



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

TESE DE DOUTORADO

PROJETOS DE CONTROLADORES ROBUSTOS DO TIPO LQG/LTR  
PARA SISTEMA MULTIVARIÁVEL INSTÁVEL  
COM USO DE PRÉ-COMPENSADOR DINÂMICO

Por

TD – 05 / 2008

Edson Jorge de Matos

Belém, PA  
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

PROJETOS DE CONTROLADORES ROBUSTOS DO TIPO LQG/LTR  
PARA SISTEMA MULTIVARIÁVEL INSTÁVEL  
COM USO DE PRÉ-COMPENSADOR DINÂMICO

Por

Edson Jorge de Matos

TD – 05 / 2008

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPA, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Roberto Brito de Souza

Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Belém, PA

2008

---

M433p Matos, Edson Jorge de, 1971.

Projetos de controladores robustos do tipo LQG/LTR para sistema multivariável instável com uso de pré-compensador dinâmico / Edson Jorge de Matos; orientador, Jorge Roberto Brito de Souza — 2008.

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2008.

1. Controle automático. 2. Controlador H2. 3. Controlador robusto. 4. Sistema de controle por realimentação. I. Souza, Jorge Roberto Brito de, orient. II. Título.

CDD - 22. 629.8

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

PROJETOS DE CONTROLADORES ROBUSTOS DO TIPO LQG/LTR

PARA SISTEMA MULTIVARIÁVEL INSTÁVEL

COM USO DE PRÉ-COMPENSADOR DINÂMICO

Tese de Doutorado submetida à avaliação da banca examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará e julgada adequada para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica, na área de concentração de Sistemas de Energia Elétrica.

APROVADA EM: 30 / 05 / 2008

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Jorge Roberto Brito de Souza  
Orientador — UFPA

---

Prof. Dr. José Augusto Lima Barreiros  
Membro — UFPA

---

Prof. Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho  
Membro — UFSC

---

Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Júnior  
Membro — UFPA

---

Prof. Dr. André Maurício Damasceno Ferreira  
Membro — CEFET-PA

---

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira  
Membro — UNICAMP

Visto:

---

Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes  
Coordenador do PPGEE / ITEC / UFPA

## **Dedicatória**

*Aos meus pais*

*Manoel e Francisca (in memoriam).*

## **Agradecimentos**

A Deus por me permitir viver esta experiência.

A Direção do Campus de Bragança, da Universidade Federal do Pará, por me liberar de minhas atividades para que eu pudesse realizar o meu curso de doutorado, em Belém.

Ao Prof. Jorge Roberto Brito de Souza, pelo incentivo, orientação e apoio na realização desta tese — sem sua colaboração este trabalho não seria possível.

Ao amigo Raimundo Neves de Souza, pela contribuição na fase inicial deste trabalho e pela participação nos trabalhos publicados.

Aos membros da Banca Examinadora do Exame Qualificação, por suas preciosas contribuições para a versão final deste trabalho.

Aos amigos da Sala de Estudos do PPGEE, pela agradável convivência neste período.

A todos os que contribuíram, de forma direta ou indireta, na elaboração deste trabalho.

## **Resumo**

Este trabalho aborda o problema do projeto de controladores do tipo LQG/LTR para sistemas multivariáveis instáveis. A proposta principal é estabilizar o sistema previamente, através do uso de um pré-compensador dinâmico estabilizador, antes de se projetar o controlador LQG/LTR definitivo. Com esta abordagem, resolvem-se os problemas que o procedimento convencional não consegue superar quando o sistema controlado é instável, mas a ordem do controlador completo fica significativamente aumentada.

Para minimizar o problema relacionado com a ordem excessiva do controlador, nesta tese também se desenvolve um projeto alternativo no qual o projeto do controlador do tipo LQG/LTR é feito com base em uma representação de ordem reduzida do sistema controlado.

Este trabalho também apresenta um roteiro de procedimentos que possibilita a equalização, em todas as faixas de frequências, dos ganhos principais de sistemas dinâmicos multivariáveis que possuam pólos na origem.

### **Palavras-chave:**

- Controladores LQG/LTR.
- Sistemas Multivariáveis.
- Loopshaping.
- Compensadores dinâmicos.

## **Abstract**

This thesis addresses the problem of designing LQG/LTR controllers for unstable multivariable systems. Its main proposal is to design a stabilizer dynamic pre-compensator to stabilize the system before designing the final LQG/LTR controller. This approach overcomes the problems that the original procedure can not overcome when it deals with unstable systems, but the order of the overall controller gets increased.

In order to minimize the problem associated with the excessive order of the overall controller, this thesis also presents an alternative procedure in which the design of the LQG/LTR controller is made based upon a reduced order design model.

This thesis also presents a step by step procedure to obtain the equalization of the principal gains of multivariable dynamic systems that have poles on the origin.

### **Keywords:**

- LQG/LTR controllers.
- Multivariable systems.
- Loopshaping.
- Dynamic compensators.



# Sumário

<b>Capítulo 1: Introdução</b>	1
1.1 Principais Abordagens para o Tratamento de <u>Incertezas de Modelo</u> em Projeto de Controladores	2
1.2 Abordagens para o Problema do Projeto de Controladores Robustos.....	3
1.3 Propriedades de Robustez de Alguns Reguladores	4
1.4 Algumas Características do Método LQG/LTR	5
1.4.1. O Caso de Sistemas Instáveis	5
1.4.2. O Caso de Sistemas com Pólo na Origem	6
1.5 Escopo e Contribuições desta Tese	7
1.6 Organização do Conteúdo deste Trabalho	8
<b>Capítulo 2: Análise no Domínio da Frequência das Características de Sistemas de Controle em Malha Fechada para Sistemas MIMO</b>	10
2.1 Representação das Incertezas de Modelagem na Forma Multiplicativa Não-Estruturada	11
2.2 Considerações Preliminares Sobre o Projeto de Controladores para Sistemas Multivariáveis	12
2.3 Curvas de Resposta em Frequência Ideais para Sistemas Multivariáveis	15
2.4 Margens de Estabilidade para Sistemas Multivariáveis	17
2.5 Conclusões	19

<b>Capítulo 3: Síntese do Método LQG/LTR</b>	20
3.1 Regulador Linear Ótimo Quadrático (LQR)	21
3.2 Filtro de Kalman	22
3.3 Controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG)	25
3.4 Método LQG/LTR para o Projeto de Controladores Robustos	26
3.4.1 Projeto do Observador (Filtro de Kalman)	27
3.4.2 Projeto do Regulador Linear Quadrático (LQR)	28
3.4.3 Projeto do Observador com Altos Ganhos nas Baixas Frequências ...	29
3.4.4 Projeto do Observador com Equalização de Ganhos em Todas as Frequências	30
3.5 Conclusões	34
<b>Capítulo 4: Compensadores Dinâmicos</b>	35
4.1 Formulação Matemática dos Compensadores Dinâmicos	36
<b>Capítulo 5: Projetos de Controladores Robustos para Sistema Multivariável             Instável com e sem o Uso de Pré-Compensador Dinâmico</b>	38
5.1 Apresentação do Sistema e suas Características	40
5.2 Projeto Básico: Controlador LQG/LTR Básico com Adição de Integradores e Equalização de Ganhos	44
5.2.1 Adição de Integradores na Entrada da Planta	44
5.2.2 Projeto da Malha de Referência com Equalização de Ganhos	46

5.2.3	Projeto do Filtro de Kalman .....	48
5.2.4	Projeto Final do Controlador LQG/LTR Básico .....	50
5.2.5	Análise do Desempenho do Controlador sem Pré-Compensador Estabilizador .....	53
5.3	Projeto Completo: Controlador LQG/LTR com Estabilização Prévia do Sistema a Ser Controlado .....	58
5.3.1	Projeto do Pré-Compensador Estabilizador .....	59
5.3.2	Adição de Integradores na Entrada da Planta Aumentada .....	62
5.3.3	Projeto da Malha de Referência Aumentada com Equalização de Ganhos .....	64
5.3.4	Projeto do Filtro de Kalman para o Sistema Aumentado .....	66
5.3.5	Projeto Final do Controlador Completo do Tipo LQG/LTR .....	68
5.3.6	Análise do Desempenho do Controlador com Pré-compensador Estabilizador .....	71
5.4	Conclusões .....	77
<b>Capítulo 6: Projeto de Controlador LQG/LTR de Ordem Reduzida com Uso de Pré-Compensador Dinâmico .....</b>		<b>79</b>
6.1	Projeto Intermediário: Controlador LQG/LTR de Ordem Reduzida com Estabilização Prévia da Planta .....	80
6.1.1	Projeto do Pré-Compensador Estabilizador de Ordem Reduzida ....	82
6.1.2	Obtenção de Modelo de Ordem Reduzida da Planta Aumentada ....	85

6.1.3	Adição de Integradores na Entrada do Modelo Reduzido da Planta Aumentada .....	89
6.1.4	Projeto da Malha de Referência de Ordem Reduzida com Equalização de Ganhos .....	91
6.1.5	Projeto do Filtro de Kalman para o Sistema Aumentado com Modelo Reduzido .....	93
6.1.6	Projeto Final do Controlador Intermediário do Tipo LQG/LTR ....	95
6.1.7	Análise do Desempenho do Controlador de Ordem Reduzida com Pré-compensador Estabilizador .....	100
6.2	Análise Comparativa das Dimensões dos Diversos Controladores .....	107
6.3	Conclusões .....	108
<b>Capítulo 7: Um Roteiro para a Equalização dos Ganhos de Sistemas</b>		
	<b>Multivariáveis que Possuem Pólo na Origem .....</b>	<b>109</b>
7.1	Equalização de Ganhos Via Adição de Integradores .....	110
7.2	Equalização de Ganhos de Sistemas com Pólo na Origem .....	113
7.3	Roteiro do Procedimento e Exemplo .....	114
7.4	Conclusões .....	120
<b>Capítulo 8: Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos .....</b>		<b>122</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>		<b>125</b>

<b>Anexo 1:</b>	<b>PROBASICO – Rotina para o Projeto Básico</b>	.....	130
<b>Anexo 2:</b>	<b>PROCOMPLETO – Rotina para o Projeto Completo</b>	.....	135
<b>Anexo 3:</b>	<b>PROINTER – Rotina para o Projeto Intermediário</b>	.....	140

## Lista de Figuras

Figura 2.1	Diagrama de blocos para um sistema MIMO com realimentação unitária .....	12
Figura 2.2	Resposta em frequência desejável para os ganhos principais da matriz de transferência de malha aberta $G(j\omega)K(j\omega)$ de um sistema MIMO .....	17
Figura 3.1	Diagrama de blocos do controlador LQG/LTR .....	29
Figura 3.2	Diagrama de blocos da planta com bloco de integradores em sua entrada .....	30
Figura 3.3	Sistema em malha fechada com bloco de integradores e controlador .....	33
Figura 4.1	Sistema MIMO controlado por compensador dinâmico .....	37
Figura 5.1	Curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema	41
Figura 5.2	Função que descreve os limites máximos das incertezas contidas no modelo nominal da planta .....	42
Figura 5.3	Ganhos principais do sistema em malha aberta, juntamente com as barreiras impostas pelas condições de desempenho e estabilidade	43
Figura 5.4	Sistema em malha fechada com integradores e controlador .....	45
Figura 5.5	Ganhos principais do sistema após a inclusão de dois integradores	46
Figura 5.6	Ganhos principais da matriz de transferência $\bar{T}_{FOL}(s)$ .....	48

Figura 5.7	Ganhos principais da matriz de transferência $\bar{T}_{KF}(s)$ .....	49
Figura 5.8	Ganhos principais de $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$ versus ganhos principais de $\bar{T}_{KF}(s)$ .....	52
Figura 5.9	Ganho principal inferior da matriz $I + \bar{G}(s)\bar{K}(s)$ .....	52
Figura 5.10	Saídas do sistema em resposta a uma referência do tipo degrau aplicada em $R_1$ .....	54
Figura 5.11	Saídas do sistema em resposta a uma referência do tipo degrau aplicada em $R_2$ .....	54
Figura 5.12	Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado em $R_1$ .....	55
Figura 5.13	Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado em $R_2$ .....	55
Figura 5.14	Diagrama de blocos do conjunto planta com compensador dinâmico .....	58
Figura 5.15	Ganhos principais do sistema aumentado, planta mais pré-compensador dinâmico .....	61
Figura 5.16	Sistema aumentado em malha fechada com integradores e controlador .....	62
Figura 5.17	Ganhos principais do sistema aumentado após a adição de dois integradores .....	63
Figura 5.18	Ganhos principais da matriz de transferência $\bar{T}_{FOL_a}(s)$ .....	65
Figura 5.19	Ganhos principais da matriz de transferência $\bar{T}_{KF_a}(s)$ .....	67

Figura 5.20	Ganhos principais de $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$ versus ganhos principais de $\bar{T}_{KF_a}(s)$ .....	70
Figura 5.21	Ganho principal inferior da matriz $I + \bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$ .....	70
Figura 5.22	Saídas do sistema com pré-compensador estabilizador em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicada na referência $R_1$ .....	72
Figura 5.23	Saídas do sistema com pré-compensador estabilizador em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicada na referência $R_2$ .....	72
Figura 5.24	Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado na referência $R_1$ .....	73
Figura 5.25	Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado na referência $R_2$ .....	73
Figura 6.1	Diagrama de blocos da planta com compensador dinâmico de ordem reduzida .....	81
Figura 6.2	Ganhos principais da planta aumentada com estabilizador de ordem reduzida .....	85
Figura 6.3	Ganhos principais do sistema com pré-compensador de ordem reduzida e do seu respectivo modelo simplificado por agregação ...	88
Figura 6.4	Planta reduzida em malha fechada com integradores e controlador	90
Figura 6.5	Ganhos principais do modelo reduzido da planta aumentada com a adição de dois integradores .....	91



Figura 6.6	Ganhos principais da matriz de transferência $\bar{T}_{FOL_r}(s)$ de ordem reduzida .....	93
Figura 6.7	Ganhos principais da matriz de transferência $\bar{T}_{KF_r}(s)$ .....	95
Figura 6.8	Ganhos principais de $\bar{G}_r(s)\bar{K}_r(s)$ versus ganhos de $\bar{T}_{KF_r}(s)$ .....	97
Figura 6.9	Ganhos principais de $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ versus ganhos de $\bar{T}_{KF_r}(s)$ .....	99
Figura 6.10	Ganho principal inferior da matriz $I + \bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ .....	99
Figura 6.11	Saídas do sistema para um degrau aplicado na referência $R_1$ .....	101
Figura 6.12	Saídas do sistema para um degrau aplicado na referência $R_2$ .....	101
Figura 6.13	Sinais de controle para a entrada degrau em $R_1$ .....	102
Figura 6.14	Sinais de controle para a entrada degrau em $R_2$ .....	102
Figura 7.1	Sistema em malha fechada com adição de integradores na saída da planta .....	111
Figura 7.2	Ganhos principais do sistema .....	115
Figura 7.3	Diagrama de blocos do sistema a partir de sua representação quase-diagonalizada .....	117
Figura 7.4	Ganhos principais do sistema após o acréscimo de dois integradores .....	119
Figura 7.5	Ganhos principais de $T_{FOL}(s)$ após a equalização de ganhos .....	120

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Modos do sistema controlado $G(s)K(s)$ , em malha aberta e em malha fechada .....	56
Tabela 5.2	Zeros de transmissão do sistema controlado $G(s)K(s)$ .....	56
Tabela 5.3	Modos do sistema controlado $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$ , em malha aberta e em malha fechada .....	75
Tabela 5.4	Zeros de transmissão do sistema controlado $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$ .....	75
Tabela 6.1	Modos do sistema controlado $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ , em malha aberta e em malha fechada .....	105
Tabela 6.2	Zeros de transmissão do sistema controlado $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ .....	105
Tabela 6.3	Comparação entre as dimensões dos diversos controladores projetados	107

# Capítulo 1: Introdução

Em Engenharia de Controle o projeto de controladores para sistemas dinâmicos reais é feito com base em modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico dos sinais físicos presentes nos sistemas que representam. Na prática ocorre que, em geral, esses modelos não são capazes de representar o comportamento dos seus respectivos sistemas físicos em toda faixa de operação, havendo, portanto, diferenças entre o modelo nominal e o correspondente sistema real. Essas diferenças são conhecidas como incertezas do modelo.

As incertezas de modelo se originam de diversas maneiras. Por exemplo, podem aparecer como resultado de variações dos parâmetros do sistema, eventualmente causadas por envelhecimento de seus componentes ou mudanças de condições ambientais tais como temperatura e/ou umidade, etc. Também podem ocorrer como consequência de mudanças nas condições de operação de sistemas não-lineares representados por modelos linearizados. Elas até podem ser intencionalmente introduzidas no modelo, visando simplificá-lo, e assim permitir um tratamento matemático e/ou computacional mais simples e compreensível. Esta última fonte de incertezas é muito comum, e foi considerada em [1] onde sistemas interligados de grande porte são representados por modelos que inicialmente desprezam os efeitos das interligações de seus subsistemas, mas depois são consideradas no projeto dos controladores locais (descentralizados) na forma de incertezas do modelo.

Portanto, dado que o projeto de um controlador é feito com base no modelo nominal do sistema real a ser controlado, as incertezas do modelo não podem ser totalmente ignoradas sob pena do resultado do projeto ser um controlador que estabilize o modelo do sistema mas não garanta a estabilidade do sistema real. Por esta razão, Athans [2] considera que um

modelo só é completo quando vem acompanhado de uma estimativa dos erros (ou incertezas) que possa conter.

## **1.1 Principais Abordagens para o Tratamento de Incertezas de Modelo em Projeto de Controladores**

Existem duas abordagens básicas para o tratamento das incertezas de modelo na realização de projetos de controladores para sistemas físicos reais. A primeira usa a idéia de controladores adaptativos [3]. Os valores dos parâmetros desses controladores são ajustados de acordo com as necessidades impostas pelas variações que a dinâmica do sistema controlado apresenta durante o seu funcionamento e/ou operação. Nesta abordagem, portanto, os ganhos do controlador sofrem modificações para adaptarem-se às variações do sistema, e assim sendo eles não são fixos, mas sim ajustáveis. A implementação desses controladores adaptativos pode ser feita através de diversas técnicas apresentadas na literatura, sendo as mais comuns as que utilizam o método dos ganhos programados [4], o método de alocação de pólos através de algoritmos auto-sintonizáveis [5], e o algoritmo GPC [6] (controle preditivo generalizado), dentre outros.

A segunda abordagem tenta projetar um controlador com estrutura fixa e que seja capaz de estabilizar e proporcionar um bom comportamento dinâmico para todos os membros da família de modelos situados dentro de limites conhecidos e/ou previsíveis de variação em torno do modelo nominal do sistema a ser controlado. Controladores com essas características são denominados controladores robustos [7]. Ao se projetar esses controladores, busca-se proporcionar ao sistema amplas margens de estabilidade (margens de ganho e de fase), para que essas margens, espécies de “*folgas*”, acomodem qualquer desvio do sistema real do seu modelo nominal.

## 1.2 Abordagens para o Problema do Projeto de Controladores Robustos

Existem duas abordagens básicas para o projeto de controladores robustos. A primeira utiliza o denominado espaço de parâmetros, e é adequada para tratar de sistemas representados em espaço de estados cujos parâmetros podem assumir valores dentro de intervalos delimitados por limites superiores e inferiores conhecidos. Nesta abordagem o problema consiste em determinar a estrutura do controlador que garanta a estabilidade do sistema para quaisquer valores que as variáveis do vetor de parâmetros incertos venham a assumir dentro dos seus respectivos intervalos de incerteza. Existem vários métodos que se enquadram nessa abordagem, como por exemplo os métodos baseados em programação convexa [8] ou o método de Siljak [9], etc.

A segunda abordagem utiliza um tratamento em que as incertezas do sistema são representadas no domínio da frequência por uma função limitante, e que busca projetar controladores que proporcionem ao sistema boas margens de estabilidade (margens de ganho e de fase) para acomodar as incertezas associadas com o seu modelo. Vários métodos de projeto de controladores robustos se enquadram nessa categoria, como por exemplo os métodos baseados em normas matriciais ( $H_2$ ,  $H_\infty$ ) [10], o método  $\mu$  [11] que é usado quando as incertezas do sistema são representadas em uma forma estruturada, ou o método LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian Regulator with Loop Transfer Recovery*) [12]. Este último método será o objeto principal de estudos nesta tese, com ênfase direcionada para dois aspectos especiais do problema: 1) o projeto de controladores robustos de ordem reduzida para sistemas multivariáveis instáveis e de fase mínima<sup>1</sup>; e 2) a obtenção da equalização dos ganhos principais de sistemas multivariáveis que possuem ao menos um pólo na origem do plano-s.

---

<sup>1</sup> Nesta tese a noção de fase mínima é associada aos sistemas que não possuem zeros no semi-plano direito do plano-s.

### 1.3 Propriedades de Robustez de Alguns Reguladores

Uma das principais características do regulador linear ótimo quadrático (regulador LQR) é que ele garante a estabilidade do sistema regulado em malha fechada [13]. Além disso, ele proporciona ao sistema controlado em malha fechada excelentes propriedades de robustez. De fato, Anderson e Moore [14] provaram que reguladores LQR para sistemas SISO (*Single-Input, Single-Output*), ou monovariáveis, proporcionam margem de ganho infinita, tolerância à redução de ganho de cinquenta por cento e margens de fase de  $\pm 60^\circ$ . Mais tarde Safonov e Athans [15] mostraram que essas propriedades também são válidas para o caso de reguladores LQR aplicados em sistemas MIMO (*Multiple-Input, Multiple-Output*), ou multivariáveis.

A grande dificuldade para o uso de reguladores LQR é que a sua implementação requer a realimentação de todos os estados do sistema, mas na prática nem todos esses estados são acessíveis. Em princípio esta dificuldade pode ser superada mediante o uso de observadores de estados [16] para a estimação dos estados do sistema, e posterior realimentação desses estados estimados em substituição aos estados reais do sistema. No entanto, Doyle, em um pequeno e famoso artigo publicado em 1978 [17], provou que a utilização de observadores pode fazer com que as excelentes propriedades de robustez dos reguladores LQR fiquem muito reduzidas. No entanto, no ano seguinte, Doyle e Stein [18] apresentaram um procedimento especial para o cálculo dos ganhos dos observadores, o qual restabelece as boas propriedades de robustez dos reguladores LQR, mesmo quando este utiliza observadores. O novo procedimento é semelhante ao do cálculo dos ganhos de um filtro de Kalman, mas com algumas modificações nas matrizes de covariância das perturbações atuantes no sistema e dos ruídos de medição das saídas do sistema. Com a adoção deste novo procedimento, o projeto de reguladores combinados com observadores se tornou conhecido como o método LQG/LTR [19].

## **1.4 Algumas Características do Método LQG/LTR**

Uma das características principais do controlador LQG/LTR é a incorporação da inversa da função (ou matriz) de transferência da planta, isto é, do sistema a ser controlado. Com isso, se a planta é um sistema de fase não-mínima, então o controlador torna-se intrinsecamente instável. Na verdade, para estes sistemas (de fase não-mínima) o método LQG/LTR nem garante a recuperação das boas propriedades de robustez dos reguladores LQR.

Por outro lado, mesmo no caso de sistemas de fase mínima, também existem alguns tipos específicos de sistemas para os quais a aplicação do método LQG/LTR requer alguns cuidados especiais. Dois casos importantes que exigem esses cuidados especiais, e que são objetos de estudos nesta tese, são descritos a seguir.

### **1.4.1 O Caso de Sistemas Instáveis**

Quando o sistema controlado é de fase mínima e instável, o controlador LQG/LTR, ao inverter a planta, incorpora zeros que ficam situados em posições simétricas em relação ao eixo vertical do plano-s relativamente aos pólos instáveis do sistema. Ao se fechar a malha do sistema, a tendência é que esses zeros do controlador atraiam para si os pólos instáveis do sistema, de forma que eles se cancelem uns com os outros. Ocorre que a realimentação das saídas do sistema com ganho unitário não é suficiente para fazer com que os pólos instáveis do sistema alcancem os zeros do controlador. Assim, dependendo da localização dos pólos instáveis do sistema, é possível que em malha fechada esses pólos fiquem situados em posições estáveis, mas pouco amortecidas do plano-s. Em casos assim, as respostas transitórias das saídas do sistema controlado em malha fechada apresentam oscilações que demoram a serem suficientemente amortecidas.

Uma maneira para tornar mais rápido o amortecimento dessas oscilações seria aumentar o ganho de malha do sistema controlado, visando forçar uma maior aproximação dos pólos instáveis do sistema em relação aos zeros presentes no controlador LQG/LTR, ou seja, cancelá-los. Tal procedimento realmente amortece essas oscilações, mas ao mesmo tempo ele excita outros modos de alta frequência que tendem a instabilizar o sistema. Por isso, o simples aumento de ganho de malha do sistema não resolve o problema.

#### **1.4.2 O Caso de Sistemas com Pólo na Origem**

Uma das etapas importantes na realização do projeto de controladores robustos para sistemas multivariáveis é a obtenção do desacoplamento dos seus diversos canais de entrada-saída. Este objetivo pode ser conseguido mediante a equalização dos ganhos principais de  $G(s)K(s)$ , que é a matriz de transferência de malha direta da planta  $G(s)$  controlada pelo controlador  $K(s)$ .

A literatura especializada em Sistemas de Controle apresenta alguns procedimentos para a obtenção da equalização desses ganhos principais. Em [20] é apresentado um método que equaliza os ganhos do sistema nas baixas e nas altas frequências, mas que não garante uma boa equalização nas frequências intermediárias. Em [12] é apresentada uma fórmula que equaliza os ganhos do sistema em todas as frequências, mas a sua aplicação requer a inversão da matriz característica do sistema, isto é, a matriz  $A$  de sua representação em espaço de estados. Este requisito impede a aplicação da referida fórmula no caso de sistemas que possuem ao menos um pólo na origem, já que as matrizes características ( $A$ ) desses sistemas são singulares.



## 1.5 Escopo e Contribuições desta Tese

Os problemas da aplicação do método LQG/LTR nos casos dos sistemas específicos que foram apresentados na seção anterior constituem os focos principais desta tese, onde eles são abordados de maneiras específicas, as quais são brevemente descritas a seguir.

Para resolver o problema da presença de oscilações de baixas frequências mal amortecidas em sistemas multivariáveis instáveis e de fase mínima, quando controlados por controladores do tipo LQG/LTR, propõe-se, nesta tese, o uso de pré-compensadores dinâmicos [21] para a estabilização prévia do sistema instável a ser controlado, para só em seguida projetar-se o controlador robusto do tipo LQG/LTR. Mostra-se, através de exemplos, que com este procedimento consegue-se resolver o referido problema, mas ao custo de um aumento exagerado na ordem do controlador final projetado.

Para não se aumentar excessivamente a ordem do controlador, esta tese também propõe um procedimento para que os pré-compensadores dinâmicos que são projetados para a estabilização prévia do sistema a ser controlado sejam de ordem reduzida. Este procedimento é aplicável a sistemas cujas saídas independem de estados que são desacoplados dos demais estados do sistema.

A redução de ordem do pré-compensador estabilizador também proporciona uma redução na ordem do controlador do tipo LQG/LTR que é projetado a seguir. Esta redução de ordem é vantajosa em termos globais, ainda que ela acarrete um pequeno prejuízo, em termos de desempenho transitório, no desempenho global do controlador.

Os procedimentos apresentados, referentes ao uso de pré-compensador estabilizador e ao projeto de controlador com redução de ordem, são ilustrados com exemplos que são baseados em um sistema multivariável instável, de sexta ordem, com dois sinais de entrada e dois sinais de saída.

Com relação ao problema da equalização dos ganhos principais de sistemas multivariáveis com pólo na origem, apresenta-se nesta tese um procedimento que possibilita a equalização, em todas as frequências, dos referidos ganhos principais. O procedimento envolve a adição de integradores apenas nos canais de entrada (ou saída) do sistema através dos quais o pólo do sistema localizado na origem é não-controlável (ou não-observável).

Além da equalização de ganhos em todas as frequências, um outro resultado benéfico deste procedimento alternativo é que o número de integradores que precisam ser adicionados ao sistema é menor do que nos casos comuns, isto é, nos casos em que o sistema não possui pólos na origem.

O procedimento apresentado é ilustrado através de sua aplicação em um sistema multivariável de quinta ordem com três sinais de entrada e três sinais de saída.

## **1.6 Organização do Conteúdo deste Trabalho**

Esta tese encontra-se organizada na forma descrita a seguir.

O Capítulo 2 apresenta uma análise no domínio da frequência que leva às principais características que um controlador multivariável deve proporcionar ao sistema controlado.

O Capítulo 3 contém um breve resumo do método LQG/LTR, descrevendo as principais equações relacionadas com o Regulador Linear Ótimo Quadrático (LTR), o Filtro de Kalman e o Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG). O regulador LQG/LTR, que resulta de uma modificação do LQG, possui duas versões duais. Neste capítulo considera-se o caso em que as incertezas do modelo nominal do sistema (planta) são representadas na forma multiplicativa não-estruturada, na saída da planta.

O Capítulo 4 descreve resumidamente os conceitos básicos relacionados com compensadores dinâmicos, que é uma estrutura de controle capaz de posicionar livremente os

pólos de malha fechada de um dado sistema. Este tipo de controlador utiliza os sinais de saída do sistema controlado para gerar os sinais de controle, e por esse motivo ele prescinde do uso de observadores.

O Capítulo 5 apresenta um estudo de caso que consiste em um sistema multivariável instável e de fase mínima, de sexta ordem, com duas entradas e duas saídas. Para este sistema apresentam-se dois diferentes projetos de controladores do tipo LQG/LTR, um com e outro sem a estabilização prévia do sistema através do uso de pré-compensador dinâmico. Os desempenhos dos dois controladores são comparados, e constata-se então a superioridade do controlador que faz a estabilização prévia do sistema. Seu desempenho é excelente, mas a sua ordem também fica muito elevada.

O Capítulo 6 apresenta o projeto de um controlador LQG/LTR alternativo, de ordem reduzida, que assim minimiza o problema da ordem elevada do controlador apresentado no Capítulo 5. O desempenho deste novo controlador é ligeiramente inferior ao desempenho do controlador do capítulo anterior, mas a sua ordem reduzida compensa essa pequena degradação de desempenho.

O Capítulo 7 apresenta um procedimento que possibilita a equalização, em todas as frequências, dos ganhos principais de sistemas dinâmicos multivariáveis que possuam pólos na origem. O método apresentado é ilustrado através de sua aplicação em um sistema multivariável de quinta ordem com três sinais de entrada e três sinais de saída.

Finalmente, o Capítulo 8 apresenta as conclusões desta tese, juntamente com sugestões para futuros trabalhos.

## **Capítulo 2: Análise no Domínio da Frequência das Características de Sistemas de Controle em Malha Fechada para Sistemas MIMO**

Como regra geral, pode-se afirmar que qualquer sistema de controle deve satisfazer dois objetivos fundamentais: 1) garantir a estabilidade do sistema controlado em malha fechada; e 2) proporcionar um bom comportamento dinâmico para o referido sistema.

Para que esses objetivos sejam satisfeitos, mesmo diante de eventuais variações que o sistema apresente em suas características dinâmicas, é necessário que o controlador tenha capacidade de compensar essas variações. Isto equivale a dizer que o sistema de controle deve preservar a estabilidade do sistema em malha fechada, e ao mesmo tempo não permitir maiores degradações no desempenho dinâmico do sistema controlado, tanto em termos de regime transitório como também em regime permanente. Um sistema de controle projetado com essas características é conhecido na literatura especializada como controlador robusto.

Com relação ao seu comportamento dinâmico, o bom desempenho do sistema controlado está relacionado com a precisão estática de suas saídas com relação aos respectivos sinais de referência, com a capacidade do sistema para a rejeição de perturbações externas que afetam as suas saídas, com a sua habilidade para a realização da filtragem de ruídos de medição, e com a compensação de erros de modelagem.

Para o cumprimento desses objetivos é necessária a imposição de algumas restrições sobre os valores singulares (ganhos) da matriz de transferência  $G(s)K(s)$ , que é a matriz de transferência de malha aberta do sistema constituído por um controlador  $K(s)$  colocado em série com o sistema  $G(s)$  a ser controlado (veja Figura 2.1). Estas restrições são definidas em

termos dos ganhos principais, superior e inferior, de  $G(s)K(s)$ , que devem ser baixo nas altas frequências e alto nas baixas frequências, respectivamente. No caso de sistemas SISO os ganhos principais, superior e inferior, são iguais, isto porque esses sistemas possuem um único ganho, que é dado pelo módulo de  $G(s)K(s)$ . No caso de sistemas MIMO, esses ganhos (superior e inferior) são especificados pelo máximo valor singular e pelo mínimo valor singular da matriz de transferência em malha aberta  $G(s)K(s)$ .

Na literatura técnica relacionada com a área de controle de processos, o procedimento de obtenção de uma matriz de transferência em malha aberta que atenda as restrições em relação aos ganhos mencionados é conhecido como “*loopshaping*” de um “*Target Feedback Loop*” (TFL) [2].

Este capítulo descreve as características da resposta em frequência, que a matriz de transferência em malha aberta  $G(s)K(s)$  deve possuir visando garantir as especificações de estabilidade e desempenho desejadas para um sistema multivariável.

## **2.1 Representação das Incertezas de Modelagem na Forma Multiplicativa Não-Estruturada**

Geralmente o projeto de um controlador é feito com base em um modelo matemático que deve representar as características dinâmicas mais importantes da planta a ser controlada. Porém nenhum modelo matemático emula perfeitamente a planta, assim em todo projeto de controle é indispensável que se considere as incertezas associadas com o modelo nominal do processo. As representações de incertezas de modo mais generalizado são feitas através das chamadas *formas estruturadas* [22]-[23] e *não-estruturadas* [24], sendo que as formas não-estruturadas no domínio da frequência podem ser representadas na *forma aditiva* ou na *forma multiplicativa*.

Na medida do possível, essas representações devem incluir todas as perturbações físicas responsáveis pelas diferenças entre o modelo nominal  $G(s)$  e o modelo real (perturbado pelas incertezas)  $G_p(s)$ . Em sistemas reais as incertezas podem ocorrer em diversos pontos da planta. Porém, o que se costuma fazer é tentar refletir todas as incertezas em um ponto específico da planta e combinar as contribuições individuais em uma única perturbação na forma aditiva ou multiplicativa.

Utiliza-se, neste trabalho, a representação das incertezas na forma multiplicativa (Figura 2.1), na qual o modelo perturbado da planta é descrito através da seguinte relação:

$$G_p(s) = [I + L(s)]G(s). \quad (2.1)$$

Considera-se que

$$\|L(j\omega)\| < L_{\max}(\omega), \quad \forall \omega \geq 0, \quad (2.2)$$

onde a função  $L(s)$ , que representa as incertezas no modelo nominal, é desconhecida, e

$L_{\max}(\omega)$  é uma função escalar positiva que representa o limite máximo das incertezas.

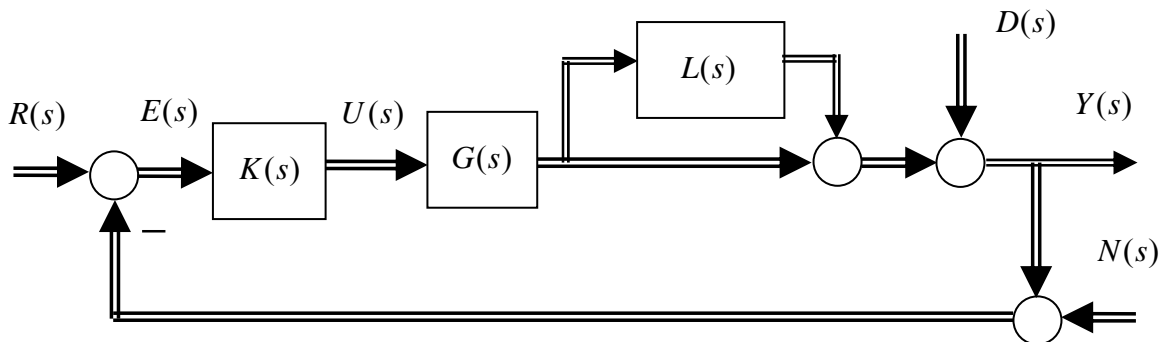


Figura 2.1: Diagrama de blocos para um sistema MIMO com realimentação unitária.

## 2.2 Considerações Preliminares Sobre o Projeto de Controladores para Sistemas Multivariáveis

As especificações mais comuns que o projeto de controladores robustos deve satisfazer para que sistemas multivariáveis apresentem um bom comportamento dinâmico são:

- 1) que as saídas  $Y(s)$  da planta sigam os seus respectivos sinais de referência  $R(s)$ , ou seja, que a diferença entre o sinal de referência  $R(s)$  e a saída controlada  $Y(s)$  seja mínima, de preferência nula;
- 2) que o sistema rejeite os efeitos dos distúrbios externos  $D(s)$  sobre as saídas  $Y(s)$  da planta;
- 3) que os ruídos de medição  $N(s)$ , que são injetados no sistema através da malha de realimentação, sejam filtrados para que não contaminem as saídas  $Y(s)$  da planta ou excitem os modos não modelados em alta frequência e pouco amortecidos;
- 4) que apresente estabilidade e desempenho robusto diante de incertezas no modelo;
- 5) que tenha largura de faixa apropriada – quanto maior a largura de faixa do sistema, maior é a velocidade de resposta de sua saída a um dado sinal de referência, mas o aumento demasiado da largura de faixa torna o sistema sensível a ruídos e erros de modelagem em altas frequências.

A partir destas especificações, e considerando-se o diagrama de blocos mostrado na Figura 2.1, que representa um sistema linear MIMO em malha fechada com realimentação unitária, inicia-se a análise para a obtenção de um padrão de curvas de resposta em frequência adequadas para o caso de sistemas multivariáveis.

Este diagrama é constituído pelo controlador  $K(s)$ , cuja entrada é o sinal de erro  $E(s)$ , resultante da diferença entre o sinal de referência  $R(s)$  e a saída  $Y(s)$  do sistema

contaminado pelo sinal de ruído  $N(s)$ . Este controlador  $K(s)$  produz o sinal de controle  $U(s)$  que atua na planta  $G_p(s)$ . A saída  $Y(s)$  da planta sofre a influência de perturbações externas que são representadas através do sinal  $D(s)$ . As incertezas da planta  $G_p(s)$  são representadas na forma não-estruturada através de uma perturbação multiplicativa colocada na saída do seu modelo nominal  $G(s)$ .

As linhas de fluxo representam sinais vetoriais, e por isso são indicadas por linhas duplas, e o modelo nominal  $G(s)$  da planta e o controlador  $K(s)$  são definidos por matrizes de funções de transferências quadradas. Neste caso, considera-se apenas o caso de sistemas MIMO-quadrados, isto é, aqueles cujo número de entradas e saídas são iguais.

Em sistemas monovariáveis, a análise dos requisitos para o projeto de controladores utiliza a noção de ganho ou magnitude para que o sistema apresente curvas de respostas em frequências adequadas. Para o caso de sistemas multivariáveis é necessário estabelecer a forma pela qual essas magnitudes são medidas. Observando-se o diagrama de blocos da Figura 2.1, verifica-se que a matriz de transferência  $G(s)$  se relaciona com os sinais de saída  $Y(s)$  e entrada  $U(s)$  através da seguinte equação:

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (2.3)$$

O ganho ou magnitude da matriz  $G(s)$  pode ser definido pela relação entre as normas euclidianas do vetor de saídas  $Y(s)$  e do vetor de entradas  $U(s)$  [25]:

$$\text{ganho de } G(s) = \frac{\|Y(s)\|_E}{\|U(s)\|_E}. \quad (2.4)$$

A função ganho definida pela Equação (2.4) não é uma “*single value function*”, isto é, para diferentes entradas  $U(s)$  de mesma norma euclidiana, a norma euclidiana da saída correspondente  $Y(s)$  assume valores diferentes.



Por essa razão, no estudo de sistemas multivariáveis trabalha-se com os limites superior e inferior da função que define o ganho de  $G(j\omega)$  (Equação 2.4), que são conhecidos como ganhos principais superior e inferior de  $G(j\omega)$ , e definidos pelas seguintes equações:

$$\bar{\sigma}[G(j\omega)] = \|G(j\omega)\| = \sqrt{\lambda_{\max}[G(j\omega)^* G(j\omega)]} \quad (2.5)$$

$$\underline{\sigma}[G(j\omega)] = \frac{1}{\|G^{-1}(j\omega)\|} = \sqrt{\lambda_{\min}[G(j\omega)^* G(j\omega)]} \quad (2.6)$$

Os símbolos  $\bar{\sigma}$  e  $\underline{\sigma}$  representam o máximo e o mínimo valor singular de  $G(j\omega)$ , respectivamente. As notações  $\lambda(\cdot)$  e  $(\cdot)^*$  representam o autovalor e o complexo conjugado transposto das quantidades envolvidas, respectivamente. Demonstra-se em [25] que o ganho vetorial de  $G(j\omega)$  satisfaz a seguinte desigualdade

$$\underline{\sigma}[G(j\omega)] \leq \frac{\|Y(j\omega)\|_E}{\|U(j\omega)\|_E} \leq \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (2.7)$$

Com base nesta noção de ganho matricial de  $G(j\omega)$ , considera-se que uma dada função de transferência matricial  $G(j\omega)$  possui altos ganhos (ou ganhos elevados) quando o seu mínimo valor singular é grande. Da mesma forma, considera-se que  $G(j\omega)$  possui baixos ganhos (ou ganhos reduzidos) quando o seu máximo valor singular é pequeno.

## 2.3 Curvas de Resposta em Frequência Ideais para Sistemas Multivariáveis

A partir do diagrama de blocos mostrado na Figura 2.1, pode-se obter as características ideais para a curva de resposta em frequência de um sistema multivariável quadrado da maneira apresentada a seguir.

Considerando-se apenas o modelo nominal  $G(s)$  do sistema, obtém-se a relação entre a saída vetorial  $Y(s)$  e os sinais vetoriais de referência  $R(s)$ , distúrbios  $D(s)$  e ruídos de medição  $N(s)$ , que é dada pela equação vetorial

$$Y(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)[R(s) - N(s)] + [I + G(s)K(s)]^{-1}D(s). \quad (2.8)$$

Analisando-se esta equação no domínio da frequência, observa-se que as saídas do sistema seguem os seus respectivos sinais de referência, e ao mesmo tempo rejeitam as perturbações externas, quando o ganho da matriz  $G(j\omega)K(j\omega)$  é elevado na faixa de frequências onde os sinais de referência  $R(s)$  e os distúrbios externos  $D(s)$  concentram a maior parte de suas energias, o que tipicamente ocorre nas baixas frequências. Portanto, usando-se a noção de ganho matricial elevado e a definição de ganho principal inferior dada pela Equação (2.6), pode-se estabelecer a condição definida por

$$\underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] \gg 1, \quad \text{para as baixas frequências.} \quad (2.9)$$

Para o sistema atenuar os efeitos dos ruídos de medição  $N(s)$ , que geralmente concentram suas energias nas altas frequências, é necessário que o ganho de  $G(j\omega)K(j\omega)$  seja reduzido nessa faixa de frequências. Portanto, usando-se a noção de ganho matricial reduzido e a definição de ganho principal superior dada pela Equação (2.5), pode-se estabelecer a condição definida por

$$\overline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] \ll 1, \quad \text{para as altas frequências.} \quad (2.10)$$

Com relação à estabilidade do sistema real em malha fechada, ela será garantida se a seguinte condição, deduzida em [24] mediante uma extensão do Teorema de Nyquist para o caso de sistemas multivariáveis, for observada:

$$\overline{\sigma}\left\{[I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}G(j\omega)K(j\omega)\right\} < \frac{1}{L_{\max}(\omega)} \quad (2.11)$$

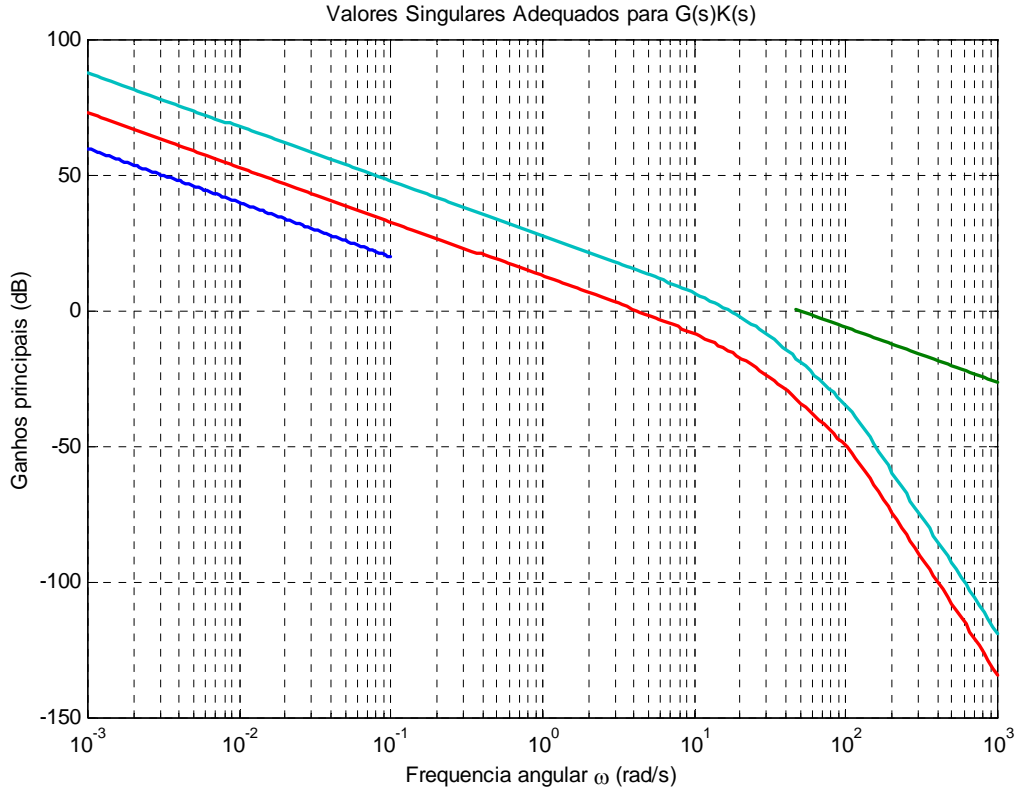


Figura 2.2: Resposta em frequência desejável para os ganhos principais da matriz de transferência de malha aberta  $G(j\omega)K(j\omega)$  de um sistema MIMO.

As restrições definidas em (2.9), (2.10) e (2.11) são representadas pelas retas em azul escuro e verde que são mostradas na Figura 2.2. Considerando-se simultaneamente essas restrições (ou barreiras) conclui-se que as curvas de resposta em frequência dos ganhos principais, superior e inferior, de  $G(j\omega)K(j\omega)$  devem apresentar um comportamento semelhante ao das curvas em azul claro e vermelho que são mostradas na Figura 2.2.

## 2.4 Margens de Estabilidade para Sistemas Multivariáveis

Ao contrário do que ocorre no caso de sistemas monovariáveis (SISO), a análise da estabilidade de sistemas multivariáveis (MIMO) apresenta maior complexidade. Isto acontece porque os sistemas MIMO não apresentam um único ganho, como no caso monovariável. Os

sistemas de múltiplas malhas trabalham com os conceitos de valores singulares, máximo e mínimo, além da definição de função de transferência na forma matricial.

No tratamento de sistemas multivariáveis, a condição de robustez da estabilidade dada pela desigualdade (2.11) garante a estabilidade do sistema em malha fechada diante das incertezas não-estruturadas, porém este critério não estabelece como os elementos individuais da matriz de funções de transferência de malha podem variar sem desestabilizar o sistema em malha fechada. Uma definição satisfatória de margens de estabilidade para sistemas MIMO deve ser capaz de caracterizar a habilidade do sistema em tolerar variações simultâneas de ganho e de fase em todas as malhas de controle.

Demonstra-se em [26] que as margens de ganho e de fase de um sistema multivariável são dadas por

$$\frac{1}{1 + \alpha_0} < MG < \frac{1}{1 - \alpha_0} \quad (2.12)$$

e

$$-2 \sin^{-1}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) < MF < 2 \sin^{-1}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \quad (2.13)$$

onde o parâmetro  $\alpha_0$  é um valor real positivo calculado por

$$\alpha_0 = \min_{\omega} \underline{\sigma}[I + G(j\omega)K(j\omega)]. \quad (2.14)$$

As margens de estabilidade calculadas por essas expressões são conservativas [27], isto é, elas garantem a estabilidade do sistema até o limite definido pela margem, mas se este limite for ultrapassado, não necessariamente o sistema se torna instável.

## 2.5 Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma análise geral dos aspectos principais que constituem o problema do projeto de sistemas de controle para sistemas multivariáveis. Feita no domínio da frequência, esta análise conduz às características de resposta em frequência que os ganhos principais da matriz de transferência  $G(s)K(s)$ , do sistema (nominal) controlado em malha aberta, devem possuir para que o controlador  $K(s)$  proporcione ao sistema (real)  $G_p(s)$  um bom desempenho dinâmico em malha fechada.

No capítulo também foram abordadas questões relacionadas com as principais formas para representação de incertezas de modelagem e com as fórmulas usadas para o cálculo das margens de ganho e de fase em sistemas multivariáveis.

Todos esses resultados são de grande utilidade no projeto de controladores robustos para sistema multivariáveis, e serão recorrentemente usados nos próximos capítulos desta tese.

### Capítulo 3: Síntese do Método LQG/LTR

O método LQG/LTR (“*Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery*”) consiste em um procedimento sistemático, simples e eficaz para a síntese de controladores de sistemas monovariáveis e multivariáveis. A aplicação deste método resulta em um controlador LQG/LTR, o qual apresenta uma estrutura semelhante à de um controlador LQG (“*Linear Quadratic Gaussian*”) convencional, ou seja, é constituído por um observador de estados (geralmente um filtro de Kalman) cujos estados são realimentados através de ganhos ótimos previamente calculados através do projeto de um regulador linear quadrático LQR (“*Linear Quadratic Regulator*”).

O projeto de um controlador do tipo LQG/LTR é feito em duas etapas sequenciais, que podem ser intercambiadas dependendo da localização das incertezas da planta, produzindo assim versões duais. Na primeira versão, quando as incertezas multiplicativas não-estruturadas associadas ao modelo nominal da planta são representadas na sua saída, projeta-se inicialmente um filtro de Kalman, e em seguida realiza-se o projeto de um regulador LQR. Na segunda versão, quando as referidas incertezas são representadas na entrada da planta, projeta-se inicialmente um regulador LQR, e em seguida realiza-se o projeto de um filtro de Kalman.

Neste capítulo e mais à frente, nos capítulos 5 e 6, utiliza-se a versão do método LQG/LTR em que as incertezas associadas ao modelo da planta são representadas na sua saída. Neste caso, o primeiro passo do método consiste no projeto de um filtro de Kalman (dual do regulador LQR) de tal forma que os ganhos principais de sua função de transferência em malha aberta apresente características semelhantes àsquelas ideais que foram apresentadas na Seção 2.3 do capítulo anterior. Essa função de transferência de malha aberta constitui aquilo que é conhecido na literatura como “*Target Feedback Loop*” (TFL) para o sistema controlado,

e para a sua obtenção as matrizes de ponderação utilizadas no projeto do filtro de Kalman são sintonizadas livremente. No segundo passo do método LQG/LTR, ou seja, no projeto do outro elemento do controlador, projeta-se um regulador LQR de forma especial, de tal modo que a função de transferência em malha aberta do sistema controlado recupere exatamente, ou pelo menos aproximadamente, as mesmas características do “*Target Feedback Loop*” (TFL) que foi projetado no primeiro passo do método através do filtro de Kalman [20].

Os elementos que constituem o controlador LQG, isto é, o regulador LQR e o filtro de Kalman (que faz o papel de um observador de estados), garantem, isoladamente, margem de ganho infinita, tolerância a redução de ganho de 50% e margem de fase de  $\pm 60^\circ$ . Juntos, na formação do regulador LQG, o resultado é um controlador / regulador que não garante as boas margens de ganho e fase que eles apresentam separadamente. Para superar esta dificuldade, Doyle e Stein desenvolveram o método que ficou conhecido como LQG/LTR [19].

### 3.1 Regulador Linear Ótimo Quadrático (LQR)

Considere uma planta representada em espaço de estados por um modelo nominal de ordem  $n$  definido por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $y \in \mathbb{R}^p$  e  $u \in \mathbb{R}^m$  são os vetores dos sinais de saída e de controle, respectivamente, e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  possuem dimensões compatíveis. O projeto do regulador LQR consiste na minimização do índice de desempenho quadrático definido por

$$J = \int_0^{+\infty} \left[ x^T Q_c x + u^T R_c u \right] dt,\tag{3.2}$$

onde  $Q_c \in \Re^{n \times n}$  é uma matriz positiva semi-definida e  $R_c \in \Re^{m \times m}$  é uma matriz positiva definida. Estas matrizes ponderam respectivamente as variáveis de estado e os sinais de controle do sistema, e em geral são escolhidas como

$$Q_c = C^T C, \quad (3.3)$$

$$R_c = \rho I_{m \times m}, \quad \rho > 0. \quad (3.4)$$

Sob as hipóteses de que o par  $(A, B)$  é estabilizável e o par  $(A, C)$  é detectável, a lei de controle ótimo a realimentação de estados que minimiza o índice de desempenho na Equação (3.2), é dada por

$$u^*(t) = -K_c x(t), \quad (3.5)$$

onde  $K_c \in \Re^{m \times n}$  é a matriz de ganhos do regulador LQR, que é calculada pela equação

$$K_c = \frac{1}{\rho} B^T P, \quad (3.6)$$

onde a matriz simétrica  $P \in \Re^{n \times n}$ , é a única solução positiva definida da seguinte equação algébrica matricial de Riccati

$$A^T P + P A - \frac{1}{\rho} P B B^T P + Q_c = 0. \quad (3.7)$$

### 3.2 Filtro de Kalman

O regulador linear quadrático (LQR) pressupõe a disponibilidade completa dos estados do sistema, mas na maioria dos casos práticos não se dispõe dos estados do sistema, visto que os sinais realmente disponíveis para medição são as entradas e saídas do sistema. Assim, a implementação do regulador LQR necessita de um observador de estados para estimar os



estados verdadeiros da planta a partir das medidas de seus sinais de entrada e saída. Para isso utiliza-se um observador de estados denominado filtro de Kalman.

Considerando-se novamente o sistema descrito pelas Equações (3.1), agora com o acréscimo de alguns termos adicionais, obtém-se a forma definida por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) &= C x(t) + v(t),\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde a matriz  $\Gamma \in \Re^{n \times m}$  é a matriz de entrada dos ruídos do processo,  $w(t) \in \Re^m$  é o vetor que contém os ruídos do processo, e  $v(t) \in \Re^p$  é o vetor dos ruídos de medição dos sinais de saída do sistema. Ambos são considerados como ruídos brancos, gaussianos, de média zero, e mutuamente independentes, com matrizes de intensidade (covariância)  $Q_o \in \Re^{m \times m}$  positiva semi-definida e  $R_f \in \Re^{p \times p}$  positiva definida, respectivamente, dadas por

$$Q_o = I_{m \times m},\tag{3.9}$$

$$R_f = \mu I_{p \times p}, \quad \mu > 0.\tag{3.10}$$

O índice de desempenho a ser minimizado é definido por

$$J = E \left\{ [\hat{x}(t) - x(t)]^T Q_f [\hat{x}(t) - x(t)] \right\},\tag{3.11}$$

onde  $\hat{x}(t)$  denota a estimativa do estado  $x(t)$ , e a matriz  $Q_f$  é relacionada com  $Q_o$  e  $\Gamma$ .

Assume-se que o filtro de Kalman tem a estrutura de um observador linear de ordem  $n$  definido pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A \hat{x}(t) + B u(t) + K_f [y(t) - C \hat{x}(t)] \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}(t)\end{aligned}\tag{3.12}$$

onde  $K_f \in \Re^{n \times p}$  é a matriz de ganhos ótimos do filtro de Kalman.

Sob as hipóteses de que o par  $(A, C)$  é detectável e o par  $(A, \Gamma)$  é estabilizável, a matriz de ganhos do filtro de Kalman que minimiza o índice de desempenho na Equação (3.11), é calculada por

$$K_f = \frac{1}{\mu} \Sigma C^T, \quad (3.13)$$

onde a matriz simétrica  $\Sigma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é a única solução positiva definida da seguinte equação algébrica matricial de Riccati

$$A\Sigma + \Sigma A^T - \frac{1}{\mu} \Sigma C^T C \Sigma + Q_f = 0, \quad (3.14)$$

onde

$$Q_f = \Gamma Q_o \Gamma = \Gamma \Gamma^T. \quad (3.15)$$

Comparando-se as Equações (3.13) e (3.14) com as Equações (3.6) e (3.7), respectivamente, pode-se concluir que existe uma dualidade matemática entre o regulador LQR e o filtro de Kalman. Esta dualidade confere ao filtro de Kalman propriedades de estabilidade e robustez equivalentes às do regulador LQR.

A estabilidade do filtro de Kalman é determinada pela dinâmica do seu erro de estimação, que é dada pela seguinte equação

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = [A - K_f C]e(t) + \Gamma w(t) - K_f v(t). \quad (3.16)$$

Desta equação verifica-se que o filtro de Kalman é estável se todos os  $n$  auto-valores da matriz  $(A - K_f C)$ , denominados auto-valores do filtro de Kalman, possuírem parte real negativa.

### 3.3 Controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG)

O controlador linear quadrático Gaussiano (LQG) é a combinação de um regulador linear ótimo quadrático (LQR) com um filtro de Kalman (FK). O LQR necessita de todos os estados do sistema e o FK produz uma estimativa destes estados. O índice de desempenho a ser minimizado torna-se

$$J_{LQG} = E \left\{ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [x^T(t) Q_c x(t) + u^T(t) R_c u(t)] dt \right\} \quad (3.17)$$

onde  $Q_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é uma matriz positiva semi-definida e  $R_c \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  é uma matriz positiva definida, que são dadas por

$$Q_c = C^T C, \quad (3.18)$$

$$R_c = \rho I_{m \times m}, \quad \rho > 0. \quad (3.19)$$

Sob as hipóteses de que o par  $(A, B)$  é estabilizável e o par  $(A, C)$  é detectável, a lei de controle ótima a realimentação de estados que minimiza o índice de desempenho na Equação (3.17), é dada por

$$u^*(t) = -K_c \hat{x}(t), \quad (3.20)$$

onde  $\hat{x}(t)$  é o vetor dos estados estimados pelo filtro de Kalman, dado pela equação

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) + K_f [y(t) - C \hat{x}(t)], \quad (3.21)$$

$K_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é a matriz de ganhos do regulador LQR, e  $K_f \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  é a matriz de ganhos ótimos do filtro de Kalman (FK), que são calculadas pelas equações

$$K_c = \frac{1}{\rho} B^T P \quad (3.22)$$

$$K_f = \frac{1}{\mu} \Sigma C^T, \quad (3.23)$$

onde as matrizes simétricas  $P \in \Re^{n \times n}$  e  $\Sigma \in \Re^{n \times n}$ , são as únicas soluções positivas definidas das seguintes equações algébricas matriciais de Riccati:

$$A^T P + P A - \frac{1}{\rho} P B B^T P + Q_c = 0, \quad (3.24)$$

$$A \Sigma + \Sigma A^T - \frac{1}{\mu} \Sigma C^T C \Sigma + Q_f = 0, \quad (3.25)$$

onde

$$Q_f = \Gamma \Gamma^T. \quad (3.26)$$

No domínio da frequência a expressão que relaciona a saída  $U(s)$  do controlador LQG com a sua entrada  $Y(s)$ , é obtida a partir das Equações (3.20) e (3.21) e ela é dada por

$$U(s) = -K_c (sI - A + B K_c + K_f C)^{-1} K_f Y(s) \quad (3.27)$$

Conclui-se, através das Equações (3.20), (3.21) e (3.27), que o controlador LQG é um compensador dinâmico de ordem  $n$  por realimentação de saídas, constituído pela conexão em cascata de um filtro de Kalman e a matriz de ganhos ótimos de um regulador linear ótimo quadrático (LQR).

### 3.4 Método LQG/LTR para o Projeto de Controladores Robustos

Este método consiste essencialmente na combinação de um regulador linear quadrático LQR com um observador de estados (filtro de Kalman), em que se procura recuperar as excelentes margens de ganho e fase que o LQR e o Filtro de Kalman possuem separadamente.

Conforme mencionado anteriormente, o método LQG/LTR possui versões duais. Como neste trabalho as incertezas multiplicativas não-estruturadas associadas ao modelo nominal da planta são representadas na saída da planta (Figura 2.1), faz-se primeiro o projeto

do filtro de Kalman (dual do regulador LQR) de tal forma que os ganhos principais de sua função de transferência (TFL) apresentem características de resposta em frequência semelhantes àsquelas ideais que foram desenvolvidas no capítulo anterior. Num segundo passo projeta-se o regulador linear quadrático (LQR) de uma forma especial, de tal forma que a função de transferência em malha aberta do sistema controlado recupere exatamente, ou pelo menos aproximadamente, as mesmas características de resposta em frequência do “*Target Feedback Loop*” (TFL) que foi projetado no primeiro passo do método através do filtro de Kalman [20].

### 3.4.1 Projeto do Observador (Filtro de Kalman)

A função de transferência de malha aberta do filtro de Kalman é dada por

$$T_{KF}(s) = C \Phi K_f, \quad (3.28)$$

onde  $\Phi = (sI - A)^{-1}$ , e satisfaz a seguinte relação que resulta da igualdade de Kalman [21]:

$$\sigma_i[I + T_{KF}(s)] = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu} \sigma_i^2 [C \Phi \Gamma]}. \quad (3.29)$$

Dado que nas baixas frequências o ganho principal inferior de  $T_{KF}(s)$  deve ser elevado ( $\sigma_i[T_{KF}(s)] \gg 1$ ), a Equação (3.29) pode ser aproximada por

$$\sigma_i[T_{KF}(s)] \cong \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sigma_i[C \Phi \Gamma]. \quad (3.30)$$

O ajuste dos parâmetros  $\mu$  e  $\Gamma$  é feito de tal forma que as curvas de resposta em frequência de  $T_{KF}(s)$  sejam semelhantes às curvas correspondentes da função de transferência de malha aberta do sistema (o TFL desejado), mostradas na Figura 2.2. Em outras palavras,  $T_{KF}(s)$  e  $G(s)K(s)$  devem ter as mesmas características de resposta em

freqüência. Isto é conseguido, em um ou dois passos com o auxílio da Equação (3.30) e das seguintes equações:

$$K_f = \Sigma C^T R_f^{-1}, \quad (3.31)$$

$$A \Sigma + \Sigma A^T - \Sigma C^T C \Sigma + Q_f = 0, \quad (3.32)$$

$$Q_f = \Gamma Q_o \Gamma^T, \quad (3.33)$$

$$Q_o = I_m, \quad (3.34)$$

$$R_f = \mu I_m. \quad (3.35)$$

### 3.4.2 Projeto do Regulador Linear Quadrático (LQR)

A segunda etapa do projeto do controlador LQG/LTR consiste no projeto do regulador linear quadrático (LQR). Lembrando-se que as curvas de resposta em freqüência de  $G(s)K(s)$  devem emular as de  $T_{KF}(s)$ , calcula-se a matriz  $K_c$ , de ganhos do regulador, através da equação

$$K_c = R_c^{-1} B^T P, \quad (3.36)$$

onde a matriz  $P$ , constante e simétrica, é a única solução positiva definida da equação algébrica de Riccati definida por

$$A^T P + P A - P B R_c^{-1} B^T P + Q_c = 0, \quad (3.37)$$

onde  $Q_c = C^T C + q^2 C^T V C, \quad V = I_m \quad e \quad q^2 \rightarrow \infty$  (3.38)

$$R_c = \rho I_m, \quad \rho=1. \quad (3.39)$$

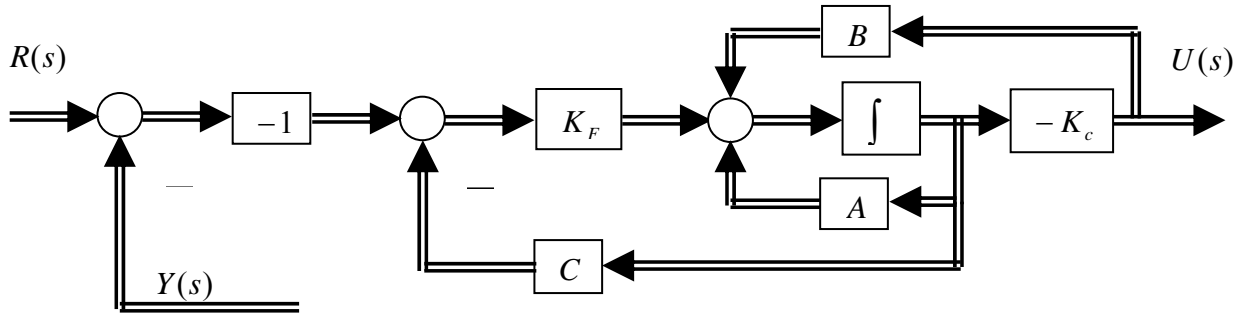


Figura 3.1: Digrama de blocos do controlador LQG/LTR.

O escalar  $q^2$  é denominado parâmetro de recuperação. Quando este parâmetro assume valores crescentes ( $q^2 \rightarrow \infty$ ), observa-se que as curvas características de resposta em frequência da função de transferência do sistema em malha aberta  $G(s)K(s)$  aproxima-se do TFL projetado na primeira etapa do projeto que corresponde à função de transferência em malha aberta  $T_{KF}(s)$  do filtro de Kalman.

O diagrama de blocos do controlador LQG/LTR é mostrado na Figura 3.1, e sua matriz de transferência  $K(s)$  é definida por

$$K(s) = K_c (sI - A + B K_c + K_f C)^{-1} K_f. \quad (3.40)$$

### 3.4.3 Projeto do Observador com Altos Ganhos nas Baixas Frequências

Na análise apresentada na Seção 2.3 mostrou-se que o “*Target Feedback Loop*” deve possuir altos ganhos nas baixas frequências. Para se obter essa característica, em geral faz-se a adição de integradores na entrada do sistema a ser controlado, conforme indicado na Figura 3.2, onde  $G(s)$  é a matriz de transferência da planta definida pela Equação (3.1), isto é,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.41)$$

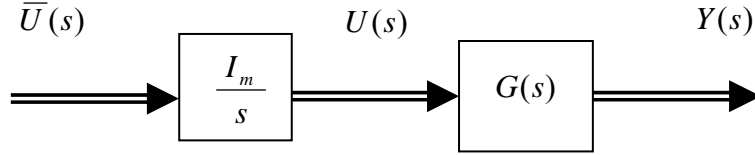


Figura 3.2: Diagrama de blocos da planta com bloco de integradores em sua entrada.

Deste diagrama verifica-se que

$$U(s) = \frac{I_m}{s} \bar{U}(s) \quad \rightarrow \quad \dot{u} = I_m \bar{u}, \quad (3.42)$$

e a representação em espaço de estados do sistema aumentado torna-se

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_{nxm} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \bar{u} \\ y = \begin{bmatrix} C_{pxn} & 0_{p \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{u}} \end{bmatrix} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \bar{u} \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{cases} \quad (3.43)$$

cuja matriz de transferência é dada pela equação

$$\bar{G}(s) = G(s) \frac{I}{s} = \bar{C} (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}. \quad (3.44)$$

#### 3.4.4 Projeto do Observador com Equalização de Ganhos em Todas as Frequências

A Seção 2.3 do capítulo anterior analisou as características que as curvas de resposta em frequência da matriz de transferência de malha aberta  $G(s)K(s)$  do sistema controlado devem possuir para que haja a garantia do atendimento dos requisitos de projeto (estabilidade, precisão estática, rejeição de perturbações, filtragem de ruídos, e etc.). Basicamente, essas características são as seguintes: que o ganho principal inferior de  $G(s)K(s)$  seja alto nas baixas frequências; que o ganho principal superior de  $G(s)K(s)$  seja baixo nas altas



frequências; e que a máxima “*frequência de crossover*” seja ajustada de modo compatível com o sistema a ser controlado. Essas características são gerais, e portanto valem tanto para o caso de sistemas monovariáveis (sistemas SISO) como também para o caso de sistemas multivariáveis (sistemas MIMO). No caso de sistemas SISO, no entanto, os ganhos principais, superior e inferior, são iguais já que na realidade esses sistemas só possuem um único ganho.

No projeto do controlador LQG/LTR, inicialmente essas características são incorporadas na matriz de transferência  $T_{KF}(s)$ , o chamado “*Target Feedback Loop*”, e isso é feito mediante o ajuste dos parâmetros de projeto  $\Gamma$  e  $\mu$ , que são sintonizados em um ou dois passos com o auxílio da Equação (3.30), conforme descrito na Subseção 3.4.1.

No caso específico de sistemas MIMO, o projeto do controlador envolve um objetivo adicional que é o de promover o desacoplamento do sistema. O cumprimento deste novo requisito é garantido mediante a equalização dos ganhos principais, superior e inferior, da matriz de transferência de malha aberta  $G(s)K(s)$  do sistema controlado. Uma maneira direta para se obter esta equalização é fazer com que a matriz de transferência  $G(s)K(s)$  seja diagonal com elementos iguais.

Para a incorporação deste novo objetivo no projeto de  $T_{KF}(s)$ , preservando-se todos os outros objetivos anteriores, existe uma fórmula para o cálculo do parâmetro de projeto  $\Gamma$ , cuja dedução é apresentada a seguir.

Considere a relação dada a seguir, que é semelhante à relação dada na Equação (3.30) nos casos em que o lado direito é uma matriz diagonal:

$$T_{KF}(s) = C \Phi K_f = \frac{1}{\sqrt{\mu}} C (sI - A)^{-1} \Gamma = T_{FOL}(s). \quad (3.45)$$

Com a inclusão de integradores na entrada da planta (necessários para aumentar os ganhos nas baixas frequências, conforme mostrado na Subseção 3.4.3), e considerando-se a

representação em espaço de estados do sistema aumentado (Equação (3.43)), a matriz  $T_{FOL}(s)$  pode ser escrita na forma particionada dada a seguir

$$T_{FOL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{bmatrix} C_{pxn} & 0_{pxm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A_n & -B_{nxm} \\ 0_{mxn} & sI_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

que pode ser desenvolvida para

$$T_{FOL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{bmatrix} C_{pxn} & 0_{pxm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_n - A_n)^{-1} & \frac{(sI_n - A_n)^{-1} B_{nxm}}{s} \\ 0_{mxn} & \frac{I_m}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

ou ainda para a seguinte forma:

$$T_{FOL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ C_{pxn} (sI_n - A_n)^{-1} \Gamma_1 + C_{pxn} \frac{(sI_n - A_n)^{-1} B_{nxm}}{s} \Gamma_2 \right]. \quad (3.48)$$

Para obter-se a equalização dos ganhos principais, superior e inferior, de  $T_{FOL}(s)$ , em todas as frequências, deve-se escolher a matriz  $\Gamma$  de tal modo que  $T_{FOL}(s)$  torne-se uma matriz diagonal com elementos iguais. Este resultado é obtido escolhendo-se a matriz  $\Gamma$  de acordo com a seguinte fórmula [12, pag. 151]:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n^{-1} B_{nxm} (C_{pxn} A_n^{-1} B_{nxm})^{-1} \\ -(C_{pxn} A_n^{-1} B_{nxm})^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Com essa escolha de  $\Gamma$  a matriz de transferência  $T_{FOL}(s)$  torna-se uma matriz diagonal com a seguinte forma:

$$T_{FOL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{I}{s} \right). \quad (3.50)$$

Os ganhos principais dessa matriz são altos nas baixas frequências, decaem a uma taxa de 20 dB por década e tornam-se baixos nas altas frequências. Já a frequência de *crossover* pode ser livremente sintonizada através da escolha correta do parâmetro  $\mu$ , o que é feito com muita simplicidade.

A partir deste ponto, o projeto do observador  $T_{KF}(s)$  e do respectivo regulador, que juntos constituem o controlador  $K(s)$ , seguem os mesmos formulários apresentados anteriormente (na Subseção 3.4.1) para o caso básico (sem acréscimo de integradores).

Feito o projeto, a realização do controlador LQG/LTR e sua respectiva matriz de transferência assumem as seguintes formas:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (\bar{A} - \bar{B}K_c - K_f\bar{C})\hat{x} - K_f(Ref - y) \\ \bar{u} &= -K_c\hat{x}\end{aligned}\tag{3.51}$$

$$K(s) = K_c(sI - \bar{A} + \bar{B}K_c + K_f\bar{C})^{-1}K_f.\tag{3.52}$$

O diagrama de blocos do sistema controlado em malha fechada e com acréscimo de integradores é mostrado na Figura 3.3.

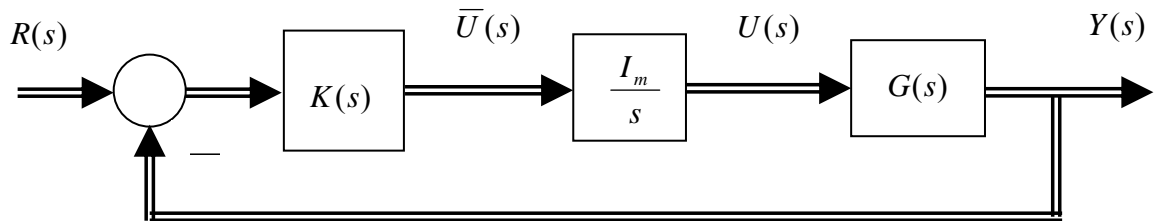


Figura 3.3: Sistema em malha fechada com bloco de integradores e controlador.

A representação em espaço de estados do sistema controlado é dada pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_{nxm} & 0_{nx(n+m)} \\ 0_{mxn} & 0_{mxm} & -K_C \\ 0_{(n+m)xn} & 0_{(n+m)xm} & \bar{A} - \bar{B}K_C - K_F\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{nxm} \\ 0_{mxm} \\ -K_F \end{bmatrix} (Ref - y) \quad (3.53)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_{pxn} & 0_{pxm} & 0_{px(n+m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ \hat{x} \end{bmatrix}.$$

### 3.5 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado um resumo dos principais procedimentos específicos que são usados para a realização do projeto de controladores do tipo LQG/LTR para sistemas multivariáveis. Esses procedimentos envolvem o projeto de um “*Target Feedback Loop*” que possua todas as características de resposta em frequência que asseguram os requisitos de estabilidade e de bom desempenho dinâmico do sistema controlado em malha fechada.

No capítulo também foram mostrados detalhes sobre o aumento de ganhos nas baixas frequências – que é feito mediante a adição de integradores na entrada da planta; e sobre o desacoplamento dos diversos canais de entrada-saída de sistemas multivariáveis – que é feito mediante a equalização dos ganhos principais do sistema controlado.

Todos esses procedimentos são de grande utilidade no projeto de controladores do tipo LQG/LTR para sistemas multivariáveis, e serão usados em alguns dos próximos capítulos desta tese.

## Capítulo 4:      Compensadores Dinâmicos

A localização dos pólos de um sistema linear no plano- $s$  é o fator determinante tanto para a estabilidade como para a obtenção de um bom comportamento dinâmico/transitório do referido sistema. Quando todos os pólos deste sistema possuem parte real negativa, ele é estável. Quando o sistema em questão possui pelo menos um pólo no semi-plano direito do plano- $s$ , então ele é instável.

Quando o sistema é estável, mas apresenta pólos situados em posições inadequadas do semi-plano esquerdo do plano- $s$ , ele pode apresentar oscilações permanentes ou mal amortecidas, que em geral são indesejáveis. Em casos assim, é necessário o acréscimo de um compensador (ou estabilizador, ou controlador) que reposicione os pólos do sistema em posições mais adequadas do plano- $s$ . O projeto de compensadores dinâmicos apresenta-se então como um importante método para a solução deste problema, pois além de permitir o posicionamento arbitrário dos pólos do sistema, esses compensadores utilizam como sinais de entrada os próprios sinais de saída do sistema controlado. O uso de compensadores dinâmicos pode ser feito tanto no caso de sistemas SISO como também no caso de sistemas MIMO.

A ordem do compensador dinâmico capaz de proporcionar posicionamento arbitrário de pólos para um certo sistema depende dos seus respectivos índice de controlabilidade e índice de observabilidade [21].

Comparativamente com a técnica de realimentação de estados estimados, o projeto de compensadores dinâmicos para sistemas SISO não apresenta grande vantagem no que se refere à redução da ordem do compensador. Essa vantagem torna-se mais acentuada no caso de sistemas MIMO, onde a ordem do compensador dinâmico, em geral, é significativamente menor do que a dos controladores que usam realimentação de estados estimados.

## 4.1 Formulação Matemática dos Compensadores Dinâmicos

A formulação matemática para o projeto de compensadores dinâmicos para sistemas SISO e MIMO é feita com base nas realizações de espaço de estados da planta e do controlador.

Considere o sistema multivariável, descrito pela realização

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $y \in \mathfrak{R}^p$  e  $u \in \mathfrak{R}^m$  os são vetores de saída e de entrada, respectivamente, e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  possuem dimensões compatíveis. A matriz de transferência associada a esta realização é dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B.\tag{4.2}$$

O polinômio característico deste sistema em malha aberta é dado por

$$a(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.\tag{4.3}$$

A estrutura do compensador dinâmico é dada pela seguinte realização

$$\begin{aligned}\dot{z} &= F z + G y \\ v &= H z + J y\end{aligned}\tag{4.4}$$

de onde se obtém a sua matriz de transferência com a seguinte forma

$$G_{cd}(s) = H(sI - F)^{-1} G + J.\tag{4.5}$$

A ordem do compensador dinâmico, em função do índice de controlabilidade e do índice de observabilidade do sistema, é dada pela seguinte expressão [21]:

$$n_{cd} = \min\{n_c, n_o\} - 1\tag{4.6}$$

onde

$$n_c = \min q \text{ tal que } \text{rank} \left( \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{q-1}B \end{bmatrix} \right) = n \quad (4.7)$$

é o índice de controlabilidade de sistema, e

$$n_o = \min q \text{ tal que } \text{rank} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \end{bmatrix} \right) = n \quad (4.8)$$

é o índice de observabilidade do sistema.

Após o acréscimo do compensador dinâmico, conforme o diagrama de blocos mostrado na Figura 4.1, a representação em espaço de estados do sistema aumentado assume a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BJ C & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_{cd} \times m} \end{bmatrix} \bar{u} \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0_{p \times n_{cd}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

O cálculo das matrizes  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $J$  do compensador dinâmico que posiciona arbitrariamente os pólos do sistema é feito com base em equações desenvolvidas em [21]. Rotinas computacionais que implementam essas equações estão disponíveis no apêndice da referência [28].

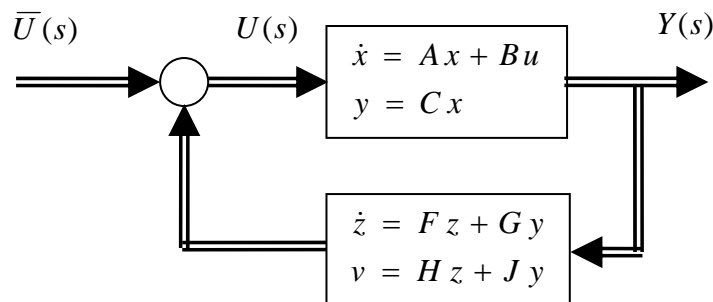


Figura 4.1: Sistema MIMO controlado por compensador dinâmico.

## **Capítulo 5: Projetos de Controladores Robustos para Sistema Multivariável Instável com e sem o Uso de Pré-Compensador Dinâmico**

O método LQG/LTR para o projeto de controladores foi introduzido na literatura técnica de controle por Doyle e Stein [18] como um sucedâneo ao método LQG que visa restabelecer, ao menos em parte, as excelentes margens de ganho e de fase que os reguladores LQR (*Linear Quadratic Regulators*) possuem e que os reguladores com observadores não garantem, conforme demonstrado por Doyle [17]. O método pode ser aplicado no projeto de controladores tanto de sistemas SISO como também de sistemas MIMO, e possui duas versões alternativas que são escolhidas conforme as incertezas multiplicativas associadas ao modelo sejam representadas na saída ou na entrada da planta. O sucesso da aplicação do método requer que o sistema a ser controlado (a planta) seja de fase mínima (isto é, sem zeros de transmissão no semi-plano direito do plano- $s$ ), mas em princípio não existe nenhuma exigência de que ele deva ser estável.

Basicamente, um controlador LQG/LTR é uma combinação de um regulador LQR e de um filtro de Kalman, e assim sendo, e com a ajuda do Princípio da Separação [29], prova-se que ele sempre garante a estabilidade do sistema controlado em malha fechada. Mais ainda, o regulador contém zeros de transmissão que possuem o mesmo módulo dos modos dominantes da planta. Quando esses modos dominantes são estáveis, os zeros de transmissão do regulador LQG/LTR os cancelam perfeitamente. Quando os modos dominantes da planta são instáveis, os zeros de transmissão do regulador LQG/LTR aparecem simetricamente posicionados, relativamente ao eixo imaginário do plano- $s$ , em relação aos ditos modos



instáveis. Assim, ao fechar-se a malha do sistema, os modos dominantes instáveis da planta tendem a ser atraídos pelos zeros de transmissão do controlador, que estão posicionados do outro lado do eixo imaginário.

A aproximação entre os modos instáveis da planta e os seus zeros de transmissão respectivos é tanto maior conforme se aumenta o ganho de malha do sistema, mas eles só coincidem (ou seja, só se cancelam) quando este ganho tende para o infinito. O aumento excessivo deste ganho tende a excitar outros modos do sistema, estáveis e de altas frequências, que tendem a se tornar mais oscilatórios à medida que se aumenta o ganho de malha do sistema. Portanto, o benefício do cancelamento dos modos dominantes é prejudicado pela excitação desses outros modos.

No caso de plantas com modos instáveis situados bem próximos do eixo imaginário, e dado que não se pode aumentar excessivamente o ganho de malha, ocorre que, em malha fechada, esses modos migram para o semi-plano esquerdo do plano-s, mas não chegam a ser cancelados, e assim passam a ter uma influência dominante sobre o sistema, por causa de seus posicionamentos nas proximidades do eixo imaginário. Dependendo dessa proximidade, o sistema controlado pode ter um desempenho não satisfatório em termos de oscilações, erro de regime permanente, acoplamentos e etc, conforme mostram os exemplos que constam no Capítulo 13 de Ridgely e Banda [20].

Para contornar essa dificuldade originada pela natureza instável da planta, apresenta-se neste capítulo uma proposta de solução que consiste no uso de um pré-compensador estabilizador que estabilize a planta antes de se fazer o projeto do controlador LQG/LTR definitivo. Este pré-compensador é projetado na forma de um compensador dinâmico tradicional [21].

Parte do conteúdo deste capítulo foi apresentado em [30]-[31].

## 5.1 Apresentação do Sistema e suas Características

Para ilustrar as dificuldades que ocorrem na realização do projeto de controladores robustos do tipo LQG/LTR aplicado a sistemas multivariáveis instáveis e mostrar a efetividade da proposta de solução apresentada neste capítulo para a superação das referidas dificuldades, considera-se como exemplo o caso de um sistema multivariável de sexta ordem, com duas entradas e duas saídas, cuja representação em espaço de estados é definida por

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) + \Gamma_p w(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) + v(t)\end{aligned}\tag{5.1a}$$

onde às vezes  $u_p(t)$  e  $y_p(t)$  são substituídos por  $u(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente, e tem-se

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0853 & -0.0001 & -0.9994 & 0.0414 & 0 & 0.1862 \\ -46.8600 & 2.7570 & 0.3896 & 0 & -124.3000 & 128.6000 \\ -0.4248 & -0.0622 & -0.0671 & 0 & -8.7920 & -20.4600 \\ 0 & 1.0000 & 0.0523 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20.0000 \end{bmatrix}\tag{5.1b}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{5.1c}$$

A matriz  $\Gamma_p$  não é especificada, exceto sua dimensão que é a mesma da matriz  $B_p$ , que é de dimensão  $6 \times 2$ . As intensidades dos distúrbios  $w$  e dos ruídos de medição  $v$  são consideradas como sendo unitárias.

A matriz de transferência  $G_p(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p$  da planta em malha aberta possui um único zero de transmissão, situado em  $z_1 = -158.15$ , e os seus pólos são os seguintes:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -3.2503 & \lambda_2 &= -0.0360 \\
\lambda_{3,4} &= 0.1884 \pm j1.0511 & \lambda_5 = \lambda_6 &= -20.
\end{aligned}
\tag{5.2}$$

Com esses dados verifica-se que o sistema é instável e de fase mínima. Pode-se verificar também que ele é controlável e observável. As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema (ou planta)  $G_p(s)$  são mostradas na Figura 5.1.

Para que o controlador  $K(s)$  a ser projetado para o sistema sob estudo seja robusto do ponto de vista de estabilidade, é necessário que ele garanta a estabilidade do sistema controlado em malha fechada, nos termos estabelecidos pela Equação (2.11). Para isso se requer uma estimativa das incertezas contidas no modelo da planta. Neste estudo considera-se que essas incertezas são representadas na forma multiplicativa não-estruturada e posicionadas na saída da planta, que elas são não superiores a 10% (em relação ao modelo nominal da planta) até a frequência de 2 rad/s, e que a partir desta frequência elas crescem a uma taxa de 20 dB por década. Essas características que limitam as incertezas são mostradas na Figura 5.2.

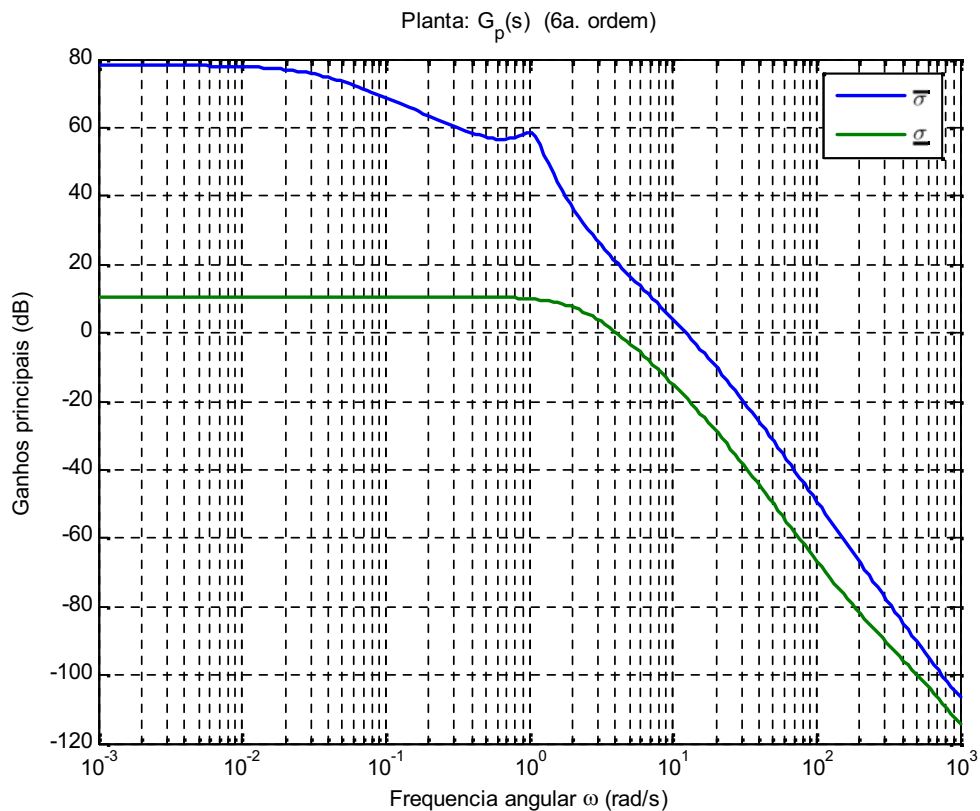


Figura 5.1: Curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema.

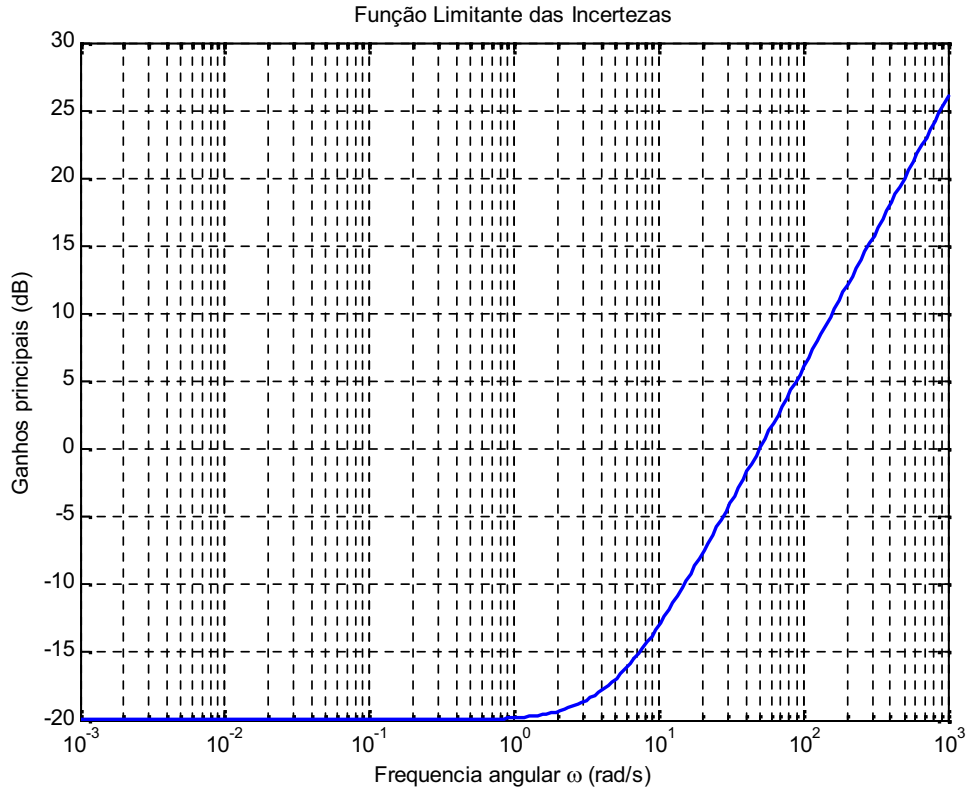


Figura 5.2: Função que descreve os limites máximos das incertezas contidas no modelo nominal da planta.

Com relação ao requisito estabelecido na Equação (2.9), que assegura boa precisão estática (ou seja, mínimo erro de regime permanente) e boa capacidade para rejeição de perturbações, considera-se que o controlador  $K(s)$  proporcione ao sistema ação integral e ganho de malha não inferior a 20 dB nas frequências até 0,1 rad/s (baixas frequências).

Com relação ao requisito dado na Equação (2.10), que assegura ao sistema uma boa condição para a filtragem de ruídos, considera-se que a máxima “*frequência de crossover*”, acima da qual eventuais oscilações são filtradas pelo sistema, seja não superior a 10 rad/s.

Juntando-se a essas restrições o requisito de estabilidade estabelecido pela Equação (2.11) se obtém os limites (ou barreiras de restrições) para os ganhos principais da matriz de transferência  $G(s)K(s)$  que são mostradas na Figura 5.3, onde também aparecem os ganhos principais de  $G_p(s)$ , a matriz de transferência do modelo nominal da planta.

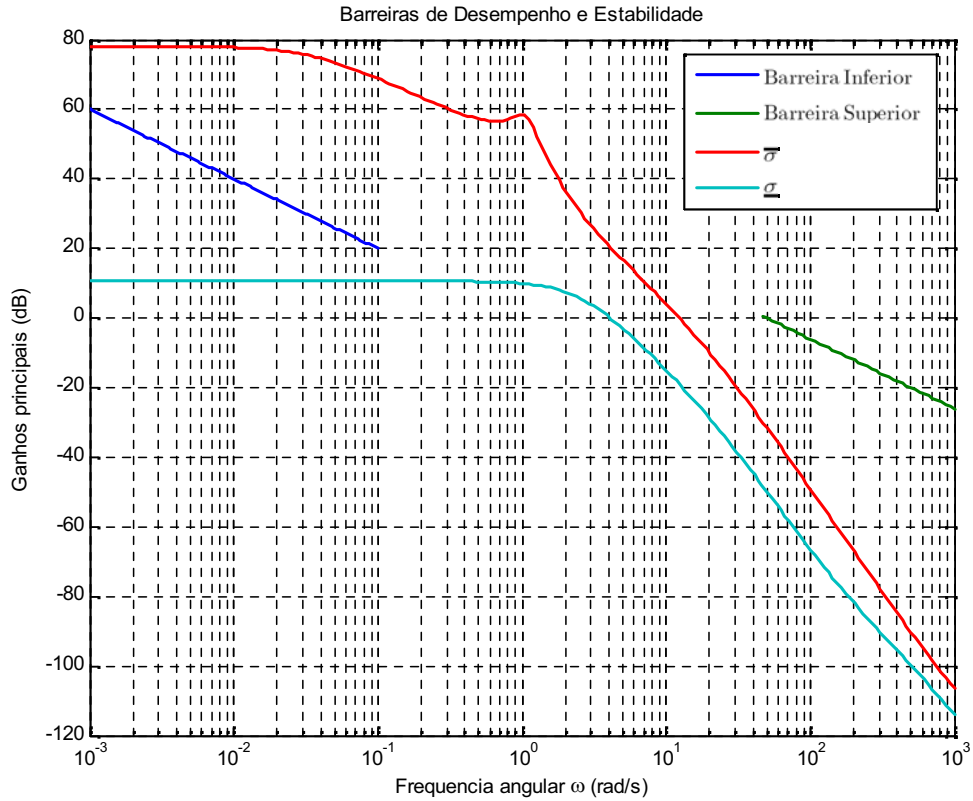


Figura 5.3: Ganhos principais do sistema em malha aberta, juntamente com as barreiras impostas pelas condições de desempenho e estabilidade.

Nota-se nesta figura, que o sistema por si só não satisfaz as condições de precisão estática e de filtragem de ruídos. Observe, por exemplo, que o ganho principal inferior da planta  $G_p(s)$  é inferior a 20 dB nas frequências abaixo de 0,1 rad/s, e que a máxima “*frequência de crossover*” é ligeiramente maior do que o valor especificado de 10 rad/s. Portanto, é necessário que o controlador  $K(s)$  a ser projetado proporcione correções para essas violações.

Nas seções seguintes deste capítulo apresentam-se dois projetos de controladores do tipo LQG/LTR para o sistema sob estudo. O primeiro projeto, que é denominado de Projeto Básico, utiliza todos os recursos do método LQG/LTR, mas sem a estabilização prévia da planta. No segundo projeto, que é denominado de Projeto Completo, estabiliza-se inicialmente a planta e só a seguir projeta-se o controlador LQG/LTR definitivo.

## 5.2 Projeto Básico: Controlador LQG/LTR Básico com Adição de Integradores e Equalização de Ganhos

O projeto de um controlador do tipo LQG/LTR é feito em duas etapas. No primeiro passo projeta-se uma Malha de Referência  $T_{FOL}(s)$  que possua boas características de resposta em frequência. Em seguida, projeta-se o controlador  $K(s)$  de tal forma que a matriz de transferência de malha aberta  $G(s)K(s)$  tenha as mesmas características de  $T_{FOL}(s)$ .

A Malha de Referência deve ser projetada de tal forma que ela garanta ao sistema controlado em malha fechada as seguintes características: precisão estática de suas saídas com relação aos respectivos sinais de referência; capacidade de rejeição de distúrbios externos; habilidade para a filtragem de ruídos de medição; desacoplamento de seus diversos canais; e boa robustez para a acomodação das incertezas associadas com o modelo nominal da planta.

Para o cumprimento desses objetivos são necessárias a adição de integradores e a imposição de algumas restrições sobre os ganhos principais da matriz de transferência  $T_{FOL}(s)$ . Estes ganhos são definidos pelos valores singulares, máximo e mínimo, da matriz  $T_{FOL}(s)$ , que basicamente devem ser baixos nas altas frequências e altos nas baixas frequências, respectivamente.

### 5.2.1 Adição de Integradores na Entrada da Planta

A adição de integradores em série com a planta é um procedimento básico porque eles aumentam os ganhos do sistema nas baixas frequências e isso garante ao sistema boa precisão estática (erro em regime permanente nulo) e boa capacidade para rejeição de distúrbios. Além disso, os integradores possibilitam a equalização dos ganhos principais do sistema, o que é bom para a obtenção de desacoplamento entre os diversos canais de entrada-saída do sistema.

Considerando-se que as incertezas do modelo nominal da planta são representadas na sua saída, então os integradores devem ser colocados na sua entrada, conforme mostrado na Figura 5.4, de onde se obtém, para o caso específico da planta  $G_p(s)$  apresentada na seção anterior, a seguinte relação

$$U(s) = \frac{I_2}{s} \bar{U}(s) \quad \rightarrow \quad \dot{u} = I_2 \bar{u}. \quad (5.3)$$

Com a inclusão desses dois integradores a dimensão do sistema aumenta de sexta para oitava ordem, e ele passa a ter a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2 \times 6} \\ I_2 \end{bmatrix} \bar{u} \\ y &= \begin{bmatrix} C_{2 \times 6} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ u \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde as matrizes  $A_p$ ,  $B_p$  e  $C_p$  são definidas na Equação (5.1). Esta representação pode ser compactada na forma dada a seguir

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_p &= \bar{A} \bar{x}_p + \bar{B} \bar{u} \\ y &= \bar{C} \bar{x}_p \end{aligned} \quad (5.5)$$

de onde obtém-se a seguinte matriz de transferência do sistema aumentado

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = G_p(s) \frac{I_2}{s}. \quad (5.6)$$

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema aumentado são mostradas na Figura 5.5.

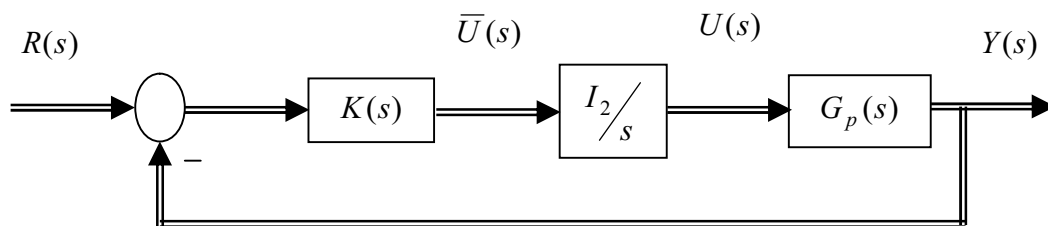


Figura 5.4: Sistema em malha fechada com integradores e controlador.

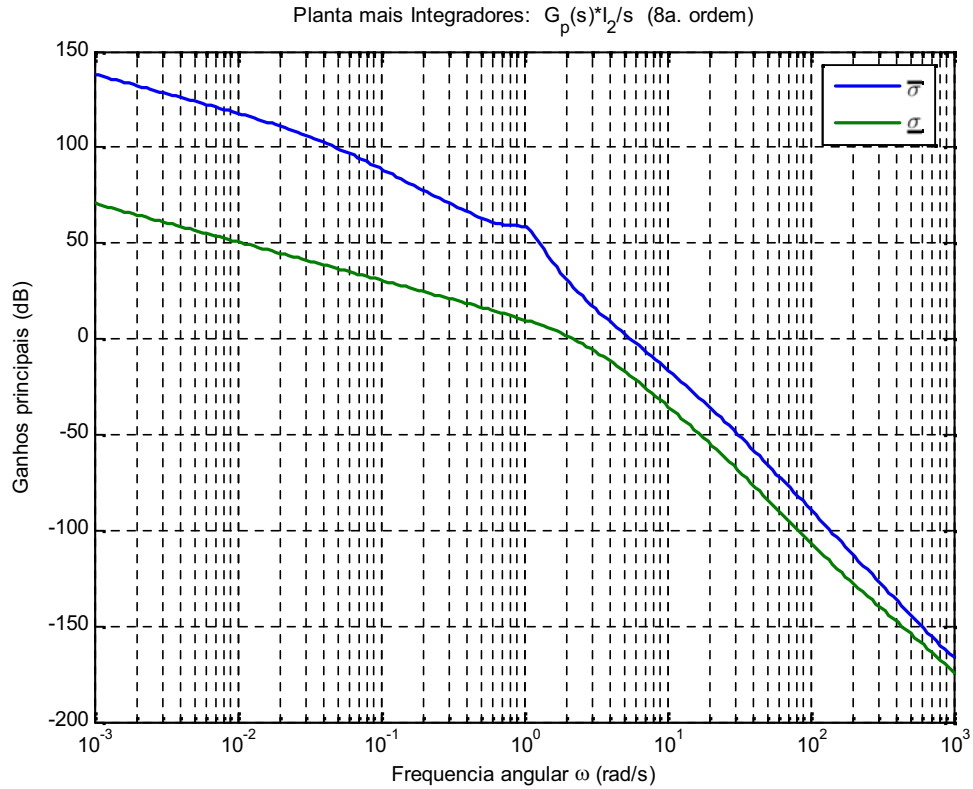


Figura 5.5: Ganhos principais do sistema após a inclusão de dois integradores.

### 5.2.2 Projeto da Malha de Referência com Equalização de Ganhos

Seguindo-se os procedimentos apresentados na Subseção 3.4.4, tem-se que a estrutura da Malha de Referência para o sistema em estudo é dada por

$$\bar{T}_{FOL}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{\Gamma} \quad (5.7)$$

e sua completa especificação requer a determinação da matriz  $\bar{\Gamma}$ .

Para que haja desacoplamento entre todos os canais de entrada-saída do sistema os ganhos principais de  $\bar{T}_{FOL}(s)$  devem ser iguais em todas as frequências. Isso pode ser conseguido fazendo-se  $\bar{T}_{FOL}(s)$  igual a uma matriz diagonal do tipo dado na Equação (3.50).

Escrevendo-se a Equação (5.7) com o particionamento da Equação (5.4), obtém-se

$$\bar{T}_{FOL}(s) = \begin{bmatrix} C_p & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_p) & -B_p \\ 0_{2 \times 6} & sI_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 \\ \bar{\Gamma}_2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$



que ao ser desenvolvida resulta em

$$\bar{T}_{FOL}(s) = \left[ C_p (sI - A_p)^{-1} \bar{\Gamma}_1 + C_p \frac{(sI - A_p)^{-1} B_p}{s} \bar{\Gamma}_2 \right]. \quad (5.9)$$

Seguindo-se a sugestão apresentada no livro de Cruz [12], usa-se a seguinte escolha para a matriz  $\bar{\Gamma}$

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 \\ \bar{\Gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p^{-1} B_p (C_p A_p^{-1} B_p)^{-1} \\ -(C_p A_p^{-1} B_p)^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

que leva a matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL}(s)$  dada na Equação (5.8) à seguinte forma diagonal

$$\bar{T}_{FOL}(s) = \begin{pmatrix} I_2 \\ s \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Aplicando-se os dados necessários na fórmula definida pela Equação (5.10), obtém-se o seguinte valor para a matriz  $\bar{\Gamma}$ :

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0035 & -0.0022 \\ -0.0671 & 0.0414 \\ 0 & 1 \\ -0.2759 & 0 \\ 0.0980 & -0.0001 \\ -0.2759 & 0 \\ 0.0980 & -0.0001 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Com esse valor a matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL}(s)$  assume a forma definida na Equação (5.11).

Seus ganhos principais são mostrados na Figura 5.6, onde se observa que eles são perfeitamente iguais em todas as frequências. Nota-se também que a “*frequência de crossover*” é igual a 1 rad/s.

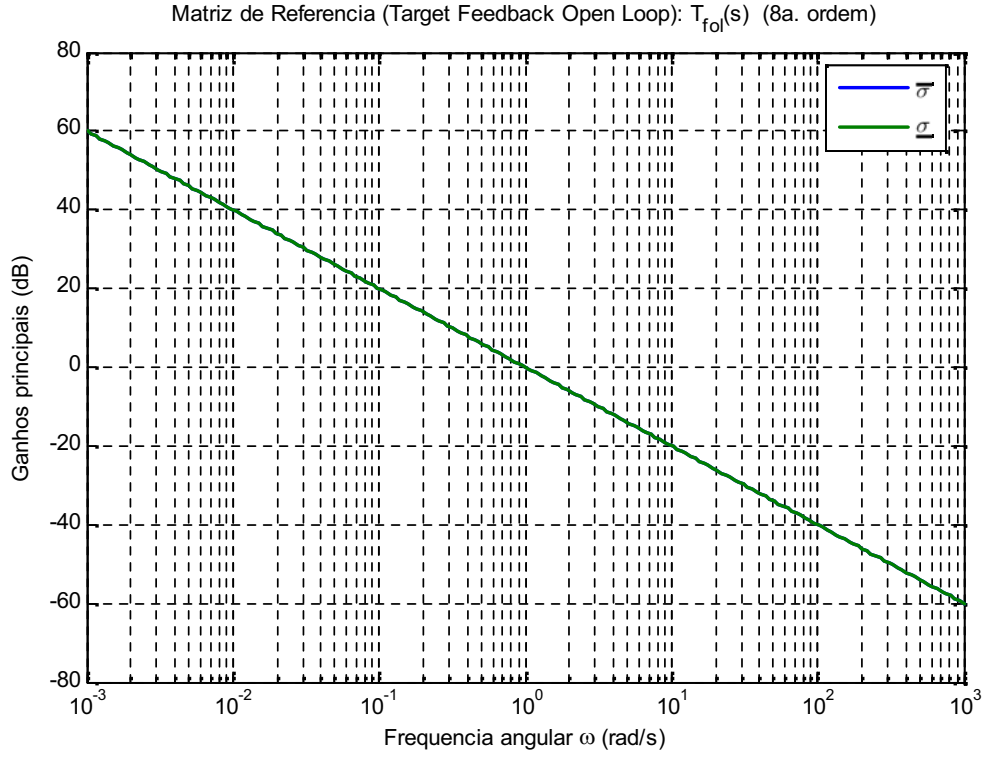


Figura 5.6: Ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL}(s)$ .

### 5.2.3 Projeto do Filtro de Kalman

Os ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF}(s)$  do Filtro de Kalman são relacionados com os ganhos principais da Malha de Referência  $\bar{T}_{FOL}(s)$  através da Equação (3.45). Com o auxílio desta equação e da curva mostrada na Figura 5.6 pode-se ajustar o valor do parâmetro escalar  $\mu$  que proporciona à matriz de transferência  $\bar{T}_{KF}(s)$  a “*frequência de crossover*” desejada para o sistema. Tal frequência foi especificada na Seção 5.1 como sendo igual a 10 rad/s, e é obtida escolhendo-se  $\mu = 0.01$ .

Adaptando-se as Equações (3.13)-(3.15) para o sistema sob estudo, elas tornam-se

$$K_f = \frac{1}{\mu} \Sigma \bar{C}^T \quad (5.13)$$

$$\bar{A} \Sigma + \Sigma \bar{A}^T - \frac{1}{\mu} \Sigma \bar{C}^T \bar{C} \Sigma + Q_f = 0 \quad (5.14)$$

$$Q_f = \bar{\Gamma} Q_o \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma} \bar{\Gamma}^T. \quad (5.15)$$

Aplicando-se nessas equações os valores de  $\bar{\Gamma}$ , dado pela Equação (5.12), e de  $\mu = 0.01$ , obtém-se o seguinte resultado para a matriz de ganhos do Filtro de Kalman

$$K_f = \begin{bmatrix} 10.0038 & -0.0009 \\ -0.0290 & 7.7587 \\ -0.7094 & 0.4052 \\ -0.0009 & 10.7499 \\ -2.7554 & -0.1379 \\ 0.9788 & 0.0477 \\ -2.7554 & -0.1379 \\ 0.9788 & 0.0477 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

As características de resposta em frequência dos ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} K_f$  são mostradas na Figura 5.7, onde se pode notar que:

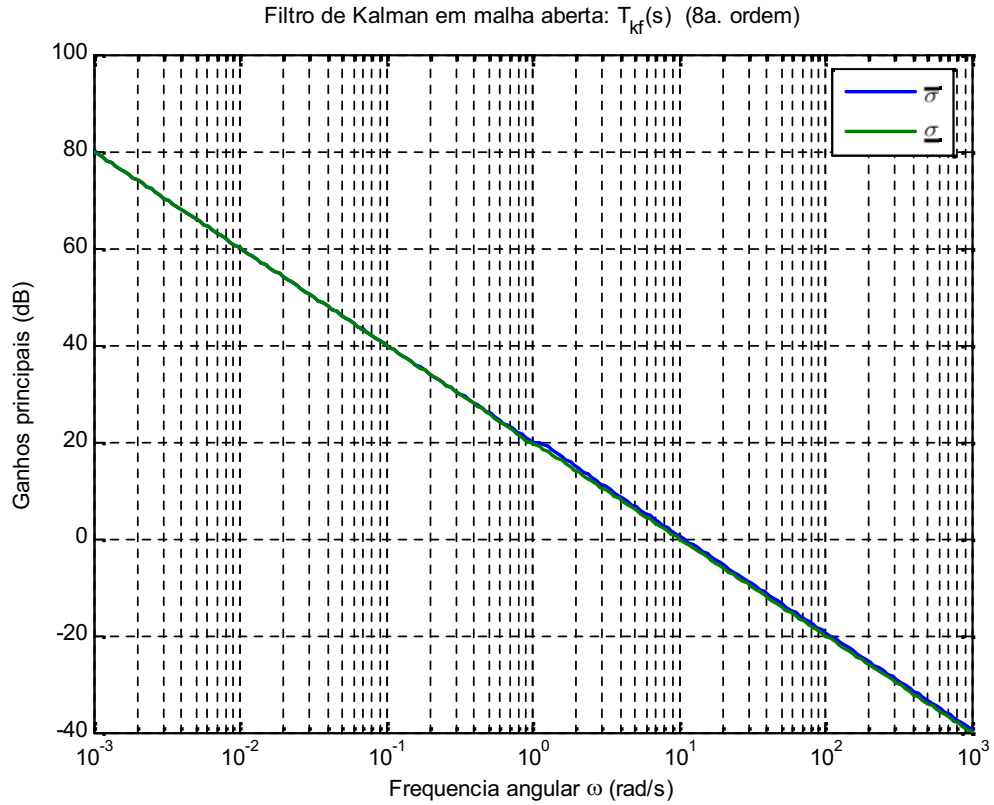


Figura 5.7: Ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF}(s)$ .

1) os ganhos principais são iguais em todas as frequências; 2) a especificação para a “*frequência de crossover*” é atendida; 3) os ganhos são altos nas baixas frequências; 4) os ganhos diminuem a uma taxa de 20 dB por década nas altas frequências. Além disso, por ser a matriz de transferência de um filtro de Kalman,  $\bar{T}_{KF}(s)$  possui excelentes propriedades de robustez. Em suma, por todas essas boas características, a matriz  $\bar{T}_{KF}(s)$  serve como modelo a ser emulado pela matriz de transferência  $G(s)K(s)$  do sistema controlado em malha aberta.

#### 5.2.4 Projeto Final do Controlador LQG/LTR Básico

A última etapa na realização do projeto do controlador LQG/LTR é a determinação da matriz de ganhos  $K_c$  do regulador LQR. Essa determinação leva em conta a necessidade de que a matriz de transferência  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$  emule as características de resposta em frequência da matriz de referência  $\bar{T}_{KF}(s)$ . Consegue-se essa emulação através do uso das Equações (3.36)-(3.39) apresentadas na Subseção 3.4.2.

Adaptando-se as referidas equações para o sistema sob estudo, elas tornam-se

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} - P \bar{B} R_c^{-1} \bar{B}^T P + Q_c = 0 \quad (5.17)$$

$$Q_c = \bar{C}^T \bar{C} + q^2 \bar{C}^T V \bar{C}, \quad V = I_2 \quad e \quad q^2 \rightarrow \infty \quad (5.18)$$

$$R_c = \rho I_2, \quad \rho = 1. \quad (5.19)$$

Usando-se na Equação (5.19) o parâmetro de recuperação com o valor de  $q^2 = 10^8$ , obtém-se

$$K_c = \begin{bmatrix} 6.9433 & -0.2482 & -0.3848 & -7.3604 & 0.5274 & -0.2815 & 0.1396 & -0.0400 \\ 7.1944 & 0.2094 & -0.3625 & 6.7682 & -0.2821 & 0.5456 & -0.0400 & 0.1422 \end{bmatrix} \times 10^3. \quad (5.20)$$

Esta matriz de ganhos completa o projeto do controlador  $K(s)$ , que é de décima ordem. Observe que os dois integradores que foram adicionados ao sistema são parte do controlador.

A realização em espaço de estados do controlador  $K(s)$ , do tipo LQG/LTR, e sua respectiva matriz de transferência são definidas pelas Equações (3.51)-(3.52).

A representação em espaço de estados do sistema controlado é definida pela Equação (3.53), que adaptada para o sistema sob estudo torna-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{u} \\ \dot{\hat{x}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p & 0_{6 \times 8} \\ 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times 2} & -K_c \\ 0_{8 \times 6} & 0_{8 \times 2} & \bar{A} - \bar{B}K_c - K_f\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ u \\ \hat{x}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \\ -K_f \end{bmatrix} (Ref - y) \quad (5.21)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_p & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ u \\ \hat{x}_p \end{bmatrix}.$$

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais de  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$ , ou seja, do sistema controlado em malha aberta, são as curvas mostradas em vermelho e azul na Figura 5.8. Nota-se que, até uma frequência de aproximadamente 40 rad/s, essas curvas acompanham os ganhos da matriz  $\bar{T}_{KF}(s)$ . Acima dessa frequência, os ganhos de  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$  decrescem mais rapidamente do que os ganhos de  $\bar{T}_{KF}(s)$ . Isso é bom para melhorar a filtragem de ruídos eventualmente presentes nos sinais de saída do sistema que são realimentados.

Para a verificação das margens de ganho e fase do sistema controlado usa-se a curva de resposta em frequência do ganho principal inferior da matriz  $I + \bar{G}(s)\bar{K}(s)$  que é mostrada na Figura 5.9. Nela verifica-se que o parâmetro  $\alpha_0$ , definido na Equação (2.14), tem o valor de  $\alpha_0 = 0.7523$ . Usando-se este resultado nas Equações (2.12)-(2.13) obtém-se as seguintes margens:

$$\begin{aligned} 0.5707 &< MG < 4.0377 \\ -44.1928^\circ &< MF < 44.1928^\circ. \end{aligned} \quad (5.22)$$

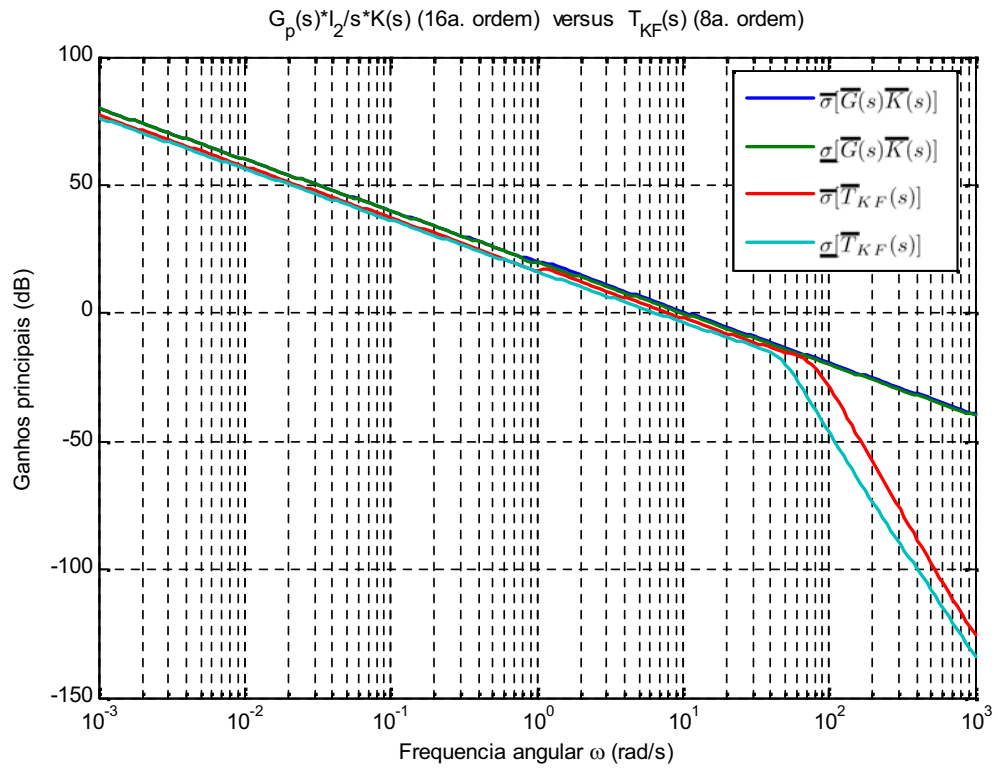


Figura 5.8: Ganhos principais de  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$  versus ganhos principais de  $\bar{T}_{KF}(s)$ .

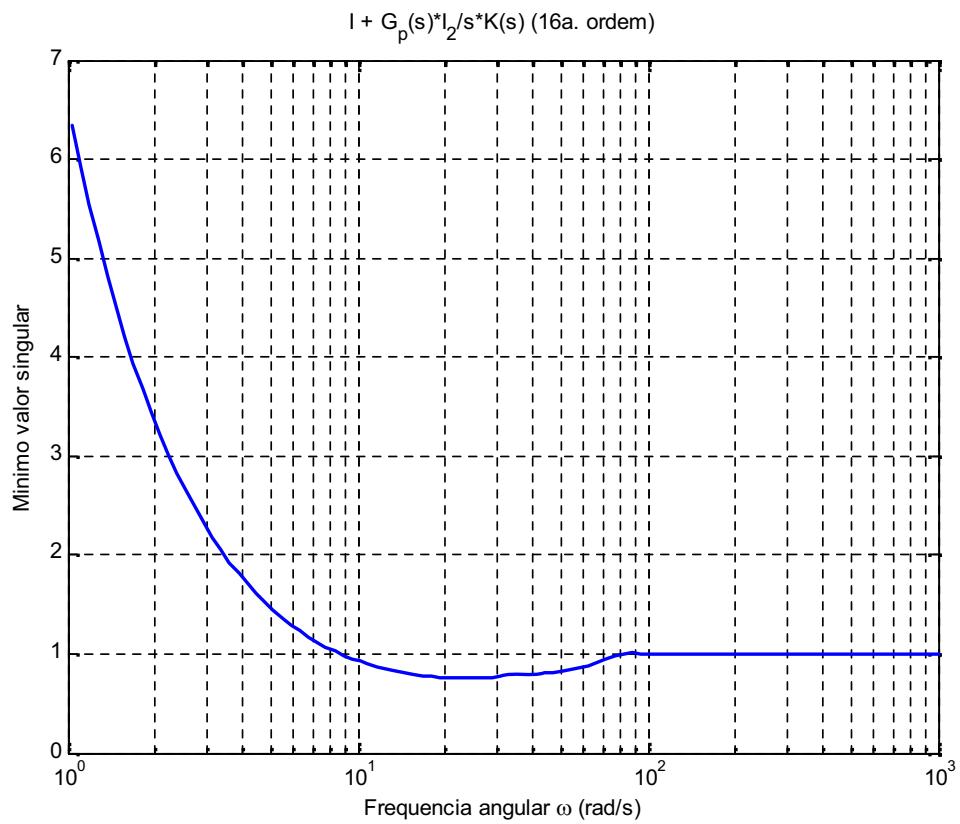


Figura 5.9: Ganho principal inferior da matriz  $I + \bar{G}(s)\bar{K}(s)$ .

### 5.2.5 Análise do Desempenho do Controlador sem Pré-compensador Estabilizador

O desempenho do Controlador Básico (sem o uso de pré-compensador estabilizador) pode ser analisado através das curvas mostradas na Figura 5.10 e na Figura 5.11, que apresentam as duas saídas do sistema em resposta a referências do tipo degrau unitário aplicadas separadamente em  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente.

Na Figura 5.10 observa-se: 1) que as saídas do sistema são perfeitamente desacopladas – a saída  $y_2$  praticamente não sofre nenhuma influência do degrau aplicado em  $R_1$ ; 2) que a saída  $y_2$  permanece no seu valor de referência (zero); 3) que a saída  $y_1$  converge, em regime permanente, para o seu respectivo valor de referência (um); e 4) que a resposta transitória da saída  $y_1$  é excelente – muito rápida e sem oscilações.

A Figura 5.12 apresenta os sinais de controle produzidos pelo controlador nas saídas dos integradores adicionados na entrada do sistema controlado quando se aplica um sinal de referência do tipo degrau unitário em  $R_1$ .

Na Figura 5.11 observa-se: 1) que as saídas do sistema são perfeitamente desacopladas – a saída  $y_1$  praticamente não sofre nenhuma influência do degrau aplicado em  $R_2$ ; 2) que a saída  $y_1$  permanece no seu valor de referência (zero); 3) que a saída  $y_2$  aproxima-se oscilatoriamente do seu respectivo valor de referência (um); e 4) que a resposta transitória da saída  $y_2$  apresenta um tempo de subida rápido (aproximadamente 0.25 segundos), oscilação de baixa frequência (aproximadamente um sexto de Hertz) com lento amortecimento e amplitude inicial de 14% (pico-a-pico) – um comportamento que precisa ser melhorado.

A Figura 5.13 apresenta os sinais de controle produzidos pelo controlador nas saídas dos integradores adicionados na entrada do sistema controlado quando se aplica um sinal de referência do tipo degrau unitário em  $R_2$ .

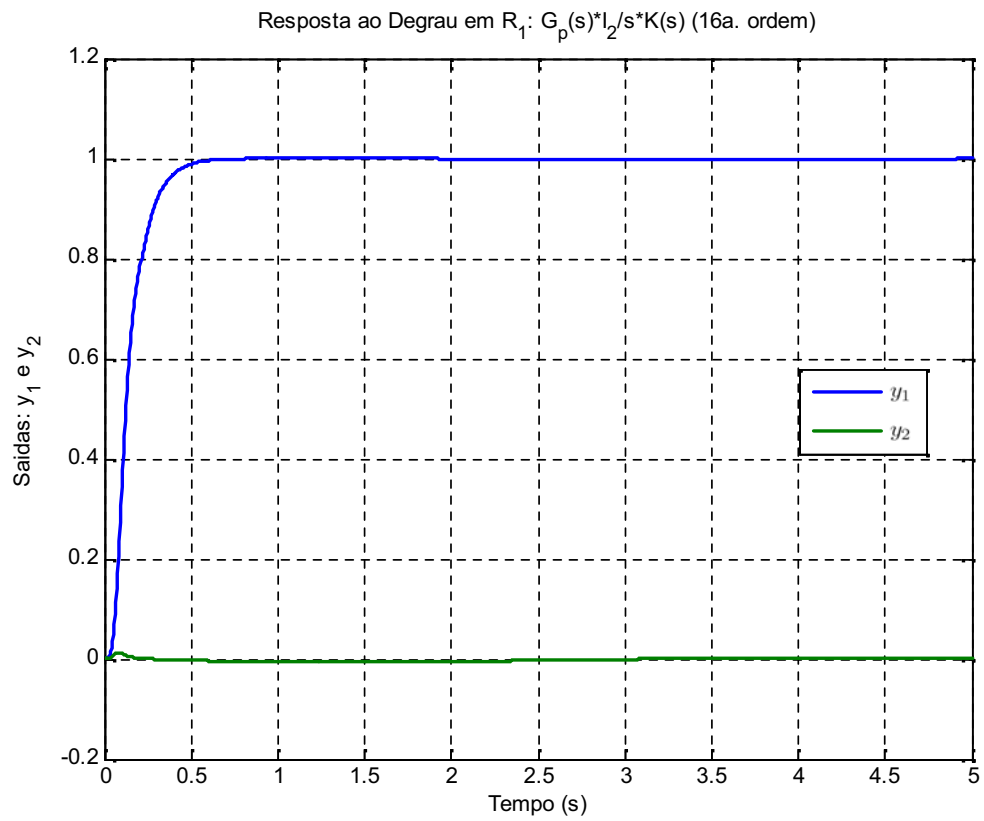


Figura 5.10: Saídas do sistema em resposta a uma referência do tipo degrau aplicada em  $R_1$ .

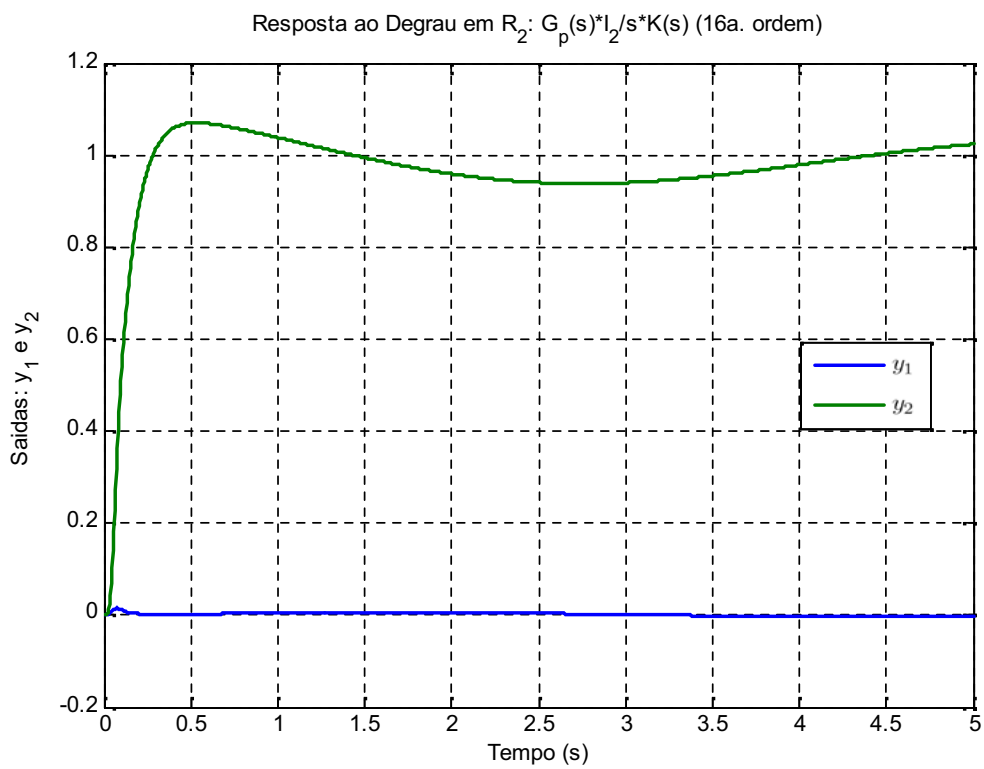


Figura 5.11: Saídas do sistema em resposta a uma referência do tipo degrau aplicada em  $R_2$ .



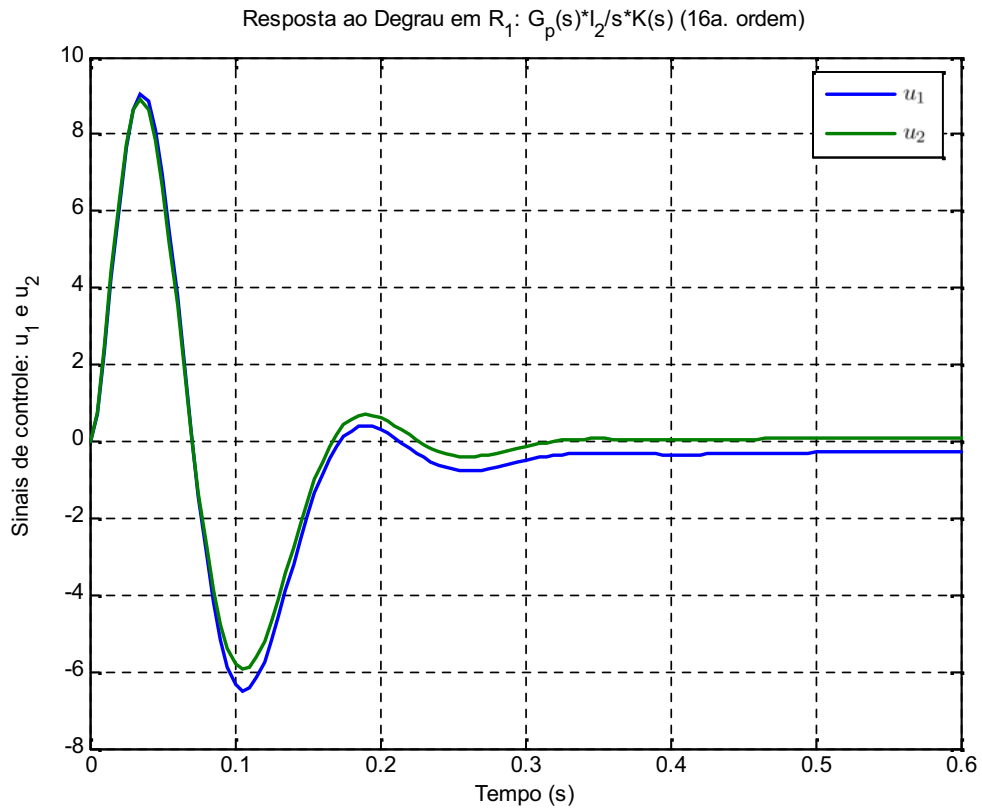


Figura 5.12: Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado em  $R_1$ .

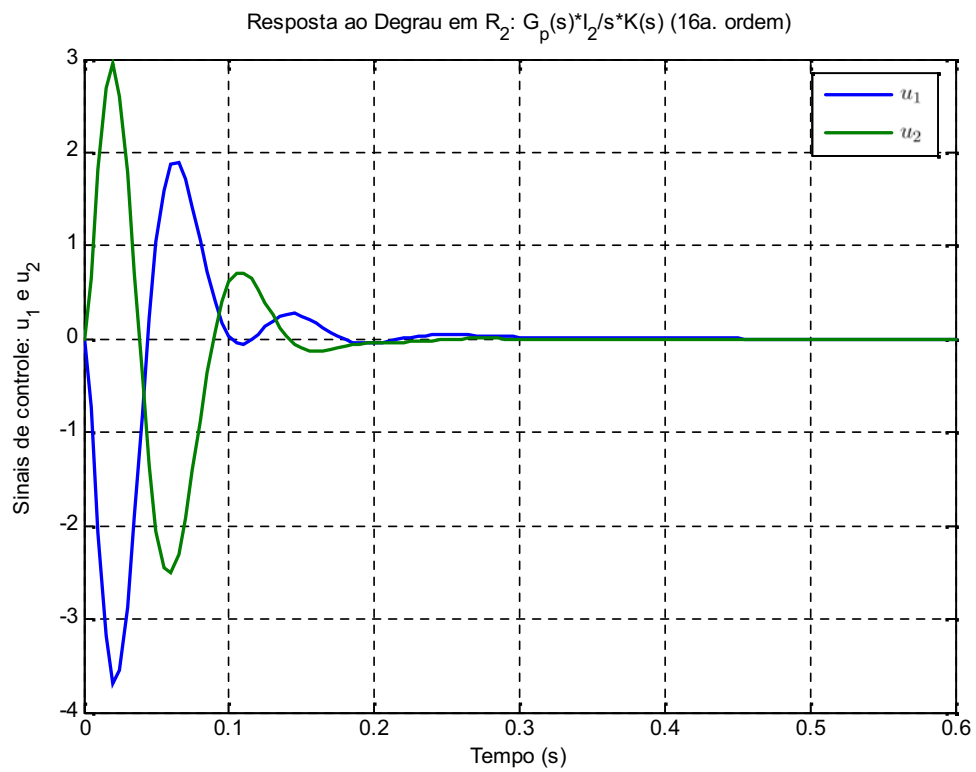


Figura 5.13: Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado em  $R_2$ .

Em busca de explicações para o mau desempenho do controlador em sua ação de controle sobre o sinal de saída  $y_2$ , se investiga os pólos e zeros de transmissão do sistema controlado  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$ , em malha aberta e em malha fechada.

Os pólos do sistema, em malha aberta e malha fechada, são dados na primeira e segunda coluna da Tabela 5.1. Os zeros de transmissão são dados na Tabela 5.2.

MALHA ABERTA	MALHA FECHADA
-3.25027060893014	-29.85178020744585 +70.83874949432644i
0.18842360739602 + 1.05114319629268i	-29.85178020744585 -70.83874949432644i
0.18842360739602 - 1.05114319629268i	-72.01768308306251 +29.29240424709202i
-0.03598660586190	-72.01768308306251 -29.29240424709202i
-20.00000000000000	-18.01266088040982 +40.76066649778833i
-20.00000000000000	-18.01266088040982 -40.76066649778833i
0	-42.49378486875874 +16.31056327536875i
0	-42.49378486875874 -16.31056327536875i
-16.92746831683170 +44.58739153762703i	-3.25027060894508
-16.92746831683170 -44.58739153762703i	-0.18842360741226 + 1.05114319630465i
-27.15867806826291 +74.86287155257108i	-0.18842360741226 - 1.05114319630465i
-27.15867806826291 -74.86287155257108i	-0.03598660581765
-48.58151025526199 +20.14542553583858i	-10.00000000000177
-48.58151025526199 -20.14542553583858i	-9.999999999998951
-80.08509961411141 +35.99142574556296i	-20.00000000000043
-80.08509961411141 -35.99142574556296i	-20.00000000000354

Tabela 5.1: Modos do sistema controlado  $G(s)K(s)$ , em malha aberta e em malha fechada.

-158.153504827192  
-0.035986605627  
-0.169576670248 + 1.002944374652i  
-0.169576670248 - 1.002944374652i  
-3.250270608836  
-20.000000000000  
-20.000000000020

Tabela 5.2: Zeros de transmissão do sistema controlado  $G(s)K(s)$ .

Analisando-se os dados apresentados nessas duas tabelas, observa-se:

- 1) que o controlador  $\bar{K}(s)$  introduz no sistema  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$  seis zeros de transmissão;
- 2) que quatro dos seis zeros de transmissão de  $\bar{K}(s)$ , aqueles que na Tabela 5.2 aparecem em **vermelho**, cancelam perfeitamente os modos estáveis do sistema  $G_p(s)$ , que assim tornam-se fixos (não observáveis ou não controláveis);
- 3) que os outros dois zeros de transmissão de  $\bar{K}(s)$ , aqueles que na Tabela 5.2 aparecem em **azul**, não cancelam os modos instáveis de  $G_p(s)$ , mas ficam localizados em posições “*quase simétricas*”, relativamente ao eixo imaginário do plano-s, em relação aos referidos modos instáveis de  $G_p(s)$ ;
- 4) que os pólos estáveis de  $G_p(s)$  também aparecem como pólos do sistema em malha fechada (resultado totalmente esperado, já que esses pólos tornam-se fixos pelo cancelamento feito pelos zeros de transmissão mencionados no item 2);
- 5) que os pólos instáveis de  $G_p(s)$  aparecem em posições “*perfeitamente simétricas*”, relativamente ao eixo imaginário do plano-s, quando se fecha a malha do sistema.

Com base nessas observações conclui-se que os modos instáveis de  $G_p(s)$ , ao migrarem para o semi-plano esquerdo do plano-s quando se fecha a malha do sistema, ficam situados próximos de zeros de transmissão do controlador  $\bar{K}(s)$ , mas que estes não os cancelam perfeitamente. Por estarem próximos do eixo imaginário esses pólos são mal amortecidos e tornam-se dominantes, sendo assim os responsáveis pelas oscilações da saída  $y_2$  que são mostradas na Figura 5.11.

Para a eliminação ou redução dessas oscilações se tentou dois procedimentos. No primeiro deles aumentou-se o valor do parâmetro de recuperação  $q^2$ , e com isso aumentou-se

a faixa de frequências em que os ganhos principais de  $\bar{T}_{KF}(s)$  e  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$  são iguais, mas ainda assim as oscilações permaneceram. No segundo procedimento aumentaram-se em um mesmo fator multiplicativo os ganhos (de malha direta) de  $\bar{G}(s)\bar{K}(s)$ . Houve uma pequena redução na amplitude das oscilações na frequência de um sexto de Hertz, mas por outro lado houve também o aparecimento de novas oscilações em frequências mais elevadas, que foram excitadas pelo aumento dos ganhos de malha direta.

Em face dessas dificuldades, resolveu-se então investigar a possibilidade de se conseguir o amortecimento das oscilações através da estabilização prévia do sistema a ser controlado antes de se projetar o controlador LQG/LTR definitivo. Os resultados desse estudo são apresentados na próxima seção.

### 5.3 Projeto Completo: Controlador LQG/LTR com Estabilização Prévia do Sistema a Ser Controlado

A abordagem apresentada nesta seção envolve a estabilização prévia da planta  $G_p(s)$  a ser controlada. Essa estabilização é feita através de um pré-compensador dinâmico tradicional, que neste trabalho é denominado de pré-compensador estabilizador. Em seguida projeta-se um controlador do tipo LQG/LTR completo para a planta estabilizada, com adição de integradores, equalização de ganhos e todos os demais detalhes que foram apresentados na seção anterior. Planta e compensador são dispostos conforme mostrado na Figura 5.14.

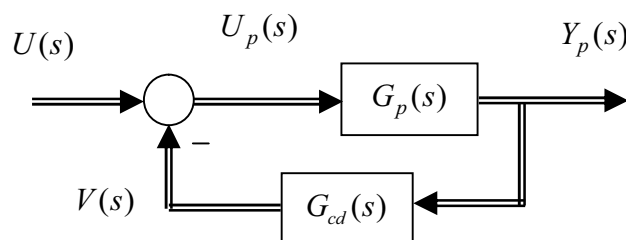


Figura 5.14: Diagrama de blocos do conjunto planta com compensador dinâmico.

### 5.3.1 Projeto do Pré-Compensador Estabilizador

O projeto do pré-compensador estabilizador é feito de acordo com os requisitos e procedimentos apresentados de forma resumida no Capítulo 4. O primeiro passo consiste na determinação de sua ordem, que é obtida de acordo com a Equação (4.6). Aplicando-se nessa equação os índices de controlabilidade ( $n_c$ ) e de observabilidade ( $n_o$ ) do sistema  $G_p(s)$  sob estudos, que são ambos iguais a três, obtém-se que a ordem do pré-compensador estabilizador deve ser igual a dois. O passo seguinte é a determinação das matrizes  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $J$  que de acordo com a Equação (4.4) definem a representação em espaço de estados do pré-compensador estabilizador. Para o cálculo dessas matrizes escolhe-se os pólos desejados para o sistema em malha fechada, considerando-se os seguintes critérios:

- Os dois modos instáveis do sistema são simetricamente refletidos para o semi-plano esquerdo do plano- $s$  e passam a ser posicionados em  $p_{1,2} = -0.2 \pm j1.0511$ .
- Os quatro pólos estáveis do sistema são mantidos em suas posições originais, ou seja, em  $p_3 = -0.036$ ,  $p_4 = -3.2503$ ,  $p_5 = -20$  e  $p_6 = -20$ .
- Os pólos adicionais introduzidos no sistema pelo pré-compensador estabilizador são arbitrariamente posicionados em  $p_7 = -5$  e  $p_8 = -10$ . A escolha desses pólos adicionais é feita com base no simples critério de mantê-los à esquerda e bem afastados dos pólos dominantes do sistema.

Seguindo-se as especificações acima apresentadas, e usando-se as rotinas computacionais disponíveis em [28] para o cálculo de compensadores dinâmicos em geral, obtém-se para o pré-compensador estabilizador o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} -15.78 & -58.23 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y_p \\ v &= \begin{bmatrix} 19.05 & 80.66 \\ 15.52 & 54.92 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1.23 & -1.23 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} y_p.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Adicionando-se este pré-compensador estabilizador à planta  $G_p(s)$  obtém-se a seguinte representação em espaço de estados para o sistema aumentado (planta aumentada):

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_p + B_p J C_p & B_p H \\ G C_p & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_p & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ z \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.24}$$

onde  $A_p$ ,  $B_p$  e  $C_p$  são as matrizes definidas na Equação (5.1). O pré-compensador estabilizador aumenta a ordem da planta de sexta para oitava ordem, e ele também adiciona à planta dois zeros de transmissão que são posicionados em  $z_2 = -5.8882$  e  $z_3 = -9.8887$ .

Para simplificar a notação, no restante deste capítulo a representação em espaço de estados obtida na Equação (5.24) para a planta aumentada é redefinida na forma compactada

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= A_a x_a + B_a u \\ y &= C_a x_a\end{aligned}\tag{5.25}$$

cujas matriz de transferência correspondente é definida por

$$G_a(s) = C_a (sI - A_a)^{-1} B_a.\tag{5.26}$$

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema aumentado, isto é, do conjunto planta mais pré-compensador estabilizador, são mostradas na Figura 5.15. Comparando-se esses ganhos com os ganhos principais da planta isolada, que são mostrados na Figura 5.1, observa-se que eles são essencialmente iguais, e que, portanto, a adição à planta do pré-compensador estabilizador, com pólos em  $p_7 = -5$  e  $p_8 = -10$ , não afeta as características de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema original (a planta).

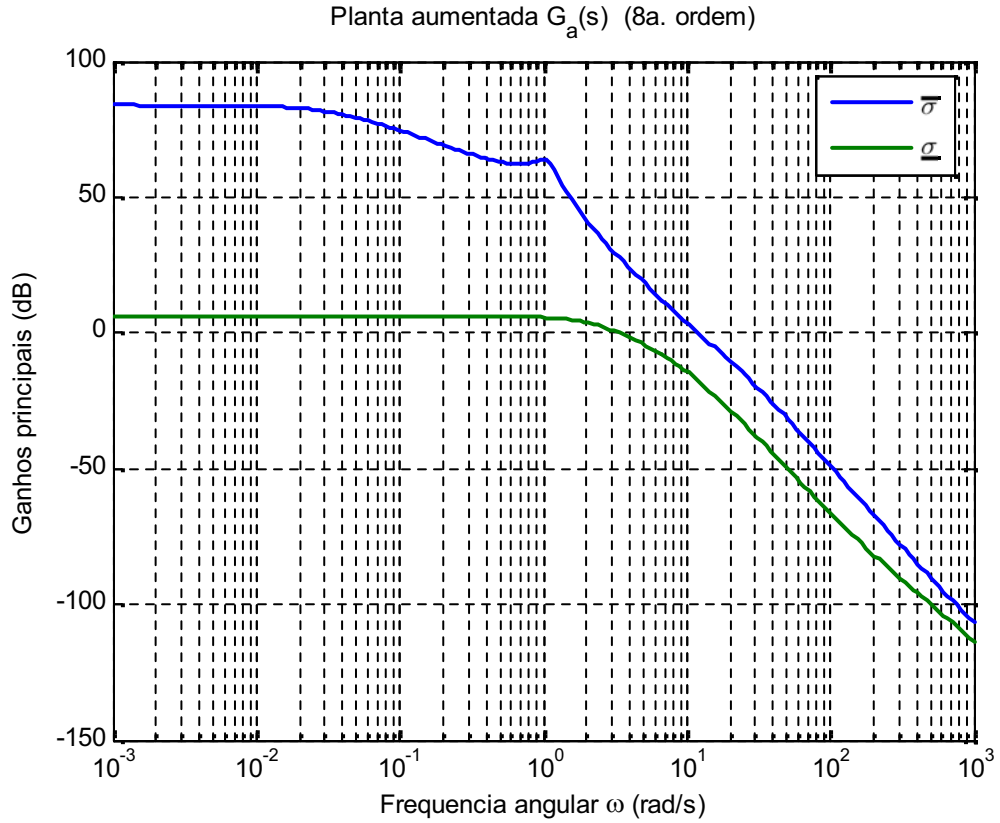


Figura 5.15: Ganhos principais do sistema aumentado planta mais pré-compensador dinâmico.

Após a estabilização da planta, o próximo passo é a realização do projeto do controlador LQG/LTR, o que é feito seguindo-se um roteiro similar ao que foi usado no Projeto Básico apresentação na Seção (5.2). Este roteiro envolve duas etapas. Na primeira projeta-se uma Malha de Referência  $T_{FOL}(s)$  que possua boas características de resposta em frequência. Em seguida, projeta-se o controlador  $K(s)$  de tal forma que a matriz de transferência de malha aberta  $G(s)K(s)$  tenha as mesmas características de  $T_{FOL}(s)$ . Para garantir que a Malha de Referência  $T_{FOL}(s)$  possua boas características de resposta em frequência (precisão estática de suas saídas com relação aos respectivos sinais de referência; capacidade de rejeição de distúrbios externos; habilidade para a filtragem de ruídos de medição; desacoplamento de seus diversos canais; e boa robustez para a acomodação das incertezas associadas com o modelo nominal da planta), é necessária a adição de integradores e a imposição de certas restrições sobre os ganhos principais da matriz  $T_{FOL}(s)$ .

### 5.3.2 Adição de Integradores na Entrada da Planta Aumentada

Os objetivos da adição de integradores em série com a planta aumentada são os mesmos que foram invocados no Projeto Básico, isto é: 1) obter aumento dos ganhos do sistema nas baixas frequências, o que garante ao sistema boa precisão estática (erro em regime permanente nulo) e boa capacidade para rejeição de distúrbios; e 2) possibilitar a equalização dos ganhos principais do sistema, o que é bom para a obtenção do desacoplamento entre os diversos canais de entrada-saída do sistema.

Considerando-se que as incertezas do modelo nominal da planta (aumentada) são representadas na sua saída, então os integradores devem ser colocados na sua entrada, conforme mostrado na Figura 5.16, de onde obtém-se, para o caso específico da planta  $G_a(s)$  que representa o sistema estabilizado, a seguinte relação:

$$U(s) = \frac{I_2}{s} \bar{U}(s) \quad \rightarrow \quad \dot{u} = I_2 \bar{u}. \quad (5.27)$$

Com a inclusão desses dois integradores o sistema aumentado torna-se de décima ordem, e passa a ter a seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ 0_{2 \times 8} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{8 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix} \bar{u} \\ y &= \begin{bmatrix} C_a & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.28)$$

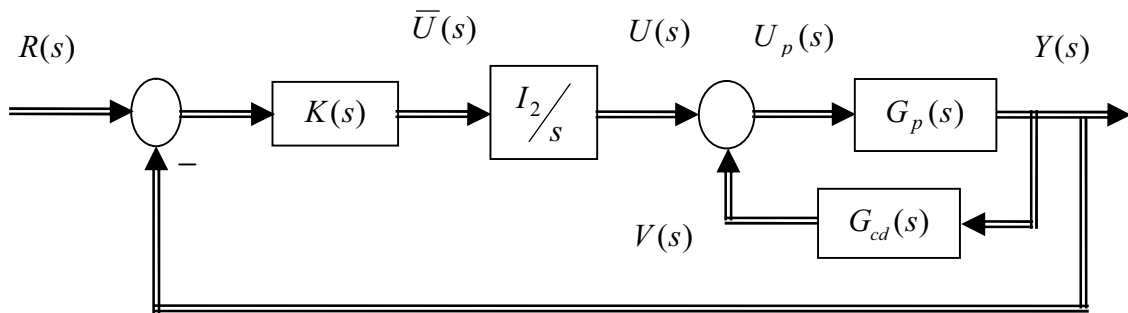


Figura 5.16: Sistema aumentado em malha fechada com integradores e controlador.



onde as matrizes  $A_a$ ,  $B_a$  e  $C_a$  são definidas nas Equações (5.24)-(5.25). Esta representação pode ser compactada na seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_a &= \bar{A}_a \bar{x}_a + \bar{B}_a \bar{u} \\ y &= \bar{C}_a \bar{x}_a\end{aligned}\tag{5.29}$$

de onde obtém-se a seguinte matriz de transferência do sistema aumentado com integradores:

$$\bar{G}_a(s) = \bar{C}_a (sI - \bar{A}_a)^{-1} \bar{B}_a = G_a(s) \frac{I_2}{s}.\tag{5.30}$$

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do conjunto formado pelo sistema aumentado e os integradores adicionados são mostradas na Figura (5.17).

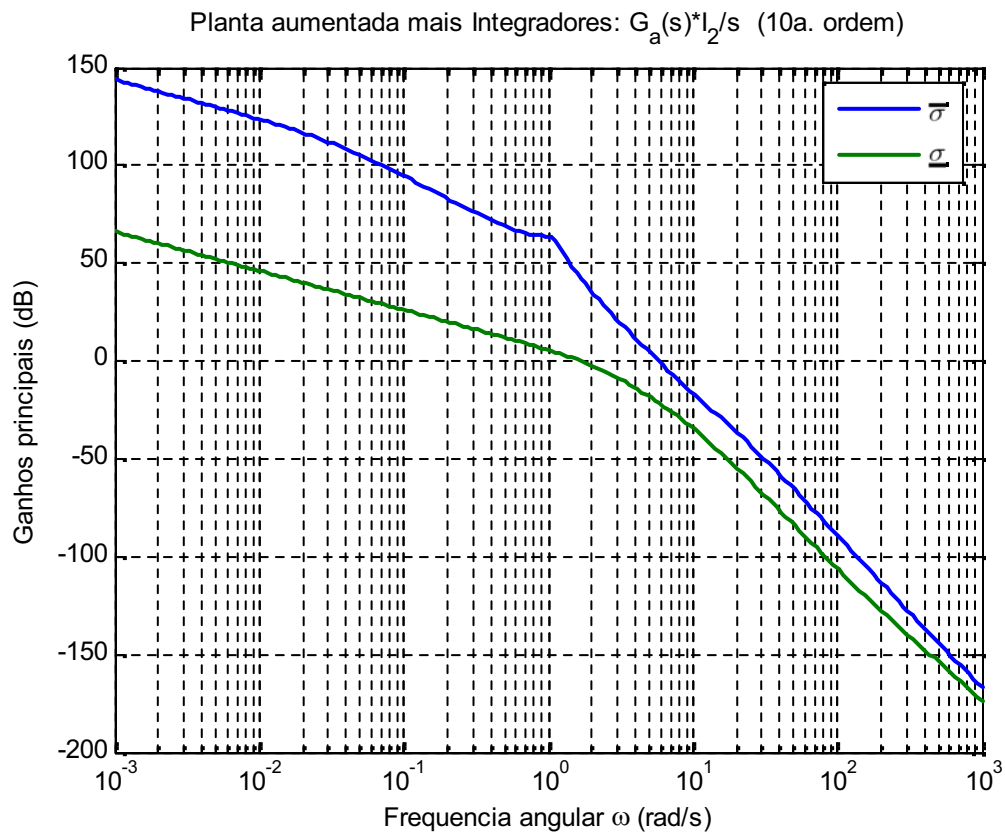


Figura 5.17: Ganhos principais do sistema aumentado após a adição de dois integradores.

### 5.3.3 Projeto da Malha de Referência Aumentada com Equalização de Ganhos

Seguindo-se os procedimentos apresentados na Subseção 3.4.4, tem-se que a estrutura da Malha de Referência para o sistema aumentado definido pelas Equações (5.29)-(5.30) é dada por

$$\bar{T}_{FOL_a}(s) = \bar{C}_a (sI - \bar{A}_a)^{-1} \bar{\Gamma}_a \quad (5.31)$$

e sua completa especificação requer a determinação da matriz  $\bar{\Gamma}_a$ .

Para que haja desacoplamento entre todos os canais de entrada-saída do sistema aumentado, os ganhos principais de  $\bar{T}_{FOL_a}(s)$  devem ser iguais em todas as frequências. Isso pode ser conseguido fazendo-se  $\bar{T}_{FOL_a}(s)$  igual a uma matriz diagonal semelhante à que é dada na Equação (3.50).

Escrevendo-se a Equação (5.31) com o particionamento da Equação (5.28), obtém-se

$$\bar{T}_{FOL_a}(s) = \begin{bmatrix} \bar{C}_a & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_a) & -B_a \\ 0_{2 \times 8} & sI_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{a_1} \\ \bar{\Gamma}_{a_2} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

e daí usa-se a proposta apresentada no livro de Cruz [12] para a seguinte escolha da matriz  $\bar{\Gamma}_a$

$$\bar{\Gamma}_a = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{a_1} \\ \bar{\Gamma}_{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a^{-1} B_a (C_a A_a^{-1} B_a)^{-1} \\ -(C_a A_a^{-1} B_a)^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

que leva a matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL_a}(s)$  dada na Equação (5.31) à seguinte forma diagonal

$$\bar{T}_{FOL_a}(s) = \frac{I_2}{s}. \quad (5.34)$$

Aplicando-se na Equação (5.33) os dados necessários, obtém-se o seguinte resultado para a matriz  $\bar{\Gamma}_a$ :

$$\bar{\Gamma}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0035 & -0.0022 \\ -0.0671 & 0.0414 \\ 0 & 1 \\ -0.2759 & 0 \\ 0.0980 & -0.0001 \\ 0 & 0 \\ 0.0172 & 0.0172 \\ -0.4353 & -0.1594 \\ 0.1547 & 0.0566 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Com este valor a matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL_a}(s)$  assume a forma definida na Equação (5.34). Seus ganhos principais são mostrados na Figura 5.18, onde se observa que eles são perfeitamente iguais em todas as frequências. Nota-se também que a “*frequência de crossover*” é igual a 1 rad/s.

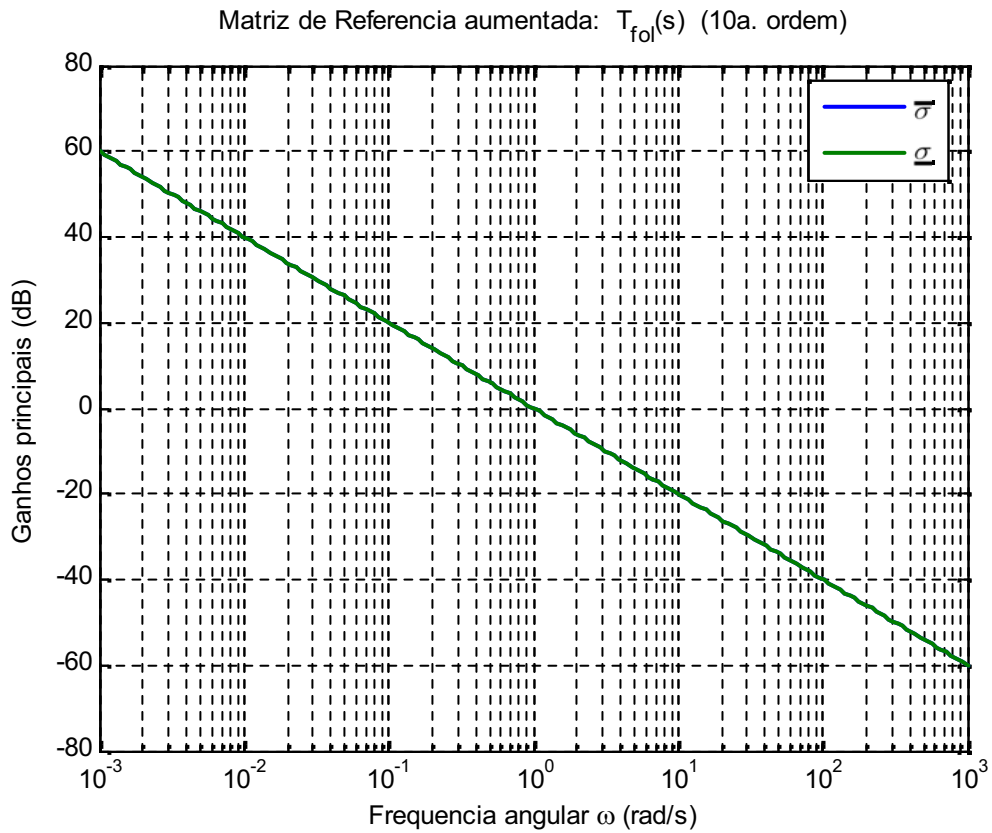


Figura 5.18: Ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL_a}(s)$ .

### 5.3.4 Projeto do Filtro de Kalman para o Sistema Aumentado

Os ganhos principais da matriz de transferência aumentada  $\bar{T}_{KF_a}(s)$  do Filtro de Kalman para o sistema aumentado são relacionados com os ganhos principais da Malha de Referência  $\bar{T}_{FOL_a}(s)$  através da Equação (3.45). Com o auxílio desta equação e da curva mostrada na Figura 5.18 pode-se ajustar o valor do parâmetro escalar  $\mu$  que proporciona à matriz de transferência  $\bar{T}_{KF_a}(s)$  a “*frequência de crossover*” desejada para o sistema. Tal frequência foi especificada na Seção 5.1 como sendo igual a 10 rad/s, e ela é obtida escolhendo-se  $\mu = 0.01$ .

Adaptando-se as Equações (3.13)-(3.15) para o sistema aumentado sob estudo, elas tornam-se

$$K_{f_a} = \frac{1}{\mu} \Sigma_a \bar{C}_a^T \quad (5.36)$$

$$\bar{A}_a \Sigma_a + \Sigma_a \bar{A}_a^T - \frac{1}{\mu} \Sigma_a \bar{C}_a^T \bar{C}_a^T \Sigma_a + Q_{f_a} = 0 \quad (5.37)$$

$$Q_{f_a} = \bar{\Gamma}_a Q_o \bar{\Gamma}_a^T = \bar{\Gamma}_a \bar{\Gamma}_a^T. \quad (5.38)$$

Aplicando-se nessas equações os valores de  $\bar{\Gamma}_a$ , dado pela Equação (5.35), e de  $\mu = 0.01$ , obtém-se o seguinte resultado para a matriz de ganhos do Filtro de Kalman:

$$K_{f_a} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0.0351 & -0.0217 \\ -0.6706 & 0.4142 \\ 0 & 10 \\ -2.7589 & 0.0003 \\ 0.9800 & -0.0014 \\ 0 & 0 \\ 0.1717 & 0.1717 \\ -4.3529 & -1.5937 \\ 1.5472 & 0.5657 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

As características de resposta em frequência dos ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF_a}(s) = \bar{C}_a(sI - \bar{A}_a)^{-1} K_{f_a}$  são mostradas na Figura 5.19, onde se pode notar que: 1) os ganhos principais são iguais em todas as frequências; 2) a especificação para a “*frequência de crossover*” é atendida; 3) os ganhos são altos nas baixas frequências; 4) os ganhos diminuem a uma taxa de 20 dB por década nas altas frequências. Além disso, por ser  $T_{KF_a}(s)$  a matriz de transferência de um filtro de Kalman, ela possui excelentes propriedades de robustez.

Portanto, em face de todas essas boas características, ela serve como modelo a ser emulado pela matriz de transferência  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$  do sistema aumentado controlado em malha aberta.

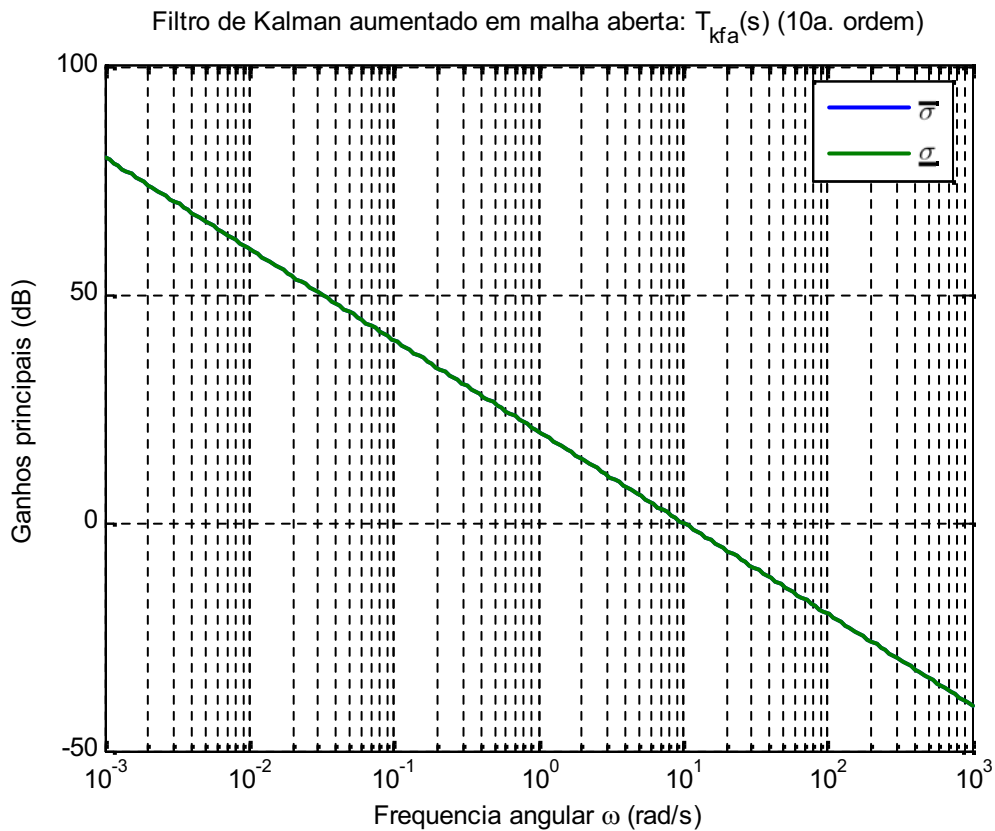


Figura 5.19: Ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF_a}(s)$ .

### 5.3.5 Projeto Final do Controlador Completo do Tipo LQG/LTR

A etapa final na realização do projeto do controlador LQG/LTR é a determinação da matriz de ganhos  $K_{c_a}$  do regulador LQR. Essa determinação leva em conta a necessidade de que a matriz de transferência  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$  emule as características de resposta em frequência da matriz de referência  $\bar{T}_{KF_a}(s)$ . Consegue-se essa emulação através do uso das Equações (3.36)-(3.39) apresentadas na Subseção 3.4.2.

Adaptando-se as referidas equações para o sistema aumentado, obtém-se:

$$\bar{A}_a^T P_a + P_a \bar{A}_a - P_a \bar{B}_a R_{c_a}^{-1} \bar{B}_a^T P_a + Q_{c_a} = 0 \quad (5.40)$$

$$Q_{c_a} = \bar{C}_a^T \bar{C}_a + q^2 \bar{C}_a^T V \bar{C}_a, \quad V = I_2 \quad e \quad q^2 \rightarrow \infty \quad (5.41)$$

$$R_{c_a} = \rho I_2, \quad \rho = 1. \quad (5.42)$$

Usando-se na Equação (5.41) o parâmetro de recuperação com o valor de  $q^2 = 10^8$ , obtém-se o seguinte resultado para a matriz de ganhos do regulador LQR:

$$K_{c_a} = \begin{bmatrix} 6.8385 & 7.1110 \\ -0.2495 & 0.2085 \\ -0.3840 & -0.3607 \\ -7.4664 & 6.6977 \\ 0.5286 & -0.2815 \\ -0.2828 & 0.5440 \\ 1.8222 & 1.2515 \\ 7.9702 & 3.6692 \\ 0.1398 & -0.0401 \\ -0.0401 & 0.1420 \end{bmatrix}^T \times 10^3. \quad (5.43)$$

Esta matriz de ganhos completa o projeto do controlador  $K_a(s)$ , que é de décima ordem.

Observe que os dois integradores que foram adicionados ao sistema são parte do controlador.

A realização em espaço de estados do controlador  $\bar{K}_a(s)$ , do tipo LQG/LTR, e sua respectiva matriz de transferência são respectivamente definidas pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_a &= (\bar{A}_a - \bar{B}_a K_{c_a} - K_{f_a} \bar{C}_a) \hat{x}_a - K_{f_a} (Ref - y) \\ \bar{u} &= -K_{c_a} \hat{x}_a\end{aligned}\quad (5.44)$$

$$\bar{K}_a(s) = K_{c_a} (sI - \bar{A}_a + \bar{B}_a K_{c_a} + K_{f_a} \bar{C}_a)^{-1} K_{f_a}. \quad (5.45)$$

A representação em espaço de estados do sistema controlado é definida pela Equação (3.53), que adaptada para o sistema sob estudo torna-se

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{u} \\ \dot{\hat{x}}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_a & B_a & 0_{8 \times 10} \\ 0_{2 \times 8} & 0_{2 \times 2} & -K_{c_a} \\ 0_{10 \times 8} & 0_{10 \times 2} & \bar{A}_a - \bar{B}_a K_{c_a} - K_{f_a} \bar{C}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ u \\ \hat{x}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{8 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \\ -K_{f_a} \end{bmatrix} (Ref - y) \\ y &= \begin{bmatrix} C_a & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ u \\ \hat{x}_a \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (5.46)$$

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais de  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$ , ou seja, do sistema controlado em malha aberta, são as duas curvas inferiores mostradas na Figura 5.20. Nota-se que, até uma frequência de aproximadamente 40 rad/s, essas curvas acompanham os ganhos da matriz  $\bar{T}_{KF_a}(s)$ . Acima dessa frequência, os ganhos de  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$  decrescem mais rapidamente do que os ganhos de  $\bar{T}_{KF_a}(s)$ . Isso é bom para melhorar a filtragem de ruídos eventualmente presentes nos sinais de saída do sistema que são realimentados.

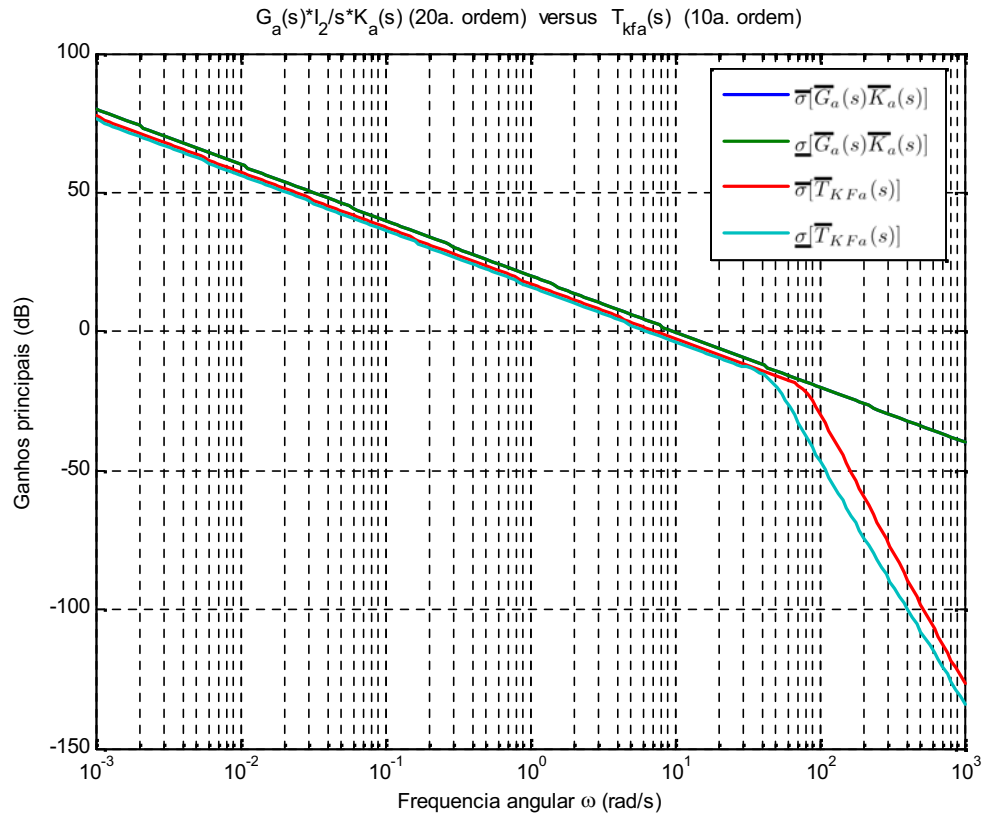


Figura 5.20: Ganhos principais de  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$  versus ganhos principais de  $\bar{T}_{KF_a}(s)$ .

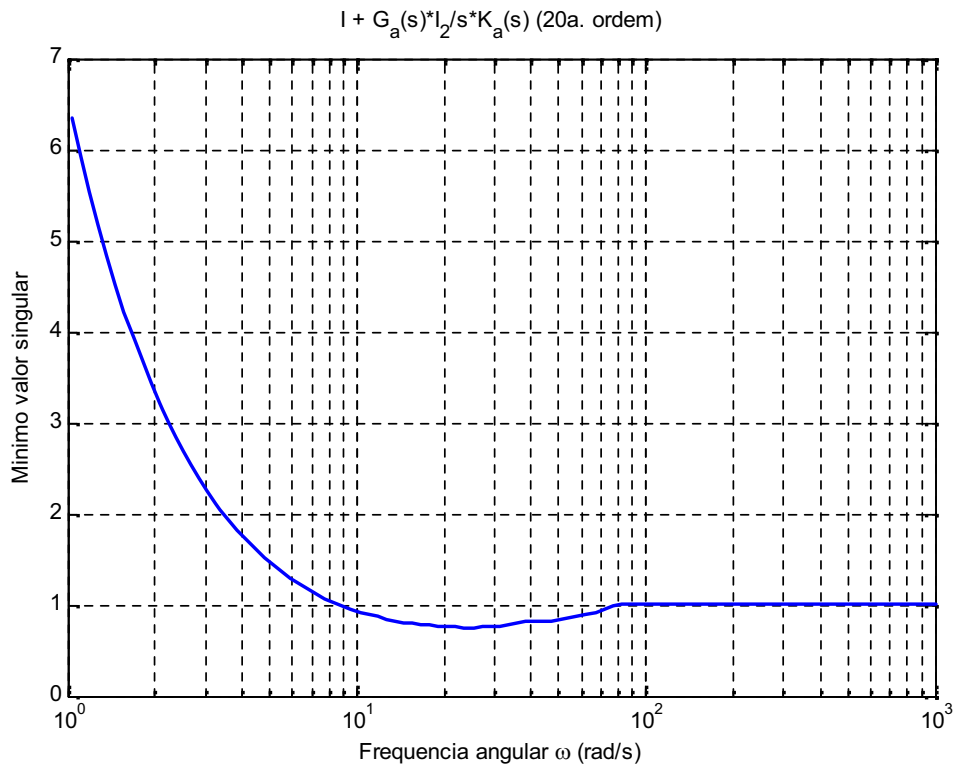


Figura 5.21: Ganho principal inferior da matriz  $I + \bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$ .



Para a verificação das margens de ganho e fase do sistema controlado usa-se a curva de resposta em frequência do ganho principal inferior da matriz  $I + \overline{G}_a(s)\overline{K}_a(s)$  que é mostrada na Figura 5.21. Nela verifica-se que o parâmetro  $\alpha_0$ , definido na Equação (2.14), tem o valor de  $\alpha_0 = 0.7527$ . Usando-se este resultado nas Equações (2.12)-(2.13) obtém-se as seguintes margens:

$$\begin{aligned} 0.5705 &< MG < 4.0440 \\ -44.2166^\circ &< MF < 44.2166^\circ. \end{aligned} \tag{5.47}$$

### 5.3.6 Análise do Desempenho do Controlador com Pré-compensador Estabilizador

O desempenho do sistema controlado com o auxílio do pré-compensador estabilizador pode ser analisado através das curvas mostradas na Figura 5.22 e na Figura 5.23, que apresentam as duas saídas do sistema em resposta a referências do tipo degrau unitário aplicadas separadamente nas referências  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente.

Comparando-se a Figura 5.22 com a Figura 5.10 verifica-se que o Controlador Básico (sem estabilização prévia da planta) e o Controlador Completo (com a estabilização prévia da planta) possuem desempenhos perfeitamente similares no que se refere ao controle do primeiro sinal de saída da planta. Observe que, em ambos os casos: 1) que as saídas do sistema são perfeitamente desacopladas; 2) que a saída  $y_2$  permanece no seu valor de referência; 3) que a saída  $y_1$  converge, em regime permanente, para o seu respectivo valor de referência; e 4) que a resposta transitória da saída  $y_1$  é excelente – rápida e sem oscilações.

A Figura 5.24 e a Figura 5.25 apresentam os sinais de controle produzidos pelo Controlador Completo nas saídas dos integradores adicionados na entrada da planta quando se aplica um sinal de referência do tipo degrau unitário em  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente.

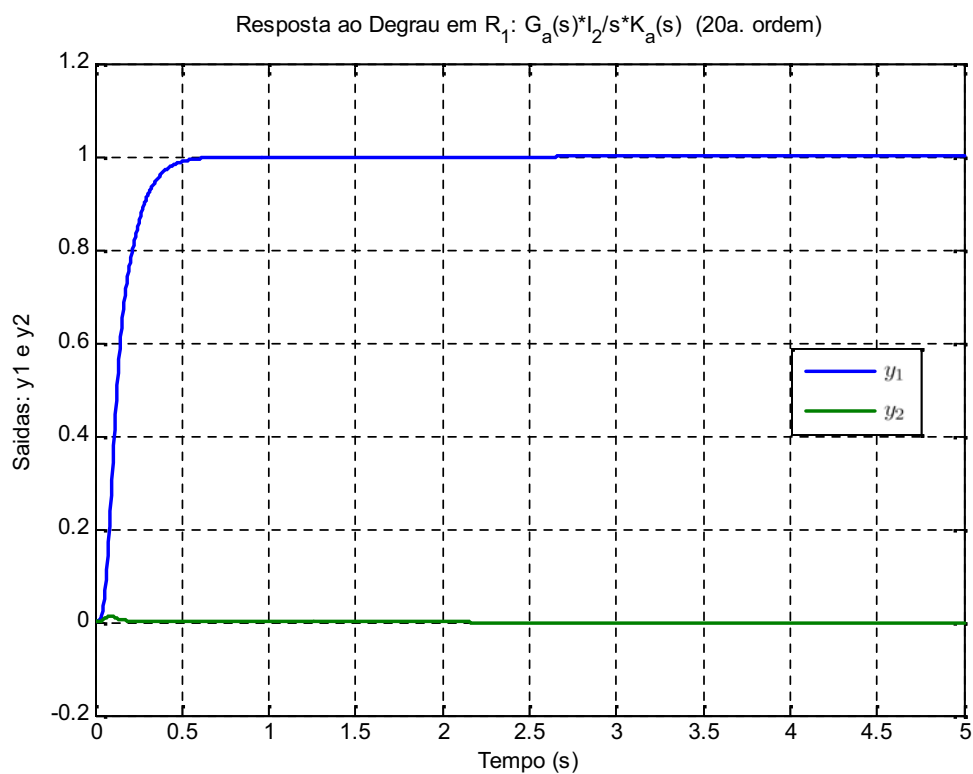


Figura 5.22: Saídas do sistema com pré-compensador estabilizador em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado na referência  $R_1$ .

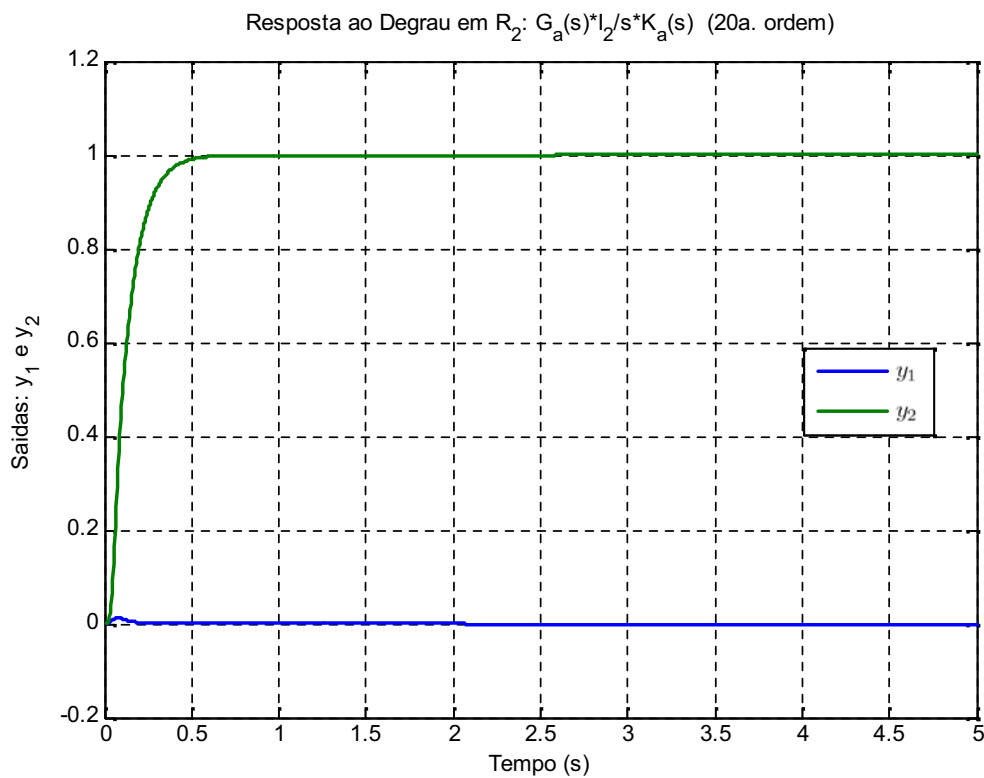


Figura 5.23: Saídas do sistema com pré-compensador estabilizador em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado na referência  $R_2$ .

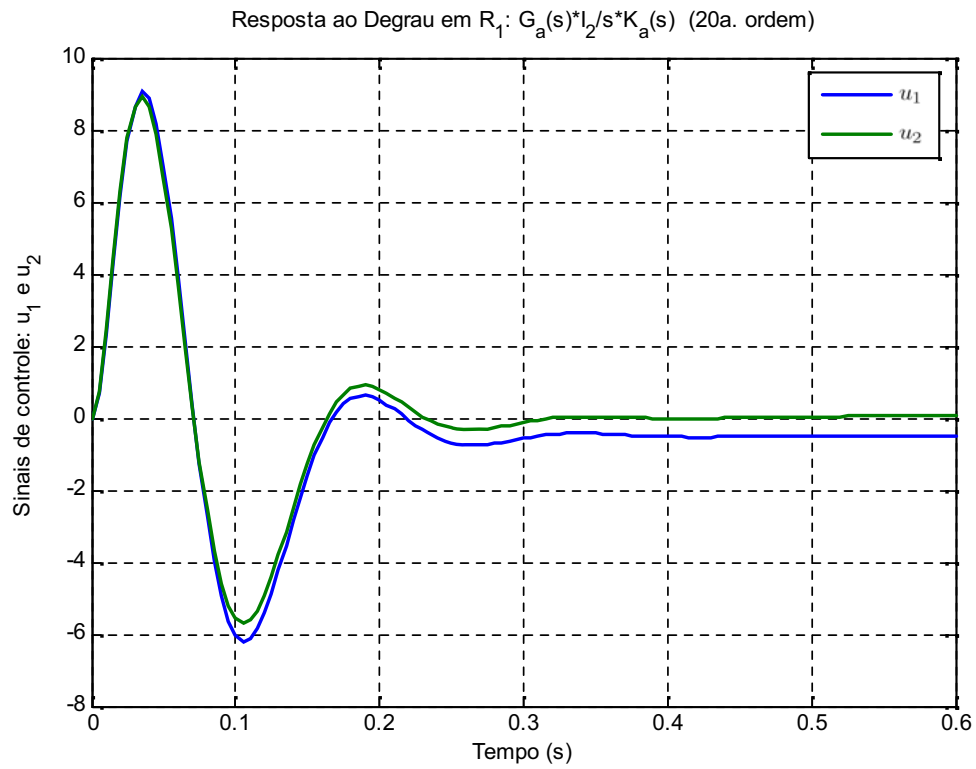


Figura 5.24: Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado na referência  $R_1$ .

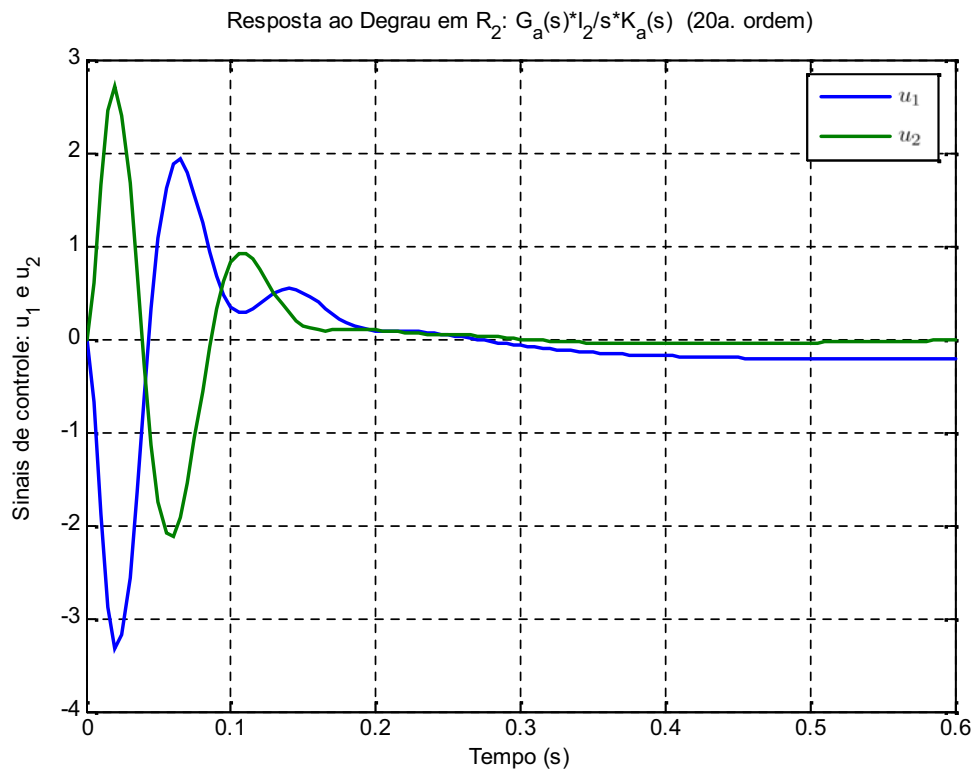


Figura 5.25: Sinais de controle atuantes na planta em resposta a uma referência do tipo degrau unitário aplicado na referência  $R_2$ .

Comparando-se a Figura 5.24 com a Figura 5.12, observa-se que os sinais de controle que atuam na planta controlada, sem e com pré-compensador estabilizador, são perfeitamente similares quando se aplica um sinal do tipo degrau unitário na referência  $R_1$ .

Comparando-se a Figura 5.23 com a Figura 5.11 verifica-se que o Controlador Completo (com estabilização prévia da planta) apresenta um desempenho significativamente superior em comparação com o desempenho do Controlador Básico (sem a estabilização prévia da planta) no que se refere ao controle do segundo sinal de saída da planta. Observe que a oscilação de baixa frequência e mal amortecida que havia no caso do Controlador Básico desaparece completamente no caso do Controlador Completo.

Comparando-se a Figura 5.25 com a Figura 5.13, observa-se que os sinais de controle que atuam na planta controlada, sem e com pré-compensador estabilizador, apresentam consideráveis diferenças quando se aplica um sinal do tipo degrau unitário na referência  $R_2$ . Observe que as diferenças ocorrem principalmente em regime permanente.

Em busca de explicações para o melhor desempenho do Controlador Completo em relação ao desempenho do Controlador Básico, em especial em sua ação de controle sobre o sinal de saída  $y_2$ , investiga-se os pólos e zeros de transmissão do sistema controlado  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$ , em malha aberta e em malha fechada.

Os pólos do sistema, em malha aberta e em malha fechada, são apresentados na primeira coluna e na segunda coluna da Tabela 5.3, respectivamente. Em **vermelho** (**azul marinho**) estão os pólos originais da planta que **não foram** (**foram**) reposicionados pelo pré-compensador estabilizador. Em **azul anil** estão os pólos que foram adicionados à planta pelo pré-compensador estabilizador. Todos esses pólos aparecem nas duas colunas da Tabela 5.3, e portanto, **eles são fixos**, havendo para cada um deles um zero de transmissão que o cancela.

Os zeros de transmissão do sistema são apresentados na Tabela 5.4.

MALHA ABERTA	MALHA FECHADA
-9.9999999999995	-29.86097034947678 +70.83325398934015i
-5.00000000000031	-29.86097034947678 -70.83325398934015i
-3.25029999999940	-72.01582460231660 +29.30129043702065i
<b>-0.19999999999970 + 1.05109999999974i</b>	-72.01582460231660 -29.30129043702065i
<b>-0.19999999999970 - 1.05109999999974i</b>	-17.96433404198194 +40.80453929875996i
-0.036000000000087	-17.96433404198194 -40.80453929875996i
-20.00000000000025	-42.48836970904962 +16.26414763344123i
-19.99999999999992	-42.48836970904962 -16.26414763344123i
0	-5.88815529471981
0	-5.00000000007908
-27.36272675632194 +74.53370787918264i	-3.25029999992821
-27.36272675632194 -74.53370787918264i	<b>-0.19999999999417 + 1.051100000000753i</b>
-16.88656091415259 +44.61608845494540i	<b>-0.19999999999417 - 1.051100000000753i</b>
-16.88656091415259 -44.61608845494540i	-9.88897277376168
-79.51564386229104 +35.55672021889930i	-0.036000000003878
-79.51564386229104 -35.55672021889930i	-20.00000000000220 + 0.00000544866979i
-48.56468484665556 +20.11224271819584i	-20.00000000000220 - 0.00000544866979i
-48.56468484665556 -20.11224271819584i	-10.00000001713432 + 0.00005907257840i
-5.88816974155778	-10.00000001713432 - 0.00005907257840i
-9.88872300800134	-9.99999999996239

Tabela 5.3: Modos do sistema controlado  $\overline{G}_a(s)\overline{K}_a(s)$ , em malha aberta e em malha fechada.

-158.153504827192
-20.0000000000027 + 0.000008443786i
-20.0000000000027 - 0.000008443786i
-0.0359999999871
<b>-0.2000000000248 + 1.0510999999884i</b>
<b>-0.2000000000248 - 1.0510999999884i</b>
-9.9999999999794
-9.888724692124
-3.2502999999066
-5.0000000000747
-5.888165307876

Tabela 5.4: Zeros de transmissão do sistema controlado  $\overline{G}_a(s)\overline{K}_a(s)$ .

Analisando-se os dados apresentados na Tabela 5.3 e na Tabela 5.4, observa-se:

- 1) que o controlador  $\bar{K}_a(s)$  introduz no sistema  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_a(s)$  oito zeros de transmissão;
- 2) que seis dos oito zeros de transmissão de  $\bar{K}_a(s)$ , aqueles que na Tabela 5.4 aparecem em **vermelho** e **azul marinho**, cancelam perfeitamente os quatro modos estáveis da planta original  $G_p(s)$  e os seus dois modos instáveis que foram reposicionados pelo pré-compensador dinâmico no semi-plano esquerdo do plano-s, que assim tornam-se fixos (não observáveis ou não controláveis);
- 3) que os outros dois zeros de transmissão de  $\bar{K}_a(s)$ , aqueles que aparecem na Tabela 5.4 em **azul anil**, cancelam os modos adicionados à planta  $G_p(s)$  pelo pré-compensador estabilizador, que assim também tornam-se fixos (não observáveis ou não controláveis);
- 4) que os pólos da planta aumentada  $G_a(s)$  também aparecem como pólos do sistema em malha fechada (resultado totalmente esperado, já que esses pólos tornam-se fixos pelo cancelamento feito pelos zeros de transmissão mencionados nos itens 2 e 3);
- 5) que em malha fechada, os dois zeros de transmissão adicionados à planta pelo pré-compensador estabilizador cancelam dois dos dez pólos do controlador  $\bar{K}_a(s)$ .

Com base nessas observações verifica-se que todos os modos da planta original, tanto os quatro que eram estáveis como também os dois que foram estabilizados pelo pré-compensador estabilizador, são perfeitamente cancelados pelo controlador  $\bar{K}_a(s)$ . É por esta razão que o desempenho do Controlador Completo (o que usa a estabilização prévia da planta) mostra-se superior ao desempenho do Controlador Básico (o que não usa a estabilização prévia da planta).

O lado negativo do Controlador Completo é a sua ordem elevada – décima quarta ordem quando se considera todos os elementos dinâmicos que são adicionados à planta (pré-compensador dinâmico de segunda ordem, dois integradores na entrada da planta aumentada e mais o controlador  $\bar{K}_a(s)$  que é de décima ordem).

## 5.4 Conclusões

Neste capítulo foi abordado o problema do projeto de controladores robustos do tipo LQG/LTR para sistemas multivariáveis instáveis, com ênfase especial para o caso de sistemas cujos modos instáveis ficam situados nas proximidades do eixo imaginário.

O problema foi abordado de duas maneiras diferentes. Na primeira abordagem projetou-se um controlador do tipo LQG/LTR, denominado de Controlador Básico, no qual se considerou todos os recursos do método LQG/LTR (adição de integradores, equalização de ganhos e etc.), mas que mesmo assim não conseguiu eliminar certas oscilações presentes no sistema. A análise dos resultados levou à conclusão de que essas oscilações são relacionadas à natureza instável do sistema sob consideração.

Na segunda abordagem projetou-se um novo controlador do tipo LQG/LTR, denominado de Controlador Completo, no qual o sistema instável a ser controlado foi previamente estabilizado através do uso de um pré-compensador estabilizador, que foi projetado na forma de um compensador dinâmico tradicional. O Controlador Completo apresentou um desempenho superior em relação ao Controlador Básico, principalmente no que se refere à eliminação das oscilações de baixa frequência que o Controlador Básico não deu conta de eliminar.

Comparando-se as dimensões dos dois controladores, verifica-se que o Controlador Básico é de décima ordem, enquanto que o Controlador Completo é de décima quarta ordem.

Este aumento na ordem do Controlador Completo em relação à ordem do Controlador Básico constitui o preço que se paga para se obter um controlador que proporcione um excelente desempenho ao sistema controlado.

A ordem excessiva do Controlador Completo de ótimo desempenho abre espaço para o questionamento sobre a possibilidade de se projetar um novo controlador que também apresente bom desempenho e ao mesmo tempo seja de ordem menor. Esta questão interessante é abordada no capítulo seguinte desta tese.



## **Capítulo 6: Projeto de Controlador LQG/LTR de Ordem Reduzida com Uso de Pré-Compensador Dinâmico**

No capítulo anterior foi apresentado um estudo de caso envolvendo a questão do projeto de controladores do tipo LQG/LTR para um sistema multivariável com um par de pólos complexos conjugados e instáveis situados nas proximidades do eixo imaginário do plano-s. Constatou-se que a estabilização prévia do sistema, feita através de um pré-compensador dinâmico estabilizador, contribui positivamente para que o controlador LQG/LTR, projetado após a estabilização do sistema, apresente um desempenho dinâmico muito superior em comparação com o desempenho do controlador LQG/LTR projetado sem a estabilização prévia do sistema controlado.

A desvantagem dessa estratégia de estabilização prévia do sistema controlado, é o aumento da dimensão (ordem) da planta, decorrente do acréscimo do pré-compensador dinâmico estabilizador. Por sua vez, o projeto do controlador LQG/LTR feito com base nesta planta aumentada também resulta em um controlador de maior dimensão. Tudo isso somado faz com que o controlador final projetado seja de ordem muito elevada.

Para minimizar este problema relacionado com a ordem excessiva do controlador, este capítulo focaliza a questão do projeto de controladores do tipo LQG/LTR feito com base em uma representação de ordem reduzida do sistema controlado. O enfoque apresentado é direcionado para o sistema que foi usado no estudo de caso apresentado no capítulo anterior. O grande objetivo é obter um controlador de ordem reduzida (em comparação com a ordem do controlador obtido no Projeto Completo do capítulo anterior) mas que, não obstante sua

menor dimensão, apresente um desempenho dinâmico que não seja significativamente inferior ao do controlador obtido no referido Projeto Completo.

Para efeito de redução da ordem do modelo do sistema considerado explora-se a seguinte característica intrínseca que ele apresenta: as suas saídas independem de algumas variáveis de estado do sistema (duas variáveis), as quais independem de todas as demais variáveis do vetor de estados.

Essa característica possibilita a redução de ordem do modelo do sistema controlado em duas etapas distintas do projeto do controlador. Na primeira etapa reduz-se a ordem do sistema para que ele possa ser estabilizado por um pré-compensador dinâmico de ordem reduzida. Na segunda etapa, que é referente ao projeto do controlador LQG/LTR, reduz-se a ordem do sistema aumentado (planta mais compensador dinâmico de ordem reduzida) para que o referido controlador LQG/LTR seja também de ordem reduzida.

Por ser um meio termo entre o Controlador Completo (que estabiliza a planta previamente) e o Controlador Básico (que não estabiliza a planta), os quais são projetados sem redução na ordem da planta, o controlador de ordem reduzida apresentado neste capítulo é denominado de Controlador Intermediário.

## **6.1 Projeto Intermediário: Controlador LQG/LTR de Ordem Reduzida com Estabilização Prévia da Planta**

A abordagem apresentada nesta seção envolve a estabilização prévia da planta  $G_p(s)$  a ser controlada, que é feita mediante a utilização de um pré-compensador dinâmico de ordem reduzida. A planta considerada é a mesma do capítulo anterior, cujo modelo em espaço de estados é definido pela Equação (5.1). Nesta equação observa-se que as saídas do sistema não

dependem das variáveis de estado  $x_{p_5}$  e  $x_{p_6}$ , as quais independem das demais variáveis ( $x_{p_1}$  a  $x_{p_4}$ ) do vetor de estados do sistema. Com base nesta observação, e por razões de conveniência, pode-se substituir a Equação (5.1) pela seguinte forma particionada equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{or_1} \\ \dot{x}_{or_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{or} & B_{or} \\ 0_{2 \times 4} & -20I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{or_1} \\ x_{or_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ 20I_2 \end{bmatrix} u \quad (6.1a)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_{or} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{or_1} \\ x_{or_2} \end{bmatrix}$$

onde  $x_{or_1} = [x_{p_1} \ x_{p_2} \ x_{p_3} \ x_{p_4}]^T$  e  $x_{or_2} = [x_{p_5} \ x_{p_6}]^T$ , (6.1b)

e as matrizes  $A_{or}$ ,  $B_{or}$  e  $C_{or}$  são as seguintes partições da matriz  $A_p$ , as duas primeiras, e da matriz  $C_p$ :

$$A_{or} = \begin{bmatrix} -0.0853 & -0.0001 & -0.9994 & 0.0414 \\ -46.8600 & 2.7570 & 0.3896 & 0 \\ -0.4248 & -0.0622 & -0.0671 & 0 \\ 0 & 1 & 0.0523 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1c)$$

$$B_{or} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1862 \\ -124.3000 & 128.6000 \\ -8.7920 & -20.4600 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_{or} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1d)$$

A partir da Equação (6.1) pode-se obter o diagrama de blocos da planta  $G_p(s)$  na forma mostrada na Figura 6.1, onde  $G_{or}(s)$  é a matriz de transferência da realização  $\{A_{or}, B_{or}, C_{or}\}$ .

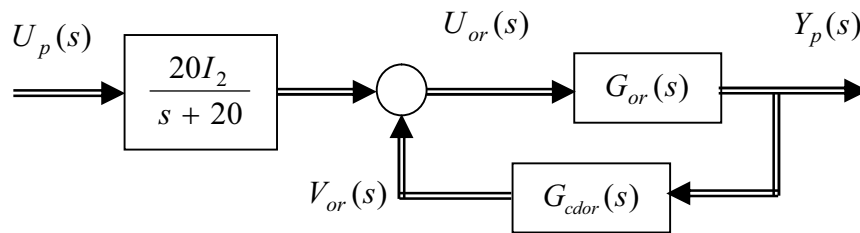


Figura 6.1: Diagrama de blocos da planta com compensador dinâmico de ordem reduzida.

Nesta figura também aparece o compensador dinâmico  $G_{cdor}(s)$  que é um compensador de ordem reduzida. Seu projeto é feito com base no sub-sistema  $G_{or}(s)$  que é uma parte (menor e/ou de ordem reduzida) integrante da planta completa  $G_p(s)$ . Neste ponto é importante que se ressalte que os modos instáveis da planta  $G_p(s)$  estão devidamente agregados na planta reduzida  $G_{or}(s)$ . Isso permite que se estabilize a planta  $G_p(s)$  mediante a estabilização da planta reduzida  $G_{or}(s)$ .

### **6.1.1 Projeto do Pré-Compensador Estabilizador de Ordem Reduzida**

A estabilização da planta  $G_p(s)$  a ser controlada é feita através da estabilização da planta reduzida  $G_{or}(s)$ . Por sua vez, a estabilização da planta reduzida  $G_{or}(s)$  é feita através de um compensador dinâmico, que possui ordem reduzida em relação ao compensador projetado na Sub-seção 5.3.1 do capítulo anterior, e que, por essa razão, neste trabalho é denominado de pré-compensador estabilizador de ordem reduzida.

O projeto do pré-compensador estabilizador de ordem reduzida é feito de acordo com os requisitos e procedimentos apresentados de forma resumida no Capítulo 4. O primeiro passo consiste na determinação de sua ordem, que é obtida de acordo com a Equação (4.6). Aplicando-se nessa equação os índices de controlabilidade ( $n_c$ ) e de observabilidade ( $n_o$ ) do sistema de ordem reduzida  $G_{or}(s)$  sob estudo, que são ambos iguais a dois, obtém-se que a ordem do pré-compensador estabilizador deve ser igual a um. O passo seguinte é a determinação das matrizes  $F_{or}$ ,  $G_{or}$ ,  $H_{or}$  e  $J_{or}$  que de acordo com a Equação (4.4) definem a representação em espaço de estados do pré-compensador estabilizador. Para o cálculo dessas matrizes escolhe-se os pólos desejados para o sistema em malha fechada, considerando-se os seguintes critérios:

- Os dois modos instáveis do sistema de ordem reduzida são simetricamente refletidos para o semi-plano esquerdo do plano-s e passam a ser posicionados em  $p_{1,2} = -0.1884 \pm j1.0511$ .
- Os dois pólos estáveis do sistema de ordem reduzida são mantidos em suas posições originais, ou seja, em  $p_3 = -0.036$ ,  $p_4 = -3.2503$ .
- O pólo adicional introduzido no sistema de ordem reduzida pelo pré-compensador estabilizador de ordem reduzida é arbitrariamente posicionado em  $p_5 = -5$ . A escolha desse pólo adicional é feita com base no simples critério de mantê-lo à esquerda e bem afastado dos pólos dominantes do sistema de ordem reduzida.

Seguindo-se as especificações apresentadas, e usando-se as rotinas computacionais disponíveis em [28] para o cálculo de compensadores dinâmicos em geral, obtém-se para o pré-compensador estabilizador de ordem reduzida o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{or} &= -5.7466 z_{or} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} y_p \\ v_{or} &= \begin{bmatrix} 0.3716 \\ 0.9979 \end{bmatrix} z_{or} + \begin{bmatrix} -0.0992 & 0 \\ -0.1626 & 0 \end{bmatrix} y_p. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Colocando-se este pré-compensador estabilizador de ordem reduzida  $G_{cdor}(s)$  na posição indicada na Figura 6.1, obtém-se a seguinte representação em espaço de estados para o sistema aumentado (planta aumentada):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{or_1} \\ \dot{z}_{or} \\ \dot{x}_{or_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{or} + B_{or} J_{or} C_{or} & B_{or} H_{or} & I_2 \\ G_{or} C_{or} & F_{or} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 1} & -20I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{or_1} \\ z_{or} \\ x_{or_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ 0_{1 \times 2} \\ 20I_2 \end{bmatrix} u \quad (6.3) \\ y &= \begin{bmatrix} C_{or} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{or_1} \\ z_{or} \\ x_{or_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Essa equação representa a planta a ser controlada  $G_p(s)$  estabilizada pelo pré-compensador dinâmico estabilizador de ordem reduzida  $G_{cdor}(s)$ .

O acréscimo do pré-compensador dinâmico de ordem reduzida aumenta a ordem da planta de seis para sete, isto é, uma unidade a menos do que o sistema estabilizado no Projeto Completo da Seção 5.3. Também adiciona à planta aumentada um zero de transmissão que é posicionado em  $z_2 = -5.7245$ .

Para simplificar a notação, no restante deste capítulo adota-se a seguinte representação compactada para o modelo em espaço de estados da planta aumentada, que é dado pela Equação (6.3):

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= A_a x_a + B_a u \\ y &= C_a x_a.\end{aligned}\tag{6.4}$$

A matriz de transferência correspondente é definida por

$$G_a(s) = C_a (sI - A_a)^{-1} B_a.\tag{6.5}$$

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema aumentado, isto é, do conjunto planta mais pré-compensador estabilizador de ordem reduzida, são mostradas na Figura 6.2. Comparando-se esses ganhos com os ganhos principais da planta original, que são mostrados na Figura 5.1, observa-se que eles são essencialmente iguais, e que, portanto, a adição à planta do pré-compensador estabilizador de ordem reduzida, que adiciona ao sistema um pólo em  $p_7 = -5$  e um zero de transmissão em  $z_2 = -5.7245$ , não afeta as características de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema original (a planta).

Após a estabilização da planta o próximo objetivo é a realização do projeto de um controlador LQG/LTR de ordem reduzida. Isso requer a substituição do modelo da planta aumentada  $G_a(s)$  por outro modelo de menor ordem. Este procedimento é mostrado a seguir.

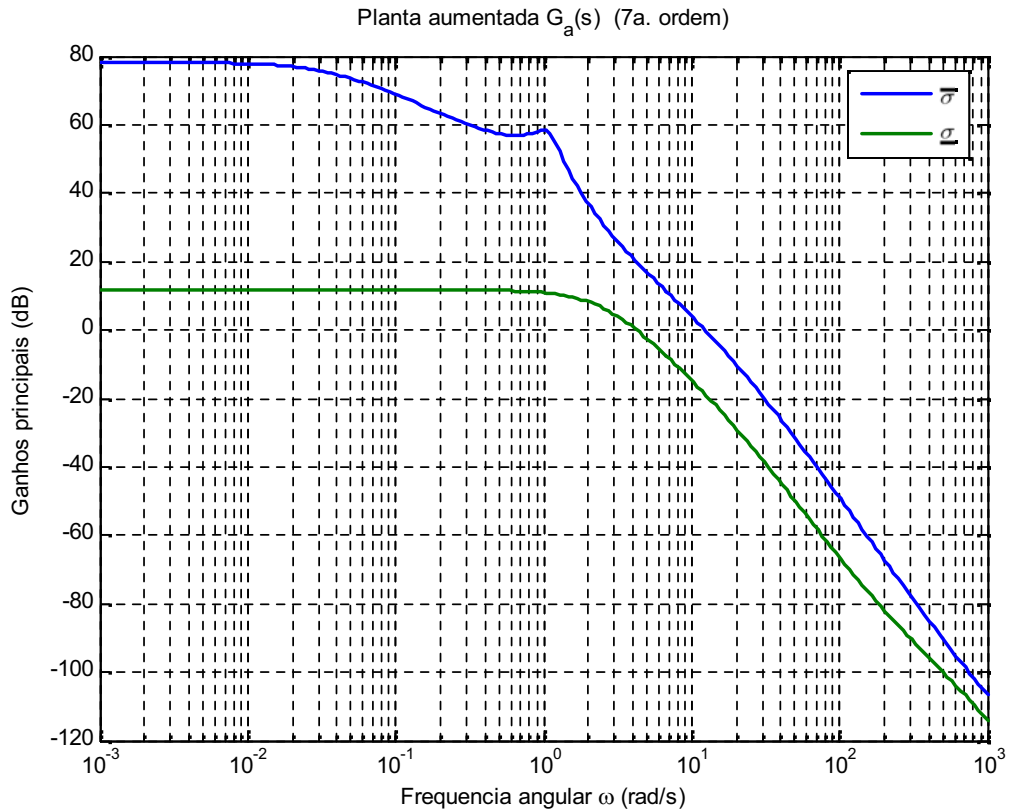


Figura 6.2: Ganhos principais da planta aumentada com estabilizador de ordem reduzida.

### 6.1.2 Obtenção de Modelo de Ordem Reduzida da Planta Aumentada

Existem inúmeros métodos para a obtenção de modelos de ordem reduzida de sistemas lineares [32]-[33]. Neste trabalho utiliza-se o método da agregação, de Aoki [34]-[35]. Este método utiliza técnicas de decomposição modal para identificar os modos dominantes do modelo original do sistema, os quais, em seguida, são “agregados” (isto é, “incluídos”) no modelo de ordem reduzida que se deseja obter. Com relação aos demais modos do sistema, os não-dominantes – aqueles que são rápidos e/ou apresentam pouca ou nenhuma influência sobre a dinâmica do sistema, eles são simplesmente desprezados.

A aplicação deste método para simplificação do modelo da planta aumentada  $G_a(s)$ , cuja representação em espaço de estados é definida pela Equação (6.3), é apresentada a seguir.

A realização em espaço de estados da planta aumentada  $G_{\underline{a}}(s)$  é definida pela Equação (6.4), cujas matrizes tem os seguinte valores:

$$A_{\underline{a}} = \begin{bmatrix} -0.1145 & -0.0001 & -0.9994 & 0.0414 & 0.1790 & 0 & 0.1862 \\ -54.8787 & -2.7570 & 0.3896 & 0 & 78.6463 & -124.30 & 128.6 \\ 3.6454 & -0.0622 & -0.0671 & 0 & -22.8564 & -8.7920 & -20.46 \\ 0 & 1 & 0.0523 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5.7245 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

$$B_{\underline{a}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_{\underline{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Esse sistema possui dois zeros de transmissão, que ficam posicionados em  $z_1 = -158.15$  e  $z_2 = -5.7245$ , e os seguintes modos (pólos):

$$\lambda_1 = -0.036 \quad \lambda_{2,3} = -0.1884 \pm j1.0511 \quad \lambda_4 = -3.2503 \quad (6.7a)$$

$$\lambda_5 = -5. \quad \lambda_6 = \lambda_7 = -20. \quad (6.7b)$$

Aplicando-se no sistema anterior a transformação linear  $x_{\underline{a}} = T x_d$ , onde a matriz de transformação é definida por

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & \text{Real}(t_2) & \text{Imag}(t_2) & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 \end{bmatrix}, \quad A t_i = \lambda_i t_i, \quad i=1, \dots, 7, \quad (6.8)$$

obtem-se uma (nova) representação quase-diagonal do sistema, que é definida por

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= A_d x_d + B_d u \\ y &= C_d x_d \end{aligned} \quad (6.9)$$



onde as matrizes  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C_d$  são dadas a seguir:

$$A_d = \begin{bmatrix} -0.036 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1884 & 1.0511 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0511 & -0.1884 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.2503 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \quad (6.10a)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.0512 & 0.1444 \\ -0.1812 & 0.9981 \\ -0.8137 & -4.0630 \\ 1.1279 & -0.2361 \\ -1.0313 & -0.9621 \\ -20 & 0 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \quad (6.10b)$$

$$C_d = \begin{bmatrix} -0.0057 & -0.0055 & -0.0011 & -0.0025 & -0.0007 & 0 & 0 \\ -1.9472 & -0.0237 & -0.0744 & 0.0342 & -0.0036 & 0.0004 & -0.0004 \end{bmatrix} \times 10^3. \quad (6.10c)$$

Analisando-se os modos do sistema, verifica-se que  $\lambda_6 = \lambda_7 = -20$  são modos rápidos, e que assim podem ser considerados como não-dominantes. Desprezando-se esses dois modos, obtém-se então o seguinte modelo de ordem reduzida para a planta aumentada

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u \\ y &= C_r x_r \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde as matrizes  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$  são definidas por

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.036 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1884 & 1.0511 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0511 & -0.1884 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.2503 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (6.12a)$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0.0512 & 0.1444 \\ -0.1812 & 0.9981 \\ -0.8137 & -4.0630 \\ 1.1279 & -0.2361 \\ -1.0313 & -0.9621 \end{bmatrix} \quad (6.12b)$$

$$C_r = \begin{bmatrix} -0.0057 & -0.0053 & -0.0011 & -0.0025 & -0.0007 \\ -1.9472 & -0.0237 & -0.0744 & 0.0342 & -0.0036 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (6.12c)$$

e de onde se obtém a matriz de transferência correspondente, que é dada por

$$G_r(s) = C_r (sI - A_r)^{-1} B_r. \quad (6.13)$$

As duas curvas inferiores na Figura 6.3 são os ganhos principais do modelo original (não reduzido) da planta aumentada  $G_a(s)$ ; as duas curvas superiores são os ganhos principais do modelo reduzido  $G_r(s)$ . Nota-se que até a frequência de 10 rad/s os dois modelos são essencialmente iguais, e só divergem a partir desta frequência.

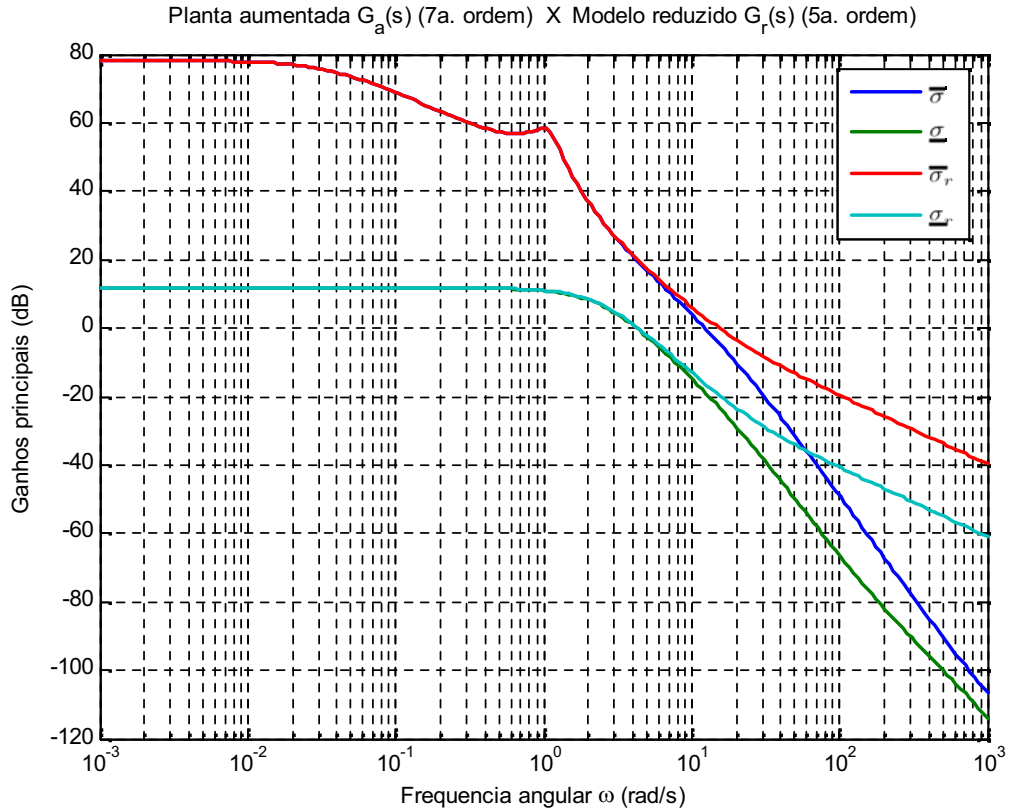


Figura 6.3: Ganhos principais do sistema com pré-compensador de ordem reduzida e do seu respectivo modelo simplificado por agregação.

Após a obtenção de  $G_r(s)$ , o modelo de ordem reduzida da planta aumentada  $G_a(s)$ , ele passa a ser usado como o modelo de projeto na fase de realização do projeto de um controlador do tipo LQG/LTR de ordem reduzida, o qual, em última instância, deverá ser aplicado em  $G_a(s)$ .

Observando-se o comportamento dos ganhos principais de  $G_r(s)$  nas baixas frequências, verifica-se: 1) que o ganho principal inferior é pequeno – só um pouco acima de 10 dB, o que é insuficiente para assegurar uma boa rejeição de distúrbios e também uma boa regulação dos sinais de saída do sistema; e 2) que os ganhos principais superior e inferior possuem magnitudes significativamente diferentes, o que indica que os canais de entrada-saída do sistema são fortemente acoplados, o que definitivamente não é bom para o desempenho do controlador.

Para corrigir essas características inadequadas do sistema controlado recorre-se ao uso de integradores em série com a planta controlada. Na fase de projeto, referidos integradores são colocados em série com o modelo de projeto. Os detalhes são apresentados a seguir.

### **6.1.3 Adição de Integradores na Entrada do Modelo Reduzido da Planta Aumentada**

Os objetivos da adição de integradores em série com a planta aumentada são os mesmos que foram invocados no Projeto Básico e no Projeto Completo, isto é: 1) obter aumento dos ganhos do sistema nas baixas frequências, o que garante ao sistema boa precisão estática (erro em regime permanente nulo) e boa capacidade para rejeição de perturbações; e 2) possibilitar a equalização dos ganhos principais do sistema, o que é bom para a obtenção do desacoplamento entre os diversos canais de entrada-saída do sistema.

Considerando-se que as incertezas do modelo reduzido da planta (aumentada) são representadas na sua saída, então os integradores devem ser colocados na sua entrada, conforme mostrado na Figura 6.4, de onde se obtém, para o caso específico do modelo  $G_r(s)$  que representa o sistema estabilizado, a seguinte relação:

$$U(s) = \frac{I_2}{s} \bar{U}(s) \quad \rightarrow \quad \dot{u} = I_2 \bar{u}. \quad (6.14)$$

Com a inclusão desses dois integradores a dimensão do modelo reduzido da planta aumentada sobe de quinta para sétima ordem, e o modelo passa a ter a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ 0_{2 \times 5} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix} \bar{u} \\ y &= \begin{bmatrix} C_r & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde as matrizes  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$  são definidas nas Equações (6.11)-(6.12). Esta representação pode ser compactada na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_r &= \bar{A}_r \bar{x}_r + \bar{B}_r \bar{u} \\ y &= \bar{C}_r \bar{x}_r \end{aligned} \quad (6.16)$$

e sua matriz de transferência correspondente é dada por

$$\bar{G}_r(s) = \bar{C}_r (sI - \bar{A}_r)^{-1} \bar{B}_r = G_r(s) \frac{I_2}{s}. \quad (6.17)$$

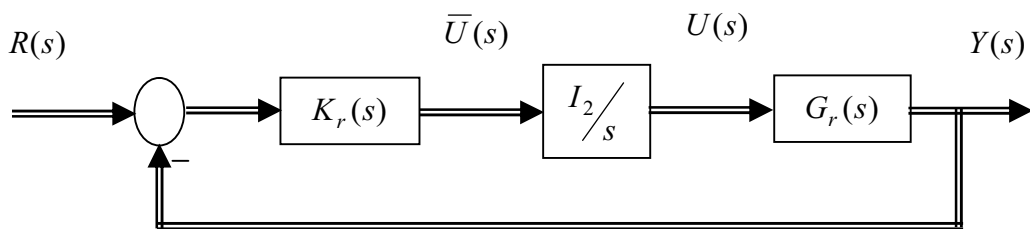


Figura 6.4: Planta reduzida em malha fechada com integradores e controlador.

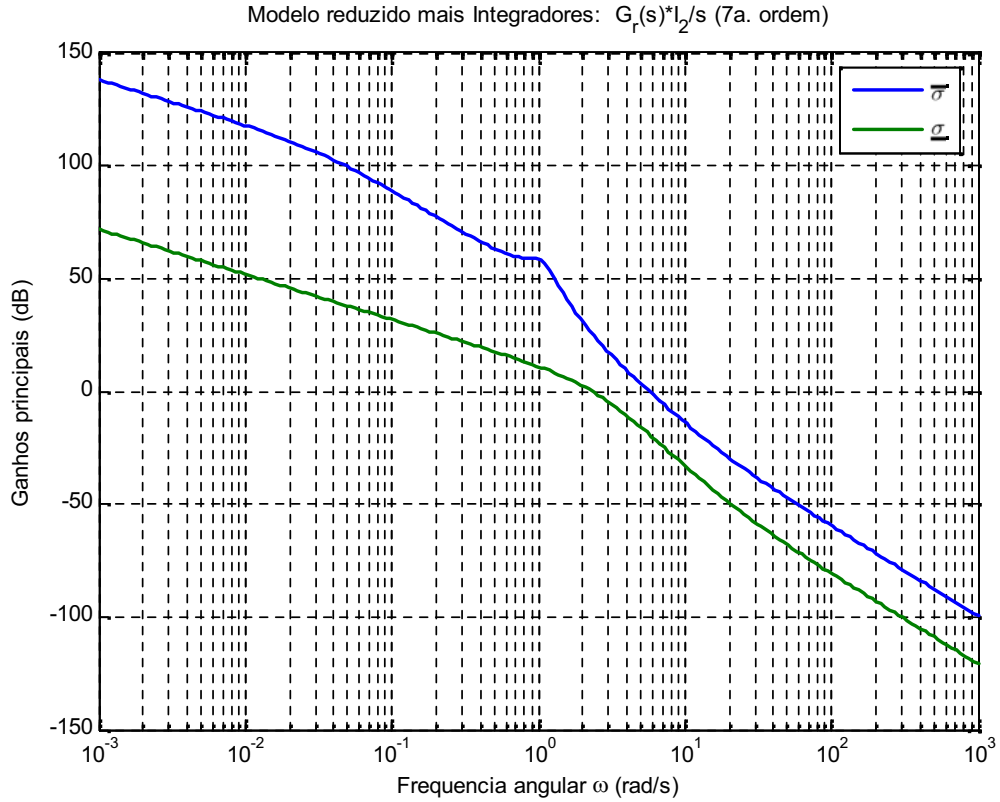


Figura 6.5: Ganhos principais do modelo reduzido da planta aumentada com a adição de dois integradores.

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do conjunto formado pelo modelo reduzido  $G_r(s)$  da planta aumentada e mais os integradores adicionados na sua entrada são mostradas na Figura 6.5.

#### 6.1.4 Projeto da Malha de Referência de Ordem Reduzida com Equalização de Ganhos

Seguindo-se os procedimentos apresentados na Subseção 3.4.4, tem-se que a estrutura da Malha de Referência para o modelo de ordem reduzida do sistema aumentado, que é definido pelas Equações (6.16)-(6.17), é dada por

$$\bar{T}_{FOL_r}(s) = \bar{C}_r(sI - \bar{A}_r)^{-1} \bar{\Gamma}_r \quad (6.18)$$

e sua completa especificação requer a determinação da matriz  $\bar{\Gamma}_r$ .

Para que haja desacoplamento entre todos os canais de entrada-saída do modelo de ordem reduzida do sistema aumentado, os ganhos principais de  $\bar{T}_{FOL_r}(s)$  devem ser iguais em todas as frequências. Isso pode ser conseguido fazendo-se  $\bar{T}_{FOL_r}(s)$  igual a uma matriz diagonal semelhante à que é dada na Equação (3.50).

Escrevendo-se a Equação (6.18) com o particionamento da Equação (6.15), obtém-se

$$\bar{T}_{FOL_r}(s) = \begin{bmatrix} C_r & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_r) & -B_r \\ 0_{2 \times 5} & sI_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{r_1} \\ \bar{\Gamma}_{r_2} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

e daí usa-se a proposta apresentada no livro de Cruz [12] para a seguinte escolha da matriz  $\bar{\Gamma}_r$

$$\bar{\Gamma}_r = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{r_1} \\ \bar{\Gamma}_{r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r^{-1} B_r (C_r A_r^{-1} B_r)^{-1} \\ -(C_r A_r^{-1} B_r)^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

que leva a matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL_r}(s)$  dada na Equação (6.19) à seguinte forma diagonal

$$\bar{T}_{FOL_r}(s) = \frac{I_2}{s}. \quad (6.21)$$

Aplicando-se na Equação (6.20) os valores numéricos das matrizes  $A_r$ ,  $B_r$  e  $C_r$ , que são dados na Equação (6.12), obtém-se o seguinte resultado para a matriz  $\bar{\Gamma}_r$ :

$$\bar{\Gamma}_r = \begin{bmatrix} 0.0054 & -0.0005 \\ -0.1227 & 0.0005 \\ -0.1458 & 0.0002 \\ -0.0898 & 0.0 \\ -0.0330 & 0.0 \\ -0.2408 & 0.0 \\ 0.0867 & -0.0001 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

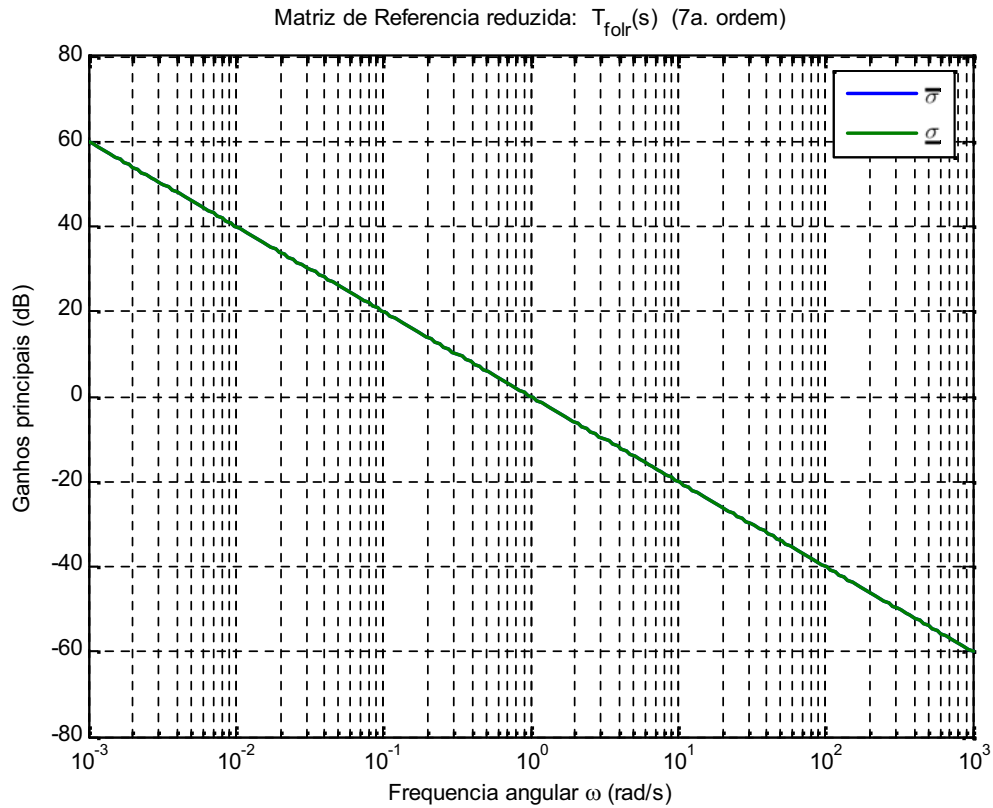


Figura 6.6: Ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL_r}(s)$  de ordem reduzida.

Com este valor de  $\bar{\Gamma}_r$ , a matriz de transferência  $\bar{T}_{FOL_r}(s)$  assume a forma definida na Equação (6.21). Seus ganhos principais são mostrados na Figura 6.6, onde se observa que eles são perfeitamente iguais em todas as frequências. Nota-se também que a “*frequência de crossover*” é igual a 1 rad/s.

### 6.1.5 Projeto do Filtro de Kalman para o Sistema Aumentado com Modelo Reduzido

Os ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ , do Filtro de Kalman para o modelo reduzido do sistema aumentado, são relacionados com os ganhos principais da Malha de Referência  $\bar{T}_{FOL_r}(s)$  através da Equação (3.45). Com o auxílio desta equação e da curva mostrada na Figura 6.6 pode-se ajustar o valor do parâmetro escalar  $\mu$  que proporciona à

matriz de transferência  $\bar{T}_{KF_r}(s)$  a “*freqüência de crossover*” desejada para o sistema. Tal freqüência foi especificada na Seção 5.1 como sendo igual a 10 rad/s, e ela é obtida escolhendo-se  $\mu = 0.01$ .

Adaptando-se as Equações (3.13)-(3.15) para o modelo de ordem reduzida do sistema aumentado sob estudo (Equação (6.16)), elas tornam-se:

$$K_{f_r} = \frac{1}{\mu} \Sigma_r \bar{C}_r^T \quad (6.23)$$

$$\bar{A}_r \Sigma_r + \Sigma_r \bar{A}_r^T - \frac{1}{\mu} \Sigma_r \bar{C}_r^T \bar{C}_r^T \Sigma_r + Q_{f_r} = 0 \quad (6.24)$$

$$Q_{f_r} = \bar{\Gamma}_r Q_o \bar{\Gamma}_r^T = \bar{\Gamma}_r \bar{\Gamma}_r^T. \quad (6.25)$$

Aplicando-se nessas equações os valores de  $\bar{\Gamma}_r$ , dado pela Equação (6.22), e de  $\mu = 0.01$ , obtém-se o seguinte resultado para a matriz de ganhos do Filtro de Kalman:

$$K_{f_r} = \begin{bmatrix} 0.0542 & -0.0053 \\ -1.2268 & 0.0049 \\ -1.4583 & 0.0023 \\ -0.8985 & 0.0002 \\ 0.3297 & 0.0002 \\ -2.4077 & 0.0003 \\ 0.8672 & -0.0014 \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

As características de resposta em freqüência dos ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF_r}(s) = \bar{C}_r (sI - \bar{A}_r)^{-1} K_{f_r}$  são mostradas na Figura 6.7, onde se pode notar que:

1) os ganhos principais são iguais em todas as freqüências; 2) a especificação para a “*freqüência de crossover*” é atendida; 3) os ganhos são altos nas baixas freqüências; 4) os ganhos diminuem a uma taxa de 20 dB por década nas altas freqüências. Além disso, por ser  $\bar{T}_{KF_r}(s)$  a matriz de transferência de um filtro de Kalman, ela possui excelentes propriedades



de robustez. Portanto, em face de todas essas boas características, a matriz  $\bar{T}_{KF_r}(s)$  serve como modelo a ser emulado pela matriz de transferência  $\bar{G}_r(s)\bar{K}_r(s)$  do sistema aumentado (representado por seu modelo de ordem reduzida) controlado em malha aberta.

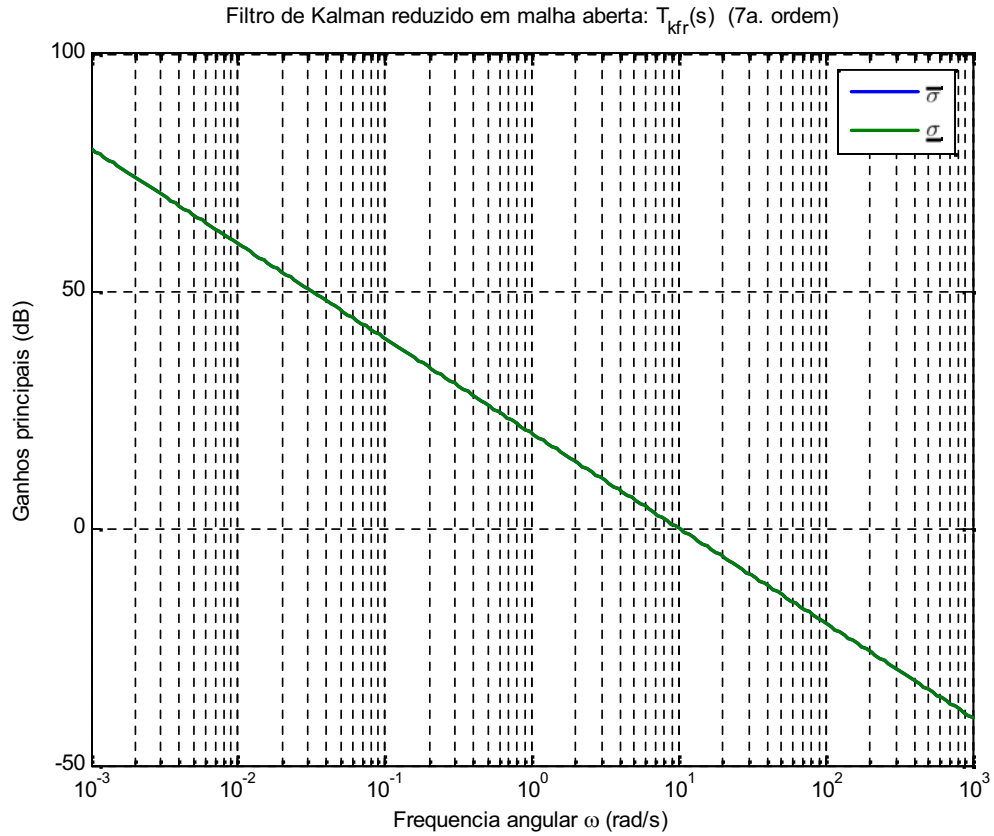


Figura 6.7. Ganhos principais da matriz de transferência  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ .

### 6.1.6 Projeto Final do Controlador Intermediário do Tipo LQG/LTR

A etapa final na realização do projeto do controlador LQG/LTR é a determinação da matriz de ganhos  $K_{c_r}$  do regulador LQR. Essa determinação leva em conta a necessidade de que a matriz de transferência  $\bar{G}_r(s)\bar{K}_r(s)$  emule as características de resposta em frequência da matriz de referência  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ . Consegue-se essa emulação através do uso das Equações (3.36)-(3.39) apresentadas na Subseção 3.4.2.

Adaptando-se as referidas equações para o sistema aumentado (representado por seu modelo de ordem reduzida), elas tornam-se:

$$\bar{A}_r^T P_r + P_r \bar{A}_r - P_r \bar{B}_r R_{c_r}^{-1} \bar{B}_r^T P_r + Q_{c_r} = 0 \quad (6.27)$$

$$Q_{c_r} = \bar{C}_r^T \bar{C}_r + q^2 \bar{C}_r^T V \bar{C}_r, \quad V = I_2 \quad e \quad q^2 \rightarrow \infty \quad (6.28)$$

$$R_{c_r} = \rho I_2, \quad \rho=1. \quad (6.29)$$

Usando-se na Equação (6.28) o parâmetro de recuperação com o valor de  $q^2 = 10^8$ , obtém-se o seguinte resultado para a matriz de ganhos do regulador LQR:

$$K_{c_r} = \begin{bmatrix} 1.4800 & 0.0037 & 0.0567 & -0.0189 & 0.0012 & 0.0000 & -0.0000 \\ -1.2440 & -0.0127 & -0.0492 & 0.0132 & -0.0015 & -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^7 \quad (6.30)$$

Esta matriz de ganhos completa o projeto do controlador  $\bar{K}_r(s)$ , que neste trabalho é denominado Controlador Intermediário por ser de ordem reduzida (sétima ordem) em relação ao Controlador Completo (décima ordem). Observe que os dois integradores que foram adicionados ao sistema são parte do controlador.

A realização em espaço de estados do controlador  $\bar{K}_r(s)$ , do tipo LQG/LTR, e sua respectiva matriz de transferência são respectivamente definidas pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_r &= (\bar{A}_r - \bar{B}_r K_{c_r} - K_{f_r} \bar{C}_r) \hat{x}_r - K_{f_r} (Ref - y) \\ \bar{u} &= -K_{c_r} \bar{x}_r \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\bar{K}_r(s) = K_{c_r} (sI - \bar{A}_r + \bar{B}_r K_{c_r} + K_{f_r} \bar{C}_r)^{-1} K_{f_r}. \quad (6.32)$$

A representação em espaço de estados do conjunto sistema (com modelo reduzido) mais controlador de ordem reduzida é definida pela Equação (3.53), que adaptada para o sistema sob estudo, torna-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_r \\ \dot{u} \\ \dot{\hat{\bar{x}}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & B_r & 0_{7 \times 7} \\ 0_{2 \times 5} & 0_{2 \times 2} & -K_{c_r} \\ 0_{7 \times 5} & 0_{7 \times 2} & \bar{A}_r - \bar{B}_r K_{c_r} - K_{f_r} \bar{C}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ u \\ \hat{\bar{x}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \\ -K_{f_r} \end{bmatrix} (Ref - y) \quad (6.33)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_r & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ u \\ \hat{\bar{x}}_r \end{bmatrix}.$$

Os ganhos principais de  $\bar{G}_r(s)\bar{K}_r(s)$ , ou seja, do sistema (reduzido) controlado em malha aberta, são as duas curvas inferiores mostradas na Figura 6.8. Nota-se que, até uma frequência de aproximadamente 80 rad/s, essas curvas acompanham os ganhos da matriz  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ . Acima dessa frequência, os ganhos de  $\bar{G}_r(s)\bar{K}_r(s)$  decrescem mais rapidamente do que os ganhos de  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ . Isso é bom para melhorar a filtragem de ruídos eventualmente presentes nos sinais de saída do sistema que são realimentados.

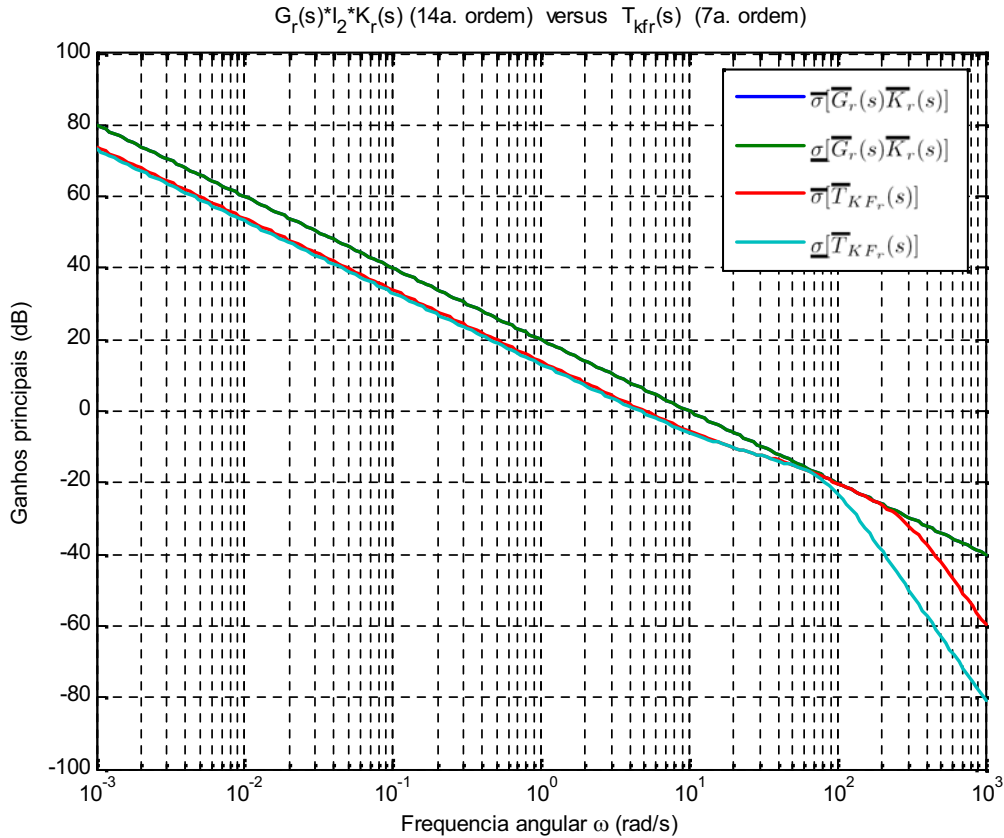


Figura 6.8: Ganhos principais de  $\bar{G}_r(s)\bar{K}_r(s)$  versus ganhos de  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ .

A Equação (6.33) e a Figura 6.8 não são os resultados mais importantes a serem apresentados e/ou analisados neste ponto. Isto porque eles estão relacionados com o controlador de ordem reduzida  $\bar{K}_r(s)$  (Equação (6.32)), aplicado no “modelo” de ordem reduzida  $\bar{G}_r(s)$  (Equação (6.17)), do sistema aumentado  $\bar{G}_a(s) = G_a(s) \frac{I_2}{s}$  (Equação (6.5)).

Considerando-se que o que é verdadeiramente importante é a aplicação do controlador  $\bar{K}_r(s)$  no sistema aumentado “real”  $\bar{G}_a(s)$  apresenta-se a seguir a representação em espaço de estados dessa situação real, que é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{u} \\ \dot{\hat{x}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a & 0_{7 \times 7} \\ 0_{2 \times 7} & 0_{2 \times 2} & -K_{c_r} \\ 0_{7 \times 7} & 0_{7 \times 2} & \bar{A}_r - \bar{B}_r K_{c_r} - K_{f_r} \bar{C}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ u \\ \hat{x}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{7 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \\ -K_{f_r} \end{bmatrix} (Ref - y) \quad (6.34)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_a & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ u \\ \hat{x}_r \end{bmatrix}.$$

Os ganhos principais de  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ , isto é, do sistema aumentado (com pré-compensador de ordem reduzida e mais dois integradores) em série com o controlador de ordem reduzida, em malha aberta, são as duas curvas inferiores mostradas na Figura 6.9. Nota-se que, até uma frequência de aproximadamente 20 rad/s, essas curvas são paralelas às curvas dos ganhos da matriz  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ , e possuem valores de -5 dBs em relação aos valores dos ganhos de  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ . Acima dessa frequência, os ganhos de  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$  decrescem mais rapidamente do que os ganhos de  $\bar{T}_{KF_r}(s)$ . Essa redução de ganhos nas altas frequências é uma característica benéfica para a melhoria da filtragem de ruídos eventualmente presentes nos sinais de saída do sistema que são realimentados.

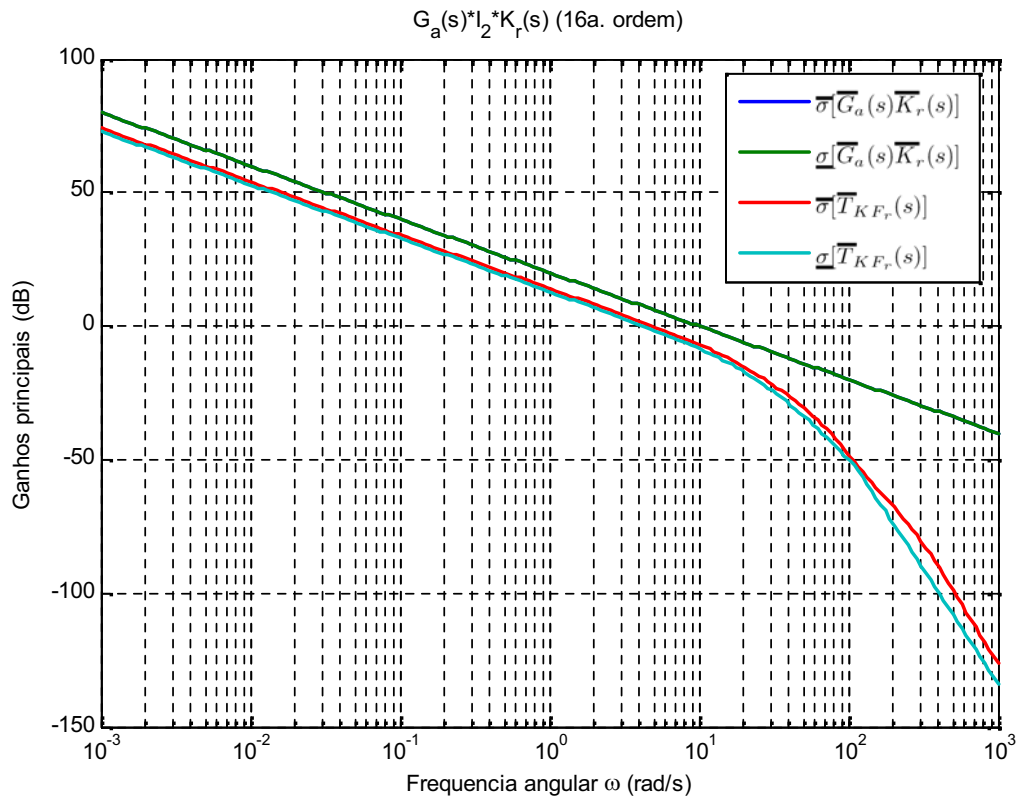


Figura 6.9: Ganhos principais de  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$  versus ganhos de  $\bar{T}_{KFr}(s)$ .

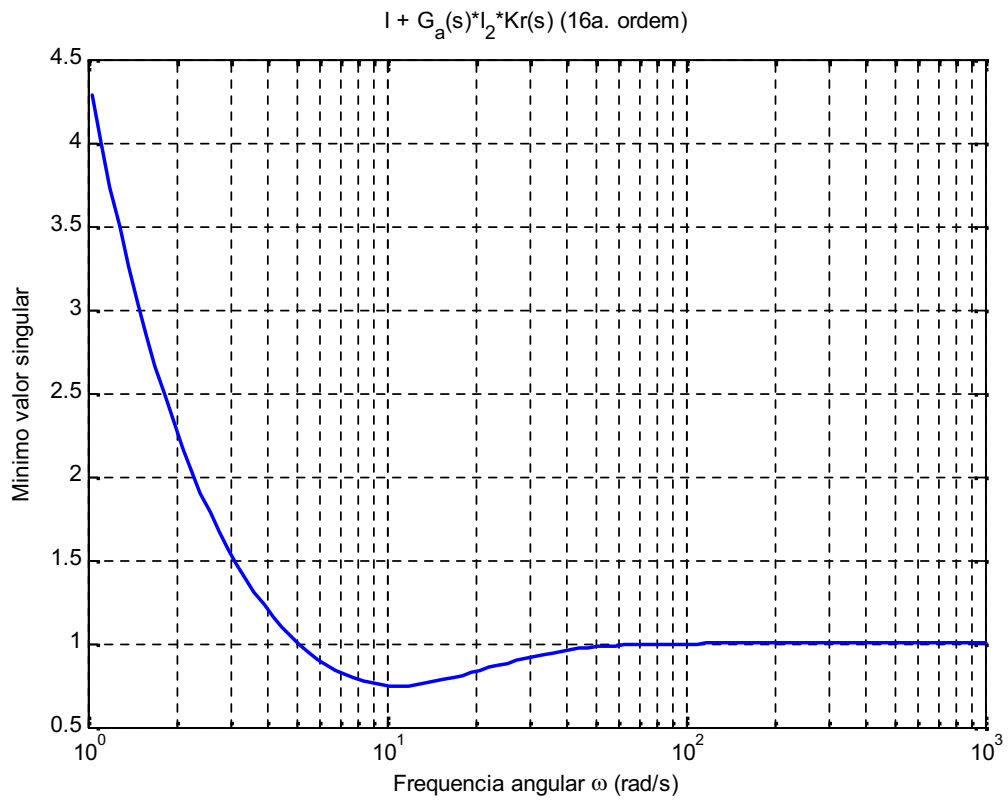


Figura 6.10: Ganho principal inferior da matriz  $I + \bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ .

Para a verificação das margens de ganho e fase do sistema controlado usa-se a curva de resposta em frequência do ganho principal inferior da matriz  $I + \overline{G}_a(s)\overline{K}_r(s)$  que é mostrada na Figura 6.10. Nela verifica-se que o parâmetro  $\alpha_0$ , definido na Equação (2.14), tem o valor de  $\alpha_0 = 0.7477$ . Usando-se este resultado nas Equações (2.12)-(2.13) obtém-se as seguintes margens de ganho e de fase para o sistema controlado:

$$\begin{aligned} 0.5722 &< MG < 3.9635 \\ -43.9065^\circ &< MF < 43.9065^\circ. \end{aligned} \tag{6.35}$$

#### 6.1.7 Análise do Desempenho do Controlador de Ordem Reduzida com Pré-compensador Estabilizador

O desempenho do controlador de ordem reduzida,  $\overline{K}_r(s)$ , atuando sobre a planta estabilizada com o auxílio do pré-compensador dinâmico estabilizador,  $\overline{G}_a(s)$ , pode ser analisado através das seguintes curvas: 1) as que são mostradas na Figura 6.11 e na Figura 6.12, que apresentam os dois sinais de saída do sistema em resposta a referências do tipo degrau unitário aplicadas separadamente nas referências  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente; e 2) as que são mostradas na Figura 6.13 e Figura 6.14, que apresentam os respectivos sinais de controle produzidos pelo Controlador Intermediário nas saídas dos integradores adicionados na entrada da planta estabilizada  $\overline{G}_a(s)$ .

Comparando-se a Figura 6.11 com a Figura 5.22 verifica-se que o Controlador Intermediário (projetado com a estabilização prévia da planta por um pré-compensador dinâmico de ordem reduzida (primeira ordem) e com o uso de um modelo de ordem reduzida) e o Controlador Completo (projetado com a estabilização prévia da planta por um pré-compensador de ordem não reduzida (segunda ordem) e com o uso de um modelo de ordem

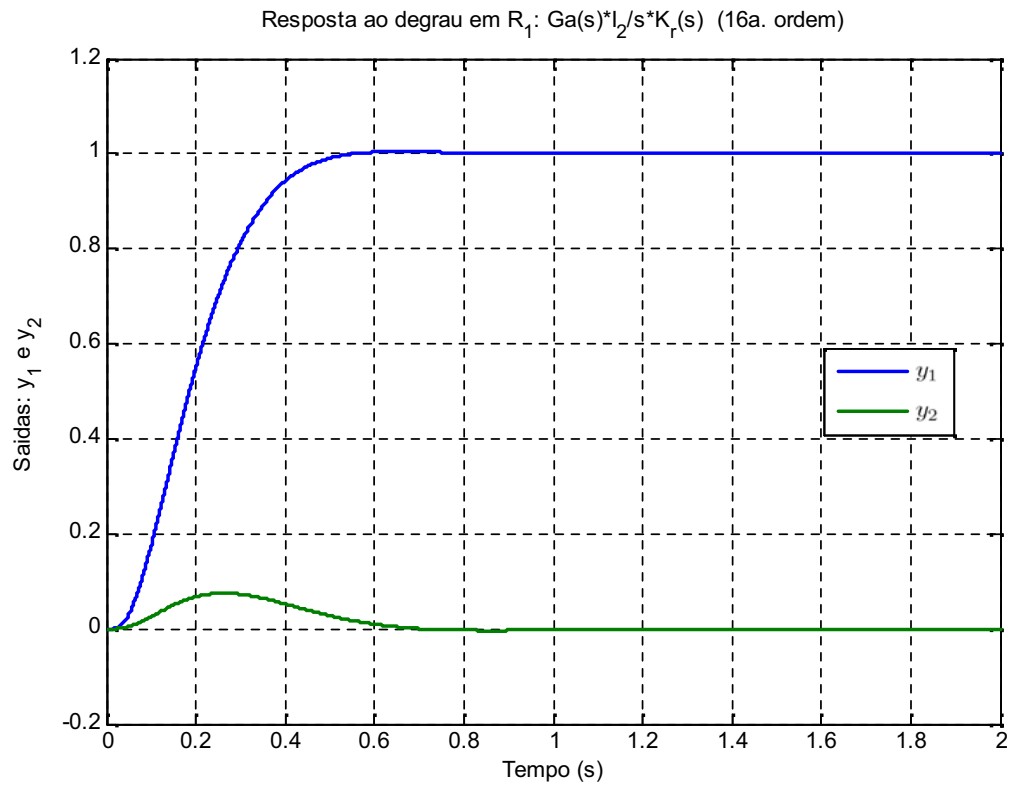


Figura 6.11: Saídas do sistema para um degrau aplicado na referência  $R_1$ .

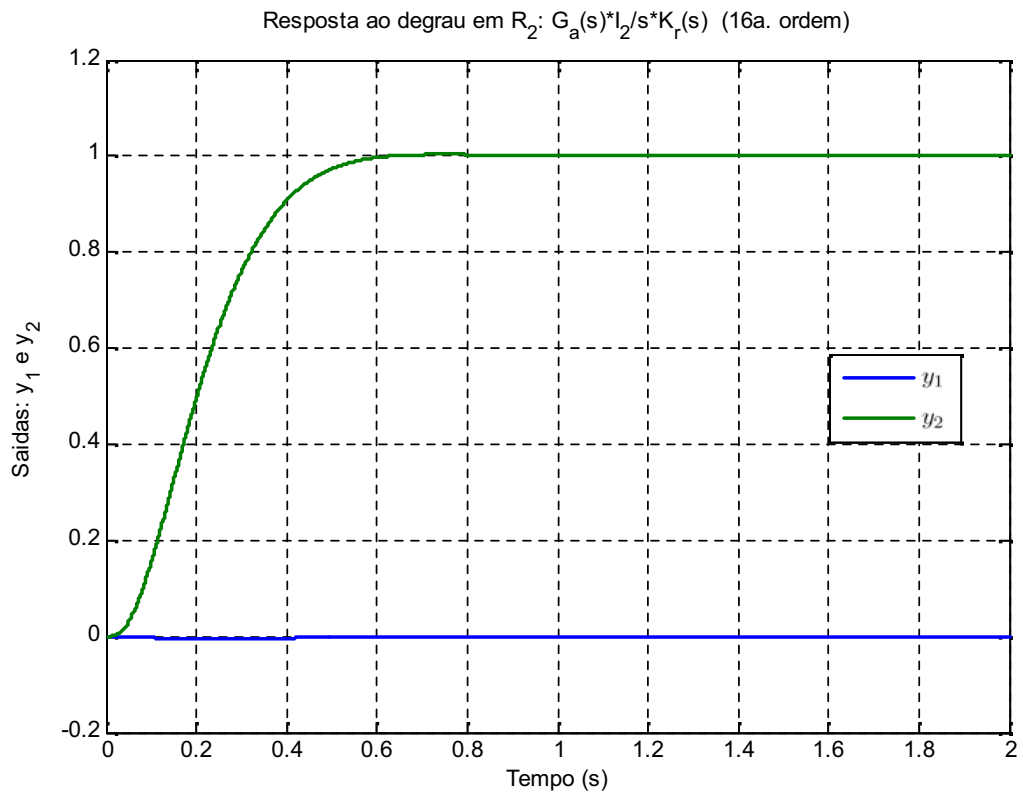


Figura 6.12: Saídas do sistema para um degrau aplicado na referência  $R_2$ .

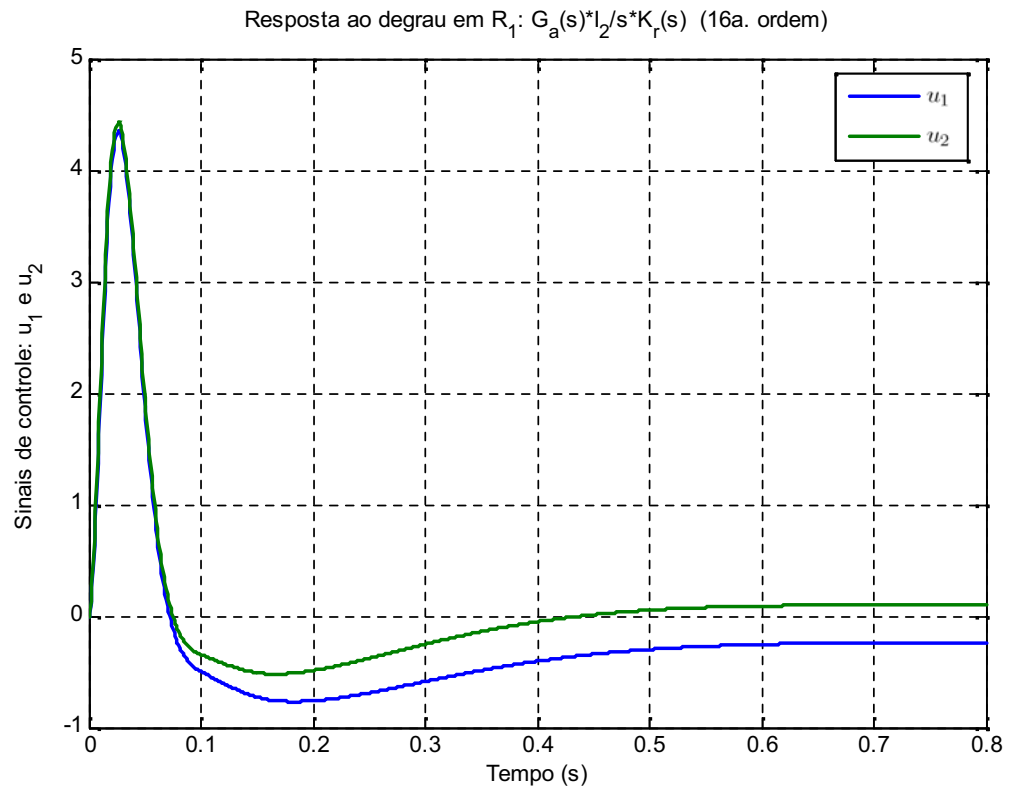


Figura 6.13: Sinais de controle para a entrada degrau em  $R_1$ .

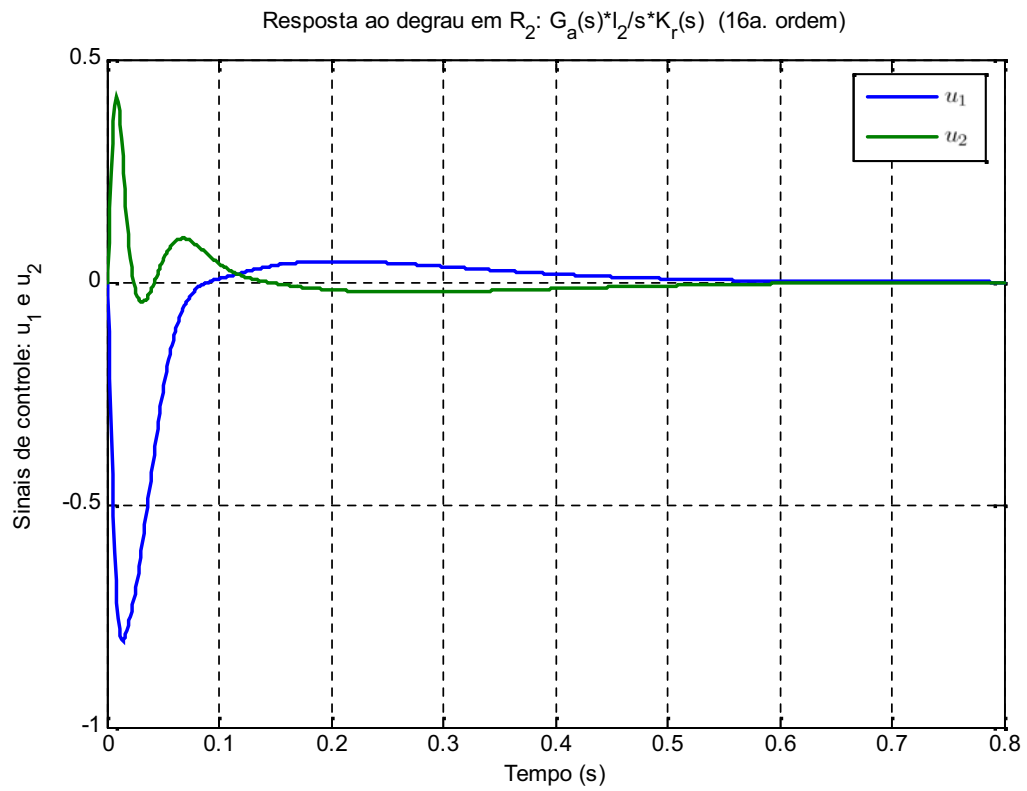


Figura 6.14: Sinais de controle para a entrada degrau em  $R_2$ .



não reduzida) possuem desempenhos “quase idênticos” no que se refere ao controle do primeiro sinal de saída da planta. Observe que: 1) com qualquer um dos dois controladores, a saída  $y_1$  converge, em regime permanente, para o seu respectivo valor de referência; 2) com qualquer um dos dois controladores, a resposta transitória da saída  $y_1$  é excelente – rápida e sem oscilações; 3) com o Controlador Intermediário há um leve e rápido acoplamento da saída  $y_2$  com o degrau aplicado na referência  $R_1$ , o que não ocorre com o Controlador Completo; e 4) com o Controlador Intermediário a saída  $y_2$  afasta-se leve e rapidamente do seu valor de referência ( $R_2 = 0$ ), quando se aplica um degrau na referência  $R_1$ , o que também não ocorre com o Controlador Completo.

Comparando-se a Figura 6.12 com a Figura 5.23 verifica-se que o Controlador Intermediário apresenta um desempenho idêntico ao desempenho do Controlador Completo no que se refere ao controle do segundo sinal de saída da planta. Observe que a oscilação de baixa frequência e mal amortecida que havia no caso do Controlador Básico também desaparece completamente no caso do Controlador Intermediário.

Comparando-se a Figura 6.13 com a Figura 5.24 observa-se que: 1) a máxima amplitude dos sinais de controle produzidos pelo Controlador Intermediário na entrada da planta controlada (aproximadamente 4.5) é cerca de cinquenta por cento menor do que a máxima amplitude dos respectivos sinais de controle produzidos pelo Controlador Completo (aproximadamente 9.0); 2) as oscilações negativas dos referidos sinais de controle produzidos pelo Controlador Intermediário são mínimas (menores do que -1.0), enquanto que as respectivas oscilações negativas dos sinais de controle produzidos pelo Controlador Completo atingem valores bem maiores (na faixa de -6.0); e 3) os valores de regime permanente dos sinais de controle gerados dos dois controladores são aproximadamente iguais.

Comparando-se a Figura 6.14 com a Figura 5.25 observa-se que: 1) a amplitude máxima e a mínima dos sinais de controle produzidos pelo Controlador Intermediário na entrada da planta controlada (aproximadamente 0.42 e -0.8, respectivamente) é cerca de oitenta por cento menor do que a amplitude máxima e a mínima dos respectivos sinais de controle produzidos pelo Controlador Completo (aproximadamente 2.7 e -3.3); 2) as oscilações seguintes (após a máxima e/ou mínima) dos referidos sinais de controle produzidos pelo Controlador Intermediário são mínimas (menores do que  $\pm 0.1$ ), enquanto que as respectivas oscilações dos sinais de controle produzidos pelo Controlador Completo atingem valores bem maiores (na faixa de  $\pm 2.0$ ); e 3) os valores de regime permanente dos sinais de controle gerados pelo Controlador Intermediário convergem para zero, enquanto que dos respectivos sinais de controle produzidos pelo Controlador Completo apenas um deles converge para zero, enquanto que o outro converge para um valor na faixa de 0.15.

Com base em todas essas análises, pode-se concluir que o Controlador Completo apresenta um desempenho ligeiramente melhor do que o Controlador Intermediário no aspecto de desacoplamento, enquanto que o Controlador Intermediário possui um desempenho significativamente melhor do que o Controlador Completo com relação à minimização do esforço de controle (que é atrelado às amplitudes dos sinais de controle).

Para uma outra análise do desempenho do Controlador Intermediário, considera-se os pólos e zeros de transmissão do sistema controlado  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ , em malha aberta e em malha fechada.

Os pólos do sistema controlado  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ , em malha aberta e em malha fechada, são apresentados na primeira coluna e na segunda coluna da Tabela 6.1, respectivamente. Em **vermelho** (**azul marinho**) estão os pólos originais da planta que **não foram** (**foram**) modificados pelo pré-compensador estabilizador. Em **azul anil** está o pólo que foi adicionado

à planta pelo pré-compensador estabilizador. Todos esses pólos aparecem nas duas colunas da Tabela 6.1, e portanto, **eles são fixos**, havendo para cada um deles um zero de transmissão que o cancela.

Os zeros de transmissão do sistema são apresentados na Tabela 6.2.

MALHA ABERTA	MALHA FECHADA
-5.000000000000	-220.656400468167 + 222.374733937298i
-0.200000000000 + 1.051100000000i	-220.656400468167 - 222.374733937298i
-0.200000000000 - 1.051100000000i	-55.270414182204 + 67.291960570376i
-3.250300000000	-55.270414182204 - 67.291960570376i
-0.036000000000	-57.673571529197
-20.000000000000	-44.396649619845
-20.000000000000	-8.190621264138 + 4.948584911802i
0	-8.190621264138 - 4.948584911802i
0	-8.079941712314 + 4.573147138874i
-220.673299368538 + 222.350665999111i	-8.079941712314 - 4.573147138874i
-220.673299368538 - 222.350665999111i	-5.614503610017
-54.830635945236 + 67.000025611095i	-4.999999999989
-54.830635945236 - 67.000025611095i	-0.199999999921 + 1.051100000035i
-55.147950535469	-0.199999999921 - 1.051100000035i
-40.124074133561	-3.250300000091
-5.799584716162	-0.036000000114

Tabela 6.1: Modos do sistema controlado  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ , em malha aberta e em malha fechada.

-158.153504827179
-0.199999999793 + 1.051099999384i
-0.199999999793 - 1.051099999384i
-5.746607590642
-3.250300000022
-0.036000000418
-4.999999999992

Tabela 6.2: Zeros de transmissão do sistema controlado  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$ .

Analisando-se os dados apresentados na Tabela 6.1 e na Tabela 6.2, observa-se:

- 1) que o controlador  $\bar{K}_r(s)$  introduz no sistema  $\bar{G}_a(s)\bar{K}_r(s)$  seis zeros de transmissão;
- 2) que quatro dos seis zeros de transmissão de  $\bar{K}_r(s)$ , aqueles que na Tabela 6.2 aparecem em **vermelho** e **azul marinho**, cancelam perfeitamente dois dos quatro modos estáveis da planta original  $G_p(s)$  e mais os seus dois modos instáveis que foram reposicionados, pelo pré-compensador dinâmico de ordem reduzida, no semi-plano esquerdo do plano-s, que assim tornam-se fixos (não observáveis ou não controláveis);
- 3) que o controlador  $\bar{K}_r(s)$  não introduz no sistema nenhum zero de transmissão que cancele os modos estáveis da planta original  $G_p(s)$  situados em  $\lambda_5 = \lambda_6 = -20$  (isso ocorre porque esses modos foram desprezados quando da redução da ordem da planta aumentada  $G_a(s)$ , para efeitos de projeto do controlador  $\bar{K}_r(s)$ );
- 4) que um dos zeros de transmissão de  $\bar{K}_r(s)$ , aquele que aparece na Tabela 6.2 em **azul anil**, cancela o modo adicionado à planta  $G_p(s)$  pelo pré-compensador estabilizador, que assim também torna-se fixo (não-observável ou não-controlável);
- 5) que os pólos da planta aumentada  $G_a(s)$ , exceto os pólos  $\lambda_5 = \lambda_6 = -20$  mencionados em 3), também aparecem como pólos do sistema em malha fechada (resultado totalmente esperado, já que esses pólos tornam-se fixos pelo cancelamento feito pelos zeros de transmissão mencionados nos itens 2 e 3);
- 6) que em malha fechada, o zero de transmissão adicionado à planta pelo pré-compensador estabilizador cancela um dos pólos do controlador  $\bar{K}_r(s)$ .

Com base nessas observações verifica-se que, com a exceção de  $\lambda_5 = \lambda_6 = -20$ , todos os modos da planta original, tanto os estáveis como também o par complexo que foi estabilizado pelo pré-compensador estabilizador, são perfeitamente cancelados pelo controlador  $K(s)$ . É por esta razão que o desempenho do Controlador Intermediário, a exemplo do Controlador Completo, é muito superior em comparação com o desempenho do Controlador Básico.

## 6.2 Análise Comparativa das Dimensões dos Diversos Controladores

Após a apresentação detalhada de todas as etapas envolvidas na realização do projeto do Controlador Intermediário, e da análise comparativa de seu desempenho com relação ao Controlador Completo e o Controlador Básico, completa-se agora, este capítulo, com a apresentação da Tabela 6.3, que mostra as dimensões de cada um desses controladores, e de seus respectivos elementos constituintes. Destaque para o Controlador Intermediário (décima ordem) cuja dimensão é quatro unidades menor do que a do Controlador Completo (décima quarta ordem), e que mesmo assim os dois apresentam desempenhos equivalentes.

		Partes do Controlador				
Projeto	Planta	Pré-CD Estabilizador	Integradores	Controlador LQG/LTR		Planta + Controlador
↓	$G_p(s)$	$G_{cd}(s)$	$\frac{I_2}{s}$	$K_{LQG/LTR}(s)$	$K(s)$	$G_p(s)K(s)$
Básico	6	-	2	8	10	16
Completo	6	2	2	10	14	20
Intermediário	6	1	2	7	10	16

Tabela 6.3: Comparação entre as dimensões dos diversos controladores projetados.

### 6.3 Conclusões

Neste capítulo foi considerado o problema do projeto de um controlador robusto do tipo LQG/LTR para um sistema multivariável instável, enfatizando-se a questão da minimização da ordem do controlador.

A minimização da ordem do controlador foi obtida em duas etapas de seu projeto. Inicialmente foi explorada uma característica intrínseca do sistema para obter-se a sua estabilização prévia por meio de um pré-compensador dinâmico estabilizador de ordem reduzida.

Em seguida, usou-se o conhecido método de agregação para obter-se um modelo de ordem reduzida da planta aumentada (planta mais estabilizador) sem a presença dos modos não-dominantes da referida planta aumentada. Este modelo reduzido foi utilizado então para a realização do projeto de um controlador robusto do tipo LQG/LTR.

O resultado final foi um controlador de décima ordem, o qual é constituído pelo pré-compensador dinâmico estabilizador de ordem reduzida (primeira ordem), dois integradores adicionados à planta e mais o controlador LQG/LTR de ordem reduzida (sétima ordem), denominado de Controlador Intermediário, cujo desempenho dinâmico mostrou-se tão bom quanto o desempenho do Controlador Completo (de décima quarta ordem) projetado no capítulo anterior.

Conclui-se, portanto, que o “grande objetivo” estabelecido no início deste capítulo — o de obter-se um controlador de ordem reduzida em relação ao Controlador Completo sem prejuízo de seu desempenho dinâmico, foi nitidamente realizado.

## Capítulo 7: Um Roteiro para a Equalização dos Ganhos de Sistemas Multivariáveis que Possuem Pólo na Origem

Uma questão sempre presente durante a realização de projetos de controladores para sistemas multivariáveis é a tentativa de obtenção do desacoplamento de cada um dos sinais de saída do sistema (variáveis controladas) em relação aos sinais de referência correspondentes aos demais sinais de saída do sistema. A realização deste objetivo, em geral requer a equalização de todos os ganhos dos diversos canais de entrada-saída do sistema, em todas as faixas de frequências. No caso do projeto de controladores do tipo LQG/LTR, essa equalização é tratada na primeira etapa do projeto, que consiste na especificação da Malha de Referência, a qual é denotada por  $T_{FOL}(s)$  (*FOL — Feedback Open Loop*).

Existem vários procedimentos para obtenção da equalização dos ganhos de sistemas multivariáveis relatados na literatura técnica de controle. Por exemplo, Ridgely e Banda [20] apresentam uma abordagem que equaliza os ganhos do sistema nas baixas e nas altas frequências, mas que não garante uma boa equalização nas frequências intermediárias. O'Dell e Misawa [36] relatam um exemplo onde a equalização de ganhos em todas as frequências é obtida, mas o procedimento é confuso, sem maiores detalhes e pouco esclarecedor. Cruz [12] apresenta uma fórmula que equaliza os ganhos do sistema em todas as frequências, mas a aplicação desta fórmula requer a inversão da matriz característica do sistema, isto é, a matriz  $A$  de sua representação em espaço de estados. Este requisito impede a sua aplicação (da fórmula) no caso de sistemas que possuem ao menos um pólo na origem — as matrizes características ( $A$ ) desses sistemas são singulares.

Para contornar esta dificuldade intrínseca dos sistemas que possuem ao menos um pólo na origem, este capítulo apresenta o roteiro completo de um procedimento que possibilita a equalização, em todas as frequências, dos ganhos de sistemas dinâmicos multivariáveis que possuam pólos na origem. O procedimento envolve a adição de integradores nos canais de entrada (ou saída) do sistema através dos quais o pólo do sistema localizado na origem é não-controlável (ou não-observável).

Além da equalização de ganhos em todas as frequências, um outro resultado benéfico deste procedimento é que o número de integradores que precisam ser adicionados ao sistema é menor do que nos casos comuns, isto é, nos casos em que o sistema não possui pólos na origem.

O procedimento apresentado é ilustrado através de sua aplicação em um sistema de quinta ordem com três sinais de entrada e três sinais de saída.

Parte do conteúdo deste capítulo foi preliminarmente apresentado em [37].

## 7.1 Equalização de Ganhos Via Adição de Integradores

Considere um sistema linear multivariável cuja representação em espaço de estados é definida por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{7.1}$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u \in \mathfrak{R}^m$  é o vetor dos sinais de entradas (ou controle) e  $y \in \mathfrak{R}^p$  é o vetor dos sinais de saída do sistema. As matrizes da tripla  $\{A, B, C\}$  possuem dimensões compatíveis e a matriz de transferência do sistema é dada por

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B.\tag{7.2}$$



Considerando-se que as incertezas do modelo nominal do sistema controlado sejam representadas na sua entrada, então deve-se adicionar integradores na sua saída, conforme mostra a Figura 7.1, de onde se obtém

$$\bar{Y}(s) = \frac{I_p}{s} Y(s) \quad \rightarrow \quad \dot{\bar{y}} = y. \quad (7.3)$$

Com o acréscimo dos integradores a representação em espaço de estados do sistema aumentado torna-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0_{n \times p} \\ C & 0_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix} u \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.4)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} &= \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \\ \bar{y} &= \bar{C} \bar{x} \end{aligned} \quad (7.5)$$

e sua matriz de transferência correspondente é dada pela relação

$$\bar{G}(s) = \bar{C} (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \frac{I_p}{s} G(s). \quad (7.6)$$

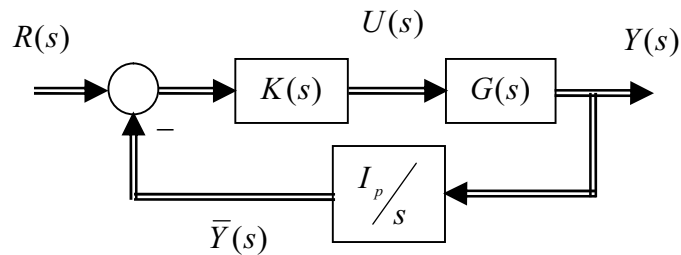


Figura 7.1: Sistema em malha fechada com adição de integradores na saída da planta.

A estrutura da Malha de Referência é definida por

$$T_{FOL}(s) = \bar{H} (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \quad (7.7)$$

e sua completa especificação requer a determinação da matriz  $\bar{H}$ . Esta determinação deve levar em conta a necessidade de se obter o desacoplamento entre todos os canais do sistema, objetivo esse que é alcançado fazendo-se os ganhos principais de  $T_{FOL}(s)$  iguais em todas as frequências. Isso pode ser conseguido fazendo-se  $T_{FOL}(s)$  igual a uma matriz do tipo  $\frac{I_p}{s}$ .

Escrevendo-se a Equação (7.7) com o particionamento das Equações (7.4)-(7.5) obtém-se

$$T_{FOL}(s) = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_n - A)^{-1} & 0_{n \times p} \\ C \frac{(sI - A)^{-1}}{s} & \frac{I_p}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

ou ainda

$$T_{FOL}(s) = \bar{H}_1 (sI_n - A)^{-1} B + \bar{H}_2 C \frac{(sI_n - A)^{-1}}{s} B. \quad (7.9)$$

Substituindo-se na Equação (7.9) a seguinte escolha para  $\bar{H}$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} & -(C A^{-1} B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

obtém-se o resultado desejado, isto é,

$$T_{FOL}(s) = \frac{I_p}{s}. \quad (7.11)$$

A fórmula dada na Equação (7.10) é a versão dual de uma outra fórmula apresentada por Cruz [12], cujo desenvolvimento é atribuído ao Prof. Eduardo L. L. Cabral, da Escola Politécnica da USP. Uma rápida análise da referida equação permite a conclusão de que ela não pode ser aplicada no caso da obtenção da equalização dos ganhos principais de sistemas

multivariáveis que possuam pólos na origem. Isso ocorre porque as matrizes características (matrizes  $A$ ) desses sistemas são singulares, e assim sendo elas não podem ser invertidas. Portanto, a equalização dos ganhos de sistemas com pólos na origem requer um novo tipo de procedimento.

## 7.2 Equalização de Ganhos de Sistemas com Pólo na Origem

Na seção anterior foi mostrado o procedimento habitual que se usa para a equalização dos ganhos principais de sistemas multivariáveis. Este procedimento se baseia na adição de um integrador em cada um dos canais de saída do sistema, o que aumenta a ordem do sistema de  $n$  para  $n + p$ . Cada integrador adicionado ao sistema resulta na inclusão de um pólo na origem na matriz de transferência do sistema e/ou na matriz característica do sistema.

Quando um dado sistema possui um pólo na origem, significa que ele já possui um elemento integrador em sua estrutura. Aproveita-se então esse integrador já existente e adiciona-se ao sistema um número reduzido de novos integradores. Assim, não é necessária a inclusão de um novo integrador em cada canal de saída do sistema, e com isso simplifica-se o controlador reduzindo-se a sua ordem e/ou a sua estrutura.

Mais importante de tudo é que o fato de o sistema possuir um pólo na origem não inviabiliza a possibilidade da equalização de seus ganhos principais, contrariamente ao que indica a fórmula dada na Equação (7.10). Na verdade, com um certo cuidado, pode-se extrair da estrutura interna do sistema o elemento integrador que ele possui, e colocá-lo “*disponível*” em um canal de saída específico do sistema. Com esse reposicionamento do elemento integrador, faz-se uma “*redução fictícia*” da ordem do sistema, cuja matriz característica torna-se não-singular e, portanto, passível de inversão.

O roteiro para a utilização deste procedimento é apresentado de uma forma construtiva na seção seguinte. Sua aplicação objetiva a equalização dos ganhos principais de um sistema multivariável de quinta ordem com três sinais de entrada e três sinais de saída.

### 7.3 Roteiro do Procedimento e Exemplo

Considere o seguinte sistema linear que sob o código AC1 aparece disponível na biblioteca de sistemas multivariáveis do tipo “*workbench*” que consta no “*site*” do Prof. F. Leibfritz [38].

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1320 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1712 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0445 & 0 & -0.8556 & -1.0130 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.4190 & 0 & -1.6650 \\ 1.5750 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix} u \quad (7.12a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (7.12b)$$

O sistema não possui nenhum zero de transmissão e apresenta os seguintes modos:

$$\lambda_{1,2} = -0.7801 \pm j1.0296 \quad \lambda_{3,4} = -0.0176 \pm j0.1826 \quad \lambda_5 = 0. \quad (7.13)$$

As características de resposta em frequência dos ganhos principais, superior e inferior, do sistema são mostradas na Figura 7.2, onde nota-se que eles são significativamente diferentes.

Para obter-se a equalização dos ganhos principais desse sistema sugere-se a aplicação do seguinte roteiro de procedimentos.

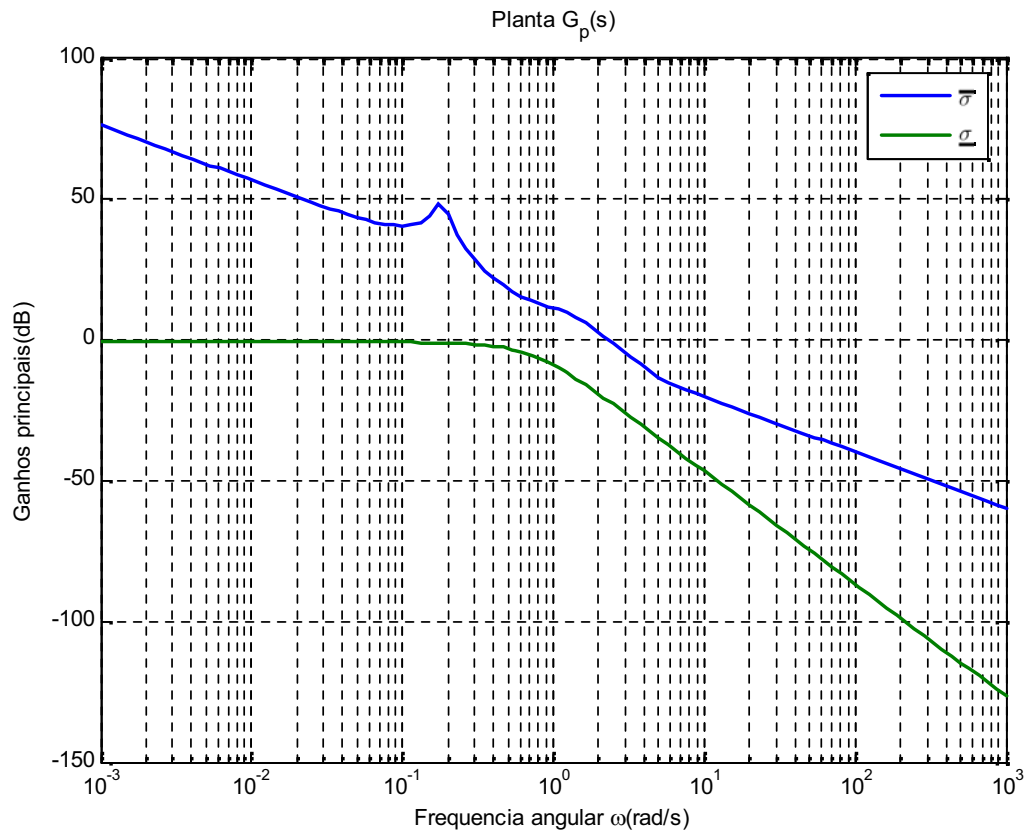


Figura 7.2: Ganhos principais do sistema.

### Passo 1 – Diagonalização da Representação do Sistema

Em um primeiro passo substitui-se a representação do sistema, que é dada pela Equação (7.12), por uma outra representação do tipo quase-diagonal que é obtida através da aplicação da transformação linear definida por  $z = T x$ , onde a matriz de transformação é a seguinte matriz

$$T = \begin{bmatrix} \text{Real}(t_1) & \text{Imag}(t_1) & \text{Real}(t_3) & \text{Imag}(t_3) & t_5 \end{bmatrix}, \quad (7.14a)$$

$$A t_i = \lambda_i t_i, \quad i=1,3,5. \quad (7.14b)$$

O resultado da transformação é o seguinte par de equações

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -0.7801 & 1.0296 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0296 & -0.7801 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0176 & -0.1826 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1826 & -0.0176 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0.1085 & -0.2942 & -0.8075 \\ -8.0767 & 0.2420 & 2.6685 \\ -4.9820 & -2.6568 & 3.9750 \\ 2.8932 & -6.2088 & -1.2090 \\ -1.4532 & 6.6121 & -0.3641 \end{bmatrix} u \quad (7.15)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.1674 & -0.1932 & 0.5084 & 0.8320 & 1 \\ -0.0378 & -0.0083 & -0.0448 & -0.1404 & 0 \\ -0.4465 & 0.1100 & -0.1387 & 0.0848 & 0 \end{bmatrix} z$$

que podem ser particionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_{1:4} \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_4 & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1:4} \\ z_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{1:4}\hat{B} \\ {}_5\hat{B} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} {}_1\hat{C} & 1 \\ {}_{2:3}\hat{C} & 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1:4} \\ z_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.16)$$

## Passo 2 – Extração do Integrador do Sistema para um de seus Canais de Saída

O diagrama de blocos correspondente às Equações (7.15)-(7.16) é mostrado na Figura 7.3a. Neste diagrama pode-se avançar o bloco correspondente ao integrador natural do sistema para o primeiro canal de saída do sistema mediante a necessária inclusão do bloco derivador, conforme a Figura 7.3b. Com esta manipulação a variável de estado  $z_5$  é substituída por uma nova variável,  $\bar{z}_5$ , a qual é equivalente a  $\bar{y}_1$  e  $y_1$ , e satisfaz às seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_5 &= {}_1\hat{C} \hat{A}_4 z_{1:4} + {}_1\hat{C} {}_{1:4}\hat{B} u + {}_5\hat{B} u \\ \bar{y}_1 &= \bar{z}_5 \end{aligned} \quad (7.17)$$

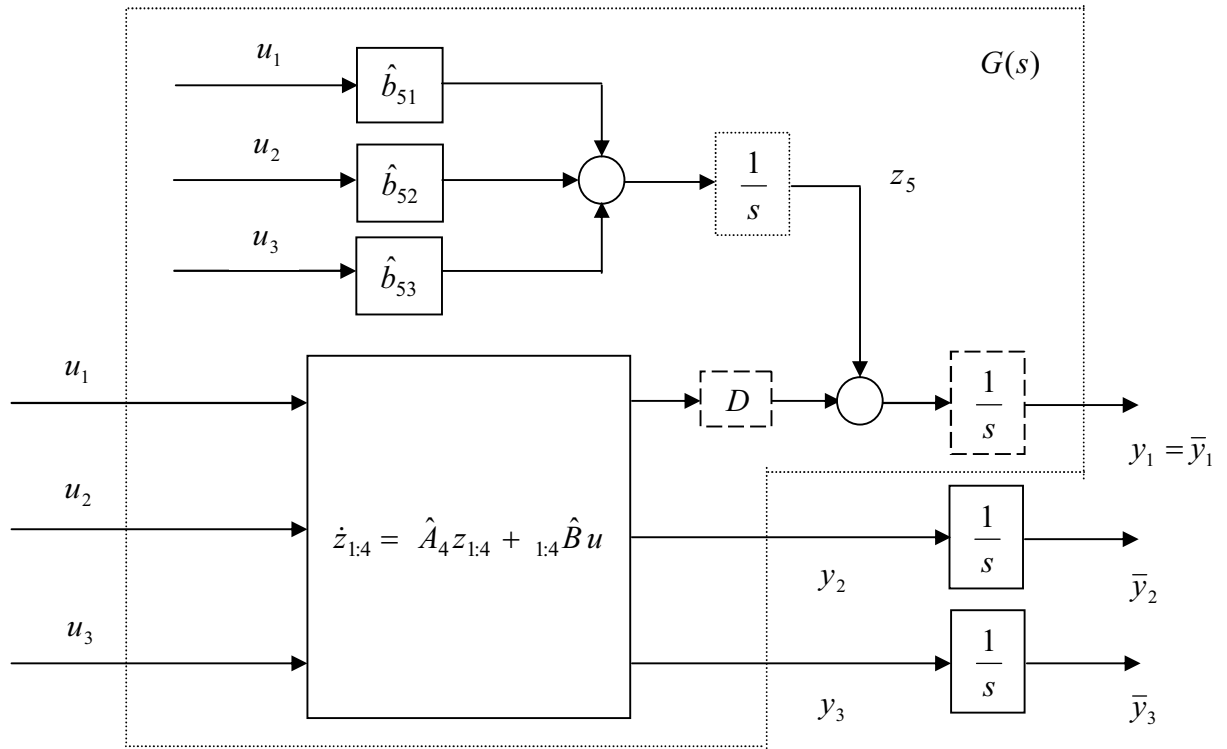


Figura 7.3: Diagrama de blocos do sistema a partir de sua representação quase-diagonalizada:  
a) não considera os blocos tracejados; b) não considera o bloco pontilhado.

### Passo 3 – Adição de Novos Integradores

Após o reposicionamento do integrador natural do sistema no seu primeiro canal de saída, é necessária a adição de integradores nos demais canais, conforme indica a Figura 3b. Esses novos integradores adicionam ao sistema duas novas variáveis de estado cujas equações são definidas por

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{y}}_2 \\ \dot{\bar{y}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Feitos esses arranjos, a representação do sistema aumentado toma a seguinte forma, que é perfeitamente semelhante à forma definida nas Equações (7.4) e/ou (7.5):

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{1:4} \\ \dot{\bar{y}}_1 \\ \dot{\bar{y}}_2 \\ \dot{\bar{y}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_4 & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 1} \\ {}_1\hat{C} & \hat{A}_4 & 0 & 0 & 0 \\ {}_2\hat{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}_3\hat{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1:4} \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{1:4}\hat{B} \\ {}_1\hat{C} & {}_{1:4}\hat{B} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (7.19)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1:4} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \end{bmatrix}^T$$

Substituindo-se na Equação (7.19) as sub-matrizes correspondentes, obtém-se a seguinte tripla de matrizes que representam o sistema na forma das Equações (7.4) e/ou (7.5).

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -0.7801 & 1.0296 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0296 & -0.7801 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0176 & 0.1826 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1826 & -0.0176 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0684 & 0.3231 & -0.1608 & 0.0782 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0378 & -0.0083 & -0.0448 & -0.1400 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4465 & 0.1100 & -0.1387 & 0.0848 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20a)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0.1085 & -0.2942 & -0.8075 \\ -8.0767 & 0.2420 & 2.6685 \\ -4.9820 & -2.6568 & 3.9750 \\ 2.8932 & -6.2088 & -1.2090 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20b)$$

e

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.20c)$$

A Figura 7.4 mostra os ganhos principais do sistema após o acréscimo dos novos integradores. Ao compará-la com a Figura 7.2 observa-se que, nas baixas frequências, esses integradores proporcionam um aumento na magnitude dos ganhos principais do sistema. Mesmo assim, esses ganhos continuam descasados.



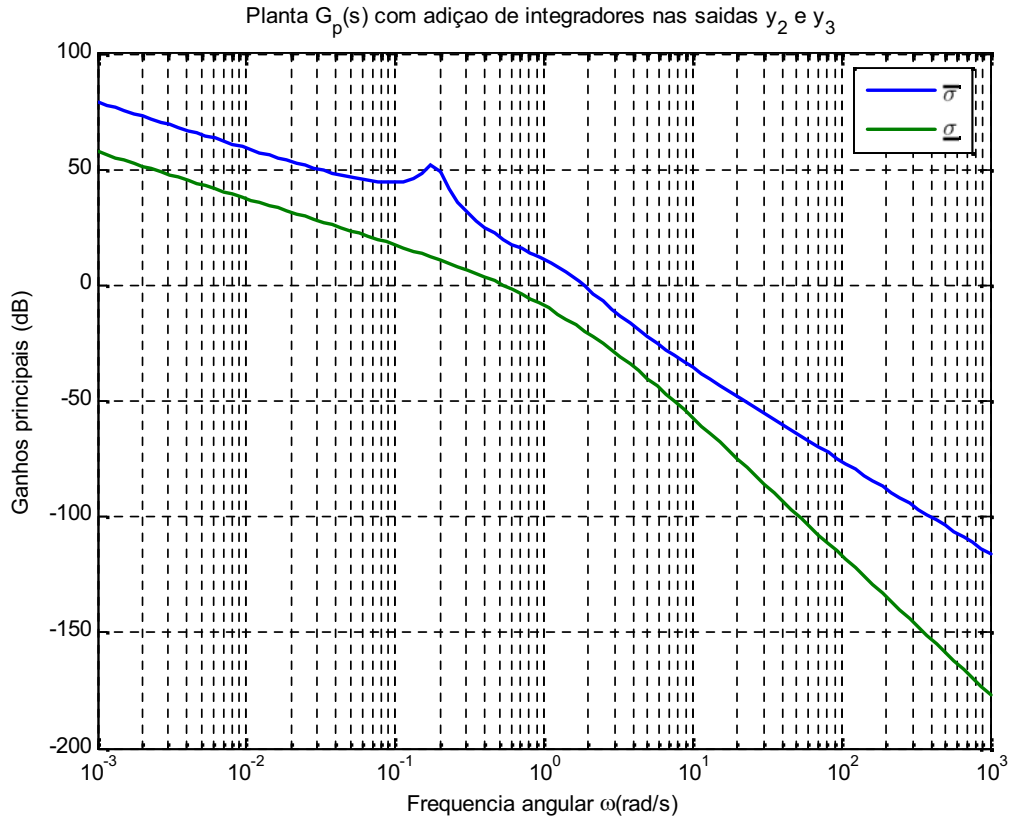


Figura 7.4: Ganhos principais do sistema após o acréscimo de dois integradores.

#### Passo 4 – Equalização dos Ganhos Principais

Aplicando-se o procedimento descrito na Seção 7.1 ao sistema representado pela realização em espaço de estados definida pela Equação (7.20), obtém-se a seguinte matriz  $\bar{H}$  que realiza a equalização dos ganhos do sistema em todas as frequências:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} -0.0703 & -0.2134 & 0.1128 & -0.0532 & -0.4645 & 0.2122 & 0.5258 \\ -0.0462 & -0.0339 & -0.0313 & -0.1468 & 0.0148 & 0.0793 & 0.1545 \\ -0.0984 & -0.2952 & 0.3784 & -0.1688 & -0.6244 & 0.5924 & 0.7069 \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

A Figura 7.5 mostra os ganhos principais da matriz de transferência  $T_{FOL}(s)$ , que define a Malha de Referência (Equação (7.7)) correspondente ao sistema sob consideração, sendo este representado pela realização em espaço de estados definida na Equação (7.20). Nesta figura só aparece uma curva, mas na verdade ela contém duas curvas perfeitamente

superpostas, que representam os ganhos principais de  $T_{FOL}(s)$  perfeitamente equalizados em todas as frequências.

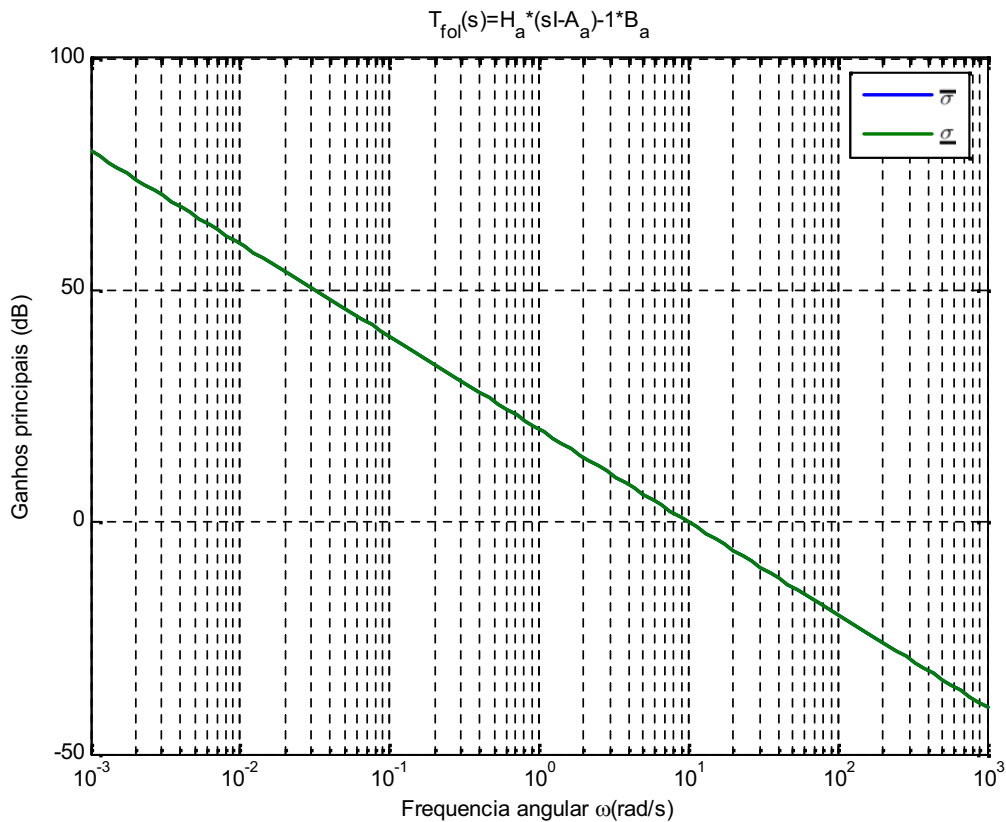


Figura 7.5: Ganhos principais de  $T_{FOL}(s)$  após a equalização de ganhos.

## 7.4 Conclusões

Foi apresentado neste capítulo um procedimento para a obtenção da equalização dos ganhos principais de sistemas multivariáveis que possuem pólos na origem. O procedimento se baseia no reposicionamento do integrador natural já existente na estrutura interna do sistema em um de seus canais de saída. Após esse reposicionamento a representação da estrutura básica do sistema, já sem o integrador removido para uma de suas saídas, assume um particionamento especial que tem ordem reduzida e matriz característica não-singular, podendo assim ser invertida. Com isso torna-se possível o uso da fórmula dada na Equação

(7.10) que originalmente só serve para a obtenção da equalização dos ganhos principais de sistemas multivariáveis que não possuem pólos na origem.

Uma vantagem intrínseca deste procedimento é que, ao aproveitar o integrador natural já existente na estrutura do sistema, ele reduz o número de novos integradores que precisam ser adicionados ao sistema para a obtenção da equalização dos ganhos. Isso é importante porque simplifica e/ou reduz a ordem do controlador do tipo LQG/LTR que pode ser projetado a partir da Malha de Referência obtida com os ganhos equalizados.

A eficiência do procedimento foi testada através de sua aplicação em um exemplo representado por um sistema de quinta ordem com duas entradas e duas saídas, e o resultado final foi a equalização dos ganhos do sistema da forma esperada.

## Capítulo 8: Conclusões e Sugestões para Futuros Trabalhos

O foco desta tese se concentrou em alguns problemas relacionados com a realização de projetos de controladores do tipo LQG/LTR para sistemas multivariáveis — primeiramente para o caso de sistemas multivariáveis instáveis, e depois para o caso de sistemas multivariáveis que possuem pólo na origem.

No primeiro caso observou-se a ocorrência de oscilações de baixas frequências mal amortecidas em sistemas multivariáveis instáveis e de fase mínima quando estes são controlados por controladores do tipo LQG/LTR, especialmente no caso em que os pólos instáveis do sistema ficam situados nas proximidades do eixo imaginário do plano- $s$ .

Os estudos realizados durante a elaboração desta tese indicaram que essas oscilações são decorrentes da não ocorrência, no sistema controlado em malha fechada, de um cancelamento perfeito dos pólos estabilizados, que originalmente, no sistema em malha aberta sem controlador, são instáveis e situados nas proximidades do eixo imaginário (Projeto Básico, na Seção 5.2).

Os estudos também mostraram que o referido cancelamento pode acontecer mediante o aumento do ganho de malha direta do sistema controlado. Este aumento de ganho faz com que os pólos estabilizados, do sistema em malha fechada, se aproximem cada vez mais dos zeros de transmissão estáveis que o controlador LQG/LTR introduz na malha do sistema, os quais são localizados em simetria, relativamente ao eixo imaginário do plano- $s$ , com os pólos instáveis do sistema em malha aberta sem controlador. Infelizmente, este aumento de ganho também excita outros modos estáveis e não-dominantes do sistema, que tendem a migrar para o semi-plano direito do plano- $s$ , e assim acabam se transformando em pólos instáveis.

Como proposta para resolver o problema causado pela presença dessas oscilações, esta tese apresentou a opção do uso de pré-compensadores dinâmicos para a estabilização prévia do sistema instável a ser controlador, para só em seguida projetar-se o controlador robusto do tipo LQG/LTR definitivo. A tese mostra, através de exemplo, que com esse procedimento consegue-se eliminar as oscilações de baixas frequências antes existentes, mas ao custo de um aumento exagerado na ordem do controlador final projetado (Projeto Completo, na Seção 5.3).

Para minimizar o problema relacionado com a ordem excessiva do controlador esta tese propôs um procedimento que permite a redução da ordem do pré-compensador dinâmico que é projetado para a estabilização prévia do sistema a ser controlado (planta). Foi mostrado que este procedimento é aplicável em sistemas cujas saídas independem dos estados que são desacoplados dos demais estados do sistema.

A redução da ordem do pré-compensador estabilizador também proporcionou uma redução na ordem do controlador do tipo LQG/LTR que foi projetado após a estabilização do sistema. Esta redução de ordem mostrou-se vantajosa em termos globais, mesmo reconhecendo-se que ela acarretou um pequeno prejuízo, em termos de acoplamento e desempenho transitório, no desempenho global do controlador (Projeto Intermediário, no Capítulo 6).

Com relação aos sistemas multivariáveis que possuem pólos na origem, esta tese apresentou, como contribuição, um roteiro de procedimentos para a obtenção da equalização dos ganhos principais dos sistemas dessa classe (Capítulo 7).

Uma vantagem intrínseca deste procedimento é que, ao aproveitar o integrador natural já existente na estrutura do sistema, reduz-se o número de novos integradores que precisam ser adicionados ao sistema para a obtenção da equalização dos seus ganhos principais. Isso é

importante porque simplifica e/ou reduz a ordem do controlador do tipo LQG/LTR que pode ser projetado a partir da Malha de Referência obtida com os ganhos equalizados.

No aspecto global de apresentação destaca-se que, para todos os problemas abordados, esta tese apresenta exemplos ilustrativos que mostram os bons resultados de suas propostas. Esses exemplos são apresentados detalhadamente, o que permite que sejam reconstituídos por qualquer pessoa interessada. Os programas computacionais usados nos projetos apresentados são incluídos nos Apêndices, o que facilita ainda mais a referida reconstituição.

Como sugestões para futuros trabalhos que eventualmente possam ampliar os resultados aqui apresentados, indicam-se as seguintes possibilidades:

- a realização de estudos para investigar a presença ou ausência de oscilações em sistemas de multivariáveis com pólos instáveis afastados do eixo imaginário, quando controlados por controladores do tipo LQG/LTR;
- a aplicação do roteiro de procedimento apresentado no Capítulo 7 na realização de projetos completos de controladores do tipo LQG/LTR para sistemas multivariáveis com pólos na origem;
- adaptação do roteiro de procedimentos apresentado no Capítulo 7 para casos de sistemas com pólo na origem, nos quais a remoção do integrador presente em sua estrutura interna seja feita para um de seus canais de entrada, ao invés de um de seus canais de saída.

Estes tópicos são relevantes e constituem boas possibilidades para temas de dissertações à nível de mestrado.

## Referências Bibliográficas

- [1] Brito-de-Souza, J. R., “New Methods for Analysis and Design of Decentralized Control Systems”. Tese de Doutorado, University of Missouri-Rolla, USA, 1989.
- [2] Athans, M., “A Tutorial on the LQG/LTR Method”, *Proceedings of American Control Conference*, Seattle, USA, 1986.
- [3] Åström, K. J., Wittenmark, B., *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [4] Ribeiro, R. R. P. “Estabilizadores de Sistemas de Potência com Ganhos Programados e Rede Neural Artificial”. Dissertação de Mestrado, PPGEE/CT/UFPA, 1997.
- [5] Åström, K. J., Wittenmark, B., *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice-Hall, 1997.
- [6] Clarke, D. W., Mohtadi, C., Tuffs, P. S., “Generalized Predictive Control — Part I. The Basic Algorithm”. *Automatica*, vol. 23, n°. x, pp. 149-169, 1987.
- [7] Dorato, P., Tempo, R., Muscato, G., “Bibliography on Robust Control”. *Automatica*, vol. 29, n°. 1, pp. 201-213, 1993.
- [8] Peres, P. L. D., Geromel, J. C., “Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares Incertos por Métodos de Programação Linear”. *Anais do 8º. Congresso Brasileiro de Automática*, vol. 1, pp. 238-243, Belém, PA, 1990.
- [9] Siljak, D. D., “Parameter Space Methods for Robust Control Design: A Guided Tour”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-34, n°. 7, pp. 674-688, 1989.

- [10] Peres, P. L. D., de Souza, S. R., Geromel, J. C., “Controle em  $H_\infty$  de Sistemas Dinâmicos com Restrições Estruturais”. *Controle & Automação*, vol. 4, n°. 2, pp. 67-76, 1994.
- [11] Doyle, J. C., “Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties”. *IEE Proceedings*, vol. 129 (Parte D), pp. 242-250, 1982.
- [12] Cruz, J. J., *Controle Robusto Multivariável*. São Paulo, SP: EdUSP – Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [13] Kailath, T., *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980.
- [14] Anderson, B. D. O., Moore, J. B., *Linear Optimal Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [15] Safonov, M. G., Athans, M., “Gain and Phase Margin of Multiloop LQG Regulators”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-22, n°. 2, pp. 173-179, 1977.
- [16] Elbert, T. F., *Estimation and Control of Systems*. New York, NY: Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 1984.
- [17] Doyle, J. C., “Guaranteed Margins for LQG Regulators”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-23, n°. 4, pp. 756-757, 1978.
- [18] Doyle, J. C., Stein, G., “Robustness with Observers”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-24, n°. 4, pp. 607-611, 1979.
- [19] Stein, G., Athans, M., “The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-32, n°. 2, pp. 105-114, 1987.



- [20] Ridgely, D. B., Banda, S. S., *Introduction to Robust Multivariable Control*. Relatório n°. AFWAL-TR- 085 –3102, Flight Dynamic Laboratory, Wright-Petterson Air Force Base, USA, 1986.
- [21] Brash, F. M., Pearson, J. B., “Pole Placement Using Dynamic Compensator”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-15, n°. 1, pp. 34-43, 1970.
- [22] Bhattacharyya, S. P., “Robust Stabilization Against Structured Perturbations”. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 99, Springer-Verlag, Berlin. 1987.
- [23] Holot, C. V., Looze, D. P., Bartlett, A. C., “Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics: Analysis via Parameter Space Methods”. *Automatica*, vol. 26, n°. 2, pp. 269-282. 1990.
- [24] Doyle, J. C., Stein, G., “Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-26, n°. 1, pp.4-16, 1981.
- [25] MacFarlane, A. G. J., Scott-Jones, D. F. A., “Vector Gain”. *Int. J. of Control*, vol. 29, n°. 1, pp. 65-91, 1979.
- [26] Lehtomaki, N. A., Sandell, N. R., Athans M., “Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-26, n°.1, pp.75-93, 1981.
- [27] Okada, T., Kihara, M., Nishio, Y., “Reduced Conservative Singular Value Analysis for Robustness”. *Int. J. of Control*, vol. 48, n°. 4, pp. 1455-1473, 1988.
- [28] Makino, M. S. T., *Projeto de Compensadores Dinâmicos para Posicionamento de Polos*. TCC, Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, UFPA, 1997.

- [29] Faleiros, A. C. e Yoneiama, T., *Teoria Matemática de Sistemas*. Editora Arte & Ciência, São Paulo, SP, (2002).
- [30] Matos, Edson J., Neves-de-Souza, Raimundo, Brito-de-Souza, Jorge R., “Projeto de Controlador Robusto para Sistema Multivariável Instável com Uso de Pré-Compensador Dinâmico”. *Anais em CD do 16º. Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2454-9, Salvador, BA, 2006.
- [31] Matos, E. J., Souza, R. N., Souza, J. R. B., “Uso de Pré-Compensador Dinâmico no Projeto de Controlador Robusto para Sistema MIMO Instável”. *Revista IEEE América Latina*, vol. 6, nº. 1, pp. 35-41, março de 2008.
- [32] Genesio, R., Milanese, M., “A Note on the Derivation and Use of Reduced-Order Models”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-21, nº. 2, pp. 118-122, 1976.
- [33] Jamshidi, M., *Large-Scale Systems: Modeling and Control*. New York: NY, North-Holland, 1983.
- [34] Aoki, M., “Control of Large-Scale Dynamic Systems by Aggregation”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-13, nº. 3, pp. 246-253, 1968.
- [35] Aoki, M., “Some Approximation Methods for Estimation and Control of Large Scale Systems”. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-23, nº. 2, pp. 173-182, 1978.
- [36] O’Dell, B. D., Misawa, E. A., “Obtaining Uniform Singular Values of Aumented Systems Using LQG/LTR”. *Proceedings of the American Control Conference*. Seattle, Washington, USA, junho-1995.
- [37] Neves-de-Souza, R., de Matos, E. J., Brito-de-Souza, J. R., “Roteiro para a Equalização de Ganhos de Sistemas Multivariáveis que Possuem Pólo na Origem — Um Exemplo”. *Proceedings of the XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Belém, PA, 2006.

- [38] Leibfritz, F., “COMPl<sub>e</sub>ib: Constrained Matrix-Optimization Problem Library 1.1 — A Collection of Test Examples for Nonlinear Semidefinite Programs, Control System Design and Related Problems”. Tech.-Report, — University of Trier, Department of Mathematics, D-54286 Trier, Germany, 2005. Disponível no site: <http://www.compleib.de/> (Acesso em 27/03/2008).

## **Anexo A1:**

### **PROBASICO – Rotina para o Projeto Básico**

```

% -----
%
% ProBasico_VF2008
%
% Projeto de controlador LQG/LTR para sistema MIMO instavel
% sem uso de pré-compensador dinâmico estabilizador.
%
% Ordem da planta = 6
% Numero de entradas = 2
% Numero de saidas = 2
%
% -----
%
a=[ -0.08527 -0.0001423 -0.9994 0.04142 0.0 0.1862;
    -46.86 -2.757 0.3896 0.0 -124.3 128.6;
    -0.4248 -0.06224 -0.06714 0.0 -8.792 -20.46;
    0.0 1.0 0.0523 0.0 0.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 0.0 -20.0 0.0;
    0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -20.0];
%
b=[0 0 0 0 20 0; 0 0 0 0 0 20]';
c=[1 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 0];
d=[0 0; 0 0];
%
modos=eig(a)%
pause
%
w=logspace(-3,3,200);
sv=sigma(a,b,c,d,w);
svsdb=20*log10(sv(1,:));
svidb=20*log10(sv(2,:));
semilogx(w,svsdb,w,svidb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Planta: Gp(s) (6a. ordem)')
pause
% -----
%
% Acréscimo de dois integradores.
% A ordem do modelo aumenta de 6a para 8a
%
% -----
a8=[a b; 0*ones(2,6) 0*eye(2)];
b8=[0*b; eye(2)];
c8=[c 0*eye(2)];
d8=d;
%
sv8=sigma(a8,b8,c8,d8,w);
sv8sdb=20*log10(sv8(1,:));
sv8idb=20*log10(sv8(2,:));
semilogx(w,sv8sdb,w,sv8idb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Planta mais Integradores: Gp(s)*I2/s (8a. ordem)')
pause
% -----
%
% Cálculo da matriz GAMA para equalização de ganhos
% em todas as frequências,
% e calculo de Tfol(s)=c(sI-A)-1*gama
%
% -----

```

```

LL=-inv(c*inv(a)*b);
LH=-inv(a)*b*LL;
gama=[LH; LL];
tfol=sigma(a8,gama,c8,d8,w);
tfolsdb=20*log10(tfol(1,:));
tfolidb=20*log10(tfol(2,:));
semilogx(w,tfolsdb,w,tfolidb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Matriz de Referencia (Target Feedback Open Loop): Tfol(s) (8a. ordem)')
pause
% -----
%
% Cálculo da matriz de ganhos Kf que define Tkf(s)=C*(sI-A)-1*Kf
%
% -----
q0=eye(2);
qf=gama*q0*gama';
%
mu=input('Entre com o valor de mi ==> ') %usamos mi=0.01
rf=mu*eye(2);
%
kf8=lqr(a8',c8',qf,rf);
%
tkf8=sigma(a8,kf8,c8,d8,w);
tkf8sdb=20*log10(tkf8(1,:));
tkf8idb=20*log10(tkf8(2,:));
semilogx(w,tkf8sdb,w,tkf8idb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Filtro de Kalman em malha aberta: Tkf(s) (8a. ordem)')
pause
% -----
%
% Loop Transfer Recovery
%
% -----
q2=input('Entre com o valor de q2 ==> ') %usamos q2=10^8
qc=c8'*c8*(1+q2);
rc=eye(2);
kc=lqr(a8,b8,qc,rc);
%
aa8=[a8 -b8*kc; 0*a8 a8-b8*kc-kf8*c8];
bb8=[0*b8; -kf8];
cc8=[c8 0*c8];
dd8=d;
%
sv8gk=sigma(aa8,bb8,cc8,dd8,w);
sv8gksdb=20*log10(sv8gk(1,:));
sv8gkidb=20*log10(sv8gk(2,:));
semilogx(w,tkf8sdb,w,tkf8idb,w,sv8gksdb,w,sv8gkidb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Gp(s)*I2/s*K(s) (16a. ordem) versus TKf(s) (8a. ordem)')
pause
% -----
%
% Simulação do sistema controlado
%
% -----
t8=[0:0.005:5];
y8y1=step(aa8-bb8*cc8,bb8,cc8,dd8,1,t8);

```

```

plot(t8,y8y1(:,1),t8,y8y1(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')
title('Resposta ao Degrau em R1: Gp(s)*I2/s*K(s) (16a. ordem)')
pause
y8y2=step(aa8-bb8*cc8,bb8,cc8,dd8,2,t8);
plot(t8,y8y2(:,1),t8,y8y2(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')
title('Resposta ao Degrau em R2: Gp(s)*I2/s*K(s) (16a. ordem)')
pause
% -----
%
% Obtenção dos gráficos dos sinais de controle
%
% -----
t06=[0:0.005:0.6];
%
hh8u=[0*c eye(2) 0*kc];
u8u1=step(aa8-bb8*cc8,bb8,hh8u,dd8,1,t06);
plot(t06,u8u1(:,1),t06,u8u1(:,2)), grid, axis([0.0 0.6 -8.0 10.0])
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Sinais de controle: u1 e u2')
title('Resposta ao Degrau em R1: Gp(s)*I2/s*K(s) (16a. ordem)')
pause
%
u8u2=step(aa8-bb8*cc8,bb8,hh8u,dd8,2,t06);
plot(t06,u8u2(:,1),t06,u8u2(:,2)), grid, axis([0.0 0.6 -4.0 3.0])
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Sinais de controle: u1 e u2')
title('Resposta ao Degrau em R2: Gp(s)*I2/s*K(s) (16a. ordem)')
pause
% -----
%
% Resposta em frequência de G(s)*K(s)
%
% -----
sv88gk=sigma(aa8,bb8,cc8,dd8,w);
sv88gksdb=20*log10(sv88gk(1,:));
sv88gkidb=20*log10(sv88gk(2,:));
semilogx(w,tkf8sdb,w,tkf8idb,w,sv88gksdb,w,sv88gkidb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Gp(s)*I2/s*K(s) (16a. ordem)')
pause
% -----
%
% Verificação das margens de ganho e fase
% do sistema controlado
%
% -----
alfazero=sigma(aa8,bb8,cc8,dd8,w,2);
semilogx(w(101:200),alfazero(2,101:200)), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Minimo valor singular')
title('I + Gp(s)*I2/s*K(s) (16a. ordem)')
pause
alfazero=alfazero(2,:);
alfazero=min(alfazero)
%
MG=1/(1-alfazero)
MP=2*asin(alfazero/2)*180/pi

```

```

pause
%
format long
disp(' ')
disp('Modos de  $G_p(s)*I_2/s*K(s)$  (16a. ordem): em Malha Aberta / em Malha Fechada')
[eig(aa8) eig(aa8-bb8*cc8)]
disp(' ')
disp('Zeros de Transmissão de  $G_p(s)*I_2/s*K(s)$ ')
tzero(aa8,bb8,cc8,dd8)
pause
format short
%
t8=[0:0.005:3];
for Kp=2:6, ...
    Kp, ...
    y8y1=step(aa8-bb8*Kp*cc8,bb8*Kp,cc8,dd8,1,t8); ...
    plot(t8,y8y1(:,1),t8,y8y1(:,2)), grid; ...
    xlabel('Tempo (s)'); ...
    ylabel('Saidas: y1 e y2'); ...
    title('Resposta ao Degrau em R1:  $G_p(s)*I_2/s*K(s)$  (16a. ordem)', ...
    pause; ...
    y8y2=step(aa8-bb8*Kp*cc8,bb8*Kp,cc8,dd8,2,t8); ...
    plot(t8,y8y2(:,1),t8,y8y2(:,2)), grid; ...
    xlabel('Tempo (s)'); ...
    ylabel('Saidas: y1 e y2'); ...
    title('Resposta ao Degrau em R2:  $G_p(s)*I_2/s*K(s)$  (16a. ordem)', ...
    pause; ...
end

```



## **Anexo A2:**

### **PROCOMPLETO – Rotina para o Projeto Completo**

```

% -----
%
% ProCompletoB_VF2008
%
% Projeto de controlador LQG/LTR para sistema MIMO instavel
% com uso de pré-compensador dinâmico.
%
% Ordem da planta aumentada = 8
% Numero de entradas = 2
% Numero de saidas = 2
%
% -----
a=A8;
b=B8;
c=C8;
d=D8;
modos=eig(a)
pause
%
w=logspace(-3,3,200);
sv=sigma(a,b,c,d,w);
svsdb=20*log10(sv(1,:));
svldb=20*log10(sv(2,:));
semilogx(w,svsdb,w,svldb), grid
xlabel('Frequência angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Planta aumentada Ga(s) (8a. ordem)')
pause
%
t=[0:0.01:12];
% -----
%
% Crescimento de dois integradores a planta aumentada Ga(s).
% A ordem do modelo aumenta de 8a. para 10a. ordem.
%
% -----
a10=[A8 B8; zeros(2,8) 0*eye(2)];
b10=[0*B8; eye(2)];
c10=[C8 0*eye(2)];
d10=D;
%
sv10=sigma(a10,b10,c10,d10,w);
sv10sdb=20*log10(sv10(1,:));
sv10ldb=20*log10(sv10(2,:));
semilogx(w,sv10sdb,w,sv10ldb), grid
xlabel('Frequência angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Planta aumentada mais Integradores: Ga(s)*I2/s (10a. ordem)')
pause
% -----
%
% Calculo da matriz GAMA (aumentada) para equalização de
% ganhos em todas as frequencias, e calculo de Tfol(s) (aumentada)
%
% -----
LL=-inv(c*inv(a)*b);
LH=-inv(a)*b*LL;
gama=[LH; LL];
%
tfol10=sigma(a10,gama,c10,d10,w);
tfol10sdb=20*log10(tfol10(1,:));
tfol10ldb=20*log10(tfol10(2,:));

```

```

semilogx(w,tfol10sdb,w,tfol10idb), grid
xlabel('Frequência angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Matriz de Referencia aumentada: Tfol(s) (10a. ordem)')
pause
% -----
%
%   Calculo da matriz de ganhos Kfa que define Tkfa(s) (aumentada)
%
% -----
q0=eye(2);
qf=gama*q0*gama';
%
mu=input('Entre com o valor de mi ==> ') %usamos mi=0.01
rf=mu*eye(2);
%
kf10=lqr(a10',c10',qf,rf);
%
tkf10=sigma(a10,kf10,c10,d10,w);
tkf10sdb=20*log10(tkf10(1,:));
tkf10idb=20*log10(tkf10(2,:));
semilogx(w,tkf10sdb,w,tkf10idb), grid
xlabel('Frequência angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Filtro de Kalman aumentado em malha aberta: Tkfa(s) (10a. ordem)')
pause
% -----
%
%   Loop Transfer Recovery
%
% -----
q2=input('Entre com o valor de q2 ==> ') %usamos q2=10^8
qc=c10'*c10*(1+q2);
rc=eye(2);
kc=lqr(a10,b10,qc,rc);
%
aa10=[a10 -b10*kc; 0*a10 a10-b10*kc-kf10*c10];
bb10=[0*b10; -kf10];
cc10=[c10 0*c10];
dd10=d;
%
sv10gk=sigma(aa10,bb10,cc10,dd10,w);
sv10gksdb=20*log10(sv10gk(1,:));
sv10gkidb=20*log10(sv10gk(2,:));
semilogx(w,tkf10sdb,w,tkf10idb,w,sv10gksdb,w,sv10gkidb), grid
xlabel('Frequência angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem) versus Tkfa(s) (10a. ordem)')
pause
% -----
%
%   Simulação do sistema controlado
%
% -----
t=[0:0.005:5];
%
y13y1=step(aa10-bb10*cc10,bb10,cc10,dd10,1,t);
plot(t,y13y1(:,1),t,y13y1(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')
title('Resposta ao Degrau em R1: Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)')
pause

```

```

%
y13y2=step(aa10-bb10*cc10,bb10,cc10,dd10,2,t);
plot(t,y13y2(:,1),t,y13y2(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')
title('Resposta ao Degrau em R2: Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)')
pause
% -----
%
% Obtenção dos gráficos dos sinais de controle
%
% -----
t06=[0:0.005:0.6];
hh10u=[0*c eye(2) 0*kc];
u13u1=step(aa10-bb10*cc10,bb10,hh10u,dd10,1,t06);
plot(t06,u13u1(:,1),t06,u13u1(:,2)), grid, axis([0 0.6 -8.0 10.0])
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Sinais de controle: u1 e u2')
title('Resposta ao Degrau em R1: Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)')
pause
%
u13u2=step(aa10-bb10*cc10,bb10,hh10u,dd10,2,t06);
plot(t06,u13u2(:,1),t06,u13u2(:,2)), grid, axis([0 0.6 -4.0 3.0])
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Sinais de controle: u1 e u2')
title('Resposta ao Degrau em R2: Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)')
pause
% -----
%
% Resposta em frequência de Ga(s)*Ka(s)
%
% -----
sv100gk=sigma(aa10,bb10,cc10,dd10,w);
sv100gksdb=20*log10(sv100gk(1,:));
sv100gkidb=20*log10(sv100gk(2,:));
semilogx(w,tkf10sdb,w,tkf10idb,w,sv100gksdb,w,sv100gkidb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)')
% -----
%
% Verificação das margens de ganho e fase do
% sistema controlado
%
% -----
alfazero=sigma(aa10,bb10,cc10,dd10,w,2);
semilogx(w(101:200),alfazero(2,101:200)), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Minimo valor singular')
title('I + Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)')
pause
alfazero=alfazero(2,:);
alfazero=min(alfazero)
%
MG=1/(1-alfazero)
MP=2*asin(alfazero/2)*180/pi
pause
%
format long
disp(' ')
disp('Modos de Ga(s)*Ka(s) (20a. ordem): em Malha Aberta / em Malha Fechada')
[eig(aa10) eig(aa10-bb10*cc10)]

```

```

disp(' ')
disp('Zeros de Transmissão de Ga(s)*Ka(s)')
tzero(aa10,bb10,cc10,dd10)
format short
%
for Kp=2:5, ...
    y13y1=step(aa10-bb10*Kp*cc10,bb10*Kp,cc10,dd10,1,t); ...
    plot(t,y13y1(:,1),t,y13y1(:,2)), grid, ...
    xlabel('Tempo (s)'), ...
    ylabel('Saidas: y1 e y2'), ...
    title('Resposta ao Degrau em R1: Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)'), ...
    pause, ...
    y13y2=step(aa10-bb10*Kp*cc10,bb10*Kp,cc10,dd10,2,t); ...
    xlabel('Tempo (s)'), ...
    ylabel('Saidas: y1 e y2'), ...
    title('Resposta ao Degrau em R2: Ga(s)*I2/s*Ka(s) (20a. ordem)'), ...
    pause; ...
end

```

## **Anexo A3:**

### **PROINTER – Rotina para o Projeto Intermediário**

```

% -----
%
% ProInterB_VF2008
%
% Projeto de controlador LQG/LTR para sistema MIMO instavel com
% uso de pré-compensador dinâmico estabilizador de ordem reduzida.
%
% Ordem da planta = 6
% Ordem do compensador dinamico = 1
% Ordem da planta aumentada = 7
% Numero de entradas = 2
% Numero de saidas = 2
%
% -----
a=A7;
b=B7;
c=C7;
d=D7;
modos=eig(a)
pause
%
z=[0 0 0 0 0 0 0]';
%
xxx=rref([a-modos(1)*eye(7) z]);
v1=xxx(:,5);
v1(5,1)=-1;
a*v1-modos(1)*v1;
xxx=rref([a-modos(2)*eye(7) z]);
v2=xxx(:,5);
v2(5,1)=-1;
a*v2-modos(2)*v2;
xxx=rref([a-modos(3)*eye(7) z]);
v3=xxx(:,5);
v3(5,1)=-1;
a*v3-modos(3)*v3;
v4=conj(v3);
xxx=rref([a-modos(5)*eye(7) z]);
v5=xxx(:,5);
v5(5,1)=-1;
a*v5-modos(5)*v5;
xxx=rref([a-modos(6)*eye(7) z]);
v6=xxx(:,6);
v6(6,1)=-1;
v6(7,1)=0;
a*v6-modos(6)*v6;
v7=xxx(:,7);
v7(6,1)=0;
v7(7,1)=-1;
a*v7-modos(7)*v7;
vv=[v5 real(v3) imag(v3) v2 v1 v6 v7];
%
aa=inv(vv)*a*vv
bb=inv(vv)*b
cc=c*vv
pause
% -----
%
% Obtenção do modelo reduzido, de 5a. ordem
%
% -----
aa1=aa(1:5,1:5)
aa2=aa(6:7,6:7)
aa12=aa(1:5,6:7)

```

```

aa21=aa(6:7,1:5)
pause
bb1=bb(1:5,:)
bb2=bb(6:7,:)
pause
cc1=cc(:,1:5)
cc2=cc(:,6:7)
pause
%
w=logspace(-3,3,200);
sv=sigma(a,b,c,d,w);
svsdb=20*log10(sv(1,:));
svldb=20*log10(sv(2,:));
xlabel('Frequência angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Planta aumentada Ga(s) (7a. ordem)')
%
sv1=sigma(aa1,bb1,cc1,d,w);
sv1sdb=20*log10(sv1(1,:));
sv1ldb=20*log10(sv1(2,:));
semilogx(w,svsdb,w,svldb,w,sv1sdb,w,sv1ldb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Planta aumentada Ga(s) (7a. ordem) X Modelo reduzido Gr(s) (5a. ordem)')
pause
%
sv2=sigma(aa2,bb2,cc2,d,w);
sv2sdb=20*log10(sv2(1,:));
sv2ldb=20*log10(sv2(2,:));
semilogx(w,svsdb,w,svldb,w,sv2sdb,w,sv2ldb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Planta aumentada Ga(s) (7a. ordem) versus Modelo reduzido (2a. ordem)')
pause
% -----
%
% Acréscimo de dois integradores.
% A ordem do modelo aumenta de 5a. para 7a. ordem
%
% -----
a7=[aa1 bb1; 0*ones(2,5) 0*eye(2)];
b7=[0*bb1; eye(2)];
c7=[cc1 0*eye(2)];
d7=d;
%
sv7=sigma(a7,b7,c7,d7,w);
sv7sdb=20*log10(sv7(1,:));
sv7ldb=20*log10(sv7(2,:));
semilogx(w,sv7sdb,w,sv7ldb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Modelo reduzido mais Integradores: Gr(s)*I2/s (7a. ordem)')
pause
% -----
%
% Cálculo da matriz GAMA para equalização de ganhos
% em todas as frequências,
% e calculo de Tfolr(s)
%
% -----
LL=-inv(cc1*inv(aa1)*bb1);
LH=-inv(aa1)*bb1*LL;
gama=[LH; LL];

```



```

%
tfol7=sigma(a7,gama,c7,d7,w);
tfol7sdb=20*log10(tfol7(1,:));
tfol7idb=20*log10(tfol7(2,:));
semilogx(w,tfol7sdb,w,tfol7idb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Matriz de Referencia reduzida: Tfolr(s) (7a. ordem)')
pause
% -----
%
% Cálculo da matriz de ganhos Kfr que define Tkfr(s)
%
% -----
q0=eye(2);
qf=gama*q0*gama';
%
mu=input('Entre com o valor de mi ==> ') %usamos mi=0.01
rf=mu*eye(2);
%
kf7=lqr(a7',c7',qf,rf);
%
tkf7=sigma(a7,kf7,c7,d7,w);
tkf7sdb=20*log10(tkf7(1,:));
tkf7idb=20*log10(tkf7(2,:));
semilogx(w,tkf7sdb,w,tkf7idb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Filtro de Kalman reduzido em malha aberta: Tkfr(s) (7a. ordem)')
pause
% -----
%
% Loop Transfer Recovery
%
% -----
q2=input('Entre com o valor de q2 ==> ') %usamos q2=10^8
qc=c7'*c7*(1+q2);
rc=eye(2);
kc=lqr(a7,b7,qc,rc);
%
aa7=[a7 -b7*kc; 0*a7 a7-b7*kc-kf7*c7];
bb7=[0*b7; -kf7];
cc7=[c7 0*c7];
dd7=d;
%
sv7gk=sigma(aa7,bb7,cc7,dd7,w);
sv7gksdb=20*log10(sv7gk(1,:));
sv7gkidb=20*log10(sv7gk(2,:));
semilogx(w,tkf7sdb,w,tkf7idb,w,sv7gksdb,w,sv7gkidb), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Gr(s)*I2*Kr(s) (14a. ordem) versus Tkfr(s) (7a. ordem)')
pause
% -----
%
% Simulação do modelo reduzido
%
% -----
t7=[0:0.001:2];
y7y1=step(aa7-bb7*cc7,bb7,cc7,dd7,1,t7);
plot(t7,y7y1(:,1),t7,y7y1(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')

```

```

title('Resposta ao degrau em R1: Gr(s)*I2/s*Kr(s) (14a. ordem)')
pause
y7y2=step(aa7-bb7*cc7,bb7,cc7,dd7,2,t7);
plot(t7,y7y2(:,1),t7,y7y2(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')
title('Resposta ao degrau em R2: Gr(s)*I2/s*Kr(s) (14a. ordem)')
pause
% -----
%
% Simulação da planta verdadeira Gp(s) com crescimento do
% compensador dinâmico de ordem reduzida, dos integradores
% e do controlador LQG/LTR de ordem reduzida
%
% (6a. + 1a. do compensador + 2a. do Integrador + 7a. do controlador LQG/LTR)
%
% -----
a9=[a b;0*ones(2,7) 0*eye(2)];
b9=[0*b; eye(2)];
c9=[c 0*eye(2)];
d9=d;
%
a97=[a9 -b9*kc; 0*ones(7,9) a7-b7*kc-kf7*c7];
b97=[0*b9; -kf7];
c97=[c9 0*ones(2,7)];
d97=d9;
eig(a97-b97*c97)
pause
%
y13y1=step(a97-b97*c97,b97,c97,d97,1,t7);
plot(t7,y13y1(:,1),t7,y13y1(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')
title('Resposta ao degrau em R1: Ga(s)*I2/s*Kr(s) (16a. ordem)')
pause
%
y13y2=step(a97-b97*c97,b97,c97,d97,2,t7);
plot(t7,y13y2(:,1),t7,y13y2(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Saidas: y1 e y2')
title('Resposta ao degrau em R2: Ga(s)*I2/s*Kr(s) (16a. ordem)')
pause
% -----
%
% Obtenção dos gráficos dos sinais de controle
%
% -----
t7=[0:0.001:0.8];
hh97u=[0*c eye(2) 0*kc];
u13u1=step(a97-b97*c97,b97,hh97u,d97,1,t7);
plot(t7,u13u1(:,1),t7,u13u1(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Sinais de controle: u1 e u2')
title('Resposta ao degrau em R1: Ga(s)*I2/s*Kr(s) (16a. ordem)')
pause
u13u2=step(a97-b97*c97,b97,hh97u,d97,2,t7);
plot(t7,u13u2(:,1),t7,u13u2(:,2)), grid
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Sinais de controle: u1 e u2')
title('Resposta ao degrau em R2: Ga(s)*I2/s*Kr(s) (16a. ordem)')
pause

```

```

% -----
%
% Resposta em frequência de  $G(s)I_2/s \cdot K_r(s)$ 
%
% -----
sv97gk=sigma(a97,b97,c97,d97,w);
sv97gksdb=20*log10(sv97gk(1,:));
sv97gkidb=20*log10(sv97gk(2,:));
semilogx(w,tkf7sdb,w,tkf7idb,w,sv97gksdb,w,sv97gkidb), grid
xlabel('Frequencia angular  $\omega$  (rad/s)')
ylabel('Ganhos principais (dB)')
title('Ga(s)*I2*Kr(s) (16a. ordem)')
pause
% -----
%
% Verificação das margens de ganho e fase do
% sistema controlado
%
% -----
alfazero=sigma(a97,b97,c97,d97,w,2);
semilogx(w(101:200),alfazero(2,101:200)), grid
xlabel('Frequencia angular  $\omega$  (rad/s)')
ylabel('Minimo valor singular')
title('I + Ga(s)*I2*Kr(s) (16a. ordem)')
pause
alfazero=alfazero(2,:);
alfazero=min(alfazero)
%
MG=1/(1-alfazero)
MP=asin(alfazero/2)*180/pi
pause
%
format long
disp(' ')
disp('Modos de Ga(s)*I2/s*Kr(s) (16a. ordem): em Malha Aberta / em Malha Fechada')
[eig(a97) eig(a97-b97*c97)]
disp(' ')
disp('Zeros de Transmissão de Ga(s)*I2/s*Kr(s)')
tzero(a97,b97,c97,d97)
format short
%
for Kp=2:10; ...
    Kp, ...
    y13y1=step(a97-b97*Kp*c97,b97*Kp,c97,d97,1,t7); ...
    plot(t7,y13y1(:,1),t7,y13y1(:,2)), grid; ...
    xlabel('Tempo (s)'), ...
    ylabel('Saidas: y1 e y2'), ...
    title('Resposta ao degrau em R1: Ga(s)*I2/s*Kr(s) (16a. ordem)'), ...
    pause; ...
    y13y2=step(a97-b97*Kp*c97,b97*Kp,c97,d97,2,t7); ...
    plot(t7,y13y2(:,1),t7,y13y2(:,2)), grid; ...
    xlabel('Tempo (s)'), ...
    ylabel('Saidas: y1 e y2'), ...
    title('Resposta ao degrau em R2: Ga(s)*I2/s*Kr(s) (16a. ordem)'), ...
    pause; ...
end

```