



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

# **MODELAGEM E CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL OU PÊNDULO DE FURUTA**

**LUCAS MARTINS FARIA**

Orientador: Giovani Guimarães Rodrigues  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

BELO HORIZONTE  
21 DE JULHO DE 2015

**LUCAS MARTINS FARIA**

**MODELAGEM E CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO  
ROTACIONAL OU PÊNDULO DE FURUTA**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido a Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador:      Giovani Guimarães Rodrigues  
                         Centro Federal de Educação Tecnológica  
                         de Minas Gerais – CEFET-MG

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
BELO HORIZONTE  
21 DE JULHO DE 2015

**LUCAS MARTINS FARIA**

# **MODELAGEM E CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO ROTACIONAL OU PÊNDULO DE FURUTA**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido a Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Trabalho aprovado. Belo Horizonte, 21 de julho de 2015

---

**Giovani Guimarães Rodrigues**  
Orientador

---

**Everthon de Souza Oliveira**  
Convidado 1

---

**Eduardo Nunes Gonçalves**  
Convidado 2

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
BELO HORIZONTE  
21 DE JULHO DE 2015

---

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Giovani Rodrigues Guimarães - pessoa pela qual possuo grande respeito e admiração, como profissional e pessoa -, por disponibilizar um bem que acredito ser um dos mais preciosos e raros que é o tempo. Agradeço principalmente por toda a boa vontade em ensinar, de se interagir com o problema, imaginar possíveis soluções para os problemas encontrados e de mostrar todo o caminho a ser tomado, caso fosse necessário, agindo não só como orientador, mas como um guia. Sou grato por sua exigência para que eu realizasse um bom trabalho e pela sua compreensão quando me deparava com dificuldades no desenvolvimento do mesmo. Aos meus colegas de classe - Leonardo, Matheus, Tamires, Thiago e Vitor - eu devo minha gratidão, por todo o auxílio, o trabalho em equipe e o companheirismo durante o curso. Foram, ao mesmo tempo, meus mestres, meus colegas, meus amigos e o exemplo de profissional em que busco me embasar. Devo agradecer aos meus pais, irmãos e tios por toda a disposição em me ajudar no que fosse preciso e pelo reconhecimento do meu esforço para me formar. Há duas enfermeiras que me apoiaram muito nesse percurso - Leny, minha tia avó e madrinha, e Letícia, minha namorada e amiga - e ambas merecem meu agradecimento por me auxiliarem e por sempre me lembrarem de minhas pendências e obrigações.

# Resumo

O controle de um pêndulo invertido rotacional, conhecido também como pêndulo de Furuta, é um dos problemas clássicos mais interessantes na engenharia. O problema consiste em levar o pêndulo da posição pendente, caída, apontando para o chão, para a posição "em pé", chamada de ponto de equilíbrio instável, e estabilizá-la nesse ponto.

Este trabalho contém uma análise do equipamento *QNET ROTPEN* que consiste em um dispositivo com um pêndulo de Furuta acoplado a um motor CC, sendo ambos conectados a uma placa de aquisição e saída de sinais. É abordada a geometria e a dinâmica do funcionamento do equipamento que é constituído de um braço rotativo com movimentação na horizontal com um pêndulo inserido na sua extremidade que é livre para rotacionar na vertical. Em outras palavras, o pêndulo é uma haste com uma carga em uma de suas extremidade sendo que a outra é acoplada a uma polia que, por sua vez, está anexada a um motor de corrente contínua capaz de rotacionar o sistema e, conseqüentemente, fazer o pêndulo girar.

A obtenção de um modelo matemático, a dinâmica do sistema e a descrição dos seus componentes e constantes físicas são temas tratados nesse trabalho. Encontra-se também, entre os conteúdos, a abordagem de estratégias de controle utilizadas atualmente para a estabilização do pêndulo invertido rotacional no ponto de equilíbrio instável, incluindo o controle baseado em energia e o controle de estabilização, bem como o chaveamento lógico entre eles realizado pelo controlador híbrido. O projeto dos controladores utilizados é tratado também nesse texto, além de sua validação através de simulações. Os resultados obtidos com a implementação do controle são analisados e, dessa forma, é possível retirar conclusões e propostas para trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** pêndulo, Furuta, controle.

# Abstract

The rotational control of an inverted pendulum, also known as Furuta pendulum, is one of the most interesting classic problems in engineering. The problem consists of bringing the pendulum from pending fallen position, pointing to the ground, to the "standing", called unstable equilibrium point, and stabilize it at that point.

This work contains an analysis of the equipment called QNET ROTPEN which consists of a device with a Furuta pendulum coupled to a DC motor, both being connected to an acquisition board which also display output signals. The geometry and dynamics of the operation of the equipment consists of a rotatable arm with the horizontal movement with a pendulum inserted at its edge which is free to rotate vertically. In other words, the pendulum is a rod with a load at one of its edges while the other edge is coupled to a pulley which in turn is attached to a direct current motor capable of rotating the system and hence make the pendulum swing.

Obtaining a mathematical model, system dynamics and the description of the physical components and constants are some of the cases dealt in this work. It is also found among the contents, control strategies currently used to stabilize the rotational inverted pendulum in unstable equilibrium point, including control based on energy and the stabilization control as well as the logical switching between them called hybrid controller. The design of the controllers applied is also treated in this text, as well as its validation through simulations. The results obtained with the implementation of controllers are analyzed and thus it is possible to draw conclusions and proposals for future work.

**Keywords:** pendulum, Furuta, control.

---

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Contextualização do Problema . . . . .	1
1.2 O pêndulo de Furuta . . . . .	4
1.3 Objetivos . . . . .	5
1.4 Organização do trabalho . . . . .	6
<b>2 Revisão Bibliográfica</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1 Diferentes tipos de controladores . . . . .	8
2.1.1 Regulador Quadrático Linear . . . . .	8
2.1.2 Controle PID com dois GDL . . . . .	9
2.1.3 Controlador <i>Fuzzy</i> ou de Lógica Difusa . . . . .	9
2.2 Comparação entre diferentes controladores . . . . .	10
2.3 Considerações finais . . . . .	10
<b>3 Modelagem do Sistema</b> . . . . .	<b>11</b>
3.1 Características construtivas do <i>QNET Rotpen</i> e Geometria do problema . . . . .	11
3.2 Definição das principais variáveis . . . . .	12
3.3 Equações do movimento baseadas na metodologia de Euler Lagrange . . . . .	16
3.4 Comparação das respostas linear e não linear de $\theta$ e $\alpha$ . . . . .	19
3.5 <i>LabVIEW</i> . . . . .	23
3.6 Avaliação do amortecimento do sistema . . . . .	24
3.7 Atrito do sistema . . . . .	27
3.8 Momento de Inércia . . . . .	28
3.9 Considerações finais . . . . .	30
<b>4 Descrição do equipamento</b> . . . . .	<b>32</b>
4.1 Identificação dos componentes da planta . . . . .	32
4.2 Especificações dos dispositivos de medição . . . . .	35

<b>5</b>	<b>Controle e Simulações</b>	<b>36</b>
5.1	O controlador <i>swing-up</i>	36
5.2	Controle de energia	37
5.3	Controlador Híbrido	38
5.4	Controlador Estabilizador	41
5.5	Projeto do controlador estabilizador	42
5.6	Parte Experimental	45
5.6.1	Controlador Estabilizador	45
5.6.2	Compensação da fricção com sinal de excitação	47
5.6.3	Controle da posição $\theta$	49
5.6.4	Sistema de balanço	50
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>
6.1	Trabalhos Futuros	55
	<b>Referências</b>	<b>56</b>
	 <b>Anexos</b>	 <b>58</b>
	 <b>ANEXO A</b> Definição das constantes para a simulação de malha aberta na plataforma do Simulink	 <b>59</b>
	 <b>ANEXO B</b> Código do projeto do controlador RQL e implementação no <i>Simulink</i>	 <b>62</b>
	 <b>ANEXO C</b> Equações de Lagrange	 <b>65</b>
	C.1 Equações de Euler-Lagrange	65
	C.1.1 Coordenadas generalizadas	65



# Lista de Figuras

Figura 1.1 – O problema do cabo de vassoura . . . . .	2
Figura 1.2 – Drone equilibrando uma haste . . . . .	2
Figura 1.3 – O problema do PIC . . . . .	3
Figura 1.4 – Dispositivo usado para locomoção - Segway . . . . .	4
Figura 1.5 – Caminhada estável do robô <i>HRP-4C Humanoid</i> . . . . .	5
Figura 3.1 – Geometria do pêndulo . . . . .	13
Figura 3.2 – Definição dos ângulos, eixos e coordenadas de referência do sistema	13
Figura 3.3 – Corpo do pêndulo, formado pelo braço, de comprimento $L_{p1}$ , e pela carga, de comprimento $L_{p2}$ . . . . .	14
Figura 3.4 – Ilustração das forças envolvidas no sistema . . . . .	15
Figura 3.5 – Diagrama em <i>Simulink</i> para a comparação entre as respostas dos sistemas Linear e Não Linear . . . . .	20
Figura 3.6 – Subsistema não linear do pêndulo invertido . . . . .	21
Figura 3.7 – Subsistema linear do pêndulo invertido . . . . .	21
Figura 3.8 – Resposta dos sistemas linearizado e não linearizado das posições angulares de $\theta$ e $\alpha$ , respectivamente . . . . .	22
Figura 3.9 – Plataforma do instrumento virtual construído no <i>LabView</i> . . . . .	24
Figura 3.10–Amortecimento do ângulo $\alpha$ do pêndulo em Movimento Harmônico Simples (MHS), ou seja, braço do motor preso à estrutura . . . . .	25
Figura 3.11–Amortecimento do ângulo $\alpha$ do pêndulo com o braço rotativo solto .	26
Figura 3.12–Dinâmica do ângulo $\theta$ com o braço rotativo solto . . . . .	26
Figura 3.13–Análise do atrito do sistema . . . . .	27
Figura 3.14–Análise do atrito do sistema . . . . .	28
Figura 4.1 – Equipamento Quanser NI-ELVIS Trainer (QNET) Series (Pêndulo de Furuta) . . . . .	32
Figura 4.2 – Vista frontal do <i>QNET ROTPEN</i> . . . . .	33
Figura 4.3 – Vista lateral do <i>QNET ROTPEN</i> . . . . .	33
Figura 5.1 – Ilustração geométrica da estratégia do controlador <i>swing-up</i> . . . . .	37

Figura 5.2 – Esquema de um controlador híbrido . . . . .	39
Figura 5.3 – Máquina de estados do controlador híbrido . . . . .	40
Figura 5.4 – Pêndulo na posição de equilíbrio instável . . . . .	42
Figura 5.5 – Mapa de pólos e zeros . . . . .	43
Figura 5.6 – Diagrama de blocos construído em plataforma <i>Simulink</i> para a simulação . . . . .	44
Figura 5.7 – Respostas dos estados do sistema para a condição inicial proposta . . . . .	44
Figura 5.8 – Ação de controle do sistema para a condição inicial proposta . . . . .	44
Figura 5.9 – Plataforma do arquivo para controle do pêndulo . . . . .	45
Figura 5.10–Ângulos $\alpha$ e $\theta$ durante o controle . . . . .	46
Figura 5.11–Tensão aplicada sobre o motor durante o controle . . . . .	47
Figura 5.12–Ângulos $\alpha$ e $\theta$ com compensação de atrito . . . . .	48
Figura 5.13–Tensão aplicada sobre o motor com compensação de atrito . . . . .	48
Figura 5.14–Ângulos $\alpha$ e $\theta$ com variação da referência $\theta_r$ . . . . .	49
Figura 5.15–Tensão aplicada sobre o motor com variação da referência $\theta_r$ . . . . .	50
Figura 5.16–Ângulos $\alpha$ e $\theta$ durante o balanço . . . . .	51
Figura 5.17–Tensão aplicada sobre o motor durante o balanço . . . . .	51
Figura 5.18–Ângulos $\alpha$ e $\theta$ durante o balanço . . . . .	52
Figura 5.19–Tensão aplicada sobre o motor durante o balanço . . . . .	53
Figura C.1 – Movimento ao longo de uma curva . . . . .	66
Figura C.2 – Posição de um sólido no espaço . . . . .	66

---

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Parâmetros Construtivos do <i>QNET ROPTPEN</i> . . . . .	12
Tabela 4.1 – Descrição dos componentes do equipamento <i>QNET ROTPEN</i> . . . . .	34
Tabela 4.2 – Especificações . . . . .	35
Tabela 5.1 – Parâmetros do Controlador Híbrido . . . . .	41
Tabela 5.2 – Parâmetros do Controlador de Energia . . . . .	52

---

## Lista de Abreviaturas e Siglas

A/D	Conversor Analógico-Digital
CC	Corrente Contínua
D/A	Conversor Digital-Analógico
EDM	Equações de Movimento
EDR	Equação Diferencial de Riccati
EE	Espaço de Estados
GDL	Graus De Liberdade
MHS	Movimento Harmônico Simples
PD	Proporcional, Derivativo
PIC	Pêndulo Invertido no Carro
PID	Proporcional, Integral e Derivativo
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
ROTPEN	Rotary Pendulum
RQL	Regulador Quadrático Linear

---

# Introdução

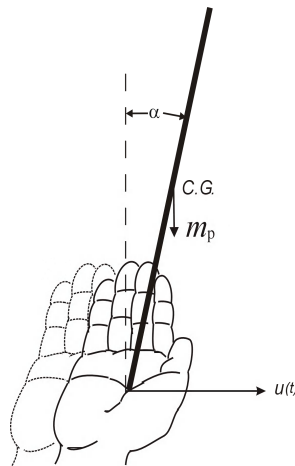
Neste capítulo, busca-se passar uma breve visão geral do equipamento e do sistema de controle em que se baseia este trabalho. O objetivo dessa introdução é tornar familiar as teorias que explicam a abordagem utilizada na realização do projeto. São apresentados o Pêndulo de Furuta, ou seja, uma visão geral da planta juntamente com os componentes que compõem o equipamento, uma contextualização do problema, os objetivos e a organização deste trabalho.

## 1.1 Contextualização do Problema

O estudo de como equilibrar uma haste em posição é encontrado em diversas áreas da ciência. Para introduzir o problema básico deste trabalho, imagine que uma pessoa tenta equilibrar-se em pé. O corpo deve permanecer parado e estável, algo essencial para realização de diversas atividades e o responsável por mantê-lo parado nessa condição é o sistema nervoso central que registra a posição do corpo e aciona os músculos com o objetivo de manter o equilíbrio do indivíduo. Esse sistema pode ser modelado também como um pêndulo invertido em busca de um ponto de estabilidade, sendo o pêndulo, nesse caso, formado pelo corpo humano. [Sultan 2010]

O problema de equilíbrio de um cabo de vassoura numa posição vertical sobre a mão de uma pessoa, mostrado pela Figura 1.1, é uma ideia bem conhecida do conceito de pêndulo invertido. Para qualquer pessoa, uma demonstração física do ato de balanceamento da vassoura constitui uma tarefa desafiadora que exige um movimento inteligentemente coordenado da mão com base em uma realimentação visual do sistema. O objetivo é buscar tornar nulos os valores  $\alpha$  e  $\dot{\alpha}$  (ângulo correspondente à abertura que o cabo faz com o eixo vertical e velocidade angular correspondente ao mesmo ângulo, respectivamente) em busca de manter o equilíbrio do cabo. [Tzeng 2014]

Há também a possibilidade de utilizar um equipamento para controlar o cabo de vassoura ou qualquer outra haste. Raffaello D'Andrea é professor de Sistemas



**Figura 1.1** — O problema do cabo de vassoura

Fonte: [Tzeng 2014]

Dinâmicos e Controle no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça (ETH) em Zurique, onde sua pesquisa redefine o que sistemas autônomos são capazes. Entre as criações de Raffaello estão incluídas as arenas de máquinas de voo, na qual robôs voadores realizam acrobacias aéreas, malabarismos com bolas e equilibram hastes, assim como mostra a Figura 1.2. O último caso assemelha-se claramente com o caso do cabo de vassoura e, conseqüentemente, com um pêndulo invertido.

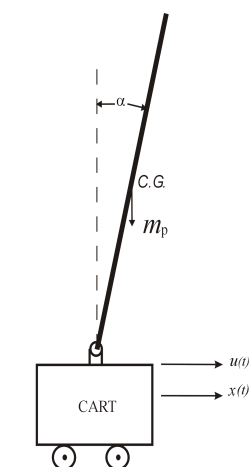


**Figura 1.2** — Drone equilibrando uma haste

Fonte: [Waibel 2013]

Um sistema unidimensional eletromecânico análogo ao problema de equilibrar o cabo de vassoura é o problema clássico do Pêndulo Invertido no Carro (PIC) ou Vagão, mostrado pela Figura 1.3. No problema do PIC, o carrinho é movido de modo retilíneo

para manter o pêndulo na posição vertical para cima.



**Figura 1.3** — O problema do PIC

Fonte: [Tzeng 2014]

O sistema do pêndulo invertido é referência para diversos tipos de sistemas, como os exemplos citados anteriormente ou a tentativa de manter em equilíbrio um foguete imediatamente após o lançamento, no qual o sistema de propulsão deve ser controlado a fim de manter o veículo na posição vertical, impedindo-o de tombar ou alçar vôo de maneira inclinada. O conceito do pêndulo é aplicado em sistemas robóticos e são frequentemente usados para ensino e pesquisa da teoria de controle. Existem diferentes versões deste dispositivo, oferecendo uma variedade de desafios de controle interessantes. Os pêndulos são tipicamente utilizadas para realizar experimentos em modelos, validar a eficácia das técnicas de controle emergentes e verificar o seu desempenho. Algumas aplicações mais comuns do conceito de pêndulo invertido em robótica são a estabilidade de caminhada de robôs humanoides, monociclos (aparelhos de locomoção com apenas uma roda), veículos de locomoção individual e o pêndulo de Furuta. Com base no princípio de estabilização pêndulo invertido, muitas tecnologias modernas na área de robótica vão gerar novas aplicações de controle. As recentes realizações importantes são: [Boubaker 2012]

- **Controle de sistemas robóticos atuados:**

Sistemas robóticos subatuados são sistemas com menos atuadores de controle independentes do que os graus de liberdade para serem controlados. Nos últimos anos, a necessidade de analisar e de controlar os sistemas robóticos subatuados surgiu em muitas aplicações práticas. O pêndulo invertido no vagão é um sistema típico de sistemas robóticos subatuados, assim como o pêndulo de Furuta, pois apresentam 2 direções de locomoção e só possuem atuador direto em uma delas.

- **Projeto de monociclos motorizados:**

Projeto e implementação de sistemas de pêndulo invertido móveis tem atraído muita atenção atualmente e pelo menos um produto comercial já está disponível no mercado. (Veja a Figura 1.4)



**Figura 1.4** — Dispositivo usado para locomoção - Segway

Fonte: [[Transporter 2014](#)]

- **Geração de padrão de marcha para robôs humanoides:**

O controle de robôs humanoides é uma tarefa desafiadora devido à dinâmica de difícil estabilização. A fim de simplificar a geração de trajetórias, muitos estudos utilizam uma analogia entre a marcha bípede e o movimento do pêndulo invertido. Os algoritmos do modelo linear do pêndulo invertido são geralmente associados ao conceito de ponto de momento nulo para garantir a marcha estável. (Veja a Figura 1.5)

Por conta de sua natureza não linear, os pêndulos mantiveram sua utilidade e agora são usados para ilustrar muitas das ideias surgindo na era do controle não linear.

## 1.2 O pêndulo de Furuta

O Pêndulo de Furuta foi desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Tóquio por Katsuhisa Furuta e seus colegas em 1992. O Pêndulo de Furuta é uma plataforma interessante para apresentar uma visão geral sobre teoria de controle e modelagem de





**Figura 1.5** — Caminhada estável do robô *HRP-4C Humanoid*

sistemas dinâmicos, sendo de grande utilidade para o desenvolvimento e estudo das leis de controle não linear, de acordo com [ROCHA 2010].

Como características do pêndulo pode-se dizer que ele é subatuado e fortemente não linear devido a forças externas, como: a gravitacional e de fricção. Outra característica marcante desse tipo de equipamento é a instabilidade no seu ponto de equilíbrio e isso adiciona muita complexidade na modelagem do sistema. Em busca de minimizar os erros no controle, deve-se modelar matematicamente as forças externas com o sistema, pois elas podem interferir na estabilidade do pêndulo. É necessário, portanto, adicionar um controle de compensação de fricção do atrito do motor.

## 1.3 Objetivos

O objetivo geral deste projeto é realizar a estabilização do pêndulo de Furuta utilizando diferentes táticas de controle. Para alcançar a estabilização, entretanto, é necessário avaliar a modelagem do sistema e identificar a principal meta do controle, seja o nível de estabilidade, a rejeição à perturbações, o gasto de energia e tempo para acomodação, entre outros. A seguir, são exibidas as etapas a serem conquistadas para o objetivo final:

- Obter um modelo matemático que descreva o sistema identificando as grandezas envolvidas.
- Simulação do sistema controlador por realimentação de estados lineares, controle de energia e chaveamento de controladores.
- Validar os resultados em uma plataforma experimental de testes.

## 1.4 Organização do trabalho

Este trabalho encontra-se dividido e organizado de acordo com a numeração nos capítulos e seções exibidos no sumário. O capítulo 1, a Introdução, explica e contextualiza o problema a ser tratado, assim como apresenta as principais aplicações do estudo. Há também uma breve descrição do que consiste o chamado Pêndulo de Furuta e uma apresentação dos objetivos.

Já o Capítulo 2, a Revisão Bibliográfica, contém as teorias envolvidas no estudo da planta do pêndulo invertido rotacional e as técnicas de controle utilizadas em outros experimentos, incluindo os vários tipos de controlador aplicados ao sistema.

Na etapa da Modelagem do Sistema, Capítulo 3, está exposta a geometria do problema incluindo a definição dos eixos, coordenadas de referências e os ângulos necessários para a modelagem do sistema. Está contido nesse capítulo também os procedimentos tomados para alcançar um modelo matemático para o pêndulo. Para a obtenção desse modelo foram utilizadas as ferramentas dadas pelas equações de Euler-Lagrange, explicitadas na Seção C.1, encontrada entre os anexos desse trabalho. As equações do movimento e as funções de transferências são exibidas na modelagem, assim como a matriz de espaço de estados. Além disso, esse capítulo contém as simulações de malha aberta construídas após a modelagem do pêndulo. Nessas simulações, são mostradas as diferenças entre os sistemas real e linearizado, além das respostas individuais de cada um para uma entrada comum.

O Capítulo 4 contém uma descrição sobre os componentes e especificações sobre os dispositivos de medição que constituem o *QNET ROTPEN*, aparelho estudado neste trabalho.

No Capítulo 5 são apresentados as estratégias de controle utilizadas como o controlador estabilizador, controlador *swing-up* e o controlador híbrido, assim como os parâmetros utilizados para o projeto dos mesmos. Além disso, está contido nesse capítulo as simulações do controlador estabilizador projetado, a implementação e os resultados do controle.

Por último, no Capítulo 6, é apresentada uma conclusão sobre os resultados obtidos com as simulações, o desenvolvimento da modelagem do sistema e os recursos teóricos utilizados, mostrados na Revisão Bibliográfica, para a construção do modelo e idealização de um controlador.

---

## Revisão Bibliográfica

O objetivo desse trabalho é estudar as diversas estratégias de controle para o sistema do pêndulo invertido. Busca-se, portanto, determinar a maneira mais adequada de se realizar a estabilização da planta. Neste capítulo são revisados os trabalhos e pesquisas relacionadas ao pêndulo de Furuta e que foram estudados para a construção do modelo e elaboração das táticas de controle. Encontra-se, nesta revisão, uma breve descrição sobre os diversos tipos de controladores aplicados para essa planta, assim como um estudo comparativo entre eles, relacionando custo, estabilidade, dificuldade de implementação e sintonia.

O controle ótimo lida com o problema de encontrar uma lei de controle para um dado sistema de tal modo que um determinado critério de otimização é alcançado. Um problema de controle inclui um custo funcional que é uma função de variáveis de estado e de controle. Um controle ideal é um conjunto de equações diferenciais que descrevem os caminhos das variáveis de controle que minimizem o custo funcional.

Considere um carro que viaja em uma linha reta através de uma estrada montanhosa. A questão é: como o motorista deve pressionar o pedal do acelerador a fim de minimizar o tempo total de viagem. Claramente, neste exemplo, a lei de controle refere-se especificamente à forma com que o motorista pressiona o acelerador. O sistema consiste em um carro e uma estrada, e o critério de otimização é a minimização do tempo total de viagem. Os problemas de controle reais, entretanto, normalmente possuem restrições. No caso do exemplo mencionado, a quantidade de combustível disponível pode ser limitada, pode haver limites de velocidade e outros fatores.

Uma outra análise para o mesmo caso do carro é encontrar a maneira de conduzir o carro de forma a minimizar o seu consumo de combustível, dado um determinado percurso a ser realizado. E ainda pode-se combinar os dois fatores, minimização do tempo e do combustível gastos no trajeto. Um custo funcional ótimo é uma expressão matemática que dá o tempo de viagem como uma função da velocidade, considerações

geométricas, e as condições iniciais do sistema.

## 2.1 Diferentes tipos de controladores

### 2.1.1 Regulador Quadrático Linear

Um caso especial do problema de controle ótimo é o Regulador Quadrático Linear (RQL). Esse problema parte da equação para minimização da função de custo 2.1. Nessa equação a matriz  $Q$  representa um peso para as variáveis de estado do sistema e o aumento desse peso provoca um rastreamento mais preciso. De maneira análoga, a matriz  $R$  representa um peso para as variáveis de entrada e seu aumento gera uma redução no esforço de controle (menor gasto de energia). [Li 2006]

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt \quad (2.1)$$

Considerando um sistema no espaço de estados dado pela equação 2.2, condição inicial dada por  $x(t_0) = x_0$  e um horizonte de tempo  $[t_0, t_f]$ , ou seja, um horizonte finito, é possível resolver o problema de controle ótimo, assim como mostra [Li 2006], e, para esse caso, a solução será uma matriz de constantes.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.2)$$

Quanto à realimentação de estados, sabe-se que as variáveis de entrada  $u$  são dadas pela multiplicação de uma matriz de ganhos  $K$  pela diferença entre as variáveis de estado e uma dada referência. Para a otimização do controle, busca-se determinar a matriz de ganhos  $K$  que torna mínima a função de custo 2.1, assim como mostra [Li 2006]. A matriz, portanto, é dada por 2.4, na qual  $R$  é a matriz de pesos para as variáveis de entrada previamente definida,  $B$  é a matriz que multiplica as entradas do espaço de estados do sistema e  $S$  é a solução para o problema de otimização de custo. A matriz  $S$  é uma matriz não negativa que satisfaz a Equação Diferencial de Riccati (EDR) dada por 2.5. Deve ser lembrado que as matrizes  $R$ ,  $B$  e  $S$  são todas formadas por constantes reais para o caso em análise.

$$u = -K(x - x_r) = -R^T B^T S(x - x_r) \quad (2.3)$$

$$K = R^T B^T S \quad (2.4)$$

$$A^T S + AS - SB^T R^{-1} B^T S + Q = 0 \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Controle PID com dois GDL

Por causa de sua estrutura simples, não é uma tarefa fácil sintonizar um controlador PID (Proporcional, Integral e Derivativo) comum para alcançar o sobressinal, tempo de acomodação, e erro de regime estacionário desejados para o comportamento do sistema. Com base nesta questão, várias técnicas de controle PID, tal como o sistema de controle PID com 2 GDL (Graus de Liberdade), são aplicadas. O número de funções de transferência de malha fechada determina o grau de liberdade de um sistema de controle no qual as funções de transferência podem ser ajustadas independentemente.

### 2.1.3 Controlador *Fuzzy* ou de Lógica Difusa

A fim de manter a haste de pêndulo na posição vertical, as técnicas de controle lineares, tais como PID, RQL, e outras, podem ser utilizadas. No entanto, essas técnicas são aplicáveis apenas em uma pequena faixa de operação em torno do equilíbrio. Para melhorar os resultados anteriores, pode-se utilizar o modelo *fuzzy* descrito por regras SE-ENTÃO de lógica difusa. Este modelo, descrito por modelos lineares interligados com funções não lineares, pode ser uma representação equivalente do modelo físico, pelo menos localmente. A vantagem desta representação é que ela oferece uma estrutura sistemática para projetar leis de controle através da formulação desigualdades matriciais lineares.

A Lógica Difusa pode ser utilizada para a implementação de controladores aplicados em variados tipos de processos. A utilização de regras *fuzzy* e variáveis linguísticas confere ao sistema de controle várias vantagens, incluindo: [Manchini e Pappa 2015]

- Simplificação do modelo do processo;
- Melhor tratamento das imprecisões inerentes aos sensores utilizados;
- Facilidade na especificação das regras de controle, em linguagem próxima à natural;
- Satisfação de múltiplos objetivos de controle;
- Facilidade de incorporação do conhecimento de especialistas humanos.

Controladores *fuzzy* são muito simples conceitualmente. Eles consistem de um estágio de entrada, um estágio de processamento, e um estágio de saída.

O estágio de entrada mapeia sensores ou outros tipos de entrada (tais como chaves ou interruptores) de maneira apropriada. O estágio de processamento invoca cada regra adequada e gera um resultado para cada uma das entradas e então combina os resultados dessas regras. Finalmente o estágio de saída converte o resultado combinado para dentro do controle.

O estágio de processamento é baseado em uma coleção de regras lógicas na forma de declarações SE-ENTÃO, onde o argumento SE é chamado de "antecedente" e o argumento ENTÃO é chamado de "consequente". Sistemas de controle *fuzzy* típicos têm dúzias de regras.

## 2.2 Comparação entre diferentes controladores

Um estudo realizado anteriormente serve de base para a verificação da implementação de diferentes estratégias no pêndulo invertido. No artigo [Al-Jodah et al. 2013] são abordados três diferentes métodos para a determinação dos parâmetros de um controlador estabilizador por realimentação de estados para uma mesma planta e as saídas do sistema são avaliadas para cada método.

Entre os métodos para determinação do controlador estabilizador encontram-se: método misto  $H_2/H_\infty$ , FSF (*Full State Feedback*) e RQL (Regulador Quadrático Linear). Cada qual apresentou sua vantagem em algum aspecto, assim como concluiu [Al-Jodah et al. 2013]. O RQL, no entanto, destacou-se por possuir um bom desempenho e um pequeno custo da ação de controle.

## 2.3 Considerações finais

O estudo das várias ferramentas apresentadas neste capítulo é necessário para a elaboração de um sistema de controle que visa a estabilização do *QNET ROTPEN*. Nessa revisão bibliográfica foram abordados algumas das diversas formas de atender ao objetivo de controle, entre a técnica do RQL. A esse método foi dada atenção especial pois ele foi o escolhido para a implementação do controle neste trabalho, devido a sua simplicidade, quando comparada com a lógica difusa, por exemplo. Com esse tipo de projeto, pode-se também associar pesos diferentes sobre as entradas e os estados do sistema, o que é pode ser útil caso seja necessário aumentar a precisão do controlador ou reduzir o esforço do controle. Assim como é tratado nos capítulos seguintes, às vezes o controlador não é capaz de atuar devido à limitações físicas dos componentes, ou seja, não é capaz de fornecer a energia necessária para o atuador.

---

## Modelagem do Sistema

Neste capítulo são apresentados o modelo matemático obtido, o sistema de coordenadas de referência e a definição das variáveis e constantes necessárias para a construção desse modelo.

Para elaborar um sistema de controle, a etapa da modelagem matemática da planta em questão é essencial. Para um sistema linear, pode-se, a partir das equações diferenciais obtidas, construir um modelo com as equações de espaço de estados, e, com isso, pode-se desenvolver o controlador. Uma maneira de modelar um sistema é, portanto, encontrar as equações físicas que o descrevem. No caso do pêndulo, é necessário encontrar as equações do movimento para poder modelar a velocidade, o controle de torque, compensação de fricção e a energia. Posteriormente, é necessário linearizar as equações obtidas, pois o sistema é não linear.

### 3.1 Características construtivas do *QNET Rotpen* e Geometria do problema

A Tabela 3.1, exibida a seguir, contém as descrições e os valores das constantes físicas envolvidas na modelagem do problema. Essas constantes, elétricas e mecânicas, são utilizadas nas equações matemáticas que descrevem o sistema. Segundo o manual do fabricante, [Inc 2010], pode-se assumir que os parâmetros do amortecimento viscoso do pêndulo,  $B_p$ , e do braço rotativo,  $B_{eq}$ , são negligenciáveis nesse equipamento. A modelagem do sistema, contudo, leva em conta essas variáveis. Dessa maneira, constrói-se um modelo mais fiel à realidade e permite-se verificar a influência das constantes de amortecimento. Somente na fase de substituição numérica das grandezas envolvidas é que se considera os valores de atrito viscoso nulos.

Tabela 3.1 – Parâmetros Construtivos do QNET ROPTPEN.

Descrição da grandeza e unidade de medida	Variável	Valor numérico
Resistência de armadura do motor ( $\Omega$ )	$R_m$	8,7
Constante de torque do motor ( $N.m$ )	$K_t$	0,03334
Constante de força contra-eletromotriz ( $V/(rad/s)$ )	$K_m$	0,03334
Momento de inércia do motor ( $kg.m^2$ )	$J_m$	$1,80e - 6$
Momento de inércia equivalente no ponto de acoplamento entre braço rotativo e o braço do pêndulo ( $kg.m^2$ )	$J_{eq}$	$1,84e - 4$
Massa do braço ( $kg$ )	$M_{arm}$	0,080
Comprimento do eixo do braço ao eixo do pêndulo ( $m$ )	$r$	0,0826
Amortecimento viscoso do braço ( $N.m/(rad/s)$ )	$B_{eq}$	0,000
Massa do braço do pêndulo e carga combinados ( $kg$ )	$M_p$	0,027
Comprimento total do pêndulo ( $m$ )	$L_p$	0,191
Distância do centro de massa do pêndulo ao eixo ( $m$ )	$l_p$	0,153
Massa do braço do pêndulo ( $kg$ )	$M_{p1}$	0,008
Massa da carga do pêndulo ( $kg$ )	$M_{p2}$	0,019
Comprimento do braço do pêndulo ( $m$ )	$L_{p1}$	0,171
Comprimento da carga do pêndulo ( $m$ )	$L_{p2}$	0,019
Momento de inércia em torno do eixo de articulação ( $kg.m^2$ )	$J_p$	$1,70e - 4$
Amortecimento viscoso do pêndulo ( $N.m/(rad/s)$ )	$B_p$	0,000
Densidade linear do braço do pêndulo ( $kg/m$ )	$p_1$	-
Densidade linear da carga do pêndulo ( $kg/m$ )	$p_2$	-

Fonte: [Inc 2010]

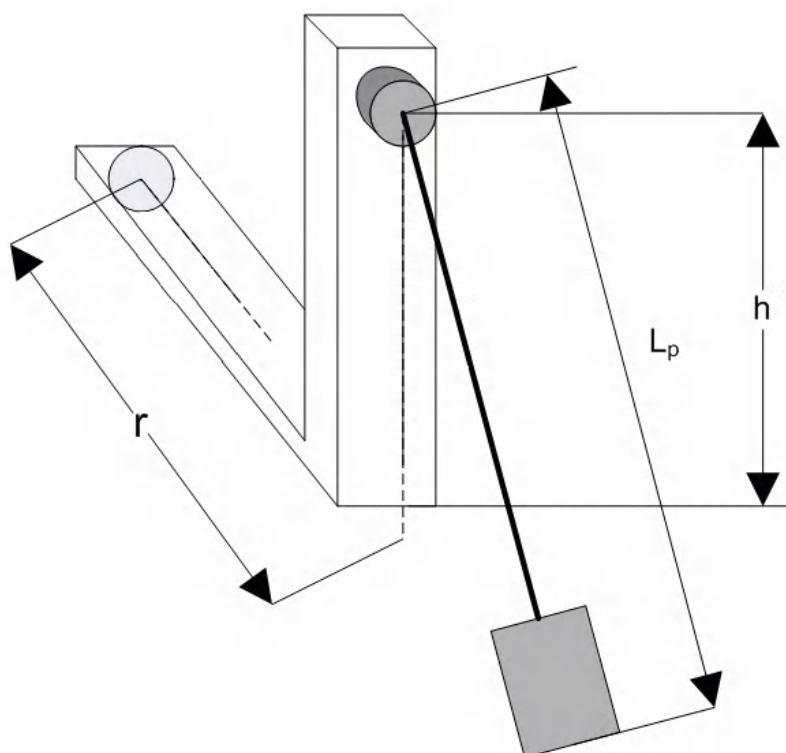
## 3.2 Definição das principais variáveis

O pêndulo apresenta dois braços com revoluções distintas, representados na Figura 3.1. O primeiro braço, em formato de  $L$  com um comprimento  $r$  e altura  $h$ , é capaz de realizar uma revolução em um plano na horizontal e o segundo braço, com um comprimento  $L_p$ , tem liberdade para girar em um plano na vertical.

Para representar a dinâmica do pêndulo, a Figura 3.2 é exibida, apresentando o sistema de coordenadas utilizado e algumas das variáveis essenciais para a modelagem. O ângulo  $\alpha$  representa um dos graus de liberdade de rotação do pêndulo e é formado pelo distanciamento do pêndulo com relação ao eixo vertical  $y$ , de acordo com o sentido mostrado. O ângulo  $\theta$  é uma medida angular do braço acoplado ao motor sobre o plano em que se encontra (plano  $zx$ ).

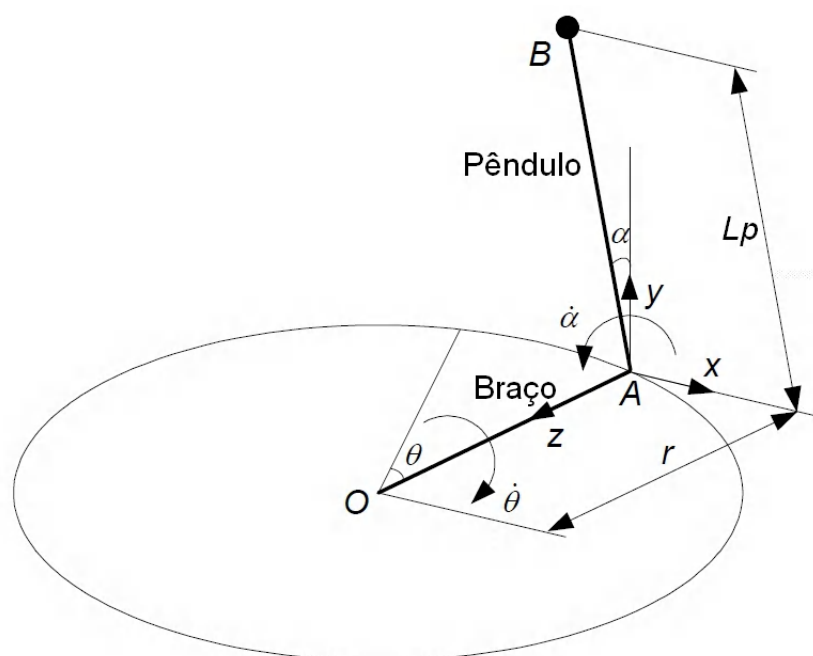
A partir da definição dos eixos, deve-se então definir as forças que atuam no





**Figura 3.1** — Geometria do pêndulo

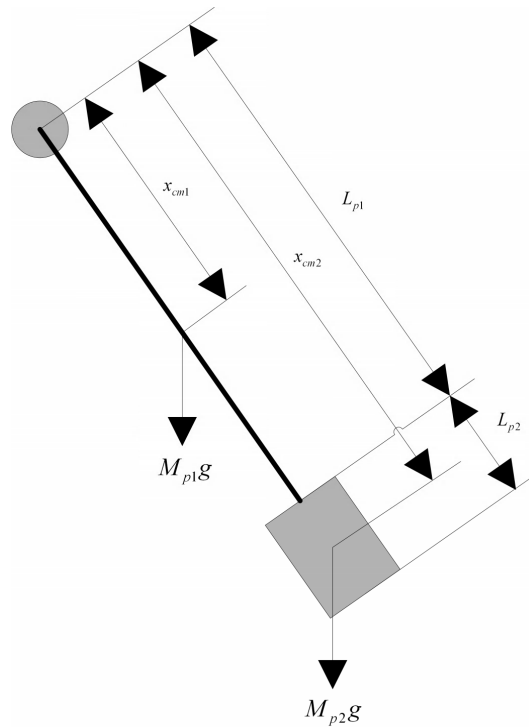
Fonte: [Astrom et al. 2011]



**Figura 3.2** — Definição dos ângulos, eixos e coordenadas de referência do sistema

Fonte: [Diao 2006]

sistema e, conseqüentemente, o centro de massa e o momento de inércia do pêndulo, elementos fundamentais para a obtenção das equações do modelo matemático. O centro de massa pode ser definido como uma média ponderada formada pelo produto das massas de cada objeto - braço e carga do pêndulo - e as distâncias de seus respectivos centros de massa,  $x_{cm1}$  e  $x_{cm2}$  - em relação ao eixo de acoplamento, representado como um círculo na 3.3, na qual também são exibidos os objetos e seus respectivos centros de massa.



**Figura 3.3** — Corpo do pêndulo, formado pelo braço, de comprimento  $L_{p1}$ , e pela carga, de comprimento  $L_{p2}$

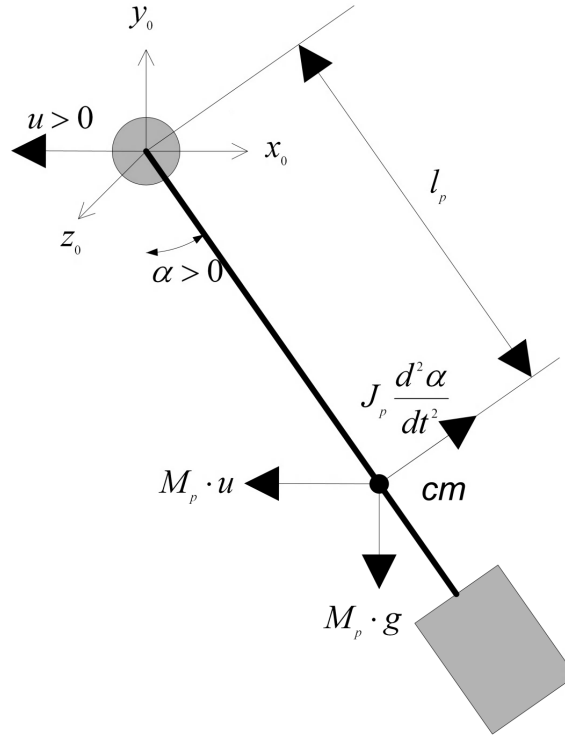
Fonte: [Astrom et al. 2011]

A equação para encontrar o centro de massa do pêndulo é, portanto dada pelo somatório mostrado a seguir na Equação 3.1, que consiste, assim como explicado anteriormente, em uma média ponderada e resulta em um comprimento  $l_p$ , mostrado pela Figura 3.3.

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_{cm,i}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.1)$$

A partir do centro de massa, pode-se determinar a direção, módulo e sentido das forças e conjugados envolvidos no sistema, o que envolverá o cálculo do momento de inércia do pêndulo. A Figura 3.4 exibe os sentidos das forças mencionadas, no qual  $u$

é a aceleração linear do eixo do pivô, ou seja, a aceleração linear do próprio motor, e  $g$  é a aceleração da gravidade.



**Figura 3.4** — Ilustração das forças envolvidas no sistema

Fonte: [Astrom et al. 2011]

O momento de inércia do pêndulo pode, portanto, ser determinado analiticamente através da Equação 3.2.

$$J_p = \int r^2 dm \quad (3.2)$$

Quanto ao momento de inércia equivalente no ponto de acoplamento entre o braço rotativo e o braço do pêndulo  $J_{eq}$  pode-se obtê-lo através da soma entre o momento de inércia do braço rotativo e o momento de inércia do motor (dado pelo fabricante), assim como mostra a Equação 3.3. O valor do momento de inércia equivalente é apresentado logo a seguir.

$$J_{eq} = \frac{1}{3} M_{arm} r^2 + J_m \quad (3.3)$$

Substituindo os valores dados pela Tabela 3.1, obtém-se:

$$J_{eq} = 1,84e - 4 \text{ (kg.m}^2\text{)}$$

### 3.3 Equações do movimento baseadas na metodologia de Euler Lagrange

A partir dos passos tomados por [V.VIJAYALAKSHMI e SRINIVASAN 2013] para a obtenção do modelo e conforme foi explicado no capítulo de revisão, na seção C.1, a técnica das Equações de Movimento (EDM) de Euler-Lagrange é utilizada para transformar as coordenadas genéricas ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ) para um outro sistema de coordenadas, que são suficientes para identificar o movimento do corpo. No caso do pêndulo invertido rotacional,  $\alpha$  e  $\theta$  tornam-se o sistema de coordenadas mais adequado para a modelagem. Há, portanto, duas direções de movimento, ou seja, dois graus de liberdade (GDL) para esse sistema.

Para a obtenção da modelagem, seguindo o princípio das EDM de Euler-Lagrange, é necessário determinar a energia cinética e a energia potencial total do conjunto formado pelo pêndulo e pelo braço rotativo. A energia cinética total é dada pela soma das energias cinéticas linear e rotacional do pêndulo e do braço rotativo, sendo que o subscrito  $r$  designa o braço rotativo e o subscrito  $p$  designa o pêndulo, assim como é mostrado a seguir:

$$T = T_{pend\ Rotacional} + T_{arm\ Rotacional} + T_{pend\ Linear} + T_{arm\ Linear} \quad (3.4)$$

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M_p v_x^2 + \frac{1}{2} M_p v_y^2 \quad (3.5)$$

As velocidades  $v_x$ , e  $v_y$  representam, respectivamente as componentes de velocidade nas direções  $x$  e  $y$ . Os módulos de  $v_x$ , e  $v_y$  são mostrados a seguir pelas equações 3.6 e 3.7.

$$v_x = r\dot{\theta} - l_p\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (3.6)$$

$$v_y = -l_p\dot{\alpha} \sin \alpha \quad (3.7)$$

Substituindo-se os valores dados pelas equações 3.6 e 3.7 em 3.5, determina-se o valor da energia cinética em função das posições e velocidades angulares definidas na geometria do problema, assim como mostra 3.8.

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M_p r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_p l_p^2 \dot{\alpha}^2 - M_p r l_p \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (3.8)$$

A única energia potencial  $V$  no sistema vem da gravidade e afeta somente o bastão do pêndulo. Essa energia é definida como 3.9.

$$V = V_{pend} = M_p g l_p \cos \alpha \quad (3.9)$$

As equações de Lagrange de movimento para o ROTPEN são dadas por 3.10 e 3.11:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_m - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -B_p \dot{\alpha} \quad (3.11)$$

Nas equações descritas, o valor de  $L$  é dado pela Equação 3.12, sendo  $T$  e  $V$  as energias cinética e potencial totais do pêndulo, respectivamente. O torque total aplicado no braço rotativo é representado pelo conjugado de saída  $\tau_m$  do motor retirando-se o atrito viscoso do braço do motor e o conjugado total sobre o pêndulo é determinado pelo atrito viscoso do mesmo. Apesar de terem sido considerados na modelagem, os valores desses coeficientes de atrito serão considerados desprezíveis para o equipamento em análise, assim como mostra a tabela 3.1.

$$L = T - V \quad (3.12)$$

Subtraindo-se a energia potencial e da energia cinética do sistema que foram determinadas, encontra-se o valor de  $L$ , assim como exibido pela Equação 3.12, obtendo-se 3.13.

$$L = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M_p r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_p l_p^2 \dot{\alpha}^2 - M_p r l_p \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \alpha - M_p g l_p \cos \alpha \quad (3.13)$$

Utilizando-se o resultado conseguido na Equação 3.13, volta-se às equações de Lagrange de movimento para o pêndulo rotacional 3.10 e 3.11 e obtém-se os resultados mostrados por 3.14 e 3.15.

$$J_{eq} \ddot{\theta} + M_p r^2 \ddot{\theta} - M_p l_p r (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = \tau_m - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.14)$$

$$J_p \ddot{\alpha} + M_p l_p^2 \ddot{\alpha} - M_p l_p r \ddot{\theta} \cos \alpha + M_p l_p g \sin \alpha = -B_p \dot{\alpha} \quad (3.15)$$

Por fim, lineariza-se o resultado em torno de  $\theta = \alpha = \dot{\theta} = \dot{\alpha} = 0$ , ou seja, eliminam-se os termos multiplicados por  $\dot{\alpha}^2$ , pois, considerando que  $\dot{\alpha}$  é muito pequeno, suas

potências tornam-se irrelevantes. Além disso, ao expandir os termos  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$  em séries de Taylor em torno do ponto 0, sabe-se que as funções podem ser aproximadas por  $\alpha$  e 1, respectivamente.

obtem-se as equações 3.16 e 3.17.

$$J_{eq}\ddot{\theta} + M_p r^2 \ddot{\theta} - M_p l_p r \ddot{\alpha} = \tau_m - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.16)$$

$$J_p \ddot{\alpha} + M_p l_p^2 \ddot{\alpha} - M_p l_p r \ddot{\theta} - M_p g l_p \alpha = -B_p \dot{\alpha} \quad (3.17)$$

O torque de saída do motor,  $\tau_m$  é definido pela Equação 3.18 seguinte, na qual  $V_m$  corresponde à tensão de entrada.

$$\tau_m = \frac{K_t \left( V_m(t) - K_m \dot{\theta}(t) \right)}{R_m} \quad (3.18)$$

A partir dessas equações define-se um sistema de espaço de estados, cujas equações são mostradas logo a seguir por 3.19 e 3.20.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.19)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.20)$$

As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do modelo linearizado são exibidas logo na sequência, assim como os vetores  $x$  e  $u$  do espaço de estados:

$$x = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T$$

$$u = V_m$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{r M_p^2 l_p^2 g}{J_p J_{eq} + M_p l_p^2 J_{eq} + J_p M_p r^2} & -\frac{r M_p^2 l_p^2 g}{J_p J_{eq} + M_p l_p^2 J_{eq} + J_p M_p r^2} & 0 \\ 0 & \frac{r M_p^2 l_p^2 g}{J_p J_{eq} + M_p l_p^2 J_{eq} + J_p M_p r^2} & -\frac{r M_p^2 l_p^2 g}{J_p J_{eq} + M_p l_p^2 J_{eq} + J_p M_p r^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_t(J_p + M_p l_p^2)}{J_p J_{eq} + M_p l_p^2 J_{eq} + J_p M_p r^2} \\ \frac{r M_p l_p K_t}{J_p J_{eq} + M_p l_p^2 J_{eq} + J_p M_p r^2} \end{bmatrix}$$

$$C = I_{4 \times 4}$$

$$D = 0_{4 \times 1}$$

### 3.4 Comparação das respostas linear e não linear de $\theta$ e $\alpha$

Nessa seção encontra-se os resultados das simulações juntamente com as ferramentas utilizadas para construí-las. Na tentativa de reproduzir os resultados obtidos por [Diao 2006] e verificar o quão bem o sistema linearizado representa o sistema original não linear, as simulações foram realizadas. Uma visão geral da planta foi proporcionada dessa maneira, fornecendo informações sobre o comportamento do equipamento.

Foi construído um diagrama de blocos para o sistema não linear do pêndulo invertido de acordo com as equações obtidas por [Diao 2006]. É necessário informar, entretanto, que, como o equipamento utilizado em [Diao 2006] possui características físicas distintas do QNET ROTPEN, os dois modelos, o obtido na seção 3.3 e obtido pelo outro autor, diferem. Apesar das diferentes características físicas, os ângulos, eixos e coordenadas de referência mostrados pela Figura 3.2 são os mesmos utilizados para ambos os tipos de equipamento. A primeira simulação consiste em uma malha aberta, sem a presença de nenhum controlador para realizar a estabilização da planta.

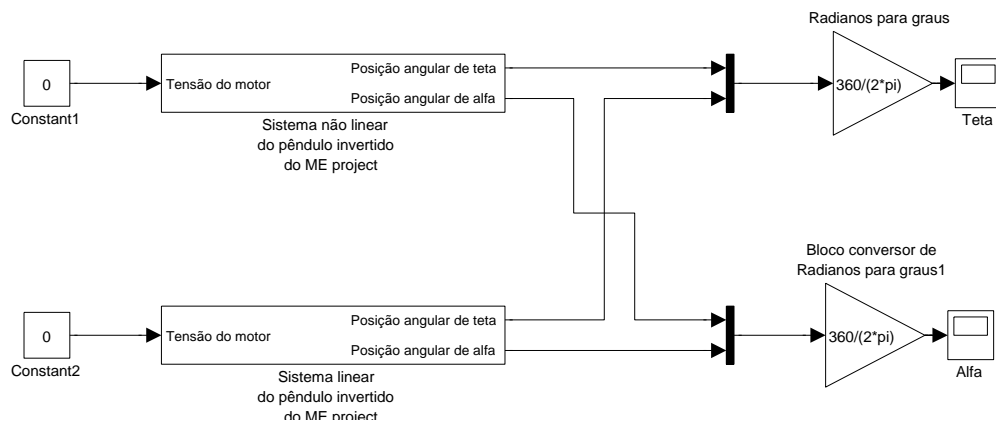
A linearização ocorre em torno do mesmo ponto, no caso, para  $\alpha = \dot{\alpha} = \theta = \dot{\theta} = 0$ . Ou seja, o autor de [Diao 2006] assume que  $\alpha \approx 0$ ,  $\dot{\alpha} \approx 0$  e  $\dot{\theta} \approx 0$ , e, portanto,  $\sin \alpha = \alpha$ ,  $\cos \alpha$  seria unitário e  $\dot{\alpha}^2 = 0$ .

Para que se pudesse avaliar o comportamento não linear do sistema e compará-lo com a linearização proposta por [Diao 2006], criou-se um outro subsistema linearizado. Foi construído um diagrama de blocos no qual avaliava-se as saídas das posições angulares para uma entrada nula de tensão para o motor e uma condição inicial de 0,00001 rad para a posição angular de  $\alpha$  em cada um dos sistemas, linearizado ou não.

Essas condições iniciais representam a situação do pêndulo parado na posição de equilíbrio instável e sem o auxílio do motor, ou seja, o pêndulo está totalmente solto, não há nada para manter o controle do sistema. A inclinação do pêndulo, dada

pelo valor inicial de  $\alpha$  mencionado, ainda que bem pequena, gera um desequilíbrio no pêndulo e isso faz com que ele ganhe velocidade e inicie uma trajetória circular em torno do eixo do braço ao qual encontra-se acoplado.

Caso não houvesse perdas pelo atrito com o ar e a fricção causada pelas juntas, o bastão do pêndulo ficaria rodando em movimento circular uniforme. Os diagramas criados em ambiente *Simulink*, assim como os subsistemas citados, são mostrados nas imagens 3.5, 3.6 e 3.7 em sequência.



**Figura 3.5** — Diagrama em *Simulink* para a comparação entre as respostas dos sistemas Linear e Não Linear

A entrada da tensão do motor é dada em Volts, mas, nesse caso, é nula, sendo retirada da análise tudo o que envolve o motor na modelagem do sistema. As saídas das posições angulares  $\alpha$  e  $\theta$ , coordenadas de referência mostradas em 3.2, são dadas em radianos em ambos os subsistemas e são convertidas em graus ao final do processo, logo antes de chegarem ao osciloscópio.

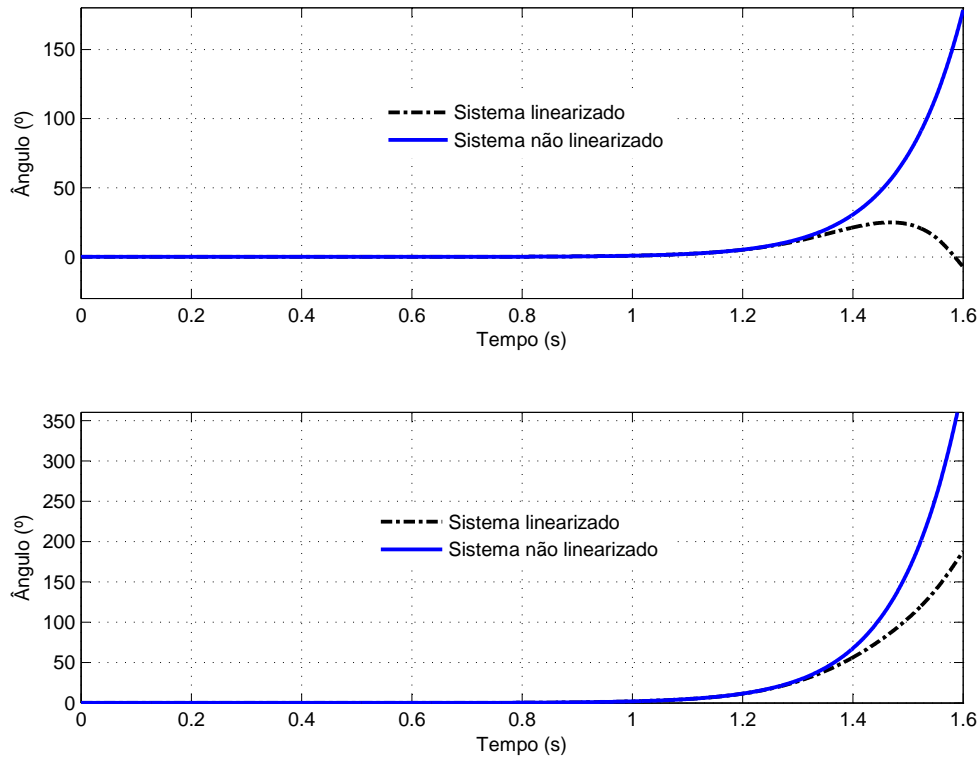
Um dos osciloscópios apresentará a saída da posição angular alfa para os casos linearizado e não linearizado, e o outro exibirá os mesmos casos para a posição angular teta.

O subsistema não linearizado consiste na representação em diagrama de blocos das equações obtidas pela modelagem obtida por [Diao 2006]. Os ganhos representados pelos coeficientes **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** são constantes definidas a partir das características construtivas dos componentes do equipamento (motor, braço do pêndulo e polias). A introdução das funções trigonométricas evidenciam o caráter não linear do sistema.





planta durante o balanço somente quando a posição angular encontra-se muito perto do ponto de equilíbrio, ou seja, um valor inferior à  $2^\circ$ , como será mencionado na seção 5.1. Portanto, mesmo que o sistema linearizado ainda responda bem para valores acima de  $2^\circ$ , não se deve programar controladores para atuar nessa faixa de ângulo.



**Figura 3.8** — Resposta dos sistemas linearizado e não linearizado das posições angulares de  $\theta$  e  $\alpha$ , respectivamente

Ratifica-se, claramente, a instabilidade do sistema com a Figura 3.8, já que os valores dos ângulos para o sistema não linear nunca estabilizam, mesmo para uma análise maior de tempo. No equipamento em si, aplicar as mesmas condições iniciais propostas por essa simulação significaria largar o braço apenas levemente inclinado em relação à posição de equilíbrio. O pêndulo iria descrever trajetórias semicirculares até parar, devido à atuação das forças contrárias ao movimento. As respostas dos ângulos é a mesma, independente das condições iniciais utilizadas, ou seja, os modelos respondem da mesma maneira para uma inclinação de  $2^\circ$  ou  $20^\circ$ , tendo como diferença única, o ângulo de partida do sistema.

### 3.5 LabVIEW

Uma das ferramentas utilizadas ao longo da construção do trabalho foi o *LabVIEW®*. Esse programa, base da plataforma de projeto da *National Instruments®*, é ideal para o desenvolvimento de qualquer sistema de medição ou controle.

Com o Módulo NI de Projeto e Simulação de Controle do *LabVIEW (Control and Design Simulation Module)®*, é possível analisar o comportamento do modelo de malha aberta, projetar controladores, e conduzir implementações físicas, ou seja, comunicar o computador com o equipamento em análise. Pode-se também criar modelos usando função de transferência e espaço de estados. Com ferramentas de análise de tempo e frequência, como resposta ao degrau ou diagrama de Bode, é possível analisar interativamente o comportamento de malha fechada e aberta. [[Página do site da National Instruments - Ambiente gráfico de desenvolvimento de sistemas LabVIEW 2015](#)]

A *National Instruments®* fornece, para os adquirentes do equipamento *QNET ROTPEN*, um pacote de arquivos relacionados a modelagem e implementação de controle produzidos na programa *LabVIEW*. Esses arquivos serão utilizados para a realização de algumas experiências com o pêndulo, tanto na parte de modelagem quanto na parte de implementação dos controladores.

A plataforma de um dos arquivos, o relacionado à modelagem, é mostrada a seguir na Figura 3.9. Nota-se que a plataforma possui um gráfico para a análise dos ângulos do pêndulo, mostrada por 1, e um gráfico para a tensão aplicada no motor, indicado pelo número 2. Os números 3 e 4 representam, respectivamente, um indicador digital - dos ângulos, corrente e tensão no motor - e um gerador de sinais de onda quadrada. Esse gerador de sinais possui três parâmetros que podem ser ajustados pelo usuário da plataforma. Entre esses parâmetros estão a amplitude do sinal de tensão gerada, a frequência desse sinal e um *offset*. A onda determinada pelo usuário é aplicada sobre o motor e isso é utilizado para realizar alguns experimentos com a planta. Há também um botão de distúrbio que pode ser acionado pelo usuário da plataforma. Esse botão faz com que seja aplicada uma tensão impulso de 5 V sobre o motor.

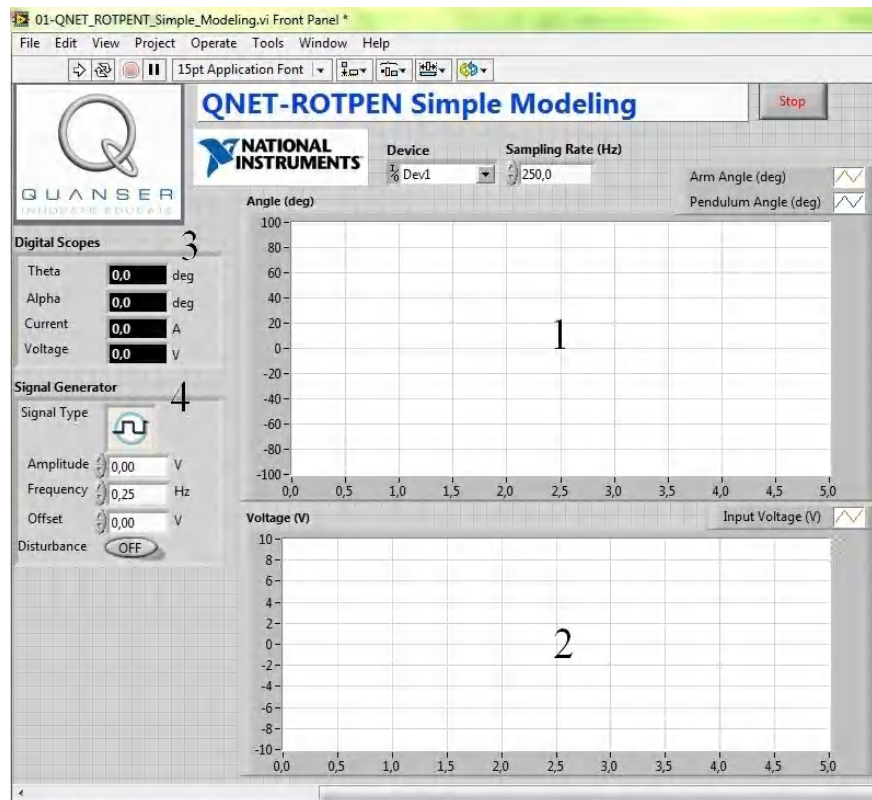


Figura 3.9 — Plataforma do instrumento virtual construído no LabView

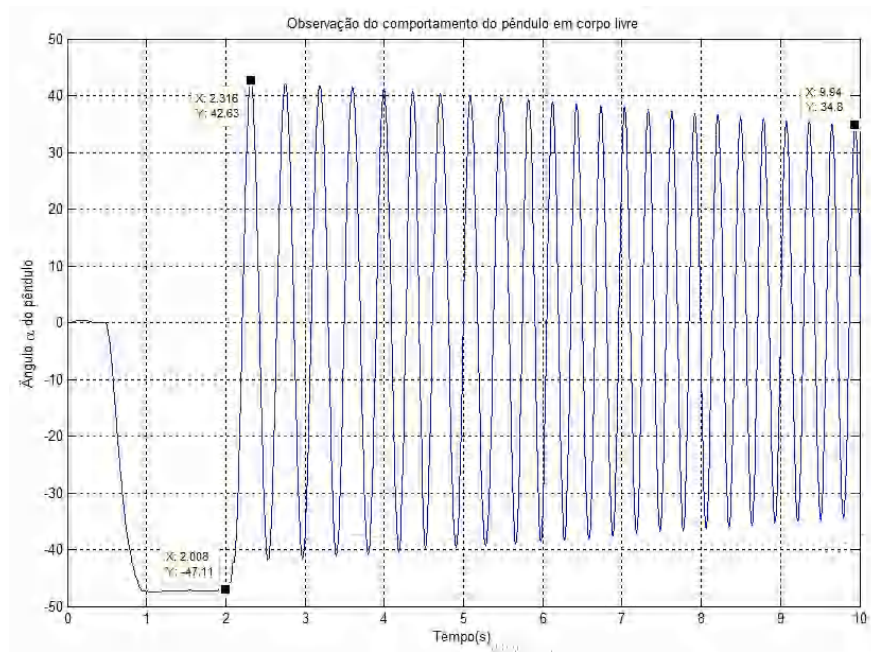
### 3.6 Avaliação do amortecimento do sistema

Foi realizado um experimento para avaliação do amortecimento do sistema, seguindo os passos propostos por [Astrom et al. 2011]. Esse experimento ilustra tarefas de controle para guindastes de pórticos ou pontes rolantes. O pórtico é uma plataforma móvel que desloca-se a partir de um sistema de rolamento que transporta o guindaste sobre o chão da indústria, obra ou porto no qual ele se encontra. A ponte rolante pode ser avaliada por uma analogia com o sistema de pêndulo rotacional. O problema em questão é o de deslocar a carga, do pêndulo ou do guindaste, rapidamente e movê-la para a posição desejada, contudo, de maneira amortecida. Ou seja, deve-se levar a carga à posição desejada e estabilizá-la com o mínimo de oscilações. Essa seção aborda a determinação estratégias para amortecer as oscilações do sistema.

Assim como foi mencionado, quando volta-se o pensamento para o sistema de uma ponte rolante, lembra-se de imediato do sistema de um pêndulo simples. Quando desloca-se a ponte de maneira rápida (seja durante uma aceleração ou frenagem repentina), a carga acoplada ao guindaste através dos cabos, por possuir uma maior inércia, acaba "ficando para trás", no caso da aceleração, ou sendo "projetada para a frente", no caso da frenagem, e realizando assim trajetórias em semicirculares oscilatórias em relação ao seu eixo. Esses ciclos de oscilação duram tanto quanto o amortecimento do sistema leva para pará-lo. No caso do equipamento da QNET Rotpen, não é diferente,

comportando-se igual ao pórtico, caso mantenha-se estático o braço do motor. Foi realizado, portanto, um experimento, assim como sugere o manual do estudante, em busca de determinar o amortecimento do pêndulo. Essa experiência será detalhada a seguir.

Prende-se, na sequência, com o uso de fita adesiva, o braço do motor à sua própria estrutura. Leva-se a carga do pêndulo a uma certa altura e deixa-se que ele caia naturalmente. A Figura 3.10 mostra o comportamento do ângulo do pêndulo para a situação descrita.

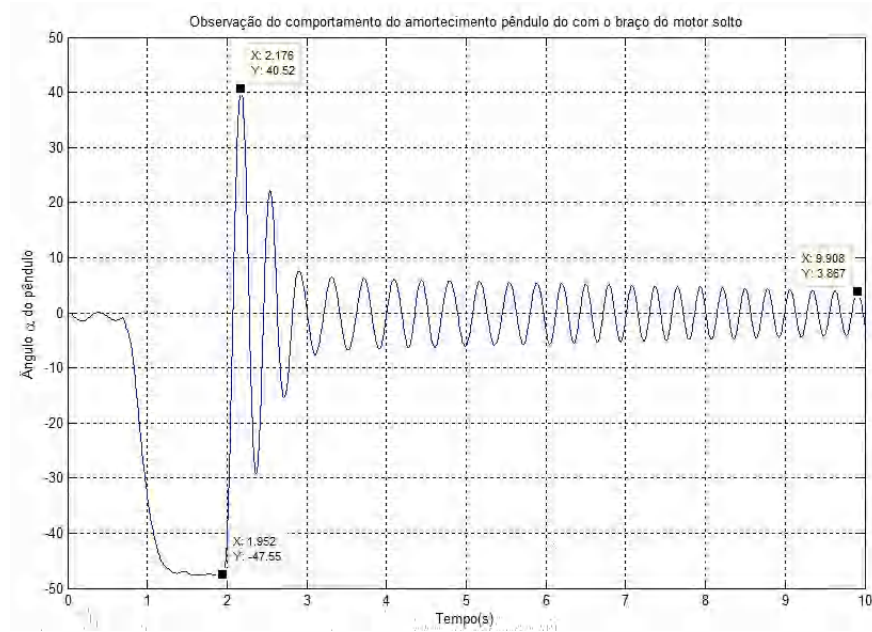


**Figura 3.10** — Amortecimento do ângulo  $\alpha$  do pêndulo em Movimento Harmônico Simples (MHS), ou seja, braço do motor preso à estrutura

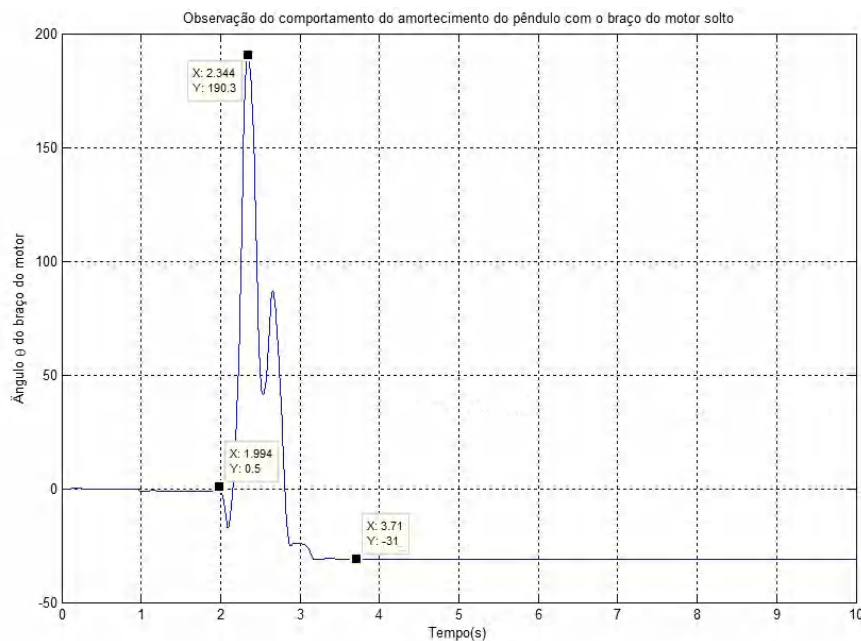
De acordo com o exibido na imagem, o pêndulo estava pendendo solto na posição de equilíbrio estável e foi levado a uma certa altura manualmente, alcançando uma posição angular de  $-47,11^\circ$ , da qual foi solta no instante de tempo  $2,008\text{ s}$ . No primeiro ciclo de oscilação o pêndulo já foi levemente amortecido, chegando, em seu pico, a um valor máximo de  $42,63^\circ$  no momento  $2,316\text{ s}$ . Após pouco mais de  $7\text{ s}$  depois da soltura, o pêndulo obteve como pico da oscilação o valor de  $34,8^\circ$ . Nota-se um decrescimento aparentemente linear da amplitude do pêndulo, ou seja, o amortecimento aparentemente constante.

Realiza-se novamente o experimento, seguindo os mesmos passos anteriores, contudo, deixando-se livre o braço do motor. A Figura 3.11 e 3.12 mostra o novo comportamento do ângulo do pêndulo e do ângulo do braço, respectivamente, para a situação descrita.

Da mesma maneira, colocou-se o pêndulo a uma certa altura com relação ao ponto de equilíbrio estável, formando um ângulo também de cerca de  $47^\circ$  com relação



**Figura 3.11** — Amortecimento do ângulo  $\alpha$  do pêndulo com o braço rotativo solto



**Figura 3.12** — Dinâmica do ângulo  $\theta$  com o braço rotativo solto

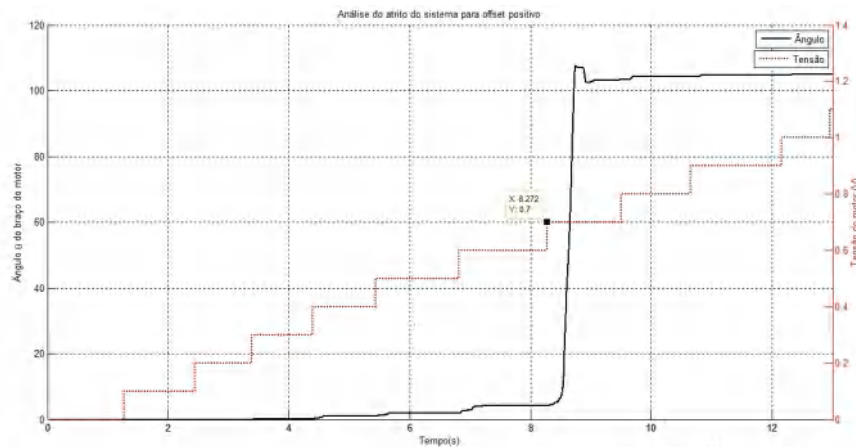
ao eixo vertical. Diferentemente do primeiro caso, ao largar o pêndulo, o braço do motor moveu-se também em busca de amortecer a perturbação causada. Isso faz com que, após 3 ciclos de oscilação, cerca de 1 s após a soltura do pêndulo, o pico da trajetória atinge um valor inferior a  $10^\circ$ , representando um amortecimento inicial mais agressivo. Do instante 3 s, quando o braço rotativo estabiliza-se, até os 10 s o pêndulo possui novamente um amortecimento constante parecido com o do caso em que o braço do motor encontra-se bloqueado para movimentação.



Assim como deveria se esperar, o sistema é mais rapidamente amortecido no segundo caso, já que introduz-se mais um elemento, além do atrito do ar, para o amortecimento do pêndulo.

### 3.7 Atrito do sistema

Para examinar o atrito do sistema, assim como propõe [Astrom et al. 2011], aumenta-se, gradualmente o valor de tensão aplicada sobre o motor em degraus de 0, 10 V até que o pêndulo comece a se movimentar e, dessa maneira, determina-se o valor da tensão  $V_p$  necessária para colocar em movimento o sistema. A resposta dessa prática encontra-se a seguir na Figura 3.13.

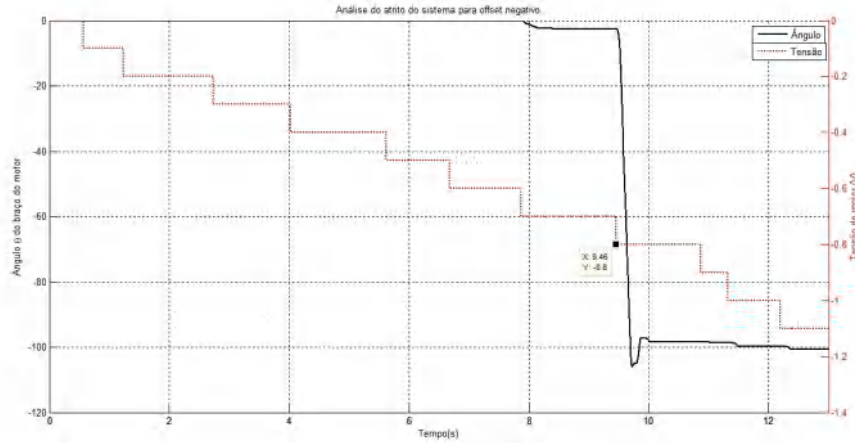


**Figura 3.13** — Análise do atrito do sistema

Os degraus de tensão foram aplicados manualmente pelo estudante, através da mudança do valor de *Offset* do gerador de sinais, por isso, nota-se um espaçamento desigual entre eles. A partir da figura, observa-se que o braço do motor tenta manifestar-se mesmo com a aplicação de tensão baixa como no intervalo de 0, 4 V à 0, 6 V, contudo, não consegue romper o atrito até que o motor receba uma tensão  $V_p$  do valor de 0, 7 V. No instante em que o motor recebe essa tensão, descreve uma trajetória de cerca de 100°. Desse valor de tensão em diante, o braço rotativo não se mexe mais de maneira significativa.

De maneira análoga a esse primeiro experimento, reconstrói-se os passos seguidos, contudo alterando os degraus de tensão para  $-0, 1$  V de modo a obter a tensão de rompimento de atrito  $V_n$ . A resposta dessa prática encontra-se a seguir na Figura 3.14.

Assim como no caso anterior, o estudante aplicou os degraus de tensão gradativamente em busca de observar o comportamento do braço do motor. Ele tenta mover-se com tensões um pouco inferiores em módulo, contudo, só consegue romper a força de



**Figura 3.14** — Análise do atrito do sistema

atrito quando recebe uma tensão no valor de  $0,8\text{ V}$ , descrevendo uma trajetória também de cerca de  $100^\circ$ , contudo, para o sentido contrário em relação ao primeiro teste.

### 3.8 Momento de Inércia

Implementando o último experimento relacionado com a modelagem do sistema do pêndulo encontrado no manual [Astrom et al. 2011], realiza-se os procedimentos necessários para obter o momento de inércia do pêndulo. Isso pode ser feito de duas maneiras: calculado analiticamente através dos parâmetros construtivos do pêndulo ou determinado experimentalmente.

Para calcular o valor do momento de inércia analiticamente, deve-se retomar a Equação 3.2. Substituindo-se  $dm$  por  $dr$ , nessa equação, e considerando  $p_1$  e  $p_2$  os valores de densidade linear dos objetos mostrados e calculando a integral sobre os limites de integração determinados, o momento de inércia do pêndulo é dado por:

$$J_p = p_1 \int_0^{L_{p1}} r^2 dr + p_2 \int_{L_{p1}}^{L_{p1}+L_{p2}} r^2 dr$$

$$J_p = \frac{1}{3} p_1 L_{p1}^3 + \frac{1}{3} p_2 (L_{p1} + L_{p2})^3 - \frac{1}{3} p_2 L_{p1}^3$$

Trocando os valores de densidade linear pela razão entre a massa e o comprimento de cada objeto, que são valores conhecidos, encontra-se:

$$J_p = \frac{1}{3} M_{p1} L_{p1}^2 + M_{p2} L_{p1}^2 + M_{p2} L_{p1} L_{p2} + \frac{1}{3} M_{p2} L_{p2}^2$$

Utilizando os valores dados pela tabela 3.1 o momento de inércia calculado analiticamente tem o seguinte valor:



$$J_p = 6,98.10^{-4} [kg.m^2]$$

Alternativamente, pode-se calcular o momento de inércia do pêndulo experimentalmente. Partindo do sistema da Figura 3.4, pode-se extrair a Equação 3.21 para o conjugado resultante.

$$J_p \ddot{\alpha} = -M_p g l_p \sin \alpha - M_p u l_p \cos \alpha \quad (3.21)$$

Considera-se a situação para o pêndulo não atuado, ou seja, uma entrada nula para o valor de aceleração linear  $u$  e uma pequena variação da posição angular  $\alpha$ , o que permite uma aproximação  $\sin \alpha = \alpha$ , tomando-se o primeiro termo da expansão da função seno em série de Taylor. A Equação 3.21 resume-se a 3.22.

$$J_p \ddot{\alpha} + M_p g l_p \alpha = 0 \quad (3.22)$$

Com essas considerações e assumindo uma posição angular inicial  $\alpha_0$  e uma velocidade angular  $\dot{\alpha} = 0$  em um instante  $t = 0$ , pode-se tomar a transformada de Laplace da Equação 3.22 chegando à 3.23

$$s^2 \alpha(s) - \alpha_0 + \frac{M_p g l_p \alpha(s)}{J_p} = 0 \quad (3.23)$$

Isolando-se  $\alpha(s)$  na Equação 3.23 encontra-se 3.24.

$$\alpha(s) = \frac{s \alpha_0 J_p}{s^2 J_p + M_p g l_p} \quad (3.24)$$

Tomando-se a transformada inversa de Laplace para encontrar a solução 3.25

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \left( \sqrt{\frac{M_p g l_p}{J_p}} t \right) \quad (3.25)$$

A frequência do pêndulo em movimento harmônico simples é, portando, dada pela Equação 3.26.

$$f = \frac{\sqrt{\frac{M_p g l_p}{J_p}}}{2\pi} \quad (3.26)$$

É possível isolar o valor do momento de inércia do pêndulo na Equação 3.26 e finalmente obter 3.27.

$$J_p = \frac{1}{4} \frac{M_p g l_p}{f^2 \pi^2} \quad (3.27)$$

Na Equação 3.27,  $f$  é a frequência de oscilação do pêndulo em movimento harmônico simples e pode ser obtida experimentalmente através da razão entre o número de ciclos e o tempo gastos para descrever essas trajetórias, assim como mostra a Equação 3.28.

$$f = \frac{n_{cyc}}{\Delta t} \quad (3.28)$$

Seguindo os procedimentos sugeridos pelo manual [Astrom et al. 2011], mas avaliando 6 ciclos ao invés dos 4 que foram propostos pelo documento, extraiu-se o tempo da oscilação através da Figura 3.10, obtida na situação em que o braço rotativo do motor estava imobilizado. Para o caso em análise, a frequência  $f$  apresentou um valor de 2,5084 Hz e, utilizando os valores encontrados na tabela 3.1, acha-se um momento de inércia de  $1,6271 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ . Comparando o momento de inércia calculado analiticamente com o obtido através do experimento observa-se uma significativa discrepância entre eles, ou seja, o valor obtido no experimento foi cerca de 4,3 vezes inferior ao analítico. A Quanser, fabricante do equipamento, embasada nesse mesmo experimento, obteve um valor de  $1,77 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$  para o momento de inércia. Esse valor é mais coerente com o obtido pelo experimento realizado no laboratório utilizado para este trabalho. Nota-se, portanto, uma falha no modelo analítico para o cálculo do momento de inércia do pêndulo.

A partir do valor de momento de inércia determinado, pode-se definir um controlador diferente do que seria estimado com o caso do momento de inércia analítico. Deve ser analisado, portanto, o comportamento do pêndulo em cada caso.

### 3.9 Considerações finais

O modelo não-linear da dinâmica do pêndulo foi obtido utilizando as equações de Euler Lagrange. Este modelo será utilizado para a produção do controlador da planta, além de permitirem a simulação em malha aberta através de programas computacionais. O sistema foi linearizado e com isso, obteve-se as equações de espaço de estados e as definições das matrizes que compõem essas equações.

O comportamento do pêndulo foi simulado e o processo de linearização foi validado com os resultados. A partir dessa simulação e das outras informações obtidas

acerca do equipamento ao longo do texto, pode-se implementar um controlador eficaz para a estabilização da planta.

Os experimentos mostrados evidenciam a importância da análise do atrito do motor para futura compensação da fricção, em busca de um controle mais adequado, além da determinação precisa do momento de inércia do pêndulo, que é uma grandeza essencial utilizada nas equações do sistema de espaço de estados.

## Descrição do equipamento

A planta consiste em um braço rotacional capaz de se movimentar em um plano horizontal com um pêndulo, livre para rotacionar na vertical, inserido na sua extremidade. O pêndulo consiste em um braço acoplado a uma polia que, por sua vez, está anexada a um motor de corrente contínua capaz de rotacionar o sistema e, conseqüentemente, fazer o pêndulo girar. A Figura 4.1, mostrada a seguir, ilustra o equipamento utilizado no projeto.



**Figura 4.1** — Equipamento Quanser NI-ELVIS Trainer (QNET) Series (Pêndulo de Furuta)

Fonte: [Inc 2010]

### 4.1 Identificação dos componentes da planta

A planta para a qual deseja-se criar um sistema de controle é chamada de *QNET ROTPEN* e foi mostrada pela Figura 4.1. Para que se conheça melhor o equipamento,

as partes construtivas do pêndulo são apresentadas na sequência. As Figuras 4.2 e 4.3, exibem o equipamento em diferentes vistas, nas quais estão apontados os principais componentes. A Tabela 4.1 é também apresentada em seguida descrevendo o que é cada ponto indicado nas gravuras.

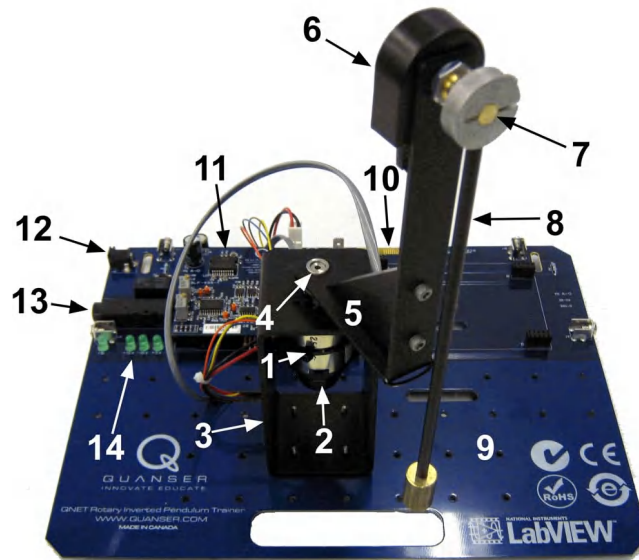


Figura 4.2 — Vista frontal do QNET ROTPEN

Fonte: [Inc 2010]

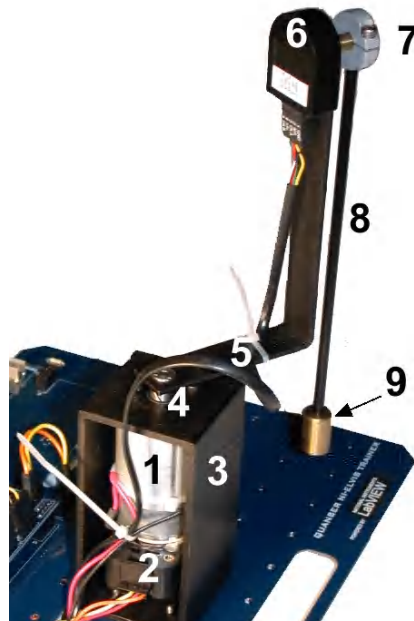


Figura 4.3 — Vista lateral do QNET ROTPEN

Fonte: [Inc 2010]

Assim como exposto pelas figuras 4.2 e 4.3, o pêndulo é composto por várias partes, cada qual com seu objetivo. O motor, como foi mencionado anteriormente, gira o eixo rotativo ao qual o pêndulo encontra-se acoplado e, dessa maneira, controla-se a planta. Os eixos, do braço rotativo e do pêndulo, servem para conectar os equipamentos. A carga e o braço formam o pêndulo propriamente dito e a câmara de metal é onde o motor fica alojado e fixado. Os demais equipamentos servem para conexão, alimentação e proteção da placa QNET.

Tabela 4.1 – Descrição dos componentes do equipamento QNET ROTPEN indicados nas imagens 4.2 e 4.3.

Número Indicado	Descrição
1	Motor CC
2	Encoder de alta resolução para a medição do ângulo do braço
3	Câmara de metal do motor
4	Eixo do braço rotativo
5	Braço rotativo
6	Encoder do pêndulo
7	Eixo do pêndulo
8	Braço do pêndulo
9	Carga do pêndulo
10	Conector PCI para NI-ELVIS: para conexão entre o módulo QNET com DAC
11	PWM do QNET/Encoder da placa

Fonte: [Inc 2010]

Para monitorar o equipamento e controlar o sistema, é necessário medir as posições angulares e a velocidade de rotação da parte movida pelo motor na geometria do conjunto. Para isso, assim como informa o manual [Inc 2010], o equipamento do QNET ROTPEN dispõe de dois diferentes *encoders* disponíveis para a medição das posições angulares em análise e um tacômetro para a medição da velocidade do motor que é a velocidade do braço rotativo ao qual o pêndulo está acoplado.

A medição de posição é obtida digitalmente através da utilização de um *encoder* óptico de alta resolução em quadratura. Existe um *encoder* óptico montado diretamente na parte inferior do motor, referenciado com o número 2 na Tabela 4.1 e pelas Figuras 4.2 e 4.3, e outro que mede o ângulo de rotação do pêndulo, referenciado pelo número 6. No caso do tacômetro, um sinal analógico proporcional à velocidade do motor está disponível no Canal de Entrada A/D # 4 do equipamento.

## 4.2 Especificações dos dispositivos de medição

Na Tabela 4.2 são exibidas as especificações dos instrumentos de medição da planta. Nota-se que não há medidor de tensão, apesar de essa ser uma das variáveis do modelo obtido no capítulo 3. A tensão do motor pode ser obtida, contudo, através da corrente medida e isso é o que é realizado nesse equipamento.

Tabela 4.2 – Especificações.

Descrição da grandeza do dispositivo	Valor	Unidade
Calibração do sensor de corrente	1,0	$A/V$
Resistor do sensor de corrente	0,1	$\Omega$
Contagem de linhas do <i>encoder</i> do pêndulo	1024	$\frac{\text{linhas}}{\text{revolucao graus}}$
Resolução do <i>encoder</i> do pêndulo	0,0879	$\frac{\text{contagem}}{\text{linhas}}$
Contagem de linhas do <i>encoder</i> do motor	360	$\frac{\text{linhas}}{\text{revolucao graus}}$
Resolução do <i>encoder</i> do motor	0,25	$\frac{\text{contagem}}{\text{linhas}}$
Tipo dos <i>encoders</i>	TTL	
Sinais dos <i>encoders</i>	A,B	
Calibração do tacômetro no na entrada A/D do QNET	2987	$\frac{RPM}{V}$

Fonte: [Inc 2010]

---

## Controle e Simulações

Neste capítulo é apresentada a estratégia utilizada para levar o pêndulo à condição de equilíbrio instável e como controlá-la nessa posição. São tratados os tipos de controladores utilizados na planta, assim como o mecanismo de chaveamento entre os controladores.

O controle de um pêndulo invertido rotacional é um dos problemas clássicos da engenharia. O objetivo do projeto é desenvolver um controlador que seja capaz de levar o pêndulo da posição pendente, caída, apontando para o chão, para a posição "em pé" e estabilizá-la nesse ponto. [Diao 2006]

### 5.1 O controlador *swing-up*

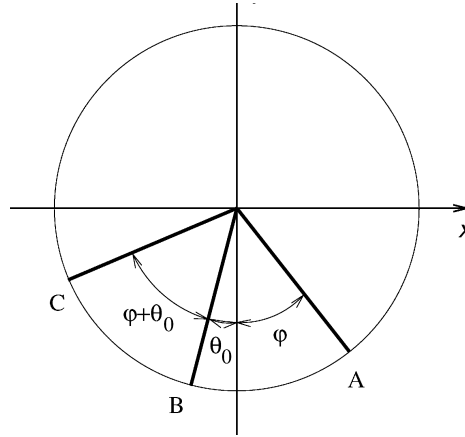
O *Swing-up Controller* (em português controlador de balanço), é um sistema de balanço com o qual busca-se desestabilizar o sistema. O controlador *swing-up* propõe a partida do sistema de uma condição estável indesejada, ou seja, o pêndulo invertido encontrado na posição vertical voltado para baixo como mostra a Figura 4.1.

A partida do sistema é realizada através do controlador desestabilizador, em um movimento de balanço idêntico ao do pêndulo simples, indo e voltando, ganhando energia potencial a cada oscilação, de acordo com o torque aplicado pelo motor.

O movimento e o princípio de desestabilização segue o mesmo comportamento de um balanço infantil. Nesse balanço infantil, os pés da criança aplicam uma força de propulsão no sentido do movimento em cada trajetória de oscilação, assim como faz o motor de corrente contínua no caso do equipamento *QNET ROTPEN*, aumentando a energia total do sistema. Assim como foi explicado na seção 3.6, é como se o braço do motor se deslocasse quando o motor é acionado e a carga do pêndulo, por inércia, ficasse na mesma posição, porém, ganhando altitude em relação à posição inicial, já que está acoplada ao braço do motor.



O sistema realiza a trajetória oscilatória e ganha energia potencial, como foi mencionado. A variável  $\theta_0$  representa a posição angular de um instante de tempo, assim como exibe a Figura 5.1. A amplitude de oscilação aumenta, assim como mostra a variável  $\phi$ , ou seja, passando a descrever uma trajetória pendular indo e vindo entre os pontos A e C, passando sempre, à cada ciclo, é claro, pela posição de equilíbrio estável.



**Figura 5.1** — Ilustração geométrica da estratégia do controlador *swing-up*

Fonte: [Astrom e Furuta 1999]

O valor de  $\phi$  aumenta a cada movimento e atravessa, dessa maneira, a linha representada pelo eixo  $x$  da Figura 5.1. Um dos principais resultados obtidos nos estudos de [Astrom e Furuta 1999] foi que o comportamento global do balanço é caracterizado pela razão  $n$  dada pela aceleração máxima do pêndulo sobre a aceleração da gravidade. É mostrado que um único movimento de balanço é suficiente para alcançar a posição de equilíbrio instável, desde que  $n$  seja maior que  $\frac{4}{3}$ . A análise também dá uma visão sobre a robustez do tempo mínimo de balanço em termos de sobressinal de energia.

## 5.2 Controle de energia

Se o ângulo  $\theta$  do braço do motor é mantido constante e é dada ao pêndulo uma energia potencial gravitacional inicial, ele iria oscilar com uma certa amplitude. Devido ao atrito, haverá amortecimento na oscilação e, conseqüentemente a amplitude de oscilação diminui com o tempo. A energia potencial do pêndulo é dada, portanto, por 5.1 e a energia cinética por 5.2. [Astrom et al. 2011]

$$E_p = M_p g l_p \cos \alpha \quad (5.1)$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \quad (5.2)$$

Somando as duas energias, diferenciando o resultado com relação ao tempo encontra-se

$$\dot{E} = \dot{\alpha}(J_p\ddot{\alpha} + M_p g l_p \sin \alpha) \quad (5.3)$$

Substituindo-se a equação 3.21 na equação 5.3, obtém-se 5.4, na qual  $u$  é a aceleração linear do eixo do pivô, ou seja, a aceleração linear do próprio motor.

$$\dot{E} = -M_p u l_p \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (5.4)$$

Uma vez que a aceleração do pêndulo é proporcional à tensão de acionamento do braço rotativo do motor, descobre-se que é fácil de controlar a energia do pêndulo. A lei de controle proporcional, mostrada na equação 5.5, conduz a energia do sistema para a referência definida  $E_r$ . Essa energia de referência corresponde à energia potencial do pêndulo para a situação desejada, ou seja, quando ele se encontra na posição de equilíbrio instável em  $\alpha = 0$ . Observe que a lei de controle não é linear, porque o ganho proporcional  $u$  depende do cosseno do ângulo  $\alpha$  de pêndulo. Além disso, nota-se que o ganho muda de sinal em dois casos, quando a velocidade  $\dot{\alpha}$  muda de sinal e quando o ângulo é  $\pm 90^\circ$ .

$$u = (E - E_r)\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (5.5)$$

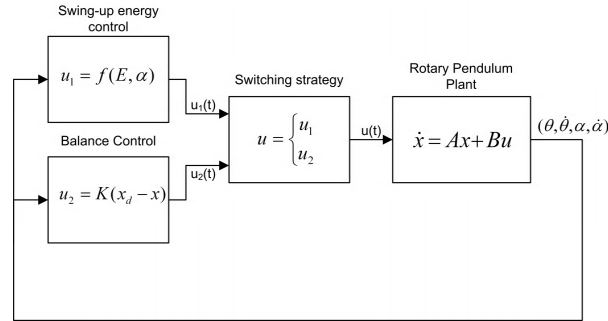
No entanto, para mudar rapidamente o sinal da lei de controle, a variação magnitude do sinal tem de ser grande. Como resultado disso, o controlador de energia é implementado no *LabView* é dado por 5.6 onde  $\mu$  é um controle de ganho ajustável e a função  $sat_{u_{max}}$  satura o sinal de controle na aceleração máxima do eixo de oscilação,  $u_{max}$ .

$$u = sat_{u_{max}}(\mu(E - E_r)sign(\dot{\alpha} \cos \alpha)) \quad (5.6)$$

### 5.3 Controlador Híbrido

O controle de estabilização do pêndulo pode ser combinado com o controle de energia de modo a partir o sistema com o pêndulo na condição de equilíbrio estável, ou seja, voltado para baixo, e chegar na condição de equilíbrio instável, ou seja, voltado para cima. O controlador híbrido, formado pela combinação do controlador estabilizador com o controlador *swing-up*, se baseia no chaveamento entre os dois diferentes controladores. Em outras palavras insere-se no sistema, em um momento inicial, um dos controladores e, após algum tempo ou condição atingida, o outro controlador é acionado enquanto o

primeiro é desativado. A Figura 5.2 mostra um esquema com o controlador híbrido em diagrama de blocos.



**Figura 5.2** — Esquema de um controlador híbrido

Fonte: [Astrom et al. 2011]

O chaveamento entre os controladores deve ser determinado, ou seja, programado para inserir uma das duas diferentes entradas no sistema,  $u_1$  ou  $u_2$ . De acordo com a Figura 5.1, quando o pêndulo já ultrapassou o eixo  $x$  e encontra-se à  $0^\circ$  ou  $2^\circ$  da posição de equilíbrio instável - esses valores podem variar de acordo com o projetista - chaveia-se o sistema, retirando-se o controlador desestabilizador e inserindo um controlador estabilizador. Tomando-se novamente o caso do balanço de pneu, é como se um adulto empurrasse a criança no balanço com força suficiente para que o pneu ficasse próximo da posição vertical voltada para cima e, nesse momento, um outro indivíduo, em cima de uma escada, por exemplo, segurasse a criança, que estaria com a cabeça voltada para o chão. Nesse caso, o papel pêndulo é desempenhado na criança sobre o pneu, e os controladores de energia e de estabilização são, por analogia, o adulto que empurra a criança e o adulto que segura a criança, respectivamente.

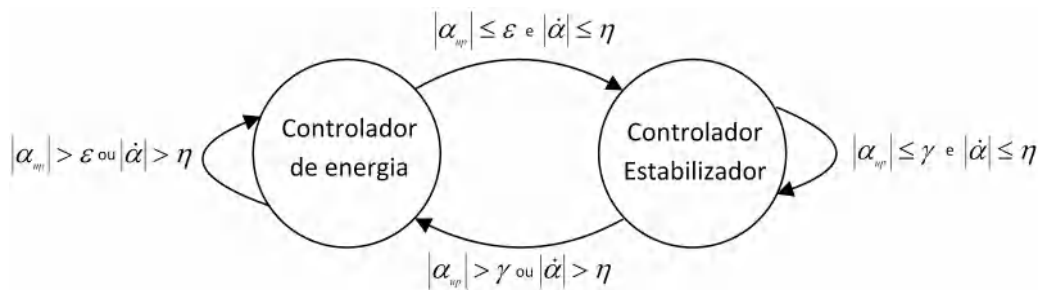
A aproximação da região de estabilização não é, entretanto, o único requisito a ser atendido para que o controlador estabilizador seja capaz de atuar. Imagine que o pêndulo estivesse com uma velocidade muito grande ao chegar na região de estabilização, por exemplo algo superior à  $720 \frac{\text{graus}}{\text{s}}$ . Em outras palavras, caso o motor do equipamento exercesse um movimento muito brusco e levasse o pêndulo à uma posição angular  $\alpha \approx 0$ , contudo, com uma velocidade  $\dot{\alpha}$  muito grande. O controlador estabilizador teria que exercer uma ação de controle contrária à velocidade do pêndulo em busca de mantê-lo parado. A energia demandada para essa ação, entretanto, pode ser superior a energia fisicamente suportada pelos componentes do sistema, portanto, há um limite de velocidade determinado para o qual o controlador pode atuar. A ação de controle, por exemplo, pode exigir que uma tensão muito alta seja aplicada no motor, gerando uma corrente superior à capacidade de condução de corrente dos condutores e queimando-os por conta disso. No caso da criança, é como se o adulto no chão empur-

rasse a criança com muita força e o indivíduo em cima da escada não fosse capaz de segurar a criança quando ela passasse por ele.

As duas últimas análises proporcionaram dois parâmetros para o chaveamento, o ângulo  $\alpha$  mínimo para que o controlador entre em ação e a velocidade máxima para a qual o controlador ainda consegue atuar, que será chamada  $\eta$ . Há também uma terceira análise a ser realizada, quando o controlador estabilizador já entrou em ação e é perturbado por alguma força externa. Quando o sistema é perturbado pode ser que a velocidade do pêndulo torna-se maior a velocidade  $\eta$  máxima permitida. Pode ser também que o pêndulo seja perturbado por uma força pequena que desloque o pêndulo, mas que não o deixe desenvolver uma velocidade grande. Nesse caso o controlador deve ser capaz de "puxar" o pêndulo de volta para a posição desejada, desde que o deslocamento seja coerente com a região linear de operação. Ou seja, pode-se, por exemplo, perturbar o pêndulo, que já estava controlado na posição  $\alpha = 0$ , tal que ele seja desviado em até  $30^\circ$  e o controlador estabilizador ainda será capaz de trazê-lo de volta à situação inicial.

Define-se, portanto,  $\alpha_{up}$  como o valor do ângulo  $\alpha$  para o qual o controlador estabilizador entra em operação,  $\eta$  como a velocidade máxima para  $\dot{\alpha}$  para que o controlador estabilizador seja capaz "segurar" o pêndulo e, por último, a faixa de ângulo  $\gamma$  para o qual o controlador é capaz de responder à perturbações.

A Figura 5.3 mostra um autômato híbrido, ou seja, uma representação da lógica a ser implementada pelo controlador híbrido, na qual os valores de  $\alpha$  e  $\dot{\alpha}$  são avaliados e a ação de controle a ser tomada é determinada através da lógica.



**Figura 5.3** — Máquina de estados do controlador híbrido

Fonte: [Astrom et al. 2011]

Os valores mencionados na descrição dos diferentes casos para serem analisados pelo controlador híbrido são, na verdade, os parâmetros estabelecidos pelo fabricante e são exibidos pela Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Parâmetros do Controlador Híbrido.

Parâmetro	Valor	Unidade
$\epsilon$	2	graus
$\eta$	720	$\frac{\text{graus}}{s}$
$\gamma$	30	graus

Fonte: [Astrom et al. 2011]

## 5.4 Controlador Estabilizador

O controlador estabilizador atua para manter o pêndulo na posição de equilíbrio instável, ou seja, esse controlador busca manter o pêndulo em  $\alpha = 0$ . Assim como foi explicado, ele entra em ação somente quando o pêndulo encontra-se próximo da posição desejada, pois o controlador opera somente em uma estreita faixa em torno do ponto utilizado para a linearização.

Há uma variada coleção de métodos para definir parâmetros de estratégias de controle. O método do Regulador Quadrático Linear (RQL) é uma técnica apropriada para encontrar os parâmetros do controlador de equilíbrio. Dado que as equações do movimento do sistema podem ser descritas na forma da equação 3.19 e 3.20. [Astrom et al. 2011]

O algoritmo RQL calcula uma ação de controle  $u$  para minimizar o critério mostrado pela equação a seguir:

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt$$

A matriz  $Q$  define o peso na variável de estado e a matriz  $R$  define o peso sobre a ação de controle. Quando  $Q$  é aumentado, o controlador deve trabalhar mais para minimizar o custo da função e o ganho do controle resultante será maior. Em nosso caso o vetor de estados é definido como:

$$x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$$

Como só existe uma variável de controle, a tensão  $V_m$  do motor,  $R$  é um escalar e a estratégia de controle utilizada para minimizar a função  $J$  é dada por 5.7:

$$u = -K(x - x_r) = -k_{p,\theta}(\theta - \theta_r) - k_{p,\alpha}(\alpha - \pi) - k_{d,\theta}\dot{\theta} - k_{d,\alpha}\dot{\alpha} \quad (5.7)$$

Com a ação do controlador o braço do pêndulo alcança a posição vertical voltada para cima, ou em "pé", assim como mostra a Figura 5.4.



**Figura 5.4** — Pêndulo na posição de equilíbrio instável

Fonte: [Astrom et al. 2011]

## 5.5 Projeto do controlador estabilizador

Os procedimentos necessários para determinar os ganhos para a realimentação de estados foram exibidos na subseção 2.1.1. Foi utilizada a plataforma *MathWorks* para o projeto do controlador.

Para obtenção do controlador é necessário definir os ganhos de realimentação de estados do vetor  $K$  que minimizam a função de custo 2.1 mostrada no capítulo 2. A partir dos valores dos ganhos definidos pelo projeto, são obtidos os pólos desejados para o sistema realimentado. Mostra-se primeiramente, portanto, quais são os pólos de malha aberta. Dessa maneira, pode-se também verificar a instabilidade do sistema de espaço de estados, obtido com a linearização exibida no capítulo 3. O mapa de pólos e zeros para o sistema em malha aberta é exibido na Figura 5.5

Observando-se os pólos da malha aberta,  $\lambda_{\text{malha aberta}} = \begin{bmatrix} -9,31 & -0,347 & 0 & 9,08 \end{bmatrix}$ , nota-se que não há zeros finitos no sistema. Há dois pólos à esquerda do eixo das ordenadas, um pólo sobre a origem e um último à direita do eixo das ordenadas. O último pólo confirma que o sistema é instável, de acordo com a teoria de controle. Deve-se, portanto, projetar um controlador que leve os pólos de malha fechada para região de estabilidade, à esquerda do eixo das ordenadas.

O controlador foi projetado utilizando-se o comando *lqr* do *Matlab*® e retorna os valores de ganho  $K$ , desde que se forneça as matrizes do espaço de estados -  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  - e os pesos das matrizes da função de custo -  $R$  e  $Q$ . Essa função retorna

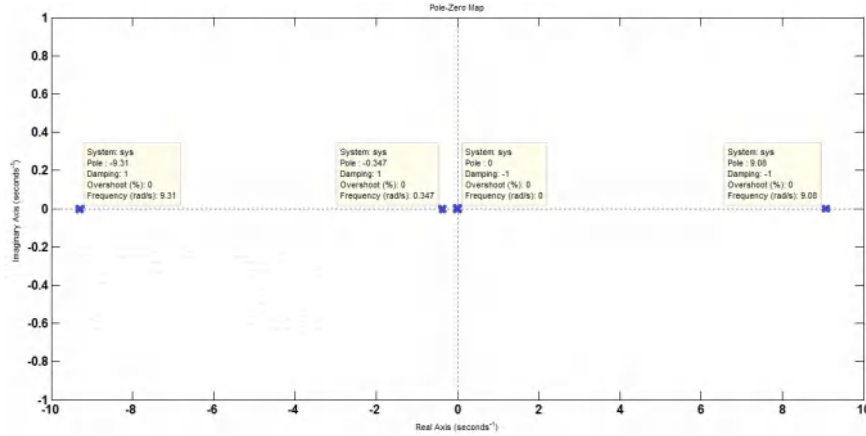


Figura 5.5 — Mapa de pólos e zeros

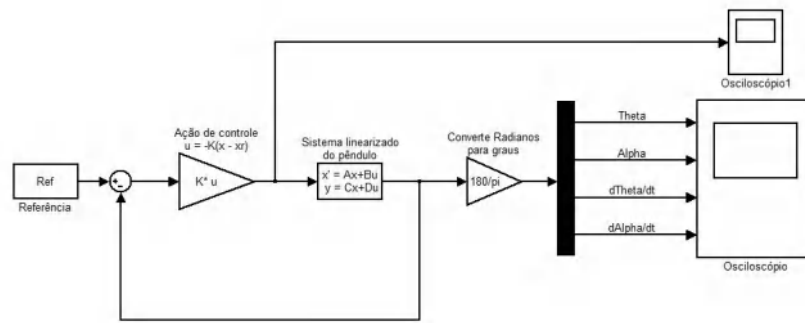
também os valores dos pólos desejados obtidos com a realimentação do sistema além do ganho proporcional de cada estado. Definiu-se pesos iguais e unitários para as duas matrizes,  $R$  e  $Q$ , de modo a conseguir um controlador ótimo entre o custo sobre a ação de controle e a precisão do controle. O código construído na plataforma encontra-se no anexo B deste trabalho. São mostrados, nas equações 5.8 e 5.9 abaixo, o vetor de ganhos  $K$  encontrado e o vetor dos pólos de malha fechada  $\lambda$ , ou seja, os autovalores do sistema realimentado.

$$K = \begin{bmatrix} k_{p,\theta} & k_{p,\alpha} & k_{d,\theta} & k_{d,\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0000 & 60,1648 & -1,3842 & 7,8387 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

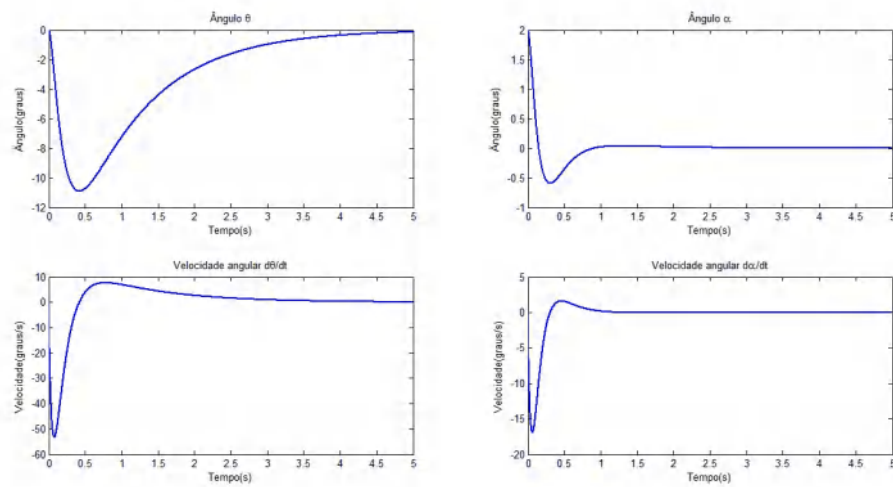
$$\lambda_{malha\ fechada} = \begin{bmatrix} -21,0068 & -6,4052 + 0,8006i & -6,4052 - 0,8006i & -1,0042 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Foi elaborada uma simulação na plataforma *Simulink* do *Matlab* para simular o controle e verificar a adequação dos ganhos do vetor  $K$ . Considerou-se, portanto, o pêndulo em uma situação próxima da região de equilíbrio instável, ou seja com condições iniciais  $\theta = \dot{\theta} = \dot{\alpha} = 0$  e  $\alpha = 2^\circ$ , assim como mostra o código encontrado no anexo. O período de amostragem utilizado para a simulação foi  $T_a = 0,0001$  s. O conjunto de blocos construído na plataforma é mostrado pela Figura 5.6 e as respostas dos estados do sistema, ou seja, os valores de saída, são exibidos nas Figuras 5.7 e 5.7

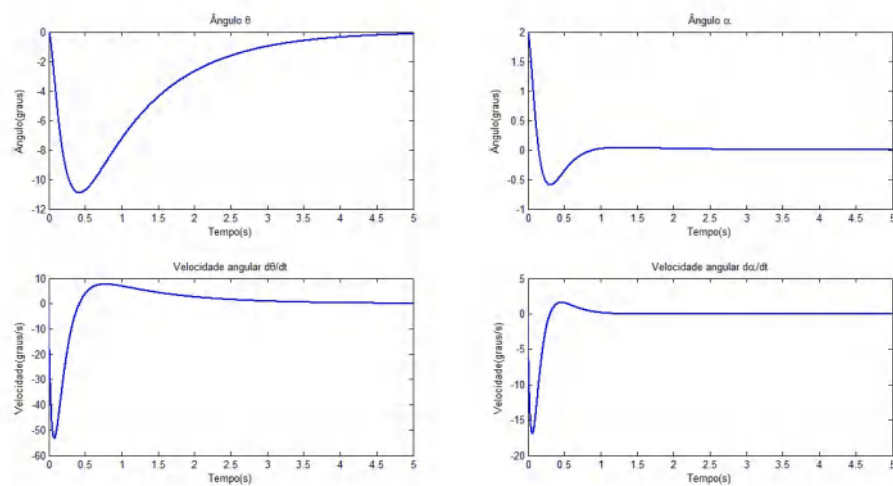
Através da simulação, ratifica-se a capacidade de controle da realimentação de estados para o vetor de ganhos  $K$  proposto. Nota-se que o ângulo  $\alpha$  é iniciado com um valor de  $2^\circ$  e, após a movimentação do braço rotativo em busca de corrigir essa inclinação, o pêndulo assumiu a posição correta, ou seja,  $\alpha = 0$ . Os valores das velocidades  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\theta}$  tornam-se também nulos ao final da simulação, indicando que o



**Figura 5.6** — Diagrama de blocos construído em plataforma *Simulink* para a simulação



**Figura 5.7** — Respostas dos estados do sistema para a condição inicial proposta



**Figura 5.8** — Ação de controle do sistema para a condição inicial proposta

pêndulo fica parado na posição de equilíbrio instável. A ação de controle, assim como



mostrado, apresentou um baixo valor de tensão para o motor, já que a condição inicial proposta encontrava-se dentro da faixa de operação do controlador.

## 5.6 Parte Experimental

A partir de um dos arquivos fornecidos pela *Quanser* é possível implementar os controladores projetados e realizar alguns experimentos. A plataforma desse arquivo é exibida na Figura 5.9.

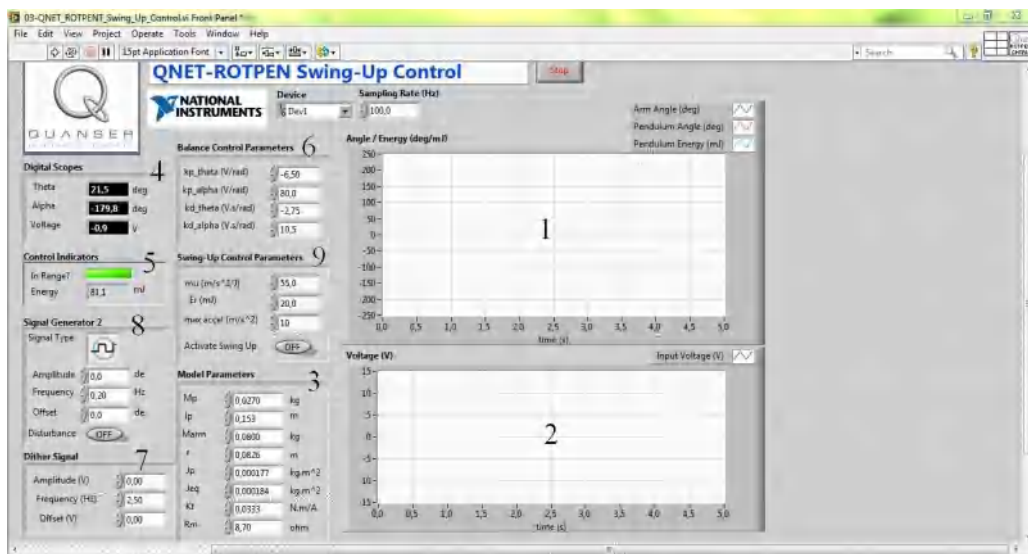


Figura 5.9 — Plataforma do arquivo para controle do pêndulo

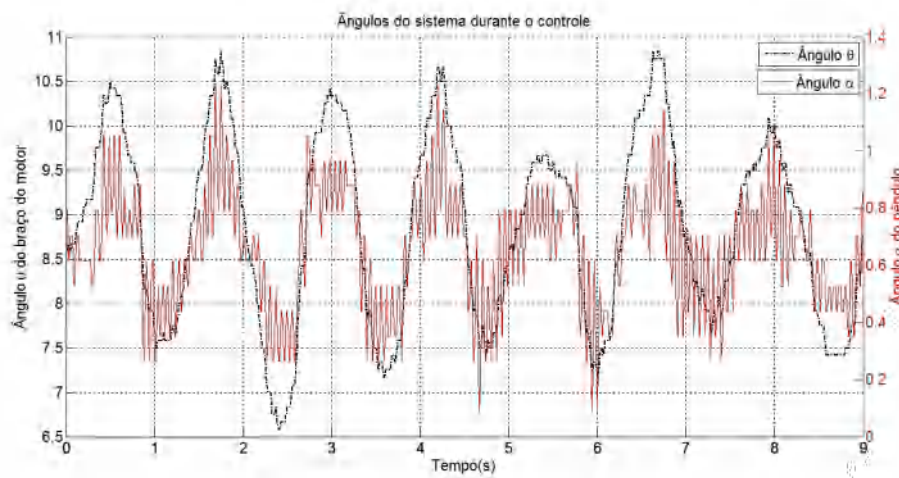
A partir do instrumento virtual é possível verificar os dois diferentes osciloscópios. O gráfico de cima, indicado pelo número 1, apresenta os dados medidos pelos *encoders* dos ângulos  $\alpha$  e  $\theta$ , além de exibir o valor da energia potencial do pêndulo. O gráfico presente no canto direito inferior, indicado por 2, apresenta o valor da tensão aplicada sobre o motor. Deve-se passar como entrada para o arquivo do *LabView* os valores dos parâmetros construtivos do *QNET ROTPEN* no quadro *Model Parameters*, representado pelo número 3 na imagem. O quadro *Digital Scopes* apresenta, de maneira digital, os valores dos ângulos e da tensão do motor e é indicado pelo número 4. Pode-se realizar diferentes testes com o equipamento a partir dessa plataforma.

### 5.6.1 Controlador Estabilizador

O primeiro teste efetuado do controlador estabilizador. O experimento consiste em levar manualmente o pêndulo para cima, observando, ao mesmo tempo, o valor do ângulo  $\alpha$  e o indicador de controle "In range?", no quadro de número 5. Esse indicador de controle é acionado caso o pêndulo entre na região de atuação do controlador estabilizador, ou seja, caso  $\alpha_{up} < \epsilon$ . É importante conduzir o pêndulo vagarosamente

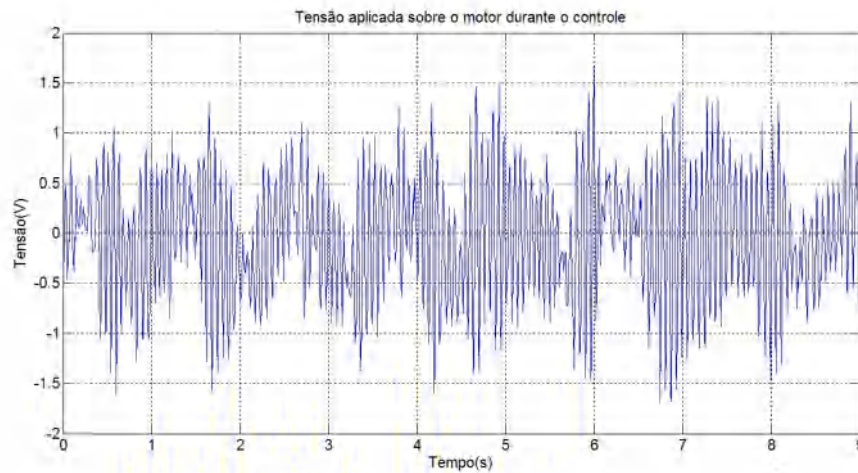
para ser possível observar esse acionamento e para alcançar a região de operação com uma velocidade  $\dot{\alpha} < \eta$ . Assim que isso acontece, o controlador estabilizador é ativado e leva o pêndulo ao ponto de equilíbrio instável, mantendo-o nessa posição.

Para que o controlador funcione, deve-se configurar os valores dos ganhos do controlador, no quadro 6 do instrumento virtual. Os ganhos adequados para o controlador foram determinados através do projeto do controlador RQL realizado através do programa *Matlab*. Aplicou-se, portanto, esses valores de ganho e, apesar de ter sido possível exercer o controle sobre o pêndulo, a ação ficou um pouco instável e tremida. Foi realizada uma breve análise visual sobre o efeito de cada ganho sobre o sistema, através da variação dos ganhos. Descobriu-se que, ao reduzir o valor do parâmetro **kd-alpha** (ganho da variável de estado  $\dot{\alpha}$ ), o sistema tornava-se menos vibratório. Diminuindo-se esse ganho, o sistema recebe menos influência sobre a variação da velocidade do pêndulo e, conseqüentemente, fica menos oscilatório. Ajustou-se, portanto, de maneira manual, o valor desse ganho para 6,00 (valor que pareceu atender melhor ao objetivo do controle), mantendo os valores dos outros ganhos de acordo com o projeto do controlador RQL. A dinâmica dos ângulos e da tensão do sistema para os novos valores dos ganhos são mostradas nas Figuras 5.10 e 5.11.



**Figura 5.10** — Ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  durante o controle

Nota-se, através da Figura 5.10, que o pêndulo foi controlado, já que o ângulo  $\alpha$  manteve-se entre  $0^\circ$  e  $1,5^\circ$ . O fato do pêndulo não ter estagnado exatamente no valor de  $0^\circ$  deve-se a um erro do sensor. Esse erro aumenta com a vibração da bancada e também pode ocorrer no caso de se iniciar o instrumento virtual do *LabView* com o pêndulo inclinado. É ideal que o programa seja iniciado somente quando o pêndulo encontra-se parado sobre o ponto de equilíbrio estável, para que o sistema não receba uma referência errada para a posição angular  $\alpha$ . O ângulo  $\theta$  acompanha a dinâmica do pêndulo e descreve uma trajetória oscilatória, com uma amplitude com cerca de  $4^\circ$ , de maneira suave, buscando corrigir a inclinação do mesmo para a situação desejada.



**Figura 5.11** — Tensão aplicada sobre o motor durante o controle

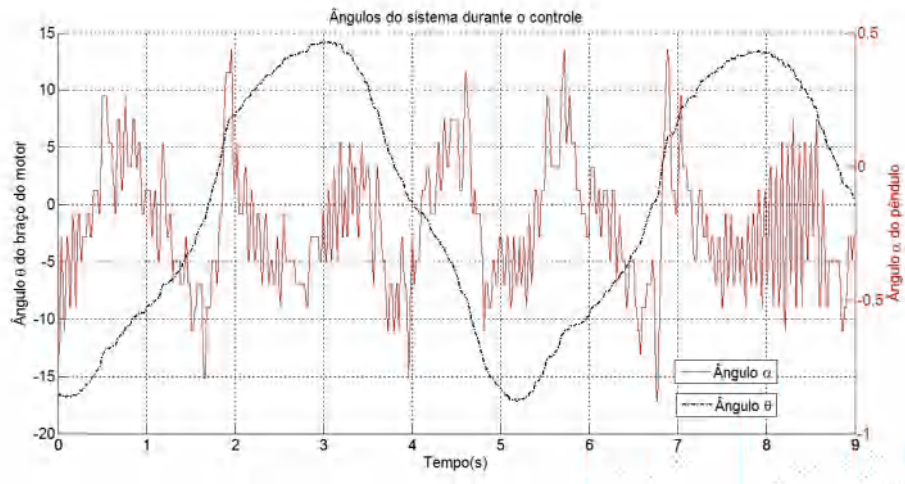
O valor da tensão  $V_m$  aplicada sobre o motor possui uma forma de onda ruidosa, assim como o ângulo  $\alpha$ . Isso deve-se ao fato dessas grandezas variarem muito pouco e mesmo essas pequenas oscilações em suas respectivas amplitudes, são captadas pelos sensores. A Tabela 4.2 mostrou que o *encoder* do pêndulo, por exemplo, apresenta uma resolução de  $0,0879^\circ$ , ou seja, esse medidor é capaz de identificar variações muito pequenas no valor do ângulo. Isso torna a forma de onda ruidosa, contudo, são ruídos de baixa amplitude, o que significa que o objetivo de controle foi bem atendido. Deve-se observar também que os ruídos não chegam a afetar o movimento de rotação, ou seja, a forma de onda do ângulo  $\theta$  não foi prejudicada por conta disso.

### 5.6.2 Compensação da fricção com sinal de excitação

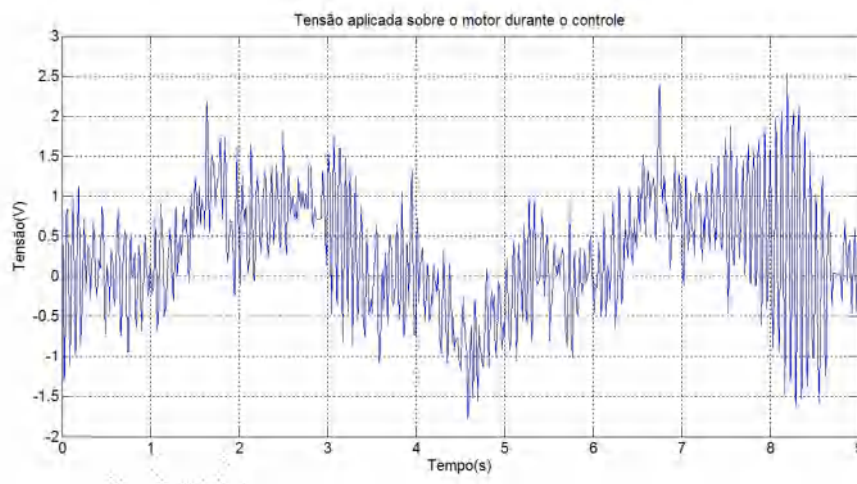
Outro experimento proposto por [Astrom et al. 2011] é a compensação da fricção do motor durante o controle. Para isso, deve-se aplicar, além da ação de controle tomada a partir da realimentação dos estados, uma tensão de excitação sobre o motor.

No canto esquerdo inferior da plataforma do arquivo apresentado na Figura 5.9 encontra-se um quadro com o nome *Dither Signal* (Sinal de Excitação, em português), indicado por 7. Esse sinal de excitação é uma onda senoidal de tensão, com amplitude, frequência e *offset* definidos pelo usuário. A amplitude do sinal de excitação é somada à ação de controle e aplicada sobre o motor. O sinal é senoidal para que a compensação do atrito seja gradativa até que o pêndulo se mova para um lado e, então, acompanhando a senóide, o braço gira gradativamente para o outro lado. Para verificar a compensação do atrito do motor, ajustou-se a amplitude do sinal de excitação para o valor em módulo  $|V_n| = 0,8 \text{ V}$  encontrado na seção 3.7, já que esse era o maior valor entre os encontrados para romper o atrito do sistema. Para visualizar melhor a dinâmica, a frequência do sinal foi configurada em  $0,2 \text{ Hz}$  e o *offset* foi nulo. É válido ressaltar que o pêndulo já se

encontrava na posição inferior antes da inserção do sinal de excitação. As Figuras 5.12 e 5.13 mostram os valores medidos dos ângulos e da tensão sobre o motor.



**Figura 5.12** — Ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  com compensação de atrito



**Figura 5.13** — Tensão aplicada sobre o motor com compensação de atrito

Através das imagens, nota-se uma dinâmica mais suave, tanto para o pêndulo, quanto para o braço rotativo. O controle torna-se mais estável, contudo, foi necessário um aumento da amplitude de oscilação do ângulo  $\theta$  que variou em mais de  $30^\circ$  durante a trajetória. Quando retoma-se o exemplo do cabo de vassoura, fica evidente que é mais fácil controlar o cabo quando se tem liberdade de "mexer" a mão.

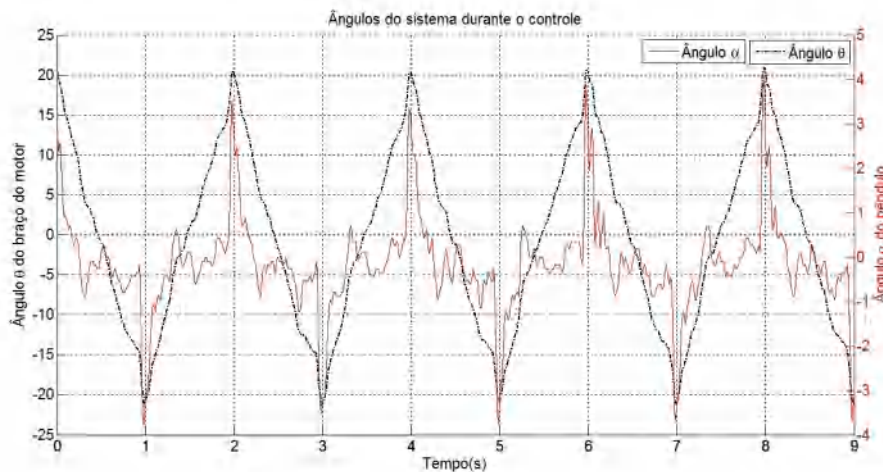
Sabe-se que a velocidade  $\dot{\theta}$  do motor é proporcional à tensão  $V_m$  aplicada sobre ele. Pode-se, portanto, inferir que a posição  $\theta$  depende da integral de  $V_m$ . Com isso em mente, analisa-se as formas de onda do ângulo do braço e da tensão do motor e verifica-se que, considerando uma forma de onda senoidal para o motor, ainda que muito ruidosa, o ângulo  $\theta$  apresenta uma forma próxima de uma função cossenoidal.



### 5.6.3 Controle da posição $\theta$

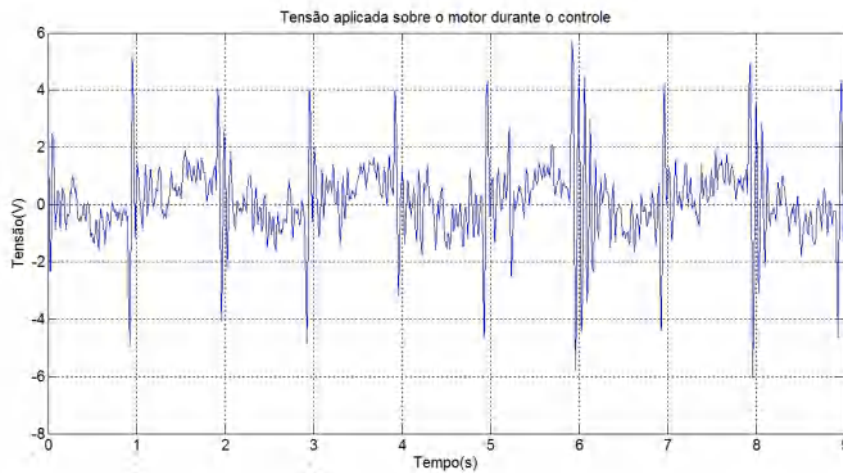
Nesta plataforma do arquivo do *LabView* pode-se também definir uma amplitude de variação para a posição  $\theta$  do braço rotativo, bem como determinar uma posição  $\theta_r$  de referência, ou seja, um ponto sobre o qual o equipamento busca operar.

Retomando o exemplo da ponte rolante ou de uma grua, na qual leva-se a carga de um ponto à outro em uma obra, verifica-se a importância de se controlar a posição angular do braço do motor. Novamente, após controlar o pêndulo insere-se, através do quadro *Signal Generator 2* (Gerador de sinal, em português), de número 8, uma variação da amplitude para a referência  $\theta_r$ . Ou seja, aplica-se um sinal de onda quadrada com amplitude e frequência definidas pelo usuário. É possível também aplicar um *offset* determinado, em outras palavras, levar o pêndulo que está oscilando em torno de um ponto para oscilar em torno de outro ponto. Os valores de amplitude, frequência e *offset* do gerador de sinal foram ajustados, respectivamente, para  $20^\circ$ ,  $0,2\text{ Hz}$  e  $0^\circ$ , ou seja, a referência  $\theta_r$  alterna, considerando o *offset* nulo aplicado, entre  $20^\circ$  para  $-20^\circ$ . As imagens 5.14 e 5.15 mostram os dados de saída medidos.



**Figura 5.14** — Ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  com variação da referência  $\theta_r$

A dinâmica do pêndulo para esse caso também aparenta ser mais suave. Nota-se que, de maneira análoga ao caso anterior, como a referência  $\theta_r$  possui uma componente de onda quadrada, a ação de controle também possui essa parcela. Avaliando o ângulo  $\theta$ , nota-se uma forma de onda próxima de uma onda triangular. Pode-se notar a influência da variação de  $\theta_r$  sobre a ação de controle ao observar os picos de tensão que coincidem com a mudança de sentido da variação da posição  $\theta$ . Apesar do ângulo  $\alpha$  ter assumido um valor maior do que  $2^\circ$ , deve ser lembrado que o controlador estabilizador continua operando, pois, ao alcançar as condições para o chaveamento uma vez, o regulador é capaz de manter o pêndulo em uma faixa  $\gamma = 30^\circ$ .



**Figura 5.15** — Tensão aplicada sobre o motor com variação da referência  $\theta_r$

#### 5.6.4 Sistema de balanço

Ainda utilizando o programa fornecido, analisa-se agora o controlador de energia ou controlador *swing-up*. Para a utilização desse controlador é necessário preencher adequadamente o quadro *Swing-up Control Parameters*. Há três parâmetros para serem determinados.

A energia de referência  $E_r$  que corresponde ao valor de energia potencial final que o pêndulo deve alcançar com o controle. Manualmente, levou-se o pêndulo até um valor de  $\alpha \approx 2^\circ$  e observou-se, no quadro *Control Indicators* o valor de energia potencial para essa situação. Nesse caso, algo em torno de  $75 \text{ mJ}$  foi mostrada no visor. Esse é, portanto, o valor de energia de referência que será fixado no controlador *swing-up*.

O parâmetro  $\mu$  ou  $\mu$  é um controle de ganho ajustável, assim como foi mostrado na equação 5.6. Esse valor, de certa forma, determina o quão rápido será o balanço do sistema. Ou seja, quando ajusta-se um valor mais alto para  $\mu$  o pêndulo chega ao ponto de equilíbrio instável com poucas oscilações. Com um alto valor de ganho, entretanto, pode-se fornecer muita velocidade ao pêndulo, fazendo com que ele chegue ao ponto de equilíbrio instável com  $\dot{\alpha} > \eta$ . Caso esse ganho seja reduzido em excesso, o pêndulo oscila, entretanto, nunca alcança a posição desejada próxima do ponto de equilíbrio instável. Esse valor foi, portanto, variado a fim de se determinar a sua relação com o número de oscilações e o tempo necessários para alcançar à região de atuação do controlador estabilizador. Por último, o valor de aceleração máxima para o pêndulo, dado por  $\max \text{ accel}$ , é fixado no valor de  $10 \text{ m/s}^2$ .

Nesse experimento, será implementado o chaveamento entre o controlador de energia e o controlador estabilizador. Após várias tentativas de alcançar esse chaveamento, observou-se que os ganhos do vetor  $K$  utilizados nas experiências anteriores não atingiam o mesmo objetivo para esse caso. Ou seja, foi necessário alterar novamente

o valor do ganho **kd-alpha** para os valores do projeto para que o sistema operasse corretamente. As gravuras 5.16 e 5.17 mostram a dinâmica dos ângulos durante o balanço do pêndulo e a ação de controle sobre o motor, respectivamente.

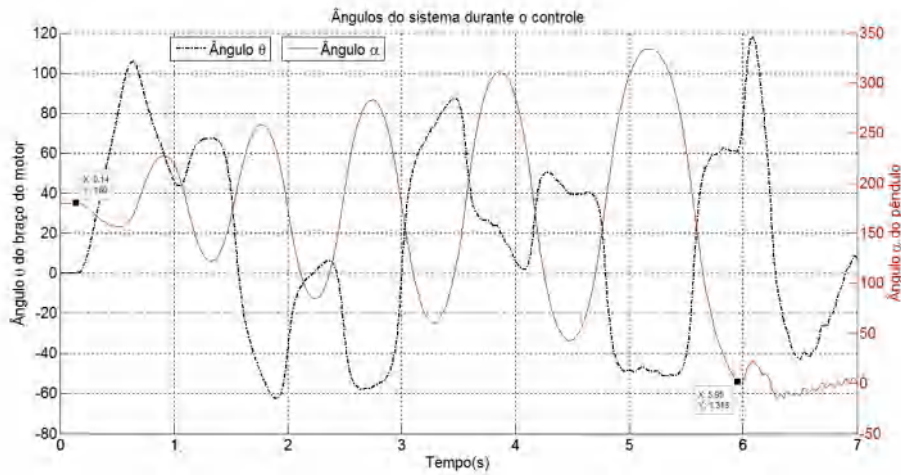


Figura 5.16 — Ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  durante o balanço

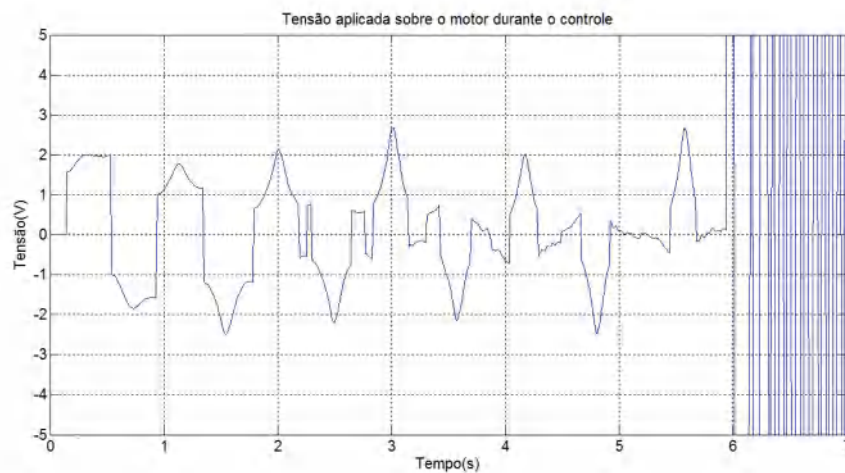


Figura 5.17 — Tensão aplicada sobre o motor durante o balanço

O processo de balanço iniciou-se no tempo 0,14 s, assim como mostra o ponto destacado do lado esquerdo no gráfico, e alcançou a condição de chaveamento do controlador híbrido,  $\alpha < \epsilon$ , no instante 5,95 s - como mostra o segundo ponto evidenciado na Figura em que  $\alpha = 1,318^\circ$ . Com um certo número de oscilações o pêndulo alcançou o objetivo de controle. O gráfico da tensão apresenta os mesmos tempos que o dos ângulos, contudo, ao alcançar o ponto de chaveamento, o controlador estabilizador entra em ação e tenta exercer uma forte ação de controle sobre o pêndulo. Essa ação de controle, assim como exibido pela Figura 5.17, fica saturada, pois o controlador não consegue exercer o objetivo de controle com precisão. Isso ocorre por causa do valor do ganho **kd-alpha** que, por ter sido alterado para o seu valor de projeto, acaba interferindo

no controle e na vibração do sistema. A tensão máxima que pode ser aplicada no motor é, em módulo, de 10 V, entretanto, a ação de controle calculada era muito superior a isso.

Para analisar a influência do ganho  $\mu$ , foram implementados 4 diferentes casos para o controlador de energia, sendo que aumentava-se o parâmetro  $\mu$  a cada caso, e foram obtidos tempos cada vez mais curtos para a estabilização do pêndulo, conforme mostra a Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Parâmetros do Controlador de Energia.

Caso em análise	Ganho $\mu \left[ \frac{m}{Js^2} \right]$	Energia de referência $E_r \left[ mJ \right]$	Aceleração máxima do sistema $sat_{u_{mx}} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$	Tempo gasto para atingir a condição $\alpha < \epsilon$ $T \left[ s \right]$
1	12	75	10	5,81
2	15	75	10	5,62
3	20	75	10	3,73
4	30	75	10	2,59

Para que se possa comparar o número de oscilações necessárias para alcançar a posição desejada, assim como o tempo gasto para fazê-lo, mostra-se a seguir, nas Figuras 5.18 e 5.19, os ângulos e a ação de controle para o ganho  $\mu = 30 \frac{m}{Js^2}$

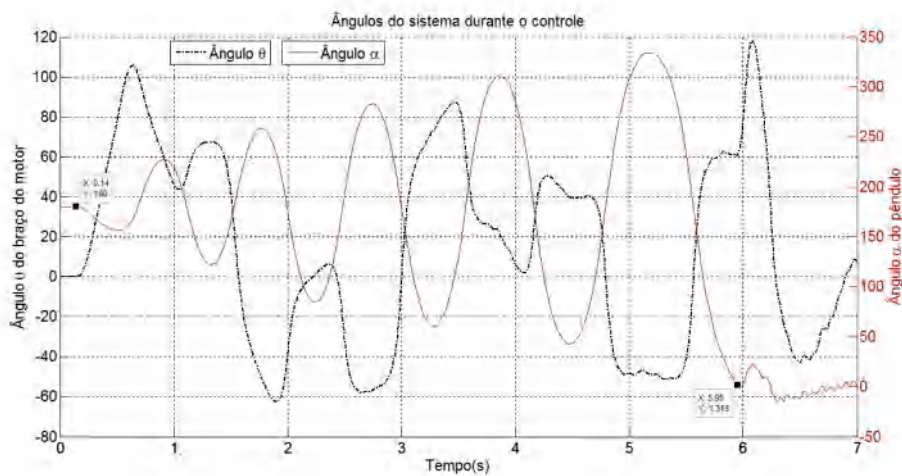
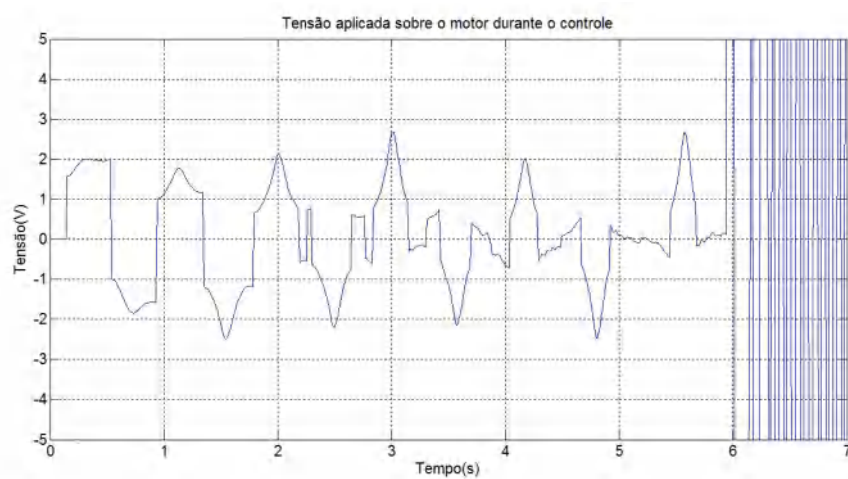


Figura 5.18 — Ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  durante o balanço

Nota-se que o ganho  $\mu$  pode alterar significativamente a dinâmica do pêndulo sendo que para valores maiores desse ganho, o pêndulo alcançou o ponto de equilíbrio instável com pouco tempo e um pequeno número de oscilações. Isso exige, entretanto, uma ação de controle maior. Há também vantagens em utilizar os baixos ganhos, pois, com valores menores, o pêndulo chega à ao ponto de equilíbrio instável com baixa velocidade e, portanto, fica mais fácil para o controlador estabilizador atuar sobre o pêndulo. Deve-se, portanto, determinar o caso que atende melhor à aplicação desejada.





**Figura 5.19** — Tensão aplicada sobre o motor durante o balanço

---

## Conclusão

O equipamento foi apresentado, assim como as suas características físicas, a geometria do problema e as variáveis essenciais para a obtenção do modelo matemático do sistema. Esse modelo foi obtido a partir das equações de Euler-Lagrange com o objetivo de fornecer um estudo mais simples da modelagem, utilizando um modelo baseado em energia e não nas forças envolvidas no sistema.

Foi exibido, ainda na etapa de modelagem, como determinar o momento de inércia do pêndulo experimentalmente e analiticamente, assim como a determinação do momento de inércia equivalente no ponto de acoplamento entre braço rotativo e o braço do pêndulo. O processo de linearização simplifica o modelo obtido e é uma aproximação adequada quando o sistema está operando em uma faixa próxima do ponto de linearização. Assim como comprovam os resultados das simulações, o pêndulo de Furuta foi adequadamente modelado, pois o sistema respondeu de acordo com o esperado e as curvas descritas pelas saídas gráficas das simulações são similares às obtidas pelas referências abordadas no trabalho. Essas simulações também ratificam a validação do modelo linearizado do pêndulo.

O controlador híbrido, que se baseia no chaveamento de controladores, foi a técnica avaliada para levar o pêndulo de uma situação de estabilidade indesejada para o ponto de equilíbrio na posição vertical voltada para cima que mostra-se ser um ponto instável. O projeto de cada um dos controladores foi realizado passo a passo e sua validação foi verificada através das simulações e da implementação com os arquivos fornecidos pelo fabricante do equipamento *QNET ROTPEN*. Foi possível verificar a influência de vários dos parâmetros presentes nos quadros da plataforma do *LabView*, como as alterações que o aumento do ganho  $\mu$  proporcionaram sobre o tempo gasto para alcançar a estabilização do sistema.

## 6.1 Trabalhos Futuros

O problema do pêndulo de Furuta é análogo à vários problemas, específicos ou da vida cotidiana, ou seja, há aplicações do princípio do pêndulo desde o controle em pontes rolantes ao caso da tentativa de equilibrar o cabo de vassoura. É, portanto, ideal que se possa analisar todas as grandezas envolvidas no modelo do pêndulo e sua influência sobre a dinâmica do controle. Pode-se, por exemplo, estudar o efeito da variação da massa da carga do pêndulo ou do comprimento da haste sobre o modelo.

Com as equações não lineares obtidas com a modelagem é possível simular para o *QNET ROTPEN* o comportamento do pêndulo para diversas situações e compará-lo com o modelo linearizado. É possível também comparar o desempenho de outros controladores ótimos (assim como fez [[Al-Jodah et al. 2013](#)]), como a técnica de lógica difusa apresentada no capítulo 2 e mesmo controladores mais simples como o PID com dois GDL.

---

## Referências

- AL-JODAH, A.; ZARGARZADEH, H.; ABBAS, M. K. Experimental verification and comparison of different stabilizing controllers for a rotary inverted pendulum. 2013 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering, Penang, Malaysia, Dezembro 2013.
- ASTROM, K.; APKARIAN, J.; KARAM, P.; LéVIS, M.; FALCON, J. **STUDENT WORK-BOOK QNET Rotary Inverted Pendulum Trainer for NI ELVIS**. [S.l.], 2011.
- ASTROM, K. J.; FURUTA, K. Swinging up a pendulum by energy control. **International Journal of Engineering and Technology**, v. 2, n. 3, 1999.
- BOUBAKER, O. The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics. **Education and e-Learning Innovations (ICEELI), 2012 International Conference on**, ACM, New York, NY, USA, July 2012.
- CAETANO, E. C. **APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Católica de Brasília, 2014.
- CARVALHO, M. I. B. de; MATOS, A. C. C. de. **Mecânica Lagrangeana Apontamentos para a disciplina Introdução à Mecânica Clássica**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2002.
- DIAO, X. **ME 452 Course Project II Rotary Inverted Pendulum**. [S.l.], 2006.
- INC, Q. **QNET ROTPEN - Rotary Pendulum (ROTPEN) User Manual**. [S.l.], 2010.
- INC, Q. **Quanser Engineering Trainer for NI ELVIS, QNET User Manual**. [S.l.], 2010.
- LI, P. Y. Me8281 – advanced control system design (spring 2014). 2006.
- MANCHINI, D. P.; PAPPA, G. L. **Lógica Difusa - Controle Fuzzy**. 2015. Disponível em: <<http://www.din.uem.br/ia/intelige/fuzzy/controle.htm>>.
- PÁGINA do site da National Instruments - Ambiente gráfico de desenvolvimento de sistemas LabVIEW. 2015. Disponível em: <<http://www.ni.com/labview/pt/>>.
- ROCHA, C. V. **Realização de um controlador utilizando Redes Neurais para o controle desestabilização do Pêndulo de Furuta, PROJETO DE FINAL DE CURSO**. [S.l.], 2010.

SULTAN, K. Inverted pendulum analysis, design and implementation. **IEEE Visionaries**, 2010. Disponível em: <<http://www.engr.usask.ca/classes/EE/480/>>.

TRANSPORTER, H. **Segway Inc.'s Human Transporter (HT) models**. 2014. Disponível em: <<https://www.msu.edu/~luckie/segway/i170/i170.html>>.

TZENG, C.-Y. **Experiment 5: Modeling and Linear Quadratic Control of a Rotary Inverted Pendulum**. [S.l.], 2014. Disponível em: <[http://140.121.130.145/SMCL\\_web/2014%E6%9C%80%E4%BD%B3%E6%8E%A7%E5%88%B6%E6%9C%9F%E4%B8%AD%E5%A0%B1%E5%91%8A/](http://140.121.130.145/SMCL_web/2014%E6%9C%80%E4%BD%B3%E6%8E%A7%E5%88%B6%E6%9C%9F%E4%B8%AD%E5%A0%B1%E5%91%8A/)>.

V.VIJAYALAKSHMI, Z.; SRINIVASAN, A. Real time modelling and balance controller design for a rotary inverted pendulum using labview. **Industrial Science**, v. 1, Outubro 2013.

WAIBEL, M. **Surrounded by his quadrocopter drones on stage, Raffaello D'Andrea explains feedback control and talks about the coming Machine Revolution**. 2013. Disponível em: <<http://robohub.org/surrounded-by-quadrocopters-on-stage-raffaello-dandrea-explains-feedback-control-and-talks-about>>.

## Anexos

---

## Definição das constantes para a simulação de malha aberta na plataforma do Simulink

Logo abaixo será mostrado o código produzido em ambiente Matlab que define as constantes dos sistemas simulados na plataforma Simulink.

```
%Codigo de definicao das constantes a serem utilizadas no SIMULINK para a
% simulacao do sistema do pendulo invertido rotacional

% Limpa as variaveis da area de trabalho, fecha as janelas e limpa a tela
% de comandos
clear all; close all; clc

% Define o tipo de sistema que sera simulado
sistema = 'ME project';

switch sistema
    case 'CEFET'
        % Definicao das constantes

        % Parametros do motor
        % Resistencia de armadura do motor (ohms)
        Rm = 8.7;
        % Constante de torque do motor (N.m)
        Kt = 0.03334;
        % Motor back-emf constant (N.m)
        Km = 0.03334;
        % Momento de inercia do motor (kg.m^2)
        Jm = 1.80e-006;
```

```
% Momento de inercia equivalente no ponto de acoplamento
% entre braco rotativo e o braco do pendulo (kg.m^2)
Jeq = 1.84e-004;
% Parametros do braco do pendulo
% Massa do braco (kg)
Marm = 0.08;
% Comprimento do eixo do braco ao eixo do pendulo (m)
r = 0.0826;
% Amortecimento viscoso do braco (N.m/(rad/s))
Beq = 0.000;
% Parametros do elo do pendulo
% Massa do elo do pendulo e carga combinados (kg)
Mp = 0.0270;
% Comprimento total do pendulo (m)
Lp = 0.191;
% Distancia do centro de massa do pendulo ao eixo (m)
lp = 0.153;
% Massa do elo do pendulo (kg)
Mp1 = 0.008;
% Massa da carga do pendulo (kg)
Mp2 = 0.019;
% Comprimento do elo do pendulo (m)
Lp1 = 0.171;
% Comprimento da carga do pendulo (m)
Lp2 = 0.190;
% Momento de inercia em torno do eixo de articulacao (kg.m^2)
Jp = 1.70e-004;
% Amortecimento viscoso do pendulo (N.m/(rad/s))
Bp = 0.000;

case 'ME project'
% Definicao das constantes

% Armature resistance (ohms)
Rm = 2.6;
% SRV02 system gear ratio (motor -> load) (N.m)
Kg = 70;
% Motor-torque constant (N.m)
Kt = 0.00767;
% Back-emf constant (N.m)
Km = 0.00767;
% Gearbox efficiency
ng = 0.9;
% Motor efficiency
nm = 0.69;
% Half length of the pendulum (m)
L = 0.1675;
```



```
% Mass of pendulum (kg)
m = 0.125;
% Moment of inertia of the arm and pendulum about the axis of ? (kg.m^2)
Jeq = 0.0035842;
% Moment of inertia of the rotor of the motor
Jm = 3.87e-7;
% Equivalent viscous damping coefficient (N.m/(rad/s))
Beq = 0.004;
% Gravity acceleration (m/(s^2))
g = 9.81;
% Rotating arm length
r = 0.215;

% CONSTANTES CONCATENADAS do ME Project
a = Jeq + m*r^2 + ng*Kg*Jm;
b = m*L*r;
c = (4/3)*m*L^2;
d = m*g*L;
e = Beq + nm*ng*Kt*Kg*Km/Rm;
f = nm*ng*Kt*Kg/Rm;

% Ganhos e constantes do controlador de posicao do ME Project
wp = 6.628;
zeta = 0.78;
Kp = 19.612;
Kv = 0.585;
```

end

## Código do projeto do controlador RQL e implementação no *Simulink*

Logo abaixo será mostrado o código produzido em ambiente Matlab que define as constantes dos sistemas simulados na plataforma Simulink.

```
% Codigo de definicao das constantes a serem utilizadas no SIMULINK para a
% simulacao do sistema do pendulo invertido rotacional e para o projeto do
% controlador RQL.
```

```
% Limpa as variaveis da area de trabalho, fecha as janelas e limpa a tela
% de comandos
```

```
clear; close all; clc;
```

```
% Definicao das constantes fisicas do sistema
```

```
Mp = 0.0270;
```

```
lp = 0.153;
```

```
Ma = 0.0800;
```

```
r = 0.0826;
```

```
Jp = 0.00016271;
```

```
Jeq = 0.000184;
```

```
Kt = 0.03334;
```

```
Km = Kt;
```

```
Rm = 8.70;
```

```
g = 9.7838;
```

```
% Defiinicao de constantes concatenadas para simplificacao das matrizes do
% espaco de estados
```

```
a = Jeq + Mp*r^2;
```

```
b = Mp*lp*r;
```

```
c = Jp + Mp*lp^2;
```

```

d = Mp*g*lp;
E = a*c - b^2;
G = Kt*Km/Rm;

% Definicao dos termos das matrizes do espaco de estados em funcao das
% constantes concatenadas a, b, c, d, E e G
a32 = b*d/E;
a33 = -c*G/E;
a42 = a*d/E;
a43 = -b*G/E;
b3 = c*Kt/(Rm*E);
b4 = b*Kt/(Rm*E);

% Definicao das matrizes do espaco de estados
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 a32 a33 0; 0 a42 a43 0];
B = [0; 0; b3; b4];
C = eye(4);
D = zeros(4,1);

% Definicao do sistema de espaco de estados
sys = ss(A,B,C,D);

% Exibe o mapa de polos e zeros do sistema
figure('Color',[1 1 1]);
pzmap(sys)

% Definicao das matrizes Q e R dos pesos para os estados e para as
% entradas, respectivamente.
Q = eye(4);
R = 1;

% Obtencao da matriz de ganhos K atraves da funcao 'lqr' que implementa o
% projeto do Regulador Quadratico Linear
[K,S,lambda] = lqr(sys,Q,R)

% Determinacao das condicoes iniciais do pendulo para a simulacao no Simulink
ic1 = 0;
ic2 = 2*(pi/180); % Condicao inicial de 2 graus de defasagem com relacao
                  % a posicao de equilibrio instavel, ou seja, alpha = 2
                  % graus
ic3 = 0;
ic4 = 0;
IC = [ic1; ic2; ic3; ic4];

% Valores de referencia para os estados
Ref = [0; 0; 0; 0];

```

---

```
% Definicao do tempo de amostragem para a simulacao no Simulink  
T = 0.0001;
```

---

## Equações de Lagrange

### C.1 Equações de Euler-Lagrange

O formalismo lagrangeano permite obter as equações de movimento de um sistema de uma maneira mais elegante e sistemática. Contrariamente aos métodos baseados nas leis de Newton, esta metodologia não exige a identificação das forças envolvidas no sistema, o que torna a análise mais abstrata. Contudo, simplifica-se assim o tratamento de sistemas de maior complexidade, especialmente quando não é relevante a determinação das forças associadas às restrições ao movimento das suas partículas.

No caso do pêndulo de Furuta, a aplicação das equações de Euler-Lagrange ajuda bastante na construção da modelagem e obtenção da função transferência da planta, pois permite uma análise do sistema sem levar em conta o envolvimento das forças de ação e reação exercidas no movimento descrito, carregando indiretamente o conceito dessas forças através de um modelo baseado em energia. Além disso, a mudança de coordenadas aplicada através do método de Lagrange traz uma grande simplificação no modelo.

#### C.1.1 Coordenadas generalizadas

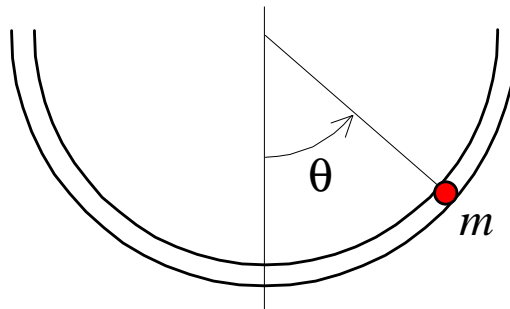
A posição de uma partícula qualquer pode ser definida pelo seu vetor de posição  $\vec{r}$ , cujas componentes são as suas coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Para especificar completamente a posição de um sistema de  $N$  partículas, são necessários  $N$  vetores de posição, ou seja,  $3N$  coordenadas. No entanto, em certos casos, é possível conhecer a posição de determinados sistemas a partir de um número de variáveis inferior a  $3N$ .

Designa-se pelo número de graus de liberdade (GDL) a quantidade de variáveis independentes que precisam ser especificadas para se conhecer completamente a posição de um dado sistema.

Se uma partícula move-se realizando uma trajetória sobre uma superfície conhe-

cida (por exemplo, sobre a superfície de uma esfera, ou sobre o plano  $xy$ ), bastarão 2 parâmetros para definir completamente a sua posição no espaço. Caso a partícula se desloque ao longo de uma curva conhecida, a sua posição ficará especificada a partir de uma única variável. Na figura C.1 mostra-se uma partícula descrevendo uma trajetória circular e sua posição, descrita por duas coordenadas,  $x$  e  $y$ , pode ser definida apenas pela variável  $\theta$ .

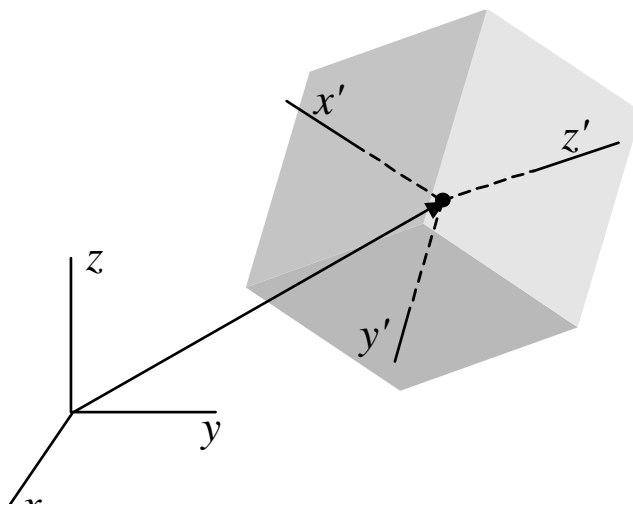
**Figura C.1** — Movimento ao longo de uma curva



Fonte: [Carvalho e Matos 2002]

As posições no espaço de todas as partículas de um corpo rígido ficam completamente definidas pela posição de um ponto do corpo (por exemplo, o seu centro de massa) e pela orientação do corpo, isto é, por apenas 6 variáveis.

**Figura C.2** — Posição de um sólido no espaço



Fonte: [Carvalho e Matos 2002]

Para definir completamente a posição de um sistema com  $s$  graus de liberdade são necessárias  $s$  variáveis independentes. Essas variáveis são designadas coordenadas

generalizadas. No caso do pêndulo invertido rotacional, há dois graus de liberdade e, portanto, são necessárias duas coordenadas generalizadas. Essas são apresentadas no capítulo 3, o qual contém as etapas para a modelagem. A escolha das coordenadas generalizadas de um dado sistema não é única, o que permite selecioná-las de modo a simplificar o tratamento matemático do problema. A seleção das coordenadas generalizadas é conhecida como parametrização do problema. [Carvalho e Matos 2002]

Para um sistema conservativo, em que a quantidade de energia total do sistema é constante, é possível escrever uma função da posição e da velocidade de uma partícula, denominada energia mecânica, que se conserva durante todo o movimento. Sejam,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{C.1})$$

$$V = mgh \quad (\text{C.2})$$

a energia cinética ( $T$ ) e a energia potencial gravitacional ( $V$ ), respectivamente, do sistema, em que as variáveis envolvidas são:

$m$  : massa da partícula,

$v$  : velocidade da partícula,

$g$  : aceleração da gravidade,

$h$  : altura da partícula (posição);

então a energia mecânica é definida por

$$E = T + V \quad (\text{C.3})$$

A energia que um corpo possui quando está em movimento é denominada energia cinética e, a energia potencial gravitacional, é aquela que um corpo possui quando está situado a uma determinada altura da superfície da Terra.

As leis da mecânica são tais que a posição e a velocidade de uma partícula combinam suas variações, de modo que  $E$  não se altera.

Consideremos uma outra função das variáveis de movimento de um sistema conservativo, a lagrangiana  $L$ , definida por

$$L = T - V \quad (\text{C.4})$$

A lagrangiana tem as mesmas dimensões da energia, ou seja, no Sistema Internacional sua unidade de medida é o Joule.

Observe que, se uma pedra de massa  $m$  estiver caindo a partir do repouso, de uma altura  $h$ , tomando-se  $h = 0$  como referência para a energia potencial, a lagrangiana

terá inicialmente o valor  $-mgh$  e, antes da pedra atingir o solo, o valor da função C.4 será  $mgh$ . [Caetano 2014]