



Unit 1 - Sem 4 - 22MAT230

Mathematics for Computing

Dr Sunil Kumar S and Prof K P Soman

School of Artificial Intelligence

Amrita Vishwa Vidyapeetham

If you find any mistakes or have any comments to share,

I would be grateful to receive them at s_sunilkumar@cb.amrita.edu

ℓ_1 norm optimized solution of the system of equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is sparse.

Compare least ℓ_1 and ℓ_2 norm solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

```
clearvars
```

Construct A and \mathbf{b}

```
n = 10;  
m = 3;  
A = randi([-5,5],m,n);  
b = A*randi([-3,3],n,1)
```

```
b = 3x1  
    19  
   -39  
   -11
```

Find the least ℓ_2 norm solution (using pseudo inverse)

```
x_2 = pinv(A)*b;
```

Find the least ℓ_1 norm solution (using ADMM)

```
maxIter = 400;  
rho = 1.6;
```

```

B1 = A'*pinv(A*A');
B1b = B1*b;
B2 = B1*A;
converged = false;
dz = 1e-6;

```

School of AI, AVV

Initialize the **z** and **u** vectors

```

Z0 = rand(n,1);
U0 = rand(n,1);

for i = 1:maxIter
    % X update - using Shrinkage
    c = Z0 - U0;
    X1 = c - sign(c)/rho;
    X1(sign(X1) ~= sign(c)) = 0;
    % Z update - using Projection
    mu = X1 + U0;
    Z1 = (eye(n) - B2)*mu + B1b;
    % U update - using gradient
    U1 = U0 + (X1 - Z1);
    if(norm(Z1-Z0) <= dz)
        converged = true;
        break
    end
    fprintf("iter : %d \t dz : %f dxz : %f \n",i,norm(Z1-Z0),norm(X1-Z0));
    % fprintf("iter : %d \t dz : %f\n",i,norm(X1-Z0));
    Z0 = Z1;
    U0 = U1;
end

```

```

iter : 1      dz : 3.258914 dxz : 1.766320
iter : 2      dz : 0.836954 dxz : 1.782286
iter : 3      dz : 0.479248 dxz : 0.561535
iter : 4      dz : 0.414353 dxz : 0.432155
iter : 5      dz : 0.390348 dxz : 0.397540
iter : 6      dz : 0.341284 dxz : 0.342971
iter : 7      dz : 0.183572 dxz : 0.229237
iter : 8      dz : 0.129540 dxz : 0.184025
iter : 9      dz : 0.142058 dxz : 0.159554
iter : 10     dz : 0.142394 dxz : 0.146112
iter : 11     dz : 0.135763 dxz : 0.138736
iter : 12     dz : 0.131979 dxz : 0.134605
iter : 13     dz : 0.129524 dxz : 0.132208
iter : 14     dz : 0.128253 dxz : 0.130756
iter : 15     dz : 0.128520 dxz : 0.129840
iter : 16     dz : 0.129006 dxz : 0.129242
iter : 17     dz : 0.128812 dxz : 0.128841
iter : 18     dz : 0.128274 dxz : 0.128567
iter : 19     dz : 0.127959 dxz : 0.128378
iter : 20     dz : 0.127965 dxz : 0.128246
iter : 21     dz : 0.124088 dxz : 0.124234
iter : 22     dz : 0.094803 dxz : 0.099062
iter : 23     dz : 0.092867 dxz : 0.095436
iter : 24     dz : 0.092873 dxz : 0.094293
iter : 25     dz : 0.093237 dxz : 0.093720
iter : 26     dz : 0.093289 dxz : 0.093364
iter : 27     dz : 0.093034 dxz : 0.093126
iter : 28     dz : 0.092710 dxz : 0.092960
iter : 29     dz : 0.092547 dxz : 0.092843

```

iter : 30	dz : 0.076666	dxz : 0.078802
iter : 31	dz : 0.057250	dxz : 0.068590
iter : 32	dz : 0.046646	dxz : 0.062415
iter : 33	dz : 0.045959	dxz : 0.057906
iter : 34	dz : 0.048967	dxz : 0.054518
iter : 35	dz : 0.050211	dxz : 0.051948
iter : 36	dz : 0.049069	dxz : 0.049994
iter : 37	dz : 0.046914	dxz : 0.048510
iter : 38	dz : 0.045079	dxz : 0.047385
iter : 39	dz : 0.044227	dxz : 0.046530
iter : 40	dz : 0.044280	dxz : 0.045882
iter : 41	dz : 0.027457	dxz : 0.033487
iter : 42	dz : 0.015614	dxz : 0.028605
iter : 43	dz : 0.008678	dxz : 0.024729
iter : 44	dz : 0.011173	dxz : 0.021526
iter : 45	dz : 0.015022	dxz : 0.018810
iter : 46	dz : 0.015611	dxz : 0.016472
iter : 47	dz : 0.012829	dxz : 0.014442
iter : 48	dz : 0.008041	dxz : 0.012671
iter : 49	dz : 0.003531	dxz : 0.011120
iter : 50	dz : 0.004002	dxz : 0.009762
iter : 51	dz : 0.006337	dxz : 0.008571
iter : 52	dz : 0.007091	dxz : 0.007525
iter : 53	dz : 0.006172	dxz : 0.006608
iter : 54	dz : 0.004142	dxz : 0.005803
iter : 55	dz : 0.001852	dxz : 0.005096
iter : 56	dz : 0.001354	dxz : 0.004475
iter : 57	dz : 0.002578	dxz : 0.003930
iter : 58	dz : 0.003161	dxz : 0.003452
iter : 59	dz : 0.002936	dxz : 0.003032
iter : 60	dz : 0.002118	dxz : 0.002663
iter : 61	dz : 0.001046	dxz : 0.002339
iter : 62	dz : 0.000412	dxz : 0.002055
iter : 63	dz : 0.000995	dxz : 0.001805
iter : 64	dz : 0.001375	dxz : 0.001585
iter : 65	dz : 0.001373	dxz : 0.001393
iter : 66	dz : 0.001066	dxz : 0.001224
iter : 67	dz : 0.000593	dxz : 0.001075
iter : 68	dz : 0.000153	dxz : 0.000945
iter : 69	dz : 0.000354	dxz : 0.000830
iter : 70	dz : 0.000579	dxz : 0.000729
iter : 71	dz : 0.000629	dxz : 0.000641
iter : 72	dz : 0.000526	dxz : 0.000563
iter : 73	dz : 0.000328	dxz : 0.000495
iter : 74	dz : 0.000105	dxz : 0.000435
iter : 75	dz : 0.000108	dxz : 0.000382
iter : 76	dz : 0.000234	dxz : 0.000336
iter : 77	dz : 0.000281	dxz : 0.000295
iter : 78	dz : 0.000254	dxz : 0.000259
iter : 79	dz : 0.000175	dxz : 0.000228
iter : 80	dz : 0.000075	dxz : 0.000200
iter : 81	dz : 0.000022	dxz : 0.000176
iter : 82	dz : 0.000089	dxz : 0.000155
iter : 83	dz : 0.000122	dxz : 0.000136
iter : 84	dz : 0.000120	dxz : 0.000120
iter : 85	dz : 0.000090	dxz : 0.000105
iter : 86	dz : 0.000047	dxz : 0.000093
iter : 87	dz : 0.000003	dxz : 0.000081
iter : 88	dz : 0.000031	dxz : 0.000072
iter : 89	dz : 0.000051	dxz : 0.000063
iter : 90	dz : 0.000055	dxz : 0.000055
iter : 91	dz : 0.000045	dxz : 0.000049
iter : 92	dz : 0.000028	dxz : 0.000043
iter : 93	dz : 0.000008	dxz : 0.000038
iter : 94	dz : 0.000010	dxz : 0.000033
iter : 95	dz : 0.000021	dxz : 0.000029
iter : 96	dz : 0.000024	dxz : 0.000026
iter : 97	dz : 0.000022	dxz : 0.000022

```

iter : 98      dz : 0.000015 dxz : 0.000020
iter : 99      dz : 0.000007 dxz : 0.000017
iter : 100     dz : 0.000002 dxz : 0.000015
iter : 101     dz : 0.000008 dxz : 0.000013
iter : 102     dz : 0.000011 dxz : 0.000012
iter : 103     dz : 0.000010 dxz : 0.000010
iter : 104     dz : 0.000008 dxz : 0.000009
iter : 105     dz : 0.000004 dxz : 0.000008
iter : 106     dz : 0.000001 dxz : 0.000007
iter : 107     dz : 0.000003 dxz : 0.000006
iter : 108     dz : 0.000004 dxz : 0.000005
iter : 109     dz : 0.000005 dxz : 0.000005
iter : 110     dz : 0.000004 dxz : 0.000004
iter : 111     dz : 0.000003 dxz : 0.000004
iter : 112     dz : 0.000001 dxz : 0.000003

```

```

x_1 = X1;

if(converged == true)
    fprintf("L1 norm optimized solution found after %d iterations. \n",i);
elseif(converged == false)
    fprintf("Convergence failed\n")
    fprintf("Try : increasing the no: iteration, increasing the
convergence tol value, changing rho\n");
end

```

L1 norm optimized solution found after 113 iterations.

Plot to check the solution vector X and surrogate variable Z

```

b2 = bar(x_2);%hold on;
b2.FaceColor = [0 0 0.9];
legend("X from L2 norm")

```

```

b1 = bar(x_1);%hold off
b1.FaceColor = [0 0.98 0];
legend("X from L1 norm")

```

```

b1 = bar(Z1);%hold off
b1.FaceColor = [0.98 0 0];
legend("Z from L1 norm")

```

```

plot(X1,'k. ');hold on
stem(X1)
stem(Z1)
plot(Z1,'b. ');hold off
grid on

```

Check the error vector $Ax - b$

```
e1 = A*x_1-b
```

School of AI, AVV

```
e1 = 3×1  
10-4 ×  
-0.2632  
0.0214  
-0.0122
```

```
e2 = A*x_2-b
```

```
e2 = 3×1  
10-13 ×  
-0.1066  
0.2842  
0
```

Check the sparsity of the solution

```
sum(x_1 ~= 0)
```

```
ans =  
3
```

```
sum(x_2 ~= 0)
```

```
ans =  
10
```

```
cd("/media/user/DATA4LINUX/new1/Repos/Mine/MFC4_22MAT230/")  
mlxfile = matlab.desktop.editor.getActive().Filename;  
outfile = mlxfile + ".pdf";  
export(matlab.desktop.editor.getActive().Filename, outfile, PageSize="A4");
```