

# Construção e controle de um sistema do tipo pêndulo invertido sobre duas rodas

Matheus Ferreira Costa

Orientador: Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva

Coorientador: Prof. Me. Juliano de Barros Veloso e Lima

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
*campus* Divinópolis  
Graduação em Engenharia Mecatrônica

25 de Junho de 2019

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentação Teórica
- 3 Recursos Utilizados
- 4 Controlador LQG
- 5 Considerações Finais
- 6 Referências Bibliográficas

# Motivação

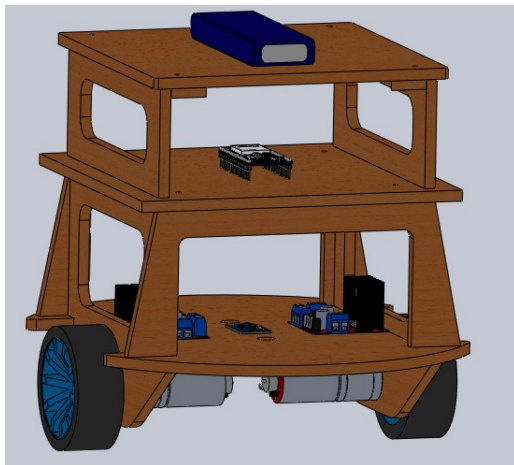


Figura: Estrutura modelada no SolidWorks.

# Objetivos

Construir um sistema do tipo pêndulo invertido sobre duas rodas e controlar o mesmo para que fique em torno de  $0^\circ$  utilizando técnica de controle moderno.

- Realizar o desenho do protótipo
- Obter o modelo não linear contínuo do sistema
- Linearizar o modelo e realizar a discretização
- Projetar o controlador LQG
- Analisar o desempenho do controlador
- Construção do protótipo
- Implementação do controlador na planta física

# Estado da Arte

- Sistema de Controle de Pêndulo Invertido (PEDROSO; MODESTO, 2017)
- Identificação e Controle de um Veículo Segway para fins Educacionais (MELO, 2017)
- *Embedded LQR controller design for self-balancing robot* (ENGIN, 2018)

# Modelagem do Sistema

- Modelagem newtoniana:  $F = m\ddot{x}$
- Subsistema elétrico (PAULA, 2014)

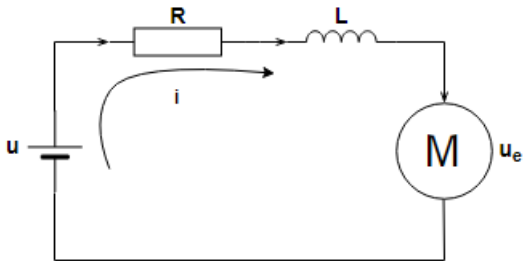


Figura: Representação elétrica dos motores.

$$T_1 = \frac{K_m}{R}u - \frac{K_e K_m}{R}(\dot{\alpha}_w - \dot{\theta}_b)$$

# Modelagem do Sistema

- Equação de movimento das rodas (BONAFILIA *et al*, 2013)

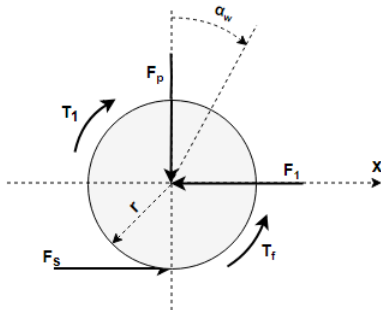


Figura: Diagrama corpo livre da roda.

$$F_1 = - \left( M_w + \frac{J_w}{r^2} \right) \ddot{x}_w - \left( \frac{K}{r^2 R} \right) \dot{x}_w + \left( \frac{K}{r R} \right) \dot{\theta}_b + \left( \frac{K_m}{r R} \right) u - \frac{T_f}{r}$$

# Modelagem do Sistema

- Equação de movimento da estrutura (BONAFILIA *et al*, 2013)

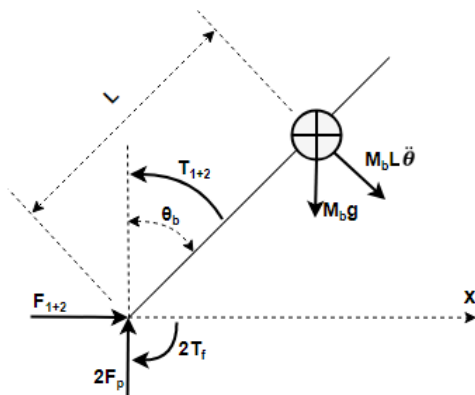


Figura: Diagrama corpo livre do chassi.



# Modelagem do Sistema

- EDO em relação a aceleração linear ( $\ddot{x}$ )

$$\left(2\frac{J_w}{r^2} + 2M_w + M_b\right)\ddot{x} = 2\left(\frac{b}{r^2} - \frac{K}{r^2R}\right)\dot{x} - (M_bL \cos(\theta))\ddot{\theta} + 2\left(\frac{K}{rR} - \frac{b}{r}\right)\dot{\theta} + 2\frac{K_m}{rR}u$$

- EDO em relação a aceleração angular ( $\ddot{\theta}$ )

$$(J_b + M_bL^2)\ddot{\theta} = -M_bL \cos(\theta)\ddot{x} + 2\left(\frac{K}{rR} - \frac{b}{r}\right)\dot{x} + 2\left(b - \frac{K}{R}\right)\dot{\theta} + M_bgL \sin(\theta) - 2\frac{K_m}{R}u$$

# Controlador Linear Gaussiano Quadrático (LQG)

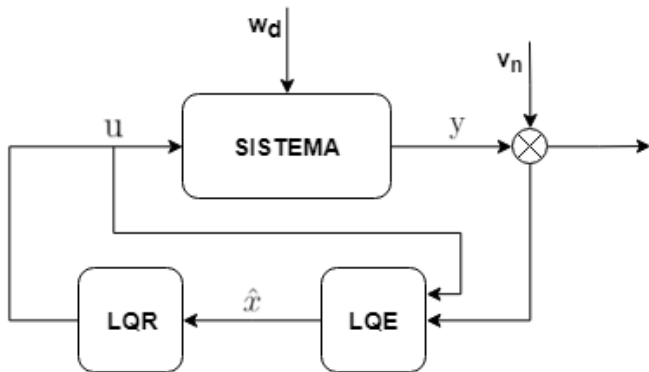


Figura: Estrutura de um controlador LQG (BRUNTON *et al*, 2017).

# Controlador Linear Gaussiano Quadrático (LQG)

- Regulador Linear Quadrático (LQR)

- ▶ Minimizar a função custo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_f-1} \{x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k\}$$

- ▶ Ganho ótimo

$$K = (R + B_d^T P B_d)^{-1} B_d^T P A_d$$

- ▶ Solução da equação de Riccati

$$P_{k+1} = Q + A^T P_k A_d - A_d^T P_k B_d (R + B_d^T P_k B_d)^{-1} B_d^T P_k A_d$$

- ▶ Matlab

$$[K, P, E] = dlqr(A_d, B_d, Q, R)$$

# Controlador Linear Gaussiano Quadrático (LQG)

- Estimador Linear Quadrático (LQE) / Filtro de Kalman

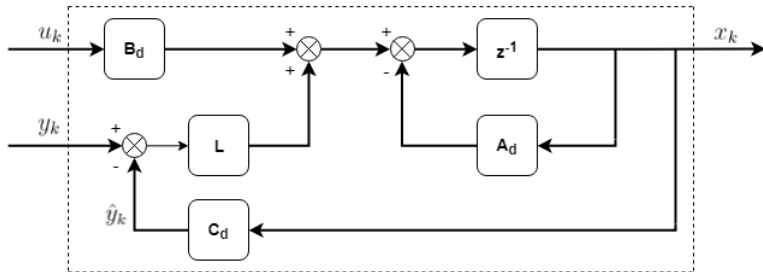


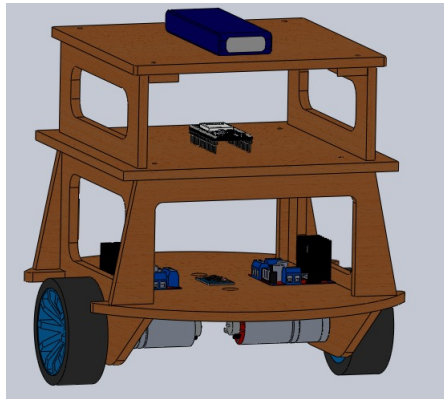
Figura: Estrutura do estimador LQE (BRUNTON *et al*, 2017).

- Matlab

$$[L, S, Z_d, E_d] = dlqe(A_d, Q_o, C, Q_o, R_o);$$

# Softwares

- SolidWorks
- MATLAB
  - Simulink



**Figura:** Estrutura modelada utilizando o SolidWorks.

# Motor CC

- Características necessárias
  - ▶ Tensão:  $< 12V$
  - ▶ Torque:  $0.2446 \text{ Nm}$  ( $15^\circ$ )
- Características do motor (*datasheet*)
  - ▶ Tensão de operação:  $6 V_{cc}$
  - ▶ Máx. eficiência:  $0.196 \text{ Nm}/0.60 \text{ A}$
  - ▶ Máx. torque:  $0.51 \text{ Nm}/1.10 \text{ A}$
  - ▶ Encoder integrado



**Figura:** Conjunto completo do atuador: motor, acoplador e roda.

# Driver Motor CC

- Características (*datasheet*)
  - ▶ Tensão: 4~35  $V_{cc}$ ;
  - ▶ Corrente máx.: 2A p/canal ou 4A máx;
  - ▶ Tensão lógica: 5 V;
  - ▶ Corrente lógica: 0~36 mA;

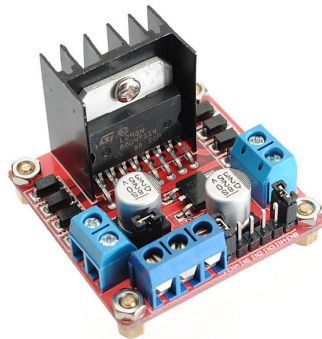


Figura: Ponte H L298N.

# Sensor de Orientação

- Características necessárias
  - ▶ Tensão:  $5V_{cc}$
  - ▶ Resolução conversão alta
  - ▶ Tempo de acomodação menor possível
- Características da placa (*datasheet*)
  - ▶ Tensão de operação:  $3 \sim 5 V_{cc}$
  - ▶ Resolução: 16 bits
  - ▶ Tempo de acomodação:  $1 \sim 10$  ms (máx.)

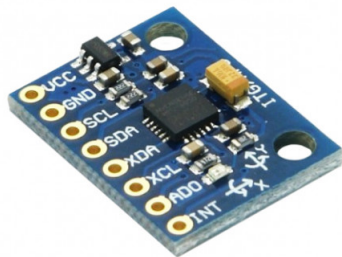


Figura: *Shield* MPU6050.



# Microcontrolador ESP32

- Características necessárias
  - ▶ Baixo custo
  - ▶ Elevada velocidade de processamento
  - ▶ GPIOs correspondentes ao projeto
- Características da placa (*datasheet*)
  - ▶ Tensão de operação: 3.3 Vcc
  - ▶ Microprocessador dual core 32-bit
  - ▶ Memória SRAM: 512 KB
  - ▶ Clock: 80MHz até 240MHz
  - ▶ Wi-Fi e *Bluetooth* embutido
  - ▶ GPIO: 36

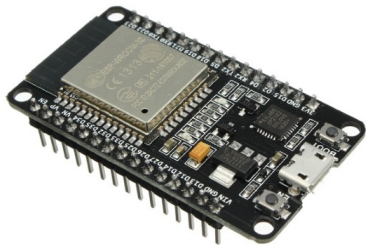


Figura: Microcontrolador ESP32.

# Bateria LiPO

- Características necessárias
  - ▶ Tempo de operação: ~ 1 hora
  - ▶ Capacidade de fornecimento de energia
- Características via *datasheet*
  - ▶ Tensão de carga: 3 células / 11.1 V<sub>cc</sub>
  - ▶ Carga Elétrica: 2200 mAh
  - ▶ Taxa de Descarga: 20-30 C
  - ▶ Massa: 180g



**Figura:** Bateria LiPO Turnigy 2200 mAh 3s.

# Modelo Linear Discreto

- Estados

$$\begin{aligned}x_1 &= x & x_3 &= \theta \\x_2 &= \dot{x} & x_4 &= \dot{\theta}\end{aligned}$$

- Matrizes do Espaço de Estados

- ▶ Período de Amostragem: 15 ms

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.9918 & -0.1503 & 0.0015 \\ 0.0007 & 1.0020 & 0.0148 \\ 0.0895 & 0.2694 & 0.9730 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.0255 \\ -0.0021 \\ -0.2777 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

# LQR

- Matrizes de ponderação  $Q$  e  $R \rightarrow J = \frac{1}{2} \sum (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

- Implementação do controlador

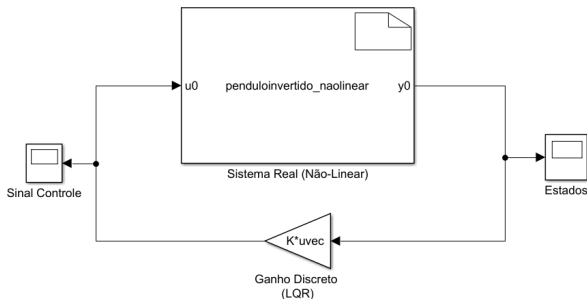


Figura: Implementação do controlador LQR.

# Resultados utilizando o LQR

- Ganho ótimo

$$K = \begin{bmatrix} 0.5721 & -5.0411 & -0.9402 \end{bmatrix}$$

- Resposta do sistema

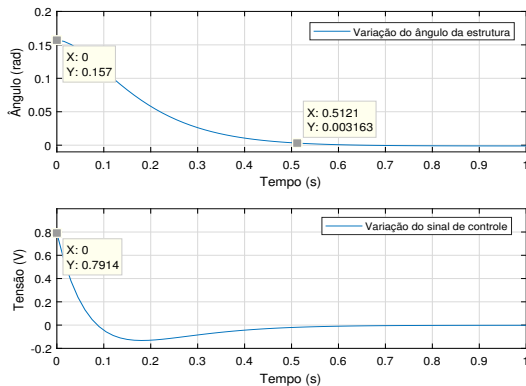


Figura: Variação do ângulo da estrutura com o controlador LQR.

# LQG

- Matrizes de ponderação

$$Q_o = 0.1 \mathbf{I}_{n \times n} \quad R_o = 1$$

- Implementação do controlador LQG

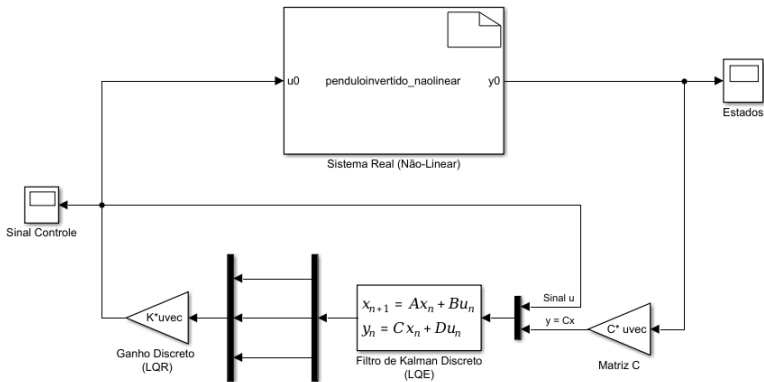


Figura: Implementação do controlador LQG.

# LQG

- Ganho ótimo do estimador

$$L = \begin{bmatrix} 0.5721 \\ -5.0411 \\ -0.9402 \end{bmatrix}$$

- Matrizes do LQE (BRUNTON *et al*, 2017)

$$A_f = (A_d - LC_d) \qquad B_f = [B_d \quad L]$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_f = 0 [B_d \quad L]$$

# Resultados utilizando o LQG

- Resposta do sistema

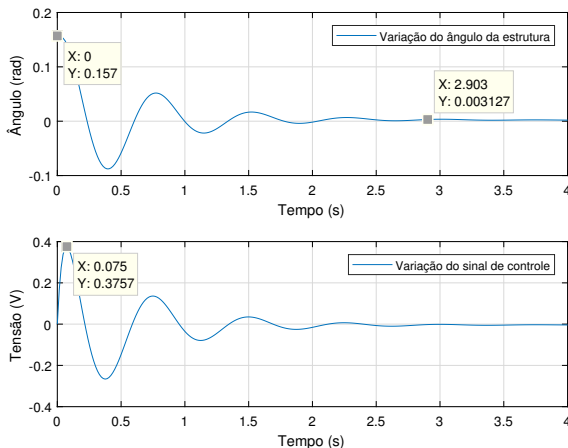


Figura: Variação do ângulo da estrutura com o controlador LQG.



# Conclusão

- Desenvolvimento do conceito do protótipo
- Estudos com relação a técnicas de controle moderno
- Modelagem do sistema não linear contínuo no tempo
- Linearização e discretização do modelo não linear
- Projeto do controlador LQG
- Análise de desempenho do controlador

# Cronograma

## 1 Construção do Protótipo:

- 1.1 Compra dos materiais
- 1.2 Calibração dos componentes
- 1.3 Construção da planta física
- 1.4 Validação do modelo

## 2 Aplicação dos Controladores:

- 2.1 Implementação
- 2.2 Validação dos controladores
- 2.3 Aplicação de melhorias ao projeto

## 3 Relatório TCC2:

- 3.1 Escrita do relatório TCC2
- 3.2 Defesa do TCC2

**Tabela:** Cronograma de atividades.

Ativ. / Mês	<i>Jul</i>	<i>Ago</i>	<i>Set</i>	<i>Out</i>	<i>Nov</i>
1.1	√				
1.2		√			
1.3	√	√			
1.4			√		
2.1			√	√	
2.2				√	
2.3				√	
3.1		√	√	√	√
3.2					√

# Referências

 BRUNTON, S. L.; DURIEZ, T.; NOACK, B. R.

*Machine Learning Control - Taming Non-linear Dynamics and Turbulence.*

Springer International Publishing, 2017.

 BONAFILIA, B. R.; GUSTAFSSON, N.; NYMAN, P.; NILSSON, S. N.

*Self-balancing two-wheeled robot.*

Anais. . .[S.l.: s.n.], 2013.

 ENGIN, M.

*Embedded LQR controller design for self-balancing robo.*

Anais. . .IEEE, 2018. p.1-4.

# Referências



MELO, J. V.

*Identificação e Controle de um Veículo Segway para fins Educacionais.*  
Porto Alegre, RS: SBAI, 1-6p, 2017.



PEDROSO, C. C. S.; MODESTO, E. L. P.

*Sistema de Controle de Pêndulo Invertido.*  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR, Curitiba, PR, 2017.