x contém *algum rabo* da sequência, i.e., se para algum $N \in \mathbb{N}$ ocorrer $\{x_n : n \geq N\} \subseteq B$. Vamos usar tal propriedade para *caracterizar* as *testemunhas* de convergência em espaços métricos.

Definição 1.1.20. Um subconjunto S de um espaço métrico X será chamado de **d-aberto** (em X ou de X) se para todo $x \in S$ e toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d x$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq N\} \subseteq S$. Como de costume, o sufixo d será abandonado sempre que não houver risco de confusão. ¶

Observação 1.1.21. Em outras palavras, S é d-aberto sse S é testemunha de convergência de todos os seus pontos. △

Os abertos usuais da reta real, que você conheceu em seus cursos de ANÁLISE, são abertos de $\mathbb{R}$ no sentido acima ao considerarmos a métrica de $\mathbb{R}$ induzida pelo valor absoluto. Talvez fique mais fácil de acreditar depois da próxima

Proposição 1.1.22. *Num espaço métrico X, um subconjunto $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq A$. Em particular, bolas abertas são abertas.*

Demonstração. Se não existe tal $r > 0$ para algum $a \in A$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ é *possível obter* $a_n \in B\left(a, \frac{1}{2^n}\right) \setminus A$, de maneira que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X que converge para a, mas com $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap A = \emptyset$. Logo, A não é aberto. Por outro lado, se tal $r > 0$ existe e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ para algum $x \in A$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq N\} \subseteq B(x, r) \subseteq A$, mostrando que A é aberto. A parte final é automática. □

Exercício 1.1.8 ($\star$)**.** Mostre que um subconjunto de um espaço métrico X é aberto em X sse é reunião de bolas abertas. Dica: $A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$ e, se A é aberto, então para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ com $B(x, r_x) \subseteq A$. ■

Observação 1.1.23. Em ANÁLISE REAL, você aprendeu que "aberto $\neq$ intervalo aberto". Como as bolas abertas de um espaço métrico fazem o mesmo papel dos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ (percebeu?)*, a mesma lição se mantém: nem todo aberto de um espaço métrico é uma bola aberta, embora toda bola aberta seja aberta. Em tempo: você também deve ter aprendido que *conjuntos não são portas*, i.e., "ser fechado" não é sinônimo de "não ser aberto", e vice-versa. Nunca se esqueça: o dicionário não tem a última palavra aqui — apenas as definições interessam! △

Consequentemente, tanto as noções de convergência de sequências quanto continuidade de funções entre espaços métricos podem ser reformuladas em termos de abertos. Mais precisamente:

Teorema 1.1.24. *Sejam X e Y espaços métricos, $f: X \to Y$ uma função, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X e $x \in X$ um ponto.*

(i) *Ocorre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ se, e somente se, para todo $A \subseteq X$ aberto com $x \in A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq N\} \subseteq A$.*

(ii) *A função f é contínua em x se, e somente se, para todo aberto $V \subseteq Y$ tal que $f(x) \in V$ existe $U \subseteq X$ aberto com $x \in U$ e $f[U] \subseteq V$.*

(iii) *A função f é contínua se, e somente se, $f^{-1}[V]$ é aberto em X sempre que $V \subseteq Y$ é aberto em Y.*

Exercício 1.1.9 ($^{\star}_{\star}$)**.** Prove o teorema anterior. Dica: para uma solução clássica, reviva seus argumentos de ANÁLISE REAL por meio da Proposição 1.1.22, mas se quiser ter um vislumbre do futuro, tente aplicar explicitamente *apenas* a Definição 1.1.20 (e perceba que, em quase todos os itens, isso funcionará somente numa das direções!). ■

O teorema acima mostra que, para lidar com convergência e continuidade em espaços métricos, basta entender o comportamento das sequências e funções com respeito aos abertos dos espaços em questão. Evidentemente, isto não dispensa as métricas, posto que elas são usadas na descrição dos abertos, mas sugere que essa *estrutura adicional* é a verdadeira responsável pelas propriedades de convergências em espaços métricos.

Exemplo 1.1.25. Em GEOMETRIA ANALÍTICA, você aprendeu que a *distância* entre dois ~~vetores~~ pontos $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ se mede por meio da fórmula

$$d_2((a,b),(c,d)) := \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2},$$

conhecida como **distância** (ou *métrica*) **euclidiana**†. As bolas abertas segundo esta métrica são, geometricamente, "bolas" no sentido usual (faça um desenho?)*.

No entanto, a métrica euclidiana não é a única disponível em $\mathbb{R}^2$. Podemos definir, por exemplo,

$$d_\infty((a,b),(c,d)) := \max\{|a-c|, |b-d|\},$$

chamada de *métrica* **do máximo**, evidentemente uma métrica (certo?)* no sentido da Definição 1.1.2. As bolas abertas segundo esta métrica são quadrados ou, mais precisamente, produtos cartesianos entre intervalos abertos de mesmo comprimento (são?)*.

Outra métrica comum é a **zero-um** (ou *métrica* **discreta**), em que a distância entre pontos distintos é definida como sendo 1 (e como 0 quando os pontos são iguais, obviamente). Diferente dos casos anteriores, as bolas abertas segundo esta métrica são *pontos* e o próprio $\mathbb{R}^2$: para $x \in \mathbb{R}^2$ e $0 < r < 1$, $B(x,r) = \{x\}$, enquanto $B(x,s) = \mathbb{R}^2$ para qualquer $s \geq 1$.

Embora todas as métricas acima sejam diferentes entre si, duas delas têm em comum algo que a outra não tem: a *topologia*. Explicitamente, d_2 e d_∞ determinam os mesmos abertos (quais?)‡, enquanto a métrica discreta induz uma família diferente de abertos: todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é aberto segundo a métrica zero-um (certo?)*, mas nenhum subconjunto finito de $\mathbb{R}^2$ pode ser aberto com respeito às outras duas métricas (por quê?)*. Em particular, o teorema anterior assegura que podemos trocar a métrica euclidiana pela métrica do máximo para tratar de qualquer problema sobre convergência ou continuidade, posto que tais noções dependem apenas dos abertos induzidos pelas métricas. ▲

A questão agora se torna abstrair as propriedades *fundamentais* da família dos abertos de um espaço métrico a fim de utilizá-las na definição de uma estrutura *ideal* para estudar convergências. A fim de não poluir a argumentação com εpsilons e δeltas desnecessários, vamos dar um passo um pouco mais ousado††.

Fixado um conjunto X, seja L uma relação binária entre $\operatorname{Fun}(\mathbb{N}, X)$ e X. Porém, em vez de escrever $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ L\ x$ para indicar que $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x\right) \in L$, vamos utilizar a notação mais sugestiva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_L x$. Trata-se apenas de uma generalização do método já empregado para introduzir, por exemplo, as noções de convergência uniforme e pontual entre funções. Portanto, nada novo sob o sol.

Definição 1.1.26. Sob as condições acima, diremos que um subconjunto $S \subseteq X$ é **L-aberto** (em X) se para todo $x \in S$ e toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_L x$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq N\} \subseteq S$. ¶

Sim: esta é uma generalização da Definição 1.1.20, em que o mesmo critério foi utilizado para definir os abertos de um espaço métrico. Todavia, desta vez não se exigiu que L fosse a *convergência* induzida por uma métrica em X. Dois motivos justificam o afrouxamento:

†Isto será revisado com um pouco mais de calma, mas não muita, na Subseção 1.2.1.

‡Pense no Exercício 1.1.8 com carinho ($^{\star}_{\star\star}$).

††Em certo sentido, seguindo os rastros do próprio Fréchet (cf. [12]).

(i) buscamos propriedades capazes de descrever, por exemplo, a convergência pontual, que foge do escopo das métricas;

(ii) nenhuma hipótese adicional é necessária para demonstrar o próximo

Teorema 1.1.27. *Sob as condições acima, a família $\mathcal{T}_L$ formada pelos subconjuntos L-abertos de X, tem as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_L$, *i.e.,* $\emptyset$ *e* X *são L-abertos;*

(ii) *se* $U, V \in \mathcal{T}_L$, *então* $U \cap V \in \mathcal{T}_L$, *i.e., a interseção (finita) de L-abertos é L-aberta;*

(iii) *se* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_L$, *então* $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}_L$, *i.e., a reunião (arbitrária)*[†] *de L-abertos é L-aberta.*

Demonstração. Para que $\emptyset$ não fosse L-aberto, deveria existir $x \in \emptyset$ tal que... Portanto, $\emptyset \in \mathcal{T}_L$. Por sua vez, se $x \in X$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_L x$, então $\{x_n : n \geq 0\} \subseteq X$ trivialmente, mostrando que X é L-aberto. Agora, se $U, V \in \mathcal{T}_L$ e $y \in U \cap V$ é tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_L y$, então existem $M, N \in \mathbb{N}$ tais que $\{y_n : n \geq M\} \subseteq U$ e $\{y_n : n \geq N\} \subseteq V$, de modo que ao tomar $O := \max\{M, N\}$ obtemos $\{y_n : n \geq O\} \subseteq U \cap V$, ou seja, $U \cap V \in \mathcal{T}_L$. Para encerrar, se $z \in \bigcup \mathcal{U}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_L z$, então para algum $U \in \mathcal{U}$ temos $z \in U$, assegurando a existência de $N' \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq N'\} \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. □

Definição 1.1.28. Uma **topologia** $\mathcal{T}$ num conjunto X é uma família de subconjuntos de X, chamados de **$\mathcal{T}$-abertos**, satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) no teorema anterior. O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de **espaço topológico**, embora frequentemente a topologia $\mathcal{T}$ seja omitida, como de costume; em tais situações, os membros da topologia serão xingados de *abertos* de (ou em) X. ¶

Toda a discussão feita até aqui já mostra que *topologias* permitem descrever convergência e continuidade do contexto métrico clássico já que, por meio da topologia dos abertos induzidos por uma métrica, todo espaço métrico é, *naturalmente*, um espaço topológico. Para encerrar esta subseção com uma boa notícia, vamos ver que a convergência pontual também é induzida por uma topologia, no seguinte sentido.

Definição 1.1.29. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X e $x \in X$ um ponto. Diremos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **$\mathcal{T}$-converge para** $x \in X$, abreviado como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{T}} x$, se para todo $\mathcal{T}$-aberto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq N\} \subseteq U$. ¶

Proposição 1.1.30. *Existe uma topologia* $\mathcal{T}$ *em* $\operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *tal que*

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f \Leftrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{T}} f.$$

Demonstração. Para $S \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $r > 0$, considere

$$B(f; S; r) := \{g \in \operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : |f(x) - g(x)| < r \text{ para todo } x \in S\}.$$

Vamos definir $\mathcal{T}$ da seguinte forma: diremos que $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é $\mathcal{T}$-aberto se para todo $f \in \mathcal{A}$ existirem um subconjunto finito $S \subseteq \mathbb{R}$ e um número real $r > 0$ tais que $B(f; S; r) \subseteq \mathcal{A}$. Verificar que isto de fato define uma topologia será problema seu (mas confira o próximo exercício para receber algumas dicas)[⋆]. Tratemos do que interessa.

[†] Se você preferir escrever $\mathcal{U} := \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto de índices $\mathcal{I}$, saiba que $\bigcup \mathcal{U}$ é a mesma coisa que $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$.

Primeiro, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$ e $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um $\mathcal{T}$-aberto com $f \in \mathcal{A}$, então existem $S := \{s_0,\ldots,s_m\}$ e $r > 0$ tais que $B(f;S;r) \subseteq \mathcal{A}$. Da convergência pontual, existem $N_i \in \mathbb{N}$ tais que $|f_n(s_i) - f(s_i)| < r$ sempre que $n \geq N_i$, para todo $i \leq m$. Logo, com $N := \max\{N_0,\ldots,N_m\}$, resulta $f_n \in B(f;S;r) \subseteq \mathcal{A}$ sempre que $n \geq N$, i.e., $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{T}} f$. Para a recíproca, a fim de concluir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$, basta aplicar a definição de *convergência topológica* para $\mathcal{T}$-abertos da forma $B(f;\{x\};\varepsilon)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Os detalhes ficam por sua conta ($\star$). □

Exercício 1.1.10 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para $f \in \operatorname{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $S,T \subseteq \mathbb{R}$ e $s,t \in \mathbb{R}$ com $s,t > 0$, mostre que $B(f;S\cup T;\min\{s,t\}) \subseteq B(f;S;s) \cap B(f;T;t)$. Use isso para concluir que a família $\mathcal{T}$ definida na demonstração anterior é, de fato, uma topologia. ■

Corolário 1.1.31. *Uma topologia $\mathcal{T}$ como a da última proposição não é **metrizável**, i.e., não pode ser induzida por uma métrica.*

Demonstração. O contrário violaria o Teorema 1.1.8. □

Observação 1.1.32 (Opcional)**.** Numa narrativa usual, seria preferível reaproveitar a Definição 1.1.26 e, em vez de $\mathcal{T}$, considerar $\mathcal{T}_{\to_{\mathrm{p}}}$, i.e., declarar como abertos todos os subconjuntos $\mathcal{A}$ de $\operatorname{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ para os quais $\{f_n : n \geq N\} \subseteq \mathcal{A}$ para algum N sempre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$ com $f \in \mathcal{A}$. Neste caso, a direção "$\Rightarrow$" vale por construção, enquanto "$\Leftarrow$" segue pois os subconjuntos da forma $B(f;S;r)$ *também* são $\mathcal{T}_{\to_{\mathrm{p}}}$-abertos.

Exercício 1.1.11 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$ sse $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{T}_{\to_{\mathrm{p}}}} f$ sob as condições anteriores. Dica: se $S \subseteq \mathbb{R}$ é finito e $r > 0$, então $B(f;S;r)$ é $\mathcal{T}_{\to_{\mathrm{p}}}$-aberto, i.e., se $h \in B(f;S;r)$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} h$, então $\{h_n : n \geq N\} \subseteq B(f;S;r)$ para algum $N \in \mathbb{N}$. ■

Com isso dito, convém mencionar que o protagonismo dado à topologia $\mathcal{T}$ se deve a motivos que ainda serão revelados. Mas para atiçar sua curiosidade, pergunte-se o seguinte: será que todo $\mathcal{T}_{\to_{\mathrm{p}}}$-aberto é $\mathcal{T}$-aberto? △

1.1.4 Sequências não bastam

Talvez você tenha percebido que a definição de convergência topológica foi inspirada pelo item (i) do Teorema 1.1.24, o que sugere utilizar o item (ii) para definir o significado de continuidade de funções entre espaços topológicos.

Definição 1.1.33. Uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos $(X,\mathcal{T}_X)$ e $(Y,\mathcal{T}_Y)$ é **contínua num ponto** $p \in X$ se para todo $\mathcal{T}_Y$-aberto $V \subseteq Y$ tal que $f(p) \in V$ existe um $\mathcal{T}_X$-aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Dizemos que f é **contínua** se f for contínua em todos os pontos de seu domínio. ¶

A próxima proposição é, em certo sentido, sintoma de que a definição é boa (compare com o terceiro item do supracitado Teorema 1.1.24).

Proposição 1.1.34. *Para uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos, as duas afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) *a função f é contínua;*

(ii) *para todo $V \subseteq Y$, tem-se $f^{-1}[V]$ aberto em X sempre que V for aberto em Y.*

Demonstração. Se vale (i) e $p \in f^{-1}[V]$, então a hipótese garante $U_p \subseteq X$ aberto em X tal que $p \in U_p$ com $U_p \subseteq f^{-1}[V]$ (percebeu?)*. Logo,

$$f^{-1}[V] = \bigcup_{p \in f^{-1}[V]} \{p\} \subseteq \bigcup_{p \in f^{-1}[V]} U_p \subseteq f^{-1}[V],$$

mostrando que $f^{-1}[V]$ é reunião de abertos de X e, portanto, é aberto em X (viu?)*. Como nada precisa ser feito nas situações em que $f^{-1}[V] = \emptyset$, acabou: temos (ii). Por outro lado, assumindo a validade de (ii), basta tomar $U := f^{-1}[V]$ na definição de continuidade no ponto p. Os detalhes restantes ficam por sua conta ($\star$). $\square$

Contudo, há uma rota alternativa aqui, com potencial para trazer problemas "metodológicos": em vez de usar o Teorema 1.1.24 como inspiração para definir continuidade *topológica*, poderíamos ter usado a inesquecível Proposição 1.1.3, que caracteriza continuidade de funções entre espaços métricos como preservação de convergência de sequências. A fim de respeitar a precedência, vamos dar outro nome para a noção correspondente de continuidade.

Definição 1.1.35. Uma função $f\colon X \to Y$ entre espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é **sequencialmente contínua num ponto** $p \in X$ se $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{T}_Y} f(p)$ sempre que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência em X que $\mathcal{T}_X$-converge para p. Como de costume, diremos que f é **sequencialmente contínua** se f for sequencialmente contínua em todos os pontos de seu domínio. ¶

Os argumentos *de sempre* permitem que você resolva o próximo

Exercício 1.1.12 ($\star$)**.** Sob as hipóteses anteriores, mostre que se f é contínua (num ponto p), então f é sequencialmente contínua (no ponto p). ■

O problema alertado é o que dá nome a esta subseção: sequências não bastam, no sentido de que a recíproca do exercício anterior pode ser falsa!

Exemplo 1.1.36. Seja $\mathcal{Z} := \{f \in \mathrm{Fun}([0,1],[0,1]) : f \text{ é Riemann-integrável}\}$. Mesmo que você não se lembre das caracterizações de funções Riemann-integráveis, é *gramaticalmente* óbvia a boa definição da função

$$\begin{aligned} F\colon \mathcal{Z} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

onde $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ denota a *integral de Riemann* da função f.

Algo bem menos óbvio é o *fato* de que tal função é *sequencialmente contínua* com respeito à *convergência pontual*, i.e., se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de funções Riemann-integráveis do tipo $[0,1] \to [0,1]$, com $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$, com $f\colon [0,1] \to [0,1]$ Riemann-integrável, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ao adaptar a definição da topologia $\mathcal{T}$ utilizada na demonstração da Proposição 1.1.30 para o presente contexto, mostra-se que existe uma topologia $\mathscr{T}$ em $\mathcal{Z}$ segundo a qual a função $F\colon \mathcal{Z} \to [0,1]$ se revela sequencialmente contínua "de verdade": *basta* declarar

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Z}$ como $\mathscr{T}$-aberto sse para todo $f \in \mathcal{A}$ existirem um subconjunto finito $S \subseteq [0,1]$ e $r > 0$ tais que

$$B_{\mathcal{Z}}(f;S;r) := \{g \in \mathcal{Z} : |f(x) - g(x)| < r \text{ para todo } x \in S\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Se não lhe parecer óbvio: verifique $\left({}^{\star}_{\star}\right)$.

Quer saber qual a parte engraçada? A função F não é contínua[†]! Por exemplo, fixada uma função $f \in \mathcal{Z}$ com $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t > 0$ e tomando $V := (0, +\infty)$, não há $\mathscr{T}$-aberto $\mathcal{A}$ *em torno* de f tal que $F[\mathcal{A}] \subseteq V$. Com efeito, se $\mathcal{A}$ é $\mathscr{T}$-aberto com $f \in \mathcal{A}$, então existem um subconjunto finito $S \subseteq [0,1]$ e um número real $r > 0$ com $B_{\mathcal{Z}}(f;S;r) \subseteq \mathcal{A}$. Daí, ao definir $g\colon [0,1] \to [0,1]$ fazendo $g(x) := f(x) \cdot \chi_S(x)$, resulta que $g \in \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}(f;S;r)$ com $F(g) = 0 \notin V$. Para o caso em que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ basta considerar $V := (-\infty, 1)$ e fazer $g := f \cdot \chi_{[0,1]\setminus S}$. Verifique os detalhes $(\star)$. ▲

Observação 1.1.37 (Cuidado!)**.** O fato utilizado no exemplo anterior tem nome: trata-se do *Teorema da Convergência Dominada de Arzelà*, que depende fortemente da hipótese de limitação uniforme oriunda da suposição de que o contradomínio das funções é $[0,1]$. Sem a limitação uniforme, não é possível assegurar que as integrais convirjam para a integral do limite pontual das funções. Caso se interesse por sua demonstração, confira [1, 39]. △

Exemplo 1.1.38. Há um exemplo bem mais simples do mesmo fenômeno, embora possa parecer artificial. Para um conjunto X não enumerável, fixe $p \in X$ e considere $\mathcal{T}$ a família dos subconjuntos $A \subseteq X$ que satisfazem uma das duas condições a seguir:

(i) $p \notin A$;

(ii) $p \in A$ e $X \setminus A$ é enumerável.

Após verificar que isto define de fato uma topologia em X (verificou?)*, note que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{T}} p$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = p$ para todo $n \geq N$: como $A := \{x \in X : x = p \text{ ou } x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\}$ satisfaz a condição (ii) e, portanto, é um $\mathcal{T}$-aberto em torno de p, a convergência da sequência garante o N desejado. Em particular, a função $f\colon X \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) := \chi_{\{p\}}(x)$, é sequencialmente contínua em p (percebeu?)*. No entanto, f não é contínua em p. De fato, o aberto $V := (0, +\infty)$ é tal que $f(p) \in V$, mas todo $\mathcal{T}$-aberto $A \subseteq X$ com $p \in A$ satisfaz $f[A] \not\subseteq V$, já que $A \setminus \{p\} \neq \emptyset$. ▲

Exercício 1.1.13 $\left({}^{\star}_{\star\star}\right)$**.** Por que foi *preciso* assumir X não enumerável? ■

Moral da história: a generalidade dos axiomas de topologia permite descrever todas as noções de convergência vistas até agora, mas o preço a pagar é descobrir que neste novo contexto topológico, sequências são restritivas demais para lidar com continuidade. A alternativa mais comum para tratar esse problema é esquecê-lo: abraça-se a linguagem topológica dos abertos para investigar problemas de Análise, enquanto as sequências convergentes se tornam uma lembrança feliz de tempos mais simples, e que vez ou outra podem ser utilizadas — a depender da situação. Embora tenha seus méritos[‡], tal abordagem invisibiliza uma oportunidade *maravilhosa*: generalizar as próprias sequências. É isto o que será feito no próximo capítulo.

[†] Exibir uma função $F\colon \operatorname{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, sequencialmente contínua mas descontínua, é um problema bem mais delicado. Confira a resposta de Brian M. Scott, em https://math.stackexchange.com/a/53932/128988, caso queira saber o porquê.

[‡] A linguagem topológica é, realmente, muito adequada para diversos problemas de Análise. Ela só não é a única linguagem.

1.1.5 Exercícios adicionais

Exercício 1.1.14. Fixados um ponto $x \in X$ num espaço métrico (X, d) e um número real $r > 0$,

$$B_d[x, r] := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

indica a **d-bola fechada de centro** x e raio r. Mostre que bolas fechadas são fechadas (de acordo com a Definição 1.1.11). ■

Exercício 1.1.15 ($\star$). Mostre que o **conjunto das partes de** X, indicado por $\wp(X)$ e que tem como membros todos os subconjuntos de X, é uma topologia em X. Além disso, mostre que existe uma métrica d em X satisfazendo $\mathcal{T}_{\to_d} = \wp(X)$, i.e., tal que todo subconjunto de X é d-aberto. Dica: para a segunda parte, você quer uma métrica tal que conjuntos da forma $\{x\}$ sejam bolas abertas, para qualquer $x \in X$. ■

Observação 1.1.39. Nesse contexto, a família $\wp(X)$ é usualmente chamada de **topologia discreta** de X, enquanto todo conjunto com sua topologia discreta é chamado de **espaço**... **discreto**. △

Exercício 1.1.16 ($\star$). Para um conjunto X, declare $A \subseteq X$ como aberto se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $X \setminus A$ for finito. Mostre que isto define uma topologia em X. Sob quais condições esta topologia não é discreta? Observação: esta topologia costuma ser chamada de (topologia) **cofinita** no conjunto X. ■

Exercício 1.1.17 ($\star$). Mostre que se $\mathfrak{F}$ é uma família não vazia de topologias num conjunto X, então $\bigcap \mathfrak{F}$ é uma topologia em X. Ao considerar uma topologia $\mathcal{T} \in \mathfrak{F}$ qualquer, mostre que a função identidade $\mathrm{Id}_X : X \to X$ é uma função contínua do espaço $(X, \bigcap \mathfrak{F})$ no espaço $(X, \mathcal{T})$.[†] ■

Exercício 1.1.18 ($\star$). Dê exemplos de que a interseção infinita de abertos de um espaço topológico pode não ser aberta. Dica: ao se restringir à topologia da reta real, este exercício se torna um problema de Análise, que você provavelmente já resolveu. ■

Exercício 1.1.19 ($\substack{\star\\\star}$). Mostre que $\mathbb{Q}$ não é interseção enumerável de abertos de $\mathbb{R}$. Dica: encare o Teorema de Baire até que ele te encare de volta. ■

1.2 Extras

Muitos exemplos interessantes que serão abordados nos próximos capítulos escapam do contexto típico de uma disciplina de Análise Real. Os mais comuns dependem de noções básicas de Análise Funcional, como espaços normados e com produto interno. Outros, um pouco mais sofisticados, costumam utilizar *ordinais*, objetos elementares de Teoria dos Conjuntos, mas relativamente desconhecidos fora desse nicho. Esses dois tipos de animais serão (brevemente) apresentados nesta seção, que pode ser omitida a depender de sua bagagem (ou pressa). Haverá também uma rápida introdução à *linguagem das categorias*, cujo poder *unificador* será frequentemente utilizado ao longo do texto.

[†]Se você preferir escrever $\mathfrak{F} := \{\mathcal{T}_i : i \in \mathcal{I}\}$ para algum conjunto de índices $\mathcal{I}$, saiba que $\bigcap \mathfrak{F}$ é a mesma coisa que $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{T}_i$.

1.2.1 Normas e produtos internos

Normas e *produtos internos* buscam, respectivamente, generalizar o *valor absoluto* e a *multiplicação* da reta para o contexto de *espaços vetoriais*. No que segue, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, de modo que assume-se certa familiaridade com artimanhas básiℂas.

Definição 1.2.1. Uma **norma** num $\mathbb{K}$-espaço vetorial X é uma função $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ tal que

(i) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ e

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **espaço normado**, mas valem os mesmos abusos de linguagem de sempre envolvendo conjuntos com estruturas adicionais. ¶

Definição 1.2.2. Um **produto interno** num $\mathbb{K}$-espaço vetorial X é uma função do tipo $X \times X \to \mathbb{K}$, geralmente denotada por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tal que

(i) $\langle x, x\rangle > 0$ se $x \neq 0$,

(ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

(iii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$ e

(iv) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. O par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ costuma ser chamado de... **espaço com produto interno**. Você já sabe o restante do aviso. ¶

Antes de apresentar exemplos, convém estabelecer alguns fatos básicos.

Lema 1.2.3 (Cauchy-Schwarz)**.** *Se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é produto interno em X, então $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ para quaisquer $x, y \in X$, onde $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ para qualquer $u \in X$.*

Demonstração (frequentemente atribuída a Paul Halmos). Primeiro, com $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, note que para $x, y \neq 0$,

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 1 + 1 \pm 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \Leftrightarrow \pm\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|,$$

pois $\|x\|\|y\| \geq 0$ e $\frac{\langle z,z\rangle}{\|z\|^2} = 1$ para qualquer $z \neq 0$. Os detalhes ficam por sua conta ($\star$).

Com $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, note que para $\alpha \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\alpha| = 1$, o mesmo tipo de raciocínio resulta em

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \alpha\frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 2 - 2\Re\left(\alpha \cdot \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right),$$

onde $\Re(a + bi) := a - bi$ é a **parte real** do número complexo $a + bi$. Tomando $\alpha := \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$, segue que $\alpha\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \in \mathbb{R}$, de modo que a última linha se reescreve como

$$0 \leq 2 - 2\Re\left(\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|}\right) = 2 - 2\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\|y\|},$$

donde a desigualdade desejada segue[†]. □

[†]Pode ser útil recordar que para $z \in \mathbb{C}$ se verifica $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Corolário 1.2.4. *Todo produto interno induz uma norma.*

Proposição 1.2.5. *Normas induzem métricas.*

Exercício 1.2.1 ($\star$)**.** Prove as duas afirmações anteriores. Dica: para a primeira, use a sugestão notacional do lema e, para a segunda, faça $d_{\|\cdot\|}(x,y) := \|x-y\|$. ■

A menos de menção contrária, as normas e métricas que você usou no exercício anterior serão sempre consideradas em espaços com produtos internos ou normados, respectivamente. Nas frequentes ocasiões em que um espaço admitir mais de uma estrutura, símbolos adicionais serão empregados para distinguir as métricas, normas, etc. Em particular, a **topologia induzida por uma norma** é a topologia induzida por sua métrica.

Exemplo 1.2.6 (Normas euclidianas)**.** Em $\mathbb{K}^n$, a regra

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

induz uma norma, onde $x := (x_1, \ldots, x_n)$, usualmente chamada de **norma euclidiana**. Ela é induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{K}^n$ dado por

$$\langle x, y \rangle := x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n},$$

que na falta de apelido melhor é chamado de (*produto interno*) **canônico** em $\mathbb{K}^n$. Se for sua primeira vez vendo essas coisas, certifique-se de que não menti ($\star$). ▲

Exemplo 1.2.7 (Integrais de Riemann)**.** Você já deve ter visto em algum curso de Análise Real que se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, então $f = 0$. Esta é a parte mais difícil na verificação de que

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1\colon\ \mathrm{C}([a,b],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

define uma norma no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$ composto pelas funções contínuas da forma $[a,b] \to \mathbb{R}$. Em contextos semelhantes[†], normas desse tipo costumam ser chamadas de **normas** $\mathbf{L}_1$. De modo similar, a regra

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

define um produto interno em $\mathrm{C}([a,b],\mathbb{R})$. Faça as contas para verificar as afirmações anteriores, mas só se quiser ($\star$). ▲

Exemplo 1.2.8 (Funções limitadas)**.** O $\mathbb{K}$-espaço vetorial

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X) := \left\{ f \in \mathrm{Fun}(X,\mathbb{K}) : \sup_{x\in X} |f(x)| < +\infty \right\},$$

composto pelas *funções limitadas* da forma $X \to \mathbb{K}$, vem de fábrica com uma norma: precisamente, a função $\|\cdot\|_\infty\colon \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X) \to [0,+\infty)$ que a cada $f \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ associa o número $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}|f(x)|$, que passa a ser xingado de **norma do supremo** de f.

[†]Geralmente ao trocar a integral de Riemann pela *integral de Lebesgue*.

Dentre os espaços elementares, $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ é, possivelmente, o principal exemplo de um *espaço de Banach*: enquanto espaços métricos **completos** são aqueles nos quais toda sequência de Cauchy converge, um espaço normado é **de Banach** se a métrica induzida por sua norma é completa†. No presente caso, a completude de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ decorre, essencialmente, da completude de $\mathbb{K}$ com respeito à sua norma usual $|\cdot|$. Verificar todas essas afirmações é um bom exercício de revisão ($^{\star}_{\star}$), mesmo se você já tiver feito isso alguma vez na sua vida‡. ▲

Observação 1.2.9. Embora a completude de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ tenha sido assumida implicitamente, pode ser útil frisar que isto segue do exemplo anterior com $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ e $X := \{1, 2\}$. De fato, neste caso, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(X)$ é o espaço $\mathbb{R}^2$ com a *norma do máximo*, enquanto $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ é *isomorficamente isométrico* a $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$. Isto será retomado oportunamente, não se preocupe. Em tempo: note que $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach com a norma do máximo. △

Exemplo 1.2.10 (Espaços e subespaços de sequências)**.** Ao tomar $X := \mathbb{N}$ no último exemplo, $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ se torna *o espaço das sequências limitadas*††, que por sua vez tem subespaços vetoriais muito naturais:

(i) $c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge em } \mathbb{K}\right\}$, o subespaço das sequências convergentes, usualmente indicado apenas pela letra c;

(ii) $c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{K}} 0\right\}$, o subespaço das sequências que convergem para 0, usualmente indicado apenas como c_0;

(iii) $c_{\mathbb{K},00}(\mathbb{N}) := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N}) : \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \text{ para todo } n \geq N\right\}$, o subespaço das sequências *quase nulas*, i.e., que a partir de um certo índice assumem valor 0.

Um bom teste para saber se você precisa revisar ANÁLISE: se as inclusões

$$c_{\mathbb{K},00}(\mathbb{N}) \subsetneq c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N}) \subsetneq c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$$

não lhe parecerem óbvias mesmo com $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, revise, pois são apenas fatos elementares de ANÁLISE REAL — que você *deveria saber*. Em particular, $c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N})$ e $c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ tornam-se espaços de Banach com a norma do supremo, pois (cf. Exercício 1.2.3) ambos são fechados em $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. Por outro lado, $c_{\mathbb{K},00}(\mathbb{N})$ não pode ser fechado em $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ (cf. Exercício 1.2.4). ▲

Observação 1.2.11. É lícito perguntar por que enfatizar completude num texto de Topologia Geral, dado que não se trata de uma *propriedade topológica*‡‡. Como veremos, nos contextos certos, a completude tem manifestações topológicas (e.g., na caracterização de compacidade em espaços métricos) e, reciprocamente, a topologia também determina quais espaços *podem ter métricas completas compatíveis* (cf. Subseção 4.2.2). △

Uma das vantagens dos espaços normados é que, ao lidar apenas com as *transformações lineares*, a noção de continuidade se revela algo bem mais simples.

†Enquanto um espaço **de Hilbert** é um espaço com produto interno cuja norma induzida o torna um espaço de Banach.

‡Se for sua $(n+2)$-ésima vez fazendo esse exercício, para algum $n \in \mathbb{N}$, troque $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ por $\mathcal{B}_E(X)$, onde $(E, \|\cdot\|)$ é um $\mathbb{K}$-espaço de Banach (adivinhar a definição de $\mathcal{B}_E(X)$ faz parte do exercício!).

††Geralmente denotado por l^∞.

‡‡*Spoiler*: enquanto a reta real é um espaço métrico completo com sua métrica usual, o intervalo $(0, 1)$ não é; ainda assim, ambos são *homeomorfos*.

Proposição 1.2.12. *Para uma transformação linear $T\colon X \to Y$ entre espaços normados X e Y, são equivalentes:*

(i) *T é contínua;*

(ii) *T é contínua em 0;*

(iii) *existe $r > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq r \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Para (ii) ⇒ (iii), é mais conveniente usar a definição de continuidade em termos de ε's e δ's. Como T é contínua em $0 \in X$, para $\varepsilon := 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| < 1$$

sempre que $\|x\| = \|x - 0\| < \delta$. Logo, para qualquer $x \neq 0$ em X e δ' com $0 < \delta' < \delta$ temos $u := \frac{\delta'}{\|x\|} \cdot x$ satisfazendo $\|u\| < \delta$ (certo!?)$^{\star/5}$, de modo que

$$\|T(u)\| = \left\| T\left(\frac{\delta'}{\|x\|}x\right)\right\| = \frac{\delta'}{\|x\|}\|T(x)\| < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{1}{\delta'}\|x\|.$$

Para (iii) ⇒ (i), a linearidade de T dá $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq r\|x - y\|$ e, assim, $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{r}$. Por fim, é óbvio que (i) ⇒ (ii). □

Corolário 1.2.13. *Duas normas, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X induzem a mesma topologia em X se, e somente se, existem números reais $r, R > 0$ tais que $r\|x\| \leq \|x\|' \leq R\|x\|$ para todo $x \in X$. Em particular, se duas normas induzem a mesma topologia, então uma é completa se, e somente se, a outra também é.*

Demonstração. Chamando por $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ as topologias induzidas por $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$, respectivamente, note que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ sse $\mathrm{Id}_X\colon (X, \|\cdot\|') \to (X, \|\cdot\|)$ é contínua. De fato, a inclusão $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ quer dizer que todo $\mathcal{T}$-aberto é $\mathcal{T}'$-aberto, o que por sua vez significa que $A = \mathrm{Id}_X^{-1}[A]$ é $\mathcal{T}'$-aberto sempre que A é $\mathcal{T}$-aberto, i.e., a transformação linear Id_X é contínua com respeito às topologias indicadas. Portanto, tudo segue da proposição anterior (além do fato de que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ sse $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$). Para o restante, observe que, sob as hipóteses dadas, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é de Cauchy com respeito à norma $\|\cdot\|$ sse é de Cauchy com respeito à norma $\|\cdot\|'$. Os detalhes ficam por sua conta ($\star$). □

A condição (iii) na Proposição 1.2.12 define, secretamente, uma norma *especial* em $\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, o espaço das transformações $\mathbb{K}$-lineares contínuas entre X e Y. Primeiro, note que para *qualquer* transformação linear $T\colon X \to Y$, ao definir os valores em $[0, +\infty]$

(i) $A_T := \inf\{r > 0 : \|T(x)\| \leq r\|x\| \text{ para todo } x \in X\}$,

(ii) $B_T := \sup\{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$,

(iii) $C_T := \sup\{\|T(x)\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\}$ e

(iv) $D_T := \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \text{ e } x \neq 0\right\}$,

verifica-se $A_T = B_T = C_T = D_T$ (verifique!)*, de modo que a proposição anterior se reescreve como "T é contínua sse $A_T < +\infty$". Isto mostra que a correspondência

$$\begin{aligned} \|\cdot\|\colon \mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X, Y) &\to [0, +\infty) \\ T &\mapsto A_T \end{aligned} \tag{1.1}$$

é, de fato, uma função. Mostrar que isto realmente define uma norma em $\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ será problema seu ($\star$). Ela costuma ser xingada de **norma de operador**.

Exercício 1.2.2 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $T \in \mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X,Y)$, então $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in X$. ■

Observação 1.2.14 (Normas não bastam)**.** Infelizmente, em situações bastante corriqueiras da ANÁLISE FUNCIONAL, normas não são capazes de capturar todas as nuances topológicas de espaços importantes, o que obriga adotar noções mais flexíveis do que normas... Você já imagina onde isto vai chegar, não é mesmo?

Em vez de uma norma no $\mathbb{K}$-espaço vetorial X, pede-se uma topologia em X que torne as operações de soma $X \times X \xrightarrow{+} X$ e multiplicação $\mathbb{K} \times X \xrightarrow{\cdot} X$ contínuas. Isto traz algumas complicações para lidar com espaços de funções lineares e contínuas, mas a generalidade obtida compensa a dor ~~e dá emprego a pessoas como eu~~. Como seria desonesto demais tratar de *espaços vetoriais topológicos* agora, dado que ainda nem nos familiarizamos com a *topologia produto*, convém esperar. Mas o aviso foi dado. △

Exercício 1.2.3 $(^{\star}_{\star})$**.** Para um espaço métrico X, mostre que se $F \subseteq X$ é completo com a métrica herdada de X, então F é fechado em X. *Reciprocamente*, mostre que se X é completo e $F \subseteq X$ é fechado, então F é completo. Dica: lembre-se de que em espaços métricos, limites, quando existem, são únicos. ■

Exercício 1.2.4 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado.

a) Mostre que se $Y \subseteq X$ é subespaço vetorial próprio, então Y não contém bolas abertas de X. Dica: faça um desenho primeiro.

b) Mostre que se X tem dimensão infinita enumerável, então X não é espaço de Banach. Dica: refaça a demonstração do Teorema de Baire (cf. Teorema 1.1.17), mas troque $\mathbb{R}$ por um espaço de Banach; lembre-se também que *todo* $\mathbb{K}$*-espaço normado com dimensão finita* é, necessariamente, de Banach[†].

c) Mostre que $c_{\mathbb{K},00}(\mathbb{N})$ não é de Banach, independentemente da norma considerada. ■

1.2.2 Ordens e ordinais

Você certamente já estudou as relações binárias que usualmente são chamadas de *ordens*. A princípio, temos dois tipos clássicos: as *parciais*, que abstraem as propriedades do símbolo "$\leq$" usado na escola, e as *estritas*, que fazem a mesma coisa com o símbolo "$<$", razão pela qual variações desses símbolos (ou os próprios!) são utilizados nas discussões em contexto abstrato. Dado que existe uma bijeção *óbvia* entre ordens parciais e estritas sobre um conjunto X, ambos os tipos serão chamados simplesmente de *ordens*, com a suposição tácita de que símbolos do tipo "$\leq$" (como $\preceq$, $\sqsubseteq$, etc.) devem ser tratados como ordens parciais, enquanto as variações do tipo "$<$" (como $\prec$, $\sqsubset$, etc.) devem ser tratados como as variações estritas dos primeiros, e vice-versa. Outras terminologias básicas, como *mínimos*, *máximos*, *ínfimos* e *supremos* serão assumidas como conhecidas. Se precisar revisar[‡], procure qualquer livro de ANÁLISE que trate do assunto, e.g. [29].

Observação 1.2.15. Neste texto, a exceção fica por conta da inclusão, "$\subseteq$", cuja variação estrita não será indicada por "$\subset$", mas sim por "$\subsetneq$". △

[†]Isto será redemonstrado oportunamente, não se preocupe.
[‡]Teste: se você não sabe a diferença entre elemento mínimo e minimal numa ordem, é melhor revisar.

Definição 1.2.16. Um subconjunto I de uma ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ é chamado de **intervalo** se $y \in I$ sempre que $x, y, z \in \mathbb{P}$ satisfazem $x \leq y \leq z$ com $x, z \in I$. ¶

Todos os tipos de intervalo que você conhece na reta real são exemplos imediatos de intervalos. Dado que os intervalos *abertos* da reta são usados para definir uma topologia, talvez seja possível utilizar intervalos numa ordem para fazer algo parecido.

Definição 1.2.17. Numa ordem $(\mathbb{P}, \leq)$, para $p \in \mathbb{P}$ fixado, os subconjuntos da forma

$$(-\infty, p)_{\mathbb{P}} := \{x \in \mathbb{P} : x < p\} \tag{1.2}$$
$$(p, +\infty)_{\mathbb{P}} := \{x \in \mathbb{P} : p < x\} \tag{1.3}$$

serão chamados de **intervalos fundamentais**. Um subconjunto $I \subseteq \mathbb{P}$ será chamado de **intervalo aberto** se I for interseção finita de intervalos fundamentais. ¶

Observação 1.2.18. As definições de outros intervalos típicos, como $(a, b]_{\mathbb{P}}$, $(a, b)_{\mathbb{P}}$, etc. serão assumidas conhecidas. △

Exercício 1.2.5 $(\star)$**.** Mostre que as nomenclaturas acima são condizentes com a definição de intervalo. Mais precisamente: mostre que tanto intervalos fundamentais quanto intervalos abertos são intervalos. Dica: para a segunda parte, note (i.e., prove!)* que a interseção de intervalos é intervalo. ■

Exemplo 1.2.19. A notação introduzida acima não traz novidades caso se tome $\mathbb{P} := \mathbb{R}$ com sua ordenação usual. Uma ilustração mais interessante se obtém com $\mathbb{P} := (0, 3] := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 3\}$ e sua ordenação usual. Neste caso, com $p := 1$ por exemplo, $(-\infty, 1)_{\mathbb{P}} = (0, 1)$, enquanto $(1, +\infty)_{\mathbb{P}} = (1, 3]$. Em geral, se $\mathbb{P}$ é ordem que tem mínimo p_0 ou máximo p_1, então tanto $[p_0, p)_{\mathbb{P}}$ quanto $(p, p_1]_{\mathbb{P}}$ são intervalos abertos em $\mathbb{P}$, para qualquer $p \in \mathbb{P}$.

Cuidado: na *reta estendida* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, que tem os pontos $-\infty$ e $+\infty$ como mínimo e máximo, respectivamente, temos $(-\infty, a)_{\overline{\mathbb{R}}} = [-\infty, a)$ e $(b, +\infty)_{\overline{\mathbb{R}}} = (b, +\infty]$ para quaisquer $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. ▲

Exemplo 1.2.20. Seja $\mathbb{P} := \mathbb{N} \cup \{\heartsuit\}$, onde $\heartsuit$ indica algum objeto não pertencente a $\mathbb{N}$, que declaramos como máximo de $\mathbb{P}$ numa ordem $\leq$ que estende a ordenação usual dos naturais[†]: assim, $n < \heartsuit$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em $\mathbb{P}$, os intervalos fundamentais não vazios são da forma

$$(-\infty, m+1)_{\mathbb{P}} = \{0, \ldots, m\}$$
$$(n, +\infty)_{\mathbb{P}} = \{k \in \mathbb{N} : n < k\} \cup \{\heartsuit\}$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\{n\}$ é intervalo aberto para qualquer $n \in \mathbb{N}$, enquanto os únicos intervalos abertos em torno de $\heartsuit$ são da forma $(n, +\infty)_{\mathbb{P}}$. Convém aproveitar a oportunidade para reforçar: neste texto, $0 \in \mathbb{N}$. ▲

Observação 1.2.21. Os dois últimos exemplos explicitam que "ser intervalo aberto" depende da ordem $\mathbb{P}$ em que se considera o subconjunto, já que $\{n\}$ não é intervalo aberto em $\mathbb{R}$, por exemplo. Para um exemplo menos óbvio, considere os intervalos $[0, 2)$ e $(4, 6)$ em $\mathbb{R}$ e faça $\mathbb{P} := [0, 2) \cup [4, 6)$. Com a ordem herdada de $\mathbb{R}$, o subconjunto $I := (1, 2) \cup [4, 5)$ é um intervalo aberto de $\mathbb{P}$, a saber $I = (-\infty, 5)_{\mathbb{P}} \cap (1, +\infty)_{\mathbb{P}}$, mas I não é sequer um intervalo de $\mathbb{R}$. △

[†] Você também pode usar o símbolo "∞", mas só se tiver maturidade suficiente para usá-lo sem atrelar o mesmo significado de quando o utilizava em Cálculo I.

Definição 1.2.22. A **topologia da ordem** num conjunto ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ é definida da seguinte forma: $A \subseteq \mathbb{P}$ é declarado aberto se, e somente se, para todo $a \in A$ existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{P}$ tal que $a \in I$ com $I \subseteq A$. ¶

A topologia da ordem[†] costuma gerar exemplos interessantes ao ser considerada sobre *ordinais*, que nada mais são do que representantes *canônicos* dos conjuntos bem ordenados. Embora a discussão dos pormenores possa ser exaustiva, uma breve pincelada no assunto já será suficiente para suas aparições futuras. Para entrar no clima, vamos começar *pelo começo*.

Definição 1.2.23. Dizemos que $(\mathbb{B}, \leq)$ é uma **boa ordem** (ou que $\mathbb{B}$ é um conjunto **bem ordenado** por $\leq$, etc.) se $(\mathbb{B}, \leq)$ for uma ordem em que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{B}$ tem menor elemento. ¶

Observação 1.2.24 (Indução e recursão em boas ordens)**.** Argumentos por indução não são exclusividade de $\mathbb{N}$, mas sim um artifício disponível em qualquer conjunto bem ordenado. Explicitamente, *se* $(\mathbb{B}, \leq)$ *é uma boa ordem e* $X \subseteq \mathbb{B}$ *for tal que, para qualquer* $c \in \mathbb{B}$*, tenha-se* $c \in X$ *sempre que* $\{b \in \mathbb{B} : b < c\} \subseteq X$*, então* $X = \mathbb{B}$: caso contrário, $\mathbb{B} \setminus X$ seria um conjunto não vazio sem menor elemento. Consequentemente, também é possível definir funções *recursivamente* em domínios bem ordenados — e *Teoremas de Recursão* são apenas resultados que asseguram a boa definição de funções assim. Por exemplo, chamando por $\mathbb{V}$ a **classe de todos os conjuntos**, para cada boa ordem $(\mathbb{B}, \leq)$ e cada função de classe $\mathcal{F} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, existe uma única *função* $f \colon \mathbb{B} \to \mathbb{V}$ tal que $f(b) = \mathcal{F}((f(a) : a < b))$ para todo $b \in \mathbb{B}$. Esta versão deve dar conta de todas as funções definidas recursivamente no texto. Para mais detalhes, confira [28]. △

A boa ordem favorita das pessoas costuma ser $(\mathbb{N}, \leq)$ com sua ordem usual, mas todo esse protagonismo costuma ofuscar a existência de *inúmeras* outras boas ordens.

Proposição 1.2.25. *Se* $(\mathbb{B}, \leq)$ *é uma boa ordem e* $u' \notin \mathbb{B}$*, então existe uma boa ordem* $(\mathbb{B}', \leq')$ *tal que*

(i) $\mathbb{B} \subsetneq \mathbb{B}'$,

(ii) $x \leq y \Leftrightarrow x \leq' y$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{B}$*, e*

(iii) u' *é o maior elemento de* $\mathbb{B}'$*.*

Demonstração. Basta fazer $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{u'\}$ e definir $\leq'$ como $\leq$ para pares de elementos em $\mathbb{B}$, enquanto $b <' u'$ para todo $b \in \mathbb{B}$. É evidente que $(\mathbb{B}', \leq')$ ainda é uma boa ordem (certo?)*. □

Observação 1.2.26. Como $\leq'$ é a única extensão possível de $\leq$ com as propriedades acima, não há risco em abandonar o apóstrofo e indicá-la por $\leq$. △

Assim, a ordem $\mathbb{P}$ do Exemplo 1.2.20 é uma boa ordem que estende $\mathbb{N}$: ela consiste na ordem dos números naturais com um máximo (*artificialmente*)[‡] adicionado. Ela serve como *primeiro* exemplo de boa ordem com um elemento *limite* não trivial.

[†] Você verificou que a definição, de fato, satisfaz os critérios para ser uma topologia? ($\star$)

[‡] O que não é artificial?

Definição 1.2.27. Sejam $(\mathbb{B}, \leq)$ uma boa ordem e $b \in \mathbb{B}$ um elemento. Dizemos que b é um **elemento sucessor** em $\mathbb{B}$ se existe $a \in \mathbb{B}$ tal que $b = \min\{c \in \mathbb{B} : a < c\}$. Caso contrário, b é dito um **elemento limite**. ¶

Em outras palavras, b é um elemento sucessor se b for *sucessor* de algum $a \in \mathbb{B}$, no sentido usual. Dessa forma, em $\mathbb{N}$ por exemplo, todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$ é sucessor, enquanto 0 é o único limite, posto que $0 = \min \mathbb{N}$. Já em $\mathbb{P} := \mathbb{N} \cup \{\heartsuit\}$, o elemento $\heartsuit$ também é limite, posto que se $\alpha < \heartsuit$, então $\alpha \in \mathbb{N}$ e daí $\alpha + 1 \in \mathbb{N}$ é o sucessor de α. Podemos reaplicar o raciocínio a $\mathbb{P}$, obtendo $\mathbb{P}'$, $\mathbb{P}''$, $\mathbb{P}'''$, $\ldots$, mas isto obrigaria a introdução de novos símbolos $\heartsuit'$, $\heartsuit''$, $\heartsuit'''$. Isto pode ser feito de maneira bem mais econômica com a linguagem de ordinais.

A única hipótese exigida sobre o elemento u' na última proposição foi que u' não poderia ser um elemento de $\mathbb{B}$. Ocorre que sob os domínios de ZFC, todo conjunto X satisfaz $X \notin X$ por conta do *Axioma da Fundação*. Assim, seria formalmente aceitável definir $\mathbb{B}' := \mathbb{B} \cup \{\mathbb{B}\}$. Como isso pode ser confuso para quem não tem o hábito de tratar *conjuntos* como *elementos* de outros *conjuntos*, convém exemplificar o fenômeno ainda mais devagar[†].

Começando com $\mathbb{B} := \emptyset$, temos $\emptyset \notin \emptyset$ e $\emptyset' := \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ (certo?)[⋆]. Escrevendo $\widetilde{0} := \emptyset$, parece razoável fazer $\widetilde{1} := \emptyset'$, pois assim $\widetilde{1} = \left\{\widetilde{0}\right\}$. Com isso, torna-se irresistível fazer $\widetilde{2} := \widetilde{1}'$, pois daí $\widetilde{2} := \widetilde{1}' = \widetilde{1} \cup \left\{\widetilde{1}\right\} = \left\{\widetilde{0}\right\} \cup \left\{\widetilde{1}\right\} = \left\{\widetilde{0}, \widetilde{1}\right\}$.

Note que com tal construção, a relação de pertinência ordena naturalmente os elementos de $\widetilde{2}$, já que $\widetilde{0} \in \widetilde{1}$. Mais ainda, a pertinência faz do novo elemento o maior. Por exemplo, definindo $\widetilde{3} := \widetilde{2}'$, obtemos $\widetilde{3} = \left\{\widetilde{0}, \widetilde{1}, \widetilde{2}\right\}$ com $\widetilde{0} \in \widetilde{1} \in \widetilde{2}$.

Procedendo recursivamente, chega-se ao conjunto

$$\omega := \{\widetilde{n} : n \in \mathbb{N}\},$$

bem ordenado pela relação de pertinência. Dado que o conjunto ω acima satisfaz os Axiomas de Peano, entusiastas da Teoria dos Conjuntos costumam ignorar o "til" e tratar ω como *o conjunto dos números naturais*, prática que será mantida aqui ocasionalmente[‡]. Por valer $n' = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, nada mais *natural* do que escrever $\omega + 1 := \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 := \omega + 1 \cup \{\omega + 1\}$, etc. Todos esses animais são exemplos de *ordinais*.

Definição 1.2.28. Um conjunto α é chamado de (**número**) **ordinal** se $(\alpha, \in)$ for uma boa ordem[††] tal que $x \subseteq \alpha$ para todo $x \in \alpha$. ¶

A definição acima captura a essência do procedimento feito nos exemplos anteriores, no sentido de que todas as boas ordens 0, 1, 2, $\ldots$, ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots$ são ordinais.

De modo geral, um ordinal qualquer tem como elementos todos os ordinais *anteriores*. Assim, ao escrever $\alpha < \beta$ em vez de $\alpha \in \beta$ para ordinais, resulta que para qualquer ordinal γ se verificam as identidades

$$\gamma = \{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e } \alpha < \gamma\} \text{ e } \gamma + 1 = \{\alpha : \alpha \text{ é ordinal e } \alpha \leq \gamma\}.$$

[†]Mas supere logo essa limitação. Afinal de contas, topologias são conjuntos de subconjuntos de um conjunto — e foi você quem decidiu estudar esse assunto.

[‡]Mas nem sempre. Não precisa agradecer.

[††]A ordem aqui deve ser entendida no sentido *estrito*, i.e., "$x \in y$" deve ser interpretado como "$x < y$". A versão parcial da relação de ordem dada pela pertiência em ordinais fica a cargo da inclusão, ou seja: para $x, y \in \alpha$ com α ordinal, $x \subseteq y$ sse $x \in y$ ou $x = y$.

Além disso, vale a *tricotomia para ordinais*, i.e.: se α e β são ordinais, então $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$. Na verdade, mais do que isso é verdade: a *classe* de todos os ordinais é bem ordenada pela relação de pertinência, no sentido de que qualquer classe não vazia de ordinais admite menor elemento. Para mais detalhes, confira [28].

Observação 1.2.29. Pode ser menos ofensivo utilizar a notação de intervalos para representar ordinais. Assim, em vez de γ e $\gamma + 1$, podemos escrever $[0, \gamma)$ e $[0, \gamma]$, respectivamente. Isto será feito sempre que considerarmos ordinais como espaços topológicos com as topologias induzidas por suas ordens, exceto nos contextos em que outros tipos de intervalos também estiverem envolvidos explicitamente. Em particular, $[0, \omega] = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, e você pode pensar em ω como sendo o elemento $\heartsuit$ do Exemplo 1.2.20. $\triangle$

Embora possa parecer um jeito esquisito de lidar com boas ordens, ordinais capturam *a essência* delas, num sentido bastante difícil de discordar:

Teorema 1.2.30. *Para uma boa ordem $(\mathbb{B}, \leq)$ qualquer, existe um único ordinal β tal que $(\mathbb{B}, <)$ e $(\beta, \in)$ são isomorfos. Além disso, o isomorfismo*[†] *é único.*

Ideia da prova. Se $\mathbb{B} \neq \emptyset$, defina $f(\min \mathbb{B}) := \emptyset$ e, supondo $f(b)$ definido para todo $b < c$, faça $f(c) := \{f(b) : b < c\}$. Pelo *Teorema da Recursão* (cf. Observação 1.2.24), esta função está bem definida. Com alguma paciência e ferramentas *adequadas*[‡], mostra-se que $\operatorname{im}(f)$ é o ordinal procurado, enquanto f é o único isomorfismo possível. $\square$

Isto deve ser suficiente para te convencer da existência do ordinal ω_1: *o primeiro ordinal não enumerável*. Duvida?

Proposição 1.2.31. *Existe ω_1.*

Demonstração (opcional). Seja X o seu conjunto não enumerável favorito[††]. Pelo Axioma da Escolha[‡‡], existe $\preceq$ uma boa ordem sobre X. Considere então

$$T := \{x \in X : \{y \in X : y \prec x\} \text{ é não enumerável}\}.$$

Temos dois casos: $T = \emptyset$ ou $T \neq \emptyset$. Se ocorrer o primeiro, defina ω_1 como o único ordinal isomorfo a $(X, \prec)$. Para o segundo caso, basta escolher $\widetilde{x} := \min T$ e definir ω_1 como o único ordinal isomorfo a $((-\infty, \widetilde{x})_X, \prec)$, onde $(-\infty, \widetilde{x})_X := \{x \in X : x \prec \widetilde{x}\}$. Em qualquer um dos cenários, se $\alpha < \omega_1$, então $\{\beta : \beta < \alpha\}$ é enumerável, pois o contrário violaria a escolha de ω_1. Portanto, ω_1 é o primeiro ordinal não enumerável. $\square$

E por que alguém se importaria em discutir ω_1 num curso de TOPOLOGIA GERAL?

Lema 1.2.32. *Se $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de ordinais enumeráveis, então $\sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$.*

Demonstração (opcional). Primeiro, note que se $\mathcal{K}$ é uma coleção de ordinais, então $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} \alpha = \sup \mathcal{K}$, no sentido de que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} \alpha$ é o menor ordinal a limitar superiormente todos os ordinais de $\mathcal{K}$. Como todo ordinal é um coleção de ordinais e toda coleção de ordinais é bem ordenada pela pertinência, segue que $\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} \alpha, \in\right)$ é bem ordenado. Agora, se $y \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} \alpha$, então $y \in \beta$ para algum $\beta \in \mathcal{K}$, acarretando $y \subseteq \beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} \alpha$. Portanto, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} \alpha$ é ordinal.

[†] Nesse contexto, significa "bijeção crescente".

[‡] *Spoiler.* Por *indução na boa ordem* de $\mathbb{B}$ (cf. Observação 1.2.24), mostra-se que $f(b)$ é ordinal para cada $b \in \mathbb{B}$. Como todo conjunto de ordinais é bem ordenado pela relação de pertinência e a condição "$y \in \operatorname{im}(f) \Rightarrow y \subseteq \operatorname{im}(f)$" vale por construção, acabou. Para mais detalhes, confira [28].

[††] Pode ser $\mathbb{R}$, $\wp(\mathbb{N})$, $\wp(\mathbb{R})$, etc.

[‡‡] A prova sem o Axioma da Escolha não é mais difícil, porém é mais técnica.

Consequentemente, no caso específico do enunciado, $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ é uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis e, por conseguinte, é enumerável. Se ocorresse $\omega_1 \in \alpha$, teríamos $\omega_1 \subseteq \alpha$, o que implicaria em ω_1 ser enumerável. Portanto, $\alpha < \omega_1$. $\square$

Proposição 1.2.33. *Não existe sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,\omega_1)$ tal que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \omega_1$ em $[0,\omega_1]$. Apesar disso, se $V \subseteq [0,\omega_1]$ é um aberto tal que $\omega_1 \in V$, então $V \cap [0,\omega_1) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Dizer que $\alpha_n \in [0,\omega_1)$ equivale a dizer que $\alpha_n < \omega_1$ e, consequentemente, α_n é ordinal enumerável. Agora, se $\gamma < \omega_1$, então $(\gamma,\omega_1]$ é um intervalo aberto em torno de ω_1 no sentido da Definição 1.2.17, de modo que se a sequência convergir para ω_1, então existirá $N \in \mathbb{N}$ com $\gamma < \alpha_n$ para todo $n \geq N$. Em outras palavras, mostrou-se que nenhum ordinal menor do que ω_1 limita a (imagem da) sequência superiormente, donde segue que $\omega_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$, violando o último lema. Isto prova a primeira parte da proposição. Para o restante, note que se V é um aberto com $\omega_1 \in V$, então existe um intervalo aberto da forma $(\beta,\omega_1] \subseteq V$ para algum $\beta < \omega_1$ (notou mesmo?)*. Como β é enumerável, temos $\beta + 1 := \beta \cup \{\beta\}$ enumerável, i.e., $\beta + 1 < \omega_1$, acarretando em $\beta + 1 \in [0,\omega_1) \cap V$. $\square$

Assim, se você lembra da definição de *ponto aderente*[†], $[0,\omega_1]$ nos dá um exemplo de espaço em que ω_1 é ponto aderente ao conjunto $[0,\omega_1)$, mas de tal forma que nenhuma sequência em $[0,\omega_1)$ converge para ω_1, contrariando a intuição métrica que herdamos da Análise Real. Quer mais?

Proposição 1.2.34. *Se $f\colon [0,\omega_1) \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe um ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $f(\beta) = f(\alpha)$ para todo $\beta \in (\alpha,\omega_1)$.*

Demonstração. Vamos "desempacotar" algumas informações codificadas nas exigências analíticas[‡]. Primeiro, buscamos $\alpha < \omega_1$ tal que se $\alpha < \beta < \omega_1$, então $|f(\alpha) - f(\beta)| = 0$. Um modo alternativo de dizer a mesma coisa consiste em pedir

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\beta \in (\alpha,\omega_1)$. Parece bobo, mas isto reduz o problema de encontrar um α satisfazendo todas essas exigências ao problema de encontrar, para cada $n \in \mathbb{N}$, um $\alpha_n < \omega_1$ satisfazendo apenas

$$|f(\alpha_n) - f(\beta)| < \frac{1}{2^n}$$

para todo $\beta \in (\alpha_n,\omega_1)$, pois daí basta tomar $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ (entendeu?)*.

Agora, supor que isto não pode ser feito para todo $n \in \mathbb{N}$ significa o seguinte: existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\alpha < \omega_1$, algum $\beta_\alpha \in (\alpha,\omega_1)$ satisfaz $|f(\alpha) - f(\beta_\alpha)| \geq \frac{1}{2^m}$.

Isso permite definir sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ num zigue-zague maroto: começamos com $x_0 := 0$ e $y_0 := \beta_{x_0}$, depois $x_1 := \beta_{y_0}$ e $y_1 := \beta_{x_1}$; supondo $x_0, \ldots, x_n$ e $y_0, \ldots, y_{n-1}$ definidos para algum n, colocamos $y_n := \beta_{x_n}$ e $x_{n+1} := \beta_{y_n}$. Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$ se asseguram as desigualdades

$$x_n < y_n < x_{n+1} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \frac{1}{2^m} := 2\varepsilon.$$

[†]Se você não lembra, não se preocupe: isto será retomado em breve.

[‡]E para evitar confusões, fica o aviso de que, ao longo da demonstração, a notação de intervalo será empregada apenas para subconjuntos do ordinal $\omega_1 := [0,\omega_1)$.

Ocorre que sob tais condições, f não pode ser contínua no ponto $\gamma := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Com efeito, não há aberto $V \subseteq [0, \omega_1)$ com $\gamma \in V$ tal que $|f(v) - f(\gamma)| < \varepsilon$ para todo $v \in V$: ora, se existisse, então teríamos $(\delta, \gamma] \subseteq V$ para algum $\delta < \gamma$ (certo?)*, donde a definição de γ garantiria um $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (\delta, \gamma]$ para todo $n \geq N$ (por quê?)*, acarretando

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(\gamma)| + |f(\gamma) - f(y_n)| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{2^m},$$

o que contraria a escolha de x_n e y_n. Portanto, f é descontínua em γ (percebeu *mesmo*?)*, como desejado. □

Corolário 1.2.35. *Existe uma função $f\colon [0, \omega_1] \to \mathbb{R}$ descontínua mas sequencialmente contínua.*

Demonstração. Basta fazer $f(\alpha) := 0$ para $\alpha < \omega_1$ e $f(\omega_1) \neq 0$. Completar os detalhes será sua responsabilidade ($^{\star}_{\star\star}$). □

Já deu para notar que ordinais, como ω_1, serão boas fontes de (contra) exemplos para os problemas tratados neste texto. Portanto, acostume-se. Outros ordinais ou *cardinais* importantes, como $\aleph_\omega$, serão introduzidos quando forem necessários. Para mais detalhes, você pode conferir [28], ou o Vencedor do Jabuti 2025 [17].

Exercício 1.2.6 ($^\star_\star$). Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem.

a) Mostre que se $\mathbb{P}$ é uma boa ordem e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ é uma função, então $\operatorname{im}(f)$ tem menor elemento. Conclua que, neste caso, não existe função $\mathbb{N} \to \mathbb{P}$ *estritamente decrescente*, i.e., tal que se $m, n \in \mathbb{N}$ com $m < n$, então $f(m) > f(n)$.

b) Suponha que $\mathbb{P}$ seja *ordem total*[†], mas que não seja boa ordem. Mostre que existe uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ estritamente decrescente. Dica: recursão + Axioma da Escolha. ■

1.2.3 A linguagem de categorias: funtores

Na última subseção, a partir de um *conjunto ordenado* $(\mathbb{P}, \leq)$, construímos um *espaço topológico* $(\mathbb{P}, \mathcal{T}_\leq)$, onde $\mathcal{T}_\leq$ é a topologia definida pelos intervalos abertos de $\mathbb{P}$ com respeito à ordem $\leq$. Em outras palavras, definiu-se uma "*função*" $\mathcal{T}_\bullet\colon \textsc{Poset} \to \textsc{Top}$ entre as *classes* Poset e Top, onde Poset indica a classe de todas as ordens (parciais) e Top indica a classe de todos os espaços topológicos. Esse tipo de situação típica nos coloca diante de uma oportunidade: investigar se $\mathcal{T}_\bullet$ respeita a *estrutura categórica das classes* ou, em linguajar profissional, tentar descobrir se $\mathcal{T}_\bullet$ é um *funtor*.

A coisa toda é mais simples do que parece. Por exemplo, se G e H são grupos e $f\colon G \to H$ é uma função, podemos nos perguntar se f é *compatível* com as operações de G e H, i.e., se $f(xy) = f(x)f(y)$ para quaisquer $x, y \in G$. Tradicionalmente, casos afirmativos são chamados de *homomorfismos de grupos*. No caso de Poset e Top, ambas as classes vêm de fábrica com certos tipos de "*operações*" — não entre seus *objetos*, mas sim entre certas ~~setas~~ funções existentes entre os seus objetos, ou seja, a composição — de modo que um funtor é uma *função* compatível com essas operações.

[†]Aquelas em que vale a *tricotomia*, i.e., quaisquer dois elementos são (iguais ou) comparáveis.

Definição 1.2.36. Uma categoria $\mathscr{C}$ é um *par* $(\mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \mathrm{Arr}(\mathscr{C}))$, onde $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ são, respectivamente, a **classe dos objetos** de $\mathscr{C}$ e a **classe das flechas** (ou **setas** ou **morfismos**) de $\mathscr{C}$, com as propriedades a seguir.

(C_1) Existem *funções de classe* $\mathrm{dom}(\bullet)\colon \mathrm{Arr}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{cod}(\bullet)\colon \mathrm{Arr}(\mathscr{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ que a cada seta $f \in \mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ associam os objetos $\mathrm{dom}(f)$ e $\mathrm{cod}(f)$, respectivamente xingados de **domínio** e **codomínio** da seta f. Escreve-se $f\colon a \to b$ ou $a \xrightarrow{f} b$ a fim de abreviar a expressão "$\mathrm{dom}(f) = a$ e $\mathrm{cod}(f) = b$".

(C_2) Para quaisquer $a, b, c \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe uma correspondência de classes

$$\circ\colon \mathscr{C}(b,c) \times \mathscr{C}(a,b) \to \mathscr{C}(a,c)$$

a **composição**, onde $\mathscr{C}(x,y)$ denota, para cada $x, y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, a subclasse de $\mathrm{Arr}(\mathscr{C})$ composta por todas as setas f da forma $x \to y$, i.e.,

$$\mathscr{C}(x,y) := \{f \in \mathrm{Arr}(\mathscr{C}) : \mathrm{dom}(f) = x \text{ e } \mathrm{cod}(f) = y\}, \tag{1.4}$$

a subclasse dos **morfismos de** x **para** y. Mais precisamente, se $f\colon a \to b$ e $g\colon b \to c$ são setas da categoria $\mathscr{C}$, então existe uma terceira seta, $g \circ f\colon a \to c$.

(C_3) A composição é associativa, no seguinte sentido[†]: se $f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ e $h\colon c \to d$ são setas da categoria $\mathscr{C}$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(C_4) Para cada objeto $a \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe uma seta $\mathrm{id}_a \in \mathscr{C}(a,a)$ tal que $f \circ \mathrm{id}_a = f$ e $\mathrm{id}_a \circ g = g$ para quaisquer setas $f, g \in \mathscr{C}$ com $\mathrm{dom}(f) = a$ e $\mathrm{cod}(g) = a$. ¶

Exemplo 1.2.37 (Casos clássicos)**.** Classes de conjuntos dotados de estruturas adicionais constituem as situações típicas de categorias ao considerarmos como setas ou morfismos as funções compatíveis com as estraturas.

(i) Set, a **categoria dos conjuntos**, é a categoria cujos objetos são conjuntos e cujas setas são funções. Composições são feitas do modo usual e as identidades são as funções identidade de sempre. Note que tudo funciona por conta das propriedades de composição de funções que você aprendeu na escola.

(ii) Group, a **categoria dos grupos**, é a categoria cujos objetos são grupos e cujas setas são os (homo) morfismos de grupos. Composições e identidades são as usuais — e tudo funciona pois você já verificou, no seu passado, que a função identidade de um grupo é um homomorfismo de grupos, bem como já viu que a composição de homomorfismos de grupos é um homomorfismo de grupos. **Em tempo**: *daqui em diante, o sufixo "homo" será abandonado.*

(iii) As **categorias** RIng (**dos anéis com unidade**[‡]), CRIng (**dos anéis comutativos e com unidade**), ${}_K$Vect (**dos espaços vetoriais sobre o corpo** K), etc. são definidas de modo análogo a Group. Em particular: quando tratarmos de morfismos de anéis comutativos com unidade, assumiremos que a unidade é preservada; além disso, como de costume, morfismos entre K-espaços vetoriais serão chamados de funções *K-lineares*.

[†] Note que a igualdade "faz sentido" pois $g \circ f\colon a \to c$ e $h \circ g\colon b \to d$ exitem e, consequentemente, também existem $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$.

[‡] A menos de menção explícita, todos os anéis aqui serão considerados com unidade.

(iv) TOP, a **categoria dos espaços topológicos**, é a categoria cujos objetos são espaços topológicos e cujas setas são funções contínuas. Composições e identidades são, novamente, as de sempre, e tudo funciona pois composição de funções contínuas é contínua (certo?)* e funções identidades são contínuas (de acordo?)*. ▲

Apesar da ênfase dada aos objetos na nomenclatura usual das categorias, deve-se ter em mente que são as setas quem determinam, de fato, a categoria. Para citar um exemplo básico: há pelo menos dois modos naturais de considerar uma categoria que tem espaços métricos como objetos. Na primeira, que denotaremos por $\mathrm{MET}_{\mathrm{CONT}}$, setas são funções contínuas. Na segunda, que denotaremos por $\mathrm{MET}_{\mathrm{DIST}}$, setas são **isometrias**[†]. Pode parecer bobagem, mas não é: por exemplo, na primeira, $\mathbb{R}$ e o intervalo aberto $(0,1)$ são *isomorfos* ao considerarmos as topologias induzidas por suas métricas usuais, o que não acontece na segunda ao considerarmos as mesmas métricas. Mas o que é *isomorfismo* numa categoria? A única coisa que poderia ser:

Definição 1.2.38. Dois objetos a e b de uma categoria $\mathscr{C}$ são **$\mathscr{C}$-isomorfos** se existem setas $f\colon a \to b$ e $g\colon b \to a$ tais que $g \circ f = \mathrm{id}_a$ e $f \circ g = \mathrm{id}_b$. Em tais situações, f e g são chamadas de **$\mathscr{C}$-isomorfismos**. ¶

Exercício 1.2.7 ($\star$). Agora que já sabe a definição, verifique as afirmações anteriores, i.e., mostre que $\mathbb{R}$ e $(0,1)$ são $\mathrm{MET}_{\mathrm{CONT}}$-isomorfos, mas não são $\mathrm{MET}_{\mathrm{DIST}}$-isomorfos. Dica: a primeira parte é um exercício básico de ANÁLISE REAL, enquanto a segunda segue quase que imediatamente da definição de isometria. ■

Observação 1.2.39. Sim: **homeomorfismos** são, precisamente, os isomorfismos da categoria TOP. Voltaremos a eles em breve e com calma, não tenha pressa. △

Em outras palavras, as setas de uma categoria codificam, em certo sentido, os critérios para determinar quando dois de seus objetos são *indistinguíveis* (cf. Exercício 1.2.12). Mudar as setas acarreta mudar tais critérios, de modo que objetos antes equivalentes podem deixar de ser. E aqui, a *indistinguibilidade* deve ser entendida no contexto da *linguagem categórica*, aquela cujas afirmações tratam apenas de objetos e setas da categoria, o único tipo de informação a que temos acesso nesse nível de generalidade. Porém, ainda é cedo para ilustrar a ideia. Há coisas mais urgentes para *corrigir*, como a crença típica de que setas são funções.

Exemplo 1.2.40. Uma ordem parcial $(\mathbb{P},\leq)$ pode ser interpretada como uma categoria: objetos de $\mathbb{P}$ são os elementos de $\mathbb{P}$, enquanto uma seta $x \to y$ existe sse $x \leq y$. Assim, na prática, as setas de $\mathbb{P}$ apenas atestam a existência de relação entre objetos: aqui, a reflexividade de $\leq$ se traduz nas setas identidades, enquanto a transitividade de $\leq$ assegura a boa definição das composições, cuja associatividade segue pois entre quaisquer dois objetos há, no máximo, uma seta. Em particular, dois objetos $x, y \in \mathbb{P}$ são $\mathbb{P}$-isomorfos sse $x = y$. ▲

Talvez você tenha a impressão que a antissimetria não foi importante no último exemplo. E é realmente o caso. Uma **pré-ordem** $(\mathbb{P},\leq)$ é, justamente, uma *ordem não necessariamente antissimétrica*, i.e., assume-se apenas que $\leq$ é reflexiva e transitiva. Ao repetir aqui as ponderações do exemplo anterior, segue que x e y são $\mathbb{P}$-isomorfos sse $x \leq y$ e $y \leq x$.

[†]É o que nome sugere: $f\colon X \to Y$ é uma isometria entre os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) se $d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$ para quaisquer $a, b \in X$.

Exemplo 1.2.41. Fixado um anel[†] A, $\mathrm{Matr}(A)$ é a categoria cujos objetos são números naturais não nulos e cujas setas são matrizes com coeficientes em A! Mais precisamente: uma seta $m \xrightarrow{f} n$ é uma matriz $f := (a_{ij})$ de m linhas e n colunas com $a_{i,j} \in A$ para quaisquer i, j, enquanto a composição entre duas setas $f\colon m \to n$ e $g\colon n \to k$ é definida via produto de matrizes, i.e., $g \circ f := f \cdot a$. Pelo que você já aprendeu em ÁLGEBRA LINEAR ou GEOMETRIA ANALÍTICA, $\mathrm{Matr}(A)$ é uma categoria (certo?)*. ▲

Observação 1.2.42. Em geral, quando as setas de uma categoria são dadas por certos tipos de funções entre seus objetos, todo isomorfismo é um morfismo bijetor. Mas a recíproca pode ser falsa a depender da categoria. Ao final desta subseção você encontrará exercícios sobre isso (se quiser praticar). △

Em certo sentido, a próxima definição apenas amplia a gama de exemplos de setas que não são funções, pelo menos não no sentido clássico.

Definição 1.2.43. Dadas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, dizemos que um par de correspondências $\mathcal{F}_0\colon \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}) \to \mathrm{Obj}\,(\mathscr{D})$ e $\mathcal{F}_1\colon \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C}) \to \mathrm{Arr}\,(\mathscr{D})$ define um **funtor** (**covariante**) $\mathcal{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ se:

(i) $\mathrm{dom}\,(\mathcal{F}_1(f)) = \mathcal{F}_0(\mathrm{dom}\,(f))$ e $\mathrm{cod}\,(\mathcal{F}_1(f)) = \mathcal{F}_0(\mathrm{cod}\,(f))$ para toda seta $f \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$;

(ii) $\mathcal{F}_1(f \circ g) = \mathcal{F}_1(f) \circ \mathcal{F}_1(g)$ sempre que a seta $f \circ g$ estiver definida em $\mathscr{C}$;

(iii) $\mathcal{F}_1(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_0(c)}$ para todo $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$.

Se, em vez de (i) e (ii), valerem

(i)′ $\mathrm{dom}\,(\mathcal{F}_1(f)) = \mathcal{F}_0(\mathrm{cod}\,(f))$ e $\mathrm{cod}\,(\mathcal{F}_1(f)) = \mathcal{F}_0(\mathrm{dom}\,(f))$ para toda seta $f \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$, e

(ii)′ $\mathcal{F}_1(f \circ g) = \mathcal{F}_1(g) \circ \mathcal{F}_1(f)$ sempre que a seta $f \circ g$ estiver definida em $\mathscr{C}$,

$\mathcal{F}$ será dito um funtor **contravariante**. ¶

Observação 1.2.44. No dia a dia, escreve-se tanto $\mathcal{F}(a)$ quanto $\mathcal{F}(f)$ para um objeto a ou para uma seta f, respectivamente, sem os subíndices 0 e 1. A distinção feita na definição teve apenas propósitos didáticos e, futuramente, será abandonada. △

Exemplo 1.2.45. Das suas aulas de CÁLCULO, você deve lembrar que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então as funções $f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \cdot g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas. Dado que funções constantes também são contínuas, é um exercício elementar de ÁLGEBRA verificar que $\mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um anel comutativo ($\star$).

O que talvez você não saiba é que as considerações acima permanecem válidas para quaisquer funções contínuas da forma $X \to \mathbb{R}$, onde X é meramente um espaço topológico. Você pode verificar isto agora ($\substack{\star\\\star}$) ou apenas assumir como um *fato* enquanto espera pela demonstração, que será apresentada oportunamente (mas em contexto bem mais geral).

Obtemos assim uma correspondência $\mathcal{F}_0\colon \mathrm{Obj}\,(\mathrm{TOP}) \to \mathrm{Obj}\,(\mathrm{CRING})$, que a cada espaço topológico X associa o anel comutativo $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$. Ou seja: já temos *metade* de um funtor TOP $\to$ CRING. Falta determinar como uma função contínua $f\colon X \to Y$ induz um morfismo de anéis $\mathcal{F}_1(f)$ entre $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ e $\mathrm{C}(Y, \mathbb{R})$, ou vice-versa, e é justamente aqui onde o *apelo categórico* começa a dar as caras.

[†]Não precisa ser comutativo, mas se quiser pode.

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & \mathscr{D} \\
a \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}_0(a) \\
a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f\circ g"'] & \mathcal{F}_0(a) \arrow[u, "\mathcal{F}_1(\mathrm{id}_a)=\mathrm{id}_{\mathcal{F}_0(a)}"'] \arrow[d, "\mathcal{F}_1(f)"'] \arrow[dd, bend left, "\mathcal{F}_1(f\circ g)=\mathcal{F}_1(f)\circ\mathcal{F}_1(g)"] \\
b \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}_0(b) \arrow[d, "\mathcal{F}_1(g)"'] \\
c \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}_0(c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & \mathscr{D} \\
a \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}_0(a) \arrow[d, "\mathcal{F}_1(\mathrm{id}_a)=\mathrm{id}_{\mathcal{F}_0(a)}"'] \\
a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "f\circ g"'] & \mathcal{F}_0(a) \\
b \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}_0(b) \arrow[u, "\mathcal{F}_1(f)"'] \\
c \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}_0(c) \arrow[u, "\mathcal{F}_1(g)"'] \arrow[uu, bend right, "\mathcal{F}_1(f\circ g)=\mathcal{F}_1(g)\circ\mathcal{F}_1(f)"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.1: Funtores covariantes respeitam a *direção* das setas sobre as quais agem, enquanto os contravariantes invertem as setas.

Dada a generalidade dos objetos considerados, o morfismo de anéis $\mathcal{F}_1(f)$ deve ser definido da maneira mais natural e ampla possível, de modo a não fazer referência a particularidades dos espaços X e Y considerados. A princípio, há duas formas de iniciar o procedimento:

(i) fixada uma função contínua $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, precisamos definir outra função contínua $\mathcal{F}_1(f)(\varphi)\colon Y \to \mathbb{R}$;

(ii) fixada uma função contínua $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$, precisamos definir outra função contínua $\mathcal{F}_1(f)(\psi)\colon X \to \mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dotted, "?"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{R} \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "\psi\circ f"] &
\end{tikzcd}
$$

Para decidir qual dos dois procedimentos tem *mais* chances de dar certo, basta lembrar que, antes de qualquer outra coisa, fixou-se uma função contínua $f\colon X \to Y$. Enquanto a primeira abordagem não sugere uma maneira óbvia de usar φ e f para definir uma função contínua $Y \to \mathbb{R}$, a segunda explicita que para $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$ e $f\colon X \to Y$ contínuas, a função $\psi \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua. Em outras palavras, obtemos uma função†

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(f)\colon\ \mathrm{C}(Y,\mathbb{R}) &\to \mathrm{C}(X,\mathbb{R}) \\
\psi &\mapsto \psi \circ f
\end{aligned}.
$$

O próximo passo é verificar se $\mathcal{F}_1(f)$ é realmente uma seta em CRIng, i.e., um morfismo de anéis. Como essa pode ser sua primeira vez com esse tipo de verificação, ela será apresentada aqui — mas não se acostume.

†Sim: trata-se de uma função que *age* sobre um conjunto de funções. Para evitar problemas com isso, lembre-se sempre de não confundir "$f(x)$" com "f". É importante que você se acostume com esse tipo de procedimento, pois muito do que será feito nos capítulos avançados envolve *espaços de funções*.

- Denotando por $\underline{1}_Y : Y \to \mathbb{R}$ a função constante 1, elemento neutro multiplicativo de $\mathrm{C}(Y, \mathbb{R})$, temos $\mathcal{F}_1(f)(\underline{1}_Y)(x) := (\underline{1}_Y \circ f)(x) = \underline{1}_Y(f(x)) = 1$, mostrando que $\mathcal{F}_1(f)(\underline{1}_Y) = \underline{1}_X$, i.e., $\mathcal{F}_1(f)$ *levou* a *unidade* do domínio na *unidade* do codomínio.

- Para $\psi, \psi' : Y \to \mathbb{R}$ funções contínuas[†], $x \in X$ e $* \in \{+, \cdot\}$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(f)(\psi * \psi')(x) &:= ((\psi * \psi') \circ f)(x) = (\psi * \psi')(f(x)) = \psi(f(x)) * \psi'(f(x)) \\ &= (\psi \circ f)(x) * (\psi' \circ f)(x) = (\mathcal{F}_1(f)(\psi) * \mathcal{F}_1(f)(\psi'))(x),\end{aligned}$$

  mostrando que $\mathcal{F}_1(f)(\psi * \psi') = \mathcal{F}_1(f)(\psi) * \mathcal{F}_1(f)(\psi')$.

Os cálculos acima mostram que $\mathcal{F}_1(f) : \mathrm{C}(Y, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ é um morfismo de anéis, com a função contínua $f : X \to Y$ fixada. É no próximo passo, i.e., ao fazer f *variar*, que mostraremos a natureza funtorial da correspondência que estamos definindo — contravariante em virtude da inversão das setas. Apenas duas coisas precisam ser verificadas:

- Para X espaço topológico e $\mathrm{Id}_X : X \to X$ a função identidade, valem as igualdades $\mathcal{F}_1(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_0(X)} = \mathrm{Id}_{\mathrm{C}(X,\mathbb{R})}$ pois

$$\mathcal{F}_1(\mathrm{Id}_X)(\varphi) := \varphi \circ \mathrm{Id}_X = \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{C}(X,\mathbb{R})}(\varphi)$$

  para qualquer $\varphi \in \mathrm{C}(X, \mathbb{R})$.

- Para espaços topológicos X, Y e Z e funções contínuas $g : X \to Y$ e $f : Y \to Z$, temos

$$\mathcal{F}_1(f \circ g)(\rho) := \rho \circ (f \circ g) = (\rho \circ f) \circ g = \mathcal{F}_1(g)(\rho \circ f) = (\mathcal{F}_1(g) \circ \mathcal{F}_1(f))(\rho)$$

  para qualquer $\rho \in \mathrm{C}(Z, \mathbb{R})$. Portanto, $\mathcal{F}_1(f \circ g) = \mathcal{F}_1(g) \circ \mathcal{F}_1(f)$.

Mostramos assim que as correspondências $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$ definem, de fato, um funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathrm{Top} \to \mathrm{CRIng}$, usualmente denotado por $\mathrm{C}(\bullet, \mathbb{R})$. Como você já deve imaginar, em vez de $\mathcal{F}_0(X)$, escreve-se apenas $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ para um espaço topológico X, bem como $\mathrm{C}(f, \mathbb{R})$ em vez de $\mathcal{F}_1(f)$ para uma função contínua $f : X \to Y$. ▲

Pode parecer uma verificação árdua, principalmente se for sua primeira vez com funtores, mas um olhar atento mostra que os "cálculos" foram *quase triviais*[‡]. A dificuldade, se existente, está na distinção das diversas *camadas* de informação. Mas não se preocupe, com o tempo você se acostuma. Além disso, muitas vezes as camadas são bem mais simples.

Exemplo 1.2.46. Existem funtores *triviais* $\mathrm{Met}_{\mathrm{cont}} \to \mathrm{Top}$ e $\mathrm{Met}_{\mathrm{dist}} \to \mathrm{Top}$: no *nível de objetos*, os funtores *levam* um espaço métrico (X, d) ao espaço topológico $(X, \mathcal{T}_{\to_d})$, i.e., ao espaço que tem os pontos de X com a topologia induzida pela métrica d; no nível de setas, os funtores *levam* uma seta $f : X \to Y$ nela mesma, o que faz sentido pois, na primeira categoria, as setas já são funções contínuas por hipótese e, na segunda, as setas são isometrias, que em particular são funções contínuas ($\star$). Daí, não é difícil ver que todas as exigências para ser funtor (covariante) são satisfeitas ($\star$). ▲

[†]Por favor: nem faria sentido pensar que ψ' é *a derivada* de ψ aqui, dado que não há estruturas adicionais definidas sobre Y. Portanto, não pergunte se ψ' é a derivada de ψ.

[‡]Dado que a sociedade tem se mostrado cada vez mais sensível e amedrontada pelo uso das palavras, prefiro não arriscar um julgamento de valor explícito quanto ao grau de dificuldade de trivialidades.

A grande pergunta é: para que isso tudo?

Exercício 1.2.8 (Faça só se for sua primeira vez com funtores $\binom{\star}{\star}$)**.** Mostre que se X e Y são espaços topológicos homeomorfos (i.e., isomorfos em Top), então os anéis $\mathrm{C}(X,\mathbb{R})$ e $\mathrm{C}(Y,\mathbb{R})$ são isomorfos em CRIng. ■

Proposição 1.2.47. *Seja $\mathcal{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor (covariante ou contravariante). Se $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ são $\mathscr{C}$-isomorfos, então $\mathcal{F}(a)$ e $\mathcal{F}(b)$ são $\mathscr{D}$-isomorfos.*

Demonstração. Sejam $f\colon a \to b$ e $g\colon b \to a$ setas tais que $f \circ g = \mathrm{id}_b$ e $g \circ f = \mathrm{id}_a$. Se $\mathcal{F}$ for covariante, então

$$\mathrm{id}_{\mathcal{F}(b)} = \mathcal{F}(\mathrm{id}_b) = \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \quad \text{e} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{F}(a)} = \mathcal{F}(\mathrm{id}_a) = \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f),$$

mostrando que $\mathcal{F}(a)$ e $\mathcal{F}(b)$ são $\mathscr{D}$-isomorfos (por favor!)$^{\star/2}$. O caso em que $\mathcal{F}$ é contravariante é "*ocitnêdi*" *(?otrec). □

Assim, num primeiro momento, funtores permitem *empurrar* problemas de uma categoria para outra de modo sistemático. Se sua intenção for apenas mostrar que dois espaços topológicos não são homeomorfos, por exemplo, isto pode ser feito mais facilmente por meio de um funtor $\mathcal{F}\colon \text{Top} \to \mathscr{C}$, onde (espera-se que) $\mathscr{C}$ é alguma categoria cujos objetos são mais simples do que espaços topológicos: se os objetos $\mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{F}(Y)$ não forem $\mathscr{C}$-isomorfos, então X e Y não podem ser homeomorfos[†]! A depender da sorte, podemos encontrar funtores que não apenas possibilitam empurrar problemas, mas também *puxar* soluções de volta! Todavia, é cedo para abordar essa perspectiva.

Por ora, podemos retornar ao problema que iniciou a presente subseção: o processo de associar uma ordem parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ ao espaço topológico $(\mathbb{P}, \mathcal{T}_{\leq})$ é funtorial? A motivação para esta pergunta está no próximo

Exercício 1.2.9 $\binom{\star}{\star}$**.** Mostre que se $(\mathbb{P}, \leq)$ e $(\mathbb{P}', \leq')$ são ordens (parciais) isomorfas em Poset[‡], então $(\mathbb{P}, \mathcal{T}_{\leq})$ e $(\mathbb{P}, \mathcal{T}_{\leq'})$ são espaços topológicos homeomorfos. Dica: mostre que se $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ é um *isomorfismo de ordens*[††] e $I \subseteq \mathbb{P}'$ é intervalo fundamental, então $f^{-1}[I]$ é intervalo fundamental em $\mathbb{P}$. ■

Trata-se do mesmo fenômeno observado na (tese da) última proposição, a menos de encontrarmos o funtor $\mathcal{F}$ que faz o trabalho. *Mas, se no exercício anterior, a mesma função no papel de isomorfismo também fez o papel de homeomorfismo, então o funtor procurado deve simplesmente mandar uma função crescente $\mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ para ela mesma!* Em outras palavras: toda função crescente é contínua? Suspiro...

Exemplo 1.2.48 (Nunca se esqueça do básico)**.** Considere $\mathbb{P} := [0,2]$ e $\mathbb{P}' := [0,4]$ com suas ordens herdadas de $\mathbb{R}$. A função $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0,1) \\ 2x+1, & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

é claramente crescente e descontínua em 1 (Cálculo I?)*. ▲

[†]Essa ideia aparentemente simples é um dos métodos centrais na *Topologia Algébrica*.

[‡]Por padrão, Poset é a categoria cujos objetos são ordens parciais e cujas setas são funções crescentes, com composição e identidades usuais. Se for seu primeiro contato com categorias, verifique que Poset é categoria ($\star$).

[††]Um Poset-isomorfismo, ou seja: uma bijeção crescente cuja inversa é crescente.

Exercício 1.2.10 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Por que os métodos empregados no último exercício falham com a função do exemplo anterior? ■

Enquanto o "problema" acima nos ensina que nem todo sintoma é sinal de uma doença, o próximo exemplo é um pouco mais pessimista.

Exemplo 1.2.49 (As vezes você só precisa fazer o exame certo)**.** Vamos considerar outro tipo de seta sobre uma subclasse de objetos de POSET, mais adequadas para o tipo de topologia que convencionamos usar em ordens neste texto†. Em vez de ordens parciais quaisquer, vamos considerar apenas *ordens totais*, i.e., aquelas em que quaisquer dois elementos são comparáveis. Setas serão as funções entre ordens totais que preservam supremos e ínfimos‡, com composições e identidades usuais. Vamos chamar por $\mathrm{TOSET}_{\mathrm{CONT}}$ a categoria com esses objetos e setas.

Sob tais condições, a correspondência

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{T}, \leq) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (\mathbb{T}, \mathcal{T}_{\leq}) \arrow[d, "f"] \\
(\mathbb{T}', \leq') \arrow[r, mapsto] & (\mathbb{T}', \mathcal{T}_{\leq'})
\end{tikzcd}$$

define um funtor $\mathcal{T}_\bullet \colon \mathrm{TOSET}_{\mathrm{CONT}} \to \mathrm{TOP}$. Com efeito, note primeiramente que o diagrama acima indica que o funtor $\mathcal{T}_\bullet$ não altera o conjunto subjacente do espaço topológico e tampouco a função entre eles. Assim, na prática, tudo se resume ao próximo lema. ▲

Lema 1.2.50. *Se $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}'$ preserva supremos e ínfimos, então f é contínua.*

Demonstração. Primeiro, observe que f é crescente, pois $a \leq b$ em $\mathbb{T}$ sse $b = \sup\{a, b\}$, e daí $f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, i.e., $f(b) \geq f(a)$. Agora, para $I := (\beta, +\infty)_{\mathbb{T}'}$, e $\alpha \in f^{-1}[I]$, existe $t \in \mathbb{T}$ tal que $\alpha \in (t, +\infty)_{\mathbb{T}}$ com $(t, +\infty)_{\mathbb{T}} \subseteq f^{-1}[I]$. Se isto não ocorresse, teríamos $\alpha = \min f^{-1}[I]$ e $\sup\{t \in \mathbb{T} : t < \alpha\} = \alpha$. De fato:

- $\alpha = \min f^{-1}[I]$ pois, se algum $\gamma \in f^{-1}[I]$ fosse tal que $\alpha \not\leq \gamma$, então a totalidade da ordem daria $\gamma < \alpha$, e daí $\alpha \in (\gamma, +\infty)_{\mathbb{T}} \subseteq f^{-1}[I]$, com a última inclusão assegurada em virtude de f ser crescente e valer $\beta < f(\gamma)$;
- se α não fosse supremo de $\{t \in \mathbb{T} : t < \alpha\}$, então existiria $\gamma = \max\{t \in \mathbb{T} : t < \alpha\}$, acarretando em $\alpha \in (\gamma, +\infty)_{\mathbb{T}} \subseteq f^{-1}[I]$ (por quê?)*.

Consequentemente, $\beta < f(\alpha) = \sup_{t<\alpha} f(t)$ enquanto $f(t) \leq \beta$ para todo $t < \alpha$ (percebeu?)*, acarretando $\beta < f(\alpha) \leq \beta$. Absurdo. Portanto, pela arbitrariedade de α, segue que $f^{-1}[I]$ é $\mathcal{T}_{\leq}$-aberto em $\mathbb{T}$. Analogamente, mostra-se que $f^{-1}[(-\infty, c)_{\mathbb{T}'}]$ é $\mathcal{T}_{\leq}$-aberto para qualquer $c \in \mathbb{T}'$. Daí, não é difícil concluir que f é contínua. □

Exercício 1.2.11 ($\star$)**.** Certifique-se de que concluiu a demonstração anterior! Dica: a preservação de ínfimos é importante na parte do "analogamente...". ■

Observação 1.2.51. Um *desafio* proposto por Rígille Menezes, no Twitter††, fez com que eu atentasse para a não funtorialidade (óbvia) da correspondência POSET → TOP. A "solução" sugerida acima, também observada por Schechter [38]‡‡, foi adaptada da discussão realizada em https://math.stackexchange.com/questions/2542202. △

†Diferente do que a Definição 1.2.17 pode ter sugerido, há vários tipos de topologias razoáveis que podem ser consideradas sobre ordens. Para mais detalhes, confira [36].

‡Ou seja, se $\alpha = \sup A$, então $f(\alpha) = \sup f[A]$, e $f(\beta) = \inf f[B]$ sempre que $\beta = \inf B$.

††https://twitter.com/impression28/status/1225141899494817793.

‡‡Embora com argumentações bem mais gerais, que você pode conferir na Seção 15.45 de [38].

As considerações acima não encerram o tipo de uso que será feito de categorias neste texto. Contudo, para um primeiro contato, está bom. Ao longo do texto, conceitos categóricos adicionais serão apresentados conforme forem necessários. Até lá!

Exercício 1.2.12 $(\star)$**.** Mostre que a relação de $\mathscr{C}$-isomorfismo entre objetos de uma categoria $\mathscr{C}$ define uma *relação de equivalência* na classe de objetos de $\mathscr{C}$. ■

Exercício 1.2.13 $(\star)$**.** Mostre que um morfismo bijetor de grupos, anéis ou espaços vetoriais é um isomorfismo nas categorias correspondente. ■

Exercício 1.2.14 $(\star)$**.** Mostre que uma bijeção contínua entre espaços topológicos pode não ser um homeomorfismo. Dica: para um exemplo modesto, recorra ao seu caderno de ANÁLISE REAL; para um exemplo divertido $(\substack{\star\\\star})$, considere duas normas espertas sobre $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ e investigue a função identidade. ■

1.2.4 Exercícios adicionais

Exercício 1.2.15 $(\substack{\star\\\star})$**.** Para um $\mathbb{K}$-espaço normado X, $X^* := \mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X,\mathbb{R})$ indicará o espaço dos funcionais $\mathbb{K}$-lineares contínuos de X, chamado de **espaço dual topológico**[†] de X.

a) Mostre que a norma de operadores definida em (1.1) (pág. 31) faz de X^* um espaço de Banach[‡].

b) Sejam $\mathsf{Norm}_{\mathbb{K}}$ e $\mathsf{Ban}_{\mathbb{K}}$ a **categoria dos $\mathbb{K}$-espaços normados** e dos **espaços de $\mathbb{K}$-Banach**, respectivamente, cujas setas são transformações lineares contínuas. Mostre que a correspondência $\bullet^* \colon \mathsf{Norm}_{\mathbb{K}} \to \mathsf{Ban}_{\mathbb{K}}$ define um funtor contravariante, enquanto a *composição* $\bullet^* \circ \bullet^*$ define um funtor covariante. Observação: "adivinhar" como definir os funtores no nível de setas faz parte do exercício. ■

Observação 1.2.52. O espaço $(X^*)^*$ costuma ser chamado de **bidual topológico** de X. Por simplicidade, denota-se simplesmente por X^{**}. △

Exercício 1.2.16 $(\substack{\star\\\star})$**.** Ignorando questões de fundamentos, mostre como definir uma categoria cujos objetos são categorias e cujas setas são funtores. ■

Exercício 1.2.17 $(\substack{\star\\\star})$**.** Existe métrica em $[0,\omega_1]$ cuja topologia induzida coincida com a topologia da ordem? ■

Exercício 1.2.18 $(\star)$**.** Para ordens totais $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$, mostre que se $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}'$ for contínua e crescente, então f preserva supremos e ínfimos. ■

Exercício 1.2.19 $(\star)$**.** Para uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ e uma função limitada $f\colon X\to\mathbb{K}$, mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\|\cdot\|_\infty} f$ sse $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{u}} f$. ■

Exercício 1.2.20 $(\substack{\star\\\star\star})$**.** Num espaço topológico X, dizemos que um subconjunto S de X é um $\mathbf{G}_\delta$ se existe uma família enumerável $\mathcal{A}$ de abertos de X tal que $S = \bigcap\mathcal{A}$. Mostre que se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções contínuas da forma $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, então $f^{-1}[C]$ é um G_δ em $\mathbb{R}$ sempre que $C\subseteq\mathbb{R}$ é fechado. ■

[†]A princípio, o termo "topológico" se deve ao fato de considerarmos apenas os funcionais lineares contínuos. Sim: em dimensão infinita, há funcionais lineares descontínuos. Veremos isso oportunamente, não se preocupe.

[‡]Na verdade, $(\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X,Y), \|\cdot\|)$ é de Banach sempre que Y também é.

Exercício 1.2.21 (Fechados encaixantes – versão métrica $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Seja X um espaço métrico cuja métrica é d.

a) Suponha que d seja completa e considere $(F_n)_n$ uma sequência decrescente de subconjuntos (não vazios) e fechados de X. Mostre que se $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, então existe um único ponto em $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, onde, para $S \subseteq X$, $\operatorname{diam}(S) := \sup\{d(x,y) : x, y \in S\}$ indica o **diâmetro** de S. Dica: note que se $x_n \in F_n$ para cada n, então $(x_n)_n$ é de Cauchy.

b) Suponha que para toda sequência decrescente $(F_n)_n$ de fechados não vazios de um espaço métrico X satisfazendo $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ se tenha um único ponto na interseção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Mostre que X é completo. Dica: para uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço, considere os fechados $F_n := \overline{\{x_m : m \geq n\}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Capítulo 2

A lagoa de lágrimas

No segundo capítulo da obra de Lewis Carroll, Alice encontra uma portinhola que leva a um jardim magnífico, mas inacessível devido ao tamanho da protagonista. Embora descubra maneiras de alterar sua estatura, ela não consegue usá-las corretamente para entrar no jardim e, por conta disso, chora, gerando assim a *lagoa de lágrimas*. Aqui, o jardim pode ser pensado como a TOPOLOGIA GERAL com seus belos teoremas. Por conseguinte, sequências convergentes fazem o papel da portinhola, já que elas restringem o acesso a tais técnicas tão maravilhosas. Finalmente, as lágrimas serão ~~suas~~ causadas pelas ferramentas que usaremos para arrombar a porta, dentre as quais se destacam as *redes* e os *filtros*[‡], protagonistas deste capítulo.

2.1 Essencial: convergência em espaços topológicos

2.1.1 Como generalizar sequências

Se você enfrentou o capítulo anterior, pode ter sentido falta de um resultado básico acerca de limites na reta ou em espaços métricos: a *unicidade*. Foi proposital. As provas usuais de unicidade de limites explicitam muito claramente o que os conjuntos de índices precisam ter para servirem como *parâmetros* de convergência.

Exemplo 2.1.1 (Unicidade de limites de sequências reais)**.** *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{R}} L$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{R}} L'$, então $L = L'$.* Para provar isso, basta assegurar que $|L - L'| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por um lado, para $\gamma > 0$ fixado, existe $N_L \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \gamma$ sempre que $n \geq N_L$. Por outro lado, *também* existe $N_{L'} \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L'| < \gamma$ sempre que $n \geq N_{L'}$. Daí, *como existe* $N \in \mathbb{N}$ com $N_L, N_{L'} \leq N$, segue que

$$|L - L'| \leq |L - x_N| + |x_N - L'| < \gamma + \gamma = 2\gamma$$

donde a afirmação original segue com $\gamma := \frac{\varepsilon}{2}$. ▲

Exemplo 2.1.2 (Unicidade de limites de funções)**.** Agora, volte ao seu curso de CÁLCULO I e recorde da notação

$$\lim_{x\to p} f(x) = L, \tag{2.1}$$

onde, por exemplo, f é uma função da forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e tanto p quanto L são números reais.

[‡]Se preferir não usar tais recursos, ~~repense a escolha por este texto~~ avance de uma vez para a Subseção 2.1.2.

Neste caso, os símbolos acima abreviam o seguinte: *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x - p| < \delta$. A depender do cuidado de quem lhe deu aula, o uso da notação especial para o número L deve ter sido justificada mais ou menos assim: se L e L' satisfazem a condição, pode-se tomar $\delta, \delta' > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad 0 < |x - p| < \delta' \Rightarrow |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Certamente, existe algum $x' \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < |x' - p| < \widetilde{\delta}$, onde $\widetilde{\delta} := \min\{\delta, \delta'\}$, donde segue que $|L - L'| \leq |L - f(x')| + |f(x') - L'| < \varepsilon$, como desejado. ▲

O ponto de atenção aqui não é a unicidade dos limites nos dois contextos, mas sim a semelhança nos métodos empregados para provar a unicidade. No primeiro exemplo, o número N escolhido satisfaz as duas exigências ($N \geq N_L$ e $N \geq N_{L'}$), o que permite concluir que tanto $|x_N - L|$ quanto $|x_N - L'|$ são *suficientemente pequenos*. Já no segundo exemplo, o fato de podermos tomar um mesmo ponto x' cumprindo as duas exigências ($|x' - p| < \delta$ e $|x' - p| < \delta'$) permitiu concluir que tanto $|f(x') - L|$ quanto $|f(x') - L'|$ são *suficientemente pequenos*.

Moral da história: o conjunto de índices que *parametriza* os pontos que se aproximam do limite é *ordenado* por um tipo de relação em que quaisquer dois índices podem ser melhorados por um terceiro. Assim, para generalizar sequências, basta trocar $\mathbb{N}$ por um conjunto dotado de uma relação parecida.

§1 Um mínimo sobre redes

Definição 2.1.3. Diremos que uma pré-ordem[†] não vazia $(\mathbb{D}, \preceq)$ é **dirigida**, ou que o conjunto $\mathbb{D}$ é **dirigido** pela pré-ordem $\preceq$, se para quaisquer $a, b \in \mathbb{D}$ existe $c \in \mathbb{D}$ com $a, b \preceq c$. Em tais situações, diz-se que c é *melhor* do que a e b ou, se quiser soar mais profissional, c *refina* a e b. ¶

Conjuntos não vazios e totalmente ordenados, como $(\mathbb{N}, \leq)$ ou outras boas ordens, são claramente dirigidos (concorda?)*.

Exemplo 2.1.4. Para um ponto $p \in \mathbb{R}$ fixado, sejam $\mathbb{R}_p := \mathbb{R} \setminus \{p\}$ e a relação binária $\preceq$ em $\mathbb{R}_p$ onde $x \preceq y$ sse $|y - p| \leq |x - p|$. Não é difícil se convencer de que $\preceq$ é uma pré-ordem sobre $\mathbb{R}_p$ (verifique?)*. Para ver que $(\mathbb{R}_p, \preceq)$ é dirigido, apenas note que se $x, y \in \mathbb{R}_p$, então ocorre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, já que $|x - y|$ e $|y - x|$ são elementos de um conjunto totalmente ordenado. ▲

Exercício 2.1.1 ($\star$/3)**.** Mostre que $(\mathbb{R}_p, \preceq)$ não é uma ordem parcial. ■

Exemplo 2.1.5 (Importante)**.** Fixados um *espaço topológico*[‡] $(X, \mathcal{T})$ e um ponto $p \in X$, a coleção

$$\mathcal{T}_p := \{V \in \mathcal{T} : p \in V\}, \tag{2.2}$$

formada pelos abertos de X *em torno de* p, torna-se um conjunto dirigido com a relação de inclusão reversa, i.e., ao declarar $V \preceq U$ sse $U \subseteq V$. Como $\preceq$ é claramente reflexiva e transitiva, resta apenas a condição de refinamento, que segue pois $p \in U \cap V \subseteq U, V$ sempre que $U, V \in \mathcal{T}_p$. Futuramente, xingaremos a família $\mathcal{T}_p$ de *pré-filtro de abertos em torno de* p. ▲

[†]Lembre-se: uma *pré-ordem* é uma relação binária *reflexiva* e *transitiva* (cf. Observação 1.2.42).

[‡]Se você decidiu pular o primeiro capítulo mesmo sem saber o que é *espaço topológico*... ~~repense suas escolhas~~ retorne para a Definição 1.1.28, na página 23.

Haverá mais exemplos, não se preocupe. Agora, vamos ao que interessa.

Definição 2.1.6. Para *um* conjunto dirigido $(\mathbb{D}, \preceq)$, uma função $\varphi \colon \mathbb{D} \to X$ será chamada de **rede**† em X. ¶

Observação 2.1.7 (Quem é $\mathbb{D}$?)**.** O uso excessivo de sequências na escola pode fazer com que algumas pessoas demorem a perceber a *flexibilidade* da definição acima. Enquanto uma sequência em X é uma função da forma $\mathbb{N} \to X$, onde $\mathbb{N}$ indica *o* conjunto dos números naturais (com sua ordenação de sempre), uma rede em X é uma função da forma $\mathbb{D} \to X$, onde $\mathbb{D}$ indica *um*‡ conjunto dirigido. Como existe uma *infinidade* de conjuntos dirigidos, a conclusão inevitável é que uma infinidade de conjuntos pode ocupar o papel de $\mathbb{D}$ na definição de rede! Em outras palavras, $\mathbb{D}$ muda com o contexto. △

Consonante com as notações adotadas para sequências, uma rede φ que faz $\varphi(d) := x_d$ para cada $d \in \mathbb{D}$ será denotada como $(x_d)_{d \in \mathbb{D}}$, ou apenas $(x_d)_d$ quando o conjunto dirigido $\mathbb{D}$ estiver *muito* claro pelo contexto. Como a ideia é substituir sequências por redes na investigação de convergência, a próxima definição é inevitável.

Definição 2.1.8. Uma rede $\varphi := (x_d)_{d \in \mathbb{D}}$ num espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ **$\mathcal{T}$-converge** para um ponto $p \in X$ se para todo $\mathcal{T}$-aberto $V \subseteq X$ com $p \in V$ existir $D \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi(d) := x_d \in V$ para todo $d \succeq D$. Em tais situações, diremos que φ é *$\mathcal{T}$-convergente*, e o ponto p será chamado de (*um*) *$\mathcal{T}$-limite* de φ. Como de costume, isto será abreviado com $\varphi \to_{\mathcal{T}} p$, exceto nas situações em que a topologia for clara pelo contexto, caso em que todas as menções a $\mathcal{T}$ serão omitidas. ¶

A escolha de notação é um ato político. É por essa razão que prefiro escrever "$(x_d)_{d \in \mathbb{D}} \to_{\mathcal{T}} p$" em vez de "$x_d \to_{\mathcal{T}} p$": para reforçar o *posicionamento* de que a noção de convergência estabelece uma relação binária entre as redes e os pontos do espaço — e não meramente entre os pontos do espaço. Apesar disso, você é livre para escrever com a segunda notação, principalmente em ocasiões públicas.

Exemplo 2.1.9. Sequências convergentes são, claramente, subcasos de redes convergentes. Para os limites usuais do Cálculo I, como o apresentado no Exemplo 2.1.2, a relação $\preceq$ sobre $\mathbb{R}_p := \mathbb{R} \setminus \{p\}$ do Exemplo 2.1.4 é tal que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \text{ no sentido usual } \Leftrightarrow (f(x))_{x \in \mathbb{R}_p} \to L,$$

já que em $\mathbb{R}_p$, $b \preceq a$ sse $|p - a| \leq |p - b|$, i.e., a é melhor do que b sse a é melhor do que b quando o assunto é estar próximo de p. Não é difícil definir conjuntos dirigidos que permitam traduzir limites laterais, limites no infinito, integrais de Riemann, etc., mas isto não será feito aqui. Caso tenha curiosidade, confira [5, 29]. ▲

Observação 2.1.10 (O conjunto dirigido importa)**.** A sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ costuma ser o primeiro exemplo de sequência *divergente*, i.e., tal que não existe ponto (na reta) para o qual a sequência convirja. Embora você já deva saber disso, convém revisitar uma das formas de argumentar sem usar *subsequências*††. Fixado um ponto $L \in \mathbb{R}$ arbitrário, o aberto $A := \left(L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2}\right)$ é tal que para qualquer $N \in \mathbb{N}$, existe $N' > N$ com $(-1)^{N'} \notin A$: basta tomar $N' := N + 1$ (certo?)*.

†A terminologia anglófona é *net*.
‡Artigo indefinido... Lembra?
††Nada contra subsequências, mas usá-las aqui atrapalharia a ilustração.

Esse argumento evidencia que a ordenação dos índices *também* é responsável pela divergência da sequência. Duvida? Pois bem: com o conjunto dirigido $\mathcal{N} := (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \preceq)$, onde $m \preceq n$ sse m divide n (verifique as condições da Definição 2.1.3!)*, note que $((-1)^n)_{n\in\mathcal{N}} \to 1$: basta observar que $(-1)^n = 1$ para todo $n \succeq 2$ (observou?)*. △

Exercício 2.1.2 ($\star$)**.** Mostre que se $\mathbb{D}$ é um conjunto dirigido que tem elemento máximo $\widetilde{d}$, então qualquer rede $\varphi\colon \mathbb{D} \to X$ converge para $\varphi(\widetilde{d})$. Moral da história: conjuntos dirigidos interessantes não têm máximos. ■

As considerações acima ilustram a grande vantagem das redes sobre as sequências: sua definição admite *qualquer* conjunto dirigido como domínio de índices, ao mesmo tempo em que emprega uma escrita familiar. É justamente isso o que possibilita empurrar as limitações sequenciais para ~~debaixo do tapete~~ o conjunto dirigido no próximo

Teorema 2.1.11. *Para espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, uma função $f\colon X \to Y$ e um ponto $p \in X$, são equivalentes:*

(i) *f é contínua em p, i.e., para todo $\mathcal{T}_Y$-aberto $V \subseteq Y$ tal que $f(p) \in V$, existe um $\mathcal{T}_X$-aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ e $f[U] \subseteq V$;*

(ii) *$(f(x_d))_{d\in\mathbb{D}} \to_{\mathcal{T}_Y} f(p)$ para qualquer rede $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ em X satisfazendo $(x_d)_{d\in\mathbb{D}} \to_{\mathcal{T}_X} p$.*

Demonstração. O argumento de sempre dá conta de (i) $\Rightarrow$ (ii): se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}} \to_{\mathcal{T}_X} p$ e $V \subseteq Y$ é um $\mathcal{T}_Y$-aberto em torno de $f(p)$, então (i) assegura um $\mathcal{T}_X$-aberto U em torno de p com $f[U] \subseteq V$, enquanto a convergência de $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ garante $D \in \mathbb{D}$ tal que $\{x_d : d \succeq D\} \subseteq U$, donde segue que $\{f(x_d) : d \succeq D\} \subseteq V$ (percebeu?)*. Ou seja, $(f(x_d))_{d\in\mathbb{D}} \to_{\mathcal{T}_Y} f(p)$.

Para a recíproca, podemos *imitar* uma das possíveis soluções para o Exercício 1.1.1 (cf. pág. 207), procedendo pela contrapositiva. Se f *não* é contínua em p, então para *algum* $\mathcal{T}_Y$-aberto $V \subseteq Y$ em torno de $f(p)$, tem-se $f[U] \nsubseteq V$ *para todo* $\mathcal{T}_X$-aberto $U \subseteq X$ em torno de p. Em outras palavras, para cada $U \in \mathcal{T}_p$ existe $x_U \in U$ com $f(x_U) \notin V$, onde $\mathcal{T}_p$ é definido como em (2.2) (cf. Exemplo 2.1.5). Percebeu o que acabamos de fazer?

Como $\mathcal{T}_p$ é dirigido pela inclusão reversa[†], é legítimo considerar a rede $(x_U)_{U\in\mathcal{T}_p}$. Mas não é só isso: $(x_U)_{U\in\mathcal{T}_p} \to_{\mathcal{T}_X} p$. Com efeito, fixado qualquer $\mathcal{T}_X$-aberto $W \subseteq X$ em torno de p, o próprio W é um elemento do conjunto dirigido $\mathcal{T}_p$, de modo que $x_U \in W$ para todo $U \succeq W$, pois isto equivale a $U \subseteq W$ (e escolhemos $x_U \in U$!). Por fim, temos $(f(x_U))_{U\in\mathcal{T}_p} \not\to_{\mathcal{T}_Y} f(p)$, pois não há $\widetilde{U} \in \mathcal{T}_p$ tal que $\left\{f(x_U) : U \succeq \widetilde{U}\right\} \subseteq V$, afinal de contas, $f(x_U) \notin V$ para todo $U \in \mathcal{T}_p$. Portanto, negamos (ii). □

Nas situações em que for seguro omitir o conjunto dirigido, você pode escrever $f \circ \varphi$ para indicar a rede $(f(x_d))_{d\in\mathbb{D}}$, onde $\varphi := (x_d)_{d\in\mathbb{D}}$. Assim, por exemplo, o item (ii) se reescreve assim: *$f \circ \varphi \to_{\mathcal{T}_Y} f(p)$ para toda rede φ em X tal que $\varphi \to_{\mathcal{T}_X} p$.* Isto costuma tornar a redação bem mais limpa — e a prova do próximo corolário deve servir como ilustração adicional.

Corolário 2.1.12. *Se $f\colon X \to Y$ é contínua em $p \in X$ e $g\colon Y \to Z$ é contínua em $f(p) \in Y$, então $g \circ f$ é contínua em p. Em particular, composição de funções contínuas é contínua.*

Demonstração. Se φ é uma rede em X tal que $\varphi \to_{\mathcal{T}_X} p$, então $f \circ \varphi \to_Y f(p)$ em virtude da continuidade de f, enquanto a continuidade de g acarreta $g \circ (f \circ \varphi) \to_{\mathcal{T}_Z} g(f(p))$. Acabou. □

Exercício 2.1.3 ($\star$)**.** Prove o corolário anterior sem usar redes. ■

[†]"*Mas não era para ser $\mathbb{D}$?!*". Leia a Observação 2.1.7 (ou releia com mais atenção desta vez).

§2 Um mínimo sobre filtros

Enquanto redes empregam conjuntos dirigidos *alienígenas* ao espaço topológico na tarefa de *parametrizar* situações de convergência no espaço, filtros capturam o comportamento dos pontos parametrizados e jogam fora o conjunto de índices, tornando a coisa toda *intrínseca*. Isto fará sentido em breve.

Definição 2.1.13. Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} \neq \emptyset$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um **filtro** de X (em X) se as duas condições abaixo forem satisfeitas:

(i) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;

(ii) $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

O filtro $\mathcal{F}$ será chamado de (filtro) **próprio** se $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Em particular, $X = \emptyset$ não admite filtros próprios. ¶

Exemplo 2.1.14 (Importante: *filtro de vizinhanças*)**.** A família $\mathcal{T}_p$ utilizada na demonstração do último teorema é *quase* um filtro. Dado que topologias são fechadas por interseções finitas, a primeira exigência na definição anterior é automaticamente satisfeita em $\mathcal{T}_p$. No entanto, a segunda condição falha (por favor!)$^{\star/10}$. Um modo prático de corrigir o problema é considerar, precisamente, a família de todos os subconjuntos que contêm algum membro de $\mathcal{T}_p$.

Definição 2.1.15. Para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um ponto $p \in X$, denota-se por $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ a família dos subconjuntos de X que contém *algum* aberto em torno de p. Explicitamente,

$$\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}} := \{N \subseteq X : \text{ existe } A \in \mathcal{T}_p \text{ tal que } A \subseteq N\}. \tag{2.3}$$

Os membros de $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ serão chamados de **$\mathcal{T}$-vizinhanças** de p (ou *em torno de* p) e, por sua vez, $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ será chamado de **filtro de $\mathcal{T}$-vizinhanças de** p. Como de costume, as menções a $\mathcal{T}$ serão omitidas quando a topologia estiver clara pelo contexto. ¶

A família $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ merece ser chamada de filtro pois é um filtro:

- $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}} \neq \emptyset$ pois X é uma $\mathcal{T}$-vizinhança de p;
- é fechada por interseções finitas, pois se $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$, então existem testemunhas $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_p$ com $A_i \subseteq N_i$, acarretando $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_p$ com $A_1 \cap A_2 \subseteq N_1 \cap N_2$, i.e., $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$.
- se $N \in \mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ e $N \subseteq S$, então existe $A \in \mathcal{T}_p$ com $A \subseteq N$, acarretando $A \subseteq S$, i.e., $S \in \mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$.

Por fim, não deve ser difícil perceber que $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ é um filtro próprio (perceba!)*. ▲

Situações como a do exemplo anterior são tão frequentes que merecem ser abstraídas a fim de facilitar futuras reciclagens. Como Schechter [38], diremos que uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X é um **pré-filtro** sempre que o seu "*fecho para cima*" $(\mathcal{G})^{\uparrow}$ for um filtro próprio em X, onde

$$(\mathcal{G})^{\uparrow} := \{S \subseteq X : \text{ existe } G \in \mathcal{G} \text{ tal que } G \subseteq S\}. \tag{2.4}$$

Em tais situações, dizemos que o filtro $(\mathcal{G})^{\uparrow}$ é **gerado** pelo pré-filtro $\mathcal{G}$, razão pela qual algumas referências preferem xingar pré-filtros de **bases de filtros**. Uma formulação alternativa é a seguinte:

Proposição 2.1.16. *Uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de $X \neq \emptyset$ é um pré-filtro se, e somente se, $\emptyset \notin \mathcal{G}$ e para quaisquer $G, H \in \mathcal{G}$ existe $I \in \mathcal{G}$ com $I \subseteq G \cap H$.*

Demonstração. Se $\mathcal{G}$ é pré-filtro, então por $(\mathcal{G})^{\uparrow}$ ser filtro próprio não ocorre $\emptyset \in (\mathcal{G})^{\uparrow}$. Logo, não existe $G \in \mathcal{G}$ com $G \subseteq \emptyset$. Como o único G que *poderia* estar contido em $\emptyset$ é o próprio conjunto vazio, conclui-se que $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Analogamente, se $G, H \in \mathcal{G}$, então $G, H \in (\mathcal{G})^{\uparrow}$ e, por $(\mathcal{G})^{\uparrow}$ ser filtro, obtemos $G \cap H \in (\mathcal{G})^{\uparrow}$, o que por sua vez garante a existência de uma testemunha $I \in \mathcal{G}$ com $I \subseteq G \cap H$ (pela definição de $(\mathcal{G})^{\uparrow}$!). A recíproca, por sua vez, consiste em mostrar que $(\mathcal{G})^{\uparrow}$ satisfaz as condições para ser um filtro próprio sempre que $\mathcal{G}$ tem as propriedades elencadas no enunciado, um bom exercício para quem nunca trabalhou com essas coisas (entendeu a indireta?)*. □

Exercício 2.1.4 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que se $\mathcal{G}$ é um pré-filtro em X, então $(\mathcal{G})^{\uparrow}$ é o *menor* filtro próprio em X que contém $\mathcal{G}$, i.e., se $\mathcal{F}$ é filtro próprio em X e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, então $(\mathcal{G})^{\uparrow} \subseteq \mathcal{F}$. ■

Exemplo 2.1.17 (Rabos[†])**.** Sequências e, mais geralmente, redes, induzem (pré-) filtros de maneira muito natural, por meio de seus *rabos*. Mais precisamente, fixada uma rede φ em X e um índice $D \in \operatorname{dom}(\varphi)$, dizemos que o conjunto

$$\varphi\left[D^{\uparrow}\right] := \{\varphi(d) : d \succeq D\}$$

é um **rabo da rede**. E daí? ▲

Exercício 2.1.5 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que $\left\{\varphi\left[D^{\uparrow}\right] : D \in \operatorname{dom}(\varphi)\right\}$ é um pré-filtro em X. Dica: o domínio de uma rede é um conjunto dirigido. ■

Definição 2.1.18. Para um conjunto $X \neq \emptyset$ e uma rede φ em X, denotamos por $(\varphi)^{\uparrow}$ o filtro próprio em X gerado pelo pré-filtro dos rabos de φ. Por falta de nome melhor[‡], $(\varphi)^{\uparrow}$ será chamado de **filtro induzido pela rede** φ. Nas situações em que se escreve $\varphi := (x_d)_{d \in \mathbb{D}}$, usa-se, por economia, $(x_d)^{\uparrow}_{d \in \mathbb{D}}$ ou $(x_d)^{\uparrow}_{d}$ em vez de $(\varphi)^{\uparrow}$. ¶

A relação de filtros com convergência de redes (ou a própria *natureza convergente* dos filtros) deve ficar mais evidente com a próxima

Proposição 2.1.19. *Para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, um ponto p e uma rede φ em X, são equivalentes:*

(i) $\varphi \to_{\mathcal{T}} p$;

(ii) $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}} \subseteq (\varphi)^{\uparrow}$.

Demonstração. Podemos reescrever a definição de convergência da seguinte forma:

$$\varphi \to_{\mathcal{T}} p \Leftrightarrow \text{ para todo } V \in \mathcal{T}_p \text{ existe } D \in \operatorname{dom}(\varphi) \text{ tal que } \varphi\left[D^{\uparrow}\right] \subseteq V \tag{2.5}$$

que, por conta da definição de $(\varphi)^{\uparrow}$, equivale a $\mathcal{T}_p \subseteq (\varphi)^{\uparrow}$. Como $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ é o menor filtro próprio em X a conter $\mathcal{T}_p$ (certo?)* e $(\varphi)^{\uparrow}$ é sempre um filtro próprio, o resultado segue. □

Exercício 2.1.6 ($\star$)**.** Denotando por $\mathcal{N}_0$ o filtro de vizinhanças de 0 em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, mostre que $\mathcal{N}_0 \subseteq ((-1)^n)^{\uparrow}_{n \in \mathbb{N}}$. ■

[†] Ou caudas (para pessoas com pouco senso de humor).

[‡] Referências anglófonas costumam chamar $(\varphi)^{\uparrow}$ de *eventuality filter*. No entanto, o sentido corriqueiro da palavra "eventual" não torna adequado o seu uso como tradução, do meu ponto de vista pelo menos.

A inclusão obtida da equivalência em (2.5) pode parecer contraintuiva quando vista pela primeira vez: *embora* para todo $V \in \mathcal{T}_p$ se verifique $\varphi\left[D^{\uparrow}\right] \subseteq V$ para algum índice $D \in \operatorname{dom}(\varphi)$, a conclusão é que $\mathcal{T}_p \subseteq (\varphi)^{\uparrow}$ em vez de $(\varphi)^{\uparrow} \subseteq \mathcal{T}_p$. No entanto, trata-se de um fenômeno típico de filtros. Para não alongar demais a discussão†:

Proposição 2.1.20. *Para pré-filtros $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de um conjunto X, são equivalentes:*

(i) $(\mathcal{A})^{\uparrow} \subseteq (\mathcal{B})^{\uparrow}$;

(ii) *para todo $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq A$.*

Exercício 2.1.7 ($\star$)**.** Prove a proposição anterior. Dica: basta abrir as definições, sem esquecer que $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A})^{\uparrow}$. ■

A interpretação visual da última proposição é mais interessante do que sua demonstração, pois ela revela como a inclusão de filtros determina uma *noção de convergência*. Primeiro, filtros próprios, de modo geral, são famílias de subconjuntos de X que parecem convergir para algum lugar: note que se $\mathcal{F}$ é filtro próprio e $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$, e se $C \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \cap C \in \mathcal{F}$, e se... de modo que quanto mais elementos de $\mathcal{F}$ interceptarmos, maior será a precisão da *região* para a qual $\mathcal{F}$ converge.

Exercício 2.1.8 ($\star$)**.** Com as notações do Exercício 2.1.6, mostre que $\bigcap_{N \in \mathcal{N}_0} N = \{0\}$. ■

Agora, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são pré-filtros em X satisfazendo a condição (ii) da última proposição, então os membros de $\mathcal{G} := (\mathcal{B})^{\uparrow}$ devem *convergir* para a mesma região para a qual o filtro $\mathcal{F} := (\mathcal{A})^{\uparrow}$ *converge*: afinal de contas, se $F \in \mathcal{F}$ está (contido) numa *região* R, então algum $B \in \mathcal{B}$ está contido em F, logo B também está (contido) na *região* R.

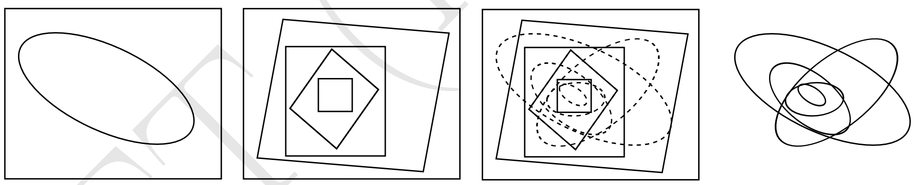


Figura 2.1: Se dentro de todo quadrilátero há uma elipse e os quadriláteros "convergem" para uma região, então *obrigatoriamente* as elipses convergem para a mesma região.

Com tudo isso dito, a Proposição 2.1.19 torna a próxima definição bastante razoável.

Definição 2.1.21. Um filtro próprio‡ $\mathcal{F}$ num espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ $\mathcal{T}$-**converge** para um ponto $p \in X$ se $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$. Em tais situações, diremos que $\mathcal{F}$ é $\mathcal{T}$-*convergente*, e o ponto p será chamado de (*um*) $\mathcal{T}$-*limite* de $\mathcal{F}$. Como de costume, isto será abreviado com $\mathcal{F} \to_{\mathcal{T}} p$, exceto... você já sabe o restante. ¶

Vantagens imediatas da definição acima? Nos livramos dos conjuntos dirigidos de índices alienígenas e, como brinde, temos um modo explícito de comparar filtros uns com os outros (a inclusão), o que pode ter implicações interessantes no estudo de convergência (terá). Evidentemente, existem desvantagens: como funções interagem com filtros?

†Mas se quiser alongar um pouco, confira a Subseção 2.2.3 §2.

‡Incluir o filtro impróprio $\wp(X)$ na definição não traria qualquer vantagem, posto que $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}} \subseteq \wp(X)$ trivialmente. Em outras palavras, $\wp(X)$ convergiria para todos os pontos. Veja também a Observação 2.1.24.

Enquanto uma rede $\varphi\colon \mathbb{D} \to X$ e uma função $h\colon X \to Y$ induzem naturalmente a rede $h \circ \varphi\colon \mathbb{D} \to Y$, não é (tão) imediato como induzir um filtro próprio $h(\mathcal{F})$ em Y a partir de um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X. Trata-se de algo imprescindível para mostrar que filtros podem substituir sequências na descrição de continuidade em espaços topológicos, da mesma forma que redes foram usadas no Teorema 2.1.11.

Lema 2.1.22. *Se $\mathcal{A}$ é um pré-filtro em $X \neq \emptyset$ e $h\colon X \to Y$ é uma função, então a família $h\mathcal{A} := \{h[A] : A \in \mathcal{A}\}$ é um pré-filtro em Y.*

Demonstração. Usaremos a caracterização da Proposição 2.1.16. Como $\emptyset \notin \mathcal{A}$, temos $\emptyset \notin h\mathcal{A}$ (pois $Y \neq \emptyset$!). Além disso, dado que $h[A \cap B] \subseteq h[A] \cap h[B]$ para quaisquer subconjuntos $A, B \subseteq X$, segue que se $A, B \in \mathcal{A}$, então algum $C \in \mathcal{A}$ satisfaz $C \subseteq A \cap B$, acarretando $h[C] \subseteq h[A] \cap h[B]$. □

Definição 2.1.23. Para um conjunto $X \neq \emptyset$, um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X e uma função $h\colon X \to Y$, indicaremos por $h(\mathcal{F})$ o filtro gerado pelo pré-filtro $h\mathcal{F}$ do lema anterior[†], i.e., $h(\mathcal{F}) := (h\mathcal{F})^{\uparrow}$, que será chamado de **imagem do filtro $\mathcal{F}$ pela função h**. Explicitamente, $B \in h(\mathcal{F})$ se, e somente se, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $h[F] \subseteq B$. ¶

Observação 2.1.24 (Opcional: e se $X = \emptyset$?)**.** Para o desinteressante caso em que $X = \emptyset$, $h = \emptyset$ é a única função que tem $\emptyset$ como domínio e Y como codomínio. Neste caso, repetir a construção sugerida pelo lema com o único filtro de $\emptyset$, a saber $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$, daria $h\mathcal{F} = \{h[\emptyset]\} = \{\emptyset\}$, e daí $(h\mathcal{F})^{\uparrow} = \wp(Y)$. Isto não afeta o próximo teorema, posto que $\emptyset$ não tem pontos e tampouco filtros próprios que convirjam para os seus pontos, tornando ambas as condições verdadeiras por vacuidade[‡]. △

Exercício 2.1.9 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que $h(\mathcal{F}) = \{B \subseteq Y : f^{-1}[B] \in \mathcal{F}\}$. ■

Teorema 2.1.25. *Para espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, uma função $f\colon X \to Y$ e um ponto $p \in X$, são equivalentes:*

(i) *f é contínua em p, i.e., para todo $\mathcal{T}_Y$-aberto $V \subseteq Y$ tal que $f(p) \in V$, existe um $\mathcal{T}_X$-aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ e $f[U] \subseteq V$;*

(ii) *$f(\mathcal{G}) \to_{\mathcal{T}_Y} f(p)$ para qualquer filtro próprio $\mathcal{G}$ em X satisfazendo $\mathcal{G} \to_{\mathcal{T}} p$.*

Demonstração. Assumindo (i), precisamos mostrar que $\mathcal{N}_{f(p),\mathcal{T}_Y} \subseteq f(\mathcal{G})$, o que a princípio significa apenas que todo $N \in \mathcal{N}_{f(p),\mathcal{T}_Y}$ também satisfaz $N \in f(\mathcal{G})$. Ora, se $N \in \mathcal{N}_{f(p),\mathcal{T}_Y}$, então existe um $\mathcal{T}_Y$-aberto $V \subseteq Y$ com $f(p) \in V$ e $V \subseteq N$, e daí (i) se aplica, assegurando um $\mathcal{T}_X$-aberto $U \subseteq X$ com $p \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Dado que $\mathcal{G} \to_{\mathcal{T}_X} p$ por hipótese, temos $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}_X} \subseteq \mathcal{G}$, e assim $U \in \mathcal{G}$, acarretando $N \in f(\mathcal{G})$ (por quê?)*.

Reciprocamente, ao assumir (ii), basta trocar $\mathcal{G}$ por $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}_X}$ para obter (i). Os detalhes ficam por sua conta ($^{\star}_{\star}$). □

[†] Você certamente já notou que todo filtro próprio é um pré-filtro (certo?)$^{\star/2}$.

[‡] Não por coincidência, um *quase problema* análogo estava implícito no Teorema 2.1.11, mas lá a condição (ii) também é válida por vacuidade, já que não existem redes em $\emptyset$ (afinal de contas, conjuntos dirigidos são não vazios por definição).

§3 Redes ou filtros convergentes?

A pergunta no título é motivada pelas discussões anteriores, que mostraram como as noções de convergência de rede e de filtro permitem reinterpretar continuidade em espaços topológicos como a preservação de convergência. Mas afinal, qual dos dois *dispositivos* é melhor: redes ou filtros?

RESPOSTA: Tanto faz. Ou quase isso.

Teorema 2.1.26 (Bruns e Schmidt [10]). *Para todo filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, existe uma rede $\mathrm{R}(\mathcal{F})$ em X tal que $(\mathrm{R}(\mathcal{F}))^{\uparrow} = \mathcal{F}$.*

Demonstração. Vamos definir

(i) um conjunto dirigido $\mathbb{D}$, e

(ii) uma rede $\mathbb{D} \to X$ cujos rabos sejam, precisamente, os membros de $\mathcal{F}$.

Num primeiro momento, pode-se pensar em considerar $\mathbb{D} := (\mathcal{F}, \supseteq)$, i.e., tomar $\mathcal{F}$ como conjunto dirigido pela inclusão inversa (cf. Exemplo 2.1.5). No entanto, isto traz o problema de definir a rede: neste caso, o mais natural seria *escolher* $x_F \in F$ para cada $F \in \mathcal{F}$. No entanto, isto garante apenas que todo membro de $\mathcal{F}$ contém um rabo de $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ e, consequentemente, $(x_F)^{\uparrow}_{F\in\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ (cf. Proposição 2.1.20).

Em vez disso, vamos definir $\mathbb{D}_{\mathcal{F}} := \{(x, F) \in X \times \mathcal{F} : x \in F\}$, com a relação binária $\preceq$ dada por

$$(x, F) \preceq (y, G) \Leftrightarrow G \subseteq F.$$

Parece a mesma coisa, mas não é: em $\mathbb{D}_{\mathcal{F}}$, a segunda coordenada decide quando um elemento é melhor do que outro, enquanto a primeira coordenada permanece aparentemente inútil (mas espere!). Neste caso, é justamente por $\mathcal{F}$ ser próprio que $\mathbb{D}_{\mathcal{F}}$ é dirigido†: se $(x, F), (y, G) \in \mathbb{D}_{\mathbb{F}}$, então $F \cap G \in \mathcal{F}$ com $F \cap G \neq \emptyset$, donde segue que existe $z \in F \cap G$ e, consequentemente, $(x, F), (y, G) \preceq (z, F \cap G)$.

A malandragem da primeira coordenada nos elementos de $\mathbb{D}_{\mathcal{F}}$ se revela agora, no momento de definir a rede: faremos $\mathrm{R}(\mathcal{F})(x, \mathcal{F}) := x$ para cada $(x, F) \in \mathbb{D}_{\mathcal{F}}$. Como $(x, F) \preceq (y, G)$ sse $G \subseteq F$, resulta que

$$\mathrm{R}(\mathcal{F})\left[(x, F)^{\uparrow}\right] = F$$

para quaisquer $F \in \mathcal{F}$ e $x \in F$ (checou?)*. Portanto, $(\mathrm{R}(\mathcal{F}))^{\uparrow} = \mathcal{F}$ (por quê?)*. □

Para sintetizar a relação entre redes e filtros, vamos chamar por $\mathsf{Net}(X)$ a "coleção" de todas as redes em X, e por $\mathsf{Fil}^*(X)$ o conjunto de todos os filtros próprios em X. Ao longo desta subseção, obtivemos correspondências

$$\begin{aligned}(\bullet)^{\uparrow} : \mathsf{Net}(X) &\to \mathsf{Fil}^*(X) \\ \varphi &\mapsto (\varphi)^{\uparrow}\end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned}\mathrm{R}(\bullet) \colon \mathsf{Fil}^*(X) &\to \mathsf{Net}(X) \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathrm{R}(\mathcal{F})\end{aligned}$$

que se comportam *muito bem* com relação à convergência: temos $\varphi \to_{\mathcal{T}} p$ sse $(\varphi)^{\uparrow} \to_{\mathcal{T}} p$ (cf. Proposição 2.1.19) e, pelo modo como definimos $\mathrm{R}(\bullet)$, também temos $\mathcal{F} \to_{\mathcal{T}} p$ sse $\mathrm{R}(\mathcal{F}) \to_{\mathcal{T}} p$ (percebeu?)*.

Na prática diária, enquanto a descrição do filtro $(\varphi)^{\uparrow}$ será bastante importante, a definição da rede $\mathrm{R}(\mathcal{F})$ pode ser completamente esquecida: o que realmente interessa é saber que, para um filtro próprio $\mathcal{F}$, existe *alguma* rede ρ tal que $(\rho)^{\uparrow} = \mathcal{F}$.

†Se você ainda não percebeu que $\preceq$ é reflexiva e transitiva: perceba! $(\star)$

Observação 2.1.27 (Importante, mas nem tanto)**.** O conjunto $\mathsf{Fil}^*(X)$ é subconjunto legítimo de $\wp(\wp(X))$, afinal de contas, cada $\mathcal{F} \in \mathsf{Fil}^*(X)$ é uma família de subconjuntos de X, i.e., $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ ou, equivalentemente, $\mathcal{F} \in \wp(\wp(X))$. Por outro lado, de um ponto de vista estritamente técnico (regido por ZFC), $\mathsf{Net}(X)$ *não é um conjunto*.

Essencialmente, isto se deve à ausência de uma restrição forte sobre quais objetos podem ser os domínios de redes em X: basta ser um conjunto dirigido. Ora, se $\mathsf{Net}(X)$ fosse um conjunto, então $\operatorname{dom}(\mathsf{Net}(X)) := \{A : A \text{ é domínio de uma rede em } X\}$ também seria um conjunto. No entanto, $\operatorname{dom}(\mathsf{Net}(X)) = \mathbb{V}$, i.e., todo conjunto pertence a $\operatorname{dom}(\mathsf{Net}(X))$ (por quê?)***. Em outras palavras: $\mathsf{Net}(X)$ é *grande* demais para ser um conjunto legítimo.

Como ninguém liga para isso no fim do dia[†], usaremos a classe $\mathsf{Net}(X)$ sem dor na consciência. A única relevância desta observação, neste texto, está na constatação de que $(\bullet)^{\uparrow}$ e $\mathrm{R}(\bullet)$ não podem ser inversas uma da outra, pois se fossem teríamos um conjunto em bijeção com uma *classe própria* (cf. [28]). △

§4 A condição de Hausdorff

Para ilustrar o uso de redes e filtros nas questões de convergência em espaços topológicos, vamos voltar para o problema que iniciou esta seção: a unicidade dos limites. Por que ainda não provamos que se φ é uma rede num espaço topológico X tal que $\varphi \to x$ e $\varphi \to y$, então $x = y$? A resposta é muito simples: em geral, isto é falso.

Exemplo 2.1.28. Considere X um conjunto infinito munido de sua topologia cofinita (cf. Exercício 1.1.16) e seja $(x_n)_n$ uma sequência injetiva em X, i.e., tal que $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$. Mostraremos que $(x_n)_n \to p$, *para qualquer* $p \in X$. Ora, se $V \subseteq X$ é um aberto que contém p, então $X \setminus V$ é um conjunto finito, e $N := \max(\{m \in \mathbb{N} : x_m \notin V\} \cup \{0\})$ é tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq N$. ▲

Como nossa intuição é tipicamente *euclidiana*, o exemplo acima parece... contraintuitivo, já que na vida *real*, uma sequência converge para, no máximo, um ponto. Ao revisar o Exemplo 2.1.1, em que se provou isso, note que em vez do argumento numérico utilizado, poderíamos observar que se $L \neq L'$, então $|L - L| = 2r$ para algum $r > 0$, e daí usar o fato de que os intervalos $(L - r, L + r)$ e $(L' - r, L' - r)$ são disjuntos (checou?)* para concluir que se $(x_n)_n \to_{\mathbb{R}} L$, então $(x_n)_n \not\to_{\mathbb{R}} L'$: como existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (L - r, L + r)$ para todo $n \geq N$, também ocorre $x_n \notin (L' - r, L' + r)$, donde segue que $(x_n)_n \not\to_{\mathbb{R}} L'$ (entendeu?)*.

Exercício 2.1.10 ($\star$)**.** Mostre que se φ é uma rede num espaço métrico X tal que $\varphi \to p$ e $\varphi \to q$, então $p = q$. Dica: troque os intervalos abertos por bolas abertas no argumento anterior. ■

O exercício anterior sugere que a existência de abertos disjuntos *separando* pontos distintos tenha algo a ver com unicidade de limites, o que se fortalece com a observação de que, no Exemplo 2.1.28, quaisquer dois abertos não vazios se interceptam (observe!)*. Topologicamente, chegamos à solução ótima.

Definição 2.1.29. Dizemos que X é um **espaço de Hausdorff** (ou espaço $\mathbf{T}_2$)[‡] se para <u>quaisquer</u> pontos distintos $x, y \in X$ existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $x \in U$ e $y \in V$. ¶

[†] Vide tudo o que se faz em Teoria de Categorias, por exemplo.

[‡] O subíndice "2" no termo "T_2" sugere variações da condição de Hausdorff. Isto será abordado oportunamente.

Cuidado! Ser de Hausdorff não significa *apenas* que existem abertos disjuntos no espaço. [Ofensa censurada] Releia a definição até perceber, por gentileza.

Teorema 2.1.30. *Para um espaço topológico X, as afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) *X é espaço de Hausdorff;*

(ii) *para toda rede $\varphi \in \mathsf{Net}(X)$, se $\varphi \to x$ e $\varphi \to y$, então $x = y$;*

(iii) *para todo filtro próprio $\mathcal{F} \in \mathsf{Fil}^*(X)$, se $\mathcal{F} \to x$ e $\mathcal{F} \to y$, então $x = y$.*

Demonstração. A implicação (i) ⇒ (ii) será problema seu ($^\star_\star$). Para (ii) ⇒ (iii), o Teorema 2.1.26 assegura a existência de uma rede $\rho \in \mathsf{Net}(X)$ com $(\rho)^\uparrow = \mathcal{F}$, de modo que se $\mathcal{F} \to x$ e $\mathcal{F} \to y$, então $\rho \to x$ e $\rho \to y$ (cf. Proposição 2.1.19), donde (ii) acarreta $x = y$. Para (iii) ⇒ (i), fazemos

$$\mathcal{H} := \{N \cap N' : N \in \mathcal{N}_x \text{ e } N' \in \mathcal{N}_y\}$$

para certos $x, y \in X$ distintos, a fim de definir $\mathcal{F} := (\mathcal{H})^\uparrow$. Dado que $\mathcal{F}$ é um filtro (por quê?)* que satisfaz $\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y \subseteq \mathcal{F}$ (pois $X \in \mathcal{N}_x \cap \mathcal{N}_y$, percebeu?)*, a hipótese (iii) impede que $\mathcal{F}$ seja próprio, i.e., $\emptyset \in \mathcal{F}$. Logo, existem $U, V \subseteq X$ abertos com $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V \subseteq \emptyset$ (por quê?)*. Portanto, X é de Hausdorff. □

Observação 2.1.31 (Opcional: roteiros adicionais)**.** Se a vida te obrigar a escolher entre filtros ou redes, você precisará de outros argumentos para provar as partes interessantes do teorema anterior, a saber, (ii) ⇒ (i) ou (i) ⇒ (iii), respectivamente.

Para (ii) ⇒ (i), proceda pela contrapositiva: se $x, y \in X$ são pontos distintos que testemunham a falha da condição de Hausdorff, então

$$\mathbb{W} := \{W \subseteq X : W \in \mathcal{T}_x \cap \mathcal{T}_y\}$$

é um conjunto dirigido com a relação de inclusão inversa, tal que para qualquer $W \in \mathbb{W}$ existe $x_W \in W$, donde segue que $(x_W)_{W \in \mathbb{W}}$ é uma rede em X que converge tanto para x quanto para y. Para (i) ⇒ (iii), note que se $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{N}_y \subseteq \mathcal{F}$ com $x \neq y$ num espaço de Hausdorff X, então $\mathcal{F}$ não é filtro próprio, pois os abertos disjuntos U e V existentes por hipótese, digamos que com $x \in U$ e $y \in V$, são tais que $U \in \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ e $V \in \mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$, acarretando $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{F}$. Por fim, não custa observar que (iii) ⇒ (ii) também é uma consequência imediata da Proposição 2.1.19. Completar os poucos detalhes omitidos acima ficará por sua conta ($^\star_\star$). △

Revelamos, portanto, que o escopo da unicidade de limites garantida pela condição de Hausdorff abrange bem mais do que sequências. E se você ainda tiver alguma esperança de que sequências bastariam para fazer o trabalho: esqueça.

Exemplo 2.1.32 (Compare com o Exemplo 1.1.38)**.** Para um conjunto X não enumerável, considere $\mathcal{S}$ a família dos subconjuntos $A \subseteq X$ tais que $X \setminus A$ é enumerável, que costuma ser xingada de *topologia*† **coenumerável**. Sem grandes esforços, pode-se mostrar que se $\varphi := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em X tal que $x_n \to_{\mathcal{S}} x$ para algum $x \in X$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$ para todo $n \geq N$ (por quê?)$^\star_\star$. Consequentemente, se $\varphi \to_{\mathcal{S}} x$ e $\varphi \to_{\mathcal{S}} y$, então $x = y$. No entanto, $(X, \mathcal{S})$ não é espaço de Hausdorff por um motivo muito forte: quaisquer dois abertos não vazios de X tem interseção não vazia (por quê?)*. ▲

†Se não percebeu que se trata de uma topologia, verifique! ($\star$).

Definição 2.1.33. Para um espaço de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ e um filtro próprio $\mathcal{F}$, denotamos por $\lim_{\mathcal{T}} \mathcal{F}$ o único ponto de X, se existir, tal que $\mathcal{F} \to \lim \mathcal{F}$. Para uma rede φ em X, fazemos $\lim_{\mathcal{T}} \varphi := \lim_{\mathcal{T}} (\varphi)^{\uparrow}$. Em particular, para $\varphi := (x_d)_{d \in \mathbb{D}}$, também podemos escrever $\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d := \lim \varphi$, etc. ¶

Corolário 2.1.34 (das discussões anteriores)**.** *Uma função $f : X \to Y$ entre espaços de Hausdorff é contínua se, e somente se,*

$$f\left(\lim_{\mathcal{T}_X} \varphi\right) = \lim_{\mathcal{T}_Y} (f \circ \varphi)$$

para toda rede convergente $\varphi \in \mathsf{Net}(X)$.

Demonstração. Trata-se apenas da reformulação do Teorema 2.1.11 com as notações de limite introduzidas acima, garantidas pela condição de Hausdorff. □

Observação 2.1.35. Se você for do time que prefere escrever redes com índices explícitos e omitir topologias, a identidade no último corolário se torna ainda mais familiar:

$$f\left(\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d\right) = \lim_{d \in \mathbb{D}} f(x_d). \qquad \triangle$$

Exercício 2.1.11 (Opcional $(^{\star}_{\star})$)**.** Nas condições anteriores, mostre que f é contínua sse $f(\lim_{\mathcal{T}_X} \mathcal{G}) = \lim_{\mathcal{T}_Y} f(\mathcal{G})$ para todo filtro convergente $\mathcal{G} \in \mathsf{Fil}^*(X)$. ■

Observação 2.1.36 (Importante: $\lim \mathcal{F}$ e $\lim \varphi$ sem Hausdorff)**.** As abreviações do tipo "$\lim \mathcal{F}$" e afins podem ser usadas na ausência da condição de Hausdorff, mas em tais situações o significado delas é outro. Para um espaço X (não necessariamente de Hausdorff) e um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X, faz-se

$$\lim_{\mathcal{T}} \mathcal{F} := \{x \in X : \mathcal{F} \to_{\mathcal{T}} x\},$$

com definição análoga para o caso de redes. Note que se X for de Hausdorff, então $\lim \mathcal{F} = \emptyset$ ou $\lim \mathcal{F} = \{x\}$ para um único $x \in X$, o que em certo sentido mostra que não há risco em usar a mesma notação para os dois contextos.

Em particular, para cada espaço topológico Z, obtemos funções

$$\begin{aligned} \lim_{\mathcal{T}} : \mathsf{Fil}^*(Z) &\to \wp(Z) \\ \mathcal{F} &\mapsto \lim_{\mathcal{T}} \mathcal{F} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \lim_{\mathcal{T}} : \mathsf{Net}(Z) &\to \wp(Z) \\ \varphi &\mapsto \lim_{\mathcal{T}} \varphi \end{aligned}$$

que permitem descrever completamente as funções contínuas entre quaisquer espaços topológicos. Para facilitar futuras referências, isto será destacado a seguir. △

Corolário 2.1.37 (das discussões anteriores)**.** *Para uma função $f : X \to Y$ entre espaços topológicos X e Y, são equivalentes:*

(i) *f é contínua;*

(ii) *$f[\lim_{\mathcal{T}_X} \varphi] \subseteq \lim_{\mathcal{T}_Y} (f \circ \varphi)$ para toda rede $\varphi \in \mathsf{Net}(X)$;*

(iii) *$f[\lim_{\mathcal{T}_X} \mathcal{G}] \subseteq \lim_{\mathcal{T}_Y} f(\mathcal{G})$ para todo filtro próprio $\mathcal{G} \in \mathsf{Fil}^*(X)$.*

Demonstração. Basta notar (e você vai notar, certo?)* que a implicação

$$\varphi \to_{\mathcal{T}_x} p \Rightarrow f \circ \varphi \to_{\mathcal{T}_Y} f(p)$$

se reescreve como "se $p \in \lim_{\mathcal{T}_X} \varphi$, então $f(p) \in \lim_{\mathcal{T}_Y} (f \circ \varphi)$" (e por que basta?)*. □

PROVOCAÇÃO: você percebeu que as funções do tipo $\lim_{\bullet} : \mathsf{Net}(\bullet) \to \wp(\bullet)$ fizeram com as topologias a mesma coisa que as topologias fizeram com as métricas?

§5 Comparação de topologias (e subespaços)

Para encerrar este primeiro contato com as noções de convergência em espaços topológicos, veremos como elas permitem reinterpretar as relações de inclusão entre topologias definidas sobre um mesmo conjunto.

Definição 2.1.38. Dadas duas topologias $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sobre um conjunto X, é muito comum encontrar textos que se referem à inclusão "$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$" das seguintes formas:

(i) $\mathcal{S}$ é *mais fraca*, ou *mais grossa*, do que $\mathcal{T}$, e

(ii) $\mathcal{T}$ é *mais forte*, ou *mais fina*, do que $\mathcal{S}$. ¶

Uma vez que o símbolo "$\subseteq$" tem cumprido bem o seu papel, você pode ~~arriscar~~ optar por ignorar a última definição. Contudo, ela esconde uma interpretação alternativa muito útil, razão pela qual ela não será completamente abandonada por aqui.

Proposição 2.1.39. *Para um espaço X e um subconjunto $A \subseteq X$, são equivalentes:*

(i) *A é aberto em X;*

(ii) *sempre que um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X converge para um ponto de A, tem-se $A \in \mathcal{F}$;*

(iii) *sempre que uma rede φ em X converge para um ponto de A, existe $D \in \operatorname{dom}(\varphi)$ tal que $\varphi\left[D^{\uparrow}\right] \subseteq A$.*

Demonstração. Se $A \subseteq X$ é aberto e $\mathcal{F} \to p$ com $p \in A$, então $A \in \mathcal{F}$ pois $A \in \mathcal{N}_p$ e $\mathcal{N}_p \subseteq \mathcal{F}$, i.e., (i) $\Rightarrow$ (ii). Por sua vez, assumindo (ii) e tomando φ tal que $\varphi \to p \in A$, temos $(\varphi)^{\uparrow} \to p$, donde a condição (ii) assegura $A \in (\varphi)^{\uparrow}$ e isto significa, exatamente, a condição (iii). Por fim, faremos (iii) $\Rightarrow$ (i) pela contrapositiva.

Se A não é aberto, então existe $p \in A$ tal que $U \not\subseteq A$ para todo subconjunto $U \subseteq X$ aberto em X com $p \in U$ (por quê?)***. Logo, para cada aberto U em torno de p, existe $x_U \in U \setminus A$. Posto que $\mathbb{A} := \{U \subseteq X : U \text{ é aberto em torno de } p\}$ é dirigido pela inclusão inversa, segue que $(x_U)_{U \in \mathbb{A}}$ é uma rede em X que converge para p (por quê?)*, mas tal que nenhum de seus rabos intercepta A. Em particular, não vale (iii). □

Observação 2.1.40 (Opcional: para quem prefere filtros)**.** Se for do seu interesse ignorar redes, você precisará de um argumento direto para (ii) $\Rightarrow$ (i). Neste caso, ainda pela contrapositiva, a existência do ponto $p \in A$ para o qual $U \not\subseteq A$ sempre que U é um aberto de X em torno de p permite mostrar que

$$\mathcal{G} := \{S \subseteq X : \text{existe } U \subseteq X \text{ aberto em torno de } p \text{ tal que } U \setminus A \subseteq S\}$$

é um filtro próprio em X com $X \setminus A \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G} \to p$ (por quê?)**. Portanto, (ii) não vale. △

Corolário 2.1.41. *Para topologias $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sobre um conjunto X, são equivalentes:*

(i) *$\mathcal{T}$ é mais forte do que $\mathcal{S}$, i.e., $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$;*

(ii) $\operatorname{Id}_X \colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ *é contínua;*

(iii) $\lim_{\mathcal{T}} \varphi \subseteq \lim_{\mathcal{S}} \varphi$ *para toda rede φ em X;*

(iv) $\lim_{\mathcal{T}} \mathcal{F} \subseteq \lim_{\mathcal{S}} \mathcal{F}$ *para todo filtro próprio $\mathcal{F}$ em X.*

Exercício 2.1.12 $(\star)$**.** Prove o corolário anterior. Dica: use a proposição anterior apenas se você quiser fazer (iii) $\Rightarrow$ (i) ou (iv) $\Rightarrow$ (i) diretamente e com elegância. ■

Portanto, $\mathcal{T}$ *ser mais forte do que* $\mathcal{S}$ não significa apenas que $\mathcal{T}$ tem mais abertos do que $\mathcal{S}$, mas também que ela é *tão forte com respeito a* $\mathcal{S}$ que, se *algo* converge com respeito a $\mathcal{T}$, então também convergirá com respeito a $\mathcal{S}$.

Observação 2.1.42. Um fenômeno similar ao ocorrido na prova da Proposição 2.1.19 costuma confundir iniciantes: quando uma topologia $\mathcal{T}$ é mais forte do que uma topologia $\mathcal{S}$ em X, os $\mathcal{S}$-abertos são, invariavelmente, resultado da reunião de $\mathcal{T}$-abertos (por quê?)$^{\star}_{\star\star}$, o que sugere pensar nos subconjuntos $\mathcal{T}$-abertos como sendo, individualmente, menores do que os $\mathcal{S}$-abertos. Embora se trate, mais uma vez, de um reflexo do comportamento dos filtros[†], você pode preferir pensar em grãos de café: quanto mais fina a moagem, mais forte/intenso o sabor do elixir da vida. △

Antes de finalizar, é útil mencionar, mesmo que brevemente, a noção de *subespaço topológico*, a fim de evitar confusões com o uso múltiplo do símbolo de inclusão[‡].

Proposição 2.1.43. *Se* $(X, \mathcal{T})$ *é espaço topológico e* $Y \subseteq X$*, então* $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ *é uma topologia em* Y *tal que a inclusão* $i\colon Y \to X$ *é contínua. Além disso,* $\mathcal{T}_Y$ *é a topologia mais fraca com tal propriedade, i.e., se* $\mathcal{S}$ *for outra topologia em* Y *tal que* $i\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ *é contínua, então* $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{S}$*.*

Demonstração. Mostrar que $\mathcal{T}_Y$ é uma topologia será problema seu $(^{\star}_{\star})$. Agora, se $\mathcal{S}$ é uma topologia como no enunciado, então $i^{-1}[U] \in \mathcal{S}$ para todo $U \in \mathcal{T}$, mas $i^{-1}[U] = U \cap Y$ (certo?)*, donde a inclusão desejada segue. □

Definição 2.1.44. Dizemos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é **subespaço topológico** de $(X, \mathcal{T})$. ¶

A menos de menção explícita contrária, todo subconjunto de um espaço topológico será considerado com sua respectiva topologia induzida e, por conseguinte, será automaticamente considerado um subespaço topológico: isso evitará repetições desnecessárias da expressão "subespaço topológico", que tornariam o texto mais carregado do que já é.

§6 Exercícios adicionais

Exercício 2.1.13 $(\star)$**.** Para um espaço topológico X e um ponto $p \in X$, mostre que $\mathrm{ult}(p) := \{S \subseteq X : p \in S\}$ é um filtro próprio em X tal que $\mathrm{ult}(p) \to p$. ■

Exercício 2.1.14 $(^{\star}_{\star})$**.** Para uma rede φ num espaço X, mostre que $(\varphi)^{\uparrow} = \mathrm{ult}(p)$ se, e somente se, existe $D \in \mathrm{dom}(\varphi)$ tal que $\varphi(d) = p$ para todo $d \succeq D$. Em particular, redes constantes convergem. Conclua que funções constantes (entre espaços topológicos) são contínuas. ■

Exercício 2.1.15 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que toda ordem total é um espaço de Hausdorff com a topologia da ordem (cf. Definição 1.2.22). ■

Exercício 2.1.16 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que o resultado anterior é falso sem a hipótese de totalidade da ordem. Dica: Y. ■

[†] A ser explorado, com mais calma, na Subseção 2.2.3 §2.
[‡] Se tem placa, tem história.

Exercício 2.1.17 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $Y \subseteq X$ um subconjunto de X, $\varphi \in \mathsf{Net}(Y)$ uma rede em Y e $y \in Y$ um ponto. Mostre que $\varphi \to_{\mathcal{T}_Y} y$ sse $\varphi \to_{\mathcal{T}} y$. ■

Exercício 2.1.18 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se X é de Hausdorff e $Y \subseteq X$, então Y é de Hausdorff. Jargão: a condição de Hausdorff é *hereditária* para subespaços. ■

Exercício 2.1.19 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam X e Y espaços topológicos, $f: X \to Y$ uma função e $S \subseteq X$. Geralmente, a frase “f é contínua em S” admite duas interpretações:

(i) f é contínua em cada ponto de S;

(ii) a restrição $f|_S$ é contínua.

a) Mostre que $(i) \Rightarrow (ii)$. Em particular, se f é contínua, então $f|_S$ é contínua.

b) Mostre que se S for aberto, então $(ii) \Rightarrow (i)$.

c) Mostre que se S não for aberto, então a implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ pode ser falsa. ■

Exercício 2.1.20 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $f: X \to Y$ é contínua sse $f: X \to \operatorname{im}(f)$ é contínua, onde $\operatorname{im}(f)$ tem a topologia de subespaço herdada de Y. ■

Exercício 2.1.21 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para um espaço métrico (X, d) e um subconjunto Y, denote por d_Y a métrica em Y induzida por d. Mostre que $\mathcal{T}_d|_Y = \mathcal{T}_{d_Y}$, i.e., a topologia de Y enquanto subespaço de $(X, \mathcal{T}_d)$ coincide com a topologia induzida pela métrica d_Y. Dica: perceba que $B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y$ para quaisquer $y \in Y$ e $r > 0$. ■

Exercício 2.1.22 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço métrico X é de Cauchy sse a rede $(d(x_m, x_n))_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ converge para 0 em $\mathbb{R}$, onde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ está dirigido pela relação $\preceq$ dada por $(m, n) \preceq (m', n') \Leftrightarrow m \leq m'$ e $n \leq n'$. ■

Exercício 2.1.23 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam $(x_a)_{a \in \mathbb{A}}$ e $(y_a)_{a \in \mathbb{A}}$ redes em $\mathbb{R}$ tais que $x_d \to x$ e $y_d \to y$, para $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Mostre que se existir $A \in \mathbb{A}$ tal que $x_a \leq y_a$ para todo $a \succeq A$, então $x \leq y$.

b) Mostre que se $x < y$, então existe $A' \in \mathbb{A}$ tal que $x_a < y_a$ para todo $a \succeq A'$. ■

Exercício 2.1.24 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam X e Y conjuntos não vazios e $f: X \to Y$ uma função.

a) Mostre que $f(\varphi)^{\uparrow} = (f \circ \varphi)^{\uparrow}$ para qualquer rede φ em X.

b) Conclua que ambas as condições (ii) nos Teoremas 2.1.11 e 2.1.25 são equivalentes <u>sem</u> utilizar a definição usual de continuidade via abertos (Definição 1.1.33). ■

2.1.2 Como “evitar” redes e filtros

Aviso. Se você pulou a subseção anterior por algum tipo de aversão a redes ou filtros (ou por qualquer outro motivo), saiba que você perdeu, entre outras coisas[†]:

- a condição de Hausdorff (cf. Definição 2.1.29);
- a definição de subespaço topológico (cf. Definição 2.1.44).

Embora redes e filtros funcionem muito bem na tarefa de recuperar as ideias de convergência em espaços topológicos, existem alternativas que não dependem (explicitamente) dessas ferramentas e, ainda assim, preservam parte do significado de *convergir*.

[†]Sim, pretendo deixar o texto legível até para quem prefere não usar redes ou filtros. Não, não espere que eu faça isso de bom humor.

§1 Aderência e interior

Intuitivamente, convergir significa estar *arbitrariamente* próximo. Quando uma sequência converge para um ponto, por exemplo, *todo* aberto em torno do ponto contém rabos da sequência. Assim, se a ideia é nos livrarmos de filtros, redes e sequências mas manter a ideia de proximidade arbitrária, uma alternativa é a seguinte:

Definição 2.1.45. Para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um subconjunto $S \subseteq X$, diremos que um ponto $p \in X$ é $\mathcal{T}$**-aderente** *ao conjunto* S (ou "*...de* S") se para todo $\mathcal{T}$-aberto $V \subseteq X$ em torno de p ocorrer $V \cap S \neq \emptyset$. Menções a $\mathcal{T}$ serão omitidas quando a topologia estiver clara pelo contexto. ¶

Proposição 2.1.46. *Para espaços topológicos* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*, uma função* $f : X \to Y$ *e um ponto* $p \in X$*, são equivalentes:*

(i) f *é contínua em* p (*cf. Definição* 1.1.33)*;*

(ii) $f(p)$ *é* $\mathcal{T}_Y$*-aderente a* $f[S]$ *sempre que* p *é* $\mathcal{T}_X$*-aderente a* S*, para qualquer subconjunto* $S \subseteq X$

Demonstração. Assumindo (i), com p $\mathcal{T}_X$-aderente a S, vamos mostrar que $f(p)$ é $\mathcal{T}_Y$-aderente a $f[S]$. Para isso, dado um $\mathcal{T}_Y$-aberto $V \subseteq Y$ em torno de $f(p)$, precisamos mostrar que $V \cap f[S] \neq \emptyset$. Ora, por (i), existe um subconjunto $\mathcal{T}_X$-aberto $U \subseteq X$ tal que $p \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Pela hipótese acerca de p, existe $s \in U \cap S$, acarretando $f(s) \in V \cap f[S]$.

A recíproca será feita pela contrapositiva: assumindo f descontínua em p, obteremos $S \subseteq X$ com p $\mathcal{T}_X$-aderente a S mas tal que $f(p)$ não seja $\mathcal{T}_Y$-aderente a $f[S]$. Ora, a falha de (i) assegura um $\mathcal{T}_Y$-aberto $V \subseteq Y$ em torno de $f(p)$ tal que $f[U] \nsubseteq V$ para todo $U \subseteq X$ que for $\mathcal{T}_X$-aberto em torno de p. Em outras palavras, para todo $\mathcal{T}_X$-aberto U em torno de p existe $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin V$. Consequentemente, $S := \{x_U : U \text{ é } \mathcal{T}_X\text{-aberto em torno de } p\}$ tem p como ponto $\mathcal{T}_X$-aderente, enquanto o $\mathcal{T}_Y$-aberto V testemunha que $f(p)$ não é $\mathcal{T}_Y$-aderente a $f[S]$, já que $f[S] \cap V = \emptyset$ por construção (percebeu?)*. □

Quem tem aversão a usos desnecessários do Axioma da Escolha pode preferir, na recíproca da última demonstração, considerar

$$S := \{x \in X : \text{ existe } \mathcal{T}_X\text{-aberto } U \text{ em torno de } p \text{ tal que } x \in U \text{ e } f(x) \notin V\}.$$

Dessa forma, ainda se tem p aderente a S (certo?)$^{\star}_{\star}$ e $f[S] \cap V = \emptyset$. A opção por escolher $x_U \in U$ para cada U buscou apenas sugerir que redes convergentes estão escondidas na definição de aderência (cf. Definição 1.1.11). Na verdade, filtros também estão.

Proposição 2.1.47. *Para um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$*, um subconjunto* $S \subseteq X$ *e um ponto* $p \in X$*, as afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) p *é* $\mathcal{T}$*-aderente a* S*;*

(ii) *existe uma rede* $\varphi \in \mathsf{Net}(S)$ *tal que* $\varphi \to_{\mathcal{T}} p$*;*

(iii) *existe um filtro próprio* $\mathcal{F} \in \mathsf{Fil}^*(X)$ *tal que* $S \in \mathcal{F}$ *e* $\mathcal{F} \to_{\mathcal{T}} p$*.*

Exercício 2.1.25 ($^\star_\star$)**.** Demonstre a proposição acima[†]. Dica: para (i) $\Rightarrow$ (ii), construa uma rede marota $(x_U)_{U\in\mathcal{T}_p}$, para (ii) $\Rightarrow$ (iii) faça $\mathcal{F} := (\varphi)^{\uparrow}$ e, para (iii) $\Rightarrow$ (i), note que $S\cap V\in\mathcal{F}$ para todo $V\in\mathcal{T}_p$. ■

A proposição acima caracteriza os pontos aderentes de um conjunto de modo análogo ao que se fez na Definição 1.1.11 para definir o *fecho* no caso métrico. A mesma coisa será feita aqui, mas com menos pressa do que no primeiro capítulo.

Definição 2.1.48 (Aderência, fechados e fechos)**.** Seja $(X,\mathcal{T})$ um espaço topológico.

(i) A $\mathcal{T}$-**aderência** (ou apenas **aderência**)[‡] de um subconjunto $S\subseteq X$ é o conjunto

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S) := \{x\in X : x \text{ é } \mathcal{T}\text{-aderente ao conjunto } S\}.$$

(ii) Um subconjunto $F\subseteq X$ é $\mathcal{T}$-**fechado** (ou *fechado em* X, ou *fechado de* X, etc.) se $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(F)=F$.

(iii) O $\mathcal{T}$-**fecho** de um subconjunto $S\subseteq X$, denotado por $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(S)$ (ou $\overline{S}$ quando a topologia de X for clara pelo contexto) é o menor $\mathcal{T}$-fechado de X que contém S, i.e., $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(S)$ é $\mathcal{T}$-fechado, $S\subseteq\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(S)$ e $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(S)\subseteq F$ sempre que $F\subseteq X$ é um $\mathcal{T}$-fechado satisfazendo $S\subseteq F$. ¶

Se você já estudou Topologia Geral, pode ter achado estranha a distinção entre $\mathrm{ad}(S)$ e $\overline{S}$. Foi proposital, não se preocupe: há uma *agenda*[††] por trás disso, que será lentamente revelada a fim de não gerar pânico.

Teorema 2.1.49. *Num espaço topológico $(X,\mathcal{T})$, a identidade*

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)=\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(S)$$

se verifica para todo subconjunto $S\subseteq X$.

Com as definições adotadas, três coisas devem ser mostradas:

(i) $S\subseteq\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$;

(ii) $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S))=\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$, i.e., $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$ é $\mathcal{T}$-fechado, e

(iii) $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)\subseteq F$ para todo $\mathcal{T}$-fechado F tal que $S\subseteq F$.

Isto será feito de três formas diferentes.

Demonstração (via abertos). Se $x\in S$ e $V\subseteq X$ é um aberto de X em torno de x, então (obviamente) $V\cap S\neq\emptyset$, mostrando que $x\in\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$. Da arbitrariedade do ponto x tomado, resulta (i). Com (i) provado, temos $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)\subseteq\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S))$, de modo que para mostrar (ii), basta verificar a inclusão oposta: se $x\in\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S))$ e $V\subseteq X$ é um aberto de X em torno de x, então existe $y\in V\cap\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$ e, por conseguinte, $V\cap S\neq\emptyset$ (posto que $y\in\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$ e V é um aberto em torno de y). Finalmente, tratemos de (iii): se $S\subseteq F$ para um $\mathcal{T}$-fechado F e $x\in\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$, então $x\in F$. Ora, o contrário daria $x\notin\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(F)$ (pois $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(F)\subseteq F$ por hipótese)[‡‡], o que depende da existência de um $\mathcal{T}$-aberto V em torno de x tal que $V\cap F=\emptyset$, mas isto implica em $V\cap S=\emptyset$, impossibilitando a ocorrência de $x\in\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$. □

[†] Se quiser praticar, faça também as implicações (ii) $\Rightarrow$ (i) e (iii) $\Rightarrow$ (ii) diretamente.

[‡] ...quando a topologia estiver...

[††] No sentido político do termo.

[‡‡] *Spoiler*: se você *já sabe* que F é fechado sse $X\setminus F$ é aberto, basta tomar $V := X\setminus F$. Se você não sabe, espere.

Demonstração (via redes). A inclusão em (i) segue pois redes constantes convergem para as constantes. Como na demonstração anterior, a igualdade em (ii) seguirá da inclusão $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)) \subseteq \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$ que provaremos a seguir (e você não se arrependerá de relembrar a prova do Lema 1.1.12).

Para $x \in \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S))$, existe uma rede $\psi \in \mathsf{Net}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S))$ com $\psi \to_{\mathcal{T}} x$. A fim de simplificar o próximo passo[†], note que para cada $\mathcal{T}$-aberto V em torno de x existe um índice $\alpha_V \in \mathrm{dom}\,(\psi)$ tal que $\psi(\alpha) \in V \cap \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$ para todo $\alpha \succeq \alpha_V$. Em particular, existe (pelo menos) um ponto em $V \cap S$, que chamaremos de $\varphi(V)$. Dessa forma, a rede $\varphi \colon \mathcal{T}_x \to X$ é tal que $\varphi \to_{\mathcal{T}} x$ com $\varphi(V) \in S$ para todo $V \in \mathcal{T}_x$, i.e., $x \in \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$.

Por fim, (iii): se F é $\mathcal{T}$-fechado com $S \subseteq F$ e $x \in \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$, então $x \in F$. Por um lado, existe uma rede φ em S tal que $\varphi \to_{\mathcal{T}} x$; por outro lado, se $x \notin F$, então $x \notin \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(F)$, o que assegura um $\mathcal{T}$-aberto V em torno de x com $V \cap F = \emptyset$, contrariando o fato de termos tomado φ em S (percebeu?)$^{\star}_{\star}$. □

Demonstração (via filtros). Por sua conta ($\overset{\star}{\star\star}$). □

Exemplo 2.1.50 (Como sempre, sequências não bastam)**.** Em geral, não é possível caracterizar o fecho de um conjunto num espaço topológico em termos de sequências convergentes. Para se convencer disso[‡], considere $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com a topologia $\mathcal{T}$ definida na demonstração da Proposição 1.1.30, e defina

$$\mathcal{C} := \{\chi_S \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus S \text{ é finito}\},$$

ou seja, $f \in \mathcal{C}$ sse $f(x) \in \{0, 1\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ finito.

Denotando por $\underline{0}_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função nula, não é difícil perceber que $\underline{0}_{\mathbb{R}} \in \overline{\mathcal{C}}$. De fato, se $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um $\mathcal{T}$-aberto em torno de $\underline{0}_{\mathbb{R}}$, então existe uma "bola" $B := B(\underline{0}_{\mathbb{R}}; F; r)$ contida em $\mathcal{A}$ para algum subconjunto finito $F \subseteq \mathbb{R}$ e um número real $r > 0$. Logo, $\chi_{\mathbb{R}\setminus F} \in \mathcal{C} \cap B \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{A}$.

Por outro lado, não há sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}$ com $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} \underline{0}_{\mathbb{R}}$ pois, em geral, para *qualquer* sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}$, o conjunto

$$L((g_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \left\{x \in \mathbb{R} : (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{R}} 0\right\}$$

é, *no máximo*, enumerável. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto finito $F_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $g_n = \chi_{\mathbb{R}\setminus F_n}$, de modo que se $x \in L((g_n)_{n\in\mathbb{N}})$, então $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$: caso contrário, $g_n(x) = 1$ para todo n. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ é enumerável[††], o resultado segue. ▲

Exercício 2.1.26 ($\star$)**.** Por que a enumerabilidade de $L((g_n)_{n\in\mathbb{N}})$ impede a ocorrência de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \underline{0}_{\mathbb{R}}$ em $(\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathcal{T})$? ■

Exercício 2.1.27 ($\overset{\star}{\star}$)**.** Mostre que se X é espaço métrico, então $p \in X$ é ponto aderente a $S \subseteq X$ sse existe sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p$. Conclua que, neste caso, um subconjunto $F \subseteq X$ é fechado segundo a Definição 1.1.11 sse F é fechado segundo a Definição 2.1.48. ■

Assim, no presente contexto, o termo "fechado" passa a ter um *sabor algébrico*, no sentido de que F é *fechado* quando é "fechado por convergência". Analogamente, o "fecho" de S é o conjunto *gerado* a partir de S por convergência. Porém, por vivermos num mundo repleto de portas, também é natural nos perguntarmos por relações com o termo "aberto". Elas existem e se devem, essencialmente, ao próximo lema.

[†] É possível argumentar usando apenas a caracterização de ponto aderente via redes, mas ainda é cedo para discutir *limites de limites*. Caso tenha se interessado, confira a Subseção 2.2.4 §3.

[‡] Você também pode conferir a Proposição 1.2.33, que apresenta um exemplo no contexto de ordinais.

[††] O argumento também funcionaria com $\mathcal{E} := \{\chi_S \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus S \text{ é enumerável}\}$ (certo?)*.

Lema 2.1.51. *Nas condições anteriores, são equivalentes:*

(i) $p \notin \overline{S}$, *i.e., existe um* $\mathcal{T}$*-aberto* V *em torno de* p *com* $V \cap S = \emptyset$

(ii) *sempre que um filtro próprio* $\mathcal{F}$ *em* X $\mathcal{T}$*-converge para* p*, tem-se* $X \setminus S \in \mathcal{F}$*;*

(iii) *sempre que uma rede* φ *em* X $\mathcal{T}$*-converge para* p*, existe* $D \in \operatorname{dom}(\varphi)$ *satisfazendo* $\varphi\left[D^{\uparrow}\right] \subseteq X \setminus S$.

Exercício 2.1.28 $\binom{\star}{\star}$**.** Prove o lema anterior. Dica: para (i) ⇒ (ii), note que $V \subseteq X \setminus S$; para (ii) ⇒ (iii), use $\mathcal{F} := (\varphi)^{\uparrow}$; para (iii) ⇒ (i), use a caracterização de aderência via redes. ■

As condições (i), (ii) e (iii) acima são análogas às condições (i), (ii) e (iii) na Proposição 2.1.39 que caracteriza abertos por meio de convergência[†], com a diferença de que, na proposição, o aberto A deve satisfazer as condições para todos os seus pontos, enquanto no lema atual, $X \setminus S$ satisfaz as condições apenas com respeito ao ponto p. É quase como se p *acreditasse* que $X \setminus S$ é um aberto em torno de si.

Definição 2.1.52. Para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um subconjunto $S \subseteq X$, diremos que um ponto $p \in X$ é $\mathcal{T}$**-interior** ao conjunto S (ou "...*de* S") se existe um $\mathcal{T}$-aberto V em torno de p com $V \subseteq S$. O $\mathcal{T}$**-interior** (ou apenas **interior**) de S é o conjunto

$$\operatorname{int}_{\mathcal{T}}(S) := \{x \in X : x \text{ é } \mathcal{T}\text{-interior ao conjunto } S\}. \qquad ¶$$

Para certificar-se de que você entendeu as discussões que motivaram a definição acima, faça os próximos exercícios.

Exercício 2.1.29 $\binom{\star}{\star}$**.** Mostre que $\operatorname{int}(S)$ é o maior aberto de X contido em S. Em particular, conclua que A é aberto em X sse $\operatorname{int}(A) = A$. ■

Exercício 2.1.30 $\binom{\star}{\star}$**.** Mostre que $N \subseteq X$ é vizinhança de $x \in X$ sse $x \in \operatorname{int}(N)$. ■

Observação 2.1.53 (Opcional: "inerência")**.** Houve uma quebra de simetria na *dualização* dos conceitos anteriores. De fato, para ser fiel com a Definição 2.1.48, deveríamos ter dado nomes separados para

- a coleção dos pontos interiores a S, que podemos chamar de *inerência* de S,
- e o maior aberto de X contido em S, que podemos chamar de *interior* de S.

É claro que, por conta do exercício anterior (que faz o papel do Teorema 2.1.49), esta quebra é inofensiva. Mas fica o aviso: nem sempre será assim... △

Finalmente, a relação entre abertos e fechados é apenas reflexo da relação entre aderência e ~~inerência~~ interior.

Teorema 2.1.54. *Um ponto* p *é interior a* S *se, e somente se, não é aderente a* $X \setminus S$*, i.e.,*

$$\operatorname{int}(S) = X \setminus \overline{X \setminus S}.$$

Demonstração. Basta trocar "S" por "$X \setminus S$" no item (i) do Lema 2.1.51 (trocou?)*. □

[†]A analogia entre as condições (i) se dá pois $V \cap S = \emptyset$ sse $V \subseteq X \setminus S$, enquanto A é aberto sse para todo $x \in A$ existe um aberto B de X em torno de x com $B \subseteq A$ (certo?)*.

Corolário 2.1.55. *Um subconjunto S de um espaço topológico X é aberto em X se, e somente se, $X \setminus S$ é fechado em X.*

Demonstração. Se S é aberto, então $S = \operatorname{int}(S) = X \setminus \overline{X \setminus S}$, acarretando $X \setminus S = \overline{X \setminus S}$, i.e., $X \setminus S$ é fechado. A recíproca é idêntica (mas faça!)*. □

Corolário 2.1.56. *A família $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$, formada pelos $\mathcal{T}$-fechados de um espaço topológico X, tem as seguintes propriedades:*

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, *i.e.,* $\emptyset$ *e* X *são* $\mathcal{T}$*-fechados;*

(ii) *se* $F, G \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, *então* $F \cup G \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, *i.e., a reunião (finita) de* $\mathcal{T}$*-fechados é* $\mathcal{T}$*-fechada;*

(iii) *se* $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{T})$ *é não vazia, então* $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, *i.e., a interseção (arbitrária) de uma família não vazia de fechados é fechada.*

Demonstração. Segue das Leis de De Morgan e dos axiomas de topologia em combinação com o corolário anterior. Completar os detalhes será sua tarefa ($\star$). □

Observação 2.1.57 (Roteiros alternativos)**.** Os resultados anteriores mostram diversas formas diferentes por meio das quais podemos "encarar" topologias.

- Em vez de definir fechados por meio de pontos aderentes, seria lícito <u>definir</u> "fechado := complementar de aberto". Neste caso, o fecho de um subconjunto S, definido como o menor fechado que contém S, pode ser construído como a interseção de todos os fechados que contém S. Para recuperar a noção de ponto aderente daí, basta observar que

  $$x \in \overline{S} \Leftrightarrow x \in F \text{ para todo fechado } F \subseteq X \text{ tal que } S \subseteq F,$$

  enquanto x *não é* aderente a S sse algum aberto $V \subseteq X$ em torno de x *não* intercepta S sse existe um fechado F com $S \subseteq F$ tal que $x \notin F$ (percebeu?)$^\star_\star$.

- Em vez de definir fechados a partir de abertos, poderíamos considerar fechados axiomaticamente, como uma família com as propriedades do último corolário, para daí definir "aberto := complementar de fechado". A Subseção 2.2.7 apresenta um exemplo em que esse tipo de abordagem surge naturalmente.

- Em vez de definir abertos em função de fechados ou vice-versa, poderíamos começar com um *operador* $c\colon \wp(X) \to \wp(X)$ com as propriedades esperadas do operador $\operatorname{ad}(\bullet)$ (cf. Exercício 2.1.47), a saber

  (i) $S \subseteq c(S)$,
  (ii) $c(c(S)) = c(S)$,
  (iii) $c(\emptyset) = \emptyset$, e
  (iv) $c(S \cup T) = c(S) \cup c(T)$

  para quaisquer $S, T \subseteq X$, para daí definir "F é fechado sse $c(F) = F$".

- Em vez de... já deu para entender.

O ponto essencial é que, independentemente do roteiro seguido, não só é permitido como recomendável transitar entre as definições, pois isso costuma revelar diferentes aspectos de um mesmo conceito ou objeto. Para ilustrar isso (e concluir esta subsubseção!), vejamos a noção de *densidade*†. △

†Se você sabe o que são funções cardinais: não, ainda não se trata da "função cardinal densidade".

Definição 2.1.58. Um subconjunto D de um espaço topológico X é **denso** (em X) se $\overline{D} = X$. O espaço é dito **separável**[†] se admitir um subconjunto enumerável e denso. ¶

O conjunto dos números racionais costuma ser o primeiro exemplo não óbvio de subespaço denso de um espaço (neste caso, $\mathbb{R}$), já que qualquer (intervalo) aberto não vazio contém um número racional (ou seja, aderência via abertos). Um exemplo mais sofisticado é fornecido pelo *Teorema da Aproximação de Weierstrass*, segundo o qual qualquer função contínua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ é limite uniforme de funções polinomiais da forma $[a, b] \to \mathbb{R}$ (ou seja, aderência via convergência na norma do supremo, cf. Exercício 1.2.19). Mais exemplos de conjuntos densos aparecerão ao longo de todo o texto, não se preocupe. Conhecer *bons* subconjuntos densos está para a Topologia assim como conhecer bons geradores está para a Álgebra. Duvida?

Proposição 2.1.59. *Sejam $f, g\colon X \to Y$ funções contínuas. Se $D \subseteq X$ é denso, Y é de Hausdorff e $f|_D = g|_D$, então $f = g$.*

Demonstração (via abertos e filtros). Se $f \neq g$, então existe $x \in X$ com $f(x) \neq g(x)$. Por Y ser de Hausdorff, existem abertos disjuntos $U, V \subseteq Y$ com $f(x) \in U$ e $g(x) \in V$. Como f e g são contínuas, $f^{-1}[U]$ e $g^{-1}[V]$ são abertos de X em torno de x. Finalmente, por D ser denso...

- ... (via abertos) temos x aderente a D, donde segue que existe $d \in f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V]$, acarretando $f|_D \neq g|_D$. Portanto, o resultado segue pela contrapositiva.
- ... (via filtros) existe um filtro próprio $\mathcal{H} \in \mathsf{Fil}^*(X)$ com $D \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{H} \to x$, i.e., $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{H}$, acarretando $D \cap f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] \neq \emptyset$, donde segue $f|_D \neq g|_D$ (percebeu?)*. Portanto, o resultado segue pela contrapositiva. □

Demonstração (via redes). Queremos mostrar que $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in X$. Dado que D é denso em X, existe uma rede $\varphi \in \mathsf{Net}(D)$ com $\varphi \to x$ em X, que pela hipótese de coincidência em D satisfaz $f \circ \varphi = g \circ \varphi$. Por fim, da continuidade de f e g, resulta

$$f(x) = f(\lim \varphi) = \lim_{d \in \operatorname{dom}(\varphi)} f(\varphi(d)) = \lim_{d \in \operatorname{dom}(\varphi)} g(\varphi(d)) = g(\lim \varphi) = g(x). \qquad \square$$

§2 Bases locais e o primeiro axioma de enumerabilidade

Bases locais constituem o modo mais comum de *usar* filtros sem *mencionar* filtros.

Definição 2.1.60. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $p \in X$ um ponto e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ uma família de $\mathcal{T}$-vizinhanças de p (cf. Definição 2.1.15). Diremos que $\mathcal{C}$ é **base local de $\mathcal{T}$-vizinhanças em torno de** p (ou apenas "... em p", "... de p", "... para p", etc.)[‡] se para toda $\mathcal{T}$-vizinhança V de p existir $C \in \mathcal{C}$ com $C \subseteq V$. Se, adicionalmente, todos os membros de $\mathcal{C}$ forem $\mathcal{T}$-abertos, diremos apenas que $\mathcal{C}$ é **base local** em p. ¶

Moralmente, os membros de uma base local de vizinhanças são testemunhas que atestam quando algum subconjunto do espaço é vizinhança do ponto. Em outras palavras, é algo que já usamos diversas vezes na descrição de espaços topológicos!

[†] Por razões históricas: o termo foi cunhado por Fréchet no mesmo artigo em que espaços métricos foram introduzidos, com uma motivação bastante *real*: quaisquer dois números reais distintos $x < y$ podem ser *separados* por um número racional r, i.e., $x < r < y$. Uma discussão mais longa pode ser encontrada em `https://mathoverflow.net/questions/51494/why-the-name-separable-space`.

[‡] Há ainda quem prefira *sistema fundamental de vizinhanças*, e.g., [3].

Exemplo 2.1.61 (Fundamental: bolas abertas)**.** Num espaço métrico X, as bolas abertas centradas num ponto p constituem uma base local em torno do ponto com relação à topologia induzida pela métrica (certo?)*. Apesar disso, há outras bases locais disponíveis. Podemos considerar, por exemplo, as coleções

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{B(p,r) : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r > 0\}, \\ \mathcal{B} &:= \left\{B\left(p, \frac{1}{2^n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \text{ ou} \\ \mathcal{C} &:= \left\{B\left[p, \frac{1}{2^n}\right] : n \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

As famílias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são bases locais em torno de p, essencialmente pelo mesmo motivo (qual?)*. Por sua vez, $\mathcal{C}$ é base local de vizinhanças fechadas (cf. Exercício 1.1.14), por *refinar* e ser *refinada* pela base local $\mathcal{B}$: dada uma vizinhança V de p, existe $N \in \mathbb{N}$ com $B\left(p, \frac{1}{2^N}\right) \subseteq V$ (pois $\mathcal{B}$ é base local), mas como $B\left(p, \frac{1}{2^{N+1}}\right) \subseteq B\left[p, \frac{1}{2^{N+1}}\right] \subseteq B\left(p, \frac{1}{2^N}\right)$, o resultado segue (por quê?)$^{\star}_{\star}$.

Em particular, enquanto $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são enumeráveis, a base local que iniciou este exemplo, a saber, $\mathcal{D} := \{B(p,r) : r \in (0,+\infty)\}$, é (possivelmente)[†] não enumerável. Moral da história: a unicidade de cardinalidade de *bases* (de Hamel) de espaços vetoriais não se aplica para bases locais, apesar da infeliz coincidência terminológica. ▲

Exercício 2.1.31 (Adiável ($^{\star}_{\star}$))**.** É verdade que $\overline{B(p,r)} = B[p,r]$ em qualquer espaço métrico? E num espaço normado? ■

Exemplo 2.1.62 (Ordens (cf. Subseção 1.2.2))**.** Numa ordem $\mathbb{P}$ dotada de mínimo p_0, a família de intervalos $\mathcal{I}_{p_0} := \{[p_0, p) : p > p\}$ é uma base local em $\mathbb{P}$, com situação análoga para um máximo (se existir). Já para um ponto que não é extremo, a situação muda de acordo com a ordem.

Para $\mathbb{P} := \mathbb{N}$ com $n > 0$, por exemplo, $\mathcal{I}_n := \{\{n\}\}$ é base local em n: neste caso, $\{n\}$ é um (intervalo) aberto em torno de n, a saber $\{n\} = [0, n+1)_{\mathbb{N}} \cap (n-1, +\infty)_{\mathbb{N}}$ (cf. Definição 1.2.17) e, claramente, todo aberto $V \subseteq \mathbb{N}$ em torno de n é tal que $\{n\} \subseteq V$.

Já para $\mathbb{P} := [0, \omega_1)$, onde ω_1 é o primeiro ordinal não enumerável (cf. Observação 1.2.29 e Proposição 1.2.31), $\mathcal{I}_\omega := \{(n, \omega] : n < \omega\}$ é uma base local no ponto ω. De fato, tais intervalos são abertos pois $(n, \omega] = (n, \omega+1)$, enquanto a definição da topologia em $\mathbb{P}$ pede que se $V \subseteq \mathbb{P}$ é aberto com $\omega \in \mathbb{P}$, então existem $\alpha < \omega$ e $\beta < \omega$ tais que $(\alpha, \beta) \subseteq V$ (por quê?)*, acarretando $(\alpha, \omega] \subseteq V$. ▲

Como os exemplos sugerem, bases locais não permitem apenas descrever topologias conhecidas, mas também são uma ferramenta útil na *construção* de topologias "novas". A topologia $\mathcal{T}$ definida na demonstração da Proposição 1.1.30, por exemplo, foi feita *sob medida* para que a coleção

$$\mathcal{B}_f := \{B(f; S; r) : S \subseteq \mathbb{R} \text{ é finito e } r \in (0, +\infty)\} \tag{2.6}$$

fosse uma base local em torno de f, para cada $f \in \operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De fato, com a definição de $\mathcal{T}$, para todo subconjunto $\mathcal{T}$-aberto $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ em torno de f existe $B \in \mathcal{B}_f$ com $B \subseteq \mathcal{A}$ (entendeu?)*. O que levanta a

[†]No caso de X discreto, por exemplo, tem-se $\mathcal{D} = \{\{p\}, X\}$. Note que isto não ocorre se X for $\mathbb{K}$-espaço normado com dimensão pelo menos 1 (por quê?)*.

Pergunta: fixados um conjunto X e, para cada $p \in X$, uma coleção $\mathcal{B}_p$ de subconjuntos *em torno* de p, existe uma topologia $\mathcal{T}$ em X que tenha $\mathcal{B}_p$ como base local (de vizinhanças) em p para cada p?

Resposta: nem sempre.

Proposição 2.1.63. *Com as notações anteriores, se $\mathcal{T}$ é uma topologia em X segundo a qual cada $\mathcal{B}_p$ é uma base local de vizinhanças em p, então $\mathcal{B}_p$ é um <u>pré-filtro</u> em X para cada $p \in X$. Além disso:*

(i) *se cada $\mathcal{B}_p$ é uma base local de $\mathcal{T}$-vizinhanças em torno de p, então sempre que $B \in \mathcal{B}_p$, existe $C \in \mathcal{B}_p$ tal que $B \in (\mathcal{B}_q)^{\uparrow}$ para todo $q \in C$;*

(ii) *se cada $\mathcal{B}_p$ é uma base local em torno de p, então sempre que $B \in \mathcal{B}_p$ e $q \in B$, existe $C' \in \mathcal{B}_q$ com $C' \subseteq B$.*

Demonstração. Para a primeira parte, note que se $A, B \in \mathcal{B}_p$, então em particular ambos são $\mathcal{T}$-vizinhanças de p e, por conseguinte, $A \cap B$ é uma vizinhança de p. Logo, a hipótese sobre $\mathcal{B}_p$ ser base local de vizinhanças força a existência de $C \in \mathcal{B}_p$ com $C \subseteq A \cap B$, donde se conclui que $\mathcal{B}_p$ é um pré-filtro (cf. Proposição 2.1.16). Tratemos dos subcasos (i) e (ii).

(i) Se $B \in \mathcal{B}_p$, então B é $\mathcal{T}$-vizinhança de p por hipótese, donde segue que existe um $\mathcal{T}$-aberto $A \subseteq X$ com $p \in A \subseteq B$. Dado que A também é $\mathcal{T}$-vizinhança, a hipótese assegura $C \in \mathcal{B}_p$ com $C \subseteq A$. Por fim, se $q \in C$, então A testemunha que B é $\mathcal{T}$-vizinhança em torno de q e, por $\mathcal{B}_q$ ser base local de vizinhanças em torno de q, tem que existir $D \in \mathcal{B}_q$ com $D \subseteq B$, i.e., $B \in (\mathcal{B}_q)^{\uparrow}$.

(ii) Se $p, q \in B$ com $B \in \mathcal{B}_p$, então B é um $\mathcal{T}$-aberto em torno de q, donde a hipótese acerca de $\mathcal{B}_q$ assegura $C' \in \mathcal{B}_q$ com $C' \subseteq B$. $\square$

A proposição acima estende o "nem sempre" usado como resposta para a última pergunta, mas não só isso: ela elenca critérios *pontuais* que famílias de coleções de subconjuntos precisam satisfazer a fim de que o *modus operandi* usual para definir topologias por meio de testemunhas "locais" funcione. Mais precisamente:

Teorema 2.1.64 (Opcional[†])**.** *Para um conjunto X fixado, seja $\mathcal{B}_p$ uma família de subconjuntos de X em torno de p, para cada $p \in X$, e considere*

$$\mathcal{T} := \left\{ A \subseteq X : A \in (\mathcal{B}_p)^{\uparrow} \text{ para todo } p \in A \right\}.$$

Se cada $\mathcal{B}_p$ for um pré-filtro satisfazendo a tese da condição (i) (*respectivamente,* (ii)) *da última proposição, então $\mathcal{T}$ é a única topologia que faz de $\mathcal{B}_p$ uma base local de vizinhanças em p* (*respectivamente, base local em p*)*.*

Demonstração. Primeiro, observe que a definição de $\mathcal{T}$ diz apenas que um subconjunto $A \subseteq X$ será membro de $\mathcal{T}$ sse para todo $p \in A$ existir $B \in \mathcal{B}_p$ com $B \subseteq A$, ou seja: trata-se do modo usual de definir topologias empregado até aqui! E de fato, como cada $(\mathcal{B}_p)^{\uparrow}$ é um filtro próprio, todas as condições de topologia seguem quase automaticamente (concorda?)$^{\star}_{\star}$. É no restante que a coisa se torna um pouco mais delicada, mas não muito.

[†]Na prática, o mais comum é definir $\mathcal{T}$ como no enunciado sem checar as hipóteses sobre cada $\mathcal{B}_p$ — e torcer para dar certo. Em geral, é só depois de fazer isso que alguém na sala se lembra que bastava aplicar o "Teorema 2.1.64".

No primeiro caso, basta mostrar que $\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}} = (\mathcal{B}_p)^{\uparrow}$ (por que basta isso?)$^{\star}_{\star\star}$. É claro que se $N \in \mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$, então $N \in (\mathcal{B}_p)^{\uparrow}$ (é claro mesmo?)$^{\star}_{\star}$. O problema está na inclusão oposta: se $V \in (\mathcal{B}_p)^{\uparrow}$, devemos encontrar um $\mathcal{T}$-aberto A com $p \in A$ e $A \subseteq V$. Mostraremos que $A := \left\{x \in X : V \in (\mathcal{B}_x)^{\uparrow}\right\}$ serve[†].

- $(p \in A)$. Pois $V \in (\mathcal{B}_p)^{\uparrow}$ por hipótese.
- $(A \subseteq V)$. Se $x \in A$, então existe $D \in \mathcal{B}_x$ com $x \in D$ e $D \subseteq V$, e daí $x \in V$.
- $(A \in \mathcal{T})$. Para $x \in A$ qualquer, devemos mostrar que $A \in (\mathcal{B}_x)^{\uparrow}$. Ora, por termos $x \in A$, resulta $V \in (\mathcal{B}_x)^{\uparrow}$, i.e., existe $B \in \mathcal{B}_x$ com $B \subseteq V$. A hipótese acerca das famílias $\mathcal{B}_p$'s assegura a existência de $C \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \in (\mathcal{B}_c)^{\uparrow}$ para todo $c \in C$. Agora, o pulo do gato é perceber que $C \subseteq A$: de fato, se $c \in C$, então existe $E \in \mathcal{B}_c$ com $E \subseteq B$ e, por valer $B \subseteq V$ (lembra?)$^{\star/2}$, resulta $V \in (\mathcal{B}_c)^{\uparrow}$, mostrando que $c \in A$. Enfim, como tínhamos $C \in \mathcal{B}_x$, concluímos $A \in (\mathcal{B}_x)^{\uparrow}$.

Para o segundo caso, i.e., em que as famílias $\mathcal{B}_p$ satisfazem a tese da condição (ii), temos automaticamente satisfeita a tese da condição (i) (por quê?)*, de modo que resta provar que os membros de cada $\mathcal{B}_p$ são $\mathcal{T}$-abertos. Vejamos: dado $B \in \mathcal{B}_p$, devemos mostrar que $B \in (\mathcal{B}_x)^{\uparrow}$ para qualquer $x \in B$, mas isto segue diretamente (ii), já que por hipótese existe $C' \in \mathcal{B}_x$ com $C' \subseteq B$. A unicidade de $\mathcal{T}$ será problema seu. □

Exercício 2.1.32 ($^{\star}_{\star}$)**.** Complete a demonstração anterior, i.e., mostre que sob as condições dadas, $\mathcal{T}$ é a única topologia com as propriedades enunciadas. Dica: encare a Proposição 2.1.39 até que ela te encare de volta. ■

O teorema anterior[‡] não altera a Definição 2.1.60, que estabelece os critérios para que uma família de vizinhanças em torno de um ponto seja uma base local de vizinhanças para o ponto: note que a definição exige uma topologia para começo de conversa. O que o teorema faz é garantir que, ao atribuir pré-filtros satisfazendo certas condições a cada ponto do *conjunto*, então existe e é única a topologia no *conjunto* que tem tais pré-filtros como bases locais (de vizinhanças)[††]. A fim de simplificar futuras referências a esse método de construção topológica, diremos que a topologia $\mathcal{T}$ do último teorema é **gerada** por $(\mathcal{B}_p)_{p \in X}$ *como sistema/upla de bases locais* (de *vizinhanças* se for o caso). Para praticar:

Exercício 2.1.33 ($\star$)**.** Para cada $f \in \operatorname{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, defina $\mathcal{B}_f$ como em (2.6) (pág. 70). Mostre que $(\mathcal{B}_f)_{f \in \operatorname{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ satisfaz a tese da condição (ii) no último teorema. Conclua que a família $\mathcal{T}$ definida na demonstração da Proposição 1.1.30 é, <u>automaticamente</u>, uma topologia tal que cada $\mathcal{B}_f$ é uma base local em torno de f. ■

Bases locais fazem bem mais do que apenas descrever localmente as vizinhanças de um ponto.

Definição 2.1.65. Costuma-se dizer que um espaço topológico satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** (ou, para pessoas apressadas, é **1º-contável**)[‡‡] se todo ponto do espaço admite uma base local (de vizinhanças) enumerável. ¶

[†]Intuitivamente, A é o conjunto dos pontos de X que acreditam que V é um aberto em torno deles. Em outras palavras: A é o $\mathcal{T}$-interior de V.

[‡]Adaptado de Bourbaki [8] (critério (i)) e Engelking [18] (critério (ii)).

[††]Provocação: o que acontece se cada $\mathcal{B}_p$ for apenas um pré-filtro de subconjuntos em torno de p, sem restrições adicionais?

[‡‡]Ou ainda, para pessoas modernas, *tem caráter enumerável*.

Exercício 2.1.34 ($\star$)**.** Mostre que espaços *metrizáveis*[†] são $1^{\underline{\text{o}}}$-contáveis. ■

Exemplo 2.1.66 (Nem todo espaço $1^{\underline{\text{o}}}$-contável é metrizável)**.** O espaço $[0, \omega_1)$, composto por todos os ordinais enumeráveis[‡], satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade mas não é metrizável. Para a primeira parte, note que se $\alpha \in [0, \omega_1)$, então $\mathcal{I}_\alpha := \{(\beta, \alpha] : \beta < \alpha\}$ é base local em torno de α (cf. Exemplo 2.1.62), enumerável pois $\alpha < \omega_1$, i.e., o ordinal α, enquanto conjunto $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$, é enumerável. No entanto, veremos em breve que $[0, \omega_1)$ não é *compacto* (cf. Exercício 3.1.22), enquanto toda sequência em $[0, \omega_1)$ admite *subsequência* convergente (cf. Lema 1.2.32). Segue daí que sua topologia não pode ser metrizável, pois *compacidade sequencial* e *compacidade* são equivalentes em espaços métricos (cf. Teorema 3.1.49).

Outro exemplo típico é dado pela *Reta de Sorgenfrey*, que consiste no conjunto dos números reais com uma topologia $\mathcal{S}$ diferente da usual: um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é considerado aberto na **topologia de Sorgenfrey** sse para todo $x \in A$ existe $a > x$ tal que $[x, a) \subseteq A$. Alternativamente:

- para cada $p \in \mathbb{R}$ definimos a família $\mathcal{S}_p := \{[p, a) : a > p\}$;
- note que para $[p, a) \in \mathcal{S}_p$ e $q \in [p, a)$, temos $p \leq q < a$, donde segue que existe $b \in (q, a)$ e, consequentemente, $[q, b) \in \mathcal{S}_q$ satisfaz $[q, b) \subseteq [p, a)$;
- logo, pelo teorema anterior, existe e é única a topologia em $\mathbb{R}$ que tem $\mathcal{S}_p$ como base local para cada $p \in \mathbb{R}$ (pronto!)[††].

Denotaremos por $\mathbb{R}_S$ a reta real com a topologia de Sorgenfrey, que por simplicidade será xingada de **reta de Sorgenfrey**. Como no Exemplo 2.1.61, não é difícil perceber que $\mathcal{B}_p := \left\{\left[p, p + \frac{1}{2^n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ também é base local em p para cada $p \in \mathbb{R}_S$. Portanto, $\mathbb{R}_S$ é $1^{\underline{\text{o}}}$-contável. Ainda nesta subsubseção veremos um dos motivos pelos quais $\mathbb{R}_S$ não é metrizável. ▲

Apesar do alerta que os exemplos acima podem levantar, o primeiro axioma de enumerabilidade acarreta metrizabilidade numa gama muito grande de espaços, mas ainda é cedo para tratar disso. O que já podemos discutir é o seguinte: embora não seja equivalente à metrizabilidade de modo geral, a existência de bases locais enumeráveis é a uma das grandes responsáveis pela *boa fama* dos espaços métricos.

Lema 2.1.67. *Se um ponto admite uma base local enumerável de vizinhanças, então o ponto admite uma base local enumerável e descrescente, i.e., da forma e* $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ *tal que* $B_n \subseteq B_m$ *sempre que* $n \geq m$.

Demonstração. Seja $\mathcal{V} := \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base local enumerável de vizinhanças em torno de um ponto p. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixe um aberto $U_n \subseteq V_n$ com $p \in U_n$ e defina

$$B_n := \bigcap_{m \leq n} U_m.$$

Claramente, B_n é um aberto em torno de p satisfazendo $B_n \subseteq V_n$ e, além disso, $B_i \subseteq B_j$ sempre que $j \leq i$ (certo?)*. Para ver que $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ é base local em torno de p, basta tomar uma vizinhança O de p e observar que, para algum $n \in \mathbb{N}$ deve ocorrer $V_n \subseteq O$ (por quê?)*, donde segue que $B_n \subseteq O$. □

[†] Isto é, aqueles cuja topologia é induzida por uma métrica.
[‡] Confira a Observação 1.2.29 e a Proposição 1.2.31 se não souber do que se trata
[††] Confesse: foi bem mais divertido do que checar os três axiomas de topologia, não é mesmo?

Exemplo 2.1.68. A coleção $\mathcal{B} := \{(-q, q) : q \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)\}$ é uma base local para 0 em $\mathbb{R}$ com sua topologia usual. Como $\mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ é enumerável, podemos reescrever $\mathbb{Q} \cap (0, +\infty) = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ de tal forma que $q_i \neq q_j$ sempre que $i \neq j$. No entanto, embora $\mathcal{B}$ seja enumerável, $\mathcal{B}$ não tem como ser decrescente com respeito a essa reindexação: se $B_{q_n} \subseteq B_{q_m}$ sempre que $n \geq m$, então a bijeção

$$\begin{aligned} q \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto q_n \end{aligned}$$

é estritamente decrescente, o que impede q de ser bijetora (percebeu?)$^{\star}_{\star}$.

Isto ilustra a importância do lema anterior. Em geral, ao sabermos que uma base local $\mathcal{B}$ é enumerável, garante-se apenas a existência de uma sobrejeção $V \colon \mathbb{N} \to \mathcal{B}$ que permite expressar $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, mas nada se sabe, a princípio, sobre as relações de inclusão entre V_n e V_m. Assim, o lema permite *uniformizar* o tipo de decrescimento de bases locais enumeráveis, tornando-as moralmente similares às bases locais decrescentes de espaços métricos. ▲

SUGESTÃO: antes de prosseguir para o próximo resultado, reveja a sua *própria* solução para o Exercício 1.1.1, ou confira a proposta na página 207.

Teorema 2.1.69. *Sejam $f \colon X \to Y$ uma função entre espaços topológicos e $p \in X$ um ponto qualquer. Se p admite base local enumerável de vizinhanças, então são equivalentes:*

(i) *f é contínua em p;*

(ii) *f é sequencialmente contínua em p, i.e., $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(p)$ em Y sempre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p$ em X.*

Em particular, se X é 1º-contável, então f é contínua se, e somente se, f é sequencialmente contínua†.

Demonstração. A implicação (i) ⇒ (ii) vale em geral (lembra?)*. Para a recíproca, o lema anterior permite supor que p admite uma base local enumerável e decrescente em torno de p da forma $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Agora, se f não fosse contínua em p, então existiria um subconjunto $V \subseteq Y$ aberto em Y com $f(p) \in V$ mas tal que $f[U] \not\subseteq V$ para qualquer $U \subseteq X$ aberto com $p \in U$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_n$ tal que $f(x_n) \notin V$. Consequentemente, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \not\to f(p)$ em Y. No entanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p$ em X. Com efeito, para qualquer aberto $W \subseteq X$ em torno de p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_N \subseteq W$. Daí, por $\mathcal{B}$ ser decrescente, resulta $B_n \subseteq W$ para todo $n \geq N$ e, por conseguinte, $x_n \in W$ para todo $n \geq N$. □

Exercício 2.1.35 ($^{\star}_{\star}$). Sejam X um espaço topológico, $S \subseteq X$ um subconjunto e $p \in X$ um ponto. Mostre que se p tem base local enumerável, então $p \in \overline{S}$ sse existe sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p$. ■

Exemplo 2.1.70. Em virtude do exercício anterior, o espaço de funções $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cf. Proposição 1.1.30) não satisfaz o 1º axioma de enumerabilidade pois a função nula $\underline{0}_{\mathbb{R}}$ não pode ter base local enumerável (cf. Exemplo 2.1.50). Ocorre que nenhuma função $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admite base local enumerável‡.

† Confira a Definição 1.1.35.

‡ Na verdade, isto segue diretamente do fato já verificado para $\underline{0}_{\mathbb{R}}$ (por quê?!)$^{\star}_{\star\star}$.

Um modo árduo, mas honesto, de verificar isso, é notar que se $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família enumerável de $\mathcal{T}$-abertos em torno de f, então podemos assumir que para cada n existem subconjuntos finitos $F_n \subseteq \mathbb{R}$ e números reais $r_n > 0$ tais que $B_n = B(f; F_n; r_n)$ (certo?)*. Posto que $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ é, no máximo, enumerável, existe $p \in \mathbb{R}\setminus M$, de modo que $B := B(f; \{p\}; 1)$ é um $\mathcal{T}$-aberto em torno de f que não contém nenhum dos B_n's previamente fixados: $g := f\cdot\chi_{F_n} + (f(p)+1)\cdot\chi_{\mathbb{R}\setminus F_n}$ é tal que $g \in B_n$ mas $|g(p) - f(p)| = 1$, i.e., $g \notin B$. ▲

§3 Bases “globais” e o segundo axioma de enumerabilidade

O próximo passo é bastante natural, afinal, o que vem depois do primeiro? Ora, o segundo!

Definição 2.1.71. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ uma família de $\mathcal{T}$-abertos. Diremos que $\mathcal{B}$ é **base**† para a topologia $\mathcal{T}$ (ou para o espaço X) se para todo ponto $p \in X$ e todo $\mathcal{T}$-aberto $U \subseteq X$ em torno de p existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ com $B \subseteq U$. Em tais situações, costuma-se dizer que os membros de $\mathcal{B}$ são **abertos básicos** da topologia. ¶

Exercício 2.1.36 ($^\star_\star$)**.** Mostre que $\mathcal{B}$ é base para a topologia $\mathcal{T}$ sse para todo $\mathcal{T}$-aberto $U \subseteq X$ existir $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_U} B$. ■

Bases *globalizam* o que bases locais fazem em torno de pontos. Consequentemente ($\star$):

- *se $\mathcal{B}$ é base para o espaço X, então $\mathcal{B}_p := \{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$ é base local em p, para cada p;*
- *se $\mathcal{C}_p$ é base local em p para cada $p \in X$, então $\mathcal{C} := \bigcup_{p\in X} \mathcal{C}_p$ é base para X.*

Observação 2.1.72. Cuidado para não se confundir acima: como cada $\mathcal{C}_p$ é uma coleção de subconjuntos de X, $\bigcup_{p\in X} \mathcal{C}_p$ ainda é uma coleção de subconjuntos de X: ora, se $A \in \bigcup_{p\in X} \mathcal{C}_p$, então existe $p \in X$ tal que $A \in \mathcal{C}_p$ e, portanto, A é um subconjunto de X. Se esse tipo de coisa for um problema para você, procure textos básicos sobre linguagem elementar de conjuntos e revise por conta própria. △

Exemplo 2.1.73. A coleção de *todas* as bolas abertas de um espaço métrico constitui uma base para a topologia induzida pela métrica. Mas diferente do que ocorreu no Exemplo 2.1.61, já não parece óbvio que todo espaço métrico admita bases enumeráveis: o melhor que podemos fazer é definir $\mathcal{B} := \left\{B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X \text{ e } n \in \mathbb{N}\right\}$, que é uma base (certo?)*, mas nada garante que $\mathcal{B}$ seja enumerável, pois x varia em X. De qualquer forma, é sempre bom quando algo falso não parece obviamente verdadeiro. ▲

Definição 2.1.74. Costuma-se dizer que um espaço topológico satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade** (ou, para pessoas apressadas, é **2º-contável**)‡ se sua topologia admite uma base enumerável. ¶

Teorema 2.1.75. *Todo espaço 2º-contável é separável. A recíproca é verdadeira para espaços metrizáveis.*

†No conforto da sala de aula, eu costumo chamá-las de *bases globais* (em contraponto às bases locais).

‡Ou ainda, para pessoas modernas, tem *peso enumerável*.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base para X e, para cada $B \in \mathcal{B}$ não vazio *escolha* $d_B \in B$. Por construção, $D := \{d_B : B \in \mathcal{B}\}$ é um subconjunto denso de X, afinal, para quaisquer $x \in X$ e aberto $V \subseteq X$ em torno de x, existe $B \in \mathcal{B}$ com $x \in B \subseteq V$, acarretando $d_B \in V \cap B$ e, por conseguinte, $x \in \overline{D}$. Como $|D| \leq |\mathcal{B}|$, segue que D é enumerável se $\mathcal{B}$ for enumerável, i.e., X é separável sempre que for $2^{\underline{o}}$-contável.

Agora, supondo X metrizável com um denso enumerável E, podemos definir

$$\mathcal{B}_e := \left\{ B_d\left(e, \frac{1}{2^n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

para cada $e \in E$, onde d é uma métrica que induz a topologia de X. Como cada $\mathcal{B}_e$ também é enumerável, tudo se resume a mostrar que a família enumerável[†] $\mathcal{B} := \bigcup_{e \in E} \mathcal{B}_e$ é base para a topologia de X. Ora, dado um aberto U de X e um ponto $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ com $B_d\left(x, \frac{1}{2^N}\right) \subseteq U$ (certo?)*. Em particular, como $B_d\left(x, \frac{1}{2^{N+1}}\right) \neq \emptyset$, existe $e \in E$ com $e \in B_d\left(x, \frac{1}{2^{N+1}}\right)$. Para encerrar, basta notar (note!)* que

$$x \in B_d\left(e, \frac{1}{2^{N+1}}\right) \subseteq U. \qquad \square$$

Um olhar (des) atento sugere que a métrica não foi importante: bastaria que X fosse $1^{\underline{o}}$-contável e separável a fim de garantir a existência de uma base enumerável... O que posso dizer?

Exemplo 2.1.76 (Cuidado com a "intuição")**.** Vamos mostrar que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ (cf. Exemplo 2.1.66) não admite base enumerável. Fixada uma base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}_S$, para cada $x \in \mathbb{R}_S$ deve existir um aberto $B_x \in \mathcal{B}$ com $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$, o que define uma função

$$\begin{aligned} B \colon \mathbb{R} &\to \mathcal{B} \\ x &\mapsto B_x \end{aligned}.$$

Acontece que B é injetora (por quê?)* e, consequentemente, $\mathcal{B}$ é não enumerável[‡]. Por outro lado, já sabemos que $\mathbb{R}_S$ é $1^{\underline{o}}$-contável e, como todo intervalo da forma $[a, b)$ contém um número racional, $\mathbb{R}_S$ também é separável. Portanto, a topologia de Sorgenfrey não é metrizável — e, mais ainda, a combinação "$1^{\underline{o}}$-contável + separável" não é capaz de assegurar, sozinha, a existência de bases enumeráveis. ▲

Exemplo 2.1.77 (Espaços métricos não separáveis)**.** O vício por espaços euclidianos nos leva a crer, por um momento, que todo espaço métrico é separável (já que $\mathbb{R}^n$ com sua topologia usual é sempre separável/$2^{\underline{o}}$-contável), o que faz a tarefa de encontrar espaços métricos não separáveis parecer mais difícil do que realmente é. Há um exemplo muito simples: espaços discretos não enumeráveis!

Exercício 2.1.37 ($^\star_\star$)**.** Mostre que se $\mathcal{B}$ é base para a topologia de um espaço X, então

$$\{\{x\} : x \in X \text{ e } \{x\} \text{ é aberto em } X\} \subseteq \mathcal{B}.$$

Conclua que um espaço discreto é $2^{\underline{o}}$-contável sse (é separável sse) é enumerável. ■

[†]... se não, $\mathbb{R}$ seria reunião enumerável de conjuntos finitos...
[‡]... se fosse, teríamos injeção $\mathcal{B} \to \mathbb{N}$ e daí existiria injeção $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$, absurdo...

Definição 2.1.78. Xingam-se de **isolados** os pontos do espaço como no exercício anterior, i.e., $x \in X$ é **isolado** (em X) se $\{x\}$ é aberto em X. ¶

Com a terminologia acima, uma das consequências do exercício anterior é o

Corolário 2.1.79. *Se X é 2º-contável, então X tem, no máximo, enumeráveis pontos isolados. Consequentemente, se $Y \subseteq X$ é não enumerável, então Y não é discreto com a topologia de subespaço.*

Demonstração. A primeira parte é o exercício anterior. Para a segunda parte, note que se $\mathcal{B}$ é base para X, então $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é base para a topologia de subespaço de Y (concorda?)*. Logo, se X é 2º-contável, então Y também é (certo?)*, donde o restante segue pela primeira parte (por quê?)$^{\star}_{\star}$. □

O último corolário pode ser usado para obter exemplos menos tediosos de espaços metrizáveis e não separáveis/2º-contáveis. Fazendo $X := [0,1]$ no Exemplo 1.2.8, o subconjunto não enumerável $\mathcal{D} := \left\{\chi_{[0,a]} : 0 < a < 1\right\}$ se revela um subespaço discreto de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}[0,1]$. De fato, para $a \in (0,1)$ qualquer,

$$B_{\|\cdot\|_\infty}\left(\chi_{[0,a]}, 1\right) \cap \mathcal{D} = \left\{\chi_{[0,a]}\right\},$$

pois, se $b \in (0,1)$ com $b \neq a$, então existe $x \in [0,1]$ tal que $\left|\chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[0,b]}(x)\right| = 1$, acarretando $\|\chi_{[0,a]} - \chi_{[0,b]}\|_\infty = 1$, i.e., $\chi_{[0,b]} \notin B_{\|\cdot\|_\infty}\left(\chi_{[0,a]}, 1\right)$. Portanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}[0,1]$ não é 2º-contável e, por ser metrizável, também não pode ser separável. ▲

Exercício 2.1.38 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Você percebeu que bastaria escolher X infinito? ■

Feitas essas considerações iniciais, convém retornar ao problema prático de determinar quando uma família de subconjuntos *serve* para ser base de alguma topologia. Quer uma boa notícia?

Exercício 2.1.39 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Sejam X um conjunto, $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X e $\mathcal{T}$ uma topologia em X.

a) Mostre que se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ é base para $\mathcal{T}$, então

(i) para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, e

(ii) para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$ e $x \in A \cap B$, existe $C \in \mathcal{B}$ com $x \in C$ e $C \subseteq A \cap B$.

b) Mostre que se $\mathcal{B}$ satisfaz as condições (i) e (ii) acima, então

$$\mathcal{S} := \{O \subseteq X : \text{ para todo } x \in O \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \text{ e } B \subseteq O\}$$

é a única topologia em X que tem $\mathcal{B}$ como base. ■

O exercício anterior *não* altera a definição de base para uma topologia conhecida: ainda vale que se $(X, \mathcal{T})$ é espaço topológico, então $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ é base sse todo $\mathcal{T}$-aberto de X se escreve como reunião de membros de $\mathcal{B}$ (cf. Exercício 2.1.36)[†]. O que se discute acima é mais sutil: dado um *conjunto* Z e uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de Z, existe *alguma* topologia $\mathcal{S}$ sobre Z que tenha $\mathcal{G}$ como base?

[†]Portanto, quando quiser verificar se $\mathcal{B}$ é base de $(X, \mathcal{T})$, você usará a Definição 2.1.71 ou o Exercício 2.1.36 para decidir — e não as condições (i) e (ii) do Exercício 2.1.39!

A próxima subsubseção apresenta a *topologia produto* como ilustração de como usar famílias de conjuntos satisfazendo as condições (i) e (ii) acima na definição de topologias — e diremos que elas são **geradas** por tais famílias *como bases*. Porém, antes disso, é importante lidar com a situação em que a vida não nos dá uma família em tais condições.

Problema: dado um conjunto Z e uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de Z, existe *alguma* topologia sobre Z segundo a qual todos os membros de $\mathcal{G}$ são abertos?

Resposta: obviamente sim, já que a topologia discreta em Z declara todos os subconjuntos de Z como abertos.

A resposta acima foi decepcionante pois o problema não foi bem formulado. Mas isto é corrigível.

Exercício 2.1.40 ($\star$)**.** Mostre que se $\mathcal{S}$ é uma topologia em Z segundo a qual todos os membros de $\mathcal{G}$ são $\mathcal{S}$-abertos, então qualquer topologia $\mathcal{T}$ em Z com $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ também torna $\mathcal{T}$-abertos todos os membros de $\mathcal{G}$. ■

O exercício acima ajuda a entender o que faz da topologia discreta uma resposta tão sem graça para o problema: por um lado, se alguma topologia resolve o problema, então toda topologia *mais forte* do que ela também resolve (cf. Definição 2.1.38); por outro lado, a topologia discreta já é a maior topologia possível num conjunto.

Reformulação do problema: qual é a *menor* topologia em Z que torna os membros de $\mathcal{G}$ abertos? Ela existe?

Proposição 2.1.80. *A resposta para a pergunta anterior é sim.*

Demonstração. Considere $\mathfrak{F} := \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \text{ é topologia em } Z \text{ tal que } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}\}$. Como a topologia discreta em Z pertence a $\mathfrak{F}$, podemos aplicar o Exercício 1.1.17, segundo o qual

$$\mathfrak{T}(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathfrak{F}} \mathcal{T}$$

é uma topologia em Z. Como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$ para toda $\mathcal{T} \in \mathfrak{F}$, resulta $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}(\mathcal{G})$. O restante segue por construção (percebeu?)*. □

Assim como nas situações algébricas em que esse tipo de "construção" é empregado de forma análoga, diremos que a topologia $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ é **gerada** pela família $\mathcal{G}$, enquanto os membros de $\mathcal{G}$ serão ocasionalmente chamados de *abertos geradores*. Embora possa parecer inédito no texto, esse método unifica tudo o que foi feito ao longo desta subsubseção[†] — a escolha por apresentá-lo apenas no final foi meramente *estético-pedagógica*. Além de ser útil em casos em que não dispomos de uma família bem comportada para definir uma topologia (nos moldes do Exercício 2.1.39 (b) ou do Teorema 2.1.64), conhecer geradores de uma topologia tem algumas vantagens.

Proposição 2.1.81. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função. Se a topologia de Y é gerada por $\mathcal{G}$ e $f^{-1}[G]$ é aberto em X para todo $G \in \mathcal{G}$, então f é contínua.*

[†]De fato, se $\mathcal{B}$ é base de um espaço $(X, \mathcal{T})$, então $\mathcal{T} = \mathfrak{T}(\mathcal{B})$, i.e., $\mathcal{T}$ é, necessariamente, a menor topologia a conter $\mathcal{B}$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$. Em particular, se $\mathcal{C}_p$ é uma base local para cada p num espaço topológico $(Y, \mathcal{S})$, então $\mathcal{C} := \bigcup_{p \in Y} \mathcal{C}_p$ é uma base para o espaço e, portanto, $\mathcal{C}$ gera $\mathcal{S}$, i.e., $\mathfrak{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{S}$.

Demonstração. Defina $\mathcal{S} := \{O \subseteq Y : f^{-1}[O] \text{ é aberto em } X\}$ e note ($\star$) que se trata de uma (outra) topologia em Y. Pela hipótese acerca de f e $\mathcal{G}$ temos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ e, como a topologia nativa de Y é, por hipótese, a menor a conter $\mathcal{G}$, resulta que todo aberto nativo de Y pertence a $\mathcal{S}$, i.e., $f^{-1}[U]$ é aberto em X sempre que $U \subseteq Y$ é aberto em Y. □

Alternativamente, pode-se mostrar (e você fará isso, certo?)$^{\star}_{\star}$ que a topologia num conjunto Z gerada por uma família $\mathcal{H}$ de subconjuntos de Z tem por base a coleção

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \{Z\} \cup \left\{ S : \text{ existe subconjunto finito } \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H} \text{ tal que } S = \bigcap_{H \in \mathcal{H}'} H \right\}, \tag{2.7}$$

o que permite apresentar uma prova menos “esotérica” para a última proposição (só faça isso se quiser muito)$^{\star}_{\star}$. Em particular, nas situações em que $\bigcup_{H\in\mathcal{H}} H = Z$, é comum dizer que $\mathcal{H}$ é **sub-base** da topologia $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Neste caso, note que basta tomar $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como a coleção formada pelas interseções finitas de membros de $\mathcal{H}$.

Exercício 2.1.41 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que os intervalos fundamentais de uma ordem costituem uma sub-base para a topologia usual de uma ordem (cf. Definições 1.2.17 e 1.2.22). ■

§4 Topologias fracas e produtos

Se você já estudou um pouco de Análise Funcional, talvez imagine que o título desta subsubseção se refira a algo *intrínseco* dessa área. Ocorre justamente o contrário: as *topologias fracas* em Análise Funcional são *mero* caso particular de uma construção típica da Topologia Geral. É isso o que será discutido aqui[†].

Problema: fixados um conjunto X, uma coleção de índices $\mathcal{I}$ e uma $\mathcal{I}$-upla de espaços topológicos $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\mathcal{I}}$ juntamente com uma $\mathcal{I}$-upla de funções $(f_i : X \to X_i)_{i\in\mathcal{I}}$, existe uma topologia em X que torne contínuas *cada uma* funções $f_i : X \to X_i$?

Assim como na subsubseção anterior, esse problema admite uma resposta trivial: a topologia discreta em X, uma vez que qualquer função entre espaços topológicos com domínio discreto é, automaticamente, contínua. Essa resposta também é desinteressante pois o mesmo fenômeno do Exercício 2.1.40 se repete aqui: se uma topologia $\mathcal{S}$ em X torna todas as f_i's contínuas, então qualquer topologia $\mathcal{T}$ em X com $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ também torna as f_i's contínuas (percebeu?)*. Por “indução”, procederemos com o mesmo tipo de reformulação.

Reformulação do problema: qual é a *menor* topologia em X que torna contínuas cada uma das funções $f_i : X \to X_i$? Ela existe?

Proposição 2.1.82. *A resposta para a pergunta anterior é sim.*

Demonstração. A fim de que $f_i : X \to X_i$ seja contínua, cada um dos subconjuntos $f_i^{-1}[U]$ deve ser aberto em X, para qualquer subconjunto $U \subseteq X_i$ aberto em X_i. Como se espera que isto ocorra para todo i, basta considerar $\mathcal{G} := \left\{ f_i^{-1}[U] : i \in \mathcal{I} \text{ e } U \in \mathcal{T}_i \right\}$ e definir $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$, i.e., a topologia em X gerada por $\mathcal{G}$. Por valer $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}(\mathcal{G})$, segue que $f_i : (X, \mathfrak{T}(\mathcal{G})) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ é contínua para todo i e, por $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ ser a menor topologia contendo $\mathcal{G}$, segue que qualquer outra topologia tornando todas as f_i's contínuas também deve conter $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ (entendeu?)*. □

[†]Mas não se preocupe: na Subseção 2.2.6 veremos como topologias fracas podem ser usadas em Análise Funcional.

Definição 2.1.83. Dizemos que a topologia $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ da demonstração acima é a **topologia fraca** (ou **inicial**)† induzida pelas funções $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Quando for benéfico denotá-la por alguma notação simbólica, isto será feito com $\mathfrak{T}\,(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$, $\mathfrak{T}_{\mathcal{I}}$, etc. ¶

Antes de ilustrar os casos particulares mais comuns de topologias fracas, convém destacar uma consequência muito útil desse tipo de construção.

Corolário 2.1.84 (da Proposição 2.1.81)**.** *Sob as condições, anteriores, para um espaço topológico Z e uma função $g\colon Z\to X$, são equivalentes:*

(i) *$g\colon Z\to X$ é contínua, onde X é munido da topologia fraca $\mathfrak{T}\,(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$;*

(ii) *$f_i\circ g\colon Z\to X_i$ é contínua para cada $i\in\mathcal{I}$.*

Demonstração. Como a topologia fraca em X torna cada f_i contínua, (i) $\Rightarrow$ (ii) segue pois composição de funções contínuas é contínua. Para a recíproca, note que se $f_i\circ g$ é contínua para todo $i\in\mathcal{I}$, então

$$(f_i\circ g)^{-1}[U]=g^{-1}\left[f_i^{-1}[U]\right]$$

é aberto em Z para qualquer subconjunto $U\subseteq X_i$ aberto em X_i (viu?)*. Por $i\in\mathcal{I}$ ter sido tomado arbitrariamente, mostramos, na verdade, que g *torna abertas as* pré-imagens dos geradores da topologia de X. Logo, pela Proposição 2.1.81, g é contínua. □

Exemplo 2.1.85 (Subespaços revisitados)**.** A topologia de subespaço é um exemplo típico de topologia inicial. Neste caso, o conjunto de índices tem apenas um índice e a única função considerada é a inclusão $i\colon Y\to X$, onde X é um espaço topológico e $Y\subseteq X$ é um subconjunto ainda sem topologia.

Daí, a topologia fraca em Y induzida pela inclusão $i\colon Y\to X$ é, por definição, a menor topologia em Y que torna a inclusão contínua. Pela demonstração da Proposição 2.1.82, sabemos que tal topologia é gerada pelos subconjuntos da forma $i^{-1}[U]$ com $U\subseteq X$ aberto em X. Em outras palavras: reobtemos a topologia $\mathcal{T}_Y$ introduzida na distante Proposição 2.1.43. Nesse contexto, observe que o corolário anterior se traduz *literalmente* no Exercício 2.1.20. ▲

Exemplo 2.1.86 (Convergência na topologia fraca‡)**.** Convém observar que o último corolário caracteriza quais redes e filtros em X convergem com respeito à topologia fraca. Primeiro, a um conjunto dirigido $\mathbb{D}$ associamos o espaço topológico $\mathbb{D}^{\#}:=\mathbb{D}\cup\{\#\}$, onde $\#$ é um objeto tal que $\#\notin\mathbb{D}$, com a topologia gerada pela upla $(\mathcal{B}_e)_{e\in\mathbb{D}^{\#}}$ de bases locais, onde $\mathcal{B}_d:=\{\{d\}\}$ se $d\in\mathbb{D}$ e $\mathcal{B}_{\#}:=\left\{D^{\uparrow}\cup\{\#\}:D\in\mathbb{D}\right\}$. Explicitamente, um subconjunto $A\subseteq\mathbb{D}^{\#}$ é aberto segundo tal topologia sse†† $\#\notin A$ ou existe $D\in\mathbb{D}$ tal que $d\in A$ para todo $d\succeq D$.

Exercício 2.1.42 ($^\star_\star$)**.** Seja $\mathbb{D}$ como acima e considere X um espaço topológico. Mostre que uma rede $\varphi\colon\mathbb{D}\to X$ converge para um ponto $p\in X$ sse a função $\varphi^{\#}\colon\mathbb{D}^{\#}\to X$ é contínua (em $\#$), onde

$$\varphi^{\#}(e):=\begin{cases}\varphi(e), & \text{se } e\in\mathbb{D}\\ p, & \text{se } e=\#\end{cases}.$$ ■

†Ela está no "início" das *setas*.

‡Dado que continuidade também se descreve via convergência, é de se esperar que topologias fracas possam ser refraseadas em termos de *convergências fracas*. Isto será feito oportunamente, não se preocupe.

††E você pode provar isso diretamente ($\star$) ou notar que a tese da condição (ii) na Proposição 2.1.63 é satisfeita ($^\star_\star$).

Por outro lado, ao fazer $Z = \mathbb{D}^{\#}$ e $g = \varphi^{\#}$ no último corolário, resulta que $\varphi^{\#}$ é contínua sse $f_i \circ \varphi^{\#}$ é contínua para todo $i \in \mathcal{I}$. Portanto, em vista do exercício anterior, conclui-se que *$\varphi \to p$ em X com respeito à topologia fraca sse $f_i \circ \varphi \to f_i(p)$ em X_i*. O caso de filtros será problema seu. ▲

Exercício 2.1.43 $\left(\substack{\star\\ \star}\right)$**.** Mostre que um filtro próprio $\mathcal{G}$ em X converge para $p \in X$ com respeito à topologia fraca sse $f_i(\mathcal{G}) \to f_i(p)$ em X_i para cada $i \in \mathcal{I}$. ■

Talvez um dos casos mais importantes de topologia fraca seja o da *topologia produto*, na qual a caracterização de convergência do exemplo anterior assume a forma emblemática da *convergência pontual*.

Definição 2.1.87. Dados um conjunto de índices $\mathcal{I}$ e uma $\mathcal{I}$-upla $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i\in\mathcal{I}}$ de espaços topológicos, chamamos de **topologia produto** em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ à topologia fraca induzida pela $\mathcal{I}$-upla de funções $(\pi_j)_{j\in\mathcal{I}}$, onde

$$\pi_j \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$$

é a *projeção na j-ésima coordenada*, i.e., a função dada por $\pi_j((x_i)_{i\in\mathcal{I}}) := x_j$. A menos de menção explícita em contrário, produtos de espaços topológicos sempre serão munidos da topologia produto[†]. ¶

Assim, pela definição de topologia fraca, a topologia produto em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é a topologia mais fraca a tornar todas as projeções contínuas. Explicitamente, a descrição sugerida em (2.7) (pág. 79) indica que *ela* tem como *abertos básicos* as interseções finitas de subconjuntos da forma $\pi_i^{-1}[U]$, onde $i \in \mathcal{I}$ e $U \subseteq X_i$ é aberto em X_i (certo?)*. Em outras palavras, uma base para a topologia produto é composta por subconjuntos da forma $B = \prod_{i\in\mathcal{I}} B_i$, onde cada $B_i \subseteq X_i$ é aberto em X_i, com a restrição de que o **suporte** de B é *finito*, onde se entende por suporte o conjunto de índices[‡]

$$\operatorname{supp}\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} B_i\right) := \{i \in \mathcal{I} : B_i \neq X_i\}\,. \tag{2.8}$$

De fato, para um subconjunto finito $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, se $U_j \subseteq X_j$ é aberto em X_j para cada $j \in \mathcal{J}$, então

$$A := \bigcap_{j\in\mathcal{J}} \pi_j^{-1}[U_j] = \prod_{i\in\mathcal{I}} V_i,$$

onde

$$V_i := \begin{cases} X_i, & \text{se } i \notin \mathcal{J} \\ U_i, & \text{se } i \in \mathcal{J} \end{cases}, \qquad \text{(certo?)}^\star$$

mostrando que A é produto de abertos cujo suporte está contido no conjunto finito $\mathcal{J}$.

Reciprocamente, se $W = \prod_{i\in\mathcal{I}} W_i$ é um produto de abertos cujo suporte é um conjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$, então

$$W = \prod_{i\in\mathcal{I}} W_i = \bigcap_{j\in\mathcal{F}} \pi_j^{-1}[W_j].$$

[†]Se precisar revisar produtos e *uplas*, confira a Subseção 2.2.1. Faça isso o quanto antes, pois em breve enfrentaremos o Teorema de Tychonoff.

[‡]De modo geral, o *suporte* de um objeto (função, produto cartesiano, etc.) é, essencialmente, um conjunto de índices relacionados ao objeto em que não se assumem valores triviais em algum sentido.

Observação 2.1.88 (Importante)**.** Pelo que se discutiu no exemplo anterior, uma rede φ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ converge para uma $\mathcal{I}$-upla $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ sse para cada $i \in \mathcal{I}$, a rede $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi$ converge para o ponto x_i no espaço X_i. Quem preferir escrever redes explicitamente indexadas deve notar que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é uma rede em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, então cada x_d é uma $\mathcal{I}$-upla, digamos $x_d := (x_d(i))_{i\in\mathcal{I}}$ com $x_d(i) \in X_i$ para cada $d \in \mathbb{D}$ e $i \in \mathcal{I}$. Sob tais notações, o que se expressou foi que $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ converge para $(p_i)_{i\in\mathcal{I}}$ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ sse $(x_d(i))_{d\in\mathbb{D}} \to p_i$ em X_i para cada $i \in \mathcal{I}$. Os próximos casos particulares devem ajudar a entender a ideia. $\triangle$

Exemplo 2.1.89 (Produtos finitos)**.** Em textos mais *pacientes*, costuma-se introduzir primeiro a topologia produto para o caso de *dois* espaços topológicos, digamos X e Y, e só depois se discutem os produtos finitos arbitrários[†]. A ideia é considerar a coleção dos *retângulos abertos* da forma $A \times B$, com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ abertos em seus respectivos espaços, a fim de declarar $O \subseteq X \times Y$ aberto sse para todo $(a, b) \in O$ existir um retângulo aberto $A \times B$ com $(a, b) \in A \times B \subseteq O$. Em outras palavras: os retângulos abertos geram a topologia produto como uma base[‡].

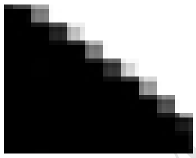


Figura 2.2: A televisão nos ensina a topologia produto, desde sempre.

Assim, é claro que a topologia descrita acima é a topologia produto. Se duvida, basta observar que um retângulo aberto $A\times B$ é uma interseção finita de pré-imagens de abertos pelas projeções[††]:

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_X^{-1}[A] \cap \pi_Y^{-1}[B] \quad (\text{certo?})^\star.$$

De modo geral, para qualquer número finito de espaços topológicos, a topologia produto no produto cartesiano desses espaços tem por abertos básicos, justamente, os produtos cartesianos de abertos tomados nos respectivos espaços — e sem restrições sobre o suporte, já que em tais situações, o conjunto de índices é finito! Nesse contexto, a particularização do Corolário 2.1.84 costuma ser enunciada da seguinte forma (que justifica, *categoricamente*, a terminologia atribuída à topologia produto)[‡‡]:

Teorema 2.1.90 (Propriedade universal da topologia produto)**.** *Dadas funções contínuas $f\colon Z \to X$ e $g\colon Z \to Y$, existe uma única função contínua $(f, g) : Z \to X \times Y$ tal que $\pi_X \circ (f, g) = f$ e $\pi_Y \circ (f, g) = g$.*

Demonstração. Conjuntisticamente, a função $(f, g) : Z \to X \times Y$ *só pode ser*[†‡] dada por $(f, g)(z) = (f(z), g(z))$, afinal, $\pi_X((f, g)(z)) = f(z)$ e $\pi_Y((f, g)(z)) = g(z)$ por hipótese. Restaria a continuidade, mas isto segue do Corolário 2.1.84 (percebeu?)*. $\square$

[†]Textos introdutórios tendem a evitar produtos arbitrários — e os mais ousados fazem $\mathcal{I} := \mathbb{N}$.

[‡]Afinal de contas, a coleção dos retângulos abertos satisfaz as condições (i) e (ii) do Exercício 2.1.39 (percebeu?)*.

[††]Se *precisar* "visualizar" de maneira geométrica, perceba que um "quadrado" em $\mathbb{R}^2$ pode ser obtido como a interseção de duas "faixas retangulares" infinitas. Como não é da minha índole colaborar com os vícios de outras pessoas, você deverá fazer o desenho por conta própria.

[‡‡]Caso precise revisar propriedades universais sob a perspectiva categórica, confira a Subseção 2.2.2.

[†‡]Unicidade é isso...

Em particular, uma rede $(x_\alpha, y_\alpha)_\alpha$ em $X \times Y$ converge para um ponto (x, y) na topologia produto sse $(x_\alpha)_\alpha \to x$ em X e $(y_\alpha)_\alpha \to y$ em Y, exatamente como você aprendeu em Cálculo n, para $n \geq 2$. ▲

O teorema anterior também tem uma versão para produtos infinitos que justifica o título de "topologia produto" de um ponto de vista categórico: *para uma $\mathcal{I}$-upla de funções contínuas $(f_i : Z \to X_i)_{i \in \mathcal{I}}$, existe uma única função contínua da forma $Z \to \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, geralmente denotada por $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$, tal que $\pi_j \circ (f_i)_{i \in \mathcal{I}} = f_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$.* Em virtude da similaridade da prova, ela será deixada para você ($\star\atop\star$).

Para pessoas que não se deixam influenciar por Teoria de Categorias, o mero fato de $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ ter uma propriedade universal pode não ser apelo suficiente para lidar com uma topologia cujos abertos básicos são tão *estranhos*. Afinal, num primeiro momento, parece muito mais natural utilizar como abertos básicos os subconjuntos da forma $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i$, com $A_i \subseteq X_i$ aberto para todo $i \in \mathcal{I}$, sem restrições sobre suportes. O exercício a seguir deve te ajudar a tirar suas próprias conclusões.

Exercício 2.1.44 ($\star\atop\star$)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $X_n := \mathbb{R}$ e, sobre $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, considere a topologia que tem por abertos básicos os subconjuntos da forma $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$, com $A_n \subseteq \mathbb{R}$ aberto em $\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

a) Convença-se que isto define, de fato, uma topologia em X.

b) Mostre que a função $\varphi : \mathbb{R} \to X$, dada por $\varphi(r) := (r)_{n \in \mathbb{N}}$, é tal que $\pi_n \circ \varphi$ é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Mostre que φ não é contínua. Dica: $\varphi^{-1}\left[\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n\right] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ para qualquer sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$. ■

Moral da história: a preguiça nem sempre é uma boa bússola para a intuição. No caso, ao permitir que produtos quaisquer de abertos sejam abertos (algo desejável por envolver uma descrição mais simples), obtemos como resultado uma topologia *grande demais* (algo indesejado pois, com mais abertos, fica *mais difícil* convergir).

Exercício 2.1.45 ($\star\atop\star$)**.** Para $n \in \mathbb{N}$, mostre que a topologia produto de $\mathbb{R}^n$ é a topologia induzida pela norma do máximo. Dica: se não quiser apelar para retângulos, combine o Corolário 2.1.41 com a Observação 2.1.88. ■

Exemplo 2.1.91 (Funções e convergência pontual)**.** Além de atormentar quem ~~ignora~~ se esquece da condição de suporte finito em produtos infinitos de espaços topológicos, o último exercício também indica como espaços de funções podem ser encarados como produtos, processo em que a topologia produto revela um modo sistemático de generalizar a convergência pontual introduzida na demonstração da Proposição 1.1.30.

De fato, se $X_i = Y$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então uma $\mathcal{I}$-upla $(y_i)_{i \in \mathcal{I}}$ é, *tradicionalmente*, a função $y_\bullet : \mathcal{I} \to \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ dada pela correspondência $i \mapsto y_i$. Contudo, em virtude da identidade óbvia $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i = Y$, segue que as $\mathcal{I}$-uplas de $\prod_{i \in \mathcal{I}} Y$ são, precisamente, as funções do tipo $\mathcal{I} \to Y$. Em símbolos, temos a igualdade

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} Y_i = \operatorname{Fun}(\mathcal{I}, Y), \tag{2.9}$$

que embora trivial para quem adota as implementações usuais da Teoria dos Conjuntos, pode ser chocante para pessoas *alérgicas* aos formalismos conjuntistas.

Assim, a depender do seu gosto, você pode encarar (2.9) tanto como uma obviedade quanto como um abuso de notação. De qualquer forma, a prometida convergência pontual se revela um mero subcaso da convergência oriunda da topologia produto. ▲

Definição 2.1.92. Para um conjunto X qualquer e um espaço topológico Y, a notação $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, Y)$ indica o conjunto $\mathrm{Fun}(X, Y)$ munido da topologia produto (... ao identificarmos $\mathrm{Fun}(X, Y) = \prod_{x \in X} Y$). Se, adicionalmente, X também for um espaço topológico, então $\mathrm{C}_{\mathrm{p}}(X, Y)$ indica o conjunto $\mathrm{C}(X, Y)$, formado pelas funções contínuas do tipo $X \to Y$, com a topologia de subespaço herdada de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, Y)$. ¶

Teorema 2.1.93. *Sejam X um conjunto, Y um espaço topológico e $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ uma rede em* $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, Y)$*. Para $f \colon X \to Y$ qualquer, são equivalentes:*

(i) $(f_d)_{d\in\mathbb{D}} \to f$ *em* $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, Y)$*;*

(ii) $(f_d)_{d\in\mathbb{D}} \to_{\mathrm{p}} f$*, i.e.,* $(f_d(x))_{d\in\mathbb{D}} \to f(x)$ *em Y para cada $x \in X$ (caso em que se diz que $(f_d)_d$* ***converge pontualmente para*** *f).*

Demonstração. Primeiro, note que da *identificação*

$$\mathrm{Fun}(X, Y) = \prod_{x \in X} Y,$$

a projeção $\pi_x \colon \mathrm{Fun}(X, Y) \to Y$ é apenas a *função avaliação* em x, i.e., $\pi_x(f) = f(x)$ para cada $f \in \mathrm{Fun}(X, Y)$ (percebeu?)[†]. Feito isso, a equivalência desejada segue do que se discutiu no Exemplo 2.1.86 ao trocar $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ por $(\pi_x)_{x\in X}$. Detalhes adicionais ficam por sua conta ($\star$). □

O teorema acima é a razão pela qual a topologia produto também responde pela alcunha de **topologia da convergência pontual**. Ela não será a única topologia a ser considerada sobre $\mathrm{Fun}(X, Y)$ ou $\mathrm{C}(X, Y)$, mas ainda é cedo para discutir outras. Por ora, será mais conveniente espiar pelo buraco da fechadura.

§5 Exercícios adicionais

Exercício 2.1.46 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja $f \colon X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Mostre que f é contínua sse:

a) ... $f\left[\overline{S}\right] \subseteq \overline{f[S]}$ para todo subconjunto $S \subseteq X$;

b) ... $f^{-1}[G] \subseteq X$ é fechado em X sempre que $G \subseteq Y$ é fechado em Y;

c) ... $f^{-1}[\mathrm{int}(T)] \subseteq \mathrm{int}(f^{-1}[T])$ para todo subconjunto $T \subseteq Y$;

d) ... $f^{-1}[B]$ é aberto em X sempre que $B \subseteq Y$ é um aberto de uma base $\mathcal{B}$ de Y fixada.

e) Enumere, sem repetições, as caracterizações de funções contínuas apresentadas no texto e prove, de forma direta, que todas são equivalentes[‡]. ■

[†]Uma resposta negativa de sua parte é forte indicativo de que você deveria conferir a Subseção 2.2.1.

[‡]Por exemplo, se tivéssemos apenas três caracterizações (I), (II) e (III), a ideia é que se provem (I) ⇒ (II), (II) ⇒ (III) e (III) ⇒ (I) (ou suas contrapositivas).

Exercício 2.1.47 $(^{\star}_{\star})$**.** Ao longo deste exercício, você deve tratar $\overline{S}$ como o menor fechado que contém S e $\operatorname{int}(S)$ como o maior aberto contido em S. Em outras palavras: redes, filtros e pontos aderentes estão proibidos.

a) Mostre que a correspondência $S \mapsto \overline{S}$ tem as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) enunciadas na Observação 2.1.57. Em particular, $\overline{S} \subseteq \overline{T}$ sempre que $S \subseteq T$.

b) Mostre que $\operatorname{int}(S) = X \setminus \overline{X \setminus S}$ para qualquer $S \subseteq X$.

c) Use o item anterior para dualizar as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) do item (a) para a correspondência $S \mapsto \operatorname{int}(S)$. ■

Exercício 2.1.48 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico com subconjuntos $S \subseteq Y \subseteq X$.

a) Mostre que $\operatorname{cl}_{\mathcal{T}_Y}(S) = Y \cap \operatorname{cl}_{\mathcal{T}}(S)$, i.e., o fecho do subconjunto S como subespaço de Y é a interseção entre o fecho de S como subespaço de X e o subespaço Y.

b) Mostre que S é fechado em Y sse existe $F \subseteq X$ fechado em X tal que $S = F \cap Y$.

c) Mostre que se Y é fechado em X, então S é fechado em Y sse S é fechado em X.

d) Mostre que se Y é aberto em X, então S é aberto em Y sse S é aberto em X.

e) Mostre que $\operatorname{int}_{\mathcal{T}_Y}(S) = Y \cap \operatorname{int}_{\mathcal{T}}(S \cup (X \setminus Y))$. Observação: é sério! ■

Exercício 2.1.49 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam X e Y espaços topológicos e $f \colon X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se $D \subseteq X$ é denso, então $f[D]$ é denso no subespaço $\operatorname{im}(f)$. ■

Exercício 2.1.50 ("denso de denso é denso" $(^{\star}_{\star})$)**.** Se X é um espaço topológico e $D \subseteq X$ é denso, então qualquer subespaço denso de D é denso em X. ■

Exercício 2.1.51 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se X é espaço separável, então $|\mathrm{C}(X, \mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$. Dica: $|\operatorname{Fun}(D, \mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$ para qualquer conjunto D não vazio e enumerável. ■

Exercício 2.1.52 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam X um espaço de Hausdorff 1º-contável e $B \subseteq X$ um subconjunto tal que $|B| \leq |\mathbb{R}|$. Mostre que $\left|\overline{B}\right| \leq |\mathbb{R}|$. ■

Exercício 2.1.53 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam $\varphi := (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, +\infty)$ e X um espaço métrico. Mostre que se $\varphi \to_{\mathbb{R}} 0$, então $\mathcal{B}_p(\varphi) := \{B(p, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é base local em p, para qualquer $p \in X$. Vale a volta? ■

Exercício 2.1.54 $(\star)$**.** Mostre que espaços 2º-contáveis são 1º-contáveis. ■

Exercício 2.1.55 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se X é 1º-contável, então X é de Hausdorff sse limites de sequências convergentes em X são únicos. ■

Exercício 2.1.56 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se X é metrizável e separável, então todo subespaço Y de X também é separável. Dica: não comece com um denso enumerável de X, mas sim com uma base enumerável para X. ■

Exercício 2.1.57 $(^{\star}_{\star\star})$**.** O resultado anterior permanece válido sem a hipótese de metrizabilidade? Dica: $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é metrizável (cf. Exemplo 2.1.66). ■

Exercício 2.1.58 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias de um mesmo conjunto, com bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Quais condições $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ devem satisfazer a fim de que ocorra $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$? ■

Exercício 2.1.59 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para uma topologia $\mathcal{T}$ em X. Mostre que se $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}|$, com $\mathcal{B}$ infinita, então existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, com $|\mathcal{C}'| \leq |\mathcal{B}|$ tal que $\mathcal{C}'$ ainda é base da mesma topologia. Dica: use os abertos de $\mathcal{B}$ como fatias de um sanduíche cujo recheio são membros de $\mathcal{C}$; lembre-se de que por $\mathcal{B}$ ser infinita vale $|\mathcal{B} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{B}|$. ■

Exercício 2.1.60 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que um subconjunto S de um espaço topológico X é aberto e denso em X sse $X \setminus S$ é fechado em X e tem interior vazio. ■

Exercício 2.1.61 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $(X, \mathcal{T})$ é $2^{\underline{o}}$ contável sse existe uma família enumerável $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{T} = \mathfrak{T}(\mathcal{G})$, i.e., sse a topologia $\mathcal{T}$ é gerada por uma família enumerável de subconjuntos. Dica: a dificuldade, se existente, está na recíproca. ■

Exercício 2.1.62 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Para um conjunto não vazio de índices $\mathcal{I}$, considere um espaço topológico $(X_i, \mathcal{T}_i)$ e um subconjunto $S_i \subseteq X_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Por fim, seja $X := \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ com a topologia produto, que aqui será denotada por $\mathcal{T}$.

a) Determine $\operatorname{int}_{\mathcal{T}}\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} S_i\right)$. Dica: considere primeiro o caso em que $\mathcal{I}$ é finito.

b) Mostre que $\operatorname{cl}_{\mathcal{T}}\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} S_i\right) = \prod_{i \in \mathcal{I}} \operatorname{cl}_{\mathcal{T}_i}(S_i)$.

c) Mostre que se cada S_i é denso em X_i, então $\prod_{i \in \mathcal{I}} S_i$ é denso em X.

d) Para cada $i \in \mathcal{I}$ considere, adicionalmente, um espaço topológico Y_i e uma função contínua $f_i \colon X_i \to Y_i$. Mostre que a função

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \mathcal{I}} f_i \colon \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i &\to \prod_{i \in \mathcal{I}} Y_i \\ (x_i)_{i \in \mathcal{I}} &\mapsto (f_i(x_i))_{i \in \mathcal{I}} \end{aligned}$$

é contínua.

e) Se você tiver familiaridade com Teoria de Categorias, use o item anterior para obter um funtor $\mathrm{TOP}^{\mathcal{I}} \to \mathrm{TOP}$. ■

Exercício 2.1.63 $({}^{\star}_{\star})$**.** Seja $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ uma $\mathcal{I}$-upla de espaços topológicos com uma *propriedade topológica* $\mathcal{P}$. Mostre que $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ tem a propriedade $\mathcal{P}$ em cada um dos casos a seguir.

a) $\mathcal{P} =$ Hausdorff.

b) $\mathcal{P} = 1^{\underline{o}}$-contável com $\mathcal{I}$ enumerável.

c) $\mathcal{P} = 2^{\underline{o}}$-contável com $\mathcal{I}$ enumerável.

d) $\mathcal{P} =$ separável com $\mathcal{I}$ finito[†]. ■

Exercício 2.1.64 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Se X_i é discreto para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é discreto? ■

Exercício 2.1.65 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para um espaço topológico X e um subconjunto S, mostre que uma rede φ em S converge para $p \in S$ na topologia de subespaço que S herda de X sse $\varphi \to p$ em X. Dica: $i \circ \varphi = \varphi$. ■

Exercício 2.1.66 $(\star)$**.** Mostre que espaços enumeráveis são separáveis. ■

Exercício 2.1.67 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Em geral, se X é espaço topológico enumerável, então X é $2^{\underline{o}}$-contável ou $1^{\underline{o}}$-contável? Dica: não. ■

Exercício 2.1.68 (Transitividade das topologias fracas $({}^{\star}_{\star})$)**.** Sejam $\mathcal{I}$ um conjunto de índices e $\{\mathcal{J}_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma coleção de conjuntos de índices. Para cada $i \in \mathcal{I}$ e $j \in \mathcal{J}_i$, fixe:

[†] O resultado permanece válido para $|\mathcal{I}| \leq |\mathbb{R}|$, mas a prova é complicada demais para ser deixada como exercício.

- uma função $f_i\colon X \to Y_i$,
- um espaço topológico Z_j,
- um conjunto Y_i,
- e uma função $g_{i,j}\colon Y_i \to Z_j$.

Mostre que se cada Y_i tem a topologia fraca induzida pelas funções $\{g_{i,j} : j \in \mathcal{J}_i\}$, então as topologias fracas sobre X induzidas pelas famílias $\{g_{i,j} \circ f_i : i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}_i\}$ e $\{f_i : i \in \mathcal{I}\}$ coincidem. Dica: encare a Proposição 2.1.39 e o Exemplo 2.1.86 até que te encarem de volta. ■

Exercício 2.1.69 $(\substack{\star\\\star})$**.** Considere um conjunto X com a topologia fraca induzida por uma $\mathcal{I}$-upla de funções $(f_i\colon X \to X_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

a) Mostre que se $Y \subseteq X$, então a topologia de Y como subespaço de X é a topologia fraca induzida por $(f_i|_Y)_{i\in\mathcal{I}}$. Dica: use o exercício anterior.

b) Mostre que se a topologia de cada X_i é gerada por $\mathcal{G}_i$, então a topologia de X é gerada por $\left\{f_i^{-1}[G] : i \in \mathcal{I} \text{ e } G \in \mathcal{G}_i\right\}$. Dica: encare a Proposição 2.1.81 até que ela te encare de volta. ■

Exercício 2.1.70 $(\star)$**.** Mostre que se $X \subseteq Y \subseteq Z$ com Z espaço topológico, então a topologia de X como subespaço de Y *é* a topologia de X como subespaço de Z. ■

Exercício 2.1.71 $(\substack{\star\\\star})$**.** Seja $(Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ uma $\mathcal{I}$-upla de espaços topológicos.

a) Mostre que se $X_i \subseteq Y_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e cada X_i tem a topologia de subespaço herdada de Y_i, então a topologia produto em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ coincide com a topologia de subespaço herdada de $\prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$.

b) Mostre que se a topologia de cada Y_i é gerada por uma família $\mathcal{B}_i$ como base, então os conjuntos da forma $B = \prod_{i\in\mathcal{I}} B_i$, com $B_i \in \mathcal{B}_i$ para todo i e $\operatorname{supp}(B)$ finito, constituem uma base para a topologia produto de $\prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$. ■

Exercício 2.1.72 $(\substack{\star\\\star})$**.** Para $f\colon X \to \mathbb{K}$, $G \subseteq X$ e $r > 0$, considere

$$B(f; G; r) \coloneqq \{h \in \mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K}) : |h(x) - f(x)| < r \text{ para todo } x \in G\}$$

(cf. Proposição 1.1.30). Mostre que $\mathcal{B}_f \coloneqq \{B(f; G; r) : G \subseteq X \text{ é finito e } r > 0\}$ é base local em torno de f no espaço $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$. Dica: expresse $B(f; G; r)$ como um produto de abertos ou como uma interseção finita de pré-imagens de abertos por projeções. ■

Exercício 2.1.73 $(\substack{\star\\\star\star})$**.** Mostre que se $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$ é metrizável, então X é enumerável. ■

Exercício 2.1.74 $(\substack{\star\\\star\star})$**.** Mostre que se X_i é metrizável para todo $i \in \mathcal{I}$ e $|\mathcal{I}| = |\mathbb{N}|$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é metrizável. Em particular, conclua que a recíproca do exercício anterior é verdadeira. ■

Exercício 2.1.75 $(\substack{\star\\\star\star})$**.** Seja E um $\mathbb{K}$-espaço normado.

a) Mostre que $S \subseteq E$ é subespaço vetorial próprio, então $\operatorname{int}(S) = \emptyset$. Dica: você supostamente já viu isso.

b) Sejam $D \subseteq \mathbb{K}$ um subconjunto denso e $\mathcal{B}$ uma base (de Hamel) de E. Mostre que a coleção das combinações D-lineares de $\mathcal{B}$ é densa em E. Conclua que se E tem um subespaço vetorial M denso tal que a dimensão de M é enumerável, então E é separável. ■

Exercício 2.1.76 $(\substack{\star\\\star\star})$**.** Responda a última pergunta da Observação 1.1.32 (pág. 24). ■

2.2 Extras

Esta seção traz tópicos que dependem majoritariamente do que foi introduzido nas partes "essenciais" deste capítulo. As quatro primeiras subseções revisam e aprofundam as principais "novidades": produtos arbitrários, filtros e redes. O restante delas busca ilustrar *aplicações* do conteúdo topológico discutido. Com isso dito, não se preocupe: as partes *essenciais* dos próximos capítulos *quase* não dependerão do que for discutido aqui — e as exceções serão óbvias ou devidamente indicadas.

2.2.1 Revisão: produtos generalizados e uplas

MOTIVAÇÃO. Os pares ordenados num produto cartesiano $X_0 \times X_1$ podem ser encarados como funções da forma $\{0,1\} \xrightarrow{f} X_0 \cup X_1$, com a restrição de que $f(i) \in X_i$ para $i = 0$ e $i = 1$. Vale a "volta": uma função g com a mesma propriedade induz o par $(g(0), g(1))$ no produto cartesiano $X_0 \times X_1$. Analogamente, uma tripla $t := (a, b, c)$ em $A \times B \times C$ *induz* uma *única função*

$$T : \{A, B, C\} \to \bigcup_{X \in \{A,B,C\}} X = A \cup B \cup C$$

tal que $T(X) \in X$ para todo $X \in \{A, B, C\}$. Por outro lado, uma função S do mesmo tipo induz o par $(S(A), S(B), S(C)) \in A \times B \times C$.

Definição 2.2.1. Para um conjunto de índices $\mathcal{I}$ e uma coleção $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de conjuntos, denota-se por $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ a família das funções da forma $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ tais que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Tradicionalmente, essas funções são xingadas de **funções escolha**[†] — mas, em virtude da próxima proposição, também é comum chamá-las de **$\mathcal{I}$-uplas** (ou apenas **uplas** quando o contexto permite), justamente a terminologia que será adotada no texto. ¶

Proposição 2.2.2. *Para $f, g \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, tem-se $f = g$ se, e somente se, $f(i) = g(i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Duas funções $f, g : A \to B$ são iguais sse $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$. □

Assim, uplas se comportam como pares ordenados, em que $(a, b) = (c, d)$ sse $a = c$ e $b = d$, razão pela qual o conjunto $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ de todas as $\mathcal{I}$-uplas da família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ é chamado de **produto cartesiano** da *família*[‡] $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$. É também por conta de tal analogia que uma $\mathcal{I}$-upla em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é denotada como $(f(i))_{i\in\mathcal{I}}$.

É claro que se $X_i = \emptyset$ para algum $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i = \emptyset$ (por favor!)$^{\star/5}$. A recíproca desta afirmação é uma das manifestações do:

AXIOMA DA ESCOLHA: se $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \neq \emptyset$.

Se for de seu interesse saber mais detalhes sobre o Axioma da Escolha entre outras questões de Fundamentos, confira [17, 28]. Por aqui, *seguiremos* usando o Axioma da Escolha bem como suas outras encarnações sem um pingo de preocupação[††].

[†]Pois elas escolhem um elemento $f(i)$ em cada X_i conforme i varia no conjunto de índices $\mathcal{I}$.

[‡]Seria *mais correto* dizer que $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é o produto cartesiano de $(X_i : i \in \mathcal{I})$, mas ninguém se importa.

[††]Ocasionalmente, algumas equivalências do Axioma da Escolha ou de versões mais fracas serão discutidas, mas só por diversão.

Como você já deve saber, um produto cartesiano $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ vem de fábrica com uma $\mathcal{I}$-upla $(\pi_j)_{j\in\mathcal{I}}$ de funções, as **projeções**: para cada $j \in \mathcal{I}$,

$$\pi_j \colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$$

é a função que a cada $\mathcal{I}$-upla $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ associa sua *j-ésima coordenada* x_j. Como de costume, a grafia das projeções acompanha o modo como se denota o produto cartesiano: por exemplo, no caso de $X \times Y$, escreve-se π_X e π_Y para as projeções na primeira e segunda coordenadas, respectivamente.

A melhor maneira de lidar com os fatos básicos sobre produtos cartesianos é jogar com a definição "debaixo do braço". Vejamos alguns:

- se $B_i \subseteq X_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então $B := \prod_{i\in\mathcal{I}} B_i \subseteq \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i := X$, pois se uma $\mathcal{I}$-upla $f := (f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ pertence ao conjunto B, então $f_i \in B_i \subseteq X_i$, logo $f \in X$;
- por outro lado, um subconjunto de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ não precisa ser da forma acima, como as bolas típicas de $\mathbb{R}^2$ já nos ensinam desde tempos imemoriais;
- em geral, $\left(\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in\mathcal{I}} B_i\right) = \prod_{i\in\mathcal{I}}(A_i \cap B_i)$, pois uma $\mathcal{I}$-upla $(c_i)_{i\in\mathcal{I}}$ habita a interseção dos dois produtos cartesianos sse $c_i \in A_i \cap B_i$ para todo i;
- com a notação de suporte introduzida em (2.8) (pág. 81), verifica-se

  $$B := \prod_{i\in\mathcal{I}} B_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{-1}[B_i] = \bigcap_{i\in\operatorname{supp}(B)} \pi_i^{-1}[B_i],$$

  independentemente da cardinalidade do suporte, pois

  $$\begin{aligned} x := (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} B_i &\Leftrightarrow \forall i \in \mathcal{I} \quad x_i \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in \mathcal{I} \quad x \in \pi_i^{-1}[B_i] \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \operatorname{supp}(B) \quad x \in \pi_i^{-1}[B_i], \end{aligned}$$

  onde $(\Leftarrow)$ na última equivalência segue pois $\pi_j^{-1}[X_j] = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ para qualquer índice $j \in \mathcal{I} \setminus \operatorname{supp}(B)$.

Mesmo situações aparentemente mais complexas, como os malabarismos realizados na vindoura Subseção 3.1.2, seguem com argumentos *by the book* análogos aos apresentados acima. Por essa razão, casos semelhantes ficarão por sua conta.

Falta pouco para encerrar esta revisão.

Proposição 2.2.3 (Propriedade universal de $\prod_{i\in\mathcal{I}}$)**.** *Se X é um conjunto munido de uma função $f_i \colon X \to X_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$, então existe uma única função $F \colon X \to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ satisfazendo $\pi_j \circ F = f_j$ para todo $j \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Fixado $x \in X$, a função F deve associar tal objeto a uma $\mathcal{I}$-upla $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Dado que se espera $\pi_j \circ F = f_j$ para todo $j \in \mathcal{I}$, deve-se ter $x_j = \pi_j(F(x)) = f_j(x)$, mostrando que a função F procurada é dada por $F(x) = (f_i(x))_{i\in\mathcal{I}}$. Os detalhes ficam por sua conta $(\star)$. $\square$

Definição 2.2.4. Quando precisarmos dar um nome para a função F acima, diremos que se trata do **produto (diagonal)** das funções f_i, que será denotado por $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$. ¶

Supondo que para cada $i \in \mathcal{I}$ se tenha uma função $g_i\colon X_i \to Y_i$ fixada, define-se ainda

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} g_i\colon \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i \tag{2.10}$$

que a cada $\mathcal{I}$-upla $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ associa a $\mathcal{I}$-upla $(g_i(x_i))_{i\in\mathcal{I}}$ de $\prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$. Naturalmente, ela se obtém da propriedade universal com $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e $f_i := \pi_i \circ g_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Esta sim é chamada de **produto** (**cartesiano**) das funções g_i.

Por fim, note que se $X_i = X$ para todo $i \in \mathcal{I}$, então uma $\mathcal{I}$-upla $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é apenas uma função $f\colon \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i = X$, que a cada $i \in \mathcal{I}$ associa f_i. Consequentemente, $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, X) = \prod_{i\in\mathcal{I}} X$. Em particular, neste caso, $\pi_j(f) = f(j)$ para todo índice $j \in \mathcal{I}$ e toda função $f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, X)$, mostrando que as projeções são as avaliações nos pontos de $\mathcal{I}$. Futuramente, a própria *avaliação*

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, X) \times \mathcal{I} \to X$$

será importante, mas isto pode esperar. Se precisar, implemente exemplos com conjuntos de índices pequenos a fim de perceber o que está acontecendo ($\star$).

2.2.2 A linguagem de categorias: objetos universais e dualidade

AVISO: a presente subseção dá prosseguimento à introdução iniciada na Subseção 1.2.3.

Definição 2.2.5. Diremos que um objeto u de uma categoria $\mathscr{C}$ é **universal** se uma das duas condições a seguir for satisfeita:

(i) para todo objeto c de $\mathscr{C}$ existe uma única seta $i_c\colon u \to c$, caso em que u é dito ser **objeto inicial** de $\mathscr{C}$;

(ii) para todo objeto c de $\mathscr{C}$ existe uma única seta $f_c\colon c \to u$, caso em que u é dito ser **objeto final** de $\mathscr{C}$. ¶

Parece inofensiva, certo?

Exercício 2.2.1 ($\star$)**.** Pratique!

a) Mostre que $\emptyset$ é objeto inicial em SET e, para qualquer x, $\{x\}$ é objeto final em SET.

b) Mostre que $\mathbb{Z}$ é objeto inicial de CRING, enquanto o anel trivial $\{0\}$ é objeto final da mesma categoria[†].

c) Mostre que $\{0\}$ é, simultaneamente, objeto inicial e final da categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo fixado.

d) (Cf. Exemplo 1.2.40) Numa ordem parcial $\mathbb{P}$, mostre que $p \in \mathbb{P}$ é objeto final sse $p = \max \mathbb{P}$. Analogamente, p é objeto inicial sse $p = \min \mathbb{P}$. ■

Objetos universais generalizam diversos tipos de construção comuns em Matemática Abstrata, ao mesmo tempo em que nos eximem de perder tempo provando um fato bastante corriqueiro.

[†]Se estiver confortável com anéis não comutativos, faça para RING.

Teorema 2.2.6. *Sejam a e b objetos de $\mathscr{C}$, com a inicial em $\mathscr{C}$. Então b é objeto inicial de $\mathscr{C}$ se, e somente se, a e b são $\mathscr{C}$-isomorfos.*

Demonstração. Se a e b são iniciais, então existem únicas setas $f\colon a \to b$ e $g\colon b \to a$, donde segue que $f \circ g$ é uma seta da forma $b \to b$, enquanto $g \circ f$ é uma seta da forma $a \to a$. Por outro lado, sempre que u é universal, $\mathrm{id}_u\colon u \to u$ é a única seta nesse formato possível (certo?)*, acarretando $f \circ g = \mathrm{id}_b$ e $g \circ f = \mathrm{id}_a$, i.e., a e b são isomorfos.

Reciprocamente, seja $\psi\colon b \to a$ um isomorfismo. Para $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ fixado, a hipótese de a ser inicial diz que existe uma única seta $h\colon a \to c$ e, consequentemente, $h \circ \psi$ é uma seta da forma $b \to c$. Se $h'\colon b \to c$ é outra seta, então $h' \circ \psi^{-1}$ é uma seta da forma $a \to c$, que deve ser igual a h por a ser objeto inicial. Logo,

$$h' \circ \psi^{-1} = h \Rightarrow (h' \circ \psi^{-1}) \circ \psi = h \circ \psi \Rightarrow h' = h \circ \psi,$$

mostrando que $h \circ \psi$ é a única seta da forma $b \to c$, como queríamos. $\square$

É claro que a versão análoga da proposição acima, obtida da substituição do termo "inicial" por "final", ainda é verdadeira. Você pode provar isso diretamente ou apelar para o *Princípio da Dualidade*, que discutiremos abaixo.

Definição 2.2.7. Fixada uma categoria $\mathscr{C}$, vamos definir uma "nova" categoria, denotada por $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ e chamada de **categoria dual** (ou **oposta**) a $\mathscr{C}$, cujos objetos e setas são os mesmos de $\mathscr{C}$, a menos da orientação das setas:

- $\mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) \coloneqq \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$;
- cada seta $a \xrightarrow{f} b$ de $\mathscr{C}$ determina a seta $b \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} a$ de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, denotada apenas por f^{op}, de modo que $(\bullet)^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C}) \to \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})$ seja uma *bijeção*;
- dadas setas $c \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} b$ e $b \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} a$ de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, a composição entre elas é $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} \coloneqq (f \circ g)^{\mathrm{op}}$, o que faz sentido pois a composta $f \circ g\colon a \to b \to c$ está definida em $\mathscr{C}$. ¶

A ideia é bem mais simples do que sua descrição formal sugere: $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ consiste precisamente da categoria $\mathscr{C}$, salvo pela troca de cada seta da forma $a \xrightarrow{f} b$ (nativa de $\mathscr{C}$) por uma da forma $b \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} a$ (típica de $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$). Você faz isso todas as vezes em que decide escrever $b \geq a$ em vez de $a \leq b$: sim, $(\mathbb{P}, \geq)$ é a categoria dual de $(\mathbb{P}, \leq)$.

Em particular, ao se tomar a categoria oposta de uma categoria $\mathscr{C}$, há um funtor contravariante implícito, $\bullet^{\mathrm{op}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, que faz $\bullet^{\mathrm{op}}(c) \coloneqq c$ para cada objeto $c \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ e $\bullet^{\mathrm{op}}(f) \coloneqq f^{\mathrm{op}}$ para cada seta $f \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$. Logo, pode-se dizer alternativamente que $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um funtor contravariante se $F \circ \bullet^{\mathrm{op}}\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ for um funtor covariante.

Por falta de mais espectros políticos, dualizar uma categoria duas vezes *retorna* a categoria original, i.e., vale a *igualdade* $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$ para qualquer categoria $\mathscr{C}$. Consequentemente, ao se provar uma afirmação P a respeito de categorias arbitrárias, prova-se de maneira automática a *afirmação dual* de P, fenômeno que costuma ser chamado de **Princípio da Dualidade**.

Consideremos, por exemplo, a afirmação do último teorema: "se $a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$ e a é objeto inicial de $\mathscr{C}$, então b é objeto inicial de $\mathscr{C}$ se, e somente se, $a \simeq_{\mathscr{C}} b$". Simbolicamente, ela pode ser abreviada como segue:

$$\forall a, b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}) \left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\, \exists!\ f\colon a \to z}_{a \text{ é inicial em } \mathscr{C}} \right) \Rightarrow \left(\left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\, \exists!\ g\colon b \to z}_{b \text{ é inicial em } \mathscr{C}} \right) \Leftrightarrow a \simeq_{\mathscr{C}} b \right). \qquad (2.11)$$

Supondo a validade da sentença acima para uma categoria qualquer, ela deve valer, em particular, para $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Ao reescrever em $\mathscr{C}$ a conclusão aferida em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, obtém-se

$$\forall a,b \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C}) \left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\, \exists!\ f\colon z\to a}_{a \text{ é final em } \mathscr{C}} \right) \Rightarrow \left(\left(\underbrace{\forall z \in \mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})\,\exists!\ g\colon z \to b}_{b\text{ é final em }\mathscr{C}} \right) \Leftrightarrow a \simeq_{\mathscr{C}} b \right). \tag{2.12}$$

Essencialmente isso mostra que $\forall\mathscr{C}$ (2.11) $\Rightarrow$ $\forall\mathscr{C}$ (2.12). Se optássemos por assumir (2.12) para toda categoria $\mathscr{C}$, a repetição do argumento acima na *direção oposta* levaria a (2.11), mostrando a recíproca da implicação anterior e, por conseguinte, garantindo

$$\forall\mathscr{C}(2.11) \Leftrightarrow \forall\mathscr{C}(2.12).$$

Sintaticamente, a única diferença entre as duas sentenças é a direção das setas. Grosso modo, dada uma sentença P na *linguagem de categorias*, pode-se denotar por P^{op} a sentença obtida a partir de P por meio da "inversão" de todas as setas que ocorrem na sentença P, frequentemente xingada de **sentença dual** de P. Consequentemente,

$$\mathscr{C} \models P \Leftrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \models P^{\mathrm{op}},$$

i.e., $\mathscr{C}$ satisfaz P sse sua categoria oposta satisfaz a condição dual P^{op}.

De volta aos objetos universais:

Exemplo 2.2.8 (Produtos)**.** Fixada uma categoria $\mathscr{C}$, sejam $\mathcal{I}$ um conjunto de índices e $\varphi \coloneqq (\varphi(i))_{i\in\mathcal{I}}$ uma $\mathcal{I}$-upla de objetos de $\mathscr{C}$. Com tais informações, vamos definir uma nova categoria $(\mathscr{C} \to \varphi)$:

- seus objetos são $\mathcal{I}$-uplas $\left(x \xrightarrow{f_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}}$, com $f_i \in \mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$ para cada $i \in \mathcal{I}$;
- um morfismo $p\colon \left(x \xrightarrow{f_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}} \to \left(y \xrightarrow{g_i} \varphi(i)\right)_{i\in\mathcal{I}}$ é uma seta $p\colon x \to y$ de $\mathscr{C}$ tal que $g_i \circ p = f_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$.

Intuitivamente, cada objeto de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ é um objeto x de $\mathscr{C}$ munido de uma seta $f_i\colon x \to \varphi(i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$: quando $\mathcal{I} \coloneqq \{0,1\}$, por exemplo, convém denotar seus objetos como no diagrama abaixo (à esquerda),

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ \varphi(0) & & \varphi(1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[d, "f_i"] \\ \varphi(i) \end{tikzcd} \quad (i \in \mathcal{I}) \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f_i"'] & & y \arrow[dl, "g_i"] \\ & \varphi(i) & \end{tikzcd} \quad (i \in \mathcal{I})$$

o que (in)felizmente não pode ser repetido da mesma forma para um conjunto $\mathcal{I}$ qualquer. Porém, há um paliativo interessante: pode-se representar um elemento de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ como no diagrama anterior (ao centro) com a ressalva de que $i \in \mathcal{I}$ é qualquer. Uma vantagem imediata dessa abordagem estética está no entendimento de que um morfismo entre dois objetos x e y de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ é apenas uma seta $p\colon x \to y$ em $\mathscr{C}$ tal que o diagrama acima (à direita) seja *comutativo* para todo $i \in \mathcal{I}$.

Isso permite intuir de modo quase fácil que a composição usual de setas em $\mathscr{C}$ *serve* como *lei de composição* em $(\mathscr{C} \to \varphi)$. Mais precisamente, para setas $p\colon x \to y$ e $q\colon y \to z$ de $(\mathscr{C} \to \varphi)$, consideramos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f_i"'] & y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g_i"] & z \arrow[dl, "h_i"] \\
& \varphi(i) &
\end{tikzcd} \qquad (i \in \mathcal{I})$$

Como ambos os "triângulos" acima são comutativos, i.e., $g_i \circ p = f_i$ e $h_i \circ q = g_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$, segue que o "triângulo" maior é comutativo, ou seja, $h_i \circ (q \circ p) = f_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$, mostrando que $q \circ p$ é uma seta legítima entre os objetos x e z de $(\mathscr{C} \to \varphi)$. A verificação de que isso dá uma composição fidedigna, com identidades e associatividade, torna-se então um exercício simples $(\star)$.

Um objeto final na categoria $(\mathscr{C} \to \varphi)$ deve ser uma $\mathcal{I}$-upla $\left(u \xrightarrow{p_i} \varphi(i)\right)_{i \in \mathcal{I}}$ tal que para todo objeto $\left(x \xrightarrow{f_i} \varphi(i)\right)_{i \in \mathcal{I}}$ de $(\mathscr{C} \to \varphi)$ exista um único morfismo $p \colon x \to u$ nas condições acima. Em particular, qualquer outra $\mathcal{I}$-upla $\left(u' \xrightarrow{p'_i} \varphi(i)\right)_{i \in \mathcal{I}}$ final deve ser $(\mathscr{C} \to \varphi)$-isomorfa a $\left(u \xrightarrow{p_i} \varphi(i)\right)_{i \in \mathcal{I}}$, o que assegura que os objetos u e u' são $\mathscr{C}$-isomorfos (certo?)$^{\star}_{\star}$. Já vimos isso antes, não é mesmo?

- Ao substituir $\mathscr{C}$ por Set, o produto cartesiano $\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$, junto com as projeções, é objeto final da categoria $(\text{Set} \to \varphi)$ (cf. Proposição 2.2.3, com $\varphi(i) := X_i$ para cada $i \in \mathcal{I}$).
- Ao substituir $\mathscr{C}$ por Top, o produto $\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$, com a topologia produto e as projeções, é objeto final de $(\text{Top} \to \varphi)$.
- Ao substituir $\mathscr{C}$ por Dir, a **categoria dos conjuntos dirigidos**[†], o produto $\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$ com a relação $\preceq$ em que $(f_i)_i \preceq (g_i)_i$ sse $f_i \preceq_i g_i$ para todo i, é objeto final de $(\text{Dir} \to \varphi)$.
- Ao substituir $\mathscr{C}$ por Group, etc.

Nem sempre uma categoria $\mathscr{C}$ é tal que $(\mathscr{C} \to \varphi)$ admite objetos finais. No entanto, em diversas situações positivas, esses objetos finais são realizados por produtos. Por essa razão, um objeto final da categoria $(\mathscr{C} \to \varphi)$, chamado de **produto categorial** dos objetos $\varphi(i)$, costuma ser denotado por $\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$. Em tempo, note que apesar de tal notação enfatizar o *objeto* $\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$, a $\mathcal{I}$-upla de setas $\left(\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i) \to \varphi(j)\right)_{j \in \mathcal{I}}$ também faz parte da informação. ▲

Exercício 2.2.2 $(^{\star}_{\star})$**.** Para um conjunto $\mathcal{I}$ fixado, suponha que uma categoria $\mathscr{C}$ admita o produto $\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$ para qualquer $\mathcal{I}$-upla $(\varphi(i))_{i \in \mathcal{I}}$ de objetos de $\mathscr{C}$.

a) Mostre que se $\varphi(i)$ e $\psi(i)$ forem $\mathscr{C}$-isomorfos para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i \in \mathcal{I}} \varphi(i)$ e $\prod_{i \in \mathcal{I}} \psi(i)$ também são $\mathscr{C}$-isomorfos.

b) Mostre que se X_i e Y_i são espaços topológicos homeomorfos, então $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ e $\prod_{i \in \mathcal{I}} Y_i$ são homeomorfos.

[†] Objetos são conjuntos dirigidos. Setas são funções crescentes e cofinais (cf. Exemplo 3.1.31).

c) Sejam $\mathcal{J}$ um conjunto munido de uma bijeção $\rho\colon \mathcal{I} \to \mathcal{J}$. Mostre que se $(\psi(j))_{j\in\mathcal{J}}$ é uma $\mathcal{J}$-upla tal que $\varphi(i)$ e $\psi(\rho(i))$ são $\mathscr{C}$-isomorfos para todo $i \in \mathcal{I}$, então o produto $\prod_{j\in\mathcal{J}} \psi(j)$ existe em $\mathscr{C}$ e, mais ainda, é $\mathscr{C}$-isomorfo a $\prod_{i\in\mathcal{I}} \varphi(i)$. Dica: mostre que o último tem a propriedade universal que caracteriza o primeiro.

d) Supondo $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ como no item anterior, mostre que se X_i e $Y_{\rho(i)}$ são espaços homeomorfos para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e $\prod_{j\in\mathcal{J}} Y_j$ são espaços homeomorfos.

e) Para espaços topológicos X e Y quaisquer, mostre que $X \times Y$ e $Y \times X$ são homeomorfos. ■

Futuramente, essa perspectiva categórica guiará a descrição de outras construções topológicas, como limites e colimites de espaços topológicos, o que incluirá as noções de quocientes (duais da inclusão!) e coprodutos (duais do produto!).

2.2.3 Um pouco mais sobre filtros

Mesmo que *filtros de conjuntos* (cf. Subseção 2.2.3 §4) tenham a mesma "ordem de $\in$-complexidade" das topologias, i.e., são coleções de subconjuntos de um conjunto, manipulá-los exige uma dose adicional de malícia, o que não ocorre com topologias, posto que elas costumam permanecer fixas ao longo dos problemas. Nesta subseção, você encontrará alguns truques que, possivelmente, ajudarão a lidar com eles.

§1 O que filtros filtram?

Resposta: conjuntos grandes, *em algum sentido*.

Um pouco mais precisamente, chamando de "grandes" os elementos de um filtro próprio $\mathcal{F}$ num conjunto X:

- o subconjunto $\emptyset$ não é grande, já que $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ao passo que X é grande, pois $X \in \mathcal{F}$;
- se dois subconjuntos são grandes, então a interseção entre eles ainda é grande;
- um subconjunto que contém um subconjunto grande é grande.

Exemplo 2.2.9. A coleção dos subconjuntos *cofinitos*[†] de um conjunto infinito X exemplifica bem essa idea: X é cofinito pois $X \setminus X = \emptyset$; se A e B são subconjuntos cofinitos de X, então $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ é uma reunião de dois conjuntos finitos; por fim, se C é cofinito em X e $C \subseteq D \subseteq X$, então $X \setminus D \subseteq X \setminus C$. ▲

Pelo menos três perguntas *podem* estar te incomodando agora:

(i) o que generaliza os subconjuntos pequenos?

(ii) não ser grande = ser pequeno?

(iii) (mais importante) as vizinhanças de um ponto p não deveriam ser conjuntos *pequenos*, que se *aproximam* de p?

[†]Aqueles cujo complementar é finito.

A resposta de (i) se baseia no *princípio* de que "S é grande sse $X \setminus S$ é pequeno", uma das portas de entrada para o conceito de *ideais de conjuntos* (cf. Exercício 2.2.11). Sob tal princípio, "não ser grande = não pertencer ao filtro", enquanto "ser pequeno = o complementar pertencer ao filtro". Portanto, para que a resposta de (ii) seja "sim", o filtro $\mathcal{F}$ deve ser tal que $S \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow X \setminus S \in \mathcal{F}$, algo que nem sempre ocorre.

Exercício 2.2.3 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Para X infinito, mostre que existe $S \subseteq X$ tal que tanto S quanto $X \setminus S$ não pertencem ao filtro dos subconjuntos cofinitos de S. Opcional ($\star$): se parecer difícil demais, suponha X infinito enumerável. ■

Os filtros que tornam a resposta de (ii) afirmativa podem ser chamados de *filtros primos* por pessoas preciosistas, mas na prática eles *já recebem* outro nome: são os *ultrafiltros*, tema da subsubseção §3. Por ora, convém dar mais atenção ao problema (iii): como sempre acontece nas metáforas em Matemática Abstrata, o segredo está no fato de que "em algum sentido" não significa "em todos os sentidos".

No caso, para um espaço X e um ponto $p \in X$, o filtro de vizinhanças de p tem como membros os subconjuntos de X que são "grandes o suficiente" para servirem como testemunhas de convergência para p. Em outras palavras, trata-se de uma noção de grandeza *qualitativa*. Quando a topologia é oriunda de uma métrica, ganha-se mais uma ideia de grandeza, desta vez de natureza numérica, inversamente compatível com a anterior[†]. *C'est la vie.*

§2 Ordenando filtros

Quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são coleções de subconjuntos de algum conjunto fixado X, temos pelo menos dois modos naturais de *comparar* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$: o primeiro é a inclusão de sempre, que consiste em ignorar o conjunto X e levar em consideração apenas os membros de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como "átomos", afinal $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ sse $C \in \mathcal{B}$ sempre que $C \in \mathcal{A}$; o segundo é mais *refinado*.

Definição 2.2.10. Para famílias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de conjuntos, diremos que $\mathcal{B}$ **é mais fina do que** $\mathcal{A}$ (ou que $\mathcal{B}$ *refina* $\mathcal{A}$, ou que $\mathcal{B}$ é um **refinamento** de $\mathcal{A}$, etc.) se para todo $A \in \mathcal{A}$ existir $B \in \mathcal{B}$ com $B \subseteq A$. Isto será abreviado com $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. A relação inversa, $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$, será lida como $\mathcal{A}$ é **mais grosso** do que $\mathcal{B}$, ou $\mathcal{A}$ é refinado por $\mathcal{B}$, etc. ¶

De modo geral, a implicação

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$$

se verifica para quaisquer famílias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (checou?)*, mas a recíproca é falsa: para um exemplo minimal, considere $X := \{0,1\}$, $\mathcal{A} := \{\{0,1\}\}$ e $\mathcal{B} := \{\{0\}\}$, e note que se verifica $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, enquanto $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{B}$. Sem mais hipóteses, o melhor que se pode fazer está no próximo

Exercício 2.2.4 ($\star$)**.** Mostre que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ sse $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{B})^{\uparrow}$. ■

Como um filtro $\mathcal{F}$ *trivialmente* satisfaz $\mathcal{F} = (\mathcal{F})^{\uparrow}$ (certo?)*, resulta que a relação de refinamento, quando aplicada a filtros, coincide com a inclusão: para filtros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} \preceq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq (\mathcal{G})^{\uparrow} = \mathcal{G}.$$

Mantra: quanto menores os membros do filtro, maior o filtro.

[†]Fenômeno semelhante ocorre com as noções de cardinalidade e medida. No sentido usual, por exemplo, $[0,1]$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ com medida finita, mas cuja cardinalidade é infinita. O jogo segue.

Observação 2.2.11. Em particular, para um filtro próprio $\mathcal{F}$, resulta que um subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ satisfaz a identidade $(\mathcal{C})^{\uparrow} = \mathcal{F}$ sse $\mathcal{C}$ é $\supseteq$-*cofinal*[†] em $\mathcal{F}$ (verifique!)$\binom{\star}{\star}$. Em particular, bases locais em espaços topológicos são apenas subconjuntos cofinais de filtros de vizinhanças ($\star$). △

Quem tem olhos treinados certamente percebeu que há mais coisas acontecendo[‡].

Exercício 2.2.5 ($\star$)**.** Mostre que se $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ é uma família de filtros em X, então $\bigcap_{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}} \mathcal{F}$ é filtro em X. Em particular, se todo $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ for próprio, então $\bigcap \mathfrak{F}$ também é próprio. ■

Proposição 2.2.12. *Para uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X, existe um filtro $\mathcal{F}$ em X com as duas propriedades a seguir:*

(i) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$*;*

(ii) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ *sempre que $\mathcal{H}$ é filtro em X tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$.*

*Além disso, $\mathcal{F}$ é próprio se, e somente se, vale a **p**ropriedade da **i**nterseção **f**inita (p.i.f.): $\bigcap_{I\in\mathcal{I}} I \neq \emptyset$ para qualquer subconjunto não vazio e finito $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{G}$.*

Demonstração. Para a primeira parte, basta tomar $\mathfrak{F}$ como a coleção dos filtros em X que contém $\mathcal{G}$ e aplicar o resultado do exercício anterior, definindo $\mathcal{F} := \bigcap_{\mathcal{H}\in\mathfrak{F}} \mathcal{H}$. Para a segunda parte, convém *explicitar* $\mathcal{F}$, observando que $F \in \mathcal{F}$ sse existem $n \in \mathbb{N}$ e $G_0, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$ tais que $\bigcap_{j\leq n} G_j \subseteq F$. Os detalhes ficam por sua conta $\binom{\star}{\star}$. □

Definição 2.2.13. Com as notações acima, indicaremos o filtro $\mathcal{F}$ por $(\mathcal{G})^{\Uparrow}$, e diremos que $(\mathcal{G})^{\Uparrow}$ é **gerado** pela família $\mathcal{G}$. ¶

A relação entre filtros gerados e pré-filtros é semelhante à relação entre topologias geradas e bases (confira a nota de rodapé †, pág. 78). Mais precisamente, se $\mathcal{G}$ é um pré-filtro num conjunto X, então o filtro próprio $(\mathcal{G})^{\uparrow}$ é o menor filtro (próprio) a conter a família $\mathcal{G}$ e, por conseguinte, $(\mathcal{G})^{\uparrow} = (\mathcal{G})^{\Uparrow}$.

Exemplo 2.2.14. A reunião de filtros pode não ser um filtro. Afinal, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são filtros em X e $A, B \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, então *pode ocorrer* $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ e $B \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, o que elimina as garantias de se ter $A \cap B \in \mathcal{F}$ ou $A \cap B \in \mathcal{G}$. Apesar disso, podemos definir

$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} := (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})^{\Uparrow},$$

o menor filtro a conter $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, que por alusão ao contexto algébrico de ideais será chamado de **soma dos filtros** $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

Em consonância com o *mantra* sobre filtros, $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ é gerado pelos subconjuntos da forma $F \cap G$, com $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{G}$: a princípio, $S \in \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ sse existem $F_0, \ldots, F_m \in \mathcal{F}$ e $G_0, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$ tais que $F_0 \cap \ldots \cap F_m \cap G_0 \cap \ldots \cap G_n \subseteq S$, mas por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ serem filtros, temos $F_0 \cap \ldots \cap F_m \in \mathcal{F}$ e $G_0 \cap \ldots \cap G_n \in \mathcal{G}$. Consequentemente, $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ é filtro próprio sse $F \cap G \neq \emptyset$ para quaisquer $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{G}$.

Com isso, a definição do filtro $\mathcal{F} := (\mathcal{H})^{\uparrow}$ na demonstração do Teorema 2.1.30 deve soar menos esotérica agora: com as notações atuais, temos $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x \vee \mathcal{N}_y$, um filtro que por construção satisfaz $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{N}_y \subseteq \mathcal{F}$, algo perfeitamente natural para o contexto do argumento. Analogamente, o filtro $\mathcal{G}$ da Observação 2.1.40 é $\mathcal{N}_p \vee \{X \setminus A\}$. ▲

Exercício 2.2.6 $\binom{\star}{\star}$**.** Descreva geradores para o filtro $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Generalize $\binom{\star}{\star\star}$. ■

[†] Numa ordem $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ é $\leq$-**cofinal** se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $c \in C$ com $p \leq c$. Logo, dizer que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ é $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{F}$ significa que para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq F$.

[‡] Quem tem olhos muito treinados já percebeu reticulados completos aqui, mas não precisaremos de toda essa tecnologia explícita.

§3 Filtros maximais

A discussão iniciada nesta subseção sugeriu investigar os filtros (próprios) $\mathcal{F}$ num conjunto X que satisfazem a condição

$$S \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow X \setminus S \in \mathcal{F}$$

para qualquer subconjunto $S \subseteq X$.

Um primeiro ponto a observar é o seguinte: se a condição acima *falha* para algum subconjunto não vazio $S \subseteq X$, então existem (pelo menos) *dois* filtros *melhores* do que $\mathcal{F}$ que resolvem o problema com relação a S. Com efeito, para que a condição falhe, deve-se ter tanto $S \notin \mathcal{F}$ quanto $X \setminus S \notin \mathcal{F}$, pois a ocorrência simultânea de $S \in \mathcal{F}$ e $X \setminus S \in \mathcal{F}$ é impedida por termos $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Logo, por filtros serem *fechados para cima*, não pode existir $F \in \mathcal{F}$ satisfazendo $F \subseteq S$ ou $F \subseteq X \setminus S$. Consequentemente, $F \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$ e $F \cap S \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ (entendeu?)$^{\star}_{\star}$. Em outras palavras, $\mathcal{G}_0 := \mathcal{F} \cup \{X \setminus S\}$ e $\mathcal{G}_1 := \mathcal{F} \cup \{S\}$ têm a p.i.f. e, portanto, $\mathcal{F}_0 := (\mathcal{G}_0)^{\Uparrow}$ e $\mathcal{F}_1 := (\mathcal{G}_1)^{\Uparrow}$ são filtros próprios que contêm $\mathcal{F}$ (são *melhores*) e resolvem o problema criado por S: $X \setminus S \in \mathcal{F}_0$ e $S \notin \mathcal{F}_0$, enquanto $S \in \mathcal{F}_1$ e $X \setminus S \notin \mathcal{F}_1$.

Um segundo ponto a observar é o seguinte: se a condição falha para $\mathcal{F}_0$ ou $\mathcal{F}_1$, então...

Teorema 2.2.15. *Para um filtro próprio $\mathcal{F}$ num conjunto X, são equivalentes:*

(i) (*dicotomia*) *para todo $S \subseteq X$, tem-se $S \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus S \in \mathcal{F}$;*

(ii) (*maximalidade*) *$\mathcal{F} = \mathcal{G}$ para qualquer filtro próprio $\mathcal{G}$ em X satisfazendo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$;*

(iii) (*primalidade*) *para quaisquer $A, B \subseteq X$, $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) segue, pela contrapositiva, com o argumento que antecede o enunciado: se $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$ para um filtro próprio $\mathcal{G}$, então existe $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, mas disto segue que $X \setminus G \notin \mathcal{F}$. Para (ii) $\Rightarrow$ (iii), note que se $A \notin \mathcal{F}$, então $\mathcal{H} := \mathcal{F} \cup \{X \setminus A\}$ tem a p.i.f. (certo?)$^{\star}_{\star}$, e daí $\mathcal{G} := (\mathcal{H})^{\Uparrow}$ é filtro próprio com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, donde (ii) acarreta $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ e $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Analogamente, se $B \notin \mathcal{F}$, então a condição (ii) obriga que se tenha $X \setminus B \in \mathcal{F}$. Dessa forma, se $A, B \notin \mathcal{F}$, então $X \setminus A, X \setminus B \in \mathcal{F}$, donde segue que $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) \in \mathcal{F}$ e, portanto, $A \cup B \notin \mathcal{F}$, provando (iii)†. Finalmente, assumindo (iii), se ocorrer $S \notin \mathcal{F}$, então da identidade $X = S \cup (X \setminus S)$, a suposição de (iii) garante que $X \setminus S \in \mathcal{F}$. □

Exercício 2.2.7 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que se $\mathcal{F}$ é filtro próprio em X satisfazendo qualquer uma das condições anteriores e $S \subseteq X$ é tal que $S \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, então $S \in \mathcal{F}$. ■

Filtros com as propriedades acima são chamados de **ultrafiltros**. Por questões logísticas, o *problema* da existência de ultrafiltros só será abordado na Subseção 3.1.1 §3 (cf. Afirmação 3.1.26). Por aqui, exploraremos algumas particularidades oriundas da maximalidade que serão úteis nos próximos capítulos.

Apesar do que se mencionou acima, é bastante fácil dar exemplos *triviais* de ultrafiltros, o que inclusive já foi feito (cf. Exercício 2.1.13): para um elemento p de um conjunto X, $\mathrm{ult}(p) := \{A \subseteq X : p \in A\}$ é um ultrafiltro (pela dicotomia), chamado de **ultrafiltro principal**‡ (sobre p).

†Atenção: note que cada uma das condições é, por si só, uma implicação. No caso, (iii) é a implicação "$A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$", que provamos ser válida pela contrapositiva. Isso não deveria ser um problema nessa altura do campeonato.

‡Lembra de ideais principais? Pois bem, é a mesma ideia.

A fim de que um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ em X não seja principal, deve-se ter $\mathfrak{u} \neq \mathrm{ult}(p)$ para todo $p \in X$, i.e., $\{p\} \notin \mathfrak{u}$ para todo $p \in X$ (de acordo?)$^{\star}_{\star}$. Consequentemente[†], $\mathfrak{u}$ não é principal sse $F \notin \mathfrak{u}$ qualquer que seja o subconjunto finito $F \subseteq X$. Em linguajar técnico, acabamos de mostrar que ultrafiltros não principais são *livres*. O **núcleo** de um filtro próprio $\mathcal{F}$, denotado por $\ker \mathcal{F}$, é a interseção de seus membros, i.e., $\ker \mathcal{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, e dizemos que $\mathcal{F}$ é **livre** se seu núcleo é vazio.

Proposição 2.2.16 (Opcional, mas nem tanto)**.** *Um filtro próprio $\mathcal{F}$ em X é livre se, e somente se, $X \setminus G \in \mathcal{F}$ para todo subconjunto finito $G \subseteq X$.*

Demonstração. Se $X \setminus G \notin \mathcal{F}$ para algum subconjunto finito $G \subseteq X$, então $F \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, e daí $G \cap \ker \mathcal{F} \neq \emptyset$: caso contrário, para todo $x \in G$ existe $F_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F_x$, mas então $F := \bigcap_{x \in G} F_x \in \mathcal{F}$ e $G \cap F = \emptyset$ (verifique!)*. A recíproca é quase automática: se $p \in \ker \mathcal{F}$, então $X \setminus \{p\} \notin \mathcal{F}$ pois $p \notin X \setminus \{p\}$. □

Exercício 2.2.8 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que um ultrafiltro não é principal sse é livre. ■

No dia a dia, são os ultrafiltros livres que realmente interessam. Apesar disso, como a existência deles depende do Axioma da Escolha (cf. Afirmação 3.1.26), é *impossível* descrever qualquer um deles explicitamente[‡]. Por falar em dia a dia[††], os dois próximos resultados serão úteis em breve:

Proposição 2.2.17. *Se X é um espaço topológico e $\mathfrak{u}$ é um ultrafiltro em X, então*

$$\lim \mathfrak{u} = \bigcap_{A \in \mathfrak{u}} \overline{A} = \bigcap \{F \in \mathfrak{u} : F \text{ é fechado}\}. \tag{2.13}$$

Demonstração. Como $\mathfrak{u}$ é fechado para cima, resulta que os conjuntos $\left\{\overline{A} : A \in \mathfrak{u}\right\}$ e $\{F \in \mathfrak{u} : F \text{ é fechado}\}$ são iguais (percebeu?)*, acarretando a segunda igualdade. Para a primeira igualdade, note que ocorre $x \notin \lim \mathfrak{u}$ sse existe um aberto $U \subseteq X$ com $x \in U$ e $U \notin \mathfrak{u}$, donde o restante segue pela *dicotomia* de $\mathfrak{u}$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$. □

Corolário 2.2.18. *Se $\mathcal{B}$ é uma sub-base para a topologia de X e $\mathfrak{u}$ é ultrafiltro em X, então* $\lim \mathfrak{u} = \bigcap \{F \in \mathfrak{u} : X \setminus F \in \mathcal{B}\}$.

Demonstração. Temos $\{F \in \mathfrak{u} : X \setminus F \in \mathcal{B}\} \subseteq \{F \in \mathfrak{u} : F \text{ é fechado}\}$, de modo que a inclusão "$\subseteq$" segue da proposição anterior. Para "$\supseteq$", note que se $x \notin \lim \mathfrak{u}$, então existe um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$ e $V \notin \mathfrak{u}$. Por $\mathcal{B}$ ser sub-base, existem $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ com $x \in \bigcap_{i \leq n} B_i \subseteq V$. Logo, $\bigcap_{i \leq n} B_i \notin \mathfrak{u}$, donde a dicotomia de $\mathfrak{u}$ implica em

$$X \setminus \bigcap_{i \leq n} B_i = \bigcup_{i \leq n} X \setminus B_i \in \mathfrak{u},$$

enquanto a primalidade garante que $X \setminus B_i \in \mathfrak{u}$ para algum i, mostrando que $B_i \in \mathcal{B}$ é testemunha de que $x \notin \bigcap \{F \in \mathfrak{u} : X \setminus F \in \mathcal{B}\}$. □

Para encerrar esta primeira discussão sobre ultrafiltros, vamos ver que a *recursão* sugerida implicitamente antes do Teorema 2.2.15 poderia não terminar em enumeráveis passos.

[†] E você pode se convencer mais facilmente pela contrapositiva (faça isso!)$^{\star}_{\star}$.
[‡] Nem no caso finito: encare a Proposição 2.2.16 até que ela te encare de volta.
[††] Eu só precisava de uma desculpa para mudar de assunto.

Teorema 2.2.19. *Seja $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de filtros livres sobre um conjunto X. Se nenhum $\mathcal{F}_n$ for ultrafiltro, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ não é ultrafiltro. Em particular, não existe família infinita enumerável*[†] *$\mathcal{B}$ de subconjuntos infinitos de X tal que $(\mathcal{B})^{\Uparrow}$ seja ultrafiltro livre em X.*

Demonstração[‡]. Primeiro, note que nada precisa ser feito se $(\mathcal{F}_n)_n$ for *estacionária*, i.e., se existir $N\in\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_N$ para todo $n\geq N$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_N$ não é ultrafiltro. Assim, com $(\mathcal{F}_n)_n$ *não*-estacionária, podemos tomar uma *subsequência* se necessário a fim de garantir que $\mathcal{F}_n\subsetneq\mathcal{F}_{n+1}$ para todo n. Feito isso, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $A_n\in\mathcal{F}_{n+1}\setminus\mathcal{F}_n$, e não há perda de generalidade em supor que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja decrescente: caso contrário, pode-se substituir cada A_n por $B_n:=\bigcap_{j\leq n}A_j$, que ainda satisfaz $B_n\in\mathcal{F}_{n+1}\setminus\mathcal{F}_n$ pois $\mathcal{F}_j\subseteq\mathcal{F}_n$ para $j\leq n$ e $B_n\subseteq A_n$ (entendeu?)*. Definindo $C_n:=A_n\setminus A_{n+1}$ para todo n, segue que $(C_n)_n$ é sequência de subconjuntos não vazios e dois a dois disjuntos (pois...)*.

Isso permite descrever X como a reunião

$$X=\underbrace{(X\setminus A_0)}_{S_0}\cup\underbrace{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}C_{2k}\right)}_{S_1}\cup\underbrace{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}C_{2k+1}\right)}_{S_2}\cup\underbrace{\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)}_{S_3}\qquad\text{(por quê??)}^{\star}_{\star}.$$

Se $\mathcal{F}:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ fosse ultrafiltro, então algum dos S_i's pertenceria a $\mathcal{F}$. Mas nenhum deles pode pertencer:

- $S_0\notin\mathcal{F}$ pois $A_0\in\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}$;
- $S_3\notin\mathcal{F}$ pois, do contrário, existe $N\in\mathbb{N}$ com $S_3\in\mathcal{F}_N$, mas daí $A_N\in\mathcal{F}_N$ por valer $S_3\subseteq A_N$, contrariando a escolha de A_N;
- se $S_1\in\mathcal{F}$, então existe N ímpar tal que $S_1\in\mathcal{F}_N\subseteq\mathcal{F}_{N+1}$ (certo?)*, com $S_1\cap C_N=\emptyset$ (pela definição de S_1) e $C_N=A_N\setminus A_{N+1}$, donde segue que $A_N\cap S_1\subseteq A_{N+1}$ (por quê?)* e, como $A_N\in\mathcal{F}_{N+1}$, resulta $A_{N+1}\in\mathcal{F}_{N+1}$, contrariando a escolha de A_{N+1};
- se $S_2\in\mathcal{F}$, então existe $N\in\mathbb{N}$ par... (conclua!)$^{\star}_{\star}$.

Para o restante[††], note que se $\mathcal{G}:=(\mathcal{B})^{\Uparrow}$ é filtro livre, com $\mathcal{B}$ como no enunciado, então existe uma sequência crescente de filtros livres, digamos $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que nenhum $\mathcal{G}_n$ é ultrafiltro mas $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_n=\mathcal{G}$. De fato, podemos escrever $\mathcal{B}=\{B_n:n\in\mathbb{N}\}$ com $B_m\subseteq B_n$ sempre que $m\geq n$ (certo?)$^{\star}_{\star}$, para daí definir $\mathcal{G}_n:=\mathcal{H}\vee\{B_n\}$, onde $\mathcal{H}$ é o filtro dos subconjuntos cofinitos de X.

- Como $\mathcal{G}$ é livre por hipótese, temos $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{G}$ e daí $B_n\cap H\neq\emptyset$ para todo $H\in\mathcal{H}$. Consequentemente, cada $\mathcal{G}_n$ é filtro livre (cf. Proposições 2.2.12 e 2.2.16).

[†] Se $\mathcal{B}$ é finito e $\mathcal{F}=(\mathcal{B})^{\Uparrow}$ é filtro próprio, então $\mathcal{F}$ não é livre (certo?)$^{\star}_{\star}$.

[‡] Adaptada de um argumento atribuído a Blass nessa divertida discussão, iniciada por Boaz Tsaban: https://mathoverflow.net/q/235374/41407.

[††] Se você preferir uma prova direta apenas para essa última afirmação, note que se $\mathcal{B}$ é um prefiltro tal que $\mathfrak{u}=(\mathcal{B})^{\uparrow}$ é ultrafiltro livre, então $|\mathcal{B}|>\aleph_0$: caso contrário, para cada $B\in\mathcal{B}$ podemos escolher pontos distintos $s_B,t_B\in B$ tais que $S:=\{s_B:B\in\mathcal{B}\}$ e $T:=\{t_B:B\in\mathcal{B}\}$ satisfazem $S,T\in\mathfrak{u}$ (cf. Exercício 2.2.7) mas $S\cap T=\emptyset$. Como eu não prefiro esse método, os detalhes ficarão por sua conta (mas só se você quiser).

- Explicitamente, $S \in \mathcal{G}_n$ sse $B_n \setminus S$ é finito, já que $S \in \mathcal{G}_n$ sse existe um subconjunto finito $F \subseteq X$ tal que $B_n \cap (X \setminus F) \subseteq S$, mas esta última inclusão equivale a $B_n \setminus S \subseteq F$. Logo, ao escrever $B_n = C \cup D$, com C e D infinitos e $C \cap D = \emptyset$, resulta que $C \cup D \in \mathcal{G}_n$, mas $C, D \notin \mathcal{G}_n$ e, portanto, $\mathcal{G}_n$ não é ultrafiltro (verifique os detalhes!)$^{\star}_{\star}$.

- Como $B_m \subseteq B_n$ sempre que $m \geq n$, resulta que $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente (percebeu?)*.

- Se $G \in \mathcal{G}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ com $B_n \subseteq G$, mostrando que $G \in \mathcal{G}_n$ (viu?)*.

- Por outro lado, se $G \in \mathcal{G}_n$, então existe um subconjunto finito $F \subseteq X$ tal que $B_n \setminus G \subseteq F$, mas isto significa que $B_n \cap (X \setminus F) \subseteq G$, com $B_n \in \mathcal{G}$ e $X \setminus F \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. Portanto, $G \in \mathcal{G}$. □

Observação 2.2.20. É importante ressaltar que sob as condições anteriores, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ *é filtro*: embora a reunião de filtros possa não ser filtro em geral, neste caso temos uma *cadeia* de filtros, situação em que se elimina a falha apontada no Exemplo 2.2.14. △

§4 Filtros sobre ordens e o Teorema de Rasiowa-Sikorski

Apesar de terem nascido como estruturas de subconjuntos, filtros se adaptam naturalmente em ambientes (pré-) ordenados.

Definição 2.2.21. Dada uma pré-ordem $(\mathbb{P}, \leq)$, um subconjunto não vazio $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ será chamado de **$\leq$-filtro** se ocorrer o seguinte:

(i) para quaisquer $p, q \in \mathcal{F}$ existe $r \in \mathcal{F}$ com $r \leq p$ e $r \leq q$;

(ii) se $p \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathbb{P}$ é tal que $p \leq q$, então $q \in \mathcal{F}$. ¶

É um exercício simples de tradução mostrar, por exemplo, que $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ é $\subseteq$-filtro (no sentido acima, para $(\mathbb{P}, \leq) := (\wp(X), \subseteq)$) se, e somente se, $\mathcal{F}$ é filtro (no sentido da Definição 2.1.13). No entanto, a flexibilidade das pré-ordens permite dar novas aplicações aos filtros, e o próximo teorema ilustrará isso. Para enunciá-lo, precisamos apenas de uma definição "nova" (cf. Exercício 2.2.13): um subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ é **$\leq$-denso** se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $d \in D$ com $d \leq p$.

Teorema 2.2.22 (*A.k.a.* Lema de Rasiowa-Sikorski)**.** *Seja $\mathbb{P}$ uma pré-ordem e $\mathcal{D}$ uma família enumerável de subconjuntos $\leq$-densos de $\mathbb{P}$. Para cada $p \in \mathbb{P}$, existe um $\leq$-filtro $\mathcal{F}_p \subseteq \mathbb{P}$ tal que $p \in \mathcal{F}_p$ e $\mathcal{F}_p \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$.*

Demonstração. Escrevendo $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$, podemos definir $f_{-1} := p$ e escolher $f_n \in D_n$ para cada n de modo a satisfazer $f_{n+1} \leq f_n$ para todo n: como D_0 é $\leq$-denso, existe $f_0 \in D_0$ com $f_0 \leq f_{-1}$ e, como D_1 é $\leq$-denso, existe $f_1 \in D_1$ com $f_1 \leq f_0$, e... Agora, é um exercício simples de checagem ($\star$) observar que

$$\mathcal{F}_p := \{a \in \mathbb{P} : \text{ existe } z \geq -1 \text{ tal que } f_z \leq a\}$$

é um $\leq$-filtro que satisfaz as condições impostas. □

Quase banal, não é mesmo? Poucas coisas estariam mais longe da verdade neste caso.

Arquétipo. Para conjuntos X e Y quaisquer, defina

$$\operatorname{Fn}(X,Y) := \{f : \text{existe subconjunto finito } Z \subseteq X \text{ tal que } f \in \operatorname{Fun}(Z,Y)\}, \tag{2.14}$$

ou, em notação de gente grande, $\operatorname{Fn}(X,Y) := \bigcup_{Z \in [X]^{<\aleph_0}} Y^Z$, coleção que será chamada de *forcing de Cohen*.

Explicitamente, $\operatorname{Fn}(X,Y)$ é a coleção de todos os "pedaços finitos" de funções da forma $X \to Y$, e que possivelmente *guardam* informações de "funções inteiras". Aqui, será melhor encarar os elementos de $\operatorname{Fn}(X,Y)$ como conjuntos de pares ordenados, i.e., $f \in \operatorname{Fn}(X,Y)$ sse

- $f \subseteq X \times Y$ (é uma *relação binária*),
- $y = y'$ sempre que $(x,y), (x,y') \in f$ (é *funcional*), e
- $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : \text{existe } y \in Y \text{ tal que } (x,y) \in f\}$ é subconjunto finito de X.

Dessa forma, a relação de inclusão pode ser usada para ordenar $\operatorname{Fn}(X,Y)$ de modo bastante natural. Todavia, por questões históricas, usaremos a relação de inclusão inversa. Assim, para $f, g \in \operatorname{Fn}(X,Y)$, vamos escrever $f \preceq g$ sse $g \subseteq f$. Consequentemente, $\emptyset = \max \operatorname{Fn}(X,Y)$. A primeira grande surpresa vem agora.

Lema 2.2.23. *Se $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Fn}(X,Y)$ é um $\preceq$-filtro, então $F := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ é uma função do tipo $Z \to Y$, para algum subconjunto $Z \subseteq X$.*

Demonstração. É claro que $F \subseteq X \times Y$. Para $(x,y), (x,y') \in F$, existe $f, g \in \mathcal{F}$ com $(x,y) \in f$ e $(x,y') \in g$. Como $\mathcal{F}$ é $\preceq$-filtro, existe $h \in \mathcal{F}$ com $h \preceq f, g$, i.e., $f, g \subseteq h$. Logo, $y = y'$ pois h é função! Por fim, basta fazer $Z := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{dom}(f)$. □

A segunda surpresa depende de uma observação que parece inútil.

Exercício 2.2.9 ($^{\star}_{\star}$)**.** Com as notações anteriores, mostre que para $x \in X$, o subconjunto $D_x := \{f \in \operatorname{Fn}(X,Y) : x \in \operatorname{dom}(f)\}$ é $\preceq$-denso em $\operatorname{Fn}(X,Y)$. ■

Proposição 2.2.24. *Se $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Fn}(X,Y)$ é um $\preceq$-filtro tal que $\mathcal{F} \cap D_x \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, então $F := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$ é uma função do tipo $X \to Y$.*

Demonstração. Pelo lema, F já é função do tipo $Z \to Y$ para $Z = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{dom}(f)$. Porém, para $x \in X$ qualquer, existe $f_x \in \mathcal{F} \cap D_x$, donde segue que $x \in \operatorname{dom}(f_x) \subseteq Z$. □

Evidentemente, as considerações acima são roupagens alternativas de fatos simples sobre colagens de funções. Em particular, nada disso depende do Lema de Rasiowa-Sikorski. O ponto é que, se X fosse enumerável e, além da família de $\preceq$-densos $\{D_x : x \in X\}$ tivéssemos *outra* coleção enumerável $\mathcal{E}$ de $\preceq$-densos, o Lema de Rasiowa-Sikorski nos garantiria, <u>automaticamente</u>, um $\preceq$-filtro $\mathcal{F}_\emptyset$ tal que $\mathcal{F}_\emptyset \cap \mathcal{D}_x \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ e $\mathcal{F}_\emptyset \cap E \neq \emptyset$ para todo $E \in \mathcal{E}$. Logo, pela proposição anterior, teríamos uma função do tipo $X \to Y$ satisfazendo, adicionalmente, as *condições* codificadas pelos $\preceq$-densos da coleção $\mathcal{E}$. Serve para alguma coisa?

Exercício 2.2.10 ($\binom{\star}{\star\star}$)**.** Use o Lema de Rasiowa-Sikorski para mostrar que se $(\mathbb{T}, \preceq)$ é uma ordem total, *separável*[†], enumerável e sem extremos, então existe um isomorfismo de ordens entre $(\mathbb{T}, \preceq)$ e $(\mathbb{Q}, \leq)$, onde $(\mathbb{Q}, \leq)$ denota o conjunto dos números racionais com sua ordenação usual. Para tanto, considere o seguinte roteiro.

a) Seja $\mathbb{P} := \{p \in \operatorname{Fn}(\mathbb{T}, \mathbb{Q}) : p$ é estritamente crescente$\}$, parcialmente ordenado pela inclusão reversa. Note que $\emptyset \in \mathbb{P}$.

b) Mostre que $D_t := \{p \in \mathbb{P} : t \in \operatorname{dom}(p)\}$ é denso em $\mathbb{P}$, para cada $t \in \mathbb{T}$.

c) Mostre que $E_q := \{p \in \mathbb{P} : q \in \operatorname{im}(p)\}$ é denso em $\mathbb{P}$, para cada $q \in \mathbb{Q}$.

d) Obtenha um isomorfismo $f : \mathbb{T} \to \mathbb{Q}$. ■

Corolário 2.2.25. *Se $(\mathbb{T}, \preceq)$ é uma ordem total, separável, Dedekind-completa e sem extremos, então existe um isomorfismo de ordens entre $(\mathbb{T}, \preceq)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$. Em particular, $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}$ são homeomorfos.*

Demonstração. Por definição, existe um subconjunto infinito enumerável $S \subseteq \mathbb{T}$ que atesta sua separabilidade. Logo, existe um isomorfismo de ordens $f : S \to \mathbb{Q}$, o que nos permite definir $\varphi(t) := \sup\{f(s) : s \in S$ e $s \prec t\}$ para cada $t \in \mathbb{T}$, donde se obtém um isomorfismo de ordens $\varphi : (\mathbb{T}, \preceq) \to (\mathbb{R}, \leq)$. O restante segue do Exercício 1.2.9. Os detalhes ficarão por sua conta ($\binom{\star}{\star}$). □

Corolário 2.2.26. *Todos os intervalos abertos e não vazios da reta são isomorfos como ordens. Em particular, todos são homeomorfos.*

Eu disse que não era banal. Ao longo do texto, outros argumentos desse tipo serão usados ocasionalmente. Caso queira conhecer mais aplicações desse tipo de técnica, você terá que estudar *forcing*! Pois é. Para saber mais, confira [17].

§5 Exercícios adicionais

Exercício 2.2.11 (Ideais ($\binom{\star}{\star\star}$))**.** Sejam X um conjunto e $\mathcal{I} \neq \emptyset$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um **ideal** em X (ou de X) se as duas condições abaixo forem satisfeitas:

(i) $A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I}$, e

(ii) $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A \subseteq X \Rightarrow B \in \mathcal{I}$.

O ideal $\mathcal{I}$ será chamado de (ideal) **próprio** se $X \notin \mathcal{I}$. Em particular, $X = \emptyset$ não admite ideais próprios.

a) Note que $\emptyset \in \mathcal{I}$ para qualquer ideal $\mathcal{I}$ em X.

b) Mostre que as famílias $\{\emptyset\}$ e $\wp(X)$ são ideais em X. Assim como ocorre com os filtros, $\{\emptyset\}$ é chamado de ideal *antidiscreto*, enquanto $\wp(X)$ é o ideal *trivial* de X.

c) Mostre que um ideal $\mathcal{I}$ é trivial se, e somente se, $X \in \mathcal{I}$.

[†]Uma ordem $\mathbb{T}$ é **separável** se existe um subconjunto enumerável $S \subseteq \mathbb{T}$ tal que para quaisquer $x, y \in \mathbb{T}$ com $x < y$ existe $s \in S$ com $x < s < y$. Percebeu que S *precisa* ser infinito? ($\star$)

d) Mostre que a família $\mathscr{I}$ dos ideais em X é parcialmente ordenada pela inclusão. Dada uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X, mostre que existe $\mathcal{G}^{\Downarrow} \in \mathscr{I}$ o menor ideal que contém $\mathcal{G}$. Determine $\mathcal{G}^{\Downarrow}$ explicitamente em termos dos membros de $\mathcal{G}$.

e) Apresente uma definição razoável para o que poderia ser $\mathcal{G}^{\downarrow}$. Qual a definição correspondente de *pré-ideal*?

f) Mostre que $\mathcal{I}$ é um ideal em X sse $\mathcal{F}(\mathcal{I}) := \{X \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$ é um filtro. O ideal $\mathcal{I}$ é dito *dual* ao filtro $\mathcal{F}(\mathcal{I})$.

g) A função $\mathcal{F}\colon \mathscr{I} \to \mathscr{F}$ é um isomorfismo de ordens, i.e., $\mathcal{F}$ é uma bijeção que satisfaz $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J} \Leftrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{I}) \subsetneq \mathcal{F}(\mathcal{J})$. Conclua que $\mathcal{I}$ é maximal na família dos ideais próprios de X sse $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ é ultrafiltro. ■

Exercício 2.2.12 ($^\star_\star$). Sejam $\mathcal{F}$ um filtro em X e subconjuntos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$. Mostre que se $\mathcal{D}$ é $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{F}$ e $\mathcal{C}$ é $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{D}$, então $\mathcal{C}$ é $\supseteq$-cofinal em $\mathcal{F}$. ■

Exercício 2.2.13. Seja $\mathbb{P}$ uma pré-ordem e para cada $q \in \mathbb{P}$ considere sobre $\mathbb{P}$ a topologia gerada pela família $\left\{q^{\downarrow} : q \in \mathbb{P}\right\}$, onde $q^{\downarrow} := \{p \in \mathbb{P} : p \leq q\}$ para cada $q \in \mathbb{P}$. Mostre que $D \subseteq \mathbb{P}$ é $\leq$-denso sse D é denso em $\mathbb{P}$ (no sentido topológico). ■

2.2.4 Manipulação das redes

Redes são objetos mais simples do que filtros. No entanto, à primeira vista, a interação entre elas costuma ser menos direta: a definição não sugere, de imediato, relações naturais entre duas redes quaisquer num mesmo conjunto. Para filtros próprios $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sobre um conjunto X, por exemplo, é *natural* considerar o filtro próprio $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e, embora $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ não seja necessariamente um filtro, é fácil corrigir esse problema passando a $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} := (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})^{\Uparrow}$. Em contrapartida, com redes (ou mesmo sequências), operações análogas sequer parecem fazer sentido.

Nesta subseção, veremos que a primeira impressão nem sempre está certa.

§1 Sincronização de domínios

Okay, a verdade é que a interação entre redes só faz sentido *por meio* de filtros ou, mais especificamente, *através* do Teorema 2.1.26 e seus corolários: o que definiremos como *interseção* entre redes φ e ψ, por exemplo, será *uma* rede $\varphi \wedge \psi$ satisfazendo a identidade $(\varphi \wedge \psi)^{\uparrow} = (\varphi)^{\uparrow} \cap (\psi)^{\uparrow}$. Porém, para propósitos topológicos, qualquer outra rede ρ satisfazendo $(\rho)^{\uparrow} = (\varphi)^{\uparrow} \cap (\psi)^{\uparrow}$ pode substituir $\varphi \wedge \psi$. Quem tem familiaridade com Álgebra Abstrata já deve ter percebido o *quociente* implícito aqui.

Definição 2.2.27. A fim de uniformizar a discussão, diremos que duas redes φ e ψ sobre um conjunto X são **filtro-equivalentes** se ocorrer $(\varphi)^{\uparrow} = (\psi)^{\uparrow}$. ¶

Apesar do nome, você *pode* omitir filtros na definição de filtro-equivalência. Basta notar que $(\varphi)^{\uparrow} = (\psi)^{\uparrow}$ sse as duas condições a seguir forem satisfeitas,

- para todo $A \in \operatorname{dom}(\varphi)$ existe $\widetilde{B} \in \operatorname{dom}(\psi)$ tal que $\psi\left[\widetilde{B}^{\uparrow}\right] \subseteq \varphi\left[A^{\uparrow}\right]$, e
- para todo $B \in \operatorname{dom}(\psi)$ existe $\widetilde{A} \in \operatorname{dom}(\varphi)$ tal que $\varphi\left[\widetilde{A}^{\uparrow}\right] \subseteq \psi\left[B^{\uparrow}\right]$,

pois elas equivalem, respectivamente, a $(\varphi)^{\uparrow} \subseteq (\psi)^{\uparrow}$ e $(\psi)^{\uparrow} \subseteq (\varphi)^{\uparrow}$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. Com as terminologias da vindoura Subseção 3.1.1 §4 , φ e ψ são filtro-equivalentes sse φ e ψ são *sub-redes* uma da outra.

Mantra: todas as operações entre redes devem ser invariantes por filtro-equivalência.

A primeira aplicação do mantra acima será a *sincronização de domínios*, uma observação simples mas poderosa, capaz de eliminar uma das coisas mais irritantes ao lidar com redes distintas sobre um mesmo conjunto: a incompatibilidade entre os conjuntos dirigidos.

Teorema 2.2.28 (Sincronização de domínios)**.** *Para uma $\mathcal{I}$-upla $\Phi := (\varphi_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de redes num conjunto X, existem um conjunto dirigido $\mathbb{D}_\Phi$ e redes $\psi_i\colon \mathbb{D}_\Phi \to X$ tais que ψ_i e φ_i são filtro-equivalentes para cada $i \in \mathcal{I}$.*

Demonstração. Vamos definir $\mathbb{D}_\Phi := \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{dom}\,(\varphi_i)$ com a relação produto usual, dada por

$$(a_i)_{i\in\mathcal{I}} \preceq (b_i)_{i\in\mathcal{I}} \Leftrightarrow a_i \preceq_i b_i \text{ para todo } i \in \mathcal{I},$$

onde $\preceq_i$ indica a relação sobre $\mathrm{dom}\,(\varphi_i)$ segundo a qual este é um conjunto dirigido. É um exercício simples ($\star$) mostrar que $(\mathbb{D}_\Phi, \preceq)$ é um conjunto dirigido, o que faz da função $\psi_i := \varphi_i \circ \pi_i\colon \mathbb{D}_\Phi \to X$ uma rede legítima. Só falta provar $(\psi_i)^{\uparrow} = (\varphi_i)^{\uparrow}$.

- Se $a \in \mathrm{dom}\,(\varphi_i)$, então para qualquer $A \in \mathbb{D}_\Phi$ satisfazendo $\pi_i(A) = a$ verifica-se $\pi_i(B) \succeq_i a$ sempre que $B \in \mathbb{D}_\Phi$ for tal que $B \succeq A$, mostrando que $\psi_i\left[A^{\uparrow}\right] \subseteq \varphi_i\left[a^{\uparrow}\right]$ (percebeu mesmo?)*.

- Se $D = (D_j)_{j\in\mathcal{I}} \in \mathbb{D}_\Phi$, então $\varphi_i\left[D_i^{\uparrow}\right] \subseteq \psi_i\left[D^{\uparrow}\right]$ pois, se $d \succeq_i D_i$, então a $\mathcal{I}$-upla $E := (E_j)_{j\in\mathcal{I}} \in \mathbb{D}_\Phi$ dada por

$$E_j := \begin{cases} D_j, & \text{se } j \neq i \\ d, & \text{se } j = i \end{cases}$$

  é tal que $\varphi_i(d) = \varphi_i(\pi_i(E)) = \psi_i(E)$ com $E \succeq D$, i.e., $\varphi_i(d) \in \psi_i\left[D^{\uparrow}\right]$. $\square$

Se φ é uma rede em X e Z é um conjunto não vazio qualquer, por exemplo, então existe uma rede $\varphi'\colon Z \times \mathrm{dom}\,(\varphi) \to X$ satisfazendo $(\varphi')^{\uparrow} = (\varphi)^{\uparrow}$: basta dirigir $Z \times \mathrm{dom}\,(\varphi)$ declarando $(z, \alpha) \preceq (z', \beta)$ sse $\alpha \preceq \beta$ em $\mathrm{dom}\,(\varphi)$, para daí definir[†] $\varphi' := \varphi \circ \pi_{\mathrm{dom}(\varphi)}$. Em particular, se você veio até aqui por conta do Exemplo 3.1.31, perceba que se φ for uma sequência, então φ' é uma sub-rede que não é subsequência: na verdade, como Z pode ser tomado como *qualquer* conjunto não vazio, segue que φ' admite como domínio conjuntos de índices arbitrariamente *grandes*.

Para uma ilustração mais interessante, considere o problema de lidar com redes num produto de espaços, digamos $X \times Y$. É claro que se $\varphi = ((x_d, y_d))_{d\in\mathbb{D}}$ é uma rede em $X \times Y$ que converge para $(x, y) \in X \times Y$, então $\pi_X \circ \varphi = (x_d)_{d\in\mathbb{D}} \to_X x$ e $\pi_Y \circ \varphi\,(y_d)_{d\in\mathbb{D}} \to_Y y$ (cf. Observação 2.1.88). Porém, dadas redes $\psi := (s_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ em X e $\zeta := (t_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ em Y, com $\psi \to_X x$ e $\zeta \to_Y y$, torna-se menos óbvio usar ψ e ζ para induzir uma rede em $X \times Y$ que convirja para (x, y), pois a princípio pode ocorrer $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$: se tivéssemos $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, bastaria considerar $((s_\alpha, t_\alpha))_{\alpha\in\mathbb{A}}$, num espelho do que se fez na ida.

[†]Você também pode aplicar diretamente o teorema anterior: basta dirigir Z de qualquer modo arbitrário e considerar uma rede auxiliar $\psi\colon Z \to X$, que será irrelevante no final das contas.

Como você já deve ter imaginado, o natural aqui é considerar $\varphi := ((s_\alpha, t_\beta))_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{A}\times\mathbb{B}}$, com $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ dirigido pela pré-ordem *produto* das pré-ordens em $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$. O curioso disso tudo é que, secretamente, fizemos uma sincronização de domínios segundo a qual $\varphi = ((x_d, y_d))_d$. Duvida? Com $\mathbb{D} := \mathbb{A}\times\mathbb{B}$, $x_d := s_{\pi_{\mathbb{A}}(d)}$ e $y_d := t_{\pi_{\mathbb{B}}(d)}$ para cada $d \in \mathbb{A}\times\mathbb{B}$, temos $\pi_X \circ \varphi = (x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ e $\pi_Y \circ \varphi = (y_d)_{d\in\mathbb{D}}$! Assim, você não precisa sentir tanta culpa se confundir, de vez em quando, $(s_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ com $(s_\alpha)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{A}\times\mathbb{B}}$.

Exercício 2.2.14 $(\star)$**.** Apenas para registro: convença-se de que se $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}} \to x$ em X e $(y_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}} \to y$ em Y, então $((x_\alpha, y_\beta))_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{A}\times\mathbb{B}} \to (x, y)$ em $X \times Y$. ■

§2 Misturas e colagens

A *convergência topológica* em termos de filtros vem de fábrica com uma propriedade que parece completamente inútil quando vista pela primeira vez.

Proposição 2.2.29. *Dados filtros próprios $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ num espaço topológico X, tem-se $\lim\mathcal{F} \cap \lim\mathcal{G} \subseteq \lim\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$. Em outras palavras: se $\mathcal{F} \to x$ e $\mathcal{G} \to x$, então $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} \to x$.*

Demonstração. Ora, se $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{G}$, então $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}\cap\mathcal{G}$. □

Exercício 2.2.15 $\left(^{\star}_{\star}\right)$**.** Você percebeu que, na verdade, $\lim\mathcal{F}\cap\lim\mathcal{G} = \lim\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$? ■

Por que alguém se importaria com interseções de filtros?

Corolário 2.2.30. *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências num espaço X, e considere $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \in \{x_n, y_n\}$ para todo n. Se $(x_n)_n \to z$ e $(y_n)_n \to z$, então $(z_n)_n \to z$.*

Demonstração. Fazendo $\mathcal{F} := (x_n)_n^{\uparrow}$ e $\mathcal{G} := (y_n)_n^{\uparrow}$ no último corolário, o resultado segue pois $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} \subseteq (z_n)_n^{\uparrow}$: se $S \in \mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, então existem índices $M, N \in \mathbb{N}$ tais que

$$\{x_m : m \geq M\} \cap \{y_n : n \geq N\} \subseteq S,$$

de modo que para $L \geq M, N$ resulta $\{z_l : l \geq L\} \subseteq S$ (entendeu?)*. □

Exercício 2.2.16 $\left(^{\star}_{\star}\right)$**.** No corolário anterior, mostre que *bastaria existir*† $K \in \mathbb{N}$ tal que $z_k \in \{x_k, y_k\}$ para todo $k \geq K$. ■

Assim, a interseção de filtros *codifica*, em certo sentido, o processo de *misturar* os termos de duas sequências para obter uma terceira sequência, enquanto a Proposição 2.2.29 prova que a *noção topológica* de convergência é estável por *misturas*. Dada a natureza desta subseção, convém fazer isso *sem* filtros — e com redes.

Teorema 2.2.31. *Para uma $\mathcal{I}$-upla $(\varphi_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de redes sobre um conjunto X, existe uma rede $\Lambda_\varphi \in \mathsf{Net}(X)$ tal que $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} (\varphi_i)^{\uparrow} = (\Lambda_\varphi)^{\uparrow}$.*

Demonstração. De modo geral, se cada $\mathcal{F}_i$ é filtro próprio em X, então $\mathcal{F} := \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i$ é gerado pelos subconjuntos da forma $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} F_i$, com $F_i \in \mathcal{F}_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ (cf. Exercício 2.2.6), afinal, se S contém um subconjunto dessa forma, então $S \in \mathcal{F}_i$ para cada índice i em $\mathcal{I}$. Assim, procuramos um conjunto dirigido $\mathbb{D}$ e uma rede $\Lambda_\varphi \colon \mathbb{D} \to X$ cujos rabos $\Lambda_\varphi\left[D^{\uparrow}\right]$ sejam precisamente subconjuntos da forma $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \varphi_i\left[d_i^{\uparrow}\right]$, com $d_i \in \operatorname{dom}(\varphi_i)$ para todo i, conforme D *varia* em $\mathbb{D}$.

†Isto não significa que essa será sua única hipótese: ~~é óbvio que~~ você ainda precisa supor $(x_n)_n \to z$ e $(y_n)_n \to z$, já que o resultado se tornaria falso sem isso. Interpretação de texto também exige uma certa dose de malícia.

Pelo que se discutiu na última subsubseção, não há perda de generalidade em assumir $\operatorname{dom}(\varphi_i) = \mathbb{A}$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Ao fazer isso, note que uma $\mathcal{I}$-upla $(d_i)_{i\in\mathcal{I}}$ em $\prod_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{dom}(\varphi_i)$ é apenas uma função $d\colon \mathcal{I} \to \mathbb{A}$, enquanto a própria $\mathcal{I}$-upla de redes dada pela hipótese é uma função $\mathcal{I} \times \mathbb{A} \to X$ que a cada $(i, \alpha) \in \mathcal{I} \times \mathbb{A}$ associa $\varphi_i(\alpha) \in X$. Quase acabou: a rede Λ_φ procurada é resultado da composição

$$\operatorname{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{A}) \times \mathcal{I} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}\times \mathrm{ev}} \mathcal{I} \times \mathbb{A} \longrightarrow X$$

que explicitamente faz $\Lambda_\varphi(d, i) := \varphi_i(d(i))$ para cada $d \in \operatorname{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{A})$ e $i \in \mathcal{I}$.

Para encerrar de fato, precisamos apenas *dirigir* $\mathbb{D} := \operatorname{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{A}) \times \mathcal{I}$ de maneira adequada, mas não há novidades[†]: basta declarar $(d, i) \preceq (e, j)$ sse $d(k) \preceq_{\mathbb{A}} e(k)$ para todo $k \in \mathcal{I}$. Dessa forma, não é difícil perceber (e você percebeu, certo?)$^{\star}_{\star}$ que para quaisquer $d \in \operatorname{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{A})$ e $j \in \mathcal{I}$ se verifica $\Lambda_\varphi\left[(d, j)^{\uparrow}\right] = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \varphi_i\left[d(i)^{\uparrow}\right]$, como desejado. □

Exercício 2.2.17 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Mostre que o teorema anterior permanece verdadeiro para *sequências* se $\mathcal{I}$ for enumerável. Dica: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. ■

Exercício 2.2.18 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para um conjunto dirigido $\mathbb{D}$, sejam $\varphi, \psi\colon \mathbb{D} \to X$ redes num espaço topológico X, bem como uma rede $\rho\colon \mathbb{D} \to X$ e um ponto $x \in X$. Mostre que se $\varphi \to x$, $\psi \to x$ e existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $\rho(d) \in \{\varphi(d), \psi(d)\}$ para todo $d \succeq D$, então $\rho \to x$. Dica: adapte o Corolário 2.2.30 e o Exercício 2.2.16 para redes. ■

Agora, se você acha que nunca usou esse tipo de propriedade na sua vida, tenho uma novidade:

Teorema 2.2.32 (*A.k.a.* Lema da Colagem)**.** *Seja $f\colon X \to Y$ uma função entre espaços topológicos X e Y. Se $S, T \subseteq X$ são fechados tais que $X = S \cup T$, com $f|_S$ e $f|_T$ contínuas, então f é contínua.*

Demonstração. Para $x \in X$ qualquer, provaremos que f é contínua em x e, para isso, usaremos redes[‡]: mostraremos que se $\varphi \in \mathsf{Net}(X)$ for tal que $\varphi \to x$, então $f \circ \varphi \to f(x)$. Há, essencialmente, dois casos.

Se $x \in S \setminus T$, então $A := X \setminus T$ é um aberto tal que $x \in A$, com $A \subseteq S$. Pela Proposição 2.1.39, existe $D \in \operatorname{dom}(\varphi)$ tal que $\varphi(d) \in A$ para todo $d \succeq D$, mostrando que $\psi := \varphi|_{D^{\uparrow}}$ é uma rede em S com $\psi \to x$ em S. Finalmente, a hipótese de continuidade assegura $f|_S \circ \psi \to f(x)$ em Y e, por valer $f|_S \circ \psi = (f \circ \varphi)|_{D^{\uparrow}}$, conclui-se que $f \circ \varphi \to f(x)$ (por quê?!)[††]. O caso em que $x \in T \setminus S$ é simétrico.

Por outro lado, se $x \in S \cap T$, definimos duas redes auxiliares, ψ_S e ψ_T com o mesmo domínio de φ, declarando

$$\psi_S(d) := \begin{cases} \varphi(d), & \text{se } \varphi(d) \in S \\ x, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_T(d) := \begin{cases} \varphi(d), & \text{se } \varphi(d) \in T \\ x, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Pelo exercício anterior, tanto ψ_S quanto ψ_T são redes em X que convergem para x (discorda?!)*, mas não só isso: $\psi_S \in \mathsf{Net}(S)$, enquanto $\psi_T \in \mathsf{Net}(T)$. Logo, pela hipótese sobre f, temos $f|_S \circ \psi_S \to f(x)$ e $f|_T \circ \psi_T \to f(x)$ em Y. Novamente por conta do exercício anterior, obtemos $f \circ \varphi \to f(x)$ em Y (como?)$^{\star}_{\star}$. □

[†]Compare com as definições dos conjuntos dirigidos nas demonstrações dos Teoremas 2.1.26 e 2.2.28.

[‡]É possível provar o Lema da Colagem sem usar redes? Certamente! É difícil? Muito pelo contrário, é quase simples! Você encontrará uma dessas provas aqui? Não.

[††]Tente entender o motivo sem ajuda ($^{\star}_{\star\star}$). Se não conseguir, confira o Exercício 3.1.12.

O correspondente para redes da *reunião* de filtros tem um agravante: não há rede que induza o filtro trivial em X, pois não há rabos vazios. Assim, para redes φ e ψ e X, a definição de uma rede $\rho \in \mathsf{Net}(X)$ tal que $(\rho)^{\uparrow} = (\varphi)^{\uparrow} \vee (\psi)^{\uparrow}$ só é possível se $(\varphi)^{\uparrow} \cup (\psi)^{\uparrow}$ for um coleção de subconjuntos de X com a p.i.f. (cf. Exemplo 2.2.14). Um dos modos de realizar tal construção é considerar $\mathbb{E} := \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{dom}\,(\varphi) \times \mathrm{dom}\,(\psi) : \varphi(\alpha) = \psi(\beta)\}$ e fazer $\rho \colon \mathbb{E} \to X$ de um jeito maroto. Os detalhes ficarão por sua conta $(^{\star}_{\star\star})$.

§3 Redes de redes

Para encerrar esta *primeira* imersão no universo das redes, vamos retornar ao Teorema 2.1.49, especificamente para a demonstração (via redes) da inclusão

$$\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)) \subseteq \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S),$$

onde S é um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.

Em resumo, a partir da existência de uma rede $\psi \in \mathsf{Net}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S))$ com $\psi \to x$, busca-se uma rede $\varphi \in \mathsf{Net}(S)$ tal que $\varphi \to x$. No argumento previamente apresentado (cf. pág. 66), a rede φ foi obtida por meio do pré-filtro de abertos em torno de x. Tal desvio ideológico foi tomado apenas para adiar algumas revelações ~~e evitar traumas prematuros~~: para quem já tem familiaridade com redes, seria muito mais natural *construir* φ a partir de ψ.

Como $\psi \in \mathsf{Net}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S))$, temos $\psi(a) \in \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$ para cada $a \in \mathrm{dom}\,(\psi)$. Logo, pela definição de *aderência*, para cada $a \in \mathrm{dom}\,(\psi)$ existe uma rede $\psi_a \in \mathsf{Net}(S)$ tal que $\psi_a \to \psi(a)$ em X. Em outras palavras, obtivemos uma rede $(\psi_a)_{a \in \mathrm{dom}(\psi)}$ cujos termos ψ_a são redes em S — uma *rede de redes* [33]. Sincronizando o domínio de todas elas se necessário (cf. Teorema 2.2.28), a existência da rede procurada φ segue do próximo

Teorema 2.2.33 (dos limites iterados)**.** *Seja $\mathbb{D}$ um conjunto dirigido e, para cada $d \in \mathbb{D}$, fixe $L_d \in X$ e uma rede $\psi_d \colon \mathbb{D} \to X$ com $\psi_d \to L_d$. Se a rede $(L_d)_{d \in \mathbb{D}}$ converge para L em X, então a rede*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ev}^{\psi} \colon \ \mathrm{Fun}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \times \mathbb{D} &\to X \\ (g, d) &\mapsto \psi_d(g(d)) \end{aligned}$$

também converge para L, onde $\mathrm{Fun}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \times \mathbb{D}$ *é dirigido pela pré-ordem produto usual*[†]*.*

Demonstração. Para um aberto $V \subseteq X$ em torno de L existe $D \in \mathbb{D}$ tal que $L_d \in V$ sempre que $d \succeq_{\mathbb{D}} D$ (pois $(L_d)_d \to L$) e, para cada $d \in D^{\uparrow}$, existe $A_d \in \mathbb{D}$ tal que $\psi_d[A_d^{\uparrow}] \subseteq V$ (pois $L_d \in V$ e $\psi_d \to L_d$).

Ao fixar $(g, D) \in \mathrm{Fun}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \times \mathbb{D}$ de modo a garantir $g(d) = A_d$ para todo d em $D^{\uparrow}$, segue que $\mathrm{Ev}^{\psi}\left[(g, D)^{\uparrow}\right] \subseteq V$: se $(h, d) \succeq (g, D)$, então $d \succeq_{\mathbb{D}} D$, $h(d) \succeq_{\mathbb{D}} g(d) := A_d$ e, portanto, $\mathrm{Ev}^{\psi}(h, d) = \psi_d(h(d)) \in V$. $\square$

Exercício 2.2.19 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Prove a inclusão $\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(\mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)) \subseteq \mathrm{ad}_{\mathcal{T}}(S)$ usando apenas convergência de redes (em espaços topológicos). $\blacksquare$

Secretamente, o teorema indica como lidar com *limites de limites*, explicitando o modo sutil com que a *convergência* se *propaga iteradamente* entre redes num espaço topológico. Supondo que X seja de Hausdorff para acalmar os ânimos, o que se provou foi o seguinte: se $\lim_{\alpha \in \mathbb{D}} \psi_d(\alpha) = L_d \in X$ para cada $d \in \mathbb{D}$ e $(L_d)_d$ converge em X, então

[†] I.e., $(g, \alpha) \preceq (h, \beta)$ sse $\alpha \preceq_{\mathbb{D}} \beta$ e $g(d) \preceq_{\mathbb{D}} h(d)$ para todo $d \in \mathbb{D}$. Não confunda com a ordenação utilizada no Teorema 2.2.31.

$$\lim \mathrm{Ev}^{\psi} := \lim_{(g,d)\in \mathrm{Fun}(\mathbb{D},\mathbb{D})\times\mathbb{D}} \psi_d(g(d)) = \lim_{d\in\mathbb{D}} L_d.$$

Em certo sentido, a rede Ev^{ψ} "concatena" as informações contidas na rede de redes $(\psi_d)_d$, permitindo tratar todas elas como se fossem uma só. Contudo, dada a complexidade do domínio de Ev^{ψ}, é natural procurar por *concatenações* mais simples, justamente onde duas candidatas naturais surgem:

Candidata I: a concatenação ~~matricial~~ "uniforme" $\mathbb{M}_{\psi} := (\psi_d(\alpha))_{(d,\alpha)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}}$.

Candidata II: a "diagonal" $\Delta_{\psi} := (\psi_d(d))_{d\in\mathbb{D}}$.

Proposição 2.2.34. *Com as notações anteriores,* $(\mathbb{M}_{\psi})^{\uparrow} \subseteq \left(\mathrm{Ev}^{\psi}\right)^{\uparrow} \cap (\Delta_{\psi})^{\uparrow}$.

Demonstração. É um exercício edificante ($\star$) observar que para $D\in\mathbb{D}$, $(A,B)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ e $(g,C)\in\mathrm{Fun}(\mathbb{D},\mathbb{D})\times\mathbb{D}$, temos $\Delta_{\psi}\left[D^{\uparrow}\right] = \{\psi_d(d) : d\succeq D\}$, $\mathbb{M}_{\psi}\left[(A,B)^{\uparrow}\right] = \bigcup_{\alpha\in A^{\uparrow}}\psi_{\alpha}\left[B^{\uparrow}\right]$ e $\mathrm{Ev}^{\psi}\left[(g,C)^{\uparrow}\right] = \bigcup_{\gamma\in C^{\uparrow}}\psi_{\gamma}\left[g(\gamma)^{\uparrow}\right]$. As inclusões desejadas seguem quase sem esforço dessas identidades. Bom, pelo menos sem o meu esforço (entendeu?)$^{\star}_{\star}$. □

Corolário 2.2.35. *Se* $\mathbb{M}_{\psi}\to x$*, então* $\mathrm{Ev}^{\psi}\to x$ *e* $\Delta_{\psi}\to x$*. Em outras palavras,*

$$\lim_{(d,\alpha)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}} \psi_d(\alpha) \subseteq \lim_{(g,d)\in\mathrm{Fun}(\mathbb{D},\mathbb{D})\times\mathbb{D}} \psi_d(g(d)) \cap \lim_{d\in\mathbb{D}} \psi_d(d).$$

Exercício 2.2.20 ($\star$)**.** Prove o corolário anterior. ■

Exemplo 2.2.36. O "problema", como você já deve imaginar, está nas recíprocas. Mas não se preocupe, nada muito sofisticado é necessário para se dar conta disso. Por exemplo, para cada $m,n\in\mathbb{N}$, considere em $\mathbb{R}$ o número

$$S_m(n) := \begin{cases} 1, & \text{se } n\leq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Para $m\in\mathbb{N}$ fixado, é claro que $S_m := \lim_{n\to\infty} S_m(n) = 0$ e, por conseguinte, $\lim_{m\to\infty} S_m = 0$. Por outro lado, $(S_n(n))_n = (1)_n \to 1$. Portanto, com as notações anteriores, temos $\mathrm{Ev}^{S}\to 0$ (como esperado), mas $\Delta_S\to 1$, o que impede a convergência de $\mathbb{M}_S := (S_m(n))_{m,n}$. ▲

Exercício 2.2.21 ($\star$)**.** Com as notações anteriores, mostre que se $T_m(n) = S_n(m)$, então $\mathrm{Ev}^{T}\to 1$. Dica: $\lim_{n\to\infty} T_m(n) = 1$ para todo $m\in\mathbb{N}$. ■

De modo geral, uma rede $\Psi\colon\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to X$ induz *duas* redes de redes naturais: para $A,B\in\mathbb{D}$ fixados, podemos definir

$$\begin{aligned}\Psi(A,\cdot)\colon \mathbb{D} &\to X \\ d &\mapsto \Psi(A,d)\end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned}\Psi(\cdot,B)\colon \mathbb{D} &\to X \\ d &\mapsto \Psi(d,B)\end{aligned},$$

o que permite considerar as redes de redes $\Psi_{(\cdot,\mathbb{D})} := (\Psi(A,\cdot))_{A\in\mathbb{D}}$ e $\Psi_{(\mathbb{D},\cdot)} := (\Psi(\cdot,B))_{B\in\mathbb{D}}$. Neste caso, tanto $\Psi_{(\cdot,\mathbb{D})}$ quanto $\Psi_{(\mathbb{D},\cdot)}$ induzem a mesma *diagonal* $\Delta_{\Psi}\colon\mathbb{D}\to X$, que a cada $d\in\mathbb{D}$ associa o ponto $\Psi(d,d)$. Por outro lado, as concatenações $\mathrm{Ev}^{\Psi_{(\cdot,\mathbb{D})}}$ e $\mathrm{Ev}^{\Psi_{(\mathbb{D},\cdot)}}$ são distintas: se $(g,d)\in\mathrm{Fun}(\mathbb{D},\mathbb{D})\times\mathbb{D}$, então $\mathrm{Ev}^{\Psi_{(\cdot,\mathbb{D})}}(g,d) = \Psi(d,g(d))$, enquanto $\mathrm{Ev}^{\Psi_{(\mathbb{D},\cdot)}}(g,d) = \Psi(g(d),d)$.

Sob tal roupagem, o Teorema 2.2.33 e o Corolário 2.2.35 se reescrevem da seguinte forma:

Corolário 2.2.37. *Seja* $\Psi\colon \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to X$ *uma rede.*

(i) *Se* $\Psi(A,\cdot)\to p_A$ *para cada* $A\in\mathbb{D}$ *e* $(p_A)_{A\in\mathbb{D}}\to p$ *em* X*, então* $\mathrm{Ev}^{\Psi(\cdot,\mathbb{D})}\to p$.

(ii) *Se* $\Psi(\cdot,B)\to q_B$ *para cada* $B\in\mathbb{D}$ *e* $(q_B)_{A\in\mathbb{D}}\to q$ *em* X*, então* $\mathrm{Ev}^{\Psi(\mathbb{D},\cdot)}\to q$.

(iii) *Se* $\Psi\to x$*, então* $\mathrm{Ev}^{\Psi(\cdot,\mathbb{D})}\to x$*,* $\mathrm{Ev}^{\Psi(\mathbb{D},\cdot)}\to x$ *e* $\Delta_\Psi\to x$.

Exercício 2.2.22 $(^{\star}_{\star})$**.** Prove o corolário acima. Dica: use os resultados anteriores. ■

Observação 2.2.38 (Opcional: interpretação "matricial")**.** Um modo informal e psicologicamente útil de interpretar o último corolário faz uso de matrizes. No caso do item (i), por exemplo, se cada *coluna* $\Psi(A,\cdot)$ converge para p_A e $(p_A)_A$ converge para p, então a concatenação $\mathrm{Ev}^{\Psi(\cdot,\mathbb{D})}$ converge para p. O item (ii) é o análogo com *linhas*. Nesse sentido, o Exemplo 2.2.36 ilustra que a convergência das *linhas* ou das *colunas* não é suficiente para assegurar a convergência da *matriz* Ψ de maneira "uniforme".

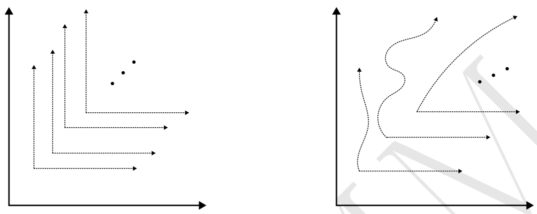


Figura 2.3: Uma cadeia de cones em $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ vs. a *sombra* de uma cadeia de cones em $\mathrm{Fun}(\mathbb{D},\mathbb{D})\times\mathbb{D}$.

Por sua vez, o item (iii) diz apenas que se a *matriz* Ψ converge, então tanto as concatenações de linhas e colunas quanto a diagonal convergem para os mesmos pontos. E aqui cabe uma ressalva importante: a *matriz* pode convergir sem que qualquer linha ou coluna convirja! Para se convencer disso, considere

$$x_{m,n} := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+n}}{\min\{m,n\}+1}, & \text{se } m\neq n\\ 0, & \text{se } m=n\end{cases}$$

e defina $\Psi\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ como $\Psi(m,n):=x_{m,n}$. Note que para $\varepsilon>0$ dado, com $N\in\mathbb{N}$ satisfazendo $\frac{1}{N+1}<\varepsilon$ resulta $|x_{m,n}|<\varepsilon$ sempre que $(m,n)\succeq(N,N)$, mostrando que $\Psi\to 0$. Por outro lado, para quaisquer $A,B\in\mathbb{N}$ fixados, tanto $\Psi(A,\cdot)\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ quanto $\Psi(\cdot,B)\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ não convergem em $\mathbb{R}$.

Apesar do que se observou acima, são frequentes as situações em que $\Psi(A,\cdot)\to p_A$ e $\Psi(\cdot,B)\to q_B$ para quaisquer $A,B\in\mathbb{D}$, mas sem que se tenham informações adicionais sobre $(p_A)_A$ ou $(q_B)_B$. Futuramente, veremos que sob tais hipóteses, se a *matriz* Ψ convergir num espaço *regular*, então $(p_A)_A$ e $(q_B)_B$ também convergem para o mesmo ponto. Simbolicamente, e após um simples ajuste de notação, isto costuma ser expresso por meio da identidade

$$\lim_{\alpha\in\mathbb{D}}\left(\lim_{d\in\mathbb{D}}\Psi(\alpha,d)\right)=\lim_{d\in\mathbb{D}}\left(\lim_{\alpha\in\mathbb{D}}\Psi(\alpha,d)\right). \qquad \triangle$$

Embora a narrativa faça parecer que limites iterados sejam um jeito complicado de lidar com algo simples (o fechamento da aderência em espaços topológicos), trata-se de um problema muito natural em Análise[†]. Suponha que $(f_d)_{d\in\mathbb{D}}$ seja uma rede de funções contínuas (♡), digamos que da forma $X\to Y$, tal que $(f_d)_d\to_L f$ com respeito a alguma *noção de convergência* L, onde $f\colon X\to Y$ é uma função não necessariamente contínua.

[†]O que em outras palavras significa "um jeito complicado de lidar com algo complicado".

Problema: encontrar condições que assegurem a continuidade da função f.

Ora, fixado um ponto $x \in X$, deve-se mostrar que se uma rede φ em X converge para x, então $f \circ \varphi \to f(x)$ em Y. Como podemos sincronizar os domínios, não há perda de generalidade em supor $\varphi = (x_d)_{d \in \mathbb{D}}$, e para tornar a escrita ainda menos ofensiva, vamos assumir que todas as *convergências* envolvidas sejam de Hausdorff. Desse modo, a condição procurada, "$f \circ \varphi \to f(x)$", se reescreve como (!) em

$$\lim(f \circ \varphi) := \lim \left(f(x_d)\right)_{d \in \mathbb{D}} := \lim_{d \in \mathbb{D}} f(x_d) \underset{(!)}{=} f\left(\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d\right),$$

que pela *natureza* de f se torna

$$\lim_{d \in \mathbb{D}} \left(\left(\overset{\to_L}{\lim_{\alpha \in \mathbb{D}}} f_\alpha\right)(x_d)\right) \underset{(!)}{=} \left(\overset{\to_L}{\lim_{\alpha \in \mathbb{D}}} f_\alpha\right)\left(\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d\right). \tag{2.15}$$

Ainda não parece um limite iterado, mas estamos quase lá. Sem exigências sobre a "noção de convergência" $\to_L$, saber que $\overset{\to_L}{\lim\limits_{\alpha \in \mathbb{D}}} f_\alpha = f$, i.e., $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{D}} \to_L f$, não nos diz efetivamente *como* usar f para, digamos, calcular $f(p)$. Encontramos aí uma primeira Suposição razoável (#): $\to_L$ *é mais forte* do que $\to_p$, i.e., se $(f_\alpha)_\alpha \to_L f$, então $f(p) = \lim_{\alpha \in \mathbb{D}} f_\alpha(p)$ para todo $p \in X$.

Enfim, com a suposição (#), a identidade expressa em (2.15) se reescreve como

$$\begin{aligned}\lim_{d \in \mathbb{D}}\left(\lim_{\alpha \in \mathbb{D}} f_\alpha(x_d)\right) &\underset{(\#)}{=} \lim_{d \in \mathbb{D}}\left(\left(\overset{\to_L}{\lim_{\alpha \in \mathbb{D}}} f_\alpha\right)(x_d)\right) \underset{(!)}{=} \left(\overset{\to_L}{\lim_{\alpha \in \mathbb{D}}} f_\alpha\right)\left(\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d\right) \\ &\underset{(\#)}{=} \lim_{\alpha \in \mathbb{D}}\left(f_\alpha\left(\lim_{d \in \mathbb{D}} x_d\right)\right) \underset{(\heartsuit)}{=} \lim_{\alpha \in \mathbb{D}}\left(\lim_{d \in \mathbb{D}} f_\alpha(x_d)\right).\end{aligned}$$

Conclusão: decidir se um limite *razoável* de funções contínuas é uma função contínua consiste, basicamente, em resolver um problema de igualdade entre limites iterados.

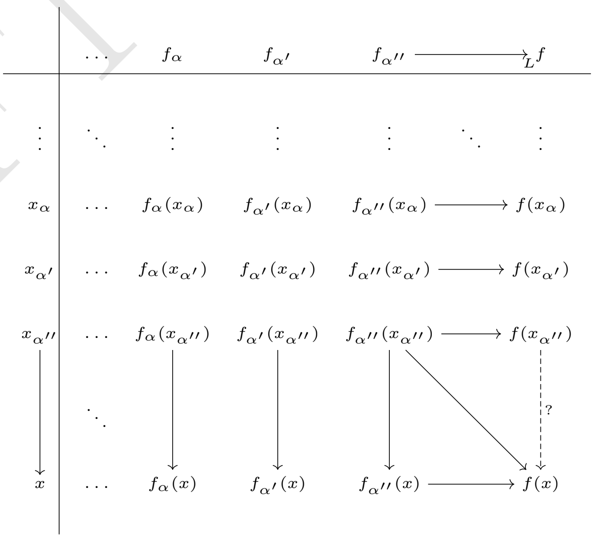


Figura 2.4: O grande problema é encontrar condições que assegurem a convergência *pontilhada*.

Ainda é cedo para discutir condições que resolvam o problema em si. Mas não se preocupe: isso voltará a ser discutido no texto.

2.2.5 Álgebra Topológica: primeiros contatos

Antes de começar, é importante deixar clara a distinção semântica entre as expressões "Topologia Algébrica" e "Álgebra Topológica": enquanto a primeira, mais conhecida no meio matemático, lida principalmente com o trabalho de associar estruturas algébricas a espaços topológicos de modo *funtorial*, a segunda se interessa por tratar de estruturas algébricas munidas de topologias compatíveis com suas operações.

Desse modo, objetos como *grupos topológicos*, *anéis topológicos*, *espaços vetoriais topológicos* e outras quinquilharias fazem parte do dia a dia da Álgebra Topológica, enquanto *grupos fundamentais*, *módulos de homologia* e coisas do tipo pertencem à rotina da Topologia Algébrica. Portanto, apesar do título, esta subseção tem muito mais a ver com Análise em seus aspectos fundamentais do que com Topologia Algébrica†.

Arquétipo. Fixada uma *linguagem algébrica* $\mathscr{L}$, dizemos que X é uma **$\mathscr{L}$-álgebra topológica** se X for uma $\mathscr{L}$-álgebra munida de uma topologia que torne as operações $p_X : X^n \to X$ contínuas para cada *símbolo* p de operação n-ária da linguagem $\mathscr{L}$, onde X^n é dotado da topologia produto usual. Neste caso, diremos que a topologia de X é **compatível** com a $\mathscr{L}$-estrutura algébrica X. A *categoria das $\mathscr{L}$-álgebras topológicas*, $\mathscr{L}$-Top, tem como objetos as $\mathscr{L}$-álgebras topológicas e, como setas, os **$\mathscr{L}$-morfismos contínuos**, i.e., funções que são simultaneamente setas da categoria das $\mathscr{L}$-álgebras e da categoria dos espaços topológicos. Em particular, os **$\mathscr{L}$-isomorfismos topológicos** são os $\mathscr{L}$-morfismos contínuos com inversas contínuas.

Apesar das definições acima, não é frequente que se estudem álgebras topológicas tão gerais quanto os objetos típicos da Álgebra Universal, pois o seu tratamento já é bastante delicado mesmo em casos simples, exatamente aqueles que tomarão nossa atenção ao longo desta subseção.

§1 Grupos topológicos

Definição 2.2.39. Um **grupo topológico** consiste de um grupo $(G, \cdot, e)$ munido de uma topologia que torna contínuas as funções

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \mathrm{inv} : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

onde $G \times G$ tem a topologia produto. ¶

A reta real com a soma e sua topologia usual costuma ser o primeiro exemplo desse tipo de animal. De modo geral, um $\mathbb{K}$-espaço normado E é um grupo topológico com a adição de vetores e a topologia induzida pela norma, pois $\|x + y - (u + v)\| \leq \|x - u\| + \|y - v\|$ e $\|z\| = \|-z\|$ para quaisquer $u, v, x, y, z \in E$ (percebeu?)*.

Exemplo 2.2.40 (Círculo)**.** Vamos verificar que o subconjunto $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é um grupo topológico *multiplicativo* com a topologia herdada de $\mathbb{C}$. Primeiro, deve ser claro que $(\mathbb{T}, \cdot, 1)$ é realmente um grupo (certo?)*. Para o aspecto topológico da coisa, podemos apelar para a identificação $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Neste caso, a multiplicação em $\mathbb{C}$ faz

$$((a, b), (c, d)) \mapsto (ac - bd, ad + bc),$$

o que define uma função contínua $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

†**Não** significa que Topologia Algébrica se desinteresse por objetos da Álgebra Topológica!

Embora você já saiba dessas coisas (Cálculo II?!), essa é uma boa oportunidade para um pouco de *pirotecnia* e excessos.

Lema 2.2.41. *Sejam X um conjunto, S um espaço topológico e $*\colon S\times S\to S$ uma operação contínua.*

(i) *A operação induzida*[†] $\circledast\colon \mathrm{Fun_p}(X,S)\times\mathrm{Fun_p}(X,S)\to\mathrm{Fun_p}(X,S)$ *é contínua, onde* $(f\circledast g)(x):=f(x)*g(x)$ *para quaisquer* $f,g\in\mathrm{Fun}(X,S)$ *e* $x\in X$.

(ii) *Se X é espaço topológico e $f,g\in\mathrm{C}(X,S)$, então $f\circledast g\in\mathrm{C}(X,S)$.*

Demonstração. Para (i), note que se $(f_\alpha,g_\alpha)\to(f,g)$ em $\mathrm{Fun_p}(X,S)\times\mathrm{Fun_p}(X,S)$, então $(f_\alpha)_\alpha\to_{\mathrm{p}} f$ e $(g_\alpha)_\alpha\to_{\mathrm{p}} g$. Logo, para $x\in X$ fixado, $(f_\alpha(x))_\alpha\to f(x)$ e $(g_\alpha(x))_\alpha\to g(x)$ em S, donde a continuidade de $*$ assegura que $(f_\alpha(x)*g_\alpha(x))_\alpha\to f(x)*g(x)$. Como isto significa, precisamente, $((f_\alpha\circledast g_\alpha)(x))_\alpha\to(f\circledast g)(x)$, conclui-se que $(f_\alpha\circledast g_\alpha)_\alpha\to_{\mathrm{p}} f\circledast g$ (certo?)*. Para (ii), basta observar que se $(x_\beta)_\beta\to x$ em X, então $(f(x_\beta))_\beta\to f(x)$ e $(g(x_\beta))_\beta\to g(x)$ em S, acarretando $((f(x_\beta),g(x_\beta)))_\beta\to(f(x),g(x))$ em $S\times S$. O restante decorre da continuidade da operação $*\colon S\times S\to S$, bem como pela definição de $\circledast$. □

Demonstração (sem redes). Temos $f\circledast g=(*)\circ(f,g)$ e $\pi_x\circ(\circledast)=(*)\circ(\pi_x\times\pi_x)$ para todo x. Logo, (i) e (ii) seguem do Teorema 2.1.90 e do Corolário 2.1.84, respectivamente. □

De volta ao problema da multiplicação em $\mathbb{C}$, as funções

$$\begin{aligned}
\pi_1\colon\ &((a,b),(c,d))\mapsto(a,b)\mapsto a\\
\pi_2\colon\ &((a,b),(c,d))\mapsto(a,b)\mapsto b\\
\pi_3\colon\ &((a,b),(c,d))\mapsto(c,d)\mapsto c\\
\pi_4\colon\ &((a,b),(c,d))\mapsto(c,d)\mapsto d
\end{aligned}$$

são contínuas (por serem composições de funções contínuas), de modo que aplicações sucessivas do lema anterior garantem que tanto $\pi_1\cdot\pi_3-\pi_2\cdot\pi_4$ quanto $\pi_1\cdot\pi_4+\pi_2\cdot\pi_3$ são contínuas*. Finalmente, o Teorema 2.1.90 encerra o trabalho (entendeu?)*.

Para a inversão multiplicativa, basta lembrar que, neste caso, $(a+bi)^{-1}=a-bi$, e a função $(a,b)\mapsto(a,-b)$ é contínua. Portanto, ao restringir tais funções ao subespaço $\mathbb{T}$, o resultado desejado segue. ▲

Como grupos topológicos são, antes de qualquer outra coisa, *grupos*, seus pontos se comportam de maneira (algebricamente) simétrica. O curioso é que a exigência de compabitilidade topológica com as operações se reflete num tipo de *simetria topológica*.

Definição 2.2.42. Um espaço topológico X é **homogêneo** se para quaisquer $x,y\in X$ existir um homeomorfismo $\varphi\colon X\to X$ com $\varphi(x)=y$. ¶

Proposição 2.2.43. *Todo grupo topológico é homogêneo.*

Demonstração. Para um grupo topológico G e um ponto $p\in X$, a *regra* $x\mapsto px$ define uma função contínua $\varphi_p\colon G\to G$ (certo?)*. Analogamente, $\varphi_{p^{-1}}$ é contínua[‡]. Dado que $\varphi_p\circ\varphi_{p^{-1}}=\varphi_{p^{-1}}\circ\varphi_p=\mathrm{Id}_G$ (não é óbvio?)[††], segue que φ_p é um homeomorfismo satisfazendo $\varphi_p(e)=p$, onde e é o elemento neutro de G. Acabou (certo?)*. □

[†] No dia a dia, o mesmo símbolo é usado para representar a operação induzida entre funções. A distinção aqui visou apenas zelar pelo seu conforto psicológico.

[‡] Sim: tanto as *translações* da forma $x\mapsto xp$ quanto as da forma $x\mapsto px$ são homeomorfismos em grupos topológicos.

[††] Em caso de discordância, revise seus conhecimentos de Álgebra Elementar *urgentemente*.

Exercício 2.2.23 ($^\star_\star$)**.** Sejam X um espaço topológico com um ponto fixado $e \in X$. Mostre que se para todo $p \in X$ existe um homeomorfismo $\psi_p \colon X \to X$ satisfazendo $\psi_p(e) = p$, então X é homogêneo. ■

Intuitivamente, espaços homogêneos são aqueles em que *tudo parece igual* em torno de *qualquer* ponto. Logo, espaços topológicos com pontos *dissonantes entre si*, i.e., em que a condição de homogeneidade falha, não podem admitir estrutura de grupo compatível com sua topologia. É o caso de $[0, 1]$, por exemplo.

Exercício 2.2.24 ($^\star_\star$)**.** Mostre que não existe homeomorfismo $\varphi \colon [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $\varphi(0) = \frac{1}{2}$. Dica: você já estudou a conexidade de intervalos em ANÁLISE REAL. ■

Um modo ligeiramente mais sofisticado de usar a última proposição na detecção de espaços que não podem ser grupos topológicos faz uso da noção de *pontos fixos*. Diz-se que um espaço topológico X tem a **propriedade do ponto fixo** se para qualquer função contínua $f \colon X \to X$ existe pelo menos um ponto $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

Agora, ao encarar a demonstração da proposição anterior com algum cuidado, percebe-se que *todo grupo topológico G com pelo menos dois pontos não tem a propriedade do ponto fixo* (por quê?)$^\star_\star$. Em particular, isto assegura mais um modo de provar que $[0, 1]$ não admite estrutura de grupo topológico com sua topologia usual — com a vantagem de que, desta vez, você só precisa do Teorema do Valor Intermediário[†].

Exemplo 2.2.44. O intervalo $(0, +\infty)$ é um grupo topológico com a topologia herdada de $\mathbb{R}$ e com a operação de multiplicação usual. Assim, em virtude do Corolário 2.2.26, podemos afirmar que $(\mathbb{R}, +, 0)$ e $((0, +\infty), \cdot, 1)$ são grupos topológicos *homeomorfos*, mesmo sem exibir qualquer bijeção explícita entre ambos. É possível garantir que tais grupos são topologicamente isomorfos[‡]?

RESPOSTA PARA QUEM SE LEMBRA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL: sim.

RESPOSTA PARA QUEM NÃO SE LEMBRA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL: sim.

Em geral, sempre que G é um grupo topológico *homeomorfo* à reta real, pode-se *construir* um isomorfismo topológico entre G e $\mathbb{R}$ por meio de *integrais de Haar*. Mas isto pode esperar. Até lá, será mais fácil revisar suas anotações de ANÁLISE REAL. ▲

Exemplo 2.2.45 (Séries)**.** Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de um grupo topológico abeliano[††] $(G, +, 0)$. Pode-se induzir uma nova sequência em G, recursivamente, por meio da operação de G e da sequência $(a_n)_n$. Mais precisamente, declaremos $s_0 := a_0$ e $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$ para todo $n > 0$. Embora a operação de G seja finitária, sua topologia permite extrapolar os *limites* da ÁLGEBRA: *pode* existir $s \in G$ tal que $(s_n)_n \to s$, o que moralmente corresponde ao resultado do que seria fazer $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, pelo menos se G for um grupo de Hausdorff.

Sim, trata-se da generalização natural das *séries* da ANÁLISE REAL, que precisam apenas dos dois ingredientes acima: uma operação binária para determinar as somas parciais, e uma topologia para *extrapolar* a natureza finitária da operação. Como ilustração, vamos ver que mesmo neste contexto geral é possível realizar o *teste da divergência*.

[†]Esse é um dos ingredientes na verificação de que o **cubo de Hilbert**, $H := \mathrm{Fun_p}(\mathbb{N}, [0, 1])$, atesta a falha da recíproca da Proposição 2.2.43, pois H é um espaço homogêneo com a propriedade do ponto fixo. Infelizmente, a prova foge do escopo do meu tempo. Como compensação, confira o Exercício 2.2.42.

[‡]Mais precisamente: existe isomorfismo de grupos contínuo cuja inversa é contínua?

[††]Eu não tenho a mínima ideia se tal resultado é válido em grupos topológicos não-abelianos.

Proposição 2.2.46 (**Teste da Divergência**)**.** *Nas notações acima, se* $(s_n)_n \to s$ *para algum* $s \in G$*, então* $(a_n)_n \to 0$*.*

Demonstração. A menos da notação aditiva, o Exercício 2.2.35 garante a continuidade da função $\psi\colon G \times G \to G$ dada por $\psi(x, y) := x - y$. Agora, como $(s_n)_n \to s$ por hipótese, sua *subsequência* $(s_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ também deve convergir para s (cf. Corolário 3.1.29). Assim, $(s_{n+1}, s_n) \to (s, s)$ em $G \times G$, donde a continuidade de ψ acarreta

$$a_{n+1} = \psi(s_{n+1}, s_n) \to \psi(s, s) = s - s = 0,$$

donde segue que $a_n \to 0$, como queríamos. □

Em situações como a anterior, escreve-se

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim \left(\sum_{j\leq n} a_j \right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{2.16}$$

para indicar a *coleção* de todos os limites da sequência $(s_n)_n$ das *somas parciais* da sequência $(a_n)_n$, que será chamada de **série da sequência** $(a_n)_n$. Aqui, faz-se a convenção usual de que se G for de Hausdorff, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ denota o único elemento de G, caso exista, para o qual a sequência $(s_n)_n$ converge, tal qual fizemos com a notação "lim" para filtros e redes (Observação 2.1.36). ▲

Exercício 2.2.25 ($^\star_\star$)**.** Num grupo topológico abeliano G, mostre que se $(x_n)_n \to x$ em G, então $\left(\sum x_n - x_{n+1}\right)_n \to x_0 - x$ em G. Dica: $\sum_{m\leq n} x_m - x_{m+1} = x - x_n$. ■

Há muita coisa sobre grupos topológicos para se explorar ao longo da vida, e neste texto ainda discutiremos diversos resultados conforme mais ferramentas se tornarem *disponíveis*. Porém, para um primeiro contato, deve ser suficiente destacar duas particularidades oriundas da compatibilidade entre as estruturas algébrica e topológica.

O primeiro fato diz respeito à continuidade dos morfismos de grupos.

Teorema 2.2.47 (Compare com a Proposição 1.2.12)**.**[†] *Sejam* G *e* H *grupos topológicos e* $f\colon G \to H$ *um morfismo de grupos. A função* f *é contínua se, e somente se,* f *é contínua em* e_G*, onde* e_G *denota o elemento neutro do grupo* G*.*

Demonstração. Supondo que f é contínua em e_G, vamos provar que f é contínua num ponto $g \in G$. Para isso, basta tomar uma rede $(g_d)_d$ em G com $(g_d)_d \to g$ e mostrar que $(f(g_d))_d \to f(g)$. Ora, pela continuidade das translações no grupo topológico G, resulta $(g_d g^{-1})_d \to gg^{-1} = e_G$, enquanto a continuidade de f em e_G acarreta

$$\left(f(g_d)f(g)^{-1}\right)_d = \left(f(g_d g^{-1})\right)_d \to f(e_G) = e_H.$$

O restante segue pois $y \mapsto yf(g)$ é contínua (certo?)*. A recíproca é automática. □

Demonstração (via abertos). Note que se $W \subseteq H$ é um aberto com $f(x) \in W$, então $f(x)^{-1}W := \{f(x)^{-1}w : w \in W\}$ é um aberto de H (certo?)$^\star_\star$ com $f(e_G) = e_H \in f(x)^{-1}W$. Por f ser contínua em e_G, existe um aberto $U \subseteq G$ com $e_G \in U$ e $f[U] \subseteq f(x)^{-1}W$. Daí, não deveria ser difícil concluir que $xU \subseteq G$ é um aberto com $x \in xU$ e $f[xU] \subseteq W$ (concluiu?)$^\star_\star$. A recíproca ainda é automática. □

[†] Você certamente se lembra que uma transformação linear entre espaços vetoriais é, em particular, um morfismo de grupos com relação aos grupos aditivos subjacentes, certo? ($\star$).

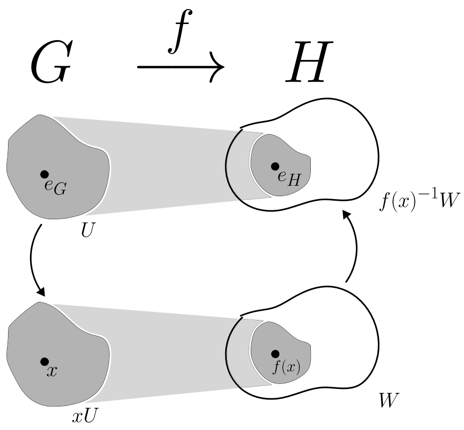


Figura 2.5: A demonstração anterior, *em cores*.

Exercício 2.2.26 ($^\star_\star$)**.** Mostre que uma rede $(x_d)_d$ num grupo topológico G converge para $x \in G$ sse $(x_d x^{-1})_d$ converge para o elemento neutro de G. ■

Quem já tem olhos treinados pela Análise pode ter sentido falta de algo importante e que foi escondido na Proposição 1.2.12: a *continuidade uniforme*. Recorde-se de que uma função $f : X \to Y$ entre *espaços métricos* é **uniformemente contínua** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$ sempre que $a, b \in X$ satisfazem $d(a, b) < \delta$. No caso das transformações lineares contínuas, tem-se[†]

$$\|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| \leq \|T\|\|u - v\|,$$

de modo que basta tomar $\delta := \frac{\varepsilon}{\|T\|+1}$.

Assim, embora seja curioso que a mera compatibilidade com a estrutura de grupo seja capaz de recuperar a parte da Proposição 1.2.12 relacionada ao elemento neutro, *parece* que a propriedade mais importante se perdeu, já que não há como expressar continuidade uniforme em espaços topológicos[‡]. Todavia, a situação se torna um pouco mais favorável com grupos topológicos.

Secretamente, desde os seus tempos de Cálculo I, você aplicava translações de grupos topológicos a vizinhanças de elementos neutros: afinal de contas, para $p \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) = p+(-\varepsilon, \varepsilon) := \{p + y : y \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$. Consequentemente, verifica-se $|x - y| < \varepsilon$ sse $x - y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em vista disso, o próximo passo é bastante natural.

Definição 2.2.48. Uma função $f : G \to H$ entre grupos topológicos será chamada de **uniformemente contínua** (à direita)[††] se para todo $V \subseteq H$ aberto em torno de e_H existir um aberto $V \subseteq G$ em torno de e_G satisfazendo a implicação

$$xy^{-1} \in V \Rightarrow f(x)f(y)^{-1} \in U$$

para quaisquer $x, y \in G$. ¶

De repente grupos topológicos ficaram mais interessantes, não é mesmo?

[†]Condição ainda mais forte do que continuidade uniforme, chamada de (condição de) **Lipschitz**.

[‡]Uma função entre espaços métricos pode ser uniformemente contínua em relação a um par de métricas, mas *apenas* contínua com respeito a outro par de métricas topologicamente equivalentes (cf. Exercício 4.1.1).

[††]Como nem todo grupo é abeliano, também faria sentido pedir "$y^{-1}x \in V \Rightarrow f(y)^{-1}f(x) \in U$", o que levaria à noção de *continuidade uniforme à esquerda*. Mas não é hora de se preocupar com isso.

Proposição 2.2.49. *Morfismos contínuos de grupos topológicos são uniformemente contínuos.*

Demonstração. Com as mesmas notações da definição anterior, note que se f é um morfismo contínuo de grupos, então $f^{-1}[V]$ é um aberto de G em torno de e_G tal que se $xy^{-1} \in f^{-1}[V]$, então $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in V$, mostrando que basta tomar $U := f^{-1}[V]$. □

Exercício 2.2.27 ($^\star_\star$)**.** Mostre que uma transformação linear $T: X \to Y$ entre $\mathbb{K}$-espaços normados é contínua sse é uniformemente contínua com respeito à última definição. Dica: cf. Exercício 2.2.43. ■

Este é o segundo aspecto sobre grupos topológicos que merece destaque: a similaridade com espaços métricos/normados, no sentido de que se pode tratar da noção de convergência de maneira *uniforme*. Moralmente, é como se os abertos em torno do elemento neutro *parametrizassem* "relações de distância" da mesma maneira que os números reais positivos o fazem em espaços métricos.

MANTRA: para um aberto $U \subseteq G$ em torno do elemento neutro e_G, vamos pensar em "$xy^{-1} \in U$" como se fosse "$d(x, y) < U$".

Foi por meio do mantra acima que a definição métrica de continuidade uniforme foi adaptada para grupos topológicos. Por que parar?

Definição 2.2.50. Diremos que uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ num grupo topológico G é **de Cauchy** se para todo aberto $V \subseteq G$ em torno de e_G existir um índice $A \in \mathbb{A}$ tal que $x_\alpha x_\beta^{-1} \in V$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ com $\alpha, \beta \succeq A$. ¶

Exercício 2.2.28 ($^\star_\star$)**.** Pratique!

a) (Compare com o Exercício 2.1.22) Mostre que uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ é de Cauchy num grupo topológico G sse $\left(x_\alpha x_\beta^{-1}\right)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{A}\times\mathbb{A}} \to e_G$ em G.

b) Mostre que toda rede convergente num grupo topológico é de Cauchy. Dica: além do item anterior, use os Exercícios 2.2.14 e 2.2.35. ■

A definição dos *grupos topológicos completos* deve estar ~~saltando aos olhos~~ quase evidente agora, mas ainda é cedo para explorar essa ideia. Por ora, encerraremos esta apresentação com uma caracterização bastante *intuitiva* do fecho de subconjuntos em grupos topológicos (cf. Exercício 2.2.29).

Teorema 2.2.51. *Sejam G um grupo topológico, $e \in G$ seu elemento neutro e $\mathcal{B}_e$ uma base local de abertos em torno de e. Para qualquer subconjunto S de G se verifica*

$$\overline{S} = \bigcap_{V\in\mathcal{B}_e} SV = \bigcap_{V\in\mathcal{B}_e} \overline{SV}.$$

Demonstração. Primeiro, note que se $x \in \overline{S}$, então existe uma rede $(s_d)_d$ em S com $(s_d)_d \to x$. Assim, se $V \in \mathcal{B}_e$, então existem um índice D e um ponto $v_D \in V \cap V^{-1}$ tais que $x^{-1}s_D = v_D$, i.e., $x \in SV$ (por quê?)$^\star_\star$. Portanto, $\overline{S} \subseteq SV \subseteq \overline{SV}$, assegurando as inclusões "$\subseteq$". A inclusão oposta depende de um truque que parecerá estranho, mas que no fundo nada mais é do que trocar "ε" por "$\frac{\varepsilon}{3}$".

⌜**Afirmação.** *Para todo $B \in \mathcal{B}_e$ existe $C \in \mathcal{B}_e$ tal que $CC(C^{-1}) \subseteq B$.*

Prova da Afirmação. A função $\varphi\colon G \times G \times G \to G$ que faz $\varphi(x, y, z) := xyz^{-1}$ é contínua (certo?)$^{\star}_{\star}$. Dado que $\varphi(e, e, e) = e \in B$, existem $U, V, W \subseteq G$ abertos em torno de e tais que $\varphi[U \times V \times W] \subseteq B$. Por $U \cap V \cap W$ também ser aberto em torno de e, existe $C \in \mathcal{B}_e$ tal que $e \in C$ com $C \subseteq U \cap V \cap W$. Logo,

$$CC(C)^{-1} := \left\{xyz^{-1} : x, y, z \in C\right\} = \varphi[C \times C \times C] \subseteq \varphi[U \times V \times W] \subseteq B. \quad ⌟$$

De volta ao problema original, supondo que $p \notin \overline{S}$, existe $W \subseteq G$ aberto em torno de p tal que $W \cap S = \emptyset$. Como translações são homeomorfismos, segue que $p^{-1}W$ é um aberto em torno de e. Logo, existe $V \in \mathcal{B}_e$ tal que $V \subseteq p^{-1}W$.

Katzensprung[†]: para qualquer $C \in \mathcal{B}_e$ satisfazendo $CC(C^{-1}) \subseteq V$ se verifica $p \notin \overline{SC}$.

Caso contrário, teríamos $p^2 \in p\overline{SC} = \overline{pSC}$, enquanto p^2CC seria um aberto em torno de p^2, acarretando a existência de $a, b, c \in C$ e $s \in S$ tais que $p^2ab = psc$. Logo, $s = p(ab)c^{-1}$, mostrando que $s \in pCC(C^{-1}) \subseteq pV \subseteq W$ e, por conseguinte, $S \cap W \neq \emptyset$, uma contradição. Portanto, o Katzensprung é verdadeiro – e o Exercício 2.2.36 deve te ajudar a justificar os detalhes omitidos.

Para finalizar, note que a afirmação assegura a existência de um aberto $C \in \mathcal{B}_e$ como no Katzensprung, de modo que mostramos o seguinte: se $p \notin \overline{S}$, então $p \notin \bigcap_{V \in \mathcal{B}_e} \overline{SV}$. Isto encerra a cadeia de inclusões necessárias para provar as igualdades propostas. □

Corolário 2.2.52. *Um grupo topológico G é de Hausdorff se, e somente se, $\{e\}$ é fechado.*

Demonstração. Ficará por sua conta ($^{\star}_{\star\star}$). □

Exercício 2.2.29 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para $S \subseteq \mathbb{R}$, mostre que $\overline{S} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[S, \frac{1}{2^n}]$, onde se define $B[S, r] := \bigcup_{s \in S}[s - r, s + r]$ para qualquer $r > 0$. Dica/Sugestão: se estiver com saudades de exercitar desigualdades simples de Análise Real, mostre que $\overline{S + (-r, r)} = B[S, r]$. ■

Exercício 2.2.30 ($\star^6$)**.** Para um espaço topológico X, seja $\mathrm{Homeo}(X)$ o grupo (via composição) dos homeomorfismos de X sobre X. A topologia que $\mathrm{Homeo}(X)$ herda de $\mathrm{Fun_p}(X, X)$ faz dele um grupo topológico? Dica: experimente $X := \mathbb{R}^2$. ■

§2 Anéis topológicos

Grupos topológicos são a porta de entrada para *estruturas* mais pesadas.

Definição 2.2.53. Dizemos que um anel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ é um **anel topológico** (... com unidade)[‡] se existe uma topologia que faz de $(A, +, 0)$ um grupo topológico em que a operação $\cdot\colon A \times A \to A$ é contínua. ¶

Além dos exemplos *imediatos* ($\mathbb{C}$ e seus subanéis/subcorpos com a topologia usual)*, anéis topológicos ocorrem frequentemente nos contextos de Análise. Com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, o espaço $\mathrm{Fun_p}(X, \mathbb{K})$ (cf. Definição 2.1.92) é um anel (comutativo) topológico para qualquer conjunto X ao considerarmos as operações induzidas pelo corpo (cf. Lema 2.2.41, item (i)), enquanto $\mathrm{C_p}(X, \mathbb{K})$ é subanel topológico de $\mathrm{Fun_p}(X, \mathbb{K})$ sempre que X também for espaço topológico (cf. item (ii) do mesmo lema).

[†] *Pulo do gato*, em alemão... É uma longa história.

[‡] Nesse tipo de contexto faz sentido tratar de anéis não comutativos e *sem unidade*. Mas não se preocupe, quando for o caso, isto será enfatizado.

Exemplo 2.2.54 (Anéis via composição)**.** Para um $\mathbb{K}$-espaço normado E, o espaço formado pelas transformações lineares contínuas da forma $E \to E$, denotado por $\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(E,E)$ (cf. pág. 31), se revela um anel topológico com a topologia induzida pela norma de operadores e a composição de funções como multiplicação. A parte algébrica da afirmação deveria ser clara[†], de modo que resta apenas a parte topológica.

Por ser um espaço normado, já sabemos que $\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(E,E)$ é grupo topológico. Para a continuidade da composição, basta empregar o Exercício 1.2.2 duas vezes: para $x \in E$ e $f, g \in \mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(E,E)$, temos $\|(f \circ g)(x)\| \leq \|f\|\|g(x)\| \leq \|f\|\|g\|\|x\|$. Em particular, $\|f \circ g\| \leq \|f\|\|g\|$ e $\|\mathrm{Id}_E\| = 1$. ▲

O anel $\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(E,E)$ é um exemplo de **$\mathbb{K}$-álgebra normada**: trata-se de um $\mathbb{K}$-espaço normado $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ com uma operação $*\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ segundo a qual $(\mathcal{A}, +, *, 0)$ é um anel tal que $\|x * y\| \leq \|x\|\|y\|$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$. Caso $\mathcal{A}$ também tenha unidade $e \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, é comum *pedir* por $\|e\| = 1$, mas não há perda de generalidade em *assumir* isso (cf. Exercício 2.2.47). Quando $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ é de Banach, diz-se que $\mathcal{A}$ é uma **álgebra de Banach**. Para aquecer:

Exercício 2.2.31 ($^\star_\star$)**.** Mostre que a multiplicação $*$ de uma álgebra normada é contínua. Dica: $\|x * y - u * v\| \leq \|x\|\|y - v\| + \|x - u\|\|v\|$. ■

Teorema 2.2.55 (da Série de Neumann)**.** *Numa álgebra de Banach $\mathcal{B}$ com unidade e, o grupo multiplicativo*[‡] $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}) := \{b \in \mathcal{B} : b$ *é* $*$*-invertível*$\}$ *é aberto em $\mathcal{B}$. Além disso, a regra $b \mapsto b^{-1}$ define um homeomorfismo de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ *sobre si mesmo.*

Demonstração. Note que se $y \in G := \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, então $\|y\| > 0$ (certo?)*, o que permite tomar $\delta := \frac{1}{\|y^{-1}\|}$ uma vez que $y^{-1} \in G$. Não há muito mistério agora: provaremos que $B(y, \delta) \subseteq G$. Para $x \in B(y, \delta)$, considere $a := y^{-1}x$ (como de costume, apenas se omitiu o símbolo $*$). Note que

$$\|e - a\| = \|y^{-1}y - y^{-1}x\| = \|y^{-1}(y - x)\| \leq \|y^{-1}\|\|y - x\| < 1.$$

Pelo que você aprendeu sobre séries geométricas em suas aulas de Análise, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|e - a\|^n < \infty.$$

O que talvez você não saiba (ou não se lembre) é que isto basta para concluir que a série $\sum_{n=0}^{\infty}(e - a)^n$ converge em $\mathcal{B}$.

⌜**Afirmação 2.2.56.** *Num espaço de Banach X, sempre que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ converge em $\mathbb{R}$, existe $x \in X$ tal que $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Observação: em tais situações, diz-se que a série $\sum x_n$ é* ***absolutamente convergente****.*

Prova da Afirmação. Para uma série $\sum x_n$ em X, tem-se

$$\left\| \sum_{j=0}^{m} x_j - \sum_{j=0}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=m}^{n} \|x_j\| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \|x_j\| := S_m \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\| := M$$

[†] A função identidade Id_E é o elemento neutro dessa multiplicação, e para $f, g, h \in \mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X, Y)$, é um exercício de primeiro semestre verificar as igualdades $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$ e $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ (certo?)*. Em particular, se $\dim_{\mathbb{K}} E \geq 2$, então $\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(E,E)$ não é comutativo.

[‡] Os elementos em $\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ costumam ser chamados de *regulares* ou *não singulares*.

sempre que $m \leq n$. Em particular, se $\sum x_n$ é absolutamente convergente, então $M < +\infty$. Ocorre que em tais condições, $(S_m)_m \to 0$ (Análise I, certo?)*. Logo, a sequência das somas parciais da série satisfaz o critério de Cauchy. A completude de X faz o resto. ⌟

De volta ao problema, existe $z \in \mathcal{B}$ com $z = \sum_{n=0}^{\infty}(e-a)^n$ pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(e-a)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|e-a\|^n < +\infty.$$

Daí, como o produto de $\mathcal{B}$ é contínuo, segue que $p \mapsto ap$ e $p \mapsto pa$ também são contínuas, acarretando

$$az = \sum_{n=0}^{\infty} a(e-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(e-(e-a))(e-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left((e-a)^n - (e-a)^{n+1}\right) = e,$$

bem como $za = e$ (por quê?! Cf. Proposição 2.2.46 e Exercício 2.2.25)$^{\star}_{\star}$.

Portanto, $a \in G$, com $z = a^{-1}$ e, consequentemente, $x \in G$, já que $x(zy^{-1}) = e = (zy^{-1})x$ (certo?)*.

Em particular, para tal x em $B(y,\delta)$, temos

$$\begin{aligned}\|x^{-1} - y^{-1}\| = \|zy^{-1} - y^{-1}\| = \|(z-e)y^{-1}\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(e-a)^n y^{-1}\right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|e-a\|^n\|y^{-1}\| = \frac{1}{\delta}\frac{\|e-a\|}{1-\|e-a\|} \leq \frac{1}{\delta^2}\frac{\|x-y\|}{1-\frac{\|x-y\|}{\delta}},\end{aligned}$$

donde a continuidade de $b \mapsto b^{-1}$ em y segue sem grandes esforços $(^{\star}_{\star})$. □

Observação 2.2.57 (Séries geométricas)**.** Em particular, fazendo $y := e$ na demonstração anterior (e supondo $\|e\| = 1$), resulta

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$$

para qualquer $x \in B(e,1)$. Dado que $x \in B(e,1)$ sse $u := e - x \in B(0,1)$, mostramos não apenas que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge sempre que $\|u\| < 1$, mas também que converge exatamente para $(e-u)^{-1}$. Faça $\mathcal{B} := \mathbb{R}$ e $e := 1$ para ter uma recordação da infância. △

Além da beleza Bourbakista intrínseca, álgebras de Banach constituem o cenário ideal para tratar de espectros de operadores em espaços de dimensão infinita, o que os torna úteis para lidar com equações diferenciais parciais e coisas do gênero. Infelizmente, se Análise fosse uma guerra, eu seria apenas o ferreiro — e não a pessoa que empunha a espada em combate†. Por aqui, o ponto que importa foi defendido: anéis topológicos ocorrem com certa frequência em Análise...

E também em Álgebra! Porém, como eu ainda sou apenas um simples ferreiro, minha incapacidade de ilustrar aplicações em Álgebra (também) é intrínseca. Todavia, tal qual no exemplo anterior ambientado no Reino da Análise, isto não impede a apreciação de algumas ~~armas~~ ferramentas.

†E se minha avó tivesse rodas, ela seria uma bicicleta.

Aviso: para prosseguir, é melhor ter alguma familiaridade com Álgebra Abstrata.

Fixados um anel A comutativo e com unidade e um ideal I, consideremos o ideal I^n definido da seguinte forma: $I^0 := A$ e $I^{n+1} := I^n I$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, onde o produto entre os ideais I^n e I é definido como o menor ideal de A contendo todos os elementos da forma ab, com $a \in I^n$ e $b \in I$. Vamos mostrar que ao definir $\mathcal{B}_a := \{a + I^n : n \in \mathbb{N}\}$ para cada $a \in A$, $(\mathcal{B}_a)_{a \in A}$ satisfaz a tese da condição (ii) no Teorema 2.1.64 e, portanto, existe uma única topologia sobre A que tem $\mathcal{B}_a$ como base local em a, para cada $a \in A$.

O argumento é quase óbvio: $\mathcal{B}_a$ é um pré-filtro pois $(a + I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência $\subseteq$-decrescente de subconjuntos não vazios de A para qualquer $a \in A$ fixado, enquanto a condição (ii) se verifica pois se $q \in p + I^n$, então $q = p + y$ com $y \in I^n$, e daí $p = q - y \in q + I^n$ posto que $-y \in I^n$.

A topologia descrita acima, chamada de **topologia I-ádica** do anel A, eleva A ao patamar de anel topológico: se $(x_m, y_m)_{m \in \mathbb{N}} \to (x, y)$ em $A \times A$ e $N \in \mathbb{N}$, então existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in x + I^N$ e $y_m \in x + I^N$ para todo $m \geq M$ (pois $(x_m)_m \to x$ e $(y_m)_m \to y$), i.e., existem $\alpha, \beta \in I^N$ com $x_m = x + \alpha$ e $y_m = y + \beta$, logo

- $x_m - y_m = x - y + (\alpha - \beta) \in (x - y) + I^N$, mostrando que a função $(a, b) \mapsto a - b$ é contínua e, por conseguinte, $(A, +, 0)$ é grupo topológico com a topologia I-ádica (cf. Exercício 2.2.35);
- $x_m y_m = xy + (x\beta + \alpha y) + \alpha\beta \in xy + I^N + I^{2N} \subseteq xy + I^N$ pois $I^N + I^{2N} \subseteq I^N$ (certo?)*, mostrando que a multiplicação é contínua.

Nesse contexto, o próximo teorema serve como teste para encontrar topologias I-ádicas de Hausdorff (cf. Teorema 2.2.51 e Corolário 2.2.52).

Teorema 2.2.58 (da interseção de Krull)**.** *Seja A um anel comutativo com unidade no qual todo ideal seja finitamente gerado. Se J é ideal próprio de R e $I := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J^n$, então $I \subseteq IJ$. Em particular, se J for subconjunto do radical de Jacobson de A ou se A for um domínio, então $I = \{0\}$.*

Demonstração. A prova, adaptada do trabalho de Perdry [34], consiste em mostrar que se $b \in I$, então existe $c \in J$ tal que $b = bc$. A parte final do enunciado também decorre disso, haja vista que

- uma das manifestações do **radical de Jacobson** de A é

  $$\mathrm{J}(A) = \{y \in A : 1 + sy \text{ é invertível para todo } s \in A\},$$

  de modo que se $J \subseteq \mathrm{J}(A)$, então $b - bc = b(1 - c) = 0$ com $c \in J$ acarreta em $1 - c$ ser invertível e, por conseguinte, $b = 0$,
- enquanto $0 = b - bc = b(1 - c)$ com $c \neq 1$ num domínio acarreta em $b = 0$.

Pela hipótese sobre A, existem $a_1, \ldots, a_n \in J$ tais que $J = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$, i.e., J é o *ideal gerado*† pelo subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Consequentemente, $\rho \in J$ sse existe um polinômio $p \in A[x_1, \ldots, x_n]$, *homogêneo* de grau 1, tal que $\rho = p(a_1, \ldots, a_n)$: de fato, $\rho \in J$ sse existem $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in A$ tais que $\rho = \sum_{i \leq n} \gamma_i a_i$, donde segue que $p := \sum_{i \leq n} \gamma_i x_i$ tem a propriedade desejada‡.

†A notação "span" também será empregada para subespaços vetoriais e outras subestruturas geradas.

‡Lembre-se de que polinômios **homogêneos** de grau l são aqueles cujas parcelas têm todas *grau total* l: por exemplo, $x^3 + xyz - 2x^2y - z^3$ é um polimômio homogêneo de grau 3, enquanto $2x^2 - 1$ não é.

Katzensprung: se p e q são polinômios homogêneos de graus i e j, então $pq = 0$ ou pq é homogêneo de grau $i + j$.

Por conta do Katzensprung[†], segue que se $b \in I \setminus \{0\}$, então para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um polinômio homogêneo de grau k, digamos $p_k \in A[x_1, \ldots, x_n]$, tal que $b = p_k(a_1, \ldots, a_n)$ (percebeu?)*. Isto nos permite definir os ideais $L_k := \operatorname{span}(p_1, \ldots, p_k)$ em $A[x_1, \ldots, x_n]$, o que induz uma *cadeia ascendente* de ideais $(L_k)_{k>0}$, que deve ser *estacionária* em virtude do Teorema da Base de Hilbert (cf. Teorema 2.2.90), i.e., existe $m \geq 1$ tal que $L_{m+1} = L_m$. Logo, existem polinômios $q_1, \ldots, q_m \in A[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $p_{m+1} = q_1 p_1 + \ldots + q_m p_m$.

⌜**Afirmação.** *Nas condições acima, cada q_i é homogêneo de grau $m + 1 - i$.*

Prova da Afirmação. Como grupo aditivo,

$$A[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d[x_1, \ldots, x_n],$$

onde $G_d := A_d[x_1, \ldots, x_n]$ é o subgrupo dos polinômios homogêneos de grau d (*juntamente* com o polinômio nulo). Em particular, se $g_d \in G_d$ para todo d num subconjunto finito $D \subseteq \mathbb{N}$, então

$$\sum_{d \in D} g_d = 0 \Rightarrow g_d = 0 \quad \text{para todo } d \in D.$$

Logo, ao expressar $q_i = \sum Q_{i,j}$, com cada $Q_{i,j}$ homogêneo de grau j, resulta que $Q_{i,j} p_i$ é homogêneo e tem grau $j + i$ (ou $Q_{i,j} p_i = 0$), de modo que as únicas parcelas (possivelmente) não nulas devem ser tais que $m + 1 = j + i$, i.e., $q_i = Q_{i,j}$ é homogêneo de grau $j = m + 1 - i$. Para mais detalhes, procure um livro de Álgebra! ⌟

Enfim, por valer $p_i(a_1, \ldots, a_n) = b$ para todo i, temos

$$b = q_1(a_1, \ldots, a_n) b + \ldots + q_m(a_1, \ldots, a_n) b = b(q_1(a_1, \ldots, a_n) + \ldots + q_m(a_1, \ldots, a_n)),$$

com $q_i(a_1, \ldots, a_n) \in J$ em virtude de sua homogeneidade e grau > 0. Complete os detalhes para exercitar seus *fundamentos* de Álgebra Elementar $({}^{\star}_{\star\star})$. □

Discutir exemplos e aplicações da topologia I-ádica exigiria que eu estudasse mais Álgebra do que o meu tempo permite. Se for do seu interesse, procure por termos como "Análise p-ádica" ou "Análise Funcional Não-Arquimediana" nas suas fontes favoritas de conhecimento.

Mas se prepare: trata-se de um mundo bastante diferente.

Exercício 2.2.32 $({}^{\star}_{\star})$**.** Num anel comutativo e com unidade A com a topologia I-ádica induzida por um ideal I, mostre que para uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A, são equivalentes:

(i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \to 0$ em A;

(ii) a sequência $\left(\sum_{m=0}^{n} a_m\right)_n$ é de Cauchy (cf. Definição 2.2.50). ■

Exercício 2.2.33 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Mostre que $\mathbb{Z}$ não é discreto com a topologia I-ádica, qualquer que seja o ideal não trivial I de $\mathbb{Z}$ considerado. ■

[†]Cuja prova é um simples exercício de indução (se você escrever os polinômios de um jeito maroto)*.

§3 Corpos e espaços vetoriais topológicos

Quem tem letramento em ÁLGEBRA UNIVERSAL pode se incomodar quando se referem a *corpos* como *estruturas algébricas*[†]. No entanto, existir em sociedade nos obriga a conviver com vícios de linguagem inofensivos — fazer estardalhaço é uma escolha. Sendo assim, nas felizes ocasiões em que um corpo K vem de fábrica com uma topologia, diz-se que K é **corpo topológico** se, além das condições para ser anel topológico, a inversão multiplicativa $a \mapsto \frac{1}{a}$ também definir uma função contínua da forma $K \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\}$.

AVISO. Um anel topológico pode ter estrutura de corpo e ainda assim não ser corpo topológico: basta que a inversão não seja contínua. Se quiser muito saber de um exemplo, confira o Exercício 2.2.57.

Corpos ordenados (como $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.) são corpos topológicos com a topologia induzida por suas ordens (certo?)*. Embora $\mathbb{C}$ não seja ordenável, a topologia usual também faz de $\mathbb{C}$ um corpo topológico (cf. Exemplo 2.2.40). Mais *geralmente*, todo corpo K munido de uma função da forma $|\cdot|\colon K \to [0, \infty)$ satisfazendo

(i) $|x| = 0$ sse $x = 0$,

(ii) $|xy| = |x||y|$ e

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para quaisquer $x, y \in K$,

admite uma topologia compatível com sua estrutura de corpo induzida pela métrica $d(x, y) := |x - y|$. Como as mesmas demonstrações que você fez em ANÁLISE REAL se aplicam aqui, as verificações ficarão por sua conta ($^{\star}_{\star}$).

Definição 2.2.59. Uma função $|\cdot|$ como acima é chamada de **valor absoluto**[‡] em K. ¶

Embora seja bastante frequente lembrar apenas dos valores absolutos típicos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, há muitos outros. Para citar pelo menos mais um, fixe um número inteiro primo $p \in \mathbb{Z}$. Como todo número racional não nulo se expressa de forma única como $p^k \cdot \frac{m}{n}$ para certos $k, m, n \in \mathbb{Z}$, com $m, n \neq 0$ e não divisíveis por p, pode-se definir o número

$$\left| p^k \frac{m}{n} \right|_p := \frac{1}{e^k},$$

onde e indica o *número de Euler* que você conheceu na escola[††]. Ao declarar $|0|_p := 0$, ganha-se uma valor absoluto em $\mathbb{Q}$.

Observe que a topologia em $\mathbb{Q}$ induzida por $|\cdot|_p$ difere de sua topologia usual: enquanto $\left(p^k\right)_k$ não converge em $\mathbb{Q}$ no sentido usual (pois $\left(p^k\right)_k \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$), temos $\left(p^k\right)_k \to 0$ em $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. Embora isso não soe bombástico, a métrica induzida por $|\cdot|_p$ satisfaz a desigualdade $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$, o que faz de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ um **espaço ultramétrico**. Oportunamente, veremos que isso *sim* afeta drasticamente a topologia de um espaço.

Evidentemente, todos os resultados obtidos para grupos topológicos permanecem válidos para corpos topológicos. Todavia, as exigências adicionais satisfeitas pelos corpos *disponibilizam* mais propriedades:

[†] Já que a exigência de invertibilidade dos elementos não nulos não é exprimível *algebricamente*, i.e., por meio exclusivo de expressões polinomiais — se fosse, produtos de corpos seriam corpos...

[‡] Como em [19], mas também há quem a chame de *valoração* real (por exemplo, [4]), o que não deve ser confundido com as *valorações de Krull*.

[††] Também é comum usar o próprio p no lugar de e. De modo geral, qualquer número real $a > 0$ *serve*.

- além das translações aditivas, as ~~translações multiplicativas~~† funções $x \mapsto \lambda x$ são homeomorfismos para qualquer $\lambda \in K \setminus \{0\}$ fixado, essencialmente por serem contínuas (certo?)$^{\star}_{\star}$ com inversas contínuas dadas por $x \mapsto \frac{1}{\lambda}x$;

- K é de Hausdorff sse $\{0\}$ é fechado (cf. Corolário 2.2.52), mas para tanto basta que exista *um* aberto não vazio e próprio‡ — afinal, se $\overline{\{0\}} \neq \{0\}$, então $\overline{\{0\}}$ é um ideal não nulo de K e, portanto, deve ser o próprio K (entendeu?)$^{\star}_{\star}$.

Uma vez em posse de um corpo topológico K, o próximo passo é considerar K-espaços vetoriais munidos de topologias compatíveis com sua estrutura vetorial.

Definição 2.2.60. Dizemos que um K-espaço vetorial E é um **K-espaço vetorial topológico** (abrev. K-e.v.t.) se E admite uma topologia que faz de $(E, +, 0)$ um grupo topológico de tal forma que a multiplicação $K \times E \to E$ seja contínua††. ¶

Mais uma vez, os $\mathbb{K}$-espaços normados (para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) constituem os e.v.t's "de entrada" para esse universo. Mas não se acostume: normas se tornam ineficazes em contextos relativamente elementares.

Exemplo 2.2.61. Para qualquer conjunto X, $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$ também é $\mathbb{K}$-e.v.t., afirmação que permanece verdadeira ao substituir $\mathbb{K}$ por qualquer outro corpo topológico K (certo?)$^{\star}_{\star}$. No entanto, não existe norma que induza a topologia de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$ se o conjunto X for infinito‡‡.

Com efeito, se existisse uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ cuja topologia induzida fosse a topologia produto, existiriam um subconjunto finito $F \subseteq X$ e um número real $r > 0$ satisfazendo $B(\underline{0}_X; F; r) \subseteq B_{\|\cdot\|}(\underline{0}_X, 1)$, onde $\underline{0}_X : X \to \mathbb{K}$ denota a função nula e $B(\underline{0}_X; F; r)$ é um aberto básico da topologia produto em torno de $\underline{0}_X$ (cf. Exercício 2.1.72). Porém, para $f := \chi_F$, temos $f \neq \underline{0}_X$ pois existe $x \in X \setminus F$ (certo?!)*, acarretando $\|f\| \neq 0$, com $\lambda f \in B(\underline{0}_X; F; r)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, enquanto $\lambda f \notin B_{\|\cdot\|}(\underline{0}_X, 1)$ sempre que $\lambda \geq \frac{1}{\|f\|}$. ▲

Em geral, se X é finito, então a topologia de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$ é oriunda de uma norma pois, neste caso, (existe e) *é única a topologia sobre $\mathbb{K}^{|X|}$ que faz dele um $\mathbb{K}$-e.v.t. de Hausdorff*. Porém, ainda é cedo para explorar esse resultado no caso de um conjunto X finito qualquer, pois isso depende de *outras propriedades topológicas* de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ que ainda não foram exploradas. Por ora, será mais conveniente notar que mesmo para $|X| = 1$, essa prometida unicidade depende do corpo K. Fazendo $K := \mathbb{R}$ com a topologia discreta e $E := \mathbb{R}$ com sua topologia usual, por exemplo, obtemos um corpo topológico K tal que E é um K-e.v.t. de Hausdorff não homeomorfo a K (certo?)$^{\star}_{\star}$.

Ah, mas o problema foi permitir o corpo discreto!

Tudo bem, podemos considerar $K := \mathbb{R}$ com sua topologia usual e tomar $E := \mathbb{R}$ com a topologia *caótica* $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Mais uma vez, E é um K-e.v.t. (por quê?)$^{\star}_{\star}$ não homeomorfo a K já que, por exemplo, E não é de Hausdorff.

Ah! Mas o problema foi permitir que E não fosse de Hausdorff! (cf. Exercício 2.2.58).

†Há quem as xingue de *homotetias*.

‡Consequentemente, os únicos abertos de um corpo topológico K que não é de Hausdorff são $\emptyset$ e K.

††*Módulos topológicos* (sobre anéis topológicos) se definem de maneira análoga, evidentemente.

‡‡A topologia de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$ não é *metrizável* se X for não enumerável (cf. Exercício 2.1.74). Normas são mais exigentes do que métricas.

Se essa recursão socrática não for encerrada, logo discutiremos *topologias minimais*, *continuidade automática*, *retrobounded fields*... entre muitas outras terminologias pagãs [46, 47]. Dado que *até* Bourbaki (!!!) se restringe a corpos dotados de valores absolutos em [9], quem sou eu para me propor a investigar espaços vetoriais topológicos sobre corpos topológicos mais gerais? Portanto, sempre que for preciso, assumiremos que a topologia do corpo topológico em questão é induzida por um valor absoluto, a fim de tornar a discussão útil tanto para analistas (que se importam majoritariamente por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$) quanto para algebristas[†] (que preferem corpos com valorações não arquimedianas). Em particular, a letra "$\mathbb{K}$" será mantida para denotar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pelo restante do texto.

AVISO: até o final desta subsubseção, K é um corpo dotado de um valor absoluto $|\cdot|$.

Uma das principais utilidades dos valores absolutos é dar sentido aos conjuntos *balanceados* nos espaços vetoriais.

Definição 2.2.62. Dizemos que um subconjunto S de um K-espaço vetorial X é **balanceado** se $\alpha S \subseteq S$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$. ¶

A noção de balanceamento generaliza certos aspectos geométricos de simetria (via *reflexões*) e *contratibilidade*, já que S é balanceado sse $S = B_K[0,1] \cdot S$ (certo?)$^{\star}_{\star}$:

- observe que com $K := \mathbb{C}$ e $X := \mathbb{C}$, os únicos subconjuntos balanceados de X são X, $\emptyset$, $\{0\}$ e as bolas abertas ou fechadas;
- para $K := \mathbb{R}$ e $X := \mathbb{C}$, além dos subconjuntos acima, também são balanceados os *segmentos* da forma $\overrightarrow{[-v,v]}$, onde $\overrightarrow{[x,y]} := \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$.

Exercício 2.2.34 $(^{\star}_{\star})$**.** Além de verificar as afirmações acima, mostre que um subconjunto S de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial X é balanceado sse $S = -S$ e $[0,1)S \subseteq S$. ■

O próximo lema será fundamental em diversos resultados sobre e.v.t's.

Lema 2.2.63. *Todo K-e.v.t. E admite uma base local de vizinhanças balanceadas em torno de $0 \in E$. Explicitamente: se $U \subseteq E$ é um aberto em torno de $0 \in E$, então existe um aberto não vazio e balanceado $B \subseteq E$ tal que $0 \in B \subseteq U$.*

Demonstração. Como a multiplicação é contínua em $(0,0) \in K \times E$, existem $\delta > 0$ e um aberto $W \subseteq E$ em torno $0 \in E$ tais que $B_K(0,\delta) \cdot W \subseteq U$, i.e., tal que $\alpha W \subseteq U$ sempre que $|\alpha| < \delta$. Logo, basta notar que $B := B_K(0,\delta) \cdot W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha W$ serve (verifique!)$^{\star}_{\star}$. □

Teorema 2.2.64. *Para um K-e.v.t. E e um funcional linear não nulo $\varphi\colon E \to K$, são equivalentes:*

(i) *φ é contínuo;*

(ii) $\ker\varphi := \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$ *é fechado;*

(iii) $\ker\varphi$ *<u>não é</u> denso em E;*

(iv) *φ é limitado em algum aberto em torno de $0 \in E$, i.e., existem um aberto $B \subseteq E$ em torno de $0 \in E$ e um número real $M > 0$ tais que $|\varphi(x)| < M$ para todo $x \in B$.*

[†]Além de *pessoas que pesquisam em Física*! Confira [43] para mais detalhes.

Demonstração. As implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) e (ii) $\Rightarrow$ (iii) serão problema seu $(\substack{\star\\\star})$. Supondo que $\ker\varphi$ não é denso, segue que existem $p \in E \setminus \{0\}$ e um aberto $W \subseteq E$ tais que $p \in W$ e $W \cap \ker\varphi = \emptyset$. Logo, $U := W - p$ é um aberto em torno de $0 \in E$, o que permite usar o lema anterior para conjurar um aberto balanceado $B \subseteq E$ tal que $0 \in B$ com $B \subseteq U$.

⌜**Afirmação 2.2.65.** *Se $T\colon X \to Y$ é uma transformação linear entre K-espaços vetoriais e $S \subseteq X$ é balanceado, então $T[S]$ é balanceado em Y.*

Prova da Afirmação. $S = B_K[0,1]S \Rightarrow T[S] = T\left[B_K[0,1]S\right] = B_K[0,1]T[S]$. ⌟

Por conta da afirmação acima, segue que $\varphi[B] \subseteq K$ é balanceado. Se, por absurdo, $\varphi[B]$ não fosse limitado no sentido de (iv), existiria $y \in \varphi[B]$ com $|y| > |\varphi(p)|$. Logo, $y \neq 0$ em K, permitindo considerar $\lambda := -\frac{\varphi(p)}{y}$, que satisfaz $|\lambda| < 1$ (por quê?!)$^{\star}_{\star}$ e, por conseguinte, $\lambda y \in \varphi[B]$, i.e., existe $v \in B$ com $\varphi(v) = \lambda y = -\varphi(p)$, donde segue que $p + v \in \ker\varphi$. Mas isto é absurdo, pois $p + v \in p + B \subseteq p + (W - p) = W$, acarretando $W \cap \ker\varphi \neq \emptyset$. Portanto, vale (iv).

Por fim, assumindo (iv), basta mostrar que φ é contínua em $0 \in E$. Para isso, dado $\varepsilon > 0$ e tomando B e M como em (iv), basta notar que $W := \frac{\varepsilon}{M}B$ é um aberto em torno de $0 \in E$ tal que $|\varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in W$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$. □

Demonstração alternativa de (ii) $\Rightarrow$ (i) (*para o caso normado*). Procedendo pela contrapositiva, suponha que $y \in E \setminus \ker\varphi$. Como φ não é contínua, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ com $|\varphi(x_n)| > 2^n\|x_n\|$. Daí, não é difícil perceber que $y_n := y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x_n)} \cdot x_n$ é tal que $y_n \in \ker\varphi$ para todo n e $(y_n)_n \to y$, mostrando que $\ker\varphi$ não é fechado. □

Corolário 2.2.66. *Sejam E um K-e.v.t. de Hausdorff e $v \in E \setminus \{0\}$. Se $\dim_K E = 1$, então o isomorfismo linear dado por $\lambda \mapsto \lambda v$ é um homeomorfismo para qualquer vetor $v \in E \setminus \{0\}$ fixado.*

Demonstração. Em geral, a função $\gamma\colon K \to E$ dada por $\gamma(\lambda) := \lambda v$ é K-linear e contínua. Com a hipótese sobre a dimensão de E, segue que γ é invertível, com $\gamma^{-1}\colon E \to K$ um funcional linear injetivo. Finalmente, por E ser de Hausdorff, a continuidade de γ^{-1} segue do teorema anterior (pois...?)*. □

O corolário anterior está longe de ser banal: além de formalizar a intuição de que um K-espaço vetorial com dimensão 1 *deveria*[†] ser o próprio K, trata-se do primeiro passo na descrição dos K-e.v.t's de Hausdorff *finito-dimensionais*, tarefa cuja conclusão depende da introdução da *compacidade local*. Há mais resultados interessantes que podem ser abordados sobre K-e.v.t's no *presente grau de generalidade*? Certamente! Porém, a maioria deles nos desviaria do objetivo central do texto. A próxima subsubseção de exercícios elenca alguns desses fatos gerais que podem ser abordados de forma segura, enquanto a subseção seguinte diminui a generalidade a fim de estender um pouco mais a discussão no âmbito da Análise Funcional.

§4 Exercícios adicionais

Exercício 2.2.35 $(\substack{\star\\\star})$**.** Sejam G um grupo e $\mathcal{T}$ uma topologia sobre G. Mostre que a topologia $\mathcal{T}$ faz de G um grupo topológico sse a função $\varphi\colon G \times G \to G$ dada por $\varphi(x,y) := xy^{-1}$ é contínua, onde $G \times G$ tem a topologia produto. ■

[†] Mas nem sempre é... (cf. Exercício 2.2.58).

Exercício 2.2.36 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Para um grupo topológico G com elemento neutro e, sejam $p \in G$ um ponto fixado e ${}_p\tau$, τ_p as translações dadas por $x \mapsto px$ e $x \mapsto xp$, respectivamente.

a) Mostre que $\mathcal{N}_p = \tau_p(\mathcal{N}_e) = {}_p\tau(\mathcal{N}_e)$. Explicitamente: $M \subseteq G$ é vizinhança de p sse existe $N \subseteq G$ vizinhança de e tal que $Np \subseteq M$ sse existe $O \subseteq G$ vizinhança de e tal que $pO \subseteq M$.

b) Mostre que translações são **funções fechadas**[†]. Conclua que $\overline{pS} = p\overline{S}$ e $\overline{Sp} = \overline{S}p$ para qualquer $S \subseteq G$.

c) Mostre que translações são **funções abertas**[‡]. Conclua que AB é aberto em G sempre que A ou B forem abertos de G. Dica: $AB = \bigcup_{b\in B} Ab = \bigcup_{a\in A} aB$. ■

Exercício 2.2.37 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Mostre que $A := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $B := \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x > 0\right\}$ são fechados do grupo topológico $(\mathbb{R}^2, +, 0)$, mas $A + B$ não é fechado em $\mathbb{R}^2$. Dica: descreva explicitamente os membros de $A + B$. ■

Exercício 2.2.38 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Para subconjuntos S e T de um grupo topológico G, mostre que vale a inclusão $\overline{S} \cdot \overline{T} \subseteq \overline{ST}$. Conclua que se $S \subseteq G$ é subgrupo de G, então $\overline{S}$ ainda é subgrupo de G. Dica: não se esqueça dos Exercícios 2.1.46 e 2.1.62. ■

Exercício 2.2.39 $(\star)$**.** Mostre que se G é um grupo, então a topologia discreta sobre G faz de G um grupo topológico. ■

Exercício 2.2.40 $(\star)$**.** Mostre que um grupo topológico é discreto sse existe pelo menos um ponto isolado[††]. ■

Exercício 2.2.41 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Mostre que não existe estrutura de grupo em $\overline{\mathbb{R}}$ compatível com sua topologia usual. ■

Exercício 2.2.42 (Cf. Exemplo 2.1.66 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$)**.** Mostre que a adição $+\colon \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}_S$ é contínua. A reta de Sorgenfrey é um espaço homogêneo? É um grupo topológico? Dica: no futuro, veremos que todo grupo topológico 1º-contável de Hausdorff é metrizável. ■

Exercício 2.2.43 $\left(\substack{\star\\\star}\right)$**.** Diremos que uma métrica d sobre um grupo G é **compatível à direita** se $d(ac, bc) = d(a, b)$ para quaisquer $a, b, c \in G$. Sejam então G e H grupos topológicos e $f\colon G \to H$ um morfismo de grupos. Mostre que se as topologias de G e H forem induzidas por métricas d_G e d_H, ambas compatíveis à direita com seus respectivos grupos, então f é uniformemente contínua (com respeito às métricas d_G e d_H) sse f é uniformemente contínua (com respeito à Definição 2.2.48). ■

Exercício 2.2.44 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Determine todos os subgrupos fechados de $(\mathbb{R}, +, 0)$. Dica: mostre que os subgrupos de $\mathbb{R}$ são discretos ou densos. ■

Exercício 2.2.45 $\left(\substack{\star\\\star\star}\right)$**.** Ao considerar $(\mathbb{R}, +, 0)$ com sua estrutura de grupo topológico usual, mostre que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é morfismo contínuo de grupos sse existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2.2.46 $(\star^5)$**.** Mostre que existem *muitos* morfismos descontínuos de grupos de $(\mathbb{R}, +, 0)$ em si mesmo. ■

[†] I.e., tais que a imagem de fechados é fechada (cf. Afirmação 3.1.18).
[‡] I.e., tais que a imagem de abertos é aberta.
[††] Não se esqueça: estruturas algébricas com *constantes*, como grupos, nunca são vazias.

Exercício 2.2.47 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ uma $\mathbb{K}$-álgebra normada com unidade $e \in \mathcal{A}$.

a) Mostre que $\|e\| \geq 1$.

b) Seja $E_z \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a translação multiplicativa por z à esquerda, i.e., $E_z(x) := zx$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Mostre que E_z é um operador $\mathbb{K}$-linear contínuo, para todo $z \in \mathcal{A}$.

c) Finalmente, para cada $a \in \mathcal{A}$, defina $\|a\|' := \|E_a\|$, onde $\|E_a\|$ é a norma do operador contínuo E_a (pág. 31). Mostre que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|')$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra normada tal que $\mathrm{Id}\colon (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|')$ é contínua com inversa contínua e $\|e\|' = 1$. ■

Exercício 2.2.48 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja S um subconjunto de um anel topológico A.

a) Mostre que se S é ideal de A, então $\overline{S}$ é ideal de A.

b) Mostre que se S é subanel de A, então $\overline{S}$ é subanel de A. ■

Exercício 2.2.49 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja A um anel topológico (com unidade!) e considere o subgrupo multiplicativo $\mathrm{Inv}\,(A) := \{x \in A \setminus \{0\} : x \text{ é invertível}\}$. Mostre que se $1 \in \mathrm{int}(\mathrm{Inv}(A))$, então $\mathrm{Inv}\,(A)$ é aberto. Conclua que na primeira parte do Teorema 2.2.55, bastaria mostrar que $e \in \mathcal{B}$ é ponto interior de $\mathrm{Inv}\,(\mathcal{B})$. Dica: se $p \in \mathrm{Inv}\,(A)$, então $x \mapsto px$ é um homeomorfismo. ■

Exercício 2.2.50 (Topologia espectral[†], Harte [24] $(^{\star}_{\star\star})$)**.** Dado um anel comutativo e com unidade A, para cada $J \subseteq A$ finito considere o subconjunto

$$\mathcal{B}(0, J) := \{x \in A : 1 - jx \in \mathrm{Inv}\,(A) \text{ para todo } j \in J\},$$

e declare $\mathcal{B}(a, J) := a + B(0, J)$ para todo $a \in A$.

a) Mostre que ao definir $\mathcal{B}_a := \{\mathcal{B}(a, J) : J \subseteq A \text{ é finito}\}$ para cada $a \in A$, a A-upla $(\mathcal{B}_a)_{a \in A}$ é um sistema de bases locais para uma topologia $\mathcal{S}$ em A.

b) Mostre que $(A, \mathcal{S})$ é um anel topológico, $\mathrm{Inv}\,(A)$ é $\mathcal{S}$-aberto e $\rho\colon \mathrm{Inv}\,(A) \mapsto \mathrm{Inv}\,(A)$ dada por $\rho(x) := x^{-1}$ é contínua com respeito à topologia $\mathcal{S}$.

c) Seja $\mathcal{T}$ uma topologia sobre A que torne $(A, \mathcal{T})$ um anel topológico. Mostre que $\mathrm{Inv}\,(A)$ é $\mathcal{T}$-aberto e ρ é contínua com respeito à topologia $\mathcal{T}$ sse a função identidade $\mathrm{Id}_A\colon (A, \mathcal{T}) \to (A, \mathcal{S})$ é contínua. ■

Exercício 2.2.51 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Sejam K um corpo topológico, E um K-e.v.t. e $\varphi\colon E \to K$ um funcional K-linear. Mostre que se $\varphi \neq 0$, então φ é uma função *aberta* (cf. item (c) do Exercício 2.2.36). ■

Exercício 2.2.52 $(\star)$**.** Mostre que um corpo topológico K é não discreto sse todo aberto $V \subseteq K$ em torno de $0 \in K$ existe $\lambda \in V \setminus \{0\}$. ■

Exercício 2.2.53 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam K um corpo topológico e S um subconjunto de um K-e.v.t. E.

a) Mostre que se S é subespaço vetorial de E, então $\overline{S}$ é subespaço vetorial de E.

[†]Não confunda com a *topologia de Zariski* no espectro, que será discutida no final deste capítulo.

b) Assumindo K é um corpo com valor absoluto, mostre que $\overline{S}$ é balanceado sempre que S é balanceado. Além disso, se $0 \in \operatorname{int}(S)$, então $\operatorname{int}(S)$ também é balanceado sempre que S for balanceado. Por fim, mostre que se A e B são balanceados, então $A + B$ também é. ■

Exercício 2.2.54 $({}^{\star}_{\star})$**.** Seja $(f_i \colon X \to X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ como na Proposição 2.1.82.

a) Supondo que X e X_i sejam grupos e cada f_i seja um morfismo de grupos, com X_i grupo topológico para todo $i \in \mathcal{I}$, mostre que $\left(X, \mathfrak{T}\left(f_i\right)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ é grupo topológico.

b) Supondo que X e X_i sejam anéis e cada f_i seja um morfismo de anéis, com X_i anel topológico para todo $i \in \mathcal{I}$, mostre que $\left(X, \mathfrak{T}\left(f_i\right)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ é anel topológico.

c) Supondo que K é corpo topológico, sejam X e X_i espaços vetoriais sobre K tais que f_i é K-linear e X_i é K-e.v.t. para todo $i \in \mathcal{I}$, mostre que $\left(X, \mathfrak{T}\left(f_i\right)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ é K-e.v.t..

d) Conclua que:

(i) a topologia de subespaço sobre subgrupos, subanéis e subespaços vetoriais é compatível com as respectivas estruturas algébricas.

(ii) a topologia produto em produtos de grupos topológicos, anéis topológicos e K-e.v.t's é compatível com as respectivas estruturas algébricas dos produtos. ■

Exercício 2.2.55 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Seja X um espaço topológico que admita uma função contínua e <u>ilimitada</u> $f \colon X \to \mathbb{R}$, e considere $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ com a *topologia da convergência uniforme*, i.e., a topologia que $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ herda de $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{R})$ com a métrica ρ do Exercício 1.1.6. Mostre que sob tais hipóteses, tanto a multiplicação $\mathbb{R} \times \mathrm{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ quanto o produto $\mathrm{C}(X, \mathbb{R}) \times \mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ não são funções contínuas. ■

Exercício 2.2.56 (*For fun* $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Para um espaço topológico S, um conjunto X e uma coleção de índices $\mathcal{I}$, mostre que se $P \colon \mathrm{Fun_p}(\mathcal{I}, S) \to S$ é uma "operação $\mathcal{I}$-ária contínua", então a operação induzida $\widetilde{P} \colon \mathrm{Fun_p}(\mathcal{I}, \mathrm{Fun_p}(X, S)) \to \mathrm{Fun_p}(X, S)$ é contínua, onde $\widetilde{P}((f_i)_{i\in\mathcal{I}})(x) := P((f_i(x))_{i\in\mathcal{I}})$ para qualquer $x \in X$. Dica: trata-se apenas de uma generalização do item (i) do Lema 2.2.41. ■

Exercício 2.2.57 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Sobre $\mathbb{Q}$, considere a topologia gerada pelas bases $(\mathcal{B}_q)_{q\in\mathbb{Q}}$, onde $\mathcal{B}_q := \{p\mathbb{Z} + q : p \in \mathbb{Z}\}$ para cada $q \in \mathbb{Q}$.

a) Mostre que $\mathbb{Q}$ é um anel topológico de Hausdorff com tal topologia.

b) Mostre que a pré-imagem de $U := 1 + 2\mathbb{Z}$ pela inversão multiplicativa não é aberta em $\mathbb{Q}$. ■

Exercício 2.2.58 (Bourbaki [9][Exercício 6.a, §2, pág. 25] $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Considere o subconjunto $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

a) Mostre que K é um corpo e $\mathbb{Q}$-espaço vetorial com $\dim_{\mathbb{Q}} K = 2$. Observação: se seus conhecimentos de Álgebra Básica estiverem enferrujados, apenas acredite e prossiga, pois o que interessa é o restante.

b) Considere K com a topologia herdada de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, bem como $E := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Mostre que tanto K é um corpo topológico quanto E é um K-e.v.t., ambos de Hausdorff e não discretos.

c) Existe algum funcional linear contínuo e não nulo $E \to K$? Existe algum homeomorfismo K-linear entre ambos? Dica: note que $\left((1 - \sqrt{2})^n\right)_n \to 0$ em E. ■

2.2.6 Topologias fracas em Análise Funcional

O Exercício 2.2.54 já indicou que o método de gerar topologias a partir de funções se adapta naturalmente para e.v.t's. Porém, como você pode ter caído aqui de paraquedas, convém explicitar que isto significa o seguinte: fixados

- um corpo topológico K,
- um K-espaço vetorial X,
- uma $\mathcal{I}$-upla $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de K-e.v.t's,
- uma $\mathcal{I}$-upla $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de funções K-lineares da forma $f_i\colon X\to X_i$,

a menor topologia em X que torna todas as funções $f_i\colon X\to X_i$ contínuas, denotada por $\mathfrak{T}(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ (cf. Definição 2.1.83), também faz de $\left(X,\mathfrak{T}(f_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$ um K-e.v.t.. Isto se deve ao comportamento da convergência da topologia fraca (cf. Exemplo 2.1.86), segundo a qual uma rede φ em X converge para $p\in X$ sse $f_i\circ\varphi\to_{X_i} f_i(p)$ para todo $i\in\mathcal{I}$. Assim, por exemplo, se $(\lambda_\alpha)_\alpha\to\lambda$ em K e $(x_\alpha)_\alpha\to x$ em $\left(X,\mathfrak{T}(f_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$, então $(f_i(x_\alpha))_\alpha\to f_i(x)$ em X_i para qualquer $i\in\mathcal{I}$, donde o fato de $K\times X_i\to X_i$ ser contínua acarreta

$$(\lambda_\alpha f_i(x_\alpha))_\alpha=(f_i(\lambda_\alpha x_\alpha))_\alpha\to_{X_i}\lambda f_i(x)=f_i(\lambda x),$$

mostrando que $(\lambda_\alpha x_\alpha)_\alpha\to\lambda x$ em $\left(X,\mathfrak{T}(f_i)_{i\in\mathcal{I}}\right)$. A compatibilidade da topologia fraca com as outras operações de X segue de maneira análoga (concorda?)$^{\star}_{\star}$.

Nesta subseção, veremos as principais instâncias de topologias fracas em Análise Funcional — mas nada muito além disso, já que a *compacidade* ainda não está disponível em nosso ~~arsenal~~ vocabulário.

§1 Seminormas e convexidade local

Uma das minhas mentiras favoritas é a máxima

$$\text{Análise} = \text{Álgebra} + \text{Topologia}$$

pois ela soa verdadeira quando se olha de longe, mas se revela falsa após uma leve aproximação: entre outros problemas, parece faltar Geometria. Isto fica evidente ao nos lembrarmos de que *convexidade* é algo fundamental para Análise.

Intuitivamente, um conjunto C é *convexo* se os *segmentos de reta* ligando quaisquer dois de seus pontos estiverem inteiramente contidos em C.

Embora a Álgebra tenha poder de *expressividade* suficiente para descrever *retas* (basta um espaço vetorial sobre um corpo), a ideia de *segmento de reta* lhe escapa, pois precisamos ser capazes de distinguir as *extremidades* do segmento, i.e., onde ele *começa* e onde ele *termina*. Como sempre se escuta em reuniões de departamento, trata-se de uma questão de Ordem[†].

Definição 2.2.67. Um subconjunto S de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X é **convexo** se para quaisquer $t\in(0,1)$ e $x,y\in S$ valer que $ty+(1-t)x\in S$. ¶

[†]E aqui, o mais importante é que se tenha $\mathbb{R}$ como subcorpo de $\mathbb{K}$.

Uma vez que $ty+(1-t)x=t(y-x)+x$, pode-se interpretar a definição acima como a formalização da definição intuitiva de convexidade: enquanto $L:=\{t(y-x):t\in\mathbb{K}\}$ é a *reta* em X determinada pelo vetor $y-x$, $L+x$ é a translação da reta L pelo vetor x, que passa por x em $t:=0$ e por y em $t:=1$. Logo, S é convexo sse o *segmento* $\overrightarrow{[x,y]}:=\{t(y-x)+x:t\in[0,1]\}$ está contido em S para quaisquer $x,y\in S$.

A fim de ilustrar a importância da convexidade sem descaracterizar ainda mais os objetivos deste texto, vamos ver como ela pode ser usada para responder uma pergunta aparentemente banal.

Pergunta: dado um $\mathbb{K}$-e.v.t. $E\neq\{0\}$, existe algum funcional linear contínuo e não nulo $\varphi\colon E\to\mathbb{K}$?

A depender de sua bagagem, a pergunta acima pode parecer boba: talvez você se lembre que *toda transformação linear é contínua*, o que tornaria a indagação acima bastante idiota. Contudo, trata-se de uma memória falsa: a menos de situações *forçadas* (cf. Exercício 2.2.81), apenas as transformações lineares da forma $\mathbb{K}^n\to E$ são automaticamente contínuas, o que será provado oportunamente.

Exemplo 2.2.68. *Se um $\mathbb{K}$-e.v.t. E é 1º-contável e tem dimensão infinita, então existe um funcional linear $\varphi\colon E\to\mathbb{K}$ descontínuo.*

De fato, sejam $\mathcal{V}:=\{V_n:n\in\mathbb{N}\}$ uma base local de vizinhanças em torno de $0\in E$ e fixe $\mathcal{X}:=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq E$ um subconjunto l.i. infinito enumerável. Supondo que $\mathcal{V}$ é decrescente (cf. Lema 2.1.67) e fixando $n\in\mathbb{N}$, a continuidade da multiplicação $k\mapsto kx_n$ permite tomar $t_n\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ tal que $t_nx_n\in V_n$, donde segue que $(t_nx_n)_n\to_E 0$ (certo?)$^\star_\star$. Considerando uma base (de Hamel) $\mathcal{B}$ que contém $\mathcal{X}$, pode-se definir um funcional linear $\varphi\colon E\to\mathbb{K}$ declarando $\varphi(x_n):=\frac{1}{t_n}$ e $\varphi(b):=0$ se $b\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{X}$. Logo, $\varphi(t_nx_n)=1$ para todo n, mostrando que φ não é contínua em $0\in E$ (se E fosse normado, bastaria definir $\varphi(x_n):=2^{2n}\|x_n\|^2$ e notar que $\left(\frac{1}{\|x_n\|2^n}x_n\right)_n\to 0$). ▲

Exercício 2.2.59 ($^\star_\star$)**.** Mostre que o resultado anterior permanece válido mesmo se K for meramente um corpo topológico sem pontos isolados. ■

Portanto, é relativamente comum acontecer $E^*:=\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})\subsetneq\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$, onde $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$ denota o **dual algébrico de** E, i.e., a coleção de *todos* os funcionais lineares da forma $E\to\mathbb{K}$, contínuos ou não (cf. Exercício 1.2.15). Isso mostra que a pergunta é pertinente. E como veremos, não se trata de mero preciosismo, já que existem $\mathbb{K}$-espaços vetoriais não triviais para os quais a resposta para a pergunta é "não" (cf. Teorema 2.2.76).

No que segue, um subconjunto D de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X será chamado de **disco** se D for convexo, balanceado e **expansível**, onde o último significa o seguinte†: para qualquer $x\in X$ existe $\beta>0$ tal que $\alpha x\in D$ para qualquer $\alpha\in\mathbb{K}$ satisfazendo $|\alpha|\leq\beta$.

Exemplo 2.2.69. Bolas em espaços normados (abertas ou fechadas) e centradas na origem são discos. Mas atenção: subconjuntos expansíveis não precisam ser convexos (como o símbolo "✦" nos ensina em $\mathbb{R}^2$), e tampouco precisam ser balanceados (por conta de animais como $[-1,2]$ em $\mathbb{R}$ (certo?)*). Em particular, todo disco contém a origem. ▲

†A ideia é que um subconjunto expansível contém pelo menos um segmento *limitado* de cada *direção* possível.

Note que se $D \subseteq X$ é um disco, então para qualquer $x \in X$, $x \in rD$ para algum $r > 0$: de fato, por D ser expansível, existe $\beta > 0$ tal que $\alpha x \in D$ sempre que $|\alpha| \leq \beta$, e assim basta tomar $r := \beta^{-1}$. Logo, o conjunto $\mathrm{M}(D)_x := \{r > 0 : x \in rD\}$ é não vazio e limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, o que assegura a existência do número real $\|x\|_D := \inf \mathrm{M}(D)_x$.

Definição 2.2.70. Nas condições acima, a função $\|\cdot\|_D \colon X \to \mathbb{R}$ será chamada de **seminorma de Minkowski**. ¶

Como o nome sugere, *seminormas* são funções que remetem a normas, mas são um pouco menos exigentes. Explicitamente, uma função $s \colon X \to \mathbb{R}$ é uma **seminorma** se s satisfaz tudo o que uma *norma* satisfaz (cf. Definição 1.2.1), exceto pela condição "$s(v) = 0 \Rightarrow v = 0$". A justificativa para o nome dado a $\|\cdot\|_D$ é a seguinte

Proposição 2.2.71 (Minkowski)**.** *Sob as condições anteriores, a seminorma de Minkowski é, de fato, uma seminorma em X. Mais precisamente,*

(i) *se $D \subseteq X$ é disco, então $\|\cdot\|_D$ é uma seminorma em X;*

(ii) *se $s \colon X \to [0, +\infty)$ é seminorma em X, então $D_s := \{x \in X : s(x) < 1\}$ é um disco.*

Demonstração. Por construção, $\|x\|_D \geq 0$ ocorre para todo $x \in X$, e $\|0\|_D = 0$ por valer $\mathrm{M}(D)_0 = (0, +\infty)$. Assim, para provar (i), basta verificar que $\|x + y\|_D \leq \|x\|_D + \|y\|_D$ e $\|\lambda x\|_D = |\lambda|\|x\|_D$ para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Note que se $r, s > 0$ são tais que $r \in \mathrm{M}(D)_x$ e $s \in \mathrm{M}(D)_y$, então $x \in rD$ e $y \in sD$, acarretando $x + y \in rD + sD = (r + s)D$, onde a última igualdade se deve ao fato de D ser convexo: com efeito, se $u, v \in D$ e $ru + sv = (r + s)z$ para algum $z \in X$, então

$$z = \frac{r}{r+s}u + \frac{s}{r+s}v, \text{ com } \frac{r}{r+s} + \frac{s}{r+s} = 1,$$

mostrando que z é uma *combinação convexa* de pontos em D e, portanto, $z \in D$ (cf. Exercício 2.2.61). Logo, $r + s \in \mathrm{M}(D)_{x+y}$, mostrando que $\mathrm{M}(D)_x + \mathrm{M}(D)_y \subseteq \mathrm{M}(D)_{x+y}$ e, consequentemente,

$$\|x+y\|_D := \inf \mathrm{M}(D)_{x+y} \leq \inf\left(\mathrm{M}(D)_x + \mathrm{M}(D)_y\right) = \inf \mathrm{M}(D)_x + \inf \mathrm{M}(D)_y = \|x\|_D + \|y\|_D.$$

Para a identidade restante, tomemos $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Observe que para $r > 0$, $\lambda x \in rD$ sse $x \in \frac{r}{\lambda}D$. Agora, por D ser balanceado e $r > 0$, deve-se ter $\frac{r}{\lambda}D = \frac{r}{|\lambda|}D$: neste caso, a identidade $\alpha D = |\alpha|D$ se verifica para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ pois, pela hipótese de balanceamento, $\alpha D \subseteq \beta D$ sempre que $|\alpha| \leq |\beta|$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_D &:= \inf\{r > 0 : \lambda x \in rD\} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} \inf\left\{r > 0 : x \in \frac{r}{\lambda}D\right\} \\ &= |\lambda| \inf\left\{\frac{r}{|\lambda|} > 0 : x \in \frac{r}{|\lambda|}D\right\} = |\lambda| \inf\{\gamma > 0 : x \in \gamma D\} = |\lambda|\|x\|_D\end{aligned}$$

como desejado. A afirmação (ii), por sua vez, está escondida na primeira sentença do exemplo anterior. □

Temos, portanto, um modo de interpretar objetos geométricos (discos) analiticamente (seminormas) e vice-versa, o que pode parecer irrelevante. Tal impressão desaparece ao adicionarmos topologia na história.

Teorema 2.2.72 (Dominância = continuidade)**.** *Seja E um $\mathbb{K}$-e.v.t.. Um funcional linear $\varphi\colon E\to\mathbb{K}$ é contínuo se, e somente se, existe uma seminorma contínua $s\colon E\to\mathbb{R}$ tal que $|\varphi(x)|\leq s(x)$ para todo $x\in E$.*

Demonstração. Se φ é contínuo, então $|\varphi| := |\cdot|\circ\varphi$ é seminorma (verifique!)$^{\star}_{\star}$, contínua por ser composta de funções contínuas, e daí basta tomar $s := |\varphi|$. Para a recíproca, note que se $(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ é rede em E com $(x_d)_d \to_E 0$, então a seminorma <u>contínua</u> s dada pela hipótese satisfaz $(s(x_d))_d \to_{\mathbb{R}} 0$, donde se infere $(\varphi(x_d))_d \to_{\mathbb{K}} 0$ pois $0\leq|\varphi(x_d)|\leq s(x_d)$ para todo $d\in\mathbb{D}$ (percebeu?)$^{\star}_{\star}$. Logo, φ é contínuo em 0 e, portanto, é contínuo. □

Se você *lembra* de já ter estudado o *Teorema de Hahn-Banach* alguma vez na vida, pode ser que tenha entrado num estado de euforia ao encontrar a mesma condição de limitação no enunciado acima. Não é mera coincidência: desde *sempre*, a limitação por uma seminorma esconde um critério de continuidade. Para te poupar o trabalho de procurar o seu livro favorito de ANÁLISE FUNCIONAL para recordar:

Teorema 2.2.73 (da extensão *dominada* de Hahn-Banach)**.** *Sejam X um $\mathbb{K}$-e.v.t., M um subespaço vetorial próprio de X e $s\colon X\to\mathbb{R}$ uma seminorma. Se $\varphi\colon M\to\mathbb{K}$ é funcional linear satisfazendo $|\varphi(x)|\leq s(x)$ para todo $x\in M$, então existe um funcional linear $\Phi\colon X\to\mathbb{K}$ tal que $|\Phi|\leq s$ e $\Phi(x)=\varphi(x)$ para todo $x\in M$. Em particular, se s é contínua, então Φ é contínua.*

Demonstração (opcional). A ideia é estender (o domínio de) φ uma dimensão de cada vez até que se *esgotem as possibilidades*, o que costuma ser costurado com o *Lema de Zorn* (cf. Observação 3.1.27) por meio do seguinte “passo indutivo”:

⌜**Afirmação.** *Suponha $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Para qualquer $z\in X\setminus M$ fixado existe $\widetilde{\varphi}\colon M\oplus\mathbb{R}z\to\mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\varphi}|_M=\varphi$ e $|\widetilde{\varphi}(y)|\leq s(y)$ para todo $y\in M\oplus\mathbb{R}z$.*

Prova da Afirmação. Um vetor v em $M\oplus\mathbb{R}z$ se escreve de forma única como $m_v+\lambda_v z$, onde $m_v\in M$ e $\lambda_v\in\mathbb{R}$. Segue daí que a função $\widetilde{\varphi}$ procurada deve ser dada por uma expressão da forma $\widetilde{\varphi}(m_v+\lambda_v z)=\varphi(m_v)+\lambda_v\gamma$, para algum $\gamma\in\mathbb{R}$. O problema? Determinar γ.

Ao aliar a expressão acima com a desigualdade procurada, chega-se a

$$-\varphi(m)-s(m+\lambda z)\leq\lambda\gamma\leq s(m+\lambda z)-\varphi(m) \tag{2.17}$$

para quaisquer $m\in M$ e $\lambda\in\mathbb{R}$. Em particular, para $\lambda>0$, isto equivale a

$$\varphi\left(-\frac{m}{\lambda}\right)-s\left(-\frac{m}{\lambda}-z\right)\leq\gamma\leq s\left(\frac{m}{\lambda}+z\right)-\varphi\left(\frac{m}{\lambda}\right), \tag{2.18}$$

o que serve de dica para determinar γ. Com efeito, para $u,v\in M$ quaisquer, temos

$$\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi(u+v)\leq s(u+v)=s(u-z+z+v)\leq s(u-z)+s(z+v),$$

mostrando que $\varphi(u)-s(u-z)\leq s(z+v)-\varphi(v)$.

Fixando-se $v_0\in M$, resulta

$$c:=\sup_{u\in M}\left(\varphi(u)-s(u-z)\right)\leq s(z+v_0)-\varphi(v_0),$$

donde a arbitrariedade do v_0 tomado acarreta

$$c\leq\inf_{v\in M}\left(s(z+v)-\varphi(v)\right):=C.$$

Para encerrar, basta notar que com $\gamma \in [c, C]$, a desigualdade (2.17) é satisfeita — e, para se dar conta disso, basta encarar as desigualdades em (2.18) até que elas te encarem de volta $(^{\star}_{\star})$. $\lrcorner$

Com isso, o enunciado principal, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, segue da maneira típica. Para cada par (N, ψ), onde $N \subseteq X$ é um subespaço vetorial e $\psi \colon N \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, diremos que (N, ψ) é *maroto* se $M \subseteq N$, $\psi|_M = \varphi$ e $\psi(x) \leq s(x)$ para todo $x \in N$. Daí, a família $\mathbb{P} := \{(N, \psi) : (N, \psi) \text{ é maroto}\}$, parcialmente ordenada pela relação $\preceq$ onde $(N_0, \psi_0) \preceq (N_1, \psi_1)$ sse $N_0 \subseteq N_1$ e $\psi_1|_{N_0} = \psi_0$, satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn (pois...)$^{\star}_{\star}$. Logo, existe um par $(P, \Phi) \in \mathbb{P}$ maximal com respeito à relação $\preceq$. É justamente por conta da afirmação anterior que se tem $P = X$, pois o contrário nos levaria a obter $(P', \Phi') \in \mathbb{P}$ tal que $(P', \Phi') \succ (P, \Phi)$.

Enfim, para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, aplica-se o caso real provado acima ao funcional $\mathbb{R}$-linear $\Re(\varphi) \colon M \to \mathbb{R}$, a *parte real de* φ, a fim de obter uma extensão $\Psi \colon X \to \mathbb{R}$ como no enunciado. Define-se então $\Phi(x) := \Psi(x) - i\Psi(ix)$ para todo $x \in X$. A checagem de que isso funciona será tarefa sua $(^{\star}_{\star})$. $\square$

Restam apenas dois ingredientes para responder a pergunta que motivou toda a discussão.

Lema 2.2.74. *Para um $\mathbb{K}$-e.v.t. E e um disco $D \subseteq E$, são equivalentes:*

(i) *D é uma vizinhança de $0 \in E$;*

(ii) *a seminorma de Minkowski induzida por D é contínua.*

Demonstração. Tudo segue das inclusões $B_{\|\cdot\|_D}(0, 1) \subseteq D \subseteq B_{\|\cdot\|_D}[0, 1]$. De fato, em posse disso: se vale (i) e $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{A}} \to_E v$, então para $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $\alpha \succeq A$ acarreta $v_\alpha \in v + \varepsilon B_{\|\cdot\|_D}[0, 1]$, de modo que $|\|v_\alpha\|_D - \|v\|_D| \leq \|v_\alpha - v\|_D \leq \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$ pois $v_\alpha - v \in \varepsilon B_{\|\cdot\|_D}[0, 1]$, provando que $\|\cdot\|_D$ é contínua, enquanto a validade de (ii) assegura (i) pois $B_{\|\cdot\|_D}(0, 1)$ é a pré-imagem do intervalo $(-1, 1)$ pela seminorma $\|\cdot\|_D$.

Para provar as inclusões: note que se $\|x\|_D := \gamma < 1$, então 1 não limita $\mathrm{M}(D)_x$ inferiormente, donde segue que $x \in \beta D$ para algum $\beta \in [\gamma, 1)$, e daí a condição de balanceamento nos dá $x \in D$ (certo?)*; por outro lado, se $x \in D$, então $1 \in \mathrm{M}(D)_x$ e assim $\|x\|_D \leq 1$. Completar os detalhes será problema seu $(^{\star}_{\star})$. $\square$

Lema 2.2.75 (Fundamental)**.** *Sejam E um $\mathbb{K}$-e.v.t. e $U \subseteq E$ um aberto em torno de $0 \in E$. Se U é convexo, então existe um disco aberto $D \subseteq U$.*

Demonstração. A continuidade da multiplicação assegura que todo aberto em torno de $0 \in E$ é expansível (pois...?)$^{\star}_{\star}$, enquanto o Lema 2.2.63 garante que existe um aberto balanceado $B \subseteq U$ em torno de 0. Assim, para encerrar, basta mostrar que a *envoltória convexa* de B é um aberto balanceado e, portanto, um disco aberto. Isto também ficará por sua *conta*, literalmente (cf. Exercício 2.2.62). $\square$

Teorema 2.2.76. *Seja E um $\mathbb{K}$-e.v.t.. O dual topológico E^* é não trivial se, e somente se, $0 \in E$ tem pelo menos uma vizinhança convexa diferente de E.*

Demonstração. Se $\varphi \in E^*$ e $\varphi \neq 0$, então $U := \{x \in E : |\varphi(x)| \leq 1\}$ é uma vizinhança convexa de 0 tal que $U \neq E$ (por quê?!)$^{\star}_{\star}$. Por outro lado, para uma vizinhanç convexa $V \subsetneq E$ em torno de $0 \in E$, pode-se tomar um disco aberto $D \subseteq V$ por conta do lema anterior.Logo, pelo Lema 2.2.74, $\|\cdot\|_D \colon E \to \mathbb{R}$ é uma seminorma contínua e, por ocorrer $D \neq E$, existe $w \in E$ com $\|w\|_D > 0$: lembre-se de que se $x \in E$ satisfaz $\|x\|_D < 1$, então $x \in D$, donde segue que qualquer $w \in E \setminus D$ deve ser tal que $\|w\|_D \geq 1$.

Agora, para $M := \mathbb{R}w$ e $\psi\colon M \to \mathbb{K}$ o funcional dado por $\psi(\lambda w) := \lambda\|w\|_D$, note que o Teorema de Hahn-Banach garante a existência de um funcional linear $\Psi\colon E \to \mathbb{K}$ com $\Psi(w) = \|w\|_D \neq 0$ e $|\Psi(x)| \leq \|x\|_D$ para todo $x \in E$ (por quê?!)$\overset{\star}{\star}$. A continuidade de Ψ segue, finalmente, do Teorema 2.2.72. □

Bacana... mas qual a relação disso tudo com *topologias fracas*? Resposta: numa primeira olhada, nenhuma.

Teorema 2.2.77 (... uma segunda olhada)**.** *Para um $\mathbb{K}$-e.v.t. E, são equivalentes:*

(i) *existe uma família $\mathcal{S}$ de seminormas sobre E tal que $\mathfrak{T}(\mathrm{Id}_s)_{s\in\mathcal{S}}$ é a topologia de E, onde $\mathrm{Id}_s\colon E \to (E, s)$ é a função identidade e (E, s) indica E com a topologia* ***induzida***[†] ***pela seminorma*** *s;*

(ii) *todo ponto de E admite uma base local de vizinhanças convexas.*

Demonstração. A implicação (i) ⇒ (ii) decorre do fato de que convexidade se preserva por interseções (cf. item (a) do Exercício 2.2.62). Para a recíproca, será útil notar que a topologia fraca $\mathfrak{T}(\mathrm{Id}_s)_{s\in\mathcal{S}} := \mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$ é compatível com a estrutura algébrica de E para qualquer família $\mathcal{S}$ de seminormas, i.e., $(E, \mathfrak{T}_{\mathcal{S}})$ é um $\mathbb{K}$-e.v.t.(notou?)$\overset{\star}{\star}$. Enfim, para provar (i), vamos considerar $\mathcal{S} := \{\|\cdot\|_D : D \subseteq E \text{ é disco aberto}\}$ e mostrar primeiro que se φ é uma rede em E, então

$$\varphi \to_E 0 \Leftrightarrow \varphi \to_{\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}} 0. \tag{2.19}$$

Se $\varphi \to_E 0$ e $D \subseteq E$ é um disco aberto, então $\|\cdot\|_D\colon E \to \mathbb{R}$ é uma seminorma contínua, acarretando $\|\varphi\|_D \to_{\mathbb{R}} 0$ e, por conseguinte, $\varphi \to_{\|\cdot\|_D} 0$ em $(E, \|\cdot\|_D)$ (certo?)$\overset{\star}{\star}$, mostrando que $\varphi \to_{\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}} 0$ (cf. Exemplo 2.1.86). Por outro lado, se $\varphi \to_{\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}} 0$ e $V \subseteq E$ é um aberto em torno de $0 \in E$, então existe um disco aberto $D \subseteq V$ (cf. Lema 2.2.75) para o qual se verifica $B_{\|\cdot\|_D}(0, 1) \subseteq D$ (por quê?)$\overset{\star}{\star}$. Dado que $\varphi \to_{\|\cdot\|_D} 0$, a bola aberta $B_{\|\cdot\|_D}(0, 1)$ contém um rabo de φ e, consequentemente, o aberto V também contém, mostrando que $\varphi \to_E 0$.

Por fim, como ambas as topologias são compatíveis com a estrutura aditiva de E, o insuspeito Corolário 2.1.41 e o Exercício 2.2.26 permitem usar (2.19) para concluir que a topologia nativa de E coincide com a topologia fraca $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$ (certo?)$\overset{\star}{\star}$, como desejado. □

Espaços vetoriais topológicos satisfazendo as condições do teorema acima são xingados de **localmente convexos**, e parte da importância deles se deve à *riqueza* de seus duais topológicos: para aquecer[‡], note que se um $\mathbb{K}$-e.v.t. de Hausdorff é localmente convexo, então a descrição geométrica da convexidade local[††] assegura que seu dual topológico é não trivial (certo?)*. Por outro lado, o modo mais prático de *construir* tais espaços é por meio de topologias fracas induzidas por seminormas, i.e., como no item (i) do último teorema.

§2 Dualidades e as topologias fraca e fraca-estrela

Embora atualmente o termo *dualidade* seja matematicamente carregado de significados categóricos, o contexto vetorial que exploraremos nesta subsubseção tem tradição própria no uso do termo[‡‡].

[†] Da mesma forma que normas induzem topologias, i.e., por meio das bolas abertas.

[‡] Se quiser um motivo mais forte, confira o Exercício 2.2.69.

[††] Ou seja, a condição (ii) no Teorema 2.2.77.

[‡‡] Difundido por Bourbaki, segundo Beckenstein e Narici [6]. Se estiver com paciência para uma discussão profunda sobre o termo, confira [23].

Definição 2.2.78. Sejam X, Y e Z espaços vetoriais sobre um corpo K. Uma função $f\colon X \times Y \to Z$ é K-**bilinear**[†] se f é K-linear em cada coordenada, i.e., se para cada $x \in X$ e $y \in Y$ fixados, as correspondências $y' \mapsto f(x, y')$ e $x' \mapsto f(x', y)$ definirem mapas K-lineares da forma $Y \to Z$ e $X \to Z$, respectivamente. Como de costume, o sufixo "K-" será abandonado quando o contexto permitir. ¶

A multiplicação $K \times K \to K$ do corpo K é bilinear. Outro caso natural, mas menos trivial, se dá entre um K-espaço vetorial X e seu dual algébrico $\mathrm{Lin}_K(X, K)$, por meio do *mapa de avaliação*

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}\colon \mathrm{Lin}_K(X, K) \times X &\to K \\ (f, v) &\mapsto f(v) \end{aligned}.$$

Exercício 2.2.60 ($\star$)**.** Convença-se de que as afirmações acima estão corretas. ■

Em situações como as descritas acima, em que o contradomínio do mapa bilinear é o próprio corpo, costuma-se chamá-lo de **funcional bilinear** ou **forma bilinear**. Além disso, por serem funções em "dois parâmetros" com valor *unidimensional*, é relativamente comum substituir a notação do tipo "$f(\cdot, \cdot)$" por algo como "$\langle \cdot, \cdot \rangle$", em alusão à multiplicação e, mais geralmente, aos produtos internos *reais*[‡].

Dados K-espaços vetoriais X e Y, diremos que X e Y estão **pareados** (ou que formam um **par** $\langle X, Y \rangle$), se existe uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times Y \to K$. Os casos interessantes ocorrem quando X e Y são capazes de distinguir os elementos um do outro por meio da forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$: diz-se que X **distingue os pontos de** Y se para todo $y \in Y \setminus \{0\}$ existe $x \in X$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$; dizer que Y **distingue os pontos de** X tem o significado ~~dual~~ *análogo*. Semanticamente, se X distingue os pontos de Y, por exemplo, e $y, y' \in Y$ são pontos distintos, então existe um ponto $x \in X$ que *testemunha* tal distinção, no sentido de que $\langle x, y - y' \rangle \neq 0$ ou, equivalentemente, tal que $\langle x, y \rangle \neq \langle x, y' \rangle$.

Definição 2.2.79. Finalmente, diremos que $\langle X, Y \rangle$ é um par **dual** (ou que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ determina uma **dualidade** entre X e Y) se X e Y distinguem os pontos um do outro[††]. ¶

Como o nome sugere, um K-espaço vetorial X forma um par dual com seu dual algébrico $\mathrm{Lin}_K(X, K)$ por meio da avaliação. A definição de $\mathrm{Lin}_K(X, K)$ torna automática a verificação de que X distingue os pontos de $\mathrm{Lin}_K(X, K)$, mas você fará as contas mesmo assim (por favor?)*. Por sua vez, dado $x \in X \setminus \{0\}$, não é difícil obter um funcional linear $\varphi\colon X \to K$ tal que $\langle x, \varphi \rangle := \varphi(x) \neq 0$: tomando uma base $B \subseteq X$ com $x \in B$, por exemplo, pode-se definir $\psi\colon B \to K$ fazendo $\psi(x) = 1$ e $\psi(b) = 0$ para $b \in B \setminus \{x\}$, de modo que sua (única) extensão linear φ tem a propriedade desejada.

Moralmente, todos os casos de dualidade são da forma acima, ou quase. De fato, se $\langle X, Y \rangle$ é um par dual, então para cada $y \in Y$ a correspondência

$$\begin{aligned} B_y := \langle \cdot, y \rangle \colon X &\to K \\ x &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

[†]A definição se adapta naturalmente para o contexto de módulos.

[‡]Um alerta breve: produtos internos não são formas bilineares quando $K = \mathbb{C}$, dado que a compatibilidade com a multiplicação por escalar ocorre "a menos de conjugação" no segundo parâmetro.

[††]A terminologia não é unanimidade na literatura. Voigt [45], por exemplo, chama de *pares duais* qualquer par de K-espaços vetoriais (X, Y) com um funcional bilinear $X \times Y \to K$, e utiliza a expressão "separante" para designar os *pares* cujas formas bilineares distinguem pontos. Neste texto, a terminologia está de acordo com Beckenstein e Narici [6].

é um funcional linear. Logo, em virtude da dualidade entre X e Y, o mapa correspondente $B_\bullet\colon Y \to \mathrm{Lin}_K(X,K)$ se revela uma transformação linear injetiva e, portanto, Y é isomorfo (como K-espaço vetorial) ao subespaço vetorial $B_\bullet[Y] \subseteq \mathrm{Lin}_K(X,K)$ (entendeu?)$^\star_\star$. Dessa forma, mais uma vez faz sentido considerar a avaliação

$$\begin{aligned} X \times B_\bullet[Y] &\to K \\ (x, B_y) &\mapsto B_y(x), \end{aligned}$$

que na *prática*[†] é apenas uma repaginação da função bilinear original $\langle \cdot,\cdot\rangle$, haja vista que $B_y(x) := \langle x,y\rangle$. Analogamente, por Y também distinguir os pontos de X, pode-se *enxergar* X como o subespaço ${}_\bullet B[X] \subseteq \mathrm{Lin}_K(Y,K)$, em que ${}_xB(y) := \langle x,y\rangle$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

RESUMINDO: os pontos de Y se *comportam* como funcionais lineares em X, enquanto os pontos de X são funcionais lineares em Y. Em particular, no caso da dualidade entre X e $Y := \mathrm{Lin}_K(X,K)$ determinada pela avaliação, um ponto $x \in X$ *corresponde* ao funcional linear usualmente denotado por $\widehat{x}\colon \mathrm{Lin}_K(X,K) \to K$, que a cada funcional linear $f\colon X \to K$ associa o escalar $\widehat{x}(f) := f(x)$.

Para o que tange os propósitos deste texto, duas possibilidades interessantes de investigação se desenrolam.

(i) Se E já é um K-e.v.t., fica *determinado* o subespaço vetorial E^* de $\mathrm{Lin}_K(E,K)$, formado pelos funcionais lineares $E \to K$ contínuos com respeito à topologia nativa de E. A avaliação $E^* \times E \to K$ determina uma dualidade entre E^* e E?

(ii) Dado um par dual $\langle X, Y\rangle$, onde Y é subespaço vetorial de $\mathrm{Lin}_K(X,K)$, existe alguma topologia $\mathcal{T}$ em X compatível com sua estrutura algébrica de tal forma que $(X,\mathcal{T})^* = Y$, i.e., tal que os funcionais pertencentes a Y sejam <u>exatamente</u> os funcionais lineares contínuos da forma $(X,\mathcal{T}) \to K$?

Uma das respostas para a primeira pergunta ajuda a justificar o interesse nos espaços localmente convexos.

Teorema 2.2.80. *Seja E um $\mathbb{K}$-e.v.t.. Se E é localmente convexo e de Hausdorff, então a avaliação* $\mathrm{ev}\colon E^* \times E \to \mathbb{K}$ *determina uma dualidade entre E^* e E.*

Demonstração. Em geral, E distingue os pontos de E^* independentemente das hipóteses sobre a topologia de E (lembra?)$^\star_\star$. Agora, se E é um espaço de Hausdorff e $x \in E\setminus\{0\}$, então existe um isomorfismo topológico $\varphi\colon \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi(x) = 1$ (cf. Corolário 2.2.66). Logo, a convexidade local de E e o *Teorema da Extensão Contínua de Hahn-Banach* (cf. Exercício 2.2.69) asseguram a existência de um funcional linear contínuo $\Phi\colon E \to \mathbb{K}$ satisfazendo $\Phi|_{\mathbb{K}x} = \varphi$ e, portanto, deve ocorrer $\mathrm{ev}(\Phi)(x) := \Phi(x) = \varphi(x) \neq 0$, como desejado. □

Para responder a segunda pergunta, observe que qualquer topologia $\mathcal{T}$ em X satisfazendo $(X,\mathcal{T})^* = Y$ deve ser tal que $\mathfrak{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$, onde $\mathfrak{T}_Y$ é a topologia fraca induzida por Y (cf. Proposição 2.1.82 e Definição 2.1.83). Assim, é natural investigar se a própria topologia $\mathfrak{T}_Y$ funciona. A resposta para os casos que *importam* é sim.

[†] Sim, há uma categoria escondida aqui, segundo a qual $\langle X,Y\rangle$ e $\mathrm{ev}\,(X, B_\bullet[Y])$ são isomorfos.

Teorema 2.2.81. *Sejam K um corpo topológico de Hausdorff, bem como K-espaços vetoriais X e $Y \subseteq \mathrm{Lin}_K(X, K)$. Sob tais condições, $(X, \mathfrak{T}_Y)$ é um K-e.v.t. tal que $(X, \mathfrak{T}_Y)^* = Y$.*

Demonstração. A compatibilidade com a estrutura vetorial segue pois todos os membros de Y são funcionais K-lineares. Por sua vez, a discussão que antecede o presente teorema já indica como garantir a inclusão $Y \subseteq (X, \mathfrak{T}_Y)^*$. Tratemos da inclusão oposta: dado um funcional K-linear contínuo $\varphi\colon (X, \mathfrak{T}_Y) \to K$, vamos obter $y \in Y$ tal que $\varphi = y$.

Por K ser de Hausdorff, existe um aberto $V \subseteq K$ em torno de $0 \in K$ tal que $1 \notin V$ (certo?)*. Logo, $\varphi^{-1}[V]$ é um $\mathfrak{T}_Y$-aberto em torno de $0 \in X$, donde o item (b) do Exercício 2.1.69 assegura a existência de funcionais $y_1, \ldots, y_n \in Y$, bem como abertos $V_1, \ldots, V_n \subseteq K$ em torno de $0 \in K$ tais que

$$0 \in \bigcap_{i \leq n} y_i^{-1}[V_i] \subseteq \varphi^{-1}[V] \quad \text{(por quê?)}^{\star}_{\star}.$$

Ocorre que a inclusão acima acarreta $\bigcap_{i \leq n} \ker y_i \subseteq \ker \varphi$. Com efeito, por valer $\ker y_i \subseteq y_i^{-1}[V_i]$ para todo $i \leq n$ (pois...?)*, resulta $\bigcap_{i \leq n} \ker y_i \subseteq \varphi^{-1}[V]$. Logo, se $\varphi(x) \neq 0$, então $x \notin \ker y_j$ para algum $j \leq n$, afinal, para $\alpha := \frac{1}{\varphi(x)}$, $\varphi(\alpha x) = 1 \notin V$, i.e., $\alpha x \notin \varphi^{-1}[V]$ e, por conseguinte, $x \notin \varphi^{-1}[V]$ (viu?)*. Portanto, $X \setminus \ker \varphi \subseteq X \setminus \varphi^{-1}[V]$, donde a inclusão desejada segue. E o Kiko?

⌜**Afirmação 2.2.82.** *Para um K-espaço vetorial X e funcionais K-lineares $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_n$ da forma $X \to K$, verifica-se $\psi \in \mathrm{span}\,(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ sse $\bigcap_{i \leq n} \ker \psi_i \subseteq \ker \psi$.*

Prova da Afirmação. A "ida" é um exercício quase banal de Álgebra Linear I, mas se não lhe parecer óbvio, faça ($\star$). Para a recíproca, assumindo a inclusão como verdadeira, defina a transformação linear $T\colon X \to K^n$ fazendo $T(x) := (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$. Em virtude da suposição acerca dos núcleos, a correspondência

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{im}\,(T) &\to K \\ T(x) &\mapsto \psi(x) \end{aligned}$$

determina um funcional K-linear bem definido: se $T(x) = T(x')$, então $x - x' \in \ker \psi_i$ para todo i, acarretando $\psi(x - x') = 0$ e, consequentemente, $f(T(x)) = f(T(x'))$. Para encerrar, seja $\overline{f}\colon K^n \to K$ uma extensão linear qualquer de f. Lembre-se de que em tal situação, existem únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tais que

$$\overline{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i \leq n} \lambda_i \alpha_i$$

para qualquer n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ (lembrou?!)*. Consequentemente, para qualquer $x \in X$, verifica-se

$$\psi(x) = f(T(x)) = \overline{f}(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = \sum_{i \leq n} \lambda_i \psi_i(x),$$

i.e., $\psi \in \mathrm{span}\,(\psi_1, \ldots, \psi_n)$. ⌟

De volta ao itinerário, a afirmação acima assegura escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tais que $\varphi = \sum_{i \leq n} \lambda_i y_i$, mas $\sum_{i \leq n} \lambda_i y_i \in Y$. Ou seja: acabou. □

Mais geralmente, dada uma função bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times Y\to K$ entre K-espaços vetoriais X e Y, $\sigma(X,Y)$ denota a **topologia fraca** em X induzida por $B_\bullet[Y]:=\{\langle\cdot,y\rangle : y\in Y\}$, enquanto $\sigma(Y,X)$ indica a topologia fraca em Y induzida por ${}_\bullet B[X]:=\{\langle x,\cdot\rangle : x\in X\}$. Evidentemente, se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ determinar uma *dualidade* entre X e Y (cf. Definição 2.2.79), então podemos assumir $Y\subseteq \mathrm{Lin}_K(X,Y)$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle=\mathrm{ev}$ como no teorema anterior, e daí $\sigma(X,Y)$ *se manifesta* como a topologia fraca em X induzida por Y. Analogamente, em tal caso também podemos supor $X\subseteq\mathrm{Lin}_K(Y,K)$, donde segue que $\sigma(Y,X)$ *é* a topologia fraca em Y induzida por X.

Já passou da hora de discutir alguns exemplos, não é mesmo?

Exemplo 2.2.83. Classicamente, para um $\mathbb{K}$-espaço normado $(E,\|\cdot\|)$, chama-se meramente de **topologia fraca** à topologia $\sigma(E,E^*)$ induzida pela avaliação [11]. Por construção, é claro que se $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ denota a topologia induzida por $\|\cdot\|$ em E, então se verifica $\sigma(E,E^*)\subseteq\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, i.e., *todo aberto fraco é aberto na norma* (viu?)*. Dado que $\mathbb{K}$-espaços normados são localmente convexos de Hausdorff, os Teoremas 2.2.80 e 2.2.81 asseguram que um funcional $\varphi\colon E\to\mathbb{K}$ é "$\|\cdot\|$-contínuo" sse é "$\sigma(E,E^*)$-contínuo".

Qual a vantagem? Por um lado, a inclusão $\sigma(E,E^*)\subseteq\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ indica que a topologia fraca em E tem, possivelmente, menos abertos do que a topologia induzida pela norma — e, com menos abertos, convergir se torna mais *fácil*, uma vez que os abertos são as testemunhas de convergência (cf. Corolário 2.1.41). Por outro lado, nenhum funcional linear $E\to\mathbb{K}$ contínuo com respeito à norma se perde (nem se ganha!) nesse processo.

Com isso dito, essa topologia só tem *relevância* quando a dimensão de E é infinita, uma vez que $\sigma(E,E^*)=\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ *sse E tem dimensão finita*. Por um lado, *se E tem dimensão finita*, digamos que com base $\mathcal{B}:=\{b_1,\ldots,b_n\}$, então $(E,\|\cdot\|)^*=\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$ (cf. Exercício 3.1.14) e, consequentemente, o funcional $\pi_i\colon E\to\mathbb{K}$, que associa cada vetor $v\in E$ à sua i-ésima coordenada na base $\mathcal{B}$, é $\|\cdot\|$-contínuo para cada i. Logo, em virtude da desigualdade

$$\|x\|\leq\sum_{j=1}^{n}|\pi_j(x)|\|b_j\|,$$

válida para todo $x\in E$, não é difícil concluir que $\mathrm{Id}\colon(E,\sigma(E,E^*))\to(E,\|\cdot\|)$ é contínua e, por conseguinte, $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}\subseteq\sigma(E,E^*)$ (concluiu?)$^{\star}_{\star}$. A recíproca será problema seu e do Teorema de Baire (cf. Exercício 2.2.73).

Para obter exemplos *explícitos* da distinção entre as duas topologias em dimensão infinita, basta observar que nenhum subconjunto limitado com respeito à norma é aberto "fraco": se $U\subsetneq E$ é $\sigma(E,E^*)$-aberto não vazio em torno de $u\in E$, então $V:=U-u\neq E$ é $\sigma(E,E^*)$-aberto em torno de $0\in E$ e, por conseguinte (cf. Exercício 2.1.69, item (b)), existem $\varphi_0,\ldots,\varphi_n\in E^*$ não nulos e $r>0$ tais que $\bigcap_{j\leq n}\varphi_j^{-1}[(-r,r)]\subseteq V$, donde segue que $\bigcap_{j\leq n}\ker\varphi_j\subseteq V$, mostrando que V contém um subespaço vetorial não trivial[†] e, portanto, não pode ser limitado — logo, tampouco U pode ser limitado. Em particular, bolas abertas determinadas pela norma não são $\sigma(E,E^*)$-abertas. ▲

Exemplo 2.2.84. A dualidade entre E e E^* do exemplo anterior também pode ser usada para definir uma *topologia fraca* no dual topológico. No entanto, por questões histórico-psicológicas, a topologia $\sigma(E^*,E)$ induzida sobre E^* é frequentemente chamada de **topologia fraca-$*$** (lê-se "topologia fraca estrela").

[†]A hipótese sobre a dimensão ser infinita se usa aqui (percebeu?)$^{\star}_{\star}$.

Pelo que se discutiu anteriormente, neste caso, E se substitui naturalmente por sua "cópia" em $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E^*, \mathbb{K})$. Assim, $\sigma(E^*, E)$ é a menor topologia sobre E^* que torna contínuos os funcionais lineares $\widehat{x}\colon E^* \to \mathbb{K}$ para cada $x \in E$, onde $\widehat{x}(\varphi) := \varphi(x)$ para qualquer $\varphi \in E^*$. Estranhamente familiar, não é mesmo?

Caso ainda não tenha percebido, observe que E^* é, por definição, subespaço vetorial de $\mathrm{Fun}(E, \mathbb{K})$, que por sua vez vem de fábrica com a topologia produto. Assim, também seria legítimo investigar a topologia que E^* herda como subespaço de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(E, \mathbb{K})$, que denotaremos momentaneamente por $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$. Por que momentaneamente? Por isso: $\mathcal{T}_{\mathrm{p}} = \sigma(E^*, E)$, igualdade que decorre do Corolário 2.1.41 em virtude das descrições das convergências determinadas por essas topologias[†]. Futuramente, essa descrição alternativa da topologia fraca-$*$ será a pedra fundamental na demonstração do *Teorema de Banach-Alaoglu*. Mas ainda é cedo para lidar com isso. ▲

Exemplo 2.2.85. Para um exemplo menos comum, vamos considerar $X := \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$, o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das funções da forma $\mathcal{I} \to \mathbb{K}$, onde $\mathcal{I}$ é um conjunto de índices fixado. Por sua vez, vamos definir $Y := c_{\mathbb{K},00}(\mathcal{I}) := \{f \in \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{K}) : \{j \in \mathcal{I} : f(j) \neq 0\} \text{ é finito}\}$, o subespaço vetorial[‡] de $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ formado pelas funções *quase nulas*.

Para $x \in X$ e $y \in Y$, considere

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j\in\mathcal{I}} x(j)y(j) \in \mathbb{K},$$

expressão que *faz sentido* pois $y \in Y$.

Vamos verificar que a função $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ definida pela regra acima determina uma dualidade entre os espaços X e Y. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$, temos

$$\langle \alpha x + x', y\rangle = \sum_{j\in\mathcal{I}} (\alpha x + x')(j)y(j) = \alpha \sum_{j\in\mathcal{I}} x(j)y(j) + \sum_{j\in\mathcal{I}} x'(j)y(j) = \alpha\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle, \text{ e}$$

$$\langle x, \beta y + y'\rangle = \sum_{j\in\mathcal{I}} x(j)(\beta y + y')(j) = \beta \sum_{j\in\mathcal{I}} x(j)y(j) + \sum_{j\in\mathcal{I}} x(j)y'(j) = \beta\langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle,$$

mostrando que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é bilinear. Observar que X e Y distinguem os pontos um do outro será problema seu ($\star$).

Pergunta: quem é $\sigma(X, Y)$?

Resposta: é a boa e velha topologia da convergência pontual em $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$!

Por um lado, se $(f_d)_d$ é uma rede em X tal que $(f_d)_d \to \underline{0}$ em $(X, \sigma(X, Y))$ e $j \in \mathcal{I}$, então $(f_d(j))_d \to 0$ em $\mathbb{K}$ uma vez que $y := \chi_{\{j\}} : \mathcal{I} \to \mathbb{K}$ é um membro legítimo de Y e, por conseguinte, $(\langle f_d, y\rangle)_d \to \langle \underline{0}, y\rangle = 0$ em $\mathbb{K}$, enquanto $\langle f_d, y\rangle = f_d(j)y(j) = f_d(j)$. Por outro lado, se $(g_d)_d \to_{\mathrm{p}} \underline{0}$ em $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$ e $y \in Y$, então existem $\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{K}$ e $j_0, \ldots, j_n \in \mathcal{I}$ tais que $y = \sum_{i\leq n} \gamma_i \chi_{\{j_i\}}$ (por quê?!)*, de modo que

$$\langle g_d, y\rangle = \sum_{i\leq n} \gamma_i \langle g_d, \chi_{\{j_i\}}\rangle = \sum_{i\leq n} \gamma_i g_d(j_i),$$

donde não é difícil concluir que $(g_d)_d \to \underline{0}$ em $(X, \sigma(X, Y))$. Completar os detalhes também será problema seu ($^\star_\star$).

[†]Alternativamente, note que $\widehat{x} = \pi_x|_{E^*}$, onde $\pi_x\colon \mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(E, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é "projeção" na x-ésima coordenada, daí aplique o item (a) do Exercício 2.1.69. Confira o final da Subseção 2.2.1 se parecer estranho.

[‡]Invista pelo menos quinze segundos da sua vida para se convencer de que $c_{\mathbb{K},00}(\mathcal{I})$ é, realmente, subespaço vetorial de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(\mathcal{I}, \mathbb{K})$.

Na prática, o que a discussão acima fez foi descrever *algebricamente* o dual topológico de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(\mathcal{I},\mathbb{K})$ uma vez que, pelo teorema anterior, $(X,\sigma(X,Y))^* = Y$ — ou, mais precisamente neste caso, $(X,\sigma(X,Y))^*$ é *isomorfo* a Y. Em tempo, note que se $\mathcal{I}$ é finito, então $X = Y$. ▲

A resposta para a pergunta (ii) dada pelas topologias fracas do tipo $\sigma(X,Y)$ não encerra completamente a investigação, posto que podem haver outras topologias com o mesmo comportamento, i.e., compatíveis com a dualidade entre X e Y, no sentido de que satisfazem a identidade/isomorfismo $(X,\sigma(X,Y))^* = Y$. Nos casos em que $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, as topologias localmente convexas compatíveis com dualidades entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais X e Y são, precisamente, as *topologias polares* — dentre as quais $\sigma(X,Y)$ é efetivamente a menor (cf. Exercício 2.2.77). No entanto, é cedo para abrir outra porta; é hora de mais um hiato em nossa digressão pela Análise Funcional — não sem antes estabelecer algumas informações que serão úteis.

Teorema 2.2.86. *Sejam K um corpo topológico de Hausdorff, bem como K-espaços vetoriais X e Y com um mapa bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times Y\to K$. Sob tais condições, são equivalentes:*

(i) *X distingue os pontos de Y;*

(ii) *a função $B_\bullet\colon Y\to \mathrm{Lin}_K(X,K)$ é injetora;*

(iii) *a topologia $\sigma(Y,X)$ sobre Y é de Hausdorff.*

Em particular, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ determina uma dualidade entre X e Y se, e somente se, $\sigma(X,Y)$ e $\sigma(Y,X)$ são topologias de Hausdorff.

Demonstração. Já vimos que (i) ⇒ (ii). Para (ii) ⇒ (iii), basta mostrar que $\{0\}$ é $\sigma(Y,X)$-fechado em Y. Vejamos: se $y\in\overline{\{0\}}$, então existe uma rede $(y_d)_d$ de elementos de $\{0\}$ (pois é...) com $(y_d)_d\to y$, o que permite concluir que $y=0$, pois

- por um lado, para todo $x\in X$ deve ocorrer $\langle x,y_d\rangle\to\langle x,y\rangle$ em K,
- por outro lado, como $y_d = 0$ para todo d, resulta que $\langle x,y_d\rangle = 0$, e $(0)_d\to 0$ em K;

logo, a condição de Hausdorff em K implica em $\langle x,y\rangle = 0$ para todo $x\in X$, donde a hipótese (ii) obriga que se tenha $y=0$.

Finalmente, provaremos que $(iii)\Rightarrow(i)$. Dado $y\neq 0$, a hipótese sobre a topologia $\sigma(Y,X)$ ser de Hausdorff assegura um aberto $U\subseteq Y$ tal que $0\in U$ mas $y\notin U$. Assim, existem um subconjunto finito $F\subseteq X$ e, para cada $x\in F$, um aberto $V_x\subsetneq K$ em torno de $0\in K$ satisfazendo $\bigcap_{x\in F}\{z\in Y : \langle x,z\rangle\in V_x\}\subseteq U$. Consequentemente, existe $x'\in F$ tal que $\langle x',y\rangle\notin V_{x'}$, donde se conclui que $\langle x',y\rangle\neq 0$ (verifique todos os passos!)$^{\star}_{\star}$. □

§3 Exercícios adicionais

Exercício 2.2.61 ($^{\star}_{\star}$). Uma **combinação convexa** de vetores $x_1,\ldots,x_n$ num $\mathbb{K}$-espaço vetorial X é um vetor da forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, onde $\lambda_i\geq 0$ para todo i e $\sum_{i=1}^n\lambda_i = 1$. Mostre que $C\subseteq X$ é convexo sse C é fechado por combinações convexas. Dica: se $\alpha,\beta\geq 0$ e $\alpha+\beta = 1$, então $\alpha = 1-\beta$; além disso, se $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1$ e $\lambda_{n+1}\neq 0$, então

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$ ■

Exercício 2.2.62 $(^{\star}_{\star\star})$**.** A **envoltória convexa** (em X) de um subconjunto S de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X é, por definição, o menor subconjunto convexo de X que contém S, o qual denotaremos por $\operatorname{conv}_X(S)$.

a) Mostre que se $\mathcal{F}$ é uma coleção não vazia de subconjuntos convexos de X, então $\bigcap_{C\in\mathcal{F}} C$ é um subconjunto convexo (possivelmente vazio)[†]. Conclua que $\operatorname{conv}_X(S)$ existe para qualquer $S \subseteq X$.

b) Mostre que se $S \neq \emptyset$, então $\operatorname{conv}_X(S)$ é a coleção formada por todas as combinações convexas de vetores de S.

c) Mostre que se S é balanceado, então $\operatorname{conv}_X(S)$ é balanceado. Dica: pelo lema anterior, se $x \in \operatorname{conv}_X(S)$, então existem $s_0, \ldots, s_n \in S$ e $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ satisfazendo $\sum_{i\leq n} \lambda_i = 1$ e $x = \sum_{i\leq n} \lambda_i s_i$; o que acontece com αx se $|\alpha| \leq 1$?

d) Supondo que X é um $\mathbb{K}$-e.v.t., mostre que se S é aberto em X, então $\operatorname{conv}_X(S)$ é aberto em X. Dica: como λS é aberto em X para todo $\lambda \neq 0$, o item (b) assegura que $\sum_{j\leq m} \lambda_j S \subseteq S$ sempre que $\lambda_0, \ldots, \lambda_m > 0$ satisfazem $\sum_{j\leq m} \lambda_j = 1$. ■

Exercício 2.2.63 $(^{\star}_{\star})$**.** Seja E um $\mathbb{K}$-e.v.t..

a) Mostre que $\overline{C}$ e $\operatorname{int}(C)$ são convexos sempre que $C \subseteq E$ é convexo.

b) Mostre que se A e B são subconjuntos convexos de E, então $A+B$ é também é. ■

Exercício 2.2.64 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que o item (a) do Exercício 2.1.75 permanece válido para $\mathbb{K}$-e.v.t's. Dica: abertos em torno da origem são expansíveis. ■

Exercício 2.2.65 $(^{\star}_{\star})$**.** Para um disco D num $\mathbb{K}$-espaço vetorial X, mostre que a seminorma $\|\cdot\|_D$ é norma sse o único subespaço vetorial de X contido em D é $\{0\}$. ■

Exercício 2.2.66 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}$ uma seminorma. Chamando por $B := \{x \in E : \|x\| < 1\}$ o disco em E induzido por $\|\cdot\|$ (cf. Teorema 2.2.71, item (ii)), mostre que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_B$, onde $\|\cdot\|_B$ é a seminorma de Minkowski induzida por B. Dica: mostre que $\|x\|$ é o maior limitante inferior do conjunto $\{r > 0 : \|x\| < r\}$. ■

Exercício 2.2.67 $(^{\star}_{\star})$**.** Vamos praticar um pouco com espaços localmente convexos!

a) Mostre que um $\mathbb{K}$ e.v.t. E localmente convexo é de Hausdorff sse para todo $x \neq 0$ existe uma seminorma contínua $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}$ tal que $\|x\| > 0$.

b) Mostre que o produto de espaços localmente convexos é localmente convexo.

c) Mostre que a convexidade local é hereditária para subespaços.

d) Mostre que $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$ e $\mathrm{C}_{\mathrm{p}}(X, \mathbb{K})$ são localmente convexos de Hausdorff para qualquer espaço topológico X.

e) $(+\star)$ Considere $\mathbb{K}$-e.v.t's X e Y. Mostre que um mapa linear $\varphi \colon X \to Y$ é contínuo sse para toda seminorma contínua $\|\cdot\| \colon Y \to \mathbb{R}$ existe uma seminorma contínua $s \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\|\varphi(x)\| \leq s(x)$ para todo $x \in X$. ■

[†] O subconjunto vazio é convexo por vacuidade, certo?

Exercício 2.2.68 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam H um espaço de Hilbert (cf. nota de rodapé †, página 30) e $M \subseteq H$ um subespaço vetorial próprio. Mostre que se M é fechado e $\varphi\colon M \to \mathbb{K}$ é funcional linear contínuo, então existe um funcional linear contínuo $\Phi\colon H \to \mathbb{K}$ tal que $\Phi|_M = \varphi$ e $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. Dica: note que

$$M^{\perp} := \{x \in M : \langle m, x\rangle = 0 \text{ para todo } m \in M\}$$

é tal que $H = M \oplus M^{\perp}$ e $P_M\colon H \to M$ é contínua, onde $P_M(x+y) := x$ para quaisquer $x \in M$ e $y \in M^{\perp}$. ■

Exercício 2.2.69 (Teorema da extensão contínua de Hahn-Banach em espaços localmente convexos $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Sejam E um $\mathbb{K}$-e.v.t. localmente convexo e $M \subsetneq E$ um subespaço vetorial próprio. Mostre que a restrição $E^* \to M^*$ dada pela correspondência $\psi \mapsto \psi|_M$ é sobrejetora, i.e., *se $\varphi\colon M \to \mathbb{K}$ é funcional linear contínuo, então existe funcional linear contínuo $\Phi\colon E \to \mathbb{K}$ tal que $\Phi|_M = \varphi$*. Dica: note que se φ é contínuo, então existe um disco aberto $D \subseteq E$ em torno de $0 \in D$ tal que $D \cap M \subseteq \{x \in M : |\varphi(x)| \leq 1\}$, o que permite considerar a seminorma de Minkowski $\|\cdot\|_D$, que por sua vez nos coloca sob as hipóteses do Teorema 2.2.73. ■

Exercício 2.2.70 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para um espaço normado E e um vetor $x \in E \setminus \{0\}$, mostre que existe $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x) = \|x\|$. ■

Exercício 2.2.71 $({}^{\star}_{\star})$**.** Seja E um $\mathbb{K}$-e.v.t. de Hausdorff não trivial. Mostre que se E é localmente convexo, então $E^* \neq \{0\}$. ■

Exercício 2.2.72 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para um corpo topológico de Hausdorff K e um K-e.v.t. E, mostre que o dual algébrico $\mathrm{Lin}_K(E, K)$ é subespaço fechado de $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(E, K)$. ■

Exercício 2.2.73 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Seja E um $\mathbb{K}$-espaço normado. Mostre que se a topologia $\sigma(E, E^*)$ é metrizável, então E tem dimensão finita. Dica: com a hipótese de metrizabilidade, mostre que E^* é reunião enumerável de subespaços vetoriais com dimensão finita; use o Teorema de Baire para concluir que E^* tem dimensão finita. ■

Exercício 2.2.74 $({}^{\star}_{\star})$**.** Seja $\|\cdot\|$ uma seminorma sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial E. Mostre que a topologia induzida pela seminorma é a menor topologia que torna as funções $y \mapsto \|x-y\|$ contínuas, para cada $x \in E$. ■

Exercício 2.2.75 $(\star)$**.** Sejam X e Y $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $\|\cdot\|\colon Y \to \mathbb{R}$ uma seminorma. Mostre que se $\varphi\colon X \to Y$ é linear, então $\|\varphi\| := \|\cdot\| \circ \varphi$ é uma seminorma em X. ■

Exercício 2.2.76 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam $\{Y_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de $\mathbb{K}$-e.v.t's localmente convexos, X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e, para cada $i \in \mathcal{I}$, fixe uma função $\mathbb{K}$-linear $\varphi_i\colon X \to Y_i$. Mostre que a topologia fraca induzida pela família $\{\varphi_i : i \in \mathcal{I}\}$ é localmente convexa. ■

Exercício 2.2.77 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam X e Y $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Mostre que se $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ é bilinear, então $(X, \sigma(X, Y))$ e $(Y, \sigma(Y, X))$ são $\mathbb{K}$-e.v.t's localmente convexos. ■

Exercício 2.2.78 $({}^{\star}_{\star})$**.** Seja $\mathcal{T}$ a menor topologia sobre $\mathbb{R}$ que torna contínua a norma usual $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é de Hausdorff. ■

Atenção: você tem certeza de que fez o Exercício 2.2.76 com cuidado?

Exercício 2.2.79 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Seja E um $\mathbb{K}$-espaço normado com dimensão infinita. Mostre que $B_{\|\cdot\|}[0, 1] = \mathrm{cl}_{\sigma E, E^*}(S_E)$, onde $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$. ■

Exercício 2.2.80 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Para um espaço normado E, seja $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ a topologia em E^* induzida pela norma de operadores, e considere $E^{**} := \mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(E^*, \mathbb{K})$, i.e., a coleção dos funcionais lineares $E^* \to \mathbb{K}$ contínuos com respeito à topologia $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.

a) Mostre que a função $J_E \colon E \to E^{**}$, dada por $J_E(x) := \widehat{x}$, é uma isometria. Dica: use o Exercício 2.2.70.

b) Mostre que $\sigma(E^*, E) \subseteq \sigma(E^*, E^{**}) \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.

c) Mostre que se E tem dimensão finita, então as três topologias no item anterior coincidem. ■

Exercício 2.2.81 ($^{\star}_{\star}$)**.** Para um $\mathbb{K}$-espaço vetorial E com dimensão infinita, mostre que a topologia $\sigma(E, \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E, K))$ não é metrizável. ■

2.2.7 A topologia de Zariski

A ênfase dada às aplicações em ANÁLISE pode reforçar preconceitos matemáticos que eu não gostaria de alimentar — como o de que TOPOLOGIA existe apenas a serviço da ANÁLISE, ou de que nada realmente interessante ocorre fora do contexto Hausdorff. Por sorte, eu tive bons mentores em ÁLGEBRA que me mostraram como tais máximas são absolutamente falsas — justamente por meio da *topologia de Zariski*, tema desta subseção.

AVISO: é bom estar em dia com anéis de polinômios antes de prosseguir.

§1 Espaços afins

Em certo sentido, parte do que faremos aqui é análogo ao que se faz em ANÁLISE ELEMENTAR: investigar problemas geométricos por meio de ferramentas matemáticas. A diferença fica por conta das *ferramentas*: enquanto ANÁLISE lida com "curvas" descritas por métodos *infinitesimais*, aqui devemos nos restringir às *curvas* no escopo da ÁLGEBRA. Portanto, *polinômios*.

Com isso decidido, para um corpo K, ainda sem topologia, bem como um polinômio $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$, para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, convém recordar como p induz uma *hipersuperfície*† em K^n: o subconjunto $V_p := \{\alpha \in K^n : p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\}$ será chamado de **variedade algébrica** pelo polinômio p.

Da intuição adquirida com ~~polinômios~~ gráficos de funções polinomiais em CÁLCULO $n \geq 2$, *variedades* do tipo acima deveriam ser *fechadas*. Tendo isso em mente, não é difícil notar que $V_1 = \emptyset$, $V_0 = K^n$ e $V_p \cup V_q = V_{pq}$ (notou?)*, enquanto $V_p \cap V_q = \{\alpha : h(\alpha) = 0 \text{ para todo } h \in \mathrm{span}\,(p, q)\}$. Com efeito, se $\alpha \in V_p \cap V_q$ e $h = fp + gq$ para certos polinômios $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$, então é claro que $h(\alpha) = 0$. A outra inclusão, por sua vez, segue pois $p, q \in \mathrm{span}\,(p, q)$. Mais geralmente, para uma família não vazia de polinômios $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, verifica-se (verifique!)*

$$\bigcap_{p \in S} V_p = \{\alpha \in K^n : h(\alpha) = 0 \text{ para todo } h \in \mathrm{span}\,(S)\}. \tag{2.20}$$

† *Curvas* para $n := 2$, *superfícies* para $n := 3$, etc. Como ilustração, enquanto uma parábola, em CÁLCULO I digamos, é definida como o gráfico da função $f(x) := x^2$, no contexto algébrico a mesma parábola é *descrita* pelo polinômio $y - x^2$.

A discussão acima sugere que em vez de V_p, é melhor considerar os subconjuntos da forma $\mathrm{V}(I) := \{\alpha \in K^n : h(\alpha) = 0$ para todo $h \in I\}$, conforme I percorre a família dos ideais† de $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Exercício 2.2.82 ($\star$)**.** Mostre que $V_p = \mathrm{V}(\mathrm{span}\,(p))$ para todo $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$. ■

Exercício 2.2.83 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que a família $\mathscr{F} := \{\mathrm{V}(I) : I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ é ideal$\}$ tem as propriedades elencadas no Corolário 2.1.56. ■

Definição 2.2.87. A **topologia de Zariski** em K^n é a topologia que tem a família $\mathscr{F}$ do exercício anterior como coleção de fechados. Em outras palavras: $A \subseteq K^n$ é Zariski-aberto se, e somente se, existe um ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $A = K^n \setminus \mathrm{V}(I)$. Costuma-se escrever $\mathbb{A}^n_K$ para indicar K^n munido da topologia de Zariski ¶

Para efeitos de comparação, vamos considerar $K := \mathbb{R}$ e $n := 2$. Como todo polinômio $p \in \mathbb{R}[x, y]$ induz uma função polinomial contínua, segue que todo conjunto da forma V_p em $\mathbb{R}^2$ é fechado "euclidiano" e, por (2.20), todo fechado de Zariski é fechado euclidiano. Consequentemente, todo aberto de Zariski é aberto euclidiano. Por outro lado, vale que $\mathrm{int}(V_p) = \emptyset$ na topologia usual de $\mathbb{R}^2$: se existem $r > 0$ e $Q \in \mathbb{R}^2$ tais que $B(Q, r) \subseteq V_p$, então $p = 0$ (por quê?!)$^{\star}_{\star\star}$. Logo, qualquer aberto euclidiano *não denso* serve como exemplo de aberto usual que não é aberto no sentido de Zariski.

Exercício 2.2.84 ($^{\star}_{\star}$)**.** Verifique a última afirmação. ■

E qual a vantagem dessa topologia?

Como eu só posso argumentar como topólogo, eis a resposta que mais me convence:

Teorema 2.2.88. *Se K é um corpo infinito, então a topologia de Zariski em K^n é a menor topologia que torna pontos fechados e funções polinomiais contínuas.*

Demonstração. Antes de tudo, convém destacar que ao dizer que uma função polinomial $f : K^n \to K$ é contínua, consideram-se tanto K^n quanto K com suas respectivas topologias de Zariski. Com isso dito, note que a topologia de Zariski em K é a topologia cofinita (cf. Exercício 1.1.16): se $F \subseteq K$ é finito, então $F = \bigcup_{a \in F} V_{x-a}$, dado que a é o único elemento de K que zera o polinômio $x - a$, mostrando assim que todo todo fechado da topologia cofinita é fechado de Zariski; por outro lado, uma vez que $K[x]$ é *domínio de ideais principais*‡, se $I \subseteq K[x]$ é ideal não trivial, então existe $f \in K[x]$ não nulo tal que $I = \mathrm{span}\,(f)$, de modo que $\mathrm{V}(I) = V_f$, que contém apenas as *finitas raízes*†† de f.

Assim, refraseando o enunciado, mostraremos que a topologia de Zariski em K^n é a menor com as duas propriedades a seguir:

(i) os pontos de K^n são fechados de Zariski;

(ii) toda função $K^n \to K$ polinomial é contínua, onde K tem a topologia cofinita.

†Seria irrelevante definir $\mathrm{V}(S)$ para $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ qualquer pois $\mathrm{V}(S) = \mathrm{V}(\mathrm{span}\,(S))$.

‡Explicitamente: todo ideal de $K[x]$ é da forma $\langle p \rangle$ para algum $p \in K[x]$. É um bom exercício ($^{\star}_{\star}$), caso não se lembre.

††Por isso precisamos supor K infinito.

Primeiro, precisamos ver que a topologia de Zariski tem as propriedades acima. O item (i) segue pois se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, então

$$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\} = \bigcap_{i \leq n} V_{x_i - \alpha_i}.$$

Por sua vez, (ii) vale pois os fechados de K são o próprio K e seus subconjuntos finitos. Logo, para $f\colon K^n \to K$ função polinomial, induzida por um polinômio que também denotaremos por f, temos:

- $f^{-1}[K] = K^n$, um fechado legítimo;
- para qualquer $b \in K$, temos $f^{-1}[\{b\}] = V_{f-a}$, afinal $f(\alpha) = b$ sse $f(\alpha) - b = 0$, mas disso segue que a pré-imagem de um subconjunto é reunião finita de fechados de Zariski de K^n (percebeu?)$^{\star}_{\star}$.

Para a minimalidade, suponha que $\mathcal{T}$ seja uma topologia em K^n satisfazendo as condições (i) e (ii)[†]. Primeiro, se $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$, então a função polinomial induzida $p\colon (K^n, \mathcal{T}) \to K$ é contínua, donde segue que $p^{-1}[\{0\}]$ é $\mathcal{T}$-fechado. Logo, pela identidade (2.20), resulta que todo fechado de Zariski é $\mathcal{T}$-fechado. □

Portanto, *moralmente*, a topologia de Zariski tem apenas o *essencial* para servir como *a* linguagem topológica do processo de tradução das informações algébricas de polinômios em informações geométricas sobre variedades — e vice-versa!

Para dar conta do "versa", fixado um subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$, escreve-se

$$\mathrm{I}(X) := \{p \in K[x_1, \ldots, x_n] : p(a) = 0 \text{ para todo } a \in X\}$$

para indicar o subconjunto formado pelos polinômios em $K[x_1, \ldots, x_n]$ que se anulam nos elementos de X. E como a letra "I" sugere:

Exercício 2.2.85 ($\star$)**.** Mostre que $\mathrm{I}(X)$ é um ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. ■

Proposição 2.2.89. *Se* $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$*, então* $\mathrm{I}(X) = \mathrm{I}(\overline{X})$.

Demonstração. A primeira coisa a fazer é caracterizar $\overline{X}$ em $\mathbb{A}^n_K$:

Katzensprung: $\overline{X} = \mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$, posto que

- $X \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$ pela definição de $\mathrm{I}(X)$ (certo?)*,
- $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$ é fechado e
- se $X \subseteq \mathrm{V}(J)$ para um ideal $J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, então $J \subseteq \mathrm{I}(X)$ por conta da definição de $\mathrm{I}(X)$, acarretando $\mathrm{V}(\mathrm{I}(X)) \subseteq \mathrm{V}(J)$ (percebeu?)$^{\star}_{\star}$.

Feito isso, o restante é elementar: de $X \subseteq \overline{X}$, resulta $\mathrm{I}(\overline{X}) \subseteq \mathrm{I}(X)$ (percebeu?)$^{\star}_{\star}$; por outro lado, se $f \in \mathrm{I}(X)$ e $\alpha \in \overline{X} = \mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$, então $f(\alpha) = 0$, i.e., $\mathrm{I}(X) \subseteq \mathrm{I}(\overline{X})$. □

Dessa forma, enquanto o *operador* $\mathrm{V}(\cdot)$ determina uma correspondência entre ideais de $K[x_1, \ldots, x_n]$ e fechados de Zariski de $\mathbb{A}^n_K$, o operador $\mathrm{I}(\cdot)$ associa fechados de $\mathbb{A}^n_K$ a ideais de $K[x_1, \ldots, x_n]$. A correspondência, contudo, não é bijetiva. Em geral:

[†]A rigor, não precisamos *supor* que a topologia $\mathcal{T}$ satisfaça a condição (i). Isso ficará mais claro após discutirmos *axiomas de separação*.

(i) $X \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$, com igualdade sse $X = \mathrm{V}(I)$ para algum ideal I;

(ii) $J \subseteq \mathrm{I}(\mathrm{V}(J))$, com igualdade em (ii) sse $J = \mathrm{I}(Y)$ para algum $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$.

Exercício 2.2.86 ($^\star_\star$)**.** Prove as afirmações acima. Dica: supondo $X = \mathrm{V}(I)$, tome $\alpha \notin X$ e mostre que $\alpha \notin \mathrm{V}(\mathrm{I}(X))$; proceda analogamente com (ii). ■

Portanto, $\mathrm{V}(\cdot)$ e $\mathrm{I}(\cdot)$ definem uma bijeção entre os fechados de $\mathbb{A}^n_K$ e os ideais de *anulamento*† de $K[x_1, \ldots, x_n]$, i.e., ideais da forma $\mathrm{I}(X)$ para $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$. Explorar essa bijeção na investigação de problemas geométricos ou algébricos é justamente um dos propósitos de quem lida diariamente com GEOMETRIA ALGÉBRICA — habilidade que não desenvolvi. No entanto, há espaço para algumas observações *elementares*.

Teorema 2.2.90 (da Base de Hilbert)**.** *Se todo ideal de um anel R é finitamente gerado, então todo ideal de $R[t]$ também é finitamente gerado.*

Demonstração. Para facilitar futuras referências, vamos reformular a hipótese do presente teorema de uma forma mais útil — embora menos *tangível*‡.

⌜**Afirmação 2.2.91.** *Para um anel R, comutativo e com unidade, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *todo ideal de R é finitamente gerado;*

(ii) *toda cadeia ascendente $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ideais em R é estacionária;*

(iii) *para toda sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em R existem $m \in \mathbb{N}$ e $r_0, \ldots, r_m \in R$ tais que*

$$a_{m+1} = \sum_{j\leq m} r_j a_j.$$

Prova da Afirmação. A implicação (i) ⇒ (ii) segue pois $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ é um ideal. Por sua vez, (ii) ⇒ (iii) ao considerar $J_n := \mathrm{span}\,(a_0, \ldots, a_n)$ para cada n. Finalmente, (iii) ⇒ (i) pois, pela contrapositiva, a negação de (i) permite obter exatamente uma sequência que nega a validade de (iii). Detalhes ficarão por sua conta ($\star$). ⌟

Agora, supondo que $I \subseteq R[t]$ seja um ideal não finitamente gerado, podemos tomar $f_0 \in I$ com $d_0 := \deg f_0 := \min\{\deg f : f \in I\}$ e, indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolher um polinômio f_{n+1} no conjunto $I \setminus \mathrm{span}\,(f_0, \ldots, f_n)$ satisfazendo

$$d_{n+1} := \deg f_{n+1} := \min\{\deg f : f \in I \setminus \mathrm{span}\,(f_0, \ldots, f_n)\},$$

o que pode ser feito pois, do contrário, I seria finitamente gerado. Observe que, por construção, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de números naturais.

A fim de usar a hipótese acerca de R, vamos fixar, para cada $n \in \mathbb{N}$, o coeficiente líder de f_n, digamos $a_n \in R$. Por conta da afirmação, existem $m \in \mathbb{N}$ e $r_0, \ldots, r_m \in R$ tais que $a_{m+1} = \sum_{i\leq m} r_i a_i$. Note que $d_{m+1} > 0$, pois o contrário obrigaria a ocorrência de $f_{m+1} \in \mathrm{span}\,(f_0, \ldots, f_m)$. Último ingrediente:

$$f^* := f_{m+1} - \sum_{i\leq m} t^{d_{m+1}-d_i} r_i f_i.$$

† *Vanishing ideals* em [14].

‡ Para mais detalhes, confira [37].

KATZENSPRUNG: $f^* \in I \setminus \text{span}\,(f_0, \dots, f_m)$, caso contrário $f_{m+1} \in \text{span}\,(f_0, \dots, f_m)$.

Assim, se mostrarmos que $\deg f^* < d_{m+1}$, obteremos uma contradição (certo?)⋆. Ora, ao escrever $f_j = a_j t^{d_j} + h_j$ para cada $j \leq m+1$, com $\deg h_j < d_j$, resulta

$$\begin{aligned} f^* &= a_{m+1}t^{d_{m+1}} + h_{m+1} - \sum_{i\leq m} t^{d_{m+1}-d_i} r_i(a_i t^{d_i} + h_i) \\ &= a_{m+1}t^{d_{m+1}} - (\sum_{i\leq m} r_i a_i)t^{d_{m+1}} + (h_{m+1} - \sum_{i\leq m} t^{d_{m+1}-d_i} r_i h_i) \\ &= h_{m+1} - \sum_{i\leq m} t^{d_{m+1}-d_i} r_i h_i, \end{aligned}$$

donde segue que $\deg f^* < d_{m+1}$, como afirmamos. Portanto, I é finitamente gerado. □

O que o teorema acima tem a ver com as relações entre GEOMETRIA e ÁLGEBRA?

Dado que K satisfaz a hipótese do teorema anterior†, resulta que qualquer fechado $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ se *decompõe* como interseção de finitas *hipersuperfícies* induzidas por polinômios: afinal, como $X = \mathrm{V}(I)$ para algum ideal I, o teorema anterior assegura a existência de polinômios $f_0, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ tais que $I = \text{span}\,(f_0, \dots, f_m)$, donde segue que $X = \bigcap_{j\leq m} V_{f_j}$. Legal, não é mesmo? Mas ainda é só a ponta de um *iceberg* imenso.

§2 Espectros de anéis

Por questões que fogem do escopo da minha competência, a topologia de Zariski em K^n, embora bastante frutífera, não é suficiente para realizar todos os malabarismos categóricos que as pessoas interessadas em GEOMETRIA ALGÉBRICA costumam precisar. A alternativa para isso é *topologizar* o próprio *espectro* dos anéis.

Em [40], Scholze define o **espectro** de um anel A, comutativo e com unidade, denotado por $\text{Spec}\,(A)$, como a *coleção* de todos os morfismos de anéis da forma $A \to K$ conforme K varia na categoria dos corpos, *módulo* a seguinte relação de equivalência: dois morfismos $f\colon A \to K$ e $g\colon A \to K'$ são equivalentes sse $\ker f = \ker g$. Embora não seja a definição tradicional, ela torna a formulação equivalente muito mais interessante:

Teorema 2.2.92 (Scholze [40]). *Sob as condições acima,* $\text{Spec}\,(A)$ *está em bijeção com a coleção dos ideais primos de A por meio da correspondência $f \mapsto \ker f$.*

Esboço da demonstração. Como núcleos de morfismos de aneis são ideais primos no presente contexto (certo?)⋆, tanto a boa definição da correspondência quanto sua injetividade seguem diretamente da definição de $\text{Spec}\,(A)$ adotada. Para a sobrejetividade, dado um ideal primo $P \subsetneq A$, basta tomar K_P como o corpo de frações do domínio A/P, com $f_P\colon A \to K_P$ dada pela composição da projeção $A \to A/P$ com a inclusão $A/P \to K_P$: temos $a \in \ker f$ sse $f(a) = 0$ em K_P, o que por sua vez equivale a $\frac{a}{1} = 0$ em K_P, que finalmente se traduz em $\overline{a} = \overline{0}$ em A/P, i.e., $a \in P$. Portanto, $\ker f = P$. □

Portanto, é lícito pensar em $\text{Spec}\,(A)$ como a coleção de todos os ideais primos de A, como já é de costume na literatura. E daí?

Com a interpretação do último teorema, cada ideal primo $P \in \text{Spec}\,(A)$ pode ser pensado como o morfismo de anéis $f_P\colon A \to K_P$ correspondente. Consequentemente, um

†Anéis com tal propriedade são chamados de **noetherianos**, em honra a Emmy Noether.

elemento $a \in A$ do anel se *revela* uma *função* cujo domínio é o próprio espectro[†]: para $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$, define-se $a(P) \coloneqq f_P(a) \coloneqq \overline{a} \in K_P$. Isto permite traçar um paralelo com os espaços afins: enquanto $K[x_1, \ldots, x_n]$ é o anel das funções admissíveis sobre K^n, o anel A se *revela* o anel de *funções* admissíveis sobre $\mathrm{Spec}\,(A)$, o que torna bastante razoável definir

$$\mathrm{V}(I) \coloneqq \left\{P \in \mathrm{Spec}\,(A) : a(P) = \overline{0} \in K_P \text{ para todo } a \in I\right\}$$

para cada ideal I de A. Dado que $a(P) = \overline{0}$ sse $a \in P$, resulta que $a(P) = \overline{0}$ para todo $a \in I$ sse $I \subseteq P$. Logo, $\mathrm{V}(I) = \{P \in \mathrm{Spec}\,(A) : I \subseteq P\}$.

A **topologia de Zariski** em $\mathrm{Spec}\,(A)$ é a topologia que tem como fechados os subconjuntos da forma $\mathrm{V}(I)$ acima, conforme I varia na coleção dos ideais de A. Alternativamente, por valer

$$\mathrm{Spec}\,(A) \setminus \mathrm{V}(I) = \bigcup_{a \in I} \mathrm{D}_A(a),$$

onde $\mathrm{D}_A(a) \coloneqq \left\{P \in \mathrm{Spec}\,(A) : a(P) \neq \overline{0}\right\}$, segue que $\mathcal{B} \coloneqq \{\mathrm{D}_A(a) : a \in A\}$ é uma base de abertos para a topologia de Zariski.

Exercício 2.2.87 ($^{\star}_{\star}$)**.** Verifique as afirmações anteriores. ■

A funtorialidade da correspondência $\mathrm{Spec}\,(\cdot) : \mathrm{R{\small ING}} \to \mathrm{T{\small OP}}$ é uma das muitas vantagens de *topologizar* diretamente os espectros: explicitamente, se $\varphi \colon A \to B$ é um morfismo de anéis, então

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\,(\varphi) : \mathrm{Spec}\,(B) &\to \mathrm{Spec}\,(A) \\ P &\mapsto \varphi^{-1}[P] \end{aligned}$$

é uma função contínua, essencialmente por conta da identidade

$$\mathrm{Spec}\,(\varphi)^{-1}\left[\mathrm{D}_A(a)\right] = \mathrm{D}_B(\varphi(a)),$$

válida para todo $a \in A$.

Exercício 2.2.88 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que $\mathrm{Spec}\,(\cdot)$ é realmente um funtor contravariante, i.e., $\mathrm{Spec}\,(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Spec}(A)}$ e $\mathrm{Spec}\,(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Spec}\,(\psi) \circ \mathrm{Spec}\,(\varphi)$. ■

A exploração de propriedades elementares (mas interessantes) dos espectros terá que esperar. Contudo, para encerrar o capítulo, nada melhor do que um

Exemplo 2.2.93 (Pontos genéricos)**.** *Para qualquer* $P \in \mathrm{Spec}\,(A)$*, verifica-se*

$$\overline{\{P\}} = \mathrm{V}(P).$$

Demonstração. Como $P \subseteq P$, tem-se $P \in \mathrm{V}(P)$ e assim $\overline{\{P\}} \subseteq V(P)$ (entendeu?)$^{\star}_{\star}$. Por outro lado, se $P \in \mathrm{V}(I)$ para algum I, então $I \subseteq P$. Logo, se $Q \in \mathrm{V}(Q)$, então $P \subseteq Q$ e, por conseguinte, $I \subseteq Q$, i.e., $Q \in \mathrm{V}(I)$, mostrando que $\mathrm{V}(P) \subseteq \mathrm{V}(I)$. Em outras palavras, $\mathrm{V}(P)$ é o menor fechado que contém $\{P\}$, como queríamos. □

Consequentemente, sempre que A é um domínio, o seu ideal nulo $\{0\}$ se revela um ponto de $\mathrm{Spec}\,(A)$ cujo fecho é $\mathrm{Spec}\,(A)$: em português explícito, em tais situações, $\mathrm{Spec}\,(A)$ tem um ponto denso, que profissionais xingam de **ponto genérico**! Assim, por exemplo, o ideal nulo de $\mathbb{Z}$ é um ponto genérico em $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$. Portanto, você pode esquecer qualquer esperança que por ventura tenha nutrido de encontrar uma métrica para a topologia de Zariski. ▲

[†]Atenção: o *contradomínio* de a enquanto função não é *um* corpo, já que K_P varia conforme P varia.

§3 Exercícios adicionais

Exercício 2.2.89 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que a topologia de Zariski em $\mathbb{R}^2$ não é a topologia cofinita de $\mathbb{R}^2$. Conclua que pode-se ter $\mathbb{A}^m_K \times \mathbb{A}^n_K \neq \mathbb{A}^{m+n}_K$. ■

Exercício 2.2.90 $(^{\star}_{\star})$**.** Sejam K um corpo infinito e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mostre que $\mathbb{A}^n_K$ não é de Hausdorff. ■

Exercício 2.2.91 $(\star)$**.** Mostre que as correspondências $\mathrm{V}(\cdot)$ e $\mathrm{I}(\cdot)$ introduzidas nesta subseção apresentam as propriedades a seguir:

(i) se $X \subseteq Y$, então $\mathrm{I}(Y) \subseteq \mathrm{I}(X)$, e

(ii) se $I \subseteq J$, então $\mathrm{V}(J) \subseteq \mathrm{V}(I)$. ■

Exercício 2.2.92 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Seja K um corpo infinito com a topologia de Zariski. Verdadeiro ou falso: $\mathbb{A}^n_K$ é um K-e.v.t. com a topologia de Zariski? ■

Exercício 2.2.93 $(^{\star}_{\star})$**.** Para um anel (comutativo e com unidade) A, mostre que se $\{F_i : i \in \mathcal{I}\}$ é uma família de fechados de $\operatorname{Spec}(A)$ com a propriedade da interseção finita, então $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i \neq \emptyset$. Dica: mostre a contrapositiva, i.e., se $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i = \emptyset$, então existe um subconjunto finito $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ tal que $\bigcap_{j \in \mathcal{J}} F_j = \emptyset$; para isso, será útil lembrar que todo ideal próprio está contido num ideal primo. ■

Capítulo 3

Uma corrida em comitê e...

Depois do alvoroço na lagoa de lágrimas, Alice chega à margem seca acompanhada de um grupo de animais falantes, todos ainda encharcados. Para se secarem, combinam uma *calcus race*[‡]: no original, trata-se de uma corrida sem propósito nem regras que termina quando todos estão secos. Aqui, para enxugar as lágrimas[††] provocadas pelos filtros e redes, discutiremos a propriedade topológica mais importante de todas...

3.1 Essencial:... uma história compacta

Há diversas formas de motivar a ideia de *compacidade*, algumas mais populares do que outras. Quem só teve contato com ANÁLISE REAL (ou menos), por exemplo, pode pensar em "limitado e fechado"[‡‡]. Porém, como isso só faz sentido em espaços métricos (limitação?), você já deve esperar de que esta não será a versão mais geral de compacidade abordada no texto. Também há muitas interações com outras propriedades que, por conseguinte, resultam num número monumental de aplicações. Não seria factível, portanto, tratar de todas elas nesta seção, que busca apenas *introduzir* o assunto no texto: a Subseção 3.1.1 aborda as *principais* caracterizações *topológicas* de compacidade; o *Teorema de Tychonoff* será provado na subseção seguinte de cinco formas diferentes; a Subseção 3.1.3 discute compacidade em ambientes metrizáveis; a penúltima subseção trata da *versão local* dessa propriedade; finalmente, a última subseção agrupa exercícios adicionais.

3.1.1 Principais manifestações topológicas

Como aprendi com Hugo C. Botós[†‡],

"para quem só *sabe* martelo, todo parafuso é prego".

No caso, por maior que seja a nossa disposição para lidar com espaços infinitos (os parafusos), nossa intuição (o martelo) é intrinsecamente *finitária*. Nesse sentido, *compacidade* é um meio de detectar parafusos marteláveis.

[‡] A tradução "corrida em comitê" provavelmente remete ao contexto original de "*calcus race*", termo associado a campanhas eleitorais nos Estados Unidos.

[††] De tristeza ou de alegria?

[‡‡] "Fechado e limitado" soa quase como "fechado ilimitado" quando se está com pressa.

[†‡] Que, por sua vez, aprendeu com o saudoso Professor Alexandre "Sasha" Ananin.

§1 Coberturas abertas e famílias de fechados

Pedir que um espaço infinito tenha apenas finitos abertos é algo extremamente restritivo, pelo menos para analistas, já que tal espaço não seria de Hausdorff: num espaço de Hausdorff X, $X \setminus \{x\}$ é aberto para qualquer $x \in X$ (certo?)$\overset{\star}{\star}$, de modo que se X tivesse apenas finitos abertos, então X teria somente finitos pontos (percebeu?)*.

Ao pensar nos abertos como “aproximações” de pontos, poderíamos pedir, alternativamente, que os espaços *marteláveis* admitissem “aproximações finitas”. Antes de discutir essa ideia, convém introduzir uma terminologia mais precisa.

Definição 3.1.1. Sejam X um conjunto, $Y \subseteq X$ um subconjunto e $\mathcal{U}$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X.

(i) Diremos que $\mathcal{U}$ é uma **cobertura de Y por subconjuntos de X** (ou que $\mathcal{U}$ **recobre** Y) se $Y \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, i.e., se para todo $y \in Y$ existir $U \in \mathcal{U}$ com $y \in U$. Caso $Y = X$, diz-se apenas que $\mathcal{U}$ é uma **cobertura** de X.

(ii) Se $\mathcal{U}$ recobre Y e $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ também recobre Y, xinga-se $\mathcal{U}'$ de **subcobertura** de $\mathcal{U}$ (“... para Y” se o contexto exigir).

Além disso, se X for um espaço topológico, diremos que $\mathcal{U}$ é uma **cobertura de Y por abertos de X** (ou apenas *cobertura aberta de X* caso $Y = X$) quando todos os membros de $\mathcal{U}$ são abertos em X. Mais geralmente, se cada membro de $\mathcal{U}$ satisfaz uma propriedade $\mathcal{P}$, diremos que $\mathcal{U}$ é uma *cobertura por subconjuntos com a propriedade* $\mathcal{P}$, ou qualquer outra abreviação que faça sentido no contexto. ¶

Assim, uma segunda tentativa para recuperar parte do significado de finitude para espaços infinitos poderia ser pedir que o espaço admitisse uma cobertura finita por abertos *próprios*[†]. Desta vez, a condição se revela afrouxada demais, já que qualquer espaço de Hausdorff com pelo menos dois pontos a satisfaz (certo?)$\overset{\star}{\star}$. O caminho do meio é a solução.

Teorema 3.1.2. *Para um espaço topológico X, são equivalentes:*

(i) *toda cobertura aberta de X admite subcobertura finita;*

(ii) *se $\mathcal{F} \neq \emptyset$ é família de fechados de X tal que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tais que $F_0 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$.*

Demonstração. Pelas leis de De Morgan, para qualquer coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X deve valer

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X \Leftrightarrow \bigcap_{S \in \mathcal{S}} X \setminus S = \emptyset.$$

Consequentemente,

- $\mathcal{U}$ é cobertura aberta para X sse $\mathcal{F}(\mathcal{U}) := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ é família de fechados satisfazendo $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U = \emptyset$, enquanto
- uma família $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de fechados satisfaz $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ sse $\mathcal{U}(\mathcal{F}) := \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ é cobertura aberta para X.

[†]Para todo espaço X, $\{X\}$ é uma cobertura finita para X. Definitivamente não é uma boa hora para confundir X com $\{X\}$.

Assim, se vale (i) e $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese de (ii), então $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ é cobertura por abertos para X, donde segue que existem $F_0, \ldots, F_m \in \mathcal{F}$ tais que $X = \bigcup_{j \leq m} X \setminus F_j$ e, consequentemente, $\bigcap_{j \leq m} F_j = \emptyset$. Analogamente, se vale (ii) e $\mathcal{U}$ é cobertura por abertos para X, então $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ satisfaz a hipótese de (ii). Logo, existem $n \in \mathbb{N}$ e $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $\bigcap_{i \leq n} X \setminus U_i = \emptyset$ e, por conseguinte, $X = \bigcup_{i \leq n} U_i$, como desejado. □

Definição 3.1.3. Um espaço topológico é **compacto** se satisfaz qualquer uma das afirmações no teorema anterior. ¶

Evidentemente, todo espaço finito é compacto (?!)$^{\star/10}$. Embora seja uma observação banal, isto revela que a compacidade, realmente, é uma das *componentes topológicas* da finitude, embora suficientemente flexível para ocorrer em espaços infinitos (como o próximo exemplo mostrará). A outra componente topológica é a *discretude*:

Exercício 3.1.1 ($^\star_\star$)**.** Mostre que um conjunto é finito sse sua topologia discreta é compacta. Dica: $\{\{x\} : x \in X\}$ é cobertura aberta de X sempre que X é discreto. ■

Em tempo, fica o aviso: a banalidade da observação acima se dissolverá após introduzirmos outras caracterizações de compacidade que não trazem condições de finitude explicitamente embutidas (cf. Teoremas 3.1.17, 3.1.25 e 3.1.33).

Antes de prosseguir, convém discutir como a compacidade se manifesta num subespaço K de um espaço topológico X. A princípio, K é compacto se for compacto com a topologia de subespaço herdada de X. Explicitamente, significa que para qualquer família $\{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ de abertos de K satisfazendo $K = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$, existe um subconjunto finito $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ tal que $K = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j$.

A rigor, a descrição acima está certa. Porém, ela pode se revelar desnecessariamente complicada, já que para cada A_i precisamos considerar um subconjunto $B_i \subseteq X$ aberto em X satisfazendo $A_i = B_i \cap K$. Costuma ser mais fácil observar o seguinte:

Proposição 3.1.4. *Sejam X um espaço topológico e $K \subseteq X$ um subespaço. São equivalentes:*

(i) *K é compacto com a topologia de subespaço;*

(ii) *toda cobertura de K **por abertos de** X admite subcobertura finita;*

(iii) *para toda coleção $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de **fechados de** X satisfazendo $K \cap \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, existe um subconjunto finito $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que $K \cap \bigcap_{F' \in \mathcal{F}'} F' = \emptyset$.*

Demonstração. Ficará por sua conta ($^\star_\star$). □

Corolário 3.1.5. *Sejam Z um espaço topológico, com $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$. Se X é compacto como subespaço de Y, então X é compacto como subespaço de Z.*

Demonstração. Segue da proposição anterior aliada ao Exercício 2.1.70. □

Apesar de simples, saber das equivalências acima facilitará muito as futuras verificações de compacidade já que, frequentemente, os exemplos de espaços compactos são subespaços de espaços não compactos.

Exemplo 3.1.6 (Opcional)**.** Pode ser pedagogicamente interessante verificar, *no braço*, que intervalos limitados e fechados da reta são compactos — mesmo que, futuramente, isto se torne mero corolário de outras caracterizações de compacidade.

Fixemos então $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Mostraremos que para qualquer coleção $\mathcal{U}$ de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ com $[a, b] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ existem $n \in \mathbb{N}$ e $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ satisfazendo $[a, b] \subseteq U_0 \cup \ldots \cup U_n$, e ficará por sua conta perceber porque isto basta ($^{\star}_{\star\star}$). Seja então

$$A := \left\{ x \in [a, b] : \text{ existe subconjunto finito } \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} \text{ tal que } [a, x] \subseteq \bigcup_{U' \in \mathcal{U}'} U' \right\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ pois $a \in A$. Como todo $x \in A$ satisfaz $a \leq x \leq b$, a completude de $\mathbb{R}$ garante a existência de $\sup A \in \mathbb{R}$ com $a \leq \sup A \leq b$. O plano para concluir o teorema é o seguinte: (i) mostrar que, necessariamente, ocorre $\sup A \in A$ e (ii) mostrar que $\sup A = b$. Se fizermos isso, seguirá que $b \in A$ e, portanto, existem $U_0, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ tais que $[a, b] \subseteq U_0 \cup \ldots \cup U_k$, como desejado.

(i) $\sup A \in A$. Como $\sup A \in [a, b]$, existe $V := (\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$ com $\sup A \in (\alpha, \beta)$. Tomando $\gamma \in [a, b]$ com $\alpha < \gamma < \sup A$, a definição de supremo garante $x \in A$ com $\gamma < x$ e, por sua vez, a definição de A exige que existam $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $[a, x] \subseteq U_0 \cup \ldots \cup U_n$. Logo, $[a, \sup A] \subseteq U_0 \cup \ldots \cup U_n \cup V$, mostrando que $\sup A \in A$.

(ii) $\sup A = b$. Se ocorresse $\sup A < b$, existiria $\delta \in [a, b]$ com $\sup A < \delta < \beta$, donde seguiria que $\delta \in A$, contrariando o fato de $\sup A$ ser o supremo de A. ▲

Para encontrar espaços *topológicos* não compactos, as quatro proposições a seguir serão tremendamente úteis.

Aviso. Enquanto não nos depararmos com *outras noções de espaço*, o termo "espaço" será frequentemente usado como abreviação para "espaço topológico". Além disso, sempre que o contexto permitir, "X", "Y" e afins devem ser entendidos como *espaços* quando nada a mais for mencionado.

Proposição 3.1.7. *Se X é compacto e $F \subseteq X$ é fechado em X, então F é compacto.*

Demonstração usual (via abertos). Se $\mathcal{V}$ é uma cobertura de F por abertos de X, então a família $\mathcal{V} \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura aberta para X, donde a compacidade de X garante $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tais que

$$X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{j \leq n} V_j,$$

acarretando $F \subseteq V_0 \cup \ldots \cup V_n$ (certo?)*. □

Demonstração (via fechados). Se $\mathcal{G} \neq \emptyset$ é família de fechados de X satisfazendo

$$F \cap \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G = \emptyset,$$

então $\mathcal{H} := \mathcal{G} \cup \{F\}$ é família de fechados de X cuja interseção é vazia. Logo, por X ser compacto, existem $G_0, \ldots, G_n \in \mathcal{H}$ tais que $F \cap G_0 \cap \ldots \cap G_n = \emptyset$, donde o resultado segue da Proposição 3.1.4 (entendeu?)*. □

Proposição 3.1.8. *Se X é de Hausdorff e $K \subseteq X$ é compacto, então K é fechado em X.*

Demonstração. Com as presentes caracterizações, a melhor alternativa é mostrar que $X \setminus K$ é aberto[†]. Para tanto, dado $x \in X \setminus K$, para cada ponto y em K existem abertos disjuntos $A_y, B_y \subseteq X$ com $x \in A_y$ e $y \in B_y$. Por conta da compacidade de K, existe um subconjunto finito $G \subseteq K$ tal que

$$x \notin K \subseteq \bigcup_{y \in G} B_y \subseteq \bigcup_{y \in G} X \setminus A_y = X \setminus \bigcap_{y \in G} A_y \quad \text{(por quê?!)}^{\star}_{\star}.$$

Por fim, basta notar que $A := \bigcap_{y \in G} A_y$ é um aberto em X com $x \in A$ e $A \subseteq X \setminus K$. □

Proposição 3.1.9. *Se X é compacto e $f \colon X \to Y$ é função contínua e sobrejetora, então Y é compacto.*

Demonstração (via coberturas abertas). Se $\mathcal{U}$ é cobertura aberta para Y, então a continuidade de f assegura que $f^{-1}(\mathcal{U}) := \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ é cobertura aberta para X (certo?)*. Por sua vez, a compacidade de X garante abertos $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $X = \bigcup_{j \leq n} f^{-1}[U_j]$. Finalmente, pela sobrejetividade de f, para qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ com $f(x) = y$, donde segue que existe $j \leq m$ com $x \in f^{-1}[U_j]$ e, por conseguinte, $y = f(x) \in U_j$. Logo, $\{U_0, \ldots, U_m\}$ é subcobertura finita de $\mathcal{U}$. □

Demonstração (via fechados). Se $\mathcal{G} \neq \emptyset$ é família de fechados em Y cuja interseção é vazia, então a continuidade de f assegura que $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}[G] : G \in \mathcal{G}\}$ é família de fechados em X (cf. Exercício 2.1.46), com

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} f^{-1}[G] = f^{-1}\left[\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G\right] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

Por X ser compacto, existem $G_0, \ldots, G_m \in \mathcal{G}$ tais que $\bigcap_{i \leq m} f^{-1}[G_i] = \emptyset$. Por fim, a sobrejetividade de f obriga que se tenha $G_0 \cap \ldots \cap G_m = \emptyset$ (percebeu?)*. □

Exercício 3.1.2 ($\star$)**.** Mostre que se X é compacto e $f \colon X \to Y$ é função contínua, então $\operatorname{im}(f)$ é *subespaço* compacto de Y. Dica: Exercício 2.1.20 + Proposição 3.1.4 + Proposição 3.1.9. ■

Exemplo 3.1.10 (Sequências convergentes)**.** Se $(x_n)_n$ é uma sequência num espaço X e $(x_n)_n \to x$ em X, então $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é subespaço compacto de X. Embora isso possa ser provado diretamente ($^{\star}_{\star}$), é bem mais legal notar que K é imagem do espaço $[0, \omega]$ (cf. Exemplo 1.2.20 e Observação 1.2.29) por uma função contínua (cf. Exercício 2.1.42). Como $[0, \omega]$ é compacto (certo?)$^{\star}_{\star}$, o resultado segue. ▲

Proposição 3.1.11. *Se E é espaço normado e $K \subseteq E$ é compacto, então K é **limitado**[‡].*

Demonstração. Se $K \neq \emptyset$ não é limitado, então a coleção de bolas abertas centradas na origem testemunha que K não é compacto, pois $K \subseteq \bigcup_{r > 0} B(0, r)$ e, para quaisquer $r_0, \ldots, r_n > 0$, existe $x \in K$ com $\|x\| > \max\{r_0, \ldots, r_n\}$. □

Corolário 3.1.12 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se X é compacto e E é espaço normado, então $\mathrm{C}(X, E) \subseteq \mathcal{B}_E(X)$, i.e., funções contínuas com domínio compacto e contradomínio normado são limitadas. Em particular, se $X \neq \emptyset$, então tais funções têm máximo e mínimo.*

[†]Quase não compensa comentar, mas perceba ($\star$) que não há perda de generalidade em supor $K \neq \emptyset$.
[‡]Trata-se da mesma definição de limitação em $\mathbb{K}$, *mutatis mutandis*.

Demonstração. Se $f \in \mathrm{C}(X, E)$, então $\mathrm{im}\,(f)$ é subespaço compacto de E e, portanto, é (fechado e) limitado. Em particular, se $X \neq \emptyset$, então $I := \{\|f(x)\| : x \in X\}$ também é subconjunto não vazio, limitado e fechado de $\mathbb{R}$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$, donde segue que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\sup I = \alpha$ e $\inf I = \beta$. Do que você já sabe de ANÁLISE REAL, deve se lembrar de que em tais situações, existem sequências $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em I com $(s_n)_n \to \alpha$ e $(t_n)_n \to \beta$, donde o fato de I ser fechado permite concluir que $\alpha, \beta \in I$, i.e., existem $x, y \in X$ tais que $\|f(x)\| = \max I$ e $\|f(y)\| = \min I$. □

Exercício 3.1.3 $(^{\star}_{\star\star})$**.** Bastaria provar o corolário acima para $E := \mathbb{K}$. Por quê? ■

Exemplo 3.1.13. *Espaços normados não triviais não são compactos*, pois a norma é uma função contínua ilimitada (certo?)*. Em particular, tanto $\mathbb{R}$ quanto $\mathbb{C}$ não são compactos. ▲

Exemplo 3.1.14. Para qualquer *espaço* $X \neq \emptyset$, $\mathrm{C_p}(X, \mathbb{K})$ não é compacto. Embora $\mathrm{C_p}(X, \mathbb{K})$ seja $\mathbb{K}$-espaço vetorial, isto não segue do exemplo anterior, posto que a topologia de $\mathrm{C_p}(X, \mathbb{K})$ *pode não ser* induzida por uma norma se X for infinito[†]. Apesar disso, para qualquer $x \in X$, a avaliação $\pi_x \colon \mathrm{C_p}(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é uma função contínua e ilimitada (certo?)* e, portanto, $\mathrm{C_p}(X, \mathbb{K})$ não pode ser compacto. Futuramente, veremos que nenhum *espaço vetorial topológico de Hausdorff* não trivial sobre um corpo topológico *razoável* pode ser compacto. ▲

Exercício 3.1.4 (Cf. Exemplo 2.1.66 $(^{\star}_{\star})$)**.** Use o último corolário para mostrar que a reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ não é compacta. Dica: você já notou que a identidade $\mathbb{R}_S \to \mathbb{R}$ é contínua? ■

Observação 3.1.15 (Outras formulações semelhantes)**.** Para encerrar este primeiro *pacote* de caracterizações de compacidade, convém destacar alguns fatos gerais.

(i) *Se a topologia de X é gerada por uma* base $\mathcal{B}$, *então um subespaço $K \subseteq X$ é compacto sse para toda cobertura de K por membros de $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita.* Observe que a direção menos trivial $(\Leftarrow)$ já foi usada no Exemplo 3.1.6 (onde?)*. Para verificar a afirmação, basta notar que se $\mathcal{V}$ é uma cobertura de K por abertos (quaisquer!) de X, então para cada $x \in K$ existem $V_x \in \mathcal{V}$ e $B_x \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_x \subseteq V_x$. Dado que $\mathcal{U} := \{B_x : x \in K\}$ recobre K, a hipótese se aplica, donde o resultado segue pois qualquer subcobertura finita de $\mathcal{U}$ para K induz uma subcobertura finita de $\mathcal{V}$ para K (certo?)*.

(ii) A formulação de compacidade em termos de fechados no item (ii) do Teorema 3.1.2 costuma ser encontrada na contrapositiva. Para enunciá-la de maneira mais econômica, vamos dizer que uma família não vazia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X tem a **p**ropriedade da **i**nterseção **f**inita (**p.i.f.**) se $\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \neq \emptyset$ para qualquer subconjunto finito e não vazio $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Com isso, segue automaticamente do Teorema 3.1.2 que *um espaço X é compacto sse $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$ para qualquer família $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de fechados de X com a p.i.f.*.

Caso você tenha evitado, pode ser um bom momento para (re) visitar o Exercício 1.2.21: consegue perceber que todo espaço métrico compacto é completo? △

[†]Confira o Exemplo 2.2.61 se precisar de inspiração. Por ora, pode ser mais fácil assumir que $X := \mathbb{K}$ para adaptar o argumento $(^{\star}_{\star\star})$.

§2 Projeções fechadas e tubos

A caracterização de compacidade que discutiremos agora costuma ser mais apelativa para quem se interessa pela *perspectiva categórica*, segundo a qual o que determina a *natureza* de um objeto são suas interações (setas!) com os demais objetos da categoria. Como brinde, ela nos dará uma das provas mais simples que existem da *versão finita* do *Teorema de Tychonoff*. Primeiro, uma definição:

Definição 3.1.16. Uma função $f: X \to Y$ entre espaços topológicos é **fechada** se $f[C]$ é fechado em Y para todo $C \subseteq X$ fechado em X. ¶

Não é hora e nem lugar de achar que toda função contínua é fechada, posto que pré-imagens e imagens diretas são coisas diferentes†. Os próximos exercícios visam, entre outras coisas, testar se você realmente entendeu a ideia.

Exercício 3.1.5 ($\star$)**.** Mostre que a composição de funções fechadas é fechada. ■

Exercício 3.1.6 ($\substack{\star\\\star}$)**.** Mostre que se X é compacto, Y é de Hausdorff e $f: X \to Y$ é contínua, então f é função fechada. ■

Funções fechadas aparecerão com frequência no texto, não se preocupe. Por ora, o importante é provar o próximo

Teorema 3.1.17 (Mrówka, 1959)**.** *Para um espaço X, são equivalentes:*

(i) *X é compacto;*

(ii) *para todo espaço Y, a projeção $\pi_Y: X \times Y \to Y$ é fechada.*

Demonstração. A ida é um exercício honesto ($\substack{\star\\\star}$). A diversão está na recíproca: mostraremos que uma família $\mathcal{F}$ de fechados de X com a p.i.f. satisfaz $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ (cf. Observação 3.1.15, item (ii)). Para isso, usaremos $\mathcal{F}$ na "construção" de um espaço Y, por meio do qual a hipótese de $\pi_Y: X \times Y \to Y$ ser fechada garantirá um ponto em $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Note que como cada $F \in \mathcal{F}$ é fechado, basta obter $x \in X$ tal que $x \in \overline{F}$ para qualquer F, o que por sua vez significa encontrar x tal que $V \cap F \neq \emptyset$ para qualquer subconjunto aberto $V \subseteq X$ em torno de x.

Katzensprung: considere $Y := X \cup \{\infty\}$, onde $\infty \notin X$, com a topologia gerada pela família $\mathcal{B} := \{\{x\} : x \in X\} \cup \left\{\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G : \emptyset \neq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F},\ \mathcal{G} \text{ finito}\right\}$ como base; explicitamente, $A \subseteq Y$ é aberto sse $\infty \notin A$ ou existem $F_0, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tais que $F_0 \cap \ldots \cap F_n \subseteq A$.

A hipótese garante então que a projeção $\pi_Y: X \times Y \to Y$ é fechada e, portanto, para $D := \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times Y$, deve-se ter $\pi_Y\left[\overline{D}\right]$ fechado em Y. E daí?

⌜**Afirmação 3.1.18.** *Se $f: A \to B$ é função contínua e fechada, então $f\left[\overline{C}\right] = \overline{f[C]}$ para qualquer $C \subseteq A$.*

Prova da Afirmação. Como $C \subseteq \overline{C}$, temos $f[C] \subseteq f\left[\overline{C}\right]$. Por f ser fechada e pela definição de fecho, resulta $\overline{f[C]} \subseteq f\left[\overline{C}\right]$. A inclusão restante decorre da continuidade da função (cf. Exercício 2.1.46). ⌟

†Se precisar muito de um exemplo para se acalmar, considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Pareceu algo abstrato demais? Revise!

Portanto, deve-se ter que $\pi_Y\left[\overline{D}\right] = \mathrm{cl}_Y(\pi_Y[D]) = \mathrm{cl}_Y(X) = Y$, onde a última igualdade segue, precisamente, por $\mathcal{F}$ ter a p.i.f.! Com efeito, como todo aberto $A \subseteq Y$ com $\infty \in A$ contém uma interseção finita de membros de $\mathcal{F}$ e estas não são vazias por conta da p.i.f., segue que todo aberto dessa forma intercepta X, ou seja, ∞ é ponto aderente ao subconjunto X no espaço Y. Agora, por valer $\infty \in Y = \mathrm{cl}_Y(X) = \pi_Y\left[\overline{D}\right]$, segue que $(x, \infty) \in \overline{D}$ para algum $x \in X$, justamente o ponto procurado.

De fato, dado um aberto $V \subseteq X$ com $x \in V$, o conjunto

$$O := V \times (F \cup \{\infty\}) \subseteq X \times Y$$

é aberto, com $(x, \infty) \in O$, donde o fato de se ter $(x, \infty) \in \overline{D}$ garante um $z \in X$ com $(z, z) \in O$ (certo?)*. Logo, $z \in V \cap F$. □

Observação 3.1.19. O teorema anterior revela, entre outras coisas, que as coberturas abertas (ou as famílias de fechados com interseção vazia) de um espaço podem ser interpretadas como espaços topológicos! Para mais revelações, confira [20]. △

Corolário 3.1.20 (*Baby* Tychonoff)**.** *Se X_i é espaço compacto para cada $i \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ é finito, então $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ é compacto.*

Demonstração. Dado que se pode argumentar por indução, basta mostrar que $X \times Y$ é compacto sempre que X e Y são compactos. Ora, como a composição de funções fechadas é fechada (cf. Exercício 3.1.5), tudo se resume a observar que o diagrama abaixo *comuta*†

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \times Z \arrow[r, "\pi_Z"] \arrow[d, "\pi_{Y \times Z}"'] & Z \\
Y \times Z \arrow[ur, "\pi'_Z"'] &
\end{tikzcd}$$

onde Z é um espaço qualquer e as setas são as projeções *óbvias* (entendeu?)*. □

O Teorema 3.1.17 admite repaginações ~~encanatórias~~ *geométricas* que podem tocar o coração de quem não se importa com aspectos categóricos.

Proposição 3.1.21. *Para espaços topológicos X e Y, são equivalentes:*

(i) *a projeção $\pi_Y : X \times Y \to Y$ é fechada;*

(ii) *para cada $y \in Y$, sempre que um aberto $O \subseteq X \times Y$ satisfaz $X \times \{y\} \subseteq O$, existe um aberto $V \subseteq Y$ em torno de y tal que $X \times V \subseteq O$.*

(iii) *o subconjunto $O_Y := \{y \in Y : X \times \{y\} \subseteq O\}$ é aberto em Y para qualquer subconjunto aberto $O \subseteq X \times Y$.*

Demonstração. Supondo (i) e fixando $y \in Y$ e $O \subseteq X \times Y$ como no enunciado de (ii), temos $F := (X \times Y) \setminus O$ fechado em $X \times Y$, donde segue que $\pi_Y[F]$ é fechado em Y com $y \notin \pi_Y[F]$ (pois $(x, y) \in O$ para todo $x \in X$). Logo, existe um aberto $V \subseteq Y$ com $y \in V$ e $V \subseteq Y \setminus \pi_Y[F]$, e daí não é difícil ver (veja!)$^{\star}_{\star}$ que $X \times V \subseteq O$. Portanto, vale (ii).

Agora, tomando O e O_Y como no enunciado de (iii), note que se $y \in O_Y$, então (ii) garante um aberto $V \subseteq Y$ em torno de y tal que $X \times V \subseteq O$, i.e., $V \subseteq O_Y$. Portanto, O_Y é aberto em Y (certo?)$^{\star}_{\star}$.

†Caso ainda não tenha se acostumado com a expressão, neste caso ela significa $\pi_Z = \pi'_Z \circ \pi_{Y \times Z}$.

Por fim, para (iii) $\Rightarrow$ (i), note que se $F \subseteq X \times Y$ é fechado e $y \notin \pi_Y[F]$, então $O := (X \times Y) \setminus F$ é um aberto em $X \times Y$ tal que $X \times \{y\} \subseteq O$. Logo, $y \in O_Y$ e, por (iii), existe $V \subseteq Y$ aberto em Y com $y \in V$ e $V \subseteq O_Y$, i.e., $X \times V \subseteq O$, mas disto segue que $V \subseteq Y \setminus \pi_Y[F]$, posto que se $v \in V$, então $(x, v) \in O$ (entendeu?)*. Portanto, mostramos que $\pi_Y[F]$ é fechado em Y. $\square$

Corolário 3.1.22 (Lema do Tubo). *Se X é compacto, então o item (ii) da última proposição vale para todo espaço Y.*

Exercício 3.1.7 ($^\star_\star$). Mostre que a hipótese de X ser compacto não pode ser abandonada. Dica: Δ. $\blacksquare$

Outra variação comum é dada no próximo

Teorema 3.1.23 (Lema da Caixa). *Sejam X e Y espaços topológicos e considere subconjuntos $C \subseteq X$ e $K \subseteq Y$, ambos compactos. Se $O \subseteq X \times Y$ é aberto e $C \times K \subseteq O$, então existem $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, abertos, tais que $C \times K \subseteq A \times B \subseteq O$.*

Demonstração. Para $x \in C$ fixado, para cada $y \in K$ existem abertos $A_{x,y} \subseteq X$ e $B_{x,y} \subseteq Y$ tais que $(x, y) \in A_{x,y} \times B_{x,y} \subseteq O$. Por conta da compacidade de K, existe subconjunto finito $K' \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{y \in K'} B_{x,y} := B_x$. Isto permite definir $A_x := \bigcap_{y \in K'} A_{x,y}$, um aberto em X em torno de x. Agora, a coleção $\mathcal{U} := \{A_x : x \in C\}$ se revela uma cobertura por abertos de X para C, donde sua compacidade garante um subconjunto finito $C' \subseteq C$ tal que $C \subseteq \bigcup_{x \in C'} A_x := A$. Para encerrar, observe (!)$^\star_\star$ que

$$C \times K \subseteq A \times \underbrace{\left(\bigcap_{x \in C'} B_x \right)}_{:= B} \subseteq O. \qquad \square$$

Exercício 3.1.8 ($^\star_\star$). Use o Lema da Caixa para provar o Lema do Tubo. $\blacksquare$

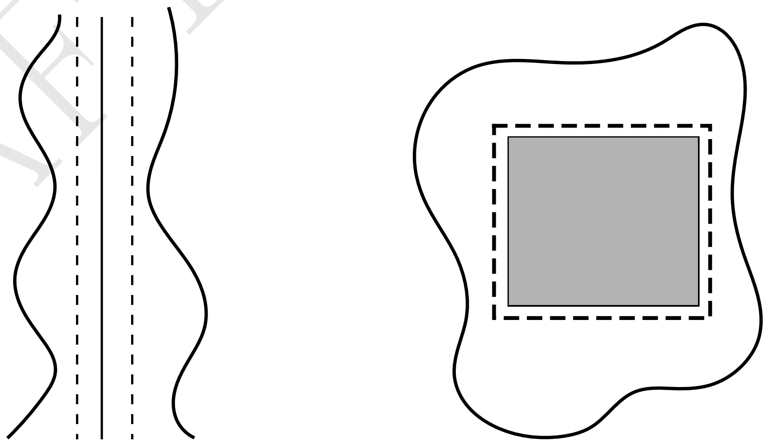


Figura 3.1: Lema do Tubo Vs. Lema da Caixa.

É comum encontrar provas da versão *baby* do Teorema de Tychonoff que apelem para o Lema da Caixa, mas me recuso a discutí-las num contexto em que o Teorema de Mrówka já está disponível.

§3 Ultrafiltros e compacidade

O Coelho Branco que guia toda a presente narrativa é a convergência. Portanto, é de se esperar que compacidade possa ser entendida, motivada e discutida por meio dos *aparatos convergentes* introduzidos na primeira parte deste capítulo.

MOTIVAÇÃO. Seja $(Y, \mathcal{S})$ um espaço topológico no qual *tudo convirja*, i.e., em que todo filtro próprio seja convergente.

PERGUNTA: o espaço acima *presta*?

RESPOSTA: não para analistas.

De fato, se todo filtro próprio de Y converge, então o filtro $\{Y\}$ deve convergir. Pela Definição 2.1.21, isto significa que existe $y \in Y$ tal que $\mathcal{N}_y \subseteq \{Y\}$. Logo, Y é o único aberto que contém y. Consequentemente, se $|Y| > 1$, então Y não é um espaço de Hausdorff, pois qualquer ponto $x \in Y$ com $x \neq y$ também pertence a Y. MORAL DA HISTÓRIA: para que *tudo* convirja, precisa-se abrir mão da unicidade dos limites — ou trabalhar com espaços dotados de um único ponto.

Em algum sentido, a discussão acima mostra que a condição exigida sobre Y foi extrema, o que sugere moderação. Em outras palavras, pode ser conveniente que um espaço admita filtros não convergentes†. Nesse sentido, a próxima proposição traz alguma esperança (e pode ser útil relembrar a Observação 2.1.36).

Proposição 3.1.24. *Dados um espaço topológico X e filtros próprios $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ em X, tem-se*

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \lim \mathcal{F} \subseteq \lim \mathcal{G}.$$

Demonstração. Ora, se $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$, então $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{G}$. □

A proposição acima esconde uma sutileza muito útil: embora possa existir um filtro $\mathcal{F}$ não convergente, i.e., com $\lim \mathcal{F} = \emptyset$, talvez seja razoável supor que $\mathcal{F}$ *admita uma extensão* convergente. Mais precisamente: pode ser interessante exigir que exista um filtro próprio $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ e $\lim \mathcal{G} \neq \emptyset$. Essa alternativa é bastante acertada.

Teorema 3.1.25 (Compacidade vs. convergência, parte I)**.** *Para um espaço X, são equivalentes:*

(i) *X é compacto;*

(ii) *todo filtro próprio de X está contido num filtro próprio convergente.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ um filtro próprio em X e considere $\overline{\mathcal{F}} := \left\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\}$. Dado que $\mathcal{F}$ é próprio, fechado por interseções finitas e $\overline{S} \subseteq \overline{T}$ sempre que $S \subseteq T$ (cf. Exercício 2.1.47), segue que $\overline{\mathcal{F}}$ tem a p.i.f. (certo?)$^{\star}_{\star}$.

⌜**Afirmação 3.1.26 (Lema do *ultrafiltro*).** *Se $\mathcal{H}$ é família de subconjuntos de Z com a p.i.f., então existe filtro próprio $\mathcal{G}$ em Z, maximal na família dos filtros próprios que contém $\mathcal{H}$, i.e., $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ e $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ sempre que $\mathcal{G}'$ é filtro próprio em Z satisfazendo $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}'$ e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$.*

† Frequentemente, a fim de que uma determinada propriedade seja "interessante", é importante que existam tanto objetos que a possuam quanto objetos que não a possuam.

Prova da Afirmação. Como a letra Z sugere, usaremos o **Lema de Zorn** (cf. Observação 3.1.27 a seguir). Considere $\mathbb{P} := \{\mathcal{J} \in \mathsf{Fil}^*(Z) : \mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}\}$ com a ordem da inclusão usual. Dado que

$$\mathcal{J}' := \left\{ S \subseteq Z : \text{ existe } \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H} \text{ finito tal que } \bigcap_{H' \in \mathcal{H}'} H' \subseteq S \right\}$$

é um filtro próprio em Z que satisfaz $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}'$ (certo?)*, temos $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Agora, se $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}$ é uma *cadeia*, então $\mathcal{D} := \bigcup \mathcal{C} \in \mathbb{P}$ (por quê?)* com $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$ para todo $\mathcal{J} \in \mathcal{C}$, i.e., $\mathcal{D}$ é limitante superior de $\mathcal{C}$. Portanto, o Lema de Zorn se aplica, e garante a existência de $\mathcal{G} \in \mathbb{P}$ maximal, como desejado. ⌟

Fazendo $Z := X$ e $\mathcal{H} := \overline{\mathcal{F}}$ na última afirmação, segue que existe um filtro próprio $\mathcal{G}$ em X, maximal na família dos filtros próprios que contém $\overline{\mathcal{F}}$. E agora entra a compacidade: como $\overline{\mathcal{G}}$ é uma família de fechados com a p.i.f. (pelo mesmo argumento que você usou para mostrar que $\overline{\mathcal{F}}$ tem a p.i.f.), existe $x \in X$ tal que $x \in \overline{G}$ para todo $G \in \mathcal{G}$.

Katzensprung: $\mathcal{G} \to x$.

Se não for o caso, i.e., se $\mathcal{N}_x \not\subseteq \mathcal{G}$, então existe um aberto $V \subseteq X$ em torno de x com $V \notin \mathcal{G}$. Consequentemente, $\widetilde{\mathcal{G}} := \mathcal{G} \cup \{X \setminus V\}$ tem a p.i.f.: se $(X \setminus V) \cap G = \emptyset$ para algum $G \in \mathcal{G}$, então $G \subseteq V$ e daí $V \in \mathcal{G}$. Assim, existe um filtro próprio $\mathcal{K}$ em X satisfazendo $\widetilde{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{K}$ (de acordo?)*. Como $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \widetilde{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{K}$, resulta $\mathcal{G} = \mathcal{K}$ e, por conseguinte, $V \in \mathcal{G}$, absurdo. Portanto, $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{G}$.

A recíproca é bem mais tranquila. Note que se $\mathcal{G}$ é um filtro próprio de X que converge para x, então $x \in \overline{G}$ para todo $G \in \mathcal{G}$: afinal de contas, se $V \in \mathcal{N}_x$, então $V \in \mathcal{G}$ e daí $V \cap G \neq \emptyset$ para qualquer $G \in \mathcal{G}$. Em particular, $\overline{\mathcal{G}}$ é uma família de fechados de X cuja interseção é não vazia. Por outro lado, se $\mathcal{U}$ é cobertura aberta para X, então $\mathcal{F}(\mathcal{U}) := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ é família de fechados *com interseção vazia*[†]. Logo, não existe filtro próprio $\mathcal{G}$ em X com $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{G}$ (certo?)$^\star_\star$. Tendo em vista que famílias com a p.i.f. sempre estão contidas em filtros próprios, a última conclusão significa que $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ *não tem a p.i.f.* (por quê?)*, ou seja, $\mathcal{U}$ tem subcobertura finita! □

Observação 3.1.27. Você já deve conhecer o enunciado do

Lema de Zorn. *Se $\mathbb{P} \neq \emptyset$ é uma ordem parcial em que toda cadeia tem limitante superior, então $\mathbb{P}$ tem um elemento maximal.*

Trata-se de uma das ZF-encarnações do Axioma da Escolha [17, 28]. Para usá-lo, o mais importante é saber o que são cadeias, limitantes superiores e elementos maximais em ordens: **cadeias** são subconjuntos totalmente ordenados pela ordem herdada de $\mathbb{P}$, enquanto $p \in \mathbb{P}$ é **maximal** se não existe $a \in \mathbb{P}$ tal que $p < a$ (ou, equivalentemente, $p = a$ sempre que $a \in \mathbb{P}$ satisfaz $p \leq a$). A definição de limitante superior é aquela que você aprendeu ao estudar supremos em Análise Real. △

Filtros próprios maximais como os que foram usados na última demonstração são chamados de **ultrafiltros**[‡], daí o nome "Lema do ultrafiltro" dado para a Afirmação 3.1.26. Por sua vez, para um filtro próprio $\mathcal{F}$, os pontos do conjunto $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ são chamados de **pontos aderentes do filtro** $\mathcal{F}$. Assim, não deve ser difícil destrinchar tudo o que se viu até agora para resolver o próximo

[†]Confira a demonstração do Teorema 3.1.2 se não lembrar do argumento.

[‡]É difícil *visualizar* ultrafiltros, no sentido de ter algum tipo de entendimento intuitivo de *como eles são*. Caso se interesse, há uma discussão um pouco mais paciente na Subseção 2.2.3 §3.

Exercício 3.1.9 (Compacidade vs. convergência, parte II ($^{\star}_{\star}$)). Mostre que as afirmações a seguir são equivalentes para qualquer espaço topológico:

(i) toda família de fechados do espaço com a p.i.f. tem interseção não vazia;

(ii) todo ultrafiltro no espaço converge;

(iii) todo filtro próprio no espaço está contido num filtro próprio convergente;

(iv) todo filtro próprio no espaço tem ponto aderente. ■

§4 Sub-redes e compacidade

E onde as redes foram parar nessa conversa? Assim como no caso de filtros, se toda rede num espaço Y converge, então o espaço é ruim para analistas: se $|Y| > 1$ e $x, y \in Y$ são pontos distintos, então a convergência da sequência

$$z_n := \begin{cases} x, & \text{se } n \text{ é par} \\ y, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

impede que o espaço seja de Hausdorff (por quê?)$^{\star}_{\star}$. Ou seja: como no caso de filtros, exigir que toda rede convirja é algo forte. Mas diferente dos filtros, naturalmente comparáveis por meio da inclusão, não há uma maneira inteiramente óbvia de comparar redes a fim de obter uma versão análoga da Proposição 3.1.24 que motive outra manifestação de compacidade. Ainda bem que nem tudo na vida precisa ser óbvio.

Proposição 3.1.28. *Se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $(x_n)_n^{\uparrow} \subseteq (y_n)_n^{\uparrow}$.*

Demonstração. Antes de qualquer outra coisa, convém relembrar que $(y_n)_n$ é **subsequência** de $(x_n)_n$ se existe uma função $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_n = x_{h(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, se $S \in (x_n)_n^{\uparrow}$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_m : m \geq N\} \subseteq S$. Logo, $\{y_n : n \geq N\} \subseteq S$: com efeito, se $n \geq N$, então $h(n) \geq h(N) \geq N$ (certo?)*, acarretando $y_n = x_{h(n)} \in \{x_m : m \geq N\} \subseteq S$. □

Corolário 3.1.29. *Se $(x_n)_n \to p$ num espaço topológico X e $(y_n)_n$ é subsequência de $(x_n)_n$, então $(y_n)_n \to p$.*

A última proposição é a justificativa *etimológica* para a próxima

Definição 3.1.30. Dadas redes φ e ψ num conjunto X, diremos que ψ é **sub-rede** de φ se $(\varphi)^{\uparrow} \subseteq (\psi)^{\uparrow}$. ¶

Explicitamente, ψ é sub-rede de φ sse para todo $A \in \operatorname{dom}(\varphi)$ existe $B \in \operatorname{dom}(\psi)$ tal que $\psi\left[B^{\uparrow}\right] \subseteq \varphi\left[A^{\uparrow}\right]$. Prefere explicitar ainda mais? Pois bem: $(y_b)_{b\in\mathbb{B}}$ é sub-rede de $(x_a)_{a\in\mathbb{A}}$ sse para todo $A \in \mathbb{A}$ existe $B \in \mathbb{B}$ tal que para todo $b \in \mathbb{B}$ com $b \succeq_{\mathbb{B}} B$ existe $a \succeq_{\mathbb{A}} A$ tal que $y_b = x_a$. Moralmente, ψ é sub-rede de φ se os rabos de φ *contêm* rabos de ψ, o que reforça a escolha pelo prefixo "sub".

Exercício 3.1.10 ($\star$). Mostre que se ψ é sub-rede de φ num espaço topológico X, então $\lim \varphi \subseteq \lim \psi$. Explicitamente: se $\varphi \to x$ em X, então $\psi \to x$ em X. ■

Exemplo 3.1.31 (Sub-redes de Willard)**.** A proposição anterior mostra que subsequências são exemplos de sub-redes. Mais geralmente, diremos que ψ é **W-sub-rede**[†] de φ se existir uma função crescente e *cofinal*[‡] $\rho\colon \operatorname{dom}(\psi) \to \operatorname{dom}(\varphi)$ tal que $\varphi \circ \rho = \psi$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{dom}(\varphi) \arrow[r, "\varphi"] & X \\
\operatorname{dom}(\psi) \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2: O poder unificador das setas.

Uma simples adaptação da demonstração apresentada para a Proposição 3.1.28 mostra que W-sub-redes são sub-redes (percebeu?)$^{\star}_{\star}$. Fora isso, é claro que se φ e ψ são *sequências* num mesmo conjunto, então ψ é subsequência de φ sse ψ é W-sub-rede de φ (é claro mesmo?)$^{\star}_{\star}$. Mas não se apresse: sequências admitem W-sub-redes que nem são sequências! Confira a Subseção 2.2.4 para mais detalhes[††]. ▲

Exercício 3.1.11 ($^{\star}_{\star}$)**.** Sejam $\varphi := (1, 0, 0, 0, \ldots)$ e $\psi := (-1, 0, 0, 0, \ldots)$ sequências em $\mathbb{R}$.

a) Mostre que ambas convergem para 0 em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que φ não é subsequência de ψ e vice-versa.

c) Mostre que $(\varphi)^{\uparrow} = (\psi)^{\uparrow}$. ■

Moral da história: a flexibilidade das sub-redes corrige limitações técnicas oriundas das restrições impostas pela definição clássica de subsequência.

Com as formulações acima, traduzir compacidade em termos de redes se transforma num simples exercício de adaptação.

Definição 3.1.32. Sejam X um espaço e φ uma rede em X.

(i) Diremos que φ é **ultrarrede** se $(\varphi)^{\uparrow}$ for um ultrafiltro em X.

(ii) Um ponto $x \in X$ é **ponto aderente** de φ se $x \in \overline{\varphi[D^{\uparrow}]}$ para todo $D \in \operatorname{dom}(\varphi)$. ¶

Teorema 3.1.33 (Compacidade vs. convergência, parte III)**.** *Para um espaço X, são equivalentes:*

(i) *X é compacto;*

(ii) *toda ultrarrede de X converge;*

(iii) *toda rede em X tem sub-rede convergente;*

(iv) *toda rede em X tem ponto aderente.*

[†] Em referência a Willard [48].

[‡] Uma função $\rho\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é **cofinal** se sua imagem é *cofinal* em $\mathbb{B}$, ou seja, se para todo $b \in \mathbb{B}$ existir $a \in \mathbb{A}$ tal que $\rho(a) \succeq b$.

[††] Mesmo que não queira saber de tantos detalhes, é importante avisar que a definição de sub-rede não é consenso na literatura.

Demonstração (via filtros). Por conta da Proposição 2.1.19 e do Teorema 2.1.26, todas as equivalências seguem do Exercício 3.1.9. Por exemplo: é claro $(?)^{\star}_{\star}$ que todo ultrafiltro de X converge sse toda ultrarrede de X converge. Verificar os detalhes remanescentes será problema seu $(^{\star}_{\star})$. □

Demonstração (sem filtros explícitos). Para empurrar filtros para baixo do tapete, precisamos expressar ultrarredes de modo um pouco mais indireto.

⌜**Afirmação 3.1.34.** *Uma rede φ de um conjunto A é ultrarrede se, e somente se, φ é sub-rede de todas as suas sub-redes em A.*

Prova da Afirmação. Tendo em vista o Teorema 2.1.26, o enunciado acima é apenas um modo equivalente de dizer que $(\varphi)^{\uparrow}$ contém todo filtro próprio que o contém, i.e., $(\varphi)^{\uparrow}$ é maximal na família dos filtros próprios, ou seja, é ultrafiltro. ⌟

Agora, se ψ é ultrar*rede* em X, então $\left\{\overline{\psi\left[d^{\uparrow}\right]} : d \in \operatorname{dom}(\psi)\right\}$ é uma família de fechados com a p.i.f. (certo?)$^{\star}_{\star}$. Logo, se X é compacto, então existe $x \in X$ tal que $x \in \overline{\psi\left[d^{\uparrow}\right]}$ para todo $d \in \operatorname{dom}(\psi)$.

KATZENSPRUNG: $\psi \to x$.

Se não for o caso, então existe um aberto $V \subseteq X$ em torno de x tal que para todo $d \in \operatorname{dom}(\psi)$ existe $d' \succeq d$ satisfazendo $\psi(d') \notin V$ (entendeu?)*. Logo, $\rho\colon \operatorname{dom}(\psi) \to X$ dada por $\rho(d) := \psi(d')$ é sub-rede de ψ (por quê?)*, donde a caracterização de ultrarredes dada pela última afirmação garante que $(\rho)^{\uparrow} = (\psi)^{\uparrow}$. Porém, por construção, $X \setminus V$ contém todos os rabos de ρ, que devem conter rabos de ψ, mostrando que o ponto x não tem a propriedade com a qual foi escolhido (por quê?)*. Portanto, $\psi \to x$.

Para provar (iii) a partir de (ii), precisamos substituir o Lema do ultrafiltro por algo que mencione apenas ultrarredes.

⌜**Afirmação 3.1.35 ("Lema da ultrarrede").** *Se φ é rede em X, então φ admite uma sub-rede ψ que é ultrarrede.*

Prova da Afirmação. A ideia ainda é usar o Lema de Zorn. Começa-se com a família

$$\mathbb{P} := \left\{\mathcal{S} \subseteq \wp(X) : \mathcal{S} \text{ tem p.i.f. e } \left\{\varphi\left[d^{\uparrow}\right] : d \in \operatorname{dom}(\varphi)\right\} \subseteq \mathcal{S}\right\},$$

parcialmente ordenada pela inclusão. Após notar que $\mathbb{P}$ satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn (note!)$^{\star}_{\star}$, podemos tomar $\mathcal{M} \in \mathbb{P}$ maximal.

Como no Teorema 2.1.26, $\mathbb{D}_{\varphi} := \{(x, M) \in X \times \mathcal{M} : x \in M\}$ é um conjunto dirigido pela relação $\preceq$ dada por $(x, M) \preceq (y, N)$ sse $N \subseteq M$ (e isto funciona pois...?)$^{\star}_{\star}$. Daí, a rede $\psi\colon \mathbb{D}_{\varphi} \to X$ dada por $\psi(x, M) := x$ é sub-rede de φ pois $\psi\left[\left(d, \varphi\left[d^{\uparrow}\right]\right)\right] \subseteq \varphi\left[d^{\uparrow}\right]$ para todo $d \in \operatorname{dom}(\varphi)$ (entendeu?)*. Para ver que ψ é ultrarrede, note que se ρ for sub-rede de ψ, então ocorre $(\psi)^{\uparrow} \subseteq (\rho)^{\uparrow}$, acarretando $(\rho)^{\uparrow} \in \mathbb{P}$, donde segue que $\mathcal{M} = (\rho)^{\uparrow}$ e, portanto, $(\rho)^{\uparrow} \subseteq (\psi)^{\uparrow}$ (por quê?)$^{\star}_{\star}$. ⌟

Assim, se toda ultrarrede converge em X, segue que toda rede tem sub-rede convergente. As implicações (iii) ⇒ (iv) e (iv) ⇒ (i) ficarão por sua conta $(^{\star}_{\star\star})$. □

Antes de avançar para as demonstra*ções* do *Teorema de Tychonoff*, será proveitoso ilustrar como as propriedades essenciais de compacidade podem ser provadas com as caracterizações anteriores. E para quem estudou compactos em ANÁLISE REAL com ênfase em *existência de subsequências convergentes* (cf. Subseção 3.1.3 §1), fica o convite para ler os próximos argumentos com ainda mais atenção.

Demonstração da Proposição 3.1.7 (via redes). Com as mesmas notações do enunciado, mostraremos que se φ é uma rede em F, então φ admite sub-rede em F que converge para um ponto de F. Ora, φ é rede em X, e este é compacto. Logo, existe $\psi \in \mathsf{Net}(X)$ tal que $(\varphi)^{\uparrow} \subseteq (\psi)^{\uparrow}$ e $\psi \to x$. Quase acabou, mas é preciso cuidado: ψ *pode* assumir *valores* fora de F. Contudo, para qualquer $A \in \operatorname{dom}(\varphi)$, existe $B \in \operatorname{dom}(\psi)$ com $\psi\left[B^{\uparrow}\right] \subseteq \varphi\left[A^{\uparrow}\right] \subseteq F$, mostrando que $\psi|_{B^{\uparrow}}$ é uma rede[†] em F que converge para x (pelo próximo exercício), donde a hipótese de F ser fechado assegura que $x \in F$. Portanto, em vista do Exercício 2.1.65, segue que F é compacto[‡]. □

Exercício 3.1.12 $(^{\star}_{\star})$**.** Mostre que $(\varphi)^{\uparrow} = (\varphi|_{A^{\uparrow}})^{\uparrow}$ para qualquer $A \in \operatorname{dom}(\varphi)$. Em particular, $\varphi \to x$ em X sse $\varphi|_{A^{\uparrow}} \to x$ em X. Moral da história: para propósitos de convergência, só os rabos importam[††]. ■

Demonstração da Proposição 3.1.8 (via redes). Com as mesmas notações do enunciado, e tendo em vista o que se discutiu ao longo da Subseção 2.1.2 §1, basta mostrar que se φ é uma rede em K tal que $\varphi \to x$ em X, então $x \in K$ (por que basta isso?)$^{\star}_{\star}$. Ora, pela compacidade de K, φ admite sub-rede $\psi \in \mathsf{Net}(K)$ tal que $\psi \to y$ em K para algum $y \in K$. Por outro lado, por ψ ser sub-rede de φ, também ocorre $\psi \to x$ em X (cf. Exercício 3.1.10). Assim, temos $\psi \to x$ e, pelo Exercício 2.1.65, $\psi \to y$. Finalmente, por X ser de Hausdorff, conclui-se que $x = y$ e, portanto, $x \in K$. □

Demonstração da Proposição 3.1.9 (via redes). Com as hipóteses da proposição, devemos mostrar que se φ é rede em Y, então φ admite sub-rede convergente. Ora, por f ser sobrejetora, para cada $a \in \operatorname{dom}(\varphi)$ existe $x_a \in X$ tal que $f(x_a) = \varphi(a)$, de modo que a correspondência $a \mapsto x_a$ define uma rede $\Phi\colon \operatorname{dom}(\varphi) \to X$ que satisfaz $f \circ \Phi = \varphi$. Por X ser compacto, Φ admite sub-rede convergente, digamos $\psi \in \mathsf{Net}(X)$ com $\psi \to x$ para algum $x \in X$, donde a continuidade de f assegura $f \circ \psi \to f(x)$. Para encerrar, basta notar que $f \circ \psi$ é sub-rede de $f \circ \Phi = \varphi$: dado $A \in \operatorname{dom}(\varphi)$, existe $B \in \operatorname{dom}(\psi)$ tal que $\psi\left[B^{\uparrow}\right] \subseteq \Phi\left[A^{\uparrow}\right]$, acarretando

$$(f \circ \psi)\left[B^{\uparrow}\right] = f\left[\psi\left[B^{\uparrow}\right]\right] \subseteq f\left[\Phi\left[A^{\uparrow}\right]\right] = \{f(x_a) : a \succeq A\} = \{y_a : a \succeq A\},$$

como desejado. □

Exercício 3.1.13 $(\star^4)$**.** Supondo que toda rede em X admita sub-rede convergente, prove que $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ é fechada para qualquer espaço Y. Observação: para ter alguma graça, você não pode usar outras caracterizações de compacidade. Dica: para ter uma primeira ideia do que fazer, finja que redes e sub-redes possam ser substituídas por sequências e subsequências. ■

3.1.2 O Teorema de Tychonoff: algumas demonstrações

Possivelmente um dos resultados mais importantes da Topologia Geral clássica, o Teorema de Tychonoff generaliza o Corolário 3.1.20 retirando a hipótese de que o conjunto de índices $\mathcal{I}$ seja finito. Explicitamente:

[†]Em particular, note que $B^{\uparrow}$ é conjunto dirigido pela ordem herdada de $\operatorname{dom}(\psi)$. Isto vale, mais geralmente, para qualquer subconjunto *cofinal* de um conjunto dirigido (entendeu?)$^{\star}_{\star}$.

[‡]Por que o Exercício 2.1.65 foi necessário?$^{\star}_{\star}$

[††]Você já viu isso em Análise na Reta: "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p sse $(x_n)_{n\geq k}$ converge para p". Trata-se de uma instância do fenômeno explorado no Exercício 3.1.12 (percebeu?)*.

Teorema 3.1.36 (Tychonoff)**.** *Se X_i é espaço compacto para cada $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ é compacto.*

Dado que a topologia produto é a manifestação topológica da *convergência pontual*, você já deve imaginar que o Teorema de Tychonoff terá implicações/aplicações no estudo de compacidade em espaços de funções. Apesar de ser apenas a ponta do *iceberg*[†], nada disso será discutido <u>nesta</u> subseção. Por ora, só exploraremos *algumas* demonstrações do teorema[‡]:

- as duas primeiras se valem da caracterização de compacidade em termos de coberturas abertas, e estão aqui, dentro outros motivos, para evitar protestos;
- a terceira utiliza a caracterização de compacidade via projeções fechadas, onde o Lema de Zorn será usado para esconder uma passagem que, tradicionalmente, usa *recursão transfinita*;
- a quarta usa a caracterização fulminante de compacidade em termos de ultrafiltros convergentes[††];
- a última demonstração, minha favorita atualmente, esconde os ultrafiltros do argumento anterior por meio de ultrarredes de um jeito bem pouco óbvio — mas quase simples.

Porém, cabe um alerta antes que a jornada se inicie: em todas as provas que veremos, alguma forma do Axioma da Escolha estará presente. E não adianta reclamar:

Teorema 3.1.37 (Kelley)**.** (Em ZF)[‡‡] *Se o produto arbitrário de espaços compactos é compacto, então vale o Axioma da Escolha.*

Demonstração. Dada uma família não vazia $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de conjuntos não vazios, busca-se mostrar que $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \neq \emptyset$. Para isso, tomemos $p \notin \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e, para cada $i \in \mathcal{I}$, façamos $Y_i := X_i \cup \{p\}$ munido da *topologia compacta*[†‡] $\mathcal{T}_i := \{Y_i, \{p\}, \emptyset\}$. Por hipótese, o espaço $Y := \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$ é compacto. Como a projeção $\pi_i : Y \to Y_i$ é contínua e $X_i \subsetneq Y_i$ é fechado para cada i (certo?)*, segue que $F_i := \pi_i^{-1}[X_i]$ é fechado em Y. Agora, mostraremos que $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i \neq \emptyset$, o que encerra a prova, posto que $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ (certo?)*.

Como cada F_i é fechado em Y e este é compacto, basta provar que a família de fechados $\mathcal{F} := \{F_i : i \in \mathcal{I}\}$ tem a p.i.f. (cf. Observação 3.1.15, item (ii)). É justamente neste ponto da prova que a importância da escolha de p se revela: dado um subconjunto *finito* $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, pode-se escolher $x_j \in X_j$ para cada $j \in \mathcal{J}$ sem apelar para o Axioma da Escolha, posto que $\mathcal{J}$ é finito. Daí, define-se $f \in Y$ fazendo

$$f(i) := \begin{cases} x_i, & \text{se } i \in \mathcal{J} \\ p, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

resultando em $f \in \bigcap_{i\in\mathcal{J}} F_i$ (percebeu?)*. □

[†]As aplicações do Teorema de Tychonoff vão muito além da ANÁLISE.

[‡]Sim, há muitas outras.

[††]Tenho essa demonstração numa caneca!

[‡‡]Isto significa que o Axioma da Escolha (e qualquer uma de suas formulações equivalentes) não pode ser usada na demonstração.

[†‡]A rigor, espaços são compactos, não suas topologias. No entanto, a preguiça aliada à liberdade poética me forçam a usar tal expressão. *Caio Oliveira, desculpe-me, mas eu não presto.*

O teorema acima é útil mesmo para quem não se interessa por Fundamentos: uma vez que o Teorema de Tychonoff é equivalente ao Axioma da Escolha, assumí-lo como verdadeiro (sem demonstração) é tão perigoso quanto assumir o próprio Axioma da Escolha (ou o Lema de Zorn, etc.) sem demonstração. Contudo, eu não recomendo fazer isso, posto que mesmo as demonstrações feias desse teorema são belíssimas.

Lembrete: você não precisa estudar todas as demonstrações a seguir. Mas deveria.

§1 Duas provas via abertos

A primeira prova, adaptada de [42], requer apenas a convenção de uma notação bastante razoável para lidar com produtos arbitrários: para uma $\mathcal{I}$-upla $u \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ e um subconjunto $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, vamos indicar por $u|_{\mathcal{J}}$ a restrição de u aos índices $\mathcal{J}$. Explicitamente, se $u = (u_i)_{i\in\mathcal{I}}$, então $u|_{\mathcal{J}} = (u_i)_{i\in\mathcal{J}}$. Em outras palavras, trata-se apenas da notação usual para restrição de funções aplicada a uplas, que são funções no final das contas.

Demonstração do Teorema de Tychonoff (*via coberturas abertas*). Pelo item (i) da Observação 3.1.15, podemos restringir nossa atenção às famílias de abertos de $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ pertencentes a uma base $\mathcal{B}$ fixada. Por sua vez, em virtude da descrição dos abertos da topologia produto (cf. Definição 2.1.87, pág. 81), podemos tomar $\mathcal{B}$ como a coleção dos abertos da forma $U := \prod_{i\in\mathcal{I}} U(i)$, com $U(i) \subseteq X_i$ aberto para todo $i \in \mathcal{I}$ e $\operatorname{supp}(U) := \{i \in \mathcal{I} : U(i) \neq X_i\}$ finito. Será útil notar que para uma $\mathcal{I}$-upla $z \in X$ e um conjunto U dessa forma se verifica

$$z \in U \Leftrightarrow z_i \in U(i) \text{ para todo } i \in \operatorname{supp}(U). \tag{3.1}$$

Objetivo: procederemos pela contrapositiva, i.e., supondo que existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \neq X$ para qualquer subconjunto finito $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, mostraremos que $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \neq X$.

Com $\mathcal{U}$ como acima, considere

$$\mathbb{P} := \left\{ (u, \mathcal{K}) \;:\; \begin{array}{l} \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \text{ e } u \in \displaystyle\prod_{k\in\mathcal{K}} X_k \text{ tais que para} \\ \text{todo subconjunto finito } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \\ \text{existe } y \in X \setminus \displaystyle\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \text{ com } y|_{\mathcal{K}} = u \end{array} \right\}$$

e note que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ pois $(\emptyset, \emptyset) \in \mathbb{P}$, afinal $y|_{\emptyset} = \emptyset$ para qualquer $y \in X$ (certo?)*. Intuitivamente, $\mathbb{P}$ é a coleção de todas as *testemunhas parciais* do que queremos provar: para *cumprir* o objetivo estabelecido acima, basta obter $(u, \mathcal{K}) \in \mathbb{P}$ com $\mathcal{K} = \mathcal{I}$, pois daí $u \notin V$ para todo $V \in \mathcal{U}$ (por quê?)$^{\overset{\star}{\star}}$. A ideia é apelar para o Lema de Zorn.

Para isso, o primeiro passo é elevar $\mathbb{P}$ ao patamar de ordem parcial. Faremos isso declarando $(u, \mathcal{K}) \preceq (v, \mathcal{L})$ sse $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ e $v|_{\mathcal{K}} = u$. O próximo passo é a condição de cadeia: se $\mathcal{C} := \{(u_\gamma, \mathcal{K}_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ é cadeia em $\mathbb{P}$, então um limitante superior de $\mathcal{C}$ se obtém fazendo $\mathcal{K} := \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{K}_\gamma$ e definindo $u(k) := u_\gamma(k)$ para qualquer $\gamma \in \Gamma$ tal que $k \in \mathcal{K}_\gamma$. Vamos verificar essa afirmação com muita calma.

A *função* u está bem definida pois $\mathcal{C}$ é cadeia (certo?)*. Além disso, trata-se de uma $\mathcal{K}$-upla, i.e., $u \in \prod_{k\in\mathcal{K}} X_k$. Ora, se $k \in \mathcal{K}$, então existe γ com $k \in \mathcal{K}_\gamma$ e $u(k) = u_\gamma(k) \in X_k$. Em particular, é claro que $\mathcal{K}_\gamma \subseteq \mathcal{K}$ e $u|_{\mathcal{K}_\gamma} = u_\gamma$ para todo γ. Resta provar que $(u, \mathcal{K}) \in \mathbb{P}$.

Para isso, considere um subconjunto finito $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Pelo modo como os abertos de $\mathcal{U}$ foram tomados, $S := \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \operatorname{supp}(V)$ é subconjunto finito de $\mathcal{I}$, donde o fato de $\mathcal{C}$ ser cadeia permite obter $\gamma \in \Gamma$ tal que $S \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\gamma$ (entendeu?)$^\star_\star$. Como $(u_\gamma, \mathcal{K}_\gamma) \in \mathbb{P}$, existe $y_\gamma = y \in X \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ tal que $y|_{\mathcal{K}_\gamma} = u_\gamma$. Será importante notar o seguinte:

$$\text{para cada } V \in \mathcal{V} \text{ existe } i \in \operatorname{supp}(V) \text{ tal que } y_i \notin V(i). \tag{3.2}$$

Para concluir que $(u, \mathcal{K}) \in \mathbb{P}$, definimos $y' \in X$ fazendo

$$y'_i := \begin{cases} u(i), & \text{se } i \in \mathcal{K} \\ y_i, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

que satisfaz $y'|_{\mathcal{K}} = u$ por construção e, como veremos, não pertence a $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$.

Por (3.2), para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $i \in \operatorname{supp}(V)$ tal que $y_i \notin V(i)$. Mas de duas, uma: ou $i \in \mathcal{K}$, e daí $i \in \mathcal{K} \cap S \subseteq \mathcal{K}_\gamma$, acarretando $y_i = u_\gamma(i) = u(i) = y'_i$, ou $i \notin \mathcal{K}$, e daí $y_i = y'_i$. Em ambos os casos, obtivemos uma testemunha de que (3.1) não se verifica com $z := y'$ e $U := V$, para qualquer $V \in \mathcal{V}$. Portanto, $(u, \mathcal{K}) \in \mathbb{P}$.

Finalmente, o Lema de Zorn garante a existência de $(v, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}$ maximal, e só precisamos verificar que $\mathcal{L} = \mathcal{I}$. Para tanto, procederemos por ~~desespero~~ absurdo: assumindo $\mathcal{L} \neq \mathcal{I}$, concluiremos que $(v, \mathcal{L}) \notin \mathbb{P}$. Novamente, isto será feito ao longo de várias etapas.

Primeiro, pela suposição acerca de $\mathcal{L}$, existe $k \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{L}$, e escreveremos $\mathcal{K} := \mathcal{L} \cup \{k\}$ para simplificar as notações adiante. Pela maximalidade de $(v, \mathcal{L})$, para cada $p \in X_k$ temos $\big(v^\frown p, \mathcal{K}\big) \notin \mathbb{P}$, onde $v^\frown p$ é a $\mathcal{K}$-upla em $\prod_{i \in \mathcal{K}} X_i$ dada por

$$v^\frown p\,(i) := \begin{cases} v_i, & \text{se } i \in \mathcal{L} \\ p, & \text{se } i = k \end{cases} \quad \text{(entendeu?)}^\star;$$

note que $\big(v^\frown p, \mathcal{K}\big) \notin \mathbb{P}$ expressa a existência de um subconjunto finito $\mathcal{V}_p \subseteq \mathcal{U}$ tal que todo $y \in X$ satisfazendo $y|_{\mathcal{K}} = v^\frown p$ deve pertencer a $\bigcup_{V \in \mathcal{V}_p} V$. Em particular, o subconjunto $\mathcal{V}'_p := \{V \in \mathcal{V}_p : p \in V(k)\}$ é não vazio (e finito!) pois para qualquer *extensão* $y \in X$ de $v^\frown p$ existe $V \in \mathcal{V}_p$ com $y \in V$, acarretando $p = v^\frown p(k) = y_k \in V(k)$.

Agora, para cada $p \in X_k$, o conjunto $W_p := \bigcap_{V \in \mathcal{V}'_p} V(k)$ é uma interseção finita de abertos satisfazendo $p \in W_p$. Daí, por X_k ser compacto[†], existe um subconjunto finito $F \subseteq X_k$ tal que $X_k = \bigcup_{p \in F} W_p$. Consequentemente, $\mathcal{W} := \bigcup_{p \in F} \mathcal{V}'_p$ é um subconjunto finito de $\mathcal{U}$, que mostraremos ser testemunha de que $(v, \mathcal{L}) \notin \mathbb{P}$.

Para $y \in X$ satisfazendo $y|_{\mathcal{L}} = v$, existe $p \in F$ tal que $y_k \in W_p$. Assim, podemos definir $y' \in X$ fazendo

$$y'_i := \begin{cases} y_i, & \text{se } i \neq k \\ p, & \text{se } i = k \end{cases},$$

pois daí $y'|_{\mathcal{K}} = v^\frown p$, donde segue que existe $V \in \mathcal{V}'_p$ com $y' \in V$ (por quê?)*. Isto significa que $y'_i \in V(i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$, e disto segue que $y \in V$: para $i \neq k$, temos $y_i = y'_i \in V(i)$ e, para $i = k$, $y_k \in W_p \subseteq V(k)$ pois $V \in \mathcal{V}'_p$. Portanto, $y \in \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$. □

Foi uma prova longa, sem dúvidas. Ela tem a vantagem de não depender de conceitos *pouco tradicionais*, o que pode ser útil para quem está em contextos que proíbem o uso de tecnologias mais práticas. Do meu ponto de vista, esta também é a grande desvantagem da prova, mas não discutirei questões religiosas ~~agora~~.

[†] Até agora a hipótese de compacidade não havia sido mencionada!

A segunda demonstração recorrerá a um lema técnico que consiste em estender o item (i) da Observação 3.1.15 para sub-bases (relembre a definição na página 79).

Lema 3.1.38 (da Sub-base de Alexander)**.** *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma sub-base para a topologia de X. Se toda cobertura por abertos de X composta por elementos de $\mathcal{B}$ tem subcobertura finita, então X é compacto.*

Demonstração (sem filtros). Assumindo que $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta de X sem subcobertura finita, a família

$$\mathbb{P} := \left\{ \mathcal{U} \ : \begin{array}{c} \mathcal{U} \text{ é cobertura aberta de } X, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{U} \\ \text{e } \mathcal{U} \text{ não admite subcobertura finita} \end{array} \right\}$$

é não vazia (pois $\mathcal{C} \in \mathbb{P}$), parcialmente ordenada pela inclusão e tal que toda cadeia tem limitante superior (certo?)$\overset{\star}{\star}$. Logo, substituindo $\mathcal{C}$ por algum elemento maximal de $\mathbb{P}$ se necessário, podemos supor, adicionalmente, que $\mathcal{C}$ é maximal com respeito a inclusão.

Pelas hipóteses sobre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, segue que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ não é uma cobertura para X (se fosse, aconteceria o quê?)*. Logo, existe pelo menos um ponto x em $X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}} D$.

Katzensprung: existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$.

Parece banal, mas por conta disso, existe uma família finita de abertos $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ com $x \in \bigcap_{B' \in \mathcal{B}'} B' \subseteq U$. Pela forma como se tomou x, nenhum membro de $\mathcal{B}'$ pode pertencer a $\mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{C} \cup \{B'\} \notin \mathbb{P}$ para cada $B' \in \mathcal{B}'$ (percebeu?)*. Logo, existe subcoleção finita $\mathcal{C}_{B'} \subseteq \mathcal{C}$ com $X = B' \cup \bigcup_{C \in \mathcal{C}_{B'}} C$. Por fim, note que $\{C : C \in \mathcal{C}_{B'} \text{ e } B' \in \mathcal{B}'\} \cup \{U\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{C}$ (por quê?!)$\overset{\star}{\star}$, contrariando o modo como $\mathcal{C}$ foi tomada. □

Demonstração (via ultrafiltros). Utilizaremos a contrapositiva da caracterização de compacidade via ultrafiltros. Se X não é compacto, então existe um ultrafiltro $\mathfrak{u}$ em X com $\lim \mathfrak{u} = \emptyset$. Logo, pelo Corolário 2.2.18, a família $\mathcal{U} := \{B \in \mathcal{B} : X \setminus B \in \mathfrak{u}\}$ é cobertura aberta de X. *Por sorte*, $\mathcal{U}$ não tem subcobertura finita: se $n \in \mathbb{N}$ e $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ são tais que $X \setminus B_i \in \mathfrak{u}$ para cada i, então $\bigcap_{i \leq n} X \setminus B_i \in \mathfrak{u}$, mostrando que $\bigcap_{i \leq n} X \setminus B_i \neq \emptyset$ e, consequentemente, $\bigcup_{i \leq n} B_i \neq X$. □

Demonstração do Teorema de Tychonoff (via sub-bases). Como na última demonstração do Teorema de Tychonoff, ainda consideraremos X_i compacto para cada $i \in \mathcal{I}$ com $X := \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$. Como sub-base $\mathcal{B}$, tomaremos a sub-base “canônica” de X por abertos da forma $\pi_i^{-1}[V]$, com $V \subseteq X_i$ aberto e $i \in \mathcal{I}$ (é sub-base, certo?)*. Pelo Lema de Alexander, basta mostrar que qualquer cobertura $\mathcal{U}$ por abertos de X composta por elementos de $\mathcal{B}$ tem subcobertura finita.

Chamando $\mathcal{U}_i := \left\{V \subseteq X_i : \pi_i^{-1}[V] \in \mathcal{U}\right\}$ para cada $i \in \mathcal{I}$, provaremos que a família $\mathcal{U}_j$ é uma cobertura aberta de X_j, para algum $j \in \mathcal{I}$. É claro que $\mathcal{U}_i$ é família de abertos de X_i (certo?)$\overset{\star}{\star}{}^\star$. Agora, se $\mathcal{U}_i$ não cobre X_i para todo $i \in \mathcal{I}$, então é possível *escolher*[†] $x_i \notin \bigcup_{V \in \mathcal{U}_i} V$. No entanto, disto segue que $x := (x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ não é *coberto* por membros de $\mathcal{U}$: se $x \in U$ para algum $U \in \mathcal{U}$, então temos $U = \pi_i^{-1}[V]$ para algum $i \in \mathcal{I}$ e $V \subseteq X_i$ aberto (pelo modo como tomamos $\mathcal{B}$!), acarretando $x_i \in V$ com $V \in \mathcal{U}_i$. Portanto, existe algum $j \in \mathcal{I}$ tal que $\mathcal{U}_j$ recobre X_j. Pela compacidade de X_j, existem $V_0, \ldots, V_n \in \mathcal{U}_j$ tais que $X_j = \bigcup_{l \leq n} V_l$, donde se conclui que $\left\{\pi_j^{-1}[V_l] : 0 \leq l \leq n\right\}$ é subcobertura finita de $\mathcal{U}$: dado $y \in X$ qualquer, $y_j \in V_l$ para algum $l \leq n$, e daí $y \in \pi_j^{-1}[V_l]$. □

[†] O Axioma da Escolha está escondido aqui.

Menos da metade do comprimento da primeira prova, com a vantagem de trazer um resultado a mais: agora, sabemos que a condição de compacidade pode ser verificada por abertos de uma sub-base marota qualquer[†]. É uma novidade sutil que pode não ser útil *sempre*, sem dúvidas, mas ela tem mais aplicações.

Teorema 3.1.39. *Dada uma ordem total* $(\mathbb{T}, \leq)$*, são equivalentes:*

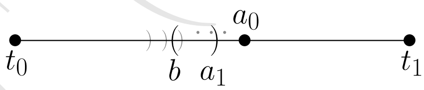
(i) *todo subconjunto de* $\mathbb{T}$ *tem supremo (em* $\mathbb{T}$*);*

(ii) $\mathbb{T}$ *é compacto com a topologia da ordem.*

Demonstração. Pelo Lema de Alexander, a fim de concluir que $\mathbb{T}$ é compacto, basta mostrar que toda cobertura aberta de $\mathbb{T}$ composta por abertos pertencentes a *uma* sub-base $\mathcal{B}$ fixada admite subcobertura finita. A grande jogada está na escolha da sub-base: tomaremos $\mathcal{B}$ como no Exemplo 2.1.41, a família dos intervalos da forma $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ para $a, b \in \mathbb{T}$.

Agora, dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $\mathbb{T}$ composta por abertos de $\mathcal{B}$, há dois pontos muito especiais que devem ser recobertos: $t_0 := \sup \emptyset$ e $t_1 := \sup \mathbb{T}$. Note que como todo $t \in \mathbb{T}$ é limitante superior de $\emptyset$ (por vacuidade), tem-se $t_0 = \min \mathbb{T}$, enquanto $t_1 = \max \mathbb{T}$. Disso resulta que os abertos de $\mathcal{U}$ são da forma $[t_0, a)$ e $(b, t_1]$ (cf. Exemplo 1.2.19).

Consideremos então o conjunto $A := \{a \in \mathbb{T} : [t_0, a) \in \mathcal{U}\}$, não vazio pois existe pelo menos um $U \in \mathcal{U}$ com $t_0 \in U$, e tomemos $a_0 := \sup A$. Novamente, existe $V \in \mathcal{U}$ com $a_0 \in V$, e não pode ocorrer $V = [t_0, a)$ para algum a, pois isso contradiz a escolha de a_0 como supremo de A. Logo, existe $b \in \mathbb{T}$ com $(b, t_1] \in \mathcal{U}$ e $a_0 \in (b, t_1]$, acarretando $b < a_0$. Mais uma vez, pelo modo como se tomou a_0, b não é limitante superior de A e, portanto, existe $a_1 \in A$ com $b < a_1 \leq a_0$. Consequentemente, $b \in [t_0, a_1)$. Note, por fim, que $\mathbb{T} = [t_0, a_1) \cup (b, t_1]$: se $t \not< a_1$, então a totalidade da ordem assegura que $a_1 \leq t$, e daí $b < a_1 \leq t$. Se parecer confuso, encare a próxima figura até que ela te encare de volta.



A recíproca será feita por contraposição. Para isso, supondo a existência de $A \subseteq \mathbb{T}$ sem supremo, ficará por sua conta ($\star$) verificar que:

- se $A = \emptyset$, então a inexistência de $\sup \emptyset$ garante que $\{(t, +\infty) : t \in \mathbb{T}\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita;
- se $A \neq \emptyset$ não tem limitante superior, então $\{(-\infty, a) : a \in A\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita;
- se $A \neq \emptyset$ é limitado superiormente, então a inexistência de $\sup A$ garante que $\{(-\infty, a) : a \in A\} \cup \{(b, +\infty) : b \in B\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita, onde $B := \{b \in \mathbb{T} : a \leq b \text{ para todo } a \in A\}$.

Em todos os casos, a inexistência de $\sup A$ garantiu a existência de uma cobertura aberta de $\mathbb{T}$ sem subcobertura finita, mostrando assim que $\mathbb{T}$ não é compacto. $\square$

[†]Precisar saber o que é sub-base pode ser uma desvantagem a depender da situação, mas este é um problema que não é meu.

O teorema anterior generaliza o Exemplo 3.1.6, já que *qualquer* subconjunto de um intervalo real $[a,b]$ tem supremo: os subconjuntos não vazios já tem supremo em $[a,b]$ pela *completude* de $\mathbb{R}$ e pela limitação de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, enquanto $\sup\emptyset$ em $[a,b]$ é a. Porém, note que a ausência de restrição sobre quais subconjuntos admitem supremo é fundamental para a compacidade da ordem: em $\mathbb{R}$, apenas os subconjuntos limitados superiormente e não vazios têm supremo e, consequentemente, a reta não é compacta. Por outro lado, ao adicionarmos os pontos $-\infty$ e $+\infty$ à reta, o resultado, $\overline{\mathbb{R}}$, é compacto (por quê?)$^{\star}_{\star}$.

§2 Uma prova com projeções

A próxima prova foi inserida neste texto por questões éticas: a caracterização de compacidade via projeções fechadas (cf. Teorema 3.1.17) forneceu um argumento tão limpo para a versão finita do Teorema de Tychonoff (cf. Corolário 3.1.20) que seria imoral não investir algum tempo em sua generalização. Por sorte, Maria Clementino e Walter Tholen [15] já tiveram o trabalho de apresentar o argumento para o mundo — coube a mim apenas o dever ~~imoral~~ *cívico* de omitir a recursão transfinita por meio do Lema de Zorn.

Demonstração do Teorema de Tychonoff (via projeções fechadas). Como nas provas anteriores, X_i será considerado um espaço compacto para cada $i \in \mathcal{I}$. Porém, desta vez também será conveniente escrever $X_{\mathcal{J}} := \prod_{j\in\mathcal{J}} X_j$ para cada $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.

Pelo Teorema 3.1.17, a fim de concluir que $X_{\mathcal{I}}$ é compacto, basta mostrar que a projeção $\pi_Y \colon X_{\mathcal{I}} \times Y \to Y$ é fechada, para qualquer espaço Y fixado. Assim, para um subconjunto fechado $F \subseteq X_{\mathcal{I}} \times Y$ e um ponto $y \in \overline{\pi_Y[F]}$, busca-se uma $\mathcal{I}$-upla $x \in X_{\mathcal{I}}$ tal que $(x,y) \in F$. Da arbitrariedade do ponto y tomado, resultará $\overline{\pi_Y[F]} \subseteq \pi_Y[F]$, mostrando que $\pi_Y[F]$ é fechado.

Para simplificar as notações a seguir, seja $* \notin \mathcal{I}$, considere $X_* := Y$ e, para cada $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, vamos escrever $\mathcal{J}^* := \mathcal{J} \cup \{*\}$. Além disso, para $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}^*$ com $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$, vamos indicar por $\pi^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}$ a projeção $X_{\mathcal{K}} \to X_{\mathcal{L}}$, que a cada $\mathcal{K}$-upla $z \in X_{\mathcal{K}}$ associa a restrição $z|_{\mathcal{L}}$. Assim, por exemplo, temos $X_{\mathcal{I}} \times Y = X_{\mathcal{I}^*}$ e $\pi_Y = \pi^{\mathcal{I}^*}_*$ (se achar essas igualdades estranhas, *retorne* para a Subseção 2.2.1).

Para $F \subseteq X_{\mathcal{I}^*}$ e $y \in \overline{\pi_Y[F]}$ como acima, definimos

$$\mathbb{P} := \left\{(\mathcal{J}, z) : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \text{ e } z \in \overline{\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{J}^*}[F]} \text{ e } \pi_Y(z) = z(*) = y\right\},$$

parcialmente ordenado pela relação $\preceq$ em que $(\mathcal{J}, z) \preceq (\mathcal{J}', z')$ sse $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ e $z'|_{\mathcal{J}} = z$.

Temos $\mathbb{P} \neq \emptyset$ pois $(\emptyset, y) \in \mathbb{P}$ (entendeu?)*. Vamos mostrar que se $(\mathcal{J}, z) \in \mathbb{P}$ for um elemento maximal de $\mathbb{P}$, então $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ e $z \in F$. De fato, se $\mathcal{J} \neq \mathcal{I}$, então existe $k \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$, o que permite definir $\mathcal{K} := \mathcal{J} \cup \{k\}$ e a projeção $X_k \times X_{\mathcal{J}^*} \to X_{\mathcal{J}^*}$ dada pela correspondência $(p,u) \mapsto u$ que, com as notações anteriores, é a função $\pi^{\mathcal{K}^*}_{\mathcal{J}^*}$.

Katzensprung: note (!)* que vale a identidade $\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{J}^*} = \pi^{\mathcal{K}^*}_{\mathcal{J}^*} \circ \pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{K}^*}$, pois $\mathcal{J}^* \subseteq \mathcal{K}^* \subseteq \mathcal{I}^*$.

Enfim, por X_k ser compacto, $\pi^{\mathcal{K}^*}_{\mathcal{J}^*}$ é fechada, de modo que por valer $(\mathcal{J}, z) \in \mathbb{P}$ obtemos

$$z \in \overline{\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{J}^*}[F]} = \overline{\pi^{\mathcal{K}^*}_{\mathcal{J}^*}[\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{K}^*}[F]]} = \pi^{\mathcal{K}^*}_{\mathcal{J}^*}\left[\overline{\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{K}^*}[F]}\right],$$

onde as igualdades se devem ao Katzensprung e à Afirmação 3.1.18. Logo, existe z' com $z' \in \overline{\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{K}^*}[F]}$ tal que $z'|_{\mathcal{J}^*} = z$, ou seja, $(\mathcal{K}, z') \in \mathbb{P}$ e $(\mathcal{J}, z) \prec (\mathcal{K}, z')$, contrariando a maximalidade. Portanto, $\mathcal{K} = \mathcal{I}$ e $z \in \overline{\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{I}^*}[F]} = \overline{F} = F$, como desejado.

Assim, para encerrar a demonstração, basta provar que $\mathbb{P}$ tem elemento maximal, o que será feito... pelo Lema de Zorn! Diante de tudo o que discutimos, basta mostrar que se $\mathcal{C} := \{(\mathcal{J}_\lambda, z_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ é cadeia em $\mathbb{P}$, então $\mathcal{C}$ tem limitante superior. Mais uma vez, o candidato natural a limitante superior é $(\mathcal{J}, z)$, com $\mathcal{J} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{J}_\lambda$ e $z_j := z_\lambda(j)$ para qualquer $\lambda \in \Lambda$ com $j \in \mathcal{J}_\lambda$. Nessa altura do campeonato já não deve ser problema para você mostrar que $z \in X_{\mathcal{K}^*}$, $z(*) = y$, $\mathcal{K}_\lambda \subseteq \mathcal{K}$ e $z|_{\mathcal{J}_\lambda} = z_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Resta apenas verificar que $z \in \overline{\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{J}^*}[F]}$, pois daí $(\mathcal{J}, z) \in \mathbb{P}$ será limitante superior de $\mathcal{C}$.

Para um aberto básico $V := \prod_{i\in\mathcal{J}^*} V_i \subseteq X_{\mathcal{J}^*}$ tal que $z \in V$, temos $z_i \in V_i$ para todo $i \in \operatorname{supp}(V) \subseteq \mathcal{J}^*$. Por Λ ser cadeia e $\operatorname{supp}(V)$ ser finito, existe $\lambda \in \Lambda$ com $\operatorname{supp}(V) \subseteq \mathcal{J}_\lambda \cup \{*\}$ (certo?)*. Consequentemente, $V_{\mathcal{J}^*_\lambda} := \prod_{j\in\mathcal{J}^*_\lambda} V_j$ é um aberto básico de $X_{\mathcal{J}^*_\lambda}$ em torno de $z|_{\mathcal{J}^*_\lambda} = z_\lambda$, que por hipótese pertence a $\overline{\pi^{\mathcal{I}^*}_{\mathcal{J}^*_\lambda}[F]}$. Logo, existe $u \in F$ tal que $u|_{\mathcal{J}^*_\lambda} \in V_{\mathcal{J}^*_\lambda}$ (por quê?)*, o que significa $u_i \in V_i$ para todo $i \in \operatorname{supp}\left(V_{\mathcal{J}^*_\lambda}\right) = \operatorname{supp}(V)$. Portanto, $u|_{\mathcal{J}^*} \in V$, como queríamos. □

§3 A demonstração com ultrafiltros

A penúltima prova é uma das mais rápidas — pelo menos quando se explicitam os ultrafiltros convergentes dela[†]. Precisamos apenas de um lema bobo.

Lema 3.1.40. *Se $f\colon A \to B$ é sobrejetora e $\mathfrak{u}$ é ultrafiltro em A, então $f(\mathfrak{u})$ é ultrafiltro em B.*

Demonstração. Dado um filtro $\mathcal{G}$ em B com $f(\mathfrak{u}) \subsetneq \mathcal{G}$, devemos mostrar que $\mathcal{G}$ não é próprio, i.e., $\emptyset \in \mathcal{G}$. Ora, por hipótese existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \notin f(\mathfrak{u})$, o que significa $f^{-1}[G] \notin \mathfrak{u}$ (cf. Exercício 2.1.9). Consequentemente, $\mathcal{H} := \mathfrak{u} \cup \{A \setminus f^{-1}[G]\}$ tem a p.i.f. (certo?)* e, pelo Lema do Ultrafiltro (cf. Afirmação 3.1.26), existe ultrafiltro $\mathfrak{v}$ em A com $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{v}$, donde a maximalidade de $\mathfrak{u}$ acarreta $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$. Assim, $B \setminus G \in f(\mathfrak{u})$ (pois $f^{-1}[B \setminus G] = A \setminus f^{-1}[G]$, certo?)* e, portanto, $\emptyset = (B \setminus G) \cap G \in \mathcal{G}$. □

Demonstração do Teorema de Tychonoff (via ultrafiltros). Com as mesmas notações das demonstrações anteriores, mostraremos que se $\mathfrak{u}$ é ultrafiltro em $X := \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, então $\mathfrak{u}$ converge. Ora, pelo lema anterior, $\pi_i(\mathfrak{u})$ é ultrafiltro no espaço compacto X_i. Logo, *podemos escolher* $x_i \in X_i$ tal que $\pi_i(\mathfrak{u}) \to x_i$, de modo que $x := (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in X$ é tal que $\mathfrak{u} \to x$ (cf. Exercício 2.1.43). □

§4 Uma prova com redes

É possível repaginar a última demonstração por meio de ultrarredes. Mas no lugar de um lema bobinho sobre filtros, precisamos de um lema menos bobo sobre redes.

Lema 3.1.41. *Seja $f\colon A \to B$ uma função. Se $\psi \in \mathsf{Net}(B)$ é sub-rede de $f \circ \varphi$ para alguma rede $\varphi \in \mathsf{Net}(A)$, então φ admite uma sub-rede η tal que $f \circ \eta$ é sub-rede de ψ.*

Antes de provar o lema, pode ser psicologicamente reconfortante observar que ele se torna uma trivialidade se redes e sub-redes forem trocadas por sequências e subsequências, respectivamente (como na próxima figura).

[†]Ela se torna horrível quando os aparatos de convergência são escondidos. Se quiser ter uma ideia disso, confira a prova para o Teorema de Tychonoff apresentada no clássico de Munkres [30].

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "\psi"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.3: Se $(\psi_n)_n = \left(f(\varphi_{\rho(k)})\right)_k$, então $(\eta_k)_k := \left(\varphi_{\rho(k)}\right)_k$ é subsequência de $(\varphi_n)_n$ tal que $f \circ \eta = \psi$.

Demonstração. O diagrama a seguir esquematiza a ideia da prova.

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{dom}(\varphi) \arrow[r, "\varphi"] & A \arrow[dd, "f"] \\
 & \operatorname{dom}(\varphi) \times \operatorname{dom}(\psi) \arrow[u, "\pi_\varphi"'] \arrow[d, "\pi_\psi"] & \\
\mathbb{E} \arrow[uur, bend left, "\rho"] \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, bend right, "\widetilde{\psi}"'] & \operatorname{dom}(\psi) \arrow[r, "\psi"] & B
\end{tikzcd}
$$

Explicitamente, definimos $\mathbb{E} := \{(\alpha, \beta) \in \operatorname{dom}(\varphi) \times \operatorname{dom}(\psi) : f(\varphi(\alpha)) = \psi(\beta)\}$, um subconjunto cofinal do conjunto dirigido $\operatorname{dom}(\varphi) \times \operatorname{dom}(\psi)$, o que em particular assegura que $\mathbb{E}$ é conjunto dirigido[†]. De fato, para $(a, b) \in \operatorname{dom}(\varphi) \times \operatorname{dom}(\psi)$, existe $b_0 \in \operatorname{dom}(\psi)$ tal que $\psi\left[b_0^{\uparrow}\right] \subseteq f\left[\varphi\left[a^{\uparrow}\right]\right]$ pois ψ é sub-rede de $f \circ \varphi$. Logo, escolhendo $\beta \succeq b, b_0$, existe $\alpha \succeq a$ tal que $\psi(\beta) = f(\varphi(\alpha))$, com $(a, b) \preceq (\alpha, \beta)$.

Do que se observou acima, resulta que a inclusão $i \colon \mathbb{E} \to \operatorname{dom}(\varphi) \times \operatorname{dom}(\psi)$ é crescente e cofinal. Como o mesmo pode ser dito das projeções, obtemos uma função $\rho := \pi_\varphi \circ i$ crescente e cofinal, atestando que $\eta := \varphi \circ \rho$ é W-sub-rede de φ (cf. Exemplo 3.1.31) e tal que $f \circ \eta$ é sub-rede de $\widetilde{\psi} := \psi \circ \pi_\psi \circ i$. Para encerrar, basta notar que $\widetilde{\psi}$ também é W-sub-rede[‡] de ψ. $\square$

Corolário 3.1.42. *Se $f \colon A \to B$ é sobrejetora e $\varphi \in \mathsf{Net}(A)$ é ultrarrede, então $f \circ \varphi$ é ultrarrede em B.*

Demonstração. Pela Afirmação 3.1.34, basta mostrar que se ψ é sub-rede de $f \circ \varphi$, então $f \circ \varphi$ é sub-rede de ψ. Ora, pelo lema anterior, φ admite sub-rede η tal que $f \circ \eta$ é sub-rede de ψ. No entanto, como φ é ultrarrede, resulta que φ é sub-rede de η e, portanto, $f \circ \varphi$ é sub-rede de $f \circ \eta$ (certo?)[††]. Por *transitividade*, resulta que $f \circ \varphi$ é sub-rede de ψ. $\square$

Demonstração do Teorema de Tychonoff (via ultrarredes). Com as mesmas notações das demonstrações anteriores, mostraremos que se φ é ultrarrede em $X := \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, então φ converge. Pelo corolário anterior, $\pi_i \circ \varphi$ é ultrarrede no espaço compacto X_i. Logo, *podemos escolher* $x_i \in X_i$ tal que $\pi_i \circ \varphi \to x_i$, de modo que $x := (x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in X$ é tal que $\varphi \to x$ (cf. Observação 2.1.88). $\square$

[†]Confira a nota de rodapé † na página 165.

[‡]Você percebeu que, na verdade, vale $\left(\widetilde{\psi}\right)^{\uparrow} = (\psi)^{\uparrow}$?

[††]Você já viu esse argumento na demonstração via redes da Proposição 3.1.9, pág. 165.

3.1.3 Compacidade em espaços métricos

Enquanto a subseção anterior trouxe várias manifestações equivalentes de compacidade, nesta subseção encontraremos variações realmente distintas dessa propriedade, mas que em virtude do bom comportamento das métricas acabam por significar a mesma coisa no reino dos ε's e δ's.

§1 As caracterizações tradicionais

Quem enfrentou a Subseção 3.1.1 §4 e tem alguma bagagem de ANÁLISE REAL deve ter se lembrado do *Teorema de Bolzano-Weierstrass*†, que costuma ser usado nos cursos de ANÁLISE para, entre muitas outras coisas, caracterizar os compactos da reta como aqueles em que *toda sequência tem subsequência convergente.*

Definição 3.1.43. Dizemos que um espaço topológico é **sequencialmente compacto** se toda sequência admite subsequência que converge no espaço. ¶

Sabe por que essa propriedade não apareceu entre as caracterizações gerais de compacidade?

Exemplo 3.1.44 (Compacidade sequencial $\not\Rightarrow$ compacidade)**.** Os exemplos mais conhecidos dependem de ω_1, *a.k.a.* o *primeiro ordinal não enumerável*‡. Dada uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ordinais em $[0,\omega_1)$, tem-se $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n < \omega_1$ (cf. Lema 1.2.32) e, por conseguinte, existe uma subsequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para $\alpha \in [0,\omega_1)$ (certo?)$^{\star}_{\star}$. Logo, $[0,\omega_1)$ é sequencialmente compacto. No entanto, $[0,\omega_1)$ não é compacto em virtude do Teorema 3.1.39 (percebeu?)$^{\star}_{\star}$. ▲

Exemplo 3.1.45 (Compacidade $\not\Rightarrow$ compacidade sequencial)**.** Pelo Teorema de Tychonoff, um espaço da forma $X := \mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(\mathcal{I},[0,1])$ é compacto para qualquer conjunto $\mathcal{I}$, posto que $\mathrm{Fun}_{\mathrm{p}}(\mathcal{I},[0,1]) = \prod_{i\in\mathcal{I}}[0,1]$ e $[0,1]$ compacto (entendeu?)††. Veremos que para $\mathcal{I} := \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\{0,1\})$, o espaço X correspondente não é sequencialmente compacto.

Primeiro, note que um habitante típico de X é uma função $\varphi\colon \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\{0,1\}) \to [0,1]$, que associa a cada $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\{0,1\})$ um número real $\varphi(f) \in [0,1]$. Por sua vez, um elemento f de $\mathrm{Fun}(\mathbb{N},\{0,1\})$ é uma sequência de 0's e 1's. Em particular, uma sequência $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em X converge para $\psi \in X$ se, e somente se, $(\psi_m(f))_m \to \psi(f)$ em $[0,1]$ para qualquer sequência $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\{0,1\})$, pois a convergência em X é a *convergência pontual* (cf. Teorema 2.1.93). Prometa que se lembrará disso!

Com isso em mente, vamos considerar a sequência $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em X, em que

$$\begin{aligned}\pi_m\colon \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\{0,1\}) &\to [0,1]\\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto x_m\end{aligned}$$

é a projeção na m-ésima coordenada. Explicitamente, $\pi_m(f) := f(m)$ para cada sequência $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N},\{0,1\})$.

KATZENSPRUNG: para toda subsequência $(\pi_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\pi_m)_m$, existe uma sequência f de 0's e 1's tal que $(\pi_{m_k}(f))_{k\in\mathbb{N}}$ não converge em $[0,1]$.

† *Toda sequência limitada de números reais admite subsequência convergente.*

‡ Para saber mais, confira a Subseção 1.2.2, com ênfase na Proposição 1.2.31 e nos resultados subsequentes.

†† Se precisar de ajuda, confira o Exemplo 2.1.91 que antecede a Definição 2.1.92.

Com efeito, basta definir

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{se } n = m_{2k} \text{ para algum } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{(concorda?)}^{\star}.$$

Por conta do que você prometeu lembrar, segue que $(\pi_m)_m$ não admite subsequências convergentes (percebeu?)$^{\star}_{\star}$. ▲

Apesar de acionarem um sinal de alerta, os exemplos acima não afetam o que você aprendeu sobre compactos na *escola*. Na verdade, para espaços *metrizáveis*, a lista de encarnações de compacidade passa a incluir várias propriedades muito familiares.

Definição 3.1.46. Seja X um espaço topológico.

(i) Diremos que X é **enumeravelmente compacto** se toda cobertura enumerável de X composta por abertos admite subcobertura finita.

(ii) Um ponto $p \in X$ é chamado de **ponto de acumulação** de um subconjunto $S \subseteq X$ se $p \in \overline{S \setminus \{p\}}$. Diremos que X é **limite-compacto** se todo subconjunto infinito de X admitir ponto de acumulação[†]. ¶

Antes de provar a equivalência entre todas as versões introduzidas acima, será útil considerar uma última propriedade atrelada à métrica.

Definição 3.1.47. Diremos que um espaço métrico é **totalmente limitado** (e sua métrica é dita *totalmente limitada*) se toda sequência admitir subsequência de Cauchy. ¶

Observação 3.1.48 (Sobre limitação total)**.** Um espaço métrico *sequencialmente compacto* é, quase automaticamente, completo: como sequências de Cauchy com subsequências convergentes convergem (lembra?)*, a condição de compacidade sequencial força a convergência das sequências de Cauchy. Nesse sentido, o critério de limitação total definido acima busca apenas *resolver*, para espaços métricos, a "equação"

$$\text{“completude”} + ? = \text{“compacidade sequencial”}.$$

Há chances de que você já conheça uma propriedade de mesmo nome mas com formulação diferente (cf. Afirmação 3.1.51), mas não se preocupe: são condições equivalentes (e a verificação será problema seu)$^{\star}_{\star}$. △

Sem mais delongas:

Teorema 3.1.49. *As afirmações a seguir são equivalentes para espaços metrizáveis:*

(i) *o espaço é compacto;*

(ii) *o espaço é enumeravelmente compacto;*

(iii) *o espaço é limite-compacto;*

(iv) *o espaço é sequencialmente compacto;*

(v) *a topologia do espaço é induzida por uma métrica completa e totalmente limitada.*

[†]Cuidado! O ponto de acumulação não precisa pertencer ao subconjunto em questão!

Demonstração. As implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iv) $\Rightarrow$ (v) são automáticas (certo?)*. O trabalho de provar (ii) $\Rightarrow$ (iii) fica bem mais fácil após observarmos três coisas:

(I) *se X é enumeravelmente compacto e $F \subseteq X$ é fechado, então F é enumeravelmente compacto* (compare com a Proposição 3.1.7)$^\star_\star$,

(II) *se D é discreto e infinito, então D não é enumeravelmente compacto* (...?)$^{\star/5}$,

enquanto a terceira merece mais destaque.

⌜**Afirmação 3.1.50.** *Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$. Não existe $p \in X$ que seja ponto de acumulação de S se, e somente se, S é fechado em X e discreto com a topologia de subespaço.*

Prova da Afirmação. Se não há $p \in X$ que seja ponto de acumulação de S, então:

- S é fechado pois, se $p \in X \setminus S$, então existe um subconjunto aberto $V \subseteq X$ em torno de p tal que $V \cap (S \setminus \{p\}) = V \cap S = \emptyset$, i.e., $p \in V \subseteq X \setminus S$, mostrando que $X \setminus S$ é aberto; e

- S é discreto pois, se $p \in S$, então existe um subconjunto aberto $V \subseteq X$ aberto em torno de p tal que $V \cap (S \setminus \{p\}) = \emptyset$, donde segue que $\{p\} = S \cap V$, mostrando que $\{p\}$ é aberto em S com respeito à topologia de subespaço.

A recíproca ficará por sua conta ($^\star_\star$). ⌟

Assim, se X não satisfaz (iii), então existe um subconjunto infinito D, fechado e discreto com a topologia de subespaço, que não pode ser enumeravelmente compacto (por (II)), impedindo que X seja enumeravelmente compacto (por (I)). Portanto, (ii) $\Rightarrow$ (iii) segue pela contrapositiva.

Supondo (iii) para um espaço ~~1º contável e de Hausdorff~~ *metrizável* X, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Temos dois casos.

(A) O subconjunto $S := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito. Neste caso, existe um ponto $x \in X$ com $\{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$ infinito (por quê?)*, de modo que a sequência $(x_n)_n$ admite uma subsequência constante e, portanto, convergente.

(B) O subconjunto S é infinito. Neste caso, S admite ponto de acumulação em X, digamos $p \in X$. Logo, existe $x_{n_0} \in B(p, 1) \setminus \{p\}$. Como $F_0 := \{x_0, \ldots, x_{n_0}\} \setminus \{p\}$ é subconjunto fechado de X (certo?)$^\star_\star$, segue que $B\left(p, \frac{1}{2}\right) \setminus F_0$ é um aberto em torno de p. Consequentemente, existe $x_{n_1} \in B\left(p, \frac{1}{2}\right)$ com $n_1 > n_0$. Procedendo dessa forma, recursivamente, obtém-se uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que converge para p.

Portanto, (iii) $\Rightarrow$ (iv).

A carga dramática fica por conta da implicação (v) $\Rightarrow$ (i), cuja prova é adaptada de Efe Ok [32].

⌜**Afirmação 3.1.51.** *Se X é espaço métrico totalmente limitado, então para todo $r > 0$ existe um subconjunto finito $F_r \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x\in F_r} B[x, r]$.*

Prova da Afirmação. Se não fosse o caso, existiria $r > 0$ tal que $\{B[x, r] : x \in X\}$ não tem subcobertura finita. Em particular, para $x_0 \in X$ fixado, existe $x_1 \in X \setminus B[x_0, r]$, o que dispara a existência de $x_2 \in X \setminus B[x_0, r] \cup B[x_1, r]$, e assim sucessivamente. A sequência $(x_n)_n$ obtida recursivamente desse processo não admite subsequências de Cauchy, já que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ distintos ocorre $d(x_m, x_n) > r$. ⌟

Agora, assumindo (v), suponha que X não seja compacto e fixe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X sem subcobertura finita. Em vista da afirmação anterior, podemos supor que existe um subconjunto finito F_0 tal que $X = \bigcup_{x\in F_0} B[x,1]$. Logo, existe $x_0 \in F_0$ tal que $B_0 := B[x_0,1]$ não admite subcobertura finita por abertos de $\mathcal{U}$: caso contrário, $\mathcal{U}$ teria uma subcobertura finita para X (percebeu?)*. Uma vez que limitação total é uma propriedade *hereditária* para subespaços (por quê?)$^\star_\star$, pode-se repetir o argumento a fim de obter outra bola fechada $B_1 := B\left[x_1, \frac{1}{2}\right] \subseteq B[x_0,1]$ que não admite subcobertura finita por abertos da família $\mathcal{U}$.

Procedendo recursivamente, obtém-se uma sequência decrescente de *fechados* $(B_n)_n$ cujo *diâmetro* converge para 0 (cf. Exercício 1.2.21). Logo, a completude permite conjurar $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, o que leva a uma contradição: como existem $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$ e $r > 0$ com $B(x,r) \subseteq U$, existe $N \in \mathbb{N}$ com $x_N \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ e $\frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}$, acarretando $B_N \subseteq U$ (percebeu?)*, o que contraria a escolha de B_N. Portanto, X é compacto. □

Observação 3.1.52 (Argumentações alternativas)**.** O roteiro anterior presou apenas pela minimalidade. A depender de sua intenção, pode ser interessante explorar outros caminhos.

(i) *Em geral, compacidade sequencial implica compacidade enumerável.* Pela contrapositiva, basta tomar uma cobertura enumerável $\mathcal{U}$ por abertos do espaço X sem subcobertura finita, digamos $\mathcal{U} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, e observar que se $x_n \in X \setminus \bigcup_{j\leq n} U_j$ para cada n, então $(x_n)_n$ não admite subsequência convergente (certo?)$^\star_\star$.

(ii) Como sugerido pelo traçado na última demonstração, *se X é limite-compacto, 1º-contável e todo subconjunto finito de X é fechado, então X é sequencialmente compacto.* Futuramente, a condição sublinhada será chamada de "T_1".

(iii) Para mostrar que espaços métricos sequencialmente compactos são compactos sem mencionar limitação total ou completude, pode-se apelar para separabilidade (cf. Definição 2.1.58):

⌜**Afirmação 3.1.53.** *Espaços métricos sequencialmente compactos são separáveis*[†].

Prova da Afirmação. Para um espaço métrico X com métrica d, considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\mathbb{D}_n := \left\{ D \subseteq X : d(x,y) > \frac{1}{2^n} \text{ para quaisquer } x, y \in D \text{ distintos} \right\},$$

parcialmente ordenado pela inclusão, e que só é vazio se X for vazio. Dado que $\mathbb{D}_n$ satisfaz as condições do Lema de Zorn[‡] (certo?)$^\star_\star$, existe $D_n \in \mathbb{D}_n$ maximal. Por conta disso, o conjunto $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ é denso em X: caso contrário, existiriam $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \cap D = \emptyset$, e daí $D_n \subsetneq D_n \cup \{x\} \in \mathbb{D}_n$, contrariando a maximalidade de D_n. Por fim, note que se D não fosse enumerável, então X não poderia ser sequencialmente compacto: caso contrário, o Princípio da Casa dos Pombos permitiria concluir que algum D_n é não enumerável, e nenhuma sequência *injetiva* de pontos em D_n admite subsequência convergente (certo?)*. ⌟

[†]Futuramente, esse argumento será desnecessário por conta da *condição de Lindelöf*, trivialmente satisfeita por espaços compactos, e equivalente à existência de base enumerável em espaços métricos.

[‡]É possível provar a afirmação sem o Lema de Zorn? Sim. Eu quero? Não.

Para concluir (iii), a condição de separabilidade assegura que o espaço tem base enumerável (cf. Teorema 2.1.75) e, por conseguinte, toda cobertura aberta admite subcobertura enumerável (por quê?)$^{\star}_{\star\star}$. Ao combinar isso com o primeiro item da presente observação, resulta que o espaço é compacto.

(iv) Para finalizar, é divertido provar diretamente que espaços compactos são limite-compactos: ao negar que um subconjunto $S \subseteq X$ tem ponto de acumulação em X, a compacidade permite concluir que o próprio S é finito (por quê?)$^{\star}_{\star\star}$. △

§2 O caso normado e o Lema de Riesz

Nenhuma das caracterizações de compacidade anteriores parece ser tão simples quanto a que nos ensinam na escola: *$K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto sse K é limitado e fechado*. Todavia, há boas razões para essa versão ter sido ignorada até agora.

1. Ao lidar com compacidade em espaços topológicos, deve-se ter em mente que todo espaço é fechado em si mesmo, o que inutiliza tal noção para uma definição global;

2. Analogamente, limitação só faz sentido em espaços métricos ou normados. Contudo, dado que qualquer espaço métrico admite métricas limitadas e que induzem a mesma topologia (certo?)$^{\star}_{\star\star}$, segue que todo espaço métrico não compacto é testemunha de que “fechado + limitado $\not\Rightarrow$ compacto”.

Como toda norma (num espaço vetorial não trivial) é ilimitada, talvez o último truque não funcione para os subconjuntos limitados e fechados de espaços normados, não é mesmo? Não é bem assim. Mas vamos com calma.

Proposição 3.1.54 (Heine-Borel). *Ao considerar $\mathbb{K}^n$ com a norma do máximo, as seguintes afirmações são equivalentes para um subconjunto $C \subseteq \mathbb{K}^n$:*

(i) *C é compacto;*

(ii) *C é fechado em $\mathbb{R}^n$ e limitado.*

Demonstração. A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) decorre das Proposições 3.1.8 (pois espaços normados são de Hausdorff) e 3.1.11. Há várias formas de lidar com a recíproca. Primeiro, com $\mathbb{K} := \mathbb{R}$.

(i) Por C ser limitado na norma do máximo, existe $M > 0$ tal que $|x_i| < M$ para todo $x := (x_1, \ldots, x_n) \in C$, mostrando que $C \subseteq \prod_{i \le n}[0, M] := K$. Posto que K é compacto em $\mathbb{R}^n$ e C é fechado em K, resulta que C é compacto (cf. Proposição 3.1.7).

(ii) Para uma sequência $((x_m(1), \ldots, x_m(n)))_m$ em C, a sequência real $(x_m(1))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada e, portanto, admite subsequência convergente, digamos $(x_{m_k}(1))_{k\in\mathbb{N}}$, o que induz a sequência limitada $(x_{m_k}(2))_{k\in\mathbb{N}}$, que tem subsequência convergente... (conclua)$^{\star}_{\star}$.

Para $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, temos $(\mathbb{C}, |\cdot|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ por definição. Como as normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ induzem a mesma topologia sobre $\mathbb{R}^2$ (cf. Exemplo 1.1.25 ou Corolário 3.1.57 a seguir), a primeira parte do argumento garante que $L \subseteq \mathbb{C}$ é compacto sse L é fechado em $\mathbb{C}$ e limitado (verificou?)*. Isso permite reaplicar os métodos (i) ou (ii) para $C \subseteq \mathbb{C}^n$ com $n > 1$ (faça isso!)$^{\star}_{\star}$. □

Lema 3.1.55. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}$-espaço normado e $T\colon \mathbb{K}^n \to E$ uma transformação linear. Se $\mathbb{K}^n$ é dotado da norma do máximo, então T é contínua.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{K}^n$, no sentido usual da Álgebra Linear. Uma vez que para cada $x \in \mathbb{K}^n$ existem únicos escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ com $x = \sum_{i\leq n} a_i e_i$, resulta

$$\|T(x)\| \leq \sum_{i\leq n} |a_i|\|T(e_i)\| \leq \underbrace{\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}}_{\|x\|_\infty} \cdot \underbrace{n \max\{\|T(e_1)\|, \ldots, \|T(e_n)\|\}}_{R}, \tag{3.3}$$

mostrando que T é contínua (cf. Proposição 1.2.12). □

Corolário 3.1.56. *Se $(E, \|\cdot\|)$ é um $\mathbb{K}$-espaço normado e $T\colon \mathbb{K}^n \to E$ é um isomorfismo linear*[†]*, então T é um homeomorfismo ao considerarmos $\mathbb{K}^n$ com a topologia induzida pela norma do máximo.*

Demonstração. Em virtude do lema anterior, basta mostrar que T^{-1} é contínua. Note que $\mathbb{S}_{\mathbb{K}^n} := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ é subespaço compacto de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$:

- é fechado por ser pré-imagem de $\{1\}$ pela função contínua $\|\cdot\|_\infty\colon \mathbb{K}^n \to [0, +\infty)$ (já percebeu, certo?)*,
- e é limitado por definição.

Como a função $\varphi := \|\cdot\| \circ T\colon \mathbb{K}^n \to [0, +\infty)$ é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que φ deve assumir mínimo em $\mathbb{S}_{\mathbb{K}^n}$, i.e., existe um ponto $u \in \mathbb{S}_{\mathbb{K}^n}$ tal que $\|T(u)\| \leq \|T(v)\|$ para todo $v \in \mathbb{S}_{\mathbb{K}^n}$. Logo, se $y \in E$ e $y \neq 0$, então para $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tal que $T(x) = y$ temos $v := \frac{x}{\|x\|_\infty} \in \mathbb{S}_{\mathbb{K}^n}$ e

$$\|T(u)\| \leq \|T(v)\| = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_\infty} \Rightarrow \|T(u)\| \cdot \|x\|_\infty \leq \|T(x)\| = \|y\|,$$

donde o resultado segue da Proposição 1.2.12 com $r := \frac{1}{\|T(u)\|}$, posto que $\|T(u)\| > 0$ e $\|x\|_\infty = \|T^{-1}(y)\|_\infty$ (certo?)*. □

Corolário 3.1.57. *Quaisquer duas normas em $\mathbb{K}^n$ induzem a mesma topologia. Em particular, a Proposição 3.1.54 e o Lema 3.1.55 independem da norma sobre $\mathbb{K}^n$.*

Demonstração. A primeira parte segue do corolário anterior com $E := (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ para uma norma $\|\cdot\|$ qualquer e $T := \mathrm{Id}\colon (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to E$, além de uma dose de simetria e transitividade (entendeu?)$^{\star}_{\star}$. A segunda parte segue da primeira (por quê?)$^{\star}_{\star}$. □

Corolário 3.1.58. *Sejam E um espaço normado e $S \subseteq E$ um subespaço vetorial. Se S tem dimensão finita, então S é fechado em E.*

Demonstração. Enquanto espaço vetorial, S é isomorfo a $\mathbb{K}^n$ para algum n. Logo, pelo corolário anterior, S deve ser de Banach com a norma induzida de E (cf. Observação 1.2.9 e Proposição 1.2.13). Portanto, S é fechado em virtude do Exercício 1.2.3. □

Exercício 3.1.14 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que se E é um espaço normado com <u>dimensão finita</u>, então $E^* = \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$, i.e., *todo funcional linear $E \to \mathbb{K}$ é contínuo.* Dica: Lema 3.1.55 + Corolário 3.1.57 ou Corolário 3.1.58 + Teorema 2.2.64. ■

[†] Transformação linear invertível.

Parece promissor, mas nem tudo o que parece é.

Lema 3.1.59. *Se (X, d) é um espaço métrico e $S \subseteq X$ é um subconjunto não vazio, então a regra $x \mapsto d(x, S) := \inf_{y \in S} d(x, y)$ determina uma função contínua da forma $X \to \mathbb{R}$. Em particular, $x \in \overline{S}$ se, e somente se, $d(x, S) = 0$.*

Demonstração. Para $x_0, x \in X$ e $y \in S$ quaisquer ocorre $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y)$, de modo que ao se tomar o ínfimo com respeito ao conjunto S, obtém-se

$$d(x_0, S) \leq d(x_0, x) + d(x, S) \Rightarrow d(x_0, S) - d(x, S) \leq d(x_0, x).$$

Analogamente, mostra-se $d(x, S) - d(x_0, S) \leq d(x, x_0)$, donde resulta a desigualdade $|d(x, S) - d(x_0, S)| \leq d(x_0, x)$, que por sua vez assegura a continuidade (uniforme) da função (verifique!)*.

Para a segunda parte, basta mostrar que $d(x, S) = 0$ sse existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em S com $(x_n)_n \to x$. Ora, se $d(x, S) = 0$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in S$ com $d(x, y_n) < \frac{1}{2^n}$ (por quê?)*, donde segue que $(y_n)_n \to x$ e, consequentemente, $x \in \overline{S}$. A recíproca segue da continuidade da função $x \mapsto d(x, S)$ (concorda?)*. □

Lema 3.1.60 (de Riesz). *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $S \subseteq E$ um subespaço vetorial tal que $\overline{S} \neq E$. Para cada $\alpha \in (0, 1)$ existe $x \in E$ satisfazendo $\|x\| = 1$ e $\|s - x\| \geq \alpha$ para todo $s \in S$.*

Demonstração. Para $x_0 \in E \setminus \overline{S}$, seja $R := d(x_0, S)$ e note que, pelo lema anterior, $R > 0$. Como $R < \frac{R}{\alpha}$, existe $x_1 \in S$ com $\|x_0 - x_1\| \leq \frac{R}{\alpha}$, e daí basta fazer $x := \frac{1}{\|x_0 - x_1\|}(x_0 - x_1)$. □

Corolário 3.1.61. *Se um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ tem dimensão infinita, então a bola $B[0, 1] := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é um subconjunto fechado, limitado e não compacto de E.*

Demonstração. Fixado $x_0 \in E$ com $\|x_0\| = 1$, pode-se fazer $S := \mathbb{K}x_0 := \operatorname{span}(x_0)$, o subespaço de E gerado por x_0, que satisfaz $\overline{S} = S \neq E$ (pois...)*. Logo, pelo lema anterior, existe $x_1 \in E \setminus S$ com $\|x_1\| = 1$ e $\|x_0 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Como $\operatorname{span}(x_0, x_1)$ ainda tem dimensão finita, existe $x_2 \in E \setminus \operatorname{span}(x_0, x_1)$ com $\|x_2\| = 1$ e $\|x_i - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ para $i \in \{0, 1\}$. Como $\operatorname{span}(x_0, x_1, x_2)$ tem dimensão finita... Recursivamente, conclui-se que o subconjunto $B[0, 1]$ admite uma sequência sem subsequência de Cauchy e, portanto, não pode ser compacto em vista do Teorema 3.1.49 (certo?)*. □

Moral da história: você não tem mais o direito de pensar em "limitado e fechado" como sinônimo de compacidade, exceto em *situações elementares*.

3.1.4 Compacidade local

O último corolário tangencia a noção de *compacidade local* que, como o nome sugere, funciona como um prêmio de consolação para alguns espaços que não são abençoados com a compacidade *global*.

§1 Taxonomia e exemplos

Antes de investigar as consequências dessa propriedade, bem como exemplos e não exemplos desses espaços, precisamos abordar o problema *taxonômico*: há ambiguidade no que poderia significar "localmente" ao dizer que um espaço é *localmente* compacto.

Por um lado, faria sentido dizer que X é *localmente compacto num ponto* $p \in X$ se existe *um* compacto $C \subseteq X$ tal que $p \in \operatorname{int}(C)$, i.e., C é uma *vizinhança compacta* em torno de p (cf. Exercício 2.1.30), formulação que está de acordo com uma das interpretações usuais da expressão "local" — a propriedade vale *num* local próximo ao ponto. No entanto, a expressão "local" também costuma carregar uma ideia de arbitrariedade, no sentido de que a *propriedade* se manifesta em *locais arbitrariamente próximos* do ponto. Com essa ideia em mente, o mais natural seria dizer que X é **localmente compacto num ponto** $p \in X$ se existe uma base local de vizinhanças compactas[†] em torno de p.

Como a última formulação claramente satisfaz a primeira, ela será a definição oficial da compacidade local NESTE TEXTO[‡] — e um espaço será dito **localmente compacto** se for localmente compacto em todos os seus pontos, i.e., se todos os seus pontos admitem bases locais de vizinhanças compactas.

Exercício 3.1.15 ($^\star_\star$)**.** Mostre que X é localmente compacto em p sse para todo aberto $V \subseteq X$ em torno de p existem um compacto $K \subseteq X$ e um aberto $U \subseteq X$ tais que $p \in U$, $U \subseteq K$ e $K \subseteq V$. ■

Com isso dito, a boa notícia: a distinção é imaterial em espaços de Hausdorff.

Lema 3.1.62. *Espaços compactos de Hausdorff são localmente compactos.*

Demonstração. Como subespaços fechados de espaços compactos são compactos (cf. Proposição 3.1.7), basta mostrar que se K é espaço compacto e $p \in K$, então

$$\mathcal{B} := \left\{\overline{U} : U \subseteq K \text{ é aberto e } p \in U\right\}$$

é base local de vizinhanças fechadas em torno de p. Para isso, dado um aberto $V \subseteq K$ em torno de p, busca-se um aberto $U \subseteq K$ tal que $p \in U$ com $\overline{U} \subseteq V$.

Como nada precisa ser feito caso se tenha $V = K$, podemos assumir $K \setminus V \neq \emptyset$. Agora, para cada $x \in K \setminus V$, existem abertos $A_x, B_x \subseteq K$ tais que $x \in A_x$, $p \in B_x$ e $A_x \cap B_x = \emptyset$. Dado que $K = V \cup \bigcup_{x \in K\setminus V} A_x$, segue por compacidade que existem $x_0, \ldots, x_n \in K \setminus V$ tais que $K = V \cup A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_n}$. E daí?

KATZENSPRUNG: $\overline{B_x} \subseteq V$ para todo $x \in K \setminus V$, pois se $x \notin V$, então o aberto A_x em torno de x testemunha exatamente que $x \notin \overline{B_x}$.

Finalmente, temos

$$p \in \bigcap_{i \leq n} B_{x_i} \subseteq \overline{\bigcap_{i \leq n} B_{x_i}} \subseteq \bigcap_{i \leq n} \overline{B_{x_i}} \subseteq V \quad (\text{por quê?})^\star_\star,$$

mostrando que basta tomar $U := \bigcap_{i \leq n} B_{x_i}$. □

Teorema 3.1.63. *Seja X um espaço de Hausdorff. Se $p \in X$ tem uma vizinhança compacta, então p admite uma base local de vizinhanças compactas.*

Demonstração. Se $C \subseteq X$ é uma vizinhança compacta em torno de p, então p admite, em C, uma base local de vizinhanças compactas. Assim, se $V \subseteq X$ é um aberto em torno de p, então $V \cap C$ é um aberto (em C!) em torno de p, donde segue que existem um compacto $K \subseteq C$ e um aberto $A \subseteq X$ tais que $p \in A$ e $A \cap C \subseteq K \subseteq V \cap C$ (certo?)$^\star_\star$. Posto que $\operatorname{int}(C)$ é aberto em X e K é fechado em X (por quê?)$^\star_\star$, segue que o subconjunto $U := A \cap \operatorname{int}(C)$ é aberto em X, com $p \in U$, $U \subseteq K$ e $K \subseteq V$ (cf. Exercício 3.1.15). □

[†] Compare com a definição "geométrica" de convexidade local (cf. item(ii) do Teorema 2.2.77).

[‡] ATENÇÃO: a definição de compacidade local não é unânime na literatura da área. Portanto, ao consultar compacidade local em outras obras, certifique-se sobre qual definição é adotada no texto.

Observação 3.1.64. Este é um bom momento para reforçar o pedido de cautela ao usar outras referências: no texto de Bahadur [41], por exemplo, compacidade local é definida como existência de vizinhança compacta e, por isso, qualquer espaço compacto é localmente compacto com as formulações adotadas pelo autor, sem a exigência da condição de Hausdorff. Contudo, sem o axioma de Hausdorff, a mera existência de vizinhanças compactas não garante bases locais de vizinhanças compactas. Veremos isso de forma natural ao discutirmos *extensões de Alexandroff*, na próxima subsubseção. △

Exemplo 3.1.65. *Espaços discretos são localmente compactos*, independente da cardinalidade. Consequentemente, *nem todo espaço localmente compacto é compacto.* ▲

Exemplo 3.1.66. Para $n \in \mathbb{N}$ qualquer, a caracterização de Heine-Borel para os compactos de $\mathbb{K}^n$ assegura que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ *é localmente compacto* — o que independe da norma adotada (certo?)$\overset{\star}{\star}$. Logo, em virtude do Corolário 3.1.61, revela-se uma faceta algébrica da compacidade local em espaços normados, explicitada no próximo exercício†. ▲

Exercício 3.1.16 ($\overset{\star}{\star}$)**.** Mostre que um $\mathbb{K}$-espaço normado tem dimensão finita sse é localmente compacto. ■

Exemplo 3.1.67. O subespaço dos racionais não é localmente compacto com a topologia de subespaço herdada de $\mathbb{R}$. Isto segue pois *se* $K \subseteq \mathbb{Q}$ *é compacto, então* $\operatorname{int}_{\mathbb{Q}}(K) = \emptyset$: se para certos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ ocorresse $(a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq K$, então para qualquer número irracional $p \in (a, b)$ poderíamos tomar uma sequência $(q_n)_n$ em $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ satisfazendo $(q_n)_n \to p$, o que acarretaria $p \in \mathbb{Q}$ (por quê?)$\overset{\star}{\star}$. Em particular, note que não poderíamos inferir $\operatorname{int}_{\mathbb{Q}}(K) = \emptyset$ a partir da óbvia identidade $\operatorname{int}_{\mathbb{R}}(K) = \emptyset$, já que, por exemplo, $\operatorname{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ mas $\operatorname{int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. ▲

Exercício 3.1.17 ($\overset{\star}{\star}$)**.** Mostre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não é localmente compacto com a topologia de subespaço herdada de $\mathbb{R}$. Dica: "dualize" o argumento anterior. ■

Os dois últimos exemplos também mostram que compacidade local não é *irrestritamente* hereditária, i.e., um espaço X pode ser localmente compacto e, ainda assim, possuir subespaços Y que não satisfazem a mesma condição. Porém, há duas exceções importantes.

(i) *Se Y é aberto em X, então Y é localmente compacto* pois, para $y \in Y$ e $V \subseteq Y$ aberto em Y, V também é aberto em X, donde segue que existem um compacto $K \subseteq X$ e um aberto (em X!) $U \subseteq K$ tais que $y \in U$, $U \subseteq K$ e $K \subseteq V$. Como U também é aberto em Y, acabou.

(ii) *Se X é de Hausdorff e Y é fechado em X, então Y é localmente compacto.* Neste caso, se $K \subseteq X$ é uma vizinhança compacta em torno de $y \in Y$, então $Y \cap K$ é uma vizinhança de Y em torno de y, compacta pois $Y \cap K$ é fechado em K.

Enquanto (ii) é compatível com a intuição que já temos sobre espaços compactos, (i) é radicalmente diferente: $(0, 1)$ é aberto em $[0, 1]$, por exemplo, mas $(0, 1)$ não é compacto. Isto sugere outras comparações. Vamos começar com um clássico.

Teorema 3.1.68 (Tychonoff, para espaços localmente compactos)**.** *Para uma família $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de espaços de Hausdorff, as seguintes asserções são equivalentes:*

†Na Subseção 3.2.2, veremos como estender a caracterização para $\mathbb{K}$-e.v.t's.

(i) $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *é localmente compacto.*

(ii) X_i *é localmente compacto para todo* $i \in \mathcal{I}$, *com* $\{i \in \mathcal{I} : X_i$ *não é compacto*$\}$ *finito.*

Demonstração. A primeira parte da implicação (i) ⇒ (ii) segue pois as projeções satisfazem todas as hipóteses da próxima afirmação (verifique!)$^{\star}_{\star}$:

⌜**Afirmação 3.1.69.** *Se* $f\colon A \to B$ *é contínua, sobrejetora e tal que* $f[O]$ *é aberto em* B *para todo aberto* $O \subseteq A$, *então* $b \in B$ *tem vizinhança compacta em* B *sempre que algum* $a \in f^{-1}[\{b\}]$ *tem vizinhança compacta em* A.

Prova da Afirmação. Se $K \subseteq A$ é compacto e $V \subseteq K$ é aberto em A com $a \in V$ e $f(a) = b$, então $f[V]$ é aberto em B em torno de b, enquanto $f[K]$ é compacto em B pela continuidade de f, com $f[V] \subseteq f[K]$. ⌟

A segunda parte da implicação é divertida†. Para uma upla x em $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$, existe uma vizinhança compacta K em torno de x, o que assegura a existência de um aberto V de $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ em torno de x tal que $V \subseteq K$. Ora, pela natureza dos abertos na topologia produto, não há perda de generalidade em supor $V = \prod_{i\in\mathcal{I}} V_i$, onde cada V_i é aberto em X_i e $\mathcal{J} := \{i \in \mathcal{I} : V_i \neq X_i\}$ é finito.

Katzensprung: se $i \notin \mathcal{J}$, então $X_i = \pi_i[V] \subseteq \pi_i[K] \subseteq X_i$, mostrando que X_i é compacto e, portanto, $\{i \in \mathcal{I} : X_i \text{ não é compacto}\} \subseteq \mathcal{J}$.

Para (ii) ⇒ (i), fixe uma $\mathcal{I}$-upla $x := (x_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Para cada $i \in \mathcal{I}$ tal que X_i não é compacto, podemos escolher uma vizinhança compacta $V_i \subsetneq X_i$ em torno de x_i, de modo que ao fazer $V_j := X_j$ sempre que X_j for compacto, o subconjunto $V := \prod_{i\in\mathcal{I}} V_i$ se revela uma vizinhança legítima em torno de x, compacta pelo Teorema de Tychonoff. □

Exercício 3.1.18 ($^{\star}_{\star\star}$). Por que a condição de Hausdorff foi exigida? Dica: a resposta é mais burocrática do que matemática. ■

Corolário 3.1.70. *Produtos finitos de espaços localmente compactos de Hausdorff são localmente compactos.*

Outra propriedade que merece atenção é a *completude*. Enquanto todo espaço métrico compacto é completo, há espaços métricos localmente compactos *incompletos*: $(0, 1)$ é localmente compacto, mas não é completo, posto que não é fechado (cf. Exercício 1.2.3). Contudo, há um meio termo interessante e perigoso: *todo grupo topológico localmente compacto é completo*, no sentido de que toda *rede de Cauchy* converge (cf. Definição 2.2.50). Porém, isto só será abordado na Subseção 3.2.2.

Também é possível mostrar que espaços métricos localmente compactos são *completamente metrizáveis*, mas ainda é cedo para isso. Assim, para encerrar as comparações e avançar a discussão, vamos provar o Teorema de Baire mais uma vez.

Teorema 3.1.71 (Teorema de Baire para espaços localmente compactos)**.** *Se* X *é localmente compacto de Hausdorff e* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é sequência de fechados tal que* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, *então algum* F_n *tem interior não vazio.*

Demonstração. Supondo $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que $X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Para tanto, fixemos um ponto $x_0 \in X$ e uma vizinhança compacta K_0 em torno de x_0, i.e., com $x_0 \in \operatorname{int}(K_0)$, que existe em virtude da compacidade local. Note que podemos tomar um ponto $x_1 \in A_0 := \operatorname{int}(K_0) \setminus F_0$, pois o contrário violaria a hipótese sobre o interior de F_0. Como A_0 é aberto em torno de x_1, existe *outro* compacto K_1 em X, com $x_1 \in \operatorname{int}(K_1)$, $K_1 \subseteq A_0$ e $\operatorname{int}(K_1) \setminus F_1 \neq \emptyset$ (pois...)$^{\star}_{\star}$, o que permite tomar $x_2 \in A_1 := \operatorname{int}(K_1) \setminus F_1$.

†Aprendi o argumento no surpreendente texto de Bahadur [41].

Procedendo recursivamente, a sequência de pontos $(x_n)_n$ atesta que $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família de fechados de K_0 (pela condição de Hausdorff) com a propriedade da interseção finita. Logo, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, ponto que não pode pertencer a F_m, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, afinal, $K_{m+1} \cap F_m = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$. □

§2 O ponto no infinito

Curiosamente, numa vasta gama de casos, a *estrutura* das vizinhanças compactas de um espaço localmente compacto permite *corrigir* a eventual falta de *compacidade global* do espaço por meio da adição de um ponto.

Dado um espaço topológico X, *não necessariamente de Hausdorff*, consideremos um *ponto* $\infty \notin X$ qualquer[†] e definamos $X^+ := X \cup \{\infty\}$ munido da topologia que declara como abertos:

(i) os subconjuntos $A \subseteq X$ originalmente abertos em X, e

(ii) os subconjuntos da forma $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, para $K \subseteq X$ compacto e fechado em X.

Uma vez que a reunião finita de compactos fechados é compacta e fechada, não é difícil concluir que X^+ é um espaço topológico compacto que contém X *como subespaço topológico*. Por via das dúvidas:

Exercício 3.1.19 ($^\star_\star$)**.** Convença-se de que a topologia acima faz de X^+ um espaço compacto tal que a topologia de X coincide com a topologia de subespaço herdada de X^+. ■

Agora, note que se X não é compacto, então X é denso em X^+, com a recíproca verdadeira! De fato, o único subconjunto de X^+ que tem alguma chance de ser aberto não vazio e disjunto de X é $\{\infty\}$ e, pela definição da topologia de X^+, $\{\infty\}$ é aberto sse X é compacto.

Definição 3.1.72. Em geral, o espaço compacto X^+ construído acima é chamado de *extensão de Alexandroff*[‡] de X. Nos casos em que X é denso em X^+, passa-se a chamar X^+ de **compactificação de Alexandroff**[††] de X. ¶

Legal, mas por que esperar justamente a presente subseção para introduzir esse tipo de construção?

Proposição 3.1.73. *A extensão de Alexandroff X^+ é de Hausdorff se, e somente se, o espaço X é de Hausdorff e localmente compacto.*

Demonstração. Por X ser subespaço de X^+, segue que se X^+ for de Hausdorff, então X também é de Hausdorff, mas não só isso: dado $x \in X$, a existência de abertos disjuntos $U, V \subseteq X^+$ com $x \in U$ e $\infty \in V$ garante que x tem uma vizinhança compacta em X, a saber, $K := X^+ \setminus V$. Reciprocamente, se X é de Hausdorff e todo ponto de X admite uma vizinhança compacta, então X^+ é um espaço de Hausdorff: se $C \subseteq X$ é uma vizinhança compacta em X em torno de x, então $U := (X \setminus C) \cup \{\infty\}$ é um aberto de X^+ em torno de ∞, tal que $\operatorname{int}(C) \cap U = \emptyset$. □

[†] Por gentileza: não atribua significados numéricos por conta do símbolo.

[‡] Pois sua construção se deve a Pavel Alexandroff.

[††] Ou **compactificação de um ponto** para pessoas menos saudosistas. *Compactificações* mais gerais serão discutidas apenas no Capítulo 5.

Exemplo 3.1.74. Como prometido na Observação 3.1.64, veremos um exemplo de espaço compacto que não é localmente compacto, i.e., cujos pontos não têm bases locais de vizinhanças compactas: $\mathbb{Q}^+$. Com efeito, por $\mathbb{Q}$ ser espaço de Hausdorff que não é localmente compacto (cf. Exemplo 3.1.67), o último teorema garante que sua extensão de Alexandroff $\mathbb{Q}^+$ é compacta mas não é de Hausdorff. Se $\mathbb{Q}^+$ fosse localmente compacto, então $\mathbb{Q}$ também seria, haja vista $\mathbb{Q}$ ser aberto em $\mathbb{Q}^+$. ▲

Secretamente, a extensão de Alexandroff é um funtor (cf. Definição 1.2.43). Para se dar conta disso, considere LCH e CHAUS as *classes dos espaços localmente compactos de Hausdorff* e dos espaços *compactos de Hausdorff*, respectivamente. Vamos promover tais classes ao patamar de categorias, de modo que a correspondência $(\bullet)^+ : \mathrm{LCH} \to \mathrm{CHAUS}$ se torne um funtor.

O impulso natural, de considerar LCH e CHAUS como subcategorias completas de TOP, i.e., tomando setas como funções contínuas, não funciona: apenas com a continuidade de uma função $f : X \to Y$ não é possível garantir a continuidade da extensão mais razoável $f^+ : X^+ \to Y^+$, que faz $f^+(x) := f(x)$ para cada $x \in X$ e $f^+(\infty_X) := \infty_Y$. A fim de que tal extensão f^+ seja contínua, é necessário e suficiente[†] que $f^{-1}[K] \subseteq X$ seja compacto para todo subespaço compacto $K \subseteq Y$ (por quê?!)$^\star_\star$, o que faz de f *quase* uma função *própria* (confira o Exercício 3.1.42).

Definição 3.1.75. Uma função contínua $f : X \to Y$ entre espaços topológicos (quaisquer) X e Y é **quase-própria** se a pré-imagem de subespaços compactos é compacta. ¶

Exercício 3.1.20. Mostre que Id_X é quase-própria e $f \circ g$ é quase-própria sempre que as funções f e g são quase-próprias. ■

Consequentemente, a correspondência $\cdot^+ : \mathrm{LCH} \to \mathrm{CHAUS}$ um funtor[‡]. Em particular, como homeomorfismos são funções quase-próprias, segue que se X e Y são espaços localmente compactos de Hausdorff homeomorfos, então X^+ e Y^+ também são homeomorfos (cf. Proposição 1.2.47).

Embora a extensão de Alexandroff possa soar artificial para quem nunca a viu, trata-se de uma generalização natural de um dos modos de *descrever* o círculo a partir de um segmento de reta: secretamente, o círculo $\mathbb{T}$ (cf. Exemplo 2.2.40) é *a* compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}$. Ou quase isso: tanto $\mathbb{T}$ quanto $\mathbb{R}^+$ têm a mesma *propriedade universal* que *caracteriza* a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}$ e, por isso, são *homeomorfos*. Com isso dito, não se preocupe: discutir os pormenores desse tipo de argumento será o primeiro tópico do próximo capítulo.

E finalmente, para encerrar o ESSENCIAL deste capítulo, vamos caracterizar as *situações elementares* mencionadas após a demonstração do Corolário 3.1.61.

Teorema 3.1.76. *Para um espaço metrizável X, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *existe uma métrica compatível com a topologia de X segundo a qual os compactos de X são, precisamente, os subconjuntos fechados e limitados*[††]*;*

(ii) *X é separável e localmente compacto.*

[†]Eu já disse que odeio essa expressão?

[‡]Onde as setas de LCH são as funções quase-próprias e as setas de CHAUS são funções contínuas. Categoristas entusiastas ficam a cargo de mostrar que $\mathrm{Id}_X^+ = \mathrm{Id}_{X^+}$ e $(f \circ g)^+ = f^+ \circ g^+$.

[††]Confira o Exercício 3.1.24 se precisar de ajuda para adivinhar a definição *métrica* de limitação.

Demonstração. Se d é uma métrica que satisfaz as condições de (i), então

(I) X é localmente compacto pois qualquer bola fechada é compacta por conta de (i), e

(II) X é separável pois pode ser expresso como reunião enumerável de subconjuntos (sequencialmente) compactos (cf. Afirmação 3.1.53): basta fixar um ponto $x \in X$ e notar que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_d[x,n]$ (entendeu?)$^{\star}_{\star}$.

A recíproca (ii) $\Rightarrow$ (i) é um pouco mais delicada, posto que a métrica que deve satisfazer (i) pode não ser a métrica nativa de X: note, por exemplo, que $(0,1)$ é metrizável, separável e localmente compacto mas, ainda assim, $(0,1)$ é fechado em $(0,1)$, limitado com sua métrica usual e não é compacto! É hora de contrairmos a nossa primeira

DÍVIDA 1. *Um espaço $2^{\underline{o}}$-contável no qual todo ponto admite base local de vizinhanças fechadas é, necessariamente, metrizável.*

Com *base* na dívida acima[†], vamos provar de forma quase indolor que a compactificação de Alexandroff de X é metrizável.

(A) Pelo Teorema 2.1.75, o fato de X ser metrizável e separável assegura a existência de uma base enumerável, digamos $\mathcal{B}$, que podemos supor ser composta por bolas abertas.

(B) Por conta da compacidade local, segue que $\mathcal{C} := \left\{C \in \mathcal{B} : \overline{C} \text{ é compacto}\right\}$ ainda é base enumerável para X (verifique!)$^{\star}_{\star}$. Além disso, também pela compacidade local, cada $x \in X$ tem base local de vizinhanças compactas em X, que são fechadas em X^+ já que este é de Hausdorff (cf. Proposição 3.1.73), e constituem uma base local de vizinhanças para x em X^+ pois X é aberto em X^+.

(C) Ao escrever $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ e definir $D_n := \bigcup_{j\leq n} C_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{D_n}$, com cada $\overline{D_n}$ compacto e $\left(\overline{D_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ crescente (pois...?)$^{\star}_{\star}$.

(D) Dado um compacto $K \subseteq X$, existe $N \in \mathbb{N}$ com $K \subseteq D_N$ (pois...?)$^{\star}_{\star}$ e, consequentemente, $X \setminus \overline{D_n} \subseteq X \setminus D_n \subseteq X \setminus K$. Logo, $\mathcal{D} := \{(X \setminus \overline{D_n}) \cup \{\infty\} : n \in \mathbb{N}\}$ é base local enumerável de abertos de X^+ em torno de ∞ (percebeu?)*, enquanto

$$\mathcal{E} := \{(X \setminus D_n) \cup \{\infty\} : n \in \mathbb{N}\}$$

é base local de vizinhanças fechadas de X^+ em torno de ∞ (pois D_n é aberto X^+).

(E) Ao combinar todas as afirmações acima, segue que X^+ tem as propriedades exigidas na Dívida 1. Verificar os detalhes será problema seu ($\substack{\star\\\star}$).

Assim, se X satisfaz (ii), então existe uma métrica ρ em X^+ compatível com sua topologia, o que nos permite definir a função $h\colon X \to [0,+\infty)$ dada por

$$h(x) := \frac{1}{\rho(x,\infty)},$$

que é (bem definida e)* contínua pois $x \mapsto \rho(x,\infty)$ é contínua e não nula (cf. Lema 3.1.59). Finalmente, a métrica procurada em X é dada pela regra que faz

$$(x,y) \mapsto \rho(x,y) + |h(x) - h(y)|$$

para quaisquer $x, y \in X$. A tarefa de verificar que ela funciona é meu presente de despedida para você ($\substack{\star\\\star\star}$). □

[†]Que será saldada no próximo capítulo sob a alcunha de *Teorema de Metrizabilidade de Urysohn*.

3.1.5 Exercícios adicionais

Exercício 3.1.21 ($^{\star}_{\star}$)**.** O **conjunto derivado** de um subconjunto S de um espaço topológico X, denotado por S^{d}, é a coleção dos pontos de acumulação de S em X.

a) Mostre que $\overline{S} = S \cup S^{\mathrm{d}}$ para qualquer $S \subseteq X$.

b) Mostre que $p \in X$ é isolado em X sse $p \notin X^{\mathrm{d}}$.

c) Mostre que se X é discreto, então $X^{\mathrm{d}} = \emptyset$.

d) Para $X := \mathbb{R}$ e $S := \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, mostre que $S^{\mathrm{d}} = \{0\}$.

e) Para $X := S := \left\{\frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, mostre que $S^{\mathrm{d}} = \emptyset$. ■

Exercício 3.1.22 ($^{\star}_{\star}$)**.** Mostre que uma boa ordem $(\mathbb{B}, \leq)$ é compacta com a topologia da ordem sse $\mathbb{B}$ tem máximo. Opcional: conclua que um ordinal é compacto sse é sucessor. Dica: você já sabe quando uma ordem total é compacta. ■

Exercício 3.1.23 ($^{\star}_{\star}$)**.** Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Mostre que se $F, G \subseteq X$ são fechados de X satisfazendo $F \cap G = \emptyset$, então existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Dica: mostre primeiro que se $x \notin F$, então existem abertos disjuntos $A, B \subseteq X$ tais que $x \in A$ e $F \subseteq B$. ■

Exercício 3.1.24 (Limitação em espaços métricos ($\star$))**.** Para um subconjunto S de um espaço métrico X, mostre que são equivalentes:

(i) existe $M > 0$ tal que $d(x, y) < M$ para quaisquer $x, y \in S$;

(ii) existe $r > 0$ tal que $\operatorname{diam}(S) < r$ (cf. Exercício 1.2.21, item (a));

(iii) existem $x \in X$ e $R > 0$ tais que $S \subseteq B(x, R)$. ■

Observação 3.1.77. Subconjuntos satisfazendo qualquer uma das condições no teorema anterior são chamados de **limitados**. É salutar comparar com a definição de limitação em espaços normados (cf. Proposição 3.1.11). △

Exercício 3.1.25 ($^{\star}_{\star}$)**.** Seja X um espaço métrico tal que todo subconjunto fechado e limitado de X seja compacto. Mostre que X é separável. Dica: mostre que toda cobertura aberta de X tem subcobertura enumerável e, com isso, mostre que X é $2^{\underline{o}}$-contável. ■

Exercício 3.1.26 ($^{\star}_{\star\star}$)**.** Sejam X um espaço topológico, φ uma rede em X e $p \in X$ um ponto.

a) Mostre que p é aderente a φ (cf. Definição 3.1.32, item (ii)) sse φ tem sub-rede ψ tal que $\psi \to p$.

b) Mostre que se X é $1^{\underline{o}}$-contável, então o item anterior permanece válido trocando "rede" e "sub-rede" por "sequência" e "subsequência", respectivamente.

c) Suponha que φ seja uma sequência. Mostre que se toda subsequência de φ admite subsequência que converge para p, então $\varphi \to p$. Dica: se parecer trivial demais é sinal de que você leu errado.

d) Generalize o item anterior, trocando "sequência" e "subsequência" por "rede" e "sub-rede", respectivamente. ■

Exercício 3.1.27 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam φ e ψ sub-redes de uma rede ρ num espaço X. Mostre que se $\lim\varphi \cap \lim\psi = \emptyset$, então ρ não converge. Em particular, se X é de Hausdorff, $\varphi \to x$ e $\psi \to y$ com $x \neq y$, então ρ não converge. ■

Exercício 3.1.28 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $D \subseteq \mathbb{R}$ é subconjunto não enumerável, então existe $p \in D$ que é ponto de acumulação de D. Dica: por algum motivo, D não pode ser discreto com a topologia de subespaço. ■

Exercício 3.1.29 $({}^{\star}_{\star})$**.** Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias sobre um mesmo conjunto X, com $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Mostre que se $(X, \mathcal{T})$ é compacto e $(X, \mathcal{S})$ é de Hausdorff, então $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Conclua que duas topologias compactas de Hausdorff sobre um mesmo conjunto são incomparáveis. ■

Exercício 3.1.30 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se X é espaço $2^{\underline{o}}$-contável, então toda cobertura aberta de X tem subcobertura enumerável. ■

Exercício 3.1.31 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se X é espaço sequencialmente compacto e $2^{\underline{o}}$-contável, então X é compacto. ■

Exercício 3.1.32 $({}^{\star}_{\star\star})$**.** Resolva o Exercício 3.1.31 sem usar o Exercício 3.1.30. ■

Exercício 3.1.33 $({}^{\star}_{\star})$**.** Expresse a condição de compacidade enumerável em termos de famílias de fechados. ■

Exercício 3.1.34 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se $f\colon X \to Y$ é função contínua e X é enumeravelmente compacto, então a imagem $f[X]$ é subespaço enumeravelmente compacto de Y. ■

Exercício 3.1.35 $({}^{\star}_{\star})$**.** Repita o exercício anterior, trocando "enumeravelmente compacto" por "sequencialmente compacto". ■

Exercício 3.1.36 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que se os subconjuntos finitos de X são fechados e X é limite-compacto, então X é enumeravelmente compacto. ■

Exercício 3.1.37 $({}^{\star}_{\star})$**.** Mostre que funções polinomiais são fechadas. ■

Exercício 3.1.38 $({}^{\star}_{\star})$**.** Para um espaço métrico, mostre que são equivalentes:

(i) ("vale Bolzano-Weierstrass") toda sequência limitada tem subsequência convergente;

(ii) ("vale Heine-Borel") todo subconjunto limitado e fechado é compacto. ■

Exercício 3.1.39 (Teorema de Dini $({}^{\star}_{\star\star})$)**.** Sejam X um espaço enumeravelmente compacto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas da forma $X \to \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f_n \to_{\mathrm{p}} f$.

a) Para $\varepsilon > 0$, mostre que $F_n := \{x \in X : f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$ é fechado. Dica: continuidade.

b) Com F_n como no item anterior, mostre que se $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente para todo $x \in X$, então $F_n \supseteq F_{n+1}$ para todo n.

c) Mostre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Dica: convergência pontual.

d) Com a hipótese do item (b), mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_N = \emptyset$ e, com isso, conclua que $f_n \to_{\mathrm{u}} f$. Dica: compacidade enumerável.

e) Mostre que a conclusão anterior permanece válida se $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente para todo $x \in X$. ■

Exercício 3.1.40 (*A.k.a.* Lema da colagem ($^{\star}_{\star}$)). Sejam X e Y espaços topológicos, $f: X \to Y$ uma função e $\mathcal{S}$ uma cobertura de X por subconjuntos quaisquer tal que $f|_S$ é contínua para cada $S \in \mathcal{S}$. Mostre que f é contínua em cada um dos casos a seguir.

a) Cada $S \in \mathcal{S}$ é aberto em X.

b) A coleção $\mathcal{S}$ é finita e cada $S \in \mathcal{S}$ é fechado em X. Dica: se aceitar usar redes, confira o Teorema 2.2.32; se preferir uma prova clássica, se vire aí. ■

Exercício 3.1.41 ($^{\star}_{\star}$). Mostre que o resultado anterior pode ser falso se $\mathcal{S}$ for uma cobertura infinita de fechados. Dica: tome $X := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ e fixe $f: X \to \mathbb{R}$ a sua função descontínua favorita. ■

Exercício 3.1.42 ($^{\star}_{\star\star}$). Para X e Y espaços quaisquer e $f: X \to Y$ contínua, mostre que são equivalentes[†]:

(i) $f \times \mathrm{Id}_Z: X \times Z \to Y \times Z$ é fechada para todo Z;

(ii) f é fechada e $f^{-1}[\{y\}]$ é compacto para todo $y \in Y$;

(iii) f é fechada e $f^{-1}[K]$ é compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.

Dica: para (i) $\Leftrightarrow$ (ii), tente imitar a demonstração do Teorema 3.1.17; se precisar de ajuda, confira [21]. ■

3.2 Extras

3.2.1 Espaços de Lindelöf e sigma-compactos

3.2.2 Álgebra Topológica: compacidade

3.2.3 Compactos em Análise Funcional

§1 O Teorema de Arzelà-Ascoli

§2 O Teorema de Banach-Alaoglu

§3 O Teorema de Eberlein-Šmulian

3.2.4 Compacidade em Teoria de Modelos

3.2.5 Manifestações do Lema do Ultrafiltro

[†]Funções com tal propriedade são chamadas de **próprias** por Bourbaki.

Capítulo 4

Bill paga o pato

4.1 Essencial: mais propriedades topológicas

4.1.1 Homeomorfismos

§1 Exercícios adicionais

Exercício 4.1.1 (Reescrever). ■

4.1.2 Axiomas de separação

4.1.3 Conexidade

4.1.4 Paracompacidade e metrizabilidade

4.2 Extras

4.2.1 Os racionais e o Conjunto de Cantor

4.2.2 Completude no sentido de Čech

Exercício 4.2.1 ($\substack{\star\\\star}$). Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Diremos que A é **rarefeito**[‡] se $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset$. Por sua vez, $M \subseteq X$ será chamado de **magro** (em X) se M é reunião enumerável de subconjuntos rarefeitos. Subconjuntos **não magros**[††] são aqueles que não são magros. **Espaços** (**não**) **magros** são aqueles que são subconjuntos (**não**) **magros** em si próprios.

a) Mostre que:

   i) se $A \subseteq B$ e B é magro em X, então A é magro em X;

   ii) a reunião enumerável de subconjuntos magros em X é magra em X;

   iii) se F é fechado com interior vazio, então F é magro em X.

[‡] *Nowhere dense*, algo como *denso em lugar nenhum*. Há textos que chamam tais subconjuntos de *raros* (como Bourbaki), mas isso pode dar um entendimento mais quantitativo ("há poucos") do que topológico.

[††] *Nonmeager*. É muito comum chamar subconjuntos magros como "de primeira categoria", enquanto subconjuntos não magros são também conhecidos como "de segunda categoria".

b) Mostre que se $f\colon X \to Y$ é um *homeomorfismo*, então $A \subseteq X$ é magro em X sse $f[A]$ é magro em Y.

c) Mostre que um espaço com pelo menos um ponto isolado não pode ser magro.

d) Mostre que se um espaço contém um aberto que é não magro com a topologia de subespaço, então o próprio espaço é não magro. ■

4.2.3 Topologia Conjuntista?!

§1 Compacidade avançada

§2 Funções cardinais

Capítulo 5

Conselho de uma Lagarta

Capítulo 6

Porco e pimenta

6.1 Essencial: espaços uniformes

6.2 Extras

6.2.1 Completamento de espaços uniformes

6.2.2 A integral de Haar

6.2.3 A reta real revisitada

6.2.4 A integral de Lebesgue

Capítulo 7

Um chá maluco

7.1 Essencial: espaços de funções

7.2 Extras

7.2.1 A convergência contínua

Capítulo 8

O campo de croqué da Rainha

8.1 *Extravaganza* das convergências

8.2 A convergência uniforme como você nunca viu

Capítulo 9

A história da Tartaruga Falsa

9.1 Essencial: um pouco de Topologia Algébrica

9.2 Extras

Capítulo 10

A Quadrilha da Lagosta

10.1 Essencial: categorias topológicas

10.2 Extras

Capítulo 11

Quem roubou as tortas?

11.1 Essencial: topologia sem pontos

11.2 Extras

Capítulo 12

O depoimento de Alice

Finalmente, o último capítulo... Na obra de Lewis Carroll, esta é a etapa em que Alice desperta e relata as aventuras que viveu para sua irmã, um pouco depois de participar do julgamento motivado pelo roubo das tortas. Por falta de ideias, achei que uma forma razoável de depoimento para o presente texto seria apresentar soluções de todos os problemas deixados nos capítulos anteriores. Como isto seria demais, optei por selecionar alguns. Quais? Aqueles que eu quis. Não me alongarei em mais explicações já que, num cenário ideal, este capítulo nunca será lido, não é mesmo? ;)

12.1 Você não deveria estar aqui

12.1.1 Soluções de alguns exercícios

Cap. 1

Exercício 1.1.1. Se não vale (i) ⇒ (ii), então para algum $\varepsilon > 0$, todo $\delta > 0$ tem uma *testemunha* $x_\delta \in X$ com $d_X(x_\delta, x) < \delta$ e $d_Y(f(x_\delta, x)) \geq \varepsilon$. Faça $x_n := x_{\frac{1}{2^n}}$ para todo n e seja feliz. Me recuso a apresentar (ii) ⇒ (i). □

Exercício 1.1.3. Se $x \in \overline{F \cap G}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $F \cap G \subseteq F, G$ com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, acarretando $x \in \overline{F} \cap \overline{G}$. Logo, $\overline{F \cap G} \subseteq \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap G$. Como a inclusão $S \subseteq \overline{S}$ vale para qualquer subconjunto[‡], o resultado segue. □

Exercício 1.1.4. Este problema tem três partes, mas como o item (b) é um problema simples de Análise Real, apresento a seguir apenas (a) e (c).

(a) Se $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \geq c$ e $n \in \mathbb{N}$, então $f(x) \in \left(c - \frac{1}{2^n}, +\infty\right)$ e, por conseguinte, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(x) \in \left(c - \frac{1}{2^n}, +\infty\right)$ para todo $k \geq N$, de modo que basta tomar $m := \max\{N, n\} + 1$. Reciprocamente, se para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n > n$ com $f_{m_n}(x) > c - \frac{1}{2^n}$, então podemos definir $k_0 := m_0$, $k_1 := m_{k_0} > k_0$ e assim por diante, de maneira que

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) \geq \lim_{n\to\infty} c - \frac{1}{2^n} = c,$$

onde $(*)$ vale pois $(f_{k_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$. Em vista disso, o restante do item (a) segue das definições de pré-imagem, reunião e interseção.

[‡]Pois sequências constantes em espaços métricos convergem!

(c) Primeiro, note que se $I = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$, onde cada $J_\lambda \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}\setminus I$ com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, então $x \notin I$. Caso contrário, existiriam $\lambda \in \Lambda$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $x_n \in J_\lambda \subseteq I$ para todo $n \geq N$. Isto mostra que $\mathbb{R}\setminus I$ é fechado. Antes de prosseguir, façamos $I_n := \left(-\infty, \alpha + \frac{1}{2^n}\right)$ e $J_n := \left(\beta - \frac{1}{2^n}, +\infty\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ao aplicar a segunda parte da dica, obtemos

$$\begin{aligned} f^{-1}[(\alpha,\beta)] &= f^{-1}[\mathbb{R}\setminus((-\infty,\alpha]\cup[\beta,+\infty))] = \ldots = \\ &= \left(\mathbb{R}\setminus f^{-1}[(-\infty,\alpha]]\right) \cap \left(\mathbb{R}\setminus f^{-1}[[\beta,+\infty)]\right) = \\ &= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\setminus \bigcup_{m>n} f_m^{-1}[I_n]\right) \cap \left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\setminus \bigcup_{t>s} f_t^{-1}[J_s]\right). \end{aligned}$$

Para simplificar o restante, escreveremos $F_n := \mathbb{R}\setminus\bigcup_{m>n} f_m^{-1}[I_n]$ e $G_s := \mathbb{R}\setminus\bigcup_{t>s} f_t^{-1}[J_s]$ para cada $n, s \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$f^{-1}[(\alpha,\beta)] = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \cap \left(\bigcup_{s\in\mathbb{N}} G_s\right) = \bigcup_{n,s\in\mathbb{N}} F_n \cap G_s.$$

A conclusão segue da primeira parte e dos itens anteriores (confira também o Exercício 1.1.3). □

Exercício 1.1.6. Basta comparar as duas definições: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p$ em X sse para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, p) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, enquanto $(d(x_n,p))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ em $\mathbb{R}$ sse para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|d(x_n,p) - 0| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. □

Exercício 1.1.8. Para a ida, note que

$$A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in A} B(x, r_x) \subseteq A.$$

Para a volta: bolas abertas são abertas; logo, reunião de bolas abertas é aberta. □

Exercício 1.1.9. Três equivalências devem ser provadas. Logo, são seis implicações.

((i), ($\Rightarrow$)) Segue por A ser aberto (cf. Definição 1.1.20).

((i), ($\Leftarrow$)) Tome $A := B_d(x, \varepsilon)$.

((ii), ($\Rightarrow$)) Por V ser aberto e $f(x) \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$, donde a continuidade em x assegura $\delta > 0$ com $f[B(x,\delta)] \subseteq V$.

((ii), ($\Leftarrow$)) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ em X e $V \subseteq Y$ é um aberto com $f(x) \in V$, então existe $U \subseteq X$ aberto com $x \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Pela Definição 1.1.20, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geq N\} \subseteq U$ e, consequentemente, $\{f(x_n) : n \geq N\} \subseteq V$. Como V foi tomado arbitrariamente, o item (i) garante que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ em Y. Portanto, f é contínua em x.

((iii), ($\Rightarrow$)) Em virtude da Definição 1.1.20, basta mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X que converge para um ponto $x \in f^{-1}[V]$, então existe $N \in \mathbb{N}$ com $\{x_n : n \geq N\} \subseteq f^{-1}[V]$. Ora, por f ser contínua, temos $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ em Y e, por V ser aberto em Y, a Definição 1.1.20 garante um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$. Acabou.

((iii), ($\Leftarrow$)) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ em X e $V \subseteq Y$ é um aberto em Y com $f(x) \in Y$, então, pela hipótese, $f^{-1}[V]$ é um aberto em X com $x \in f^{-1}[V]$, donde segue que existe $N \in \mathbb{N}$ com $\{x_n : n \geq N\} \subseteq f^{-1}[V]$ (pela Definição 1.1.20, lembra?), i.e., $\{f(x_n) : n \geq N\} \subseteq V$. Pelo item (i), conclui-se que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$. □

Exercício 1.1.12. Se f é contínua em x e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ em X, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ em Y. De fato, para $V \subseteq Y$ aberto com $f(x) \in V$, existe $U \subseteq X$ aberto com $x \in U$ e $f[U] \subseteq V$. Pela Definição 1.1.29, $\{x_n : n \geq N\} \subseteq U$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Logo, $\{f(x_n) : n \geq N\} \subseteq V$. $\square$

Exercício 1.1.13. Com X enumerável, teríamos $\{p\}$ aberto em X, pois $p \in \{p\}$ e $X \setminus \{p\}$ seria enumerável. Mas se isso ocorresse, qualquer função $f\colon X \to \mathbb{R}$ seria trivialmente contínua em p. De modo geral, ao pensar em abertos como testemunhas de convergência, a definição da topologia de X tenta proibir que conjuntos enumeráveis sejam testemunhas de convergência em p, justamente o que impede a existência de sequências (não triviais) que convirjam para o ponto escolhido. $\square$

Exercício 1.1.15. Para a parte menos óbvia, considere a métrica zero-um. $\square$

Exercício 1.1.19. Se $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, com $A_n \subseteq \mathbb{R}$ aberto para todo $n \in \mathbb{N}$, então as Leis de De Morgan nos dão $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus A_n$, com $\mathbb{R} \setminus A_n$ fechado para todo $n \in \mathbb{N}$ (pelo que você já viu em Análise Real)[†]. Por outro lado, $\mathbb{R} \setminus A_n$ não contém intervalos abertos não vazios, posto que qualquer intervalo aberto não vazio contém números racionais. Logo, $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus A_n$, o que viola o Teorema 1.1.17, posto que $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\{r\}$ é fechado que não contém intervalos abertos para qualquer $r \in \mathbb{R}$. $\square$

Exerício 1.2.2. Um modo divertido de provar a desigualdade consiste em observar que, pela definição de ínfimo, existe uma sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais satisfazendo $\|T(x)\| \leq r_n\|x\|$ e $r_n \to \|T\|$, de modo que

$$\|T(x)\| \leq r_n\|x\| \Rightarrow \|T(x)\| \leq \|x\| \lim_{n\to\infty} r_n = \|x\| \cdot \|T\|. \qquad \square$$

Exercício 1.2.3. Se F é fechado e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em F com a métrica de X restrita a F, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainda é de Cauchy em X, logo converge para um ponto $x \in X$ (pois X é completo), que deve pertencer a F por este ser fechado. Reciprocamente, se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em F que converge em X para um ponto y de X, então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X, logo é de Cauchy em F, donde a completude de F assegura $y' \in F$ com $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y'$. A unicidade dos limites em espaços métricos permite concluir que $y = y'$ e, portanto, $y \in F$, mostrando que F é fechado. $\square$

Exercício 1.2.4. Este problema tem três partes.

(a). Se $y \in Y$ e $B(y, r) \subseteq Y$ para algum $r > 0$, então para qualquer $x \in X \setminus \{0\}$ temos

$$z := y + \frac{r}{2\|x\|}x \in B(y, r) \subseteq Y,$$

acarretando $z - y \in Y$ e $x = \frac{2\|x\|}{r}(z - y) \in Y$.

(b). Em vez de provar a primeira parte da dica para espaços de Banach, convém fazer a versão para espaços métricos completos de uma vez por todas.

⌜**Afirmação 12.1.1 (Teorema de Baire para métricas completas).** *Se X é espaço métrico completo e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de fechados de X tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, então algum F_n contém uma bola aberta.*

[†] Mas também segue do Exercício 1.1.8 + parte inicial do item (c) no Exercício 1.1.4.

Prova da Afirmação. Primeiramente, note que se $B(x,r)$ é uma bola aberta e $F \subseteq X$ é um fechado que não contém bolas abertas, então $B(x,r) \setminus F$ contém pelo menos uma bola fechada (cf. Exercício 1.1.14). De fato, para algum $y \in B(x,r) \setminus F$ (que existe por conta da hipótese sobre F), deve existir $s > 0$ tal que $B(y,s) \subseteq B(x,r) \setminus F$, pois o contrário permitiria obter uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F com $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y$, levando a $y \in F$ (cf. Exercício 2.1.27). Daí, basta tomar $B\left[y, \frac{s}{2}\right] \subseteq B(y,s)$. Agora, vamos supor que nenhum dos F_n's contém bolas abertas.

Para $\widetilde{x} \in X$ fixado, considere $A_0 := B(\widetilde{x}, 1)$. Pelo que se observou acima, $A_0 \setminus F_0$ contém uma bola fechada, digamos $B[x_0, r_0]$ para certos $x_0 \in A_0$ e $r_0 > 0$. Substituindo r_0 por $\min\{1, r_0\}$ se necessário, percebe-se que não há perda de generalidade em supor $r_0 \leq 1$. Repetindo o argumento, desta vez com $A_1 := B(x_0, r_0)$ e F_1, existem $x_1 \in A_1$ e $r_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ tais que $B[x_1, r_1] \subseteq A_1 \setminus F_1$. Procedendo recursivamente, obtemos $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1]$ com $0 < r_n \leq \frac{1}{2^n}$ e uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X satisfazendo $B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subseteq B(x_n, r_n)$ e $B[x_n, r_n] \cap F_n = \emptyset$ para todo n.

Para finalizar, basta notar que as inclusões asseguram que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, enquanto a a vacuidade das interseções permite concluir que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, então $X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Com efeito:

(i) para $N \in \mathbb{N}$ fixado e $n \geq N+1$ qualquer temos $B[x_n, r_n] \subseteq B(x_N, r_n)$, de modo que se $m \geq N+1$ então

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_N) + d(x_N, x_n) < 2r_N \leq \frac{1}{2^{N-1}},$$

donde segue a condição de Cauchy;

(ii) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ em X, então $(x_n)_{n\geq m} \to x$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$ fixado e, como tal subsequência está contida no fechado $B[x_m, r_m]$, segue que $x \in B[x_m, r_m]$, acarretando $x \notin F_m$. ⌟

De volta ao problema, se X é espaço normado com dimensão infinita enumerável, digamos que com base $\mathcal{B} := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, então ao fazer $Y_n := \langle b_0, \ldots, b_n \rangle$ para cada n, i.e., o subespaço vetorial gerado por $b_0, \ldots, b_n$, cada Y_n é um subespaço próprio que não contém bolas abertas (pelo item (a)) e, além disso, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Pela suposição sugerida no enunciado, cada Y_n é um subespaço de Banach de X, donde segue que cada Y_n é fechado (pelo exercício anterior). Logo, X não satisfaz a tese da afirmação inicial e, portanto, não pode ser completo.

(c). Segue do item anterior, posto que $c_{\mathbb{K},00}(\mathbb{N})$ tem dimensão infinita enumerável. Um dos modos de perceber isso é notar que tal espaço é isomorfo ao $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}[x]$ dos polinômios na indeterminada x e coeficientes em $\mathbb{K}$: uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{\mathbb{K},00}(\mathbb{N})$ corresponde naturalmente ao polinômio $p_0 + p_1 x + \ldots + p_N x^N$, onde $N \in \mathbb{N}$ é tal que $p_n = 0$ para todo $n \geq N$. □

Exercício 1.2.5. Os subconjuntos $(-\infty, p)_{\mathbb{P}}$ e $(p, +\infty)_{\mathbb{P}}$ são intervalos por conta da transitividade da ordem. Para os demais, basta observar que interseção de intervalos é intervalo, i.e., *se* $(I_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *é uma* Γ*-upla de intervalos, então* $I := \bigcap_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$ *é um intervalo*: de fato, se $x, y, z \in \mathbb{P}$ são tais que $x, z \in I$ e $x \leq y \leq z$, então $x, z \in I_\gamma$ para todo γ, acarretando $y \in I_\gamma$ para todo γ, ou seja, $y \in I$. □

Exercício 1.2.6. A primeira parte do item (a) segue da definição de boa ordem, enquanto a segunda parte é quase automática: se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ fosse estritamente decrescente, então $\operatorname{im}(f)$ não teria menor elemento. Para o item (b), considere um subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{P}$ sem menor elemento. Por A ser não vazio, há $a_0 \in A$ e, por a_0 não ser o menor de A, existe $a_1 \in A$ com $a_1 < a_0$ (e aqui a tricotomia foi usada!)[†]. Por $a_1 \in A$ não ser o menor elemento de A, existe $a_2 \in A$ com $a_2 < a_1$... □

Exercício 1.2.7. Para a segunda parte, note que se $f\colon \mathbb{R} \to (0,1)$ *fosse* isometria, então existiriam pontos $f(0), f(2) \in (0,1)$ tais que $|f(0) - f(2)| = 2$, mas isto é impossível. □

Exercício 1.2.10. No Exercício 1.2.9, o ponto essencial do argumento está no fato de que um isomorfismo de ordens determina uma bijeção entre os intervalos fundamentais por meio de imagens e pré-imagens. Por outro lado, a função do Exemplo 1.2.48 não apresenta esse comportamento: por exemplo, $f^{-1}\left[(2,+\infty)_{\mathbb{P}'}\right] = [1,+\infty)_{\mathbb{P}}$. □

Exercício 1.2.11. Note que se $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$ são ordens totais e $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}'$ preserva supremos e ínfimos, então $f\colon \mathbb{T}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{T}'^{\mathrm{op}}$ preserva ínfimos e supremos, onde $\mathbb{P}^{\mathrm{op}}$ indica $\mathbb{P}$ com a ordem inversa. Como os intervalos fundamentais de $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}^{\mathrm{op}}$ coincidem, segue que as topologias de $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}^{\mathrm{op}}$ são idênticas, de modo que a afirmação restante acerca de pré-imagens da forma $f^{-1}\left[(-\infty,c)_{\mathbb{T}'}\right]$ segue pois $(-\infty,c)_{\mathbb{T}'} = (c,+\infty)_{\mathbb{T}'^{\mathrm{op}}}$. Alternativamente: basta refazer todo o argumento trocando $\leq$ por $\geq$ e vice-versa. □

Exercício 1.2.12. Setas identidades são isomorfismos. A (única) inversa de um isomorfismo é um isomorfismo. Composição de isomorfismos é isomorfismo. □

Exercício 1.2.14. A função f do Exemplo 1.2.48 é, na verdade, uma bijeção contínua da forma $[0,2] \to [0,2) \cup [3,4]$, onde domínio e contradomínio são considerados com as topologias induzidas por suas métricas herdadas de $\mathbb{R}$. No entanto, a inversa $[0,2) \cup [3,4] \to [0,2]$ não é contínua. □

Observação 12.1.2 (*For fun*)**.** Na solução anterior, se considerarmos $[0,2)\cup[3,4]$ com a topologia induzida pela *ordem* herdada de $\mathbb{R}$, então a inversa $[0,2)\cup[3,4] \to [0,2]$ passa a ser contínua! Como isto não foi um exercício dos capítulos anteriores e não há um Capítulo 13, você terá que resolver esse por conta própria, se quiser. △

Exercício 1.2.18. (FAZER) □

Exercício 1.2.19. (COPIAR) □

Cap. 2

Exercício 2.1.38. Em $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$, para quaisquer subconjuntos distintos $A, B \subseteq X$ deve-se ter $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$ pois $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 1$ para qualquer $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, donde segue que $B_{\|\cdot\|_\infty}(\chi_A, 1) \cap \{\chi_A : A \subseteq X\} = \{\chi_A\}$. Em outras palavras, $\mathcal{D} \coloneqq \{\chi_A : A \subseteq X\}$ é (subespaço) discreto. Ocorre que se X é infinito, então a família $\wp(X)$ dos subconjuntos de X é não enumerável e, por conseguinte, $\mathcal{D}$ é um discreto não enumerável de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$. A conclusão segue como no final do Exemplo 2.1.77. □

[†] A rigor, por a_0 não ser o menor de A, existe $a_1 \in A$ com $a_0 \not\leq a_1$, e daí a tricotomia força que se tenha $a_1 < a_0$.

Exercício 2.2.51. Podemos fixar $x \in E$ tal que $\varphi(x) = 1$. Agora, para $u \in U$ fixado, a função $\psi \colon K \to E$ dada por $\psi(\lambda) := u + \lambda x$ é contínua, por ser composição das funções contínuas $\lambda \mapsto (u, \lambda x)$ e $(a, b) \mapsto a + b$. Logo, pela continuidade na origem, existe um aberto $O \subseteq K$ tal que $0 \in O$ e $\psi[O] \subseteq U$, donde segue que $V := O + \varphi(u)$ é um aberto de K em torno de $\varphi(u)$ tal que $V \subseteq \varphi[U]$, mostrando que $\varphi[U]$ é aberto. $\square$

Exercício 2.2.65. Por um lado, se $\|\cdot\|_D$ é norma, $Y \subseteq X$ é subespaço vetorial com $Y \subseteq D$ e $y \in Y$, então $\|y\|_D = 0$ pois $ry \in Y \subseteq D$ para todo $r \in \mathbb{R}$, acarretando $y = 0$. Por outro lado, se $\|x\|_D = 0$ para $x \neq 0$, então $\mathbb{K}x \subseteq D$ pois, para $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{K}$, existe $r \in \left(0, \frac{1}{|\lambda|}\right)$ tal que $x \in rD$, acarretando $\lambda x \in \lambda r D \subseteq D$ pois $|\lambda r| < 1$ e D é balanceado. $\square$

12.1.2 Verificações que você deveria ter feito

Cap. 1

Primeira pergunta $(\star)$ *na demonstração do Lema 1.1.10.* Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = a_n$, de modo que $x \in F_m$ para todo $m \geq n$, i.e., $f_m(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ para todo $m \geq n$. $\square$

Segunda pergunta $(\star)$ *na demonstração do Lema 1.1.12.* Com os ferramentais disponíveis nesta etapa do texto, existe $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em S com $(z_m)_{m\in\mathbb{N}} \to y_n$, o que garante algum $z_N := x_n$ satisfazendo $d(y_n, x_n) < \frac{1}{2^{n+1}}$. $\square$

Primeira pergunta $(\star)$ *no parágrafo final da demonstração do Teorema 1.1.17.* Confira o argumento geral na prova da Afirmação 12.1.1, item (i) (pág. 210). $\square$

Exemplo 1.1.25, quem são os abertos induzidos por d_2 *e* d_∞*?* $\left({}^{\star}_{\star\star}\right)$. A pergunta pode ser difícil nesse ponto do texto a depender de sua bagagem. Primeiro, pelo Exercício 1.1.8, um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é d_2-aberto sse para todo $x \in A$ existe $r > 0$ com $B_{d_2}(x, r) \subseteq A$. Em outras palavras, os d_2-abertos são os abertos usuais de $\mathbb{R}^2$, que você provavelmente conheceu em algum curso de Cálculo n, para $n \geq 2$.

Por outro lado, tomando $r' := \frac{r}{\sqrt{2}}$, resulta[†] $B_{d_\infty}(x, r') \subseteq B_{d_2}(x, r)$. Assim, em virtude do Exercício 1.1.8, segue que todo subconjunto d_2-aberto é d_∞-aberto: afinal, se A é d_2-aberto, então para todo $x \in A$ existe $r > 0$ com $B_{d_2}(x, r) \subseteq A$ e, consequentemente, $B_{d_\infty}(x, r') \subseteq A$. Analogamente, para mostrar que todo d_∞-aberto é d_2-aberto, basta *provar* que $B_{d_2}(x, r) \subseteq B_{d_\infty}(x, r)$ para quaiquer $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. $\square$

Exemplo 1.2.8, completude de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ $\left({}^{\star}_{\star}\right)$. Em vez de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$, vamos considerar $\mathcal{B}_E(X)$, onde E é um $\mathbb{K}$-espaço de Banach com uma norma $\|\cdot\|$ e $f \in \mathcal{B}_E(X)$ sse $f \colon X \to E$ satisfaz $\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} \|f(x)\| < +\infty$. A ideia é, justamente, mostrar que $\|\cdot\|_\infty \colon \mathcal{B}_E(X) \to \mathbb{R}$ é uma norma cuja métrica induzida é completa.

As condições de norma seguem das propriedades de supremo em $\mathbb{R}$ — e nisso, a demonstração da Proposição 1.1.6 pode ajudar. Para a completude, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_E(X)$, então para cada $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em E, pois

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \sup_{y\in X} \|f_m(y) - f_n(y)\| = \|f_m - f_n\|_\infty$$

e, portanto, converge para um (único!) vetor, digamos $f(x) \in E$.

[†]E se você PRECISOU procurar pela solução aqui: FAÇA AS CONTAS PARA VERIFICAR A INCLUSÃO. E não reclame.

Para encerrar, basta mostrar que $f \in \mathcal{B}_E(X)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ em $\mathcal{B}_E(X)$.

(i) Temos $f \in \mathcal{B}_E(X)$ pois, para quaisquer $x \in X$ e $N \in \mathbb{N}$,

$$\|f(x)\| \leq \|f_N(x)\| + \|f_N(x) - f(x)\| \leq M + \|f_N(x) - f(x)\|,$$

onde $M > 0$ é tal que $\|f_n\|_\infty \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que existe pois sequências convergentes em espaços normados são limitadas[†], e daí

$$\|f(x)\| \leq M + \|f_N(x) - f(x)\| \Rightarrow \|f(x)\| \leq M + \lim_{N\to\infty} \|f_N(x) - f(x)\| = M,$$

essencialmente por ANÁLISE NA RETA.

(ii) Para provar que $(f_n)_n \to f$ em $\mathcal{B}_E(X)$, observe que para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq N$, e veremos justamente que $\|f - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$ para todo $k \geq N$. Com efeito, neste caso temos

$$\|f_m(x) - f_k(x)\| \leq \|f_m - f_k\|_\infty < \varepsilon$$

para todo $m \geq N$. Como $(f_m(x))_m$ converge para $f(x)$ e $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ é contínua[‡], resulta

$$\|f(x) - f_k(x)\| = \left\|\lim_{m\to\infty} f_m(x) - f_k(x)\right\| = \lim_{m\to\infty} \|f_m(x) - f_k(x)\| \leq \varepsilon,$$

donde a arbitrariedade do ponto x tomado garante $\|f - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$. □

Exemplo 1.2.10, subespaços fechados de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ ($\star$). Antes de qualquer outra coisa, lembre-se: se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, então cada s_n é uma sequência em $\mathbb{K}$, digamos $s_n := (s_n(m))_{m\in\mathbb{N}}$, com $s_n(m) \in \mathbb{K}$ para cada $m, n \in \mathbb{K}$. Suponha então que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \to s$ em $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.

(i) *Se cada $s_n \in c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, então $s \in c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.* Basta mostrar que s é sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Ora, para $m, n, N \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}|s(m) - s(n)| &\leq |s(m) - s_N(m)| + |s_N(m) - s_N(n)| + |s_N(n) - s(n)|\\ &\leq 2\|s - s_N\|_\infty + |s_N(m) - s_N(n)|.\end{aligned}$$

Fixado $\varepsilon > 0$, a hipótese sobre $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nos dá $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|s - s_N\|_\infty < \varepsilon$. Como $s_N := (s_N(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge por hipótese, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|s_N(m) - s_N(n)| < \varepsilon$ sempre que $m, n \geq K$. Logo, para $m, n \geq K$, $|s(m) - s(n)| < 3\varepsilon$.

(ii) *Se cada $s_n \in c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N})$, então $s \in c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N})$.* Por valer $c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N}) \subseteq c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, o item anterior já assegura que s é sequência convergente. Resta mostrar que $s \to 0$ em $\mathbb{K}$. Ora, para $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$|s(n)| \leq |s_m(n)| + |s_m(n) - s(n)| \leq |s_m(n)| + \|s_m - s\|_\infty,$$

Fixado $\varepsilon > 0$, existem $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$ tais que $\|s_{N_0} - s\|_\infty < \varepsilon$ e $|s_{N_0}(n)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N_1$, acarretando $|s(n)| < 2\varepsilon$. □

[†] *For fun*: um modo indireto divertidíssimo de perceber isso é lembrar que se $x_n \to x$ num espaço topológico, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é compacto, mas compactos são limitados em espaços normados.

[‡] Confira a discussão do Exemplo 3.1.13 na página 215 se precisar de ajuda.

Observação 12.1.3. Os fatos anteriores são sintomas de fenômenos mais gerais. Por exemplo, deve ser claro que $\mathbb{K}$ pode ser trocado por um espaço de Banach E sem alterações significativas na notação. Mas isto é só a ponta do *iceberg*: o item (i), por exemplo, é manifestação de que limite uniforme de funções contínuas é contínua! $\triangle$

Final da demonstração do Corolário 1.2.13 $(\star)$. A primeira parte do corolário assegura a existência de constantes $r, R > 0$ tais que $r\|x\| \leq \|x\|' \leq R\|x\|$ para todo $x \in X$. Em particular, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em X, então

$$r\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_n\|' \leq R\|x_m - x_n\|.$$

Eu me recuso a dar mais detalhes. $\square$

Perguntas ao longo da demonstração da Proposição 1.2.34 $(\star)$. Na primeira, note que se os α_n's forem escolhidos satisfazendo $|f(\alpha_n) - f(\beta)| < \frac{1}{2^n}$ para qualquer $\beta > \alpha_n$, então para $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ valerá $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{2^n}$ para quaisquer $\beta > \alpha$ e $n \in \mathbb{N}$ pois $\beta > \alpha \Rightarrow \beta > \alpha_n$. Para a segunda pergunta, observe que se $V \subseteq [0, \omega_1)$ é aberto com $\gamma \in V$, então existe um intervalo aberto $I \subseteq [0, \omega_1)$ com $\gamma \in I$. Como $\gamma \neq 0$ e γ não é máximo de $[0, \omega_1)$, I deve ser da forma $I = (\delta, \delta')$. Para a última pergunta, observe que a argumentação impede a existência de um aberto V em torno de γ satisfazendo $f[V] \subseteq (f(\gamma) - \varepsilon, f(\gamma) + \varepsilon)_{\mathbb{R}}$, i.e., ε testemunha que f é descontínua em γ. $\square$

Completar a demonstração do Corolário 1.2.35 $(^{\star}_{\star\star})$. A função f sugerida é sequencialmente contínua pois, se $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência em $[0, \omega_1]$ que converge para $\alpha \in [0, \omega_1]$, então de duas, uma:

- $\alpha < \omega_1$, e daí precisa existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n \in [0, \alpha + 1)$ para todo $n \geq N$, acarretando $f(\alpha_n) = f(\alpha) = 0$ e, portanto, $(f(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(\alpha)$; ou
- $\alpha = \omega_1$, e daí os resultados anteriores impedem que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenha subsequência inteiramente contida em $[0, \omega_1)$ (pois o contrário daria uma sequência em $[0, \omega_1)$ que converge para ω_1); consequentemente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = \omega_1$ para todo $n \geq N$, donde segue que $(f(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(\omega_1)$.

No entanto, f é descontínua em ω_1. Para $r := \frac{|f(\omega_1)|}{2}$, nenhum aberto $V \subseteq [0, \omega_1]$ em torno de ω_1 satisfaz $f[V] \subseteq (f(\omega_1) - r, f(\omega_1) + r) := U$, afinal deve existir $\alpha \in V \cap [0, \omega_1)$ (cf. Proposição 1.2.33) e, por conseguinte, $f(\alpha) = 0 \notin U$. $\square$

Cap. 2

Existência de ponto maroto na demonstração da Proposição 2.1.39 $(^{\star}_{\star\star})$. Trata-se de um argumento simples, mas não explicitado e usado diversas vezes ao longo do texto:

$\ulcorner$**Afirmação 12.1.4.** *Um subconjunto A de um espaço topológico X é aberto se, e somente se, para todo $p \in A$ existe um subconjunto aberto $B_p \subseteq X$ tal que $p \in B_p$ e $B_p \subseteq A$.*

Prova da Afirmação. Para a ida, tome $B_p := A$ para todo $p \in A$. Para a volta, note que

$$A = \bigcup_{p\in A} \{p\} \subseteq \bigcup_{p\in A} B_p \subseteq A,$$

mostrando que A é reunião de abertos (cf. Exercício 1.1.8). $\lrcorner$

No caso da proposição em questão, usou-se a contrapositiva da afirmação acima. $\square$

Cap. 3

Exemplo 3.1.13, normas são contínuas e ilimitadas ($\star$). Se $E \neq 0$ é espaço normado, então existe $x \in E$ com $x \neq 0$ e daí, para qualquer $r > 0$,

$$\left\| \frac{1}{\|x\|}(r+1)x \right\| = r + 1 > r,$$

mostrando que $\|\cdot\|$ é ilimitada. Para a continuidade (uniforme), lembre-se de que para quaisquer $u, v \in E$ se verifica $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1.17, (i) $\Rightarrow$ (ii). Para um subconjunto fechado $F \subseteq X \times Y$, mostraremos que $Y \setminus \pi_Y[F]$ é aberto em Y. Se $y \notin \pi_Y[F]$, então $(x, y) \notin F$ para cada ponto $x \in X$, donde segue que existem abertos $U_x \subseteq X$ e $V_x \subseteq Y$ satisfazendo

$$(x, y) \in U_x \times V_x \subseteq (X \times Y) \setminus F \quad \text{(por quê?)}^{\dagger}.$$

Como $\mathcal{U} := \{U_x : x \in X\}$ é cobertura aberta para X, a hipótese garante um subconjunto finito $H \subseteq X$ tal que $\mathcal{U}' := \{U_x : x \in H\}$ ainda recobre X. Por construção, temos $y \in V := \bigcap_{x \in H} V_x$, um aberto de Y que satisfaz $V \subseteq Y \setminus \pi_Y[F]$: com efeito, se $z \in \pi_Y[F]$, então $(x', z) \in F$ para algum $x' \in X$, donde segue que existe $x \in H$ com $x' \in U_x$, acarretando $z \notin V_x$, caso contrário teríamos $(x', z) \in (U_x \times V_x) \cap F$, contrariando a escolha dos abertos $U_x \subseteq X$ e $V_x \subseteq Y$. $\square$

Detalhes diversos ($^{\star}_{\star}$) *e* ($^{\star}_{\star\star}$) *na demonstração do Teorema 3.1.76.* Se $X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} Y_i$ e, para cada $i \in \mathcal{I}$, $D_i \subseteq Y_i$ é denso em Y_i, então $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} D_i$ é denso em X: se $V \subseteq X$ é aberto não vazio, então $V \cap Y_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \mathcal{I}$, acarretando $D_i \cap (V \cap Y_i) \neq \emptyset$. Logo, *se X é reunião enumerável de subespaços separáveis, então X é separável.*

Além disso, se $\mathcal{B}$ é base de abertos para a topologia de um espaço localmente compacto de Hausdorff, então $\mathcal{C} := \left\{C \in \mathcal{B} : \overline{C} \text{ é compacto}\right\}$ ainda é base para X. Com efeito, se $V \subseteq X$ é aberto e $x \in V$, então a compacidade local assegura um aberto $U \subseteq X$ e um compacto K tais que $x \in U \subseteq K \subseteq V$. Daí, tomando $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subseteq U$, segue que $C \subseteq V$ com $\overline{C}$ compacto, posto que K é fechado (por X ser de Hausdorff) e, por conseguinte, $\overline{C} \subseteq K$, i.e., $\overline{C}$ é fechado num compacto. Em particular, se $\mathcal{B}$ é enumerável, então $\mathcal{C}$ também é, o que prova a afirmação (B).

A afirmação (C), por sua vez, segue pois $\overline{D_n} = \bigcup_{j \leq n} \overline{C_j}$ com cada $\overline{C_j}$ compacto (pois $C_j \in \mathcal{C}$), enquanto $\left(\overline{D_m}\right)_m$ é crescente pois $(D_m)_m$ é crescente (e $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$). O fato de cada C_j ser aberto é usado implicitamente no começo de (D): por K ser compacto, existe N tal que $K \subseteq \bigcup_{j \leq N} C_j := D_N$. O restante segue da definição de base local.

Enfim, tratemos da métrica. Primeiro, h está bem definida pois $x \neq \infty$ para todo $x \in X$, acarretando $\rho(x, \infty) > 0$, donde a continuidade segue com os argumentos clássicos de composição. Note que por X ser subespaço de X^+, a restrição da métrica ρ a X define uma métrica compatível com a topologia de X. Desse modo, para encerrar, basta mostrar que ρ induz a mesma topologia que a métrica $\mu \colon X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(x, y) := \rho(x, y) + |h(x) - h(y)|.$$

A prova de que μ é uma métrica envolve apenas as verificações de sempre. Agora, por valer $\rho \leq \mu$, resulta que $B_\mu(x, r) \subseteq B_\rho(x, r)$ para quaisquer $x \in X$ e $r > 0$, enquanto a continuidade de h permite obter $r' > 0$ tal que $B_\rho(x, r') \subseteq B_\mu(x, r)$, donde não é difícil concluir que μ e ρ definem a mesma topologia em X. $\square$

† Confira o Exemplo 2.1.89 se precisar de ajuda ($^{\star}_{\star}$). Ou faça um desenho (é sério, também ajuda!).

Cap. 4

12.1.3 Sugestões diversas

Alguns exercícios escaparam da classificação estrelar $1-3$ por serem realmente intrincados. Por isso listarei algumas sugestões a seguir — mas sem especificar a qual problema a sugestão se refere. Divirta-se!

Aviso: meu pragmatismo acabou, o que significa que escreverei Y^X em vez de $\mathrm{Fun}(X,Y)$.

Sugestão. Para $F \subseteq X \times Y$ fechado e $y \in \overline{\pi_Y[F]}$, existe uma rede $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{A}}$ em F tal que $(y_\alpha)_\alpha \to y$, bem como uma sub-rede $(z_\beta)_{\beta\in\mathbb{B}}$ de $(x_\alpha)_\alpha$ tal que $(z_\beta)_\beta \to x$. Definindo $\mathbb{E} := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{A}\times\mathbb{B} : x_\alpha = z_\beta\}$, segue que $\mathbb{E}$ é subconjunto cofinal de $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ e, portanto, dirigido. Definindo $u_e := z_{\pi_{\mathbb{B}}(e)}$ e $v_e := y_{\pi_{\mathbb{A}}(e)}$ para cada $e \in \mathbb{E}$, segue que $(u_e)_e$ e $(v_e)_e$ são sub-redes de $(z_\beta)_\beta$ e $(y_\alpha)_\alpha$, respectivamente, acarretando $(u_e, v_e)_e \to (x,y)$ em $X\times Y$, com $(u_e, v_e) = \big(z_{\pi_{\mathbb{B}}(e)}, y_{\pi_{\mathbb{A}}(e)}\big) = \big(x_{\pi_{\mathbb{A}}(e)}, y_{\pi_{\mathbb{A}}(e)}\big) \in F$ pois $e \in \mathbb{E}$, donde segue que $(x,y) \in F$, como desejado. $\square$

Sugestão. $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial, e $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é transformação $\mathbb{Q}$-linear sse é um morfismo de grupos $(\mathbb{R},+,0)\to(\mathbb{R},+,0)$. Como $\mathbb{R}$ admite uma base *infinita* $\mathcal{B}$ como $\mathbb{Q}$-espaço vetorial, toda função $f\colon\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ se estende de forma única a uma transformação $\mathbb{Q}$-linear $\overline{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Logo, há exatamente $|\mathbb{R}^{\mathcal{B}}|$ morfismos de grupos de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Por outro lado, $|\mathcal{B}| = |\mathbb{R}|$, caso contrário teríamos

$$|\mathcal{B}| < |\mathbb{R}| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathbb{Q}\times\mathcal{B}|^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathbb{Q}\times\mathcal{B}| = \aleph_0\cdot|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}|.$$

Logo, há $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{R}}|$ morfismos de grupos do tipo $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dos quais *apenas* $|\mathbb{R}|$ são contínuos, e $|X| < |2^X|$ para qualquer X, pelo Teorema de Cantor. $\square$

Sugestão. Nem sempre. No caso sugerido ($X := \mathbb{R}^2$), a composição

$$\circ\colon \mathrm{Homeo}\big(\mathbb{R}^2\big)\times\mathrm{Homeo}\big(\mathbb{R}^2\big)\to\mathrm{Homeo}\big(\mathbb{R}^2\big)$$

não é (nem sequencialmente) contínua em $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, pois existem sequências $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ de homeomorfismos da forma $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ambas convergindo pontualmente para $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, tais que $(f_n\circ g_n)_n$ não converge pontualmente para $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Para isso, faça $g_n(x) := x + \big(\frac{1}{n}, 0\big)$ para $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $x\in\mathbb{R}^2$, e note que $f_n(g_n(0,0)) = f_n\big(\frac{1}{n},0\big)$. Assim, basta definir homeomorfismos f_n's tais que $(f_n)_n \to_{\mathrm{p}} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ com $\big(f_n(\frac{1}{n},0)\big)_n \not\to (0,0)$: por exemplo, com $\rho_n\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ contínua satisfazendo $\rho_n(\frac{1}{n}) = 1$ e $\rho_n(z) = 0$ para todo z fora de um intervalo fechado em torno de $\frac{1}{n}$ com diâmetro $\frac{1}{2^n}$, defina $f_n(x,y) := (x, y+\rho_n(x))$, homeomorfismo cuja inversa é dada por $(x,y)\mapsto(x, y-\rho_n(x))$. $\square$

Lista de símbolos e siglas

$\mathbb{R}$	reta real, conjunto dos números reais, etc., 13
$x \mathrel{R} y$	x e y são R-relacionados, 13
$\mathrm{Fun}(A, B)$	conjunto das funções do tipo $A \to B$, 13
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathbb{R}} L$	a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L em $\mathbb{R}$, 13
sse	abreviação para “se, e somente se”, 14
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_d x$	a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x no espaço métrico (X, d), 14
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{u}} f$	a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, 14
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathrm{p}} f$	a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f, 16
$\chi_{X,S}$ ou χ_S	função característica do subconjunto $S \subseteq X$, 16
$\overline{S}$	fecho de S num espaço (métrico, topológico, de convergência), 17
$\lvert X\rvert$	número cardinal/cardinalidade do conjunto X, 18
$B_d(x, r)$ ou $B(x, r)$	d-bola aberta de centro x e raio r, 20
d_2	métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$, 22
d_∞	métrica do máximo/do supremo, 22
$\bigcup \mathcal{U}$	reunião da família $\mathcal{U}$, 23
$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$	$\bigcup \mathcal{U}$ para $\mathcal{U} \coloneqq \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$, 23
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{T}} x$	a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, 23
$B_d[x, r]$ ou $B[x, r]$	d-bola fechada de centro x e raio r, 27
$\wp(X)$	conjunto das partes de X, 27
$\bigcap \mathcal{U}$	interseção de uma família não vazia $\mathcal{U}$, 27
$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i$	$\bigcap \mathcal{U}$ para $\mathcal{U} \coloneqq \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$, 27
$\mathbb{K}$	corpo topológico com um valor absoluto, em geral $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, 28
$\lVert\cdot\rVert$	notação padrão para (semi) normas, 28
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	notação padrão para produtos internos, 28
$\Re(z)$	parte real do número complexo z, 28
$\lVert\cdot\rVert_1$	norma L_1 ou norma da soma, 29
$\mathrm{C}(X, Y)$	conjunto das funções contínuas de X em Y, 29
$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$	espaço das funções limitadas da forma $X \to \mathbb{K}$, 29
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	norma do supremo ou norma do máximo, 29

$l^\infty_{\mathbb{K}}$ ou l^∞	espaço das sequências limitadas em $\mathbb{K}$, 30
$c_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ ou c	espaço das sequências convergentes em $\mathbb{K}$, 30
$c_{\mathbb{K},0}(\mathbb{N})$ ou c_0	espaço das sequências em $\mathbb{K}$ que convergem para 0, 30
$\mathrm{TLin}_{\mathbb{K}}(X, Y)$	espaço das transformações $\mathbb{K}$-lineares contínuas de X em Y, 31
$(-\infty, p)_{\mathbb{P}}$	intervalo fundamental em $\mathbb{P}$ estritamente abaixo de p, 33
$(p, +\infty)_{\mathbb{P}}$	intervalo fundamental em $\mathbb{P}$ estritamente acima de p, 33
$\overline{\mathbb{R}}$	reta estendida, 33
$\mathbb{V}$	classe de todos os conjuntos, 34
ω	primeiro ordinal infinito, *a.k.a.* $\mathbb{N}$, 35
ω_1	primeiro ordinal não enumerável, 36
$\mathrm{Obj}\,(\mathscr{C})$	classe de objetos da categoria $\mathscr{C}$, 39
$\mathrm{Arr}\,(\mathscr{C})$	classe de morfismos da categoria $\mathscr{C}$, 39
$\mathrm{cod}\,(f)$	codomínio da seta f, 39
$\mathscr{C}(x, y)$	classe dos morfismos entre x e y na categoria $\mathscr{C}$, 39
$\textsc{Set}$	categoria dos conjuntos, 39
$\textsc{Group}$	categoria dos grupos, 39
$\textsc{RIng}$	categoria dos anéis com unidade, 39
$\textsc{CRIng}$	categoria dos anéis comutativos e com unidade, 39
${}_K\textsc{Vect}$	categoria dos K-espaços vetoriais, 39
$\textsc{Top}$	categoria dos espaços topológicos, 40
$\textsc{Met}_{\textsc{cont}}$	categoria dos espaços métricos e funções contínuas, 40
$\textsc{Met}_{\textsc{dist}}$	categoria dos espaços métricos e isometrias, 40
$\textsc{Poset}$	categoria das ordens parciais, 44
X^*	dual topológico do espaço normado X, 46
$\mathsf{Norm}_{\mathbb{K}}$	categoria dos $\mathbb{K}$-espaços normados, 46
$\mathsf{Ban}_{\mathbb{K}}$	categoria dos $\mathbb{K}$-espaços de Banach, 46
X^{**}	espaço bidual topológico do espaço normado X, 46
$\mathrm{diam}\,(S)$	diâmetro de S, 47
$\mathcal{T}_p$	pré-filtro de $\mathcal{T}$-abertos em torno de p, 50
$(x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ ou $(x_d)_d$	rede com respeito a um conjunto dirigido $\mathbb{D}$, 51
$\varphi \to_{\mathcal{T}} p$ ou $x_d \to_{\mathcal{T}} p$	a rede $\varphi := (x_d)_{d\in\mathbb{D}}$ $\mathcal{T}$-converge para p, 51
$\mathcal{N}_{p,\mathcal{T}}$ ou $\mathcal{N}_p$	filtro de $\mathcal{T}$-vizinhanças do ponto p, 53
$(\mathcal{G})^{\uparrow}$	"fecho para cima da família"/"filtro gerado por" $\mathcal{G}$, 53
$(\varphi)^{\uparrow}$ ou $(x_d)^{\uparrow}_{d\in\mathbb{D}}$ ou $(x_d)^{\uparrow}_d$	filtro induzido pela rede $\varphi = (x_d)_{d\in\mathbb{D}}$, 54
$\mathcal{F} \to_{\mathcal{T}} p$	o filtro $\mathcal{F}$ $\mathcal{T}$-converge para p, 55

p.i.f.	propriedade da interseção finita, 156
$u\|_{\mathcal{J}}$	restrição de uma upla, função, etc., 167
$d(x, S)$	distância de x ao subconjunto S, 180
X^+	extensão/compactificação de Alexandroff de X, 184
LCH	classe/categoria dos espaços localmente compactos de Hausdorff, 185
CHaus	classe/categoria dos espaços compactos de Hausdorff, 185
S^{d}	conjunto derivado de S, 187

Referências Bibliográficas

[1] R. Alencar. Sobre o teorema de Arzelá. *Matemática Universitária*, pages 107–115, 1988.

[2] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Springer, 2006.

[3] L. F. Aurichi. *Topologia geral*. Number 21 in Série textuniversitários. Livraria da Física, São Paulo, 2022.

[4] G. Bachman, E. Beckenstein, and L. Narici. *Functional Analysis and Valuation Theory*, volume 5 of *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 1971.

[5] A. F. Beardon. *Limits: a new approach to Real Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[6] E. Beckenstein and L. Narici. *Topological Vector Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall/CRC, 2 edition, 2011.

[7] H. Borges and E. Tengan. *Álgebra Comutativa em quatro movimentos*. Projeto Euclides. IMPA, 2014.

[8] N. Bourbaki. *General Topology, part 1*. Addison-Wesley, London, 1966.

[9] N. Bourbaki. *Topological Vector Spaces: Chapters 1-5*. Springer, 1987.

[10] G. Bruns and J. Schmidt. Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern. *Mathematische Nachrichten*, 13(3-4):169–186, 1955.

[11] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 1 edition, 2010.

[12] L. Bukovský. *The structure of the real line*. Monografie Matematyczne 71. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2011.

[13] G. Buskes and A. C. M. van Rooij. *Topological Spaces: From Distance to Neighborhood*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1997.

[14] E. Clader and D. Ross. *Beginning in Algebraic Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2025.

[15] M. M. Clementino and W. Tholen. Tychonoff's theorem in a category. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(11):3311–3317, 1996.

[16] C. Constantinescu. *C*-Algebras, Volume 1: Banach Spaces*. Elsevier, 2001.

[17] R. A. dos Santos Fajardo. *A Teoria dos Conjuntos e os Fundamentos da Matemática*. EDUSP, 1 edition, 2025.

[18] R. Engelking. *General Topology: Revised and completed edition*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[19] A. J. Engler and A. Prestel. *Valued Fields*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2005.

[20] M. H. Escardó. Intersections of compactly many open sets are open, 2020. arXiv:2001.06050, https://arxiv.org/abs/2001.06050.

[21] M. Escardó. Intersections of compactly many open sets are open, 2009. Available at http://www.cs.bham.ac.uk/ mhe/papers/compactness-submitted.pdf.

[22] C. G. Gibson. *Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction*. Cambridge University Press, 1998.

[23] E. Haffner and R. Krömer, editors. *Duality in 19th and 20th Century Mathematical Thinking*. Science Networks. Historical Studies. Birkhäuser, 1 edition, 2024.

[24] R. Harte. *Spectral Mapping Theorems: A Bluffer's Guide*. Springer, 2 edition, 2023.

[25] S. Kantorovitz and A. Viselter. *Introduction to Modern Analysis*. Oxford University Press, 2nd edition, 2022.

[26] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1 edition, 1995.

[27] R. M. Mezabarba. Fundamentos de Topologia Geral, 2023. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/Fund_Top_Geral.

[28] R. M. Mezabarba. *Teoria dos conjuntos: uma introdução maliciosa*. Number 26 in Textuniversitários. LF Editorial, São Paulo, 1 edition, 2025.

[29] R. M. Mezabarba. Um curso fechado e limitado de Análise Real, 2025. manuscrito, disponível em https://github.com/mezabarbarm/AnalysisZero/blob/main/UCFLAR.pdf.

[30] J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc, 2nd ed edition, 2000.

[31] L. Nachbin. Espaços vetoriais topológicos. Notas de Matemática, n. 4, Faculdade Nacional de Filosofia, Universidade do Brasil, 1948. 1ª parte. Disciplina de Teoria das Funções, Departamento de Matemática.

[32] E. A. Ok. *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University, 2007.

[33] B. J. Pearson. Spaces defined by convergence classes of nets. *Glasnik Matemati?ki*, 23(43):135–142, 1988.

[34] H. Perdry. An elementary proof of Krull's Intersection Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 111(4):356–357, 2004.

[35] G. Preuss. *Foundations of Topology: an approach to convenient topology*. Springer, 2002.

[36] R. H. Redfield. Generalized intervals and topology. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 26(4):527–540, 1976.

[37] J. J. Rotman. *Advanced Modern Algebra, Part 1*. Graduate Studies in Mathematics 165. American Mathematical Society, 3rd edition, 2015.

[38] E. Schechter. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. Academic Press, 1996.

[39] E. Scheinerman and N. de Silva. A concise, elementary proof of Arzelá's bounded convergence theorem. *The American Mathematical Monthly*, 117(10):pp. 918–920, 2010.

[40] P. Scholze. Algebraic geometry i, 2016. Lecture notes, Wintersemester 2016/17. Typed by Jack Davies.

[41] T. B. Singh. *Elements of Topology*. CRC Press, 2013.

[42] O. Tatton-Brown. A direct proof of Tychonoff's theorem, 2017. arXiv: 1709.03941 [math.GN].

[43] B. Toni and W. A. Zúñiga-Galindo, editors. *Advances in Non-Archimedean Analysis and Applications: The p-adic Methodology in STEAM-H*. Springer, 2021.

[44] M. Ursul. *Topological Rings Satisfying Compactness Conditions*. Springer, 2002.

[45] J. Voigt. *A Course on Topological Vector Spaces*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser, 1 edition, 2020.

[46] S. Warner. *Topological Fields*, volume 157 of *Mathematics Studies*. North-Holland, Amsterdam, 1989.

[47] W. Więsław. *Topological Fields*, volume 119 of *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, New York, 1988.

[48] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, New York, 1970. Reprinted in 2004 by Dover.

Índice Remissivo