

# Lecture Notes 2

2025 年 8 月 14 日

## 1 第二章 贝尔曼公式

### 1.1 状态值及其定义

\* 数学直观: return 为什么是重要的?

**return** 可以用来量化并评估某个 policy 是否是“好的”

$v$  为状态值,  $r$  为当前状态的 reward,  $P$  为与状态空间有关的矩阵, 表明不同状态之间的关系

**状态值**: state value, 是在采用某策略的条件下, 某个状态出发得到的 return 的数学期望

$$v_{\pi}(s) = \mathbb{E}[G_t | S_t = s]$$

\* 状态值和 return 的区别: return 是根据某一条 trajectory 得到的确定的值, 而状态值是一个符合概率分布的随机变量

### 1.2 贝尔曼公式的数学推导过程

贝尔曼公式的一般形式:

$$v_{\pi}(s) = \mathbb{E}[G_t | S_t = s]$$

$$\begin{aligned} v_{\pi}(s) &= \mathbb{E}[G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} | S_t = s] + \gamma \mathbb{E}[G_{t+1} | S_t = s] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_{t+1}|S_t = s] &= \sum_a \pi(a|s) \mathbb{E}[R_{t+1}|S_t = s, A_t = a] \\ &= \sum_a \pi(a|s) \sum_r p(r|s, a) r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_{t+1}|S_t = s] &= \sum_{s'} \mathbb{E}[G_{t+1}|S_t = s, S_{t+1} = s'] p(s'|s) \\ &= \sum_{s'} \mathbb{E}[G_{t+1}|S_{t+1} = s'] p(s'|s) \\ &= \sum_{s'} v_\pi(s') p(s'|s) \\ &= \sum_{s'} v_\pi(s') \sum_a p(s'|s, a) \pi(a|s)\end{aligned}$$

总结:

$$\begin{aligned}v_\pi(s) &= \mathbb{E}[R_{t+1}|S_t = s] + \gamma \mathbb{E}[G_{t+1}|S_t = s], \\ &= \underbrace{\sum_a \pi(a|s) \sum_r p(r|s, a) r}_{\text{mean of immediate rewards}} + \underbrace{\gamma \sum_a \pi(a|s) \sum_{s'} p(s'|s, a) v_\pi(s')}_{\text{mean of future rewards}}, \\ &= \sum_a \pi(a|s) \left[ \sum_r p(r|s, a) r + \gamma \sum_{s'} p(s'|s, a) v_\pi(s') \right], \quad \forall s \in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

贝尔曼公式用于计算某个状态的状态值。描述了不同状态的状态值之间的关系

- \* 贝尔曼公式对状态空间的所有状态都适用
- \* 通过求解状态值, 可以用来评估 policy (即公式中的  $\pi$ )
- \* 公式中的  $p(r|s, a)$  和  $p(s'|s, a)$  代表 dynamic model (或 environment model)
- \* 通过对比不同策略下同一个状态的状态值, 就可以知道相对而言策略的好坏

### 1.3 贝尔曼公式的矩阵-向量形式

以大小为 4 的状态空间为例：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_\pi(s_1) \\ v_\pi(s_2) \\ v_\pi(s_3) \\ v_\pi(s_4) \end{bmatrix}}_{v_\pi} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_\pi(s_1) \\ r_\pi(s_2) \\ r_\pi(s_3) \\ r_\pi(s_4) \end{bmatrix}}_{r_\pi} + \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} p_\pi(s_1|s_1) & p_\pi(s_2|s_1) & p_\pi(s_3|s_1) & p_\pi(s_4|s_1) \\ p_\pi(s_1|s_2) & p_\pi(s_2|s_2) & p_\pi(s_3|s_2) & p_\pi(s_4|s_2) \\ p_\pi(s_1|s_3) & p_\pi(s_2|s_3) & p_\pi(s_3|s_3) & p_\pi(s_4|s_3) \\ p_\pi(s_1|s_4) & p_\pi(s_2|s_4) & p_\pi(s_3|s_4) & p_\pi(s_4|s_4) \end{bmatrix}}_{P_\pi} \underbrace{\begin{bmatrix} v_\pi(s_1) \\ v_\pi(s_2) \\ v_\pi(s_3) \\ v_\pi(s_4) \end{bmatrix}}_{v_\pi}.$$

### 1.4 通过贝尔曼公式求解状态值

闭式解：  $v_\pi = (I - \gamma P_\pi)^{-1} r_\pi$

\* 需要求矩阵的逆，在维数较大的时候不易求解

迭代解法：

$$v_{k+1} = r_\pi + \gamma P_\pi v_k$$

$$v_k \rightarrow v_\pi = (I - \gamma P_\pi)^{-1} r_\pi, \quad k \rightarrow \infty$$

\* 证明如下：

将误差定义为  $\delta_k = v_k - v_\pi$ 。我们只需证明  $\delta_k \rightarrow 0$ 。将  $v_{k+1} = \delta_{k+1} + v_\pi$  和  $v_k = \delta_k + v_\pi$  代入  $v_{k+1} = r_\pi + \gamma P_\pi v_k$  可得：

$$\delta_{k+1} + v_\pi = r_\pi + \gamma P_\pi (\delta_k + v_\pi),$$

上式可以改写为：

$$\delta_{k+1} = -v_\pi + r_\pi + \gamma P_\pi \delta_k + \gamma P_\pi v_\pi = \gamma P_\pi \delta_k.$$

(注：这里的化简利用了贝尔曼方程  $v_\pi = r_\pi + \gamma P_\pi v_\pi$ ，所以  $-v_\pi + r_\pi + \gamma P_\pi v_\pi = 0$ )

因此，通过迭代展开，我们得到：

$$\delta_{k+1} = \gamma P_\pi \delta_k = \gamma^2 P_\pi^2 \delta_{k-1} = \dots = \gamma^{k+1} P_\pi^{k+1} \delta_0.$$

注意到  $0 \leq P_\pi^k \leq 1$ ，这意味着对于任意  $k = 0, 1, 2, \dots$ ， $P_\pi^k$  矩阵中的每一个元素都不大于 1。这是因为  $P_\pi^k \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ，其中  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$  是一个全为 1 的向量。另一方面，由于折扣因子  $\gamma < 1$ ，我们知道当  $k \rightarrow \infty$  时， $\gamma^k \rightarrow 0$ 。因此， $\delta_{k+1} = \gamma^{k+1} P_\pi^{k+1} \delta_0 \rightarrow 0$ 。

这就证明了  $v_k$  会收敛到  $v_\pi$ 。

## 1.5 行动值 (action value)

定义:  $q_{\pi}(s, a) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s, A_t = a]$

与状态值的联系:  $v_{\pi}(s) = \sum_a \pi(a \mid s) q_{\pi}(s, a)$  根据状态值的计算推导

出行动值:  $q_{\pi}(s, a) = \sum_r p(r \mid s, a)r + \gamma \sum_{s'} p(s' \mid s, a)v_{\pi}(s')$