Calcolo Numerico
a.a. 2010-11
Prof. L.D'Amore
Esercitazione del 4 aprile 2011

Risoluzione numerica di sistemi lineari

1. Si scriva un elemento di software matematico in C per la risoluzione di un sistema lineare, **triangolare superiore o inferiore**, costituito da:

   – un programma chiamante;

   – un elemento di software che, assegnata una matrice, verifichi se essa è diagonale o triangolare ed, in questo ultimo caso, se è *triangolare superiore o inferiore*, segnalando l'informazione all'utente;

   – un elemento di software per la risoluzione di un sistema diagonale;

   – un elemento di software per la risoluzione di un sistema triangolare superiore, mediante *back-substitution*;

   – un elemento di software per la risoluzione di un sistema triangolare inferiore, mediante *forward substitution*.

2. **dal libro A.Murli - Matematica numerica: metodi, algoritmi e software, Parte 1, Ed. Liguori**

   - Studiare i paragrafi 2.14.1, 2.14.2, 2.14.3. Testare il programma realizzato confrontando i risultati ottenuti applicando l'operatore "\ " di `matlab` (o `octave`, `Scilab`,...)[1].
   - **Esercizi di algebra lineare**: §2.16.1,
     – Esercizio 1.

Metodo di eliminazione di Gauss:

1. Si scriva un elemento di software matematico in C per la risoluzione di un sistema lineare, costituito da:

   – un programma chiamante;

   – un elemento di software per l'implementazione del *metodo di eliminazione di Gauss*;

[1] Si digiti `help mldivide` nell'ambiente `matlab` (o `octave`, `Scilab`,...) per informazioni sull'utilizzo.

- un elemento di software per la risoluzione di un sistema triangolare superiore, mediante *back-substitution*.

2. Testare il programma realizzato confrontando i risultati ottenuti applicando l'operatore "\ " di `matlab` (o mediante `octave`, `Scilab`,...).

3. Dopo essersi accertati che il software funziona correttamente, provare a risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 12 \\ 8x_1 + 64x_2 + 8x_3 = -8 \\ 8x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 - 10x_3 = -20 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20x_3 = 40 \\ -5x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0.0001x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Verificare, con opportune stampe, il valore dell'elemento diagonale $a_{kk}^{(k-1)}$ e quello dei relativi moltiplicatori, ad ogni passo.

a) Cosa si puó osservare, nel caso in cui un moltiplicatore risulta nullo?

b) Cosa si puó osservare, nel caso in cui un elemento diagonale, risulta nullo?

Metodo di eliminazione di Gauss con e senza pivoting:

1. Si raffini l'elemento di software per la risoluzione di un sistema lineare mediante metodo di eliminazione di Gauss,

   - implementando tale metodo *con pivoting parziale*;
   - inserendo un controllo sull'individuazione di un *pivot* nullo; si facciano considerazioni opportune su come procede, in tal caso, l'algoritmo;
   - inserendo un controllo sull'individuazione di un *moltiplicatore* nullo; si facciano considerazioni opportune su come procede, in tal caso, l'algoritmo;

  – inserendo opportuni controlli nel sottoprogramma che implementa la back-substitution, per testare se il sistema è compatibile (determinato o indeterminato) o incompatibile. Restituire, al chiamante, un indicatore di errore che segnali all'utente se il sistema è *compatibile* (eventualmente *indeterminato*) o *incompatibile.*

- Studiare la singolarità della matrice dei coefficienti e la compatibilità del sistema $Tx = b$ con

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 10 \\ 15 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

2. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6 \\ 9x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \qquad\quad 12x_2 + \ \ 6x_3 + 24x_4 & = -18 \\ 6x_1 - 6x_2 - 12x_3 & = \ \ 0 \\ 6x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + 36x_4 & = -12 \\ -6x_1 + 18x_2 + 12x_3 & = \ \ 0 \end{cases}$$

3. **Discutere l'esistenza di soluzioni** dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 6 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 12 \\ 12x_1 + 3x_2 - 18x_3 = 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ 4x_1 + 14x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 28 \\ 6x_1 + 16x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 34 \\ 10x_1 + 18x_2 - 40x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

4. Risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando un elemento di software matematico che implementi il metodo di eliminazione di Gauss, **con e senza pivoting** e confrontare i risultati:

$$\begin{cases} 4x_1 + \ \ 12x_2 + 4x_3 = 12 \\ 8x_1 + \ \ 64x_2 + 8x_3 = -8 \\ \qquad\quad 8x_2 + 8x_3 = -24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 - 10x_3 = -20 \\ 10x_1 + 10x_2 - 20x_3 = 40 \\ -5x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \qquad\quad 4x_2 + \ \ 2x_3 = \ \ 6 \\ -2x_1 + \ \ 2x_2 \qquad\quad = \ \ 4 \\ 4x_1 - \ \ 2x_2 + \ \ 6x_3 = \ \ -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0.0001x_1 \ \ + x_2 = \ \ 1 \\ \qquad\quad x_1 \ \ + x_2 = \ \ 2 \end{cases}$$

5. **dal libro A.Murli - Matematica numerica: metodi, algoritmi e software, Parte 1, Ed. Liguori**

    - **Esercizi sul metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale**, §2.16.2:

        - sezione Esercizi relativi al §2.5.2: Esercizi 1,2,5.
        - sezione Esercizi relativi al §2.5.3: Esercizio 1.
        - sezione Esercizi relativi al §2.5.4: Esercizi 1,2,3,5,6, 7 (utilizzando la precisione del calcolatore).