

ℓ_1 norm optimized solution of the system of equations $Ax = b$ is sparse.

Compare least ℓ_1 and ℓ_2 norm solution of $Ax = b$

```
clearvars
```

Construct A and b

```
n = 10;
m = 3;
A = randi([-5,5],m,n);
b = A*randi([-3,3],n,1)

b =
-28
21
21
```

Find the least ℓ_2 norm solution (using pseudo inverse)

```
x_2 = pinv(A)*b;
```

Find the least ℓ_1 norm solution (using ADMM)

```
maxIter = 400;
rho = 1.6;

B1 = A'*pinv(A*A');
B1b = B1*b;
B2 = B1*A;
converged = false;
dz = 1e-6;
```

Initialize the z and u vectors

```
Z0 = rand(n,1);
U0 = rand(n,1);

for i = 1:maxIter
    % X update - using Shrinkage
    c = Z0 - U0;
    X1 = c - sign(c)/rho;
    X1(sign(X1) ~= sign(c)) = 0;
    % Z update - using Projection
    mu = X1 + U0;
    Z1 = (eye(n) - B2)*mu + B1b;
    % U update - using gradient
    U1 = U0 + (X1 - Z1);
    if(norm(Z1-Z0) <= dz)
        converged = true;
        break
```

```

end
fprintf("iter : %d \t dz : %f dxz : %f \n",i,norm(Z1-Z0),norm(X1-Z0));
% fprintf("iter : %d \t dz : %f\n",i,norm(X1-Z0));
Z0 = Z1;
U0 = U1;
end

```

```

iter : 1      dz : 4.705226 dxz : 1.369830
iter : 2      dz : 0.796924 dxz : 3.478089
iter : 3      dz : 0.689179 dxz : 0.708165
iter : 4      dz : 0.371754 dxz : 0.402278
iter : 5      dz : 0.353023 dxz : 0.359279
iter : 6      dz : 0.196943 dxz : 0.206037
iter : 7      dz : 0.097210 dxz : 0.143178
iter : 8      dz : 0.089849 dxz : 0.115345
iter : 9      dz : 0.097634 dxz : 0.100401
iter : 10     dz : 0.091017 dxz : 0.092670
iter : 11     dz : 0.086026 dxz : 0.088781
iter : 12     dz : 0.085462 dxz : 0.086835
iter : 13     dz : 0.085202 dxz : 0.085847
iter : 14     dz : 0.084865 dxz : 0.085330
iter : 15     dz : 0.084863 dxz : 0.085048
iter : 16     dz : 0.084863 dxz : 0.084888
iter : 17     dz : 0.084734 dxz : 0.084794
iter : 18     dz : 0.084637 dxz : 0.084735
iter : 19     dz : 0.084631 dxz : 0.084698
iter : 20     dz : 0.084656 dxz : 0.084674
iter : 21     dz : 0.084658 dxz : 0.084658
iter : 22     dz : 0.084642 dxz : 0.084648
iter : 23     dz : 0.084628 dxz : 0.084640
iter : 24     dz : 0.084625 dxz : 0.084636
iter : 25     dz : 0.084628 dxz : 0.084632
iter : 26     dz : 0.084630 dxz : 0.084630
iter : 27     dz : 0.084628 dxz : 0.084628
iter : 28     dz : 0.084626 dxz : 0.084627
iter : 29     dz : 0.084625 dxz : 0.084627
iter : 30     dz : 0.084625 dxz : 0.084626
iter : 31     dz : 0.084626 dxz : 0.084626
iter : 32     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 33     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 34     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 35     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 36     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 37     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 38     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 39     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 40     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 41     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 42     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 43     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 44     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 45     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 46     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 47     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 48     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 49     dz : 0.084625 dxz : 0.084625
iter : 50     dz : 0.082446 dxz : 0.082527
iter : 51     dz : 0.068452 dxz : 0.074566
iter : 52     dz : 0.052207 dxz : 0.069616
iter : 53     dz : 0.033211 dxz : 0.065407
iter : 54     dz : 0.013710 dxz : 0.061611
iter : 55     dz : 0.009272 dxz : 0.058110
iter : 56     dz : 0.024697 dxz : 0.054848
iter : 57     dz : 0.037039 dxz : 0.051794
iter : 58     dz : 0.044251 dxz : 0.048924
iter : 59     dz : 0.045959 dxz : 0.046222
iter : 60     dz : 0.042561 dxz : 0.043676

```

```
iter : 61      dz : 0.034992 dxz : 0.041274
iter : 62      dz : 0.024515 dxz : 0.039007
iter : 63      dz : 0.012557 dxz : 0.036866
iter : 64      dz : 0.000769 dxz : 0.034843
iter : 65      dz : 0.010301 dxz : 0.032932
iter : 66      dz : 0.018851 dxz : 0.031127
iter : 67      dz : 0.024485 dxz : 0.029420
iter : 68      dz : 0.026908 dxz : 0.027808
iter : 69      dz : 0.026204 dxz : 0.026283
iter : 70      dz : 0.022782 dxz : 0.024843
iter : 71      dz : 0.017296 dxz : 0.023481
iter : 72      dz : 0.010551 dxz : 0.022194
iter : 73      dz : 0.003401 dxz : 0.020978
iter : 74      dz : 0.003350 dxz : 0.019828
iter : 75      dz : 0.009024 dxz : 0.018742
iter : 76      dz : 0.013131 dxz : 0.017715
iter : 77      dz : 0.015401 dxz : 0.016744
iter : 78      dz : 0.015787 dxz : 0.015826
iter : 79      dz : 0.014449 dxz : 0.014959
iter : 80      dz : 0.011713 dxz : 0.014139
iter : 81      dz : 0.008020 dxz : 0.013364
iter : 82      dz : 0.003866 dxz : 0.012632
iter : 83      dz : 0.000257 dxz : 0.011940
iter : 84      dz : 0.003914 dxz : 0.011285
iter : 85      dz : 0.006763 dxz : 0.010667
iter : 86      dz : 0.008588 dxz : 0.010082
iter : 87      dz : 0.009302 dxz : 0.009530
iter : 88      dz : 0.008949 dxz : 0.009008
iter : 89      dz : 0.007680 dxz : 0.008514
iter : 90      dz : 0.005727 dxz : 0.008047
iter : 91      dz : 0.003372 dxz : 0.007606
iter : 92      dz : 0.000908 dxz : 0.007189
iter : 93      dz : 0.001389 dxz : 0.006795
iter : 94      dz : 0.003294 dxz : 0.006423
iter : 95      dz : 0.004645 dxz : 0.006071
iter : 96      dz : 0.005356 dxz : 0.005738
iter : 97      dz : 0.005421 dxz : 0.005424
iter : 98      dz : 0.004901 dxz : 0.005127
iter : 99      dz : 0.003914 dxz : 0.004846
iter : 100     dz : 0.002614 dxz : 0.004580
iter : 101     dz : 0.001175 dxz : 0.004329
iter : 102     dz : 0.000236 dxz : 0.004092
iter : 103     dz : 0.001471 dxz : 0.003868
iter : 104     dz : 0.002418 dxz : 0.003656
iter : 105     dz : 0.003007 dxz : 0.003455
iter : 106     dz : 0.003212 dxz : 0.003266
iter : 107     dz : 0.003052 dxz : 0.003087
iter : 108     dz : 0.002585 dxz : 0.002918
iter : 109     dz : 0.001891 dxz : 0.002758
iter : 110     dz : 0.001070 dxz : 0.002607
iter : 111     dz : 0.000223 dxz : 0.002464
iter : 112     dz : 0.000558 dxz : 0.002329
iter : 113     dz : 0.001196 dxz : 0.002201
iter : 114     dz : 0.001639 dxz : 0.002081
iter : 115     dz : 0.001860 dxz : 0.001967
iter : 116     dz : 0.001859 dxz : 0.001859
iter : 117     dz : 0.001660 dxz : 0.001757
iter : 118     dz : 0.001305 dxz : 0.001661
iter : 119     dz : 0.000849 dxz : 0.001570
iter : 120     dz : 0.000351 dxz : 0.001484
iter : 121     dz : 0.000131 dxz : 0.001402
iter : 122     dz : 0.000548 dxz : 0.001326
iter : 123     dz : 0.000862 dxz : 0.001253
iter : 124     dz : 0.001051 dxz : 0.001184
iter : 125     dz : 0.001107 dxz : 0.001119
iter : 126     dz : 0.001040 dxz : 0.001058
iter : 127     dz : 0.000869 dxz : 0.001000
iter : 128     dz : 0.000623 dxz : 0.000945
```

```
iter : 129      dz : 0.000337 dxz : 0.000893
iter : 130      dz : 0.000046 dxz : 0.000844
iter : 131      dz : 0.000219 dxz : 0.000798
iter : 132      dz : 0.000433 dxz : 0.000754
iter : 133      dz : 0.000577 dxz : 0.000713
iter : 134      dz : 0.000645 dxz : 0.000674
iter : 135      dz : 0.000637 dxz : 0.000637
iter : 136      dz : 0.000561 dxz : 0.000602
iter : 137      dz : 0.000434 dxz : 0.000569
iter : 138      dz : 0.000274 dxz : 0.000538
iter : 139      dz : 0.000102 dxz : 0.000508
iter : 140      dz : 0.000062 dxz : 0.000481
iter : 141      dz : 0.000203 dxz : 0.000454
iter : 142      dz : 0.000307 dxz : 0.000429
iter : 143      dz : 0.000367 dxz : 0.000406
iter : 144      dz : 0.000381 dxz : 0.000384
iter : 145      dz : 0.000354 dxz : 0.000363
iter : 146      dz : 0.000291 dxz : 0.000343
iter : 147      dz : 0.000205 dxz : 0.000324
iter : 148      dz : 0.000105 dxz : 0.000306
iter : 149      dz : 0.000005 dxz : 0.000289
iter : 150      dz : 0.000085 dxz : 0.000274
iter : 151      dz : 0.000156 dxz : 0.000259
iter : 152      dz : 0.000203 dxz : 0.000244
iter : 153      dz : 0.000223 dxz : 0.000231
iter : 154      dz : 0.000218 dxz : 0.000218
iter : 155      dz : 0.000190 dxz : 0.000206
iter : 156      dz : 0.000144 dxz : 0.000195
iter : 157      dz : 0.000088 dxz : 0.000184
iter : 158      dz : 0.000029 dxz : 0.000174
iter : 159      dz : 0.000027 dxz : 0.000165
iter : 160      dz : 0.000074 dxz : 0.000156
iter : 161      dz : 0.000109 dxz : 0.000147
iter : 162      dz : 0.000128 dxz : 0.000139
iter : 163      dz : 0.000131 dxz : 0.000131
iter : 164      dz : 0.000120 dxz : 0.000124
iter : 165      dz : 0.000098 dxz : 0.000117
iter : 166      dz : 0.000067 dxz : 0.000111
iter : 167      dz : 0.000032 dxz : 0.000105
iter : 168      dz : 0.000002 dxz : 0.000099
iter : 169      dz : 0.000032 dxz : 0.000094
iter : 170      dz : 0.000056 dxz : 0.000089
iter : 171      dz : 0.000071 dxz : 0.000084
iter : 172      dz : 0.000077 dxz : 0.000079
iter : 173      dz : 0.000074 dxz : 0.000075
iter : 174      dz : 0.000064 dxz : 0.000071
iter : 175      dz : 0.000048 dxz : 0.000067
iter : 176      dz : 0.000028 dxz : 0.000063
iter : 177      dz : 0.000008 dxz : 0.000060
iter : 178      dz : 0.000011 dxz : 0.000056
iter : 179      dz : 0.000027 dxz : 0.000053
iter : 180      dz : 0.000038 dxz : 0.000050
iter : 181      dz : 0.000044 dxz : 0.000048
iter : 182      dz : 0.000045 dxz : 0.000045
iter : 183      dz : 0.000041 dxz : 0.000043
iter : 184      dz : 0.000033 dxz : 0.000040
iter : 185      dz : 0.000022 dxz : 0.000038
iter : 186      dz : 0.000010 dxz : 0.000036
iter : 187      dz : 0.000002 dxz : 0.000034
iter : 188      dz : 0.000012 dxz : 0.000032
iter : 189      dz : 0.000020 dxz : 0.000030
iter : 190      dz : 0.000025 dxz : 0.000029
iter : 191      dz : 0.000027 dxz : 0.000027
iter : 192      dz : 0.000025 dxz : 0.000026
iter : 193      dz : 0.000022 dxz : 0.000024
iter : 194      dz : 0.000016 dxz : 0.000023
iter : 195      dz : 0.000009 dxz : 0.000022
iter : 196      dz : 0.000002 dxz : 0.000020
```

```

iter : 197      dz : 0.000005 dxz : 0.000019
iter : 198      dz : 0.000010 dxz : 0.000018
iter : 199      dz : 0.000014 dxz : 0.000017
iter : 200      dz : 0.000015 dxz : 0.000016
iter : 201      dz : 0.000015 dxz : 0.000015
iter : 202      dz : 0.000014 dxz : 0.000015
iter : 203      dz : 0.000011 dxz : 0.000014
iter : 204      dz : 0.000007 dxz : 0.000013
iter : 205      dz : 0.000003 dxz : 0.000012
iter : 206      dz : 0.000001 dxz : 0.000012
iter : 207      dz : 0.000005 dxz : 0.000011
iter : 208      dz : 0.000007 dxz : 0.000010
iter : 209      dz : 0.000009 dxz : 0.000010
iter : 210      dz : 0.000009 dxz : 0.000009
iter : 211      dz : 0.000009 dxz : 0.000009
iter : 212      dz : 0.000007 dxz : 0.000008
iter : 213      dz : 0.000005 dxz : 0.000008
iter : 214      dz : 0.000003 dxz : 0.000007

```

```

x_1 = X1;

if(converged == true)
    fprintf("L1 norm optimized solution found after %d iterations. \n",i);
elseif(converged == false)
    fprintf("Convergence failed\n")
    fprintf("Try : increasing the no: iteration, increasing the
convergence tol value, changing rho\n");
end

```

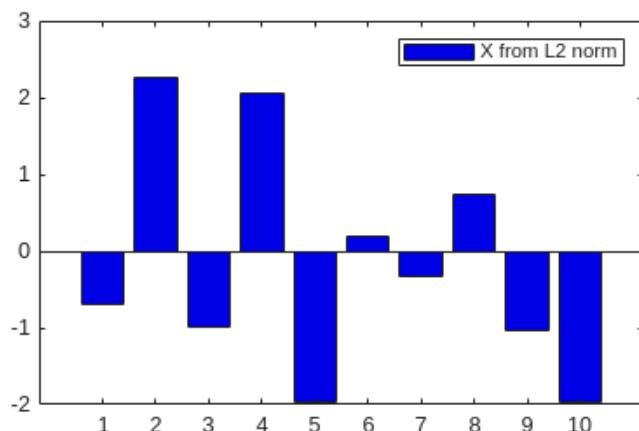
L1 norm optimized solution found after 215 iterations.

Plot to check the solution vector X and surrogate variable Z

```

b2 = bar(x_2);%hold on;
b2.FaceColor = [0 0 0.9];
legend("X from L2 norm")

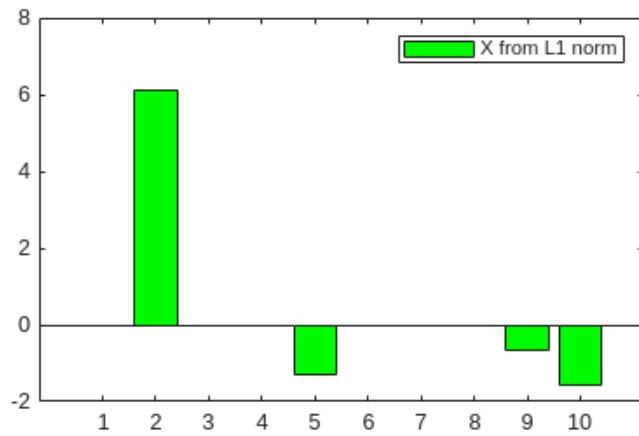
```



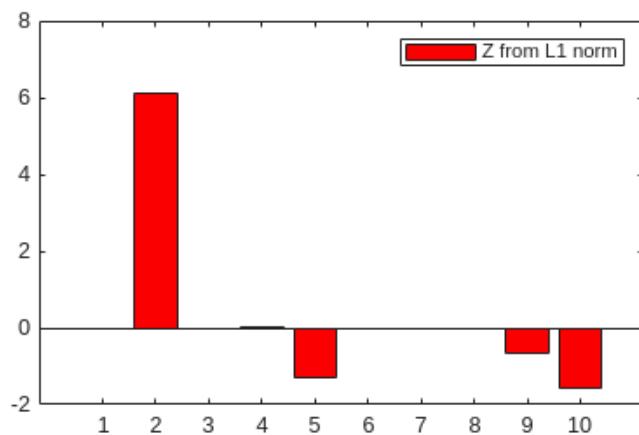
```

b1 = bar(x_1);%hold off
b1.FaceColor = [0 0.98 0];
legend("X from L1 norm")

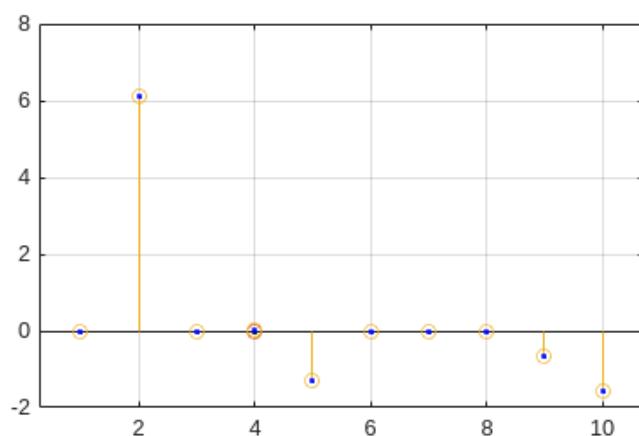
```



```
b1 = bar(Z1);%hold off  
b1.FaceColor = [ 0.98 0 0 ];  
legend( "Z from L1 norm" )
```



```
plot(X1,'k.');//hold on  
stem(X1)  
stem(Z1)  
plot(Z1,'b.');//hold off  
grid on
```



Check the error vector $Ax - b$

```
e1 = A*x_1-b
```

```
e1 = 3×1  
10-4 ×  
0.2364  
-0.2869  
0.6553
```

```
e2 = A*x_2-b
```

```
e2 = 3×1  
10-14 ×  
-0.7105  
0.7105  
0
```

Check the sparsity of the solution

```
sum(x_1 ~= 0)
```

```
ans =  
4
```

```
sum(x_2 ~= 0)
```

```
ans =  
10
```

```
cd( "/media/user/DATA4LINUX/new1/Repos/Mine/MFC4_22MAT230/" )  
mlxfile = matlab.desktop.editor.getActive().Filename;  
outfile = mlxfile + ".pdf";  
export(matlab.desktop.editor.getActive().Filename, outfile, PageSize="A4");  
  
outfile =  
"/media/user/DATA4LINUX/new1/Repos/Mine/MFC4_22MAT230/U1_Comparison_L1_L2_norm_Matlab_coding.mlx.pdf"
```