GUIA DE EJERCICIOS Nº 3

1- Determine y grafique el dominio de cada una de las siguientes funciones.

a) $z = 9 - x^2 - y^2$

b) $f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \\ -1 & \text{si} \quad x > y \end{cases}$

c) $f(x,y)= \cos(x)$

d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3}{x\,y} & \text{si} \quad x.y<0 \\ 3\,x\,y & \text{si} \quad x.y>0 \end{cases}$

e) $z = g(x,y) = 2\,x\,y - e^{x/y}$

f) $f(x,y)= \sqrt{x^2+y^2-4}$

g) $f(x,y)=\ln[(x-2)(x+3)]$

h) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\ln y}$

i) $h(x,y)=\dfrac{\sqrt{x\,y}}{x^2-4}$

j) $f(x,y,z)= \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-16}}{\ln z}$

k) $t \to \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1} \\ \operatorname{sen} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$

l) $t \to (\sqrt{t^2-9}\ ,\ \sqrt{4-t^2})$

m) $(x,y) \to \left(\dfrac{x}{y-1}, \sqrt{x-1}\ , \ln(y) \right)$

n) $t \to \left(\dfrac{t+1}{\ln(t)}\ ,\ \sqrt{t-1} \right)$

2- Indique el espacio de partida y de llegada de las siguientes funciones y determine las funciones coordenadas:

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ \operatorname{sen}(x\,y) \\ 1-2x \end{pmatrix}$

b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ y - x \end{pmatrix}$

c) $f(x) = \begin{pmatrix} x + x^2 \\ 4\,x^3 \operatorname{sen} x \\ e^x \end{pmatrix}$

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

3- Encuentre la expresión analítica de los conjuntos de nivel de cada una de las siguientes funciones. Grafique (los conjuntos de nivel) e indique los valores que pueden asignarse a la constante k. Finalmente dé la ecuación del conjunto de nivel que pasa por el punto (x,y) indicado en cada caso.

a) $h(x,y) = \dfrac{1}{5y + x}$, $(x, y) = (1, 3)$

b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + 3}$, $(x, y) = (1, 4)$

c) $f(x,y) = \sqrt{1 - \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}$

d) $f(x,y) = e^{xy}$, $(x, y) = (-2, 0)$

e) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 1$, $(x, y) = (0, 0)$

f) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x, y) = (-2, -1)$

g) $h(x,y) = \cos(x + y)$, $(x, y) = (0, 0)$

4- Defina paramétricamente:

a) Una circunferencia centrada en (0 , 0) de radio 4.
b) La parábola $y = x^2$.
c) La recta $y = -x$.
d) Una recta que pasa por los puntos (1 , 2 , 1) y (0 , 3 , -1).
e) La curva determinada por el gráfico de $y = e^x$.
f) La curva determinada por el gráfico de $y = \ln x$.
g) Una elipse centrada en (1,-1) con radio en x igual a 4 y radio en y igual a 3.

5- Dibuje la curva definida paramétricamente por:

a) $t \to (t, \ln t)$
b) $t \to (t, \operatorname{sen} t)$
c) $t \to (2\cos t, \operatorname{sen} t - 1)$

6- Calcule en cada caso el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ si:

a) $f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} \\ \dfrac{x^3 - 2x}{x^4 - 4x} \\ \dfrac{x}{\ln(x)} \end{pmatrix}$

b) $f(x) = \left(x - 1, \ \dfrac{x^4 - x^3}{x^5 + 8x^2} \ , \ \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}(2x)} \right)$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x + 4} \ , \ \dfrac{2}{\ln(x)} \ , \ x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

d) $f(x) = \left(e^{2x}, x + 1, \dfrac{1}{x} \right)$

e) $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \cos x, \dfrac{x + 1}{x - 1} \right)$

7- a) Indique si las funciones definidas en el ejercicio 5 y 6 son continuas en x = 0.
b) Calcule la derivada primera de las funciones definidas en el ejercicio 5.
c) Indique, en que puntos , si existen, dichas funciones **no** son derivables.

8- Dada una curva definida paramétricamente $t \to (f(t), g(t))$ con f, f ', g, g' continuas para t en el [a , b]. Si la curva se recorre exactamente una vez cuando t crece de a hasta b, entonces la longitud de arco está dada por $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$. Esta definición puede extenderse a dimensiones superiores.

Calcule la longitud de las siguientes curvas:

a) $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi]$
b) $f(t) = (t, t)$ en $[0, 4]$
c) $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en $[0, 1]$

9- Para los siguientes apartados grafique la curva y represente los vectores posición, tangente y aceleración en los puntos indicados.

a) $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $t = 0$, $t = \pi$
b) $r(t) = (t, t^2 - 1)$ en $t = 1$, $t = 2$

10- Encuentre el valor de t tal que los vectores posición y tangente sean perpendiculares.

a) $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$
b) $r(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$

11- Busque la definición de integral para una función de $R \to R^n$ y resuelva:

a) $\int (\cos 3t, \operatorname{sen} t, e^{4t})\, dt$
b) $\int \left(t e^{t^2}, \frac{3t}{t^2+1}\right) dt$
c) $\int_0^1 \left(t^2 - 1, 3t\right) dt$
d) $\int_0^2 \left(\frac{4}{t+1}, e^{t-2}, t e^t\right) dt$

Aplicación

12- Si la aceleración de un objeto está dada por $a(t) = (6t, 12t + 2, e^t)$, encuentre su velocidad y posición en cualquier instante t, si se sabe que $v(0) = (2, 0, 1)$ (velocidad inicial) y que $r(0) = (0, 3, 5)$ (posición inicial).