



## **BACHARELADO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO**

**ANA LAURA LISBÔA SIQUEIRA**

**ELIAS BARRETO DE CASTRO**

### **CONTROLE MODERNO EM ESPAÇO DE ESTADOS DE UM PÊNDULO INVERTIDO COM MODELAGEM NÃO LINEAR**

**Campos dos Goytacazes/RJ**

**2013**

**ANA LAURA LISBÔA SIQUEIRA**  
**ELIAS BARRETO DE CASTRO**

**CONTROLE MODERNO EM ESPAÇO DE ESTADOS DE UM  
PÊNDULO INVERTIDO COM MODELAGEM NÃO LINEAR**

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense como requisito parcial para conclusão do Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Mestrando Edson Simões

Campos dos Goytacazes/RJ

2013



## **AGRADECIMENTOS**

Aos mestres pelos ensinamentos, e em especial ao professor, Edson Simões pelo suporte e orientação em todo o projeto.

## **DEDICATÓRIA**

Aos nossos queridos familiares e amigos pelo suporte e companheirismo, aos nossos namorados, Bárbara Manhães e Marcelo Rocha, pelo carinho, paciência e companhia nessa caminhada. Às nossas mães, Gezilda Barreto e Laura Lisbôa, pelas sementes geradas e aos padrinhos pelo incentivo na busca contínua do conhecimento.

## RESUMO

Para acompanhar o aumento da complexidade e modernização dos sistemas, houve uma crescente necessidade de avanço nas técnicas de controle dos mesmos. Notou-se que os controles convencionais existentes não suportavam realizar o controle de sistemas tão complexos com várias variáveis. Iniciou-se então a fase do controle moderno. O pêndulo invertido é um conceito muito difundido na área de controle moderno e automação. Um dos algoritmos de controle amplamente aplicado nesta área é fazer o movimento do carro em conformidade com a estabilidade do pêndulo invertido. Neste trabalho foi desenvolvido um controlador multi-variáveis num modelo matemático não linear de pêndulo invertido com representação em espaço de estados. O sistema tem a variável “força” como entrada e as variáveis de estado: ângulo, velocidade angular, posição e velocidade linear como saídas a serem controladas utilizando um vetor de controle com ganho agendado, que possibilite a estabilização do sistema respeitando as restrições de projeto.

**Palavras-chave:** Controle moderno; Pêndulo invertido; Espaço de estados.

## **ABSTRACT**

Following the complexity and systems modernization, that have been growing fast, there was a necessity to improve the technique of control of them. It was observed that the existing control's technique wasn't enough to control advanced and complexity systems with many variables. In this period that the modern control phase started. The inverted pendulum is the most used conception in the control and automation. Your algorithm is widely used, your goal is to get the equilibrium of the pendulum and equilibrate the system, car plus pendulum. Was developed a multivariable controller in a math no linear model with space-state. The system has one variable like input and four outputs to control using a gain schedule vector, that turn possible the system's stabilization respecting the project restriction.

**Key-words:** modern control; inverted pendulum; space-state.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Sistema do pêndulo invertido .....	13
Figura 1.2: Lançamento de um foguete.....	14
Figura 1.3: Veículo de transporte humano.....	15
Figura 1.4: Movimento do pêndulo e o movimento de apoio FPS .....	16
Figura 1.5: Representação da deformação e compensação das estruturas .....	16
Figura 1.6: Estratégia de Controle por Momento de Inércia .....	17
Figura 1.7: Representação de um sistema .....	22
Figura 1.8: Diagrama de blocos de espaço de estados .....	23
Figura 2.1: Modelo Esquemático do Pêndulo Invertido .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
Figura 2.2: Pêndulo Livre.....	41
Figura 3.1: Resultado da saída da variável ângulo .....	54
Figura 3.2: Resultado da variável de saída velocidade angular.....	55
Figura 3.3: Resultado da saída da variável posição .....	55
Figura 3.4: Resultado da variável velocidade linear.....	56
Figura 3.5: Resultado da variável de estado z1 .....	57
Figura 3.6: Resultado da variável de estado z2 .....	58
Figura 3.7: Resultado da variável de estado z3 .....	58
Figura 3.8: Resultado da variável de estado z4 .....	59



## SUMÁRIO

RESUMO .....	6
ABSTRACT .....	7
LISTA DE FIGURAS .....	8
1 INTRODUÇÃO .....	10
1.1 Justificativa .....	11
1.2 Objetivo .....	11
1.3 Organização e disposição dos capítulos .....	12
2 MÉTODOS E FERRAMENTAS .....	13
2.1 Conceito de pêndulo invertido .....	13
2.2 Aplicação do pêndulo invertido .....	14
2.3 Teoria de modelagem .....	18
2.3.1 Modelos Não-Lineares .....	18
2.4 Espaço de estados .....	19
2.4.1 Definição de Estado .....	20
2.4.2 Variáveis de Estado .....	20
2.4.3 Vetor de Estado .....	21
2.4.4 Espaço de estado .....	21
2.5 Equações no Espaço de Estados .....	21
2.5.1 Representação de sistemas dinâmicos em espaço de estados .....	24
2.5.2 Análise de sistema de controle no espaço de estados .....	27
2.6 Controlabilidade .....	27
2.7 Observabilidade .....	30
2.7.1 Observabilidade completa de sistema de tempo contínuo .....	32
2.8 Estabilizabilidade .....	33
2.9 Detectabilidade .....	33
2.10 Fórmula de Ackermann .....	33
2.11 Técnicas adaptativas .....	36
2.11.1 Uso do controle adaptativo .....	36
2.11.2 Ganho programado .....	37
2.12 Software de simulação contínua .....	38
3 DESENVOLVIMENTO .....	40
3.1 Modelagem Mecânica .....	40
3.2 Modelagem no Espaço de Estados .....	43
3.2.1 Definição da matriz A .....	45
3.2.2 Definição da matriz B .....	46
3.2.3 Definição da matriz C .....	46
3.2.4 Definição da matriz D .....	47
3.2.5 Representação das funções de transferência no espaço de estados na forma canônica controlável .....	47
3.2.6 Condições necessárias e suficientes para alocações de pólos .....	48
3.3 Elaboração do projeto de controle .....	50
4 RESULTADOS .....	54
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	60
5.1 Conclusão .....	60
Referências Bibliográficas .....	61

## 1 INTRODUÇÃO

Nos séculos XVII e XVIII, foram criados diversos dispositivos de controle visando resolver alguns problemas práticos. Mas foi a revolução industrial no século XVIII, com o desenvolvimento de processos industriais, que deu o grande impulso ao desenvolvimento das técnicas de controle. Um dos problemas comuns à época era o controle da velocidade de teares. James Watt, famoso matemático e engenheiro escocês, que se destacou com suas melhorias nos modelos a vapor, desenvolveu um sistema de controle usando o chamado pêndulo de Watt como sensor de velocidade. Isto permitia o controle em malha fechada da velocidade controlando a injeção de combustíveis nas máquinas a vapor. Eventualmente, tais sistemas apresentavam um comportamento instável, o que levou a uma pesquisa teórica da razão deste comportamento. O início da Segunda Guerra mundial estimulou a pesquisa em sistemas de controle, visando ao uso militar. Outros desenvolvimentos se seguiram, inclusive com o aparecimento da técnica do lugar das raízes, criada por Evans em 1947. A teoria de controle ao final dos anos 1950 já consistia em um corpo de conhecimento consolidado, com forte ênfase em técnicas baseadas no uso de métodos de frequências e com muitas aplicações industriais. No entanto a demanda por novas técnicas, especialmente no crescente setor aeroespacial, impulsionou o desenvolvimento do chamado controle moderno. Atualmente, a teoria de controle é bastante extensa, mas a relação entre vários os aspectos foi melhor estabelecida. Assim, as técnicas da frequência para sistemas que possuem múltiplas variáveis foram desenvolvidas e a relação entre o domínio do tempo e da frequência foram melhor compreendidas. (<http://www.labspot.ufsc.br/~aguinald/ensino/eel7063/control.pdf>)

Devido a grande necessidade da realização de tarefas complexas e com requisito de boa precisão, surgiu uma tendência nos sistemas de engenharia de aumentar sua complexidade, pois as tradicionais aproximações lineares (linearização em torno de um ponto de operação) são cada vez menos representativas da planta real. Sistemas complexos podem ter múltiplas entradas e saídas e podem ser variantes no tempo. A necessidade de satisfazer esses requisitos cada vez mais rigorosos quanto ao desempenho de sistemas de controle, o aumento de complexidade dos sistemas e a facilidade de acesso aos computadores de grande porte, ensejaram o desenvolvimento da teoria de controle moderno, como uma forma de analisar e de projetar sistemas de controle complexos. (<http://www.labspot.ufsc.br/~aguinald/ensino/eel7063/control.pdf>)

O controle do pêndulo invertido é um dos exemplos mais importantes na teoria de controle moderno e é frequentemente citado em diversas literaturas de controle. Esta estrutura é um sistema não linear cuja complexidade torna o controle por vezes impraticável e a implementação de um controlador para este sistema requer uma série de considerações e de simplificações.

O sistema consiste em um pêndulo invertido preso a um carrinho motorizado que pode se movimentar livremente no eixo  $x$ . O objetivo do controle é manter o pêndulo equilibrado na posição vertical, mesmo quando perturbações são aplicadas ao sistema, por exemplo, uma força aplicada ao carrinho ou o deslocamento do pêndulo de um ângulo não nulo. Para o melhor entendimento da dinâmica do pêndulo invertido, pode ser feita uma analogia com um equilibrista de pratos ou de corda bamba, onde cada um busca controlar a posição do centro de gravidade mantendo-se em cima da corda ou não deixando os pratos caírem.

## **1.1 Justificativa**

Para aplicar, solidificar o conhecimento e as técnicas de controle adquiridas ao longo do curso, o projeto escolhido para ser desenvolvido e implementado foi um sistema de controle moderno para uma planta de características não lineares. Também por oferecer um alto grau de complexidade para o controle, onde o controle convencional poderia representar perda de informações importantes para sistemas com altos níveis de exigências, além de não ser aplicado em sistemas com múltiplas variáveis.

O pêndulo invertido foi escolhido por representar um sistema não linear e por possuir características de instabilidade. A modelagem é feita em Espaço de Estados, pois este providencia uma uniforme e poderosa representação de sistemas com múltiplas variáveis de ordem arbitrária, podendo ser variantes e invariantes no tempo.

## **1.2 Objetivo**

Este projeto visa realizar a modelagem e o controle de um pêndulo invertido sobre um carrinho, utilizando técnicas apropriadas para um modelo matemático não linear representado no Espaço de Estados.

O intuito é avaliar a resposta do sistema, quando submetido a distúrbios com critérios de desempenho pré-definidos, como tempos de acomodação e sobre sinal.

### **1.3 Organização e disposição dos capítulos**

Capítulo 2 – Métodos e Ferramentas: Este capítulo faz uma contextualização teórica dos métodos e ferramentas utilizados, além de oferecer uma base conceitual necessária para o entendimento da proposta deste projeto, dentre eles: Pêndulo invertido, modelagem, modelos em espaço de estado, controle em espaço de estados, fórmula de Ackermann e técnicas adaptativas de controle. Para o leitor familiarizado com a teoria abordada, a leitura deste capítulo torna-se dispensável.

Capítulo 3 - Desenvolvimento: Nesse capítulo é apresentado e detalhado todo o desenvolvimento realizado nesse trabalho, tais como: modelagem mecânica, modelagem em espaço de estados e elaboração do projeto de controle.

Capítulo 4 - Resultados: Este capítulo apresenta os resultados finais obtidos após a elaboração, análise e testes de projeto, ou seja, as respostas de saída do controlador.

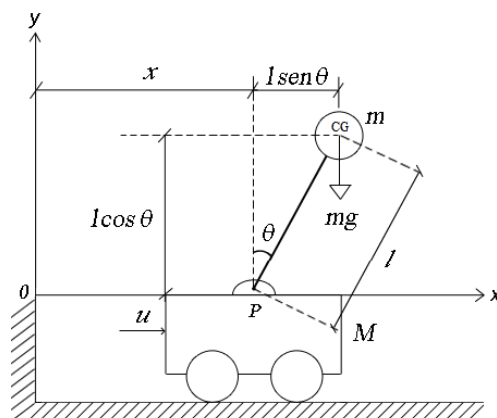
Capítulo 5 – Considerações Finais: Este capítulo apresenta as conclusões e considerações finais do projeto em relação à proposta inicial do trabalho.

## 2 MÉTODOS E FERRAMENTAS

### 2.1 Conceito de pêndulo invertido

Segundo PRADO, Igor Ferreira (2011), a planta para implementação do pêndulo invertido tem como elemento atuador um carro que se desloca no eixo  $x$  e tem fixada uma haste, com eixo livre no plano formado pelos eixos  $x$  e  $y$ , que tende a cair com o sistema em repouso, como mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Sistema do pêndulo invertido



Fonte: OGATA, Katsuhiko (2003)

Observa-se na Figura 2.1 que a estabilidade do pêndulo invertido se dá por meio de seu posicionamento em paralelo com o eixo vertical, contudo, devido a não linearidade do modelo matemático, uma vez que não esteja posicionado na vertical ele não irá manter-se em equilíbrio tendendo a cair. Para evitar sua queda buscou-se através de um controlador manipular uma força atuante no carro para que haja um deslocamento horizontal do ponto em que está fixado o pêndulo, este deslocamento tende a manter o ângulo de inclinação próximo a zero mantendo, assim, o pêndulo na posição vertical.

## 2.2 Aplicação do pêndulo invertido

A dinâmica do pêndulo invertido móvel tem sido utilizada em várias aplicações, como, por exemplo, o controle de posição de sistemas instáveis como veículos espaciais na fase de lançamento como o da Figura 2.2, onde o objetivo do problema de controle de posição é manter o foguete na posição vertical (OGATA 2003).

Figura 2.2: Lançamento de um foguete



*Fonte: (O GLOBO 2013)*

Na Figura 2.2, verifica-se que os propulsores do foguete atuam como a força que o carro aplica na base do pêndulo para atuar no seu equilíbrio. Os veículos espaciais, se não forem corretamente dirigidos na vertical, tal como o pêndulo, caem para um dos lados.

Os sistemas dos veículos espaciais estão se tornando cada vez mais complexos e autônomos, transferindo a tomada de decisão para bordo das aeronaves e fazendo com que sejam capazes de tomar decisões e definir passos a serem realizados a partir de objetivos, não sendo mais necessário que as ordens sejam detalhadas no solo, o que diminui a comunicação necessária e proporciona decisões em tempo real, de acordo com as condições encontradas pela aeronave (KUCINSKIS, 2012).

Não só os veículos espaciais estão se modernizando e baseando-se na técnica de controle do pêndulo invertido, mas também os veículos de transporte humano. Uma aplicação muito

recente são os veículos da Figura 2.3, com duas rodas, movidos por motores elétricos, cuja movimentação não está limitada a um eixo somente.

Figura 2.3: Veículos de transporte humano

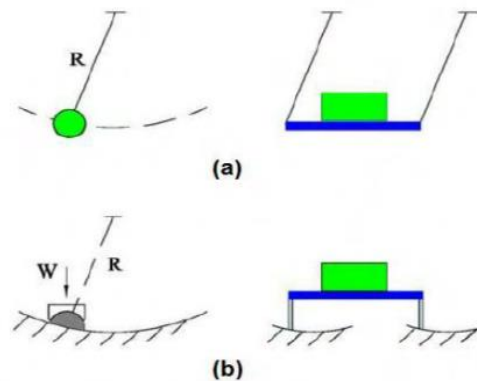


Fonte: (SEGWAY GINNON, 2009)

O modelo de veículo da Figura 2.3 (a) com capacidade de transporte, de apenas um usuário, têm o nome Segway e é produzido por uma empresa norte-americana com o mesmo nome. Tal como o pêndulo invertido, o Segway mantém-se automaticamente na posição vertical, por ação da motorização elétrica controlada eletronicamente. Atualmente, já estão sendo comercializados modelos capazes de transportar até mesmo dois usuários, como o da Figura 2.3 (b), este, fruto de uma união entre as empresas Segway Inc.® e General Motors®, o que futuramente pode se apresentar como alternativa de transporte automático para áreas urbanas, incluindo sua utilização por deficientes físicos, dada a sua versatilidade, reduzida dimensão e facilidade de utilização.

Com o desenvolvimento das tecnologias que envolvem a construção civil, também se desenvolveram técnicas para proteção de edifícios em áreas propensas a abalos sísmicos, que utilizam a técnica de pêndulo invertido, como por exemplo, o *Sistema Pendular com Atrito (FPS-Friction Pendulum System)*. A diferença entre o mecanismo de um FPS e o convencional pode ser visualizado na Figura 2.4 a seguir.

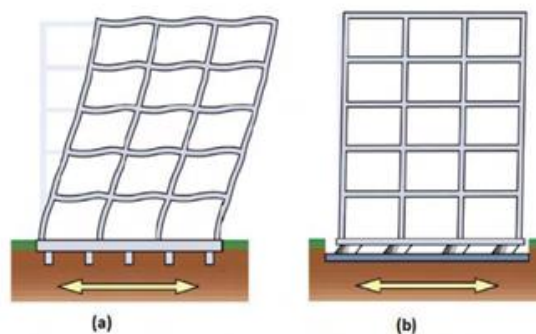
Figura 2.4: Movimento do pêndulo e o movimento de apoio FPS



*Fonte: ESTEVES (2010)*

Os aparelhos FPS apresentam um mecanismo de funcionamento semelhante a um pêndulo conforme mostra a Figura 2.4 (b). Após sofrerem um deslocamento devido a uma ação sísmica, a estrutura volta à sua posição inicial devido ao peso da estrutura e à geometria esférica da superfície de deslizamento dos dispositivos isoladores (ESTEVES, 2010). A superfície esférica de deslizamento na base do edifício funciona como o carrinho do pêndulo, que se movimenta horizontalmente para compensar o movimento de queda de sua haste, da mesma forma que o mecanismo esférico do FPS tenta compensar o movimento de inclinação do edifício. Se comparada com a estrutura com compensação na base, a deformação padrão de uma estrutura de base fixa convencional é bastante diferente, como pode ser vista na Figura 2.5.

Figura 2.5: Representação da deformação e compensação das estruturas



*Fonte: ESTEVES (2010)*

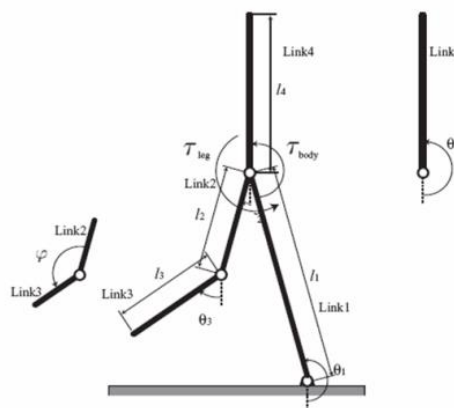


Verifica-se na Figura 2.5 (a), que a estrutura sem compensação apresenta elevado grau de deformação ao nível dos pisos, ao contrário da estrutura com compensação de base da Figura 2.5 (b), que apenas apresenta deslocamentos laterais ao nível dos apoios, sendo que a superestrutura se comporta como um corpo rígido (ESTEVEES, 2010). Este tipo de controle aplicado nos sistemas FPS que atua na dissipação de energia do sistema, quando submetido a distúrbios, é denominado Controle passivo.

Segundo Yamasak (2001), outra área que tem aplicado conceitos da dinâmica do pêndulo invertido, resultado do grande progresso tecnológico dos últimos anos é a área da robótica, no que se refere ao estudo da locomoção de robôs bípedes. A geração de uma locomoção robusta é ainda um problema difícil de ser resolvido, nomeadamente devido ao grande número de graus de liberdade que compõem os robôs e principalmente à grande instabilidade da locomoção com duas pernas. Este tipo de robô levanta muitos problemas, porque a sua estabilidade não é um problema trivial.

O modelo dinâmico do pêndulo invertido pode ser usado na modelagem do perfil de caminhada humana e em mecanismos de caminhada bípede para tais robôs. Movimentos de corrida também podem ser alcançados usando estratégias de controle baseadas no pêndulo invertido, como por exemplo, o método de controle apresentado por Yamasak (YAMASAK, 2001) para a movimentação de robôs humanoides, ilustrado abaixo (Figura 2.6).

Figura 2.6: Estratégia de Controle por Momento de Inércia



Fonte: YAMASAK (2001)

Yamasak (YAMASAK, 2001) apresenta um método de controle de movimentação de robôs humanoides que se baseia na seguinte ideia: durante a fase onde apenas uma perna está apoiada ao chão, considera-se a perna que está apoiada como sendo um sistema contendo um pêndulo invertido. Como pode ser visto na Figura 2.6, a perna que está em movimento é considerada como o sistema de um pêndulo com dois graus de liberdade. Combinando os dois sistemas, o sistema do pêndulo invertido deve ter energia suficiente para suportar a perna. Esse método de controle prioriza o baixo consumo de energia.

Esses modelos biomecânicos do modo de caminhar dos seres humanos têm muitas aplicações em áreas como: esportes, fabricação de calçados, robótica e, principalmente, em próteses de parte do corpo humano.

## **2.3 Teoria de modelagem**

Phillips e Harbor (1997) acreditam que o modelo matemático de um sistema é definido como um conjunto de equações usado para representar o sistema físico. Levando em consideração que nenhum modelo matemático de sistema é exato, mas que deve ser o mais próximo possível, essa proximidade pode ser encontrada com o aumento da complexidade de suas equações, porém, nunca será obtida à exatidão. Geralmente faz-se um esforço para desenvolver um modelo mais simples e que seja adequado ao sistema, facilitando, desta forma, os cálculos. Afirma-se que a modelagem de um sistema representa cerca de 80 a 90% de esforço requerido na análise e projeto dos sistemas de controle.

### **2.3.1 Modelos Não-Lineares**

A utilização de técnicas de controle baseadas em modelos lineares é, em parte, devido à simplicidade dos modelos empregados para representar o comportamento do processo, no entanto, isto também constitui uma deficiência potencial porque tais modelos são inadequados quando se faz necessária uma melhor aproximação de um processo. Por outro lado, os esquemas de controle não lineares, os quais empregam modelos mais realistas e, portanto, mais complexos, para a descrição de processos não lineares, eliminam a simplicidade

associada às técnicas lineares. Este modelo possibilita, assim, uma representação mais fiel do processo quando esse se faz necessário. Apesar de apresentar uma complexidade maior, apenas a representação através de um modelo não linear permite a análise de algumas características do sistema como oscilações e **bifurcações**.

## **2.4 Espaço de estados**

Ogata (2003) defende que com a modernização de sistemas de engenharia, a tendência é ter um aumento de suas complexidades em virtude, principalmente, da necessidade de realizar tarefas complexas e de alta precisão. Esses novos sistemas podem ter entradas e saídas múltiplas e também ser variantes no tempo, o que tornaria impossível a utilização da teoria de controle convencional. Em razão da necessidade de atender às crescentes e rigorosas exigências de desempenho dos sistemas de controle ao aumento da complexidade dos sistemas e ao acesso fácil e em larga escala aos computadores, a teoria de controle moderno, que é uma nova abordagem para a análise, e o projeto de sistemas de controle complexos, têm sido desenvolvida desde aproximadamente 1960. A teoria de controle moderno contrasta com a teoria de controle convencional, porque a primeira pode ser aplicada a sistemas de entradas e saídas múltiplas, que podem ser lineares ou não, enquanto a última é aplicável somente a sistemas lineares, invariantes no tempo, de saídas e entradas únicas. A teoria de controle moderno é, também, essencialmente uma abordagem no domínio do tempo, enquanto a teoria de controle convencional é uma abordagem no domínio da frequência complexa.

Segundo Haffnern (2005), na Tabela abaixo é apresentada uma comparação entre os métodos de controle empregando a função de transferência e empregando as variáveis de estado. Pela observação da tabela, pode-se constatar que a técnica de variáveis de estado é mais genérica que a técnica da função de transferência. Entretanto, a aplicação efetiva desta técnica requer geralmente um maior conhecimento do processo e uma análise matemática mais detalhada.

Quadro 1: Relação entre Função de transferência X Espaço de estados

Itens avaliados	Representação de sistemas	
	Função de transferência	Espaço de estados
Condições iniciais não nulas	Menos adequado	Mais adequado
Resposta em frequência	Mais adequado	Menos adequado
Sistema multivariáveis	Menos adequado	Mais adequado
Sistemas Variantes do tempo	Menos adequado	Mais adequado
Sistemas não lineares	Menos adequado	Mais adequado

HAFFNERN (2005)

Os conceitos de estado, variáveis, vetor de estado, espaço e equações de estado, segundo Ogata (2003), são definidos a seguir.

#### 2.4.1 Definição de Estado

O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, de forma que o conhecimento dessas variáveis em  $t = t_0$ , juntamente com o conhecimento da entrada para  $t \geq t_0$ , determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$ .

#### 2.4.2 Variáveis de Estado

As variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que constituem o menor conjunto de variáveis capaz de determinar o estado desse sistema dinâmico. Se pelo menos  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são necessárias para descrever todo o comportamento do sistema dinâmico (de tal modo que, sendo dada a entrada para  $t \geq t_0$  e especificado o estado inicial em  $t = t_0$ , o estado futuro do sistema fique completamente determinado), então essas  $n$  variáveis formam um conjunto de variáveis de estado. As variáveis que não representam

grandezas físicas e aquelas que não são nem mensuráveis ou observáveis podem ser escolhidas como variáveis de estado. Essa liberdade de escolha das variáveis de estado é uma vantagem dos métodos de espaço de estados. Na prática, entretanto, é conveniente escolher, se possível, para variáveis de estado, grandezas que sejam facilmente mensuráveis, porque as leis de controle ótimo requerem a realimentação de todas as variáveis de estado com a ponderação adequada.

### 2.4.3 Vetor de Estado

Se forem necessárias  $n$  variáveis de estado para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então essas  $n$  variáveis de estado poderão ser consideradas os  $n$  componentes do vetor  $x$ . Esse vetor é chamado de vetor de estado. Assim, um vetor de estado é aquele que determina, univocamente, o estado do sistema  $x(t)$  para qualquer instante  $t \geq t_0$ , uma vez dado o estado em  $t = t_0$  e especificada a entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$ .

### 2.4.4 Espaço de estado

O espaço  $n$ -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis de estado, é chamado de espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estado.

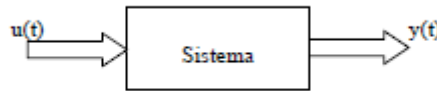
## 2.5 Equações no Espaço de Estados

A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entradas, variáveis de saídas e variáveis de estado. A representação de um dado sistema no espaço de estado não é única, mas o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer uma das diferentes representações do mesmo sistema, no espaço de estado.

O sistema dinâmico deve conter elementos que memorizem os valores de entrada  $t \geq t_0$ . Uma vez que os integradores, em um sistema de controle de tempo contínuo, servem como dispositivos de memória, as saídas desses integradores podem ser consideradas variáveis que definem o estado interno do sistema dinâmico. Desse modo, as saídas dos integradores podem ser escolhidas como variáveis de estado. O número de variáveis de estado que definem completamente a dinâmica de um sistema é igual ao número de integradores existentes no sistema.

Dado o sistema, conforme a Figura 2.7 abaixo:

Figura 2.7: Representação de um sistema



*Fonte: própria.*

Onde  $u(t)$  e  $y(t)$  são grandezas vetoriais. O número de variáveis de estado para descrever completamente a dinâmica de um sistema é igual ao número de integradores envolvidos no sistema. Para um sistema com  $n$  integradores,  $r$  entradas e  $m$  saídas, teremos então:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}$$

As saídas de  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  serão:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_n(t) &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}$$

Podemos definir:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

Logo,

$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \Rightarrow$  equação de estado

$y(t) = g(x, u, t) \Rightarrow$  equação de saída

Se linearizadas sobre o espaço de operação, teremos:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

onde,

$A(t) \Rightarrow$  matriz de estado

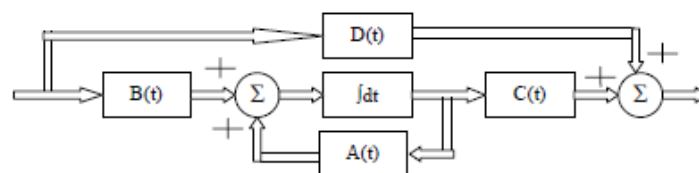
$B(t) \Rightarrow$  matriz de entrada

$C(t) \Rightarrow$  matriz de saída

$D(t) \Rightarrow$  matriz de transmissão direta

Em diagrama de blocos, temos:

Figura 2.8: Diagrama de blocos de espaço de estados



Fonte: HAFFNER (2005)

Caso A, B, C e D sejam representados nas formas A(t), B(t), C(t) e D(t), então, o sistema é variante no tempo (LTV), senão, o sistema é dito invariante no tempo (LTI).

### 2.5.1 Representação de sistemas dinâmicos em espaço de estados

Segundo Ogata (2003), um sistema dinâmico, que consiste em um número finito de elementos concentrados, pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias, nas quais o tempo é a variável independente. Utilizando-se a notação vetorial-matricial, uma equação diferencial de ordem  $n$  pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem. Se  $n$  elementos do vetor formam um conjunto de variáveis de estado, então, a equação diferencial vetorial-matricial é uma equação de estado.

Seja:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y$$

Definimos:

$$\begin{bmatrix} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Então teremos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = a_n x_1 - \dots a_1 x_n + u \end{bmatrix}$$

Ou

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde,



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E a saída vale

$$y = [b_n - a_n b_0, b_{n-1} - a_{n-1} b_0, \dots, b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Ou

$$y = Cx$$

Representação no espaço de estados de sistemas de equações diferenciais de ordem  $n$  em que a função de excitação envolve termos em derivada.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

Definindo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u^{(n)} + b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \end{aligned}$$

E  $x_1 = y$

Temos que o conjunto de variáveis acima não define o estado do sistema e o método anterior não pode ser usado, pois  $x_1 = y$  pode não fornecer uma solução única. Redefinindo as variáveis de estado, podemos ter.

$$\begin{aligned} x_1 &= y - b_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - b_0 \dot{u} - b_1 u = \dot{x}_1 - b_1 u \\ x_3 &= y - b_0 u - b_1 \dot{u} + b_2 u = \dot{x}_2 - b_2 u \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u$$

Onde,

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0$$

Isto garante a unicidade da solução, então:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u$$

$$\dot{x}_n = a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u$$

Logo a representação no espaço de estados da forma canônica controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0, b_{n-1} - a_{n-1} b_0, \dots, b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Então,

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = Cx + du$$

### 2.5.2 Análise de sistema de controle no espaço de estados

Ogata (2003) define que, um sistema moderno complexo pode apresentar múltiplas variáveis de entrada e saída e elas podem estar interrelacionadas de maneira complexa. Para analisar esse sistema é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas, bem como recorrer aos computadores para a maioria dos processamentos tediosos necessários à análise. A abordagem com base no espaço de estados é a mais apropriada para analisar o sistema por esse ponto de vista.

Enquanto a teoria de controle convencional é fundamentada na relação entrada-saída, ou função de transferência, a teoria de controle moderno é fundamentada na descrição de um sistema de equações em termos de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem. O uso de uma notação vetorial-matricial simplifica bastante a representação matemática do sistema de equações. O aumento do número das variáveis de estado, do número de entradas e do número de saídas não aumenta a complexidade das equações.

## 2.6 Controlabilidade

Um sistema será dito controlável no instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito. Um sistema será dito observável no instante  $t_0$  se, com o sistema no estado  $x(t_0)$ , for possível determinar esse estado a partir da observação de saída durante um intervalo de tempo finito (OGATA, 2003).

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman, famoso matemático e engenheiro húngaro, que ficou mundialmente conhecido pelo filtro de Kalman. Eles têm papel importante no projeto de sistema de controles no espaço de estados. De fato, as condições de controlabilidade e observabilidade podem ditar a existência de uma solução completa para o problema de projetos de sistema de controle. A solução desse problema pode não existir, se o sistema considerado é não controlável. Embora a maioria dos sistemas físicos seja controlável e observável, os correspondentes modelos matemáticos podem não exibir a propriedade de controlabilidade e de observabilidade.

Considere o sistema de tempo contínuo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Onde,

$x$  = vetor de estado (vetor  $n$ )

$u$  = sinal de controle (escalar)

$A$  = matriz  $n \times n$

$B$  = matriz  $n \times 1$

O sistema citado será dito de estado controlável em  $t = t_0$  se for possível construir um sinal de controle não limitado que transfira o sistema de um estado inicial para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Se todo estado for controlável, então, o sistema será considerado de estado completamente controlável.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o estado final seja a origem do espaço de estados e o instante inicial seja nulo ou  $t_0 = 0$ .

A solução da equação pode ser descrita como:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

Aplicando a definição dada de controlabilidade completa de estado dada, temos:

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

Ou

$$x(0) = - \int_0^{t_1} e^{A\tau} Bu(\tau)d\tau$$

Onde,

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\tau)A^k$$

Substituindo as equações, temos

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\tau)A^k B \int_0^{t_1} a_k(\tau)u(\tau)d\tau$$

Colocando

$$\int_0^{t_1} a_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k$$

Então, a equação se torna:

$$\begin{aligned} x(0) &= - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \\ &= - \langle B|AB| \dots |A^{n-1}B \rangle \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se o sistema for de estado completamente controlável, então, dado qualquer estado inicial  $x(0)$ , a equação acima deverá ser satisfeita. Isso requer que o posto da matriz  $n \times n$

$$\langle B|AB| \dots |A^{n-1}B \rangle$$

Seja  $n$ .

A partir dessa análise, estabelecemos as condições para controlabilidade completa de estado, como se segue: o sistema ( $\dot{x} = Ax + Bu$ ) é de estado completamente controlável se, e somente se, os vetores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  forem linearmente independentes ou a matriz  $n \times n$

$$\langle B|AB| \dots |A^{n-1}B \rangle$$

Tiver posto  $n$ .

O resultado obtido pode ser entendido ao caso em que o vetor de controle  $u$  seja de dimensão  $r$ . Se o sistema descrito por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Onde,  $u$  é um vetor de dimensão  $r$ , então, pode-se provar que a condição para controlabilidade completa de estado é que a matriz  $n \times nr$ .

$$\langle B | AB | \dots | A^{n-1}B \rangle$$

Tenha posto  $n$  ou contenha  $n$  vetores-coluna linearmente independentes. A matriz

$$\langle B | AB | \dots | A^{n-1}B \rangle$$

É comumente denominada matriz de controlabilidade.

## 2.7 Observabilidade

Considerando o sistema sem excitação descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

Onde,

$x$ = vetor de estado (vetor  $n$ )

$y$ = vetor de saída (vetor  $m$ )

$A$ = matriz  $n \times n$

$C$ = matriz  $m \times n$

O sistema será considerado completamente observável se todo estado  $x(t_0)$  puder ser determinado pela observação de  $y(t)$  durante um intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . O sistema é, portanto, completamente observável se cada transição de estado puder afetar cada elemento do vetor de saída. O conceito de observabilidade é útil na solução de problemas de reconstrução de variáveis de estado não mensuráveis a partir de variáveis mensuráveis, no menor intervalo possível de tempo (OGATA, 2003).

O conceito de observabilidade é muito importante porque, na prática, a dificuldade encontrada com o controle por realimentação de estado é que algumas das variáveis de estado não são acessíveis por medição direta, resultando ser necessário estimar a variável de estado não mensurável para construir os sinais de controle.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Então,

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

E  $y(t)$  é:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du$$

Como as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são conhecidas e  $u(t)$  é também conhecido, os dois últimos termos do lado direito dessa última equação são quantidades conhecidas. Portanto, eles podem ser subtraídos do valor observado  $y(t)$ . Consequentemente, para investigar uma condição necessária e suficiente para observabilidade completa é suficiente considerar o sistema descrito pelas equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

### 2.7.1 Observabilidade completa de sistema de tempo contínuo

Considerando o sistema anterior. O vetor de saída  $y(t)$  é:

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

Onde,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

Logo,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0)$$

Ou,

$$y(t) = a_0(t)Cx(0) + a_1(t)CAx(0) + \dots + a_{n-1}CA^{n-1}x(0)$$

Se o sistema é completamente observável, então, dada a saída  $y(t)$  durante um intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $x(0)$  é unicamente determinado pela equação anterior. Pode-se mostrar que isso requer que o posto da matriz  $n \times m$   $X$   $n$ .

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Seja  $n$ .

A partir dessas análises, pode-se estabelecer a condição de observabilidade completa de um sistema. O sistema descrito nas equações anteriores, é completamente observável se, e somente se, o posto da matriz  $n \times m$   $X$   $n$



$$\langle C^* | A^* C^* | \dots | (A^*)^{n-1} C^* \rangle$$

For  $n$  ou tiver  $n$  vetores-coluna linearmente independentes. Essa matriz é denominada matriz de observabilidade.

## 2.8 Estabilizabilidade

Antes de ser definido o conceito de estabilizabilidade é necessário conhecer sobre autovalores:

Os autovalores de uma matriz  $A_{(n \times n)}$  são as raízes da equação característica  $|\lambda I - A| = 0$ . Dessa forma, os autovalores da matriz do sistema na forma de variáveis de estado são equivalentes aos polos do sistema em malha fechada. Portanto, se o autovalor for real positivo o sistema será naturalmente instável, em contrapartida, caso seja real negativo o sistema será naturalmente estável.

Ogata (2003) diz que um sistema parcialmente controlável será considerado estabilizável se os modos não controláveis forem estáveis e os modos instáveis forem controláveis. Portanto, caso o sistema possua autovalores reais negativos não controláveis e possua autovalores reais positivos controláveis, é chamado de estabilizável.

## 2.9 Detectabilidade

Partindo do mesmo conceito de estabilizabilidade, um sistema parcialmente observável será dito detectável se os modos não observáveis forem estáveis e os modos observáveis forem instáveis. Portanto, caso o sistema possua autovalores reais negativos não observáveis e possua autovalores reais positivos observáveis, é chamado de detectável.

## 2.10 Fórmula de Ackermann

Segundo Phillips e Harbor (1997), J. E. Ackermann desenvolveu uma forma que

permite encontrar o ganho do controlador de realimentação de estado facilmente. Para a dedução, inicia-se expandindo a equação característica de malha fechada,

$$\begin{aligned} |ZI - A + BK| &= (Z - P_1)(Z - P_2) \dots (Z - P_n) \\ &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n z + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Substituindo  $A$  no lado direito da equação no lugar de  $z$ ,

$$\tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \alpha_2 \tilde{A}^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = \phi(\tilde{A}) = 0$$

Agora fazendo as multiplicações,

$$I = I$$

$$\tilde{A} = B - AK$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A^2} &= (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BKA + (BK)^2 = A^2 - ABK - BK(A - BK) \\ &= A^2 - ABK - BK\tilde{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A^3} &= (A - BK)^3 = (A - BK)^2(A - BK) = (A^2 - ABK - BK\tilde{A})(A - BK) \\ &= A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A} \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\widetilde{A^n} = (A - BK)^n = A^n - A^{n-1}BK - \dots - BK\tilde{A}^{n-1}$$

Então a equação fica,

$$\begin{aligned}
& \alpha_n I + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_{n-2} \tilde{A}^2 + \dots + \tilde{A}^n \\
& = \alpha_n I + \alpha_{n-1} I(A - BK) + \alpha_{n-2} (A^2 - ABK - BK\tilde{A}) + A^n - A^{n-1}BK - \dots \\
& \quad - BK\tilde{A}^{n-1}
\end{aligned}$$

Observando que a primeira linha do lado direito é  $\phi(A)$

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_{n-1}BK - \alpha_{n-2}(ABK + BK\tilde{A}) - \dots - A^{n-1}BK - \dots - BK\tilde{A}^{n-1}$$

Que pode ser inscrito como:

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \langle B|AB| \dots |A^{n-1}B \rangle \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\tilde{A} + \dots + K\tilde{A}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\tilde{A} + \dots + K\tilde{A}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = 0$$

Observa-se que a matriz  $\langle B|AB| \dots |A^{n-1}B \rangle$  é a matriz de controlabilidade, então:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\tilde{A} + \dots + K\tilde{A}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\tilde{A} + \dots + K\tilde{A}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = \langle B|AB| \dots |A^{n-1}B \rangle^{-1} \phi(A)$$

Sobrou apenas o K na n-ésima linha e ele pode ser extraído multiplicando ambos os lados por  $[0 \ 0 \ \dots \ 1]$ , assim:

$$\begin{aligned}
& [0 \ 0 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\tilde{A} + \dots + K\tilde{A}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\tilde{A} + \dots + K\tilde{A}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} \\
& = [0 \ 0 \ \dots \ 1][B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1} \phi(A)
\end{aligned}$$

Então, têm se que:

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1][B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1}\phi(A)$$

Esta é a fórmula de Ackermannn, que é baseada em uma transformação de similaridade que converte um dado modelo de estado na forma canônica de controle, e então os ganhos são determinados. As soluções para os ganhos de realimentação são transformadas novamente de modo que possam ser aplicadas aos estados originais do sistema.

## 2.11 Técnicas adaptativas

Segundo Franklin, Powell e Workman (2006), as variações na planta de um sistema de controle podem causar impactos severos na performance e na estabilidade. Por esta razão, os projetos de sistema de controle tem um algoritmo de controle muito desejado, que se reformula de acordo com as alterações na planta. Este é o principal assunto do controle adaptativo. Existem muitas definições razoáveis para o termo adaptativo. Vale a pena notar que sempre existe uma amigável discussão entre os engenheiros de controle sobre a definição de controle adaptativo. Uma definição é que o controlador adaptativo é um sistema de controle que é projetado de um ponto de vista adaptativo. Outra definição é que o controle adaptativo é qualquer sistema de controle que monitora e realiza ajustes para melhorar a performance. Segundo Åström e Wittenmark (1988, apud FLANKLIN, POWELL e WORKMAN, 2006), o controle adaptativo pode ser definido como um sistema de controle composto de um *loop* rápido para controle, e um *loop* lento ajuste de controle. Nesse caso, a definição do termo adaptativo é para “modificar de acordo com as mudanças de circunstâncias”. Quase todos os sistemas de controles adaptativos modificam-se sob as mudanças de circunstâncias.

### 2.11.1 Uso do controle adaptativo

Para se projetar um sistema de controle, devem ser definidos quatro critérios básicos:

- 1) Um modelo de planta que seja controlável e o range de sua validade.
- 2) Os valores dos parâmetros do modelo e suas esperadas variações.
- 3) Os objetivos da performance.
- 4) As restrições do projeto, como os custos das ações de controle, limites de autoridade do controle e o custo pretendido do controlador.

De acordo com o segundo item da lista, o projeto pode-se tornar caro em casos de uma variação larga da planta. Se um parâmetro fixo do controle automático do sistema é usado, a variação do parâmetro afeta diretamente a capacidade de encontrar as especificações do projeto sob todas as condições de operação. Se um controlador adaptativo é usado, as variações do parâmetro são de acordo com o preço do acréscimo da complexidade do controlador e, portanto, no custo da implementação do projeto. É este custo versus performance, escolhas que deve-se examinar cuidadosamente na escolha da estrutura de controle. Um controle adaptativo com certeza é mais complexo do que um controle com parâmetros fixos e carrega com ele um mecanismo de falha mais complexo. Além disso, o controle adaptativo é usado tanto em sistemas variantes no tempo e sistemas não lineares, aumentando assim a dificuldade de estabilidade e análises de performances. Portanto, a decisão de usar um controle adaptativo deve ser cuidadosa. A crescente complexidade dos controladores adaptativos e suas respectivas dificuldades de execução que talvez tenha levado a opção de controladores mais óbvios e simples, tais como o ganho agendado.

#### 2.11.2 Ganho programado

Segundo Franklin, Powell e Workman (2006), os algoritmos de controles são escolhidos, baseados em algumas condições de operação, assim o ganho programado é classificado como adaptativo. Desde que os parâmetros de controle sejam projetados off-line com a informação de qual é sua prioridade, a principal contribuição do ganho programado, é a identificação adequada do vetor de controle que será usado. As simulações são geralmente usadas para examinar a transição de uma região para a outra, ou seja, de onde se deve usar um ganho fixo, ou um ganho programado. Deve-se notar que frequentes questões de estabilidade

são contornadas pela existência de diversas pequenas regiões e assegurando que o controlador passará de uma para outra sem ficar preso em “fronteiras”. Ou seja, o controlador será capaz de realizar o controle em diversas regiões sejam elas de ganho fixo ou agendado. Está fundamentado que para poucas regiões que são alteradas raramente, ou possuem parâmetros que são alterados muito devagar, a estabilidade do sistema pode ser assegurada se cada parte da lei de linearidade for examinada, isso se essas leis forem fixadas. Portanto, o ganho programado é geralmente considerado como dependente de alguma variação lenta de parâmetro. O método é um sofisticado conceito frequentemente usado para avaliar a estabilidade do sistema. Infelizmente, na prática, a análise de estabilidade do ganho programado consiste na realização de um acompanhamento mais próximo dos sistemas de simulações.

## **2.12 Software de simulação contínua**

No presente trabalho foi utilizado o MATLAB<sup>®</sup> que é um software com uma linguagem de alto nível e um ambiente interativo para computação numérica, visualização e programação. Usando o MATLAB<sup>®</sup>, pode-se analisar os dados, desenvolver algoritmos, criar modelos e aplicações. Sua linguagem, ferramentas e funções matemáticas permitem explorar múltiplas abordagens e chegar a uma solução mais rápida do que com planilhas ou linguagens de programação tradicionais.

Este software pode ser utilizado para uma gama de aplicações, incluindo processamento de sinais e comunicação, processamento de imagem e vídeo, sistemas de controle, teste e medição, finanças computacionais e biologia computacional.

Segundo Gilat (2006), o MATLAB<sup>®</sup> é uma linguagem poderosa em termos de computação técnica. O nome MATLAB<sup>®</sup> vem da junção das palavras MATrix LABoratory, devido à base operacional do software, que são as matrizes. É um software bastante versátil em cálculos matemáticos, modelagens e simulações, análises numéricas e processamentos, visualização e gráficos, desenvolvimento de algoritmos, etc.

Atualmente, o MATLAB<sup>®</sup> é largamente utilizado nas universidades, nas faculdades, nos cursos introdutórios ou cursos avançados de matemática, ciências e, especificamente, nas engenharias. Na indústria, o software alcançou o status de ferramenta de pesquisa, projeto e desenvolvimento. O pacote-padrão do MATLAB<sup>®</sup> possui ferramentas (funções) comuns a

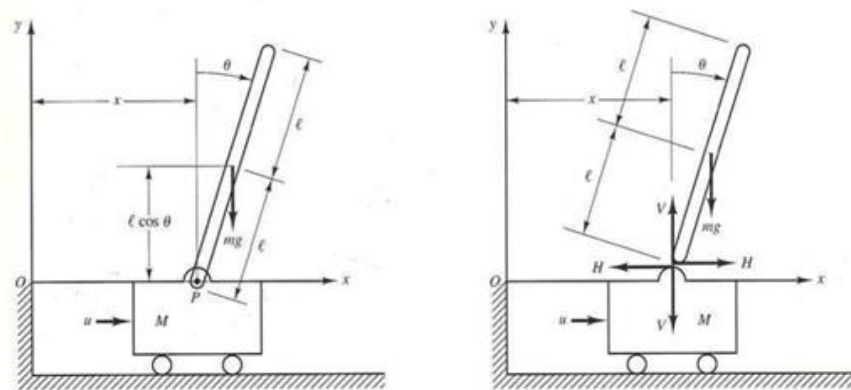
diversas áreas do conhecimento. Além disso, o MATLAB<sup>®</sup> disponibiliza uma série de ferramentas adicionais (toolbox) que formam uma coleção de programas especiais projetados para resolver problemas específicos. Dentre as ferramentas mais utilizadas no pacote de toolbox, pode-se citar: processamento de sinais, cálculos simbólicos (literais), sistemas de controle e Lógica Fuzzy (GILAT, 2006).

### 3 DESENVOLVIMENTO

#### 3.1 Modelagem Mecânica

Sabendo que o pêndulo pode se movimentar de forma independente do carro e em planos distintos, o modelo matemático terá duas equações dinâmicas cuja solução fornecerá o deslocamento linear  $x(t)$  e angular  $\theta(t)$  do sistema. O esquema deste modelo pode ser visto na Figura 3.1 abaixo.

Figura 3.1: Modelo Esquemático do Pêndulo Invertido



Fonte: OGATA (2003)

Para obtermos as equações do movimento, vamos considerar o diagrama de corpo livre apresentado na Figura 3.1 (b) e admitindo a representação das variáveis como a indicada abaixo:

$\theta$  - inclinação da haste em relação à linha vertical;

$CG$  - Centro de gravidade do pêndulo;

$\ell$  - Distância entre uma extremidade e o centro de gravidade do pêndulo;

$M$  - Massa da plataforma;



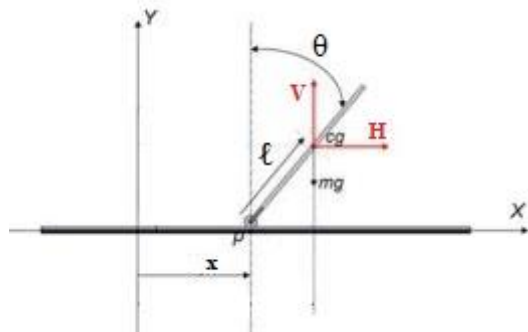
$m$  - Massa do pêndulo, uniformemente distribuída;

$I$  - Momento de inércia do pêndulo em relação ao  $CG$ ;

$u(t)$  - Força externa, contínua no tempo, aplicada pelo motor à plataforma.

A Figura 3.2 mostra os vetores das forças atuantes no movimento do pêndulo. A partir das variáveis e dos vetores demonstrados foi feita a modelagem do pêndulo.

Figura 3.2: Pêndulo Livre



Fonte: própria

Onde,

$V$  = força referente ao eixo vertical;

$H$  = força referente ao eixo horizontal;

$mg$  = força peso.

Analisando primeiro o movimento de rotação da haste e considerando o centro de gravidade como o ponto de referência para a nossa análise, as coordenadas do centro de gravidade são dadas por:

$$x_g = x + \ell \sin(\theta) \quad (\text{Equação 1})$$

$$y_g = \ell \cos(\theta) \quad (\text{Equação 2})$$

De acordo com o diagrama de corpo livre, as forças que exercem torque no centro de gravidade são dadas por  $V$  e  $H$ , o peso atua exatamente no centro de gravidade. Lembrando que o torque é igual ao momento de inércia da haste, em relação ao seu centro de gravidade multiplicado pela aceleração angular ( $\ddot{\theta}$ ). E que a força que exerce o torque é perpendicular ao pêndulo, determinamos assim, a equação que descreve o movimento rotacional da haste em torno do seu centro de gravidade:

$$I\ddot{\theta} = H\ell \cos(\theta) + V\ell \sin(\theta) \quad (\text{Equação 3})$$

Para eliminarmos  $V$  e  $H$  da expressão obtida acima, precisamos analisar os movimentos horizontal e vertical do centro de gravidade da haste. Pode-se perceber que na horizontal, a única força agindo é  $H$ , logo, ela é responsável pela aceleração do centro de gravidade da haste do pêndulo nessa direção, ou seja,

$$H = m\ddot{x}_g \quad (\text{Equação 4})$$

Por outro lado, na vertical temos a ação de  $V$  e da força peso  $mg$ , cuja resultante acelera o centro de gravidade da haste nessa direção, ou seja,

$$V - mg = m\ddot{y}_g \quad (\text{Equação 5})$$

A equação de movimento horizontal do carro pode ser descrita como

$$M\ddot{x} = u(t) - H \quad (\text{Equação 6})$$

Para padronizar e simplificar a modelagem, as equações de movimento horizontal e vertical do pêndulo, de movimento do carro e de torque serão representadas em função de  $x$ ,  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  e suas derivadas, caracterizando a não-linearidade do sistema.

Utilizando as expressões das coordenadas do centro de massa, obtemos:

$$H = m[\ddot{x} + \ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)] \quad (\text{Equação 7})$$

$$V - mg = m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (\text{Equação 8})$$

Substituindo a Equação 7 na Equação 6, temos:

$$M\ddot{x} = u(t) - m\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta} \cos \theta + m\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

E substituindo a Equação 7 e 8 na Equação 3, a expressão que representa o torque do pêndulo torna-se:

$$I\ddot{\theta} = m\ell \sin \theta [g + (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)] - \ell \cos \theta [m(\ddot{x} + \ell\ddot{\theta} \cos \theta - \ell\dot{\theta}^2 \sin \theta)]$$

### 3.2 Modelagem no Espaço de Estados

Por se tratar de um sistema com quatro variáveis de entrada e saída, consideraremos o nosso vetor  $x$ , como:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

Onde:

$x_1 = \theta$  (movimentos em função do ângulo) e  $x_3 = x$  (movimentos em função da posição)

Considerando:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x} = x_4$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{\theta} = \dot{x}_2$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x} = \dot{x}_4$$

Resumindo, temos:

$$x_1 = \theta = \text{Posição angular}$$

$$x_2 = \dot{\theta} = \text{Frequência angular}$$

$$x_3 = x = \text{Posição}$$

$$x_4 = \dot{x} = \text{Velocidade linear}$$

Considerando  $I = 0$  e substituindo:

$$\ddot{\theta} = \dot{x}_2 \text{ e } \ddot{x} = \dot{x}_4 \text{ temos,}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{(M+m) \cdot (g \cdot \sin(x_1) + (x_2)^2 \cdot \sin(x_1) \cdot \cos(x_1) \cdot (1+L)) - \cos(x_1) \cdot u - (m \cdot L \cdot \sin(x_1) \cdot \cos(x_1) \cdot (x_2)^2)}{-M \cdot L \cdot (\cos(x_1))^2 - (M+m) \cdot (\sin(x_1))^2 - L \cdot (\cos(x_1))^2}$$

$$\dot{x}_4 =$$

$$\frac{\left[ \frac{u + m \cdot L \cdot \sin(x_1) \cdot (x_2)^2}{(M+m)} - m \cdot L \cdot \cos(x_1) \cdot \left( (M+m) \cdot (g \cdot \sin(x_1) + (x_2)^2 \cdot \sin(x_1) \cdot \cos(x_1) \cdot (1+L)) - \cos(x_1) \cdot u - m \cdot L \cdot \sin(x_1) \cdot \cos(x_1) \cdot (x_2)^2 \right) \right]}{-m \cdot L \cdot (\cos(x_1))^2 - (M+m)^2 \cdot ((\sin(x_1))^2 - L \cdot (\cos(x_1))^2)}$$

As equações do sistema são descritas como:

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ (Equação 1)}$$

$$Y = Cx + Du \text{ (Equação 2)}$$

Onde:

A= Matriz de estado

B= Matriz de entrada

C= Matriz de saída

D= Matriz de transmissão direta

u= vetor de controle

x= vetor de estado

y= vetor de saída

### 3.2.1 Definição da matriz A

Se,

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ e } \dot{x}_3 = x_4$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde,

$$a_{22} = \left[ \frac{\left\{ \left( (M+m) * \frac{[g * \text{sen}(x_1)]}{x_2} + (x_2) * \text{sen}(x_1) * \cos(x_1) * (1+L) \right) - m * L * \text{sen}(x_1) * \cos(x_1) * (x_2) \right\}}{\left( -m * L * (\cos(x_1))^2 - (M+m) \left[ (\text{sen}(x_1))^2 - L * (\cos(x_1))^2 \right] \right)} \right]$$

e

$$a_{42} =$$

$$\frac{\left( \frac{m * L * \text{sen}((x_1)) * x_2}{M+m} - m * L * \cos((x_1)) * \left( (M+m) \left( g * \frac{\text{sen}((x_1))}{x_2} + x_2 * \text{sen}((x_1)) * \cos((x_1)) * (1+L) \right) - m * L * \text{sen}((x_1)) * \cos((x_1)) * x_2 \right) \right)}{-m * L * (\cos((x_1)))^2 - (M+m)^2 * \left( (\text{sen}((x_1)))^2 - L * (\cos((x_1)))^2 \right)}$$

Substituindo,  $a_{22}$  e  $a_{42}$  na matriz A, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\left\{ \left( (M+m) * \frac{[g * \text{sen}(x_1)]}{x_2} + (x_2) * \text{sen}(x_1) * \cos(x_1) * (1+L) \right) - m * L * \text{sen}(x_1) * \cos(x_1) * (x_2) \right\}}{\left( -m * L * (\cos(x_1))^2 - (M+m) \left[ (\text{sen}(x_1))^2 - L * (\cos(x_1))^2 \right] \right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\left( \frac{m * L * \text{sen}((x_1)) * x_2}{M+m} - m * L * \cos((x_1)) * \left( (M+m) \left( g * \frac{\text{sen}((x_1))}{x_2} + x_2 * \text{sen}((x_1)) * \cos((x_1)) * (1+L) \right) - m * L * \text{sen}((x_1)) * \cos((x_1)) * x_2 \right) \right)}{-m * L * (\cos((x_1)))^2 - (M+m)^2 * \left( (\text{sen}((x_1)))^2 - L * (\cos((x_1)))^2 \right)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Definição da matriz $B$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$b_2 = \frac{-\cos(x_1)}{-m * l * (\cos(x_1))^2 - (M + m) * \left( ((\sin(x_1))^2) - l * (\cos(x_1))^2 \right)}$$

e,

$$b_4 = \left( \left( \frac{1}{M+m} \right) - \left( \frac{\cos(x_1)}{(M+m) * \left( -m * l * (\cos(x_1))^2 - (M+m) * \left( ((\sin(x_1))^2) - l * (\cos(x_1))^2 \right) \right)} \right) \right)$$

Resultando na matriz  $B$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \left( \frac{-\cos(x_1)}{-m * l * (\cos(x_1))^2 - (M + m) * \left( ((\sin(x_1))^2) - l * (\cos(x_1))^2 \right)} \right) \\ 0 \\ \left( \left( \frac{1}{M+m} \right) - \left( \frac{\cos(x_1)}{(M+m) * \left( -m * l * (\cos(x_1))^2 - (M+m) * \left( ((\sin(x_1))^2) - l * (\cos(x_1))^2 \right) \right)} \right) \right) \end{bmatrix}$$

### 3.2.3 Definição da matriz $C$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2.4 Definição da matriz $D$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com a representação das matrizes, podemos, então, formular as equações no espaço de estados e realizar o controle.

Com o modelo apresentado no espaço de estados na forma canônica, um vetor de controle é projetado para atender os requisitos de projeto.

### 3.2.5 Representação das funções de transferência no espaço de estados na forma canônica controlável

Comparando as funções de transferência encontradas com a forma genérica:

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

é possível representá-la no espaço de estados na forma canônica controlável.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 : b_{n-1} - a_{n-1} b_0 : \dots : b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

O método escolhido para calcular o vetor de controle foi o método por alocação dos polos de malha fechada, este método tem uma base de cálculo simples, porém para ser utilizado o modelo deve atender os critérios de observabilidade e de controlabilidade de

estados, onde as matrizes que representam essas condições devem ter todos os seus vetores linearmente independentes. Como se trata de um modelo utilizado didaticamente, estes critérios já foram testados e provados que atendem tais exigências.

Abaixo estão representadas as matrizes de controlabilidade completa de estado e de observabilidade, respectivamente.

$$\langle B|AB| \dots |A^{n-1}B \rangle$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade possui vetores que descrevem a controlabilidade de estado, estes vetores estão dispostos em linha na matriz. Como o posto desta matriz é igual ao número de linhas, o sistema é classificado como um sistema de estado completamente controlável, ou seja, para qualquer novo estado assumido pelo sistema, temos a garantia de existência de um vetor de controle não limitado capaz de promover a transição deste novo estado para um estado qualquer num intervalo de tempo finito (DORF e BISHOP, 2009).

Já na matriz de observabilidade, temos os vetores que descrevem a condição de observabilidade do sistema arranjados em colunas, ao transformar esta matriz numa matriz transposta, estes vetores serão representados por linhas. Assim, podemos observar o posto desta matriz igual ao número de linhas que a classifica como um sistema observável. Isto significa que, se uma das variáveis de estado do sistema não puder ser medida diretamente, essa poderá ser estimada por meio de outras variáveis de estado, pois apresentará uma relação matemática que fornecerá esta estimativa (OGATA,2003).

### 3.2.6 Condições necessárias e suficientes para alocações de polos

De acordo com Ogata (2003), no projeto por alocação dos polos de malha fechada é necessário que todas as variáveis de estado sejam medidas com sucesso, ou estimadas, uma vez que o sistema de controle trabalha com a realimentação destas variáveis. Para este projeto adota-se  $u(t) = -Kx(t)$ , uma vez que o sistema é variante no tempo, o valor do vetor de controle irá variar sempre que necessário para atender os requisitos.



Dada a matriz de transformação  $T$ , por:

$$T = MW$$

Onde  $M$  é a matriz de controlabilidade

$$M = \langle B | AB | \dots | A^{n-1}B \rangle$$

E

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde os  $a_i$  são coeficientes do polinômio característico

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Definindo um novo vetor de estado  $\hat{x}$  por:

$$x = T\hat{x}$$

Se o posto da matriz  $M$  de controlabilidade for  $n$ , então a inversa da matriz  $T$  existe e a equação de estado poderá ser modificada para:

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a equação característica dada por:

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

E a nova alocação de polos dada por:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Obtendo o valor do vetor de controle  $K$ :

$$K = [a_n - a_n : a_{n-1} - a_{n-1} : \dots : a_2 - a_2 : a_1 - a_1]T^{-1}$$

Onde  $T$  é a matriz de transformação de qualquer representação de estados para a forma canônica controlável, nos modelos representados na forma canônica, a matriz de transformação é uma identidade.

### 3.3 Elaboração do projeto de controle

Para a realização do controle do sistema foi criado um programa no MATLAB<sup>®</sup> capaz de alocar os polos da equação numa posição na qual o sistema atinja a estabilidade atendendo aos requisitos de projeto pré-estabelecidos, como tempo de acomodação e máximo sobressinal aceitáveis. A escolha dos pré-requisitos deu-se de forma intuitiva respeitando possíveis restrições físicas do sistema. Um exemplo é que não se poderia determinar um tempo baixo de acomodação com um grande sobressinal. Para diminuir a complexidade do algoritmo de busca, foram definidos polos reais afastados da origem para que se obtivessem polos

complexos conjugados dominantes.

$$J = (-11,9 + 10,9i) + (-11,9 - 10,9i) + (-30) + (-30)$$

Representados pela equação característica:

$$S^4 + 83,8 S^3 + 2588,42 S^2 + 37045,2 S + 234278$$

Os polos foram escolhidos após a construção do sistema de controle, pois só assim a performance do sistema pôde ser medida e comparada com os requisitos de projeto. A alocação de polos é feita através da fórmula de Ackermann e do ganho agendado, que combinados, geram um vetor de ganho que varia conforme a necessidade de resposta do sistema.

Como a função característica do sistema é:

$$S^4 + \left( \frac{mg \sin(x_1) + x_2^2 \cos x_1 \sin(x_1) + Mg \sin(x_1) + \ell x_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1) - \ell m x_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)}{M x_2 \sin(x_1)^2 + m x_2 \sin(x_1)^2 - M \ell x_2 \cos(x_1)^2} \right) S^3$$

Assim o vetor de ganho  $K$  pode ser calculado com a seguinte equação:

$$K = [\alpha_n - \gamma_n : a_{n-1} - \gamma_{n-1} : \dots : a_2 - \gamma_2 : a_1 - \gamma_1] T^{-1}$$

Onde,

$$K = [234278 - 0 : 37045,2 - 0 : 2588,42 - 0 :$$

$$83,8 - \left( \frac{mg \sin(x_1) + x_2^2 \cos x_1 \sin(x_1) + Mg \sin(x_1) + \ell x_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1) - \ell m x_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)}{M x_2 \sin(x_1)^2 + m x_2 \sin(x_1)^2 - M \ell x_2 \cos(x_1)^2} \right)] T^{-1}$$

$T$  é a matriz de transformação de qualquer base para a base canônica controlável. Se a representação do sistema já estiver na base canônica controlável,  $T$  será uma matriz identidade. Para efetuar as simulações computacionais, utilizou-se a base de representação canônica controlável, obtida numericamente.

Na transformação da representação de estado antiga para a forma canônica foi

utilizado o seguinte principio:

$$X = TZ$$

$$\dot{X} = T\dot{Z}$$

temos:

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

obtemos,

$$\dot{Z} = A_n Z + B_n u$$

onde,

$$A_n = T^{-1}AT$$

$$B_n = T^{-1}B$$

As variáveis de saída do sistema correspondem à:

$$Y = Cx$$

A nova saída será:

$$Y = C_n Z$$

Onde,

$$C_n = CT$$

Os testes foram realizados com a seguinte configuração do sistema, onde as variáveis de estado recebem os seguintes valores:

$$\begin{aligned}Z_1 &= 0.015 \\Z_2 &= -0.000002 \\Z_3 &= 0.000001 \\Z_4 &= 0\end{aligned}$$

As variáveis de saída do sistema assumem os seguintes valores a partir da configuração das variáveis de estado :

$$\begin{aligned}Y_1 &= 0 \\Y_2 &= 0 \\Y_3 &= 0,0073 \\Y_4 &= -0,0036\end{aligned}$$

É necessário que  $Z_1$  e  $Z_2$  sejam diferentes de zero, para que não haja uma condição de indeterminação na função de transferência do sistema, uma vez que os testes são realizados por meio numérico computacional.

Os dados da configuração do sistema foram definidos conforme abaixo:

$$\begin{aligned}M &= 2 \\m &= 0.1 \\l &= 0.5 \\g &= 9.81\end{aligned}$$

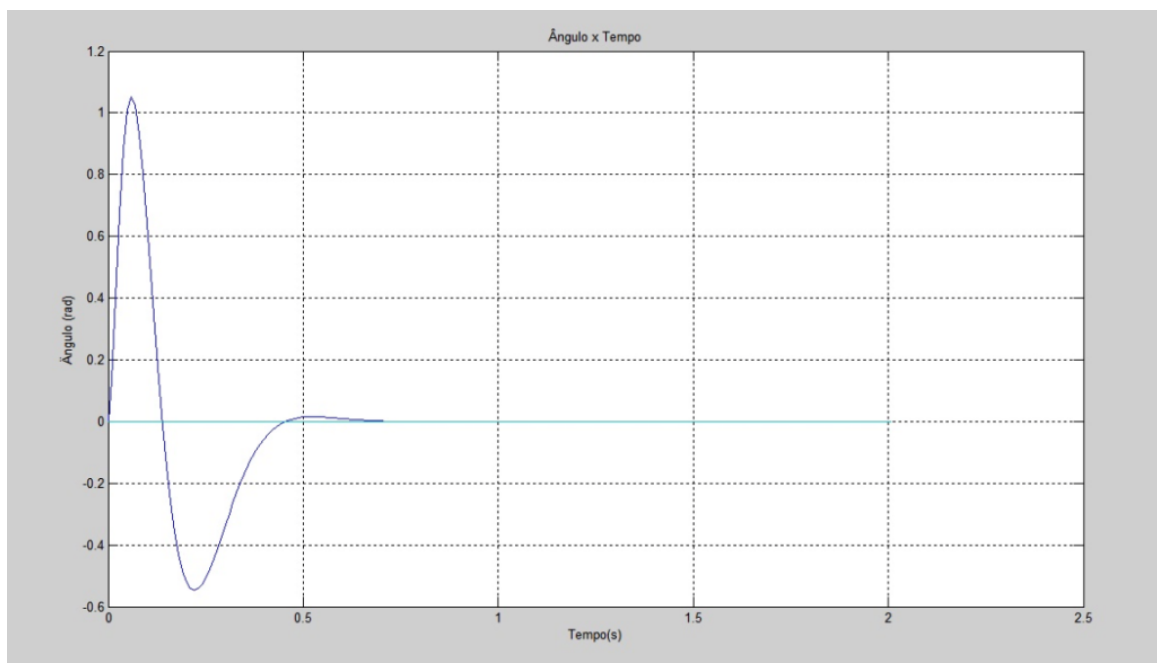
Para cada estado assumido pelas variáveis  $Z_1$  e  $Z_2$ , haverá novas representações numéricas das matrizes  $A$  e  $B$  que posteriormente resultará num novo valor de vetor de controle.

## 4 RESULTADOS

Nesse capítulo é apresentada a análise das saídas do sistema e das variáveis, quando submetidas a um distúrbio inicial. Através dos gráficos gerados pelo software MATLAB®, verifica-se que o vetor de ganho gerado conseguiu alocar os polos de malha fechada numa posição adequada, garantindo assim que todos os requisitos do sistema fossem atendidos. Os valores de sobressinal e tempo de acomodação foram obtidos no algoritmo desenvolvido para análise de desempenho do controlador.

Na Figura 4.1 observa-se o gráfico que expressa o comportamento da variável de saída ângulo.

Figura 4.1: Resultado da saída da variável ângulo

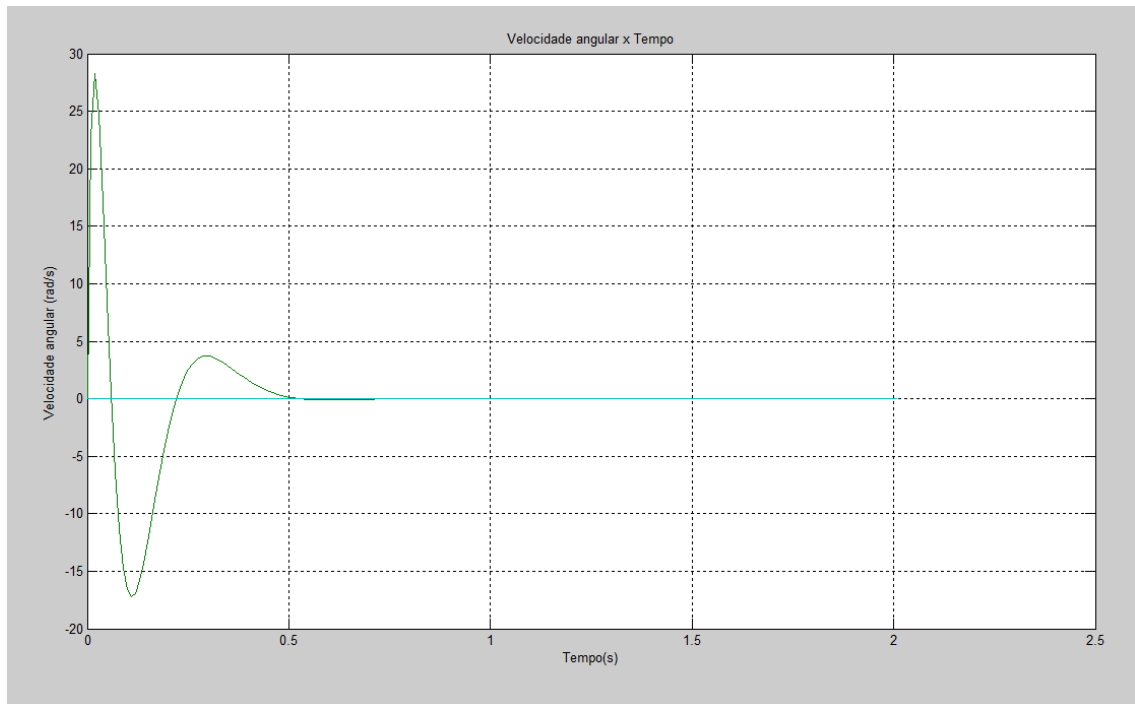


*Fonte: própria*

Na Figura 4.1, verifica-se que a variável ângulo alcança a acomodação no instante de 1,68 segundos e obtém um máximo sobressinal de 1,0529 rad ao longo do período de 2 segundos.

Na Figura 4.2 observa-se o gráfico que expressa o comportamento da variável de saída velocidade angular.

Figura 4.2: Resultado da variável de saída velocidade angular

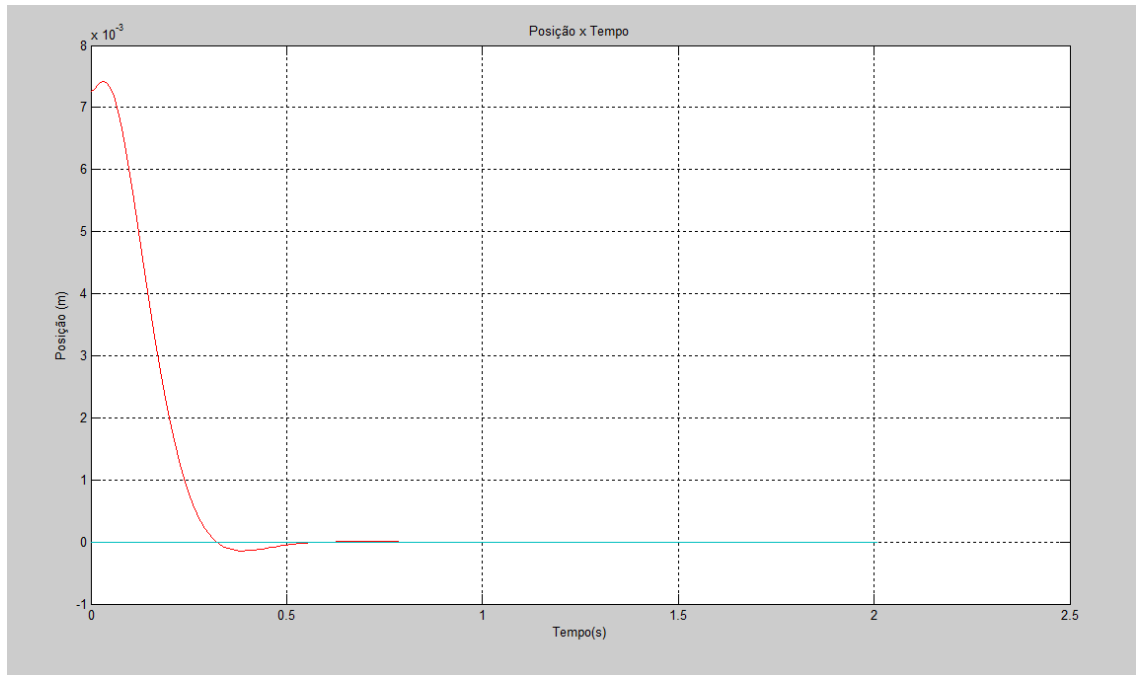


*Fonte: Própria*

O comportamento da variável velocidade angular pode ser notado na Figura 4.2, na qual a mesma encontra-se com um máximo sobressinal de 28,3199 rad/s e tempo de acomodação de 1,65 segundos ao longo do intervalo de 2 segundos.

Na Figura 4.3, observa-se o gráfico que expressa o comportamento da variável de saída posição.

Figura 4.3: Resultado da saída da variável posição



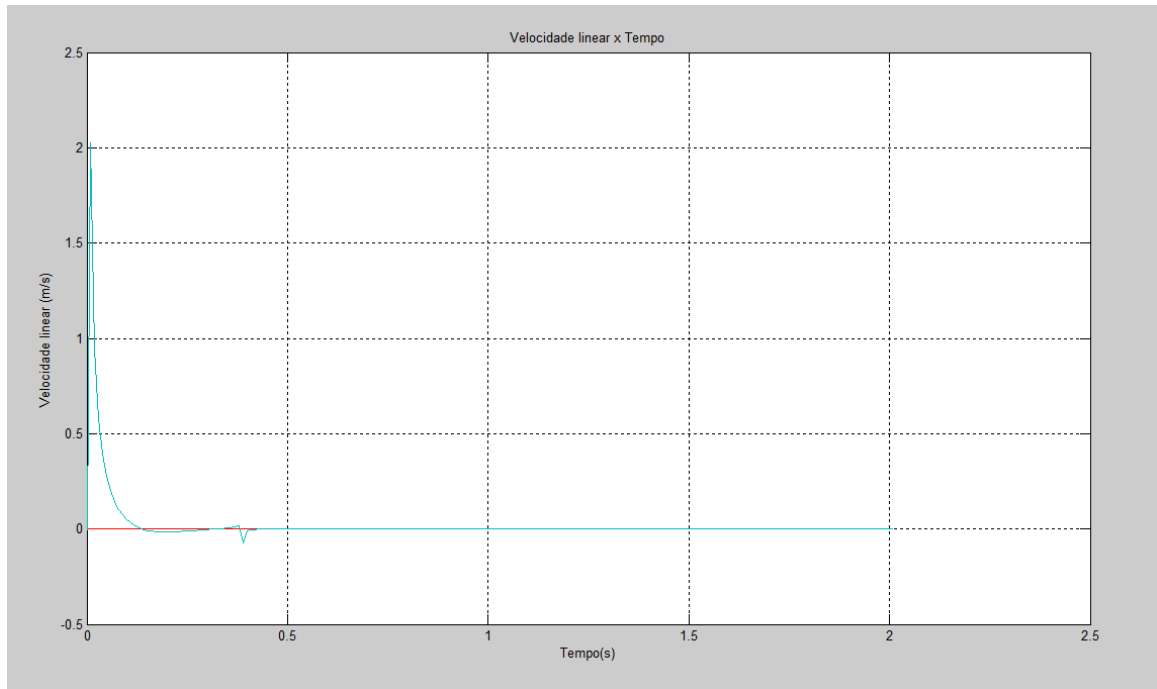
*Fonte: Própria*

O gráfico da Figura 4.3 mostra a variável posição ao longo de 2 segundos, onde se pode observar que a mesma apresenta tempo de acomodação de 1,18 segundos e um máximo sobressinal de 0,0074 metros.

Na Figura 4.4, observa-se o gráfico que expressa o comportamento da variável de saída velocidade linear.

Figura 4.4: Resultado da variável velocidade linear



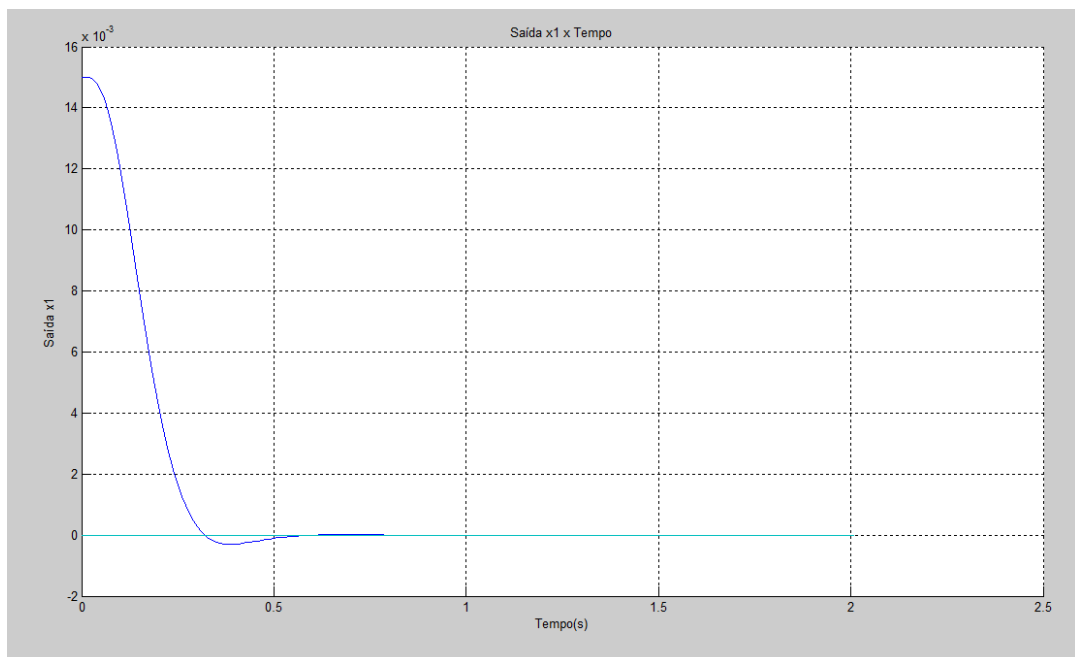


*Fonte: Própria*

A Figura 4.4 apresenta a variável velocidade linear ao longo do intervalo de 2 segundos, no qual a mesma obtém um tempo de acomodação de 0,43 segundos e máximo sobressinal de 2,0250 m/s.

A Figura 4.5 mostra o comportamento da variável de estado  $z_1$ , ao longo de 2 segundos.

Figura 4.5: Resultado da variável de estado  $z_1$

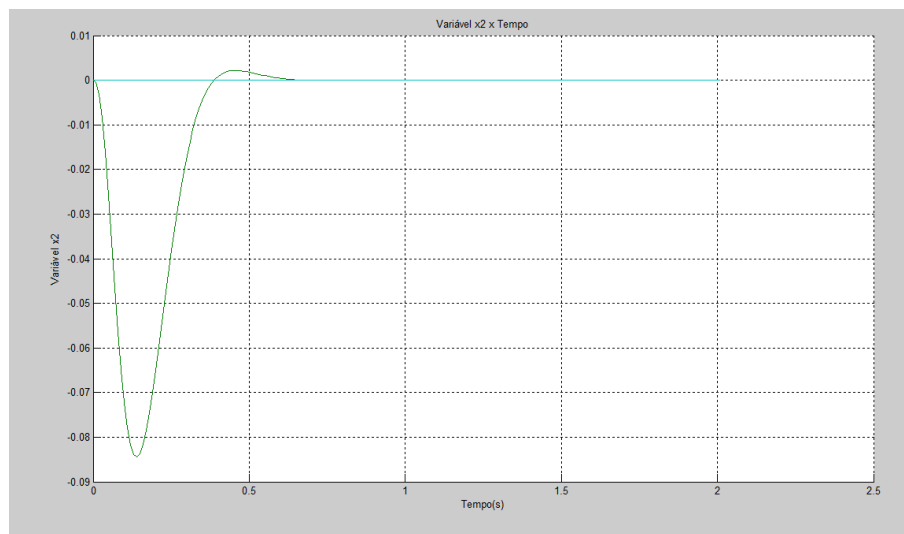


*Fonte: Própria*

Nota-se que a variável de estado se mantém estável em todo o período do gráfico, ao longo dos seus 2 segundos de intervalo.

A Figura 4.6 mostra o comportamento da variável de estado  $z_2$ , ao longo de 2 segundos.

Figura 4.6: Resultado da variável de estado  $z_2$

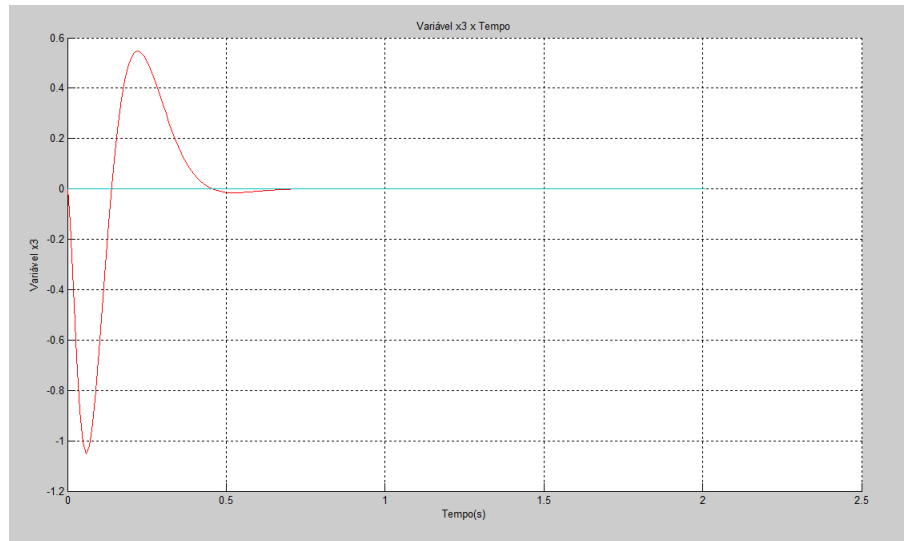


*Fonte: Própria*

Pode observar que desde os primeiros instantes a variável tende a estabilidade, não demonstrando em momento algum a possibilidade de instabilidade.

Na Figura 4.7 é apresentada a variável de estado  $z_3$ .

Figura 4.7: Resultado da variável de estado  $z_3$

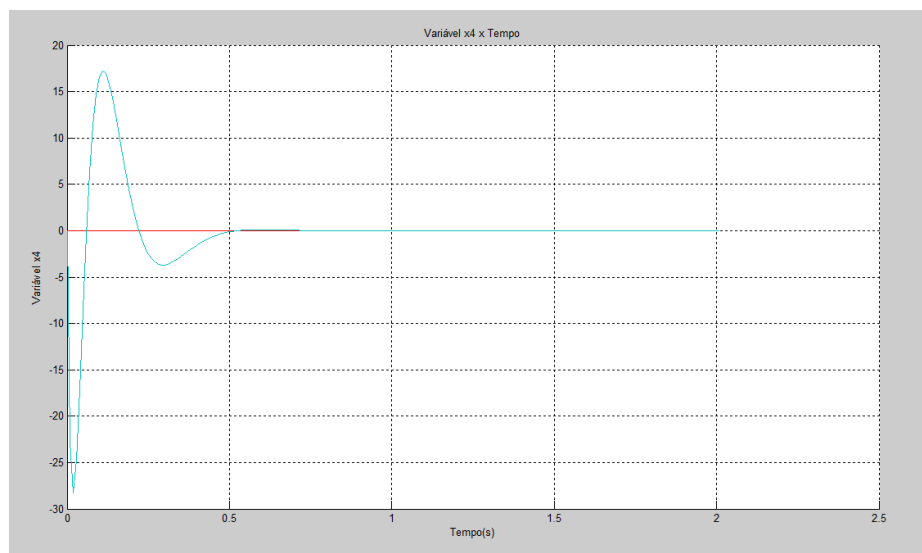


*Fonte: Própria*

A variável de estado  $z_3$  é ilustrada na figura acima, apresentando um comportamento desejado em relação ao sistema.

Na Figura 4.8, pode-se verificar a variação da variável  $z_4$ , ao longo do intervalo de 2 segundos.

Figura 4.8: Resultado da variável de estado  $z_4$



*Fonte: Própria*

A resposta da variável de estado  $z_4$  pode ser observada no gráfico acima, ao longo do intervalo de 2 segundos.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Conclusão

Após a realização dos testes e análises de comportamento do pêndulo, conclui-se que o controle por realimentação de estados tornou-se uma ferramenta adequada para a proposta inicial deste trabalho, obtida com sucesso. Foi possível verificar que o modelo não linear só apresenta características de estabilidade através do controle adaptativo, pois a constante variação de ângulos e seu maior deslocamento exigem variações constantes dos vetores de ganho, que só foi obtido através do ganho agendado.

O controle desenvolvido possibilita trabalhar num range de operação maior, realizado com êxito até uma angulação de 45%, verificados em testes, condição que o ganho constante num modelo linearizado não permitiria, pois em casos onde o distúrbio sofrido pelo sistema apresentasse um ângulo consideravelmente diferente de zero, maior é a perda de rendimento.

Com um range maior de operação, o controlador desenvolvido possibilita trabalhar com controle adaptativo mudando as condições de operação de maneira a manter o mesmo modelo de controlador, mudando apenas o novo local das alocações dos polos.

## Referências Bibliográficas

PRADO, Igor Ferreira do. Construção e Controle do Sistema Pêndulo invertido. Jul. 2011. Disponível em: <<http://physika.info/physika/documents/Prado2011.pdf>>. Acesso em: 21 mar. 2013.

OGATA, Katsuhiko. Engenharia de Controle Moderno; tradução Paulo Álvaro Maya: revisão técnica Fabrizio Leonardi. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2003.

HAFFNER, José Felipe. Projeto de sistemas de controle. Disponível em: <[http://www.feng.pucrs.br/~gacs/new/disciplinas/psc\\_CN/apostilas/Aula10\\_2005-II.pdf](http://www.feng.pucrs.br/~gacs/new/disciplinas/psc_CN/apostilas/Aula10_2005-II.pdf)>. Acesso: 18 mar. 2013

DINADON, Lázaro Valentim. Introdução ao Controle de Sistemas em tempo discreto. Disponível em: < <http://pt.scribd.com/doc/56986988/69/Formula-de-Ackermannn>>. Acesso em: 19 mar. 2013.

GUAN, P.; ZHANG, W.; LIU, X. The Adaptative Fuzzy Control Based on Backstepping for Satellite Attitude Control. Congresso Mundial de Controle e Automação Inteligente. Taipei: 2011. p. 152-157.

KUCINSKIS, F. N. Inferência de Estados e Planejamento no Segmento Espacial para a Operação de Missões Baseadas em Objetivos. Tese de Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos. 2012.

ESTEVES, N. M. Isolamento Sísmico com Sistemas Pendulares com Atrito. Dissertação (Mestrado) – Instituto Superior Técnico – Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa. Portugal, 2010.

STEVE, Helber. Foguete privado é lançado neste domingo de base comercial da Nasa. Disponível em:<<http://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2013/04/foguete-privado-e-lancado-neste-domingo-de-base-comercial-da-nasa.html>> Acessado em: 30/04/2013

DUNN, Marcia. Cientistas tentam determinar ameaça ligada a colisão de satélites. Disponível em:<<http://g1.globo.com/Noticias/Ciencia/0,,MUL998586-5603,00-CIENTISTAS+TENTAM+DETERMINAR+AMEACA+LIGADA+A+COLISAO+DE+SATELITES.html>> Acessado em: 30/04/201

E.R General Motors e Segway vão criar carro de duas rodas. Disponível em:<<http://tecnologia.terra.com.br/general-motors-e-segway-vao-criar-carro-de-duas-rodas,f2287eb22b7ea310VgnCLD200000bbcceb0aRCRD.html>> Acessado em: 30/04/201

ORTOLAN, Fernanda Kasper. Robô Humanoide. Disponível em:<<http://www.petma.ufsc.br/v3/noticias/robo-humanoide>> Acessado em: 30/04/201

BALBINOT. Caminhada em Velocidades Oscilantes: Implicações no Modelo do Pêndulo Invertido. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

FRANKLIN, Gene F; POWELL, J. David; WORKMAN, Michael. Digital Control of Dynamic Systems; 3 ed. 2006.

PHILLIPS, Charles L. e HARBOR, Royce D. Sistemas de Controle e Realimentação; tradução Luiz Fernando Ricardo; Revisão técnica: Antônio Pertence Junior. São Paulo: MAKRON Books do Brasil Editora. 1997.

DORF, R.; BISHOP, R. Sistemas de Controle Modernos. 11° ed. Rio de Janeiro, LTC, 2009.

GILAT, A. MATLAB® com aplicações em engenharia. 2ª ed. São Paulo, Bookman, 2006.