

Uso de Pré-Compensador Dinâmico no Projeto de Controlador Robusto para Sistema MIMO Instável

E. J. Matos, R. N. Souza e J. R. B. Souza

Resumo — Este artigo aborda o problema do projeto de controladores do tipo LQG/LTR para sistemas multivariáveis instáveis. A proposta principal é projetar um pré-compensador estabilizador para estabilizar o sistema antes de se projetar o controlador LQG/LTR final. Com esta abordagem, resolvem-se os problemas que o procedimento convencional não dá conta de superar, mas a ordem do controlador completo fica significativamente aumentada.

Palavras-chave — Controladores LQG/LTR, Compensadores dinâmicos, Loopshaping, Sistemas Multivariáveis.

I. INTRODUÇÃO

O método LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery*) para o projeto de controladores foi introduzido na literatura técnica de controle por Doyle e Stein (1979) como um sucedâneo ao método LQG que visa restabelecer, ao menos em parte, as excelentes margens de ganho e de fase que os reguladores LQR (*Linear Quadratic Regulators*) possuem e que os reguladores com observadores não garantem, conforme demonstrado por Doyle (1978). O método pode ser aplicado tanto no projeto de controladores para sistemas SISO como também para sistemas MIMO, e ele possui duas versões alternativas que são escolhidas conforme as incertezas multiplicativas associadas ao modelo da planta sejam representadas na sua saída ou na sua entrada. O sucesso da aplicação do método requer que o sistema a ser controlado (a planta) seja de fase mínima, mas em princípio não existe nenhuma exigência de que ele deva ser estável.

A importância dos sistemas de controle do tipo LQG/LTR dentro de um contexto de aplicações envolve os mais variados segmentos da atividade humana. As referências (Jafar *et al.* 2006), (Kishor *et al.* 2004) e (Keller 2005), entre outras, mostram que a metodologia LQG/LTR está sendo incorporada nos diversos segmentos produtivos e estratégicos das sociedades industrializadas.

Basicamente, um regulador LQG/LTR é uma combinação de um regulador LQR e de um filtro de Kalman e, assim sendo, com a ajuda do Princípio da Separação (Faleiros e Yoneiama, 2002), prova-se que ele sempre garante a estabilidade do sistema controlado em malha fechada. Mais ainda, o regulador

contém zeros de transmissão que possuem o mesmo módulo dos modos dominantes da planta. Quando esses modos dominantes são estáveis, os zeros de transmissão do regulador LQG/LTR os cancelam perfeitamente. Quando os modos dominantes da planta são instáveis, os zeros de transmissão do regulador LQG/LTR aparecem simetricamente posicionados, referentemente ao eixo imaginário do plano-s, em relação aos ditos modos instáveis. Assim, ao fechar-se a malha do sistema, os modos dominantes instáveis da planta tendem a ser atraídos pelos zeros de transmissão do controlador, que são posicionados do outro lado do eixo imaginário.

A aproximação entre os modos instáveis da planta e os seus zeros de transmissão respectivos é tanto maior conforme se aumenta o ganho de malha do sistema, mas eles só coincidem (ou seja, só se cancelam) quando esse ganho tende para o infinito. O aumento excessivo desse ganho tende a excitar outros modos do sistema, estáveis e de altas frequências, cujos fatores de amortecimento (negativo das partes reais) e frequências de oscilação (partes imaginárias) tendem a diminuir e aumentar, respectivamente, à medida que se aumenta o ganho de malha do sistema, causando assim, na resposta ao degrau do sistema, oscilações de maior frequência, com maiores “overshoots” e amortecimentos mais lentos. Portanto, o benefício do cancelamento dos modos dominantes é descompensado pela excitação desses outros modos.

No caso de plantas com modos instáveis situados bem próximos do eixo imaginário, e dado que não se pode aumentar o ganho de malha, ocorre que, em malha fechada, esses modos migram para o semiplano esquerdo do plano-s, mas não chegam a ser cancelados, e assim eles passam a ter uma influência dominante sobre o sistema, por causa de seus posicionamentos nas proximidades do eixo imaginário. Dependendo dessa proximidade, o sistema controlado pode ter um desempenho não satisfatório em termos de oscilações, erro de regime permanente, acoplamentos, etc., conforme mostram os exemplos que constam no Capítulo 13 de Ridgely e Banda (1986).

Para contornar essa dificuldade originada pela natureza instável da planta, este artigo propõe o uso de um pré-compensador estabilizador que estabilize a planta antes de se fazer o projeto do controlador LQG/LTR. Este pré-compensador é projetado na forma de um compensador dinâmico tradicional (Brasch e Pearson, 1970).

Este trabalho está organizado da seguinte forma. As Seções 2 e 3 apresentam um breve resumo dos procedimentos para o projeto de compensadores dinâmicos e de controladores do tipo LQG/LTR, respectivamente. A Seção 4 apresenta um exemplo de aplicação do método proposto em cima de um sistema multivariável de sexta ordem com dois sinais de en-

Edson J. de Matos. - Universidade Federal do Pará. Email: edsonjm@ufpa.br

Raimundo Neves de Souza - CEFET - Centro Federal de Educação Tecnológica do Pará. Email: raneves@oi.com.br

J. R. Brito de Souza - Universidade Federal do Pará. Email: jrgbrito@ufpa.br.

trada e dois sinais de saída. A Seção 5 apresenta os comentários finais e conclusões do trabalho.

II. COMPENSADORES DINÂMICOS

Considere o seguinte modelo em espaço de estados de uma planta a ser controlada

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p \\ y_p &= C_p x_p\end{aligned}\quad (1)$$

cujas matrizes de transferência é dada por:

$$G_p(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p. \quad (2)$$

Caso o sistema (1) seja controlável e observável, podem-se posicionar arbitrariamente os seus pólos através do sinal de controle definido por:

$$u_p = u + v \quad (3)$$

onde o sinal v é gerado pelo compensador dinâmico mostrado na Figura 1, cujo modelo é definido por:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + Gy_p \\ v &= Hz + Jy_p\end{aligned}\quad (4)$$

e cuja matriz de transferência é dada por:

$$CD(s) = H(sI - F)^{-1}G + J. \quad (5)$$

A ordem do compensador dinâmico é dada pela equação:

$$n_{cd} = \min \{n_c, n_o\} - 1 \quad (6)$$

onde os inteiros n_c e n_o são os índices de controlabilidade e observabilidade do sistema (Kailath, 1980).

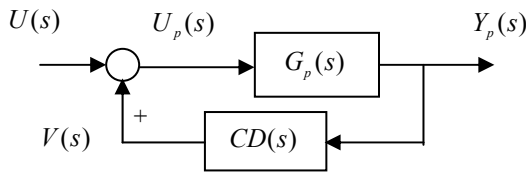


Figura 1. Planta com compensador dinâmico.

Após o acréscimo de (3) e (4) em (1), a representação em espaço de estados do sistema aumentado fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_p + B_p J C_p & B_p H \\ G C_p & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0_{n_{cd} \times m} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_p & 0_{p \times n_{cd}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ z \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7)$$

O cálculo das matrizes F , G , H e J do compensador dinâmico que posiciona arbitrariamente os pólos do sistema é feito com base em equações desenvolvidas em (Brash e Pear-

son, 1970). Rotinas computacionais que implementam essas equações estão disponíveis no apêndice de Makino (1997).

Para facilitar a notação no restante do trabalho, a partir deste ponto a Eq. (7) passa a ser definida por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (8)$$

cujas matrizes de transferência é definida por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (9)$$

III. CONTROLADORES DO TIPO LQG/LTR

O projeto de um controlador do tipo LQG/LTR é feito em duas etapas. No primeiro passo, projeta-se uma Malha de Referência $T_{FOL}(s)$ que possua boas características de resposta em frequência. No passo seguinte, o controlador $K(s)$ é projetado de tal forma que a matriz de transferência de malha aberta $G(s)K(s)$ tenha as mesmas características de $T_{FOL}(s)$.

A Malha de Referência deve ser projetada de tal forma que ela garanta ao sistema controlado em malha fechada as seguintes características: precisão estática de suas saídas com relação aos respectivos sinais de referência; capacidade de rejeição de distúrbios externos; habilidade para a filtragem de ruídos de medição; desacoplamento de seus diversos canais; e boa robustez para a acomodação das incertezas associadas com o modelo nominal da planta.

Para o cumprimento desses objetivos, são necessárias a adição de integradores e a imposição de algumas restrições sobre os ganhos principais da matriz de transferência $T_{FOL}(s)$. Esses ganhos são definidos pelos máximo e mínimo valores singulares da matriz $T_{FOL}(s)$, e basicamente eles devem ser baixos nas altas frequências e altos nas baixas frequências, respectivamente.

A. Adição de Integradores

A adição de integradores em série com a planta é um procedimento básico porque eles aumentam os ganhos do sistema nas baixas frequências e isso garante ao sistema boa precisão estática (erro em regime permanente nulo para sinal de referência degrau) e boa capacidade para rejeição de distúrbios. Além disso, os integradores possibilitam a equalização dos ganhos principais do sistema, o que é bom para a obtenção de desacoplamento entre os diversos canais do sistema.

Considerando-se que as incertezas do modelo nominal da planta sejam representadas na sua saída, então os integradores devem ser colocados na sua entrada, conforme a Figura 2, de onde se obtém

$$U(s) = \frac{I_m}{s} \bar{U}(s) \rightarrow \dot{u} = I_m \bar{u}. \quad (10)$$

Com isso, a representação do sistema aumentado torna-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_n & B_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \bar{u} \\ y &= \begin{bmatrix} C_{p \times n} & 0_{p \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} &= \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u} \\ y &= \bar{C} \bar{x} \end{aligned} \quad (12)$$

cuja matriz de transferência é dada por

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = G(s) \frac{I_m}{s}. \quad (13)$$

B. Malha de Referência com Equalização de Ganhos

A estrutura da Malha de Referência é dada por:

$$T_{FOL}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{\Gamma} \quad (14)$$

e sua completa especificação requer a determinação da matriz $\bar{\Gamma}$.

Para que haja desacoplamento entre todos os canais do sistema, os ganhos principais de $T_{FOL}(s)$ devem ser iguais em todas as frequências. Isso pode ser conseguido fazendo-se $T_{FOL}(s)$ igual a uma matriz diagonal do tipo $\frac{I_m}{s}$.

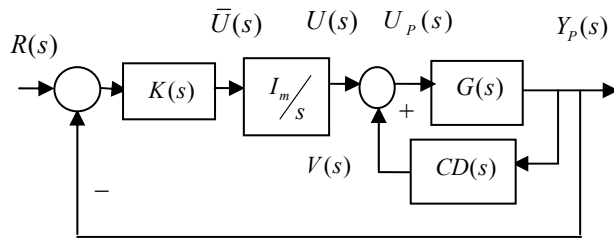


Figura 2. Sistema em malha fechada com integradores e controlador.

Escrevendo-se a Eq. (14) com o particionamento de (11), obtém-se

$$T_{FOL}(s) = \begin{bmatrix} C_{p \times n} & 0_{p \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_n - A_n)^{-1} & \frac{(sI_n - A_n)^{-1} B_{n \times m}}{s} \\ 0_{m \times n} & \frac{I_m}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

ou ainda

$$T_{FOL}(s) = C_{p \times n} (sI_n - A_n)^{-1} \Gamma_1 + C_{p \times n} \frac{(sI_n - A_n)^{-1} B_{n \times m}}{s} \Gamma_2 \quad (16)$$

Cruz (1996) mostra que a seguinte escolha de $\bar{\Gamma}$

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 \\ \bar{\Gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n^{-1} B_{n \times m} (C_{p \times n} A_n^{-1} B_{n \times m})^{-1} \\ -(C_{p \times n} A_n^{-1} B_{n \times m})^{-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

produz uma matriz $T_{FOL}(s)$ do tipo:

$$T_{FOL}(s) = \frac{I_m}{s}. \quad (18)$$

C. Projeto do Controlador

Uma vez definida a Malha de Referência, parte-se então para o projeto do controlador LQG/LTR, cuja matriz de transferência é dada por:

$$K(s) = K_c (sI - \bar{A} + \bar{B} K_c + K_F \bar{C})^{-1} K_F \quad (19)$$

a qual é obtida da seguinte representação em espaço de estados do controlador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (\bar{A} - \bar{B} K_c - K_F \bar{C}) \hat{x} - K_F (ref - y) \\ \bar{u} &= -K_c \hat{x} \end{aligned} \quad (20)$$

A matriz K_F dos ganhos do Filtro de Kalman é calculada pela equação:

$$K_F = \Sigma \bar{C}^T R_F^{-1} \quad (21)$$

onde a matriz Σ é a única solução positiva definida da equação:

$$\bar{A} \Sigma + \Sigma \bar{A}^T + \Sigma \bar{C}^T R_F^{-1} \bar{C} \Sigma + Q_F = 0 \quad (22)$$

onde $Q_F = \bar{\Gamma} \bar{\Gamma}^T$ e $R_F = \mu I_m$. O parâmetro escalar μ é usado para ajustar a máxima frequência de “crossover” dos ganhos principais de $G(s)K(s)$.

A matriz K_c dos ganhos do regulador LQR é calculada por:

$$K_c = R_c^{-1} B^T P \quad (23)$$

onde a matriz P é a única solução positiva definida da equação:

$$A^T P + P A - P B R_c^{-1} B^T P + Q_c = 0 \quad (24)$$

onde $R_c = \rho I_m$, com $\rho = 1$, e Q_c é calculada por:

$$Q_c = C^T C + q^2 C^T C, \quad q^2 \rightarrow \infty. \quad (25)$$

IV. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para ilustrar a abordagem proposta neste trabalho, consideramos o sistema de sexta ordem, com duas entradas e duas saídas, que é descrito por Ridgely e Banda (1986), e cuja representação é dada no Apêndice. Os modos do sistema (instáveis!) são:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -3.2503 & \lambda_2 &= -0.0360 \\ \lambda_{3,4} &= 0.1884 \pm j1.0511 & \lambda_5 = \lambda_6 &= -20\end{aligned}$$

e seu único zero de transmissão fica em -158.15 .

Inicialmente, tenta-se projetar um controlador do tipo LQG/LTR sem a estabilização prévia do sistema. Para isso, fazem-se vários projetos utilizando-se todos os recursos do método LQG/LTR — adição de integradores, equalização de ganhos, aumento do parâmetro de recuperação q^2 , aumento da largura de faixa, etc. Apesar disso tudo, o melhor projeto não evita a presença, na resposta ao degrau da segunda saída do sistema, de oscilações de baixa frequência (um sexto de Hertz) com lento amortecimento e amplitude inicial pico a pico de cerca de 14%, como se pode observar na Figura 3. Os sinais de controle neste caso são mostrados na Figura 4.

Analisando-se este resultado, conclui-se que, para o projeto de um controlador com melhor desempenho, é necessária a estabilização prévia do sistema.

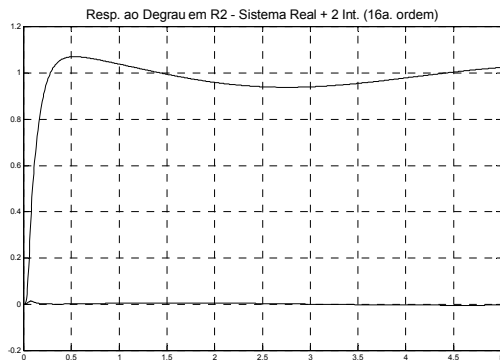


Figura 3. Saídas do sistema para degrau unitário aplicado na segunda referência.

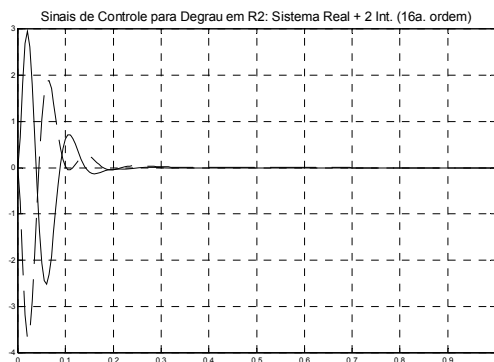


Figura 4. Sinais de controle para degrau unitário aplicado na segunda referência.

A. Estabilização do Sistema

Para a estabilização prévia do sistema, usa-se um pré-compensador de segunda ordem com a estrutura de um compensador dinâmico tradicional. Os modos instáveis do sistema são colocados em posições simétricas em relação ao eixo imaginário, os modos estáveis são mantidos em suas posições

originais e os dois modos associados com o compensador são posicionados em $\lambda_7 = -5$ e $\lambda_8 = -10$. Com essas especificações, obtém-se o seguinte resultado.

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} -15.78 & -58.23 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y_P \\ v &= \begin{bmatrix} 19.05 & 80.66 \\ 15.52 & 54.92 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1.23 & -1.23 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y_P\end{aligned}\quad (26)$$

Este compensador é adicionado ao sistema, que então passa a ser de oitava ordem e com a estrutura definida nas Equações (8)-(9). As características de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema compensado são mostradas na Figura 5.

B. Obtenção da Malha de Referência com Adição de Integradores

Dado que o ganho principal inferior do sistema é baixo, pode-se aumentá-lo mediante a adição de integradores nos seus canais de entrada (considera-se que as incertezas do modelo são representadas na saída da planta). A adição desses integradores também possibilita a equalização dos ganhos principais do sistema aumentado, que passa a ser de décima ordem.

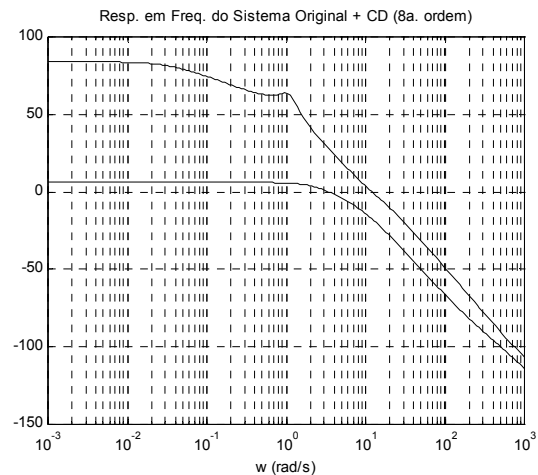


Figura 5. Ganhos principais da planta com o compensador estabilizador.

Usando-se os procedimentos resumidos nas Subseções 3.1 e 3.2, determina-se a seguinte matriz $\bar{\Gamma}$:

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0035 & -0.0022 \\ -0.0671 & 0.0414 \\ 0 & 1 \\ -0.2759 & 0 \\ 0.0980 & -0.0001 \\ 0 & 0 \\ 0.0172 & 0.0172 \\ -0.4353 & -0.1594 \\ 0.1547 & 0.0566 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

C. Projeto do Observador (Filtro de Kalman)

Para uma frequência de “*crossover*” especificada em 10 rad/s, determina-se, com o uso iterativo das Equações (21)-(22), o valor de $\mu = 0.01$. Com esse valor e o de $\bar{\Gamma}$ dado na Equação (27), obtém-se:

$$K_F = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0.0351 & -0.0217 \\ -0.6706 & 0.4142 \\ 0 & 10 \\ -2.7589 & 0.0003 \\ 0.98 & -0.0014 \\ 0 & 0 \\ 0.1717 & 0.1717 \\ -4.3529 & -1.5937 \\ 1.5472 & 0.5657 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

As características de resposta em frequência dos ganhos principais da matriz de transferência

$$T_{KF}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} K_F \quad (29)$$

são mostradas na curva superior da Figura 6 (que na verdade são duas curvas perfeitamente superpostas). Essa curva mostra que: 1) os ganhos principais são iguais em todas as frequências; 2) a especificação para a frequência de “*crossover*” é atendida; 3) os ganhos são altos nas baixas frequências; 4) os ganhos diminuem 20 dB por década nas altas frequências. Além disso, por ser a Equação (29) a matriz de transferência de um Filtro de Kalman, ela possui excelentes propriedades de robustez. Portanto, em face de todas essas boas características, ela serve como modelo a ser emulado pelo sistema controlado $G(s)K(s)$.

D. Projeto Final do Controlador $K(s)$

A última etapa na realização do projeto do controlador $K(s)$ especificado na Equação (19) é a determinação do ganho K_c do regulador. Essa determinação leva em conta a necessidade de $G(s)K(s)$ emular a matriz de transferência da Equação (29). Isso é feito com o auxílio das Equações (23)-(25). Escolhendo-se $q^2 = 10^8$, obtém-se:

$$K_c = \begin{bmatrix} 6.8385 & 7.1110 \\ -0.2495 & 0.2085 \\ -0.3840 & -0.3607 \\ -7.4664 & 6.6977 \\ 0.5286 & -0.2815 \\ -0.2828 & 0.5440 \\ 1.8222 & 1.2515 \\ 7.9702 & 3.6692 \\ 0.1398 & -0.0401 \\ -0.0401 & 0.1420 \end{bmatrix}^T \times 10^3. \quad (30)$$

Esta matriz completa o projeto do controlador $K(s)$, que é de décima ordem e tem a representação em espaço de estados definida pelas Equações (19)-(20).

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais de $G(s)K(s)$, ou seja, do sistema controlado em malha aberta, são as duas curvas inferiores mostradas na Figura 6. Nota-se que, até uma frequência de aproximadamente 50 rad/s, essas curvas acompanham os ganhos da matriz $T_{KF}(s)$. Acima dessa frequência, os ganhos de $G(s)K(s)$ decrescem mais rapidamente do que os ganhos de $T_{KF}(s)$. Isso é bom para melhorar a filtragem de ruídos eventualmente presentes nos sinais de saída do sistema que são realimentados.

O desempenho do sistema controlado pode ser verificado na Figura 7, que mostra os dois sinais de saídas do sistema em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado na referência R_1 , e na Figura 8, que mostra os dois sinais de saídas em resposta a uma referência do tipo degrau aplicado em R_2 . Nota-se nessas duas figuras um desacoplamento quase absoluto entre os dois canais do sistema. Isso é uma decorrência da equalização dos ganhos principais de $G(s)K(s)$. Notam-se também erros de regime permanente nulos para as duas saídas, o que é devido aos altos ganhos de $G(s)K(s)$ nas baixas frequências, os quais são proporcionados pelos integradores adicionados nos dois canais de entrada do sistema. Observa-se também, nas referidas figuras, que todas as respostas do sistema são rápidas e sem oscilações. Os sinais de controle que atuam no sistema nos dois casos referidos no parágrafo anterior são mostrados nas Figuras 9 e 10.

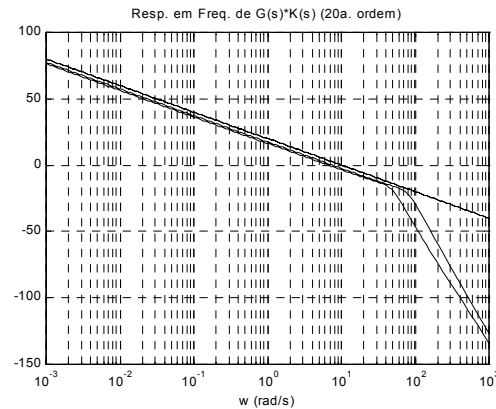


Figura 6. Ganhos principais de $G(s)K(s)$ versus os ganhos principais de $T_{KF}(s)$.

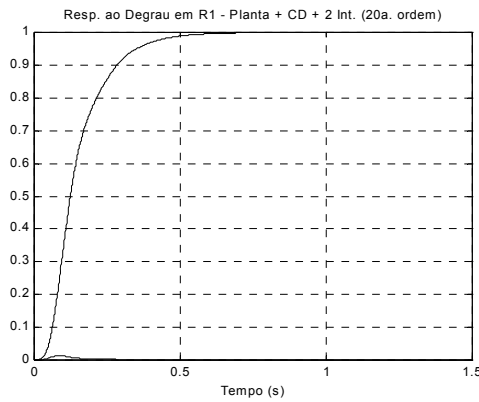


Figura 7. Saídas do sistema para degrau unitário aplicado na primeira referência.

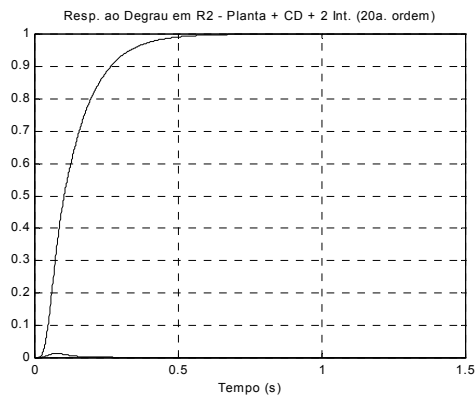


Figura 8. Saídas do sistema para degrau unitário aplicado na segunda referência.

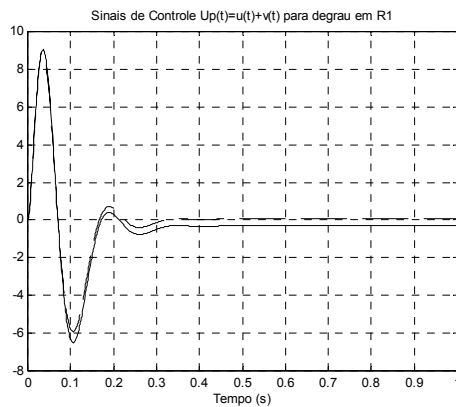


Figura 9. Sinais de controle $up(t)$ para degrau unitário aplicado na primeira referência.

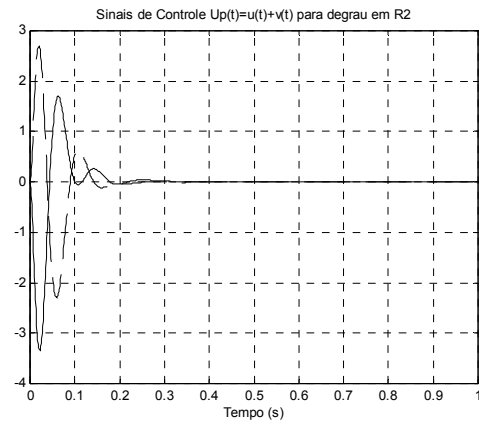


Figura 10. Sinais de controle $up(t)$ para degrau unitário aplicado na segunda referência.

V. CONCLUSÕES

Este trabalho aborda o problema do projeto de controladores robustos para sistemas multivariáveis instáveis, com ênfase especial para o caso de sistemas cujos modos instáveis ficam situados nas proximidades do eixo imaginário. Para esses sistemas, o método LQG/LTR, mesmo com o uso de todas as suas opções, não produz controladores que proporcionem bom desempenho ao sistema.

Para superar essas limitações, propõe-se a estabilização prévia do sistema com o uso de compensadores dinâmicos. O trabalho mostra, através de exemplo, que o uso dessa abordagem proporciona resultados excelentes. A desvantagem é o aumento da ordem do controlador, acarretado pela inclusão do pré-compensador, sendo esse o preço a se pagar para a obtenção de um controlador que oferece ao sistema um excelente desempenho.

REFERÊNCIAS

- [1] Doyle, J. C. e Stein, G. (1979). Robustness with Observers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-24, n°. 4, pp. 607-611.
- [2] Doyle, J. C. (1978). Guaranteed Margins for LQG Regulators, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-23, n°. 4, pp. 756-757.
- [3] Faleiros, A. C. e Yoneiama, T. (2002). Teoria Matemática de Sistemas. Editora Arte & Ciência, São Paulo, SP.
- [4] Jafar, Zarei, Montazeri Allahyar, Motlagh Mohammad Reza Jahed and Javad Poshtan (2006). Design and comparison of LQG/LTR and Hinf controllers for a VSTOL Flight control System. *IEEE* pp. 1-18.
- [5] Ridgely, D. B. e Banda, S. S. (1986). Introduction to Robust Multivariable Control. Technical Report n°. AFWAL-TR-85-3102, Flight Dynamic Laboratory, Patterson-Wright Air Force Base, USA.
- [6] Brasch, F. M. e Pearson, J. B. (1970). Pole Placement Using Dynamic Compensator. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-15, n°. 1, pp. 34-43.
- [7] Kailath, T. (1980). Linear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [8] Keller, J.P. (2005). Interactive Control System Design. *Control Engineering and Practice* 14, 177 - 184.
- [9] Kishor, Nand, Saini R.P. and Dr.S.P.Singh (2004). LQG/LTR Controller for Speed Governing of Hydro-Turbine. *IEEE*. pp. 1125 -1128.
- [10] Makino, M. S. T. (1997). Projeto de Compensadores Dinâmicos para Posicionamento de Pólos. Trabalho de Conclusão de Curso, DEEC/CT/UFPA, Belém, PA.

- [11] Cruz, J. J. (1996). Controle Robusto Multivariável. Editora da USP, São Paulo, SP.

APÊNDICE

A representação em espaço de estados do sistema considerado na Seção 4 (Exemplo de Aplicação) foi retirada do Capítulo 13 de Ridgely e Banda (1986) e é transcrita a seguir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.08527 & -0.0001423 & -0.9994 & 0.04142 & 0 & 0.1862 \\ -46.86 & -2.757 & 0.3896 & 0 & -124.3 & 128.6 \\ -0.4248 & -0.06224 & -0.06714 & 0 & -8.792 & -20.46 \\ 0 & 1 & 0.0523 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Edson Jorge de Matos. Graduado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1993). Possui os títulos de especialista em Matemática Superior pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (1996) e mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001). Atualmente, é Professor Assistente III da Universidade Federal do Pará, atuando no Campus Universitário de Bragança-PA.

Raimundo Neves de Souza. Graduado em Matemática (1983) e em Engenharia Elétrica (1985) pela Universidade Federal do Pará. Possui o título de mestre em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1999). Atualmente, é Professor Permanente do Centro Federal de Educação Tecnológica do Pará e Professor da Universidade da Amazônia.

Jorge Roberto Brito de Souza. Graduado em Engenharia Elétrica, opção Eletrônica, pela Universidade Federal do Pará (1977). Possui os títulos de Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina (1981) e Ph. D. em Engenharia Elétrica pela Universidade do Missouri-Rolla (1990). Atualmente, é Professor Titular do Departamento de Engenharia Elétrica e da Computação da Universidade Federal do Pará. Atua na área de Teoria e Aplicações de Sistemas de Controle, com ênfase em controle robusto, controle descentralizado e aplicações em sistemas de geração de energia e processos industriais em geral.