DOMANDE E RISPOSTE
SULLA RAPPRESENTAZIONE (FITTING)
DEI DATI

1) CHE COSA SI INTENDE PER INTERPOLAZIONE POLINOMIALE?

L'interpolazione polinomiale è l'interpolazione di una serie di valori con una funzione polinomiale che passa per i punti. In particolare, un qualsiasi di n+1 punti distinti può essere sempre interpolato da un polinomio di grado n che assume esattamente il valore dato in corrispondenza dei punti iniziali.

2) PER QUALI CASI SI ADOPERA L'INTERPOLAZIONE A TRATTI?

Se il numero dei nodi di interpolazione è elevato, il polinomio interpolante non fornisce in generale un modello accettabile. Infatti, al crescere del numero di punti aumenta il grado del polinomio interpolante ed aumentano anche le oscillazioni del polinomio corrispondente (unico problema gli spigoli). Ecco perchè risolviamo tale problema con la SPLINE.

3) CHE COS'E' IL PROBLEMA DELL'APPROSSIMAZIONE?

Dati n valori distinti detti nodi ed n valori corrispondenti si vuole determinare una funzione f (detta funzione approssimante) la cui distanza nei nodi dai valori sia minima, la scelta della misura di tale distanza qualifica il problema di approssimazione qualificato.

4) IN GENERALE QUALE MODELLO SI PREFERISCE UTILIZZARE PER IL FITTING DI DATI AFFETTI DA ERRORE NON TRASCURABILE? PERCHE'?

Per errore non trascurabile è meglio usare un modello approssimante, perchè la funzione ha valori la cui distanza dai nodi sia opportunamente piccola.

5) IL POLINOMIO INTERPOLANTE RISULTA SEMPRE IL PIU' ATTENDIBILE PER IL FITTING DI DATI, RISPETTO AD UN MODELLO APPROSSIMANTE? MOTIVARE LA RISPOSTA, DESCRIVENDO BREVEMENTE ALMENO UN ALTRO MODELLO INTERPOLANTE ED UNO APPROSSIMANTE ED IN QUALI IPOTESI POTREBBE ESSERE NECESSARIO UTILIZZARE L'UNO O L'ALTRO.

No, la scelta del modello dipende dal problema, in un caso in cui l'errore sui dati non è trascurabile e non è necessario passare per tutti i punti, come l'approssimazione dei minimi quadrati.(costante elastica molla). Invece si deve usare il modello interpolante quando l'errore è trascurabile come nella descrizione di un profilo di un catamarano.

6) QUAL E' LA COMPLESSITA' DI TEMPO ASINTOTICO RICHIESTA DAL CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLA FORMULA DI NEWTON PER IL POLINOMIO INTERPOLANTE DI LAGRANGE?

T(n) = n(n-1)/2 flop → T(n) = O(n^2) flop.

7) ENUNCIARE LA FORMULAZIONE GENERALE DEL PROBLEMA DI INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE, PARTICOLARIZZARE POI, LE CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE SULL'INSIEME DEI NODI.

Assegnati n punti Pn = (Xn,Yn) nel piano diversi tra loro, l'interpolazione di Lagrange determina per quali valori di m esiste ed è unico il polinomio p(x) = amx^m + am-1x^(m-1) +...+ a0 di grado al più m, e dati n nodi distinti (Xi) i=1...n ed n valori (Yi) i=1....n, le condizioni di interpolazione di Lagrange determinano una funzione tale che f(xi) = yi , i=1.....n.

8) SOTTO QUALI CONDIZIONI IL POLINOMIO DI LAGRANGE INTERPOLANTE I NODI ASSEGNATI E' UNICO?

Dati n nodi Xi …Xn distinti ed n valori corrispondenti Yi....Yn il polinomio p di grado al più m tale che
p(xi) = yi, i = 1...n
è unico se m <= n-1.

9) SCRIVERE L'ESPRESSIONE DEL POLINOMIO, RAPPRESENTANDOLO ATTRAVERO LA FORMULA DI NEWTON(ESPRIMENDO I COEFFICIENTI IN FUNZIONE DI DIFFERENZE DIVISE).

Considerato il polinomio Qk = y[x1,x2....xk+1] esprimento i coefficienti K-ima ak in funzione delle differenze divise si ha:
p(x) = y[x1] + y[x1,x2](x - x2) +......+ y[x1.....xn](x – x1)(x-x2)......(x - xn-1)

10) ESPRIMERE IL POLINOMIO DI LAGRANGE CON L'AGGIUNTA DI UN PUNTO A PARTIRE DAL POLINOMIO PRECEDENTE.

P(x) = y[x1] + y[x1,x2](x1-x2) + y[x1,x2,x3] (x-x1)(x-x2).
Q(x) = p(x) + a4(x-x1)(x-x2)(x-x3).

11) SCRIVERE L'ALGORITMO DI HORNER:

var: n : intero { *numero dei punti* }
var: $x(n)$: array di reali { *nodi di interpolazione* }
var: $\tilde{x}$: reale { *punto in cui si richiede* }
{ *la valutazione del polinomio* }
var: $a(n)$: array di reali { *coefficienti del polinomio* }
{ *interpolante* }

/# PARAMETRI DI OUTPUT:
var: p : reale { *valore del polinomio in* $\tilde{x}$ }

/# VARIABILI LOCALI:
var: i : intero

/# INIZIO ISTRUZIONI:

$p := a(n);$
for $i = n-1, 1$ step -1 do
$p := p \cdot (\tilde{x} - x(i)) + a(i);$
endfor
end Horner_Newton

12) QUAL E' LA COMPLESSITA' DI TEMPO DELL'ALGORITMO DI HORNER?

T(n) = O(n) Flop.

13) DESCRIVERE ALMENO UNO SCHEMA DI COSTRUZIONE DELLA TABELLA DELLE DIFFERENZE DIVISE PER IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLA FORMULA DI NEWTON PER IL POLINOMIO INTERPOLANTE DI LAGRANGE.

Schema di AITKEN:

x_i	y_i	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$\cdots$	$k=n-1$
x_1	y_1					
		$y[x_1,x_2]$				
x_2	y_2		$y[x_1,x_2,x_3]$			
		$y[x_2,x_3]$				
x_3	y_3					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$y[x_1,x_2,\ldots,x_n]$
x_{n-2}	y_{n-2}					
		$y[x_{n-2},x_{n-1}]$				
x_{n-1}	y_{n-1}		$y[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$			
		$y[x_{n-1},x_n]$				
x_n	y_n					

Differenze Divise:
y[x1,x2] = y2-y1/x2-x1
y[x2,x3] = y3-y2/x3-x2
y[x1,x2,x3] = y[x2,x3] – y[x1,x2]/x3-x1
y[x2,x3,x4] = y[x3,x4] – y[x2,x3]/x4-x2
y[x1,2,x3,x4] = y[x2,x3,x4] – y[x1,x2,x3]/x4-x1

14) CHE COS'E' LO SPLINE?

Una SPLINE è una funzione, costituita da un insieme id polinomi raccordati tra loro, il cui scopo è interpolare in un intervallo un insieme di punti (detti nodi della SPLINE), in modo da essere continua (almeno fino ad un dato ordine di derivate) in ogni punto dell'intervallo.
Definizione (incompleta):
Sia data A = {a=x0 < x1 <....< xn = b} una suddivisione dell'intervallo chiuso [a,b]. Una funzione SPLINE di grado p con nodi nei punti xi con i=0,1,2....n è una funzione su [a,b] indicata con sp(x) tale che nell'intervallo [a,b] si abbia:
1) In ogni sottointervallo [xi,xi+1] con i = 0,1,2....n-1 la funzione sp(x) è un polinomio di grado p.2).
2) La funzione sp(x) e le sue prime p 1 derivate sono continue.

15) DESCRIVERE BREVEMENTE L'ALGORITMO IMPLEMENTATO PER LA COSTRUZIONE DELLA SPINE CUBICA NATURALE INTERPOLANTE I NODI ASSEGNATI E LA SUA COMPLESSITA' DI TEMPO:

- **Ordinamento dei nodi e dei valori corrispondenti.**
- **Costruzione di A e del vettore dei termini noti con A tridiagonale, ben condizionata.**
- **Risoluzione del sistema in tempo lineare T(n) = O(n) flop.**