Calcolo Numerico

Prof.ssa L. D'Amore

a.a. 2010/11

14 marzo 2011

Studio della stabilità di algoritmi per il calcolo delle cifre di π: metodi di Archimede, Viete, Leibniz

Computer Problems: Sviluppare elementi di software matematico, in *linguaggio C*, per l'implementazione dei metodi:

- di Archimede,
- di Viete,
- di Leibniz,

per il calcolo di π.

Per ciascuno di essi, detto n, tale che 2^n sia il numero di lati di un poligono inscritto in una circonferenza di raggio 1, e assegnato, in input, un massimo valore per n ed una tolleranza sull'errore:

- stimare l'errore di troncamento analitico commesso nell'approssimazione di π;
- calcolare l'errore relativo commesso nell'approssimazione di π, confrontando il valore restituito da ciascuno degli elementi di software elaborati con quello ottenuto utilizzando la funzione *built-in* `atan`, calcolando π come:

$$\pi = 4 * \texttt{atan}(1.)$$

- Definire un opportuno criterio di arresto che tenga conto di un massimo numero di lati, assegnato dall'utente e di una tolleranza sull'errore relativo.

- Eseguire una serie di **test e considerazioni**, al fine di evidenziare e confrontare: la stabilità o instabilità dei metodi, nonché la velocità di convergenza di ciascuno di essi.

Esercizi tipo prova d'esame:

1. Sviluppare un elemento di software matematico, che implementi il metodo di Leibniz, per il calcolo di π.

   (a) Assegnato l'ordine dello sviluppo in serie di Mc Laurin della funzione $arctg(x)$, n, calcolare l'errore di troncamento analitico stimato per la somma dei primi 100 addendi. *Specificare la precisione utilizzata.*

   (b) Detto p il valore di π calcolato mediante software e pi quello ottenuto utilizzando la funzione *built-in* `atan`, $pi = 4 * \texttt{atan}(1.)$, calcolare, per la somma dei primi 100 addendi, l'errore relativo:

   $$errRel = \frac{|pi - p|}{|pi|}$$

   (c) L'algoritmo descritto è stabile? Perché?

   (d) È noto un metodo numerico il cui algoritmo risulti computazionalmente vantaggioso rispetto al metodo di Leibniz, per il calcolo di π? Motivare la risposta.

2. Sviluppare *in doppia precisione* un elemento di software matematico, che implementi il metodo di Archimede, per il calcolo di π.

   (a) Assegnato n, con 2^n numero di lati di un poligono inscritto nella circonferenza di raggio unitario, descrivere un criterio di arresto per l'elemento di software che consenta all'utente di richiedere un'accuratezza sulla stima di π e un limite sul costo computazionale richiesto dall'algoritmo.

   (b) Arrestare l'implementazione quando $n = 12$. Stampare i valori dell'errore di troncamento analitico stimato e dell'errore relativo commesso nel calcolo dell'approssimazione di π.

   (c) L'algoritmo descritto è stabile? Perché?

(d) È noto un metodo numerico il cui algoritmo risulti computazionalmente *più o meno* vantaggioso rispetto al metodo di Archimede, per il calcolo di π? Motivare la risposta.

3. Ripetere l'esercizio precedente, utilizzando il metodo di Viete.

4. Realizzare un elemento di software in **C** o in ambiente Matlab basato sulla formula:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

tale che, assegnata una tolleranza relativa $tol = 10^{-8}$, calcoli un approssimazione p di $\pi/4$, tale che

$$\frac{|\pi - p|}{|\pi|} < 10^{-8}$$

(a) Quante iterazioni sono necessarie per raggiungere l'accuratezza richiesta dall'esercizio?

(b) Cosa si può osservare sulla stabilità e sulla velocità di convergenza del metodo?