

Fundamentos

Este capítulo trata-se da parte teórica deste trabalho, tal como a revisão de literatura e fundamentação teórica. Na revisão de literatura será descrito a linha temporal deste TCC. Na fundamentação teórica serão descritos de forma clara as teorias nas quais este trabalho será emabasado, como por exemplo, técnicas de modelagem de sistemas e projeto de controladores.

1.1 Revisão de Literatura

Pode-se afirmar que o primeiro trabalho significativo de controle foi o regulador centrífugo construído por James Watt para o controle de velocidade de uma máquina de tear, no século XVIII. O sistema permitia realizar o controle da velocidade, controlando a injeção de combustível na máquina a vapor.

Segundo Katsuhiko (2010), trabalhos importantes como de Minorsky, Nyquist e Hazen, datados entre as décadas de 20 e 30, contribuíram para o progresso da teoria de controle. Minorsky, em 1922, trabalhou com pilotagem de embarcações utilizando controladores automáticos e demonstrou por meio de equações diferenciais a estabilidade do sistema. Em 1932, Nyquist desenvolveu um procedimento no qual determina a estabilidade de sistemas em malha fechada com base na resposta em malha aberta. E Hazen, em 1934, introduziu o termo *servomecanismos* para sistemas de controle de posição e analisou o projeto de servomecanismos a relé.

No século XX, acontecimentos como a Segunda Guerra Mundial estimulou a pesquisa em sistemas de controle. No final dos anos 50, a teoria de controle já era bastante consolidada, sendo que o carro chefe eram métodos que utilizavam a resposta em frequência e com muitas aplicações industriais, como por exemplo, a utilização de controladores PID para o controle de pressão, temperatura, etc. Os métodos de resposta em frequência e do lugar das raízes, os quais são a base da teoria clássica de controle, conduziram a sistemas que são estáveis e satisfatórios para um determinado conjunto de condições. Esses

sistemas são aceitáveis, porém não são ótimos no sentido literal do termo.

Entre as décadas de 60 e 80, segundo Katsuhiko (2010), o controle ótimo de sistemas determinísticos, controle adaptativo e de aprendizagem foi altamente pesquisado. Diferentemente da teoria clássica, esses métodos se enquadram na teoria de controle moderno. Essa teoria se baseia no domínio do tempo em sistemas de equações diferenciais. Como vantagem, temos que essa teoria simplificou o projeto de sistemas de controle já que se baseia no modelo de um sistema controle real. Em contrapartida, a estabilidade é sensível ao erro entre o sistema real e seu modelo. Dessa forma, quando o controlador projetado for aplicado no sistema, o mesmo poderá ficar instável.

Um dos sistemas clássicos de controle que há na literatura, é o pêndulo invertido. Este sistema possui uma única entrada e várias saídas. Dessa maneira, tratá-lo com técnicas de controle moderno tende a facilitar a estabilidade do mesmo.

Em Ooi (2003) a técnica utilizada para controle do pêndulo foi o LQR. Também desenvolveu um controlador por alocação de pólos para a estabilização do sistema. Dessa forma, foi capaz realizar a comparação entre esses dois métodos e saber qual dos dois foi mais eficaz. Pelas simulações concluiu-se que os dois métodos atendeu, com ressalvas de que o controlador LQR ofereceu uma maior confiabilidade.

A técnica *PID Backstepping*, que é não linear, foi utilizada por Thao; Nghia; Phucand (2010) para controlar um pêndulo invertido sobre duas rodas (PIDR). Essa técnica consiste basicamente em uma estrutura de controle que possui três malhas de controle, sendo elas: 1) a malha principal, desenvolvida a partir da técnica não linear *backstepping* que manterá o pêndulo em equilíbrio; 2) a segunda malha que utiliza um PD para controlar a posição do robô e; 3) um controlador PI para o controle de movimentação.

Em Junfeng; Wanying (2011) novamente é feito uma comparação entre o controlador ótimo LQR com o controlador por alocação de pólos. Contudo, neste artigo, conclui-se que o *overshoot* foi menor por meio da técnica de alocação de pólos e que o tempo de estabilização foi quase comparável ao do LQR.

No artigo de Juang; Lurr (2013), os autores propuseram a desenvolver um protótipo utilizando o Arduino como microcontrolador e a implementação de duas técnicas de controle, sendo elas o PID e LQR na forma de PI-PD. Os resultados obtidos deixam bem claro que a técnica PI-PD foi muito mais eficaz em todos sentidos do que a utilização pura do PID. Como concluído, a estabilização por PID é marginal e as oscilações angulares excedem o limite máximo de torque que os motores podem oferecer. Já no PI-PD ou LQR, a estabilidade é alcançada e ainda o controlador é capaz de compensar o desalinhamento do CG, fazendo com que o robô retorne para a posição angular inicial e que é a desejada.

Em Paula (2014), o autor utilizou duas técnicas de controle discreto, LQR com ação integral e alocação de pólos. A primeira técnica utilizada teve como objetivo a estabiliza-

ção do pêndulo e a segunda o controle de velocidade dos motores. A técnica de alocação de pólos além de realizar o controle dos motores, teve como objetivo interfaciar o controle de ângulo e o sinal enviado para os motores.

Por último, Alves (2018), além de projetar um controlador por meio do controlador LQR, apresenta duas técnicas de linearização, sendo elas: a jacobina e a por realimentação. A modelagem do sistema baseou-se na equação Lagrangeana e após encontrar as equações de movimento, passou-se as mesmas para o Espaço de Estados. Os resultados obtidos foram satisfatório, contudo, ao sofrer interferências, como distúrbio e ruídos o sistema passa a ser mais oscilante.

Como dissertado acima, há vários trabalhos com diferentes resultados para o mesmo tema. Isso reflete apenas que por se tratar de um sistema altamente instável e não linear, faz com que sempre precise de novos estudos e novos testes. Ademais, quando se há domínio de um determinado assunto, é possível transformar os resultados teóricos em um produto e que será refletido de alguma forma na sociedade. Há vários estudos sobre o pêndulo invertido, pois o funcionamento do mesmo está presente em diferentes aplicações práticas, desde um pouso/lançamento de um foguete até um veículo de transporte humano, como o *Segway*.

O *Segway*, visto na Figura 1.1, inventado por Dean Karmen e revelado em dezembro de 2001 tem o funcionamento idêntico ao do pêndulo invertido, com adição que o mesmo está sobre duas rodas. A função básica deste veículo é o transporte de uma única pessoa. O sistema entende que deve-se locomover para frente ou freiar, devido a inclinação que o passageiro impõe sobre o veículo. Hoje em dia, existem vários modelos e cada um com uma especificação diferente um do outro.



Figura 1.1: Segway X2 SE.
Fonte: Segway, 2019.

1.2 Modelagem do Sistema

Nesta seção, além de apresentar a modelagem de um pêndulo invertido sobre duas rodas, também será mostrado como é realizado a linearização de sistemas por meio da série de Taylor e a transposição das equações de movimento para o espaço de estados.

1.2.1 Equações Dinâmicas dos Motores

Segundo Schiling (2017), o motor CC pode ser modelado através de um circuito elétrico como visto na Figura 1.2.

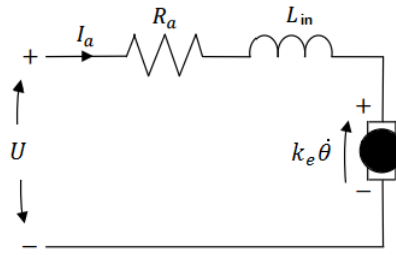


Figura 1.2: Representação elétrica dos motores.
Fonte: Schiling (2017).

Aplicando a lei das tensões de Kirchoff, pode-se estabelecer uma relação entre as tensões internas do circuito do motor CC considerando-se separadamente cada componente. Para o circuito da Figura (1.2), obtemos a seguinte equação.

$$U = R_a I_a + k_e \dot{\theta} + L_{in} \frac{di}{dt} \quad (1.1)$$

O parâmetro U representa a tensão de controle aplicada no motor. Os parâmetros R_a e L_{in} representam a resistência e a indutância dos enrolamentos do estator respectivamente. A constante da força contra eletromotriz é dada por k_e e $\dot{\theta}$ representa a velocidade angular do motor. Devido as condições de funcionamento do motor, como por exemplo, a constante de tempo elétrica ser muito menor do que a mecânica, é possível ignorar a indutância L_{in} . Sendo assim, simplifica-se a Equação 1.1.

$$U = R_a I_a + k_e \dot{\theta} \quad (1.2)$$

O torque T_m produzido pelo motor é proporcional a corrente de enrolamento I_a , por meio da constante de torque do motor k_t .

$$T_m = k_t I_a \quad (1.3)$$

Desta maneira, é preciso encontrar os valores das constantes de torque k_t e força contra eletromotriz k_e . A primeira, pode ser obtida reagando a equação 1.3. Já a constantes k_e é obtida pela equação 1.5.

$$k_t = \frac{T_m}{I_a} \quad (1.4)$$

$$V_e = k_e \dot{\theta} \quad (1.5)$$

Em que V_e e $\dot{\theta}$ são a tensão da força contra eletromotriz e a velocidade angular do motor. Pelo *datasheet* ou medindo a velocidade do motor com um tacômetro, é obtida a mesma em rpm, dessa forma é preciso readequar a equação 1.5.

$$V_e = k_e \frac{2\pi n}{60} \quad (1.6)$$

Aplicando novamente a lei de Kirchoff no circuito da Figura 1.2 para encontrar a tensão de armadura V_e , sendo V_n a tensão nominal do motor.

$$V_e = V_n - I_a R_a \quad (1.7)$$

Substituindo agora a equação 1.8 na equação 1.6 e rearranjando a mesma em termos de k_e , encontra-se a constante da força contra eletromotriz.

$$k_e = \frac{(V_n - I_a R_a) 60}{2\pi n} \quad (1.8)$$

Como os motores serão controlados por PWM (*Pulse Width Modulation*), ou seja, controle por meio da tensão em seus enrolamentos, a corrente I_a deve ser substituída da equação 1.3. Uma equação que diz respeito a corrente I_a pode ser encontrada a partir da equação 1.2, isolando a mesma.

$$I_a = \frac{U - k_e \dot{\theta}}{R_a} \quad (1.9)$$

Dessa forma, com a equação 1.9 encontra-se uma equação que descreve o torque de cada motor.

$$T_m = \frac{n k_t U}{R_a} - \frac{n k_t k_e \dot{\theta}}{R_a} \quad (1.10)$$

1.2.2 Equações Dinâmicas da Estrutura

A Figura 1.3 mostra o diagrama de corpo livre do pêndulo em função das forças horizontais, perpendiculares e dos momentos atuantes na estrutura. O ângulo α , é a variável que deve ser controlada e mantida em 0° com a vertical.

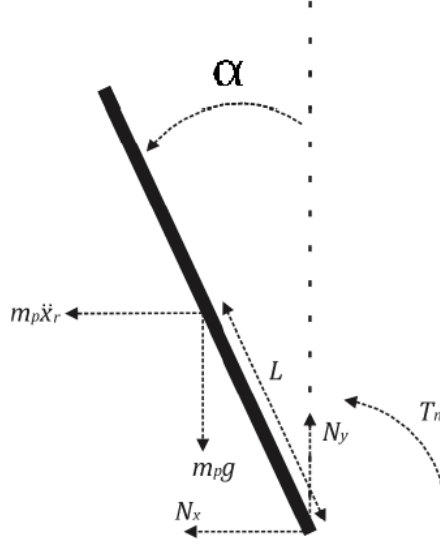


Figura 1.3: Diagrama corpo livre do chassi.

Fonte: Schiling (2017).

As primeiras equações encontradas é a de momento, no sentido anti-horário, em torno do centro de massa do pêndulo e das forças atuantes na estrutura, como visto na Figura 1.3.

$$T_m + m_p g L \sin \alpha + m_p \ddot{x}_r L \cos \alpha = J_p \ddot{\alpha} \quad (1.11)$$

$$-N_x - m_p \ddot{x}_r = m_p \ddot{x}_p \quad (1.12)$$

$$N_y - m_p g = m_p \ddot{y}_p \quad (1.13)$$

A equação 1.11 tem grande importância no sistema, já que a partir dela pode ser obtido as equações de estado.

As acelerações \ddot{x}_p e \ddot{y}_p são obtidas a partir da derivada segunda das distâncias x_p e y_p com relação ao centro de massa do pêndulo.

$$x_p = -L \sin \alpha \quad (1.14)$$

$$y_p = L \cos \alpha \quad (1.15)$$

A segunda derivada para as equações 1.14 e 1.15 são vistas em

$$\ddot{x}_p = -L \ddot{\alpha} \cos \alpha + L \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \quad (1.16)$$

$$\ddot{y}_p = -L \ddot{\alpha} \sin \alpha - L \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \quad (1.17)$$

1.2.3 Equações Dinâmicas das Rodas

A roda gira sob a influência do torque de um motor CC. O sistema se movimenta na direção x devido ao contato com o chão que gera uma força de reação F . O diagrama de corpo livre da roda é mostrado na Figura 1.4.

$$N_x - m_r \ddot{x}_r - F = 0$$

Rearranjando a equação 1.12 em termos da variável N_x e substituindo em 1.19, pode-se isolar \ddot{x}_r , encontrando assim a equação da mesma.

$$\ddot{x}_r = \frac{m_p \ddot{x}_p + F}{(-m_p - m_r)} \quad (1.23)$$

Na equação 1.23 se faz necessário conhecer o parâmetro F . Dessa forma, utilizou-se a equação 1.18 para determinar F . A variável da aceleração angular $\ddot{\theta}$ pode substituída, como visto na equação 1.21. Sendo assim, é possível substituir essas variáveis em 1.23.

$$\ddot{x}_r = \frac{m_p \ddot{x}_p r^2 - T_m r}{r^2(-m_p - m_r) - J_r} \quad (1.24)$$

Por último, substitui na equação 1.11 as equações 1.16 e 1.24. Reajeitando e simplificando matematicamente os termos da equação, encontra-se um nova que contenha apenas termos com α e suas derivadas:

$$\ddot{\alpha} = \frac{T_m(Z + m_p r L \cos \alpha) + m_p g L \sin \alpha Z - m_p^2 r^2 L^2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha}{J_p Z - m_p^2 r^2 L^2 \cos^2 \alpha} \quad (1.25)$$

em que,

$$Z = r^2(m_p + m_r) + J_r$$

Percebe-se que a equação 1.25 está em termos de do torque do motor T_m . Dessa forma, essa variável será substituída pela sua equivalente vista na equação 1.10. Assim, é necessário apenas realizar algumas manipulações algébricas para chegar em uma equação não linear para a aceleração angular do pêndulo em termos da tensão elétrica que se aplica no motor CC. Essa equação pode ser vista em 1.26.

$$\ddot{\alpha} = \frac{(Z + m_p r L \cos \alpha) 2k_t (U - k_e \dot{\theta}) + m_p g R_a L Z \sin \alpha}{R_a (J_p Z - m_p^2 r^2 L^2 \cos^2 \alpha)} \quad (1.26)$$

Para encontrar a equação da aceleração que diz respeito a roda $\ddot{\theta}$, os passos seguidos foram parecidos com os quais encontraram a equação de $\ddot{\alpha}$. Dessa forma, a equação para a aceleração angular da roda $\ddot{\theta}$ é vista em 1.26.

$$\ddot{\theta} = \frac{L r m_p \cos \alpha [g L R_a m_p \sin \alpha + 2k_t (U - k_e \dot{\theta})] + J_p 2k_t (U - k_e \dot{\theta})}{R_a (J_p Z - m_p^2 r^2 L^2 \cos^2 \alpha)} \quad (1.27)$$

1.2.5 Linearização em torno de um Ponto de Equilíbrio

Segundo Katsuhiko (2010), um sistema pode estar operando com funcionamento normal em torno de um ponto de equilíbrio, e os sinais envolvidos podem ser considerados pequenos em torno deste ponto. Assim, se o sistema opera em torno deste ponto e os sinais envolvidos são pequenos, é possível aproximar uma equação não linear por um sistema linear. Este sistema novo, linearizado, é equivalente ao sistema não linear considerado dentro de um conjunto de operações determinadas.

O caso mais comum de se realizar uma linearização é com a expansão em série de Taylor em torno do ponto de operação. Para realizar este tipo de linearização, desconsidera os termos de ordem maiores da série. Dessa forma, é preciso que estes termos sejam suficientemente pequenos.

Aproximação linear genérica de sistemas não lineares

Katsuhiko (2010), aproxima um modelo não linear em um linear, admitindo que as variáveis desviem ligeiramente de alguma condição de operação. Considerando um sistema genérico, no qual a entrada é $x(t)$ e a saída é $y(t)$, temos que:

$$y(t) = f(x) \quad (1.28)$$

Caso a condição de operação normal corresponda a (x^{eq}, y^{eq}) , então a equação 1.28 pode ser expandida na série de Taylor em torno desse ponto:

$$y = f(x) = f(x^{eq}) + \frac{df}{dx}(x - x^{eq}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - x^{eq})^2 + \dots \quad (1.29)$$

sendo que as derivadas df/dx , d^2f/dx^2 , ... são avaliadas em torno do ponto de operação. Se a variação de $x - x^{eq}$ for pequena, despreza-se os termos de ordem mais elevadas. Dessa forma, a equação 1.29 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$y = y^{eq} + K(x - x^{eq}) \quad (1.30)$$

sendo que,

$$y^{eq} = f(x^{eq})$$

$$K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^{eq}}$$

Reescrevendo a equação 1.30, conclui-se que $y - y^{eq}$ é proporcional a $x - x^{eq}$, como segue:

$$y - y^{eq} = K(x - x^{eq}) \quad (1.31)$$

A Equação 1.31 fornece um modelo linear para um sistema matemático não linear dado pela Equação 1.28, próximo do ponto de operação (x^{eq}, y^{eq}) , segundo Katsuhiko (2010).

Aproximação Linear das Equações de Movimento do Sistema

As equações de movimento não lineares que rejeitam o sistema, 1.26 e 1.27, serão linearizadas com o intuito de obter um modelo linear e assim, utilizar as técnicas de controle linear. Dessa maneira, deve-se apenas a atenção a fidelidade entre o sistema real, não linear, e o modelo linearizado.

A premissa principal é de que o pêndulo fique sempre em 0° , com uma pequena variação em torno deste ponto. Dessa forma, o ponto de operação será próximo a 0° .

Assim sendo, utilizando a Equação 1.31 em termos da variável α e tomando o ponto de equilíbrio como sendo $x^{eq} = 0^\circ$, temos que os termos não lineares ficam sendo:

$$\sin \alpha = \alpha$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$\dot{\alpha}^2 = 0$$

Substituindo esses termos linearizados nas equações 1.26 e 1.27, encontra-se as equações de movimento lineares para o sistema do pêndulo invertido sobre duas rodas. Essas Equações podem ser vistas em 1.32 e 1.33.

$$\ddot{\alpha}_{LIN} = \frac{(Z + m_p r L) 2k_t (U - k_e \dot{\theta}) + R_a m_p L \alpha g Z}{R_a (J_p Z - m_p^2 r^2 L^2)} \quad (1.32)$$

$$\ddot{\theta}_{LIN} = \frac{L r m_p [g L R_a m_p \alpha + 2k_t (U - k_e \dot{\theta})] + J_p 2k_t (U - k_e \dot{\theta})}{R_a (J_p Z - m_p^2 r^2 L^2)} \quad (1.33)$$

1.2.6 Modelagem no Espaço de Estados

Referências

- Alves, R. G. *Controle de um pêndulo invertido utilizando técnica de linearização por realimentação*. Ouro Preto, MG, 2018.
- Juang, H.; Lurrr, K. Design and control of a two-wheel self-balancing robot using the arduino microcontroller board. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION (ICCA), 2013. *Anais...* [S.l.: s.n.], 2013. p.634–639.
- Junfeng, W.; Wanying, Z. Research on Control Method of Two-wheeled Self-balancing Robot. In: FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT COMPUTATION TECHNOLOGY AND AUTOMATION, 2011. *Anais...* [S.l.: s.n.], 2011. v.1, p.476–479.
- Katsuhiko, O. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed..ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- Ooi, R. C. *Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot*. Western Australia, 2003.
- Paula, A. R. de. *Modelagem e controle do pêndulo invertido sobre duas rodas*. Fortaleza, CE, 2014.
- Schiling, D. E. *Modelagem e Controle de um Robô de Eixo Único em Sistema de Pêndulo Invertido*. Ijuí, RS, 2017.
- Thao, N. G. M.; Nghia, D. H.; Phucand, N. H. A PID backstepping controller for two-wheeled self-balancing robot. In: INTERNATIONAL FORUM ON STRATEGIC TECHNOLOGY 2010. *Anais...* [S.l.: s.n.], 2010. p.76–81.