A. Resolución de la cinemática inversa del UR5

El problema analítico de la cinemática inversa consiste en encontrar el conjunto de configuraciones $Q = \{q_i\}$, dónde $q_i = \left(\theta_1^i, \dots, \theta_6^i\right)$ y $\theta_1^i \in [0, 2\pi)$ que cumplan:

$$ {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5A_6 = {}^0A_6^d \quad \text{(Ec. A.1)}$$

$$ {}^0A_6^d = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Ec. A.2)}$$

$$ {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \cos(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -d_i\sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1}) & d_i\cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Ec. A.3)}$$

dónde ${}^0A_6^d$ describe la posición deseada y la orientación del eslabón final y los parámetros D-H del brazo robótico UR5 de Universal Robots son:

i	0	1	2	3	4	5	6
α_i [rad]	0	π/2	0	0	−π/2	−π/2	–
a_i [mm]	0	0	425	392,25	0	0	–
d_i [mm]	–	89,159	0	0	109,25	94,65	82,3
$offset_i$ [rad]	–	-3π/4	π	0	0	π	0
low_i [rad]	–	−2π	−2π	−2π	−2π	−2π	−2π
$high_i$ [rad]	–	2π	2π	2π	2π	2π	2π

Tabla A.1 Parámetros Denavit-Hartenberg del brazo robótico UR5 de Universal Robots.

Se empieza encontrando θ_1 usando la posición de la quinta articulación. Analizando la transformación desde la articulación 1 a la articulación 5, usando la ecuación (Ec. A.1), se enuncia la igualdad:

$$ {}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = \left({}^0A_1\right)^{-1}\,{}^0A_6^d\,\left({}^5A_6\right)^{-1} \quad \text{(Ec. A.4)}$$

Escogiendo los elementos $(2,4)$ de las matrices de la ecuación (Ec. A.4) se obtiene:

$$ -d_4 = -(p_x - d_6a_x)\sin(\theta_1) + \left(p_y - d_6a_y\right)\cos(\theta_1) \quad \text{(Ec. A.5)}$$

de dónde se puede obtener el valor de θ_1:

$$ \theta_1 = \operatorname{atan2}(p_y - d_6a_y,\ \ p_x - d_6a_x) \pm \operatorname{acos}\left(\frac{d_4}{\sqrt{(p_x - d_6a_x)^2 + \left(p_y - d_6a_y\right)^2}}\right) + \frac{\pi}{2} \quad \text{(Ec. A.6)}$$

Se obtienen dos soluciones para θ_1, que corresponden a las configuraciones donde el hombro es “izquierdo” o “derecho”. La función $\mathrm{atan2}(y,x)$ es la función arcotangente con dos argumentos y es necesario su uso para situar la solución en el cuadrante correcto. Para que exista solución a la cinemática inversa se ha de cumplir:

$$\sqrt{(p_x - d_6 a_x)^2 + \left(p_y - d_6 a_y\right)^2} \leq |d_4| \qquad \text{(Ec. A.7)}$$

Utilizando la transformación de la articulación 1 a la articulación 6 se obtiene la siguiente igualdad:

$$^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5A_6 = \left({}^0A_1\right)^{-1}\,{}^0A_6^d \qquad \text{(Ec. A.8)}$$

Con los elementos $(2{,}4)$ de las matrices de la ecuación (Ec. A.8) se obtiene:

$$-d_4 + d_6\cos(\theta_5) = -p_x\sin(\theta_1) + p_y\cos(\theta_1) \qquad \text{(Ec. A.9)}$$

de dónde se puede obtener el valor de θ_5 de la siguiente manera:

$$\theta_5 = \pm\mathrm{acos}\left(\frac{-p_x\sin(\theta_1) + p_y\cos(\theta_1) + d_4}{d_6}\right) \qquad \text{(Ec. A.10)}$$

Se obtienen dos soluciones para θ_5, que corresponden a las configuraciones donde el codo es “exterior/arriba” o “interior/abajo”. Para que exista solución a la cinemática inversa se ha de cumplir:

$$|d_6| \leq \left|p_x\sin(\theta_1) - p_y\cos(\theta_1) - d_4\right| \qquad \text{(Ec. A.11)}$$

Para encontrar el valor de la sexta articulación se extraen los elementos $(2{,}1)$ y $(2{,}2)$ de las matrices de la ecuación (Ec. A.8) y se obtienen, respectivamente:

$$\sin(\theta_5)\cos(\theta_6) = -n_x\sin(\theta_1) + n_y\cos(\theta_1) \qquad \text{(Ec. A.12)}$$

$$-\sin(\theta_5)\sin(\theta_6) = o_y\cos(\theta_1) - o_x\sin(\theta_1) \qquad \text{(Ec. A.13)}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\sin(\theta_6) = \frac{-o_y\cos(\theta_1) + o_x\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_5)} \qquad \text{(Ec. A.14)}$$

$$\cos(\theta_6) = \frac{-n_x\sin(\theta_1) + n_y\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_5)} \qquad \text{(Ec. A.15)}$$

Las ecuaciones (Ec. A.14) y (Ec. A.15) forman un sistema que se puede resolver fácilmente como:

$$\theta_6 = \mathrm{atan2}\left(\frac{o_y\cos(\theta_1) - o_x\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_5)},\quad \frac{n_x\sin(\theta_1) - n_y\cos(\theta_1)}{\sin(\theta_5)}\right) \qquad \text{(Ec. A.16)}$$

Esta solución no está definida en dos casos: cuando ambos numeradores son 0 o bien cuando ambos denominadores son 0.

$$\sin(\theta_5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} o_y\cos(\theta_1) - o_x\sin(\theta_1) = 0 \\ n_x\sin(\theta_1) - n_y\cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \tag{Ec. A.17}$$

No obstante, estas condiciones se implican la una a la otra. Cuando $\sin(\theta_5) = 0$, se sabe que $\cos(\theta_5) = \pm 1$, lo cual indica que las articulaciones 2, 3, 4 y 6 son paralelas y la solución está indeterminada. Cuando esto ocurre, se le debe asignar un valor por defecto a θ_6 para que el sistema sea determinado.

Utilizando la transformación de la articulación 1 a la articulación 4 se obtiene la siguiente igualdad:

$${}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4 = ({}^0A_1)^{-1}\,{}^0A_6^d\,({}^5A_6)^{-1}\,({}^4A_5)^{-1} \tag{Ec. A.18}$$

Para resolver el resto de articulaciones, se extraen los elementos $(1{,}4)$, $(3{,}4)$, $(3{,}2)$, y $(3{,}1)$ de la ecuación (Ec. A.18) y se obtienen, respectivamente:

$$a_2\cos(\theta_2) + a_3\cos(\theta_2 + \theta_3) = x \tag{Ec. A.19}$$

$$a_2\sin(\theta_2) + a_3\sin(\theta_2 + \theta_3) = y \tag{Ec. A.20}$$

$$\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = n_z\sin(\theta_6) + o_z\cos(\theta_6) \tag{Ec. A.21}$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \big(n_z\cos(\theta_6) - o_z\sin(\theta_6)\big)\cos(\theta_5) - a_z\sin(\theta_5) \tag{Ec. A.22}$$

dónde:

$$\begin{aligned} x = {} & \Big(d_5\Big(n_y\sin(\theta_6) + o_y\cos(\theta_6)\Big) - a_yd_6 + p_y\Big)\sin(\theta_1) \\ & + \big(d_5\big(n_x\sin(\theta_6) + o_x\cos(\theta_6)\big) - a_xd_6 + p_x\big)\cos(\theta_1) \end{aligned} \tag{Ec. A.23}$$

$$y = d_5\big(n_z\sin(\theta_6) + o_z\cos(\theta_6)\big) - a_zd_6 - d_1 + p_z \tag{Ec. A.24}$$

De las ecuaciones (Ec. A.19) y (Ec. A.20), se obtiene:

$$\big(x - a_2\cos(\theta_2)\big)^2 = \big(a_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\big)^2 \tag{Ec. A.25}$$

$$\big(y - a_2\sin(\theta_2)\big)^2 = \big(a_3\sin(\theta_2 + \theta_3)\big)^2 \tag{Ec. A.26}$$

Operando sucesivamente:

$$\big(x - a_2\cos(\theta_2)\big)^2 + \big(y - a_2\sin(\theta_2)\big)^2 = \big(a_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\big)^2 + \big(a_3\sin(\theta_2 + \theta_3)\big)^2 \tag{Ec. A.27}$$

$$x^2 + y^2 + {a_2}^2 - 2a_2x\cos(\theta_2) - 2a_2y\sin(\theta_2) = {a_3}^2 \tag{Ec. A.28}$$

$$-2a_2x\cos(\theta_2) - 2a_2y\sin(\theta_2) = {a_3}^2 - x^2 - y^2 - {a_2}^2 \tag{Ec. A.29}$$

Y, finalmente, se obtiene:

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(-y, \quad -x) \pm \operatorname{acos}\left(\frac{{a_3}^2 - x^2 - y^2 - {a_2}^2}{2a_2\sqrt{x^2+y^2}}\right) \tag{Ec. A.30}$$

Se obtienen dos soluciones para θ_2, que corresponden a las configuraciones donde el codo está “arriba” o “abajo”. Para que exista solución a la cinemática inversa se ha de cumplir:

$$|{a_3}^2 - x^2 - y^2 - {a_2}^2| \leq \left|2a_2\sqrt{x^2+y^2}\right| \tag{Ec. A.31}$$

De las ecuaciones (Ec. A.19) y (Ec. A.20), se obtiene:

$$\cos(\theta_2+\theta_3) = \frac{x - a_2\cos(\theta_2)}{a_3} \tag{Ec. A.32}$$

$$\sin(\theta_2+\theta_3) = \frac{y - a_2\sin(\theta_2)}{a_3} \tag{Ec. A.33}$$

De las ecuaciones (Ec. A.32) y (Ec. A.33), se obtiene finalmente:

$$\theta_3 = \operatorname{atan2}\left(\frac{y - a_2\sin(\theta_2)}{a_3}, \quad \frac{x - a_2\cos(\theta_2)}{a_3}\right) - \theta_2 \tag{Ec. A.34}$$

De las ecuaciones (Ec. A.21) y (Ec. A.22), se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta_4 = \operatorname{atan2}&\Big(\big(n_z\cos(\theta_6) - o_z\sin(\theta_6)\big)\cos(\theta_5) - a_z\sin(\theta_5), \\ &n_z\sin(\theta_6) + o_z\cos(\theta_6)\Big) - \theta_2 - \theta_3\end{aligned} \tag{Ec. A.35}$$

Los valores anteriormente encontrados son absolutos. Para obtener los valores relativos a la referencia real, se debe sustraer el *offset*:

$$\hat{\theta}_i = \theta_i - offset_i \tag{Ec. A.36}$$

Una vez hecho esto, hará falta comprobar que la solución es físicamente alcanzable. Para ello, se deberá cumplir la siguiente condición:

$$low_i \leq \hat{\theta}_i \leq high_i \tag{Ec. A.37}$$

Nótese que ya que el rango de movimiento de cada articulación comprende dos vueltas completas, se obtienen dos soluciones físicamente alcanzables para un mismo ángulo: $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ y $\theta_i - \operatorname{sign}(\theta_i)2\pi$.