



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
COLEGIADO DO CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE
E AUTOMAÇÃO - CEC AU



RAFAEL GUSTAVO ALVES

CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO
TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO

MONOGRAFIA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E
AUTOMAÇÃO

Ouro Preto, 2018

RAFAEL GUSTAVO ALVES

**CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO
TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para a obtenção do Grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Msc. João Carlos Vilela de Castro

**Ouro Preto
Escola de Minas – UFOP
2018**

A474c

Alves, Rafael Gustavo.

Controle de um pêndulo invertido utilizando técnica de linearização por realimentação [manuscrito] / Rafael Gustavo Alves. - 2018.

77f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. MSc. João Carlos Vilela de Castro.

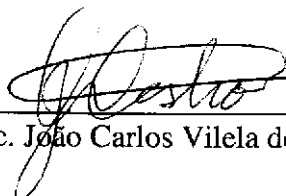
Monografia (Graduação). Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia de Controle e Automação e Técnicas Fundamentais.

1. Pêndulo invertido. 2. Controle não linear. 3. Linearização entrada-saída. I. Castro, João Carlos Vilela de. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

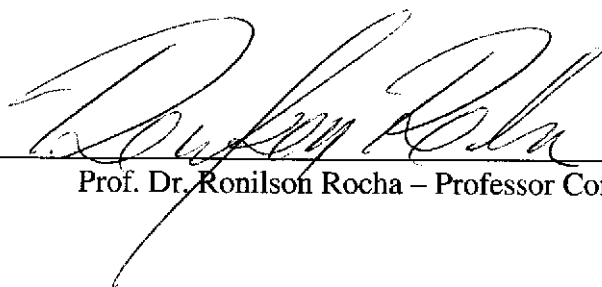
CDU: 681.5

Catálogo: ficha.sisbin@ufop.edu.br

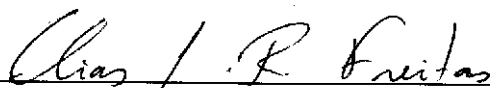
Monografia defendida e aprovada, em 20 de dezembro de 2018, pela comissão avaliadora constituída pelos professores:



Prof. M. Sc. João Carlos Vilela de Castro - Orientador



Prof. Dr. Ronilson Rocha – Professor Convidado



Prof. M. Sc. Elias José de Rezende Freitas – Professor Convidado

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

À minha família, por seu apoio incondicional e por sempre acreditar em mim.

À Jéssica Soares, por ser meu porto seguro e nunca me deixar desistir.

Aos meus amigos, Amanda Cavalcanti, Arthur Caio, Érica Silva, João Paulo Ferreira, Luciana Luna, Pablo Henrique e Sávio Nazareno, pelas alegrias, tristezas, conversas e experiências compartilhadas nesse percurso.

A todos os professores que me acompanharam até esse momento, por todo ensinamento e incentivo.

A meu orientador, professor João Carlos Vilela de Castro, pelo apoio, pela compreensão, pela paciência e pela orientação.

A todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos a mim, fazendo a vida ter cada vez mais sentido, meu sincero obrigado.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo!” (Galileu Galilei)

RESUMO

O sistema composto por um pêndulo invertido acoplado a um carro é um problema instigante para estudo, que envolve diversos elementos da teoria de controle. A modelagem, a estabilização e o controle de um sistema carro-pêndulo são os escopos de estudo neste trabalho. A dinâmica não linear do sistema é obtida por abordagem Lagrangeana, resultando em sua representação em espaço de estados. A estabilização e o controle são obtidos por meio de técnicas de linearização entrada-saída, Regulador Linear Quadrático (LQR) e o Teorema de Estabilidade de Lyapunov. Para corroborar com a efetividade dos controladores propostos, o modelo é testado e analisado em simulações computacionais em diferentes situações, tais como condições iniciais, presença ou não de distúrbios, e outras que são detalhadas neste trabalho.

Palavras-chave: Pêndulo invertido, Controle não linear, Linearização entrada-saída, Regulador Linear Quadrático, Estabilidade de Lyapunov.

ABSTRACT

The system consisting of an inverted pendulum attached to a cart is an intriguing problem for study that involves various elements of control theory. Modeling, stabilization, and controlling a cart-pendulum system are the scopes of this project. The nonlinear dynamics of the system is achieved by Lagrangean approach, resulting in its representation in state space. Stabilization and control are accomplished by input-output linearization, Linear Quadratic Regulator (LQR) and Lyapunov Stability Theorem. In order to corroborate the effectiveness of the designed controllers, the model is tested and analyzed in computer simulations in different situations, such as initial conditions, presence of disturbances, and other situations which are going to be presented in detail in this work.

Key-words: Inverted pendulum, Nonlinear control, Input-output linearization, Linear Quadratic Regulator, Lyapunov stability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sistema carro-pêndulo	27
Figura 2 – Sistema carro-pêndulo e seus componentes	28
Figura 3 – Modelo do circuito elétrico de um Motor CC	33
Figura 4 – Resposta do sistema a um impulso	35
Figura 5 – Resposta do sistema a uma posição angular inicial de 5°	36
Figura 6 – Resposta do sistema a um degrau com posição angular inicial $\theta = 5^\circ$	44
Figura 7 – Resposta do sistema a um degrau com posição inicial do carro em $x = 0.5$ m	44
Figura 8 – Resposta do sistema a um degrau com posição angular inicial $\theta = 5^\circ$ e posição inicial do carro em $x = 0.5$ m	45
Figura 9 – Resposta do sistema a uma posição referência de $x = 0.5$ m	46
Figura 10 – Resposta do sistema a uma onda quadrada como posição referência	46
Figura 11 – Resposta do sistema a uma posição angular inicial de 10°	47
Figura 12 – Resposta sistema a um ruído na posição do carro	48
Figura 13 – Resposta do sistema a um ruído na posição do carro e na posição angular do pêndulo	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros de um sistema com pêndulo invertido	34
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

θ	Letra grega minúscula theta
ω	Letra grega minúscula ômega
ν	Letra grega minúscula nu
\Re	Conjunto dos números reais
\in	Pertence

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Metodologia	22
1.2	Objetivos	22
1.3	Organização e estrutura	22
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1	Metodologias para Linearização	23
2.1.1	<i>Linearização Jacobiana</i>	23
2.1.2	<i>Linearização por Realimentação</i>	24
2.1.2.1	Linearização entrada-saída	24
2.2	Regulador Linear Quadrático	26
3	MODELAGEM E DINÂMICA DO SISTEMA CARRO-PÊNDULO	27
3.1	Análise dinâmica do sistema carro-pêndulo	27
3.1.1	<i>Coordenadas generalizadas do sistema</i>	29
3.1.2	<i>Forças generalizadas do sistema</i>	29
3.1.3	<i>Energias cinética e potencial do sistema</i>	29
3.1.4	<i>Função Lagrangeana do sistema</i>	30
3.1.5	<i>Equação de Lagrange</i>	30
3.1.6	<i>Representação em espaço de estados</i>	32
3.2	Modelagem matemática do Motor de Corrente Contínua	32
3.3	Validação do modelo	34
3.3.1	<i>Validação do sistema em sua dinâmica natural</i>	34
4	SISTEMA DE CONTROLE	37
4.1	Linearização jacobiana do pêndulo invertido	37
4.2	Linearização entrada-saída do pêndulo invertido	38
4.2.1	<i>Dinâmica interna</i>	39
4.3	Controle LQR dos motores	41
5	RESULTADOS	43
5.1	Análise do comportamento do sistema linearizado pelo Método Jacobiano	43
5.2	Análise da resposta do controlador sem a presença de ruído para o sistema Linearizado por Realimentação Entrada-saída	45
5.3	Análise da resposta do controlador na presença de ruído para o sistema Linearizado por Realimentação Entrada-saída	47

6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	49
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICES	53
	APÊNDICE A – CÓDIGOS: SETUP DO SISTEMA	55
	APÊNDICE B – CÓDIGOS: LINEARIZAÇÃO JACOBIANA	57
	APÊNDICE C – CÓDIGOS: CONTROLADOR LQR DOS MOTORES	59
	APÊNDICE D – MODELO: VALIDAÇÃO DO SISTEMA	61
	APÊNDICE E – MODELO: LINEARIZAÇÃO JACOBIANA DO PÊN- DULO INVERTIDO	65
	APÊNDICE F – MODELO: SISTEMA DE LINEARIZAÇÃO DO PÊN- DULO INVERTIDO	69
	APÊNDICE G – MODELO: LEIS DE CONTROLE LINEARIZANTE	71
	APÊNDICE H – MODELO: MOTORES	73
	APÊNDICE I – MODELO: PÊNDULO INVERTIDO	75

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, em muitas áreas de estudo, como a robótica, o estudo de sistemas pendulares tem se tornado bastante comum. Em especial, sistemas compostos por, ou semelhantes a, pêndulos invertidos têm atraído muita atenção (PEREIRA, 2011).

O sistema carro-pêndulo invertido, abordado neste trabalho, é um problema popular em pesquisas na área de sistemas de controle e automação. Amba (2015), em sua tese, sugere que o controle de um pêndulo invertido é análogo ao balanceamento de um cabo de vassoura no dedo indicador com o movimento de controle restrito a uma única dimensão do espaço, embora apresente certas propriedades e peculiaridades que dificultem seu controle.

Diversos trabalhos, como Amba (2015), Pereira (2011), Stimac (1999), entre outros, propõem diferentes técnicas de controle ao sistema carro-pêndulo. Um dos modelos de Amba (2015) é a base de estudo aqui utilizada.

Segundo Ogata (2011) e Amba (2015), o pêndulo invertido é um sistema não linear de fase não-mínima, por possuir zeros instáveis. Além disso, Slotine e Li (1991) ponderam para o fato de que, sistemas não lineares de fase não-mínima apresentam uma dinâmica interna instável, dificultando a aplicação de certas técnicas de linearização e controle.

Neste trabalho, a linearização por realimentação e técnicas de controle como o Teorema de Estabilidade de Lyapunov são utilizados para a estabilizar o pêndulo em posição vertical e para rastrear uma posição de referência para o carro.

A linearização por realimentação é uma técnica aplicada em modelos de sistemas não lineares que permite transformar suas equações de estado não lineares em lineares. Para obter o modelo, abordagens de modelagem dinâmica como a newtoniana, lagrangeana ou hamiltoniana podem ser utilizadas.

Após a aplicação de técnica de linearização, o controlador LQR pode ser aplicado ao sistema. O LQR é projetado resolvendo-se um problema de otimização quadrático, utilizando a equação de Riccati. Para complementar o controle, uma função de Lyapunov é implementada, aplicando-se o Teorema de Estabilidade de Lyapunov, garantindo a estabilidade de sua dinâmica interna.

Entre as motivações para este trabalho, pode-se citar as diversas aplicações práticas e a possibilidade de que este possa se tornar um modelo teórico a ser utilizado em projetos mais práticos dentro da universidade.

1.1 Metodologia

A partir das leis da física e com o suporte da matemática, modela-se a dinâmica do sistema pelo método de espaço de estados. Após a modelagem, são feitas simulações para a validação do modelo encontrado. Validado o modelo, é realizado um estudo sobre linearização por realimentação de sistemas não lineares e sobre a dinâmica interna associada. Dessa forma, torna-se possível o projeto e implementação de uma lei de controle linearizante por realimentação para o sistema não linear, além do projeto e da implementação de uma função de Lyapunov para controle da dinâmica interna. Por fim, os projetos são simulados e analisados para fins de validação.

1.2 Objetivos

Os objetivos deste trabalho incluem:

- Modelagem e validação de um modelo matemático para o sistema carro-pêndulo utilizando a abordagem Lagrangeana;
- Proposta de um sistema de controle para o sistema;
- Validação do sistema de controle.

1.3 Organização e estrutura

Os capítulos deste trabalho englobam aspectos teóricos e experimentais relacionados ao projeto e, com o objetivo de facilitar a compreensão do mesmo, é dividido em seis capítulos.

No Capítulo 1 é abordada uma breve introdução aos conceitos utilizados ao longo deste trabalho, elucidando os objetivos a serem cumpridos e sua relevância enquanto objeto de estudo.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica dos métodos de linearização e de controle não linear utilizados para garantir a estabilidade do sistema apresentado no Capítulo 3.

No Capítulo 3 é desenvolvida a modelagem dinâmica do sistema carro-pêndulo a ser controlada, utilizando a abordagem Lagrangeana e apresentada a validação do modelo obtido. Através de simulações em software numérico, analisa-se a similaridade do modelo com o esperado na realidade.

O Capítulo 4 evidencia a aplicação dos métodos de controle apresentados no Capítulo 2 ao modelo desenvolvido no Capítulo 3.

No Capítulo 5 são expostas as simulações realizadas em software numérico para validação do sistema de controle.

No Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são detalhados os desenvolvimentos das técnicas de linearização e da técnica de controle utilizada para estabilização do pêndulo invertido.

De acordo com Slotine e Li (1991), a análise de sistemas não lineares não possui nenhum método geral para o desenvolvimento de controladores não lineares. Dessa forma, técnicas alternativas e complementares são aplicadas em cada caso particular de problemas de controle não linear, como *trial-and-error*, controle robusto, controle adaptativo, *gain-scheduling* e linearização por realimentação.

Para se controlar o sistema não linear carro-pêndulo a ser descrito no Capítulo 3, opta-se pelo uso de uma técnica alternativa de linearização exata por realimentação: a linearização entrada-saída, detalhada a seguir. Conforme Silva (2006) explica, esse é um procedimento que permite transformar a dinâmica de um sistema não linear numa dinâmica linear através de uma realimentação da saída, de modo que, ao novo sistema encontrado, possa ser aplicado técnicas lineares de controle.

2.1 Metodologias para Linearização

2.1.1 Linearização Jacobiana

De acordo com Amba (2015) e Boyce, DiPrima e Haines (1969), a linearização Jacobiana utiliza a expansão em Séries de Taylor a fim de encontrar um sistema linear que aproxime do sistema não linear sobre um ponto de equilíbrio, de forma que seja possível analisar as características desse ponto, como estabilidade, polos, etc.

O sistema linearizado pode ser descrito pela seguinte equação em espaços de estados:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta u \\ \Delta y &= \mathbf{C}\Delta \mathbf{x} + \mathbf{D}\Delta u\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\Delta u = u - u_0$, \mathbf{x} representa os estados definidos para o sistema, \mathbf{x}_0 representa os valores dos estados \mathbf{x} no ponto de equilíbrio e u_0 a ação de controle no ponto de equilíbrio.

Além disso, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são definidas como sendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}\tag{2.2}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\tag{2.3}$$

2.1.2 Linearização por Realimentação

A linearização por realimentação é uma abordagem aplicada ao controle de sistemas não lineares que, conforme Slotine e Li (1991) fundamentam, consiste de, algebricamente, transformar um sistema de dinâmica não linear em um parcial ou totalmente linear, ao qual técnicas de controle linear possam ser aplicadas.

Diferentemente da linearização Jacobiana, apresentada anteriormente, a linearização por realimentação é obtida por transformações exatas de estado, ao invés de aproximações lineares de sua dinâmica (SLOTINE; LI, 1991).

A seguir, uma das técnicas de linearização por realimentação utilizada nesse trabalho é melhor detalhada.

2.1.2.1 Linearização entrada-saída

Considere um sistema não linear descrito pela representação em espaços de estados:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde y representa a saída do sistema.

De acordo com Slotine e Li (1991) e Matias (2012), para realizar a linearização entrada-saída do sistema em 2.4, deve-se encontrar uma relação diferencial e linear entre a saída y do sistema e uma nova entrada de controle ν , de forma a cancelar as não linearidades. Para isso, é necessário diferenciar a saída y do sistema repetidamente, até obter o sinal de entrada u explicitamente, gerando assim, uma nova expressão. O número r de diferenciações necessárias para a obtenção da entrada u explicitamente define o chamado grau relativo do sistema.

Para formalizar os conceitos acima, utiliza-se como ferramental matemático a derivada de Lie que, conseqüentemente, correlaciona-se com a definição de grau relativo. Ambas as definições são apresentados a seguir, em conformidade com as proposições de Slotine e Li (1991).

Definição 1 *Seja $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ uma função escalar suave, e seja $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ um campo vetorial suave sobre o \mathbf{R}^n , então a Derivada de Lie de h em relação a \mathbf{f} é uma função escalar definida por*

$$L_{\mathbf{f}}h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = \nabla h \mathbf{f}$$

Derivadas repetidas de Lie podem ser recursivamente definidas, conforme a equação 2.5

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{f}}^0 h &= h \\ L_{\mathbf{f}}^i h &= L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) = \nabla(L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) \mathbf{f}\end{aligned}\tag{2.5}$$

De maneira similar, se \mathbf{f} e \mathbf{g} são campos vetoriais, defini-se $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ pela equação 2.6

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h = \nabla(L_{\mathbf{f}}h)\mathbf{g} \quad (2.6)$$

Definição 2 O sistema SISO é dito possuir grau relativo r em uma região Ω se, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = 0 \quad 0 \leq i < r - 1 \quad (2.7a)$$

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (2.7b)$$

Segundo Matias (2012) e Amba (2015), caso o grau relativo r do sistema seja menor que a ordem n do próprio sistema não linear, o sistema é parcialmente linearizado, sendo constituído de um sistema controlável pela nova entrada de controle ν e uma dinâmica interna não observável de ordem $n - r$. Se o grau relativo do sistema é igual à ordem do sistema, a linearização entrada-saída se torna uma linearização entrada-estado, não abordada nesse trabalho.

Conforme Matias (2012) e Slotine e Li (1991) propõem, para iniciar a linearização entrada-saída, posiciona-se o sistema em uma região Ω_x aberta no espaço de estados e deriva-se a saída y do sistema 2.4 com o auxílio da derivada de Lie, sendo assim:

$$\dot{y} = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u \quad (2.8)$$

Se $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) \neq 0$ para algum $x = x_0$ na região Ω_x , então, por continuidade, a relação linear é verificada em uma vizinhança finita Ω de x_0 , obtendo-se a transformação de entrada em Ω :

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}h}(-L_{\mathbf{f}}h + \nu) \quad (2.9)$$

resultando na relação linear $\dot{y} = \nu$.

Entretanto, se $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) = 0$ para todo x na região Ω_x , deve-se diferenciar \dot{y} para obter:

$$\ddot{y} = L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})u \quad (2.10)$$

Se $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = 0$ para todo x na região Ω_x , deve-se diferenciar novamente, até que $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}) \neq 0$ para algum $x = x_0$ na região Ω_x . Então, por continuidade, a relação linear é verificada em uma vizinhança finita Ω de x_0 , obtendo-se:

$$y^r = L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x})u \quad (2.11)$$

que nos leva à lei de controle na região Ω :

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1}h}(-L_{\mathbf{f}}^r h + \nu) \quad (2.12)$$

descrita pela relação linear da equação 2.13, sendo r o seu grau relativo.

$$y^r = \nu \quad (2.13)$$

Caso o sistema apresente uma dinâmica interna, ou seja, $r < n$, deve-se fazer a análise de sua estabilidade. De acordo com Amba (2015), a dinâmica interna deve ser estável para que o sistema não linear possa ser estabilizado com a lei de controle ν encontrada. Entretanto, para uma dinâmica interna instável, deve-se lidar com a chamada dinâmica zero relativa à linearização a ser aplicada.

2.2 Regulador Linear Quadrático

Considere o sistema dado pela equação 2.14:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.14)$$

De acordo com Ogata (2011), o problema do regulador quadrático ótimo do sistema descrito pela equação 2.14 permite determinar a matriz de ganho \mathbf{K} do vetor de controle ótimo

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (2.15)$$

que minimiza o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty (x^T \mathbf{Q} x + u^T \mathbf{R} u) dt \quad (2.16)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica e \mathbf{R} é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica e determinam, respectivamente, a importância relativa do erro e o consumo de energia dos sinais de controle.

Segundo Matias (2012) e Ogata (2011), esse ganho \mathbf{K} pode ser encontrado como a solução da equação diferencial matricial de Riccati, dada em sua forma reduzida pela equação 2.17:

$$-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (2.17)$$

3 MODELAGEM E DINÂMICA DO SISTEMA CARRO-PÊNDULO

A dinâmica de um sistema pode ser obtida matematicamente por meio de modelagens, tais como, a newtoniana, a lagrangeana ou a hamiltoniana. Neste capítulo, empregando a abordagem Lagrangeana, é formalizada a modelagem matemática do sistema carro-pêndulo, obtendo assim, suas equações e representação em espaço de estados.

3.1 Análise dinâmica do sistema carro-pêndulo

Para este trabalho, foi obtido um modelo teórico para o sistema carro-pêndulo, mostrado na Figura 1, aplicando a abordagem dinâmica Lagrangeana.

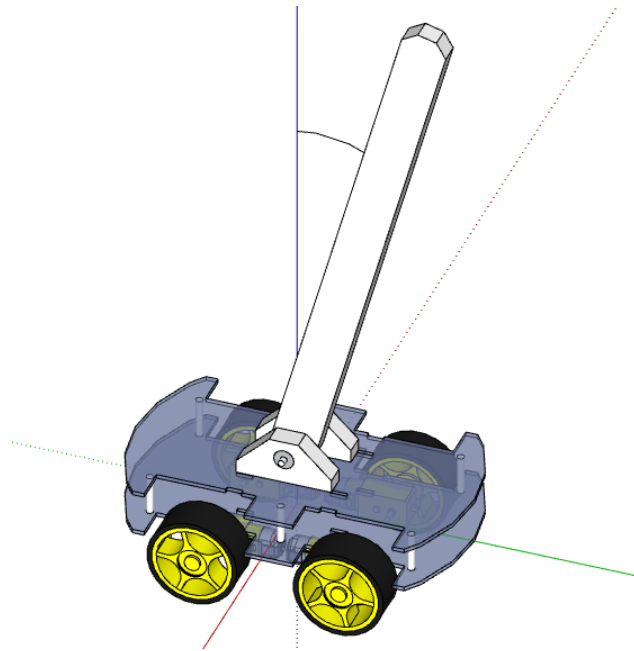


Figura 1 – Sistema carro-pêndulo

Segundo Villar (2014), a aplicação básica do formalismo Lagrangeano consiste de:

- definição da Lagrangeana do sistema;
- inclusão de eventuais restrições ao movimento na Lagrangeana;
- aplicação das Equações de Lagrange para obtenção das equações de movimento.

Na Figura 2 são apresentados o sistema carro-pêndulo e seus componentes.

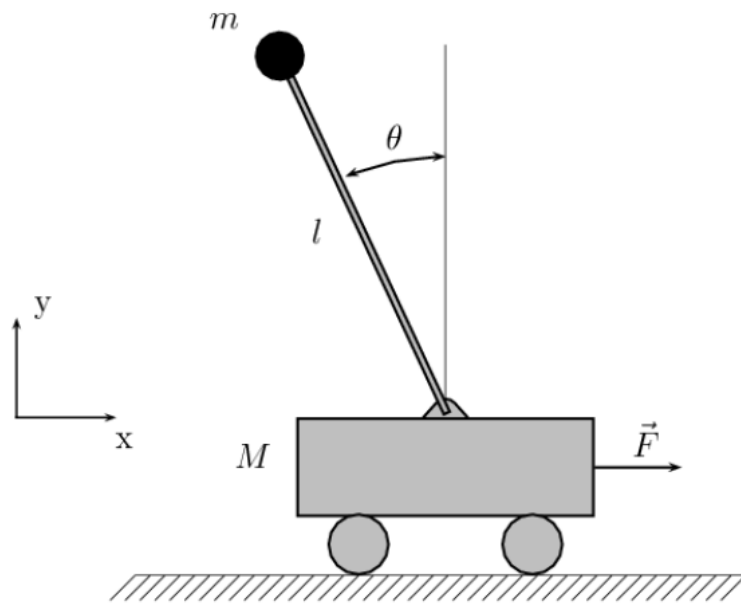


Figura 2 – Sistema carro-pêndulo e seus componentes

Fonte: [Rifford \(2014\)](#)

Onde:

M - massa do carro

m - massa do pêndulo

l - distância ao centro de massa do pêndulo

x - posição do carro

θ - posição angular do pêndulo

J - momento de inércia do pêndulo

B_{eq} - coeficiente viscoso de amortecimento translacional do carro

B_p - coeficiente viscoso de amortecimento rotacional do pêndulo

F - força aplicada ao carro

g - aceleração da gravidade

A seguir, formalizamos a aplicação Lagrangeana ao sistema proposto.

3.1.1 Coordenadas generalizadas do sistema

De acordo com Villar (2014), as coordenadas generalizadas de um sistema é um conjunto de variáveis independentes capazes de definir completamente a posição de um sistema com n graus de liberdade. O sistema carro-pêndulo possui dois graus de liberdade (q_1 e q_2) e, portanto, pode ser representado utilizando duas coordenadas generalizadas: a posição translacional x do carro e a posição rotacional θ do pêndulo:

$$\begin{aligned} q_1 &= x \\ q_2 &= \theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Adotou-se que a direção positiva de x é para a direita e a direção positiva de θ é no sentido anti-horário, medido a partir da posição invertida do pêndulo.

3.1.2 Forças generalizadas do sistema

Segundo Stimac (1999), as forças generalizadas, ou resultantes, podem ser deduzidas a partir do trabalho não conservativo. Para o sistema carro-pêndulo, as forças não conservativas resultam da força atuante sobre o carro e o sistema de amortecimento translacional e rotacional:

$$\begin{aligned} Q_1 &= F - B_{eq}\dot{x} \\ Q_2 &= -B_p\dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde Q_1 e Q_2 representam, respectivamente, as forças resultantes para o carro e para o pêndulo.

3.1.3 Energias cinética e potencial do sistema

A energia cinética do carro é determinada simplesmente por:

$$K_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad (3.3)$$

Para o pêndulo, a energia cinética pode ser determinada por:

$$K_p = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (3.4)$$

onde v_x representa a velocidade linear do pêndulo com relação ao eixo da coordenada x , v_y representa a velocidade linear do pêndulo com relação ao eixo da ordenada y e ω representa a velocidade angular do pêndulo. Dessa forma:

$$v_x = \frac{d}{dt}(x - l \sin \theta) = \dot{x} - l \cos \theta \dot{\theta} \quad (3.5)$$

$$v_y = \frac{d}{dt}(l \cos \theta) = -l \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.6)$$

$$\omega = \dot{\theta} \quad (3.7)$$

Substituindo as equações 3.5 a 3.7 na equação 3.4 obtém-se

$$K_p = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (3.8)$$

que, após simplificações, resulta em

$$K_p = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (3.9)$$

A energia cinética total do sistema é dada por

$$K = K_c + K_p = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (3.10)$$

A energia potencial do sistema é determinada exclusivamente pela energia potencial do pêndulo, uma vez que o carro desloca-se apenas na direção horizontal. Dessa forma:

$$U = U_p \quad (3.11)$$

$$U = mgl \cos \theta \quad (3.12)$$

3.1.4 Função Lagrangeana do sistema

A função Lagrangeana, comumente chamada simplesmente de Lagrangeana de um sistema, é definida como sendo a diferença entre as energias cinética e potencial do sistema (ROSA, 2008):

$$L = K - U \quad (3.13)$$

Substituindo as equações 3.10 e 3.12, a Lagrangeana para o sistema carro-pêndulo pode ser escrita como:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 - 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (3.14)$$

3.1.5 Equação de Lagrange

As equações de estado podem ser encontradas a partir da Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.15)$$

A equação para x :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_1 \quad (3.16)$$

Aplicando a equação 3.14 na equação 3.16 e efetuando as derivadas parciais, obtém-se

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} - ml \cos \theta \dot{\theta}) - 0 = F - B_{eq}\dot{x} \quad (3.17)$$

Efetando as derivadas na equação 3.17 tem-se como resultado

$$(M + m) \ddot{x} - ml \cos \theta \ddot{\theta} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F - B_{eq}\dot{x} \quad (3.18)$$

A equação para θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_2 \quad (3.19)$$

Aplicando a equação 3.14 na equação 3.19 e efetuando as derivadas parciais, obtém-se

$$\frac{d}{dt} (-ml\dot{x} \cos \theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + mgl \sin \theta) = -B_p\dot{\theta} \quad (3.20)$$

Efetando as derivadas na equação 3.20 tem-se como resultado

$$-ml \cos \theta \ddot{x} + ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} - ml\dot{x} \sin \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta = -B_p\dot{\theta} \quad (3.21)$$

Simplificando e rearranjando as equações 3.18 e 3.21, as equações de estado são:

$$(M + m) \ddot{x} - ml \cos \theta \ddot{\theta} + B_{eq}\dot{x} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F \quad (3.22a)$$

$$-ml \cos \theta \ddot{x} + (ml^2 + J) \ddot{\theta} + B_p\dot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \quad (3.22b)$$

Isolando \ddot{x} na equação 3.22a, tem-se

$$\ddot{x} = \frac{(ml^2 + J) \ddot{\theta} + B_p\dot{\theta} - mgl \sin \theta}{ml \cos \theta} \quad (3.23)$$

Substituindo a equação 3.23 na equação 3.22a e isolando-se o termo $\ddot{\theta}$ tem-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{(m + M)(mgl \sin \theta - B_p\dot{\theta}) - ml \cos \theta (B_{eq}\dot{x} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2) + ml \cos \theta F}{mMl^2 + J(m + M) + m^2l^2 \sin^2 \theta} \quad (3.24)$$

Isolando $\ddot{\theta}$ na equação 3.22b, tem-se

$$\ddot{\theta} = \frac{ml \cos \theta \ddot{x} - B_p\dot{\theta} + mgl \sin \theta}{(ml^2 + J)} \quad (3.25)$$

Substituindo a equação 3.25 na equação 3.22a e isolando-se o termo \ddot{x} tem-se:

$$\ddot{x} = \frac{ml \cos \theta (mgl \sin \theta - B_p\dot{\theta}) - (ml^2 + J)(B_{eq}\dot{x} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2) + (ml^2 + J) F}{mMl^2 + J(m + M) + m^2l^2 \sin^2 \theta} \quad (3.26)$$

3.1.6 Representação em espaço de estados

As equações 3.24 e 3.26 representam as equações diferenciais que descrevem o sistema carro-pêndulo atuado por uma força externa. Entretanto, é necessário expressar essas equações em uma representação de espaço de estados na seguinte forma (AMBA, 2015; STIMAC, 1999):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (3.27)$$

onde a entrada u representa a força F aplicada ao carro.

Para determinar o vetor de estados $\dot{\mathbf{x}}$, uma mudança de variáveis é necessária. Essa mudança é definida por:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Dessa forma, aplicando mudança de variáveis, obtém-se o seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{ml \cos x_3 (mgl \sin x_3 - B_p x_4) - (ml^2 + J)(B_{eq} x_2 + ml \sin x_3 x_4^2) + (ml^2 + J)F}{mMl^2 + J(m+M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(m+M)(mgl \sin x_3 - B_p x_4) - ml \cos x_3 (B_{eq} x_2 + ml \sin x_3 x_4^2) + ml \cos x_3 F}{mMl^2 + J(m+M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Reescrevendo 3.29 na forma mostrada em 3.27, tem-se:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{ml \cos x_3 (mgl \sin x_3 - B_p x_4) - (ml^2 + J)(B_{eq} x_2 + ml \sin x_3 x_4^2)}{mMl^2 + J(m+M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(m+M)(mgl \sin x_3 - B_p x_4) - ml \cos x_3 (B_{eq} x_2 + ml \sin x_3 x_4^2)}{mMl^2 + J(m+M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ml^2 + J}{mMl^2 + J(m+M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{ml \cos x_3}{mMl^2 + J(m+M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3} \end{pmatrix} F \\ y &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.30)$$

A representação matricial 3.30 é a representação em espaços de estados para o sistema utilizada neste trabalho.

3.2 Modelagem matemática do Motor de Corrente Contínua

Seja o motor de corrente contínua apresentado na Figura 3.

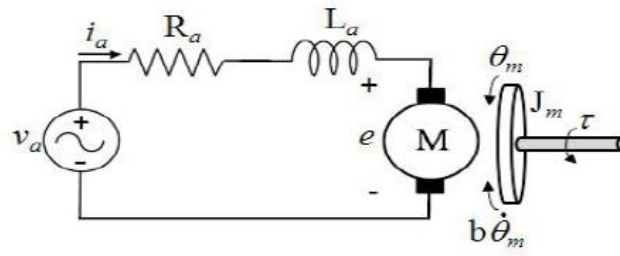


Figura 3 – Modelo do circuito elétrico de um Motor CC

Fonte: [Amba \(2015\)](#)

A dinâmica de um motor de corrente contínua provem das equações elétricas do circuito de armadura e das equações mecânicas do movimento.

Aplicando a Lei de Kirchhoff das Tensões, a tensão V_a no circuito de armadura é dada por:

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_m \quad (3.31)$$

onde:

R_a - resistência de armadura

i_a - corrente de armadura

L_a - indutância do enrolamento de armadura

e_m - tensão induzida no motor, dada pela lei de Faraday.

Para o sistema rotacional, aplicando a lei de Newton, o torque τ aplicado à carga mecânica é dado por:

$$\tau = J_m \frac{d\omega}{dt} + b\omega + T_L \quad (3.32)$$

onde:

J - inércia total do rotor e da carga em relação ao eixo

ω - velocidade de rotação do motor

b - coeficiente de atrito viscoso do motor

T_L - torque da carga

A relação entre as partes elétrica e mecânica do sistema é dada pelas equações [3.33a](#) e [3.33b](#).

$$e_m = k_g \omega \quad (3.33a)$$

$$\tau = k_t i_a \quad (3.33b)$$

onde k_g e k_t representam, respectivamente, as constantes de tensão e torque do motor.

Substituindo-se a equação 3.33a na equação 3.31 e a equação 3.33b na equação 3.32, obtém-se:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{b}{J_m}\omega + \frac{k_t}{J_m}i_a - \frac{T_L}{J_m} \quad (3.34)$$

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{k_g}{L_a}\omega - \frac{R_a}{L_a}i_a + \frac{V_a}{L_a} \quad (3.35)$$

Definindo como estados a corrente de armadura i_a e a velocidade angular ω , as equações 3.34 e 3.35 são representadas em espaços de estados por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{i}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{J_m} & \frac{k_t}{J_m} \\ -\frac{k_g}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ i_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{T_L}{J_m} \\ \frac{V_a}{L_a} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

3.3 Validação do modelo

De acordo com Chwif e Medina (2006), a validação está relacionada ao modelo conceitual obtido e consiste em analisar se o mesmo comporta-se como na realidade sob as mesmas condições.

Para fins de validação, obteve-se, por meio de ensaios de laboratório, os parâmetros para um modelo específico que será utilizado futuramente para a construção de um protótipo do pêndulo invertido. Esses dados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros de um sistema com pêndulo invertido

Símbolo	Parâmetro	Valor
M	Massa do carro	0.5676kg
m	Massa do pêndulo	0.169 85kg
l	distância ao centro de massa do pêndulo	0.478m
J	Momento de inércia do pêndulo	0.0032kgm ²
B_{eq}	Coefficiente viscoso de amortecimento translacional do carro	5.4Ns/m
B_p	Coefficiente viscoso de amortecimento rotacional do pêndulo	2.4×10^{-3} Nsm/rad
g	Aceleração da gravidade	9.81m/s ²

3.3.1 Validação do sistema em sua dinâmica natural

Para validar o modelo dinâmico obtido conforme as equações 3.24 e 3.26, realizou-se simulações numéricas, mostradas no Apêndice D.

Para realizar a validação, foram consideradas duas situações distintas:

1. Aplica-se um impulso ao sistema, equivalente a um rápido e pequeno empurrão no carro, em condições iniciais nulas, permitindo que ele evolua naturalmente ao longo do tempo.

Neste cenário, é esperado que, no sistema físico, o carro sofra um pequeno deslocamento, provocando a queda do pêndulo que, caso não haja restrição à posição vertical para baixo, oscilará em torno desta posição até atingir o equilíbrio.

2. Libera-se o pêndulo de uma posição inicial qualquer, sem que ele receba qualquer influência externa, permitindo que ele evolua naturalmente ao longo do tempo.

Neste contexto, é esperado que, no sistema físico, o pêndulo, caso não haja restrição à posição vertical para baixo, caia e oscile em torno desta posição até atingir o equilíbrio, provocando deslocamentos oscilatórios do carro em torno de sua posição inicial.

Para a primeira situação, ao aplicar um pequeno impulso ao sistema carro-pêndulo, com ângulo inicial $\theta = 0^\circ$ e posição inicial $x = 0$ m observa-se, conforme Figura 4, que o carro desloca-se para frente e para trás dentro de um pequeno deslocamento da origem, praticamente atingindo o repouso, em uma posição próxima à origem, com o passar do tempo. Nessa situação, o pêndulo cai de sua posição vertical invertida e oscila em torno de sua posição vertical para baixo, até atingir o equilíbrio em $\theta = 180^\circ$.

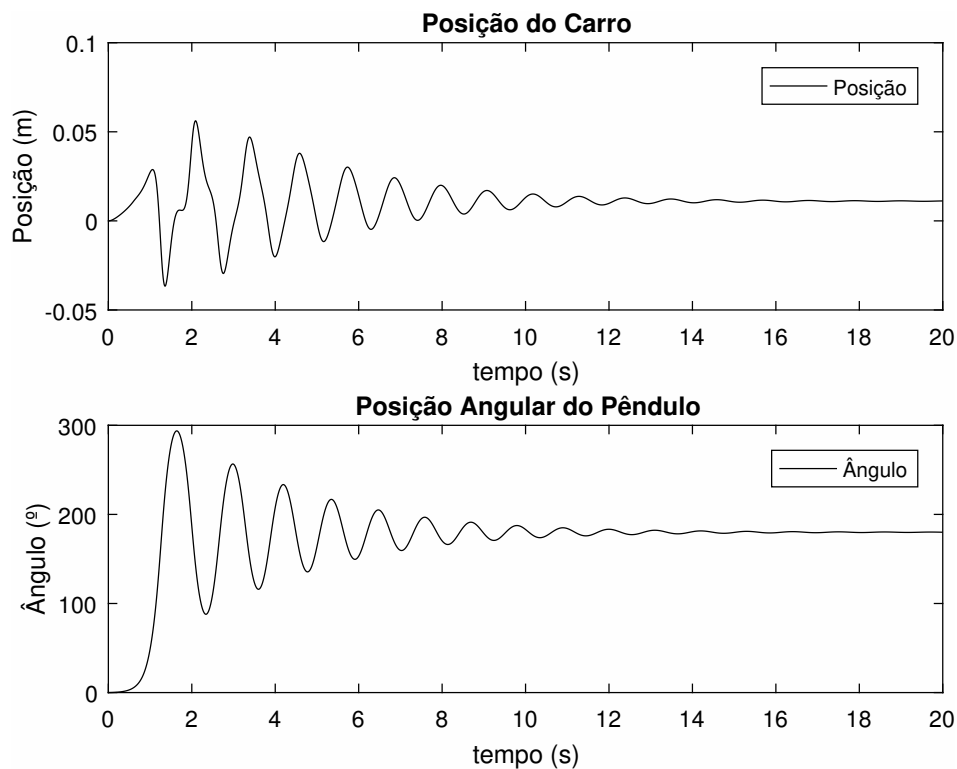


Figura 4 – Resposta do sistema a um impulso

Na segunda situação, liberando o pêndulo de um ângulo inicial $\theta = 5^\circ$ e posição inicial $x = 0$ m, observa-se que novamente o pêndulo cai oscilando em torno de sua posição de equilíbrio, até atingir a posição vertical para baixo $\theta = 180^\circ$, de acordo com a Figura 5. Mesmo sem receber qualquer impulso, observa-se que o movimento do pêndulo provoca um deslocamento para frente e para trás do carro, dentro de um pequeno deslocamento da origem, praticamente atingindo o repouso, na própria origem, com o passar do tempo.

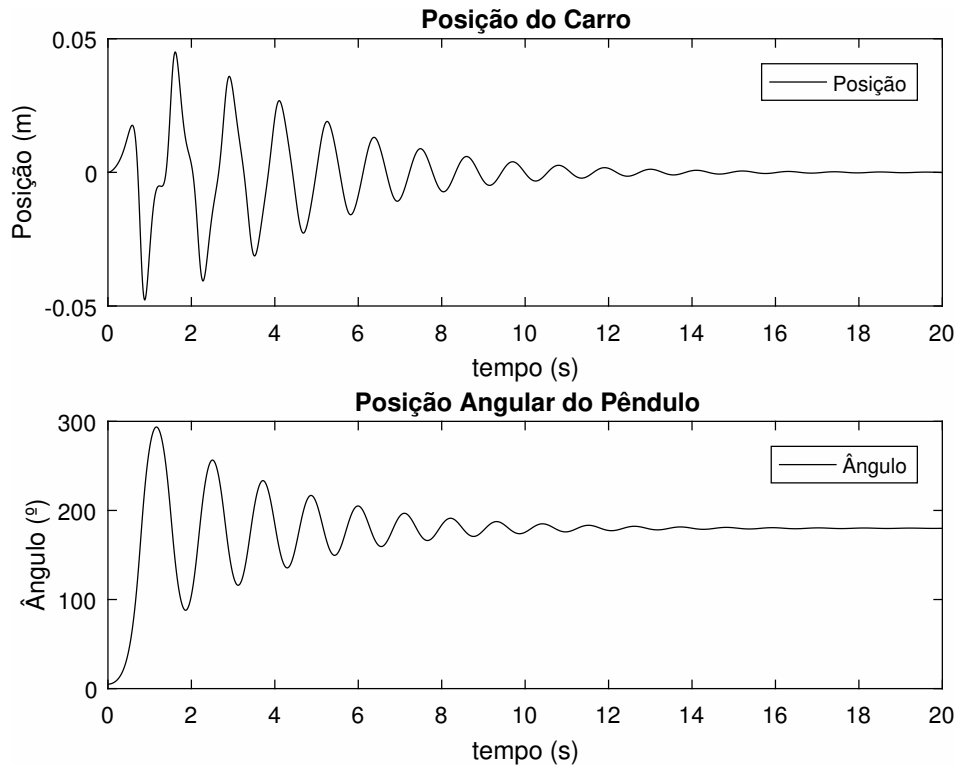


Figura 5 – Resposta do sistema a uma posição angular inicial de 5°

Os comportamentos apresentados em ambos os casos estão condizentes com o comportamento esperado para o sistema físico real, dando indícios de que o modelo matemático desenvolvido para o sistema está adequado.

4 SISTEMA DE CONTROLE

Neste capítulo é detalhado o desenvolvimento do sistema de controle aplicado ao carro-pêndulo.

4.1 Linearização jacobiana do pêndulo invertido

O sistema carro-pêndulo possui infinitos pontos de equilíbrio, entretanto, apenas dois são relevantes: a posição vertical para cima $\theta = 0^\circ$ e a posição vertical para baixo $\theta = 180^\circ$. Como o foco deste trabalho é o controle do pêndulo em sua posição invertida, a linearização é feita apenas para este ponto de equilíbrio, ou seja, $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Para a realização dos cálculos relacionados às matrizes, utilizando os dados apresentados na Tabela 1 em software numérico, obtem-se o seguinte sistema linearizado:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5.74 & 2.4 & -0.00773 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -17.4 & 37 & -0.119 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.06 \\ 0 \\ 3.22 \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Para realizar o controle do sistema linearizado, utilizou-se o método de controle linear LQR, explicado no Capítulo 2.

Para aplicá-lo, deve-se escolher as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} e calcular o vetor de ganho \mathbf{K} . O ganho \mathbf{K} do LQR foi obtido a partir da solução da equação de Riccati, onde as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} estão apresentadas no sistema 4.1, enquanto as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} foram definidas com ganhos unitários:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{R} = 1 \quad (4.3)$$

A implementação e os cálculos realizados são mostrados no Apêndice B,

4.2 Linearização entrada-saída do pêndulo invertido

Seja o sistema do pêndulo invertido:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 \\ x_4 \\ f_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \\ 0 \\ g_4 \end{pmatrix} u \quad (4.4)$$

onde:

$$f_2 = \frac{ml \cos x_3 (mgl \sin x_3 - B_p x_4) - (ml^2 + J)(B_{eq} x_2 + ml \sin x_3 x_4^2)}{mMl^2 + J(m + M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3}$$

$$f_4 = \frac{(m + M)(mgl \sin x_3 - B_p x_4) - ml \cos x_3 (B_{eq} x_2 + ml \sin x_3 x_4^2)}{mMl^2 + J(m + M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3}$$

$$g_2 = \frac{ml^2 + J}{mMl^2 + J(m + M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3}$$

$$g_4 = \frac{ml \cos x_3}{mMl^2 + J(m + M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3}$$

$$u = F$$

Como o objetivo é controlar o ângulo do pêndulo, para projetar a linearização entrada-saída, define-se a saída $y = x_3$ para o sistema 4.4. Efetuando-se repetitivamente a derivada de y até que a entrada u apareça explicitamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_3 \\ &= x_4 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \dot{x}_4 \\ &= f_4 + g_4 u \end{aligned} \quad (4.6)$$

Adota-se então uma nova entrada de controle $\nu = \ddot{y}$, onde $\nu = -k_3 x_3 - k_4 x_4$, sendo k_3 e k_4 projetados por alocação de polos usando a equação característica $s^2 + k_4 s + k_3 = 0$ e ajustados por tentativa e erro nas simulações. Dessa forma, obtém-se que a ação de controle linearizante é dada por:

$$u = \frac{\nu - f_4}{g_4} \quad (4.7)$$

donde, substituindo f_4 e g_4 , obtem-se:

$$u = \frac{(m + M)(mgl \sin x_3 - B_p x_4) - ml \cos x_3 (B_{eq} x_2 + ml \sin x_3 x_4^2)}{ml \cos x_3} - \frac{(mMl^2 + J(m + M) + m^2 l^2 \sin^2 x_3)(-k_3 x_3 - k_4 x_4)}{ml \cos x_3} \quad (4.8)$$

4.2.1 Dinâmica interna

Uma vez que foram necessárias duas diferenciações para encontrar a relação explícita com a entrada u , o sistema carro-pêndulo possui grau relativo igual a 2 e, portanto, apresenta uma dinâmica interna também de grau 2.

Para analisar a dinâmica interna desse sistema, [Amba \(2015\)](#) sugere o uso da dinâmica zero, que ocorre quando os estados linearizados x_3 e x_4 são conduzidos a zero pela entrada de controle ν , sendo dada pela equação 4.9:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Pela equação 4.9, pode-se notar que a dinâmica zero do sistema possui seus polos na origem e, portanto, é instável, fazendo-se necessário o uso de um controlador para garantir sua estabilidade. Esse controlador, baseado no Teorema de Estabilidade de Lyapunov, descrito a seguir, e nas ideias de sistemas singularmente perturbados, é desenvolvido consoante as proposições de [Amba \(2015\)](#).

De acordo com [Amba \(2015\)](#) e [Alberto \(2006\)](#), definindo o ganho da lei de controle linearizante do sistema, representada pela equação 4.8, de forma a garantir que o sistema exiba um comportamento lento, associado à dinâmica do carro e um comportamento rápido, associado à dinâmica do pêndulo, comportando-se como um sistema singularmente perturbado, permitindo que as dinâmicas do sistema possam ser estabilizadas de forma independente pelos controladores.

Teorema 1 (*Critério de Estabilidade de Lyapunov*) Considere o sistema descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação Lipschitz e D é um aberto, onde $D \subset \mathbb{R}$.

Seja $\bar{x} \in D$ um ponto de equilíbrio. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , ou seja, com derivadas de primeira ordem contínuas. Assuma que:

- $V(x)$ é localmente definida positiva em torno de \bar{x} .
- $\dot{V}(x)$ é localmente semidefinida negativa em torno de \bar{x} .

Então \bar{x} é ponto de equilíbrio estável. Se $\dot{V}(x)$ é localmente definida negativa, a estabilidade é assintótica.

De acordo com o Teorema de Lyapunov, caso seja possível encontrar uma função $V(x)$ definida positiva cuja derivada seja pelo menos semidefinida negativa para um determinado ponto de equilíbrio, garantimos sua estabilidade em sua vizinhança. Assim sendo, com a finalidade de

desenvolver uma função de controle para a dinâmica zero, uma nova entrada de controle u' é definida, sendo dada por:

$$u' = \frac{\nu - f_4}{g_4} + \nu_3 \quad (4.10)$$

onde ν_3 representa a lei de controle linearizante da dinâmica zero.

Substituindo a equação 4.10 como a nova lei de controle no sistema 4.4, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2 - g_2 \frac{\nu - f_4}{g_4} \\ x_4 \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \\ 0 \\ g_4 \end{pmatrix} \nu_3 \quad (4.11)$$

Dessa forma, deve-se projetar ν_3 como uma função candidata de Lyapunov $V(x)$ baseada nos estados x_1 e x_2 da dinâmica interna.

Sejam $e_1 = x_1 - x_{1d}$ e $e_2 = x_2 - x_{2d}$ os erros relacionados à posição e à velocidade do carro, onde, x_{1d} representa a posição de referência do carro e x_{2d} a velocidade de referência, tal que $x_{2d} = 0$. Sejam $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que, definindo-se a função candidata de Lyapunov por:

$$V(x) = \frac{c_1 e_1^2(x)}{2} + \frac{c_2 e_2^2(x)}{2} \quad (4.12)$$

obtenha-se $V(x) > 0 \forall e_1, e_2$.

Derivando a função de Lyapunov, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= c_1 e_1 \dot{e}_1 + c_2 e_2 \dot{e}_2 \\ &= c_1 e_1 \dot{e}_1 + c_2 x_2 \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como $\dot{e}_1 = e_2 = x_2$, a equação 4.13 pode ser simplificada e escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= c_1 e_1 x_2 + c_2 e_2 \dot{x}_2 \\ &= x_2 (c_1 e_1 + c_2 \dot{x}_2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para garantir que \dot{V} seja definida negativa, assegurando que a dinâmica interna seja assintoticamente estável, seja $c_3 > 0$ tal que:

$$\dot{V} = -c_3 x_2^2 \quad (4.15)$$

Igualando as equações 4.14 e 4.15 e, isolando-se \dot{x}_2 , obtém-se que:

$$\begin{aligned} -c_3 x_2^2 &= x_2 (c_1 e_1 + c_2 \dot{x}_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{-c_3 x_2 - c_1 e_1}{c_2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Do sistema 4.11, tem-se que $\dot{x}_2 = f_2 - g_2 \frac{\nu - f_4}{g_4} + g_2 \nu_3$. Dessa forma, substituindo a equação 4.16 e isolando-se a ação de controle ν_3 , obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{-c_3 x_2 - c_1 e_1}{c_2} &= f_2 - g_2 \frac{\nu - f_4}{g_4} + g_2 \nu_3 \\ \nu_3 &= \frac{g_4(-c_1 e_1 - c_3 x_2 - c_2 f_2) - c_2 g_2(\nu - f_4)}{c_2 g_2 g_4} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Consequentemente, substituindo a equação 4.17 no sinal de controle dado pela equação 4.10, conclui-se que:

$$u' = \frac{\nu - f_4}{g_4} + \frac{g_4(-c_1 e_1 - c_3 x_2 - c_2 f_2) - c_2 g_2(\nu - f_4)}{c_2 g_2 g_4} \quad (4.18)$$

Entretanto, como evidenciado por Amba (2015), a equação 4.18 elimina o sinal de controle ν , responsável pela linearização por realimentação da saída $y = x_3$, referente ao ângulo do pêndulo. Por consequência, a diferença passou a ser utilizada, obtendo o sinal de controle u' definido pela equação 4.19:

$$u' = \frac{\nu - f_4}{g_4} - \frac{g_4(-c_1 e_1 - c_3 x_2 - c_2 f_2) - c_2 g_2(\nu - f_4)}{c_2 g_2 g_4} \quad (4.19)$$

4.3 Controle LQR dos motores

Para realizar o controle dos motores apresentados no sistema 3.36, utilizou-se o método de controle linear LQR, explicado no Capítulo 2.

Para aplicá-lo, deve-se escolher as matrizes **Q** e **R** e calcular o vetor de ganho **K**. O ganho **K** do LQR foi obtido a partir da solução da equação de Riccati, onde as matrizes **A** e **B** estão apresentadas no sistema 3.36, enquanto as matrizes **Q** e **R** foram ajustadas por testes de simulação como sendo:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{R} = 10^{-2} \quad (4.21)$$

A implementação do controlador LQR é mostrada no Apêndice C.

5 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados das simulações realizadas. Com os parâmetros e modelo matemático do sistema, foram criados em ambiente de simulação os modelos do sistema conforme Apêndices E e F.

O sistema linearizado pelo Método de Linearização Entrada-saída é composto pelas leis de controle ν , u' e ν_3 , representadas no Apêndice G, enquanto os motores são representados no Apêndice H e o pêndulo no Apêndice I.

Para fazer a sintonia de seu controlador, foi necessário determinar os parâmetros k_3 e k_4 , responsáveis pela lei de controle ν e as constantes de Lyapunov c_1 , c_2 e c_3 , responsáveis pela lei de controle ν_3 da dinâmica interna. Obtidos por tentativa e erro, verificou-se que, para valores pequenos de k_3 e k_4 o sistema não mantinha o pêndulo em sua posição invertida; além disso, percebeu-se que k_3 tem influência no tempo de acomodação do pêndulo e k_4 no sobressalto para a posição do carro. Sendo assim, depois de vários testes, os parâmetros k_3 e k_4 foram fixados em 90 e 16.

Durante os testes, constatou-se que as constantes c_1 e c_3 influenciavam o *sobressalto* do sistema, enquanto c_2 manipulava seu tempo de acomodação. Notou-se também que, para $c_1 > 84$, o sistema começa a oscilar de forma crescente. Dessa forma, as constantes c_1 , c_2 e c_3 foram fixadas em 10, 1 e 15, respectivamente.

5.1 Análise do comportamento do sistema linearizado pelo Método Jacobiano

Com o sistema linear 4.1 implementado, conforme Apêndice E, foi possível a obtenção de gráficos relativos ao comportamento do sistema.

Aplicou-se um degrau unitário ao sistema em três casos distintos:

1. posição angular inicial de 5° e posição do carro nula
2. posição inicial do carro em $x = 0.5$ m e posição angular nula
3. posição angular inicial de 5° e posição inicial do carro em $x = 0.5$ m

No primeiro caso, o carro apresenta um pequeno deslocamento com relação à origem, rapidamente retornando à sua posição original sem sofrer oscilações como esperado, conforme Figura 6. Nas mesmas condições, a posição angular do pêndulo responde de forma similar: o pêndulo tende a retornar para sua posição de equilíbrio mais próxima, nesse caso, sua própria origem, mantendo-se estável.

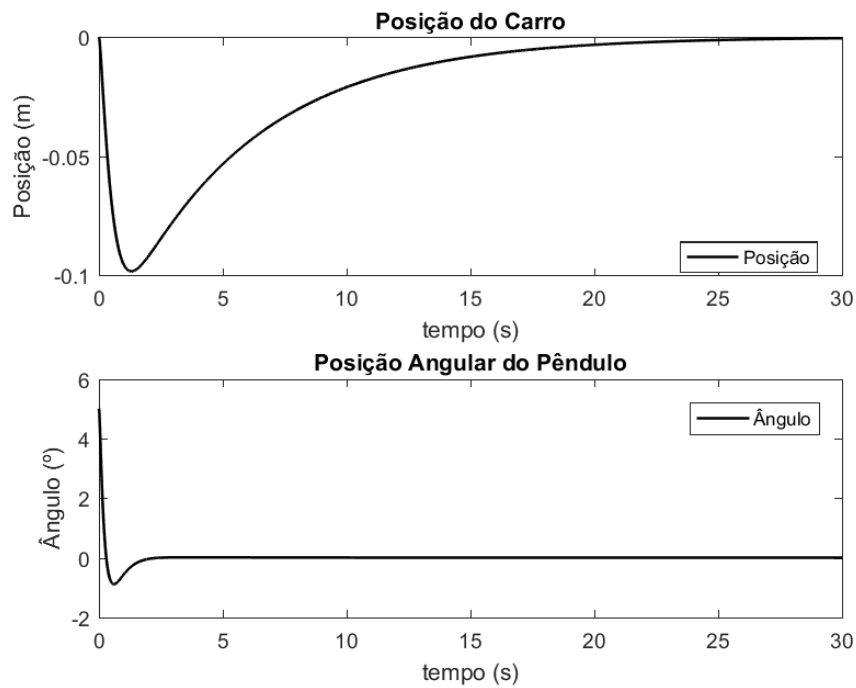


Figura 6 – Resposta do sistema a um degrau com posição angular inicial $\theta = 5^\circ$

No segundo caso, o carro desloca-se para a posição de origem, sem sofrer oscilações como esperado, conforme Figura 7. Nas mesmas condições, o pêndulo sofre um pequeno deslocamento, retornando, sem oscilações, para sua própria origem, mantendo-se estável.

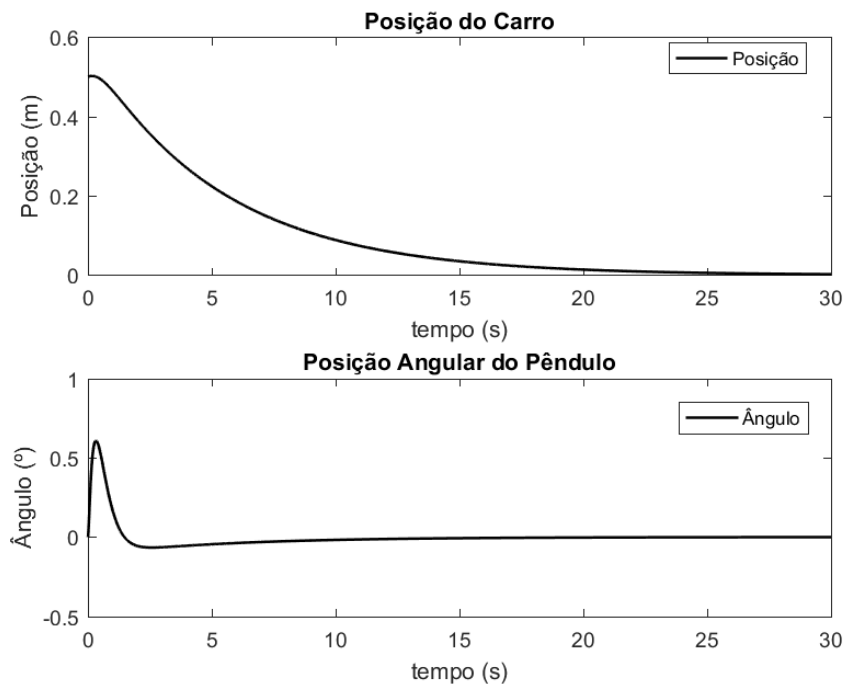


Figura 7 – Resposta do sistema a um degrau com posição inicial do carro em $x = 0.5 \text{ m}$

No último caso, o carro desloca-se para a posição de origem, sem sofrer oscilações como esperado, conforme Figura 8. Nas mesmas condições, o pêndulo sofre um pequeno deslocamento, retornando, sem oscilações, para sua posição de equilíbrio mais próxima, nesse caso, sua própria origem, mantendo-se estável.

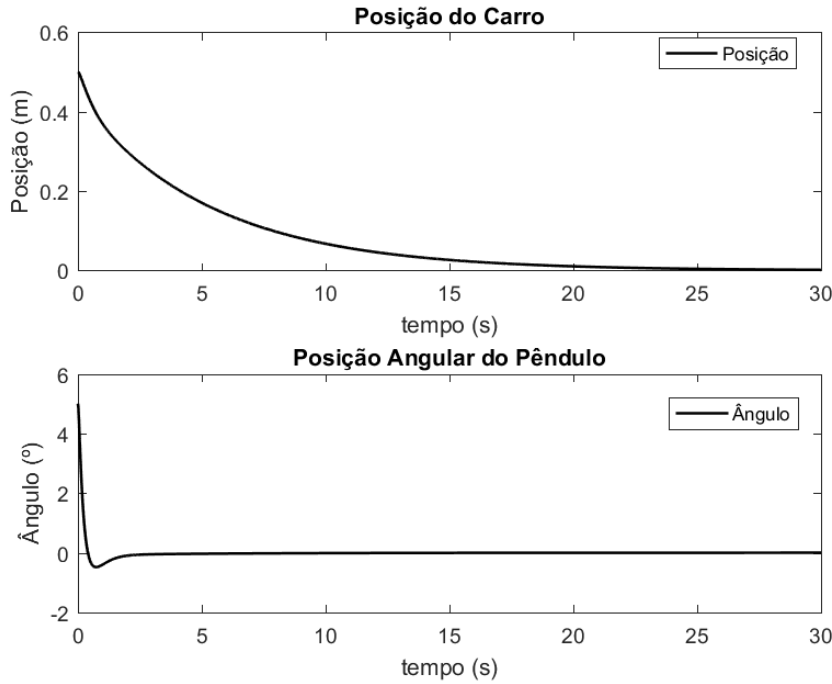


Figura 8 – Resposta do sistema a um degrau com posição angular inicial $\theta = 5^\circ$ e posição inicial do carro em $x = 0.5$ m

5.2 Análise da resposta do controlador sem a presença de ruído para o sistema Linearizado por Realimentação Entrada-saída

Com o sistema não linear completo implementado, foi possível a obtenção de gráficos relativos à resposta do sistema em casos específicos de simulação.

Inicialmente, tomou-se como referência uma posição para o carro em $x = 0.5$ m, mantendo-se o carro e o pêndulo em suas posições iniciais $x = 0$ m e $\theta = 0^\circ$ e em repouso. Conforme podemos ver na Figura 9, o carro descola-se até a posição de referência, acarretando ao pêndulo um deslocamento angular, como esperado, para compensar a movimentação do carro até que ambos estabilizassem.

Em seguida, tomou-se uma onda quadrada como referência para o carro em $x = -0.5$ m e $x = 0.5$ m, mantendo-se novamente o carro e o pêndulo em sua posição inicial $x = 0$ m e $\theta = 0^\circ$ e em repouso. Conforme podemos ver na Figura 10, o carro descola-se até a posição de referência $x = 0.5$ m, acarretando ao pêndulo um deslocamento angular para compensar a movimentação do carro. Ao passo que, assim que a posição de referência se torna $x = -0.5$ m, o pêndulo apresenta um deslocamento angular em sentido contrário, para garantir a compensação

da movimentação do carro. Nota-se que esse deslocamento angular passa a ser maior que o primeiro, visto que a distância a ser percorrida pelo carro também é maior.

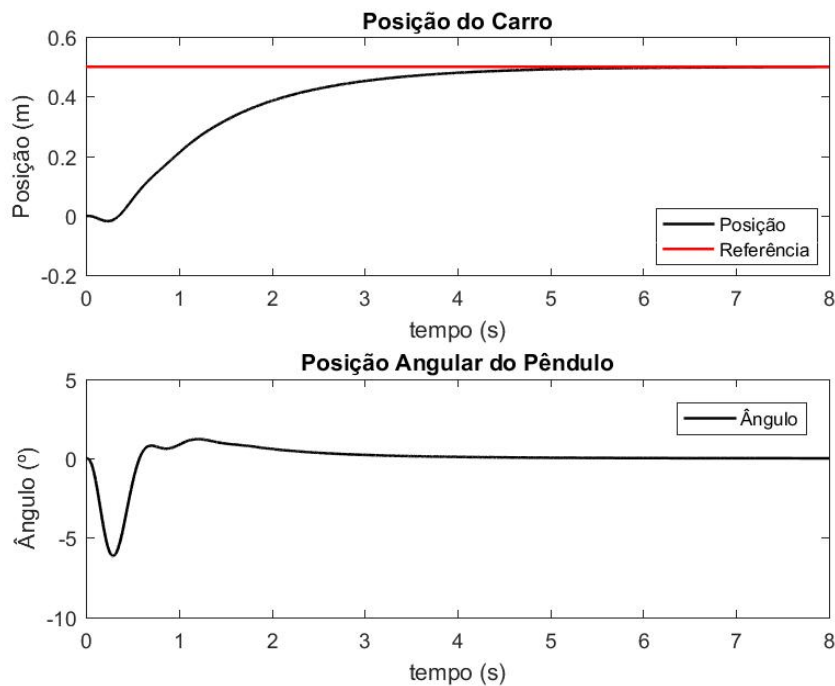


Figura 9 – Resposta do sistema a uma posição referência de $x = 0.5$ m

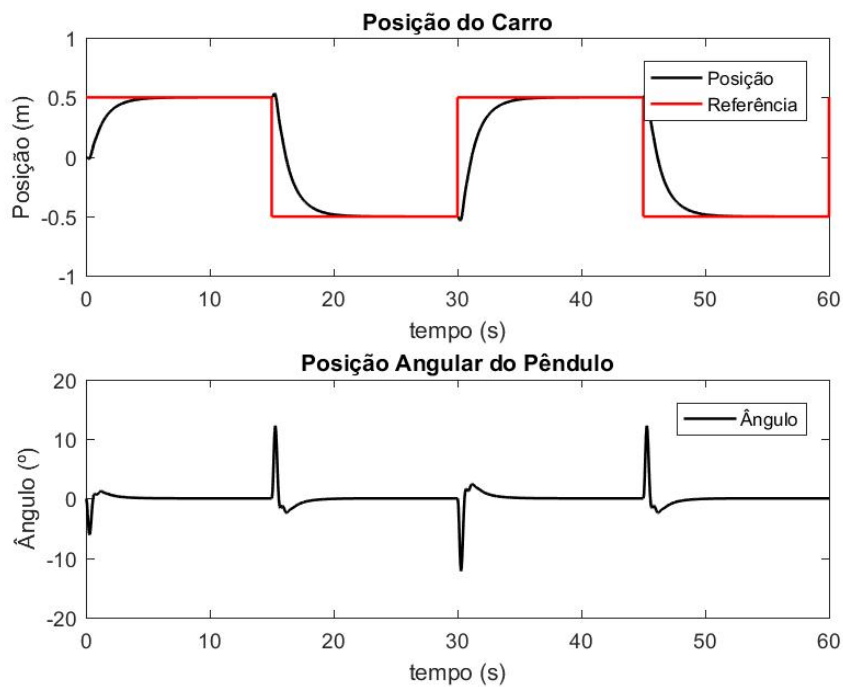


Figura 10 – Resposta do sistema a uma onda quadrada como posição referência

Em uma terceira situação, optou-se por manter a posição de referência do carro em $x = 0$ m e uma posição angular inicial em $\theta = 10^\circ$. Nesse caso, enquanto o pêndulo oscila em torno de

seu ponto de equilíbrio $\theta = 0^\circ$, o carro sofre um pequeno deslocamento para auxiliar em sua estabilização, conforme podemos ver na Figura 11.

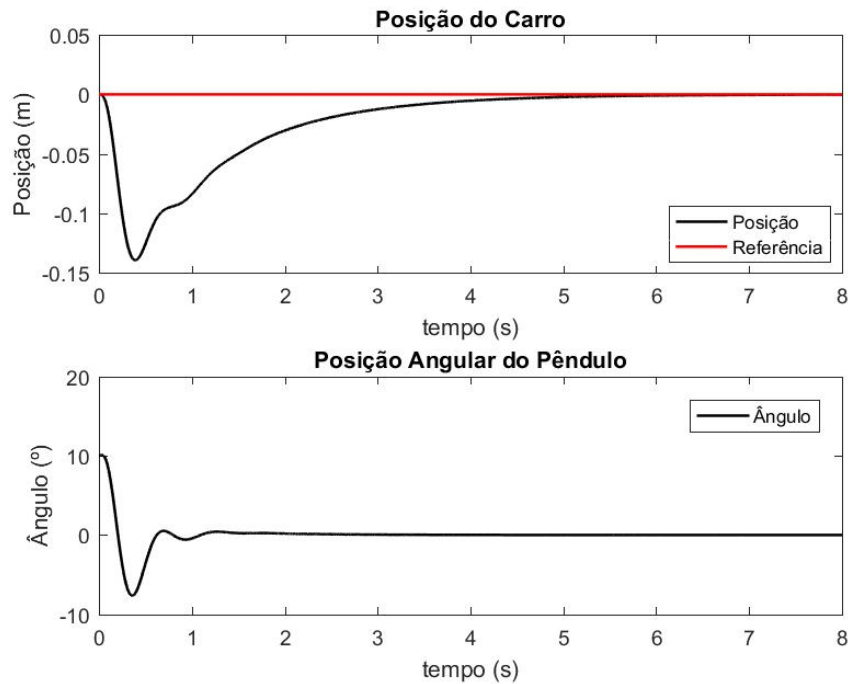


Figura 11 – Resposta do sistema a uma posição angular inicial de 10°

5.3 Análise da resposta do controlador na presença de ruído para o sistema Linearizado por Realimentação Entrada-saída

Para analisar como o controlador se comporta na presença de distúrbios e ruídos, implementou-se um bloco de ruído branco limitado em frequência constante ao sistema do pêndulo, com uma potência de 10^{-6} .

Inicialmente, aplicou-se o ruído apenas na posição do carro e tomou-se como referência uma onda quadrada, mantendo-se o carro e o pêndulo em suas posições iniciais $x = 0$ m e $\theta = 0^\circ$ e em repouso. Conforme podemos ver na Figura 12, o controlador rastreia a posição de referência satisfatoriamente, com pequenas oscilações em torno da mesma. Além disso, o controlador é capaz de garantir que o pêndulo mantenha-se em sua posição invertida, com pequenas oscilações em torno da posição $\theta = 0^\circ$ e picos durante as mudanças de posição do carro de aproximadamente $\pm 15^\circ$.

Em uma segunda simulação, aplicou-se o ruído nas posições do carro e do pêndulo e tomou-se como referência uma onda quadrada, mantendo-se o carro em sua posição inicial $x = 0$ m e o pêndulo em uma posição inicial $\theta = 10^\circ$, com ambos em repouso. Nessa situação, a amplitude de oscilação do carro em relação à origem é mais perceptível. Entretanto, o controlador apresenta uma resposta satisfatória ao garantir a estabilidade do sistema, acompanhar a posição

de referência e garantir que o pêndulo mantenha-se em sua posição invertida, mesmo com pequenas oscilações em torno da posição $\theta = 0^\circ$ e picos durante as mudanças de posição do carro de aproximadamente $\pm 15^\circ$, conforme Figura 13.

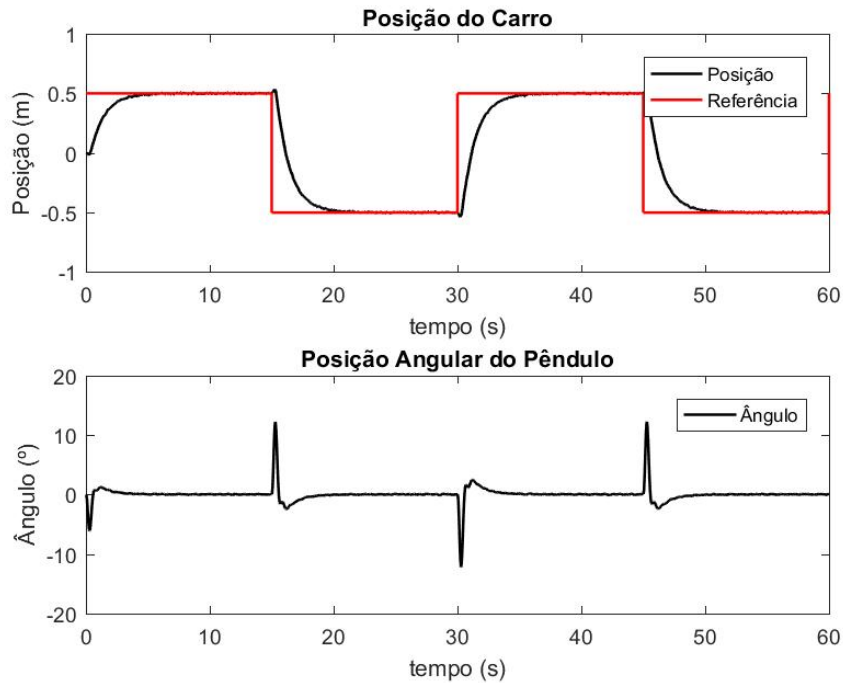


Figura 12 – Resposta sistema a um ruído na posição do carro

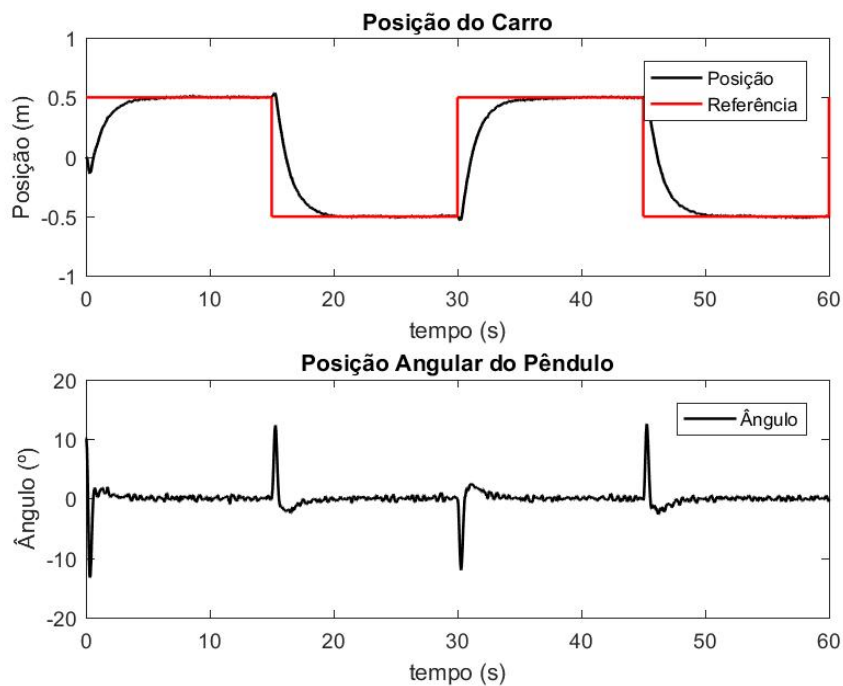


Figura 13 – Resposta do sistema a um ruído na posição do carro e na posição angular do pêndulo

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O estudo apresentado neste trabalho alcançou o objetivo de desenvolver uma lei de controle para o sistema carro-pêndulo proposto no Capítulo 3. O modelo matemático provou-se bastante coerente às expectativas de um sistema real, sugerindo em simulação a viabilidade dos controladores não lineares propostos.

Como observado nos resultados apresentados no Capítulo 5, as leis de controle projetadas foram capazes de fazer com que o sistema siga o sinal de referência para a posição do carro e garantir que o pêndulo se mantivesse em posição vertical, entretanto, o sistema começa a se tornar cada vez mais oscilante ao sofrer interferências externas, como distúrbios e ruídos. Como sugestão, a implementação de um controlador robusto pode ser estudada e aplicada, inclusive como forma de continuação desse trabalho.

Além disso, as diferenças entre ambientes de simulação e a realidade, não garantem a viabilização dos controladores na prática, fazendo com que, como validação final para o sistema de controle desenvolvido neste trabalho e sugestão para trabalhos futuros, a construção de um protótipo para testes em ambiente real seja o ideal.

REFERÊNCIAS

- ALBERTO, L. F. C. *Caracterização e estimativas da área de atração de sistemas dinâmicos não lineares*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006. Citado na página 39.
- AMBA, A. J. *Feedback linearization, sliding mode and swing up control for the inverted pendulum on a cart*. 2015. Citado 8 vezes nas páginas 21, 23, 25, 26, 32, 33, 39 e 41.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; HAINES, C. W. *Elementary differential equations and boundary value problems*. [S.l.]: Wiley New York, 1969. Citado na página 23.
- CHWIF, L.; MEDINA, A. C. *Modelagem e simulação de eventos discretos*. [S.l.]: Afonso C. Medina, 2006. Citado na página 34.
- MATIAS, T. K. Controle de direção de um automóvel de passeio utilizando linearização por realimentação. *Monografia-Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto*. 60p, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.
- OGATA, K. Engenharia de controle moderno. *Katsuhiko Ogata, 5th Ed. 801p*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 26.
- PEREIRA, M. da C. *Controle de posição de um pêndulo planar usando rodas de reação*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2011. Citado na página 21.
- RIFFORD, L. *Geometric control and applications*. [S.l.]: Université Nice Sophia Antipolis, 2014. Citado na página 28.
- ROSA, R. M. *Modelagens newtoniana, lagrangeana e hamiltoniana de sistemas mecânicos discretos*. [S.l.]: UFRJ, Rio de Janeiro, 2008. Citado na página 30.
- SILVA, G. V. M. da. Controle não linear. *Escola superior de tecnologia de Setúbal*, 2006. Citado na página 23.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Pearson, 1991. Citado 4 vezes nas páginas 21, 23, 24 e 25.
- STIMAC, A. K. *Standup and stabilization of the inverted pendulum*. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 21, 29 e 32.
- VILLAR, A. S. *Notas de aula de Mecânica Classica*. 2014. 459 p. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

Apêndices

APÊNDICE A – CÓDIGOS: SETUP DO SISTEMA

```

1  % SETUP
2  clear
3  % PARAMETROS DO SISTEMA
4  m = 0.16985;      % massa do pendulo (kg)
5  L = 0.478;        % comprimento da haste
6  l = L/2;          % distancia do ponto de conexao do pendulo ao centro ...
                      % de massa (m)
7  J = 1/12*m*L^2;   % momento de inercia do pendulo (kg.m^2)
8  M = 0.7374-m;     % massa do carrinho (kg)
9  g = 9.81;         % aceleracao da gravidade (kg/m^2)
10 Beq = 5.4;        % coeficiente de amortecimento equivalente do carro ...
                      % (N.s/m)
11 Bp = 2.4*10^-3;   % constante de amortecimento do pendulo (N.s.m/rad)
12
13 % GANHOS DO ALOCAMENTO DE POLOS
14 k3 = 90;
15 k4 = 16;
16
17 % CONSTANTES DE LYAPUNOV
18 c1 = 10;
19 c2 = 1;
20 c3 = 15;
21
22 % DADOS DO MOTOR
23 Ra = 34.2387;      % Resistencia de armadura
24 La = 0.0363;       % Indutancia de armadura
25 Kg = 0.0122;       % Constante de forza contra eletro-motriz
26 Kt = Kg;           % Constante de torque
27 Bm = 9.6319e-7;    % Coeficiente de atrito
28 Jm = 3.5428e-7;    % Momento de inercia do motor
29 Keng = 48;         % Razao de transmissao da engrenagem
30 diam = 6.8e-2;     % Diametro da roda
31 raio = diam/2;     % Raio da roda

```


APÊNDICE B – CÓDIGOS: LINEARIZAÇÃO JACOBIANA

```

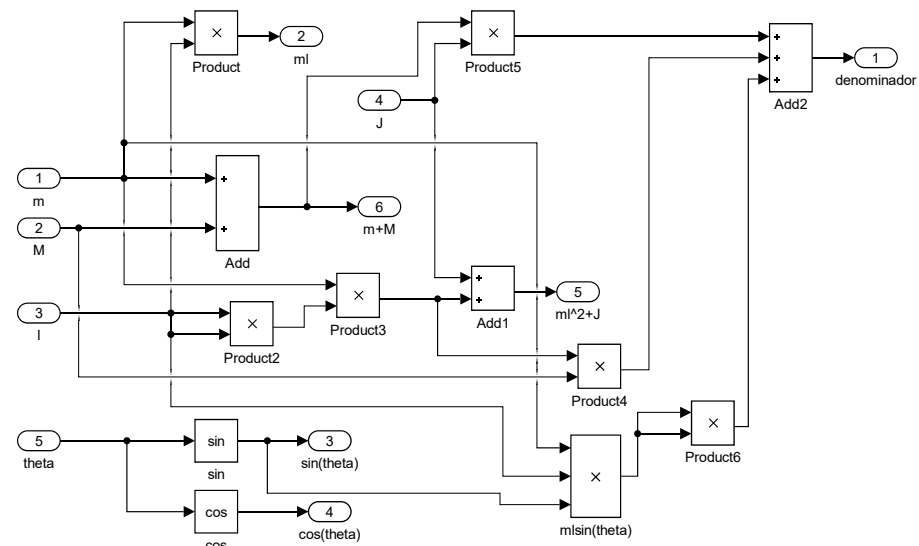
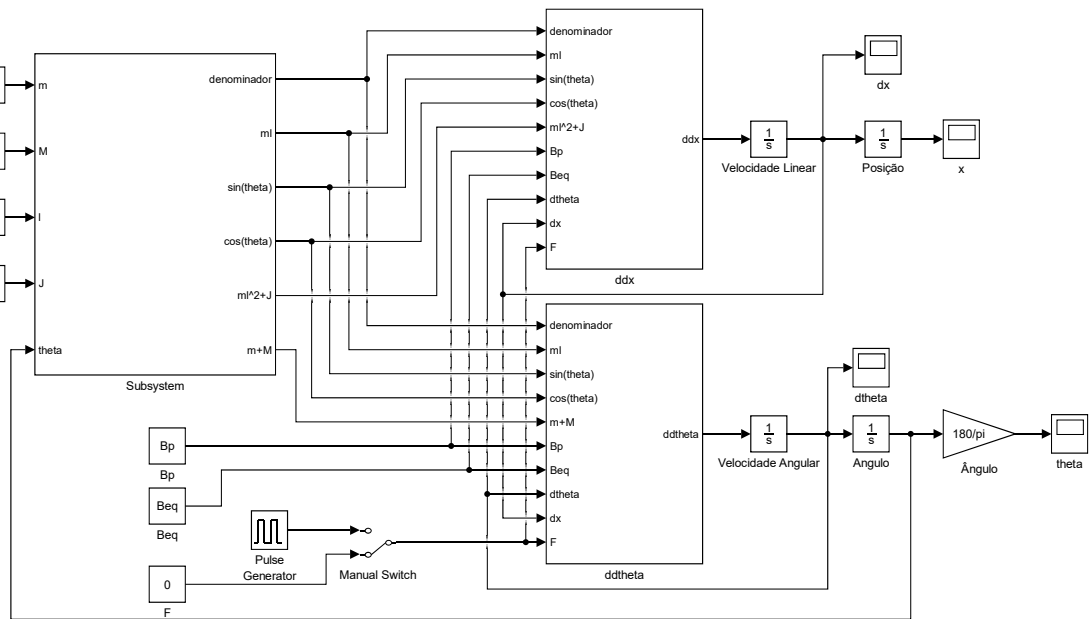
1 % LINEARIZACAO JACOBIANA
2
3 % PARAMETROS DO SISTEMA
4 Setup
5
6 % VARIAVEIS SIMBOLICAS
7 syms x1 x2 x3 x4 alpha beta gama m M g Bp Beq
8
9 % DEFINICAO DAS MATRIZES DO SISTEMA
10 F = [x2,
11      -(beta*(alpha*sin(x3)*x4^2 + Beq*x2) + alpha*cos(x3)*(Bp*x4 - ...
12          alpha*g*sin(x3)))/(alpha^2*sin(x3)^2 + gama),
13      x4,
14      -(M + m)*(Bp*x4 - alpha*g*sin(x3)) + alpha*cos(x3)*(- ...
15          alpha*sin(x3)*x4^2 + Beq*x2))/(alpha^2*sin(x3)^2 + gama)];
16
17 G = [0,
18      beta/(alpha^2*sin(x3)^2 + gama),
19      0
20      alpha*cos(x3)/(alpha^2*sin(x3)^2 + gama)];
21
22 % CALCULO DA MATRIZ JACOBIANA
23 Jac = jacobian(F,[x1,x2,x3,x4])
24
25 % MATRIZ JACOBIANA APLICADA AO PONTO DE EQUILIBRIO
26 alpha = m*l; beta = m*l^2+J; gama = m*M*l^2 + (m+M)*J;
27 x1 = 0; x2 = 0; x3 = 0; x4 = 0;
28 Jac_linear = vpa(subs(Jac),3)
29 Bx = vpa(subs(G),3)
30
31 % LQR
32 Az = [0 1 0 0; 0 -5.74 2.4 -0.00773; 0 0 0 1; 0 -17.4 37 -0.119];
33 Bz = [0; 1.06; 0; 3.22];
34 Q = diag([1;1;1;1]);
35 R = 1;
36 Klqr = lqr(Az,Bz,Q,R)

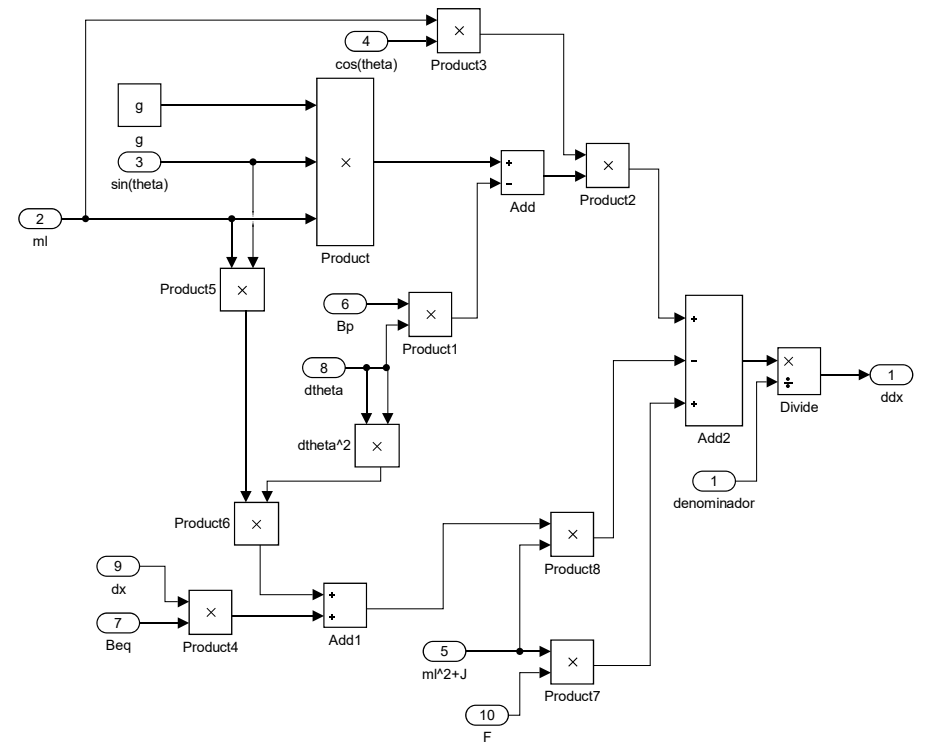
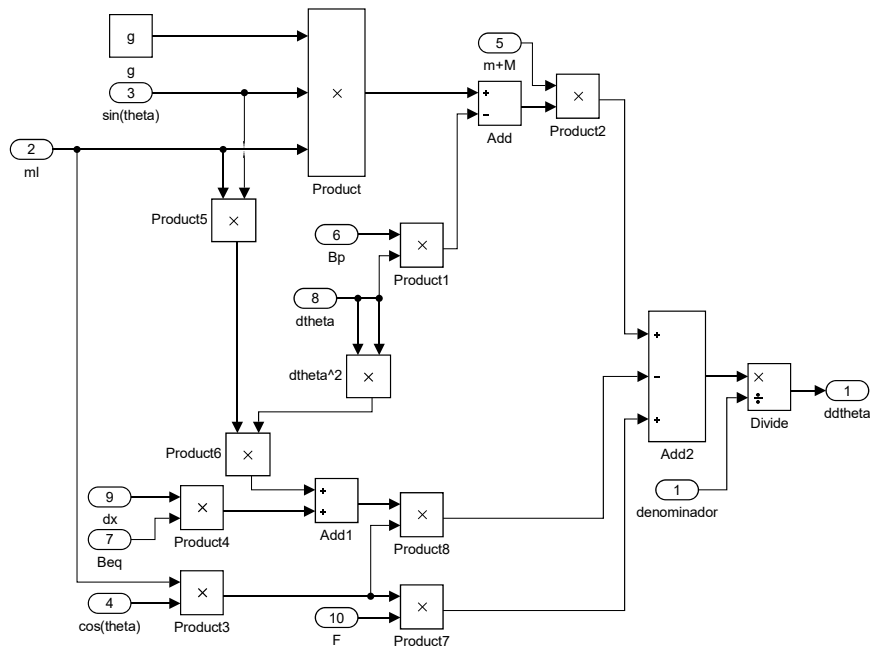
```


APÊNDICE C – CÓDIGOS: CONTROLADOR LQR DOS MOTORES

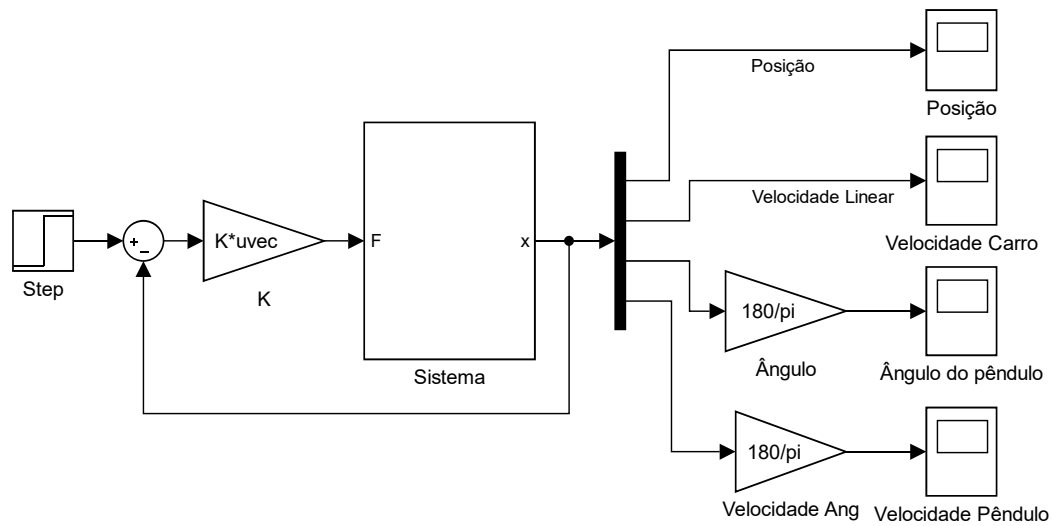
```
1 % LQR MOTORES
2 clear
3 % PARAMETROS DO SISTEMA
4 Setup
5
6 % MATRIZES PARA O LQR
7 A = [-Bm/Jm Kt/Jm; -Kg/La -Ra/La];
8 B = [0; 1/La];
9 C = [0 Kt];
10 D = 0;
11
12 % LQR
13 A1 = [0 C; zeros(2,1) A];
14 B1 = [0; B];
15 Q = diag([1e8 1e-5 100]);
16 R = 1e-2;
17 Kmotor = lqr(A1, B1, Q, R);
18 K1m = Kmotor(1);
19 K2m = Kmotor(2:3);
```

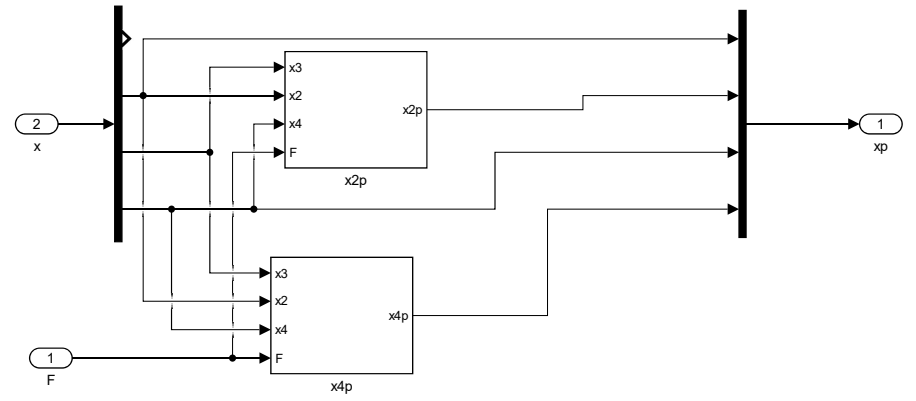
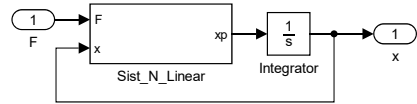

APÊNDICE D – MODELO: VALIDAÇÃO DO SISTEMA

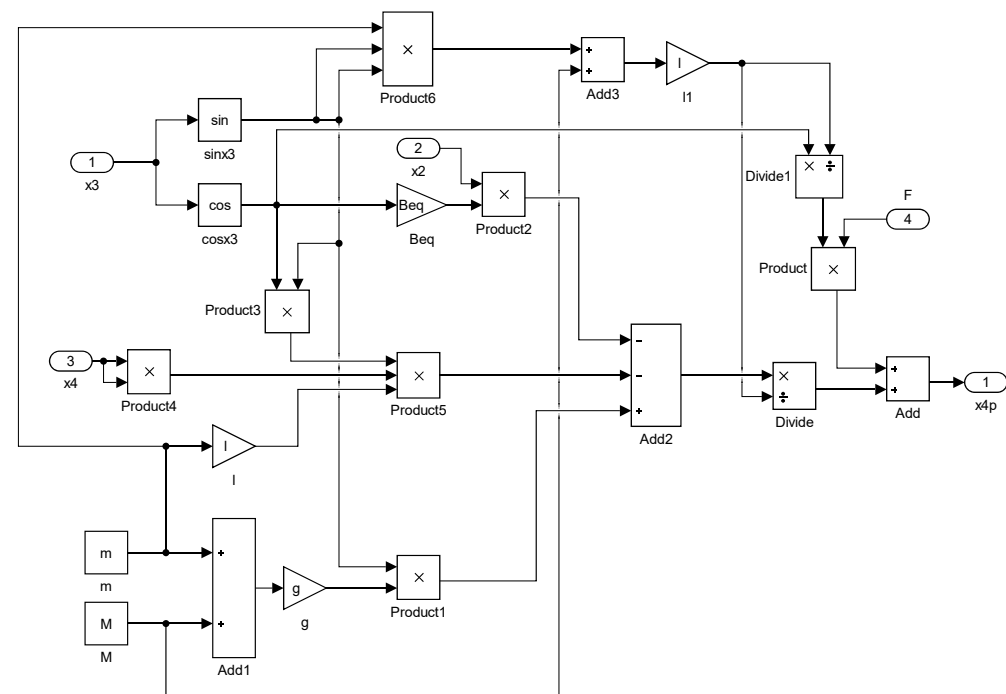
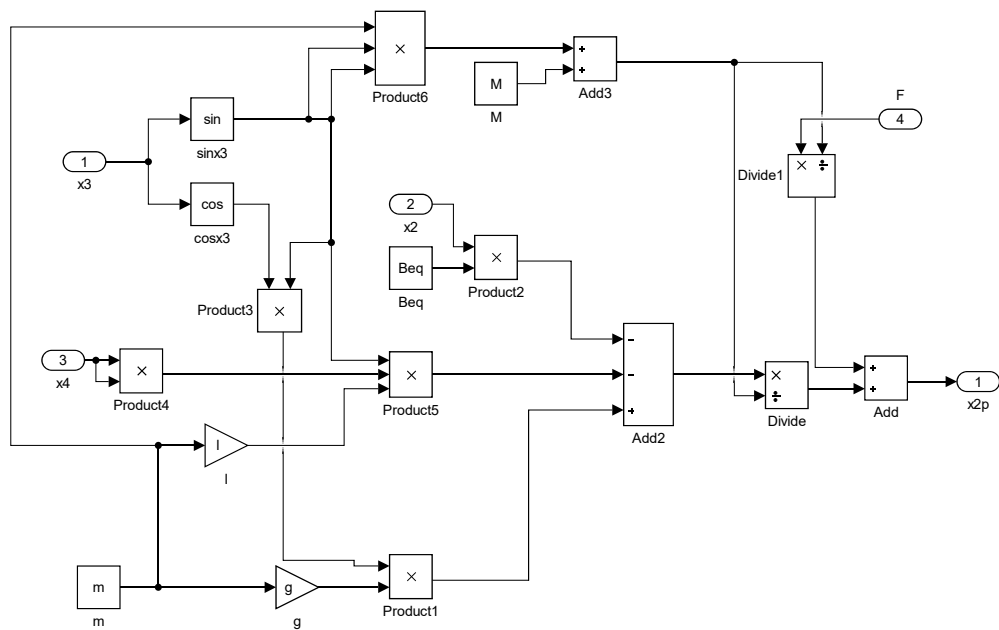




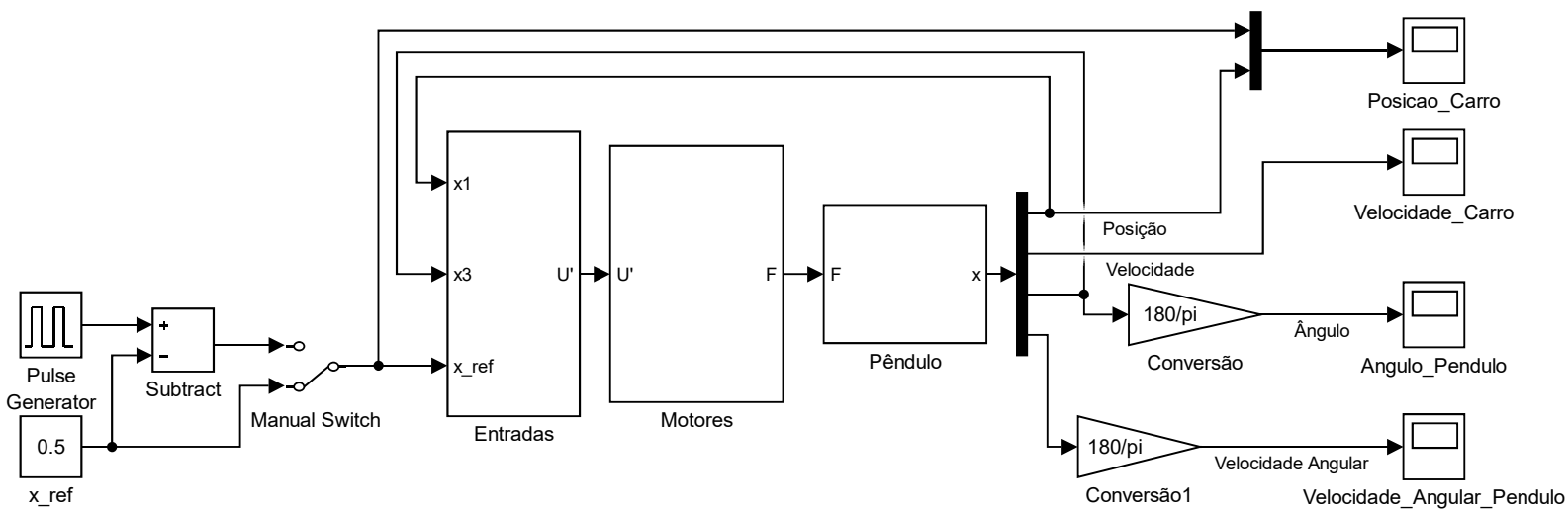
APÊNDICE E – MODELO: LINEARIZAÇÃO JACOBIANA DO PÊNDULO INVERTIDO



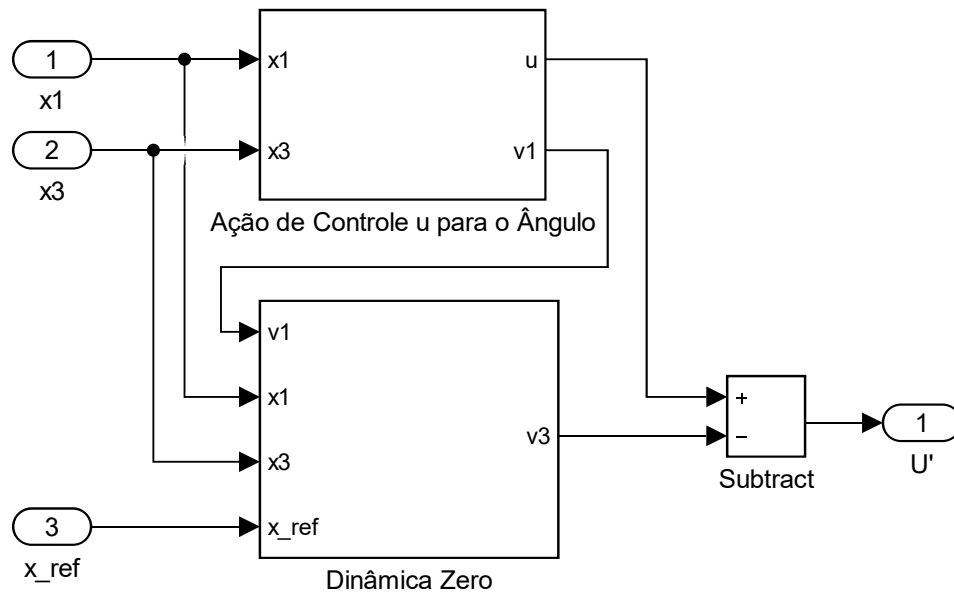


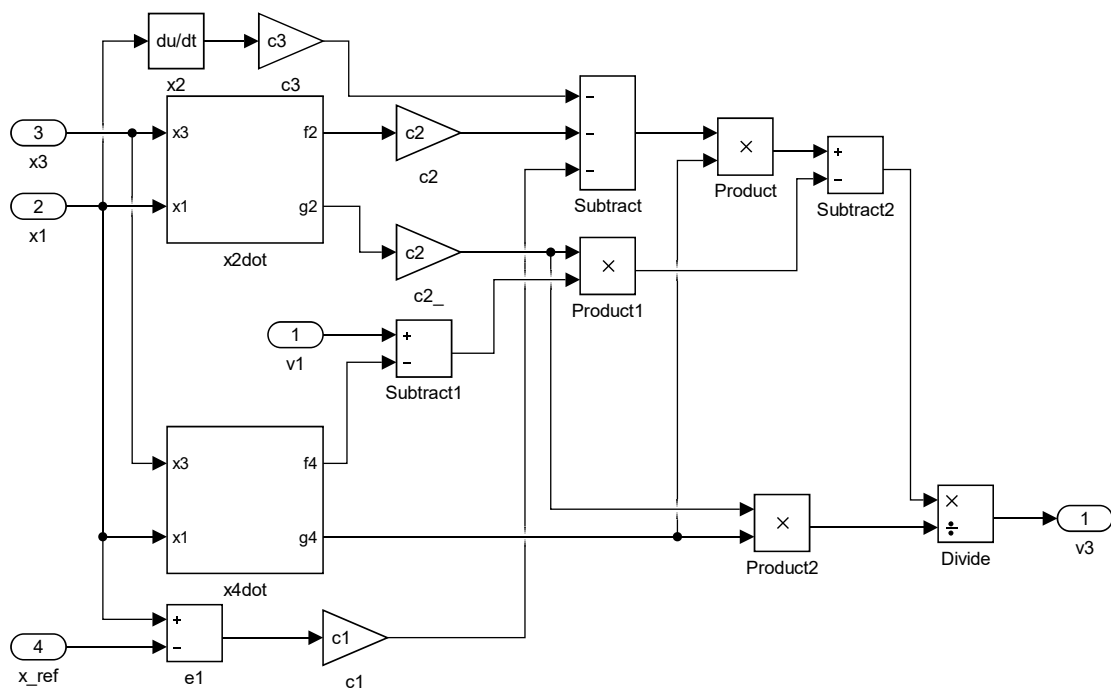
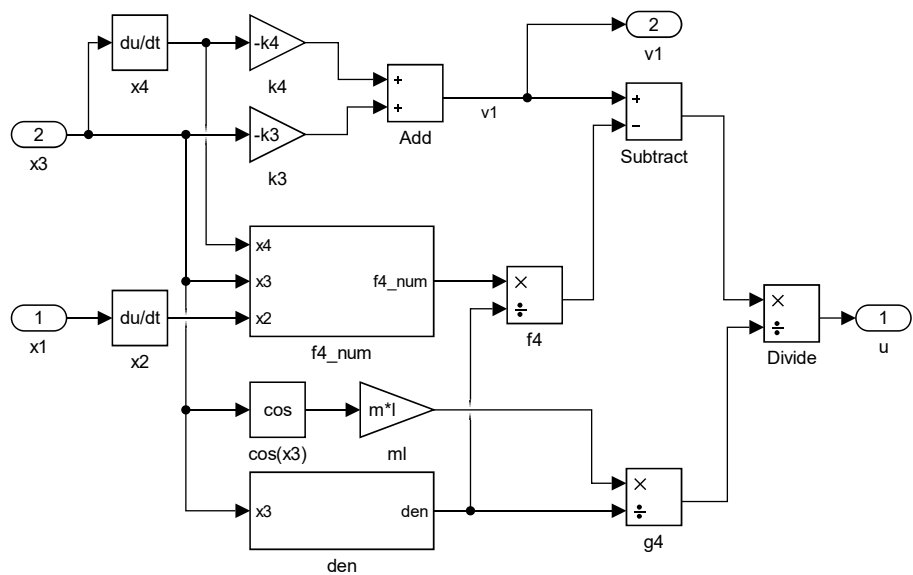


**APÊNDICE F – MODELO: SISTEMA DE LINEARIZAÇÃO DO
PÊNDULO INVERTIDO**

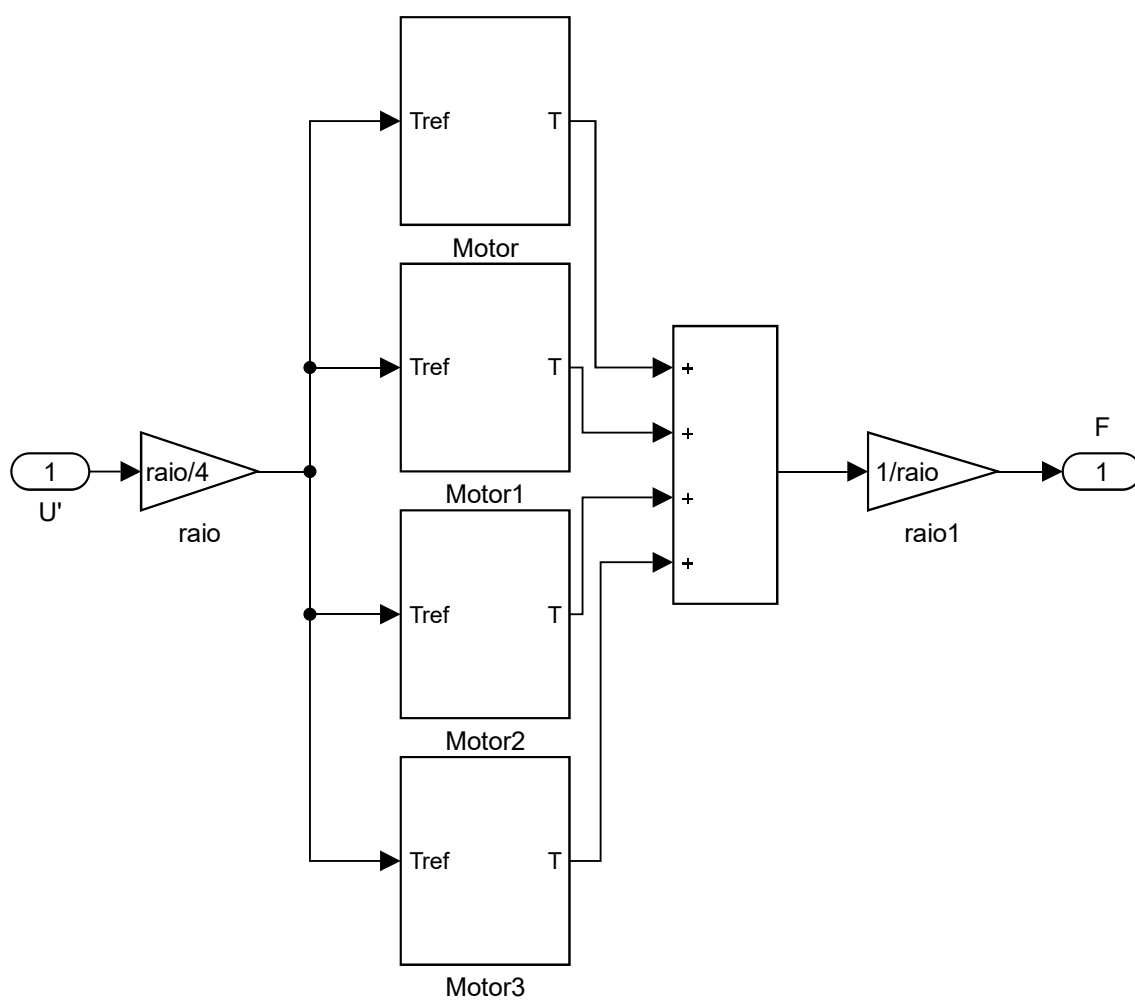


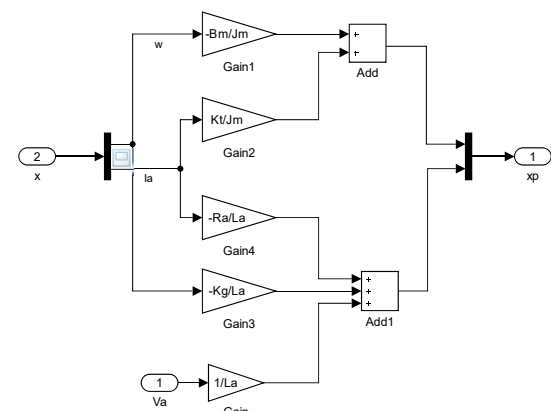
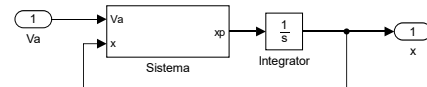
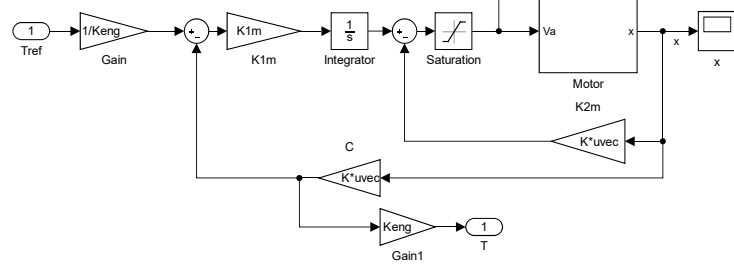
APÊNDICE G – MODELO: LEIS DE CONTROLE LINEARIZANTE



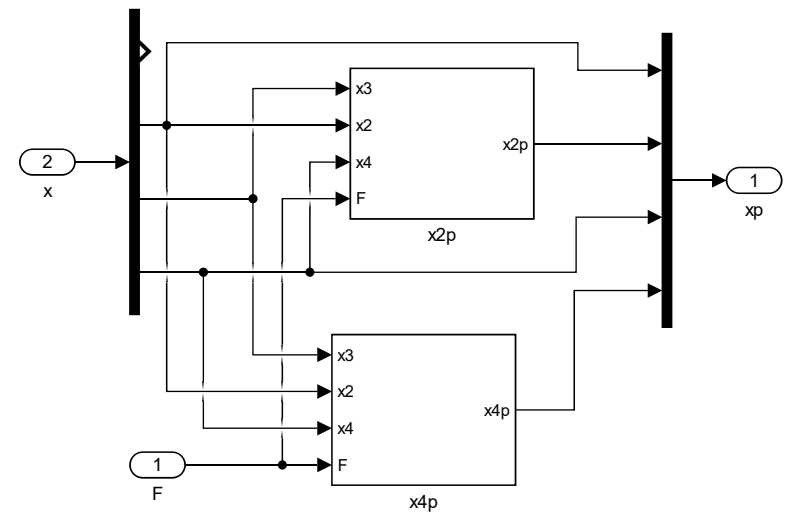
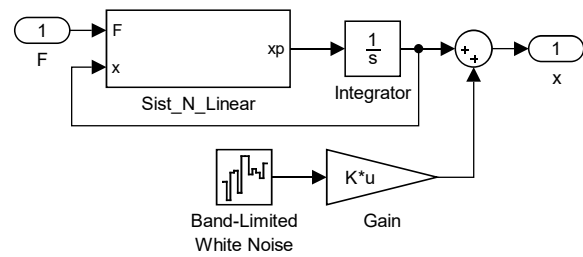


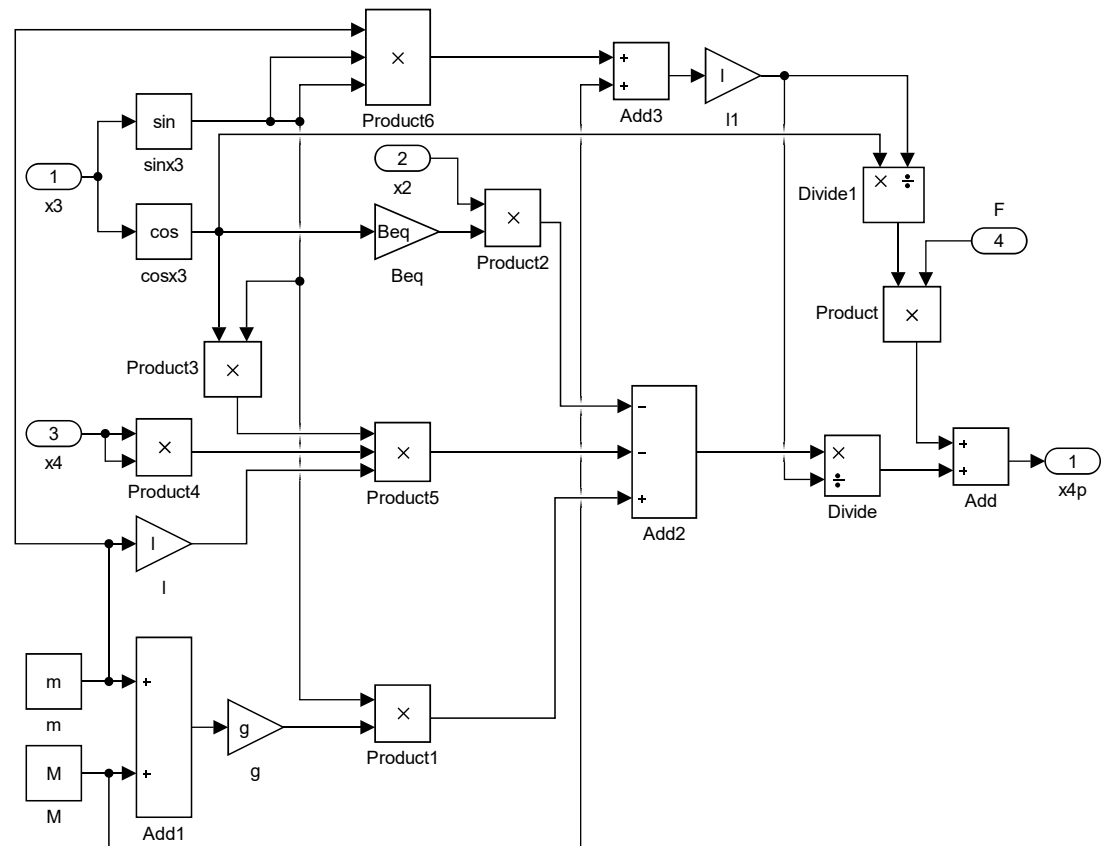
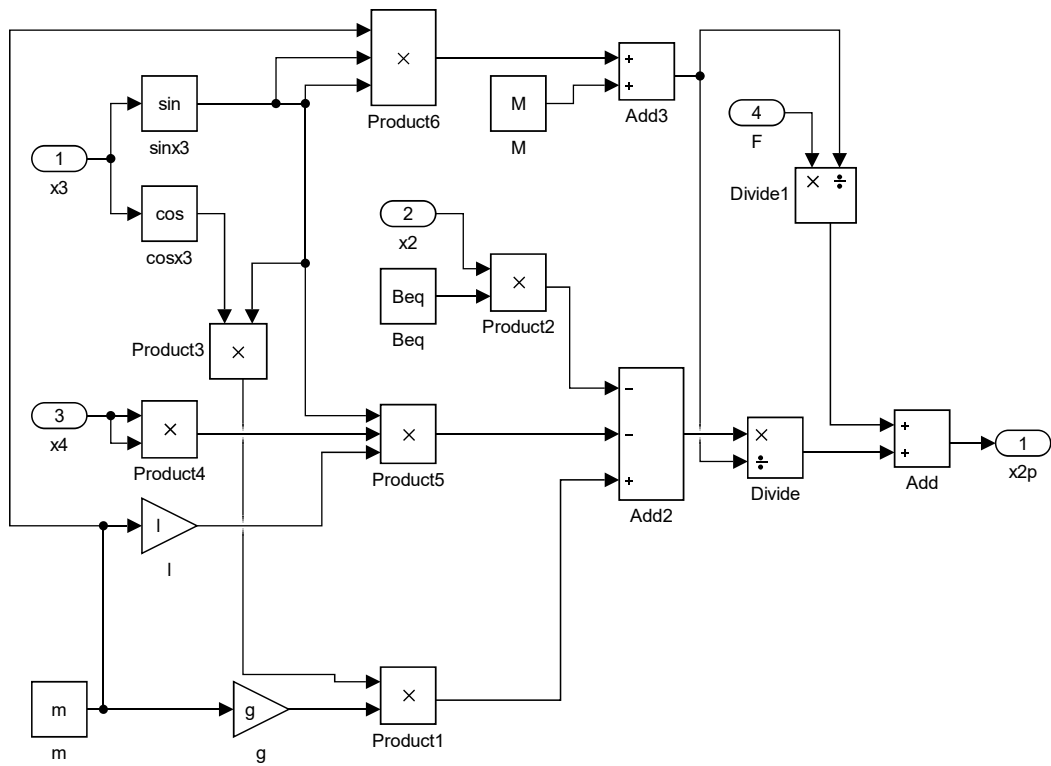
APÊNDICE H – MODELO: MOTORES



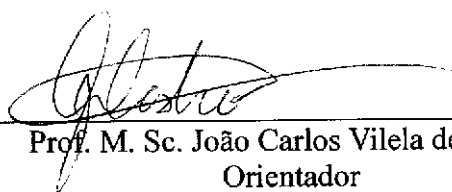


APÊNDICE I – MODELO: PÊNDULO INVERTIDO





Certifico que o aluno RAFAEL GUSTAVO ALVES, autor do trabalho de conclusão de curso intitulado “CONTROLE DE UM SISTEMA CARRO-PÊNDULO UTILIZANDO TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO”, efetuou as correções sugeridas pela banca examinadora e que estou de acordo com a versão final do trabalho.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'J. Castro', is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

Prof. M. Sc. João Carlos Vilela de Castro
Orientador

Ouro Preto, 22 de janeiro de 2019.