

$\ell_1$  norm optimized solution of the system of equations  $Ax = b$  is sparse.

Compare least  $\ell_1$  and  $\ell_2$  norm solution of  $Ax = b$

```
clearvars
```

Construct  $A$  and  $b$

```
n = 10;
m = 3;
A = randi([-5,5],m,n);
b = A*randi([-3,3],n,1)
```

```
b = 3x1
-20
10
-21
```

Find the least  $\ell_2$  norm solution (using pseudo inverse)

```
x_2 = pinv(A)*b;
```

Find the least  $\ell_1$  norm solution (using ADMM)

```
maxIter = 400;
rho = 1.6;

B1 = A'*pinv(A*A');
B1b = B1*b;
B2 = B1*A;
converged = false;
dz = 1e-5;
```

Initialize the  $z$  and  $u$  vectors

```
Z0 = rand(n,1);
U0 = rand(n,1);

for i = 1:maxIter
    % X update - using Shrinkage
    c = Z0 - U0;
    X1 = c - sign(c)/rho;
    X1(sign(X1) ~= sign(c)) = 0;
    % Z update - using Projection
    mu = X1 + U0;
    Z1 = (eye(n) - B2)*mu + B1b;
    % U update - using gradient
```

```

U1 = U0 + (X1 - Z1);
if(norm(Z1-Z0) <= dz)
    converged = true;
    break
end
fprintf("iter : %d \t dz : %f dxz : %f \n",i,norm(Z1-Z0),norm(X1-Z0));
% fprintf("iter : %d \t dz : %f\n",i,norm(X1-Z0));
Z0 = Z1;
U0 = U1;
end

```

```

iter : 1      dz : 4.407867 dxz : 1.258358
iter : 2      dz : 0.857881 dxz : 2.327676
iter : 3      dz : 0.601731 dxz : 0.657268
iter : 4      dz : 0.133610 dxz : 0.184285
iter : 5      dz : 0.104715 dxz : 0.115283
iter : 6      dz : 0.077729 dxz : 0.090324
iter : 7      dz : 0.079818 dxz : 0.081613
iter : 8      dz : 0.077984 dxz : 0.078412
iter : 9      dz : 0.076242 dxz : 0.077144
iter : 10     dz : 0.076259 dxz : 0.076608
iter : 11     dz : 0.076353 dxz : 0.076370
iter : 12     dz : 0.076231 dxz : 0.076258
iter : 13     dz : 0.076145 dxz : 0.076201
iter : 14     dz : 0.076118 dxz : 0.076170
iter : 15     dz : 0.076109 dxz : 0.076152
iter : 16     dz : 0.076115 dxz : 0.076140
iter : 17     dz : 0.076124 dxz : 0.076131
iter : 18     dz : 0.076125 dxz : 0.076125
iter : 19     dz : 0.076117 dxz : 0.076120
iter : 20     dz : 0.076108 dxz : 0.076117
iter : 21     dz : 0.076104 dxz : 0.076114
iter : 22     dz : 0.076105 dxz : 0.076112
iter : 23     dz : 0.076107 dxz : 0.076110
iter : 24     dz : 0.076108 dxz : 0.076109
iter : 25     dz : 0.076108 dxz : 0.076108
iter : 26     dz : 0.076106 dxz : 0.076107
iter : 27     dz : 0.076104 dxz : 0.076106
iter : 28     dz : 0.076104 dxz : 0.076106
iter : 29     dz : 0.076104 dxz : 0.076105
iter : 30     dz : 0.076105 dxz : 0.076105
iter : 31     dz : 0.076105 dxz : 0.076105
iter : 32     dz : 0.076104 dxz : 0.076105
iter : 33     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 34     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 35     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 36     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 37     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 38     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 39     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 40     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 41     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 42     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 43     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 44     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 45     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 46     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 47     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 48     dz : 0.076104 dxz : 0.076104
iter : 49     dz : 0.068449 dxz : 0.069018
iter : 50     dz : 0.058336 dxz : 0.063453
iter : 51     dz : 0.048683 dxz : 0.060777

```

```
iter : 52      dz : 0.036680 dxz : 0.058503
iter : 53      dz : 0.022835 dxz : 0.056427
iter : 54      dz : 0.008328 dxz : 0.054472
iter : 55      dz : 0.005717 dxz : 0.052606
iter : 56      dz : 0.018366 dxz : 0.050814
iter : 57      dz : 0.028940 dxz : 0.049087
iter : 58      dz : 0.036891 dxz : 0.047422
iter : 59      dz : 0.041863 dxz : 0.045814
iter : 60      dz : 0.043715 dxz : 0.044262
iter : 61      dz : 0.042532 dxz : 0.042762
iter : 62      dz : 0.038595 dxz : 0.041313
iter : 63      dz : 0.032350 dxz : 0.039914
iter : 64      dz : 0.024366 dxz : 0.038561
iter : 65      dz : 0.015291 dxz : 0.037255
iter : 66      dz : 0.005801 dxz : 0.035993
iter : 67      dz : 0.003442 dxz : 0.034774
iter : 68      dz : 0.011841 dxz : 0.033596
iter : 69      dz : 0.018891 dxz : 0.032458
iter : 70      dz : 0.024214 dxz : 0.031358
iter : 71      dz : 0.027569 dxz : 0.030296
iter : 72      dz : 0.028865 dxz : 0.029269
iter : 73      dz : 0.028152 dxz : 0.028278
iter : 74      dz : 0.025611 dxz : 0.027320
iter : 75      dz : 0.021534 dxz : 0.026394
iter : 76      dz : 0.016294 dxz : 0.025500
iter : 77      dz : 0.010317 dxz : 0.024636
iter : 78      dz : 0.004052 dxz : 0.023802
iter : 79      dz : 0.002066 dxz : 0.022996
iter : 80      dz : 0.007639 dxz : 0.022217
iter : 81      dz : 0.012332 dxz : 0.021464
iter : 82      dz : 0.015891 dxz : 0.020737
iter : 83      dz : 0.018154 dxz : 0.020034
iter : 84      dz : 0.019058 dxz : 0.019356
iter : 85      dz : 0.018632 dxz : 0.018700
iter : 86      dz : 0.016993 dxz : 0.018066
iter : 87      dz : 0.014332 dxz : 0.017454
iter : 88      dz : 0.010894 dxz : 0.016863
iter : 89      dz : 0.006959 dxz : 0.016292
iter : 90      dz : 0.002822 dxz : 0.015740
iter : 91      dz : 0.001227 dxz : 0.015207
iter : 92      dz : 0.004924 dxz : 0.014692
iter : 93      dz : 0.008048 dxz : 0.014194
iter : 94      dz : 0.010427 dxz : 0.013713
iter : 95      dz : 0.011953 dxz : 0.013249
iter : 96      dz : 0.012582 dxz : 0.012800
iter : 97      dz : 0.012330 dxz : 0.012366
iter : 98      dz : 0.011274 dxz : 0.011947
iter : 99      dz : 0.009538 dxz : 0.011542
iter : 100     dz : 0.007282 dxz : 0.011151
iter : 101     dz : 0.004691 dxz : 0.010774
iter : 102     dz : 0.001960 dxz : 0.010409
iter : 103     dz : 0.000719 dxz : 0.010056
iter : 104     dz : 0.003172 dxz : 0.009715
iter : 105     dz : 0.005251 dxz : 0.009386
iter : 106     dz : 0.006841 dxz : 0.009068
iter : 107     dz : 0.007869 dxz : 0.008761
iter : 108     dz : 0.008305 dxz : 0.008464
iter : 109     dz : 0.008159 dxz : 0.008178
iter : 110     dz : 0.007479 dxz : 0.007901
iter : 111     dz : 0.006347 dxz : 0.007633
iter : 112     dz : 0.004866 dxz : 0.007374
iter : 113     dz : 0.003161 dxz : 0.007125
iter : 114     dz : 0.001358 dxz : 0.006883
iter : 115     dz : 0.000415 dxz : 0.006650
```

```
iter : 116      dz : 0.002042 dxz : 0.006425
iter : 117      dz : 0.003425 dxz : 0.006207
iter : 118      dz : 0.004487 dxz : 0.005997
iter : 119      dz : 0.005180 dxz : 0.005794
iter : 120      dz : 0.005482 dxz : 0.005597
iter : 121      dz : 0.005399 dxz : 0.005408
iter : 122      dz : 0.004961 dxz : 0.005225
iter : 123      dz : 0.004223 dxz : 0.005048
iter : 124      dz : 0.003252 dxz : 0.004877
iter : 125      dz : 0.002129 dxz : 0.004711
iter : 126      dz : 0.000939 dxz : 0.004552
iter : 127      dz : 0.000234 dxz : 0.004398
iter : 128      dz : 0.001313 dxz : 0.004249
iter : 129      dz : 0.002233 dxz : 0.004105
iter : 130      dz : 0.002943 dxz : 0.003966
iter : 131      dz : 0.003410 dxz : 0.003831
iter : 132      dz : 0.003618 dxz : 0.003702
iter : 133      dz : 0.003572 dxz : 0.003576
iter : 134      dz : 0.003291 dxz : 0.003455
iter : 135      dz : 0.002809 dxz : 0.003338
iter : 136      dz : 0.002172 dxz : 0.003225
iter : 137      dz : 0.001433 dxz : 0.003116
iter : 138      dz : 0.000648 dxz : 0.003010
iter : 139      dz : 0.000128 dxz : 0.002908
iter : 140      dz : 0.000844 dxz : 0.002810
iter : 141      dz : 0.001456 dxz : 0.002714
iter : 142      dz : 0.001930 dxz : 0.002622
iter : 143      dz : 0.002244 dxz : 0.002534
iter : 144      dz : 0.002388 dxz : 0.002448
iter : 145      dz : 0.002363 dxz : 0.002365
iter : 146      dz : 0.002182 dxz : 0.002285
iter : 147      dz : 0.001868 dxz : 0.002207
iter : 148      dz : 0.001451 dxz : 0.002133
iter : 149      dz : 0.000965 dxz : 0.002060
iter : 150      dz : 0.000446 dxz : 0.001991
iter : 151      dz : 0.000067 dxz : 0.001923
iter : 152      dz : 0.000542 dxz : 0.001858
iter : 153      dz : 0.000949 dxz : 0.001795
iter : 154      dz : 0.001265 dxz : 0.001734
iter : 155      dz : 0.001477 dxz : 0.001675
iter : 156      dz : 0.001576 dxz : 0.001619
iter : 157      dz : 0.001563 dxz : 0.001564
iter : 158      dz : 0.001447 dxz : 0.001511
iter : 159      dz : 0.001243 dxz : 0.001460
iter : 160      dz : 0.000969 dxz : 0.001410
iter : 161      dz : 0.000649 dxz : 0.001362
iter : 162      dz : 0.000307 dxz : 0.001316
iter : 163      dz : 0.000033 dxz : 0.001272
iter : 164      dz : 0.000347 dxz : 0.001229
iter : 165      dz : 0.000618 dxz : 0.001187
iter : 166      dz : 0.000830 dxz : 0.001147
iter : 167      dz : 0.000972 dxz : 0.001108
iter : 168      dz : 0.001040 dxz : 0.001070
iter : 169      dz : 0.001034 dxz : 0.001034
iter : 170      dz : 0.000960 dxz : 0.000999
iter : 171      dz : 0.000826 dxz : 0.000965
iter : 172      dz : 0.000647 dxz : 0.000933
iter : 173      dz : 0.000436 dxz : 0.000901
iter : 174      dz : 0.000211 dxz : 0.000870
iter : 175      dz : 0.000014 dxz : 0.000841
iter : 176      dz : 0.000223 dxz : 0.000812
iter : 177      dz : 0.000403 dxz : 0.000785
iter : 178      dz : 0.000544 dxz : 0.000758
iter : 179      dz : 0.000639 dxz : 0.000733
```

```

iter : 180      dz : 0.000686 dxz : 0.000708
iter : 181      dz : 0.000684 dxz : 0.000684
iter : 182      dz : 0.000636 dxz : 0.000661
iter : 183      dz : 0.000549 dxz : 0.000638
iter : 184      dz : 0.000432 dxz : 0.000617
iter : 185      dz : 0.000293 dxz : 0.000596
iter : 186      dz : 0.000145 dxz : 0.000576

```

```

x_1 = X1;

if(converged == true)
    fprintf("L1 norm optimized solution found after %d iterations.\n",i);
elseif(converged == false)
    fprintf("Convergence failed\n")
    fprintf("Try : increasing the no: iteration, increasing the convergence
tol value, changing rho\n");
end

```

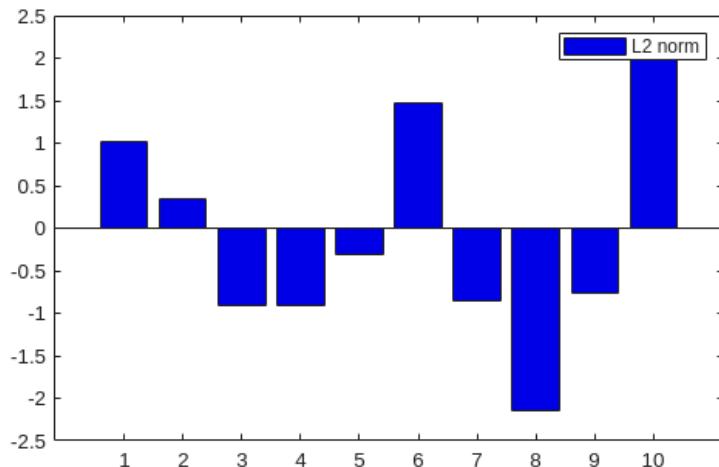
L1 norm optimized solution found after 187 iterations.

Plot to check the solution vector  $X$  and surrogate variable  $Z$

```

b2 = bar(x_2);%hold on;
b2.FaceColor = [0 0 0.9];
legend("L2 norm")

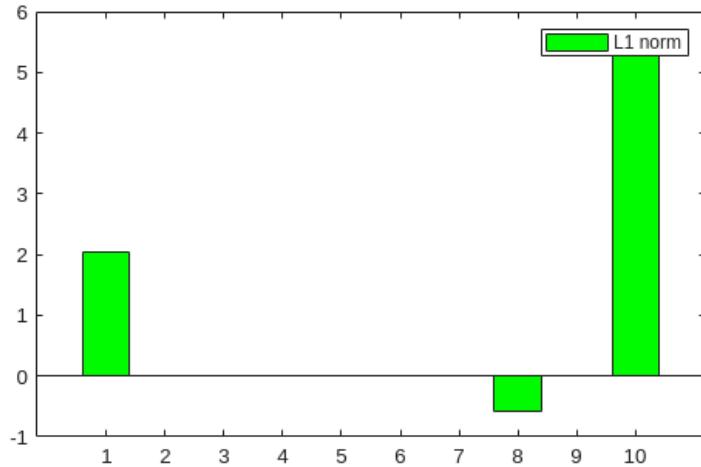
```



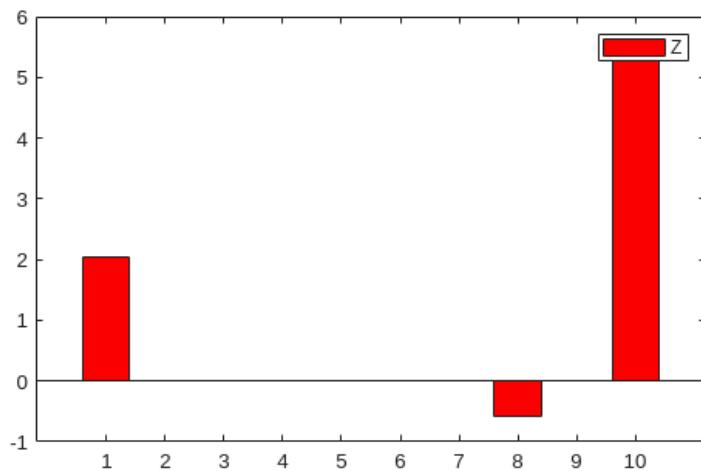
```

b1 = bar(x_1);%hold off
b1.FaceColor = [0 0.98 0];
legend("L1 norm")

```



```
b1 = bar(Z1);%hold off
b1.FaceColor = [0.98 0 0];
legend("Z")
```



Check the error vector  $Ax - b$

```
e1 = A*x_1-b
```

```
ans = 3x1
0.0017
0.0041
0.0010
```

```
e2 = A*x_2-b
```

```
ans = 3x1
10^-14 x
0.3553
```

```
0.3553
0.3553
```

Check the sparsity of the solution

```
sum(x_1 ~= 0)
```

```
ans =
3
```

```
sum(x_2 ~= 0)
```

```
ans =
10
```

```
cd( "/media/user/DATA4LINUX/new1/Repos/Mine/MFC4_22MAT230/" )
mlxfile = matlab.desktop.editor.getActive().Filename;
outfile = mlxfile + ".pdf"
export(matlab.desktop.editor.getActive().Filename, outfile);
```