Esercizi per l'esame

Aritmetica Finita - 6

Come richiesto implementiamo il calcolo del seno iperbolico tramite definizione

```
naif_sinh = @(x) (exp(x)-exp(-x))./2;
```

Adesso calcoliamo l'errore assoluto e l'errore relativo, prendendo come valore di riferimento l'implementazione interna di MATLAB del seno iperbolico. Valutiamo gli errori per valori di x compresi tra 10^{-12} e 10^{0}. In particolare evidenzieremo tali errori nei punti $x = 10^{-12}, 10^{-11}, \ldots, 10^{-1}, 10^{0}$

```
asse_x = logspace(-12,0,10*(13-1)+1);
fine = 1:10:130;
err_assoluto = abs(sinh(asse_x)-naif_sinh(asse_x));
err_relativo = err_assoluto./sinh(asse_x);
```

Disegnamo infine un unico grafico (con due assi verticali) dove rappresentare gli errori relativi e assoluti.

```
figure();
title('Grafico degli errori di sinh(x) - naif');
yyaxis left;
semilogx( asse_x,err_assoluto,'-',10.^(-12:0),err_assoluto(fine),'*');
ylabel('Errore assoluto');
yyaxis right;
loglog(asse_x,err_relativo,'-',10.^(-12:0),err_relativo(fine),'*');
ylabel('Errore relativo (scala logaritmica)');
```

Come si può notare nal grafico seguente, l'errore relativo aumenta per piccoli valori di x. Questo è giustificato poichè il numeratore della definizione del seno iperbolico presenta una differenza tra quantità che diventano tanto più prossime quanto più x è piccolo, portando quindi ad un fenomeno di cancellazione numerica.

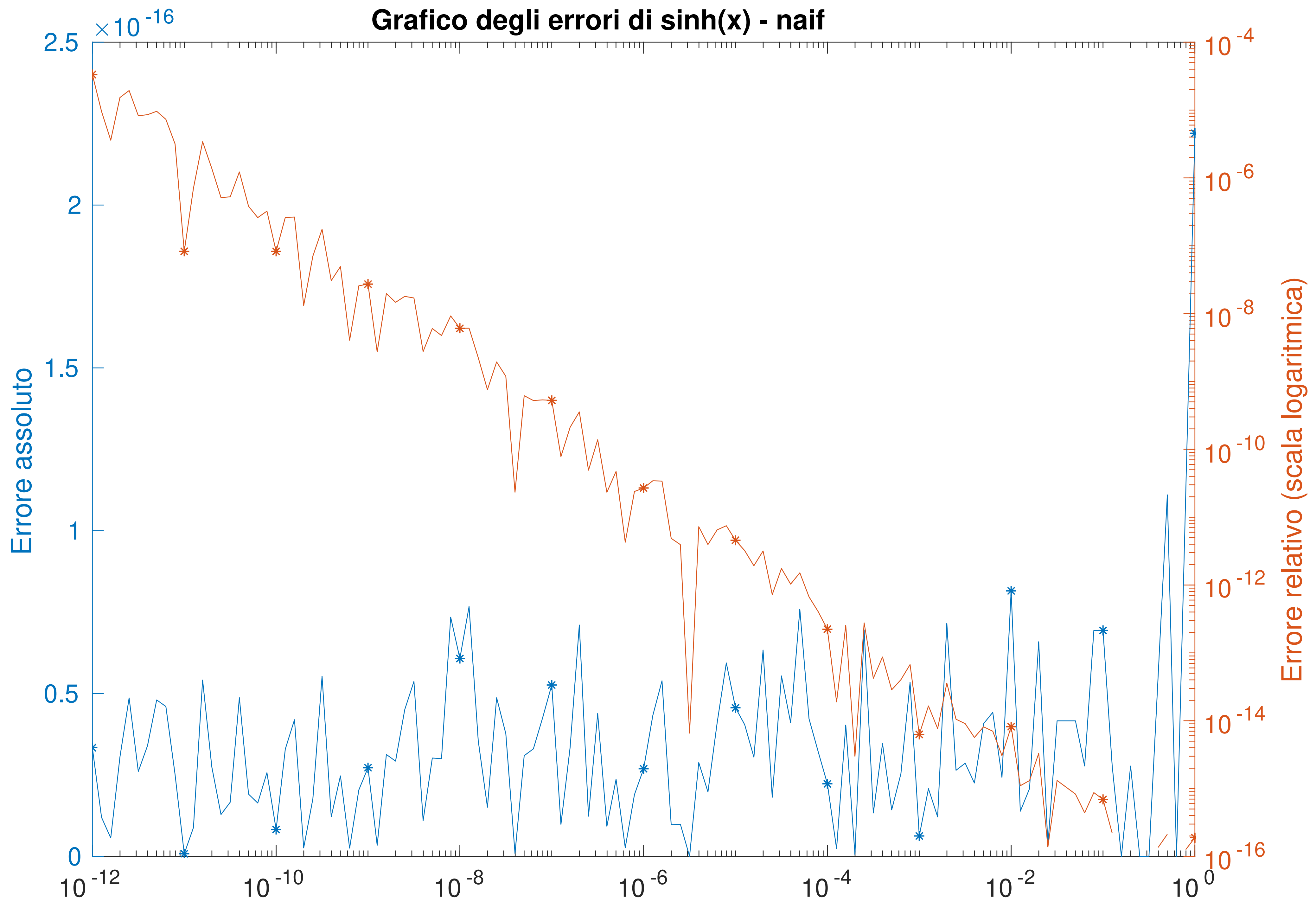


Grafico degli errori di sinh(x) - naif
×10^-16
2.5
2
1.5
1
0.5
0
Errore assoluto
10^-4
10^-6
10^-8
10^-10
10^-12
10^-14
10^-16
Errore relativo (scala logaritmica)
10^-12
10^-10
10^-8
10^-6
10^-4
10^-2
10^0

Aritmetica Finita - 7

Continuando con i dati dell'esericzio precedente, implementiamo il calcolo del seno iperbolico in modo da evitare fenomeni di cancellazione numerica.

```
mio_sinh = @(x) (expm1(x)+expm1(x)./(expm1(x)+1))/2;
```

Ora calcoliamo e disegnamo il grafico dell'errore relativo di quest'ultima implementazione calcolato rispetto a quella interna a MATLAB

```
figure();
mio_err_assoluto = abs(sinh(asse_x)-mio_sinh(asse_x));
mio_err_relativo = mio_err_assoluto./sinh(asse_x);
title('Grafico degli errori di sinh(x) - smart');
yyaxis left;
semilogx(asse_x,mio_err_assoluto,'-*');
ylabel('Errore assoluto');
yyaxis right;
semilogx(asse_x,mio_err_relativo,'-*');
ylabel('Errore relativo');
```

Come si può notare nel grafico seguente, l'errore assoluto (e quindi quello relativo) sono drasticamente diminuiti, in alcuni punti sono addirittura nulli. Questo indica che l'implementazione alternativa è preferibile per valori di x prossimi a zero.

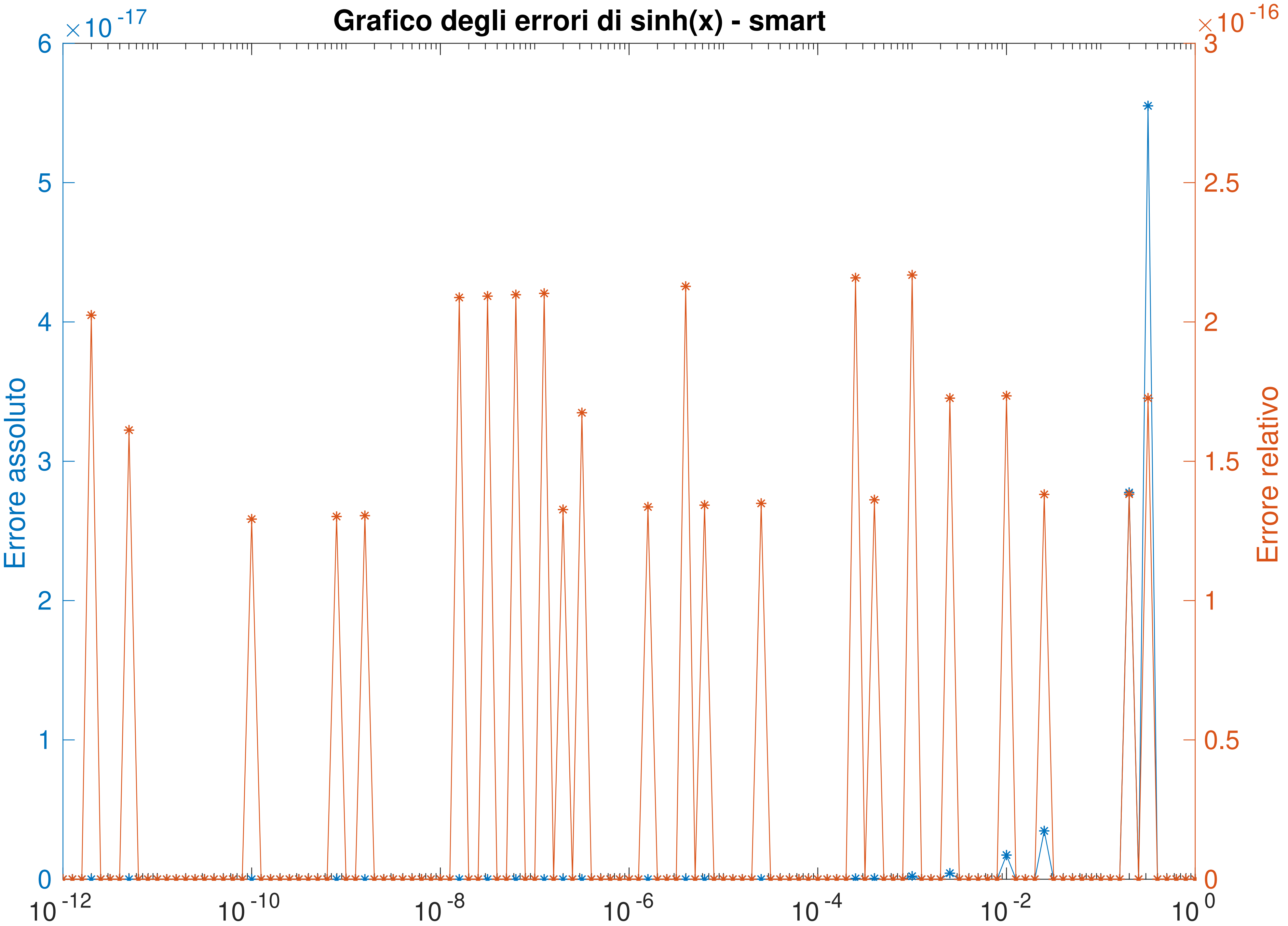


Grafico degli errori di sinh(x) - smart
×10^-17
×10^-16
Errore assoluto
Errore relativo
0
1
2
3
4
5
6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
10^-12
10^-10
10^-8
10^-6
10^-4
10^-2
10^0

Aritmetica Finita - 8

Definiamo, come richiesto, un'espressione matematicamente equivalente alla differenza divisa di ordine uno di $f(x) = x^3$ ma priva di cancellazione numerica:

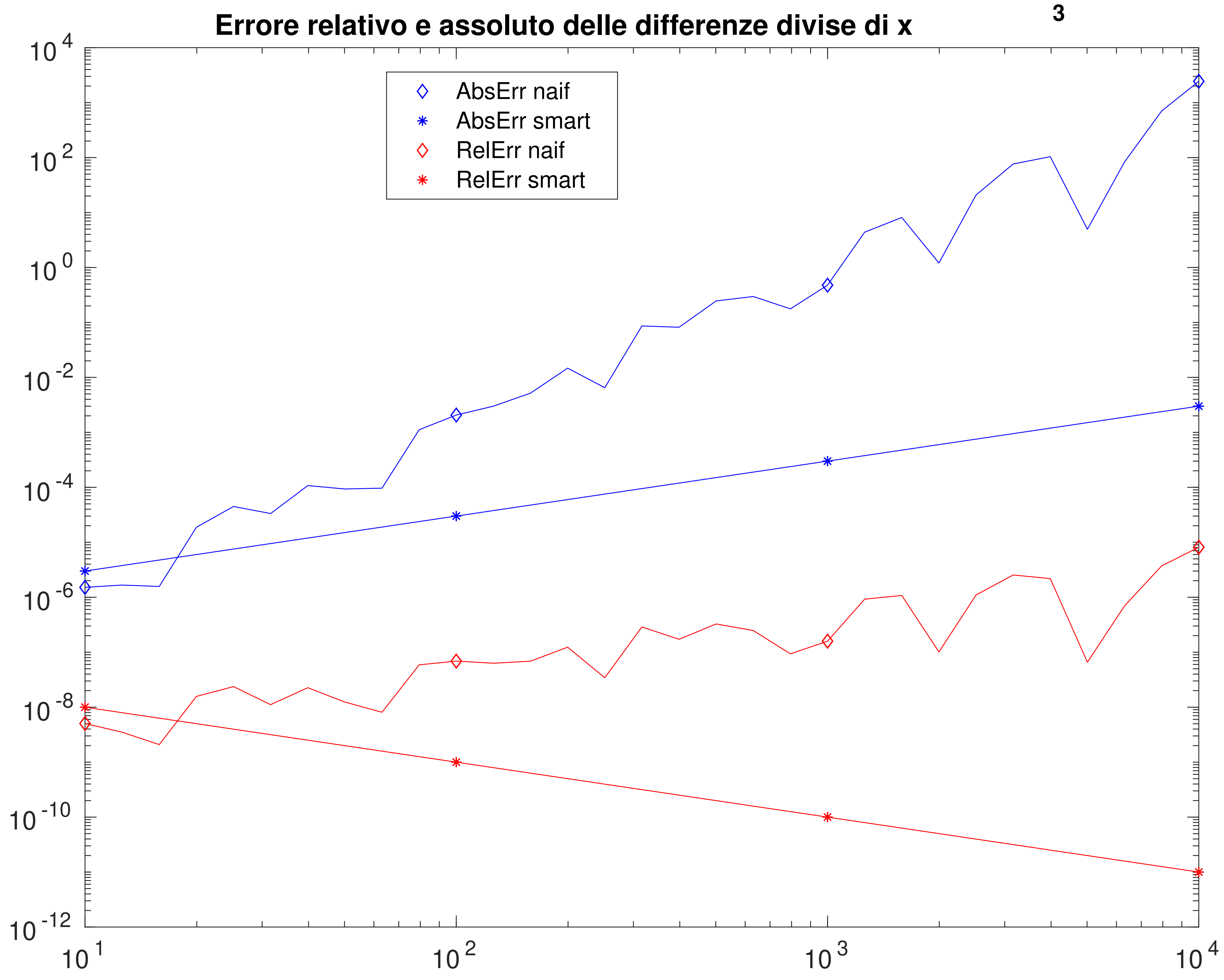
$$f[x_0, x_0 + h] = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2$$

Si può notare come l'ultima espressione sia esente da cancellazione numerica in quanto è la somma di sole quantità strettamente positive. Calcoliamo ora i valori delle due differenze divise per specifici valori di x e di h

```
asse_x = logspace(1,4,10*(4-1)+1);
fine = 1:10:40;
h = 10^-7;
differenza_divisa = ((asse_x+h).^3-(asse_x).^3)/h;
differenza_divisa_no_err = 3*(asse_x).^2 + 3*asse_x*h + h^2;
```

Calcoliamo gli errori ed infine disegnamo i grafici richiesti

```
err_assoluto = abs(differenza_divisa - 3*asse_x.^2);
err_assoluto_smart = abs(differenza_divisa_no_err - 3*asse_x.^2);
err_relativo = err_assoluto./abs(3*asse_x.^2);
err_relativo_smart = err_assoluto_smart./abs(3*asse_x.^2);
figure();
loglog( 10.^(1:4),err_assoluto(fine),'bd', ...
  10.^(1:4),err_assoluto_smart(fine),'b*',...
  10.^(1:4),err_relativo(fine),'rd',...
  10.^(1:4),err_relativo_smart(fine),'r*',...
  asse_x,err_assoluto,'-b',...
  asse_x,err_assoluto_smart,'-b',...
  asse_x,err_relativo,'-r',...
  asse_x,err_relativo_smart,'-r');
legend({'AbsErr naif','AbsErr smart','RelErr naif','RelErr smart'},'Location','best');
title('Errore relativo e assoluto delle differenze divise di x^3');
```

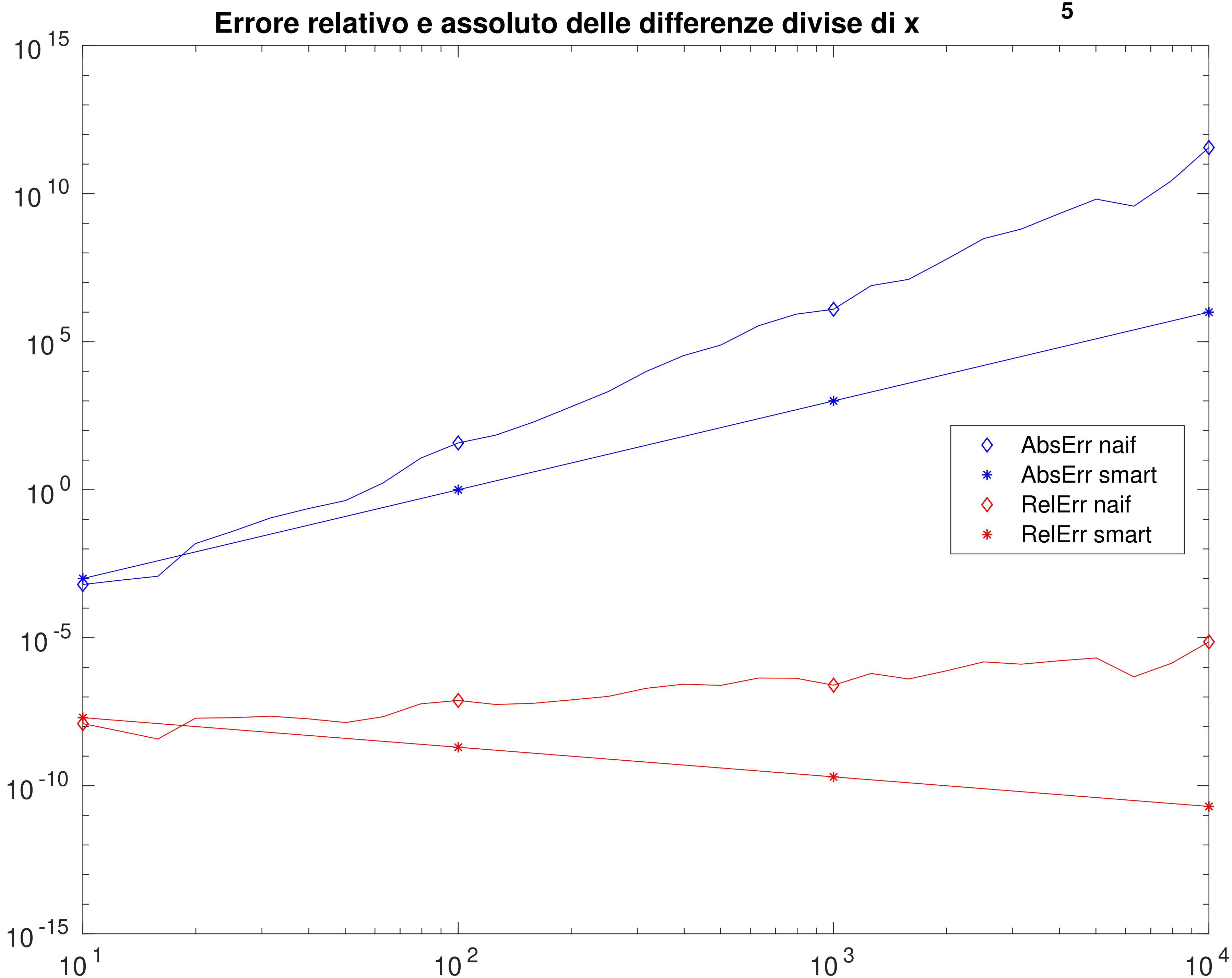


Errore relativo e assoluto delle differenze divise di x 3
AbsErr naif
AbsErr smart
RelErr naif
RelErr smart
10 4
10 2
10 0
10 -2
10 -4
10 -6
10 -8
10 -10
10 -12
10 1
10 2
10 3
10 4

Ripetendo lo stesso esercizio con $f\left(x\right) = x^5$ otteniamo

$$f[x_0, x_0+h] = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\left(x_0+h\right)^5 - x_0^5}{h} = \ldots = 5x_0^4 + 10x_0^3 h + 10x_0^2 h^2 + 5x_0 h^3 + h^4$$

```
differenza_divisa        = ((asse_x+h).^5-(asse_x).^5)/h;
differenza_divisa_no_err = 5*(asse_x).^4 + 10*asse_x.^3*h + 10*asse_x.^2*h^2 + h^4;
err_assoluto             = abs(differenza_divisa - 5*asse_x.^4);
err_assoluto_smart       = abs(differenza_divisa_no_err - 5*asse_x.^4);
err_relativo             = err_assoluto./abs(5*asse_x.^4);
err_relativo_smart       = err_assoluto_smart./abs(5*asse_x.^4);
figure();
loglog(10.^(1:4),err_assoluto(fine),'bd',  ...
  10.^(1:4),err_assoluto_smart(fine),'b*',...
  10.^(1:4),err_relativo(fine),'rd',...
  10.^(1:4),err_relativo_smart(fine),'r*',...
  asse_x,err_assoluto,'-b',...
  asse_x,err_assoluto_smart,'-b',...
  asse_x,err_relativo,'-r',...
  asse_x,err_relativo_smart,'-r');
legend({'AbsErr naif','AbsErr smart','RelErr naif','RelErr smart'},'Location','best');
title('Errore relativo e assoluto delle differenze divise di x^5');
```



Errore relativo e assoluto delle differenze divise di x
5
10^{15}
10^{10}
10^{5}
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
10^{-15}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
AbsErr naif
AbsErr smart
RelErr naif
RelErr smart

Vettori, matrici e sistemi lineari - 8

Viene data una matrice definita così:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad A_{11} \in \Re^{p\times p}, A_{12} \in \Re^{p\times q}, A_{22} \in \Re^{q\times q}$$

Viene chiesto di calcolare in funzione di q il numero di moltiplicazioni totali necessarie per la risoluzione del sistema lineare (eliminazione gaussiana più sostituzione all'indietro).

Considerando la matrice A come una semplice matrice di ordine $n = p + q$, è ben noto che sono necessarie circa $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2$ moltiplicazioni per la completa risoluizione di un sistema lineare. Ovvero, in funzione di q si ha $\frac{1}{3}(q+p)^3 + \frac{1}{2}(p+q)^2$.

Invece, utilizzando la decomposizione a blocchi ed immaginando anche $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{b}$ a blocchi, si nota che:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ A_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Dalla equazione inferiore notiamo che può essere calcolato x_2 tramite un sistema lineare di ordine q, ovvero con $\frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{2}q^2$ moltiplicazioni. Poi, sostituendo nell'equazione superiore, si ricava $A_{11}\ x_1 = b_1 - A_{12}\ x_2$. Tale operazione richiede il prodotto matrice vettore, ovvero $p * q$ moltiplicazioni. Anche questo sistema è lineare e si risolve con $\frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{2}p^2$ moltiplicazioni. Ovvero utilizzando la forma a blocchi della matrice A, si risolve il sistema lineare in $\frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{2}p^2 + p * q$ moltiplicazioni.

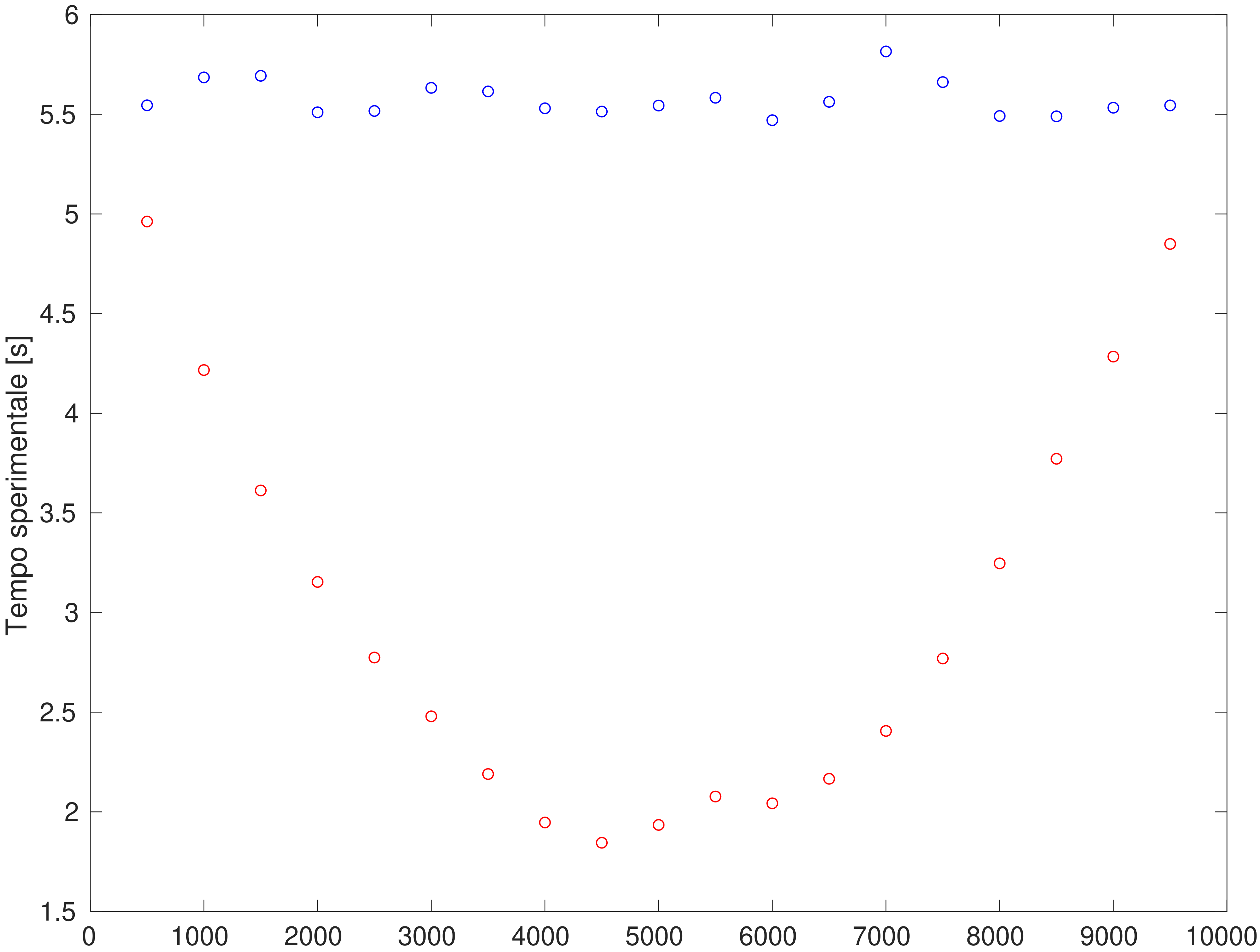
```
tempo_teorico_modo1 = @(q,n) ones(size(q)).*(n.^3/3 + n.^2/2);
tempo_teorico_modo2 = @(q,n) q.^3/3 + q.^2/2 + (n-q).^3/3 + (n-q).^2/2 + (n-q).*q;
```

Vettori, matrici e sistemi lineari - 9

Come richiesto, effettuiamo la misurazione dei tempi di esecuzione dei due metodi di risoluzione. Riportiamo quindi il grafico dei tempi ottenuti

```matlab
n = 10000;
s = 500;
asse_x = s:s:(n-s);
tempi_modo1 = zeros(n/s-1,1);
tempi_modo2 = zeros(n/s-1,1);
for q = asse_x
  p = n - q;
  A11 = rand(p,p);
  A12 = rand(p,q);
  A22 = rand(q,q);
  b1 = ones(p,1);
  b2 = ones(q,1);
  A = [A11,A12;zeros(q,p),A22];
  b = [b1;b2];

  tic;
  x = A\b;
  tempi_modo1(q/s) = toc();

  tic;
  x2 = A22\b2;
  x1 = A11\(b1-A12*x2);
  tempi_modo2(q/s) = toc();
end
figure();
plot(asse_x,tempi_modo1,'ob',asse_x,tempi_modo2,'or');
ylabel('Tempo sperimentale [s]');
```

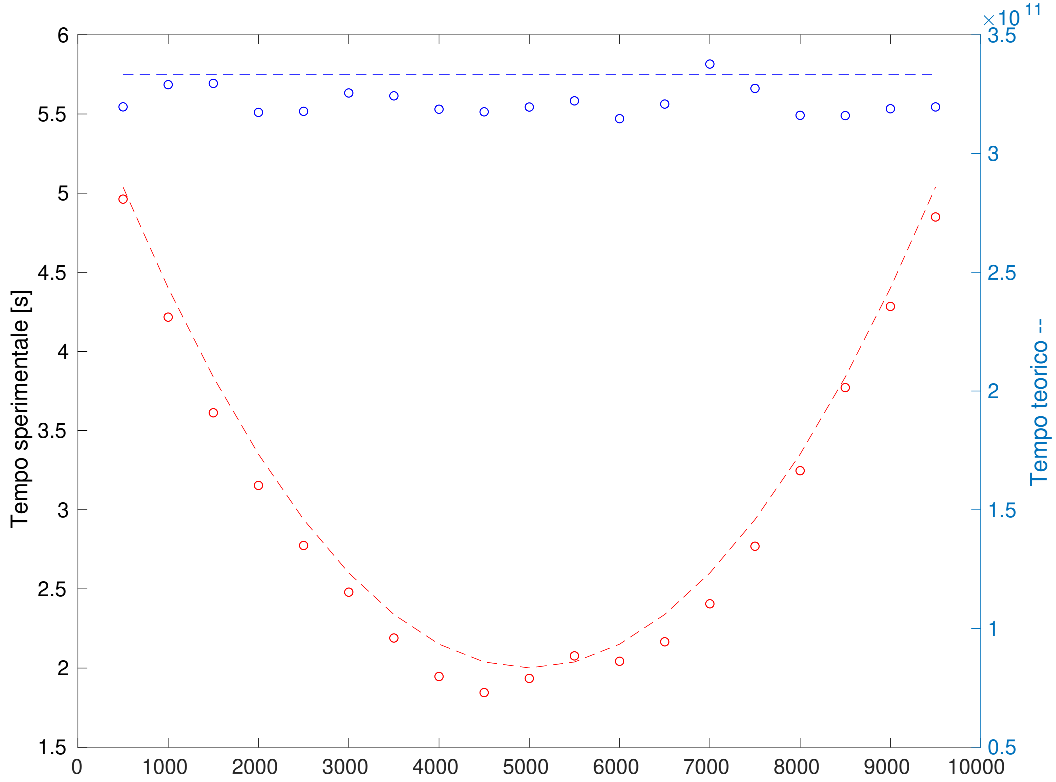
Come si può notare dal grafico seguente, il valore di q per il quale si ottiene il maggior vantaggio è $q \equiv 5000$, ovvero quando $q \approx \frac{n}{2}$.


Tempo sperimentale [s]
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

Vettori, matrici e sistemi lineari - 10

Con riferimento al punto precedente, aggiungiamo al grafico le curve teoriche ricavate al punto 8, opportunamente riscalate.

```
yyaxis right;
plot( asse_x,tempo_teorico_modo1(asse_x,n),'--b',asse_x,tempo_teorico_modo2(asse_x,n),'--r');
ylabel('Tempo teorico --');
```

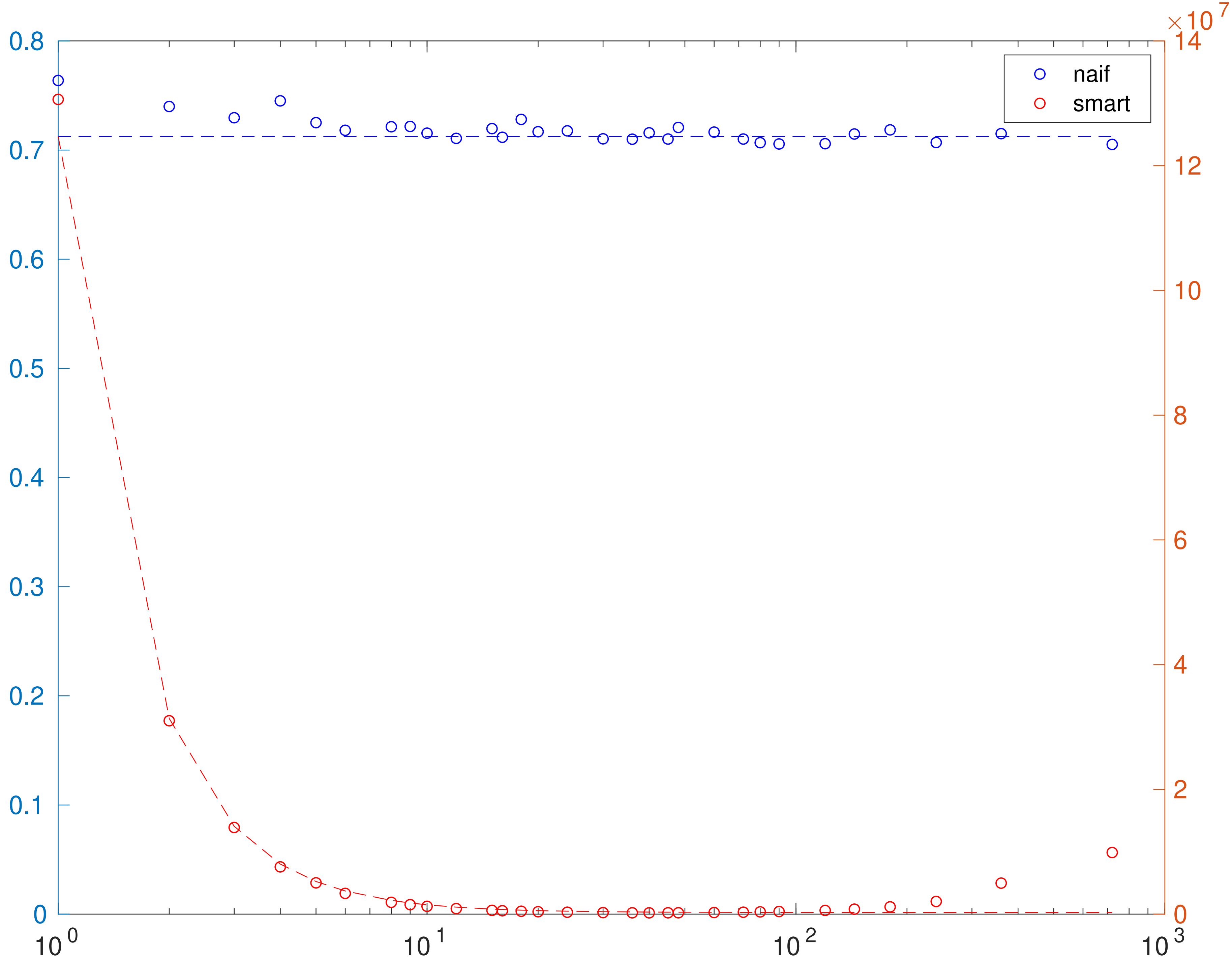


Vettori, matrici e sistemi lineari - 11

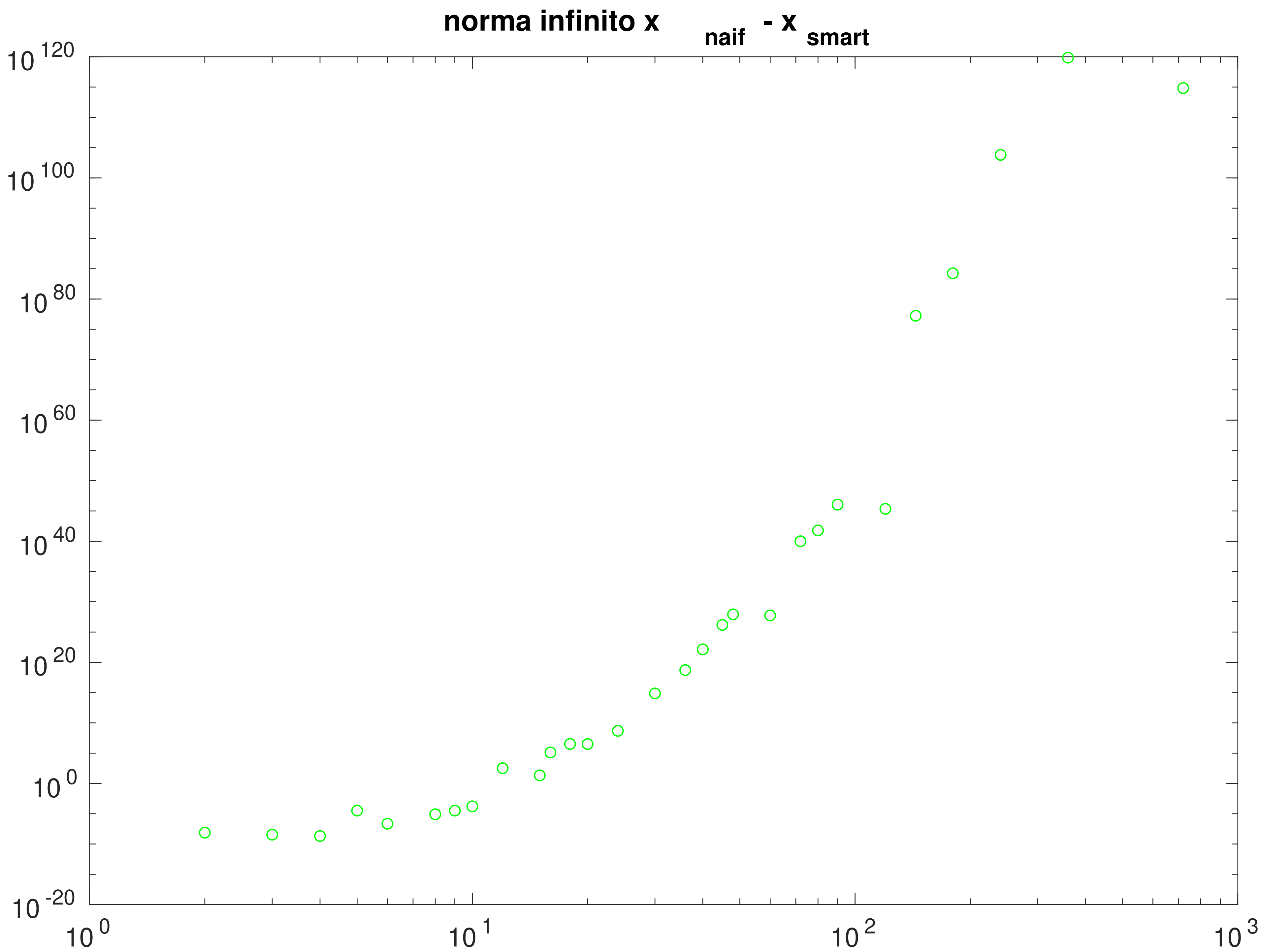
Come richiesto, vengono generalizzati esercizi 8-10 considerando una matrice triangolare a blocchi $q \times q$ costituita, per semplicità, da blocchi quadrati di dimensione n/q.

```
n = factorial(6);
asseq = divisors(n);
res = zeros(n,5); %naif_vero, naif_teo, smart_vero, smart_teo, norma diff
for q = asseq
  %Definisco dimensione caratteristica
  d = n/q;
  %Genero la matrice A come cell array di matrici quadrate di double
  Acell = repmat({zeros(d)},q,q);

  for i=1:q
    for j=i:q
      Acell(i,j) = {rand(d)};
    end
  end

  %Per il primo caso ho bisogno di generare tutta la matrice di double
  %Inoltre mi serve anche per definire il vettore dei termini noti
  A = cell2mat(Acell);

  %Calcolo vettore termini noti
  b = A*ones(n,1);

  %PRIMO CASO
  tic;
  %x_naif = A\b;
  x_naif = GAUSS_ELIM(A,b);
  res(q,1) = toc;
  res(q,2) = n^3/3+n^2/2;
  clear A;                %Libero memoria

  %SECONDO CASO
```

```
  x_smart = repmat({zeros(d)},q,1);
  tic;
  for j=q:-1:1
    noto = b((d*(j-1)+1):(d*j));
      for k=q:-1:(j+1)
        noto = noto - Acell{j,k}*x_smart{k};
      end
    %x_smart{j} = Acell{j,j}\noto;
    x_smart{j} = GAUSS_ELIM(Acell{j,j},noto);
  end
  res(q,3) = toc;
  res(q,4) = n^3/(3*q^2)+n^2/2;

  %Controllo risultati
  res(q,5) = norm(x_naif-cell2mat(x_smart),Inf);
end
%% PLOTS
figure();
yyaxis left
semilogx(asseq,res(asseq,1),'ob',asseq,res(asseq,3),'or');
yyaxis right
semilogx(asseq,res(asseq,2),'--b',asseq,res(asseq,4),'--r');
legend({'naif','smart'})
figure();
loglog(asseq,res(asseq,5),'og');
```



0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
×10^7
14
12
10
8
6
4
2
0
10^0
10^1
10^2
10^3
naif
smart



norma infinito $x_{naif} - x_{smart}$
10^{120}
10^{100}
10^{80}
10^{60}
10^{40}
10^{20}
10^{0}
10^{-20}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}