GUIA DE EJERCICIOS Nº 6

1- Calcule la integral de línea del campo F a lo largo de la curva γ.

a) $F(x, y) = (x + y, x - y)$ $\quad \gamma$ parametrizada por $g(t) = (t, 2t + 4)$ $\; -1 \le t \le 3$

b) $F(x, y) = (y + 2, -x + y)$ $\quad \gamma$ el segmento que une los puntos (1 , 2) y (2 , 4)

c) $F(x, y, z) = (3y, 2x, 4z)$ $\quad \gamma$ parametrizada por $g(t) = (t, t, t)$ $\quad 0 \le t \le 1$

d) $F(x, y, z) = (y, x^2, 2z)$ $\quad \gamma$ parametrizada por $g(t) = (t, t, t^2)$ $\quad 0 \le t \le 1$

e) $F(x, y, z) = \left(0, \dfrac{1}{x^2 + 1}, 0\right)$ $\quad \gamma$ parametrizada por $g(t) = (t, t^2, t^4)$ $\quad 0 \le t \le 1$

2- Calcule las siguientes integrales de línea.

a) $\int_C (x+1)\, dx + 2y\, dy$ $\;$ C el segmento de recta que va desde el punto (0 , 0) hasta el (1 , 2)

b) $\int_C 2xy\, dx + x^2\, dy$ $\;$ C la curva a lo largo de la parábola $y = 2x^2$ desde (1 , 2) hasta (3 , 18)

c) $\int_C x\, dy - y\, dx$ $\quad$ i) a lo largo de la semicircunferencia con centro en el origen y radio 1, en el primer y segundo cuadrante, recorrida en sentido antihorario.
ii) misma curva, pero recorrida en sentido horario.

d) $\int_C (x+y)\, dx + (y-x)\, dy$ $\;$ C la poligonal que une los puntos (0 , 0) , (0, 2) , (4 , 2)

e) $\int_C x\,y\, dx + x^2\, dy$ $\quad$ C la curva a lo largo del gráfico de la función $y = x^3$ $\; -1 \le x \le 2$

3- Calcule el trabajo realizado por el campo $F(x, y) = (y, -x)$ que actúa sobre un objeto que se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2 - 1$ desde (1 , 0) hasta (-2 , 3).

4- Calcule el trabajo realizado por el campo $F(x, y, z) = (x\,y, 3z, 1)$ que actúa sobre un objeto que se mueve a lo largo de la espiral $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 2t$ que va de (1 , 0 , 0) a (0 , 1 , π).

5- Calcule el trabajo realizado por un campo de fuerza $F(x, y, z) = (x\,z, y\,x, z\,y)$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva $g(t) = (t^2, -t^3, t^4)$ para $0 \le t \le 1$.

6- Calcule $\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy$ entre (0 , 1) y (2 , 5) a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) El segmento de recta que une dichos puntos.

b) La porción de parábola $y = x^2+1$ entre dichos puntos.

c) La poligonal $(0,1)\to(1,1)\to(1,2)\to(2,5)$

d) Observe los resultados de los tres apartados anteriores, qué conclusión puede obtener?

7- Calcule $\int_C (x+1)\,dx - xy\,dy$ entre (-1 , 1) y (1 , 3) a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) El segmento de recta que une dichos puntos.

b) La porción de curva dada por el gráfico de $y = x^3 + 2$ entre dichos puntos.

c) La poligonal $(-1,1)\to(-1,3)\to(1,3)$

d) Observe los resultados de los tres apartados anteriores, qué conclusión puede obtener?

8- Determine si los siguientes campos son o no conservativos. En caso afirmativo encuentre la función potencial.

a) $F(x,y) = (y, -x)$

b) $F(x,y) = (4xy, 2x^2)$

c) $F(x,y) = (x^3 + y, (x-y)^2)$

d) $F(x,y) = (x^2 + y^2, -2xy)$

e) $F(x,y) = (2xy - 3, x^2 + \cos y)$

f) $F(x,y) = (y \operatorname{sen}(xy), x \operatorname{sen}(xy))$

g) $F(x,y) = (3x^2y^2 - 2y, x^2y - 2x)$

h) $F(x,y) = (1 + 2xy, x^2 - 2y^2)$

i) $F(x,y) = \left(x^3y, \dfrac{x^4}{4} + y\right)$

j) $F(x,y) = \left(x\cos y, -\dfrac{x^2}{2}\operatorname{sen} y + 4\cos y\right)$

9- Demuestre que el campo $F(x,y) = (k_1, k_2)$, donde k_1 y k_2 son constantes, es conservativo.

10- Evalúe las siguientes integrales utilizando la función potencial:

a) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy$

b) $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(1,e)} y\,dx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy$

c) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x \cos y\,dx - e^x \operatorname{sen} y\,dy$

11- Calcule las siguientes integrales curvilíneas por el método que considere mas adecuado.

a) $\int_C x^2 \, y \, dx + y \, dy$ donde C es la frontera de la región limitada por $y = x$, $y = x^2$ recorrida en sentido antihorario

b) $\int_C (x y - x^2) \, dx + x^2 \, y \, dy$ donde C es la frontera de la región limitada por $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ recorrida en sentido antihorario.

c) $\int_C \frac{y}{x^2+y^2} \, dx - \frac{y}{x^2+y^2} \, dy$ donde C es la circunferencia centrada en el origen de radio 1, recorrida en sentido antihorario.

d) $\int_C (3 + 2 x y) \, dx + (x^2 - 3 y^2) \, dy$ donde C es la curva $y = x^2 + 2$ para $0 \leq x \leq 1$.

12- Demuestre que las siguientes integrales de línea no son independientes de la trayectoria, hallando dos trayectorias que den diferentes valores de la integral.

a) $\int_C y \, dx - x \, dy$ donde C va de (-2 , 0) a (2 , 0)

b) $\int_C y \, dx - 3 \, dy$ donde C va de (-2 , 2) a (0 , 0)

13- Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique su respuesta.

a) Si F es conservativo, entonces la integral de línea a lo largo de una curva C es igual a cero.

b) Si la integral de línea del campo F es independiente de la trayectoria entonces F es conservativo.

c) Si F es un campo conservativo, entonces la integral de línea a lo largo de una curva cerrada es cero.

d) Si F es un campo conservativo entonces la integral de línea es independiente de la trayectoria.

e) Si la integral de línea de un campo F da lo mismo a lo largo de dos curvas diferentes, entonces el campo es conservativo.