1- Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique claramente con alguna definición, teorema o encuentre algún contraejemplo (sin alguna justificación no se evaluará respuesta alguna). **(30 pts)**

a) Todo conjunto de puntos de R^2 puede ser definido explícitamente por una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

b) Si una función *f* no tiene puntos críticos $\Rightarrow$ entonces f no tiene extremos locales.

c) Si $x>0$ el Teorema de Rolle no es aplicable a la función $f\ (x)=xe^x$ en ningún intervalo pues $f\ (a)\neq f(b)$ para todo a y b mayor que cero.

d) Si la integral de línea de una función $F:R^2\to R^2$ a lo largo de una curva cerrada es cero, entonces F es un campo vectorial conservativo

e) La existencia de la función potencial f de un campo vectorial F en un conjunto D, no garantiza que el campo sea conservativo en D.

f) No es posible aplicar el Teorema del Valor Medio a la función f(x) = $x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo [-1 , 1].

.

1. a) FALSA .por ejemplo, una elipse, círculo, etc que se pueden definir en forma implícita o paramétrica.

b) VERDADERA, es condición necesaria, pero no suficiente.

c) VERDADERA. Se puede analizar la derivada $f' = e^x\,(1+x)$ >0 pues la exponencial es positiva y (1+x) >0 pues x >0. Por lo tanto f es creciente y f(a) ≠ f(b).

d) FALSA, debería decir a lo largo de ***cada (es lo mismo que decir toda)*** curva cerrada.

e) FALSO. Se justifica por definición.

f) VERDADERO, ya que la función no es derivable en ese intervalo $f'(x)=x^{-1/3}$ no está definida en x=0.

2- Sea $\wp$ una curva en el plano, parametrizada por la función g(t) = $\left(t^2-1,\ \frac{1}{3}t^3-2\right)$ con t $\in\left[0,2\right]$ Calcule la longitud de dicha curva. **(10 pts)**

2. La longitud de arco de una curva parametrizada es $L=\int_0^2\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$

$$L=\int_0^2\sqrt{(2t)^2+\left(t^2\right)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{t^2\left(4+t^2\right)}\,dt=\int_0^2\sqrt{t^2}\sqrt{\left(4+t^2\right)}\,dt$$

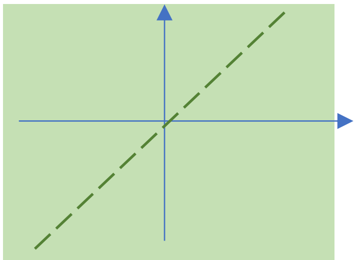
$$L=\int_0^2 t\sqrt{\left(4+t^2\right)}\,dt=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}\left(4+t^2\right)^{3/2}\Big|_0^2=\frac{1}{3}\left(8^{3/2}-4^{3/2}\right)$$

la integral se resuelve por sustitución.

3- Dada la función $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

a) Dé y grafique el dominio y la imagen de f. **(10 pts)**
b) Dé la expresión analítica y el gráfico de los conjuntos de nivel de f. **(10 pts)**
c) Dé la ecuación del conjunto de nivel que pasa por el punto (x,y) = (2,1). **(5 pts)**
d) Calcule la derivada direccional de f, en la dirección que va desde (2 , 1) a (4 , -2) en el punto (2 , 1). Es ésta la derivada direccional máxima de f en el punto dado?. Justifique. **(10 pts)**

3. a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$, $\qquad I_f = \mathbb{R}$



b) $\dfrac{x+y}{x-y} = k \quad \Rightarrow \quad x + y = k(x-y) \quad \Rightarrow \quad y + ky = kx - x$

$y + ky = kx - x \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x(k-1)}{(k+1)}$

Son rectas que pasan por el origen

Si $k = -1 \Rightarrow$ x = 0 es el eje y

Si $k = 1 \Rightarrow$ y = 0 es el eje x

Si $|k| > 1$ son rectas de pendiente positiva y para

$|k| < 1$ son rectas de pendiente negativa

c) $\dfrac{x+y}{x-y} = k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2+1}{2-1} = 3 \qquad k = 3$

El conjunto de nivel es la recta de pendiente 1/2 que pasa por el origen: $y = \dfrac{1}{2}x$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) . \dfrac{u}{\|u\|} \qquad u = (4,-2) - (2,1) = (2,-3)$

$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$

$\nabla f(x, y) = \left(\dfrac{x - y - (x+y)}{(x-y)^2}, \dfrac{x - y - (-1)(x+y)}{(x-y)^2} \right) = \left(\dfrac{-2y}{(x-y)^2}, \dfrac{2x}{(x-y)^2} \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2,1) = (-2, 4).\frac{(2,-3)}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-4-12) = -16\frac{\sqrt{13}}{13}$$

La dirección de máximo aumento es: $\dfrac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}$ valuada en el punto

4- a) Calcule $\int_{\gamma} (x - y)\, dx + x\, dy$ donde γ es la semicircunferencia centrada en el origen, de radio 3, ubicada en el primero y segundo cuadrante y recorrida en sentido antihorario. **(10 pts)**

b) El campo vectorial F (x , y) = (1 + 2 x y , $x^2 - 2y^2$) es conservativo? En caso afirmativo encuentre la correspondiente función potencial, y en caso negativo explique claramente por qué. **(15**

a) Parametrización la semicircunferencia:

$$\wp(t) = (3\cos(t), 3\sin(t)) \qquad 0 \le t \le \pi$$
$$\wp'(t) = (-3\sin(t), 3\cos(t))$$

$$\int_0^{\pi} F(\wp(t)).\wp'(t).dt = \int_0^{\pi} (3\cos(t) - 3\sin(t), 3\cos(t)).\left(-3\sin(t), 3\cos(t)\right).dt$$

$$\int_0^{\pi} (3\cos(t)(-3\sin(t)) - 3\sin(t)(-3\sin(t)) + 3\cos(t)3\cos(t).dt$$

$$\int_0^{\pi} -9\cos(t)\sin(t) + \underbrace{9(\sin(t))^2 + 9(\cos(t))^2}_{9}.dt = = \left(\frac{9}{2}(\cos(t))^2 + 9t\right)_0^{\pi} = \frac{9}{2} + 9\pi - \left(\frac{9}{2} + 0\right) = 9\pi$$

b) Hay que verificar si se cumple la condición de simetría

$$F(x,y) = (\underbrace{1 + 2xy}_{F_1}, \underbrace{x^2 - 2y^2}_{F_2})$$

$\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2x \qquad \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2x$ se cumple.

$$\varphi(x,y) = \int 1 + 2xy.dx = x + x^2y + g(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x^2 + g'(y) = F_2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \cancel{x^2} + g'(y) = \cancel{x^2} - 2y^2 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = -2y^2$$

$g(y) = -\dfrac{2}{3}y^3 + C$ entonces la función potencial es

$$\boxed{\varphi(x,y) = x + x^2y - \frac{2}{3}y^3 + C}$$