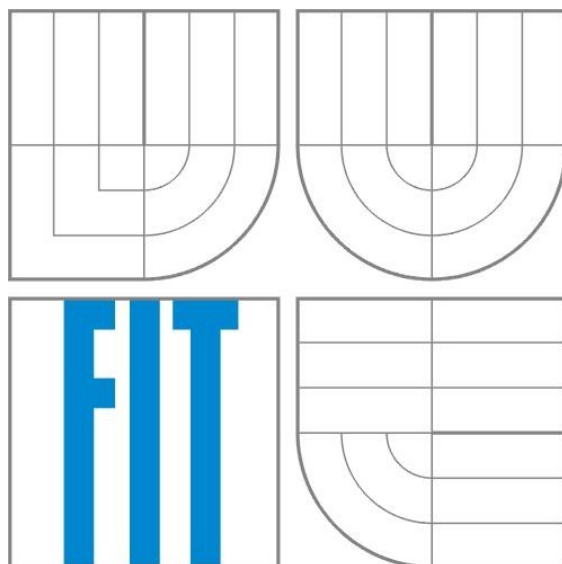


Vysoké učení technické v Brně

**Fakulta informačních technologií**



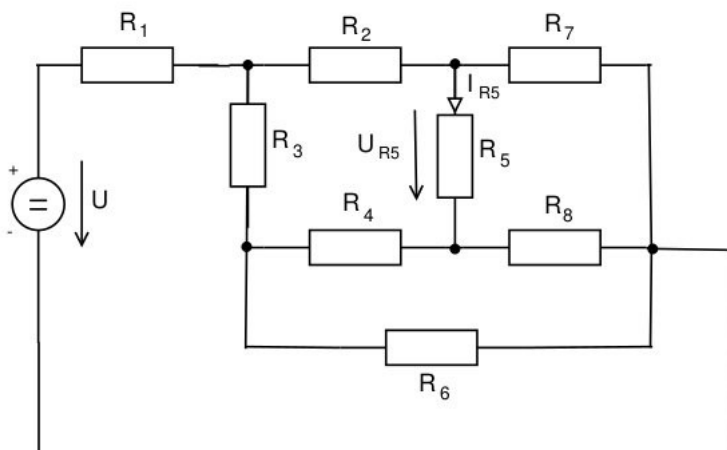
## **TEORIE OBVODŮ**

Semestrální projekt

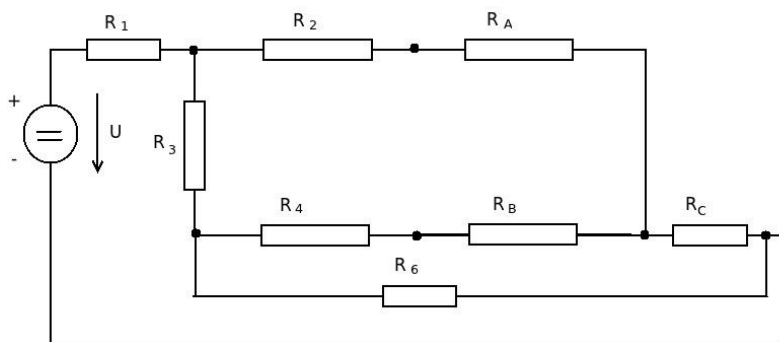
## Príklad č. 1

Zadanie: Zistite napätie  $U_{R5}$  a prúd  $I_{R5}$ . Použite metódu postupného zjednodušovania obvodu.

U [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]	$R_7$ [ $\Omega$ ]	$R_8$ [ $\Omega$ ]
115	510	500	550	250	300	800	330	250



V danom obvode je vidieť, že rezistory  $R_5, R_7$  a  $R_8$  sú zapojené v trojuholníku a teda ich zapojenie môžeme pretransformovať na hviezdu:



$$R_A = \frac{R_7 \cdot R_5}{R_5 + R_7 + R_8} = \frac{330 \cdot 300}{300 + 330 + 250} = 112,5 \Omega$$

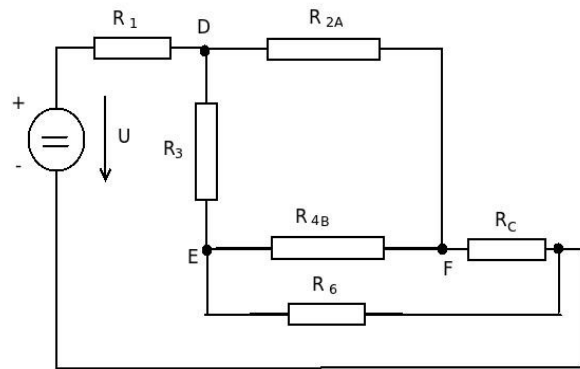
$$R_B = \frac{R_8 \cdot R_5}{R_5 + R_7 + R_8} = \frac{250 \cdot 300}{300 + 330 + 250} = 85,2272 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_7 \cdot R_8}{R_5 + R_7 + R_8} = \frac{330 \cdot 250}{300 + 330 + 250} = 93,75 \Omega$$

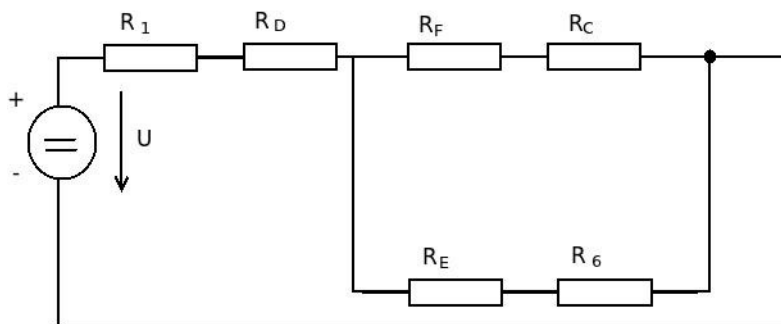
Ďalej obvod zjednodušíme tak, že sčítame odpory  $R_2$  a  $R_A$  a takisto odpory  $R_4$  a  $R_B$  pretože sú zapojené v sérii.

$$R_{2A} = R_2 + R_A = 500 + 112,5 = 612,5 \Omega$$

$$R_{4B} = R_4 + R_B = 250 + 85,2272 = 335,2272 \Omega$$



Z obrázka je vidieť, že aj odpory medzi uzlami D,E,F sú zapojené v trojuholníku a teda môžeme znova transformovať na hviezdu.

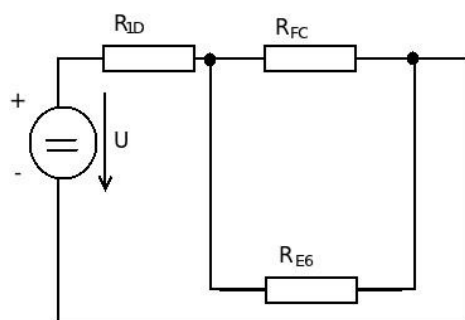


$$R_D = \frac{R_{2A} \cdot R_3}{R_{2A} + R_3 + R_{4B}} = \frac{612,5 \cdot 550}{612,5 + 550 + 335,2272} = 224,9241 \Omega$$

$$R_E = \frac{R_3 \cdot R_{4B}}{R_{2A} + R_3 + R_{4B}} = \frac{550 \cdot 335,2272}{612,5 + 550 + 335,2272} = 123,1031 \Omega$$

$$R_F = \frac{R_{2A} \cdot R_{4B}}{R_{2A} + R_3 + R_{4B}} = \frac{612,5 \cdot 335,2272}{612,5 + 550 + 335,2272} = 137,0921 \Omega$$

Spojíme odpory v sérii a zjednodušíme paralelné zapojenie:

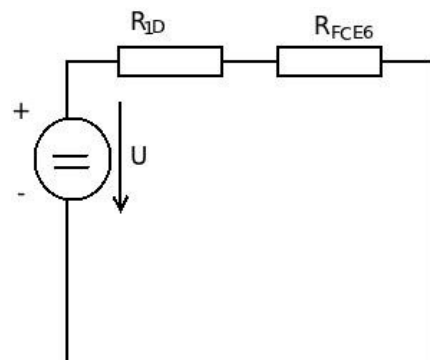


$$R_{1D} = R_1 + R_D$$

$$R_{FC} = R_F + R_C$$

$$R_{E6} = R_E + R_6$$

$$R_{FCE6} = \frac{R_{FC} + R_{E6}}{R_{FC} + R_{E6}}$$



Pre celkový odpor teda platí:

$$R = R_{1D} + R_{FCE6} = R_1 + R_D + \frac{R_{FC} + R_{E6}}{R_{FC} + R_{E6}} = 510 + 224,9241 + \frac{(137,0921 + 93,75) \cdot (123,1031 + 800)}{(137,0921 + 93,75) + (123,1031 + 800)}$$

$$R = 919,5872 \Omega$$

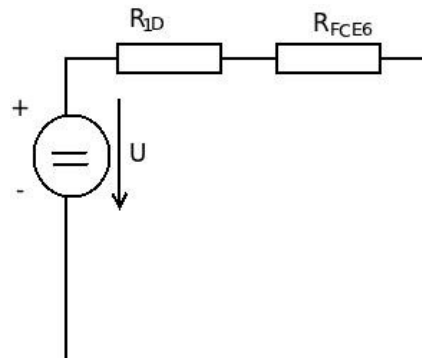
a pre celkový prúd:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{135}{919,5872} = 0,1359 \text{ A}$$

Kedže sme si vypočítali potrebné hodnoty, môžeme obvod späť prepočítavať. V tomto prípade oboma rezistormi prechádza rovnaký prúd. Stačí vypočítať iba napätie.

$$U_{1D} = R_{1D} \cdot I = 734,9241 \cdot 0,1359 = 99,8761 \text{ V}$$

$$U_{FCE6} = R_{FCE6} \cdot I = 184,6630 \cdot 0,1359 = 25,0957 \text{ V}$$



V tomto prípade vidíme, že sa nám obvod rozdelil na viac vetiev a teda sa delí aj prúd.

$$U_1 = R_1 \cdot I = 734,9241 \cdot 0,1359 = 69,309 \text{ V}$$

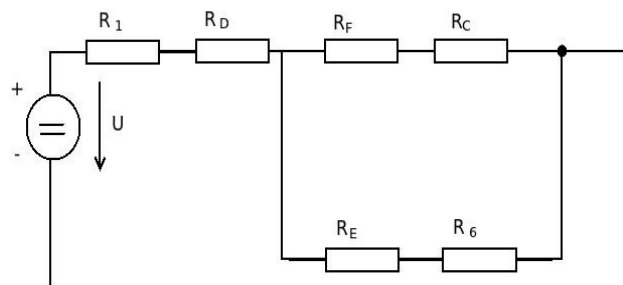
$$U_D = R_D \cdot I = 224,9241 \cdot 0,1359 = 30,5671 \text{ V}$$

$$I_{FC} = \frac{U_{FCE6}}{R_{FC}} = \frac{25,0957}{230,8422} = 0,1087 \text{ A}$$

$$I_{E6} = \frac{U_{FCE6}}{R_{E6}} = \frac{25,0957}{923,1031} = 0,0271 \text{ A}$$

$$U_F = R_F \cdot I_{FC} = 137,0921 \cdot 0,1087 = 14,9019 \text{ V}$$

$$U_E = R_E \cdot I_{E6} = 123,1031 \cdot 0,0271 = 3,3360 \text{ V}$$



$$U_C = R_C \cdot I_{FC} = 93,75 \cdot 0,1087 = 10,1906 \text{ V}$$

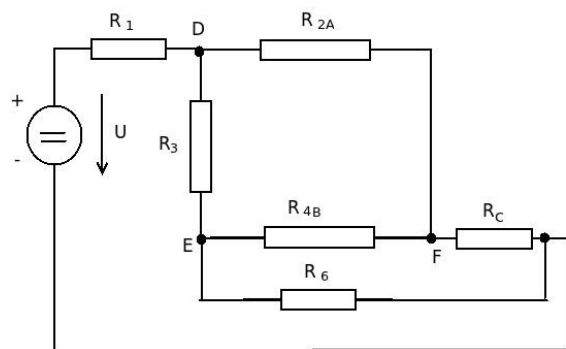
$$U_6 = R_6 \cdot I_{E6} = 800 \cdot 0,0271 = 21,68 \text{ V}$$

$$U_{2A} = U_D + U_F = 30,5671 + 14,9019 = 45,469 \text{ V}$$

$$U_{4B} = U_F - U_E = 14,9019 - 3,3360 = 11,5659 \text{ V}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{2A}}{R_{2A}} = \frac{45,469}{612,5} = 0,0742 \text{ A}$$

$$I_{4B} = \frac{U_{4B}}{R_{4B}} = \frac{11,5659}{335,2272} = 0,0345 \text{ A}$$



$$U_3 = U_{2A} - U_{4B} = 33,9031 \text{ V} \quad U_2 = R_2 \cdot I_{R2} = 37,1 \text{ V}$$

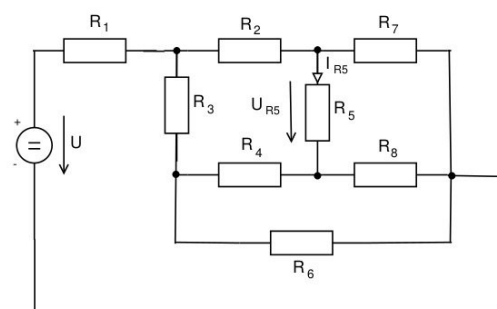
$$U_B = R_B \cdot I_{4B} = 2,9403 \text{ V} \quad U_A = R_A \cdot I_{R2} = 8,3475 \text{ V}$$

$$U_4 = R_4 \cdot I_{4B} = 8,625 \text{ V}$$

$$U_7 = U_A + U_C = 18,5381 \text{ V}$$

$$U_8 = U_B + U_C = 13,1309 \text{ V}$$

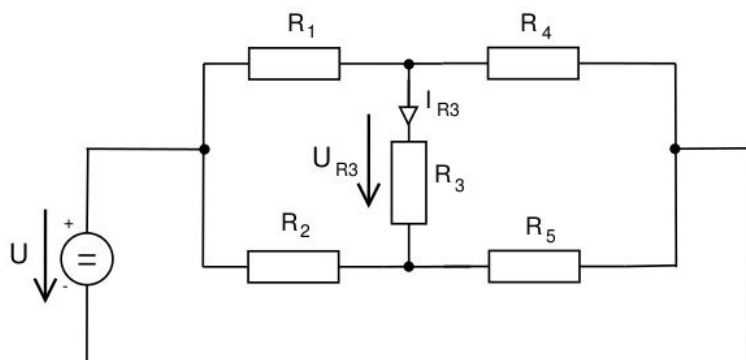
$$U_5 = U_7 - U_8 = 5,4147 \text{ V} \quad I_5 = \frac{U_5}{R_5} = 0,0180 \text{ A}$$



## Príklad č.2

Stanovte napätie  $U_{R3}$  a prúd  $I_{R3}$ . Použite metódu Theveninovej vety.

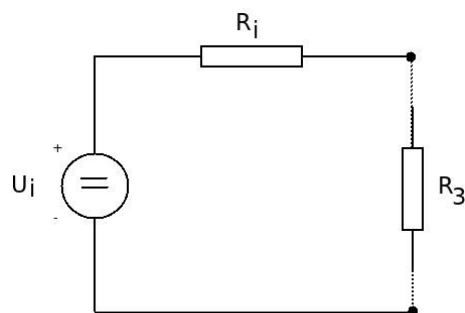
U [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]
50	525	620	210	230	130



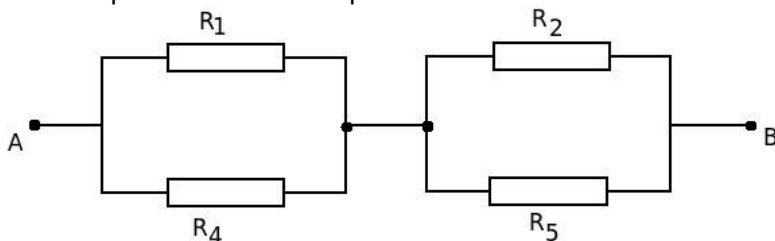
Pomocou Theveninovej vety si môžeme daný obvod prekresliť na obvod ekvivalentný:

Pre prúd v tomto obvode platí:

$$I = I_3 = \frac{U_i}{R_i + R_3}$$



Vetvu s odpormi si môžeme prekresliť nasledovne:



Pre  $R_i$  teda platí:

$$R_{14} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} \quad R_{25} = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5}$$

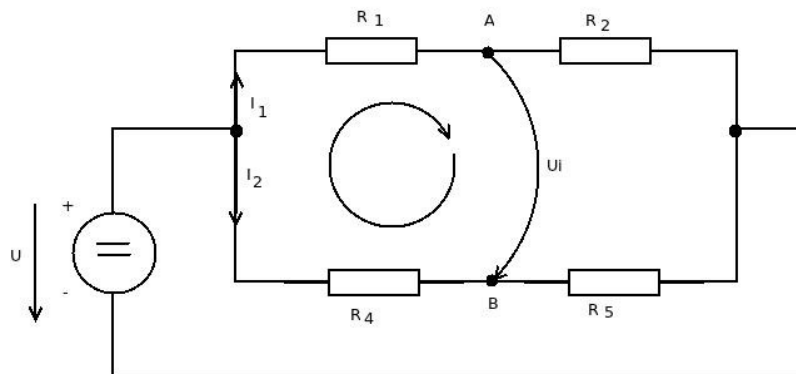
$$R_i = R_{14} + R_{25} = \frac{525 \cdot 230}{525 + 230} + \frac{620 \cdot 130}{620 + 130} = 267,4004 \, \Omega$$

Z daného obvodu vypočítame celkový odpor a prúd:

$$R = \frac{(R_1 + R_4) \cdot (R_2 + R_5)}{R_1 + R_4 + R_2 + R_5} = \frac{(525 + 230) \cdot (620 + 130)}{525 + 230 + 620 + 130} = 376,2458 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{50}{376,2458} = 0,1328 \, A$$

Máme teda jednoduchý obvod v ktorom sú rezistory  $R_1$  a  $R_4$  a zároveň  $R_2$  a  $R_5$  zapojené v sérii, ale navzájom sú tieto dvojice zapojené paralelne. Napätie  $U_i$  je tzv. napätie naprázdno, to znamená, že medzi bodmi A a B neprechádza žiaden prúd.



$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_4} \quad I_2 = \frac{U}{R_2 + R_5}$$

Zo slučkového napätia vypočítame  $U_i$

$$R_1 I_1 + U_i - R_2 I_2 = 0 \quad U_i = R_2 I_2 - R_1 I_1$$

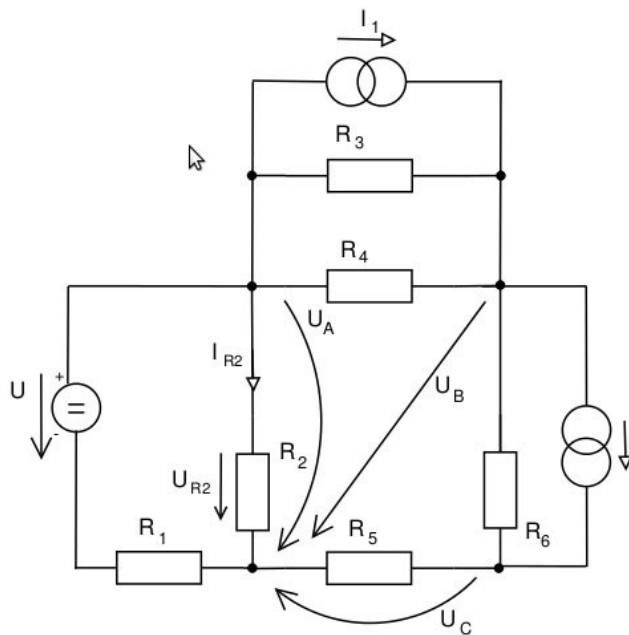
$$U_i = R_2 \cdot \frac{U}{R_2 + R_5} - R_1 \cdot \frac{U}{R_1 + R_4} = 620 \cdot \frac{50}{620 + 130} - 525 \cdot \frac{50}{525 + 230} = 6,5651 \text{ V}$$

Teraz už poznáme všetky potrebné veličiny, vďaka ktorým môžeme vypočítať  $I_{R3}$  a  $U_{R3}$ .

$$I_3 = \frac{U_i}{R_i + R_3} = \frac{6,5651}{267,4004 + 210} = 0,0138 \text{ A} \quad U_3 = R_3 \cdot I_3 = 210 \cdot 0,0138 = 2,898 \text{ V}$$

### Príklad č.3

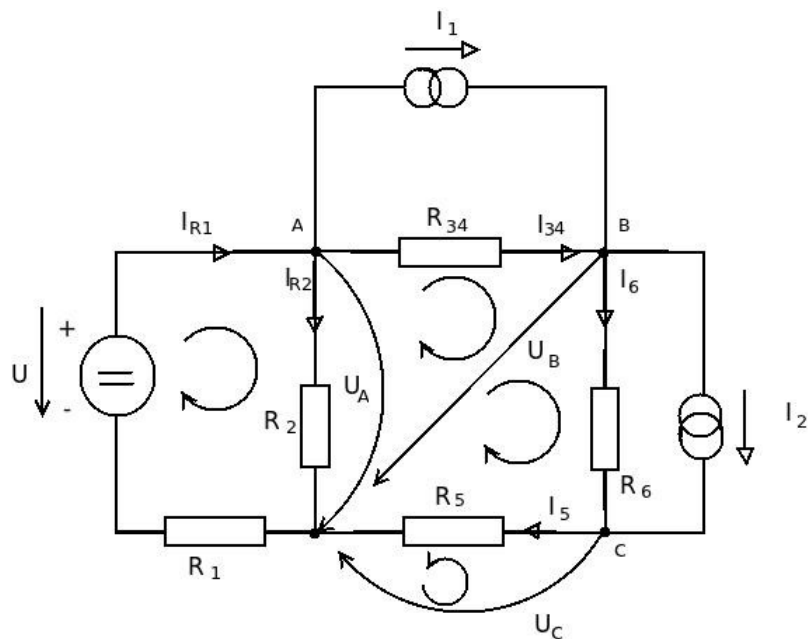
Zistite napätie  $U_{R2}$  a prúd  $I_{R2}$ . Použite metódu uzlových napätí ( $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$ ).



U [V]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]
150	0,4	0,8	490	450	610	340	340	270

V obvode si vyznačíme smery prúdov a slučky.

Taktiež môžeme zjednodušiť paralelné zapojenie rezistorov  $R_3$  a  $R_4$ .



$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{610 \cdot 340}{610 + 340} = 218,3157 \, \Omega$$

Zostavíme si rovnice pre prúdy tečúce z/do uzlov A,B,C:

$$A: I_{R1} - I_{R2} - I_{R34} - I_1 = 0$$

$$B: I_{R34} + I_1 - I_{R6} - I_2 = 0$$

$$C: I_{R6} + I_2 - I_{R5} = 0$$

a rovnice pre jednotlivé slučky a vyjadríme z nich jednotlivé prúdy:

$$U_a + R_1 \cdot I_{R1} - U = 0$$

$$I_{R1} = \frac{U - U_A}{R_1}$$

$$I_{R34} \cdot R_{34} + U_B - U_A = 0$$

$$I_{R1} = \frac{U - U_A}{R_1}$$

$$I_{R6} \cdot R_6 + U_C - U_B = 0$$

$$I_{R6} = \frac{U_B - U_C}{R_6}$$

$$I_{R2} \cdot R_2 - U_A = 0$$

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}$$

$$I_{R5} \cdot R_5 - U_C = 0$$

$$I_{R5} = \frac{U_C}{R_5}$$

Tieto prúdy dosadíme do rovníc pre jednotlivé uzly a riešime sústavu 3 rovníc o 3 neznámych.

Výsledné hodnoty sú:

$$U_C = 119,999 \text{ V} \quad U_B = -0,7075 \text{ V} \quad U_A = U_{R2} = -10,9818 \text{ V}$$

Vypočítame hľadaný prúd  $I_{R2}$ :

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2} = \frac{-10,9818}{450} = -0,0244 \text{ A}$$



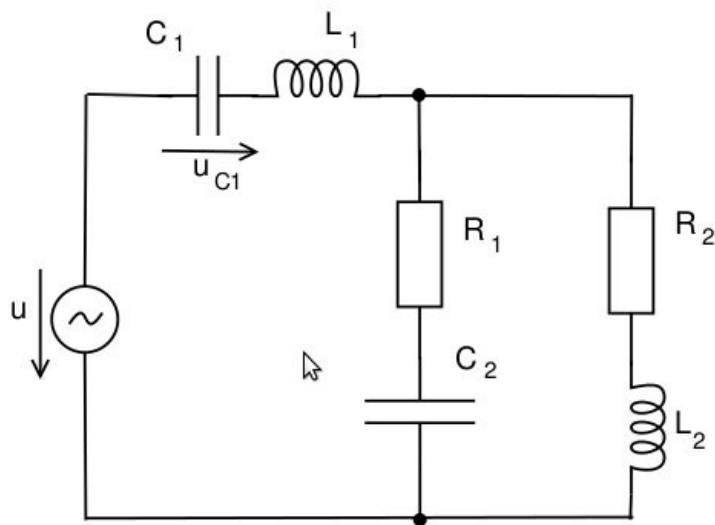
#### Príklad č.4

Pre napájacie napätie platí:  $u = U \cdot \sin(2\pi f t)$ . Vo vzťahu pre napätie na kondenzátore:

$u_{C1} = U_{C1} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_{C1})$  určte  $|U_{C1}|$  a  $\varphi_{C1}$ . Použite metódu zjednodušovania obvodu. Pozn: Pomocný "smer šíčky napájacieho zdroja platí pre špeciálny časový okamih

$$t = \frac{\pi}{2\omega} \text{ . "}$$

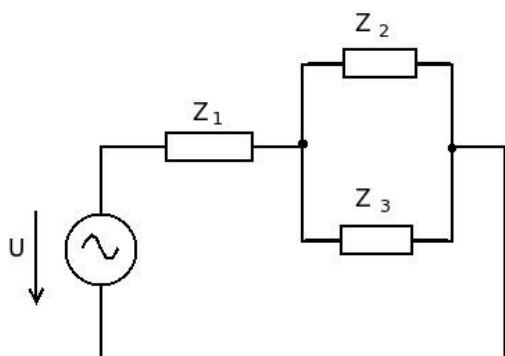
U [V]	R <sub>1</sub> [Ω]	R <sub>2</sub> [Ω]	L <sub>1</sub> [mH]	L <sub>2</sub> [mH]	C <sub>1</sub> [μF]	C <sub>2</sub> [μF]	f [Hz]
75	165	150	380	430	310	235	95



Vypočítame si uhlovú rýchlosť  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,1416 \cdot 95 = 596,904 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$$

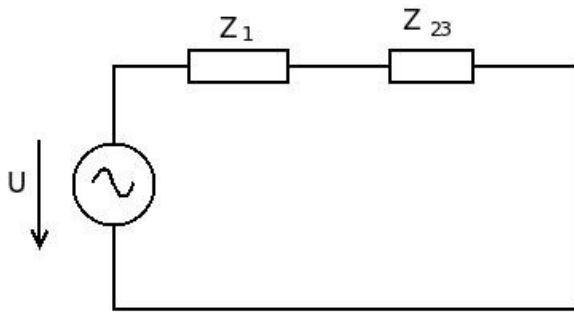
Vypočítame najskôr jednotlivé impedancie (odpory) a z nich následne celkovú impedanciu



$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = j \frac{\omega^2 C_1 L_1 - 1}{\omega C_1} = \frac{596,904^2 \cdot 310 \cdot 10^{-6} \cdot 0,38 - 1}{596,904 \cdot 310 \cdot 10^{-6}} = 221,4192 \text{ j}\Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 150 + j596,904 \cdot 0,43 = 150 + 256,6687 \text{ j}\Omega$$

$$Z_3 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_2} = R_1 - j \frac{1}{\omega C_2} = 165 - j \frac{1}{596,904 \cdot 235 \cdot 10^{-6}} = 165 - 7,1289 \text{ j}\Omega$$



$$Z_{23} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(150 + 256,6687j) \cdot (165 - 7,1289j)}{(150 + 256,6687j) + (165 - 7,1289j)} = 115,631 + 39,4489j \Omega$$

$$Z = Z_1 + Z_{23} = 221,4192j + (115,631 + 39,4489j) = 115,631 + 260,8681j \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{75}{(115,631 + 260,8681j)} = 0,1065 - 0,2402j A$$

$$|U_{Cl}| = \frac{I}{j\omega C_1} = -j \frac{I}{\omega C_1} = -j \frac{(0,1065 - 0,2402j)}{(596,904 \cdot 310 \cdot 10^{-6})} = \sqrt{1,2981^2 + 0,5755^2} = 1,4199 V$$

$$\sin \varphi = \frac{\Im_{U_{Cl}}}{|U_{Cl}|} = \frac{0,5755}{1,4199} = 0,4053$$

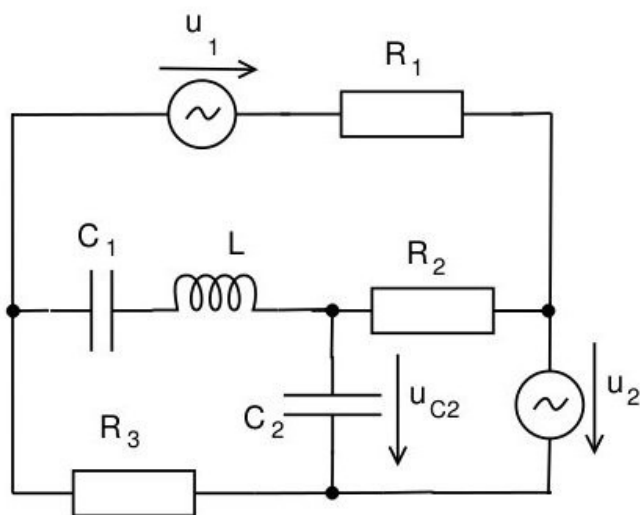
$$\varphi = \sin^{-1}(0,4053) + 180^\circ = 203^\circ 54' 35''$$

## Príklad č.5

Pre napájacie napätie platí:  $u_1 = U \cdot \sin(2\pi f t)$ . Vo vzťahu pre napätie na kondenzátore C2:  $u_{C2} = U_{C2} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_{C2})$  určte  $|U_{C2}|$  a  $\varphi_{C2}$ . Použite metódu smyčkových prúdov. Pozn: Pomocný "smer šípky napájacieho zdroja platí pre špeciálny časový okamih

$$t = \frac{\pi}{2\omega} \text{ . "}$$

$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$L_1$ [mH]	$C_1$ [ $\mu$ F]	$C_2$ [ $\mu$ F]	$f$ [Hz]
35	55	125	140	120	100	200	105	70



Vypočítame si uhlovú rýchlosť  $\omega$ :

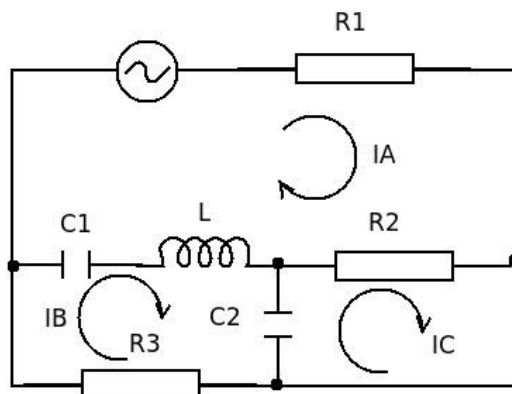
$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,1416 \cdot 70 = 439,824 \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$X_L = j \cdot \omega \cdot L$$

$$X_{C1} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_1}$$

$$X_{C2} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2}$$

Zostavíme si sústavu rovníc pre jednotlivé smyčky:



$$-U_1 + R_1 \cdot I_A + R_2(I_A - I_C) + X_L(I_A - I_B) + X_{C1}(I_A - I_B) = 0$$

$$X_{C1}(I_B - I_A) + X_L(I_B - I_A) + X_{C2}(I_B - I_C) + R_3 \cdot I_B = 0$$

$$R_2(I_C - I_A) - U_2 + X_{C2}(I_C - I_B) = 0$$

Vyriešením tejto sústavy sme zistili, že:

$$I_A = 0,6932 + 0,0051 A \quad I_B = 0,0278 - 0,0053 A \quad I_C = 1,0598 + 0,1647 j A$$

Pre  $U_C$  si môžeme odvodiť vzťah:

$$U_C = X_{C2}(I_B - I_C)$$

Dosadíme hodnoty a počítame:

$$U_C = \frac{-11,5733 + 70,2022 j}{3,14} = -3,6839 + 22,3460 j V$$

Vypočítame  $U_C$ :

$$|U_C| = 22,6477 V$$

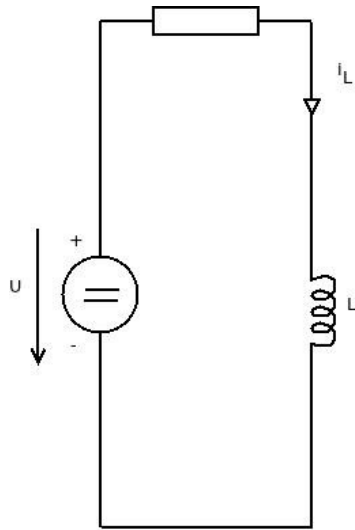
a uhol  $\varphi$ :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{3,6839}{22,3460}\right) + \frac{\pi}{2} = 0,1633 + \frac{\pi}{2} = 1,7341$$

$$\varphi = 99,3614^\circ = 99^\circ 21' 41''$$

## Príklad č.6

U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
6	10	20	3



Zostavte diferenciálnu rovnicu popisujúcu chovanie obvodu na obrázku, ďalej ju upravte dosadením hodnôt parametrov. Vypočítajte analytické riešenie  $i_L = f(t)$ . Vykonaajte kontrolu výpočtu dosadením do zostavenej diferenciálnej rovnice.

Pre napätie v danom obvode platí:

$$U_R + U_L = U \text{ kde } U_L = \frac{L \cdot di_L}{dt} = Li'_L \quad Li'_L + Ri_L = U$$

Získali sme diferenciálnu rovnicu:  $10i'_L + 20i_L = 6$

1. Zostavíme charakteristickú rovnicu:  $10\lambda + 20 = 0$   
z ktorej vyjadríme  $\lambda$ :  $\lambda = -2$

2. Očakávaný tvar rovnice má tvar:  $i_L = c(t) \cdot e^{\lambda t}$   
po dosadení za  $\lambda$  dostaneme:  $i_L = c(t) \cdot e^{-2t}$

3. Dosadíme do zadania:  $10c'(t) \cdot e^{-2t} + 10c(t) \cdot (-2) \cdot e^{-2t} + 20c(t) \cdot e^{-2t} = 6$

4. počítame:

$$c'(t) \cdot e^{-2t} = \frac{6}{10} \quad c'(t) = \frac{3}{5} \cdot e^{2t}$$

5. integrujeme

$$c(t) = \frac{3}{5} \cdot e^{2t} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \quad c(t) = \frac{3}{10} \cdot e^{2t} + K$$

6. dosadíme do očakávaného tvaru rovnice:

$$i_L = \left(\frac{3}{10} \cdot e^{2t} + K\right) \cdot e^{-2t}$$

$$i_L = \frac{3}{10} + K \cdot e^{-2t}$$

7. zo zadania dosadíme  $i_L = 3$

$$3 = \frac{3}{10} + K \cdot e^{-2 \cdot 0} \quad 3 = \frac{3}{10} + K$$

$$K = 3 - \frac{3}{10} = \frac{27}{10} = 2,7$$

8. na záver spätne dosadíme:

$$i_L = 2,7 \cdot e^{-2t} + 0,3$$

Vykonáme skúšku správnosti:

$$10\dot{i}_L + 20i_L = 6$$

$$10(2,7 \cdot (-2) \cdot e^{-2t}) + 20(2,7 \cdot e^{-2t} + 0,3) = 6$$

$$-54e^{-2t} + 54e^{-2t} + 6 = 6$$

$6=6$  Výrok pravdivý

Výsledné hodnoty:

	1. (F)
$U_{R5}$	$U_{R5} = 5,4147 \text{ V}$
$I_{R5}$	$I_{R5} = 0,018 \text{ A}$

	2. (A)
$U_{R3}$	$U_{R3} = 2,898 \text{ V}$
$I_{R3}$	$I_{R3} = 0,0138 \text{ A}$

	3. (B)
$U_{R2}$	$U_{R2} = -10,9818 \text{ V}$
$I_{R2}$	$I_{R2} = -0,0244 \text{ A}$

	4. (F)
$ U_{C1} $	$ U_{C1}  = 1,4199 \text{ V}$
$\varphi_{C1}$	$\varphi_{C1} = 203^\circ 54' 35'' = 0,4053 \text{ rad}$

	5. (A)
$ U_{C2} $	$ U_{C2}  = 22,6477 \text{ V}$
$\varphi_{C2}$	$\varphi_{C2} = 99^\circ 21' 41'' = 1,7341 \text{ rad}$

	6. (B)
rovnica	$i_L = 2,7 \cdot e^{-2t} + 0,3$