5. tétel

Furuglyás Kristóf

June 5, 2019

Abstract

Fraktáldimenzió, önhasonló matematikai fraktálok, természetben előforduló fraktálok, sejtautomaták.

1 Fraktáldimenzió

Mindennapi objektumoknál megfigyelhető, hogy ha egyre kisebb skálán vizsgáljuk őket, az egyes tulajdonságaik konvergálnak egy adott értékhez. Fraktálok esetében azonban a kisebb felbontás nem eredményez konvergenciát; **a fraktálok határai** ugyanis végtelenül "gyűröttek" vagy "szakadásosak", azaz **nem-differenciálhatóak**. Továbbá, a fraktálok másik fontos tulajdonsága, hogy **önhasonlók** – azaz különböző nagyítás mellett nézve ugyanazt az alakzatot látjuk kibontakozni. A természetben előforduló fraktálok például a **szigetek partvonalai vagy a hegyek felszíne**. Előfordulhatnak még **növekedésből származó fraktálok** is, mint például az a **növények gyökérzete vagy épp a keringési rendszer**. Ilyenkor az elégazó struktúrák valamilyen **növekedési instabilitás** váltja ki.

Megmérve bármilyen d dimenziós test a térfogatát különböző l oldalhosszúságú szintén d dimenziós (tehát l^d térfogatú) kockákkal, és feltételezve, hogy ekkor a lefedéshez szükséges kockák száma $N(l)$, a test téfogata:

$$V(l) = N(l) \cdot l^d. \tag{1}$$

Hétköznapi objektumoknál ha $l \to 0$, akkor $V(l)$ gyorsan konvergál egy adott értékhez. Azonban **fraktálok** esetében ha $l \to 0$, akkor $\mathbf{V(l) \to 0}$! Ugyanakkor ezzel egyidőben a $d-1$ dimenziós $S(l)$ **felszíne pedig divergál**: $\mathbf{S(l)} \to \infty$.

A geomatriai (matematikai) fraktálok:

- olyan **önhasonló** geometriával rendelkező formák,
- ahol az önhasonlóság **tetszőleges iteráción keresztül** fennáll,
- és a lefedéshez szükséges l élhosszúságú dobozok $N(l)$ száma **nemtriviálisan skálázódik**:

  $$N(l) \sim l^{-D}, \tag{2}$$

  ahol D egy pozitív, nem egész szám, amely az objektum törtdimenziója, fraktáldimenziója.

Az előbbiek alapján a két oldal logaritmusát véve definiálhatjuk a fraktál **box-counting dimenzióját**:

$$D_B = \lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \tag{3}$$

Ugyanez érvényes akkor is, **ha a fraktál növekvő**, és annak lineáris hosszát L-lel jelöljük:

$$D_B = \lim_{L \to \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}. \tag{4}$$

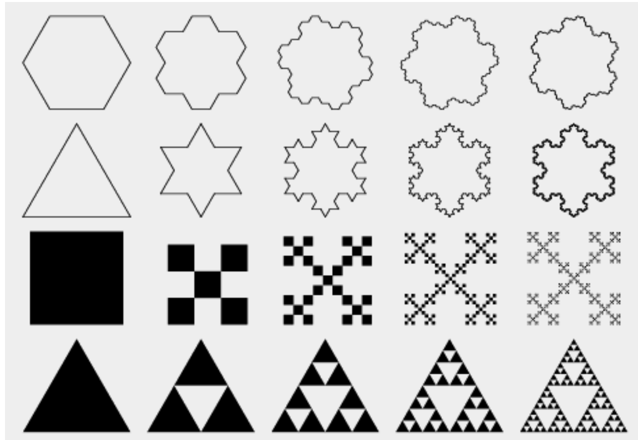

Figure 1: Példa fraktálokra különböző iterációk után. Lehet látni, hogy változik a térfogat és a felszín aránya.

1.1 Műveletek

A fraktálokkal, mint matematikai objektumokkal műveleteket is végezhetünk:

- **Projekció**: d dimenziós euklidészi térbe ágyazott D dimenziós fraktált projektálunk egy d_s dimenziós szintér eklidészi altérre:
  - ha $d_s > D$, akkor a projekció dimenzió nem változik, $D_p = D$,
  - ha $d_s < D$, akkor a projekció kitölti a rendelkezésre álló teret, $D_p = d_s$. Tehát $\mathbf{D_p} = \max(\mathbf{D}, \mathbf{d_s})$.
- **Metszet I.** : ha vesszük egy d dimenziós euklidészi térbe ágyazott D dimenziós fraktál és egy $d - m$ dimenziós szintén euklidészi tér metszetét, akkor a metszet dimenziója $\mathbf{D_i} = \mathbf{D} - \mathbf{m}$ lesz.
- **Metszet II.** : két fraktál metszetének dimenzióját a részecskék sűrűségéből tudjuk kiszámolni:
  - egy L lineáris hosszúságú szakaszon az A fraktál részecskéinek sűrűsége $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d}$, B-nek hasonlóképp,
  - mivel a két fraktál részecskéinek eloszlása független egymástól, az együttes sűrűség $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d}$, az összes részecskét pedig a teljes térre nézzük – $N_{A\cap B}(L) \sim \frac{L^{D_A} L^{D_B}}{L^d}$,
  - tehát a dimenzió leolvasható: $\mathbf{D_{A\cap B}} = \mathbf{D_A} + \mathbf{D_B} - \mathbf{d}$.
- **Unió**: két fraktál uniójának dimenzióját a nagyobbik dimenziójú fraktál fogja megadni, azaz $\mathbf{D_{A\cup B}} = \max(\mathbf{D_A}, \mathbf{D_B})$.
- **Szorzat**: két fraktál szorzatának dimenziója a fraktálok dimenziójának összege, azaz $\mathbf{D_{AB}} = \mathbf{D_A} + \mathbf{D_B}$.

1.2 Típusok

Determinisztikus fraktál Egy fraktál determinisztikus, ha önhasonló rekurzióval generálódik – azaz vagy kicseréljük a részeit önmaga lekicsinyített képével vagy önmaga felnagyított képével. Ezekre tökéletes példát mutat a 1. ábra. Például, ha harmadik sorban egységoldalúnak vesszük az első ábrát és a mellette lévőket felskálázzuk úgy, hogy az egyes négyzetek oldalai rendre egységhosszúak legyenek, akkor egy növekvő fraktált kapunk. Ennek a fraktálnak a lineáris mérete a háromszorosára, kvázi "területe", azaz a lefedéshez szükséges négyzetek száma pedig az ötszörösére nő. Ezek alapján a fraktál dimenziója:

$$D = \lim_{L\to\infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(5^k\right)}{\ln\left(3^k\right)} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465\ldots \tag{5}$$

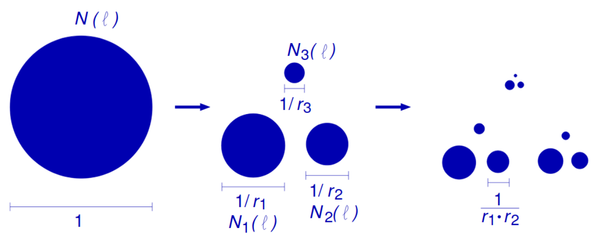

Figure 2: Példa non-uniform fraktálra.

Előfordulhat azonban, hogy nem egyenletes a másolatok nagysága – lásd 2. ábra. Ekkor ha q különböző másolatot készítünk $(r_1, r_2, \ldots, r_q)$, akkor az összes lefedéshez szükséges négyzet az elsóbb fraktálokból jön: $N(l) = \sum_{i=1}^{q} N_i(l)$. Az önhasonlóság miatt $N(l) = N_i(l/r_i)$. A fraktál definíciójából jön, hogy $N_i(l) = N(lr_i) \sim (lr_i)^{-D_B}$. Visszahelyettesítve $N(l) = \sum_{i=1}^{q} N_i(l) = \sum_{i=1}^{q} (lr_i)^{-D_B} \sim l^{-D_B}$, tehát a dimenzióra egy implicit egyenletet kapunk: $\sum_{i_1}^{q} r_i^{-D_B} = 1$.

Szotochasztikus fraktálok Hasonlóképp, mint a determinisztikus fraktáloknál, itt is van egy önhasonló rekurzió, mellyel generálódik a fraktál, azonban ekkor bejön továbbá egy random tényező. Ha a random tényező nem befolyásolja fraktál méretét, csak a struktúráját, akkor a fraktál box-counting dimenziója ugyanaz, mint a determinisztikus esetben – lásd 3. ábra.

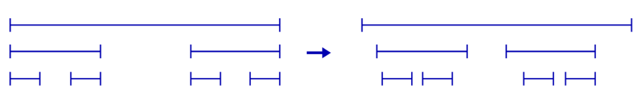

Figure 3: Sztochasztikus Cantor halmaz. Bal oldalon determinisztikus, jobb oldalon sztochasztikus formában. Észrevehető, hogy a lefedéshez szükséges négyzetek száma $(N(l))$ nem változik.

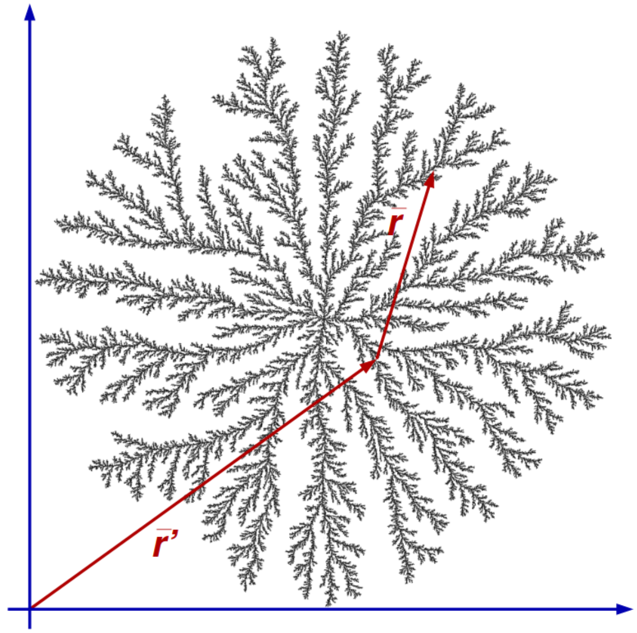

Figure 4: Diffúzió-limitált növekedés következtében kialakult random fraktálszerkezet. Ilyen lehet például egy baktériumtelep, vagy elektromos áram elvezetése fában.

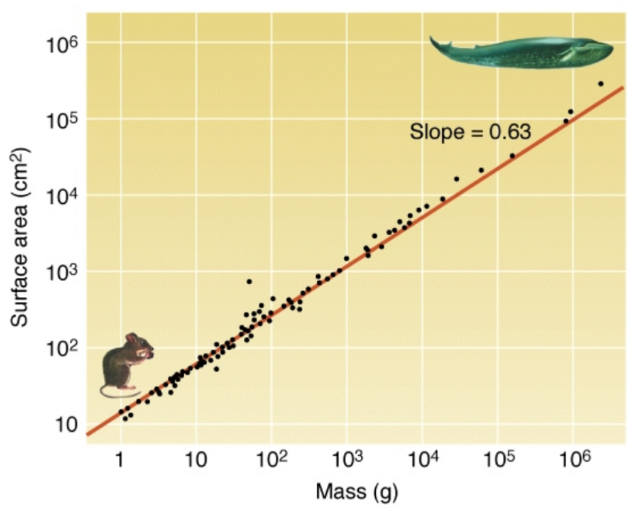

Figure 5: Az állatok tömegének és felületének összefüggése log-log skálán.

Random fraktálok A legtöbb, természetben előforduló fraktál ilyen. Ekkor nincsen iterációs szabály, és emiatt a dimenzió kiszámítása is bonyolulttá válhat, ezért célszerűbb a sűrűség-korrelációs függvényt vizsgálni:

$$C\left(\vec{\mathbf{r}}\right) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\mathbf{r}'}} \rho\left(\mathbf{r} \vec{+} \mathbf{r}'\right) \rho\left(\vec{\mathbf{r}'}\right), \tag{6}$$

ahol V a térfogat, a szumma a tér minden pontjára vonatkozik, a $\rho\left(\vec{\mathbf{r}}\right)$ pedig a sűrűségfüggvény, mely $= 1$ ha a $\vec{\mathbf{r}}$ pontban van fraktál és $= 0$ egyébként – 4. ábra. A sűrűség-korrelációs függvény izotróp testek esetében csak a sugártól függ, és amíg hétköznapi objektumokra a lépcsőfüggvény, kristályrácsra pedig diszkrét vonalak, addig fraktáloknál skálázódik:

$$C(r) \sim r^{-\alpha}. \tag{7}$$

A skálázódásra példa lehet Zipf törvénye, illetve a biológiában az allometria (élőlények tulajdonságia közötti arány). A skálázódásból fakadóan kiszámítható a fraktálhoz szükséges négyzetek száma:

$$N(L) \sim \int_0^L C(r)\, d^d r \sim L^{d-\alpha}, \tag{8}$$

melyből leolvasható, hogy $D = d - \alpha$.

2 Természetben előforduló fraktálok

2.1 Random mozgás

2.2 Lévy repülés

2.3 Aggregátumok, perkoláció

2.4 Diffűzió-limitált növekedés

2.4.1 Alapok

2.4.2 Kísérletek

2.4.3 Szimuláció

2.4.4 Fraktáldimenzió

2.4.5 Variációk

3 Sejtautomaták