



Unit 1 - Sem 4 - 22MAT230

### Mathematics for Computing

Dr Sunil Kumar S and Prof K P Soman

School of Artificial Intelligence

Amrita Vishwa Vidyapeetham

If you find any mistakes or have any comments to share,

I would be grateful to receive them at [s\\_sunilkumar@cb.amrita.edu](mailto:s_sunilkumar@cb.amrita.edu)

$\ell_1$  norm optimized solution of the system of equations  $Ax = b$  is sparse.

Compare least  $\ell_1$  and  $\ell_2$  norm solution of  $Ax = b$

```
clearvars
```

Construct  $A$  and  $b$

```
n = 10;
m = 3;
A = randi([-5,5],m,n);
b = A*randi([-3,3],n,1)
```

```
b = 3x1
 19
 -39
 -11
```

Find the least  $\ell_2$  norm solution (using pseudo inverse)

```
x_2 = pinv(A)*b;
```

Find the least  $\ell_1$  norm solution (using ADMM)

```
maxIter = 400;
rho = 1.6;
```

```

B1 = A'*pinv(A*A');
B1b = B1*b;
B2 = B1*A;
converged = false;
dz = 1e-6;

```

School of AI, AVV

Initialize the **z** and **u** vectors

```

Z0 = rand(n,1);
U0 = rand(n,1);

for i = 1:maxIter
    % X update - using Shrinkage
    c = Z0 - U0;
    X1 = c - sign(c)/rho;
    X1(sign(X1) ~= sign(c)) = 0;
    % Z update - using Projection
    mu = X1 + U0;
    Z1 = (eye(n) - B2)*mu + B1b;
    % U update - using gradient
    U1 = U0 + (X1 - Z1);
    if(norm(Z1-Z0) <= dz)
        converged = true;
        break
    end
    fprintf("iter : %d \t dz : %f dxz : %f \n",i,norm(Z1-Z0),norm(X1-Z0));
    % fprintf("iter : %d \t dz : %f\n",i,norm(X1-Z0));
    Z0 = Z1;
    U0 = U1;
end

```

```

iter : 1      dz : 3.258914 dxz : 1.766320
iter : 2      dz : 0.836954 dxz : 1.782286
iter : 3      dz : 0.479248 dxz : 0.561535
iter : 4      dz : 0.414353 dxz : 0.432155
iter : 5      dz : 0.390348 dxz : 0.397540
iter : 6      dz : 0.341284 dxz : 0.342971
iter : 7      dz : 0.183572 dxz : 0.229237
iter : 8      dz : 0.129540 dxz : 0.184025
iter : 9      dz : 0.142058 dxz : 0.159554
iter : 10     dz : 0.142394 dxz : 0.146112
iter : 11     dz : 0.135763 dxz : 0.138736
iter : 12     dz : 0.131979 dxz : 0.134605
iter : 13     dz : 0.129524 dxz : 0.132208
iter : 14     dz : 0.128253 dxz : 0.130756
iter : 15     dz : 0.128520 dxz : 0.129840
iter : 16     dz : 0.129006 dxz : 0.129242
iter : 17     dz : 0.128812 dxz : 0.128841
iter : 18     dz : 0.128274 dxz : 0.128567
iter : 19     dz : 0.127959 dxz : 0.128378
iter : 20     dz : 0.127965 dxz : 0.128246
iter : 21     dz : 0.124088 dxz : 0.124234
iter : 22     dz : 0.094803 dxz : 0.099062
iter : 23     dz : 0.092867 dxz : 0.095436
iter : 24     dz : 0.092873 dxz : 0.094293
iter : 25     dz : 0.093237 dxz : 0.093720
iter : 26     dz : 0.093289 dxz : 0.093364
iter : 27     dz : 0.093034 dxz : 0.093126
iter : 28     dz : 0.092710 dxz : 0.092960
iter : 29     dz : 0.092547 dxz : 0.092843

```

iter : 30 dz : 0.076666 dxz : 0.078802  
iter : 31 dz : 0.057250 dxz : 0.068590  
iter : 32 dz : 0.046646 dxz : 0.062415  
iter : 33 dz : 0.045959 dxz : 0.057906  
iter : 34 dz : 0.048967 dxz : 0.054518  
iter : 35 dz : 0.050211 dxz : 0.051948  
iter : 36 dz : 0.049069 dxz : 0.049994  
iter : 37 dz : 0.046914 dxz : 0.048510  
iter : 38 dz : 0.045079 dxz : 0.047385  
iter : 39 dz : 0.044227 dxz : 0.046530  
iter : 40 dz : 0.044280 dxz : 0.045882  
iter : 41 dz : 0.027457 dxz : 0.033487  
iter : 42 dz : 0.015614 dxz : 0.028605  
iter : 43 dz : 0.008678 dxz : 0.024729  
iter : 44 dz : 0.011173 dxz : 0.021526  
iter : 45 dz : 0.015022 dxz : 0.018810  
iter : 46 dz : 0.015611 dxz : 0.016472  
iter : 47 dz : 0.012829 dxz : 0.014442  
iter : 48 dz : 0.008041 dxz : 0.012671  
iter : 49 dz : 0.003531 dxz : 0.011120  
iter : 50 dz : 0.004002 dxz : 0.009762  
iter : 51 dz : 0.006337 dxz : 0.008571  
iter : 52 dz : 0.007091 dxz : 0.007525  
iter : 53 dz : 0.006172 dxz : 0.006608  
iter : 54 dz : 0.004142 dxz : 0.005803  
iter : 55 dz : 0.001852 dxz : 0.005096  
iter : 56 dz : 0.001354 dxz : 0.004475  
iter : 57 dz : 0.002578 dxz : 0.003930  
iter : 58 dz : 0.003161 dxz : 0.003452  
iter : 59 dz : 0.002936 dxz : 0.003032  
iter : 60 dz : 0.002118 dxz : 0.002663  
iter : 61 dz : 0.001046 dxz : 0.002339  
iter : 62 dz : 0.000412 dxz : 0.002055  
iter : 63 dz : 0.000995 dxz : 0.001805  
iter : 64 dz : 0.001375 dxz : 0.001585  
iter : 65 dz : 0.001373 dxz : 0.001393  
iter : 66 dz : 0.001066 dxz : 0.001224  
iter : 67 dz : 0.000593 dxz : 0.001075  
iter : 68 dz : 0.000153 dxz : 0.000945  
iter : 69 dz : 0.000354 dxz : 0.000830  
iter : 70 dz : 0.000579 dxz : 0.000729  
iter : 71 dz : 0.000629 dxz : 0.000641  
iter : 72 dz : 0.000526 dxz : 0.000563  
iter : 73 dz : 0.000328 dxz : 0.000495  
iter : 74 dz : 0.000105 dxz : 0.000435  
iter : 75 dz : 0.000108 dxz : 0.000382  
iter : 76 dz : 0.000234 dxz : 0.000336  
iter : 77 dz : 0.000281 dxz : 0.000295  
iter : 78 dz : 0.000254 dxz : 0.000259  
iter : 79 dz : 0.000175 dxz : 0.000228  
iter : 80 dz : 0.000075 dxz : 0.000200  
iter : 81 dz : 0.000022 dxz : 0.000176  
iter : 82 dz : 0.000089 dxz : 0.000155  
iter : 83 dz : 0.000122 dxz : 0.000136  
iter : 84 dz : 0.000120 dxz : 0.000120  
iter : 85 dz : 0.000090 dxz : 0.000105  
iter : 86 dz : 0.000047 dxz : 0.000093  
iter : 87 dz : 0.000003 dxz : 0.000081  
iter : 88 dz : 0.000031 dxz : 0.000072  
iter : 89 dz : 0.000051 dxz : 0.000063  
iter : 90 dz : 0.000055 dxz : 0.000055  
iter : 91 dz : 0.000045 dxz : 0.000049  
iter : 92 dz : 0.000028 dxz : 0.000043  
iter : 93 dz : 0.000008 dxz : 0.000038  
iter : 94 dz : 0.000010 dxz : 0.000033  
iter : 95 dz : 0.000021 dxz : 0.000029  
iter : 96 dz : 0.000024 dxz : 0.000026  
iter : 97 dz : 0.000022 dxz : 0.000022

School of AI, AVV

```

iter : 98      dz : 0.000015 dxz : 0.000020
iter : 99      dz : 0.000007 dxz : 0.000017
iter : 100     dz : 0.000002 dxz : 0.000015
iter : 101     dz : 0.000008 dxz : 0.000013
iter : 102     dz : 0.000011 dxz : 0.000012
iter : 103     dz : 0.000010 dxz : 0.000010
iter : 104     dz : 0.000008 dxz : 0.000009
iter : 105     dz : 0.000004 dxz : 0.000008
iter : 106     dz : 0.000001 dxz : 0.000007
iter : 107     dz : 0.000003 dxz : 0.000006
iter : 108     dz : 0.000004 dxz : 0.000005
iter : 109     dz : 0.000005 dxz : 0.000005
iter : 110     dz : 0.000004 dxz : 0.000004
iter : 111     dz : 0.000003 dxz : 0.000004
iter : 112     dz : 0.000001 dxz : 0.000003

```

```

x_1 = X1;

if(converged == true)
    fprintf("L1 norm optimized solution found after %d iterations. \n",i);
elseif(converged == false)
    fprintf("Convergence failed\n")
    fprintf("Try : increasing the no: iteration, increasing the
convergence tol value, changing rho\n");
end

```

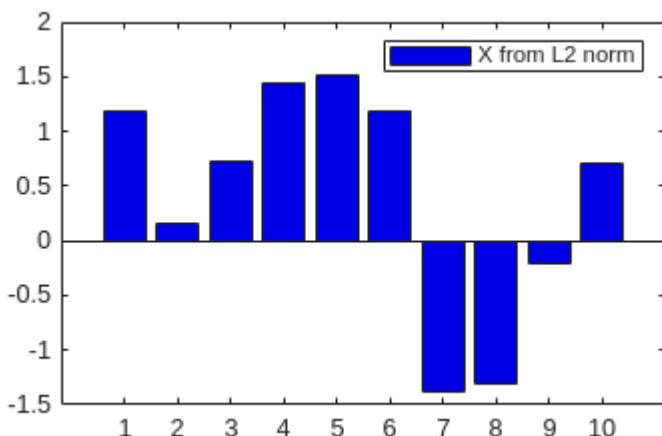
L1 norm optimized solution found after 113 iterations.

Plot to check the solution vector  $X$  and surrogate variable  $Z$

```

b2 = bar(x_2);%hold on;
b2.FaceColor = [0 0 0.9];
legend("X from L2 norm")

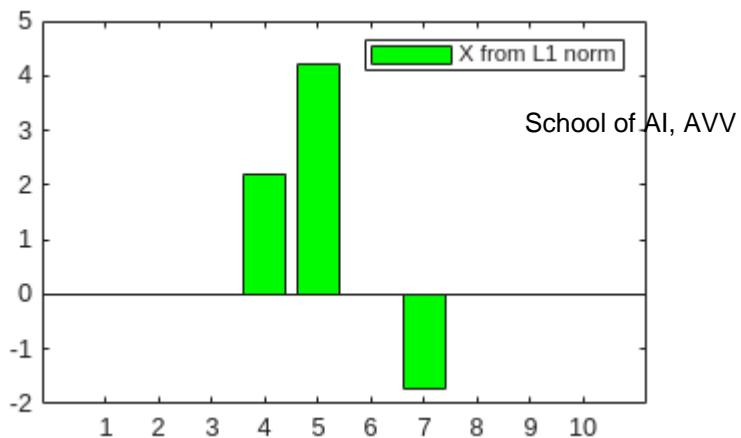
```



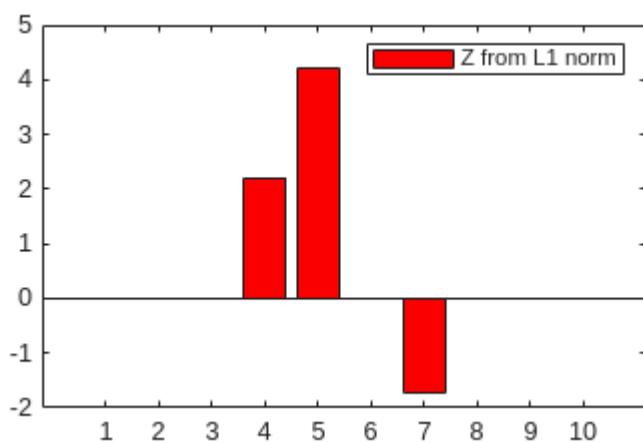
```

b1 = bar(x_1);%hold off
b1.FaceColor = [0 0.98 0];
legend("X from L1 norm")

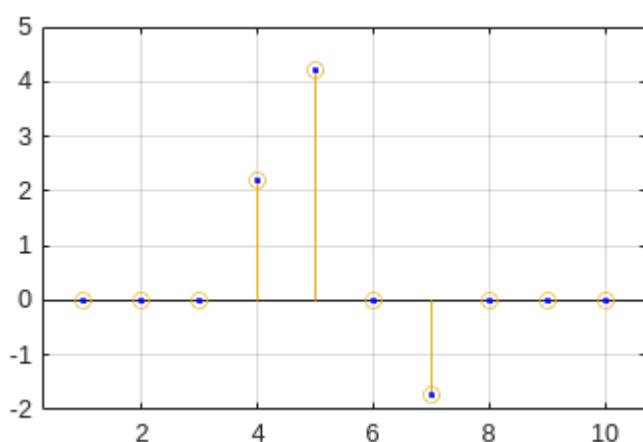
```



```
b1 = bar(Z1);%hold off
b1.FaceColor = [0.98 0 0];
legend("Z from L1 norm")
```



```
plot(X1,'k.');//hold on
stem(X1)
stem(Z1)
plot(Z1,'b.');//hold off
grid on
```



Check the error vector  $Ax - b$

```
e1 = A*x_1-b
```

School of AI, AVV

```
e1 = 3×1  
10-4 ×  
-0.2632  
0.0214  
-0.0122
```

```
e2 = A*x_2-b
```

```
e2 = 3×1  
10-13 ×  
-0.1066  
0.2842  
0
```

Check the sparsity of the solution

```
sum(x_1 ~= 0)
```

```
ans =  
3
```

```
sum(x_2 ~= 0)
```

```
ans =  
10
```

```
cd( "/media/user/DATA4LINUX/new1/Repos/Mine/MFC4_22MAT230/" )  
mlxfile = matlab.desktop.editor.getActive().Filename;  
outfile = mlxfile + ".pdf";  
export(matlab.desktop.editor.getActive().Filename, outfile, PageSize="A4");
```