GUIA DE EJERCICIOS Nº 2

1- Demuestre que dos funciones f y g tienen la misma derivada en un intervalo I si y solo si difieren en una constante. Es decir, $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I \iff f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in I$ y c = cte.

2- Indique si la primer función dada es una primitiva o no de la segunda función.

a) $F(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x + 2$ $\qquad f(x) = x \cos x$

b) $F(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + 4$ $\qquad f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

c) $F(x) = x \operatorname{sen} x - 3$ $\qquad f(x) = x \cos x$

d) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ $\qquad f(x) = x^2 - 2x + 5$

e) $F(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ $\qquad f(x) = \ln x$

3- Indique si las siguientes fórmulas son o no verdaderas. Justifique claramente su respuesta.

a) $\int x \operatorname{sen} x \, dx = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{sen} x + k$

b) $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + k$

c) $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + \operatorname{sen} x + k$

d) $\int (2x+1)^2 \, dx = \dfrac{(2x+1)^3}{3} + k$

4- Suponiendo que $f(x) = \dfrac{d}{dx}(1 - \sqrt{x})$ y $g(x) = \dfrac{d}{dx}(x + 2)$, encuentre:

a) $\int f(x)\, dx$

b) $\int -f(x)\, dx$

c) $\int g(x)\, dx$

d) $-\int g(x)\, dx$

e) $\int [f(x) + g(x)]\, dx$

f) $\int [f(x) - g(x)]\, dx$

g) $\int [x + f(x)]\, dx$

h) $\int [g(x) - 4]\, dx$

5- Resuelva las siguientes integrales indefinidas. En cada caso indique la propiedad o propiedades que aplica.

a) $\int \left(-8x^3 + 4x^2 - \dfrac{5}{3}x + 8\right) dx$

b) $\int \left(\dfrac{1}{2} e^3 + \sqrt[3]{x^4}\right) dx$

c) $\int (5 - 3x)^2 \, dx$

d) $\int x(x-1)(x+2)\, dx$

e) $\int \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\, dx$

f) $\int \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}\, dx$

g) $\int x\,(\sqrt{x} - 2)\,dx$

h) $\int 3\,2^{x+1}\,dx$

i) $\int \frac{-5}{\cos^2 x}\,dx$

j) $\int \frac{\pi}{2\,(1 + x^2)}\,dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{x}\,dx$

l) $\int \frac{-3\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

m) $\int \frac{4x^3 - 5x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

n) $\int (-2\cos x + 3\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$

6- Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de sustitución.

a) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt[3]{(3x + 6)^4}}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x}}$

c) $\int \frac{\mathrm{sen}(x)}{1 - \cos(x)}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

e) $\int \frac{9}{x}\cos(\ln(x))\,dx$

f) $\int \frac{3x^2 + x}{2x^3 + x^2}\,dx$

g) $\int \frac{x}{5x^2 + 10}\,dx$

h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

i) $\int \sqrt[3]{\cos(x)}\,\mathrm{sen}(x)\,dx$

j) $\int \frac{\sqrt[3]{\tan(x)}}{3\cos^2(x)}\,dx$

k) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln(x)}}{x}\,dx$

l) $\int e^{\cos x}\,\mathrm{sin}x\,dx$

m) $\int \frac{dx}{x\,\ln^3(x)}$

n) $\int \frac{dx}{x\ln(x) + x}$

o) $\int \frac{2 + \mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

p) $\int e^{3x-3}dx$

q) $\int \sin^4(x)\cos(x)\,dx$

r) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+2}}{\sqrt{x}}\,dx$

s) $\int \frac{dt}{1 + 4t^2}$

t) $\int \frac{x^3 + 2}{(3x^4 + 24x)^6}\,dx$

u) $\int \cos(3^x + 1)\,3^x\,dx$

7- Resuelva las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

a) $\int x^3 \ln(x)\,dx$

b) $\int \mathrm{artg}(x)\,dx$

c) $\int x\cos(x)\,dx$

d) $\int \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx$

e) $\int x^2 e^x\,dx$

f) $\int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx$

g) $\int x\sqrt{x + 3}\,dx$

h) $\int \mathrm{arsen}(x)dx$

i) $\int \ln(x)\ dx$

j) $\int \sqrt{x^3 - x^2}\ dx$

k) $\int x\ 3^{-x}\ dx$

l) $\int \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx$

m) $\int x^9\ \ln(x)\ dx$

n) $\int e^x\ \text{sen}(x)\ dx$

o) $\int \ln(1 - x)\ dx$

p) $\int \text{sen}(\ln(x))\ dx$

8- Resuelva las siguientes integrales por el método de descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{dx}{x(x-2)}$

b) $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

c) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-9)}$

d) $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x+1)}$

e) $\int \frac{dt}{t(t+3)\ (t+1)^2}$

f) $\int \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6}\ dx$

9- Resuelva las siguientes integrales utilizando el método mas conveniente.

a) $\int \frac{x^2+3}{x^3+9x}\ dx$

b) $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\ dx$

c) $\int e^{x + e^x} dx$

d) $\int x\ \ e^{x^2+3}\ dx$

e) $\int \frac{e^{2x}\ \ dx}{e^{4x} - 7e^{2x} + 12}$

f) $\int \text{sen}^2(x)\ dx$

g) $\int \frac{x+1}{e^x}\ dx$

h) $\int \frac{\text{sen}(x) - \cos(x)}{\text{sen}(x)}\ dx$

i) $\int \frac{dx}{16 + x^2}$

j) $\int \ln(\sqrt{1-x})\ dx$

k) $\int x \cos(3x)\ dx$

l) $\int \frac{1}{(1 + 6\ \text{tg}\ x)^6\ \ \cos^2(x)}\ dx$

m) $\int x\ \text{artg}\ x\ dx$

n) $\int \frac{x^6 + 8x^5 - 2}{x^7}\ dx$

o) $\int \frac{\sqrt{\text{tg}\ x} + 1}{\cos^2 x}\ dx$

p) $\int \frac{\sqrt[5]{1 + 2\ln x}}{x}\ dx$

q) $\int \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}\ dx$

r) $\int e^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{x}{2})\ dx$

s) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\ dx$

t) $\int \frac{\cos(x)}{\text{sen}^2\ x - 9}\ dx$

10- Encuentre la curva en el plano xy que pasa por el punto (9 , 4) y cuya pendiente en cada punto está dada por la función $f(x) = 3\sqrt{x}$.

11- Encuentre una función $y = f(x)$ con las siguientes propiedades:

- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$
- Su gráfica en el plano xy pasa por el punto (0 , 1) y en dicho punto la recta tangente a dicha gráfica es horizontal.

Cuántas funciones hay que cumplen estas condiciones?

12- Sabiendo que $\int_1^2 f(x)\, dx = 5$, encuentre:

a) $\int_1^2 f(u)\, du$

b) $\int_1^2 \sqrt{3}\, f(z)\, dz$

c) $\int_2^1 f(t)\, dt$

d) $\int_1^2 -f(x)\, dx$

13- Supongamos que f es una función continua y que $\int_0^3 f(z)\, dz = 3$ y $\int_0^4 f(z)\, dz = 7$, encontrar:

a) $\int_3^4 f(z)\, dz$

b) $\int_4^3 (2 f(z) - 1)\, dz$

14- Si f es una función continua y $\int_0^1 f(x)\, dx = 4$, calcule $\int_0^{1/3} f(3x)\, dx$.

15- Hallar el valor promedio de las siguientes funciones en el intervalo dado:

a) $f(x) = x^2$ en [0 , 3]

b) $f(x) = (x - 1)^2$ en [1 , 4]

16- Si f es una función continua y $\int_1^2 f(x)\,dx = 4$. Muestre que $f(x) = 4$ por lo menos en una ocasión en [1 , 2].

17- Resuelva las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{1} 5\,dx$

b) $\int_{-1}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$

d) $\int_{0}^{\sqrt{2}} (t - \sqrt{2})\,dt$

e) $\int_{1}^{3} \ln x\,dx$

f) $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

g) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sec x \tan x\,dx$

i) $\int_{0}^{1} t\sqrt{t^2 + 1}\,dt$

j) $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

k) $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 9}}\,dx$

l) $\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$

18- Calcule el área de las siguientes regiones planas:

a) La región limitada por $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$

b) La región determinada por $y \geq 1$, $y \geq x$, $y^2 \leq 4x$

c) La región limitada por las rectas $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$

d) La región limitada por las rectas $y = 0$, $x = 2$, y la curva $y = x^2$

e) La región limitada por la parábola $y = x^2$, y la recta $y = x$

f) La región en el primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = -2x + 4$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$

g) La región en el primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^2$, $y + x = 2$, $y = 0$

h) La región en el primer cuadrante limitada por las curvas $y = x$, $y = 8x$, $y = \frac{1}{x^2}$.

i) La región en el primer cuadrante limitada por las curvas $y = -x^2 + 4$, $y = -x + 2$, $y = 3$

Aplicación

19- Si un objeto se mueve a lo largo del eje x, en dirección positiva, de $x = a$ hasta $x = b$, y en cada punto x entre a y b actúa una fuerza $f(x)$ sobre el objeto, f función continua, entonces se define **el trabajo efectuado al mover el objeto de a hasta b** como $W = \int_a^b f(x)\,dx$.

Por otro lado, la **ley de Hooke** de la mecánica establece que la fuerza requerida para mantener estirado un resorte x unidades más allá de su longitud natural es proporcional a x, es decir, $f(x) = kx$, donde k es una constante positiva llamada constante del resorte. La ley de Hooke es válida, siempre y cuando x no sea muy grande.

A partir de los conceptos anteriores, resuelva el siguiente problema:

Se requiere una fuerza de 30 N para mantener estirado un resorte, de su longitud natural de 10 cm hasta una longitud de 15 cm. Cuánto trabajo se efectúa al estirarlo de 12 cm hasta 20 cm?