МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Исследовательская работа №2

по дисциплине «Математический анализ и основы вычислений»

Вариант №94

Выполнил: студент гр.
J3212
Мирасов К.В.

Проверил: Ершов А.Р.

г. Санкт-Петербург
2026 г.

Содержание

1 Теоретическая часть

1.1 Задание 1

Условие

Можно ли на отрезке $[-1, 1]$ построить замкнутое множество, мера которого равна 2, но которое отлично от всего отрезка $[-1, 1]$?

Решение:

Предположим от противного и допустим, что существует F - не пустое замкнутое множество, не совпадает с отрезком $[-1, 1]$, имеет меру равную 2

Тогда, если $G = [-1, 1] \setminus F$, то G будет не пустым и открытым

$\Rightarrow \mu(G) = \mu([-1, 1]) - \mu(F) = 2 - 2 = 0$

$\uparrow\downarrow$ Противоречие, из-за того что G открытое, у него будет интервал (a, b), где $a < b$, значит $\mu(G)$ будет больше нуля

$\blacksquare$

1.2 Задание 2

Условие

Измерима ли функция на интервале $(0, 1)$?

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

Решение:

Для начала найдем проблемные точки нашей функции. Ими являются $\{0, 1\}$, так как при них знаменатель зануляется, но у нас $E = (0, 1)$, значит они не входят. Функция $f(x)$ непрерывна на $(0, 1)$. Согласно свойствам измеримых функций, любая непрерывная на измеримом множестве функция является измеримой $\Rightarrow f(x)$ измерима

■

1.3 Задание 3

Условие

Вычислите интеграл Лебега $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$, если он существует. $Ir = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\sqrt{x}} & x \in Ir \cap [0,4] \\ \frac{2x-3}{x^2-3x+8} & x \in Ir \cap [4,5] \\ \sin(3+x^2) & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$E = [0,5]$

Решение:

Множество $\mathbb{Q}$ счетно $\Rightarrow$ мера Лебега любого счетного множества равна 0

Значит $\sin(3+x^2), x \in \mathbb{Q}$ не вносит никакого значения

Теперь мы можем разбить интеграл по всему отрезку $[0,5]$ на сумму двух интегралов. Так как иррациональные числа занимают наш отрезок почти всюду, интегралы превращаются в обычные определенные

$$I = \int_{[0,4]} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\mu + \int_{[4,5]} \frac{2x-3}{x^2-3x+8} \,\mathrm{d}\mu$$

$$I_1 = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_4^5 \frac{2x-3}{x^2-3x+8} \,\mathrm{d}x$$

Рассмотрим I_1, будем решать через замену переменной $t = \sqrt{x}$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2t+2-2}{1+t} \,\mathrm{d}t = [2t - 2\ln|1+t|] \Big|_0^2 = 4 - 2\ln(3)$$

Далее рассматриваем I_2, вводим замену $u = x^2 - 3x + 8 \Rightarrow \mathrm{d}u = (2x-3)\,\mathrm{d}x$

$$I_2 = \int_{12}^{18} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(18) - \ln(12)$$

$$I = I_1 + I_2 = 4 - 2\ln(3) + \ln\left(\frac{18}{12}\right) = 4 - \ln(6)$$

■

2 Практическая часть

Условие

$E = [0, 1], \quad F(x) = x\lceil 3x \rceil + 2$

Алгоритм представление значения

1) Представляем x в троичной системе счисления

2) Если $(x)_3$ содержит цифру 1, заменяем все знаки после неё на 0

3) Заменяем каждую цифру полученной последовательности по следующему правилу: $0 \to 1 \quad 1 \to 0 \quad 2 \to 0$

4) Полученную последовательность интерпретируем как двоичную запись

2.1 Аналитеский этап