Звіт

про виконання завдання з самостійної роботи

з курсу «**Теорія ймовірностей та математична статистика**»

тема **«СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ»**

студентом Попов А. А. (група КС-231)

в 2024-2025 навчальному році

за індивідуальним варіантом даних №17

Задача 1. З нормально розподіленої генеральної сукупності взята вибірка об’єму n = 10.

x_i	1350	1360	1370	1380
n_i	3	3	3	1

За вибіркою знайти:

1) незміщену оцінку генеральної середньої;

2) незміщену оцінку генеральної дисперсії;

3) інтервальну оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95;

4) інтервальну оцінку генеральної дисперсії з надійністю 0,99.

Розв’язання:

Для спрощення розрахунків використаємо умовні варіанти, тобто:

$$z_i = \frac{x_i - x_0}{h}$$ де:

x_0 — умовний нуль

h — інтервал між сусідніми значеннями x_i.

Виберемо x_0=1360, h=10.

Тоді умовні варіанти:

для x_1 = 1350, $z_1 = \frac{1350-1360}{10} = -1.$

для x_2 = 1360, $z_2 = \frac{1360-1360}{10} = 0$

для x_3 = 1370, $z_3 = \frac{1370-1360}{10} = 1$

для x_4 = 1380, $z_4 = \frac{1380-1360}{10} = 2$

x_i	n_i	z_i	$z_i n_i$	$z^2_i n_i$
1350	2	-1	2	
1360	4	0	0	
1370	3	1	3	
1380	1	2	4	

1) Незміщена оцінка генеральної середньої:

Формула для обчислення незміщеної оцінки генеральної середньої:

$$\bar{x} = x_0 + h * \frac{\sum z_i n_i}{n}$$

Підставимо значення у формулу:

$$\sum z_i n_i = -2 + 0 + 3 + 2 = 3.$$

$$\bar{x} = 1360 + 10 * \frac{3}{10} = 1360 + 3 = 1363.$$

Відповідь: Незміщена оцінка генеральної середньої:

$\bar{x} = 1363.$

2) Незміщена оцінка генеральної дисперсії

Формула для обчислення незміщеної оцінки генеральної дисперсії:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

Підставимо значення у формулу:

$$\sum z_i^2 n_i = 2 + 0 + 3 + 4 = 9.$$

$$S^2 = 100 * 0.9 - 9 = 90 - 9 = 81.$$

Відповідь: Незміщена оцінка генеральної дисперсії: $S^2=81$.

3) Інтервальна оцінка генеральної середньої з надійністю 0,95

Формула для розрахунку довірчого інтервалу:

$$\bar{x} = t_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ де:}$$

$t_{\alpha/2}$— квантиль розподілу Стьюдента для рівня значущості α=0.05.

Знайдемо S:

$$S = \sqrt{81} = 9.$$

За табличними значеннями для α=0.05 і ν=9: $t_{\alpha/2}$= 2.262.

Розрахуємо довірчий інтервал:

$$\bar{x} = \pm t_{\alpha/2} * \frac{S}{\sqrt{n}} = 1363 \pm 2.262 * \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

$$\frac{9}{\sqrt{10}} = 2.847, 2.262 * 2.847 = 6.44.$$

$$\bar{x} \pm 6.44 = [1356.56; 1369.44].¿$$

Відповідь: Довірчий інтервал для генеральної середньої: [1356.56;1369.44].

4) Інтервальна оцінка генеральної дисперсії з надійністю 0,99:

Формула для розрахунку довірчого інтервалу:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \right),$$

де:

$X^2_{1-\alpha/2}$,$X^2_{\alpha/2}$ - критичні значення розподілу X^2 з n−1 ступенями свободи для рівня значущості α=0.01,

$$n — 1 = 9;$$

Для α=0.01:

$$X^2_{0.995}=2.088,$$

$$X^2_{0.005}=21.666 \text{ — за таблицею.}$$

Підставимо отримані значення у формулу:

Нижня межа: $\frac{(10-1)*81}{21.666}=\frac{729}{21.666}=33.65.$

Верхня межа: $\frac{(10-1)*81}{2.088}=\frac{729}{2.088}=349.22.$

Відповідь: Довірчий інтервал для генеральної дисперсії: [33.65;349.22].

Задача 2. З нормально розподіленої генеральної сукупності взята вибірка об’єму n=50.

7	x_i	18,34	18,39	19,43	19,46	
	n_i	5	10	20	15	

За вибіркою знайти:

5) незміщену оцінку генеральної середньої;

6) незміщену оцінку генеральної дисперсії;

7) інтервальну оцінку генеральної середньої з надійністю 0,95;

8) інтервальну оцінку генеральної дисперсії з надійністю 0,99.

Розв'язання:

5) Незміщена оцінка генеральної середньої:

Формула:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$$

Обчислимо n_i * x_i для кожного значення x_i:

5 * 18.34 = 91.7,

10 * 18.39 = 183.9,

20 * 19.43 = 388.6,

15 * 19.46 = 291.9.

Знайдемо суму $n_i x_i$:

$$\sum n_i x_i = 91.7 + 183.9 + 388.6 + 291.9 = 956.1.$$

Тепер підставимо отримане число у формулу:

$$\overline{X}=\frac{956.1}{50}=19.122.$$

Відповідь: Отже, незміщена оцінка генеральної середньої: $\overline{X}=19.122$.

6) Незміщена оцінка генеральної дисперсії:

Формула:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \overline{X})^2}{n-1}.$$

Обчислимо відхилення $x_i - \overline{X}$:

18.34 — 19.122 = -0.782,

18.39 — 19.122 = -0.732,

19.43 — 19.122 = 0.308,

19.46 — 19.122 = 0.338.

Знайдемо квадрати відхилень:

$(-0.782)^2 = 0.611524$,

$(-0.732)^2 = 0.535824$,

$(0.308)^2 = 0.094864$,

$(0.338)^2 = 0.114244$.

Помножимо на частоти n_i:

5 * 0.611524=3.05762,
10 * 0.535824=5.35824,
20 * 0.094864=1.89728,
15 * 0.114244=1.71366.

Знайдемо суму:

$$\sum n_i (x_i - \overline{X})^2 = 3.05762 + 5.35824 + 1.89728 + 1.71366 = 12.0268.$$

$$S^2 = \frac{12.0268}{50-1} = \frac{12.0268}{49} = 0.2454.$$

Відповідь: незміщена оцінка генеральної дисперсії: $S^2 = 0.2454$.

7) Інтервальна оцінка генеральної середньої з надійністю 0.95:

Формула:

$$\overline{X} = t_{0.975} * \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Обчислимо стандартну похибку:

$$SE = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0.4954}{7.0711} = 0.07.$$

За таблицею для n−1=49 і рівня надійності 0.95:

$t_{0.975}$ = 2.009.

Межі інтервалу:19.122 ± 2.009 * 0.07:

2.009 * 0.07=0.14063,

19.122 − 0.14063=18.981,

19.122 + 0.14063=19.263.

Відповідь: результат: [18.981;19.263].

8) Інтервальна оцінка генеральної дисперсії з надійністю 0.99:

Формули:

$$\frac{(n-1)*S^2}{X^2_{0.995}}, \frac{(n-1)*S^2¿}{X^2_{0.005}}, \text{ де:}$$

$X^2_{0.995}$ і $X^2_{0.005}$ — значення x_i-квадрат для n — 1 = 49 ступенів свободи.

За таблицею x_i — квадрат:

$X^2_{0.995}$ = 73,

$X^2_{0.005}$ = 27.99.

Обчислюємо чисельник:

(n−1) * S^2=49 * 0.2454 = 12.0266.

Обчислюємо межі:

Нижня межа: $\frac{12.0266}{73}=0.1647$.

Верхня межа: $\frac{12.0266}{27.99}=0.4295$.

Відповідь: [0.1647; 0.4295].

Висновок:

1. Незміщена оцінка середньої: $\overline{X}=19.122$.
2. Незміщена оцінка дисперсії: $\overline{S^2}=0.2454$.
3. Інтервальна оцінка середньої: [18.981;19.263].
4. Інтервальна оцінка дисперсії: [0.1647;0.4295].