Dokumentácia k projektu pre predmety IZP/IUS

Iteračné výpočty

projekt č. 2

15. novembra 2011

Autor: Tomáš Kubovčík, xkubov02@stud.fit.vutbr.cz
Fakulta Informačných Technológií
Vysoké Učení Technické v Brne

Obsah

1 Úvod

Táto dokumentácia obsahuje návrh a riešenie implementácie programu, ktorý pomocou základných matematických operácií s využitím iteračných algoritmov počíta hodnoty matematických operácií arkus sínus a všeobecný logaritmus. Užívateľom zadané dáta sú po sérii iteračných výpočtov transformované na výstupné hodnoty. Tento program taktiež počíta dĺžku lomenej čiary a dĺžku lomenej čiary s chybou.

2 Analýza problému a popis jeho riešenia

2. 1 Zadanie problému

Úlohou je vytvoriť program v jazyku C ktorého úlohou je počítanie matematický operácií arkus sínus a všeobecný logaritmus s využitím základných matematických operácií. Pri týchto operáciách užívateľ určuje počet platných číslic, na ktoré sa bude výpočet prevádzať(počet platných číslic – parameter `sigdig`), taktiež volí základ logaritmu `a`. Okrem toho program počíta aj dĺžku lomenej čiary a dĺžku lomenej čiary s chybou. Vstupnými údajmi je potenciálne nekonečná postupnosť hodnôt, ktoré program spracováva a vracia z nich vstupné hodnoty. Program ošetruje neplatné vstupy a vracia nim príslušné chybové stavy. Výstupnými údajmi pre logaritmus a arkus sínus je postupnosť hodnôt ktorá sa rovná počtu vstupných hodnôt, pre dĺžky lomených čiar je to polovičná postupnosť. Program na spracovanie výnimočných stavov využíva konštanty `INFINITY` a `NAN`.

2. 2 Všeobecný logaritmus

Výsledkom (n) logaritmická funkcie je číslo nazývané logaritmus, pre ktoré platí:

$\log_a x = n \text{ , } a^n = x$ (1)

Pri návrhu riešenia si ako prvé musíme uvedomiť aký definičný obor má daná funkcia. Keď sa pozrieme na graf tejto funkcie zistíme, že pre x platí:

$x \in R+$ (2)

Musíme však vychádzať z toho, že pre základ všeobecného logaritmu platí:

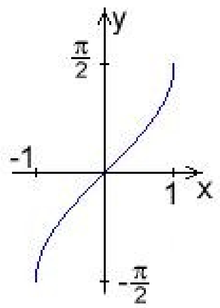
$a \in R+ \setminus \{1\}$ (3)

2. 3 Arkus sínus

Funkcia arkus sínus je inverzná funkcia k funkcii sínus a teda platí:

$\arcsin = \sin^{-1}$ (4)

Definičným oborom tejto funkcie sú všetky reálne čísla z intervalu <-1,1>, čo som zohľadnil aj pri riešení konkrétne pri testovaní neplatných vstupov. Oborom hodnôt je interval <-Π/2,Π/2>, čo môžeme vyčítať aj z grafu tejto funkcie (obrázok 1).



obrázok 1. Graf funkcie arkus sínus

Pri riešení tejto úlohy je dôležité zvoliť si vhodný Taylorov rad pomocou ktorého budeme arkus sínus počítať. Nie všetky rady konvergujú rovnako rýchlo, napr. arkus sínus konverguje pomalšie ako arkus tangens. Ja som sa preto rozhodol využiť Taylorov rad pre funkciu arkus tangens.

2. 4 Lomená čiara

Lomená čiara predstavuje krivku ktorú získame tak, že pospájame všetky zvolené body postupne tak, ako boli zadávané na vstupe. Na výpočet jej celkovej dĺžky je potrebné sčitovať dĺžky jej úsekov medzi dvomi po sebe nasledujúcimi bodmi (1. bod s 2.bodom, 2. bod s 3.bodom, …).

2. 5 Lomená čiara s chybou

Táto časť úlohy je vo svojej podstate rovnaká ako predchádzajúci problém. Ak je však daná chyba, môžeme si tento problém predstaviť tak, že došlo k nepresnému meraniu a teda nepoznáme presné súradnice bodov. Poznáme však intervaly v ktorom sa body nachádzajú, napr. : ak je súradnica bodu x1 = 5 a chyba € je 0,5 potom vieme, že x-súradnica je z intervalu (4,5;5,5). Rovnaký vzťah platí aj pre súradnice y.

3 Návrh riešenia

3. 1 Logaritmus

Pri výpočte logaritmu bolo nutné zvoliť si vhodný vzťah pre výpočet. Ďalej je treba si uvedomiť akým spôsobom budeme počítať samotný logaritmus. Ja som si zvolil výpočet pomocou prirodzeného logaritmu s využitím nasledovného vzťahu:

$$\log a\, x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{5}$$

pričom platí ln x = $\ln_e x$ kde e je tzv. Eulerovo číslo (2,71828 18284...).

Na výpočet ln x som využil Taylorov rad:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in (-1,1) \tag{6}$$

3. 2 Arkus sínus

Ako som spomínal rozhodol som sa využiť Taylorov rad pre arkus tangens, pretože na svojom definičnom obore konverguje rýchlejšie a presnejšie ako funkcia arkus sínus. Využil som vzťah:

$$arctg = x - \frac{(x)^3}{3} + \frac{(x)^5}{5} - \frac{(x)^7}{7} + \ldots \tag{7}$$

Hodnota vypočítaná pomocou tohto radu však nie je hľadaná hodnota a preto ju musíme previesť z hodnoty arkus tangens na arkus sínus pomocou vzorca:

$$\arcsin(x) = arctg \frac{x}{\sqrt{(1-x^{(2)})}} \tag{8}$$

Pre rýchlejší výpočet je vhodné využiť heuristiku. Preto som vstupnú hodnotu (x) upravoval pomocou týchto vzorcov:

$$\arcsin(x) = -\arcsin(x) \tag{9}$$

$$ak\ x > 1\ potom \arctan(x) = \frac{\Pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \tag{10}$$

$$ak\ x < 2 - \sqrt{(3)}\ potom\ arctg(x) = \frac{\Pi}{6} + \arctan \frac{(\sqrt{(3)} * x - 1)}{(\sqrt{(3)} + x)} \tag{11}$$

3.3 Lomená čiara

V analýze problému som spomínal, že je nutné počítať priebežné dĺžky lomenej čiary medzi dvojicami bodov. To urobíme pomocou nasledujúceho vzorca:

$$\textit{priebežný výsledok} = \sqrt{((|(x_n - x_{(n+1)})|)^{(2)} + (|(y_n - y_{(n+1)})|)^{(2)})} \quad (12)$$

Tieto dĺžky sčítavame až pokiaľ nenarazíme na koniec postupnosti.

3.4 Lomená čiara s chybou

Riešenie tohto problému je rovnaké ako pri počítaní lomenej čiary. Musíme však počítať priebežné maximálne aj minimálne dĺžky.

To urobíme pomocou nasledujúcich vzorcov:

$$max = \sqrt{((|(x_n - x_{(n+1)})| + 2 * e)^{(2)} + (|(y_n - y_{(n+1)})| + 2 * e)^{(2)})} \quad (13)$$

$$min = \sqrt{((|(x_n - x_{(n+1)})| - 2 * e)^{(2)} + (|(y_n - y_{(n+1)})| - 2 * e)^{(2)})} \quad (14)$$

Tieto dĺžky sčítavame až pokiaľ nenarazíme na koniec postupnosti. Môže však nastať prípad, že sa vzniknuté štvorce prekrývajú. Vtedy platí:

$$min = 0 \quad (15)$$

Vzorec pre výpočet maximálnej vzdialenosti sa nemení.

Taktiež môže dojsť k tomu, že sa budú intervaly súradníc x alebo y prekrývať(napr. A(5,5), B(6,10), e = 1,5). V tomto x1 = (3,5;6,5) a x2 = (4,5;7,5). Došlo k prekrytiu intervalov súradníc x a preto pre minimálnu vzdialenosť platí:

$$min = |(y_n - y_{(n+1)})| - 2 * e \quad (16)$$

Obdobný vzťah platí pre súradnice y.

$$min = |(x_n - x_{(n+1)})| - 2 * e \quad (17)$$

4 Špecifikácia testov

Pre správny chod programu bolo nutné testovať chybné vstupy ktoré vyplývali z návrhu riešenia alebo zo samotného zadania. Bolo nutné overovať nielen vstupné údaje, ale aj parametre pre spúšťanie programu.

Test1: Chybná hodnota parametru `sigdig` -------> výpis chyby na `stderr`

`-3`

`4abc`

Test2: Chybná hodnota parametru `a` (základ logaritmu)-------> výpis chyby na `stderr`

`-18`

`1`

`abc`

Test3: Neplatná vstupná hodnota -------> výpis konštanty NAN

`dbc`

`+*/`

`5r`

Test4: Hodnoty logaritmu pre a>1, 0<a<1-------> správny výsledok

4.a:

vstup:

--logax 15 4

výstup:

0.1 … -1.6609640474e+00

5 … 1.1609640474e+00

4.b:

vstup:

--logax 10 0.5

výstup:

0.1 … 3.3219280949e+00

5 … 5.6346198687e-01

Test5: Hodnoty `arcsin` pre -1 <=x<=1-------> správny výsledok

vstup:

--arcsin 10

výstup:

```
-1 … -1.5707963268e+00
x …  nan
```

Test6: Dĺžka lomenej čiary (`lbl`)-------> správny výsledok

vstup:

--lbl <<< "0 1 2 3"

výstup:

```
0.0000000000e+00
```

```
2.8284271247e+00
```

Test7: Dĺžka lomenej čiary s chybou(`lble`)-------> správny výsledok

vstup:

--lble 0.5 <<< "1 4 -3 1 1 -2 1 4"

výstup:

```
0.0000000000e+00
```

```
0.0000000000e+00
3.6055512755e+00
6.4031242374e+00
7.2111025509e+00
1.2806248475e+01
1.2310122065e+01
1.9877316287e+01
```

5. Popis riešenia

V tejto časti sa nachádza popis vlastnej realizácie teoretických podkladov z predchádzajúcich kapitol.

5.1 Ovládanie programu

Program je realizovaný v textovej podobe a teda je ovládaný pomocou príkazového riadku. Ak je program spustený s parametrom `-h`, vypíše sa stručná nápoveda. Pre riešenie jednotlivých podúloh vyplývajúcich zo zadania sú definované ďalšie parametre:

`--logax sigdig a` (všeobecný logaritmus o základe a s presnosťou na `sigdig` počet platných číslic)

`--arcsin sigdig` (arkus sínus s presnosťou na `sigdig` počet platných číslic)

`--lbl` (dĺžka lomenej čiary)

`--lble ERR` (dĺžka lomenej čiary s chybou ERR)

Ďalej program očakáva potenciálne nekonečnú postupnosť vstupných údajov, z ktorých po uskutočnení výpočtu vracia údaje výstupné.

5.2 Údajové typy

V tomto programe je pre všetky výpočtové funkcie návratová hodnota typu `double`. Tento údajový typ som zvolil pretože je na riešenie daných problematík najvhodnejšie a teda sú výsledky najmä v tvare desatinných čísel. Vstupné parametre pre volanie programu sa ukladajú do štruktúry `Tparams`.

5.3 Vlastná realizácia

Vo funkcii `main` sa zavolá funkcia `getParams`, ktorej úlohou je spracovanie vstupných parametrov a zabezpečenie nasledujúceho chodu programu. Pokiaľ sú na vstupe zadané neplatné parametre, program ohlási chybu na `stderr`.

V závislosti od zadaných parametrov sa následne v príkaze `switch` rozhodne, pre ktorú funkciu sa budú budú načítavať údaje a zavolá sa príslušná funkcia načítania. V každej funkcii slúžiacej na načítanie sa opakuje cyklus vstupu údajov, zavolania výpočtovej funkcie a následný výpis vypočítanej hodnoty.

Funkcia `arcsin`, ktorá slúži na výpočet hodnoty funkcie arkus sínus v sebe obsahuje volanie funkcie `arctan` na výpočet hodnoty funkcie arkus tangens a následne spätné spracovanie vypočítanej hodnoty a jej prevod na hodnotu funkcie arkus sínus.

Výpočet hodnoty všeobecného logaritmu zabezpečuje funkcia `logax` ktorá obsahuje ošetrenie vstupov mimo definičný obor a samotný výpočet všeobecného logaritmu ako podielu prirodzeného logaritmu z čísla x a prirodzeného logaritmu zo základu a vďaka funkcii `ln`.

O výpočet hodnôt dĺžky lomenej čiary sa stará funkcia `lineLength` a o hodnoty dĺžky lomenej čiary s chybou funkcia `LineError`. Na výpočet dĺžok sa využíva Pytagorova veta.

6 Záver

Program počíta hodnoty funkcií všeobecný logaritmus a arkus sínus s využitím základných matematických operácií (+,-,*,/) s využitím rekurentných vzťahov. Taktiež počíta priebežnú dĺžku lomenej čiary a lomenej čiary s chybou pre maximálne a minimálne hodnoty zároveň. Vypočítané hodnoty boli otestované a porovnané s výsledkami knihovných funkcií. Výsledky boli vzhľadom na zvolenú presnosť výpočtu rovnaké.

Pri riešení úlohy bolo nutné určiť si definičný obor a obor hodnôt daných funkcií a dbať na ne pri výpočtoch. Taktiež bolo nutné zvoliť si najvhodnejší Taylorov rad a využiť vhodný interval hodnôt pre najrýchlejšiu konvergenciu.

Program bol testovaný na platformách Linux a MS Windows. Na oboch platformách boli výsledky správne.

Použité zdroje:

[1] BARTSCH, H.-J.: Matematické vzorce. Praha: Mladá fronta, tretie vydanie, 1996, 831 s., ISBN 80-204-0607-7.

A Metriky kódu

Počet funkcií:	11 funkcií
Počet riadkov zdrojového kódu:	359 riadkov
Veľkosť statických dát:	336B
Veľkosť spustiteľného súboru:	18225B (systém Linux, 64 bitová architektúra, bez prekladu ladiacich informácií)