12: Calcule la derivada direccional de la funcion f, en el punto P0 y en la direccion A

a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2$, $P_0 = (5,5)$, $A = (4,3)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 6y$$

En $P_0 = (5,5)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(5,5) = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(5,5) = 2 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 10 - 30 = -20$$

Entonces, $\nabla f(5,5) = (10, -20)$.

2. **Vector unitario $\mathbf{u}$**:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

3. **Derivada direccional**:

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (10, -20) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$= 10 \cdot \frac{4}{5} + (-20) \cdot \frac{3}{5} = 8 - 12 = -4$$

Resultado: $D_{\mathbf{u}} f = -4$

b) $f(x,y) = \cos(xy) + e^{xy}$, $P_0 = (0,1)$, $A = (1,0)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\sin(xy) + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(xy) + xe^{xy}$$

En $P_0 = (0,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1 \cdot \sin(0) + 1 \cdot e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$$

Entonces, $\nabla f(0,1) = (1,0)$.

2. **Vector unitario $\mathbf{u}$**: $\mathbf{u} = (1,0)$ ya que $A = (1,0)$.

3. **Derivada direccional**:

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (1,0) \cdot (1,0) = 1$$

Resultado: $D_{\mathbf{u}} f = 1$

c) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P_0 = (-1,1)$, $A = (2,2)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

En $P_0 = (-1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -1 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

Entonces, $\nabla f(-1,1) = (-1,1)$.

2. **Vector unitario $\mathbf{u}$**:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3. **Derivada direccional**:

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (-1,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Resultado: $D_{\mathbf{u}} f = 0$

d) $f(x,y) = x\sin y - 4x + 2y$, $P_0 = (2,0)$, $A = (-2,1)$

1. **Gradiente:** Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y - 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y + 2$$

En $P_0 = (2,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \sin(0) - 4 = -4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 2\cos(0) + 2 = 2 + 2 = 4$$

Entonces, $\nabla f(2,0) = (-4,4)$.

2. **Vector unitario $\mathbf{u}$:**

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$\mathbf{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

3. **Derivada direccional:**

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (-4,4) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= -4 \cdot -\frac{2}{\sqrt{5}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$ [redacted]

e) $f(x,y,z) = x^2 y + e^{xz}$, $P_0 = (1,-1,2)$, $A = (2,3,-1)$

1. **Gradiente:** Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ze^{xz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xe^{xz}$$

En $P_0 = (1,-1,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,2) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot e^{1 \cdot 2} = -2 + 2e^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,2) = 1^2 = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,2) = 1 \cdot e^{1 \cdot 2} = e^2$$

Entonces, $\nabla f(1,-1,2) = (-2+2e^2, 1, e^2)$.

2. **Vector unitario $\mathbf{u}$:**

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$
$$\mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

3. **Derivada direccional:**

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (-2+2e^2, 1, e^2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$
$$= (-2+2e^2) \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + e^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$
$$= \frac{-4+4e^2}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{e^2}{\sqrt{14}}$$
$$= \frac{-4+3e^2+3}{\sqrt{14}} = \frac{-1+3e^2}{\sqrt{14}}$$

Resultado: $D_{\mathbf{u}} f = \frac{-1+3e^2}{\sqrt{14}}$

f) $f(x,y,z) = \ln(y+z) - \sqrt{x}$, $P_0 = (1,0,3)$, $A = (1,-1,4)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y+z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y+z}$$

En $P_0 = (1,0,3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,3) = -\frac{1}{2\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,3) = \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,3) = \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

Entonces, $\nabla f(1,0,3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

2. **Vector unitario $\mathbf{u}$**:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

3. **Derivada direccional**:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3\sqrt{2}}$$
$$= -\frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{9\sqrt{2}} + \frac{4}{9\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-3+4}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{9\sqrt{2}}$$

Resultado: $D_{\mathbf{u}}f = \frac{1}{9\sqrt{2}}$

14 - Encuentre el gradiente de la función en el punto P0, luego grafique el conjunto de nivel que pasa por el punto y el vector gradiente encontrado

a) $f(x,y) = y - x$, $P_0 = (2,1)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

Entonces, $\nabla f = (-1, 1)$.

En el punto $P_0 = (2,1)$, el gradiente es $\nabla f(2,1) = (-1,1)$.

2. **Conjunto de nivel**: Para encontrar el conjunto de nivel que pasa por $P_0 = (2,1)$, evaluamos $f(2,1)$.

$$f(2,1) = 1 - 2 = -1$$

El conjunto de nivel es entonces el conjunto de puntos (x,y) tales que:

$$f(x,y) = y - x = -1$$

Esto representa una línea con pendiente 1 que pasa por $y = x - 1$.

3. **Gráfico**: Vamos a graficar la línea $y = x - 1$ y el vector gradiente $\nabla f(2,1) = (-1,1)$ en el punto $P_0 = (2,1)$. El vector gradiente debe apuntar en la dirección perpendicular a la línea de nivel.

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P_0 = (1,1)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

En el punto $P_0 = (1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1^2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1^2} = \frac{2}{2} = 1$$

Entonces, $\nabla f(1,1) = (1,1)$.

2. **Conjunto de nivel**: Para encontrar el conjunto de nivel que pasa por $P_0 = (1,1)$, evaluamos $f(1,1)$.

$$f(1,1) = \ln(1^2 + 1^2) = \ln(2)$$

El conjunto de nivel es entonces el conjunto de puntos (x,y) tales que:

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) = \ln(2)$$

Simplificando, obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Esto representa una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.

3. **Gráfico**: Vamos a graficar la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ y el vector gradiente $\nabla f(1,1) = (1,1)$ en el punto $P_0 = (1,1)$. El vector gradiente debe apuntar en la dirección radial, desde el origen hacia el punto $(1,1)$, ya que el gradiente es perpendicular a las curvas de nivel y apunta en la dirección de crecimiento de f.

15 - Encuentre las direcciones en que las funciones crecen y decrecen más rápidamente en P0. Luego encuentre las derivadas direccionales de las funciones en esas direcciones.

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $P_0 = (-1, 1)$

1. **Gradiente:** Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

   En $P_0 = (-1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -1 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

   Entonces, $\nabla f(-1, 1) = (-1, 1)$.

2. **Dirección de máximo crecimiento:** El gradiente $\nabla f(-1, 1) = (-1, 1)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento.
3. **Dirección de máximo decrecimiento:** La dirección opuesta al gradiente, $(1, -1)$, es la dirección de máximo decrecimiento.
4. **Derivadas direccionales:**
   - Derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento $(-1, 1)$:

$$D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f(-1, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

   - Derivada direccional en la dirección de máximo decrecimiento $(1, -1)$:

$$D_{-\mathbf{u}}f = -\sqrt{2}$$

$c, y, z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$, $P_0 = (1, 1, 1)$

ıdiente: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{2}{z}$$

... $P_0 = (1, 1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces, $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$.

2. **Dirección de máximo crecimiento:** La dirección de máximo crecimiento es $\nabla f = (2, 2, 2)$.
3. **Dirección de máximo decrecimiento:** La dirección opuesta al gradiente, $(-2, -2, -2)$, es la dirección de máximo decrecimiento.
4. **Derivadas direccionales:**
   - Derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento:
     $D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   - Derivada direccional en la dirección de máximo decrecimiento:
     $D_{-\mathbf{u}}f = -2\sqrt{3}$

c) $f(x, y, z) = xe^y + z^2$, $P_0 = \left(1, \ln 2, \frac{1}{2}\right)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

En $P_0 = \left(1, \ln 2, \frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \ln 2, \frac{1}{2}\right) = e^{\ln 2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \ln 2, \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot e^{\ln 2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(1, \ln 2, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Entonces, $\nabla f\left(1, \ln 2, \frac{1}{2}\right) = (2, 2, 1)$.

2. **Dirección de máximo crecimiento**: La dirección de máximo crecimiento es $\nabla f = (2, 2, 1)$.

3. **Dirección de máximo decrecimiento**: La dirección opuesta al gradiente, $(-2, -2, -1)$, es la dirección de máximo decrecimiento.

4. **Derivadas direccionales**:

   - Derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento:
   $$D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$
   - Derivada direccional en la dirección de máximo decrecimiento:
   $$D_{-\mathbf{u}}f = -3$$

b) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} - yz$, $P_0 = (4, 1, 1)$

1. **Gradiente**: Calculamos $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -y$$

En $P_0 = (4, 1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1, 1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4, 1, 1) = -\frac{4}{1^2} - 1 = -4 - 1 = -5$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(4, 1, 1) = -1$$

Entonces, $\nabla f(4, 1, 1) = (1, -5, -1)$.

2. **Dirección de máximo crecimiento**: La dirección de máximo crecimiento es $\nabla f(4, 1, 1) = (1, -5, -1)$.

3. **Dirección de máximo decrecimiento**: La dirección opuesta al gradiente, $(-1, 5, 1)$, es la dirección de máximo decrecimiento.

4. **Derivadas direccionales**:

   - Derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento:
   $$D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f(4, 1, 1)\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$
   - Derivada direccional en la dirección de máximo decrecimiento:
   $$D_{-\mathbf{u}}f = -3\sqrt{3}$$

16 : Encuentre la ecuación del plano tangente y de la recta normal, en el punto P0 sobre la superficie dada

Para encontrar el plano tangente y la recta normal en un punto P_0 sobre una superficie definida por una ecuación implícita $g(x, y, z) = 0$, seguimos estos pasos:

1. Calculamos el gradiente de g en P_0, $\nabla g(P_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(P_0), \frac{\partial g}{\partial y}(P_0), \frac{\partial g}{\partial z}(P_0)\right)$. Este vector es perpendicular a la superficie en P_0.
2. La **ecuación del plano tangente** en P_0 es:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0$$

3. La **ecuación de la recta normal** en P_0 es:

$$x = x_0 + t\frac{\partial g}{\partial x}(P_0)$$

$$y = y_0 + t\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)$$

$$z = z_0 + t\frac{\partial g}{\partial z}(P_0)$$

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0 = (1, 1, 1)$

1. **Gradiente:**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z$$

Evaluamos en $P_0 = (1, 1, 1)$:

$$\nabla g(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$$

2. **Plano tangente:**

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

Simplificamos:

$$x + y + z = 3$$

3. **Recta normal:**

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 2t$$

b) $g(x, y, z) = 2z - x^2$, $P_0 = (2, 0, 2)$

1. **Gradiente:**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2$$

Evaluamos en $P_0 = (2, 0, 2)$:

$$\nabla g(2, 0, 2) = (-4, 0, 2)$$

2. **Plano tangente:**

$$-4(x - 2) + 0(y - 0) + 2(z - 2) = 0$$

Simplificamos:

$$-4x + 2z = -4$$

o

$$2x - z = 1$$

3. **Recta normal:**

$$x = 2 - 4t, \quad y = 0, \quad z = 2 + 2t$$

c) $x + y + z = 1$, $P_0 = (0, 1, 0)$

1. **Gradiente:**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 1$$

En $P_0 = (0, 1, 0)$:

$$\nabla g(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

2. **Plano tangente:**

$$1(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 0) = 0$$

Simplificamos:

$$x + y + z = 1$$

3. **Recta normal:**

$$x = t, \quad y = 1 + t, \quad z = t$$

d) $x^2 - xy - y^2 - z = 0$, $P_0 = (1, 1, -1)$

1. **Gradiente:**

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -x - 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = -1$$

Evaluamos en $P_0 = (1, 1, -1)$:

$$\nabla g(1, 1, -1) = (1, -3, -1)$$

2. **Plano tangente:**

$$1(x-1) - 3(y-1) - 1(z+1) = 0$$

Simplificamos:

$$x - 3y - z = -1$$

3. **Recta normal:**

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - 3t, \quad z = -1 - t$$

17: En que direcciones la derivada direccional de f(x,y) = xy + y^2 en P0=(3,2) es igual a cero?

Ejercicio 17: Direcciones en que la derivada direccional es cero

Para encontrar las direcciones en que la derivada direccional de $f(x, y) = xy + y^2$ en $P_0 = (3, 2)$ es cero, calculamos el gradiente de f y buscamos las direcciones ortogonales al gradiente en P_0.

1. **Gradiente:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$$

En $P_0 = (3, 2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 2) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3, 2) = 3 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Entonces, $\nabla f(3, 2) = (2, 7)$.

2. **Direcciones ortogonales al gradiente:** Para que la derivada direccional sea cero, necesitamos un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ tal que $\nabla f \cdot \mathbf{u} = 0$, es decir:

$$2u_1 + 7u_2 = 0$$

Resolviendo para u_1 en términos de u_2:

$$u_1 = -\frac{7}{2} u_2$$

Así, cualquier vector de la forma $\mathbf{u} = \left(-\frac{7}{2}, 1\right)$ o su dirección opuesta cumple que la derivada direccional es cero.

Ejercicio 13: Calcule la derivada direccional de la función f para el punto P0, en la dirección indicada en cada caso

a) $f(x,y) = x + y - \frac{x^2}{2}$, $P_0 = (3,-2)$, **dirección de** $(1,4)$ **a** $(2,1)$

1. **Gradiente** de $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

Evaluamos en $P_0 = (3,-2)$:

$$\nabla f(3,-2) = (1-3, 1) = (-2, 1)$$

2. **Vector de dirección** $\mathbf{u}$ de $(1,4)$ a $(2,1)$:

$$\mathbf{v} = (2-1, 1-4) = (1,-3)$$

Normalizamos $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Entonces,

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

3. **Derivada direccional** $D_{\mathbf{u}}f$:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (-2,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \frac{-2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{10}} = \frac{-2-3}{\sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{10}} =$$ [redacted]

b) $f(x,y) = \tan\left(\frac{y}{x}\right)$, $P_0 = (1,0)$, **dirección tangente a** $g(t) = (\sin t, t^2)$ **en** $t = 0$

1. **Gradiente** de $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Evaluamos en $P_0 = (1,0)$:

$$\nabla f(1,0) = (0,1)$$

2. **Vector de dirección** tangente a $g(t)$ en $t = 0$:

$$g'(t) = (\cos t, 2t)$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$g'(0) = (1,0)$$

El vector unitario es $\mathbf{u} = (1,0)$.

3. **Derivada direccional** $D_{\mathbf{u}}f$:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (0,1) \cdot (1,0) = 0$$

c) $f(x,y,z) = x^2z - y^2x + z^2y$, $P_0 = (-1,1,2)$, **dirección tangente a** $g(t) = \left(\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2} + t, \frac{t^2}{2} - 2t\right)$ **en** $t = 2$

1. **Gradiente** de $f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2yx + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + 2zy$$

   Evaluamos en $P_0 = (-1,1,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,2) = 2(-1)(2) - 1^2 = -4 - 1 = -5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,2) = -2(1)(-1) + 2^2 = 2 + 4 = 6$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(-1,1,2) = (-1)^2 + 2(2)(1) = 1 + 4 = 5$$

   Entonces, $\nabla f(-1,1,2) = (-5,6,5)$.

2. **Vector de dirección** tangente a $g(t)$ en $t = 2$:

$$g'(t) = \left(t^2, t + 2t, t - 2\right) = \left(t^2, 2t + 1, t - 2\right)$$

   Evaluamos en $t = 2$:

$$g'(2) = (4, 4 + 1, 2 - 2) = (4, 5, 0)$$

   Normalizamos $g'(2)$:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

   Así,

$$\mathbf{u} = \left(\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}}, 0\right)$$

3. **Derivada direccional** $D_{\mathbf{u}}f$:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = (-5,6,5) \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}}, 0\right)$$
$$= \frac{-5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 0}{\sqrt{41}} = \frac{-20 + 30}{\sqrt{41}} = \frac{10}{\sqrt{41}} =$$ [redacted]

GUIA 5

Encuentre todos los máximos y mínimos locales, y puntos de silla de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = 6xy - x^2 - y^2 + 10$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 6y - 2x, \quad f_y = 6x - 2y$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 6y - 2x = 0 \quad (1) \\ 6x - 2y = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (1): $2x = 6y \Rightarrow x = 3y$
- Sustituyendo en (2): $6(3y) - 2y = 0 \Rightarrow 18y - 2y = 0 \Rightarrow 16y = 0 \Rightarrow y = 0$
- Sustituyendo $y = 0$ en $x = 3y$: $x = 0$

El único punto crítico es $(0,0)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 6$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-2)(-2) - (6)^2 = 4 - 36 = -32$$

Como $D < 0$, $(0,0)$ es un **punto de silla.**

b) $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy - 10y - 2x$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 8x - 2y - 2, \quad f_y = 4y - 2x - 10$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 8x - 2y - 2 = 0 \quad (1) \\ 4y - 2x - 10 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (1): $2y = 8x - 2 \Rightarrow y = 4x - 1$
- Sustituyendo en (2): $4(4x - 1) - 2x - 10 = 0$

$$16x - 4 - 2x - 10 = 0 \Rightarrow 14x = 14 \Rightarrow x = 1$$

- Sustituyendo $x = 1$ en $y = 4(1) - 1 = 3$.

El único punto crítico es $(1,3)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 8, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{xy} = -2$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (8)(4) - (-2)^2 = 32 - 4 = 28$$

Como $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, $(1,3)$ es un **mínimo local.**

c) $f(x,y) = (2x - 5)(y - 4)$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 2(y - 4), \quad f_y = 2x - 5$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2(y - 4) = 0 \quad (1) \\ 2x - 5 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (1): $y = 4$
- De (2): $x = \frac{5}{2}$

El único punto crítico es $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 2$$

$$D = 0 \cdot 0 - 2^2 = -4$$

Como $D < 0$, $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ es un **punto de silla.**

d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 2x + y + 3, \quad f_y = x + 2y - 3$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2x + y + 3 = 0 \quad (1) \\ x + 2y - 3 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (1): $y = -2x - 3$
- Sustituyendo en (2): $x + 2(-2x - 3) - 3 = 0$

$$x - 4x - 6 - 3 = 0 \Rightarrow -3x - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$$

- Sustituyendo $x = -3$ en $y = -2(-3) - 3 = 3$.

El único punto crítico es $(-3,3)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 1$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, $(-3,3)$ es un **mínimo local.**

e) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 2x + 3y - 6, \quad f_y = 3x + 6y + 3$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6 = 0 \quad (1) \\ 3x + 6y + 3 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (1): $2x = 6 - 3y \Rightarrow x = 3 - \frac{3}{2}y$
- Sustituyendo en (2):

$$3(3 - \frac{3}{2}y) + 6y + 3 = 0 \Rightarrow 9 - \frac{9}{2}y + 6y + 3 = 0$$

$$12 + \frac{3}{2}y = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}y = -12 \Rightarrow y = -8$$

- Sustituyendo $y = -8$ en $x = 3 - \frac{3}{2}(-8) = 3 + 12 = 15$.

El único punto crítico es $(15, -8)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 6, \quad f_{xy} = 3$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(6) - (3)^2 = 12 - 9 = 3$$

Como $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, $(15, -8)$ es un **mínimo local.**

g) $f(x,y) = x^2 + 2xy$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 2x + 2y, \quad f_y = 2x$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2x + 2y = 0 \quad (1) \\ 2x = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (2): $x = 0$
- Sustituyendo $x = 0$ en (1): $2(0) + 2y = 0 \Rightarrow y = 0$.

El único punto crítico es $(0, 0)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 2$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(0) - (2)^2 = 0 - 4 = -4$$

Como $D < 0$, $(0, 0)$ es un **punto de silla.**

f) $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 2x + y + 3, \quad f_y = x + 2y + 2$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2x + y + 3 = 0 \quad (1) \\ x + 2y + 2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (1): $y = -2x - 3$
- Sustituyendo en (2):

$$x + 2(-2x - 3) + 2 = 0 \Rightarrow x - 4x - 6 + 2 = 0$$

$$-3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

- Sustituyendo $x = -\frac{4}{3}$ en $y = -2(-\frac{4}{3}) - 3 = \frac{8}{3} - 3 = \frac{-1}{3}$.

El único punto crítico es $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 1$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ es un **mínimo local.**

h) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 4x + 3y - 5, \quad f_y = 3x + 8y + 2$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 5 = 0 \quad (1) \\ 3x + 8y + 2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1) y (2):

- De (1): $3y = 5 - 4x \Rightarrow y = \frac{5-4x}{3}$
- Sustituyendo en (2):

$$3x + 8\left(\frac{5-4x}{3}\right) + 2 = 0$$

$$3x + \frac{40-32x}{3} + 2 = 0 \Rightarrow 9x + 40 - 32x + 6 = 0 \Rightarrow -23x + 46 = 0 \Rightarrow x = 2$$

- Sustituyendo $x = 2$ en (1):

$$4(2) + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 8 + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$$

El único punto crítico es $(2,-1)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 4, \quad f_{yy} = 8, \quad f_{xy} = 3$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (4)(8) - (3)^2 = 32 - 9 = 23$$

Como $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, $(2,-1)$ es un **mínimo local**.

i) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 3x^2 + 3y, \quad f_y = 3x + 3y^2$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y = 0 \quad (1) \\ 3x + 3y^2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} x^2 + y = 0 \Rightarrow y = -x^2 \quad (1) \\ x + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = -x \quad (2) \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = -x^2$ en $y^2 = -x$:

$$(-x^2)^2 = -x \Rightarrow x^4 + x = 0 \Rightarrow x(x^3+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Para $x = 0$, $y = 0$. Para $x = -1$, $y = -1$.

Los puntos críticos son $(0,0)$ y $(-1,-1)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = 3$$

Para $(0,0)$:

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad D = 0 \cdot 0 - (3)^2 = -9 \Rightarrow \text{punto de silla}$$

Para $(-1,-1)$:

$$f_{xx} = -6, \quad f_{yy} = -6, \quad D = (-6)(-6) - (3)^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow \text{mínimo local}$$

j) $f(x,y) = 3y^2 - 3y^3 - 3x^2 + 6xy$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = -6x + 6y, \quad f_y = 6y - 9y^2 + 6x$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} -6x + 6y = 0 \quad (1) \\ 6y - 9y^2 + 6x = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1):

$$6y = 6x \Rightarrow y = x$$

Sustituyendo en (2):

$$6x - 9x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 12x - 9x^2 = 0 \Rightarrow 3x(4 - 3x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow y = 0 \quad \text{o} \quad y = \frac{4}{3}$$

Los puntos críticos son $(0,0)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = -6, \quad f_{yy} = -18y + 6, \quad f_{xy} = 6$$

Para $(0,0)$:

$$D = (-6)(6) - (6)^2 = -36 - 36 = -72 \Rightarrow \text{punto de silla}$$

Para $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$:

$$f_{yy} = -18\left(\frac{4}{3}\right) + 6 = -24 + 6 = -18$$

$$D = (-6)(-18) - (6)^2 = 108 - 36 = 72 \Rightarrow \text{mínimo local}$$

m) $f(x,y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 2y - 2x, \quad f_y = 2x - 2y$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2y - 2x = 0 \quad (1) \\ 2x - 2y = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones se simplifican a $y = x$.

Sustituyendo en (1):

$$2x - 2x = 0 \Rightarrow \text{indeterminado}$$

Esto significa que cualquier x y y que satisfacen $y = x$ son puntos críticos.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 2$$

$$D = (-2)(-2) - (2)^2 = 4 - 4 = 0$$

Como $D = 0$, no se puede determinar la naturaleza de los puntos críticos.

k) $f(x,y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 27x^2 - 4y, \quad f_y = y^2 - 4x$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 27x^2 - 4y = 0 \quad (1) \\ y^2 - 4x = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1):

$$4y = 27x^2 \Rightarrow y = \frac{27}{4}x^2$$

Sustituyendo en (2):

$$\left(\frac{27}{4}x^2\right)^2 - 4x = 0$$

$$\frac{729}{16}x^4 - 4x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{729}{16}x^3 - 4\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad \frac{729}{16}x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = \frac{64}{729} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

Para $x = 0$:

$$y = 0$$

Para $x = \frac{4}{9}$:

$$y = \frac{27}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{27 \cdot 16}{4 \cdot 81} = \frac{27 \cdot 4}{81} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Los puntos críticos son $(0,0)$ y $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 54x, \quad f_{yy} = 2y, \quad f_{xy} = -4$$

Para $(0,0)$:

$$D = (54 \cdot 0)(2 \cdot 0) - (-4)^2 = 0 - 16 = -16 \Rightarrow \text{punto de silla}$$

Para $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right)$:

$$f_{xx} = 54\left(\frac{4}{9}\right) = 24, \quad f_{yy} = 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$D = 24 \cdot \frac{8}{3} - (-4)^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow \text{mínimo local}$$

l) $f(x,y) = xy(1-x-y)$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = y(1-x-y) - xy = y(1-2x-y), \quad f_y = x(1-x-y) - xy = x(1-x-2y)$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} y(1-2x-y) = 0 \quad (1) \\ x(1-x-2y) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1):

- $y = 0$
- $1 - 2x - y = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x$

De (2):

- $x = 0$
- $1 - x - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1-x}{2}$

Para $y = 0$:

- $x = 0$, así que $(0,0)$.

Para $y = 1 - 2x$ y $y = \frac{1-x}{2}$:

$$1 - 2x = \frac{1-x}{2} \Rightarrow 2 - 4x = 1 - x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$y = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Los puntos críticos son $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = -2y, \quad f_{yy} = -2x, \quad f_{xy} = 1 - 2x - 2y$$

Para $(0,0)$:

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad D = 0 - 1^2 = -1 \Rightarrow \text{punto de silla}$$

Para $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$:

$$f_{xx} = -2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}, \quad f_{yy} = -2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$D = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(1 - 2\left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 = \frac{4}{9} - 0 = \frac{4}{9} \Rightarrow \text{mínimo local}$$

n) $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2y^2$

1. **Derivadas parciales:**

$$f_x = 2y - 2xy^2, \quad f_y = 2x - 2x^2y$$

2. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2y - 2xy^2 = 0 \quad (1) \\ 2x - 2x^2y = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1):

$$2y(1 - xy) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{o} \quad 1 - xy = 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

De (2):

$$2x(1 - xy) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad 1 - xy = 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

Los puntos críticos son $(0, 0)$ y $xy = 1$.

3. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = -2y^2, \quad f_{yy} = -2x^2, \quad f_{xy} = 2 - 4xy$$

Para $(0, 0)$:

$$D = -2(0)^2 - (-2)(0)^2 - (2)^2 = 0 \Rightarrow \text{indeterminado}$$

Para $xy = 1$ (por ejemplo, $x = 1, y = 1$):

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 2 - 4(1)(1) = -2$$

$$D = (-2)(-2) - (-2)^2 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{indeterminado}$$

Encuentre los maximos, minimos y puntos de silla, si existen, dado que:

a) $f_x = 2x - 4y$, $f_y = 2y - 4x$

1. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2x - 4y = 0 \quad (1) \\ 2y - 4x = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1):

$$2x = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

Sustituyendo en (2):

$$2\left(\frac{1}{2}x\right) - 4x = 0 \Rightarrow x - 4x = 0 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Entonces $y = 0$. El punto crítico es $(0, 0)$.

2. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = -4$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - (-4)^2 = 4 - 16 = -12$$

Como $D < 0$, $(0, 0)$ es un **punto de silla.**

b) $f_x = 2x - 2$, $f_y = 2y - 4$

1. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 2x - 2 = 0 \quad (1) \\ 2y - 4 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$x = 1, \quad y = 2$$

El punto crítico es $(1, 2)$.

2. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - (0)^2 = 4$$

Como $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, $(1, 2)$ es un **mínimo local.**

c) $f_x = 9x^2 - 9$, $f_y = 2y - 4$

1. **Igualamos a cero:**

$$\begin{aligned} 9x^2 - 9 = 0 \quad (1) \\ 2y - 4 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Resolviendo (1):

$$9x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$$

De (2):

$$y = 2$$

Los puntos críticos son $(1, 2)$ y $(-1, 2)$.

2. **Segunda derivada:**

$$f_{xx} = 18x, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$$

Para $(1, 2)$:

$$f_{xx} = 18(1) = 18$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (18)(2) - (0)^2 = 36 > 0 \Rightarrow \text{mínimo local}$$

Para $(-1, 2)$:

$$f_{xx} = 18(-1) = -18$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-18)(2) - (0)^2 = -36 < 0 \Rightarrow \text{punto de silla}$$

Si fx(a,b) = fy (a,b) = 0 , debe f tener un maximo o un minimo en (a,b)? Explique su respuesta

Si $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, esto significa que (a,b) es un punto crítico. Sin embargo, esto no garantiza que f tenga un máximo o un mínimo en (a,b). Puede ser un punto de silla, un máximo local, un mínimo local o incluso un punto crítico sin ninguna clasificación definida. La naturaleza de este punto crítico debe determinarse mediante la prueba de la segunda derivada o análisis adicional de la función.

3- Demuestre que (0 , 0) es un punto crítico de f (x , y) = $x^2 + k\,x\,y + y^2$, independientemente del valor de k.

4- Para qué valores de la constante k garantiza la prueba de la segunda derivada que f (x , y) = $x^2 + k\,x\,y + y^2$ tendrá un punto de silla en (0 , 0)? Y un mínimo local en (0 , 0)? Para qué valores de k está inconclusa la prueba de la segunda derivada? Explique su respuesta.

Análisis de $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$

1. **Punto crítico en $(0,0)$:**
   - $f_x = 2x + ky$
   - $f_y = kx + 2y$

   En $(0,0)$:

   $$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

   Así que $(0,0)$ es un punto crítico independientemente de k.
2. **Segunda derivada:**

   $$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = k$$
   $$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - k^2 = 4 - k^2$$

   - **Para un punto de silla:**

   $$D < 0 \Rightarrow 4 - k^2 < 0 \Rightarrow k^2 > 4 \Rightarrow k < -2 \text{ o } k > 2$$

   - **Para un mínimo local:**

   $$D > 0 \text{ y } f_{xx} > 0 \Rightarrow 4 - k^2 > 0 \Rightarrow k^2 < 4 \Rightarrow -2 < k < 2$$

   - **Inconcluso:**

   $$D = 0 \Rightarrow 4 - k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = -2 \text{ o } k = 2$$

Ejercicio 4

Si $k = \pm 2$ el criterio no decide, si k > 2 o k < -2 entonces (0,0) es punto de silla y si –2 < k < 2 entonces (0,0) es min. relativo. No existe valor de k tal que (0,0) es max. relativo.

GUIA 3

Encuentre la expresion analitica de los conjuntos de nivel de cada una de las siguientes funciones. Grafique los conjuntos de nivel e indique los valores que pueden asignarse a la constante k. Finalmente de la ecuacion del conjunto de nivel que pasa por el punto x,y indicando en cada caso

a) $f(x,y) = \frac{1}{5y+x}$

1. **Conjunto de nivel:**

$$k = \frac{1}{5y+x} \Rightarrow 5y + x = \frac{1}{k}$$

La expresión analítica es:

$$x + 5y = \frac{1}{k}$$

2. **Para el punto** $(1,3)$:

$$k = \frac{1}{5(3)+1} = \frac{1}{16}$$

El conjunto de nivel pasa por $(1,3)$.

3. **Valores de** k:

- k puede ser cualquier número real diferente de cero, ya que la función no está definida para $5y + x = 0$.

b) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+3}$

1. **Conjunto de nivel:**

$$k = \frac{y}{x^2+3} \Rightarrow y = k(x^2+3)$$

La expresión analítica es:

$$y = kx^2 + 3k$$

2. **Para el punto** $(1,4)$:

$$k = \frac{4}{1^2+3} = 1$$

El conjunto de nivel pasa por $(1,4)$.

3. **Valores de** k:

- k puede tomar cualquier número real, ya que la función está definida para todos los x y y.

c) $f(x,y) = \sqrt{1-\sqrt{(x^2+y^2)^2}}$

1. **Conjunto de nivel:**

$$k = \sqrt{1-\sqrt{(x^2+y^2)^2}} \Rightarrow 1-\sqrt{(x^2+y^2)^2} = k^2$$
$$\sqrt{(x^2+y^2)^2} = 1-k^2$$
$$(x^2+y^2)^2 = (1-k^2)^2$$
$$x^2+y^2 = 1-k^2$$

2. **Valores de k:**
   - $1-k^2 \geq 0 \Rightarrow k^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k \leq 1.$

d) $f(x,y) = e^{xy}$

1. **Conjunto de nivel:**

$$k = e^{xy} \Rightarrow xy = \ln(k)$$

   La expresión analítica es:

$$xy = \ln(k)$$

2. **Para el punto $(-2,0)$:**

$$k = e^{(-2)(0)} = e^0 = 1$$

   El conjunto de nivel pasa por $(-2,0)$.

3. **Valores de k:**
   - $k > 0$, ya que e^{xy} es siempre positivo.

e) $f(x,y) = x^2+3y^2+1$

1. **Conjunto de nivel:**

$$k = x^2+3y^2+1 \Rightarrow x^2+3y^2 = k-1$$

   La expresión analítica es:

$$\frac{x^2}{k-1} + \frac{3y^2}{k-1} = 1$$

2. **Para el punto $(0,0)$:**

$$k = 1$$

   El conjunto de nivel pasa por $(0,0)$.

3. **Valores de k:**
   - $k \geq 1$.

f) $f(x,y) = x^2 - y^2$

1. **Conjunto de nivel:**

$$k = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = k$$

La expresión analítica es:

$$x^2 - y^2 = k$$

2. **Para el punto** $(-2,-1)$:

$$k = (-2)^2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

El conjunto de nivel pasa por $(-2,-1)$.

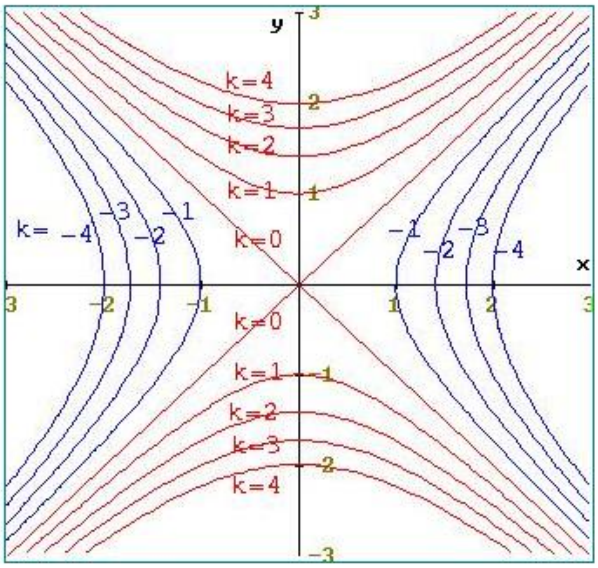
3. **Valores de** k:

- k puede tomar cualquier valor real.

jemplo 2. Curvas de nivel del *paraboloide hiperbólico*: $z = y^2 - x^2$

$N_0(f)$: $y^2 - x^2 = 0$
$N_1(f)$: $y^2 - x^2 = 1$
$N_2(f)$: $y^2 - x^2 = 2$
$N_3(f)$: $y^2 - x^2 = 3$
$N_4(f)$: $y^2 - x^2 = 4$
$N_5(f)$: $y^2 - x^2 = 5$

$N_{-1}(f)$: $y^2 - x^2 = -1$
$N_{-2}(f)$: $y^2 - x^2 = -2$
$N_{-3}(f)$: $y^2 - x^2 = -3$
$N_{-4}(f)$: $y^2 - x^2 = -4$



g) $f(x,y)=\cos(x+y)$

1. **Conjunto de nivel:**

$$k=\cos(x+y)\Rightarrow x+y=\cos^{-1}(k)$$

   La expresión analítica es:

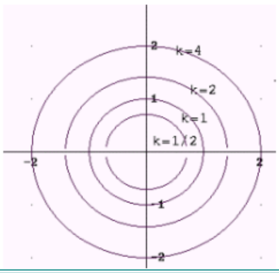
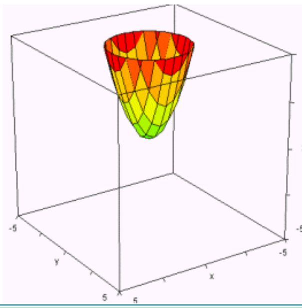
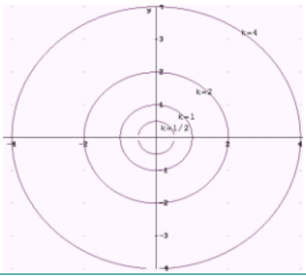
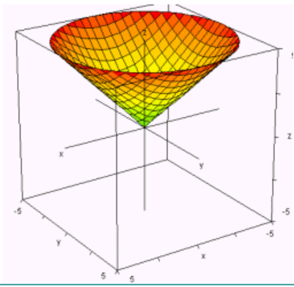
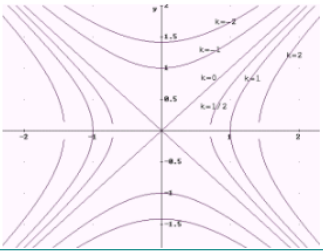
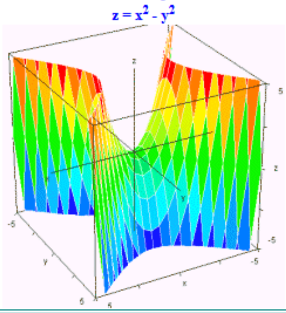
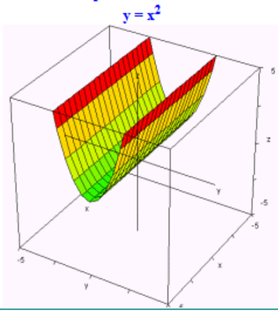
$$x+y=\cos^{-1}(k)$$

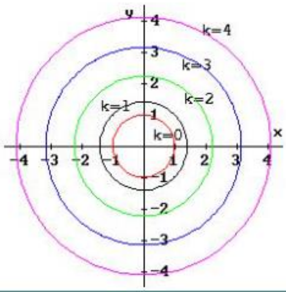
2. **Para el punto $(0,0)$:**

$$k=\cos(0+0)=1$$

   El conjunto de nivel pasa por $(0,0)$.

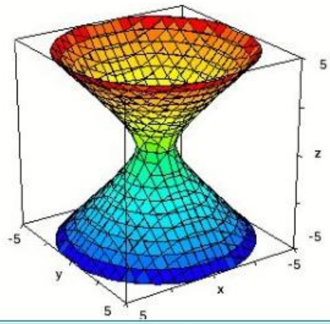
3. **Valores de k:**
   - $k\in[-1,1]$ (rango del coseno).

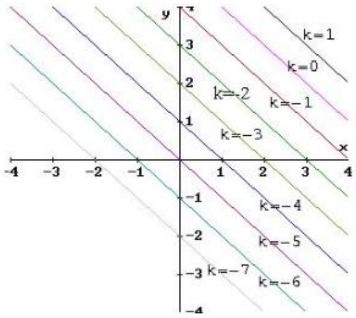
Curvas de nivel	Superficie
	**Paraboloide elíptico:** $z = x^2+y^2$ 
	**Superficie cónica (de una hoja):** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 
	**Paraboloide hiperbólico** $z = x^2 - y^2$ 
	**Superficie cilíndrica** $y = x^2$ 



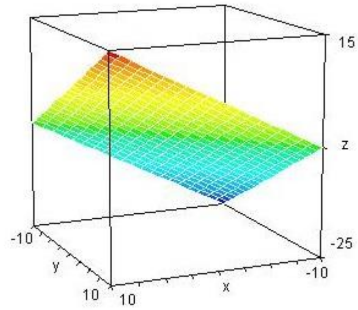
Hiperboloide hiperbólico (una hoja)

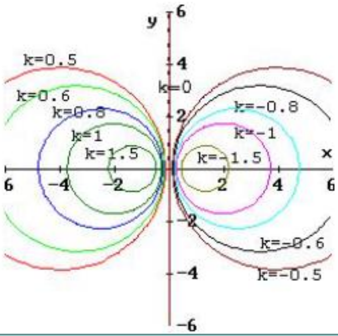
$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$





Plano
z = x+y-5





Superficie

$$z = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$$