Звіт

про виконання завдання з самостійної роботи

з курсу «Послідовності незалежних випробувань»

тема «Ймовірності добутку та суми подій»

студентом Попов А. А. (група КС-231)

в 2024-2025 навчальному році

за індивідуальним варіантом даних №17

Завдання 1. Фабрика випускає 75 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що із 300 виробів, виготовлених фабрикою, кількість першосортних виробів буде: а) 130 виробів; б) 130 – 150; в) не більше 180.

Розв’язання:

а) кількість першосортних виробів дорівнює 75%;

Оскільки відомо точну кількість виробів, доцільно буде використати локальну теорему Лапласа (але при її використанні відповіді будуть наближеними, а не точними):

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях з ймовірністю появи події A рівній p (0<p<1) подія A наступить рівно k разів (байдуже в якій послідовності) визначається за наближеною формулою:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\text{ де}$$

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Підставимо значення у формули:

$$x=\frac{130-300*0.75}{\sqrt{300*0.75*0.25}}\approx-12.6,\quad \varphi(12.6)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-(-12.6)^2}{2}}\approx 0$$

$$P_{300}(130)=\frac{1}{\sqrt{300\cdot 0,75\cdot 0,25}}\cdot 0\approx 0$$

Відповідь: $P_{300}(130)\approx 0$.

<u>б) кількість першосортних виробів 130 – 150;</u>

Оскільки кількість разів появи події А серед n випробувань (першосортних виробів) коливається від 130 до 150, то можна скористатися інтегральною теоремою Лапласа:

Ймовірність того, що в п незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події рівна р (0<p<1), подія наступить не менше k_1 разів і не більше k_2 разів приблизно рівна*:*

$$P(k1;\ k2) = \Phi(x¿¿'')-\Phi(x¿¿')¿¿,$$ де

p = 0,75, q = 0,25, n = 300, k1 = 130, k2 = 150, $\Phi(x¿¿')¿$ – функція Лапласа,

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислимо x' *та* x''*:*

$$x'=\frac{130-300\cdot 0.75}{\sqrt{300\cdot 0.75\cdot 0.25}}=-12,6.\ x''=\frac{150-300\cdot 0.75}{\sqrt{300\cdot 0.75\cdot 0.25}}=-10.$$

$$\Phi(x¿¿')=\Phi(-12,6)=-\Phi(12,6)\approx 0;¿$$

$$\Phi(x¿¿'')=\Phi(-10)=-\Phi(10)\approx 0;¿$$

$$P(130;150)=\Phi(-10)-\Phi(-12,6)\approx 0;$$

Відповідь: *Р(130; 150)* ≈ 0.

<u>в) кількість першосортних виробів не більша за 180;</u>

Для розв’язання цієї підзадачі також доцільно використати інтегральну формулу Лапласа. Значення коливається від 0 до 180:

$$P(k1;\ k2) = \Phi(x¿¿'')-\Phi(x¿¿')¿¿,$$ де

p = 0,75, q = 0,25, n = 300, k1 = 0, k2 =180, $\Phi(x¿¿')¿$ – функція Лапласа,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислимо x' та x'':

$$x' = \frac{0 - 300 \cdot 0,75}{\sqrt{300 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = -30. x'' = \frac{180 - 300 \cdot 0,75}{\sqrt{300 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = -6.$$

$$\Phi(x¿¿') = \Phi(-30) = -\Phi(30) \approx 0; ¿$$

$$\Phi(x¿¿'') = \Phi(-6) = -\Phi(6) \approx 0; ¿$$

$$P(0;180) = \Phi(-6) - \Phi(-30) \approx 0;$$

Відповідь: $P(0; 180) \approx 0$.

Висновок: *для розв’язання підзадач даної задачі варто застосовувати локальну та інтегральну теореми Лапласа.*

Завдання 2. Серед великої кількості мікросхем, що знаходяться в комплекті, 17% – нестандартні. Знайти ймовірності того, що серед 3 мікросхем, навмання взятих із комплекту, буде:

а) тільки одна нестандартна;

б) принаймні одна нестандартна.

Розв’язання:

а) тільки одна нестандартна;

Для розв’язання використаємо формулу Бернулі:

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події рівна p , подія наступить рівно k раз (байдуже, в якій послідовності), рівна:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, де\ q = 1 - p, n = 3, k = 1, p = 0,1, q = 0,9$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,17^1 \cdot 0,87^2 = 3 \cdot 0,17 \cdot 0,7569 = 0,386019.$$

Відповідь: $P_3(1) = 0,386019.$

б) принаймні одна нестандартна;

Наша подія, де принаймні одна нестандартна, утворює групу з подією, де немає жодної нестандартної деталі, тому спочатку обчислюємо ймовірність події, в якій буде 0 нестандартних деталей за допомогою формули Бернуллі, а потім за формулою доповнення ймовірність, коли хоча б одна деталь буде нестандартною:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \text{ де } q=1-p, n=3, k=0, p=0{,}17, q=0{,}87.$$

$$P_3(0)=C_3^0\cdot 0{,}17^1\cdot 0{,}87^2=1\cdot 0{,}17\cdot 0{,}7569=0{,}128673.$$

Тепер обчислимо $P(A)$:

$$P(A)=1-P_3(0)=1-0{,}128673=0{,}871327.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}871327$.

Висновок*: для цього виду задач краще використовувати формулу Бернуллі.*

Завдання 3. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірності того, що протягом години на телефонну станції зателефонують:

а) 3 абоненти;

б) не більше 2 абонентів.

Розв’язання:

а) зателефонує 3 абоненти;

Оскільки загальна кількість випробувань велика (2000), а значення ймовірності дуже маленьке(p=0.001), то скористаємось формулою Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{ де } \lambda=n\cdot p.$$

$\lambda=2\,000\cdot 0{,}001=2$.

$$P_{2\,000}(3)=\frac{1^3\cdot e^{-2}}{3!}=\frac{1}{6e^2}=0{,}0225559.$$

Відповідь: $P_{2\,000}(3)=0{,}0225559$.

б) зателефонує не більше 2 абонентів;

Якщо не більше 2, то виходить що можуть зателефонувати лише перші 2 абонентів (від 0 до 2), тому представимо подію у вигляді суми подій:

$$P(A)=P_{2000}(0)+P_{2000}(1)+P_{2000}(2)¿¿.$$

Обчислимо кожну подію окремо:

$$P_{2000}(0)=\frac{1^0\cdot e^{-2}}{0!}\approx 0,1353;$$

$$P_{2000}(1)=\frac{1^1\cdot e^{-2}}{1!}\approx 0,1353;$$

$$P_{2000}(2)=\frac{1^2\cdot e^{-2}}{2!}\approx 0,0677;$$

$$P(A)=0,1353+0,1353+0,0677=0,3383.$$

Відповідь: $P(A)=0,3383.$

Висновок: при великих значеннях випробувань та дуже маленьких значеннях ймовірності необхідно використовувати формулу Пуассона.