

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

Исследовательская работа №1
по дисциплине “Математический анализ и основы вычислений”
Вариант 79

Выполнил: студент гр. J3212

Мирасов К.В.

Проверил: Ершов А.Р.

г. Санкт - Петербург

2025 г.

Содержание

1. Задача 1	3
2. Задача 2	6
3. Задача 3	8
4. Задача 4	9
5. Задача 5	10
6. Задача 6	11
6.1. Аналитический этап	11
6.2. Практический этап	13
7. Полезные ссылки	15

1. Задача 1

Найти повторные пределы и двойной предел в точке $(0, 0)$ в области определения функции:

а) $f(x, y) = \frac{4x^4 - 5x^2y^2 + 2y^4}{x^4 + 2y^4}$

б) $f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$

а) У нас рациональная функция, у которой одинаковая степень в числителе и знаменателе, в этом случае можно посмотреть путь $y = kx$. То есть буквально попробуем подставить:

$$f(x, kx) = \frac{x^4(4 - 5k^2 + 2k^4)}{x^4(1 + 2k^4)} = \frac{4 - 5k^2 + 2k^4}{1 + 2k^4}$$

Можем заметить, что функция зависит только от k , то есть по прямой $y = kx$ $f(x, y)$ ведет себя как константа, не зависящая от x

$$\varphi(k) = \frac{4 - 5k^2 + 2k^4}{1 + 2k^4}$$

Теперь если мы подставим, к примеру, 1 и 0 в $\varphi(k)$, сможем проверить на сходимость к одному значению

$$\varphi(0) = 4, \quad \varphi(1) = \frac{1}{3}$$

То есть по факту получается ситуация, когда разные пути мы берем, а приходим в разные точки, которые не равны друг другу, такого не должно быть, если двойной предел у функции существует. Мы получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{3}$$

Пределы по разным путям различны $\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ не существует

Далее посмотрим на повторные пределы, мы сможем увидеть, что они существуют, но дают разные значения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

При фиксированном $x \neq 0$ получаем:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4x^4 - 5x^2y^2 + 2y^4}{x^4 + 2y^4} = \frac{4x^4}{x^4} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 = 4$$

Возьмем следующий повторный предел, убедимся что значения различаются

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

При фиксированном $y \neq 0$ получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4 - 5x^2y^2 + 2y^4}{x^4 + 2y^4} = \frac{2y^4}{2y^4} = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1$$

Вывод:

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ не существует

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 4$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$$

б) Введём оценку $|\sin(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Можем её применить к нашей функции $f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \neq 0$

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq x^2$$

Теперь можно попытаться доказать, что

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| < \varepsilon \Rightarrow x^2 < \varepsilon \Rightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

Введём $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r < \delta \Rightarrow |x| \leq r < \delta$$

$$|f(x, y)| \leq x^2 \leq r^2 < \delta^2$$

Из этого можно понять, что лучше взять за $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Тогда уже из $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| \leq r^2 < \delta^2 = \varepsilon$

Буквально неявно применили определение предела для \mathbb{R}^n , а конкретно для функций двух переменных и доказали, что

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Далее найдем повторные пределы и увидим, что один существует и равен двойному, а второй - не существует в принципе

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Следующий повторный предел интереснее, там появляется проблема поиска предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Мы знаем, что предел $\lim_{y \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ не существует из-за того, что синус осциллирует. Значит получаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ не существует

Вывод:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ не существует}$$

2. Задача 2

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в данной точке (x_0, y_0) . Выяснить, является ли функция дифференцируемой в этой точке. Если да, то найти её дифференциал в точке.

$$f(x, y) = xy + \sin\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right), \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Важно понять как ведёт себя кубический корень. Рассмотрим

$$\varphi(t) = t^{\frac{1}{3}} \quad \varphi'(t) = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}, \quad t \neq 0$$

В точке $t = 0$ рассмотрим $\varphi'(0)$ как предел

$$\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow h^{-\frac{2}{3}} \rightarrow +\infty$$

Значит, производной у функции в точке 0 нет, $t^{\frac{1}{3}}$ непрерывна в 0, но не дифференцируема в 0. Далее рассмотрим $\psi(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^4} = (x^2 y^4)^{\frac{1}{3}}$, проверим что будет при фиксации x и y

$$\psi(x, 0) = \sqrt[3]{x^2 0^4} = 0 \quad \psi(0, y) = \sqrt[3]{0^2 y^4} = 0$$

Найдем частные производные в точке $(0, 0)$, $h \neq 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(0 + h, 0) - \psi(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(0, 0 + h) - \psi(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

Наша основная функция может быть записана так

$$f(x, y) = xy + \sin\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right) = xy + \sin(\psi(x, y))$$

Найдем также частные производные уже для $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Можем сказать уже, что дифференциал в $(0, 0)$ очевиден

$$df(0, 0) = 0dx + 0dy = 0$$

Но наличие частных производных в точке не гарантирует дифференцируемость. Необходимо проверить, что при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ получается так:

$$f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}x - \frac{\partial f}{\partial y}y = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$f(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Из этого нужно доказать, что

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$$

Введем оценки выражений

$$|f(x, y)| \leq |xy| + \left| \sin\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right) \right|, \quad |\sin(t)| \leq |t|$$

$$\left| \sin\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right) \right| \leq \left| \sqrt[3]{x^2 y^4} \right| = \left| x^{\frac{2}{3}} \right| \left| y^{\frac{4}{3}} \right|$$

$$|f(x, y)| \leq |xy| + \left| x^{\frac{2}{3}} \right| \left| y^{\frac{4}{3}} \right|$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |x| \leq r \quad |y| \leq r$$

Далее введем на основе r более точные оценки

$$|xy| \leq |x| |y| \leq r r \leq r^2$$

$$\left| x^{\frac{2}{3}} \right| \left| y^{\frac{4}{3}} \right| \leq r^{\frac{2}{3}} r^{\frac{4}{3}} = r^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = r^2$$

$$|f(x, y)| \leq r^2 + r^2 = 2r^2$$

Получаем в итоге, что и хотели

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|f(x, y)|}{r} \leq 2r \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Функция дифференцируема в точке $(0, 0)$, значит $df(0, 0)$ реально равен 0

3. Задача 3

В данном дифференциальном уравнении (ДУ) перейти от функции $z(x, y)$ к функции $w(u, v)$. Решить полученное ДУ. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному ДУ

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad w = \ln(z) - x - y$$

4. Задача 4

Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Найти производную этого отображения в точке M (матрица Якоби) и одну (любую на выбор) из производных второго порядка $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ в точке M

$$\begin{cases} F_1(x, y) = x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 - 5 \\ F_2(x, y) = x_1^3 + x_2^2 + y_1^4 + y_2^4 - 4 \end{cases}, \quad M(1, 1, 1, 1)$$

5. Задача 5

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном(-ых) уравнении(-ях) связи.

$$f(x, y, z) = x + y - z, \quad y + z = 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$

6. Задача 6

Изучить методы поиска локальных экстремумов функции с помощью градиентных методов.

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$$

6.1. Аналитический этап

Для начала найдем стационарные точки у нашей функции $f(x, y)$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$$

По необходимому условию экстремума: если f дифференцируема в окрестности (x_0, y_0) и в этой точке есть локальный экстремум, то градиент равен нулю. Из градиента можем получить систему уравнений для нахождения точек экстремума:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

С помощью этой системы уравнений найдем точки предполагаемых экстремумов.

Все возможные x :

$$4x^3 - 4x = 0 \\ 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Все возможные y :

$$3y^2 - 3 = 0 \\ 3(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

Все возможные точки предполагаемых экстремумов:

$$(-1, -1) \quad (-1, 1) \quad (0, -1) \quad (0, 1) \quad (1, -1) \quad (1, 1)$$

Для каждой точки теперь нужно найти матрицу Гессе и проверить выполнение условия достаточного экстремума. Благодаря этому мы сможем сделать вывод о типе экстремума. Матрица Гессе для каждой точки будет выглядеть так:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Тип экстремума можем понять через выполнение условия достаточного экстремума, для этого нужно смотреть на определенность матрицы Гессе по критерию Сильвестра, если $\det(H) > 0$, то смотрим на $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, если он больше нуля, то точка является локальным минимумом, иначе - локальный максимум, если $\det(H) = 0$, то мы ничего не можем сказать о точке, если $\det(H) < 0 \Rightarrow$ седловая точка

В общем случае расчеты выглядят так:

$$\det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2$$

$$\det(H) = (12x^2 - 4)6y$$

$(-1, -1) : \det(H) = -48 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

$(-1, 1) : \det(H) = 48 > 0 \Rightarrow$ локальный минимум

$(0, -1) : \det(H) = 24 > 0 \Rightarrow$ локальный максимум

$(1, 1) : \det(H) = 48 > 0 \Rightarrow$ локальный минимум

$(0, 1) : \det(H) = -24 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

$(1, -1) : \det(H) = -48 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

Итого:

$\{(-1, -1), (0, 1), (1, -1)\}$ - множество седловых точек

$\{(-1, 1), (1, 1)\}$ - множество точек локального минимума

$\{(0, -1)\}$ - множество точек локального максимума

Во всех стационарных точках $\det(H) \neq 0$, поэтому условие достаточного экстремума полностью классифицирует все точки

6.2. Практический этап

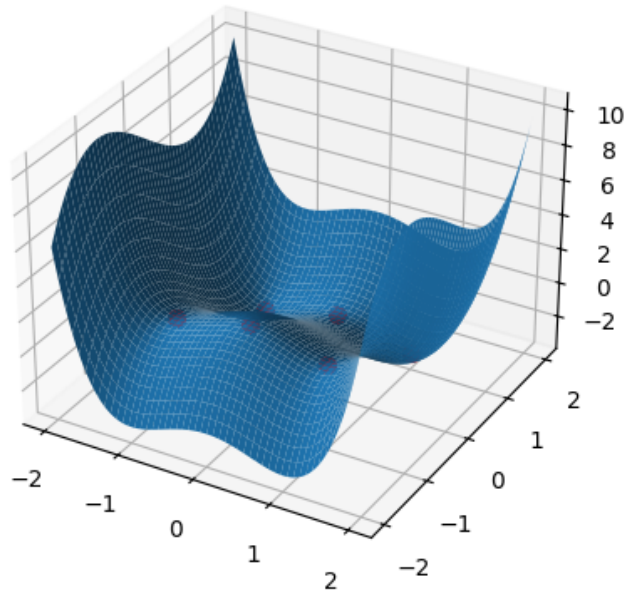


Figure 1: “График $f(x, y)$ ”

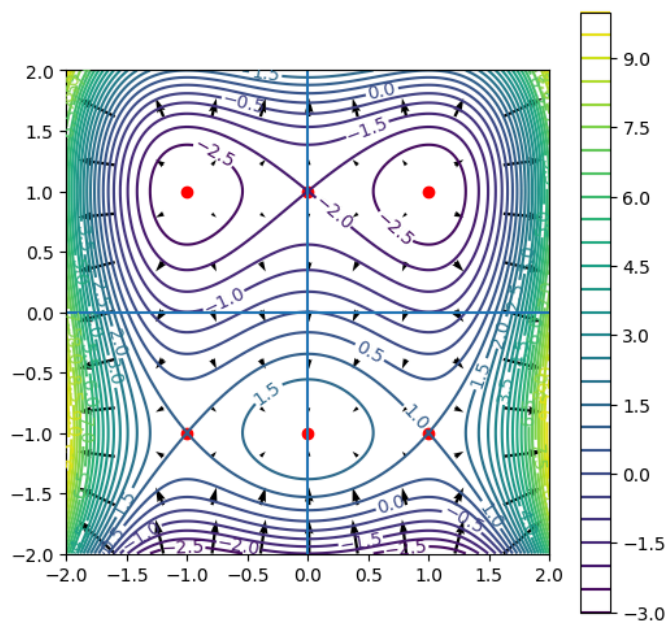


Figure 2: “Линии уровня $f(x, y)$ ”

Построили график $f(x, y)$ и её линии уровня, отметили все стационарные точки. Можно увидеть по графикам наглядно, что наша классификация стационарных точек правильна.

Теперь можем показать, что направление наискорейшего возрастания функции совпадает с направлением градиента функции, а убывания - с направлением антиградиента. Формально докажем для функции от двух переменных:

Введем определение производной по направлению единичного вектора $e = (e_1, e_2)$ в точке (x_0, y_0)

$$d_e f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad \|e\| = 1$$

Пусть $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , тогда при малых t мы получаем разложение

$$f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)te_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)te_2$$

В пределе мы получаем:

$$d_e f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)e_2 \Rightarrow d_e f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), e \rangle = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos(\varphi)$$

Поскольку в точке (x_0, y_0) длина градиента $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ фиксирована, величина производной по направлению зависит только от $\cos(\varphi)$. Очевидно из этого, что максимум достигается при $\cos(\varphi) = 1, \varphi = 0$, когда направление совпадает с градиентом, так как превращается всё по итогу в форму $d_e f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$. Минимум - при $\cos(\varphi) = -1$, то есть движение в направлении антиградиента

Уже на самом графике линий уровня можно наглядно увидеть, что вектор градиента совпадает с направлением наискорейшего возрастания функции. Он также перпендикулярен этим линиям уровня

7. Полезные ссылки

Репозиторий с кодом к исследовательской работе