Cours - Limites de suites

I. Limite d'une suite

1) Limite finie

Exemple : comportement de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$:

Définition : dire que la suite (u_n) admet pour limite L, ou est convergente vers L, signifie que :

Cette définition traduit une accumulation des termes de la suite autour de L. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Propriété (admise) : si une suite converge vers une limite L, alors cette limite est unique.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.
Exemple :

Suites de référence ayant pour limite 0 :

Démonstration de $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ *:*

2) Limite infinie

Exemple : étude de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$

Définition : on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, lorsque :

On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$, et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, lorsque :

Suites de référence ayant pour limite $+\infty$:

II. Limites et comparaison

Théorème de comparaison :

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ……………………………

*Démonstration **exigible** :*
A partir des hypothèses du théorème, il s'agit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, *c'est-à-dire que :*

De même, on peut prouver que : **si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$,** ……………………………………………………….

Théorème des gendarmes, ou théorème d'encadrement (admis) :

Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$, et (u_n) et (w_n) ont la même limite finie L, alors ……

Exemple *:* Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)$

III. Opérations sur les limites

Lorsque deux suites (u_n) et (v_n) ont des limites connues, on peut dans certains cas déduire directement la limite de la suite somme $(u_n + v_n)$, ou de la suite produit $(u_n v_n)$, ou encore de la suite quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Dans d'autres cas, notés F.I (Forme Indéterminée), on ne peut pas conclure sur la limite et il faudra écrire le calcul sous une autre forme pour aboutir à un résultat.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$						

Exemples :

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$									

Exemples :

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	0 avec $v_n<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$												

Exemples :

Les F.I. sont, de manière non rigoureuse, les formes suivantes : $+\infty-\infty$; $\mathbf{0}\times\infty$; $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Attention : ne pas utiliser ces écritures lors d'une rédaction !

Méthodes pour lever une indétermination : le principe est en général de transformer l'écriture de l'expression.

a. Déterminer la limite de la suite de terme général n^2-4n+1.

b. Déterminer la limite de la suite de terme général $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

c. Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{n-1}{n+3}$.

IV. Limite d'une suite géométrique

<u>Rappel</u> : une suite géométrique a pour terme général $u_n = u_0 \times q^n$.

D'après les théorèmes sur les opérations avec les limites, il suffit de connaître le comportement de (q^n) lorsque n tend vers $+\infty$ pour connaitre le comportement d'une suite géométrique.

<u>Exemple</u> : étudier le comportement de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{1}{3}$.

Et si la raison est $q = -\frac{1}{3}$? Et $q = 3$? $q = -3$?

<u>Propriété : comportement de la suite géométrique (q^n), avec q un nombre réel :</u>

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$				

<u>Applications :</u>
Quelle est la limite d'une suite géométrique (u_n) de premier terme -5 et de raison 4 ?

Quelle est la limite d'une suite géométrique (v_n) de premier terme 1 et de raison -2 ?

*<u>Démonstration de la propriété dans le cas $q > 1$, **exigible** :</u>*

Si $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.
Rappelons l'inégalité de Bernoulli démontrée dans le chapitre raisonnement par récurrence :

V. Convergence des suites monotones

<u>Théorème de convergence monotone (admis) :</u>

1) Toute suite croissante et majorée est convergente.

2) Toute suite décroissante et minorée est convergente.

<u>Corollaire :</u>

1) Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.
2) Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

*<u>Démonstration **exigible** du corollaire 1 :</u>*

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée, et un réel a.

Il s'agit de prouver qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à ……………………………….

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un rang p tel que ……………………

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n > p$, on a …………………………

Donc pour tout $n > p$, on a ……………………… .

On a trouvé un rang p à partir duquel tous les termes appartiennent à $]a; +\infty[$: on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration analogue pour le corollaire 2).