**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

# Исследовательская работа №1

**по дисциплине “Математический анализ и основы вычислений”**

**Вариант 79**

Выполнил: студент гр. J3212

Мирасов К.В.

Проверил: Ершов А.Р.

г. Санкт - Петербург

2025 г.

# Содержание

## 1. Задача 1

Найти повторные пределы и двойной предел в точке $(0, 0)$ в области определения функции:

а) $f(x, y) = \frac{4x^4 - 5x^2y^2 + 2y^4}{x^4 + 2y^4}$

б) $f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$

а) У нас рациональная функция, у которой одинаковая степень в числителе и знаменателе, в этом случае можно посмотреть путь $y = kx$. То есть буквально попробуем подставить:

$$f(x, kx) = \frac{x^4(4 - 5k^2 + 2k^4)}{x^4(1 + 2k^4)} = \frac{4 - 5k^2 + 2k^4}{1 + 2k^4}$$

Можем заметить, что функция зависит только от $k$, то есть по прямой $y = kx$ $f(x, y)$ ведет себя как константа, не зависящая от $x$

$$\varphi(k) = \frac{4 - 5k^2 + 2k^4}{1 + 2k^4}$$

Теперь если мы подставим, к примеру, 1 и 0 в $\varphi(k)$, сможем проверить на сходимость к одному значению

$$\varphi(0) = 4, \quad \varphi(1) = \frac{1}{3}$$

То есть по факту получаается ситуация, когда разные пути мы берем, а приходим в разные точки, которые не равны друг другу, такого не должно быть, если двойной предел у функции существует. Мы получаем, что

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 4$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \frac{1}{3}$$

Пределы по разным путям различны $\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует

Далее посмотрим на повторные пределы, мы сможем увидеть, что они существуют, но дают разные значения

$$\lim_{x \to 0} \left( \lim_{y \to 0} f(x, y) \right)$$

При фиксированном $x \neq 0$ получаем:

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{4x^4 - 5x^2y^2 + 2y^4}{x^4 + 2y^4} = \frac{4x^4}{x^4} = 4$$

$$\lim_{x \to 0} 4 = 4$$

Возьмем следующий повторный предел, убедимся что значения различаются

$$\lim_{y \to 0} \left( \lim_{x \to 0} f(x, y) \right)$$

При фиксированном $y \neq 0$ получаем:

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^4 - 5x^2y^2 + 2y^4}{x^4 + 2y^4} = \frac{2y^4}{2y^4} = 1$$

$$\lim_{y \to 0} 1 = 1$$

**Вывод:**

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ не существует

$\lim_{x \to 0} \left( \lim_{y \to 0} f(x, y) \right) = 4$

$\lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x, y)) = 1$

б) Введём оценку $|\sin(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Можем её применить к нашей функции $f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \neq 0$

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq x^2$$

Теперь можно попытаться доказать, что

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x^2 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

Введём $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r < \delta \quad \Rightarrow \quad |x| \leq r < \delta$$

$$|f(x, y)| \leq x^2 \leq r^2 < \delta^2$$

Из этого можно понять, что лучше взять за $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Тогда уже из $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y)| \leq r^2 < \delta^2 = \varepsilon$

Буквально неявно применили определение предела для $\mathbb{R}^n$, а конкретно для функций двух переменных и доказали, что

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Далее найдем повторные пределы и увидем, что один существует и равен двойному, а второй - не существует впринципе

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Следующий повторный предел интереснее, там появляется проблема поиска предела

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Мы знаем, что предел $\lim_{y\to 0}\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ не существует из-за того, что синус осциллирует. Значит получаем, что $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ не существует

**Вывод:**

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ не существует

## 2. Задача 2

Найти частные производные данной функции $f(x, y)$ в данной точке $(x_0, y_0)$. Выяснить, является ли функция дифференцируемой в этой точке. Если да, то найти её дифференциал в точке.

$f(x, y) = xy + \sin\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right), \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$

Важно понять как ведёт себя кубический корень. Рассмотрим

$$\varphi(t) = t^{\frac{1}{3}} \quad \varphi'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}, \quad t \neq 0$$

В точке $t = 0$ рассмотрим $\varphi'(0)$ как предел

$$\varphi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0} h^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad h^{-\frac{2}{3}} \to +\infty$$

Значит, производной у функции в точке 0 нет, $t^{\frac{1}{3}}$ непрерывна в 0, но не дифференцируема в 0. Далее рассмотрим $\psi(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^4} = \left(x^2 y^4\right)^{\frac{1}{3}}$, проверим что будет при фиксации $x$ и $y$

$$\psi(x, 0) = \sqrt[3]{x^2 0^4} = 0 \quad \psi(0, y) = \sqrt[3]{0^2 y^4} = 0$$

Найдем частные производные в точке $(0, 0)$, $h \neq 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\psi(0 + h, 0) - \psi(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\psi(0, 0 + h) - \psi(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

Наша основная функция может быть записана так

$$f(x, y) = xy + \sin\left(\sqrt[3]{x^2 y^4}\right) = xy + \sin(\psi(x, y))$$

Найдем также частные производные уже для $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Можем сказать уже, что дифференциал в $(0, 0)$ очевиден

$$df(0, 0) = 0dx + 0dy = 0$$

Но наличие частных производных в точке не гарантирует дифференцируемость. Необходимо проверить, что при $(x, y) \to (0, 0)$ получается так:

$$f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x} x - \frac{\partial f}{\partial y} y = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$f(x, y) = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad (x, y) \to (0, 0)$$

Из этого нужно доказать, что

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$$

Введем оценки выражений

$$|f(x,y)| \le |xy| + \left|\sin\left(\sqrt[3]{x^2y^4}\right)\right|, \quad |\sin(t)| \le |t|$$

$$\left|\sin\left(\sqrt[3]{x^2y^4}\right)\right| \le \left|\sqrt[3]{x^2y^4}\right| = \left|x^{\frac{2}{3}}\right|\left|y^{\frac{4}{3}}\right|$$

$$|f(x,y)| \le |xy| + \left|x^{\frac{2}{3}}\right|\left|y^{\frac{4}{3}}\right|$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |x| \le r \quad |y| \le r$$

Далее введем на основе $r$ более точные оценки

$$|xy| \le |x||y| \le rr \le r^2$$

$$\left|x^{\frac{2}{3}}\right|\left|y^{\frac{4}{3}}\right| \le r^{\frac{2}{3}}r^{\frac{4}{3}} = r^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = r^2$$

$$|f(x,y)| \le r^2 + r^2 = 2r^2$$

Получаем в итоге, что и хотели

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|f(x,y)|}{r} \le 2r \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Функция дифференцируема в точке $(0,0)$, значит $df(0,0)$ реально равен 0

## 3. Задача 3

В данном дифференциальном уравнении (ДУ) перейти от функции $z(x, y)$ к функции $w(u, v)$. Решить полученное ДУ. Показать, что найденное решение (в исходных переменных) удовлетворяет исходному ДУ

$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z, \quad u = x^2+y^2, \quad v = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \quad w = \ln(z) - x - y$

Для решения данного ДУ будем использовать метод характеристик. Слева можем заметить, что там находится дифференциал по направлению $(y, -x)$. Метод подразумевает, что мы смотрим на кривые, вдоль которых уравнение упрощается до обычного ДУ, вместо того, чтобы сразу искать $z(x, y)$. Введем кривые:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

По правилу цепи получаем выражение и хотим чтобы оно совпала с левой частью ДУ $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y)$$

Всё превращается в систему обычных ДУ

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = y \\ \frac{dy}{ds} = -x \\ \frac{dz}{ds} = (y-x)z \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое и получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \mid * y \quad \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = -x \mid * dx \quad \Rightarrow \quad ydy = -xdx$$

$$\int ydy = \int -xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C_1$$

Рассмотрим $w(s) = \ln z(s) - x(s) - y(s)$, найдем производную по $s$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1}{z}\frac{dz}{ds} - \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z}(y-x)z - y + x = 0$$

Получаем, что по каждой характеристике, в нашем случае окружности, $w$ не меняется, остается одним и тем же числом. Значит, что $w$ зависит только от $x^2 + y^2$. Пусть $w(x, y) = F(u)$, где $u = x^2 + y^2$ и $F$ - произвольная дифференцируемая функция $\Rightarrow F(x^2 + y^2) = \ln z(x, y) - x - y$

$$\ln z(x, y) = F(x^2 + y^2) + x + y$$

$$z(x, y) = e^{F(x^2+y^2)+x+y}$$

Введем $G(u) = e^{F(u)} \Rightarrow z(x, y) = e^{x+y}G(x^2 + y^2)$, $G$ - также произвольная дифференцируемая функция

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y}G(u) + e^{x+y}G'(u)2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}G(u) + e^{x+y}G'(u)2y$$

Проверим, что наше $z(x,y)$ удовлетворяет ДУ $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$. Подставим наши значения

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}G(u)(y-x)$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z(x,y)$$

Осталось перейти к функции $w(u,v)$ от $z(x,y)$

$$w = \ln z - x - y \quad \Rightarrow \quad \ln z = w + x + y \quad \Rightarrow \quad z = e^{w+x+y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} - 1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} - 1$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z} = \frac{\partial w}{\partial x} + 1, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z} = \frac{\partial w}{\partial y} + 1$$

Подставим в исходное ДУ и получим:

$$y\left(\frac{\partial w}{\partial x} + 1\right) - x\left(\frac{\partial w}{\partial y} + 1\right) = y - x \quad \Rightarrow \quad y\frac{\partial w}{\partial x} - x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

По правилу цепи мы можем выразить $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ через $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}$$

Из $y\frac{\partial w}{\partial x} - x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ получаем:

$$\left(-\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}(u,v) = 0$$

Получается, что оно зависит только от $u$, значит $w(u,v) = F(u)$, где $F$ - произвольная дифференцируемая функция. Дальше мы просто подставляем $u = x^2 + y^2$ и можем выразить уже то, что получали до этого $z(x,y) = e^{x+y}G(x^2+y^2)$, проверку решения с этим выражением мы делали, повторяться не имеет смысла

## 4. Задача 4

Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$, $F = (F_1, F_2)$ задает неявно дифференцируемое отображение $y = f(x)$, $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, x_2)$ в окрестности точки $M(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Найти производную этого отображения в точке $M$ (матрица Якоби) и одну (любую на выбор) из производных второго порядка $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ в точке $M$

$$\begin{cases} F_1(x,y)=x_1+x_2+y_1+2y_2-5 \\ F_2(x,y)=x_1^3+x_2^2+y_1^4+y_2^4-4 \end{cases}, \quad M(1,1,1,1)$$

Проверяем, что $M$ лежит на множестве решений $F(1,1,1,1) = 0$

$$F_1(1,1,1,1) = 1 + 1 + 1 + 2 - 5 = 0$$

$$F_2(1,1,1,1) = 1 + 1 + 1 + 1 - 4 = 0$$

Будем применять теорему о неявной функции, для этого посчитаем матрицу

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4y_1^3 & 4y_2^3 \end{pmatrix}$$

Проверяем в точке $\frac{\partial F}{\partial y}(M) = \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1,1)$. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, её детерминант $= -4 \neq 0$, значит обратима и можем применять спокойно теорему о неявной функции: в окрестности точки $M$ есть дифференцируемое $y = f(x)$, можем найти $df(M)$. Сначала найдем $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

По теореме о неявной функции в точке $M$ получаем выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M) + \frac{\partial F}{\partial y}(M) df(M) = 0$$

$$df(M) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(M)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(M)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(M)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$df(M) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Осталось взять одну из производных второго порядка $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(M)$. Я выберу $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}(M)$. Зафиксируем $x_2 = 1$, как в точке $M$, будем рассматривать всё как функцию одной переменной $t = x_1$. Наша система будет выглядеть так:

$$\begin{cases} F_1(t, 1, y_1(t), y_2(t)) = 0 \\ F_2(t, 1, y_1(t), y_2(t)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(t) = t + 1 + y_1(t) + 2y_2(t) - 5 \\ F_2(t) = t^3 + 1 + y_1(t)^4 + y_2(t)^4 - 4 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}F_1 = 1 + y_1' + 2y_2' = 0$$

$$\frac{d}{dt}F_2 = 3t^2 + 4y_1^3y_1' + 4y_2^3y_2'$$

Если проверить, то всё будет соотноситься с нашими первыми производными, тут всё довольно тривиально. Можем продолжить дифференцировать, ищем уже вторые производные

Из $1 + y_1' + 2y_2' = 0$ получаем $y_1'' + 2y_2''$

Из $3t^2 + 4y_1^3y_1' + 4y_2^3y_2'$ получаем $6t + 12y_1^2(y_2')^2 + 4y_1^3y_1'' + 12y_2^2(y_2')^2 + 4y_2^3y_2''$

Подставим $t = 1, y_1 = y_2 = 1, y_1' = -\frac{1}{2}, y_2' = -\frac{1}{4}$ и получим систему

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_2'' = 0 \\ y_1'' + y_2'' = -\frac{39}{16} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}(M) = y_1''(1) = -\frac{39}{8}$$

## 5. Задача 5

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию на условный экстремум при данном(-ых) уравнении(-ях) связи.

$f(x, y, z) = x + y - z, \quad y + z = 1, x^2 + y^2 = 1$

Введем условия, которые задают две поверхности ограничения для нашей функции

$$g_1(x, y, z) = y + z - 1 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Построим лагранжиан на основе введённых условий

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

Далее берем частные производные по каждой переменной и множителям Лагранжа, приравниваем к нулю

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda_2 x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -1 + \lambda_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = y + z - 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x^2 + y^2 - 1$$

Получаем систему условий Лагранжа

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ -1 + \lambda_1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2x}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{y}$$

$$y = 2x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Из ограничений получаем 2 точки по $(x, y, z)$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Считаем значения функции в данных точках

$$f_1(x, y, z) = \sqrt{5} - 1$$

$$f_2(x, y, z) = -\sqrt{5} - 1$$

Область допустимых точек - пересечение: $x^2 + y^2 = 1$ (окружность в проекции на $x, y$) и плоскасти $y + z = 1$. Это замкнутая, ограниченная кривая в $\mathbb{R}^3$, а $f$ - непрерывная

$$\Rightarrow$$

условный максимум и минимум существуют и достигаются в критических точках. У нас их ровно две, одна дает условный максимум, другая - условный минимум.

Получаем условный максимум в точке:

$$\sqrt{5} - 1 > -\sqrt{5} - 1 \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Значит условный минимум в точке:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

# 6. Задача 6

Изучить методы поиска локальных экстремумов функции с помощью градиентных методов.

$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$

## 6.1. Аналитический этап

Для начала найдем стационарные точки у нашей функции $f(x, y)$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$$

По необходимому условию экстремума: если $f$ дифференцируема в окрестности $(x_0, y_0)$ и в этой точке есть локальный экстремум, то градиент равен нулю. Из градиента можем получить систему уравнений для нахождения точек экстремума:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

С помощью этой системы уравнений найдем точки предполагаемых экстремумов.

Все возможные x:

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Все возможные y:

$$3y^2 - 3 = 0$$

$$3(y^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

Все возможные точки предполагаемых экстремумов:

$$(-1, -1) \quad (-1, 1) \quad (0, -1) \quad (0, 1) \quad (1, -1) \quad (1, 1)$$

Для каждой точки теперь нужно найти матрицу Гессе и проверить выполнение условия достаточного экстремума. Благодаря этому мы сможем сделать вывод о типе экстремума. Матрица Гессе для каждой точки будет выглядеть так:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Тип экстремума можем понять через выполнение условия достаточного экстремума, для этого нужно смотреть на определенность матрицы Гессе по критерию Сильвестра, если $\det(H) > 0$, то смотрим на $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, если он больше нуля, то точка является локальным минимумом, иначе - локальный максимум, если $\det(H) = 0$, то мы ничего не можем сказать о точке, если $\det(H) < 0 \Rightarrow$ седловая точка

В общем случае расчеты выглядят так:

$$\det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

$$\det(H) = (12x^2 - 4)6y$$

$(-1,-1) : \det(H) = -48 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

$(-1,1) : \det(H) = 48 > 0 \Rightarrow$ локальный минимум

$(0,-1) : \det(H) = 24 > 0 \Rightarrow$ локальный максимум

$(1,1) : \det(H) = 48 > 0 \Rightarrow$ локальный минимум

$(0,1) : \det(H) = -24 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

$(1,-1) : \det(H) = -48 < 0 \Rightarrow$ седловая точка

**Итого:**

$\{(-1,-1),(0,1),(1,-1)\}$ - множество седловых точек

$\{(-1,1),(1,1)\}$ - множество точек локального минимума

$\{(0,-1)\}$ - множество точек локального максимума

Во всех стационарных точках $\det(H) \neq 0$, поэтому условие достаточного экстремума полностью классифицирует все точки

### 6.2. Практический этап

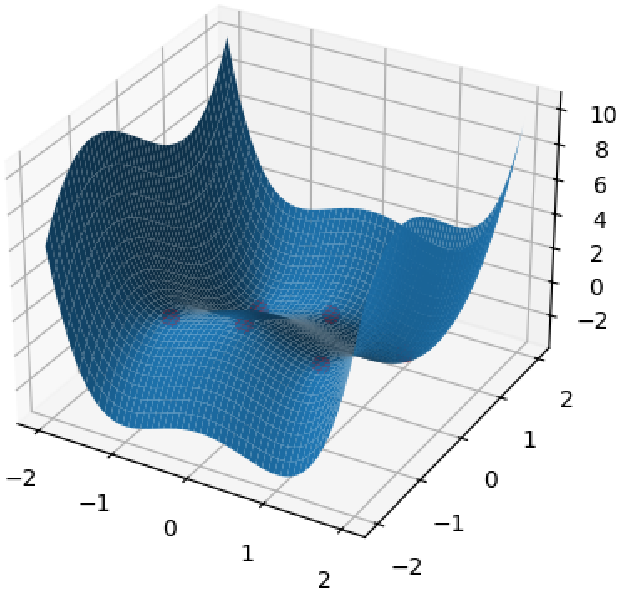


Figure 1: “График $f(x, y)$”

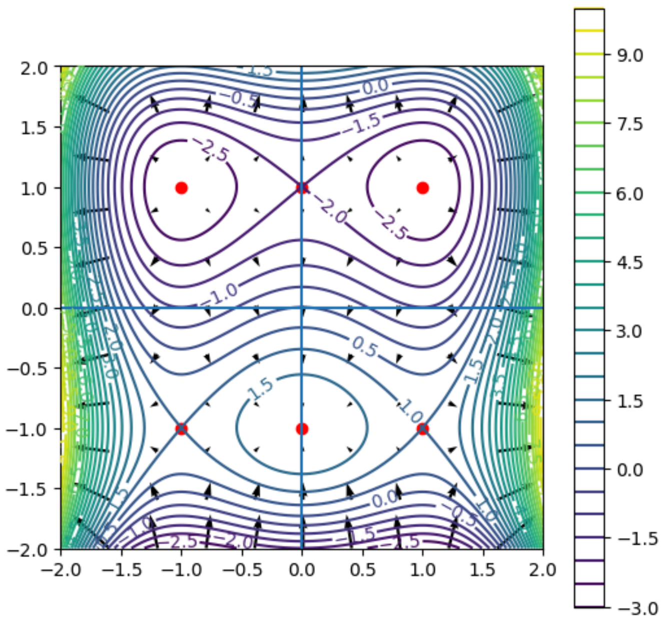


Figure 2: “Линии уровня $f(x, y)$”

Построили график $f(x, y)$ и её линии уровня, отметили все стационарные точки. Можно увидеть по графикам наглядно, что наша классификация стационарных точек правильна.

Теперь можем показать, что направление наискорейшего возрастания функции совпадает с направлением градиента функции, а убывания - с направление антиградиента. Формально докажем для функции от двух переменных:

Введем определение производной по направлению единичного вектора $e = (e_1, e_2)$ в точке $(x_0, y_0)$

$$d_e f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad \|e\| = 1$$

Пусть $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, тогда при малых t мы получаем разложение

$$f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)te_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)te_2$$

В пределе мы получаем:

$$d_e f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)e_2 \quad \Rightarrow \quad d_e f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), e \rangle = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos(\varphi)$$

Поскольку в точке $(x_0, y_0)$ длина градиента $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ фиксирована, величина производной по направлению зависит только от $\cos(\varphi)$. Очевидно из этого, что максимум достигается при $\cos(\varphi) = 1, \varphi = 0$, когда направление совпадает с градиентом, так как превращается всё по итогу в форму $d_e f(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$. Минимум - при $\cos(\varphi) = -1$, то есть движение в направлении антиградиента

Уже на самом графике линий уровня можно наглядно увидеть, что вектор градиента совпадает с направлением наискорейшего возрастания функции. Он также перпендикулярен этим линиям уровня

Реализованы следующие алгоритмы градиентного спуска:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

(a) где $\alpha^k$ выбирается постоянной

(b) где $\alpha^k$ в процессе вычисления делится на какое-то числом

(c) $\alpha^k = \arg\min_\alpha f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$, т.е. метод наискорейшего спуска

А также метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса

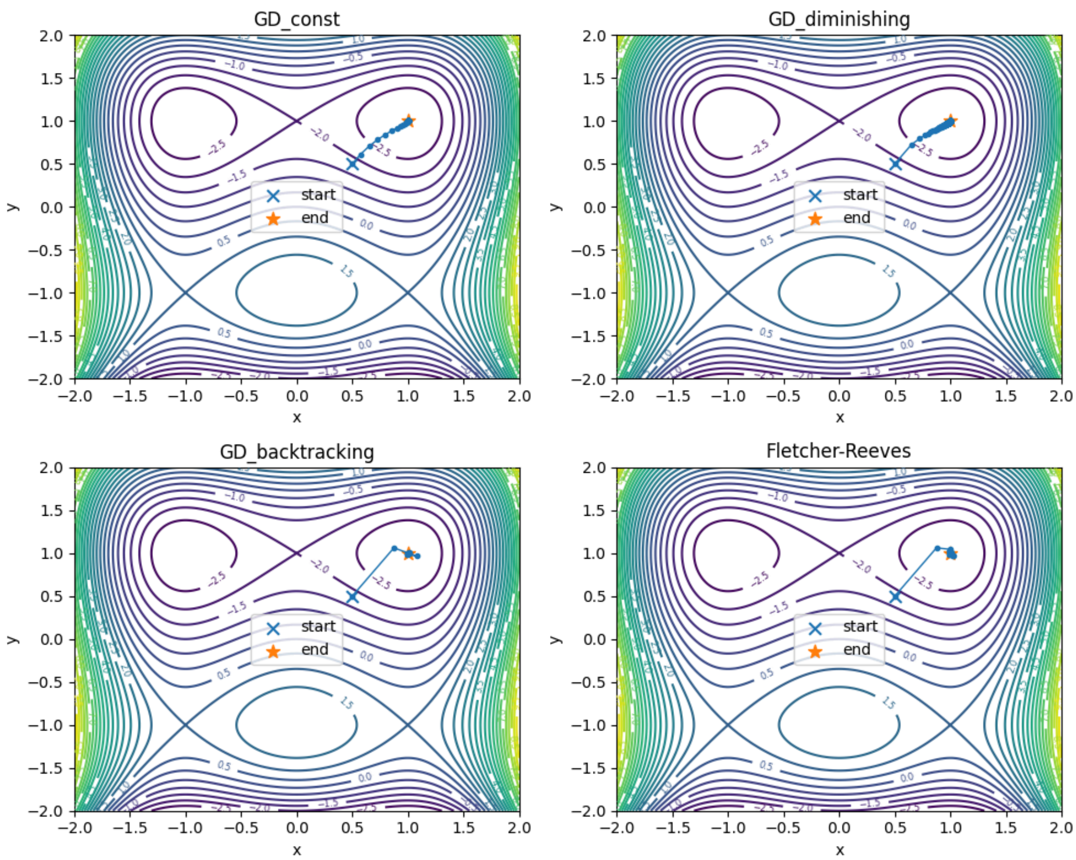


Figure 3: "Тест методов градиентного спуска для $f(x, y)$"

Можно заметить, что все методы, кроме метода вычисления $\alpha^k$ в процессе градиентного спуска довольно быстро сошлись в точке локального минимума нашей функции. Далее проведем тестирование алгоритмов для выданных функций

Для проверки реализованных методов градиентного спуска были рассмотрены функции: Розенброка, Растригина, Бута, Eggholder, плохо масштабированная функция, функция Изома. Для каждой функции была выбрана начальная точка и запущены 4 метода: градиентный спуск с постоянным шагом, с убывающим шагом, с backtracking-линейным поиском, а также метод сопряженных градиентов Флетчера-Ривса. Для каждого метода и значения параметра точности $\varepsilon = 10^{\{-k\}}, k = 2, 3, 4, 5, 6$ были собраны данные: кол-во итераций до остановки, найденное приближение минимума и значение функции

Реализация всех численных методов находиться в GitHub репозитории (см. п. Полезные ссылки)

## 7. Полезные ссылки

GitHub репозиторий