

Aljabar Boole

Matematika Diskrit

Dasar Pemikiran

- ▶ Integrasi antara logika dan teori himpunan
- ▶ Ide integrasi ini merupakan konsep yang kuat
- ▶ Notasi Aljabar Boole digunakan secara luas dalam komputasi khususnya dalam desain Sirkuit Digital
- ▶ Kemajuan matematika logika serta dasar penting bagi perkembangan matematika modern, mikroelektronika teknik, bahkan ilmu komputer

Operasi Biner

- ▶ Operasi biner pada suatu himpunan X adalah fungsi dengan domain $X \times X$ dan kodomain X
- ▶ Contoh:
 - ❖ Operasi penjumlahah $f: X \times X \rightarrow X, f(x,y) = x + y$
 - ❖ Operasi konjungsi $f: \{B,S\} \times \{B,S\} \rightarrow \{B,S\}, f(p,q) = p \wedge q$

Operasi Uner

- ▶ Operasi uner pada sebuah himpunan X adalah fungsi dengan domain dan kodomain X
- ▶ Contoh:
 - ❖ Operasi akar $f : X \rightarrow X, f(x) = \sqrt{x}$
 - ❖ Operasi invers penjumlahan $f : X \rightarrow X, f(x) = -x$
 - ❖ Operasi negasi $f : \{B, S\} \rightarrow \{B, S\}, f(p) = \neg p$

Definisi Aljabar Boole

- ▶ Merupakan sebuah himpunan B
- ▶ Dapat dilakukan operasi biner pada B (dinotasikan dengan $+$ dan \times)
- ▶ Dapat dilakukan operasi uner pada B (dinotasikan dengan $'$)
- ▶ Terdiri dari dua elemen yang berbeda pada B (dinotasikan dengan 0 dan 1)

Aksioma Aljabar Boole (1)

$$\blacktriangleright x + y = y + x$$

$$\blacktriangleright x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\blacktriangleright x + (y \times z) = (x + y) \times (x + z)$$

$$\blacktriangleright x + 0 = x$$

$$\blacktriangleright x + x' = 1$$

Aksioma Aljabar Boole (2)

$$\blacktriangleright x \times y = y \times x$$

$$\blacktriangleright x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

$$\blacktriangleright x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$

$$\blacktriangleright x \times 1 = x$$

$$\blacktriangleright x \times x' = 0$$

Aljabar Boole

- ▶ Elemen-elemen dalam himpunan B tidak pernah didefinisikan
- ▶ Dapat diekspresikan sebagai logika, himpunan, atau yang lainnya
- ▶ Berlaku juga operasi penjumlahan, perkalian, dan komplemen
- ▶ Operasi yang dilakukan berbeda dengan operasi pada bilangan R

Interpretasi B dalam Logika

- ▶ Jika B berarti $\{T, F\}$ maka operasi $+$, x , dan $'$ merupakan operasi disjungsi, konjungsi, dan negasi
- ▶ Elemen 0 dan 1 berturut-turut dimaksudkan sebagai T dan F

Interpretasi B pada Himpunan

- ▶ Jika B diinterpretasikan sebagai sebuah power set $P(A)$ maka operasi $+$, \times , dan $'$ merupakan operasi gabungan, irisan, dan komplement
- ▶ Elemen 0 dan 1 diinterpretasikan berturut-turut sebagai himpunan kosong dan A

Interpretasi B pada himpunan *byte*

- ▶ Jika B merupakan himpunan semua himpunan *byte* (*string* 8 bit) maka +, x, dan ' diinterpretasikan berturut-turut sebagai operasi **or**, **and**, dan **not**
- ▶ Elemen 0 dan 1 berturut-turut diinterpretasikan sebagai byte 00000000 dan 11111111

Hukum dalam Aljabar Boole (1)

- ▶ Operasi $+$, \times , dan $'$ merupakan operasi penjumlahan, perkalian, dan komplemen
- ▶ Beberapa hukum dalam aljabar Boole tidak dicantumkan dalam definisi karena dapat diturunkan melalui aksioma

Hukum dalam Aljabar Boole (2)

Contoh:

► Buktikan bahwa: $x + x = x$

► Jawab: $x + x = (x + x) \times 1$... identitas \times
 $= (x + x) \times (x + x')$... invers $+$
 $= x + (x \times x')$... distributif
 $= x + 0$... invers \times
 $= x$... identitas $+$

Hukum dalam Aljabar Boole

$$\blacktriangleright X + X = X$$

$$\blacktriangleright (X + Y)' = X' \times Y'$$

$$\blacktriangleright X + 1 = 1$$

$$\blacktriangleright X + (X \times Y) = X$$

$$\blacktriangleright 0' = 1$$

$$\blacktriangleright X \times X = X$$

$$\blacktriangleright (X \times Y)' = X' + Y'$$

$$\blacktriangleright X \times 0 = 0$$

$$\blacktriangleright X \times (X + Y) = X$$

$$\blacktriangleright 1' = 0$$

$$\blacktriangleright X'' = X$$

Prinsip Dualitas

- ▶ Jika sebuah hukum dari aljabar Boole terbukti kebenarannya maka dual dari hukum tersebut juga pasti benar
- ▶ Suatu dual didapatkan dengan mengganti x dengan $+$ dan sebaliknya; dan 0 diganti dengan 1 dan sebaliknya

Simplifikasi Ekspresi

- ▶ Simplifikasi atau penyederhanaan ekspresi dalam aljabar Boole merupakan proses konversi ekspresi tersebut ke bentuk yang paling singkat (sederhana)
- ▶ Penyederhanaan dalam aljabar Boole dapat dilakukan dengan cara menggunakan aksioma aljabar Boole

Simplifikasi Ekspresi

Contoh:

► Sederhanakan $x \times (x \times y')'$

► Jawab:
$$\begin{aligned} x \times (x \times y')' &= x \times (x' + y'') \\ &= x \times (x' + y) \\ &= (x \times x') + (x \times y) \\ &= 0 + (x \times y) \\ &= x \times y \end{aligned}$$

▶ $(x + y)' = x' \times y'$; $x=0, y=0$

▶ $(0+0)' = 0' \times 0'$

▶ $1 = 1$

▶ $(x + y)' = x' \times y'$; $x=1, y=0$

▶ $((1+0)' = 1' \times 0'$

▶ $0 = 0$

Terima Kasih

**Jadilah orang seperti
Bilangan Biner
Karna Bilangan Biner
itu pasti,,
"YA" atau "TIDAK"**

by: firdauzalee