



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

ADRIANO RODRIGUES DE PAULA

MODELAGEM E CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE DUAS RODAS

FORTALEZA

2014

ADRIANO RODRIGUES DE PAULA

MODELAGEM E CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE DUAS RODAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de graduado em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Controle.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira.

Coorientador: Prof. Dr. Bismark Claure Torrico.

FORTALEZA

2014

Página reservada para ficha catalográfica que deve ser confeccionada após apresentação e alterações sugeridas pela banca examinadora.

Para solicitar a ficha catalográfica de seu trabalho, acesse o site: www.biblioteca.ufc.br, clique no banner Catalogação na Publicação (Solicitação de ficha catalográfica)

ADRIANO RODRIGUES DE PAULA

MODELAGEM E CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO SOBRE DUAS RODAS

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao Departamento de Engenharia
Elétrica da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Elétrica. Área de
concentração: Controle.

Aprovada em: ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Bismark Claure Torrico
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Carlos Teles Campos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Eng. René Descartes Olímpio Pereira
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica /UFC

A Deus.

Aos meus pais, Antônio e Zuleide.

AGRADECIMENTO

À minha família, por ser minha fortaleza me apoiando durante toda a elaboração desse trabalho.

Ao Instituto de Idiomas Santa Ifigência LTDA – Minds Fortaleza pelo apoio intelectual e financeiro ao decorrer de todas as etapas desse projeto.

Ao Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira pela excelente orientação, pelo incentivo e tempo disponibilizado para ajudar na produção do texto.

Ao Prof. Dr. Bismark Claure Torrico por ter me coorientado e ensinado em meus primeiros passos sobre teoria de controle.

Ao professor Dr. José Carlos Teles Campos e ao Engenheiro René Descartes Olímpio Pereira participante da banca examinadora pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos demais professores do departamento de engenharia elétrica que colaboraram imensamente com minha formação acadêmica.

Aos inúmeros colegas do curso de graduação que me deram apoio durante o curso e que me inspiraram a continuar estudando.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível.” São Francisco de Assis

RESUMO

Este trabalho apresenta a modelagem e controle por simulação de um pêndulo invertido sobre duas rodas motorizadas, que é um sistema instável em malha aberta. O usuário que comanda o sistema é quem define referências de velocidade e de direção. O trabalho descreve as etapas da modelagem da planta real, do projeto de controle e da avaliação do desempenho do sistema em malha fechada. A modelagem presente nesse trabalho considera o motor de corrente contínua como uma planta linear e restringe a faixa de operação do pêndulo invertido para tratar o sistema todo como uma planta linear. Essa consideração permite o projeto de controladores lineares a parâmetros fixos. São apresentadas duas técnicas de controle discreto: o Regulador Quadrático Linear (também conhecida como LQR) com ação integral e o Projeto por Alocação de Polos. A topologia de controle LQR apresentou bons resultados para essa planta não-linear com uma estreita faixa de operação e o controlador por Alocação de Polos desempenha um papel muito importante para garantir que exista uma boa interface entre o controle do ângulo e o sinal mandado para os motores. O projeto conclui que os controladores fixos lineares utilizados são suficientes para controlar o sistema instável proposto e que haveriam melhoras ao controlar o modelo fora da faixa de linearização por meio de controle adaptativo.

Palavras-chave: Pêndulo invertido. Controle discreto. Alocação de polos. Regulador quadrático linear. Robô móvel com rodas.

ABSTRACT

This work presents the modelling and design by simulation of a two wheeled inverted pendulum control system, which is originally open-loop unstable. A user who sets references of speed and direction controls this system. The work describes the stages of modeling the real plant, the control design and performance evaluation of the closed loop system. The modeling process present in this study considers that the DC motor is a linear plant and restricts the operating range of the inverted pendulum for treating the entire system as a linear plant. This consideration allows the design of fixed linear controllers. The paragraph of this paper presents two techniques for discrete-time control systems, these are: Linear Quadratic Regulator (also known as LQR) with an integral action and the design by Pole Placement. The LQR control topology provides good results for this nonlinear plant with a narrow band of operation and the Pole Placement Controller plays a very important role by ensuring that there is a good interface between the angle-position control and the signal sent to the direct current motors. The project concludes that the fixed linear controllers designed are sufficient to control the proposed system unstable and that the project can improve by treading the model outside of the linearized region by means of adaptive controllers.

Keywords: Inverted pendulum. Discrete-time control systems. Pole placement. Linear quadratic regulator. Wheeled mobile robot.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – JOE. Pêndulo invertido sobre duas rodas (PIDR)	13
Figura 2 – PIDR utilizado como transporte alternativo.....	14
Figura 3 – Eixos de referência para a modelagem do PIDR.	16
Figura 4 – Modelagem do motor CC em função de suas constantes elétricas e mecânicas ...	18
Figura 5 – Diagrama de corpo livre da roda direita.....	20
Figura 6 – Diagrama de corpo livre da haste do PIDR.....	23
Figura 7 – Resposta ao degrau do motor em malha aberta. Degrau de 6V	28
Figura 8 – Resposta ao degrau em malha aberta dos estados do PIDR.....	29
Figura 9 – Comparação entre a resposta do modelo e os dados da planta real	30
Figura 10 – Sistema controlado por LQR com ação integral	35
Figura 11 – Esquemático em blocos da planta do PIDR no Simulink	38
Figura 12 – Variáveis de estado do PIDR sob degrau de posição.....	39
Figura 13 – Variáveis de estado do PIDR sob rampa de posição.....	40
Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema de controle dos motores CC no Simulink	46
Figura 15 – Resposta ao degrau do motor controlado	47
Figura 16 – Diagrama em blocos do sistema de controle do PIDR simulado	49
Figura 17 – Variáveis de estado do sistema unificado sob degrau de posição.....	50
Figura 18 – Variáveis de estado do sistema unificado sob rampa de posição.....	51
Figura 19 – Velocidade do sistema unificado sob rampa de posição e ação de controle	52
Figura 20 – Variáveis de estado e sinal de controle do sistema unificado sob perturbação em 5 segundos no sinal de controle.....	53
Figura 21 – Variáveis do sistema unificado sob rampa de posição, perturbação em 20s	54
Figura 22 – Velocidade do sistema unificado sob rampa de posição, perturbação em 20s	55
Figura 23 – Motor, roda e caixa de redução.	57
Figura 24 – Magnetômetro, acelerômetro e sensor de corrente.	58
Figura 25 – Arduíno Mega 2560	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PIDR	Pêndulo Invertido sobre Duas Rodas.
LQR	Regulador quadrático linear (do inglês <i>Linear quadratic regulator</i>)
Motor CC	Motor de corrente contínua

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA	16
2.1	Modelagem matemática do sistema físico do PIDR	17
<i>2.1.1</i>	<i>Motores.....</i>	<i>18</i>
<i>2.1.2</i>	<i>Roda direita.....</i>	<i>20</i>
<i>2.1.3</i>	<i>Roda esquerda.....</i>	<i>21</i>
<i>2.1.4</i>	<i>Ambas as rodas</i>	<i>22</i>
<i>2.1.5</i>	<i>Haste – Forças horizontais.....</i>	<i>22</i>
<i>2.1.6</i>	<i>Haste – Forças Perpendiculares</i>	<i>23</i>
<i>2.1.7</i>	<i>Haste – Momentos</i>	<i>24</i>
<i>2.1.8</i>	<i>Sistema completo</i>	<i>24</i>
2.2	Modelagem matemática em espaço de estados	25
2.3	Modelagem Experimental do motor CC	28
2.4	Simulações dos modelos.....	29
3	PROJETO DOS CONTROLADORES.....	31
3.1	Sobre o controlador LQR.....	31
<i>3.1.1</i>	<i>Sobre o LQR com ação integral.....</i>	<i>32</i>
3.2	Controle de ângulo e posição.....	33
<i>3.2.1</i>	<i>Critérios de Projeto</i>	<i>33</i>
<i>3.2.2</i>	<i>Projeto</i>	<i>35</i>
<i>3.2.3</i>	<i>Simulações e Resultados.....</i>	<i>38</i>
3.3	Sobre o controlador por Alocação de Polos	41
3.4	Controle de velocidade do motor CC	41
<i>3.4.1</i>	<i>Critérios de Projeto</i>	<i>42</i>
<i>3.4.2</i>	<i>Projeto por Alocação de Polos</i>	<i>43</i>
<i>3.4.3</i>	<i>Simulações e Resultados.....</i>	<i>46</i>
4	CONTROLE DO PIDR	48
4.1	Sistema Unificado.....	48
4.2	Simulações e Resultados	48
5	Montagem de um protótipo de pidr	57
6	CONCLUSÕES	59

REFERÊNCIAS	60
--------------------------	-----------

1 INTRODUÇÃO

O controle do pêndulo invertido é uma abordagem clássica na área de controle de sistemas. Sua aplicação pode ser observada durante o lançamento de foguetes ao espaço ou no controle de equilíbrio de robôs. Essa planta é caracterizada por uma forte não-linearidade e por sua instabilidade em malha aberta.

Os pêndulos invertidos existem em diversas configurações e suas modelagens matemáticas muitas vezes são flexíveis possibilitando o engenheiro de controle escolher entre desprezar ou considerar alguns fatores físicos e até mesmo escolher quais variáveis de estado a serem controladas.

Este trabalho se refere à configuração de um pêndulo invertido sobre duas rodas (PIDR), conforme ilustrado na Figura 1. O plano de rotação de cada roda é paralelo à trajetória do sistema, o que possibilita modificar a distribuição de torque entre as rodas para alterar a trajetória do sistema.

Figura 1 – JOE. Pêndulo invertido sobre duas rodas (PIDR)



Fonte: (GRASSER; D'ARRIGO; COLOMBI, 2002)

Através desse modelo também se desenvolveram produtos comerciais que são utilizados como meios de transporte urbano (Figura 2). Esse produto é bastante atrativo por ser movido a eletricidade e não ocupar muito espaço nas ruas ou calçadas ou até mesmo em casa.

Figura 2 – PIDR utilizado como transporte alternativo.



Fonte: Segway Inc® (2009) e Segway Events (2014)

Vários autores já trataram de controlar essa planta com controladores fixos lineares, tal como o trabalho de Grasser, d'Arrigo e Colombi (2002), onde foi utilizado um controlador por alocação de polos, e em Ooi (2003) foi utilizado um regulador quadrático linear. Seus resultados são expressivos e fazem parte dos primeiros sistemas de controle desenvolvidos para essa planta.

Encontra-se também na literatura controladores baseados em modelagens não-lineares dessa planta como a apresentada no trabalho de Ha e Lee (2012). Esse trabalho citado apresenta uma modelagem apresentando os estados em equações de Lagrange e alega que controladores não-lineares possuem a vantagem de ter bom desempenho garantido mesmo longe da condição de equilíbrio.

Uma outra abordagem da modelagem não-linear que tem sido desenvolvida para o controle do PIDR é a baseada em lógica nebulosa, ou modelagem *fuzzy*. O controle *fuzzy* desta planta consta nas publicações de Huang, Wang e Chiu (2011) e Wu, Zhang e Wang (2012).

Para esse trabalho serão utilizados controladores discretos fixos lineares. Um deles será um controlador ótimo e outro será um controlador por alocação de polos. Para superar as dificuldades de não-linearidade do PIDR aplicam-se no seguinte projeto simplificações por meio de linearizações e escolhas de pontos de operações que tornem o controle mais adequado

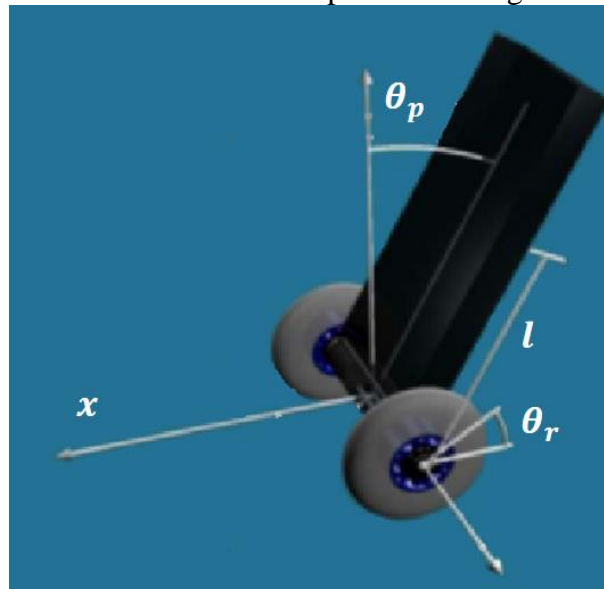
à planta não-linear. Outras medidas também podem ser tomadas como o desenvolvimento de um controlador adaptativo.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

O Pêndulo Invertido é frequentemente modelado de maneira que a haste está presa a um carrinho. Sob essas condições consegue-se facilmente aferir o ângulo que a haste está em relação à superfície plana de contato com o carrinho. Sua modelagem matemática pode ser conferida em (OGATA, 1994).

Nesse trabalho é considerada uma variação do modelo tradicional do pêndulo invertido, o Pêndulo Invertido sobre Duas Rodas (PIDR), ilustrado na Figura 3. Esse modelo não necessita da presença do carrinho entre o chão e a haste do pêndulo. Deseja-se que o modelo proposto possua como uma de suas referências o vetor de aceleração da gravidade (\vec{g}). Sendo a direção e o sentido de \vec{g} conhecidos, pode-se corrigir o ângulo θ sempre em relação à gravidade garantindo que a haste permaneça na posição vertical em cima de planos inclinados em relação à \vec{g} .

Figura 3 – Eixos de referência para a modelagem do PIDR.



Fonte: (MORALES; PLAZAS; CÓMBITA, 2012)

Da planta da Figura 3 são controlados a posição (x) e o ângulo (θ_p) entre a direção do vetor gravidade e o eixo da haste projetado sobre a trajetória de suas rodas. Para controlar esses parâmetros serão observadas a velocidade do motor (v) e o ângulo (θ_p). O desvio de trajetória será dado por um esquema de direção diferencial que faz a redistribuição do comando de velocidade entre os motores.

As leituras de velocidade podem ser integradas matematicamente para obter-se o valor da posição. Essa integração ocasiona pequenos erros em regime, porém o real objetivo desse modelo é ser controlado indiretamente em velocidade. O controle de velocidade é obtido por um sinal em rampa de posição na referência do sistema. O controlador não terá como prioridade controlar o erro de segmento à rampa de posição, pois o PIDR em questão deve ser futuramente comandado por um usuário que o mantenha sob sua supervisão visual, o controle de posição será facilmente corrigido por seu usuário. Logo, qualquer erro, se tratando de posição, em regime para seguimento de rampa serão considerados normais, bem como pequenos erros para rejeitar perturbações.

Adota-se para o seguinte modelo de PIDR a presença de um sensor de ângulo no topo da haste e *encoders* no eixo de cada um dos motores. O sensor de ângulo é responsável por ler a inclinação definida por θ e reconhecer a direção para a qual a haste está se inclinando. O *encoder* é um sensor que a partir de intervalos entre pulsos realiza a medição de velocidade e posição. O *encoder* também pode ser sensível ao sentido do movimento e isso é importante para garantir que os motores tenham liberdade de girar em ambos os sentidos. Por meio das leituras destes sensores têm-se acesso às variáveis de estado x , \dot{x} e θ e, por fim, às equações matemáticas que descrevem as leis de movimentação do PIDR.

2.1 Modelagem matemática do sistema físico do PIDR

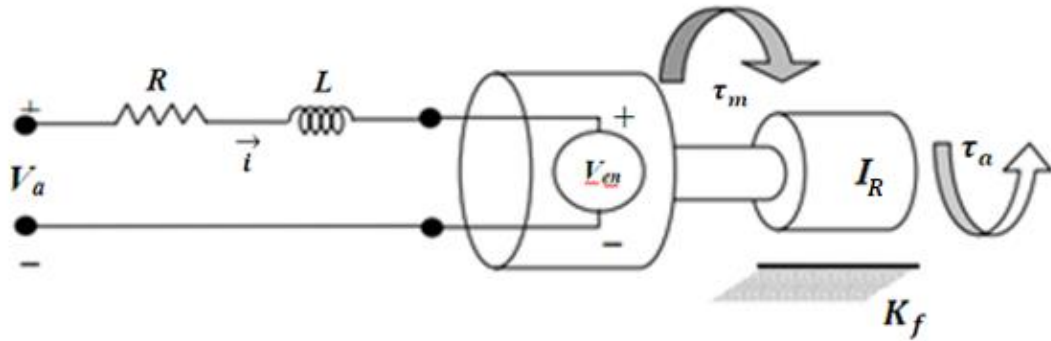
Durante a modelagem do sistema físico o sistema será decomposto e analisado em partes separadas. No decorrer dos cálculos o sistema como um todo será progressivamente descrito. A estrutura do PIDR em questão será dividida em motores CC (corrente contínua), rodas (direita e esquerda) e haste. Este é um procedimento utilizado por Ooi (2003) bastante didático que pode ser encontrado.

Essa etapa do projeto desempenha um papel muito importante para a aplicação prática do sistema. A modelagem matemática deve ser fiel à resposta real do sistema para que o controlador atue como o esperado. Uma modelagem matemática mal feita pode desestabilizar o sistema, principalmente no caso do PIDR, que já é naturalmente instável. Então, deve-se ponderar as considerações de projetos a serem feitas com a finalidade de simplificar o modelo, evitando-se reduzir demais a sua fidelidade à planta real.

2.1.1 Motores

Considere um motor CC com uma carga de inércia não desprezível acoplada em seu eixo, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Modelagem do motor CC em função de suas constantes elétricas e mecânicas



Fonte: Adaptado de (OOI, 2003).

Onde o torque mecânico τ_m e a força contraeletromotriz V_{en} são respectivamente definidos pelas equações (1) e (2):

$$\tau_m = k_m i \quad (1)$$

$$V_{en} = k_e \dot{\theta}_R \quad (2)$$

A partir da equação (1) percebe-se que existe uma relação direta entre corrente e torque nos terminais do motor através da constante de proporcionalidade k_m . A equação (2) revela uma relação direta entre a tensão contra eletromotriz e a velocidade do eixo do motor através da constante k_e . Essas constantes são parâmetros construtivos do motor CC e são normalmente fornecidas pelo fabricante do motor.

Pela lei das tensões de Kirchoff pode-se estabelecer uma relação entre as tensões internas ao circuito do motor CC considerando-se separadamente cada componente de tensão. Para o sistema descrito na Figura 4 pode-se estabelecer que:

$$V_a - Ri - L \frac{di}{dt} - V_{en} = 0 \quad (3)$$

Observando-se a Figura 4, verifica-se que após a transformação eletromecânica o motor é encarregado de girar uma carga (a roda), a qual gera um torque τ_a contrário ao torque do motor. Em um sistema real, as perdas rotacionais podem ser modeladas por meio de um

coeficiente k_f . Para modelar a parte mecânica rotacional do sistema faz-se uso da lei de movimento de Newton que compara cada componente de momento rotacional em torno do eixo da roda com o produto entre o momento de inércia do rotor I_R e a aceleração angular $\ddot{\theta}_R$ do mesmo.

$$\Sigma M_e = I_R \ddot{\theta}_R$$

$$\tau_m - k_f \omega - \tau_a = I_R \ddot{\theta}_R \quad (4)$$

As equações (3) e (4) podem ser reescritas de maneira a explicitar os termos diferenciais da seguinte forma:

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_a}{L} - \frac{Ri}{L} - \frac{V_{en}}{L} \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_m}{I_R} - \frac{k_f \dot{\theta}_R}{I_R} - \frac{\tau_a}{I_R} \quad (6)$$

Dadas as condições de operação do motor podem-se desprezar a indutância do motor e a fricção do estator. Fazendo-se $L = 0$ e $k_f = 0$ e aplicando-se outras equivalências as equações (5) e (6) simplificam-se para:

$$i = \frac{V_a}{R} - \frac{V_{en}}{R}$$

$$i = \frac{V_a}{R} - \frac{k_e}{R} \dot{\theta}_R \quad (7)$$

$$\ddot{\theta}_R = \frac{\tau_m}{I_R} - \frac{\tau_a}{I_R}$$

$$\ddot{\theta}_R = \frac{k_m}{I_R} i - \frac{\tau_a}{I_R} \quad (8)$$

Logo, combinando-se (7) e (8) tem-se:

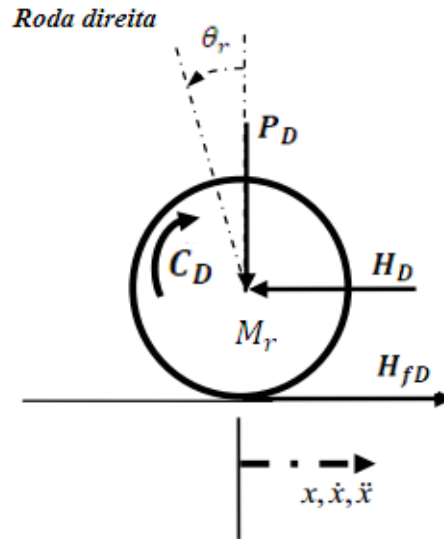
$$\ddot{\theta}_R = \frac{k_m}{I_R} \left(\frac{V_a}{R} - \frac{k_e}{R} \omega \right) - \frac{\tau_a}{I_R}$$

$$\ddot{\theta}_R = V_a \frac{k_m}{I_R R} - \omega \frac{k_m k_e}{I_R R} - \tau_a \frac{1}{I_R} \quad (9)$$

2.1.2 Roda direita

Uma roda gira sobre a influência do torque de um motor CC. O sistema se movimenta na direção x devido ao contato da roda com o chão que gera uma força de reação. O diagrama de corpo livre do modelo descrito pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 – Diagrama de corpo livre da roda direita



Fonte: (OOI, 2003)

Utilizando-se das leis de movimento definidas por Newton sabe-se que as forças horizontais atuantes sobre a roda direita são descritas da forma:

$$ma = \sum F_x$$

Logo, de acordo com a Figura 5 tem-se para a roda direita:

$$M_r \ddot{x} = H_{fD} - H_D \quad (10)$$

Sendo H_D e P_D as componentes horizontal e vertical, respectivamente, da força de reação entre o chassi e a roda direita e H_{fD} a força de reação entre a roda e o solo.

E a soma dos momentos em torno do eixo da roda é:

$$I a_{ang} = \sum M_o$$

Assim, pode-se explicitar a equação de momentos da seguinte forma:

$$I_r \ddot{\theta}_r = C_D - H_{fD} r \quad (11)$$

Sendo C_D a componente de torque aplicado pelo motor à roda direita.

Da equação (4) tem-se que:

$$\tau_m = I_R \ddot{\theta}_R + \tau_a \quad (12)$$

Reescrevendo-se a componente de torque aplicada à roda pelo motor e desenvolvendo-se:

$$\begin{aligned} C_D &= I_R \ddot{\theta}_R \\ C_D &= \tau_m - \tau_a \\ C_D &= \frac{k_m}{R} V_a - \frac{k_m k_e}{R} \dot{\theta}_r \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo-se (13) em (11):

$$\begin{aligned} I_r \ddot{\theta}_r &= \frac{k_m}{R} V_a - \frac{k_m k_e}{R} \dot{\theta}_r - H_{fD} \\ H_{fD} &= \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_r - \frac{I_r}{r} \ddot{\theta}_r \end{aligned} \quad (14)$$

Uma das equações fundamentais para a roda direita é encontrada através da combinação de (10) e (14):

$$M_r \ddot{x} = \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_r - \frac{I_r}{r} \ddot{\theta}_r - H_D \quad (15)$$

A equação (15) pode ser reescrita eliminando os elementos rotacionais por elementos de movimentação linear por meio das equivalências:

$$\ddot{\theta} \equiv \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$\dot{\theta} \equiv \frac{\dot{x}}{r}$$

Reescrevendo-se (15) encontra-se:

$$\begin{aligned} M_r \ddot{x} &= \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} - \frac{I_r}{r^2} \ddot{x} - H_D \\ \left(M_r + \frac{I_r}{r^2} \right) \ddot{x} &= \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} - H_D \end{aligned} \quad (16)$$

2.1.3 Roda esquerda

A modelagem matemática da influência dinâmica da roda esquerda no sistema é feita de maneira análoga ao apresentado para a roda direita na seção 2.1.2. Consideram-se por

simplicidade que a roda esquerda é construtivamente idêntica à roda direita e que estão em contato com um piso de mesmo material. Logo, a equação (16) da roda direita é reformulada para a roda esquerda:

$$\left(M_r + \frac{I_r}{r^2}\right)\ddot{x} = \frac{k_m}{Rr}V_a - \frac{k_mk_e}{Rr^2}\dot{x} - H_E \quad (17)$$

2.1.4 Ambas as rodas

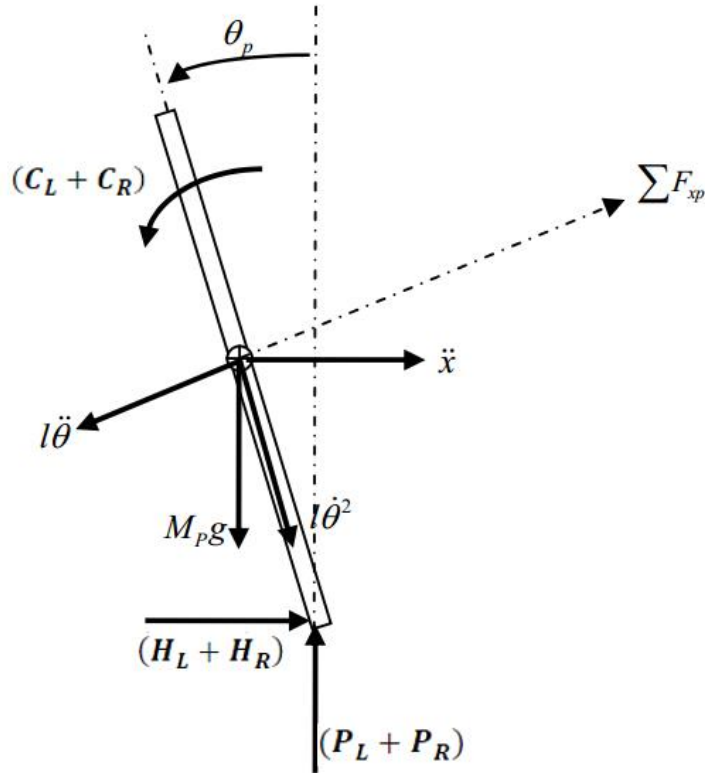
A equação resultante da duas rodas é obtida através da soma algébrica entre as equações (16) e (17):

$$2\left(M_r + \frac{I_r}{r^2}\right)\ddot{x} = 2\frac{k_m}{Rr}V_a - 2\frac{k_mk_e}{Rr^2}\dot{x} - (H_D + H_E) \quad (18)$$

2.1.5 Haste – Forças horizontais

A Figura 6 mostra o diagrama de corpo livre do pêndulo em função das forças horizontais, das forças perpendiculares e dos momentos atuantes na haste. As forças H_L, H_R, P_L e P_R são as componentes horizontais e perpendiculares da força de reação entre o chassi e cada roda.

Figura 6 – Diagrama de corpo livre da haste do PIDR



Fonte: (OOI, 2003)

Observa-se que a totalidade das forças obedece às leis de Newton segundo a seguinte expressão:

$$ma = \sum F_x$$

$$M_p \ddot{x} = (H_D + H_E) - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (19)$$

Isolando-se os termos referentes às forças horizontais das rodas:

$$(H_D + H_E) = M_p \ddot{x} + M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (20)$$

2.1.6 Haste – Forças Perpendiculares

As forças perpendiculares à haste do pêndulo invertido também estão descritas na Figura 6. O equacionamento dessas forças, segundo as leis de Newton, é dado por:

$$M_p \ddot{x} \cos \theta_p = \sum F_{xp}$$

$$M_p \ddot{x} \cos \theta_p = (H_D + H_E) \cos \theta_p + (P_D + P_E) \sin \theta_p - M_p g \sin \theta_p - M_p l \ddot{\theta}_p \quad (21)$$

2.1.7 Haste – Momentos

As leis de Newton também são aplicadas aos momentos angulares aplicados à haste. Como pode ser observado pela Figura 6, o centro de gravidade coincide com o centro geométrico da haste e o ponto de fixação é o ponto entre a haste e o eixo das rodas. O equacionamento dos momentos é dado por:

$$I a_{ang} = \sum M_o$$

$$I_p \ddot{\theta}_p = -(H_D + H_E)l \cos \theta_p - (P_D + P_E)l \sin \theta_p - (C_D + C_E) \quad (22)$$

2.1.8 Sistema completo

Todas as principais componentes de cada elemento do PIDR foram equacionadas separadamente e agora devem-se associá-las e resumi-las para obtermos apenas um sistema com todas essas componentes.

Primeiramente é encontrado o termo referente ao torque $(C_D + C_E)$ da equação (22). Esse termo é comum à Figura 5 e à Figura 6. Sendo $\dot{\theta} \equiv \dot{x}/r$, a soma dos torques na equação (13) pode ser expressada como:

$$C_D + C_E = 2 \frac{k_m}{R} V_a - 2 \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{x} \quad (23)$$

Substituindo-se a equação (23) em (22):

$$I_p \ddot{\theta}_p = -(H_D + H_E)l \cos \theta_p - (P_D + P_E)l \sin \theta_p - 2 \frac{k_m}{R} V_a + 2 \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{x}$$

$$I_p \ddot{\theta}_p + 2 \frac{k_m}{R} V_a - 2 \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{x} = [-(H_D + H_E)l \cos \theta_p - (P_D + P_E)l \sin \theta_p] \quad (24)$$

Multiplicando-se a equação dos momentos do sistema (21) por $-l$ é possível obter o mesmo termo entre colchetes da equação (24):

$$-l M_p \ddot{x} \cos \theta_p = [-(H_D + H_E)l \cos \theta_p - (P_D + P_E)l \sin \theta_p] + l M_p g \sin \theta_p + l^2 M_p \ddot{\theta}_p \quad (25)$$

Mais uma simplificação pode ser aplicada pela substituição do termo coincidente com a equação (24) indicado entre colchetes:

$$\begin{aligned}
-lM_p\ddot{x} \cos \theta_p &= I_p\ddot{\theta}_p + 2\frac{k_m}{R}V_a - 2\frac{k_mk_e}{Rr}\dot{x} + lM_pg \sin \theta_p + l^2M_p\ddot{\theta}_p \\
-lM_p\ddot{x} \cos \theta_p &= (I_p + l^2M_p)\ddot{\theta}_p + 2\frac{k_m}{R}V_a - 2\frac{k_mk_e}{Rr}\dot{x} + lM_pg \sin \theta_p
\end{aligned} \tag{26}$$

O termo $(H_D + H_E)$ da equação (18) também deve ser removido da dinâmica do sistema. Para isso aplica-se (20) em (18):

$$\begin{aligned}
2\left(M_r + \frac{I_r}{r^2}\right)\ddot{x} &= \frac{2k_m}{Rr}V_a - \frac{2k_mk_e}{Rr^2}\dot{x} - M_p\ddot{x} - M_pl\ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_pl\dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \\
\left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2}\right)\ddot{x} &= \frac{2k_m}{Rr}V_a - \frac{2k_mk_e}{Rr^2}\dot{x} - M_pl\ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_pl\dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p
\end{aligned} \tag{27}$$

Reescrevendo as equações (26) e (27) encontram-se as equações não-lineares que descrevem o comportamento físico do sistema:

$$-M_pl \cos \theta_p \ddot{x} = 2\frac{k_m}{R}V_a - 2\frac{k_mk_e}{Rr}\dot{x} + (I_p + M_pl^2)\ddot{\theta}_p + M_plg \sin \theta_p \tag{28}$$

$$\left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2}\right)\ddot{x} = 2\frac{k_m}{Rr}V_a - 2\frac{k_mk_e}{Rr^2}\dot{x} - M_pl \cos(\theta_p) \ddot{\theta}_p + M_pl \sin(\theta_p) \dot{\theta}_p^2 \tag{29}$$

Essas por sua vez podem ser linearizadas em torno de um ponto de operação. É então escolhido o ponto de equilíbrio do pêndulo $\theta_p = 0$, pois é a região onde se deseja manter o sistema controlado. Logo, define-se o ponto de operação escolhido como $\theta_p = \pi + \theta^r$. Para $|\theta_p| \leq 10^\circ$, a linearização implicará em:

$$\begin{aligned}
\sin \theta_p &\equiv -\theta \\
\cos \theta_p &\equiv -1 \\
\dot{\theta}_p^2 &\equiv 0
\end{aligned}$$

Logo, (28) e (29) após a linearização são:

$$M_pl\ddot{x} = 2\frac{k_m}{R}V_a - 2\frac{k_mk_e}{Rr}\dot{x} + (I_p + M_pl^2)\ddot{\theta} - M_plg\theta \tag{30}$$

$$\left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2}\right)\ddot{x} = 2\frac{k_m}{Rr}V_a - 2\frac{k_mk_e}{Rr^2}\dot{x} + M_pl\ddot{\theta} \tag{31}$$

2.2 Modelagem matemática em espaço de estados

Nessa etapa deve-se modelar o sistema em espaço de estados de modo a viabilizar a simulação do sistema em malha aberta. Com essa representação é possível obter-se mais informações a respeito do sistema de modo a utilizá-la para projetar um controlador. Devem-se

escolher as variáveis de estado a serem utilizadas no espaço de entradas, bem como as entradas e as saídas.

Dadas as equações (30) e (31), escolhem-se como variáveis de estado \dot{x} , \ddot{x} , $\dot{\theta}$, e $\ddot{\theta}$. Essas equações são então reescritas em função de $\ddot{\theta}$ e \ddot{x} . Porém, nessas equações, observa-se uma interdependência entre as duas variáveis. Essa interdependência deve ser cancelada de modo a modelar o sistema em espaço de estados.

Dividindo-se (30) por (31) e desenvolvendo-se a expressão:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{k_m}{Rr} \gamma V_a - 2 \frac{k_m k_e}{Rr^2} \gamma \dot{x} + M_p l \gamma \ddot{\theta} &= (I_p + M_p l^2) \ddot{\theta} - M_p l g \theta - 2 \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{x} + 2 \frac{k_m}{R} V_a \\
 [(I_p + M_p l^2) - M_p l \gamma] \ddot{\theta} &= M_p l g \theta + 2 \frac{k_m k_e}{Rr} \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) \dot{x} - 2 \frac{k_m}{R} \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) V_a \\
 \ddot{\theta} &= \frac{M_p l g}{\beta} \theta + 2 \frac{k_m k_e}{Rr \beta} \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) \dot{x} - 2 \frac{k_m}{R \beta} \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) V_a \\
 \ddot{\theta} &= \frac{M_p l g}{\beta} \theta + \frac{\alpha k_e}{r} \dot{x} - \alpha V_a
 \end{aligned} \tag{32}$$

Sendo,

$$\alpha = 2 \frac{k_m}{R \beta} \left(1 - \frac{\gamma}{r}\right) \tag{33}$$

$$\beta = (I_p + M_p l^2) - M_p l \gamma \tag{34}$$

$$\gamma = \frac{M_p l}{2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2}} \tag{35}$$

A expressão de $\ddot{\theta}$ é encontrada de uma maneira semelhante. Escrevendo-se as equações (30) e (31) em, função de $\ddot{\theta}$:

$$(I_p + M_p l^2) \ddot{\theta} = M_p l \ddot{x} + M_p l g \theta + 2 \frac{k_m k_e}{Rr} \dot{x} - 2 \frac{k_m}{R} V_a \tag{36}$$

$$-M_p l \ddot{\theta} = -\left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2}\right) \ddot{x} - 2 \frac{k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + 2 \frac{k_m}{Rr} V_a \tag{37}$$

Dividindo-se (37) por (36) e desenvolvendo-se a expressão:

$$\begin{aligned}
-M_p l v \ddot{x} - M_p l g v \theta - 2 \frac{k_m k_e}{R r} v \dot{x} + 2 \frac{k_m}{R} v V_a &= - \left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2} \right) \ddot{x} - 2 \frac{k_m k_e}{R r^2} \dot{x} + 2 \frac{k_m}{R r} V_a \\
\ddot{x} \left[\left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2} \right) - M_p l v \right] &= M_p l g v \theta + 2 \frac{k_m k_e}{R r} \left(v - \frac{1}{r} \right) \dot{x} - 2 \frac{k_m}{R} \left(v - \frac{1}{r} \right) V_a \\
\ddot{x} &= M_p l g \frac{v}{\mu} \theta + 2 \frac{k_m k_e}{R r \mu} \left(v - \frac{1}{r} \right) \dot{x} - 2 \frac{k_m}{R \mu} \left(v - \frac{1}{r} \right) V_a \\
\ddot{x} &= M_p l g \frac{v}{\mu} \theta + \frac{\lambda k_e}{r} \dot{x} - \lambda V_a
\end{aligned} \tag{38}$$

Sendo,

$$\lambda = 2 \frac{k_m}{R \mu} \left(v - \frac{1}{r} \right) \tag{39}$$

$$\mu = \left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2} \right) - M_p l v \tag{40}$$

$$v = \frac{M_p l}{I_p + M_p l^2} \tag{41}$$

As equações diferenciais de espaço de estados podem ser expressas no formato de matriz segundo a equação matricial a seguir:

$$\ddot{\theta} = \frac{M_p l g}{\beta} \theta + \frac{\alpha k_e}{r} \dot{x} - \alpha V_a \tag{42}$$

$$\ddot{x} = M_p l g \frac{v}{\mu} \theta + \frac{\lambda k_e}{r} \dot{x} - \lambda V_a \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M_p l g}{\beta} & 0 & 0 & \frac{\alpha k_e}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_p l g \frac{v}{\mu} & 0 & 0 & \frac{\lambda k_e}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} V_a \tag{44}$$

Sendo,

$$\alpha = 2 \frac{k_m}{R \beta} \left(1 + \frac{\gamma}{r} \right)$$

$$\beta = (I_p + M_p l^2) - M_p l \gamma$$

$$\gamma = \frac{M_p l}{2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2}}$$

$$\lambda = 2 \frac{k_m}{R \mu} \left(v + \frac{1}{r} \right)$$

$$\mu = \left(2M_r + M_p + \frac{2I_r}{r^2} \right) - M_p l v$$

$$v = \frac{M_p l}{I_p + M_p l^2}$$

E V_a é a tensão de armadura que é uniformemente para os motores CC a fim de obter-se uma trajetória em linha reta.

Considerando que a haste do pêndulo possui sua massa igualmente distribuída, seu momento de inércia pode ser considerada $I_p = \frac{ml^2}{3}$.

2.3 Modelagem Experimental do motor CC

A relação dinâmica entre a entrada (tensão de armadura) e a saída (velocidade) de um motor CC pode ser representada pela seguinte função de transferência de 1ª ordem:

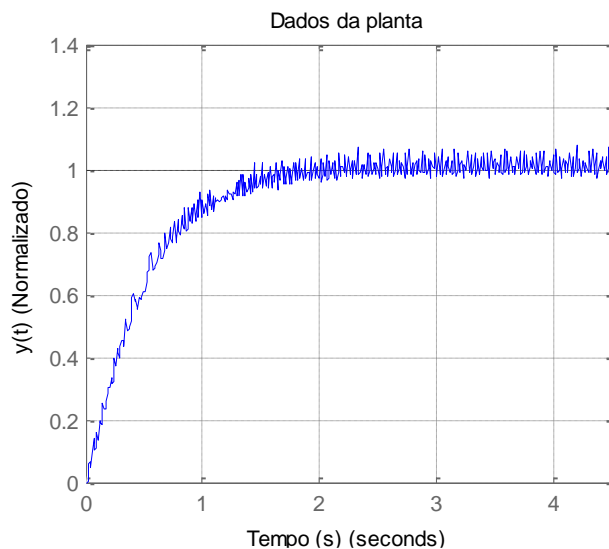
$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (45)$$

τ = constante de tempo

K = ganho estático de velocidade

Os valores dos parâmetros da função de transferência podem ser determinados a partir de ensaios experimentais no motor. Para a realização do estudo proposto neste trabalho foi utilizado um motor CC no qual a resposta ao degrau é ilustrada na Figura 7. O sinal de saída (Y) apresentado representa a velocidade normalizada do motor CC e foi medido a partir de um tacômetro conectado ao eixo do motor.

Figura 7 – Resposta ao degrau do motor em malha aberta. Degrau de 6V



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir do ensaio realizado, os valores dos parâmetros de $G(s)$ foram estimados pelo Método das Áreas (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). O algoritmo utilizado retornou os seguintes valores:

$$\tau = 0.5 \quad (46)$$

$$K = 1.0 \quad (47)$$

Nota-se que o ganho estático de velocidade do modelo foi propositalmente posto em 1, pois esse será considerado o ponto de operação do motor. Essa escolha não interfere na dinâmica do sistema, já que o motor está sendo considerado uma planta de dinâmica linear.

Por fim tem-se que:

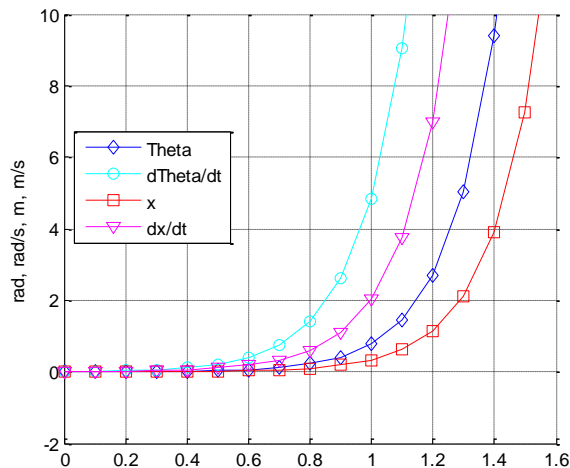
$$G_M(s) = \frac{1}{0.5s + 1} \quad (48)$$

2.4 Simulações dos modelos

Após a obtenção dos modelos matemáticos é interessante observar a mudança de cada estado de acordo com algum sinal de entrada. Essa observação também serve de validação do modelo obtido.

Uma vez que o sistema real do PIDR é instável, espera-se para o modelo do PIDR que foi obtido também possua um comportamento instável. Utilizando-se da ferramenta computacional Matlab, foi possível obter-se as curvas dos estados de acordo com um sinal de entrada do tipo degrau (Figura 8).

Figura 8 – Resposta ao degrau em malha aberta dos estados do PIDR.

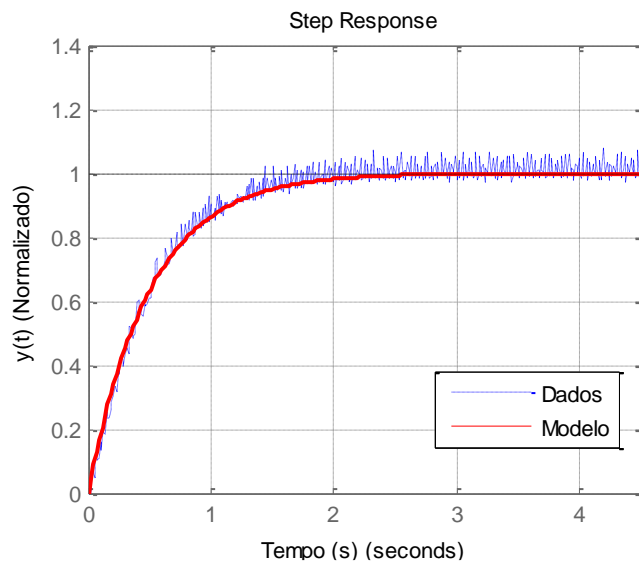


Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo do PIDR simulado é instável, pois todos os seus estados são levados à valores infinitos durante a aplicação de um degrau.

O modelo do motor CC também pode ser verificado com o auxílio do Matlab. Com alguns comandos podem-se comparar as curvas do modelo calculado e dos dados adquiridos. O resultado da comparação é visto na Figura 9.

Figura 9 – Comparação entre a resposta do modelo e os dados da planta real



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se observar que o modelo segue com bastante semelhança a curva da planta real tanto na parte transitória quanto em regime estacionário. É importante que a curva do modelo siga com boa fidelidade principalmente no regime transitório, pois é onde a maior parte da dinâmica do sistema é caracterizada.

3 PROJETO DOS CONTROLADORES

A simulação do modelo do PIDR apresentado na seção 2.4 deixa clara a necessidade de um sistema de controle atuando através dos motores para que o pêndulo possa permanecer estável. Na ausência de um controlador o pêndulo tenderia a cair sob efeito de leves distúrbios independente de suas condições iniciais.

Os motores CC, por sua vez, também são plantas que embora sejam estáveis, não apresentam naturalmente a resposta desejada para o sistema. Se faz necessário a atuação de controladores para que a resposta dos motores sigam a referência e os padrões de desempenho desejados independente da carga aplicada.

Dessa forma, neste capítulo serão apresentados o projeto do controlador de ângulo do pêndulo e o projeto do controle de velocidade dos motores.

3.1 Sobre o controlador LQR

O controlador utilizado para controlar o ângulo do PIDR é o Regulador Linear Quadrático (do inglês LQR) de parâmetros fixos. Esse controlador também deve garantir que o ângulo θ permaneça próximo ao ponto de linearização. Se o controlador permitir que θ se afaste do ponto de operação especificado pela linearização, o modelo perderá a sua validade bem como a ação de controle e o sistema poderá se tornar novamente instável.

Considerando um sistema discreto representado por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (49)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \text{vetor de estados } (n \times 1) \\ \mathbf{u}(k) &= \text{vetor de controle } (r \times 1) \\ \mathbf{G} &= \text{matriz } n \times n \\ \mathbf{H} &= \text{matriz } n \times r \end{aligned}$$

O LQR tem como objetivo encontrar uma lei de controle que minimize um índice quadrático de desempenho para que o sinal de controle seja eficiente. Um exemplo de índice quadrático de desempenho é:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^*(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^*(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)] \quad (50)$$

Onde as matrizes \mathbf{S} e \mathbf{Q} são matrizes Hermitianas¹ $n \times n$ definidas positivas² ou semidefinidas positivas e \mathbf{R} é uma matriz Hermitiana definida positiva. O primeiro termo do lado direito da equação (50) é o responsável pela avaliação do estado final. O primeiro termo interno ao somatório tem o objetivo de ponderar o erro em cada variável de estado durante o processo de controle, enquanto o segundo termo interno ao somador pondera a energia utilizada pelo sinal de controle. Sinal de controle que é dado por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k) \quad (51)$$

Onde $\mathbf{K}(k)$ é uma matriz variante no tempo de dimensões $r \times n$. Os valores da matriz $\mathbf{K}(k)$ são constantes quando $N = \infty$. Nesse ponto os valores de $\mathbf{K}(k)$ podem ser encontrados para minimizar o índice quadrático de desempenho.

Existem diversos algoritmos que minimizam esse índice. O método convencional de minimização usando Multiplicadores de Lagrange define que o conjunto de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(k)$ deve ser definido por:

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \quad (52)$$

Onde $\mathbf{P}(k)$ é uma matriz Hermitiana $n \times n$.

Após a aplicação do algoritmo encontram-se as soluções:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) = & \mathbf{Q} + \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G} \\ & - \mathbf{G}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}[\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\mathbf{K}(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{P}(k+1) \quad (54)$$

O algoritmo deve parar quando os valores de $\mathbf{P}(k)$ não mais variam.

3.1.1 Sobre o LQR com ação integral

A ação integral pode ser adicionada ao controlador LQR a fim de minimizar o acúmulo de erros. A ação integral pode ser regulada pela inclusão de um parâmetro \mathbf{K}_I no vetor de ganho \mathbf{K} que controla o sinal resultante entre a soma do erro atual com o erro da amostra anterior. O acréscimo do elemento \mathbf{K}_I será melhor explicado na seção 3.2.2 e apresentado na Figura 10.

¹ Uma matriz \mathbf{A} é definida Hermitiana se \mathbf{A} é idêntica a sua transposta conjugada \mathbf{A}^* . Ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

² Uma matriz Hermitiana \mathbf{P} é definida positiva se $\boldsymbol{\mu}^*\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} > 0$, para qualquer vetor $\boldsymbol{\mu}$ complexo não-nulo.

3.2 Controle de ângulo e posição

Propõe-se um controlador LQR com ação integral para controlar o ângulo e a posição do pêndulo invertido, pois o controle ótimo é bastante recomendado para sistemas dessa natureza. A ação integral em um controlador LQR permite que o sistema crie uma dependência do sinal de controle com o acúmulo de erro melhorando a compensação de erros estáticos. Além disso, novos parâmetros são adicionados permitindo que o projetista possa ajustar melhor as matrizes de ponderação de maneira a buscar uma solução mais próxima da desejada.

3.2.1 Critérios de Projeto

O modelo em espaço de estados proposto pela modelagem do seção 2.2 é uma representação que está no domínio contínuo e deve ser discretizada para possibilitar o projeto e a implementação do controlador. A representação do sistema no domínio do tempo discreto k foi obtida através do Segurador de Ordem Zero. O sistema em espaço de estados discreto deve possuir a seguinte estrutura:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (55)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k) \quad (56)$$

Para encontrar os valores de \mathbf{G} e \mathbf{H} devem-se atribuir os valores do sistema PIDR. Esses são atribuídos de acordo com o sistema internacional de unidades (S.I.) da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} M_p = 10 & k_e = 130e^{-3} \\ M_r = 0.5 & k_m = 107e^{-3} \\ l = 0.5 & I_r = 1.8e^{-3} \\ g = 9.87 & I_p = 0.833 \\ r = 0.06 & R = 8.4 \end{array}$$

Logo, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 39.48 & 0 & 0 & -0.2633 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16.45 & 0 & 0 & -0.1866 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1214 \\ 0 \\ 0.0861 \end{bmatrix} \quad (58)$$

O sistema contínuo pode ser discretizado por um segurador de ordem zero para um tempo de amostragem (T_s) 0,36 segundos. A escolha de T_s menores não foi possível, pois o sinal de controle assumia valores muito altos e impossibilitavam a operação do motor dentro da faixa de 12 volts. Após a aplicação do algoritmo de discretização, as matrizes do sistema são:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 4,7996 & 0,7517 & 0 & -0,0251 \\ 29,2617 & 4,7996 & 0 & -0,1932 \\ 1,5707 & 0,1622 & 1 & 0,3447 \\ 12,0716 & 1,5704 & 0 & 0,8930 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0,0116 \\ 0,0891 \\ 0,0071 \\ 0,0494 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Para definir a matriz \mathbf{C} é necessário saber quais serão as saídas do sistema. Deseja-se para esse sistema controlar ângulo e posição. Escolhe-se ângulo como saída pois é de grande importância manter o pêndulo na posição vertical, logo sua referência deve ser constante e nula. Além disso, o projeto em questão visa controlar também a velocidade e a posição do PIDR. Porém, não há necessidade de escolherem-se três saídas para o projeto, uma vez que seriam necessários três sinais de referência para o controlador atuar de acordo com o erro de cada saída. O controle de velocidade pode ser feito indiretamente pela malha de posição, visto que a velocidade do deslocamento do PIDR pode ser controlada se a referência de posição seja um sinal do tipo rampa. Quanto maior a inclinação da rampa, maior a velocidade. Portanto, foram escolhidos como saída os estados θ e x :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{D} = [0] \quad (62)$$

Vale salientar que a escolha da posição como saída evita que haja algum tipo de erro do usuário ao fornecer condições de referência inadequadas. Se fossem utilizadas tanto a posição quanto a velocidade na saída, seria inviável, por exemplo, atender ao mesmo tempo referências fixas de posição e velocidade.

3.2.2 Projeto

Adota-se os estados do modelo do sistema como:

$$x_1 = \theta \quad (63)$$

$$x_2 = \dot{\theta} \quad (64)$$

$$x_3 = x \quad (65)$$

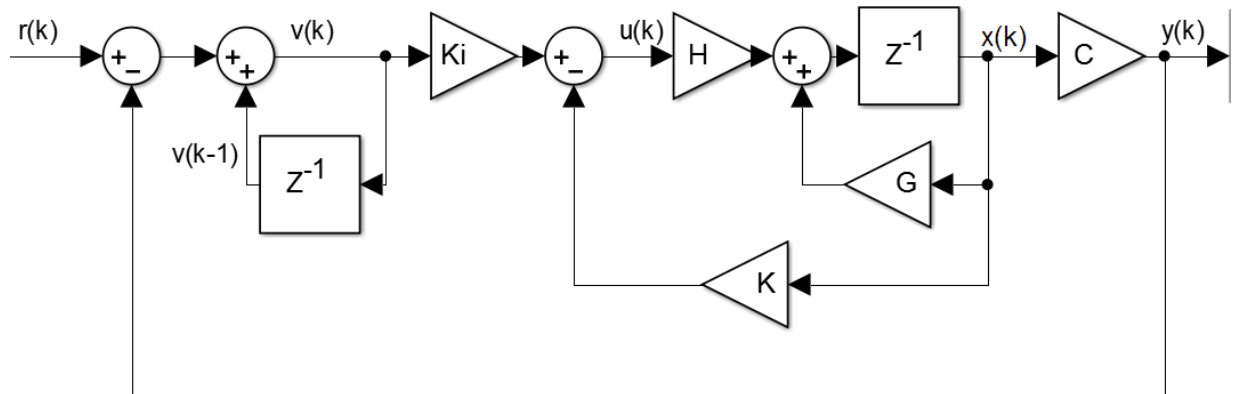
$$x_4 = \dot{x}. \quad (66)$$

O projeto do controlador deve manter o valor do ângulo o menor possível enquanto o carro se move com referências do tipo rampa ou degrau de posição. Como têm-se duas referências que devem ser seguidas, a saída deve ser escrita como:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} \quad (67)$$

A Figura mostra a representação do sistema controlado com ação integral em diagrama de blocos de acordo com Ogata (1994, p 597).

Figura 10 – Sistema controlado por LQR com ação integral



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com esse diagrama de espaço de estados proposto pela Figura 10, as equações do sistema controlado em malha fechada são:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \quad (68)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (69)$$

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{v}(k-1) + \mathbf{r}(k) - \mathbf{y}(k) \quad (70)$$

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_i\mathbf{v}(k) \quad (71)$$

Sendo,

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \quad (72)$$

$$\mathbf{K}_i = [k_{i1} \quad k_{i2}] \quad (73)$$

Pode-se reescrever o sinal de erro como sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k+1) &= \mathbf{v}(k) + \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{y}(k+1) \\ &= \mathbf{v}(k) + \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{C}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)] \\ &= -\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) - \mathbf{C}\mathbf{H}u(k) + \mathbf{r}(k+1) \end{aligned} \quad (74)$$

Então, podem-se reescrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{v}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{r}(k+1) \quad (75)$$

Como a referência de posição a ser seguida é do tipo degrau e a referência do ângulo é constante em 0, então:

$$\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{r}(k) = \mathbf{r} \quad (76)$$

Quando k se aproxima de infinito o sistema atinge a condição de regime e a equação (75) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \mathbf{v}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \mathbf{v}(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{r}(\infty) \quad (77)$$

Declarando:

$$\mathbf{x}_e(k+1) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty) \quad (78)$$

$$\mathbf{v}_e(k+1) = \mathbf{v}(k) - \mathbf{v}(\infty) \quad (79)$$

A equação do erro pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ \mathbf{v}_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{v}_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{bmatrix} u_e(k) \quad (80)$$

Por sua vez:

$$u_e(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(k) + \mathbf{K}_i\mathbf{v}_e(k) = -[\mathbf{K} \quad \mathbf{K}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ \mathbf{v}_e(k) \end{bmatrix} \quad (81)$$

Considerando um novo vetor:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1e}(k) \\ x_{2e}(k) \\ x_{3e}(k) \\ x_{4e}(k) \\ x_{5e}(k) \\ x_{6e}(k) \end{bmatrix} \quad (82)$$

onde, $x_{5e}(k)$ e $x_{6e}(k)$ são $v_{1e}(k)$ e $v_{2e}(k)$, respectivamente. Logo, pode-se criar um novo sistema no formato:

$$\xi(k+1) = \hat{G}\xi(k) + \hat{H}w(k) \quad (83)$$

$$w(k) = -\hat{K}\xi(k) \quad (84)$$

onde são definidos,

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ -CG & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\hat{K} = [K \quad K_i] \quad (87)$$

$$w(k) = u_e(k) \quad (88)$$

Agora o índice de desempenho da equação (50) pode ser reescrito em função dos novos vetores definidos:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\xi' Q \xi + w' R w] \quad (89)$$

Os valores de Q e R devem ser escolhidos por observação dos sinais do sistema de maneira que a resposta do sistema controlado seja aceitável. Esse é um ponto muito importante do projeto do controlador LQR, pois agora o projetista tem liberdade de modificar a dinâmica das variáveis de estado do sistema em malha fechada. Outro sinal muito importante de ser observado durante essa etapa do projeto é o sinal de controle. Um cuidado que deve ser tomado é escolher o par de matrizes de ponderação tal que a saída do controlador não exceda os valores de saturação.

Mantendo-se o compromisso entre as saídas do sistema e o sinal de controle, foram testados os valores das matrizes Q e R diversas vezes e a resposta do sistema controlado foi considerada satisfatória com:

$$R = 1 \quad (90)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} \quad (91)$$

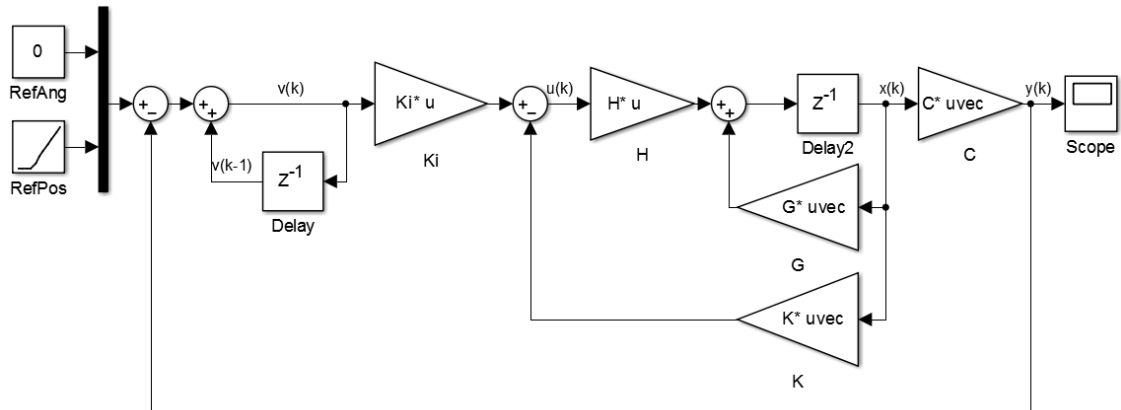
Após a aplicação do algoritmo de minimização, é encontrado o valor de \hat{K} :

$$\hat{K} = [400 \quad 67,2 \quad -5,67 \quad -10,4 \quad 0 \quad 0,422] \quad (92)$$

3.2.3 Simulações e Resultados

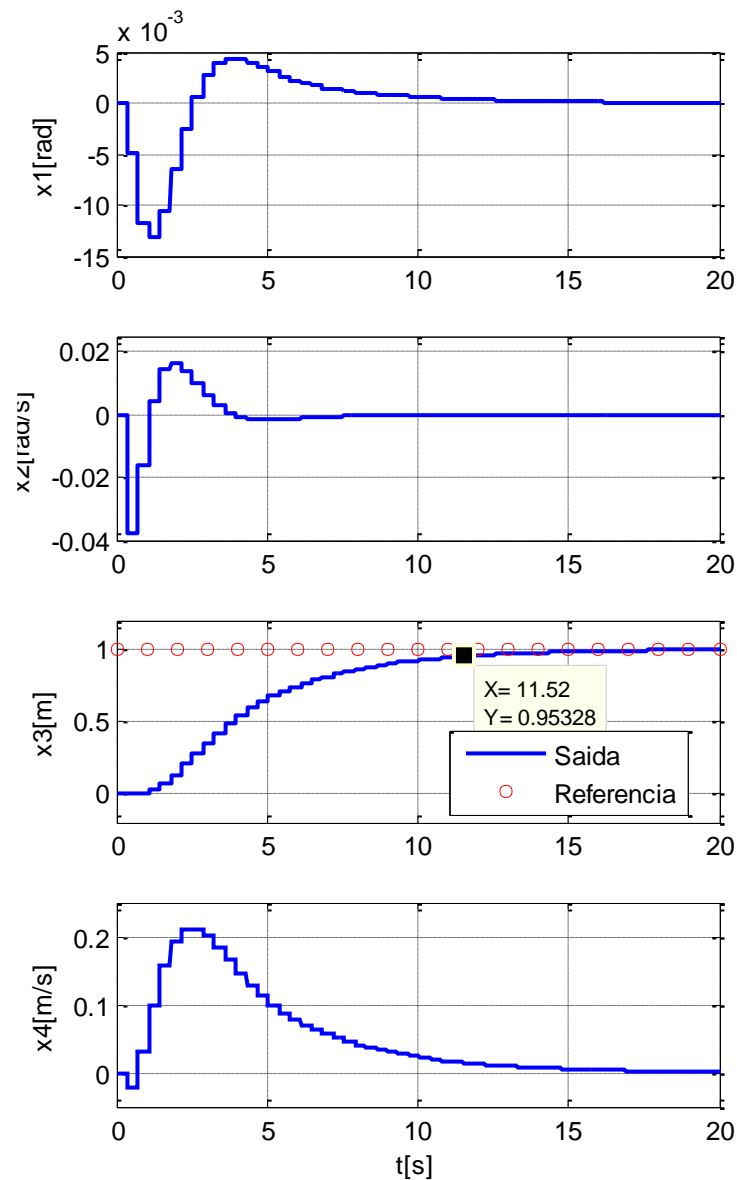
Com o auxílio do Matlab simulou-se o controlador do PIDR, onde as referências do sistema são ângulo e posição. A referência do ângulo é nula e a da posição é um degrau unitário. O modelo apresentado na Figura 11, onde é possível observar que os estados de realimentação para o controlador são θ e x . Esse diagrama de blocos é simulável e a leitura dos valores de cada variável de estado são apresentadas na Figura 12. A leitura de cada variável foi feita através do sinal apresentado como $x(k)$. A malha interna que contém os sinais $v(k)$, $v(k-1)$ e o ganho K_i é responsável pela ação integral do controlador.

Figura 11 – Esquemático em blocos da planta do PIDR no Simulink



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Variáveis de estado do PIDR sob degrau de posição

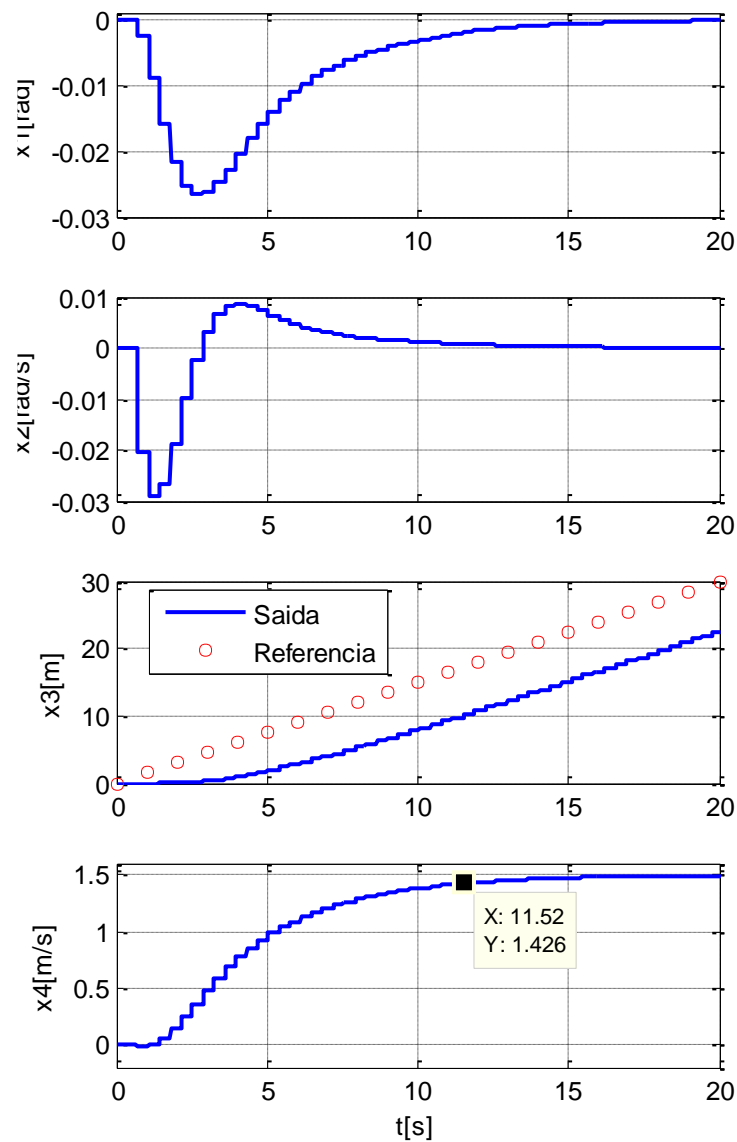


Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que em torno de 11,5 segundos o sistema sai do repouso e se desloca para a referência de posição de um metro, de acordo com o critério de 5% do tempo de assentamento. A velocidade angular é a primeira variável a seguir adequadamente a referência. A velocidade possui inicialmente uma reação contrária ao sentido esperado e logo após a mesma muda de sentido de acordo com a sua referência e atinge um pico de 0,2 metros por segundo assentando-se em zero rapidamente.

Porém, para a movimentação do carrinho será fornecido uma rampa de posição. A referência do tipo rampa é seguida com um erro em regime. O comportamento das variáveis de estado conforme uma referência do tipo rampa com inclinação de 1.5 partindo da origem pode ser observado nas Figura 13.

Figura 13 – Variáveis de estado do PIDR sob rampa de posição



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se que o sistema também segue bem uma referência de velocidade, mesmo que indireta. O tempo que o sistema leva para se assentar pelo critério de 5% é em torno de

11,5 segundos. Pode-se observar agora que sobre uma referência de 1,5 metros por segundo o sistema deslocou-se em torno de 10 metros no momento que atinge a região de regime de velocidade em 11,5 segundos.

3.3 Sobre o controlador por Alocação de Polos

Basicamente o Método de Alocação de Polos tem o objetivo de obter um controlador tal que os polos da função de transferência de malha fechada sejam alocados em valores especificados pelo projetista de acordo com o desempenho desejado. Na literatura de sistemas de controle existem diversas variações do método de alocação de polos. Em ÅSTRÖM(2008), por exemplo, a abordagem permite obter um controlador que cancele alguns zeros específicos da planta. É possível escolher alguns zeros para serem cancelados e os que são instáveis ou pouco amortecidos não são cancelados.

Entretanto, um controlador por alocação de polos sem cancelamento de zeros se adequam melhor à plantas que possuam zeros no semiplano direito. Além disso, essa topologia de controlador possui ação de controle mais comportada e menos oscilatória.

3.4 Controle de velocidade do motor CC

O projeto por alocação de polos sem cancelamento de zeros envolve cálculos simples e lineares para relacionar o modelo da planta com os parâmetros do controlador. Essa simplicidade para relacionar modelo e controle é muito interessante para a implementação de estratégias de controle adaptativo, como o STR Indireto desenvolvido por Åström e Wittenmark (2008), por exemplo.

Desenvolve-se, então, primeiramente o controlador por alocação de polos para o sistema dado para que em versões futuras desse trabalho um controlador adaptativo possa melhorar o comportamento do modelo real desse sistema, pois para fins práticos o controle do motor CC pode ser mais eficiente ao considerar a planta como não-linear. Esse pensamento é compartilhado por Grasser; D'Arrigo e Colombi (2002). Embora controladores fixos tendam a apresentar um desempenho inferior em simulação, os mesmo são suficientes para controlar um PIDR na prática. Nos trabalhos de Kalra, Patel e Stol (2007), Sundin e Thorstensson (2012) e Anderson (2003) calcularam-se modelos linearizados e desenvolveram-se controladores fixos

que foram aplicados à planta real e seus resultados foram satisfatórios garantido a estabilidade e boa operação do sistema.

3.4.1 Critérios de Projeto

Durante o projeto por alocação de polos é necessário ter o conhecimento da função de transferência da planta desejada. A planta desejada é obtida através da dinâmica definida pelo projetista, que é definida por observação da resposta da planta em malha aberta, pela sensibilidade do sistema quanto à ultrapassagens de valores nominais e também por condições dadas como satisfatórias para o bom funcionamento do sistema.

O sistema desejado pode ser de primeira ordem. Assim listam nesse projeto como critérios de projeto:

$$K_D = 1 \quad (93)$$

$$\tau_D = 0.25 \quad (94)$$

Sendo K_D é o ganho estático desejado em relação à referência e τ_D é a constante de tempo desejada para o sistema. Escolhe-se K_D unitário para que a referência seja seguida sem erro e τ_D menor que a constante de tempo em malha aberta para que o sistema atue mais rápido quando controlado.

A função de transferência desejada pode ser escrita de acordo com a forma genérica de representar um sistema de primeira ordem:

$$G_{1^a} = \frac{K_D}{\tau_D s + 1} \quad (95)$$

$$G_D(s) = \frac{1}{0,25s + 1} \quad (96)$$

Os polos devem ser encontrados no domínio discreto, que é onde o controlador é projetado. Para isso deve-se discretizar a função $G_D(s)$ com um segurador de ordem zero. O tempo de amostragem (T_s) escolhido é de 0,04 segundos, pois é aconselhável que o tempo de amostragem seja pelo menos $1/5$ da constante de tempo (τ) do sistema.

$$G_D(q) = \frac{0,1479}{q - 0,8521} \quad (97)$$

3.4.2 Projeto por Alocação de Polos

Para o projeto do controlador de velocidade dos motores através do método de alocação de polos no plano discreto é necessário que o modelo do motor CC agora seja escrito em sua forma discreta. Deve-se então obter o modelo no domínio discreto por meio de uma discretização com segurador de ordem zero e tempo de amostragem 0,04 segundos.

$$G_M(q) = \frac{0,07688}{q - 0,9231} \quad (98)$$

O projeto do controlador assume que a modelagem e a lei de controle possuem as seguintes estruturas:

$$Ay(t) = B(u(t) + v(t)) \quad (99)$$

$$Ru(t) = Tu_c(t) - Sy(t) \quad (100)$$

$$A = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-n}$$

$$B = b_1q^{-1} + \dots + b_n bq^{-n}$$

$$R = 1 + r_1q^{-1} + \dots + r_n r q^{-n}$$

$$S = s_0 + s_1q^{-1} + \dots + s_n s q^{-n}$$

$$T = 1 + t_1q^{-1} + \dots + t_n t q^{-n}$$

Eliminando-se $u(t)$ da equação (99) encontra-se:

$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS} u_c(t) + \frac{BR}{AR + BS} v(t) \quad (101)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR + BS} u_c(t) - \frac{BS}{AR + BS} v(t)$$

Logo vê-se que a equação característica A_c em malha fechada é:

$$AR + BS = A_c \quad (102)$$

O valor do polinômio A_c é especificado, pois este também representa os polos desejados em malha fechada. Sendo conhecidos os valores de A , B e A_c a equação encontrada é também chamada *Equação Diofantina* e sua solução para R e S é conhecida pela álgebra.

Em malha fechada o sistema se resume em:

$$A_D y_D(t) = B_D u_c(t) \quad (103)$$

Da equação (101), conclui-se que a seguinte condição deve ser verdadeira:

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{BT}{A_c} = \frac{B_D}{A_D} \quad (104)$$

O polinômio B traz consigo os zeros do modelo em malha aberta e a informação do ganho estático da planta. Não deseja-se eliminar B , então B deve permanecer em malha fechada como um termo de B_D .

$$B_D = BB'_D \quad (105)$$

Deve ainda permanecer em malha fechada o polinômio A_D , então:

$$A_c = A_o A_D \quad (106)$$

A Equação Diofantina torna-se então:

$$AR + BS = A_o A_D \quad (107)$$

O último polinômio do controlador é o filtro de referência. Seu valor pode ser encontrado por meio da aplicação das equações (105) e (106) na equação (104):

$$T = A_o B'_D \quad (108)$$

Até então, a Equação Diofantina possui inúmeras soluções, porém pode-se limitar esse número por meio de restrições às respostas de R e S . Essas restrições são dadas pelo próprio princípio de causalidade do sistema discreto, que impossibilita que respostas não-causais sejam aceitas. A não-causalidade pode ser evitada por restrições ao grau das soluções. Para garantir as condições de causalidades, atribui-se que:

$$\deg S \leq \deg R$$

$$\deg T \leq \deg R$$

Ainda assim existem infinitas soluções. Porém as condições de causalidade também se expandem aos polinômios do modelo da planta e do modelo desejado. Tira-se da equação (102) que:

$$\deg R = \deg A_c - \deg A \quad (109)$$

O fato de achar-se infinitas soluções ainda persiste para a definição acima. Para achar uma solução única, deve-se considerar a solução de ordem mínima para a Equação Diofantina. Essa condição existe quando:

$$\begin{aligned} \deg A_c &\geq 2 \deg A - 1 \\ \deg A_D - \deg B'_D &\geq \deg A = d_0 \end{aligned}$$

Onde d_0 é o número de polos excedentes no modelo da planta.

É interessante para o controlador que ele não possua ordem tão elevada, pois isso ocasiona níveis de atraso no controlador. Em ordem mínima, os polinômios R , S e T têm a mesma ordem.

Quanto à ordem dos polinômios conclui-se que:

$$\deg A_D = \deg A \quad (110)$$

$$\deg B_D = \deg B \quad (111)$$

$$\deg A_o = \deg A - 1 \quad (112)$$

$$B_D = BB'_D \quad (113)$$

$$AR + BS = A_o A_D \quad (114)$$

$$T = A_o B'_D \quad (115)$$

O projeto do controlador do modelo do motor envolve os seguintes valores:

$$G_M(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0}{q + a_1} = \frac{0,07688}{q - 0,9231} \quad (116)$$

Verifica-se imediatamente que $\deg A = 1$ e $\deg B = 0$. Por consequência disso o controlador será de primeira ordem. A planta desejada segue os critérios de projeto e é escrita como:

$$G_D(q) = \beta \frac{b_{d0}}{q + a_{d1}} = \frac{0,1479}{q - 0,8521} \quad (117)$$

onde:

$$\beta = \frac{1 + a_{d1}}{b_0} \quad (118)$$

Genericamente, escreve-se a Equação Diofantina:

$$\begin{aligned} (q + a_1) \cdot (q + r_1) + (b_0)(s_0) &= (q + a_{d1})(q + a_0) \\ q^2 + (a_1 + r_1)q + a_1 r_1 + b_0 s_0 &= q^2 + (a_{d1} + a_0)q + a_{d1} a_0 \end{aligned} \quad (119)$$

Relacionando os coeficientes de q , vê-se que r_1 é:

$$r_1 = a_0 + a_{d1} - a_1 \quad (120)$$

Separando os coeficientes de q^0 , encontra-se s_0 :

$$s_0 = \frac{a_0 a_{d1} - a_1 r_1}{b_0} \quad (121)$$

E de acordo com a equação (108):

$$T(q) = \beta A_o(q) = \beta(q + a_0) \quad (122)$$

Atribuídos os valores, os polinômios R , S e T do controlador resultam em:

$$R = q + 0,071 \quad (123)$$

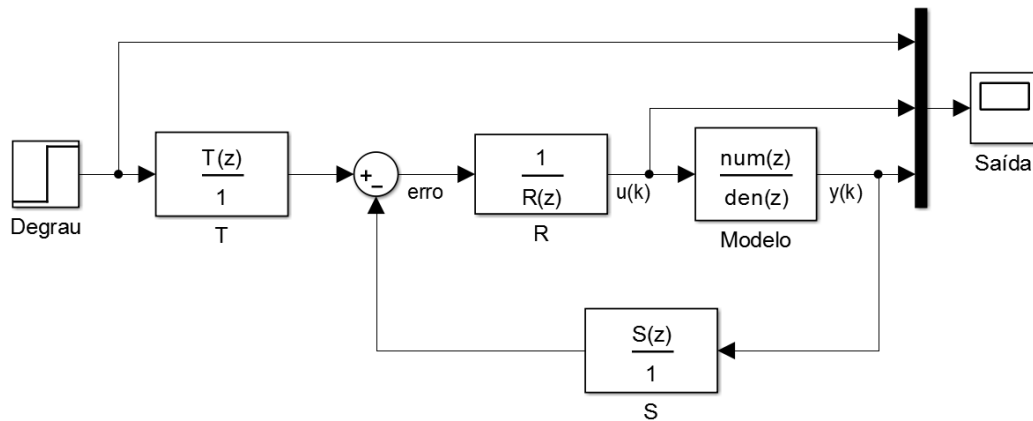
$$S = 0,8521 \quad (124)$$

$$T = 1,9231q \quad (125)$$

3.4.3 Simulações e Resultados

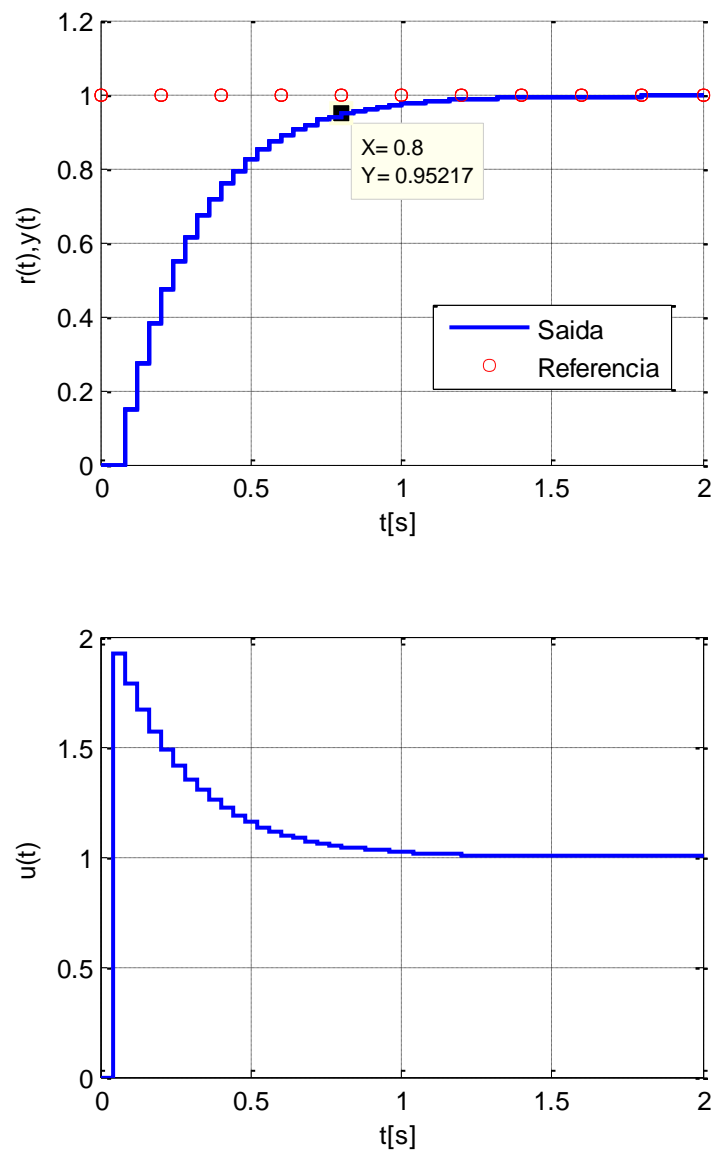
O controlador projetado deve ser avaliado por meio de simulação computacional. Com o auxílio do Matlab e do Simulink é possível obter a representação de malha fechada do sistema na Figura 14 e da sua resposta ao degrau na Figura 15.

Figura 14 – Diagrama de blocos do sistema de controle dos motores CC no Simulink



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – Resposta ao degrau do motor controlado



Fonte: Elaborada pelo autor.

O sistema controlado apresenta tempo de assentamento para 5% de aproximadamente 0,8 segundos, ou seja, o tempo em que o sistema deverá permanecer dentro de uma região com menos de 5% de variação para a referência.

4 CONTROLE DO PIDR

Nesta seção do trabalho serão apresentados os resultados obtidos com a aplicação conjunta dos controladores LQR e RST no problema de estabilização do PIDR

O controle de velocidade do motor pode até funcionar independentemente da malha de posição e ângulo do PIDR, porém, o pêndulo precisa de um atuador físico para se manter na posição vertical e essa é a tarefa dos motores.

4.1 Sistema Unificado

O controle de ângulo e posição do PIDR possui uma interface com o controle de velocidade dos motores CC. O estado de velocidade do PIDR serve de referência para o comando dos motores. Ao passo que os motores seguem a referência de velocidade, a posição é calculada por intermédio de um integrador e a saída dessa operação se torna a realimentação do estado de posição do controlador LQR. Porém, se os motores CC não forem devidamente controlados, o PIDR terá desempenho insatisfatório ou até instável.

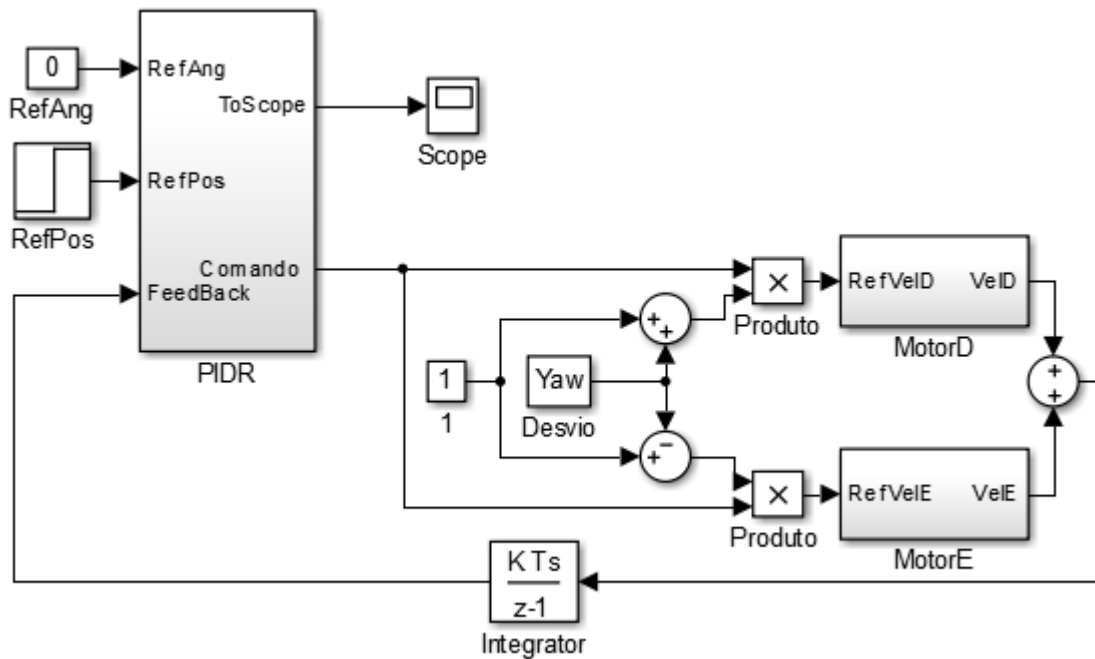
A resposta de velocidade do motor CC deve ser precisa o suficiente para não exigir demais da ação de controle e resultar em saturação do controlador. Para isso deve-se utilizar o controlador projetado para os motores CC em conjunto com o controlador do PIDR.

Também deve-se lembrar que as rodas são elementos que operam de forma quase independente e que o sinal de comando para cada uma deve obedecer à exigência de velocidade do comando e ao desvio de trajetória desejado para o sistema. Para realizar a distribuição do comando de velocidade e do comando de desvio se usa uma interface simples de direção diferencial.

4.2 Simulações e Resultados

Para simular a totalidade do sistema utilizaram-se subsistemas do Simulink que contêm cada um dos controladores. Ao todo são três controladores: um controlador por alocação de polos para o controle de velocidade de cada motor e mais um controlador LQR para o controle de ângulo e posição. A unificação do sistema é vista pela Figura 16.

Figura 16 – Diagrama em blocos do sistema de controle do PIDR simulado

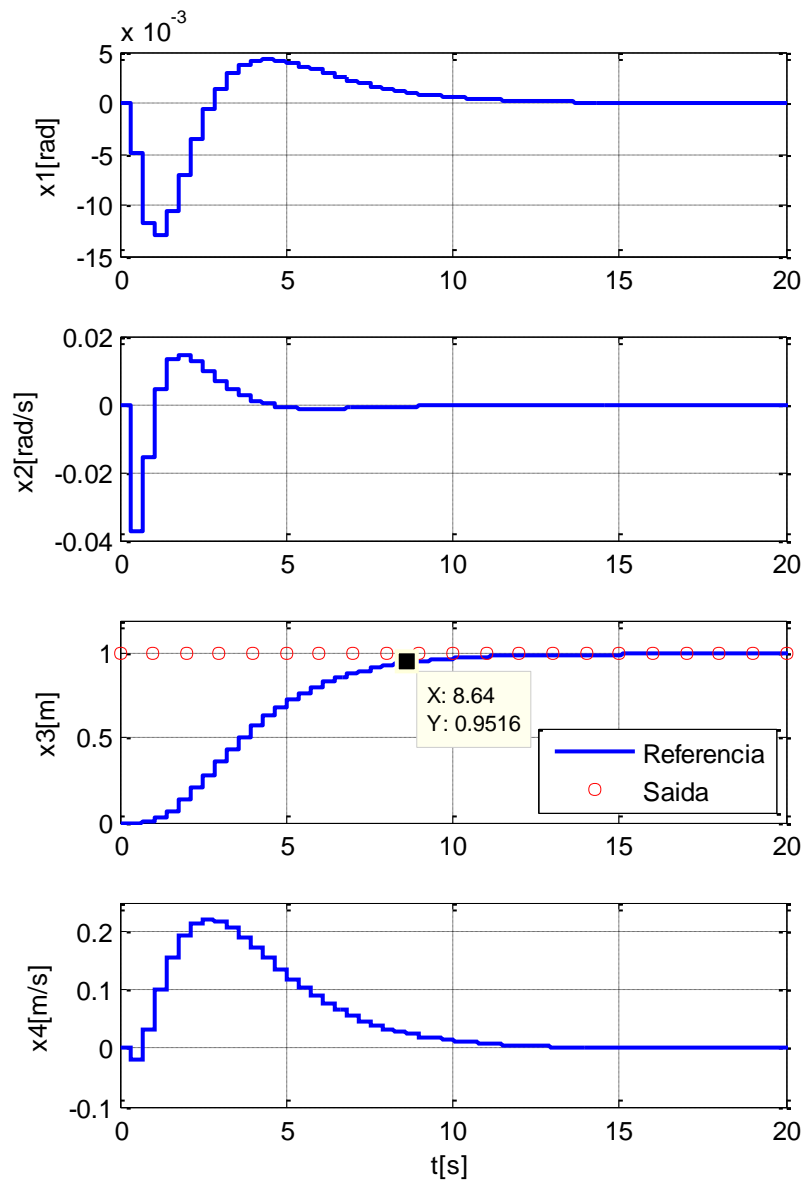


Fonte: Elaborada pelo autor.

O comando dado pelo PIDR é o estado de velocidade do LQR. Esse valor pode ser resgatado internamente nos estados do controlador. O sinal então é direcionado para um sistema de controle de direção diferencial que divide a componente de velocidade entre os dois motores e a sua resultante volta por um integrador com ganho 0,5 para finalmente servir de realimentação do estado de posição. Essa alternância do sinal de velocidade para posição descrita nesse parágrafo é importante para que o sistema funcione de acordo com o exigido pelo projetista como já foi citado ao final da seção 3.2.1.

As curvas dos estados quando o sistema segue um degrau de posição podem ser verificadas pela Figura 17.

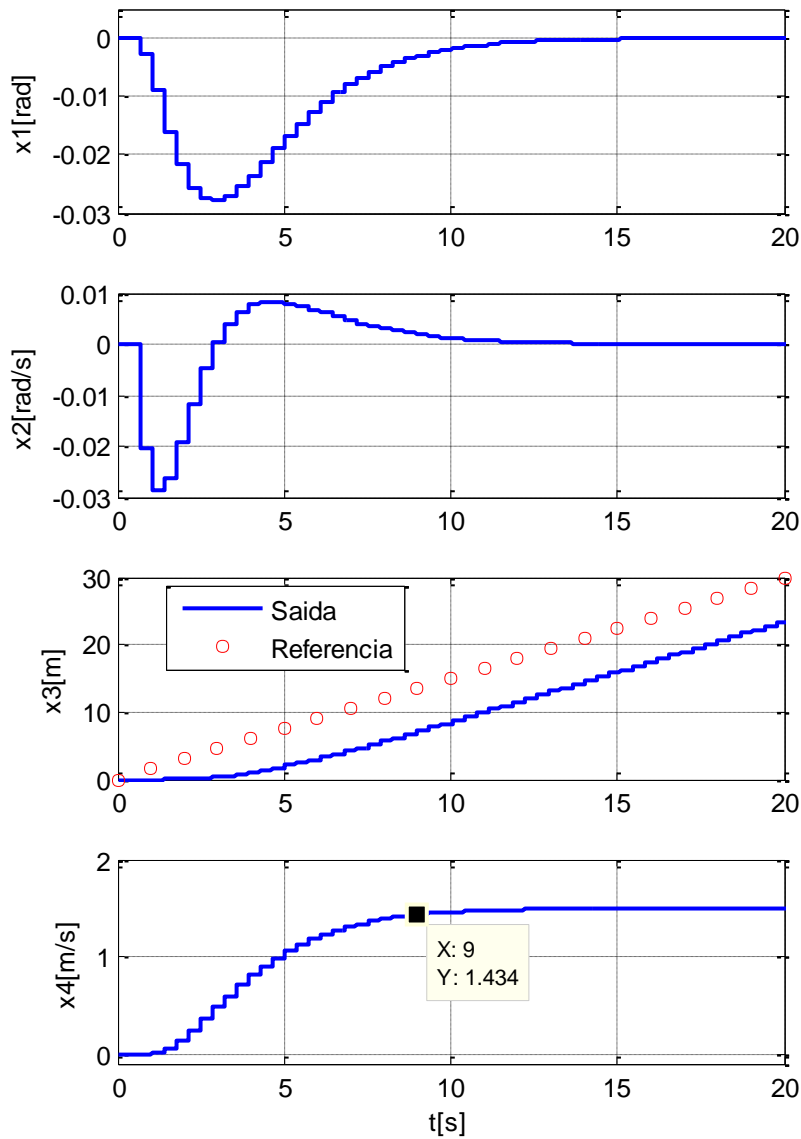
Figura 17 – Variáveis de estado do sistema unificado sob degrau de posição



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mais uma vez é lembrado que a função do sistema não é simplesmente manter o ângulo θ em zero e ser comandado por posição. Também é desejável que o mesmo possa seguir uma referência de velocidade. Essa referência de velocidade é simulada por meio de uma rampa de posição. As curvas desses estados para uma entrada em rampa de posição são observadas na Figura 18.

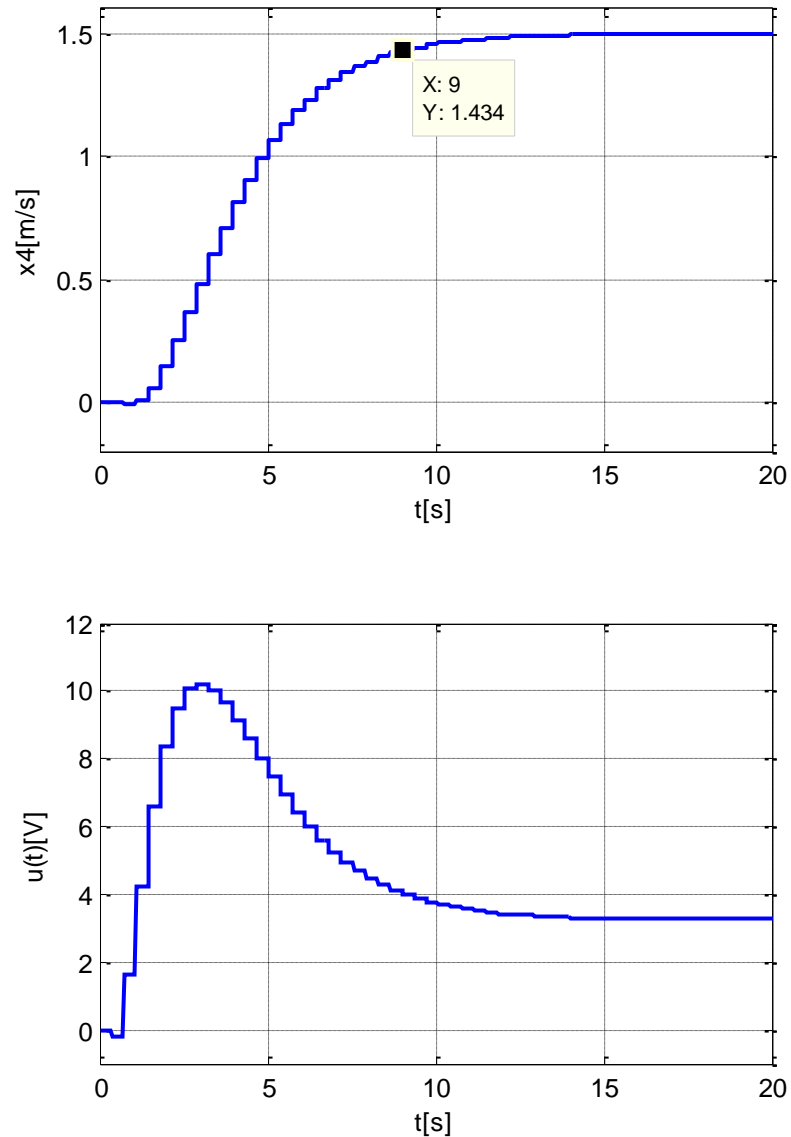
Figura 18 – Variáveis de estado do sistema unificado sob rampa de posição



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como já foi citado na seção 1, o erro em regime de posição no seguimento à rampa não é problemático, uma vez que o sistema atinge regime em velocidade. Mais detalhes sobre a curva de velocidade bem como o sinal de controle são apresentados na Figura 19.

Figura 19 – Velocidade do sistema unificado sob rampa de posição e ação de controle



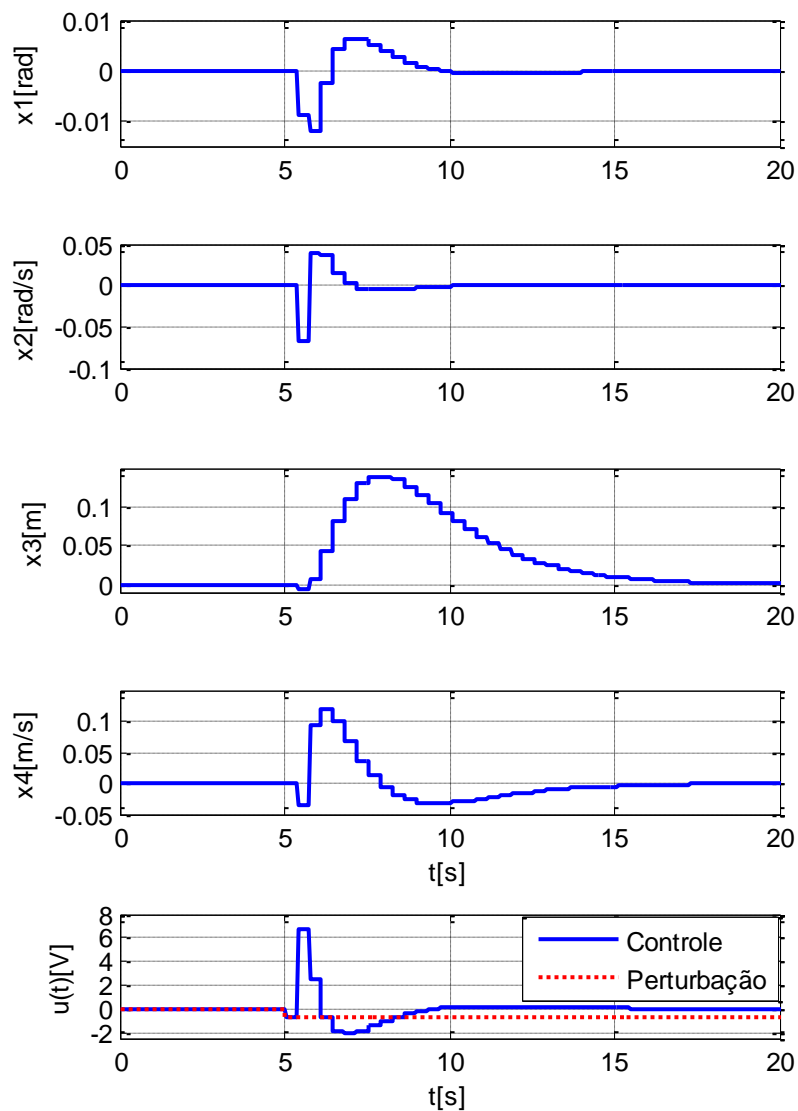
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que a velocidade possui um tempo de assentamento a critério de 5% em 9 segundos. O sinal de controle atinge 10 volts, 80% de seu limite máximo de 12V. Logo espera-se que na prática esse seja o comando padrão de velocidade para a partida do robô, pois exige bastante controle com uma distância confortável do valor de saturação.

O controle de posição possui sua importância quando o sistema deve permanecer parado, porém alguma ação perturba o sistema. Essa simulação pode ser feita por intermédio

de referências nulas e uma perturbação no sinal de controle sistema. Sob as condições descritas, adotando-se uma perturbação de $-0,75$ do tipo degrau em 5 segundos, os estados se comportam de acordo com a Figura 20.

Figura 20 – Variáveis de estado e sinal de controle do sistema unificado sob perturbação em 5 segundos no sinal de controle

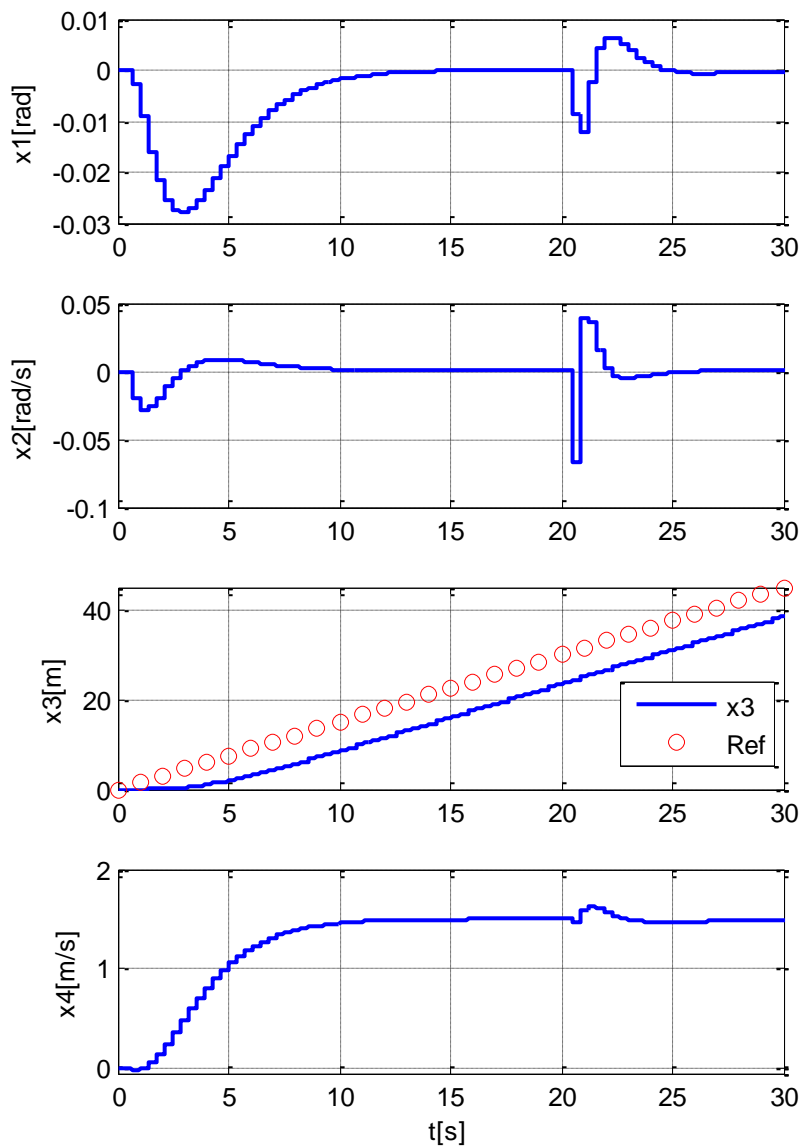


Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que o sistema rejeitou adequadamente a perturbação de $-0,75$ volts no sinal de controle e não manteve um erro de posição. Graficamente, nota-se que o sistema corrige a perturbação 15 segundos após a aplicação da mesma.

O mesmo comportamento do sistema se mantendo estável apesar do distúrbio também é observado durante uma referência de velocidade. Para isso comanda-se por rampa de posição e insere-se a mesma perturbação. Observam-se as curvas na Figura 21.

Figura 21 – Variáveis do sistema unificado sob rampa de posição, perturbação em 20s

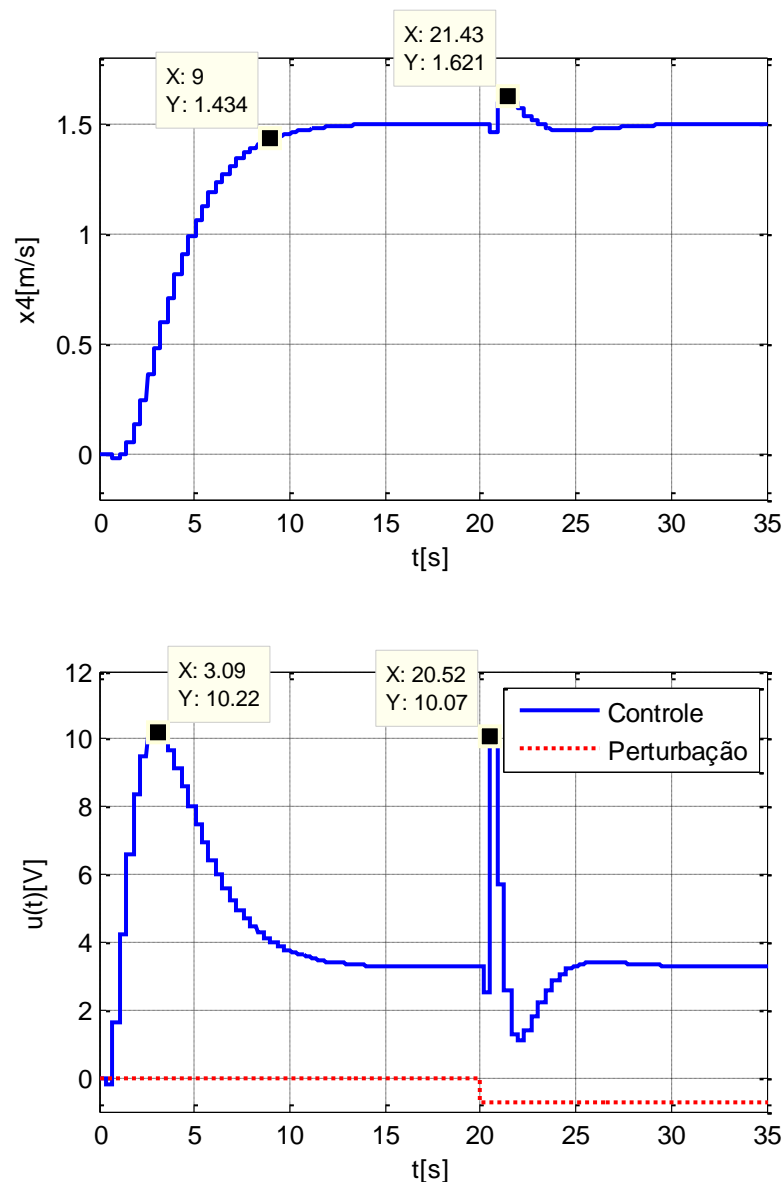


Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que a perturbação de controle ocasionou uma oscilação nas variáveis de estado (embora não seja visível em posição, pois em escala a perturbação é imperceptível). O sobressinal é rapidamente eliminado da resposta do sistema permitindo que as variáveis de estado retornem ao regime permanente sem erros. A posição é o único sinal que manteve um erro mínimo devido à presença do integrador, porém esse erro é indiferente para o projeto.

Mais detalhes sobre o segmento à referência de velocidade bem como o sinal de controle podem ser observados na Figura 22.

Figura 22 – Velocidade do sistema unificado sob rampa de posição, perturbação em 20s



Fonte: Elaborada pelo autor.

O sinal de controle responde rapidamente à perturbação com um pico que anula a perturbação sem saturação. Observa-se que uma perturbação de controle pode ser cancelada operando em uma velocidade de 1,5 metros por segundo através da elevação do sinal de controle para 80% do seu valor máximo. Logo, para fins práticos, não é recomendado que após a partida aumente-se a velocidade de operação do sistema, pois isso faz com que a rejeição de perturbações comece a exigir valores mais altos de controle que logo levariam o sistema à saturação e inevitavelmente à instabilidade. Adota-se portanto 1,5 metros por segundo como velocidade de partida e velocidade em regime permanente do sistema.

5 MONTAGEM DE UM PROTÓTIPO DE PIDR

Além dos testes de simulação que foram apresentados neste trabalho, também como propostas de trabalhos futuros serão realizados testes experimentais em um protótipo de PIDR. Até a apresentação deste trabalho a montagem do protótipo está em fase de impressão 3D das peças.

Para tracionar o robô foram escolhidos motores de 12 volts do modelo RS540, que atingem 16800 rotações por minuto. Essa velocidade é muito elevada para ser transmitida diretamente para as rodas e também limitava a capacidade de fornecimento de torque do motor, então utilizam-se também caixas de redução p60 com fator de redução de 20:1 nos eixos de cada motor. As caixas de redução devem ser conectadas aos eixos das rodas de 4,5 polegadas de diâmetro, aproximadamente 11,5 centímetros. Esses componentes descritos estão ilustrados pela Figura 23.

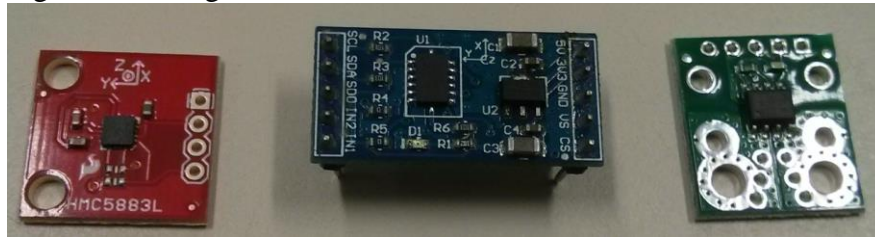
Figura 23 – Motor, roda e caixa de redução.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a aquisição do valor do ângulo de inclinação, da posição deslocada e do direcionamento serão utilizados sensores tratados com filtros de Kalman. O ângulo será obtido por um acelerômetro de especificação ADXL345 com duplo integrador, a posição deslocada através de estimação pelas leituras de corrente com sensores ACS711LC e a referência de deslocamento pelo magnetômetro HMC5883L. Esses componentes são mostrados na Figura 24.

Figura 24 – Magnetômetro, acelerômetro e sensor de corrente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para processar os sinais dos sensores e calcular a saída de controle, será utilizado um Arduino Mega 2560 (Figura 25).

Figura 25 – Arduino Mega 2560



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CONCLUSÕES

As simulações do controle do pêndulo invertido sobre duas rodas apresentaram resultados satisfatórios que garantem uma boa operação do controle e fornecem boas expectativas de funcionamento para aplicação em um sistema real.

Observou-se que a principal variável de estado, que é o ângulo θ , permaneceu em torno de zero sem exceder a região de linearização. Foram realizados testes com perturbações e diferentes tipos de comando de posição e o controlador respondeu muito bem em todas as ocasiões sem saturar.

O comando de velocidade dado por rampa de posição demonstrou-se prático e sua implementação garantiu que houvesse um erro mínimo de posição. Além disso a simulação com perturbação com referências nulas de ângulo e posição demonstrou que essa estratégia de comando indireto também garante que o PIDR tenda a permanecer sempre no mesmo ponto enquanto não houver uma mudança na referência de posição. A mesma simulação também mostrou que o sistema também não desestabiliza sobre influência de uma perturbação no sinal de controle em sua movimentação e o controlador de velocidade rejeita completamente essa perturbação.

O tempo de amostragem escolhido para o LQR de 3,6 segundos demonstrou-se suficiente para rejeitar perturbações do tipo degrau de intensidade $-0,7$ volts, mantendo o sinal de controle dentro da faixa de 80% do valor de saturação da fonte do controlador.

Para versões futuras recomenda-se aplicação de controle adaptativo, para o controlador operar corretamente com a planta não-linear e garantir uma faixa de operação mais ampla. Também deve-se aprimorar o comando de desvio de trajetória. Existem estudos sobre controladores para direção diferencial que ajudem a garantir que o sistema real faça curvas mais suaves e que o controlador tenha melhor conhecimento desse desvio de trajetória, isso pode ser feito aprimorando-se o modelo.

A montagem do protótipo prevê que sejam adicionadas novas considerações. A primeira delas é o tratamento da leitura de sensores como acelerômetro e giroscópio, que são sensores muito utilizados em PIDR. Acredita-se que será usado Filtro de Kalman para garantir uma leitura precisa desses sensores e com acúmulo mínimo de erros. Outra nova consideração que deverá ser tomada é a análise de robustez do controlador para garantir que imperfeições de montagem que causam incerteza nos dados de modelagem não prejudiquem a operação do sistema.

REFERÊNCIAS

GRASSER, Felix; D'ARRIGO, Aldo; COLOMBI, Silvio. **JOE: A Mobile, Inverted Pendulum**. IEEE Transactions on Industrial Electronics, v. 49, p. 107-114, fev. 2002. INSPEC Accession Number: 7177968.

SEGWAY INC®. **Segway PT**. Disponível em: <<http://www.segway.co.nz/patrol/>>. Acessado em 05 nov. 2014.

SEGWAY EVENTS. **Segway Rally Experience**. Disponível em: <<http://www.segway.co.nz/patrol/>>. Acessado em 05 nov. 2014.

MORALES, Gladys Y.; PLAZAS, Sergio A.; CÓMBITA, Luis F. **Implementation and Closed Loop Identification of a Two Wheeled Inverted Pendulum Mobile Robot**. Brazilian Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium, Fortaleza, p. 97-102, out. 2012. INSPEC Accession Number: 13152653.

OOI, Rich Chi. **Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot**. 2003. 72 f. Tese (Graduação em Engenharia Mecatrônica) – Faculty of Engineering and Mathematical Sciences, The University of Western Australia, Perth, 2003.

HA, Jung-Su; LEE, Ju-Jang. **Position Control of Mobile Two Wheeled Inverted Pendulum Robot by Sliding Mode Control**. IEEE International Conference on Control, Automation and Systems, Jeju, p. 715-719, out. 2012. INSPEC Accession Number: 13225324.

HUANG, Cheng-Hao; WANG, Wen-June; CHIU, Chih-Hui. **Design and Implementation of Fuzzy Control on a Two-Wheel Inverted Pendulum**. IEEE Transactions on Industrial Electronics, v. 58, n. 7, p. 2988-3001, jul. 2011. INSPEC Accession Number: 7177968.

WU, Junfeng; ZHANG, Wanying; WANG, Shengda. **A Two-Wheeled Self-Balancing Robot with the Fuzzy PD Control Method**. Mathematical Problems in Engineering, v. 2012, p. 1-13, out. 2012. Article ID: 469491. doi:10.1155/2012/469491.

BATURE, Amir A; BUYAMIN, Salinda; AHMAD, Mohamed N.; MUHAMMAD, Mustapha. **A Comparison of Controllers for Balancing Two Wheeled Inverted Pendulum Robot**. International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering, v. 14, n. 3, p. 62-68, jun. 2014.

OGATA, Katsuhiko. **Discrete-Time Control Systems**. 2 ed. Nova Jérĩa: Prentice Hall, 1994.

ÅSTRÖM, Karl Johan; WITTENMARK, Björn. **Adaptive Control**. 2 ed. Mineola: Dover, 2008.

____; HÄGGLUND, Tore; **PID Controllers: Theory, Design, and Tuning**. 2 ed. Research Triangle Park: Instrument Society of America, 1995.

KALRA, Sonal; PATEL, Dispesh; STOL, Karl. **Design and Hybrid Control of a Two Wheeled Robotic Platform**. Disponível em: <<http://www.araa.asn.au/acra/acra2007/papers/paper186final.pdf>>. Acesso em: 30 out. 2014.

SUNDIN, Christian; THORSTENSSON, Filip. **Autonomous balancing robot: Design and construction of a balancing robot**. 2012. 76 f. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Gotemburgo.

LAGES, Walter Fetter. **Aproximações Discretas para Funções de Transferência Contínuas**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <<http://www.ece.ufrgs.br/~fetter/eng04037/approx.pdf>>. Acesso em: 07 nov. 2014.

ANDERSON, David Pope. **nBot Balancing Robot**. Disponível em: <<http://www.geology.smu.edu/~dpa-www/robo/nbot/>>. Acesso em: 9 out. 2014.