GUIA DE EJERCICIOS Nº 4

1- Calcule el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} (x^3 - x y + 4)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\dfrac{2x+3y}{x+y^2}\right)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos y}{\sqrt{4-x-y}}\right)$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-2)} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x\pi)}{x^2+y^2}\right)$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \left(\dfrac{y^2 x - 4x}{y-2}\right)$

2- Verifique que no existe el límite doble en el origen para las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \dfrac{x-2y}{x+y}$

b) $f(x,y) = \dfrac{6x^2-5y}{x^2+2y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{x^4+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{5xy}{4x^2+(2y)^2}$

3- Estudie la existencia del límite doble en el origen para:

a) $f(x,y) = \dfrac{3x^2 y}{x^4+2x^2 y+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x y^2}{y^4+x^2}$

c) $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2 y^2+(x-y)^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{|x|+|y|}$

e) $g(x,y) = \dfrac{y}{x}$

f) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{y}$

4- Investigue la existencia del límite doble en (1 , 1) para:

a) $f(x,y) = \dfrac{1 - xy}{x^2 - y^3}$

b) $h(x,y) = \dfrac{x^2 + xy - 2}{1 - xy}$

5- Encuentre el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$

b) $g(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$

c) $h(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

d) $r(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$

e) $f(x,y) = \operatorname{tg}(xy)$

f) $g(x,y) = e^{x-y}$

6- Determine si las siguientes funciones son continuas o no en el origen, y en caso afirmativo clasifique dicha discontinuidad:

a) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

7- Demuestre que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

8- Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones con respecto a cada una de las variables.

a) $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 6$

b) $f(x,y) = (xy - 2)^3$

c) $f(x,y) = e^{-x} \operatorname{sen}(x+y)$

d) $g(x,y) = \cos^2(3x - y^2)$

e) $h(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

f) $g(x,y,z) = \sqrt{x^3 - 4y^2 + 5z}$

g) $f(x,y,z) = \dfrac{3\ln(xyz^2)}{2x + 4y - 2z}$

h) $r(x, y) = \cos(4x + y)^3 \operatorname{sen}(4x)^3$

i) $g(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{z}\,\ln(z x y)}{z^3}$

9- Encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden de las funciones:

a) $f(x, y) = x + y + x y$

b) $g(x, y) = \operatorname{sen}(x y)$

c) $h(x, y, z) = e^{x y z}$

d) $r(x, y, z) = x y + x z + y z$

10- Para las siguientes funciones verifique que $f_{xy} = f_{yx}$

a) $f(x, y) = \ln(2x + 3y)$

b) $f(x, y) = e^{x} + x \ln y + y \ln x$

11- La ecuación de Laplace es $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$. Verifique que las siguientes funciones satisfacen esta ecuación.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

b) $f(x, y, z) = e^{-2y} \cos(2x)$

12- Calcule la derivada direccional de la función f, en el punto P_0 y en la dirección de A

a) $f(x, y) = 2xy - 3y^2$ $\quad P_0 = (5, 5)$ $\quad A = (4, 3)$

b) $f(x, y) = \cos(x y) + e^{x y}$ $\quad P_0 = (0, 1)$ $\quad A = (1, 0)$

c) $f(x, y) = x^2 + x y + y^2$ $\quad P_0 = (-1, 1)$ $\quad A = (2, 2)$

d) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y - 4x + 2y$ $\quad P_0 = (2, 0)$ $\quad A = (-2, 1)$

e) $f(x, y, z) = x^2 y + e^{x z}$ $\quad P_0 = (1, -1, 2)$ $\quad A = (2, 3, -1)$

f) $f(x, y, z) = \ln(y + z) - \sqrt{x}$ $\quad P_0 = (1, 0, 3)$ $\quad A = (1, -1, 4)$

13- Calcule la derivada direccional de la función f en el punto P_0, en la dirección indicada en cada caso.

a) $f(x, y) = x + y - \dfrac{x^2}{2}$ $\quad P_0 = (3, -2)$ en la dirección que va desde $(1, 4)$ al $(2, 1)$

b) $f(x, y) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\quad P_0 = (1, 0)$ en la dirección tangente a la curva γ parametrizada por la función $g(t) = (\operatorname{sen} t, t^2)$ en $t = 0$.

c) $f(x, y, z) = x^2z - y^2x + z^2y$ $P_0 = (-1, 1, 2)$ en la dirección tangente a la curva γ parametrizada por la función $g(t) = \left(\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2} + t, \frac{t^2}{2} - 2t\right)$ en $t = 2$.

14- Encuentre el gradiente de la función en el punto P_0. Luego grafique el conjunto de nivel que pasa por el punto y el vector gradiente encontrado.

a) $f(x, y) = y - x$ $P_0 = (2, 1)$
b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ $P_0 = (1, 1)$

15- Encuentre las direcciones en que las funciones crecen y decrecen más rápidamente en P_0. Luego encuentre las derivadas direccionales de las funciones en esas direcciones.

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ $P_0 = (-1, 1)$
b) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} - yz$ $P_0 = (4, 1, 1)$
c) $f(x, y, z) = xe^y + z^2$ $P_0 = (1, \ln 2, 1/2)$
d) $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$ $P_0 = (1, 1, 1)$

16- Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal, en el punto P_0 sobre la superficie dada.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ $P_0 = (1, 1, 1)$
b) $2z - x^2 = 0$ $P_0 = (2, 0, 2)$
c) $x + y + z = 1$ $P_0 = (0, 1, 0)$
d) $x^2 - xy - y^2 - z = 0$ $P_0 = (1, 1, -1)$

17- En qué direcciones la derivada direccional de $f(x, y) = xy + y^2$ en $P_0 = (3, 2)$ es igual a cero?