Calcolo Numerico
a.a. 2010/11
Prof. L.D'Amore
Esercitazione del 23 maggio 2011

Interpolazione polinomiale di Lagrange

1. **Scrivere un elemento di software matematico in `C`, relativo alla *Costruzione e valutazione del polinomio interpolante di Lagrange rappresentato con la formula di Newton***, strutturato come segue:

   (a) **Controllo** sulla presenza di **nodi coincidenti**; in questo caso non è possibile il calcolo dei coefficienti del polinomio interpolante mediante differenze divise, l'esecuzione del programma deve terminare;

   (b) **costruzione** del polinomio interpolante di Lagrange, secondo uno schema a scelta (Aitken o Neville);

   (c) **valutazione** dello stesso polinomio mediante l'**algoritmo di Horner**, per la **valutazione di un polinomio rappresentato nella formula Newton** (in cui gli elementi del vettore a **devono essere memorizzati in ordine di potenze** <u>crescenti</u>):

   > **procedure** Horner
   > $\vdots$
   > $p := a(n);$
   > for $i = n - 1$ to 1 step -1 do
   > $p := p \cdot (z - x(i)) + a(i);$
   > endfor
   > $\vdots$
   > **end** Horner

   L'elemento di software realizzato deve prevedere, come dati di input,

   - il numero, n, dei coefficienti del polinomio,
   - il punto, z, in cui si desidera valutare il polinomio,
   - il vettore $a(n)$ dei coefficienti del polinomio da valutare.

   (d) Senza rieseguire il calcolo dei coefficienti già determinati, raffinare l'eleborato con la possibilità di far fronte alle seguenti **richieste**:

   i. **aggiunta di nuovi punti di valutazione**;
   ii. **aggiunta di uno (o più) nodi** di costruzione; in tal caso il programma deve
      A. procedere aggiornando il valore di n, $n = n + num$, con num numero dei nodi aggiunti, e riallocare opportunamente i vettori dei nodi e dei valori corrispondenti;
      B. per ciascuno dei nodi aggiunti calcolare l'unico coefficiente del polinomio interpolante $n + 1$ nodi a partire dai coefficienti, già calcolati, del polinomio interpolante n nodi. Calcolare le differenze divise sfruttando i coefficienti già calcolati (opportunamente sovrascritti alle ordinate assegnate in input);
      C. valutare il nuovo polinomio costruito.

   Si confrontino i risultati forniti dall'elemento di software costruito con quelli ottenuti mediante funzioni `matlab` (ved. **Punto 2**).

2. **Costruzione e valutazione del polinomio interpolante di Lagrange ("espresso nella base standard") mediante funzioni `matlab`.**

   In `matlab` i polinomi nella base standard si rappresentano attraverso i loro coefficienti, memorizzati (in ordine di potenze **<u>decrescenti</u>**) in vettori riga; ad esempio il polinomio

$$p1(s) = s^3 + 4s^2 + 2s + 5$$

   si rappresenta con il vettore $c_1 = [1 \quad 4 \quad 2 \quad 5]$, mentre, includendo i coefficienti nulli:

$$p2(s) = s^3 + 1$$

   si rappresenta con $c_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$.

   Assegnato un vettore di n nodi ed uno di n valori corrispondenti,

$$\mathtt{x} = [.........], \qquad \mathtt{y} = [.........]$$

la funzione `matlab polyfit` calcola i coefficienti di un polinomio di grado assegnato dall'utente, q, che realizza il *fitting* dei dati, mediante l'istruzione

$$\texttt{c} = \texttt{polyfit}(\texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{q})$$

In base al valore di q il polinomio costruito sarà

- l'unico polinomio interpolante i nodi assegnati;
- un polinomio approssimante nel senso dei minimi quadrati (retta, parabola, ...);
- uno degli infiniti polinomio passanti per i punti assegnati.

- Per quale valore di q la funzione calcola i coefficienti dell'unico polinomio di Lagrange interpolante i nodi assegnati?
- Costruire quest'ultimo calcolandone i coefficienti nella base standard, ponendo particolare attenzione all'ordine con cui sono memorizzati i coefficienti nella variabile di output, `coeff`, mediante la funzione:

  $$\texttt{coeff} = \texttt{polyfit}(\texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{n})$$

- Valutare, in corrispondenza di un'ascissa o di un vettore di ascisse z, il polinomio costruito mediante la funzione `polyval`:

  $$\texttt{pz} = \texttt{polyval}(\texttt{coeff}, \texttt{z})$$

3. **Grafico del polinomio interpolante:** Scrivere uno script `matlab` in cui,

   - assegnare un insieme di n nodi e di n valori corrispondenti:

     $$\texttt{x} = [.........], \qquad \texttt{y} = [.........]$$

   - costruire l'unico polinomio di Lagrange di grado $n-1$, interpolante i nodi:

     $$\texttt{c} = \texttt{polyfit}(\texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{n} - 1)$$

     Il vettore c contiene i coefficienti del polinomio di grado $n-1$, **rappresentato nella base standard**.

- Assegnare gli estremi di un intervallo in cui si intende valutare il polinomio ed il numero m dei punti di valutazione:

$$\mathtt{a} = ..., \quad \mathtt{b} = ..., \quad \mathtt{m} = ...$$

- Valutare il polinomio in corrispondenza degli m punti di valutazione $z(i)$, componenti del vettore z:

$$\mathtt{z} = [\mathtt{a} : \mathtt{h} : \mathtt{b}], \quad h = (b - a)/(m - 1)$$

  Il vettore delle valutazioni del polinomio interpolante in corrispondenza delle componenti di z sarà

$$\mathtt{pz} = \mathtt{polyval}(\mathtt{c}, \mathtt{z})$$

- Si tracci il grafico del polinomio attraverso le coppie (z, pz):

$$\mathtt{plot}(\mathtt{z}, \mathtt{pz})$$

Eseguire una serie di test scegliendo discretizzazioni più o meno fitte dell'intervallo di valutazione (variando m). Cosa si può osservare sulla regolarità della curva tracciata?

4. **§3.8.1 di *A.Murli - Matematica numerica: metodi, algoritmi e software, Parte 1, Ed. Liguori*: Esercizi 1,2,3,4,5,6.**