МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

Исследовательская работа №2

по дисциплине «Математический анализ и основы вычислений»

Вариант №94

Выполнил: студент гр.
J3212
Мирасов К.В.

Проверил: Ершов А.Р.

г. Санкт-Петербург
2026 г.

Содержание

1 Теоретическая часть 3
1.1 Задание 1 3
1.2 Задание 2 4
1.3 Задание 3 5
2 Практическая часть 6
2.1 Аналитический этап 6
2.2 Численный этап 11
3 Полезные ссылки 12

1 Теоретическая часть

1.1 Задание 1

Условие

Можно ли на отрезке $[-1, 1]$ построить замкнутое множество, мера которого равна 2, но которое отлично от всего отрезка $[-1, 1]$?

Решение:

Предположим от противного и допустим, что существует F - не пустое замкнутое множество, не совпадает с отрезком $[-1, 1]$, имеет меру равную 2

Тогда, если $G = [-1, 1] \setminus F$, то G будет не пустым и открытым

$\Rightarrow \mu(G) = \mu([-1, 1]) - \mu(F) = 2 - 2 = 0$

$\uparrow\downarrow$ Противоречие, из-за того что G открытое, у него будет интервал (a, b), где $a < b$, значит $\mu(G)$ будет больше нуля

$\blacksquare$

1.2 Задание 2

Условие

Измерима ли функция на интервале $(0, 1)$?

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

Решение:

Для начала найдем проблемные точки нашей функции. Ими являются $\{0, 1\}$, так как при них знаменатель зануляется, но у нас $E = (0, 1)$, значит они не входят. Функция $f(x)$ непрерывна на $(0, 1)$. Согласно свойствам измеримых функций, любая непрерывная на измеримом множестве функция является измеримой $\Rightarrow f(x)$ измерима

■

1.3 Задание 3

Условие

Вычислите интеграл Лебега $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$, если он существует. $Ir = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\sqrt{x}} & x \in Ir \cap [0,4] \\ \frac{2x-3}{x^2-3x+8} & x \in Ir \cap [4,5] \\ \sin(3+x^2) & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$E = [0, 5]$

Решение:

Множество $\mathbb{Q}$ счетно $\Rightarrow$ мера Лебега любого счетного множества равна 0

Значит $\sin(3+x^2), x \in \mathbb{Q}$ не вносит никакого значения

Теперь мы можем разбить интеграл по всему отрезку $[0, 5]$ на сумму двух интегралов. Так как иррациональные числа занимают наш отрезок почти всюду, интегралы превращаются в обычные определенные

$$I = \int_{[0,4]} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\mu + \int_{[4,5]} \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\,\mathrm{d}\mu$$

$$I_1 = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_4^5 \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\,\mathrm{d}x$$

Рассмотрим I_1, будем решать через замену переменной $t = \sqrt{x}$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2t+2-2}{1+t}\,\mathrm{d}t = [2t - 2\ln|1+t|]\ \Big|_0^2 = 4 - 2\ln(3)$$

Далее рассматриваем I_2, вводим замену $u = x^2 - 3x + 8 \Rightarrow \mathrm{d}u = (2x-3)\,\mathrm{d}x$

$$I_2 = \int_{12}^{18} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(18) - \ln(12)$$

$$I = I_1 + I_2 = 4 - 2\ln(3) + \ln\left(\frac{18}{12}\right) = 4 - \ln(6)$$

■

2 Практическая часть

Условие

$E = [0, 1], \quad F(x) = x\lceil 3x\rceil + 2$

Алгоритм представления значения

1) Представляем x в троичной системе счисления

2) Если $(x)_3$ содержит цифру 1, заменяем все знаки после неё на 0

3) Заменяем каждую цифру полученной последовательности по следующему правилу: $0 \to 1 \quad 1 \to 0 \quad 2 \to 0$

4) Полученную последовательность интерпретируем как двоичную запись

2.1 Аналитический этап

Решение:

Для начала проанализируем на монотонность $f(x)$, которая задана алгоритмом из условия. Докажем, что $f(x)$ является невозрастающей, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Пусть $x, y \in [0, 1]$

$x = (0.a_1 a_2 a_3 ...)_3$

$y = (0.b_1 b_2 b_3 ...)_3$

k - это первый номер разряда, в котором цифры различаются $(a_i = b_i \forall i < k : a_k \neq b_k)$. То есть, если $x < y \Rightarrow a_k < b_k$

Введем правило замены цифры φ

$\varphi(0) = 1 \quad \varphi(1) = 0 \quad \varphi(2) = 0$

Можно заметить свойство у этой замены, она инвертирует порядок или сохраняет его равным. Если $a < b \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$

Если в числе x или y встретилась цифра 1 до позиции k или в самой позиции k, это повлияет на все последующие цифры

Случай №1

Если 1 встретилась в позиции $i < k$, то значения $f(x)$ и $f(y)$ станут одинаковыми, так как хвосты обоих чисел обнулятся

Случай №2

Если $a_k = 1, b_k = 2$, то в двоичной записи $f(x)$ и $f(y)$ в k-м разряде оба получат 0, но для x включится правило: все цифры после a_k станут нулями, а после замены $0 \to 1$ хвост $f(x)$ превратится в бесконечные единицы

Так как во всех случаях при $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, функция является монотонной (невозрастающей)

Измеримость функции по Лебегу

По определению, функция измерима, если $\forall a \in \mathbb{R}$ множество $E_a = \{x \in E : f(x) > a\}$ является измеримым

Наша функция $f(x)$, заданная алгоритмом, является монотонной, а для любой монотонной функции множество E_a - это либо промежуток, либо пустое множество $\Rightarrow$ все эти объекты измеримы по Лебегу, а значит $f(x)$ измерима по Лебегу на $E = [0, 1]$

Последовательность простых функций $f_n(x)$

Определим простую функцию $f_n(x)$ также алгоритмом, чтобы $f_n \leq f, f_n \to f$ почти всюду на E

1) Берем первые n цифр троичной записи числа x

2) Проверка на единицу:

$*$ Если среди n цифр есть единица, мы действуем строго по алгоритму для $f(x)$, то есть обнуляем всё, что идет после нее

$*$ Иначе для $f_n(x)$ все цифры после n-й будут двойками

Этот алгоритм позволяет достичь требуемых условий для f_n

Интеграл Лебега функции f по E

По теореме Леви (о монотонной сходимости), если последовательность измеримых функций f_n монотонно возрастает и сходится почти всюду к f, то

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{N} y_k * \mu(E_k)$$

Всего значений может принимать наше троичное число 3^n, мы можем разбить отрезок $[0, 1]$ на 3^n одинаковых интервалов, их мера будет равна $\mu(E_k) = \frac{1}{3^n}$. Теперь можно переписать интеграл от нашей простой функции

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{3^n} y_k * \mu(E_k) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=1}^{3^n} y_k$$

где y_k - значение функции f_n на k-м интервале

Далее разобьем интеграл по всему $E = [0, 1]$ на три части в соответствии с первой цифрой в троичной записи $x = (0.a_1 a_2 a_3 ...)_3$

$x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] (0)$

$x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] (1)$

$x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] (2)$

Для средней части, так как там значение с единицы начинается всегда, то есть всё остальное обнуляется и в двоичной системе получается $(0.0111...)_2$ что стремится к $(0.1)_2$ и равняется $\frac{1}{2}$, функция принимает постоянное значение $\frac{1}{2}$

Следовательно:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} * \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Мы ищем интеграл

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{6} + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Проверяем крайние интервалы

Если $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, то его первая троичная цифра - 0. По правилу $0 \to 1$, а остальные цифры зависят от хвоста числа. Получается связь $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * f(3x)$

Если $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, то его первая троичная цифра - 2. По правилу $2 \to 0$ и остается только хвост. $f(x) = \frac{1}{2} * f(3x - 2)$

Для $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ получаем интеграл, решаем через замену $t = 3x, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} * f(3x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}I$$

Для $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ получаем интеграл, решаем через замену $t = 3x - 2, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}I$$

В итоге получаем искомый интеграл

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\mu = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}I\right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}I$$

$$I = \frac{2}{6} + \frac{2}{6}I$$

$$I = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}I$$

$$I - \frac{1}{3}I = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}I = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{2}$$

Интеграл Лебега нашей функции по отрезку $[0, 1]$ равен $\frac{1}{2}$

Мера Лебега-Стилтьеса

Чтобы функция $F(x)$ задавала меру Лебега-Стилтьеса на $\mathbb{R}$, она должна удовлетворять двум основным условиям:

1) Монотонность - $F(x)$ должна быть неубывающей $(x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2))$

2) Непрерывность слева - $\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Распишем значения $F(x)$ по кускам на E

$x = 0 \Rightarrow F(0) = 0 * 0 + 2 = 2$

$x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow F(x) = x + 2$

$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow F(x) = 2x + 2$

$x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow F(x) = 3x + 2$

Можно заметить, что на E наша $F(x)$ монотонная и неубывающая, также если подставить граничные точки то они все будут совпадать с пределом слева

Для обоснования меры проверим точки $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{2}{3}$, так как в них аргумент функции $\lceil 3x \rceil$ принимает целые значения

$F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} * 1 + 2 = \frac{7}{3}$

$\lim_{x \to \frac{1}{3}-0} (x + 2) = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$

$F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} * 2 + 2 = \frac{10}{3}$

$\lim_{x \to \frac{2}{3}-0} (2x + 2) = \frac{10}{3}$

Получается, что функция непрерывна в таких граничных точках

Из этого всего можно сделать вывод, что $F(x)$ действительно задает меру Лебега-Стилтьеса

Интеграл Лебега-Стилтьеса

У нас есть скачки у нашей функции, ими являются $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, у них пределы при устремлении слева равняются значениям функций в этих точках, но справа там уже расходятся значения, это значит что эти точки имеют ненулевую меру

$$\mu_F\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}\right) = F\left(\frac{1}{3} + 0\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\mu_F\left(\left\{\frac{2}{3}\right\}\right) = F\left(\frac{2}{3} + 0\right) - F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Для подсчёта интеграла Лебега-Стилтьеса мы его разобьем на две части, дискретную (по точкам разрыва) и абсолютно непрерывную (где у F есть производная)

$$\int_E f \, \mathrm{d}F = \sum_{x_k \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}} f(x_k) * \mu_F(\{x_k\}) + \int_0^1 f(x) F'(x) \, \mathrm{d}x$$

Посчитаем производные $F(x)$ на наших интервалах

$$\left(0, \frac{1}{3}\right) : F'(x) = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) : F'(x) = 2$$

$$\left(\frac{2}{3}, 1\right) : F'(x) = 3$$

Далее мы можем получить искомый интеграл

$$\int_E f \,\mathrm{d}F = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{3}} f(x) * 1 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f(x) * 2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x) * 3 \,\mathrm{d}x$$

$$\int_E f \,\mathrm{d}F = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

■

2.2 Численный этап

Решение:

Численное моделирование проведено на сетке из $N = 100000$ точек с $n = 20$ троичными разрядами.

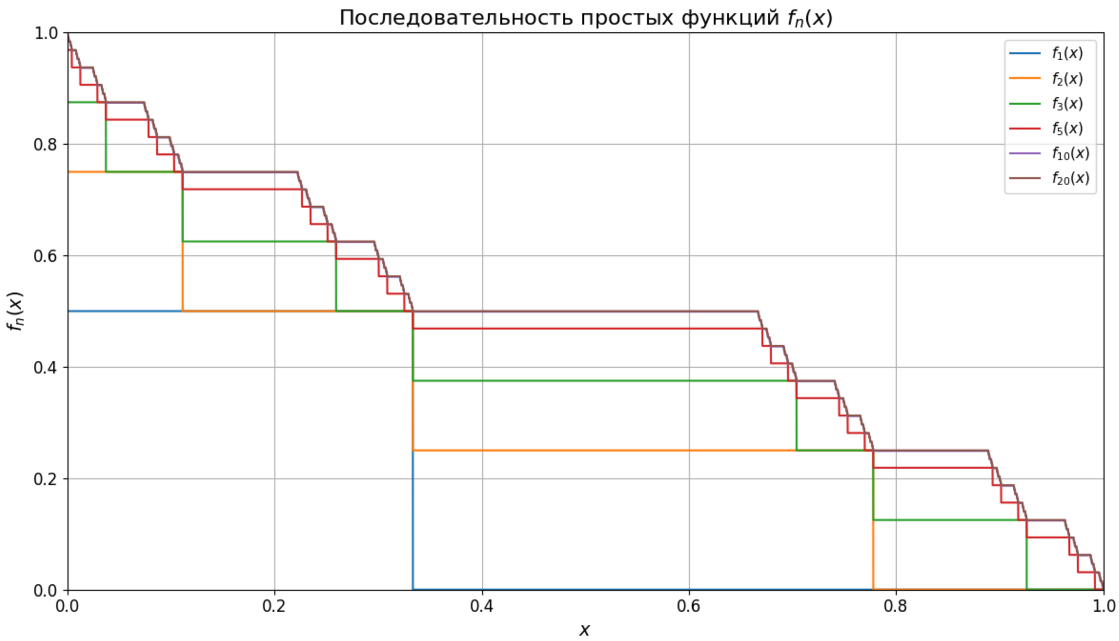

Рис. 1. Последовательность простых функций $f_{n(x)}$ при $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$

Интеграл	**Численный**	**Теоретический**	**Погрешность**
Лебега	0.499999	$\frac{1}{2}$	$\approx 10^{-6}$
Лебега-Стилтьеса	1.333340	$\frac{4}{3}$	$\approx 10^{-5}$

Численные результаты подтверждают аналитические значения интегралов с высокой точностью.

■

3 Полезные ссылки

- **GitHub Repository** https://github.com/mezgou/lebesgue-integration-analysis