1. $\int \frac{2x+1}{x^2+4}\,dx$

Dividimos la fracción en dos partes:

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

- Para la primera parte, hacemos el cambio de variable $u = x^2+4$, lo que implica que $du = 2x\,dx$:

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1 = \ln(x^2+4) + C_1$$

- Para la segunda parte, la integral es una forma conocida:

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C_2$$

Por lo tanto, la solución completa es:

$$\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

2. $\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$

Esta es una integral que requiere descomposición en fracciones simples. Descomponemos el integrando:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicamos ambos lados por $x^2(x+1)$ para eliminar denominadores:

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

Expandiendo y agrupando términos, resolvemos para A, B, y C. Esto nos da:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1}$$

Ahora integramos término a término:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|$$

La solución completa es:

$$-\frac{1}{x} + \ln|x+1| + C$$

3. $\int \sin(x)\sqrt[3]{2+\cos(x)}\,dx$

Utilizamos el cambio de variable $u = 2+\cos(x)$, lo que implica que $du = -\sin(x)\,dx$.

Por lo tanto, la integral se transforma en:

$$-\int u^{1/3}\,du$$

La integral es sencilla:

$$-\frac{3}{4}u^{4/3} + C$$

Volviendo a la variable original:

$$-\frac{3}{4}(2+\cos(x))^{4/3} + C$$

4. $\int xe^{3x}\,dx$

Esta es una integral que se resuelve por partes. Usamos la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Sea $u = x$ y $dv = e^{3x}dx$. Entonces:

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Aplicamos la fórmula:

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

La integral restante es:

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Entonces, la solución completa es:

$$\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

5. $\int \frac{3\cos(x)}{\sin(x)+1}\,dx$ **en el intervalo** $[0, \frac{\pi}{2}]$

Hacemos el cambio de variable $u = \sin(x) + 1$, entonces $du = \cos(x)\,dx$.

La integral se convierte en:

$$\int \frac{3}{u}\,du = 3\ln|u| + C$$

Volviendo a la variable original:

$$3\ln|\sin(x) + 1| + C$$

Finalmente, evaluamos en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$:

- Para $x = 0$:

$$3\ln|\sin(0) + 1| = 3\ln(1) = 0$$

- Para $x = \frac{\pi}{2}$:

$$3\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right| = 3\ln(2)$$

Entonces, el resultado en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ es:

$$3\ln(2) - 0 = 3\ln(2)$$

Integral $\int \frac{1}{x^3-2x^2}\,dx$

Primero, factorizamos el denominador:

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$$

Así que la integral se convierte en:

$$\int \frac{1}{x^2(x-2)}\,dx$$

Para resolverla, utilizamos la **descomposición en fracciones simples**.

Paso 1: Descomposición en fracciones simples

Queremos descomponer la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{1}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

Multiplicamos ambos lados por $x^2(x-2)$ para eliminar los denominadores:

$$1 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

Expandimos ambos lados:

$$1 = A(x^2 - 2x) + B(x-2) + Cx^2$$

Agrupamos los términos por potencias de x:

$$1 = (A + C)x^2 + (-2A + B)x - 2B$$

Ahora igualamos los coeficientes con los del lado izquierdo (que es simplemente 1):

- Para x^2: $A + C = 0$
- Para x^1: $-2A + B = 0$
- Para el término constante: $-2B = 1$

Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones

Del tercer coeficiente, obtenemos:

$$B = -\frac{1}{2}$$

Sustituimos $B = -\frac{1}{2}$ en la segunda ecuación:

$$-2A + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \implies A = -\frac{1}{4}$$

Ahora, usamos $A = -\frac{1}{4}$ en la primera ecuación:

$$A + C = 0 \implies -\frac{1}{4} + C = 0 \implies C = \frac{1}{4}$$

Paso 3: Reescribir la integral

Ya que $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, y $C = \frac{1}{4}$, reescribimos la integral como:

$$\int \frac{1}{x^2(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\right) dx$$

Paso 4: Integrar cada término

Ahora integramos término a término:

- Para $\int \frac{-\frac{1}{4}}{x}\,dx$:

$$-\frac{1}{4}\ln|x|$$

- Para $\int \frac{-\frac{1}{2}}{x^2}\,dx$:

$$\frac{1}{2x}$$

- Para $\int \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\,dx$:

$$\frac{1}{4}\ln|x-2|$$

Resultado final

Sumando los resultados, la solución es:

$$-\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$

2. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-7e^{2x}+12}\,dx$

Primero, simplificamos el integrando. Hacemos un cambio de variable:

$$u = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad du = 2e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2u}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-7e^{2x}+12}\,dx = \int \frac{u}{u^2-7u+12}\cdot\frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2-7u+12}\,du$$

Ahora factorizamos el denominador:

$$u^2-7u+12 = (u-3)(u-4)$$

La integral se convierte en:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(u-3)(u-4)}\,du$$

Utilizamos fracciones simples:

$$\frac{1}{(u-3)(u-4)} = \frac{A}{u-3}+\frac{B}{u-4}$$

Multiplicamos y resolvemos:

$$1 = A(u-4)+B(u-3)$$

Evaluando en $u=3$:

$$1 = A(3-4) \Rightarrow A = -1$$

Evaluando en $u=4$:

$$1 = B(4-3) \Rightarrow B = 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{(u-3)(u-4)} = \frac{-1}{u-3}+\frac{1}{u-4}$$

Integral:

$$\frac{1}{2}\left(-\int \frac{1}{u-3}\,du + \int \frac{1}{u-4}\,du\right)$$

Resolviendo:

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|u-3| + \ln|u-4|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-4}{u-3}\right| + C$$

Volviendo a $u = e^{2x}$:

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}-3}\right| + C$$

Resultado:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-7e^{2x}+12}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}-3}\right| + C$$

3. $\int \sin^2(x)\,dx$

Utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Entonces la integral se convierte en:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\,dx$$

Integrando término a término:

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Resultado:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

4. $\int \frac{x+1}{e^x}\,dx$

Descomponemos la integral:

$$\int \left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)\,dx$$

La segunda parte es fácil:

$$\int \frac{1}{e^x}\,dx = -e^{-x}$$

Para la primera parte, utilizamos integración por partes: Sea $u = x$ y $dv = e^{-x}\,dx$. Entonces:

$$du = dx, \quad v = -e^{-x}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + e^{-x}$$

Entonces, sumando ambas partes:

$$\int \frac{x+1}{e^x}\,dx = -xe^{-x} + e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} + C$$

Resultado:

$$\int \frac{x+1}{e^x}\,dx = -xe^{-x} + C$$

1. $\int \frac{1}{16+x^2}\,dx$

Esta integral se puede resolver utilizando la fórmula estándar para la integral de la forma $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, que es:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

donde $a = 4$ en este caso. Por lo tanto, tenemos:

$$\int \frac{1}{16+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

Resultado:

$$\int \frac{1}{16+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

arctg

5. $\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$

Descomponemos la integral:

$$\int \left(1-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)\,dx = \int 1\,dx - \int \cot(x)$$

La primera parte es sencilla:

$$\int 1\,dx = x$$

La integral de $\cot(x)$ es:

$$\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)|+C$$

Entonces, combinamos los resultados:

$$\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = x - \ln|\sin(x)|+C$$

Resultado:

$$\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = x - \ln|\sin(x)|+C$$

2. $\int \ln(\sqrt{1-x})\,dx$

Podemos simplificar la integral utilizando la propiedad del logaritmo:

$$\ln(\sqrt{1-x}) = \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\int \ln(\sqrt{1-x})\,dx = \frac{1}{2}\int \ln(1-x)\,dx$$

Ahora, resolvemos $\int \ln(1-x)\,dx$ usando integración por partes:

- Sea $u = \ln(1-x)$ y $dv = dx$.
- Entonces, $du = -\frac{1}{1-x}\,dx$ y $v = x$.

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

obtenemos:

$$\int \ln(1-x)\,dx = x\ln(1-x) - \int \frac{x}{1-x}\,dx$$

Para resolver $\int \frac{x}{1-x}\,dx$, podemos hacer el siguiente cambio:

$$\int \frac{x}{1-x}\,dx = -\int\left(1-\frac{1}{1-x}\right)dx = -\int dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx = -x - \ln|1-x| + C$$

Reuniendo todo:

$$\int \ln(1-x)\,dx = x\ln(1-x) + x + \ln|1-x| + C$$

Por lo tanto, regresando a nuestra integral:

$$\int \ln(\sqrt{1-x})\,dx = \frac{1}{2}\left(x\ln(1-x) + x + \ln|1-x|\right) + C$$

Resultado:

$$\int \ln(\sqrt{1-x})\,dx = \frac{1}{2}x\ln(1-x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|1-x| + C$$

Raro?

j) $-\frac{1}{2}\left[(1-x)\ln(1-x) - (1-x)\right] + k$

3. $\int x\cos(3x)\,dx$

Usamos la **integración por partes.** Sea:

- $u = x$ y $dv = \cos(3x)\,dx$.
- Entonces, $du = dx$ y $v = \frac{1}{3}\sin(3x)$.

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

obtenemos:

$$\int x\cos(3x)\,dx = x\cdot\frac{1}{3}\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)\,dx$$

La integral de $\sin(3x)$ es:

$$-\frac{1}{3}\cos(3x)$$

Sustituyendo:

$$\int x\cos(3x)\,dx = \frac{x}{3}\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

Resultado:

$$\int x\cos(3x)\,dx = \frac{x}{3}\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

1. $\int \frac{x^6+8x^5-2}{x^7}\,dx$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{x^6+8x^5-2}{x^7}=\frac{x^6}{x^7}+\frac{8x^5}{x^7}-\frac{2}{x^7}=\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{2}{x^7}$$

Ahora integramos término a término:

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{2}{x^7}\right)dx=\int\frac{1}{x}\,dx+8\int x^{-2}\,dx-2\int x^{-7}\,dx$$

Calculamos cada integral:

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|,\quad 8\int x^{-2}\,dx=8\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{8}{x},\quad -2\int x^{-7}\,dx=-2\cdot\left(-\frac{1}{6x^6}\right)=\frac{1}{3x^6}$$

Juntando todo:

$$\int\frac{x^6+8x^5-2}{x^7}\,dx=\ln|x|-\frac{8}{x}+\frac{1}{3x^6}+C$$

Resultado:

$$\int\frac{x^6+8x^5-2}{x^7}\,dx=\ln|x|-\frac{8}{x}+\frac{1}{3x^6}+$$

2. $\int \frac{\sqrt{\tan(x)}+1}{\cos^2(x)}\,dx$

Podemos separar la integral:

$$\int\frac{\sqrt{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,dx+\int\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$$

La segunda parte es:

$$\int\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx=\tan(x)+C_1$$

Para la primera parte, realizamos el cambio de variable:

$$u=\tan(x)\quad\Rightarrow\quad du=\sec^2(x)\,dx=\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx\quad\Rightarrow\quad dx=\cos^2(x)\,du$$

Esto implica que:

$$\int\frac{\sqrt{u}}{\cos^2(x)}\,dx=\int\sqrt{u}\,du$$

Donde $\sqrt{\tan(x)}$ se convierte en $\sqrt{u}$.

Ahora integramos:

$$\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}+C_2=\frac{2}{3}\tan^{3/2}(x)+C_2$$

Finalmente, juntando las integrales:

$$\int\frac{\sqrt{\tan(x)}+1}{\cos^2(x)}\,dx=\frac{2}{3}\tan^{3/2}(x)+\tan(x)+C$$

Resultado:

$$\int\frac{\sqrt{\tan(x)}+1}{\cos^2(x)}\,dx=\frac{2}{3}\tan^{3/2}(x)+\tan(x)+C$$

4. $\int \frac{1}{(1+6\tan(x))^6 \cos^2(x)}\, dx$

Utilizamos la identidad $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$ y hacemos el cambio de variable:

$$u = 1 + 6\tan(x) \quad \Rightarrow \quad du = 6\sec^2(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{6\sec^2(x)}$$

También sabemos que $\cos^2(x) = \frac{1}{\sec^2(x)}$.

Sustituyendo:

$$\int \frac{1}{u^6 \cos^2(x)} \cdot \frac{du}{6\sec^2(x)} = \int \frac{1}{u^6} \cdot \frac{1}{6}\, du = \frac{1}{6}\int u^{-6}\, du$$

Integrando:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{u^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{30}u^{-5} + C = -\frac{1}{30(1+6\tan(x))^5} + C$$

Resultado:

$$\int \frac{1}{(1+6\tan(x))^6 \cos^2(x)}\, dx = -\frac{1}{30(1+6\tan(x))^5} + C$$

5. $\int x \,\mathrm{artg}(x)\, dx$

Usamos la integración por partes:

- Sea $u = \mathrm{artg}(x)$ y $dv = x\, dx$.
- Entonces, $du = \frac{1}{1+x^2}\, dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$.

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

obtenemos:

$$\int x\,\mathrm{artg}(x)\, dx = \mathrm{artg}(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx$$

La integral $\int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx$ puede ser simplificada:

$$\int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \tan^{-1}(x)\right) + C$$

Por lo tanto, juntando todo:

$$\int x\,\mathrm{artg}(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{artg}(x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C$$

1/2x

Resultado:

$$\int x\,\mathrm{artg}(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{artg}(x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}(x) + C$$

3. $\int \frac{\sqrt[5]{1+2\ln(x)}}{x}\,dx$

Hacemos el cambio de variable:

$$u = 1 + 2\ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{x}{2}\,du$$

También, $x = e^{(u-1)/2}$, por lo que:

$$\frac{x}{2} = \frac{e^{(u-1)/2}}{2}$$

Ahora, la integral se convierte en:

$$\int \sqrt[5]{u} \cdot \frac{e^{(u-1)/2}}{2}\,du$$

Integramos:

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/5} e^{(u-1)/2}\,du$$

Esta integral es compleja y no tiene una forma elemental, así que la dejamos en términos de la integral indefinida:

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/5} e^{(u-1)/2}\,du + C$$

Resultado:

$$\int \frac{\sqrt[5]{1+2\ln(x)}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/5} e^{(u-1)/2}\,du + C$$

mal

p) $\frac{5}{12}\,(1 + 2\ln x)^{6/5} + k$

6. $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)-9}\,dx$

Podemos reescribir el denominador:

$$\sin^2(x) - 9 = (\sin(x) - 3)(\sin(x) + 3)$$

Entonces, podemos usar la técnica de fracciones simples:

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 9} = \frac{\cos(x)}{(\sin(x) - 3)(\sin(x) + 3)}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$u = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad du = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos(x)}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\int \frac{1}{(u-3)(u+3)}\,du$$

Usamos fracciones simples:

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}$$

Multiplicando ambos lados por el denominador:

$$1 = A(u+3) + B(u-3)$$

Resolviendo para A y B te da $A = \frac{1}{6}$ y $B = -\frac{1}{6}$.

Entonces, podemos escribir la integral como:

$$\frac{1}{6}\int \frac{1}{u-3}\,du - \frac{1}{6}\int \frac{1}{u+3}\,du$$

Resolviendo las integrales:

$$= \frac{1}{6}\ln|u-3| - \frac{1}{6}\ln|u+3| + C$$

Regresando a la variable original:

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sin(x) - 3}{\sin(x) + 3}\right| + C$$

4. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$

Primero simplificamos el integrando:

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$$

La integral se convierte en:

$$\int \frac{3(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\,dx+\int \frac{-6}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\,dx$$

Usamos el cambio de variable:

$$u=x-2 \quad \Rightarrow \quad du=dx$$

Entonces la integral se convierte en:

$$3\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,du-6\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$

Calculamos:

- La primera integral:
$$3\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,du=3\cdot\frac{1}{2}(u^2+1)^{1/2}+C_1=\frac{3}{2}\sqrt{u^2+1}$$
- La segunda integral:
$$-6\cdot\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|+C_2$$

Sumando los resultados:

$$\frac{3}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}-6\ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right|+C$$

Resultado:

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx=\frac{3}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}-6\ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right|+C$$

mal

q) $3\left(x^2-4x+5\right)^{1/2}+k$

5. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$

Usamos la técnica de **integración por partes** o la **integración de funciones exponenciales combinadas con funciones trigonométricas.** Es más sencillo usar el método de la fórmula de la integral de funciones de la forma:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))+C$$

En este caso, $a=-\frac{1}{2}$ y $b=\frac{1}{2}$:

$$\int e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

Calculamos a^2+b^2:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la integral es:

$$\int e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = \frac{2e^{-\frac{x}{2}}}{1}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

Simplificando:

$$=-e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

Resultado:

$$\int e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = -e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

Vamos a resolver la integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Paso 1: Descomposición del integrando

Podemos descomponer el término x^3 como $x^3 = x \cdot x^2$, lo que nos lleva a:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{x \cdot x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Paso 2: Cambio de variable

Para esta integral, es conveniente utilizar el siguiente cambio de variable:

$$u = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2x\,dx$$

De modo que:

$$x\,dx = -\frac{du}{2}$$

Ahora reescribimos la integral en términos de u:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(4-u)}{\sqrt{u}}\,du$$

dado que $x^2 = 4 - u$.

Paso 3: Expandir y simplificar

Expandimos el integrando:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{4-u}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{4}{\sqrt{u}} - \frac{u}{\sqrt{u}}\right)\,du = -\frac{1}{2}\int \left(4u^{-1/2} - u^{1/2}\right)\,du$$

Paso 4: Integrar término a término

Ahora integramos cada término:

- Para $4u^{-1/2}$:

$$\int 4u^{-1/2}\,du = 8u^{1/2}$$

- Para $u^{1/2}$:

$$\int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2}$$

Sustituyendo las integrales:

$$-\frac{1}{2}\left(8u^{1/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) = -4u^{1/2} + \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

Paso 5: Volver a la variable original

Recordamos que $u = 4 - x^2$. Entonces, sustituimos u por $4 - x^2$:

$$-4\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C$$

Resultado final:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -4\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C$$

Concepto básico para el cálculo de áreas entre curvas

El área entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

En general:

- Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, podemos escribir la integral como:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Esto es porque el área es la diferencia entre la curva superior y la inferior.

Cómo abordar el **Ejercicio 18** de la guía

La guía menciona varias regiones delimitadas por curvas. Cada sub-inciso implica que necesitamos determinar los puntos de intersección entre las curvas, y luego integrar para obtener el área. A continuación, te explicaré cómo proceder para una de estas regiones.

Ejemplo: Área entre dos curvas (región delimitada por una parábola y una recta)

Tomemos como ejemplo una región delimitada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$, que es uno de los problemas más comunes.

Paso 1: Encuentra los puntos de intersección

Primero, necesitamos encontrar los puntos donde las curvas se interceptan. Para eso, igualamos las dos ecuaciones:

$$x^2 = x$$

Resolvemos esta ecuación:

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. Estos son los puntos donde las dos curvas se cruzan, y por tanto, los límites de integración.

Paso 2: Determina cuál es la curva superior e inferior

Ahora necesitamos ver cuál de las dos curvas está por encima de la otra en el intervalo $[0, 1]$. Para esto, comparamos $y = x^2$ y $y = x$ evaluando un valor entre 0 y 1, por ejemplo $x = \frac{1}{2}$:

- $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- $x = \frac{1}{2}$

Vemos que $x = \frac{1}{2}$ es mayor que $x^2 = \frac{1}{4}$, por lo tanto, la curva $y = x$ está por encima de la curva $y = x^2$ en este intervalo.

Paso 3: Plantear la integral para el área

Sabemos que la curva superior es $y = x$ y la curva inferior es $y = x^2$. Entonces, el área entre estas dos curvas desde $x = 0$ hasta $x = 1$ se calcula como:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

Paso 4: Resuelve la integral

Resolvemos la integral término a término:

$$A = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^2\, dx$$

Primero, la integral de x:

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

Y luego la integral de x^2:

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

Ahora evaluamos en los límites 0 y 1:

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

Sustituyendo:

$$A = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)$$

Finalmente:

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Paso 5: Conclusión

El área de la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ y $y = x$ en el intervalo $[0, 1]$ es:

$$A = \frac{1}{6}$$

Otros sub-incisos

Para los otros sub-incisos del ejercicio 18, el proceso es similar:

1. Encuentra los puntos de intersección de las curvas.
2. Determina cuál curva está por encima de la otra.
3. Plantea la integral de la curva superior menos la curva inferior.
4. Resuelve la integral en los límites determinados.