1　背景

ドイツの物理学者クント (1838.11.18-1894.5.21) は、1866 年に気柱の共鳴現象を利用して棒の縦振動の振動数を測定した。この測定に基づいて、棒内部に生ずる縦波の伝搬速度を決定する。

2　目的

クントの実験による音の可視化を利用して、空気中の音速を求める。

3　方法

クントの実験 (Kundt's experiment) とは、図 1 に示すように、金属棒中に生じる縦振動でガラス管内に定在波を作り、その波長を測定する音響学の実験である [1]。空気中の音速 c か金属棒のヤング率 E のどちらかがわかっていれば、他方を求めることができる。

波長の測定には。まずガラス管 (1 次元音場) の中に粉末を入れ、管のいったん (D) から挿入した金属棒をこすって縦振動をおこし、粉末を共鳴振動させる。この結果、ガラス管内に粉末が作る縞模様は、音波の振幅の腹と腹 (または節と節) の位置に対応するので、その間隔 a を測定すれば、気柱内の定在波の波長 λ が $\lambda = 2a$ で決まる。

今、管内の空気中の音速を c とすれば、基本振動数 ν は次式で与えられる。

$$\nu = \frac{c}{2a} = \frac{c}{\lambda} \tag{1}$$

金属棒の中点 (C) を万力で固定すると、この棒には中央を節に、両端 (A,B) を自由端にした縦振動がおこる。この基本振動の波長は、中央が節、両端が腹になるから、棒の長さを l とすれば $2l$ である。したがって、この基本振動数 ν_1 は、縦波の早さを V' とすれば、

$$\nu = \frac{V'}{2l} \tag{2}$$

となる。なお、V' は金属棒のヤング率 E と密度 ρ を用いて次式で与えられる。

$$V' = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3}$$

気柱の中で共鳴しているから $\nu = \nu_1$ である。よって、次式を得る。

$$c = \frac{\lambda}{2l} V' = \frac{\lambda}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{4}$$

この (4) は、クント管で波長 λ を測れば、ヤング率 E と音速 c のどちらかが既知である場合には、もう一方の値を知ることができることを教えている。

本実験では、E を既知として c を求める。

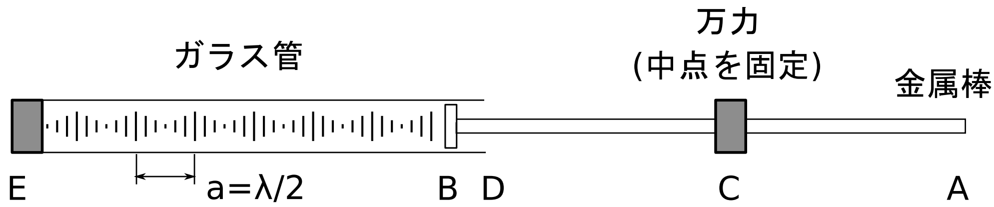

図 1: クントの実験

4　測定

このクントの実験では、内径が約 3cm、長さが約 1.0m の乾燥したガラス管を使った (図 1)。

1. 乾燥したガラス管の中にコルクの粉末を一様に薄く散布した。
2. 金属棒の中点 C(正確に位置を決めること) を万力でしっかり固定した。金属棒をガラス管の中心軸に一致するように挿入した。
3. 　中点 C と端 A との中間あたりから金属棒を皮でこすって A 側に引き抜き、縦振動をおこした。
4. ガラス管の端 E を静かに動かしながら気柱の長さを共鳴するように調節して、図 2 のような縞模様を作った。

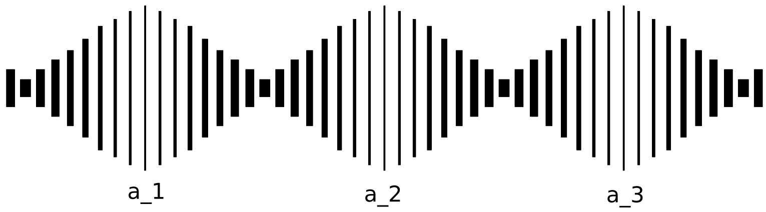

図 2: 得られる理想的な縞模様

5. 縞模様の特徴的パターンをスケッチした。実際の結果として次の図のようになった。

4.1　計算

1. 縞模様間隔 a による平均波長 λ の計算

   縞の数が $2n$ 個 (n は整数) であるとする。その位置をスケールで測定し、それぞれの値を $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n-1}, a_{2n}$ とする (図 2)。平均波長は次式を用いて求めた。

$$\lambda = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+n} - a_i) \tag{5}$$

2. 音速 c の計算

   本実験で用いた金属棒の材料は、真鍮 (または黄銅ともいう) である。この物質のヤング率 $E = 10.06 \times 10^{10}[N/m^2]$ と密度 $\rho = 8.44 \times 10^3[kg/m^3]$ から、(3) より縦波の速さは $V7 = 3452.453[m/s]$ となる。この値を使って (4) より音速 c を求める。

5　結果のまとめと設問・検討事項

1. 今回の実験のように中点 C が固定された金属棒の振動パターンを、基本振動 (ν_1),3 倍振動 ($3\nu_1$),5 倍振動 ($5\nu_1$) の場合についてそれぞれ横波表示として図 3 に示す。

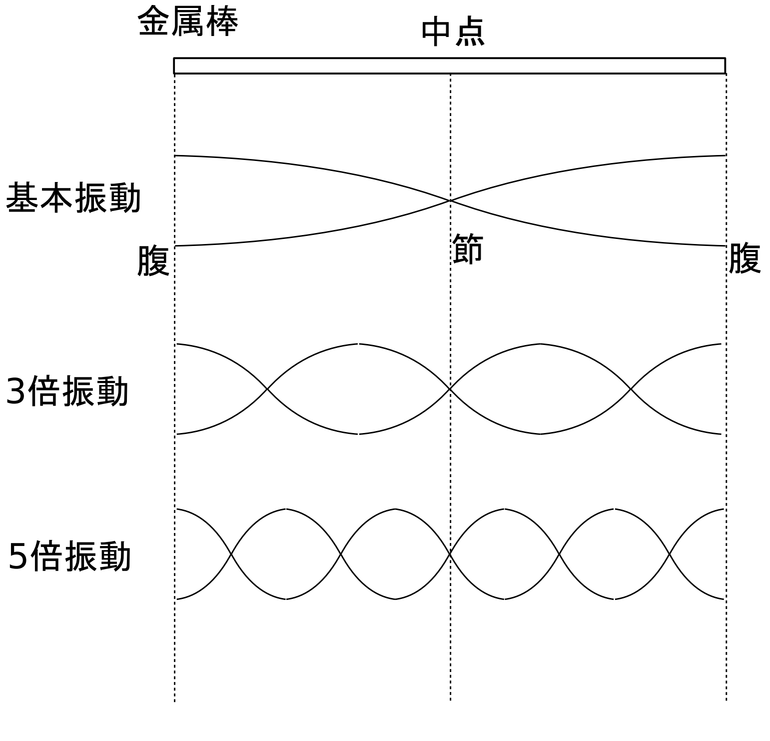

図 3: 金属棒の振動パターン

2. 式 (2),(3) の導出方法をそれぞれ示す。

   式 (2) については、式 (1) を用いる。波の速さは振動数と波長の積で求められる。今回金属棒は中点で固定されているため、中点は波の節であるとわかり、図 3 のように金属棒の両端が腹となる。腹と腹 (または節と節) の間隔 2 つ分の長さが波長となるので基本振動の場合波長は $2l$ となる。この金属棒が縦波を発生させるため、(2) 式が成り立つ。

(3) 式について説明するため、[2] から抜粋する。「棒の長さの方向に x 軸にとり、その長さ $dxcm$, 断面積 Scm^2 なる部分を考える。今、縦波のため x なる点が $x+\xi$ に、$x+dx$ なる点が $x+dx+\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}dx$ に変位したとすれば、ρ なる密度は $\rho+d\rho$ と変化しても、その質量は一定であるから

$$m=\rho Sdx=(\rho+d\rho)S(dx+\frac{\partial\xi}{\partial x}dx)$$

また x 点の S 面に作用する力を $f$dyne とすれば、Young 率の定義から

$$E=\frac{\frac{f}{S}}{\frac{dx+\frac{\partial\xi}{\partial x}dx-dx}{dx}}=\frac{f}{S\frac{\partial\xi}{\partial x}}$$

$$\therefore f=ES\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

したがって $x+dx$ 点の S 面に作用する力 f' は

$$f'=ES(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx)$$

ゆえに $f'-f$ なる力のために m なる質量に $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ なる加速度が生ずることになるから、Newton の運動方程式は

$$\rho Sdx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=ES(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx)-ES\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$\therefore\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

」とある。この運動方程式をを一次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$$

と比較し対応関係を考えると、縦波の速さは式 (3) で表せると考えられる。

3. 式 (5) の工夫について考える。例えば縞の数が 10 つできたとしたとき、波長を求めようとして隣り合うものどうしの間隔の平均を取ろうとすると、9 つの値から平均を取ることになる。9 つとなってしまうのは、これは a_1 に対して a_2 を用いる... というような値の求め方であるため、a_{10} に対しては用いる要素がないことによる。このような手法は情報量をわずかに損ねている。

   しかしながら式 (5) のような求め方であった場合、値の数こそ少なくなるが、a_1 に対しては a_6 を、a_5 に対しては a_6 を用いて値を出すという手法であるため、それぞれの a に対して比較対象ができることになり、測定した値を無駄なく使うことができているといえる。

4. 音速の理論値と測定値を比較する。まず理論値を考える。温室 t(ガラス管の近くで測定) での音速 c_1 は、$c_1=c_0(1+0.00183t)$ で与えられる ($c_0=331.5m/s$)。この式から、室温 25.3 ℃より $c_1=331.5(1+0.00183\times25.3)=346.85m/s$ となる。

   続いて測定値を求める。縞の数を 12($n=6$) として、測定結果は表 1 のようになった。この結果を式 (5) に代入すると、$\lambda=20.039$[cm] と求まる。よって式 (4) より、音速の測定値 c_2 は $c_2=345.91[m/s]$ となった。ただし、$l=1.00$[m] である。この結果は理論値との誤差が 1[m/s] 未満であり、精度が高いと言えよう。

   あるいは、温度に関しても測定値 t_2 を求めると、$t_2=\{(c_2/331.5)-1\}/0.00183=23.76$[℃] となる。こちらをみても実際の気温 25.3[℃] と比べて大きな差はない。

   今回の実験において湿度は 54%であった。空気中に水分が含まれるようになると理想的な空気とずれが生じるようになり、実験に影響すると考えられる。水中では音速が大きくなることから、湿度があるほど音速が大きくなると推測されるが、今回の測定ではこの推測とは異なる結果となっている。

表 1: 計算に用いる値

i	a_i[cm]	a_{i+n}[cm]	$a_{i+n} - a_i$[cm]
1	29.3	91	61.7
2	39.3	101.2	61.9
3	59.7	111.5	51.8
4	60.0	121.9	61.9
5	70.6	132.3	61.7
6	80.9	142.6	61.7

5. 実験の精度について、小さいもののやはり誤差が生じている。この原因は、縞の位置を正確に読むことが難しかったためである。縞がはっきり現れているのは観察できるが、その中心が明確にわかるものでもなく、読み取る際に誤差が出ることは避けられない。

6. クントの実験をもとに「音の可視化」の装置および方法を考える。

   実験では金属棒を用いて音を発生させ、その結果として粉末が動いたものを観察した。現在の技術であれば棒の縦振動にあたる動きを発生させ続けることは可能であろう。この技術を使い、さらに粉末の代わりに色のついた、空気より質量の大きい気体を用いれば、音が鳴っているときのみ立体的な縞模様を観察することができるのではないだろうか。「可視化」という点ではより直感的に観察できることが期待される。

参考文献