

Звіт

про виконання завдання з самостійної роботи

з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика»

тема «Числові характеристики дискретних випадкових величин»

студентом Попов А. А. (група КС-231)

в 2024-2025 навчальному році

за індивідуальним варіантом даних №17

Завдання 1. Дано закони розподілу незалежних дискретних випадкових величин X та Y :

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P	a	a	$5a$	a	$2a$

Y	y_1	y_2	y_3	y_4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Розв'язання:

Знайти:

Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для законів розподілу $2X$, $X+Y$, XY , $X-Y$.

Для виконання цього завдання скористаємося результатами обрахунку, які ми отримали в попередній роботі, а саме для законів розподілу $2X$, $X+Y$, XY та $X-Y$.

б) закони розподілу випадкових величин $2X$, $X+Y$, XY , $X-Y$.

X	-3	-2	-1	0	1
P	0,1	0,1	0,5	0,1	0,2

Y	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Спочатку знайдемо $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу $2X$:

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають суму добутків всіх її можливих значень x_i на їх ймовірності p_i

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Математичне сподівання характеризує середнє значення, біля якого зосереджені всі можливі значення випадкової величини. Перелічимо основні властивості математичного сподівання:

$2X$	-6	-4	-2	0	2
P	0,1	0,1	0,5	0,1	0,2

Тепер знайдемо математичне сподівання:

$$M(2X) = -6 * 0,1 - 4 * 0,1 - 2 * 0,5 + 0 * 0,1 + 2 * 0,2 = -1,6.$$

Далі, обчислимо дисперсію.

Означення. Дисперсією (розсіянням) випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто

Так як, у нас випадкова величина дискретна, скористаємося формулою обрахунку дисперсії для дискретних величин:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n x_i^2 * p_i - m_x^2.$$

Математичне сподівання обраховане, тому знову його обраховувати не потрібно. $M_x = M(2X) = -1,6$.

Тепер складаємо ряд розподілу для випадкової величини $2X^2$.

$2X^2$	36	16	4	0	4
P	0,1	0,1	0,5	0,1	0,2

І обчислимо:

$$M(2X^2) = 36 * 0,1 + 16 * 0,1 + 4 * 0,5 + 0 * 0,1 + 4 * 0,2 = 8.$$

Тепер скористаємося формулою для обчислення дисперсії:

$$D(2X) = 8 - (-1,6)^2 = 8 - 2,56 = 5,44.$$

Дисперсія додатна значить обрахунок правильний.

Обрахуємо середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Формула середнього квадратичного відхилення:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Обраховуємо:

$$\sigma[2X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{5,44} = 2,3323.$$

Знаходження $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу $2X$, завершено.

$$\underline{X+Y}$$

Знайдемо $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу $X+Y$:

X+	-2	-1	0	1	1	0	1	2	0	1	2	3	1
Y													
P	0,04	0,03	0,01	0,02	0,04	0,03	0,01	0,02	0,2	0,15	0,05	0,1	0,04
2	3	4	2	2	3	4							
0,03	0,01	0,02	0,08	0,06	0,02	0,04							

Обраховуємо математичне сподівання за формулою:

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i * p_i.$$

$$\begin{aligned} M(X + Y) = & -2 * 0,04 - 1 * 0,03 + 0 * 0,01 + 1 * 0,02 + 1 * 0,04 + 0 * 0,03 + \\ & 1 * 0,01 + 2 * 0,02 + 0 * 0,2 + 1 * 0,15 + 2 * 0,05 + 3 * 0,1 + 1 * 0,04 + 2 * 0,03 + 3 \\ & * 0,01 + 4 * 0,02 + 2 * 0,08 + 2 * 0,06 + 3 * 0,02 + 4 * 0,04 = \\ & -0,08 - 0,03 + 0 + 0,02 + 0,04 + 0 + 0,01 + 0,04 + 0 + 0,15 + 0,1 + 0,3 + 0,04 + 0,06 + 0,03 + 0,08 + 0,16 + \\ & 0,12 + 0,06 + 0,16 = 1,2 \end{aligned}$$

Далі, обчислимо дисперсію.

$$D[X] = \sum_{i=1}^n x_i^2 * p_i - m_x^2.$$

$$m_x = M(X) = 1,2.$$

Складаємо ряд розподілу для випадкової величини $(X+Y)^2$.

$(X+Y)^2$	4	1	0	1	1	0	1	4	0	1	4	9	1
P	0,04	0,03	0,01	0,02	0,04	0,03	0,01	0,02	0,2	0,15	0,05	0,1	0,04
4	9	16	4	4	9	16							
0,03	0,01	0,02	0,08	0,06	0,02	0,04							

$$\begin{aligned}
 M(X+Y)^2 &= 4 * 0,04 + 1 * 0,03 + 0 * 0,01 + 1 * 0,02 + 1 * 0,04 + 0 * 0,03 + 1 * 0,01 + 4 * 0,02 + 0 * 0,2 + 1 * 0,15 + 4 * 0,05 + 9 * 0,1 + 1 * 0,04 + 4 * 0,03 + 9 * \\
 &\quad 0,01 + 16 * 0,02 + 4 * 0,08 + 4 * 0,06 + 9 * 0,02 + 16 * 0,04 = \\
 &= 0,16 + 0,03 + 0 + 0,02 + 0,04 + 0 + 0,01 + 0,08 + 0 + 0,15 + 0,2 + 0,9 + 0,04 + 0,12 + 0,09 + 0,32 + 0,32 + 0,16 + 0,03 + 0,06 = 3,74
 \end{aligned}$$

$$D[X+Y] = 3,74 - 1,2^2 = 3,74 - 1,4884 = 2,2516.$$

Обрахуємо середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

$$\sigma[X] = \sqrt{2,2516} = 1,5005.$$

Знаходження $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу $X+Y$, завершено.

XU

Знайдемо $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу **XU**:

XY	-3	-6	-9	-12	-2	-4	-6	-8	-1	-2	-3	-4	0
P	0,04	0,03	0,01	0,02	0,04	0,03	0,01	0,02	0,2	0,15	0,05	0,1	0,04

2	3	4	1	2	3	4
0,03	0,01	0,02	0,08	0,06	0,02	0,04

Обраховуємо математичне сподівання за формулою:

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i * p_i.$$

$$M(XY) = -3 * 0,04 - 6 * 0,03 - 9 * 0,01 - 12 * 0,02 - 2 * 0,04 - 4 * 0,03 - 6 * 0,01 - 8 * 0,02 - 1 * 0,2 - 2 * 0,15 - 3 * 0,05 - 4 * 0,1 + 0 * 0,04 + 2 * 0,03 + 3 * 0,01 + 4 * 0,02 + 1 * 0,08 + 2 * 0,06 + 3 * 0,02 + 4 * 0,04 = -1,49.$$

Далі, обчислимо дисперсію.

$$D[X] = \sum_{i=1}^n x_i^2 * p_i - m_x^2.$$

$$m_x = M(XY) = -1,49.$$

Складаємо ряд розподілу для випадкової величини $(XY)^2$.

$(XY)^2$	9	36	81	144	4	16	36	64	1	4	9	16	0
P	0,04	0,03	0,01	0,02	0,04	0,03	0,01	0,02	0,2	0,15	0,05	0,1	0,04

4	9	16	1	4	9	16
0,03	0,01	0,02	0,08	0,06	0,02	0,04

$$M(XY)^2 = 9 * 0,04 + 36 * 0,03 + 81 * 0,01 + 144 * 0,02 + 4 * 0,04 + 16 * 0,03 + 36 * 0,01 + 64 * 0,02 + 1 * 0,2 + 4 * 0,15 + 9 * 0,05 + 16 * 0,1 + 0 * 0,04 + 4 * 0,03 + 9 * 0,01 + 16 * 0,02 + 1 * 0,08 + 4 * 0,06 + 9 * 0,02 + 16 * 0,04 = 11,45.$$

$$D[(XY)^2] = 11,45 - (-1,49)^2 = 9,23.$$

Обрахуємо середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

$$\sigma[(XY)^2] = \sqrt{9,23} = 3,03.$$

Знаходження $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу $X+Y$, завершено.

X-Y

Знайдемо $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу $X-Y$:

X-Y	-4	-5	-6	-7	-3	-4	-5	-6	-2	-3	-4	-5	-1
P	0,04	0,03	0,01	0,02	0,04	0,03	0,01	0,02	0,2	0,15	0,05	0,1	0,04

-2	-3	-4	0	-1	-2	-4
0,03	0,01	0,02	0,08	0,06	0,02	0,04

Знаходимо математичне сподівання $M(X-Y)$.

$$M(X-Y) = -4 * 0,04 - 5 * 0,03 - 6 * 0,01 - 7 * 0,02 - 3 * 0,04 - 4 * 0,03 - 5 * 0,01 - 6 * 0,02 - 2 * 0,2 - 3 * 0,15 - 4 * 0,05 - 5 * 0,1 - 1 * 0,04 - 2 * 0,03 - 3 * 0,01 - 4 * 0,02 + 0 * 0,08 - 1 * 0,06 - 2 * 0,02 - 4 * 0,04 = -2,73.$$

Знаходимо дисперсію $D(X-Y)$:

Складаємо ряд розподілу для випадкової величини $X - Y$.

X-Y	16	25	36	49	9	16	25	36	4	9	16	25	1
P	0,04	0,03	0,01	0,02	0,04	0,03	0,01	0,02	0,2	0,15	0,05	0,1	0,04

4	9	16	0	1	4	16
0,03	0,01	0,02	0,08	0,06	0,02	0,04

$$M(X-Y)^2 = 16 * 0,04 + 25 * 0,03 + 36 * 0,01 + 49 * 0,02 + 9 * 0,04 + 16 * 0,03 + 25 * 0,01 + 36 * 0,02 + 4 * 0,2 + 9 * 0,15 + 16 * 0,05 + 25 * 0,1 + 1 * 0,04 + 4 * 0,03 + 9 * 0,01 + 16 * 0,02 + 0 * 0,08 + 1 * 0,06 + 4 * 0,02 + 16 * 0,04 = 10,26.$$

$$D[(X - Y)^2] = 10,26 - (-2,73)^2 = 2,8.$$

Обрахуємо середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

$$\sigma[X - Y] = \sqrt{2,8} = 1,67.$$

Знаходження $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу $X-Y$, завершено.

Відповідь: Результати знаходження $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для законів розподілу $2X$, $X+Y$, XY , $X-Y$:

$$\sigma[2X] = 2,3323.$$

$$M[2X] = -1,6.$$

$$M[X + Y] = 1,2.$$

$$D[X + Y] = 2,5516.$$

$$\sigma[X + Y] = 1,5973.$$

$$M[X*Y] = -1,49.$$

$$D[X*Y] = 9,23.$$

$$\sigma[X*Y] = 3,03.$$

$$M[X - Y] = -2,73.$$

$$D[X - Y] = 2,8.$$

$$\sigma[X - Y] = 1,67.$$

Завдання 2. Для дискретної випадкової величини відомий ряд розподілу. Знайти числові характеристики цієї випадкової величини: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

X	-2	-1	0	2	4
p_i	0,33	0,13	0,2	0,13	0,2

Формули для обчислення $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, подано в першому завданні, тому будемо обчислювати по ним.

Знайдемо $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу \underline{X} :

$$M[X] = -2 * 0,33 - 1 * 0,13 + 0 * 0,2 + 2 * 0,13 + 4 * 0,2 = 0,27.$$

Далі, обчислимо дисперсію.

Так як, у нас випадкова величина дискретна, скористаємося формулою обрахунку дисперсії для дискретних величин:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n x_i^2 * p_i - m_x^2.$$

Математичне сподівання обраховане, тому знову його обраховувати не потрібно $M(X) = 0,27$.

Тепер складаємо ряд розподілу для випадкової величини X^2 .

X	4	1	0	4	16
p_i	0,33	0,13	0,2	0,13	0,2

І обчислимо:

$$M(X^2) = 4 * 0,33 + 1 * 0,13 + 0 * 0,2 + 4 * 0,13 + 16 * 0,2 = 6,17.$$

Тепер скористаємося формулою для обчислення дисперсії:

$$D[X] = 6,17 - 0,27^2 = 6,1$$

Дисперсія додатна значить обрахунок правильний.

Обрахуємо середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Формула середнього квадратичного відхилення:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Обраховуємо:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{6,1} = 2,47.$$

Знаходження $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу X , завершено.

Відповідь: Результати знаходження $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для закону розподілу X :

$$M(X) = 0,27.$$

$$D[X] = 6,1.$$

$$\sigma[X] = 2,47.$$