

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

**Исследовательская работа №2**

**по дисциплине «Математический анализ и основы вычислений»**

**Вариант №94**

Выполнил: студент гр.  
J3212  
Мирасов К.В.

Проверил: Ершов А.Р.

г. Санкт-Петербург  
2026 г.

## **Содержание**

1	Теоретическая часть .....	3
1.1	Задание 1 .....	3
1.2	Задание 2 .....	4
1.3	Задание 3 .....	5
2	Практическая часть .....	6
2.1	Аналитический этап .....	6
2.2	Численный этап .....	11

# 1 Теоретическая часть

## 1.1 Задание 1

### Условие

Можно ли на отрезке  $[-1, 1]$  построить замкнутое множество, мера которого равна 2, но которое отлично от всего отрезка  $[-1, 1]$ ?

### Решение:

Предположим от противного и допустим, что существует  $F$  - не пустое замкнутое множество, не совпадает с отрезком  $[-1, 1]$ , имеет меру равную 2

Тогда, если  $G = [-1, 1] \setminus F$ , то  $G$  будет не пустым и открытым

$$\Rightarrow \mu(G) = \mu([-1, 1]) - \mu(F) = 2 - 2 = 0$$

↑↓ Противоречие, из-за того что  $G$  открытое, у него будет интервал  $(a, b)$ , где  $a < b$ , значит  $\mu(G)$  будет больше нуля

■

## 1.2 Задание 2

### Условие

Измерима ли функция на интервале  $(0, 1)$ ?

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

### Решение:

Для начала найдем проблемные точки нашей функции. Ими являются  $\{0, 1\}$ , так как при них знаменатель зануляется, но у нас  $E = (0, 1)$ , значит они не входят. Функция  $f(x)$  непрерывна на  $(0, 1)$ . Согласно свойствам измеримых функций, любая непрерывная на измеримом множестве функция является измеримой  $\Rightarrow f(x)$  измерима

■

### 1.3 Задание 3

#### Условие

Вычислите интеграл Лебега  $\int_E f d\mu$ , если он существует.  $Ir = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\sqrt{x}} & x \in Ir \cap [0, 4] \\ \frac{2x-3}{x^2-3x+8} & x \in Ir \cap [4, 5] \\ \sin(3+x^2) & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$E = [0, 5]$$

#### Решение:

Множество  $\mathbb{Q}$  счетно  $\Rightarrow$  мера Лебега любого счетного множества равна 0

Значит  $\sin(3+x^2), x \in \mathbb{Q}$  не вносит никакого значения

Теперь мы можем разбить интеграл по всему отрезку  $[0, 5]$  на сумму двух интегралов.  
Так как иррациональные числа занимают наш отрезок почти всюду, интегралы превращаются в обычные определенные

$$I = \int_{[0,4]} \frac{1}{1+\sqrt{x}} d\mu + \int_{[4,5]} \frac{2x-3}{x^2-3x+8} d\mu$$

$$I_1 = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$I_2 = \int_4^5 \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx$$

Рассмотрим  $I_1$ , будем решать через замену переменной  $t = \sqrt{x}$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = \int_0^2 \frac{2t+2-2}{1+t} dt = [2t - 2 \ln|1+t|] \Big|_0^2 = 4 - 2 \ln(3)$$

Далее рассматриваем  $I_2$ , вводим замену  $u = x^2 - 3x + 8 \Rightarrow du = (2x-3) dx$

$$I_2 = \int_{12}^{18} \frac{du}{u} = \ln(18) - \ln(12)$$

$$I = I_1 + I_2 = 4 - 2 \ln(3) + \ln\left(\frac{18}{12}\right) = 4 - \ln(6)$$

## 2 Практическая часть

### Условие

$$E = [0, 1], \quad F(x) = x \lceil 3x \rceil + 2$$

Алгоритм представления значения

- 1) Представляем  $x$  в троичной системе счисления
- 2) Если  $(x)_3$  содержит цифру 1, заменяем все знаки после неё на 0
- 3) Заменяем каждую цифру полученной последовательности по следующему правилу:  $0 \rightarrow 1 \quad 1 \rightarrow 0 \quad 2 \rightarrow 0$
- 4) Полученную последовательность интерпретируем как двоичную запись

### 2.1 Аналитический этап

#### Решение:

Для начала проанализируем на монотонность  $f(x)$ , которая задана алгоритмом из условия. Докажем, что  $f(x)$  является невозрастающей,  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Пусть  $x, y \in [0, 1]$

$$x = (0.a_1 a_2 a_3 \dots)_3$$

$$y = (0.b_1 b_2 b_3 \dots)_3$$

$k$  - это первый номер разряда, в котором цифры различаются ( $a_i = b_i \forall i < k : a_k \neq b_k$ ). То есть, если  $x < y \Rightarrow a_k < b_k$

Введем правило замены цифры  $\varphi$

$$\varphi(0) = 1 \quad \varphi(1) = 0 \quad \varphi(2) = 0$$

Можно заметить свойство у этой замены, она инвертирует порядок или сохраняет его равным. Если  $a < b \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$

Если в числе  $x$  или  $y$  встретилась цифра 1 до позиции  $k$  или в самой позиции  $k$ , это повлияет на все последующие цифры

#### Случай №1

Если 1 встретилась в позиции  $i < k$ , то значения  $f(x)$  и  $f(y)$  станут одинаковыми, так как хвосты обоих чисел обнуляются

#### Случай №2

Если  $a_k = 1, b_k = 2$ , то в двоичной записи  $f(x)$  и  $f(y)$  в  $k$ -м разряде оба получат 0, но для  $x$  включится правило: все цифры после  $a_k$  станут нулями, а после замены  $0 \rightarrow 1$  хвост  $f(x)$  превратится в бесконечные единицы

Так как во всех случаях при  $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ , функция является монотонной (невозрастающей)

## Измеримость функции по Лебегу

По определению, функция измерима, если  $\forall a \in \mathbb{R}$  множество  $E_a = \{x \in E : f(x) > a\}$  является измеримым

Наша функция  $f(x)$ , заданная алгоритмом, является монотонной, а для любой монотонной функции множество  $E_a$  - это либо промежуток, либо пустое множество  $\Rightarrow$  все эти объекты измеримы по Лебегу, а значит  $f(x)$  измерима по Лебегу на  $E = [0, 1]$

## Последовательность простых функций $f_n(x)$

Определим простую функцию  $f_n(x)$  также алгоритмом, чтобы  $f_n \leq f$ ,  $f_n \rightarrow f$  почти всюду на  $E$

1) Берем первые  $n$  цифр троичной записи числа  $x$

2) Проверка на единицу:

\* Если среди  $n$  цифр есть единица, мы действуем строго по алгоритму для  $f(x)$ , то есть обнуляем всё, что идет после нее

\* Иначе для  $f_n(x)$  все цифры после  $n$ -й будут двойками

Этот алгоритм позволяет достичь требуемых условий для  $f_n$

## Интеграл Лебега функции $f$ по $E$

По теореме Леви (о монотонной сходимости), если последовательность измеримых функций  $f_n$  монотонно возрастает и сходится почти всюду к  $f$ , то

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{k=1}^N y_k * \mu(E_k)$$

Всего значений может принимать наше троичное число  $3^n$ , мы можем разбить отрезок  $[0, 1]$  на  $3^n$  одинаковых интервалов, их мера будет равна  $\mu(E_k) = \frac{1}{3^n}$ . Теперь можно переписать интеграл от нашей простой функции

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{k=1}^{3^n} y_k * \mu(E_k) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=1}^{3^n} y_k$$

где  $y_k$  - значение функции  $f_n$  на  $k$ -м интервале

Далее разобьем интеграл по всему  $E = [0, 1]$  на три части в соответствии с первой цифрой в троичной записи  $x = (0.a_1a_2a_3\dots)_3$

$$x \in [0, \frac{1}{3}] (0)$$

$$x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] (1)$$

$$x \in [\frac{2}{3}, 1] (2)$$

Для средней части, так как там значение с единицей начинается всегда, то есть всё остальное обнуляется и в двоичной системе получается  $(0.0111\dots)_2$  что стремится к  $(0.1)_2$  и равняется  $\frac{1}{2}$ , функция принимает постоянное значение  $\frac{1}{2}$

Следовательно:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) dx = \frac{1}{2} * \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

Мы ищем интеграл

$$I = \int_0^1 f(x) d\mu$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} f(x) d\mu + \frac{1}{6} + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$$

Проверяем крайние интервалы

Если  $x \in [0, \frac{1}{3}]$ , то его первая троичная цифра - 0. По правилу  $0 \rightarrow 1$ , а остальные цифры зависят от хвоста числа. Получается связь  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * f(3x)$

Если  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ , то его первая троичная цифра - 2. По правилу  $2 \rightarrow 0$  и остается только хвост.  $f(x) = \frac{1}{2} * f(3x - 2)$

Для  $x \in [0, \frac{1}{3}]$  получаем интеграл, решаем через замену  $t = 3x, dx = \frac{dt}{3}$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * f(3x) \right) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}} f(3x) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} I$$

Для  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$  получаем интеграл, решаем через замену  $t = 3x - 2, dx = \frac{dt}{3}$

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{6} I$$

В итоге получаем искомый интеграл

$$I = \int_0^1 f(x) d\mu = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} I \right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} I$$

$$I = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} I$$

$$I = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} I$$

$$I - \frac{1}{3} I = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} I = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{2}$$

Интеграл Лебега нашей функции по отрезку  $[0, 1]$  равен  $\frac{1}{2}$

## Мера Лебега-Стилтьеса

Чтобы функция  $F(x)$  задавала меру Лебега-Стилтьеса на  $\mathbb{R}$ , она должна удовлетворять двум основным условиям:

- 1) Монотонность -  $F(x)$  должна быть неубывающей ( $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ )
- 2) Непрерывность слева -  $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Распишем значения  $F(x)$  по кускам на  $E$

$$x = 0 \Rightarrow F(0) = 0 * 0 + 2 = 2$$

$$x \in (0, \frac{1}{3}] \Rightarrow F(x) = x + 2$$

$$x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \Rightarrow F(x) = 2x + 2$$

$$x \in (\frac{2}{3}, 1] \Rightarrow F(x) = 3x + 2$$

Можно заметить, что на  $E$  наша  $F(x)$  монотонная и неубывающая, также если подставить граничные точки то они все будут совпадать с пределом слева

Для обоснования меры проверим точки  $x_1 = \frac{1}{3}$  и  $x_2 = \frac{2}{3}$ , так как в них аргумент функции  $[3x]$  принимает целые значения

$$F(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} * 1 + 2 = \frac{7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}-0} (x + 2) = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$F(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} * 2 + 2 = \frac{10}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}-0} (2x + 2) = \frac{10}{3}$$

Получается, что функция непрерывна в таких граничных точках

Из этого всего можно сделать вывод, что  $F(x)$  действительно задает меру Лебега-Стилтьеса

## Интеграл Лебега-Стилтьеса

У нас есть скачки у нашей функции, ими являются  $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$  у них пределы при стремлении слева равняются значениям функций в этих точках, но справа там уже расходятся значения, это значит что эти точки имеют ненулевую меру

$$\mu_F\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right) = F\left(\frac{1}{3} + 0\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\mu_F\left(\left\{\frac{2}{3}\right\}\right) = F\left(\frac{2}{3} + 0\right) - F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Для подсчёта интеграла Лебега-Стилтьеса мы его разобьем на две части, дискретную (по точкам разрыва) и абсолютно непрерывную (где у  $F$  есть производная)

$$\int_E f dF = \sum_{x_k \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}} f(x_k) * \mu_F(\{x_k\}) + \int_0^1 f(x) F'(x) dx$$

Посчитаем производные  $F(x)$  на наших интервалах

$$\left(0, \frac{1}{3}\right) : F'(x) = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) : F'(x) = 2$$

$$\left(\frac{2}{3}, 1\right) : F'(x) = 3$$

Далее мы можем получить искомый интеграл

$$\int_E f dF = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{3}} f(x) * 1 dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) * 2 dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) * 3 dx$$

$$\int_E f dF = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

■

## 2.2 Численный этап

| *Решение:*

■