

UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO
SUL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E ENGENHARIAS
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DARLEI ELIAS SCHILING

**MODELAGEM E CONTROLE DE UM ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE
PÊNDULO INVERTIDO**

Ijuí
2017

DARLEI ELIS SCHILING

**MODELAGEM E CONTROLE DE UM ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE
PÊNDULO INVERTIDO**

Projeto de pesquisa apresentado como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de curso de Engenharia Elétrica da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Me. Gilson Rogério Batista

Ijuí

2017

AGRADECIMENTOS

A Deus, "Porque, quando perco toda a minha
força, então tenho a força de Cristo em mim."

2 Coríntios 12.10.

RESUMO

SCHIILING, D. E. **Modelagem E Controle de um Robô de Eixo Único em Sistema de Pêndulo Invertido**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso. Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ, Ijuí, 2017.

O robô desenvolvido neste projeto baseia-se no princípio do pêndulo invertido, tratando-se de um robô de duas rodas em eixo único com corpo posicionado sobre este eixo, o qual deve se autobalancear em relação a posição vertical. O presente trabalho aborda a modelagem e controle e compreende a simulação em software e implementação física do robô. Um modelo matemático em representação por espaço de estados foi levantado para descrever o comportamento do robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido. Um controlador PID foi implementado em topologia de problema do regulador com objetivo de controlar a posição vertical do pêndulo invertido a fim de que este se mantenha estável. O robô foi projetado e construído tendo um motor atuando em cada roda, gerenciados por um microcontrolador Microchip PIC18F46K22, o qual obtêm os dados de realimentação através de um sensor MPU6050 composto por um acelerômetro e giroscópio.

Palavras-chave: Pêndulo Invertido, Modelagem Matemática, Controle de Sistemas.

ABSTRACT

SCHIILING, D. E. **Modelagem E Controle de um Robô de Eixo Único em Sistema de Pêndulo Invertido**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso. Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ, Ijuí, 2017.

The robot developed in this project is based on the inverted pendulum principle, in the case of a two-wheel single-axis robot with a body positioned on this axis, which must self-balance in relation to the vertical position. The present work addresses the model and control and comprises a simulation in software and physical implementation of the robot. A mathematical model in state space representation was raised to describe the behavior of the single axis robot in the inverted pendulum system. A PID controller was implemented in regulator problem topology in order to control the vertical position of the inverted pendulum so that it remains stable. The robot was designed and built having a motor acting on each wheel, managed by a Microchip PIC18F46K22 microcontroller, getting feedback data through the MPU6050 sensor composed by an accelerometer and gyroscope.

Keywords: Inverted Pêndulo, Mathematical Modeling, Control Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1a – Saturno V	10
Figura 1b – Falcon 9	10
Figura 2 – Robô de autobalanceamento em eixo único	10
Figura 3 – Forças atuando sobre o pêndulo.....	12
Figura 4 – Forças atuando sobre a roda	15
Figura 5 – Circuito elétrico para o motor CC	17
Figura 6 – Robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido	29
Figura 7 – Saída do driver TB6612FNG aplicada a carga.....	33
Figura 8 – Projeto PCI's do sistema do pêndulo	34
Figura 9 – PCI's do sistema do pêndulo e estrutura dos motores	30
Figura 10 – Sistema em malha aberta	31
Figura 11 – Resposta ao impulso do sistema em malha aberta.....	33
Figura 12 – Estrutura de controle problema do regulador	35
Figura 13 – Estrutura de controle problema do regulador simplificada	39
Figura 14a – Layout da PCI auxiliar	42
Figura 14b – Montagem da PCI auxiliar	42
Figura 15 – Resposta ao impulso do sistema em malha fechada	33
Figura 16 – Resposta do robô de de pêndulo invertido.....	35
Figura 17 – Resposta ao impulso do sistema com novo motor	45
Figura 18 – Resposta saída/entrada do robô de pêndulo invertido	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros e unidades	10
Tabela 2 – Parâmetros do motor Polulo N20	31
Tabela 3 – Parâmetros do robô em sistema de pêndulo invertido	35
Tabela 4 – Característica dos parâmetros do controlador PID.....	40
Tabela 5 – Parâmetros do novo motor Polulo N20.....	45

LISTA DE SIGLAS

PID – *Proportional Integrative Derivative*

CC – Corrente Contínua

MIMO – *Multiple Input Multiple Output*

SISO – *Single Input Single Output*

MIPS – *Mega Instructions per Second*

A/D – *Analog to Digital*

D/A – *Digital to Analog*

PWM – *Pulse Width Modulation*

EUSART – *Enhanced Universal Synchronous Asynchronous Receiver Transmitter*

MSSP – *Master Synchronous Serial Port*

SPI – *Serial Peripheral Interface*

I²C – *Inter-Integrated Circuit*

IMU – *Inertial Measurement Unit*

PCI – Placa de Circuito Impresso

LED – *Light Emitting Diode*

LC – Indutivo Capacitivo

GFSK – *Gaussian Frequency Shift Keying*

USB – *Universal Serial Bus*

COM – *Communication Port*

DMA – *Direct Memory Access*

ALU – *Arithmetic Logic Unit*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	JUSTIFICATIVA	10
1.2	OBJETIVOS	12
1.2.1	OBJETIVO GERAL	12
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
1.3	METODOLOGIA	12
2	MODELO MATEMÁTICO DE UM ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO	14
2.1	MODELO DO PÊNDULO	15
2.2	MODELO DA RODA	17
2.3	MODELO ELÉTRICO DOS MOTORES CC	19
2.4	MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS	21
3	ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO	29
3.1	REALIMENTAÇÃO DA RESPOSTA DO SISTEMA	30
3.2	ATUADORES E ENTRADA DO SISTEMA	31
3.3	PROJETO CONSTRUTIVO E ALIMENTAÇÃO	33
3.4	PARÂMETROS DO ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO	35
3.5	MODELO REPRESENTADO POR FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	36
3.6	RESPOSTA DA PLANTA EM MALHA ABERTA	36
3.7	CONTROLADOR PID APLICADO NO PROBLEMA DO REGULADOR	38
3.8	DISCRETIZAÇÃO DO CONTROLADOR PID	40
3.9	AQUISIÇÃO DE DADOS	41
3.10	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	42
	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho propõe substituir a já consolidada plataforma de três ou mais rodas em robôs por uma plataforma de duas rodas em eixo único, propondo uma metodologia de controle para que um sistema que em condições naturais é instável, possa se autobalancear mantendo a estabilidade.

Esta proposta se baseia no funcionamento do pêndulo invertido, de forma que a massa do pêndulo é localizada diretamente sobre o eixo dos seus atuadores, sistema que é caracterizado por ser naturalmente instável.

A fim de que tal tarefa possa ser realizada se faz necessário modelar matematicamente as equações que regem o sistema de pêndulo invertido, a fim de projetar um controlador proporcional integrativo derivativo (PID) para autobalancear um robô de eixo único com duas rodas.

A natureza do problema que o controlador deve resolver, funciona da mesma maneira que o ser humano compensa seu equilíbrio ao sofrer um empurrão, de forma que um passo a frente é dado a fim de não irmos ao chão se o empurrão vier das costas e vice-versa.

1.1 JUSTIFICATIVA

Altamente difundido o conceito do pêndulo invertido como modelo de controle, ou ainda robô de autobalanceamento, atraiu muita atenção devido ao veículo de transporte individual Segway, o qual demonstrou um design compacto e versatilidade para o transporte urbano, assim como mais recentemente as cadeiras de roda Ogo, que também utilizam o princípio do pêndulo invertido. Outro exemplo da aplicação do controle do modelo de pêndulo invertido data da ida do homem à lua, no controle dos atuadores dos foguetes como o Saturno V que deu suporte ao programa espacial Apollo da Nasa.

Do Saturno V (figura 1a), ao impressionante controle refinado utilizado pela SpaceX no foguete Falcon 9 (figura 1b) que o permite pousar na vertical, possibilitando a reutilização do mesmo para futuros voos ou viagens espaciais, o modelo de pêndulo invertido é muito mais utilizado nas diversas áreas da engenharia, do que inicialmente se vem à mente.

Figura 1a – Saturno V



(Nasa, 2017)

Figura 1b – Falcon 9



(SpaceX, 2016)

Desta maneira, podemos ver que o estudo do modelo de pêndulo invertido está relacionado com o funcionamento e orientação de mísseis e foguetes, onde o centro de gravidade está localizado acima do centro dos atuadores, causando instabilidade ao sistema. De forma similar o mesmo problema ocorre no robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido, e enquanto os cálculos e equacionamentos são extensos e complexos, o objetivo de controle é relativamente simples, ajustando os atuadores de forma que fiquem diretamente abaixo do centro de gravidade do pêndulo, assim que o ângulo com o vetor da normal (eixo vertical) seja zero.

Robôs convencionais com três ou quatro rodas tem seu estado da arte mais do que provado devido a sua alta confiabilidade e estabilidade para as mais diversas tarefas. Por outro lado robôs autobalanceados em duas rodas, mostram vantagens em alguns aspectos como a capacidade de manobrar em pequenos espaços com raio de giro zero, alta estabilidade em rampas devido a capacidade de equilíbrio que mantem o centro de gravidade do robô sempre sobre as rodas, capacidade de recuperar o equilíbrio mediante a perturbações temporárias da mesma forma que um humano dá um passo na direção da perturbação para evitar a queda.

Assim sendo, como supracitado, a plataforma utilizando o princípio do pêndulo invertido tem sido amplamente utilizada, desde veículos de navegação não tripulados, a veículos de transporte urbano, a ainda cadeiras de roda para deficientes físicos,

atuando como soluções alternativas para as mais diversas aplicações nos âmbitos pessoal, comercial e industrial.

A natureza do modelo proposto levanta uma interdisciplinaridade a fim de resolver o problema proposto, sendo que é trabalhado com técnicas de controle clássicas, levantamento de função de transferência através da representação em espaço de estados e função de transferência, sensoriamento, instrumentação, dispositivos embarcados, de forma que tem um importante valor acadêmico.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Modelar matematicamente o sistema de pêndulo invertido, implementar o controle em um robô de eixo único, identificando os aspectos necessários para o projeto do robô de autobalanceamento.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar a bibliografia e o estado da arte do sistema de pêndulo invertido;
- Elaborar um modelo matemático que descreve o comportamento do sistema de pêndulo invertido;
- Projetar um controlador PID para realizar a ação de balanceamento do robô;
- Identificar os aspectos necessários para obtenção dos parâmetros de entrada do controlador;
- Simular e analisar os resultados

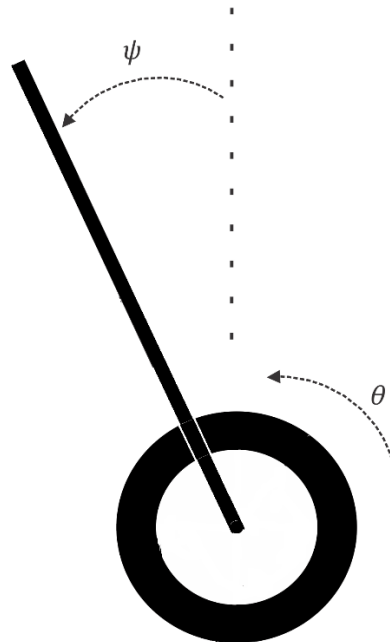
1.3 METODOLOGIA

A metodologia empregada no trabalho será uma abordagem intuitiva, onde a partir do tema apresentado e suas ramificações será possível ter uma ideia geral da modelagem de sistemas e teoria de controle, de forma que o modelo de um sistema em pêndulo invertido é uma ótima plataforma de testes para as teorias de controle. O

método de controle escolhido para estabilizar o robô é o controlador PID, atuando sobre a planta do sistema representada em espaço de estados, e posteriormente convertida a representação por função de transferência.

Um estudo do sistema em sistema em pêndulo invertido foi desenvolvido, a fim de se levantar o modelo matemático que descreve o seu comportamento, assim sendo, o controlador PID é projetado, e os resultados são analisados em simulação e comparados com a resposta da plataforma do robô de autobalanceamento de duas rodas em eixo único com corpo posicionado sobre este eixo conforme Figura 2.

Figura 2 – Esquema do robô de autobalanceamento em eixo único



Fonte: ((Do autor, 2017), 2017)

As técnicas de pesquisa utilizadas no desenvolvimento do trabalho baseiam-se na revisão bibliográfica, com a finalidade de compreender o sistema em pêndulo invertido e os seus aspectos. Assim como obter um modelo coerente para o comportamento do mesmo, de forma que a partir de tal, possa ser projetado um controlador a fim de obter a resposta desejada para o sistema e posteriormente analisar os resultados em simulação e na plataforma de demonstração do robô.

2 MODELO MATEMÁTICO DE UM ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO

A estabilidade parcial de um sistema em pêndulo invertido no ponto de equilíbrio é uma excelente demonstração das teorias de controle conforme nos coloca Lundberg e Roberge (2003, p. 1). Assim sendo, Ko (et al, 2005, p. 492) complementa dizendo que nos anos recentes, teorias de controle derivadas de tais sistemas foram empregados nos mais diversos tipos de robôs para as mais diversas aplicações, por institutos de pesquisa, corporações comerciais e hobbystas.

A modelagem matemática de sistemas é fundamental no âmbito de controle e automação de dispositivos, considerando que é a partir dela que são encontradas a função de transferência dos sistemas, onde a estabilidade ou ausência da mesma é verificada, partindo então para o projeto do controlador a fim de moldar o comportamento do sistema às necessidades encontradas.

Desta maneira, a fim de manter o corpo do robô em equilíbrio faz se necessário conhecer a função de transferência que define o comportamento do mesmo. Seguindo o desenvolvimento do trabalho já realizado por Sundin e Thorstensson (2012a, p. 20-25) o modelo matemático compreende uma série de equações e considerações, as quais, foram utilizadas para construir as equações de estado não lineares a serem utilizadas no modelo de espaço de estados.

Tendo em mente que conforme Ogata (2003, p. 616) o modelo de espaço de estados corresponde a representação da função de transferência, em um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, que podem ser combinadas em uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem.

Assim sendo, o modelo do pêndulo invertido como robô de eixo único é modelado matematicamente afim de se obter o modelo em espaço de estados, que posteriormente é convertido a representação em função de transferência relacionando a saída ψ (ângulo do pêndulo) e a entrada U (tensão aplicada nos atuadores).

A fim de que se tenha um entendimento das equações empregadas, a tabela 1 descreve os parâmetros utilizados na modelagem do sistema.

Tabela 1 – Parâmetros e unidades

Parâmetros	Descrição	Unidades
g	Aceleração da gravidade	m/s^2
J_p	Inercia do pêndulo	kgm^2
m_p	Massa do pêndulo	kg
L	Distância do centro da roda ao centro do pêndulo	m
l	Largura do pêndulo	m
h	Altura do pêndulo	m
ψ	Ângulo do pêndulo	rad
ψ'	Velocidade angular do pêndulo	rad/s
ψ''	Aceleração angular do pêndulo	rad/s^2
x_p	Distancia x para o pêndulo	m
y_p	Distancia y para o pêndulo	m
N_x	Força entre o pêndulo e a roda na direção x	N
N_y	Força entre o pêndulo e a roda na direção y	N
J_r	Inercia da roda	kgm^2
m_r	Massa da roda	kg
r	Raio da roda	m
θ	Ângulo da roda	rad
θ'	Velocidade angular da roda	rad/s
θ''	Aceleração angular da roda	rad/s^2
x_r	Distancia x para a roda	m
y_r	Distancia y para a roda	m
N	Força normal da superfície para com as rodas	N
F	Fricção entre a superfície e as rodas	N
R_a	Resistencia terminal nominal	Ω
K_t	Constante de torque do motor CC	Nm/A
K_e	Constante da força contra eletromotriz do motor CC	Vs/rad
n	Fluxo magnético	Wb
I_a	Corrente de armadura	A
T_m	Torque dos motores	Nm
V_e	Tensão da força contra eletromotriz do motor CC	V
V_n	Tensão nominal dos motores	V
U	Tensão de entrada para os motores	V
N	Rotação dos motores	rpm

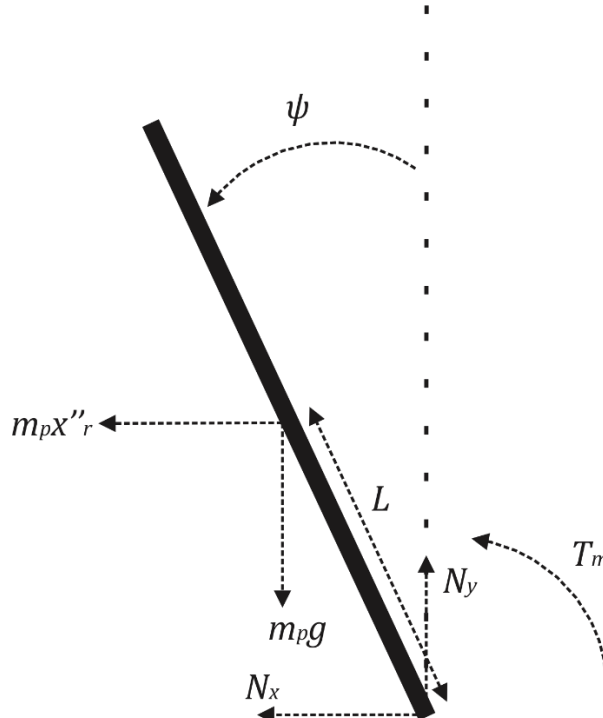
Fonte: (Do autor, 2017)

2.1 MODELO DO PÊNDULO

A figura 3 demonstra as forças atuando sobre o pêndulo, ou seja o corpo do robô. Onde ψ é o ângulo com a vertical, sendo ψ é a variável de saída do sistema, que

deve permanecer igual a 0° para manter a estabilidade, onde o centro de gravidade do pêndulo permanece diretamente sobre o eixo das rodas.

Figura 3 – Forças atuando sobre o pêndulo



Fonte: (Do autor, 2017)

A equação 1 é a equação do momento anti-horário em torno do centro de massa do pêndulo, a qual tem parte importante no sistema, pois é através dela que as equações de estado podem ser determinadas. As equações 2 e 3 são as forças atuando nos eixos x e y, respectivamente.

$$T_m + m_p g L \sin \psi + m_p x''_r L \cos \psi = J_p \psi'' \quad (1)$$

$$-N_x - m_p x''_r = m_p x''_p \quad (2)$$

$$N_y - m_p g = m_p y''_p \quad (3)$$

A fim de encontrar as acelerações x''_p e y''_p , primeiramente são definidas as equações para as distancias x_p e y_p .

$$x_p = -L\sin\psi \quad (4)$$

$$y_p = L\cos\psi \quad (5)$$

Derivando estas, obtemos as equações para as velocidades x'_p e y'_p

$$x'_p = -L\psi'\cos\psi \quad (6)$$

$$y'_p = -L\psi'\sin\psi \quad (7)$$

Ao obtermos a segunda derivada, encontramos as acelerações x''_p e y''_p , que posteriormente serão utilizadas na modelagem do sistema.

$$x''_p = -L\psi''\cos\psi + L\psi'^2\sin\psi \quad (8)$$

$$y''_p = -L\psi''\sin\psi - L\psi'^2\cos\psi \quad (9)$$

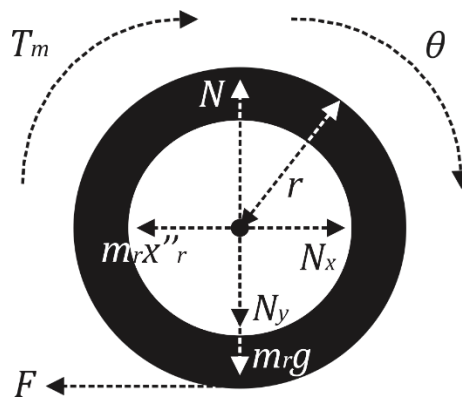
Para encontrar a inercia do pêndulo, conforme Sundin e Thorstensson (2012a, p. 22) o corpo do robô pode ser visto como um corpo retangular de massa uniforme, e dessa maneira a inercia pode ser calculada usando a mecânica clássica. Onde m_p é a massa do pêndulo, l e h são a largura e altura, respectivamente.

$$J_p = \frac{1}{12}m_pl^2 + \frac{1}{3}m_ph^2 \quad (10)$$

2.2 MODELO DA RODA

A figura 4 demonstra as forças atuando sobre a roda, sendo que θ é o ângulo da roda e a sua respectiva segunda derivada corresponde a aceleração angular da roda θ'' .

Figura 4 – Forças atuando sobre a roda



Fonte: (Do autor, 2017)

A equação 11 é a equação do momento horário em torno do centro de massa da roda. As equações 12 e 13 são as forças atuando nos eixos x e y, respectivamente.

$$T_m + Fr = J_r \theta'' \quad (11)$$

$$N_x - m_r x''_r - F = 0 \quad (12)$$

$$N - N_y - m_r g = m_r y''_r \quad (13)$$

A aceleração x''_r pode ser transportada do sistema de coordenadas cartesiana para o sistema de coordenadas cilíndrica.

$$x''_r = \theta'' r \quad (14)$$

A aceleração no sentido do eixo y é igual a 0.

$$y''_r = 0 \quad (15)$$

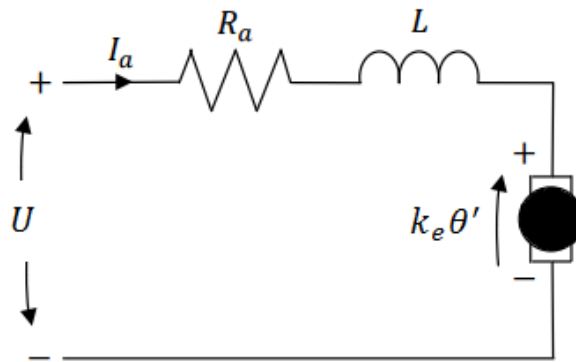
Da mesma maneira como calculado a inercia do pêndulo, a inercia da roda pode ser calculada através da mecânica clássica, porem agora utilizando a formula para o círculo.

$$J_r = \frac{m_r r^2}{2} \quad (16)$$

2.3 MODELO ELÉTRICO DOS MOTORES CC

Dois pequenos motores de corrente contínua são usados como os atuadores do sistema, mantendo-o em equilíbrio. Sendo assim para utiliza-los no modelo matemático é necessário estabelecer uma relação entre a tensão aplicada sobre eles e o torque entregue no eixo dos motores. A equação 17 representa a equação elétrica do circuito de armadura de um motor CC no domínio do tempo, obtida aplicando a lei de Kirchoff no circuito elétrico do motor CC apresentado na figura 5.

Figura 5 – Circuito elétrico para o motor CC



Fonte: (Do autor, 2017)

$$U = R_a I_a + k_e \theta' + L \frac{di}{dt} \quad (17)$$

Onde R_a é a resistência de armadura, I_a é a corrente de armadura, k_e é a constante da força contra eletromotriz, θ' é a velocidade angular do motor e L é a indutância de armadura do motor. Sundin e Thorstensson (2012c, p. 23) afirmam que é possível negligenciar a indutância do motor, considerando que a constante de tempo elétrica é muito menor do que a mecânica, resultando na equação 18.

$$U = R_a I_a + k_e \theta' \quad (18)$$

O torque no eixo do motor precisa superar a inercia do mesmo, assim como o coeficiente de amortecimento viscoso e ainda o atrito. Sundin e Thorstensson (2012d, p. 23) contribuem dizendo que estas variáveis são difíceis de serem estimadas e possuem valores muito pequenos, desta forma, com pequena relevância no cálculo as mesmas podem ser negligenciadas. Abaixo a equação 19 descreve o torque no eixo do motor.

$$T_m = nk_t I_a \quad (19)$$

Desta maneira, necessita-se agora encontrar os valores para as constantes de torque do motor k_t e força contra eletromotriz k_e , sendo que estas podem ser estimadas através das equações 20 e 21.

$$k_t = \frac{T_m}{I_a} \quad (20)$$

$$V_e = \omega k_e \quad (21)$$

Onde T_m e I_a são o torque nominal e a corrente de armadura nominal, respectivamente. Ainda V_e e ω são a tensão da força contra eletromotriz e velocidade angular. O datasheet do motor fornece a velocidade em rpm, dessa forma a equação 21 deve ser readequada.

$$V_e = \frac{2\pi N}{60} k_e \quad (22)$$

Novamente aplicando a lei de Kirchoff no circuito, como realizado na equação 17 e 18, agora à utilizamos para encontrar a tensão de armadura, sendo a tensão nominal V_n menos a corrente de armadura nominal I_a multiplicada pela resistência de armadura R_a .

$$V_e = V_n - I_a R_a \quad (23)$$

Desta maneira é possível determinar as constantes de torque k_t e força contra eletromotriz k_e utilizando os parâmetros do datasheet.

$$k_e = \frac{(V_n - I_{an}R_a)60}{2\pi N} \quad (24)$$

Os motores serão controlados por PWM (*Pulse Width Modulation*), o que significa que são controlados por tensão, portanto a corrente necessita ser eliminada da equação de torque. Isto pode ser feito utilizando a mesma lógica da equação 23, o que nos dá a equação 25.

$$I_a = \frac{U - k_e\theta'}{R_a} \quad (25)$$

Assim sendo, a equação 26 descreve a equação de torque para cada motor, sendo que a mesma deve ser multiplicada por dois quando substituída nas demais equações posteriormente.

$$T_m = \frac{nk_t U}{R_a} - \frac{nk_t k_e \theta'}{R_a} \quad (26)$$

2.4 MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Partindo das equações de momento 1 e 11, no pêndulo e na roda, respectivamente, são encontradas as equações não lineares para as acelerações angulares ψ'' e θ'' . Iniciando então pela equação de momento no pêndulo.

$$T_m + m_p g L \sin\psi + m_p x''_r L \cos\psi = J_p \psi'' \quad (1)$$

É necessário encontrar a equação para a variável de aceleração na direção do eixo x''_r , para que a aceleração angular do pêndulo ψ'' possa ser isolada e as demais variáveis conhecidas. Dessa maneira, para se determinar a equação de x''_r , as equações 2 e 12, correspondente as forças atuando no eixo x , foram utilizadas, onde o desenvolvimento pode ser acompanhado nas equações a seguir.

$$-N_x - m_p x''_r = m_p x''_p \quad (2)$$

$$N_x - m_r x''_r - F = 0 \quad (12)$$

Rearranjando a equação 2 tem-se a equação 27, e à substituindo na equação 12, obtêm-se a equação 28, onde podemos isolar x''_r na equação 29.

$$N_x = -m_p x''_r - m_p x''_p \quad (27)$$

$$-m_p x''_r - m_p x''_p - m_r x''_r - F = 0 \quad (28)$$

$$x''_r = \frac{m_p x''_p + F}{(-m_p - m_r)} \quad (29)$$

Em x''_r se faz necessário conhecer F. Para tal foi utilizada a equação 11, onde F pode ser isolado e substituído na equação 29.

$$T_m + Fr = J_r \theta'' \quad (11)$$

$$F = \frac{J_r \theta'' - T_m}{r} \quad (30)$$

$$x''_r = \frac{m_p x''_p + \frac{J_r \theta'' - T_m}{r}}{(-m_p - m_r)} \quad (31)$$

A aceleração angular θ'' também precisa ser eliminada da equação 31 para determinar x''_r . Isso é feito através da equação 14.

$$x''_r = \theta'' r \quad (14)$$

$$x''_r = \frac{m_p x''_p + \frac{J_r(\frac{x''_r}{r}) - T_m}{r}}{(-m_p - m_r)} \quad (32)$$

$$x''_r = \frac{m_p x''_p r^2 + J_r x''_r - T_m r}{r^2(-m_p - m_r)} \quad (33)$$

Assim foi possível chegar em uma equação para x''_r .

$$x''_r = \frac{m_p x''_p r^2 - T_m r}{r^2(-m_p - m_r) - J_r} \quad (33)$$

Por fim x''_r como também x''_p podem ser substituídos na equação para ψ'' , que então pode ser trabalhada .

$$T_m + m_p g L \sin \psi + m_p \frac{m_p x''_p r^2 - T_m r}{r^2(-m_p - m_r) - J_r} L \cos \psi = J_p \psi'' \quad (34)$$

$$T_m(r^2(-m_p - m_r) - J_r) + m_p g L \sin \psi(r^2(-m_p - m_r) - J_r) + m_p(m_p x''_p r^2 - T_m r) L \cos \psi = J_p(r^2(-m_p - m_r) - J_r) \psi'' \quad (35)$$

$$T_m(r^2(-m_p - m_r) - J_r) + m_p g L \sin \psi(r^2(-m_p - m_r) - J_r) + m_p(m_p(-L \psi'' \cos \psi + L \psi'^2 \sin \psi) r^2 - T_m r) L \cos \psi = J_p(r^2(-m_p - m_r) - J_r) \psi'' \quad (36)$$

$$T_m(r^2(-m_p - m_r) - J_r) + m_p g L \sin \psi(r^2(-m_p - m_r) - J_r) + m_p^2 r^2 L^2 \psi'^2 \sin \psi \cos \psi - T_m m_p r L \cos \psi = J_p(r^2(-m_p - m_r) - J_r) \psi'' + (L^2 r^2 m^2 \cos^2 \psi) \psi'' \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & (T_m((r^2(-m_p - m_r) - J_r) - m_p r L \cos \psi) + m_p g L \sin \psi(r^2(-m_p - m_r) - J_r) \\ & + m_p^2 r^2 L^2 \psi'^2 \sin \psi \cos \psi) / (J_p(r^2(-m_p - m_r) - J_r) + L^2 r^2 m^2 \cos^2 \psi) \\ & = \psi'' \end{aligned} \quad (38)$$

Ainda substituindo a equação de torque do motor T_m na equação 38 pode-se finalizar a equação para a aceleração angular do pêndulo ψ'' .

$$\begin{aligned}
& ((2nk_t U - 2nk_t k_e \theta')((r^2(m_p + m_r) + J_r) + m_p r L \cos \psi) + R_a m_p g L \sin \psi (r^2(m_p \\
& + m_r) + J_r) - R_a m_p^2 r^2 L^2 \psi'^2 \sin \psi \cos \psi) / R_a (J_p (r^2(m_p + m_r) + J_r) \\
& - (L^2 r^2 m_p^2 \cos^2 \psi)) = \psi''
\end{aligned} \quad (39)$$

Rearranjando a equação 39 tem-se a equação não linear para a aceleração angular do pêndulo.

$$\begin{aligned}
\psi'' = & (J_r (g L R_a m_p \sin \psi + 2nk_t (U - k_e \theta')) + r (L r R_a m_p \sin \psi (m_p (g - L \psi'^2 \cos \psi) \\
& + g m_r) + 2nk_t (U - k_e \theta') (m_p (L \cos \psi + r) + r m_r))) / (R_a (J_p (J_r \\
& + r^2 (m_p + m_r)) - L^2 r^2 m_p^2 \cos^2 \psi))
\end{aligned} \quad (40)$$

Com a finalidade de encontrar a segunda equação não linear que descreve a aceleração angular da roda, foi utilizada a equação 31 que parte da ideia de isolar x''_r , igualando-a a equação 14, onde é possível isolar θ'' na equação 42.

$$x''_r = \frac{m_p x''_p + \frac{J_r \theta'' - T_m}{r}}{(-m_p - m_r)} \quad (31)$$

$$x''_r = \theta'' r \quad (14)$$

$$\theta'' r = \frac{m_p x''_p + \frac{J_r \theta'' - T_m}{r}}{(-m_p - m_r)} \quad (41)$$

$$\theta'' = \frac{m_p x''_p r - T_m}{r^2 (-m_p - m_r) - J_r} \quad (42)$$

Então faz se necessário substituir x''_p na equação 42, e posteriormente a aceleração angular ψ'' a partir da equação 1.

$$\theta'' = \frac{m_p r (-L \psi'' \cos \psi + L \psi'^2 \sin \psi) - T_m}{r^2 (-m_p - m_r) - J_r} \quad (43)$$

$$\psi'' = \frac{T_m + m_p g L \sin \psi + m_p x''_r L \cos \psi}{J_p} \quad (44)$$

$$\theta'' = \frac{m_p r (-L (\frac{T_m + m_p g L \sin \psi + m_p x''_r L \cos \psi}{J_p}) \cos \psi + L \psi'^2 \sin \psi) - T_m}{r^2 (-m_p - m_r) - J_r} \quad (45)$$

$$\theta'' = \frac{m_p r (-L \cos \psi (T_m + m_p g L \sin \psi + m_p x''_r L \cos \psi) + J_p L \psi'^2 \sin \psi) - J_p T_m}{J_p (r^2 (-m_p - m_r) - J_r)} \quad (46)$$

Onde x''_r da equação 14 é substituído em x''_r presente na equação 46, a qual pode ser agora trabalhada, tendo θ'' isolado, a equação do torque do motor pode ser substituída para então finalizar a equação não linear da aceleração angular θ'' .

$$\theta'' = \frac{m_p r (-L \cos \psi (T_m + m_p g L \sin \psi + m_p \theta'' r L \cos \psi) + J_p L \psi'^2 \sin \psi) - J_p T_m}{J_p (r^2 (-m_p - m_r) - J_r)} \quad (47)$$

$$\theta'' = \frac{m_p r L \cos \psi T_m + m_p^2 r L^2 g \cos \psi \sin \psi + L^2 r^2 m_p^2 \theta'' L \cos^2 \psi - J_p m_p r L \psi'^2 \sin \psi + J_p T_m}{J_p (r^2 (m_p + m_r) + J_r)} \quad (48)$$

$$\theta'' = \frac{m_p r L \cos \psi T_m + m_p^2 r L^2 g \cos \psi \sin \psi - J_p m_p r L \psi'^2 \sin \psi + J_p T_m}{J_p (r^2 (m_p + m_r) + J_r) - L^2 r^2 m_p^2 L \cos^2 \psi} \quad (49)$$

$$\theta'' = (m_p r L \cos \psi (2nk_t U - 2nk_t k_e \theta') + R_a m_p^2 r g L^2 \cos \psi \sin \psi - J_p R_a m_p r L \psi'^2 \sin \psi + J_p (2nk_t U - 2nk_t k_e \theta') / (R_a (J_p (r^2 (m_p + m_r) + J_r) - L^2 r^2 m_p^2 L \cos^2 \psi))) \quad (50)$$

Assim sendo a equação 50 pode ser rearranjada resultando na resposta para a velocidade angular das rodas θ'' .

$$\theta'' = \frac{L r m_p \cos \psi (g L R_a m_p \sin \psi + 2nk_t (U - k_e \theta')) + J_p 2nk_t (U - k_e \theta') - J_p L r R_a m_p \psi'^2 \sin \psi}{(R_a (J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) - L^2 r^2 m_p^2 \cos^2 \psi))} \quad (51)$$

Tendo finalizado o modelo matemático das equações de estado, as variáveis de estado são definidas como:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \theta' \\ \psi' \end{bmatrix} \quad (52)$$

Sendo o modelo padronizado de espaço de estados:

$$x' = Ax + Bu \quad (53)$$

$$y = Cx + Du \quad (54)$$

Onde x' é a derivada das variáveis de estado definidas acima, A é a matriz de estado, B é a matriz de entrada, C é a matriz de saída, D é matriz de transição, u é a entrada do sistema e y é a saída do sistema.

Ding (et al, 2012, p. 10) ressalta um ponto importante em relação a linearização deste sistema não linear em pêndulo invertido, dizendo que a fim de se resolver as equação de movimento, o sistema necessita ser linearizado, onde o objetivo do controle a ser realizado é equilibrar o corpo do robô na vertical, de forma que o sistema pode ser linearizado dentro de uma pequena variação de movimento em relação ao eixo vertical, onde o ângulo do pêndulo pode ser admitido como $\psi = 0$, a velocidade angular do pêndulo $\psi' = 0$ e a velocidade angular da roda $\theta' = 0$.

Dessa maneira, assume-se que $\cos\psi \cong 1$, $\sin\psi \cong 0 \cong \psi$ e $\psi' = 0$, possibilitando a linearização das equações de estado do sistema, com a finalidade de escreve-las em espaço de estados.

$$\begin{aligned} \psi'' = & (J_r g L R_a m_p \psi + J_r 2 n k_t U - J_r 2 n k_t k_e \theta' + r^2 L R_a m_p^2 \psi g + r^2 L R_a m_p \psi g m_r \\ & + r 2 n k_t U L m_p - r 2 n k_t k_e \theta' L m_p + r^2 2 n k_t U m_p - r^2 2 n k_t k_e \theta' m_p \\ & + r^2 2 n k_t U m_r - r^2 2 n k_t k_e \theta' m_r) / (R_a (J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) - L^2 r^2 m_p^2)) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\theta'' = (L^2 r m_p^2 g R_a \psi + L r m_p 2 n k_t U - L r m_p 2 n k_t k_e \theta' + J_p 2 n k_t U - J_p 2 n k_t k_e \theta') / (R_a (J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) - L^2 r^2 m_p^2)) \quad (56)$$

Portanto equações de estado linearizadas podem ser então escritas nas matrizes de estados conforme o formato padronizado apresentado na equação 53 e 54.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gL^2 r m_p^2}{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r))} & \frac{-2nJ_p k_e k_t - 2Lnr k_e k_t m_p}{(-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r))) R_a} & 0 \\ 0 & \frac{gLJ_r m_p R_a + Lr^2 m_p (gm_p + gm_r) R_a}{(-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r))) R_a} & \frac{-2nJ_r k_e k_t - 2nr k_e k_t ((L + r)m_p + rm_r)}{(-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r))) R_a} & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2nJ_p k_t + 2Lnr k_t m_p}{(-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r))) R_a} \\ \frac{2nJ_r k_t + 2nr k_t ((L + r)m_p + rm_r)}{(-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r))) R_a} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Uma vez que o modelo em espaço de estados é conhecido, é possível então projetar um controlador considerando até mesmo uma abordagem do sistema MIMO (Multiple Input Multiple Output) onde seria possível controlar tanto a posição vertical quanto a horizontal, tendo a realimentação da velocidade das rodas e a posição vertical do pêndulo. Isto implicaria que mesmo aplicando um distúrbio, o pêndulo invertido seria capaz de retornar a posição em que estava inicialmente no chão, enquanto ainda mantendo seu eixo vertical equilibrado.

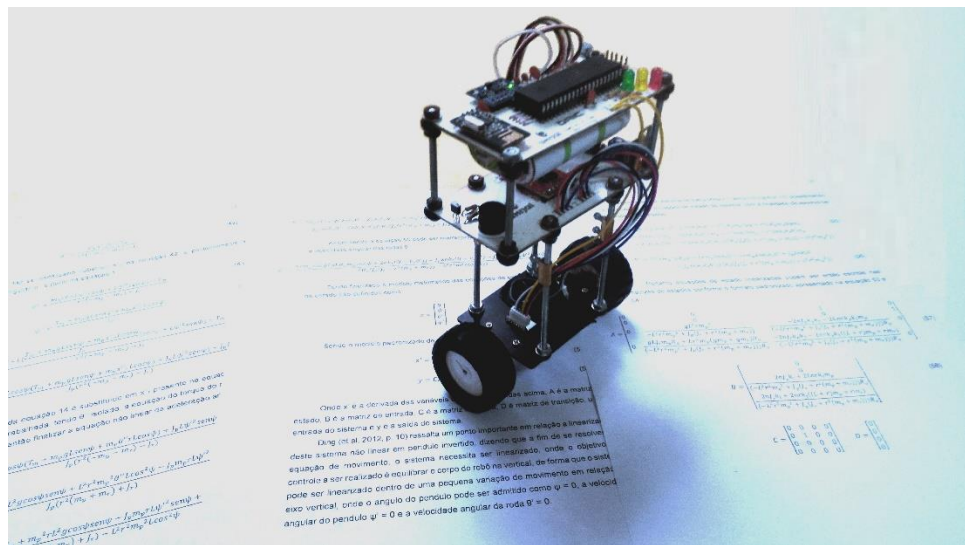
Considerando a alta complexidade de um sistema MIMO, optou-se por controlar o pêndulo invertido como um sistema SISO (Single Input Single Output), ou seja,

controlar apenas a posição vertical do robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido.

3 ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO

Uma plataforma de testes foi projetada para testar o controle do sistema do pêndulo invertido baseado no modelo desenvolvido. A plataforma que consiste em um robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido é apresentada na figura 6.

Figura 6 – Robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido



Fonte: (Do autor, 2017)

O sistema do robô é gerenciado por um microcontrolador Micrichip PIC18F46K22. Este foi escolhido pois pode trabalhar em até 64MHz, ou seja 16MIPS e por agregar suporte a vários periféricos, como por exemplo, conversor analógico-digital (A/D) de 10 bits, conversor digital-analógico (D/A) de 5 bits, sete temporizadores, 5 módulos de PWM (Pulse Width Modulation), interface serial EUSART (*Enhanced Universal Synchronous Asynchronous Receiver Transmitter*), dois módulos de interface MSSP (*Master Synchronous Serial Port*) para uso como interface SPI (*Serial Peripheral Interface*) ou I²C (*Inter-integrated Circuit*), os quais são utilizados para comunicar com o IMU (*Inertial Measurement Unit*) MPU6050 e com o transceiver nRF24L01+.

3.1 REALIMENTAÇÃO DA RESPOSTA DO SISTEMA

Com o objetivo de se obter a leitura da resposta do sistema, ou seja, o ângulo formado com a vertical, foram utilizados dois sensores, um acelerômetro e um giroscópio. É possível realizar a leitura angular utilizando tanto o acelerômetro quanto o giroscópio, porém cada um deles possui suas vantagens e desvantagens e uma combinação das respostas desses dois sensores é a metodologia para se obter leituras angulares confiáveis.

O acelerômetro entrega leituras de aceleração linear e sua resposta é calculada a partir do deslocamento do vetor da gravidade ao longo dos eixos x, y, e z, entregando uma resposta fiel ao ângulo que o sensor está submetido, porém possui um tempo de resposta elevado, além de ser sensível a ruídos de vibrações que influenciam nas leituras.

O giroscópio entrega leituras de velocidade angular, a qual é integrada em relação ao tempo, resultando na leitura da variação do ângulo submetido. As leituras do giroscópio tem um tempo de resposta rápido e não sofrem com ruídos de vibração, porém tendem a acumular erro no regime permanente.

A fim de se obter uma leitura confiável da resposta do pêndulo invertido é utilizado um filtro complementar no formato descrito na equação 60, de forma que a combinação das vantagens do acelerômetro e do giroscópio são utilizadas para corrigir as suas desvantagens.

$$\psi = 0,98(\psi_{giro_ant} + \psi'_{giro} dt) + 0,02\psi_{acel} \quad (60)$$

Como descrito acima, o robô utiliza o sensor MPU6050 que consiste em um acelerômetro e giroscópio, cada um com 3 graus de liberdade, o qual é empregado na tarefa de realizar a realimentação do sistema. O mesmo utiliza protocolo I²C para se comunicar com o microcontrolador, o qual tem uma velocidade um tanto limitada, podendo chegar até 400kHz, porém o mesmo foi escolhido devido a disponibilidade no Brasil.

Inicialmente se estudou realizar a realimentação do ângulo do pêndulo utilizando o acelerômetro analógico ADXL335 e giroscópio analógico ENC-3M, afim de que o tempo de amostragem do controlador fosse mais rápido evitando perda de informações, uma vez que o giroscópio realiza o cálculo do ângulo integrando a sua

velocidade angular em relação ao tempo, de forma que um intervalo de tempo muito grande entre as medições resulta em perda de informação e erro no regime permanente da realimentação do sistema. Infelizmente devido à falta de documentação técnica (datasheet) do giroscópio analógico ENC-3M e por consequência demasiado erro nas leituras do mesmo, este não pode ser utilizado no sistema do pêndulo invertido.

Devido a alta complexidade, este trabalho não entra no mérito das calibrações de erro e calibrações iniciais do acelerômetro e giroscópio.

3.2 ATUADORES E ENTRADA DO SISTEMA

Os atuadores utilizados no robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido são motores Polulu N20 e os seus respectivos parâmetros são descritos na tabela 2, obtidos no datahsheet e por meio de ensaio em laboratório.

Tabela 2 – Parâmetros do motor Polulu N20

Parâmetros	Valores
$V_n(V)$	6
$I_{a_stall}(A)$	0,5
$I_a(A)$	0,408
$N_{no_load}(rpm)$	510
$N(rpm)$	300
$T_m(Nm)$	0,044
$P(W)$	2,45
$R_a(\Omega)$	10,5

Fonte: (Do autor, 2017)

Dessa maneira pode-se calcular as constantes de torque K_t e constante de força contra-eletromotriz K_e . Para calcular utiliza-se a equação 19 do modelo, considerando que o fluxo magnético n para motores de ímãs permanentes é igual a 1.

$$T_m = k_t I_a \quad (61)$$

$$k_t = T_m / I_a = 0,044 / 0,408 = 0,108 \text{ Nm/A} \quad (62)$$

Para calcular K_e iguala-se as equações 22 e 23 do modelo, que descrevem a amplitude da tensão da força contra-eletromotriz do motor, de forma que resulta na equação 24.

$$k_e = \frac{(V_n - I_{an}R_a)60}{2\pi N} \quad (63)$$

$$k_e = \frac{(6 - 0,408 \cdot 10,5)60}{2\pi \cdot 300} = 0,154 \text{ Vs/rad} \quad (64)$$

Assim os parâmetros K_t e K_e do motor Polulo N20, podem ser posteriormente aplicados no modelo.

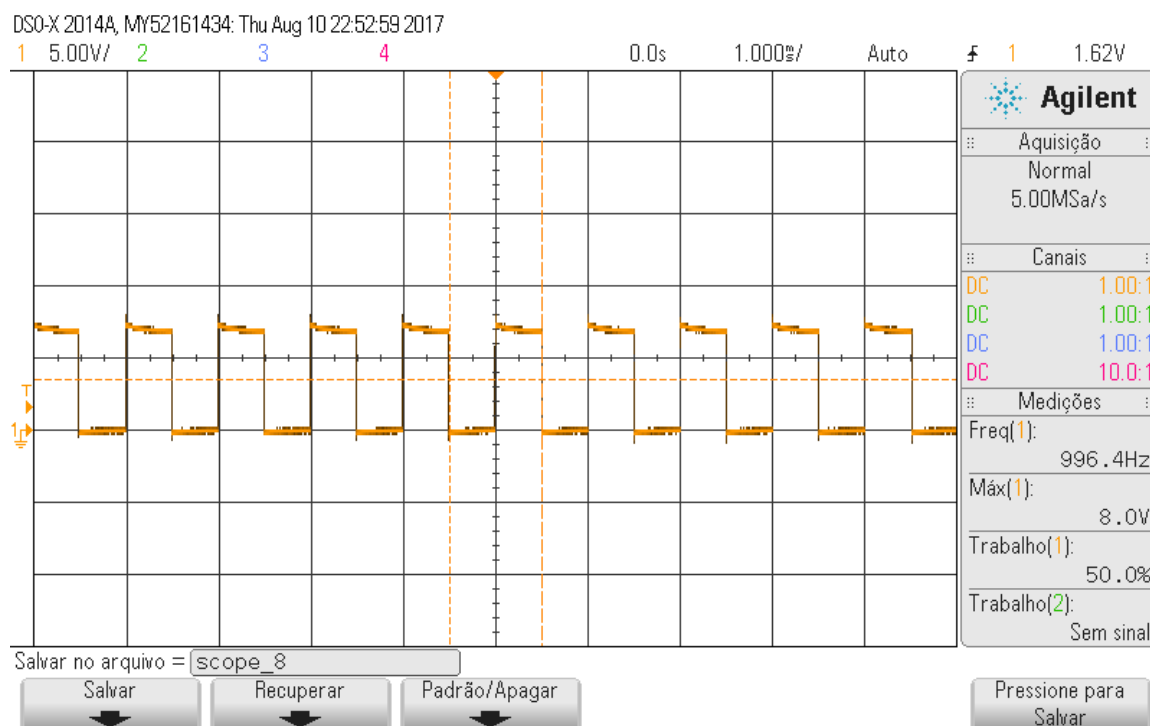
Com o objetivo de controlar o sistema, de forma que ele se mantenha estável os atuadores são acionados levemente para um erro pequeno da saída e abruptamente para um erro maior de forma que o centro de gravidade do pêndulo esteja sempre acima do eixo dos atuadores, mantendo o sistema em estabilidade.

Os atuadores empregados no robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido são pequenos motores CC, que para realizarem a tarefa de atuar na entrada do sistema proporcionalmente ao erro na saída devem ser controlados por PWM, a fim de que se obtenha linearidade na atuação, visto que com controle por PWM o torque aplicado também é linear.

Para aplicar o controle por PWM, é necessário utilizar um driver de PWM, também conhecido como ponte H. A fim de se ter certeza que o driver de PWM aplica o sinal linearmente na carga indutiva (motor CC) assim como o recebe do microcontrolador, foram realizados testes e constatou-se que o driver previamente selecionado L293D para ser empregado no robô obteve um desempenho muito ruim, de forma que a onda sobre a carga se apresentava totalmente descaracterizada do sinal PWM aplicado na entrada do driver.

A seguir o driver TB6612FNG foi testado e apresentou uma resposta bem satisfatória, onde o sinal sobre a carga, apresentou-se linearmente conforme a resposta desejada, a qual é demonstrada na figura 7.

Figura 7 – Saída do driver TB6612FNG aplicada a carga



Fonte: (Do autor, 2017)

Assim foi possível se certificar que a tensão calculada pelo controlador será aplicada no motor linearmente sem distorção, a fim de evitar erros ou comportamentos não desejados.

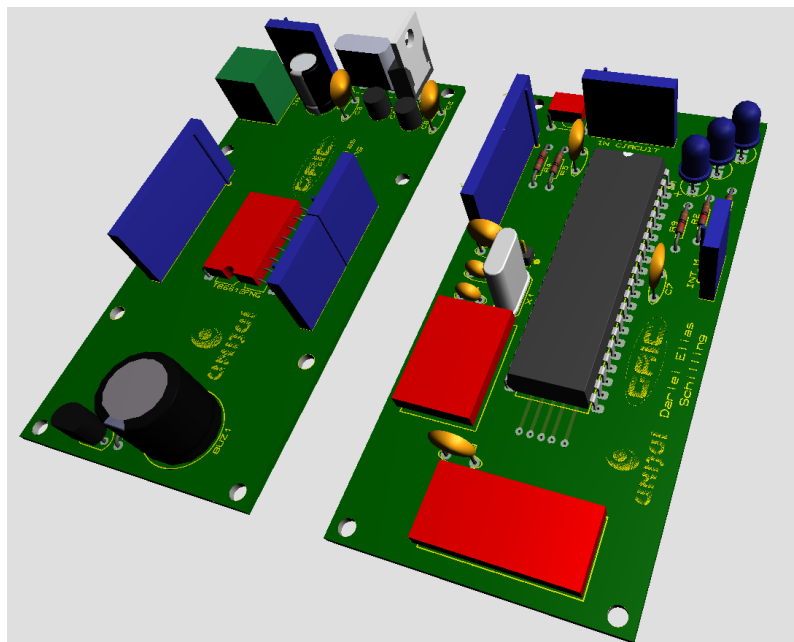
3.3 PROJETO CONSTRUTIVO E ALIMENTAÇÃO

O robô foi projetado de forma que está organizado em 3 níveis (figura 6), o primeiro em acrílico fixa os motores e os parafusos que se estendem aos níveis superiores. O segundo nível compõem o regulador de tensão com filtro LC e driver de PWM em PCI de material composite. O terceiro nível é composto pelo microcontrolador PIC18F46K22 assim como seus respectivos periféricos, sensor MPU6050, transceiver NRF24L01+ e LED's (*Light Emitting Diode*) para indicação e debug, também em PCI de material composite.

As placas foram confeccionadas em composite, que trata-se de um composto de fenolite e fibra de vidro, material este que tem uma boa resistência mecânica e deixa o projeto esteticamente bem apresentável.

O projeto do diagrama esquemático pode ser visualizado no apêndice A. O layout das PCI's desenvolvido em software é apresentado na figura 8.

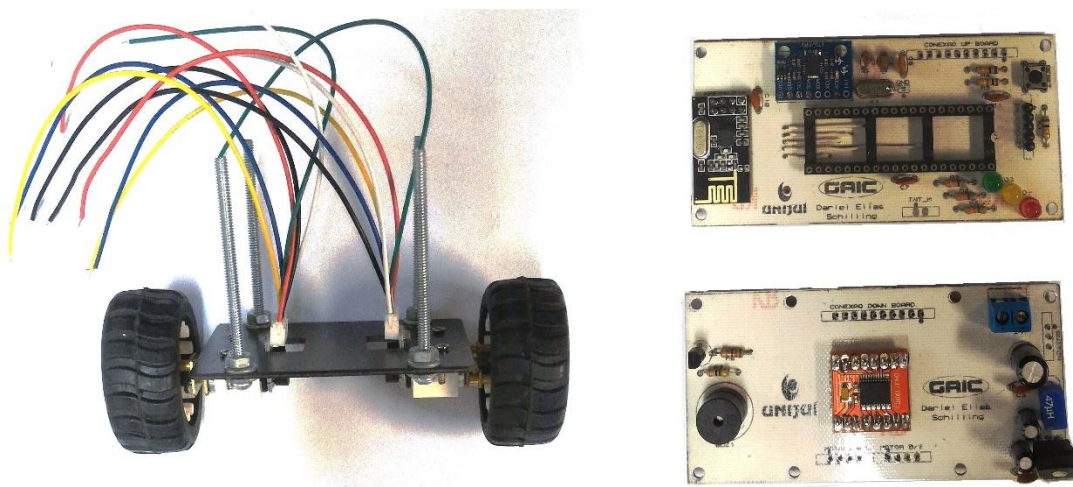
Figura 8 – Projeto PCI's do sistema do pêndulo



Fonte: (Do autor, 2017)

A montagem prática das PCI's é mostrada na figura 9, assim como o chassi em acrílico para sustentação da estrutura do robô.

Figura 9 – PCI's do sistema do pêndulo e estrutura dos motores



Fonte: (Do autor, 2017)

As baterias que alimentam todo o sistema são células de lítio 18650 conectadas em série, com tensão nominal 3,7V e 4,2V totalmente carregadas com capacidade de 2200mAh cada, totalizando uma tensão de 8,4V.

A fim de que não seja necessária a implantação de um regulador linear para a tensão aplicada aos atuadores que deve ser de no máximo 6V, conforme os motores utilizados, um divisor de tensão realimenta a tensão para o microcontrolador que realiza um ajuste do PWM, de forma que se a tensão calculada pelo controlador for de um determinado nível para os 6V máximos, o PWM é ajustado para a tensão lida no conversor A/D do microcontrolador.

3.4 PARÂMETROS DO ROBÔ DE EIXO ÚNICO EM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO

Os parâmetros do robô projetado são dados pela tabela 3 e foram calculados a partir das equações do modelo matemático descrito no capítulo 2, obtidos a ensaio em laboratório ou obtidos no respectivo datasheet.

Tabela 3 – Parâmetros do robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido

Parâmetros	Valores
$g (m/s^2)$	9,81
$J_p(kgm^2)$	0,0018
$m_p(kg)$	0,247
$L(m)$	0,08
$l(m)$	0,1
$h(m)$	0,14
$J_r(kgm^2)$	0,000006
$m_r(kg)$	0,032
$r(m)$	0.0204
$R_a(\Omega)$	10.5
$K_t(Nm/A)$	0,108
$K_e(Vs/rad)$	0,154
$n(Wb)$	1
$I_a(A)$	0,5
$V_n(V)$	6

Fonte: (Do autor, 2017)

3.5 MODELO REPRESENTADO POR FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Com o modelo em espaço de estados finalizado, um controlador pode ser empregado no âmbito de estabilizar o robô na posição vertical, visto que o mesmo é parcialmente instável, de forma que quando o seu centro de massa não está posicionado diretamente sobre o eixo das rodas ele cai. Por conseguinte, um controlador necessita ser empregado para estabilizar o sistema mantendo-o na posição vertical.

Desta maneira, devido a experiência e conhecimento prévio, um controlador PID será empregado no controle do robô de autobalanceamento, e assim sendo o modelo do pêndulo invertido levantado em espaço de estados, é transcrito para representação em equação de função de transferência. Por conseguinte a equação 60 é aplicada ao modelo de espaço de estados para realizar tal conversão, de forma que G é a relação da saída ψ pela entrada U .

$$G = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (65)$$

Como resultado da equação 65 aplicada ao modelo de espaço de estados, têm-se a função de transferência do robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido na equação 66, considerando os parâmetros acima descritos na tabela 3.

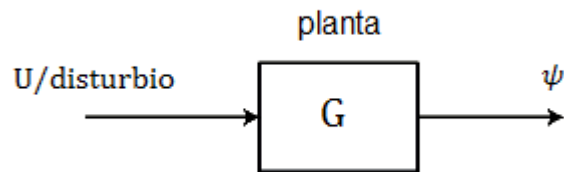
$$G = \frac{339,2s}{s^3 + 220,8s^2 - 390,8s - 19250} \quad (66)$$

Assim sendo conhecemos então a função de transferência que descreve o comportamento da saída ψ em função de uma entrada U para o sistema do pêndulo invertido utilizado no robô de eixo único.

3.6 RESPOSTA DA PLANTA EM MALHA ABERTA

Considerando um impulso de 1Ns (Newton Segundo) aplicado sobre o sistema da planta em malha aberta conforme a figura 10.

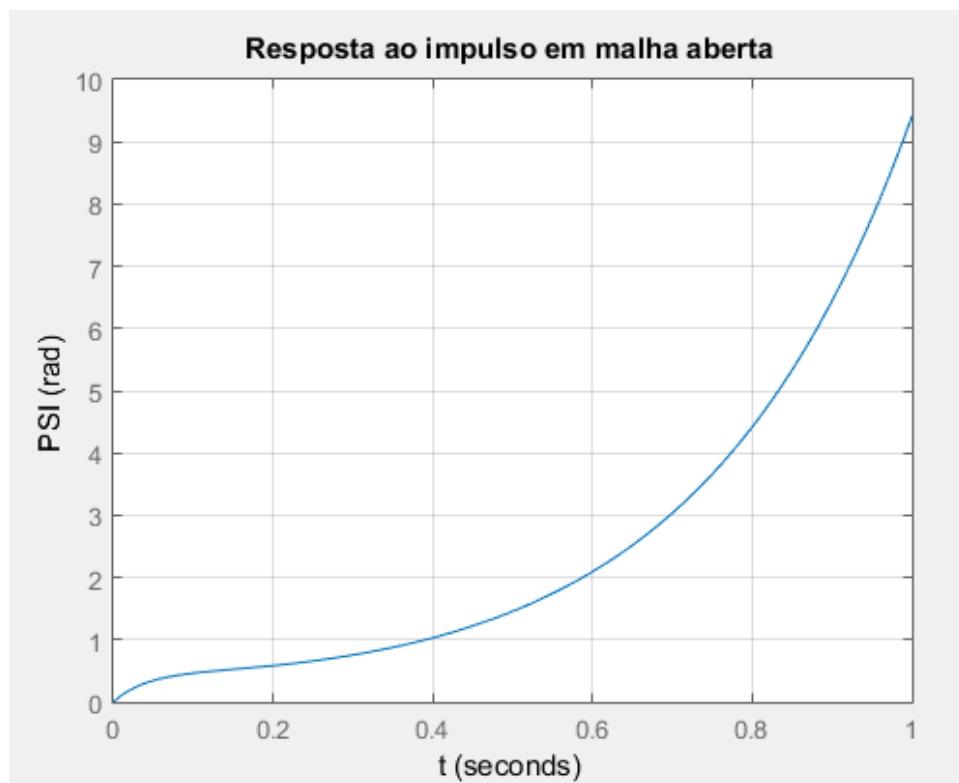
Figura 10 – Sistema em malha aberta



Fonte: (Do autor, 2017)

Pode-se observar o comportamento da resposta do sistema na figura 11.

Figura 11 – Resposta ao impulso do sistema em malha aberta



Fonte: (Do autor, 2017)

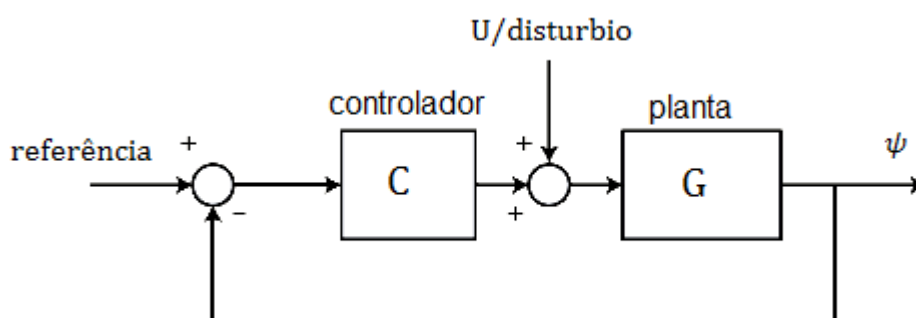
Como era de se esperar a resposta do sistema é instável, de maneira que tende ao infinito logo que o impulso é aplicado ao sistema. Traduzindo para o comportamento do pêndulo invertido pode-se entender que assim que o sistema sofrer um distúrbio ele tenderá ao infinito para tal lado qual for aplicado o distúrbio, parando é claro em $\pi/2\text{rad}$ ou 90° , ou seja, no chão.

3.7 CONTROLADOR PID APLICADO NO PROBLEMA DO REGULADOR

As teorias de controle implicam que um controlador é aplicado de maneira a modelar o comportamento de determinado sistema. Dessa forma, controladores são aplicados com o objetivo de rejeitar distúrbios e/ou rastrear uma referência.

Sistemas cuja entrada é variante e a saída deve permanecer estável em um único valor utilizam a abordagem chamada problema do regulador. Na figura 12 pode-se acompanhar a estrutura de um controlador aplicado como problema do regulador.

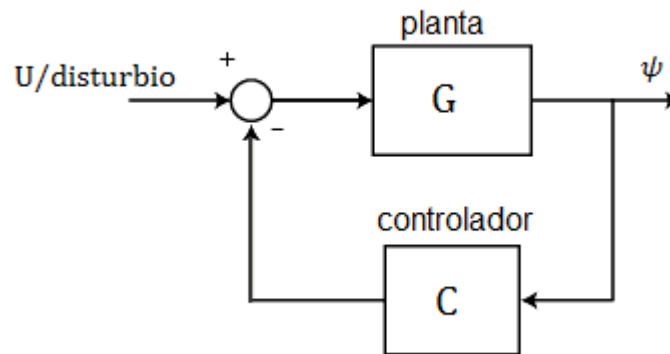
Figura 12 – Estrutura de controle problema do regulador



Fonte: (Do autor, 2017)

Considerando que o sistema do pêndulo invertido necessita realizar o rastreamento da referência zero, a estrutura da figura 12 pode ser simplificada, da forma que é apresentada na figura 13.

Figura 13 – Estrutura de controle problema do regulador simplificada



Fonte: (Do autor, 2017)

Definida a topologia de controle a ser aplicada, assim como a função de transferência da planta um controlador PID (proporcional integrativo derivativo) será projetado para realizar a tarefa de estabilizar o sistema.

O controlador PID é um controlador com realimentação, onde a entrada e a saída podem ser comparadas e o erro processado, ou seja, a diferença entre o valor mensurado na saída e a referência estabelecida é minimizada pelo ajuste dos seus parâmetros de controle.

Com grande empregabilidade da indústria, o controle PID é um dos métodos mais difundidos e referenciados na literatura, e em sua maioria é utilizado em formato paralelo, onde as ações proporcional, integrativa e derivativa atuam em paralelo. Na análise no domínio do tempo o controlador PID é dado pela equação 67.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (67)$$

Onde K_p é o ganho proporcional, K_i é o ganho integral e K_d é o ganho derivativo. Sendo que pela variação destas constantes de ganho, a característica da resposta da saída é alterada, tendo influência sobre o tempo de subida, tempo de acomodação, sobressinal e erro no regime permanente, de forma que cada uma das constantes tem uma característica específica conforme a tabela 4.

Tabela 4 – Característica dos parâmetros do controlador PID

	Tempo de subida	Sobressinal	Tempo de acomodação	Erro no regime permanente
K_p	Diminui	Aumenta	Pequena alteração	Diminui
K_i	Diminui	Aumenta	Aumenta	Elimina
K_d	Pequena alteração	Diminui	Diminui	Não altera

Fonte: (Batista, 2017)

Assim sendo, o controlador PID atuando sobre o erro do sistema do pêndulo invertido, deve gerar uma resposta de saída coerente a fim de estabilizar o robô na posição vertical, de forma que as rodas devem girar na mesma direção da inclinação do robô até que o ângulo de inclinação do mesmo chegue a 0° com a vertical, onde encontra seu ponto de equilíbrio.

A fim de encontrar os valores dos ganhos K_p , K_i e K_d do controlador PID, o software Matlab foi utilizado, resultando nos valores a seguir.

$$K_p = 109 \quad K_i = 3600 \quad K_d = 0,471 \quad (68)$$

3.8 DISCRETIZAÇÃO DO CONTROLADOR PID

A fim de que o controlador possa ser utilizado em um microcontrolador, o mesmo necessita ser discretizado. Devido as boas características de resposta, conhecimentos e experiências passadas foi estabelecido que o método de discretização a ser utilizado neste projeto será a discretização por Tustin, o qual é descrito pela equação 69 e então aplicado ao controlador PID no domínio da frequência descrito na equação 70.

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (69)$$

$$C = \frac{K_p s + K_i + K_d s^2}{s} \quad (70)$$

Aplicando Tustin, substituindo a equação 69 na equação 70, e equacionando, temos o controlador PID no tempo discreto na equação 71 a seguir, onde T é o tempo de amostragem, Out é a saída do controlador e In é a entrada.

$$\begin{aligned} Out[n] = In[n] \left(K_p + 0,5K_iT + \frac{2K_d}{T} \right) + In[n-1] \left(K_iT - \frac{4K_d}{T} \right) \\ + In[n-2] \left(-K_p + 0,5K_iT + \frac{2K_d}{T} \right) + Out[n-2] \end{aligned} \quad (71)$$

Por conseguinte, o sistema pode ser agora testado, de forma que todas as suas partes estão completas.

3.9 AQUISIÇÃO DE DADOS

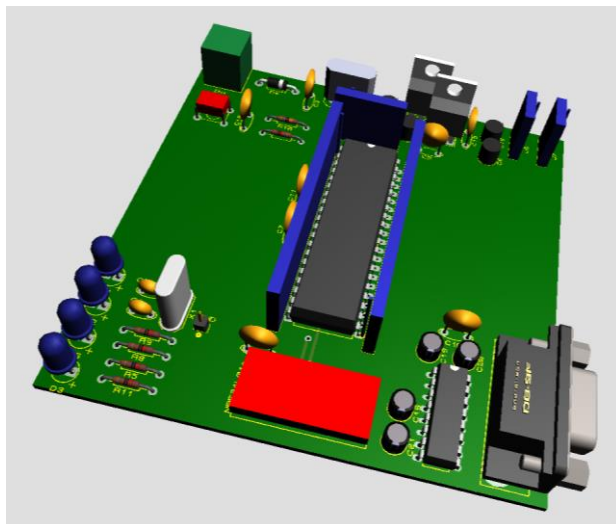
Com o objetivo de aquirir os dados gerados a partir do robô de eixo único, uma PCI auxiliar foi projetada, utilizando um microcontrolador Micrichip PIC18F46K80. Este foi escolhido pois pode trabalhar em até 64MHz, ou seja 16MIPS e por agregar suporte a vários periféricos, conversor analógico-digital (A/D) de 12 bits, sete temporizadores, 5 módulos de PWM (Pulse Width Modulation), interface MSSP (Master Synchronous Serial Port) para uso como interface I²C (*Inter-integrated Circuit*) ou SPI (*Serial Peripheral Interface*), o qual foi utilizado para comunicar com o transceiver nRF24L01+, assim como dispõe ainda de 2 módulos de interface serial EUSART (*Enhanced Universal Synchronous Asynchronous Receiver Transmitter*), a qual foi utilizada para comunicar os dados recebidos do pêndulo para o computador.

O transceiver nRF24L01+ efetua a transmissão de dados por comunicação wireless através da modulação GFSK (Gaussian Frequency Shift Keying) na transmissão dos dados à uma taxa de no máximo 2Mbps e pode ser acessado utilizando o protocolo de comunicação SPI. Possui uma potência de transmissão que pode ser configurada na faixa de -18 a 0dBm, possibilitando um alcance de até 250 metros (sem obstáculos).

Ao momento que os dados chegam a placa auxiliar eles são transmitidos via serial utilizando a interface EUSART, que comunica os dados para um MAX232 conectado a um conversor serial para USB, onde então os dados são recebidos através de uma das portas COM do computador.

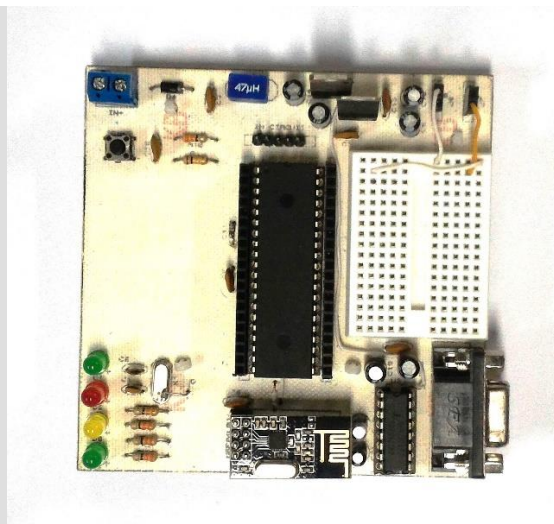
O layout e montagem prática da PCI auxiliar é apresentado nas figuras 14a e 14b, respectivamente, assim como o diagrama esquemático pode ser acompanhado no apêndice B.

Figura 14a – Layout da PCI auxiliar



Fonte: (Do autor, 2017)

Figura 14b – Montagem da PCI auxiliar



Fonte: (Do autor, 2017)

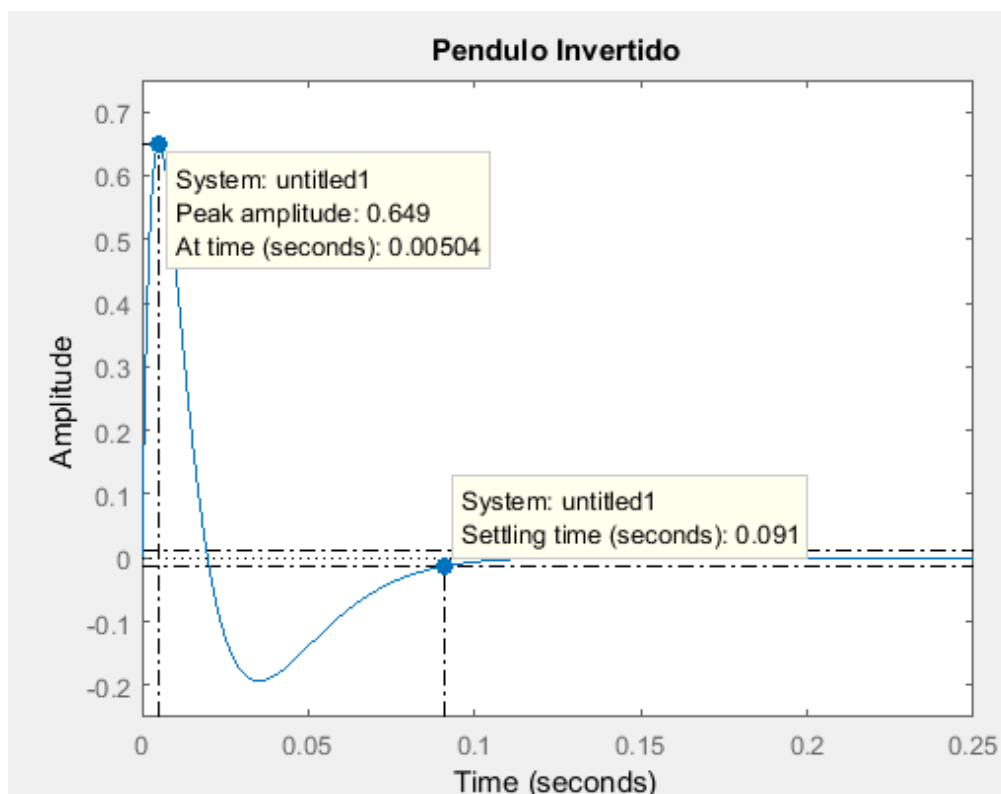
Esta PCI auxiliar foi utilizada para testar todos os módulos, drivers e sensores utilizados ao longo do projeto, assim como também se fez muito importante no processo de debug durante o desenvolvimento, visto que o pêndulo invertido necessita trabalhar livre de cabos e os dados gerados no mesmo são enviados por comunicação wireless através do transceiver nRF24L01+. Assim também, se fez importante para a aquisição dos resultados, a fim de que uma análise pudesse ser realizada.

3.10 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Dessarte, o robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido foi então simulado a partir do modelo e respectivo controlador com os ganhos projetados para tal, utilizando os parametros descritos na tabela 3, que correspondem ao modelo prático construído e apresentado na figura 6.

Assim a resposta do pêndulo invertido ao impulso de 1Ns é demonstrada na figura 15.

Figura 15 – Resposta ao impulso do sistema em malha fechada

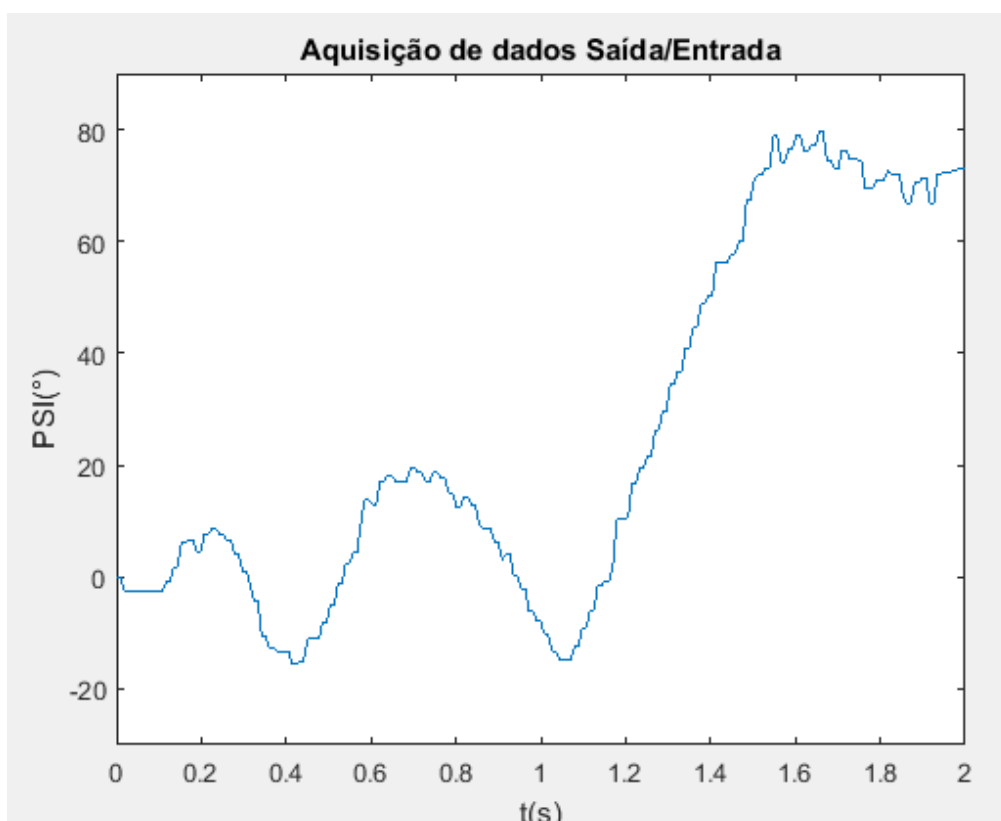


Fonte: (Do autor, 2017)

Ao primeiro olhar, avaliando a resposta da saída do pêndulo invertido ψ , tem-se a impressão de um sistema estável, porém considerando o sobressinal de 0,649rad apresentado após aplicado o distúrbio, constata-se que este corresponde a um ângulo de $37,18^\circ$ de inclinação, de maneira que para este ângulo o pêndulo está trabalhando demasiadamente fora da região no qual o modelo foi especificado, de forma que o modelo responde bem para valores próximos a 0° , logo, para tal inclinação o pêndulo não seria capaz de se recuperar e viria ao chão.

A fim de testar os resultados constatados na simulação o controlador discretizado para os ganhos projetados, foi implementado atuando na entrada da planta (motores), sendo realimentado pelos dados do acelerômetro e giroscópio (ψ). Assim sendo os dados obtidos na saída do robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido são apresentados na figura 16.

Figura 16 – Resposta do robô de pêndulo invertido



Fonte: (Do autor, 2017)

Assim como previamente constatado, o robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido não apresentou comportamento estável, caracterizando um sistema instável sub-amortecido, onde uma componente senoidal aumenta exponencialmente em amplitude, ou seja, um mínimo distúrbio inicial é suficiente para que o erro seja amplificado a cada oscilação levando o robô ao chão em menos de 2 segundos.

O problema que causou o comportamento anterior pôde ser isolado através de simulações do modelo do pêndulo levantado, de maneira que se chegou a conclusão que o torque dos motores utilizados deveria ser maior, enquanto a rotação deveria ser menor. A fim de comprovar a nova constatação, as constantes de torque K_t e constante de força contra-eletromotriz K_e foram alteradas para um motor de mesma categoria, porém de maior torque e menor rotação. Os parâmetros do motor simulado são apresentados na tabela 5.

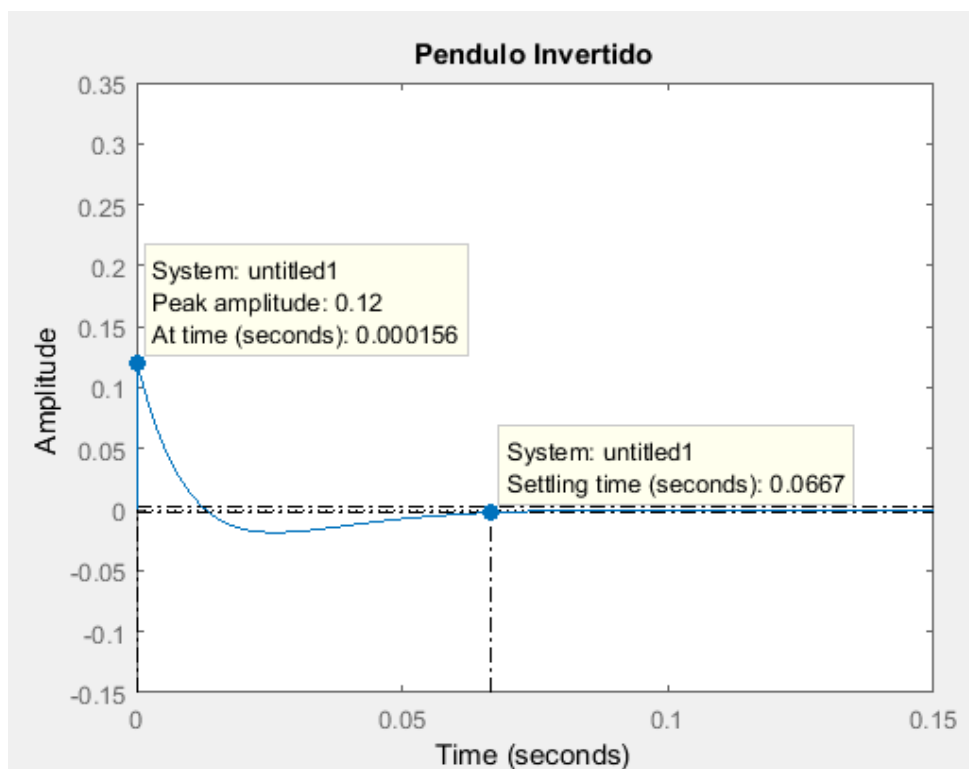
Tabela 5 – Parâmetros do novo motor Polulo N20

Parâmetros	Valores
$V_n(V)$	12
$I_{a_stall}(A)$	0,8
$I_a(A)$	0,408
$N_{no_load}(rpm)$	200
$N(rpm)$	130
$T_m(Nm)$	0.284
$P(W)$	4,9
$R_a(\Omega)$	5,5

Fonte: (Do autor, 2017)

Assim os resultados obtidos com as novas constantes de torque e de força contra-eletromotriz, sendo respectivamente $K_t = 1,37Nm/A$ e $K_e = 1,79Vs/rad$, são demonstrados na figura 17.

Figura 17 – Resposta ao impulso do sistema com novo motor



Fonte: (Do autor, 2017)

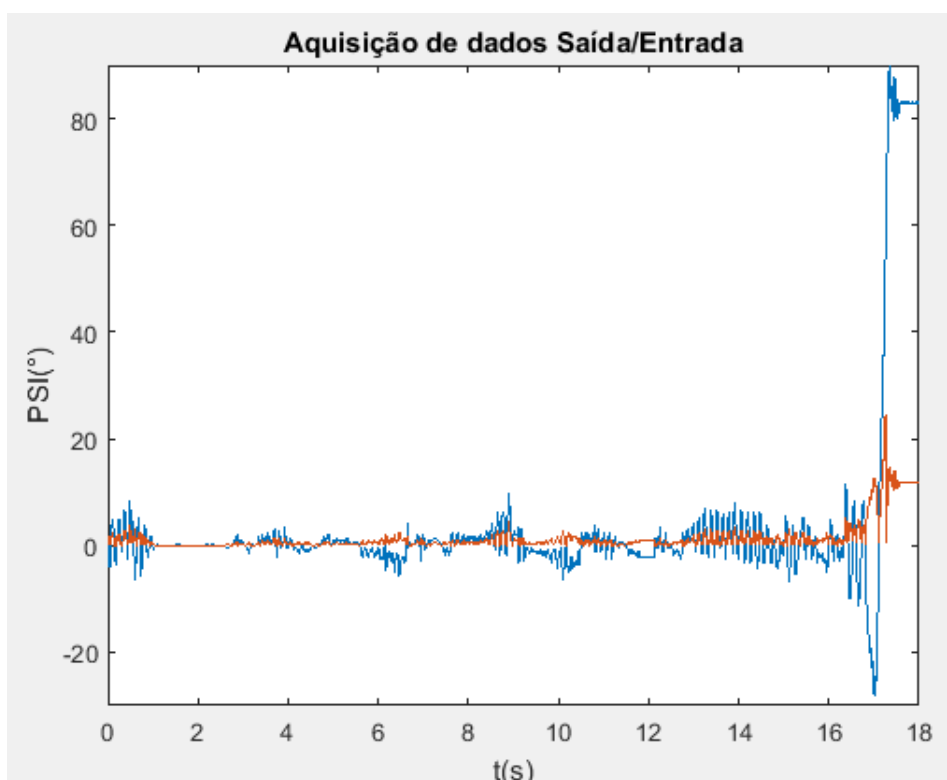
Analisando agora os novos resultados de simulação, pode-se observar que o sobressinal diminui consideravelmente, sendo este aproximadamente 6 vezes menor,

agora de $0,12\text{rad}$ ou $6,87^\circ$, de maneira que o pêndulo invertido trabalharia próximo da região especificada no modelo, o que caracterizaria o robô como sistema estável.

Assim o problema que causou a instabilidade no robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido pode ser isolado, e a solução do mesmo, implicaria na substituição dos motores que devido ao já alto custo do projeto, foi descartada, de forma que os resultados até aqui obtidos foram apresentados.

Um reajuste por tentativa e erro foi aplicado nos ganhos do controlador de maneira que o sistema apresentou um comportamento marginalmente estável, porém ainda não apresentando uma resposta satisfatória. Assim a resposta do sistema, sendo a saída (ângulo ψ) pela entrada da planta (tensão U) dada em modulo é plotada na figura 18.

Figura 18 – Resposta saída/entrada do robô de pêndulo invertido



Fonte: (Do autor, 2017)

CONCLUSÃO

Dessarte, o projeto foi concluído e cumpriu a proposta de desenvolvimento de um robô de eixo único em sistema de pêndulo invertido. Ainda que o resultado não foi de imediato um sistema estável na implementação prática do robô, o problema identificado através do modelo matemático se mostra relativamente fácil de solucionar.

Assim, além do intuito do projeto cumprido, foi possível provar uma das assertivas mais importantes da engenharia, a matemática é a maneira mais barata de trabalhar a engenharia, de forma que como ocorreu no caso do projeto, isolar problemas ou soluçona-los com a ajuda da matemática sem a necessidade de inúmeros testes de campo e laboratório é um cenário ideal, pois estes normalmente exigem muito mais recursos financeiros.

Através da análise dos resultados e do sistema como um todo, foi possível identificar que trabalhando com tais sistemas que possuem uma dinâmica rápida microcontroladores de 8bits mostram suas limitações. Ainda que o microcontrolador Microchip PIC18F46K22 conseguiu cumprir sua tarefa, tal projeto necessita uma maior velocidade de processamento ou acesso a periféricos como DMA (*Direct Memory Access*) e ALU (*Arithmetic Logic Unit*), visto que trabalhando a uma velocidade mais baixa cálculos como a integral dos dados do giroscópio geram erros no regime permanente, ou tem um tempo de resposta muito lento devido por exemplo as trigonometrias realizadas nos dados do acelerômetro.

No âmbito do uso de sensores que se comunicam através de protocolos digitais tais como o utilizado para o projeto, foi identificado que a comunicação I²C tem um tempo de resposta lento, equanto por exemplo sensores que se comunicam com protocolo SPI podem trabalhar a velocidades muito mais altas e não demonstram esse tipo de problema.

Analisando o projeto como um todo no âmbito de controle de sistemas, é possível concluir que o hardware utilizado, para muitas aplicações é mais do que o suficiente, porém trabalhando com sistemas de dinâmica rápida mostram seus pontos negativos impressos nos resultados.

Apesar de todas as dificuldades e problemas encontrados o projeto foi concluído, e demonstra a importância da necessidade do conhecimento do processo/área/sistema em que se pretende atuar, assim como um apanhado geral na

abordagem do modelo matemático e controle de determinado sistema, focando em diversos aspectos que necessitam ser abordados para modelar o comportamento do sistema conforme o projetista assim desejar.

Como sugestão de trabalhos futuros é possível facilmente identificar aspectos, os quais, trariam numeras melhorias para o trabalho como a implementação do mesmo sistema em um hardware melhor, como os mais novos microcontroladores da série ARM, estudos aprofundados em calibrações e tratamento de dados do IMU ou ainda implementação de outras teorias de controle sobre este modelo, como também controle do modelo nos eixos vertical e horizontal, considerando-o como um sistema MIMO.

REFERÊNCIAS

BATISTA, Gilson; **Acionamentos de Máquinas Elétricas**. Notas de Aula. 2017

DING, Ye; GAFFORD, Joshua; KUNIO, Mie; **Modeling, Simulation and Fabrication of Balancing Robot**. Advanced System Dynamics and Control, Harvard University, Massachusetts Institute of Technology, 18 dez. 2012, p. 1-22, 2012.

LUNDBERG, Kent H.; Roberge, James K.; **Classical dual-inverted-pendulum control**. Conferencia IEEE em controle e decisão. 2003, p. 4399-4404, 2003.

KO, Albert; LAU H. Y. K.; LAU T. L. **SOHO security with mini self balancing robots**. Industrial Robot: An International Journal. 2005, Vol. 32, p. 492-498, 2005.

OGATA, Katsuhiko; **Engenharia de Controle Moderno**. 4ª edição, 2003, Prentice-Hall.

SUNDIN, Christian; THORSTENSSON, Filip; **Autonomous Balancing Robot: Design and construction of a balancing robot**. 2012. 76p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Chalmers University of Technology, 2012.

NASA; **What Is a Heavy Lift Launch Vehicle?** Editor: Flint Wild, 2017. Disponível em: < <https://www.nasa.gov/audience/forstudents/k-4/stories/nasa-knows/what-is-heavy-lift-launch-vehicle-k4.html> >

SPACE X; **Falcon 9 First Stage Landing On Droneship "Of Course I Still Love You"** 2016. Disponível em: < <http://www.spacex.com/gallery/first-re-flight#slide-10> >

**APÊNDICE A – DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DO SISTEMA DO ROBÔ DE EIXO
ÚNICO EM SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO**

APÊNDICE B – DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DO SISTEMA DA PCI AUXILIAR

