

DOMANDE E RISPOSTE SULLA QUADRATURA

1) DARE LA DEFINIZIONE DI FORMULA DI QUADRATURA:

Fissata una funzione integrabile nel senso di Riemann ed un interno n , dati n punti detti pesi X_i appartenenti a $[a,b]$ detti nodi ed n valori A_i detti pesi, la combinazione lineare:

$$Q[f] = A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n)$$

è detta formula di quadratura.

2) CHE COS E' L'ERRORE DI DISCRETIZZAZIONE?

La differenza tra $E[f] = I[f] - Q[f] = \int_a^b f(x) dx - \text{sommatoria da } i=1 \text{ a } n \text{ di } A_i f(x_i)$ è l'errore di discretizzazione della formula di quadratura $Q[f]$.

3) QUANDO LA FORMULA DI QUADRATURA SI DICE ESATTA?

I nodi e i pesi sono scelti in modo da minimizzare l'errore (discretizzazione), una misura di tale errore è dato dal grado di precisione. Un modo pratico di calcolarlo è determinare una classe di funzioni per la quale la formula risulti esatta. Generalmente tale classe è quella dei polinomi per cui la formula si dice esatta di grado k .

4) SCRIVERE L'ESPRESSIONE DELLA FORMULA TRAPEZOIDALE COMPOSITA, $T_m[f]$, SU m SOTTOINTERVALLI, PER IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DEFINITO DI f :

$$T_m[f] = h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2} \right) \quad \text{con } h = \frac{b-a}{m} \quad x_0 = a, x_m = b, x_i = a + i \cdot h$$

5) FORNIRE UNA STIMA CALCOLABILE DELL'ERRORE DI DISCRETIZZAZIONE $E_4[f]$ DELLA FORMULA TRAPEZOIDALE COMPOSITA $T_4[f]$:

$$E_m[f] = T_m[f] - I[f] = E_{2m}[f] = T_{2m}[f] - I[f]$$

$$T_{2m}[f] = T_{2m}[f] - T_m[f]$$

3

6) QUANDO DUE FORMULE DI QUADRATURA SONO DI TIPO INNESTATO?

Due formule $Q_1[f]$ e $Q_2[f]$ relative ad uno stesso intervallo, tali che l'insieme dei nodi di $Q_1[f]$ è contenuto nell'insieme dei nodi di $Q_2[f]$, costituiscono una coppia di formule innestate.

7) CHE VANTAGGIO COMPORTANO LE FORMULE DI TIPO INNESTATO?

La disponibilità di formule di tipo innestato è particolarmente utile per ridurre la complessità computazionale delle formule di quadratura. Infatti essa è determinata attraverso il numero di valutazioni della funzione integranda dei nodi X_i , perchè il numero di operazioni relative a tale calcolo è predominante.

8) PER QUALI FORMULE DI QUADRATURA E' POSSIBILE FORNIRE UNA STIMA CALCOLABILE DELL'ERRORE DI DISCRETIZZAZIONE? COSA RAPPRESENTA TALE STIMA?

Per le formule di quadratura di tipo innestato.

9) DESCRIVERE PERCHE' NELLO SVILUPPO SOFTWARE MATEMATICO PER LA QUADRATURA, CONVIENE UTILIZZARE FAMIGLIE DI FORMULE DI QUADRATURA COMPOSITA, DI TIPO INNESTATO:

Poiché l'efficienza maggiore si raggiunge quando l'algoritmo calcola un risultato soddisfacente i requisiti di accuratezza con il minor numero di valutazioni di $f(x)$, le formule composite utilizzate in algoritmi di quadratura sono tali che, ad ogni passo dell'algoritmo, è possibile riutilizzare, tutte o quasi, le informazioni ottenute nei passi precedenti in modo tale da ridurre il numero di valutazioni della funzione integranda. In particolare le formule più utilizzate sono quelle di tipo innestato come ad esempio le formule trapezoidali composite ottenute raddoppiando ad ogni passo il numero di intervalli.

10) LE FORMULE SONO DI TIPO INNESTATO?

Sì. Le formule composite utilizzate in algoritmi di quadratura sono tali che, ad ogni passo dell'algoritmo, è possibile riutilizzare, tutte o quasi, le informazioni ottenute nei passi precedenti in modo tale da ridurre il numero di valutazioni della funzione integranda.

In particolare le formule più utilizzate sono quelle di tipo innestato come ad esempio le formule trapezoidali composite ottenute raddoppiando ad ogni passo il numero di intervalli.

11) SI DESCRIVA LA DIFFERENZA TRA STRATEGIA ADATTIVA E NON ADATTIVA:

Un algoritmo adattivo è un algoritmo che sceglie dinamicamente la distribuzione dei nodi, in maniera da adottare il partizionamento dell'intervallo dell'integrazione al particolare andamento della funzione integranda. Mentre un algoritmo in cui l'insieme dei nodi è scelto secondo uno schema fissato indipendente dalla funzione integranda è detto algoritmo non adattivo.

12) SE SI UTILIZZA UNA STRATEGIA ADATTIVA (LOCALE O GLOBALE) PER IL CALCOLO NUMERICO DI UN INTEGRALE DEFINITO, CON QUALE STRUTTURA DINAMICA SI DEVE IMPLEMENTARE TALE STRATEGIA ED IN QUALE ORDINE DEVONO ESSERE MEMORIZZATI, NELLA STRUTTURA DINAMICA, GLI INTERVALLI ESAMINATI SECONDO LA STRATEGIA IMPLEMENTATA?

Se si vuole implementare una strategia adattiva globale si deve usare una lista ordinata, dove vengono conservate le informazioni relative a tutti gli intervalli esaminati, ed i cui intervalli sono memorizzati in ordine decrescente in base alla grandezza dell'errore di discretizzazione (e l'intervallo da dividere si trova sempre in testa alla lista).

Viceversa l'implementazione di una strategia adattiva locale si può realizzare mediante una pila costruita inserendo durante ogni suddivisione i due intervalli così ottenuti nella testa della pila, prima quello di destra e poi quello di sinistra (e l'intervallo da esaminare si trova sempre nella testa della pila).

13) CONFRONTARE LA STRATEGIA LOCALE CON LA STRATEGIA GLOBALE IN TERMINI DI EFFICIENZA E DI OCCUPAZIONE DI MEMORIA RICHIESTA:

La strategia Globale ha un vantaggio perché fa poche valutazioni della funzione integranda, ma come svantaggio sfrutta molta memoria, mentre quella Locale esegue molte valutazioni e quindi è pesante in termini di efficienza computazionale, anche se occupa poca memoria perché conserva informazioni solo quando la tolleranza è soddisfatta.

14) DA CHE COSA DIPENDE LA COMPLESSITA' DI TEMPO DI UN ALGORITMO PER IL CALCOLO DI UNA FORMULA DI QUADRATURA?

Il tempo dipende dalla tolleranza da dover soddisfare e anche dal massimo numero di valutazioni date.