Problema Linear Quadrático Gaussiano (PLQG) Princípio da Separação

1 Motivação: Problema Linear Quadrático

$$\min_{u(t)} \int_0^\infty \left(x^T \mathbf{Q} x + u^T \mathbf{R} u\right) dt$$

$$s.a. \quad \begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

que tem como solução: $u(t) = -\mathbf{K}x(t),$ com $\begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \\ \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \end{cases}$

- propriedades ($\mathbf{Q} \geq 0$, $\mathbf{R} > 0$):

1) $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ é solução única da equação de Riccati;

2) $\mathbf{K}$ é independente de $x_0 \in \Re^n$;

3) o valor mínimo do critério é dado por $J(u^*) = x_0^T \mathbf{P} x_0$

- em malha fechada: $\dot{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})x \leftarrow$ sistema assintoticamente estável
- a equação de Riccati fica $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} = 0$, e a partir de sua solução $\mathbf{P}$ tem-se que a função $f(x) = x^T\mathbf{P}x$ é uma função de Liapunov para o sistema em malha fechada.

2 Problema Linear Quadrático Gaussiano (PLQG)

$$\min_{u(t)} \int_0^\infty \left(x^T \mathbf{Q} x + u^T \mathbf{R} u\right) dt$$

$$s.a. \quad \begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + \mathbf{E}w, \; x_0 \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}w \\ u(t) = \phi(y) \end{cases}$$

onde $w(t)$ é uma perturbação.

2.1 Filtro de Kalman: caso contínuo

- considere o sistema linear $\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x \end{cases}$ onde $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$ e $y \in \Re^p$, com $p < n$.
- o ganho do estimador $\hat{x}(t)$ para o vetor de estados $x(t)$ é dado por $\mathbf{G}$ na equação a seguir:

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{G}(\mathbf{C}\hat{x} - y)$$

- definindo o erro de estimação na forma $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, temos:

$$\dot{e} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u - \mathbf{A}\hat{x} - \mathbf{B}u + \mathbf{G}(\mathbf{C}\hat{x} - \mathbf{C}x) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})e(t)$$

- assumindo que o sistema é observável, o erro de estimação vai convergir para zero se **G** for escolhido tal que a matriz **A**–**GC** tenha todos os seus autovalores com parte real negativa.

- em geral, existem infinitas escolhas para o ganho **G** que levam à estabilidade assintótica do estimador, sendo que o ganho ótimo é obtido a partir da equação de Riccati, na forma:

  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ no caso de controle $\leftarrow$ controlabilidade

  $(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}) \rightarrow (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{G}^T) \rightarrow (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{K}^T$ $\leftarrow$ observabilidade
- <u>limitação</u>: deve-se conhecer exatamente o modelo do sistema

2.2 Princípio da Separação

- sistema em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x \\ u = -\mathbf{K}\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{G}(\mathbf{C}\hat{x} - y) \end{cases}$$

- produzindo: $\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x - \mathbf{BK}\hat{x} = \mathbf{A}x - \mathbf{BK}(x-e) = (\mathbf{A}-\mathbf{BK})x + \mathbf{BK}e \\ \dot{e} = (\mathbf{A}-\mathbf{GC})e \end{cases}$
- que pode ser reescrito na forma: $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{GC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$
- $\det\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{GC} \end{bmatrix}\right) = \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A}-\mathbf{BK}))\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A}-\mathbf{GC}))$
- <u>princípio da separação</u>:
  - $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A}-\mathbf{BK})) \rightarrow$ dinâmica do sistema com realimentação de estado
  - $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A}-\mathbf{GC})) \rightarrow$ dinâmica do filtro de estimação

2.3 Solução do PLQG

- <u>problema</u>: $\min\limits_{u(t)} \int_0^\infty \left(x^T \mathbf{Q} x + u^T \mathbf{R} u \right) dt$

  $s.a. \quad \begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + \mathbf{E}w,\ x_0 \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}w \end{cases}$

- <u>controle</u>: $\begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \\ \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \end{cases}$

- <u>filtro</u>: $\begin{cases} \mathbf{SA}^T + \mathbf{AS} - \mathbf{SC}^T\left(\mathbf{DD}^T\right)^{-1}\mathbf{CS} + \mathbf{EE}^T = 0 \\ \mathbf{G} = \mathbf{SC}^T\left(\mathbf{DD}^T\right)^{-1} \end{cases}$