МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

Исследовательская работа №2

по дисциплине «Математический анализ и основы вычислений»

Вариант №94

Выполнил: студент гр.
J3212
Мирасов К.В.

Проверил: Ершов А.Р.

г. Санкт-Петербург
2026 г.

Содержание

1 Теоретическая часть 3
 1.1 Задание 1 3
 1.2 Задание 2 4
 1.3 Задание 3 5
2 Практическая часть 6
 2.1 Аналитеский этап 6
 2.2 Численный этап 8

1 Теоретическая часть

1.1 Задание 1

Условие

Можно ли на отрезке $[-1, 1]$ построить замкнутое множество, мера которого равна 2, но которое отлично от всего отрезка $[-1, 1]$?

Решение:

Предположим от противного и допустим, что существует F - не пустое замкнутое множество, не совпадает с отрезком $[-1, 1]$, имеет меру равную 2

Тогда, если $G = [-1, 1] \setminus F$, то G будет не пустым и открытым

$\Rightarrow \mu(G) = \mu([-1, 1]) - \mu(F) = 2 - 2 = 0$

$\uparrow\downarrow$ Противоречие, из-за того что G открытое, у него будет интервал (a, b), где $a < b$, значит $\mu(G)$ будет больше нуля

$\blacksquare$

1.2 Задание 2

Условие

Измерима ли функция на интервале $(0, 1)$?

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

Решение:

Для начала найдем проблемные точки нашей функции. Ими являются $\{0, 1\}$, так как при них знаменатель зануляется, но у нас $E = (0, 1)$, значит они не входят. Функция $f(x)$ непрерывна на $(0, 1)$. Согласно свойствам измеримых функций, любая непрерывная на измеримом множестве функция является измеримой $\Rightarrow f(x)$ измерима

$\blacksquare$

1.3 Задание 3

Условие

Вычислите интеграл Лебега $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$, если он существует. $Ir = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\sqrt{x}} & x \in Ir \cap [0, 4] \\ \frac{2x-3}{x^2-3x+8} & x \in Ir \cap [4, 5] \\ \sin(3 + x^2) & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$E = [0, 5]$

Решение:

Множество $\mathbb{Q}$ счетно $\Rightarrow$ мера Лебега любого счетного множества равна 0

Значит $\sin(3 + x^2), x \in \mathbb{Q}$ не вносит никакого значения

Теперь мы можем разбить интеграл по всему отрезку $[0, 5]$ на сумму двух интегралов. Так как иррациональные числа занимают наш отрезок почти всюду,интегралы превращаются в обычные определенные

$$I = \int_{[0,4]} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}\mu + \int_{[4,5]} \frac{2x-3}{x^2-3x+8} \, \mathrm{d}\mu$$

$$I_1 = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_4^5 \frac{2x-3}{x^2-3x+8} \, \mathrm{d}x$$

Рассмотрим I_1, будем решать через замену переменной $t = \sqrt{x}$

$$I_1 = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2t+2-2}{1+t} \, \mathrm{d}t = [2t - 2\ln|1+t|] \Big|_0^2 = 4 - 2\ln(3)$$

Далее рассматриваем I_2, вводим замену $u = x^2 - 3x + 8 \Rightarrow \mathrm{d}u = (2x - 3) \, \mathrm{d}x$

$$I_2 = \int_{12}^{18} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(18) - \ln(12)$$

$$I = I_1 + I_2 = 4 - 2\ln(3) + \ln\left(\frac{18}{12}\right) = 4 - \ln(6)$$

■

2 Практическая часть

Условие

$E = [0, 1], \quad F(x) = x\lceil 3x \rceil + 2$

Алгоритм представления значения

1) Представляем x в троичной системе счисления

2) Если $(x)_3$ содержит цифру 1, заменяем все знаки после неё на 0

3) Заменяем каждую цифру полученной последовательности по следующему правилу: $0 \to 1 \quad 1 \to 0 \quad 2 \to 0$

4) Полученную последовательность интерпретируем как двоичную запись

2.1 Аналитеский этап

Решение:

Для начала проанализируем на монотонность $f(x)$, которая задана алгоритмом из условия. Докажем, что $f(x)$ является невозрастающей, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Пусть $x, y \in [0, 1]$

$x = (0.a_1 a_2 a_3 ...)_3$

$y = (0.b_1 b_2 b_3 ...)_3$

k - это первый номер разряда, в котором цифры различаются $(a_i = b_i \forall i < k : a_k \neq b_k)$. То есть, если $x < y \Rightarrow a_k < b_k$

Введем правило замены цифры φ

$\varphi(0) = 1 \quad \varphi(1) = 0 \quad \varphi(2) = 0$

Можно заметить свойство у этой замены, она инвертирует порядок или сохраняет его равным. Если $a < b \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$

Если в числе x или y встретилась цифра 1 до позиции k или в самой позиции k, это повлияет на все последующие цифры

Случай №1

Если 1 встретилась в позиции $i < k$, то значении $f(x)$ и $f(y)$ станут одинаковыми, так как хвосты обоих чисел обнулятся

Случай №2

Если $a_k = 1, b_k = 2$, то в двоичной записи $f(x)$ и $f(y)$ в k-м разряде оба получат 0, но для x включится правило: все цифры после a_k станут нулями, а после замены $0 \to 1$ хвост $f(x)$ превратится в бесконечные единицы

Так как во всех случаях при $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, функция является монотонной (невозрастающей)

Измеримость функции по Лебегу

По определению, функция измерима, если $\forall a \in \mathbb{R}$ множество $E_a = \{x \in E : f(x) > a\}$ является измеримым

Наша функция $f(x)$, заданная алгоритмом, является монотонной, а для любой монотонной функции множество E_a - это либо промежуток, либо пустое множество $\Rightarrow$ все эти объекты измеримы по Лебегу, а значит $f(x)$ измерима по Лебегу на $E = [0, 1]$

Последовательность простых функций $f_n(x)$

Определим простую функцию $f_n(x)$ также алгоритмом, чтобы $f_n \le f, f_n \to f$ почти всюду на E

1) Берем первые n цифр троичной записи числа x

2) Проверка на единицу:

$*$ Если среди n цифр есть единица, мы действуем строго по алгоритму для $f(x)$, то есть обнуляем всё, что идет после нее

$*$ Иначе для $f_n(x)$ все цифры после n-й будут двойками

Этот алгоритм позволяет достичь требуемых условий для f_n

Интеграл Лебега функции f по E

По теореме Леви (о монотонной сходимости), если последовательность измеримых функций f_n монотонно возрастает и сходится почти всюду к f, то

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{N} y_k * \mu(E_k)$$

Всего значений может принимать наше троичное число 3^n, мы можем разбить отрезок $[0, 1]$ на 3^n одинаковых интервалов, их мера будет равна $\mu(E_k) = \frac{1}{3^n}$. Теперь можно переписать интеграл от нашей простой функции

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{3^n} y_k * \mu(E_k) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=1}^{3^n} y_k$$

где y_k - значение функции f_n на k-м интервале

$\blacksquare$

2.2 Численный этап

Решение:

■