GUIA DE EJERCICIOS Nº 1

1- Calcule la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos(2x - 4)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + e^{-x}}{\ln x}$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 - 1)\cos x$

d) $f(x) = (2^x - \ln 4)\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)$

e) $f(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)\right)^2$

2- Para las siguientes funciones encuentre $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$:

a) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + x$

c) $f(x) = \cos^2 x$

d) $f(x) = e^{2x}$

3- Encuentre los valores críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$

b) $g(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36$

c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

d) $r(x) = -x + \operatorname{sen} x$

e) $f(x) = \cos(4x)$

f) $g(x) = x^3 + x - 2$

g) $f(x) = x^{2/3}$

h) $h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

4- Dibuje, en cada apartado, el gráfico de una función continua que cumpla con las condiciones indicadas:

a) Que no tenga extremos absolutos, pero que tenga un máximo y un mínimo relativo.

b) Que tenga como dominio el conjunto de números reales mayores o iguales a cero, con máximo absoluto en x = 4 y mínimo absoluto en x = 10.

5- Si una función f tiene como imagen el conjunto de números reales, puede tener extremos absolutos? Justifique.

6- Determine los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo dado:

a) $r(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en [-2 , 1]

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en [-2 , 2]

c) $g(x) = x + \dfrac{4}{x+2}$ en [-1 , 2]

7- Si f es una función derivable en su dominio y $f'(c) = 0$ en un punto c en el interior del dominio de f. Es correcto afirmar que f (c) es un extremo local de f? Justifique.

8- Determine si las funciones que se dan a continuación cumplen con las hipótesis del Teorema de Rolle. En caso afirmativo determine el valor de *c* , y en caso negativo explicite que hipótesis no se cumplen.

a) $f(x) = x^4 - 8x$ en [0 , 2]
b) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ en [- 3 , 0]
c) $f(x) = |x-1|$ en [0 , 2]

9- Determine si es posible aplicar el Teorema del Valor Medio a las siguientes funciones. En caso afirmativo encuentre el valor de *c* , y en caso negativo explique cuales hipótesis no se cumplen.

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en [1 , 3]
b) $g(x) = \dfrac{x^2+5}{x+2}$ en [-3 , -1] y en [-1 , 1]

10- Sea $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Verifique que f (-1) = f (1) pero $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$. Explique por qué este resultado APARENTEMENTE contradice el Teorema de Rolle.

11- La función $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ toma el valor cero en x = 0 y en x = 1. Además es derivable en (0 , 1), pero su derivada nunca se anula en (0 , 1). Cómo es posible? No afirma el Teorema de Rolle que la derivada debe ser cero en algún punto del (0 , 1)? Explique qué ocurre con esta función.

12- Utilice el Teorema del Valor Medio para probar las siguientes desigualdades:

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \in R$
b) $\operatorname{sen} x \leq x$ para todo $x \in [0, \infty)$

13- Suponga que f es derivable en [a , b] y que f (b) < f (a). Muestre que f' es negativo en algún punto del intervalo [a , b].

14- Aplique el Teorema de valor medio para responder las siguientes preuntas:

a) Suponga que f(1) = 2 y que $f'(x) \leq 3$ para todo valor de x. Cuál es el valor máximo posible para f(5)?

b) Suponga que f(-2) = 1 y que $f'(x) \geq 1$ para todo valor de x. Cuál es el valor mínimo posible para f(0)?

15- A partir del análisis del signo de la derivada primera, determine los intervalos donde f es estrictamente creciente y donde es estrictamente decreciente. Luego determine los extremos locales de dicha función.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x+2}$

c) $f(x) = 3x^{2/3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = x\sqrt{x+3}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

g) $f(x) = 2x\,e^{3x}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

j) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

16- Si f y g son funciones crecientes en el intervalo I, demuestre que f+g es creciente en I.

17- De el valor de la constante k para que la función $f(x) = x^2 + \dfrac{k}{x}$ tenga:

a) Un mínimo local en x = 2.
b) Muestre que cualquiera sea el valor de k, la función f nunca tiene un máximo local.

18- Dibuje el gráfico de una función continua que cumpla simultáneamente las siguientes especificaciones:

$f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $Dom(f) = R$;
$f'(3)$ no existe ; $f'(5) = 0$
$f'(x) > 0$ si $x < 3$ o $x > 5$
$f'(x) < 0$ si $3 < x < 5$

19- Dibuje el gráfico de una función continua que cumpla simultáneamente las siguientes especificaciones:

$f(-2) = 8$; $f(0) = 4$; $f(2) = 0$
$f'(x) > 0$ si $|x| > 2$
$f'(2) = f'(-2) = 0$
$f'(x) < 0 \ \forall x$ tq $|x| < 2$
$f''(x) > 0$ si $x > 0$
$f''(x) < 0$ si $x < 0$

20- Determine los intervalos donde las siguientes funciones son cóncavas hacia arriba y donde son cóncavas hacia abajo. Encuentre todos los puntos de inflexión, en caso que existan.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x+2}$

c) $f(x) = 3x^{2/3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = 2x\,e^{3x}$

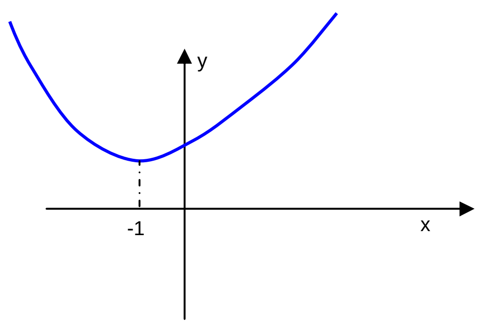
g) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

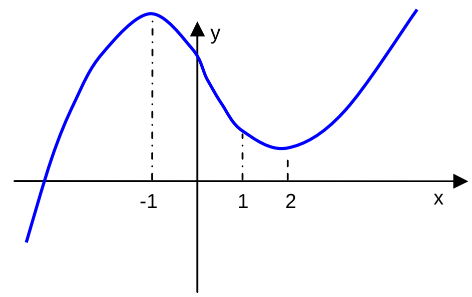
h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

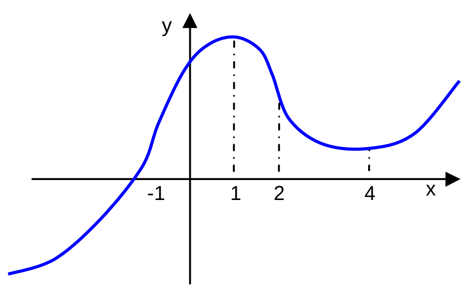
i) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

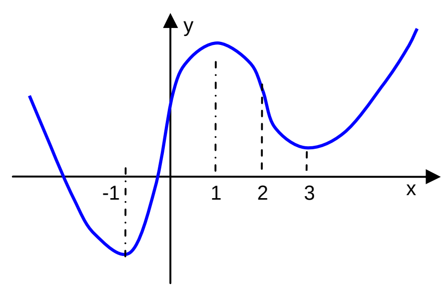
21- En cada uno de los siguientes gráficos de funciones, determine:

a) Los intervalos donde la derivada primera es positiva y aquellos en los cuales es negativa.
b) Los intervalos donde la derivada segunda es positiva y aquellos en los cuales es negativa.

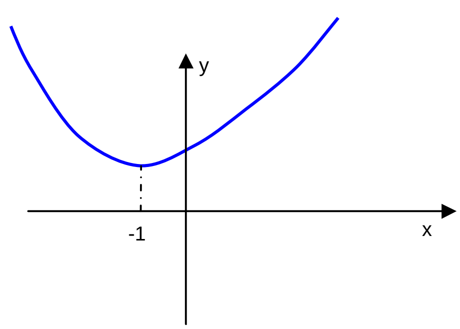


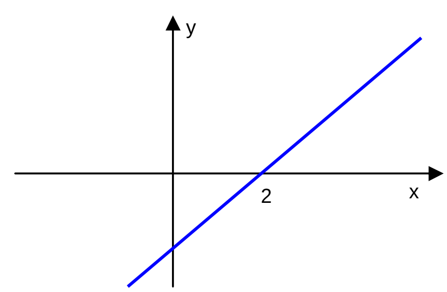


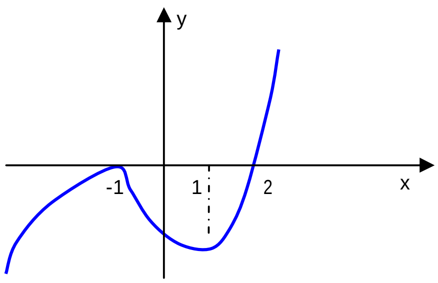


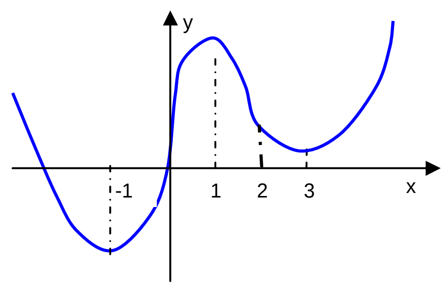


22- Los siguientes representan gráficos de la derivada de una función f. Dibuje un gráfico posible para dicha función.









23- Realice el gráfico de las siguientes funciones. Utilice la información que ya obtuvo en los ejercicios 8 y 9.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x+2}$

c) $f(x) = 3x^{2/3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = 2x\,e^{3x}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

i) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

<u>Aplicaciones</u>

24- Demuestre que entre todos los rectángulos con perímetro P, el cuadrado tiene área máxima.

25- Si la suma de dos números positivos es 12, encuentre los números reales tales que su producto sea máximo.

26- Un alambre de 10 m de longitud se corta para formar dos tramos. Uno se dobla haciendo un cuadrado y el otro un círculo. Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas sea máxima? Y para que sea mínima?

27- Cuál es el área más grande que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene 5 cm de largo?

28- Un granjero quiere cercar un terreno rectangular de 98 m^2 adyacente a una pared. Cuál es la cantidad mínima de alambre que dicho granjero necesita para lograr su objetivo?.