МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Исследовательская работа №1

по дисциплине “Математический анализ и основы вычислений”

Вариант 79

Выполнил: студент гр. J3212

Мирасов К.В.

Проверил: Ершов А.Р.

г. Санкт - Петербург

2025 г.

Содержание

1. Задача 1

Найти повторные пределы и двойной предел в точке $(0,0)$ в области определения функции:

а) $f(x,y) = \frac{4x^4-5x^2y^2+2y^4}{x^4+2y^4}$

б) $f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$

а) У нас рациональная функция, у которой одинаковая степень в числителе и знаменателе, в этом случае можно посмотреть путь $y = kx$. То есть буквально попробуем подставить:

$$f(x,kx) = \frac{x^4(4-5k^2+2k^4)}{x^4(1+2k^4)} = \frac{4-5k^2+2k^4}{1+2k^4}$$

Можем заметить, что функция зависит только от k, то есть по прямой $y = kx$ $f(x,y)$ ведет себя как константа, не зависящая от x

$$\varphi(k) = \frac{4-5k^2+2k^4}{1+2k^4}$$

Теперь если мы подставим, к примеру, 1 и 0 в $\varphi(k)$, сможем проверить на сходимость к одному значению

$$\varphi(0) = 4, \quad \varphi(1) = \frac{1}{3}$$

То есть по факту получааается ситуация, когда разные пути мы берем, а приходим в разные точки, которые не близки друг другу, такого не должно быть, если двойной предел у функции существует. Мы получаем, что

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 4$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{3}$$

Пределы по разным путям различны $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует

Далее посмотрим на повторные пределы, но выяснив, что двойного предела не существует, мы можем уже точно сказать, что повторные пределы дают разные значения

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

При фиксированном $x \neq 0$ получаем:

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{4x^4-5x^2y^2+2y^4}{x^4+2y^4} = \frac{4x^4}{x^4} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} 4 = 4$$

Возьмем следующий повторный предел, убедимся что значения различаются

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

При фиксированном $y \neq 0$ получаем:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4 - 5x^2y^2 + 2y^4}{x^4 + 2y^4} = \frac{2y^4}{2y^4} = 1$$

$$\lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Вывод:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 4$

$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 1$

б) Введём оценку $|\sin(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Можем её применить к нашей функции $f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \neq 0$

$$\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq x^2$$

Теперь можно попытаться доказать, что

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x^2 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

Введём $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r < \delta \quad \Rightarrow \quad |x| \leq r < \delta$$

$$|f(x,y)| \leq x^2 \leq r^2 < \delta^2$$

Из этого можно понять, что лучше взять за $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Тогда уже из $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y)| \leq r^2 < \delta^2 = \varepsilon$

Буквально неявно применили определение предела для $\mathbb{R}^n$, а конкретно для функций двух переменных и доказали, что

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Далее найдем повторные пределы и заметим, что они либо не существуют, либо равны пределу

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Следующий повторный предел интереснее, там появляется проблема поиска предела

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Мы знаем, что предел $\lim_{y\to 0}\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ не существует из-за того, что синус осциллирует. Значит получаем, что $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ не существует

Вывод:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ не существует

2. Задача 2

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в данной точке (x_0, y_0). Выяснить, является ли функция дифференцируемой в этой точке. Если да, то найти её дифференциал в точке.

$f(x, y) = xy + \sin\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right), \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$

3. Задача 3

В данном дифференциальном уравнении (ДУ) перейти от функции $z(x, y)$ к функции $w(u, v)$. Решить полученное ДУ. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному ДУ

$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad w = \ln(z) - x - y$

4. Задача 4

Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Найти производную этого отображения в точке M (матрица Якоби) и одну (любую на выбор) из производных второго порядка $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ в точке M

$$\begin{cases} F_1(x,y)=x_1+x_2+y_1+2y_2-5 \\ F_2(x,y)=x_1^3+x_2^2+y_1^4+y_2^4-4 \end{cases}, \quad M(1,1,1,1)$$

5. Задача 5

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном(-ых) уравнении(-ях) связи.

$f(x, y, z) = x + y - z, \quad y + z = 1, x^2 + y^2 = 1$

6. Задача 6

Изучить методы поиска локальных экстремумов функции с помощью градиентных методов.

$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$

6.1. Аналитический этап

Для начала найдем стационарные точки у нашей функции $f(x, y)$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$$

По необходимому условию экстремума: если f дифференцируема в окрестности (x_0, y_0) и в этой точке есть локальный экстремум, то градиент равен нулю. Из градиента можем получить систему уравнений для нахождения точек экстремума:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

С помощью этой системы уравнений найдем точки предполагаемых экстремумов.

Все возможные x:

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Все возможные y:

$$3y^2 - 3 = 0$$

$$3(y^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

Все возможные точки предполагаемых экстремумов:

$$(-1, -1) \quad (-1, 1) \quad (0, -1) \quad (0, 1) \quad (1, -1) \quad (1, 1)$$

Для каждой точки теперь нужно найти матрицу Гессе и проверить выполнение условия достаточного экстремума. Благодаря этому мы сможем сделать вывод о типе экстремума. Матрица Гессе для каждой точки будет выглядеть так:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Тип экстремума можем понять через выполнение условия достаточного экстремума, для этого нужно смотреть на определенность матрицы Гессе по критерию Сильвестра, если $\det(H) > 0$, то смотрим на $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, если он больше нуля, то точка является локальным минимумом, иначе - локальный максимум, если $\det(H) = 0$, то мы ничего не можем сказать о точке, если $\det(H) < 0 \Rightarrow$ седловая точка

В общем случае расчеты выглядят так:

$$\det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2$$

$$\det(H) = (12x^2 - 4)6y$$

$(-1, -1) : \det(H) = -48 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

$(-1, 1) : \det(H) = 48 > 0 \Rightarrow$ локальный минимум

$(0, -1) : \det(H) = 24 > 0 \Rightarrow$ локальный максимум

$(1, 1) : \det(H) = 48 > 0 \Rightarrow$ локальный минимум

$(0, 1) : \det(H) = -24 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

$(1, -1) : \det(H) = -48 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

Итого:

$\{(-1, -1), (0, 1), (1, -1)\}$ - множество седловых точек

$\{(-1, 1), (1, 1)\}$ - множество точек локального минимума

$\{(0, -1)\}$ - множество точек локального максимума

Во всех стационарных точках $\det(H) \neq 0$, поэтому условие достаточного экстремума полностью классифицирует все точки

6.2. Практический этап

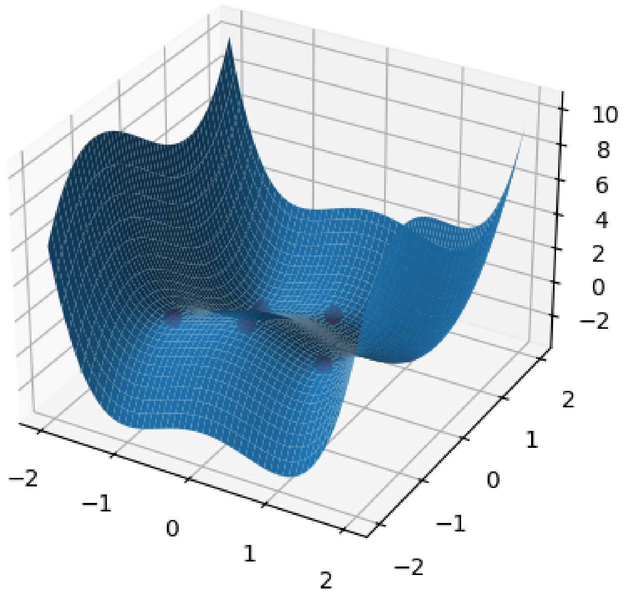

Figure 1: “График $f(x, y)$”

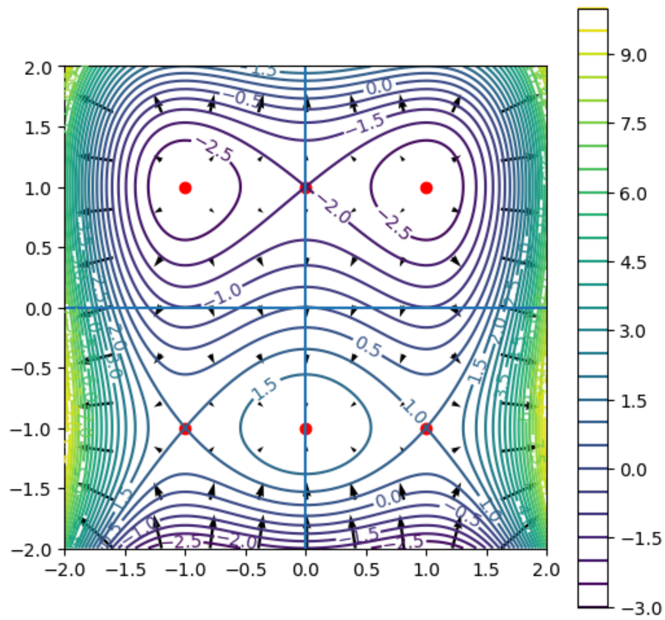

Figure 2: “Линии уровня $f(x, y)$”

Построили график $f(x, y)$ и её линии уровня, отметили все стационарные точки. Можно увидеть по графикам наглядно, что наша классификация стационарных точек правильна.

Теперь можем показать, что направление наискорейшего возрастания функции совпадает с направлением градиента функции, а убывания - с направление антиградиента. Формально докажем для функции от двух переменных:

Введем определение производной по направлению единичного вектора $e = (e_1, e_2)$ в точке (x_0, y_0)

$$D_e f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad \|e\| = 1$$

Пусть $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), тогда при малых t мы получаем разложение

$$f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)te_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)te_2$$

В пределе мы получаем:

$$D_e f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)e_2 \quad \Rightarrow \quad D_e f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), e \rangle = \| \nabla f(x_0, y_0) \| \cos(\varphi)$$

Поскольку в точке (x_0, y_0) длина градиента $\| \nabla f(x_0, y_0) \|$ фиксирована, величина производной по направлению зависит только от $\cos(\varphi)$. Очевидно из этого, что максимум достигается при $\cos(\varphi) = 1, \varphi = 0$, когда направление совпадает с градиентом, так как превращается всё по итогу в форму $D_e f(x_0, y_0) = \| \nabla f(x_0, y_0) \|$. Минимум - при $\cos(\varphi) = -1$, то есть движение в направлении антиградиента

Уже на самом графике линий уровня можно наглядно увидеть, что вектор градиента совпадает с направлением наискорейшего возрастания функции. Он также перпендикулярен этим линиям уровня

7. Полезные ссылки

Репозиторий с кодом к исследовательской работе