

## 5. tétel

Furuglyás Kristóf

June 5, 2019

## Abstract

Fraktáldimenzió, önhasznó matematikai fraktálok, természetben előforduló fraktálok, sejtautomaták.

## 1 Fraktáldimenzió

Mindennapi objektumoknál megfigyelhető, hogy ha egyre kisebb skálán vizsgáljuk őket, az egyes tulajdonságaik konvergálnak egy adott értékhez. Fraktálok esetében azonban a kisebb felbontás nem eredményez konvergenciát; **a fraktálok határai** ugyanis végtelenül "gyűrötték" vagy "szakadásosak", azaz **nem-differenciálhatóak**. Továbbá, a fraktálok másik fontos tulajdonsága, hogy **önhasznók** – azaz különböző nagyítás mellett nézve ugyanazt az alakzatot látjuk kibontakozni. A természetben előforduló fraktálok például a **szigetek partvonalai vagy a hegyek felszíne**. Előfordulhatnak még **növekedésből származó fraktálok** is, mint például az a **növények gyökérzete vagy épp a keringési rendszer**. Ilyenkor az elégazó struktúrák valamilyen **növekedési instabilitás** váltja ki.

Megmérve bármilyen  $d$  dimenziós test a térfogatát különböző  $l$  oldalhosszúságú szintén  $d$  dimenziós (tehát  $l^d$  térfogatú) kockákkal, és feltételezve, hogy ekkor a lefedéshez szükséges kockák száma  $N(l)$ , a test téfogata:

$$V(l) = N(l) \cdot l^d. \quad (1)$$

Hétköznapi objektumoknál ha  $l \rightarrow 0$ , akkor  $V(l)$  gyorsan konvergál egy adott értékhez. Azonban **fraktálok** esetében ha  $l \rightarrow 0$ , akkor  $V(l) \rightarrow 0$ ! Ugyanakkor ezzel egyidőben a  $d - 1$  dimenziós  $S(l)$  **felszíne pedig divergál:  $S(l) \rightarrow \infty$** .

A geometriai (matematikai) fraktálok:

- olyan **önhasznó** geometriával rendelkező formák,
- ahol az önhasznóság **tetszőleges iteráción keresztül** fennáll,
- és a lefedéshez szükséges  $l$  élhosszúságú dobozok  $N(l)$  száma **nemtriviálisan skálázódik**:

$$N(l) \sim l^{-D}, \quad (2)$$

ahol  $D$  egy pozitív, nem egész szám, amely az objektum törtdimenziója, fraktáldimenziója.

Az előbbiek alapján a két oldal logaritmusát véve definiálhatjuk a fraktál **box-counting dimenzióját**:

$$D_B = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \quad (3)$$

Ugyanez érvényes akkor is, **ha a fraktál növekvő**, és annak lineáris hosszát  $L$ -vel jelöljük:

$$D_B = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L}. \quad (4)$$

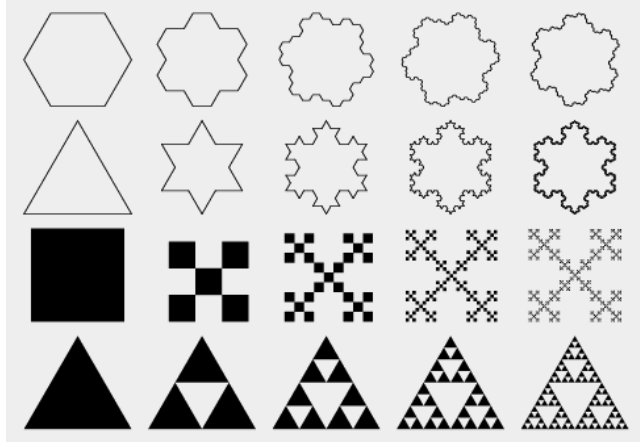


Figure 1: Példa fraktálokra különböző iterációk után. Lehet látni, hogy változik a térfogat és a felszín aránya.

## 1.1 Műveletek

A fraktálokkal, mint matematikai objektumokkal műveleteket is végezhetünk:

- **Projekció:**  $d$  dimenziós euklidészi térbe ágyazott  $D$  dimenziós fraktált projektálunk egy  $d_s$  dimenziós szintér euklidészi altérre:
  - ha  $d_s > D$ , akkor a projekció dimenzió nem változik,  $D_p = D$ ,
  - ha  $d_s < D$ , akkor a projekció kitölti a rendelkezésre álló teret,  $D_p = d_s$ . Tehát  $\mathbf{D}_p = \max(\mathbf{D}, \mathbf{d}_s)$ .
- **Metszet I.** : ha vesszük egy  $d$  dimenziós euklidészi térbe ágyazott  $D$  dimenziós fraktál és egy  $d - m$  dimenziós szintén euklidészi tér metszetét, akkor a metszet dimenziója  $\mathbf{D}_i = \mathbf{D} - \mathbf{m}$  lesz.
- **Metszet II.** : két fraktál metszetének dimenzióját a részecskék sűrűségéből tudjuk kiszámolni:
  - egy  $L$  lineáris hosszúságú szakaszon az  $A$  fraktál részecskéinek sűrűsége  $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d}$ ,  $B$ -nek hasonlóképp,
  - mivel a két fraktál részecskéinek eloszlása független egymástól, az együttes sűrűség  $\sim \frac{L^{D_A}}{L^d} \cdot \frac{L^{D_B}}{L^d}$ , az összes részecskét pedig a teljes térre nézzük –  $N_{A \cap B}(L) \sim \frac{L^{D_A} L^{D_B}}{L^d}$ ,
  - tehát a dimenzió leolvasható:  $\mathbf{D}_{A \cap B} = \mathbf{D}_A + \mathbf{D}_B - d$ .
- **Unió:** két fraktál uniójának dimenzióját a nagyobbik dimenziójú fraktál fogja megadni, azaz  $\mathbf{D}_{A \cup B} = \max(\mathbf{D}_A, \mathbf{D}_B)$ .
- **Szorzat:** két fraktál szorzatának dimenziója a fraktálok dimenziójának összege, azaz  $\mathbf{D}_{AB} = \mathbf{D}_A + \mathbf{D}_B$ .

## 1.2 Típusok

**Determinisztikus fraktál** Egy fraktál determinisztikus, ha önhasznó rekurzióval generálódik – azaz vagy kicseréljük a részeit önmaga lekicsinyített képével vagy önmaga felnagyított képével. Ezekre tökéletes példát mutat a 1. ábra. Például, ha harmadik sorban egységoldalúnak vesszük az első ábrát és a mellette lévőket felskálázzuk úgy, hogy az egyes négyzetek oldalai rendre egység-hosszúak legyenek, akkor egy növekvő fraktált kapunk. Ennek a fraktálnak a lineáris mérete a háromszorosára, kvázi "területe", azaz a lefedéshez szükséges négyzetek száma pedig az ötszörösére nő. Ezek alapján a fraktál dimenziója:

$$D = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(L)}{\ln L} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(5^k)}{\ln(3^k)} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465 \dots \quad (5)$$

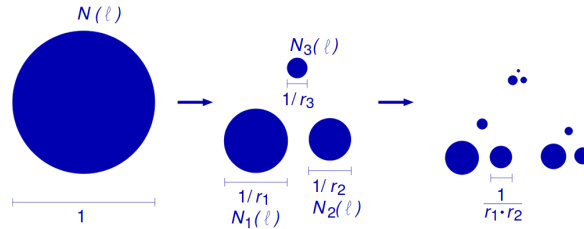


Figure 2: Példa non-uniform fraktálra.

Előfordulhat azonban, hogy nem egyenletes a másolatok nagysága – lásd 2. ábra. Ekkor ha  $q$  különböző másolatot készítünk  $(r_1, r_2, \dots, r_q)$ , akkor az összes lefedéshez szükséges négyzet az előbbi fraktálokból jön:  $N(l) = \sum_{i=1}^q N_i(l)$ . Az önhasznóság miatt  $N(l) = N_i(l/r_i)$ . A fraktál definíciójából jön, hogy  $N_i(l) = N(lr_i) \sim (lr_i)^{-D_B}$ . Visszahelyettesítve  $N(l) = \sum_{i=1}^q N_i(l) = \sum_{i=1}^q (lr_i)^{-D_B} \sim l^{-D_B}$ , tehát a dimenzióra egy implicit egyenletet kapunk:  $\sum_{i=1}^q r_i^{-D_B} = 1$ .

**Sztochasztikus fraktálok** Hasonlóképp, mint a determinisztikus fraktáloknál, itt is van egy önhasznó rekurzió, mellyel generálódik a fraktál, azonban ekkor bejön továbbá egy random tényező. Ha a random tényező nem befolyásolja a fraktál méretét, csak a struktúráját, akkor a fraktál box-counting dimenziója ugyanaz, mint a determinisztikus esetben – lásd 3. ábra.

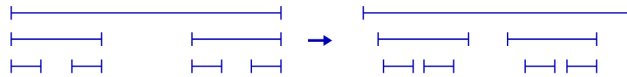


Figure 3: Sztochasztikus Cantor halmaz. Bal oldalon determinisztikus, jobb oldalon sztochasztikus formában. Észrevehető, hogy a lefedéshez szükséges négyzetek száma ( $N(l)$ ) nem változik.

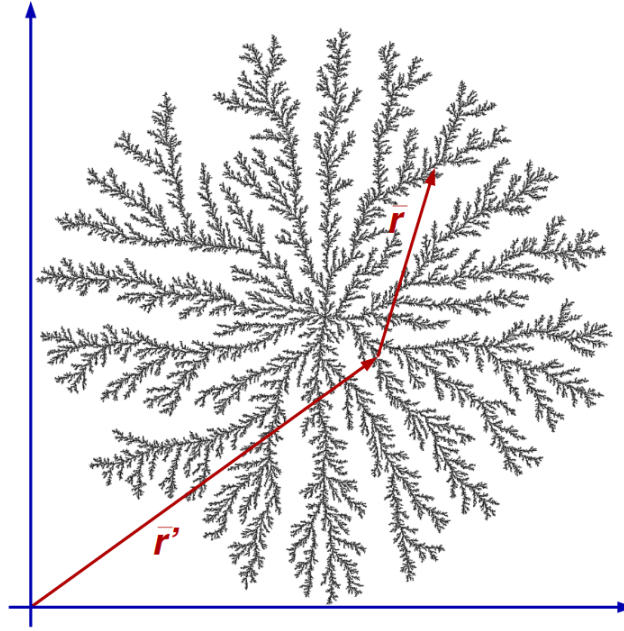


Figure 4: Diffúzió-limitált növekedés következtében kialakult random fraktálszerkezet. Ilyen lehet például egy baktériumtelep, vagy elektromos áram elvezetése fában.

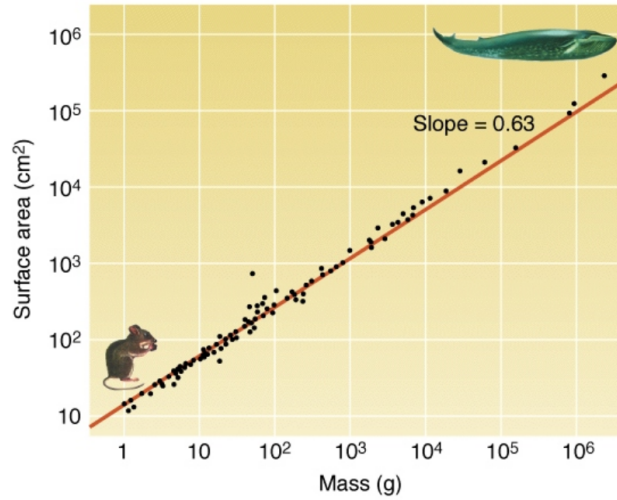


Figure 5: Az állatok tömegének és felületének összefüggése log-log skálán.

**Random fraktálok** A legtöbb, természetben előforduló fraktál ilyen. Ekkor nincsen iterációs szabály, és emiatt a dimenzió kiszámítása is bonyolulttá válhat, ezért célszerűbb a sűrűség-korrelációs függvényt vizsgálni:

$$C(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{r}'} \rho(\vec{r} + \vec{r}') \rho(\vec{r}'), \quad (6)$$

ahol  $V$  a térfogat, a szumma a tér minden pontjára vonatkozik, a  $\rho(\vec{r})$  pedig a sűrűségfüggvény, mely  $= 1$  ha a  $\vec{r}$  pontban van fraktál és  $= 0$  egyébként – 4. ábra. A sűrűség-korrelációs függvény

izotróp testek esetében csak a sugártól függ, és amíg hétköznapi objektumokra a lépcsőfüggvény, kristályrácsra pedig diszkrét vonalak, addig fraktáloknál skálázódik:

$$C(r) \sim r^{-\alpha}. \quad (7)$$

A skálázódásra példa lehet **Zipf törvénye**, illetve a biológiában az allometria (élőlények tulajdonságai közötti arány). A skálázódásból fakadóan kiszámítható a fraktálhoz szükséges négyzetek száma:

$$N(L) \sim \int_0^L C(r) d^d r \sim L^{d-\alpha}, \quad (8)$$

melyből leolvasható, hogy  $D = d - \alpha$ .

## 2 Természetben előforduló fraktálok

A természetben előforduló fraktálok többsége növekvő fraktál. Ebben a fejezetben erre fogunk példákat nézni.

### 2.1 Random mozgás

Négyzetrácson történő mozgást nézünk, ahol az egyen irányokba történő elmozdulás valószínűsége ugyanakkora. Ekkor egy dimenzióban az elmozdulásnak  $i$  lépés után  $(x_i)$  a várható értéke nulla,  $\langle x_i \rangle = 0$ ., szórása egy,  $\sigma(x_i) = 1$

### 2.2 Lévy repülés

### 2.3 Aggregátumok, perkoláció

### 2.4 Diffúzió-limitált növekedés

#### 2.4.1 Alapok

#### 2.4.2 Kísérletek

#### 2.4.3 Szimuláció

#### 2.4.4 Fraktáldimenzió

#### 2.4.5 Variációk

## 3 Sejtautomaták