

## Звіт

про виконання завдання з самостійної роботи  
з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика»  
тема «ОДНОФАКТОРНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ»

студентом Попов А. А. (група КС-231)

в 2024-2025 навчальному році

за індивідуальним варіантом даних №17

### Варіант 7

#### Задача

Виконано по чотири випробування на кожному з трьох рівнів чинника  $F$ . Методом дисперсійного аналізу при рівні значущості  $\alpha=0,05$  перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх  $\bar{x}_{грj}$ . Вважається, що вибірки взяті з нормальних сукупностей з однаковими дисперсіями. Результати випробувань наведені в таблиці:

Номер випробування, $i$	Рівні фактора		
	$F_1$	$F_2$	$F_3$
1	36	30	21
2	34	24	22
3	35	26	34
4	32	20	31

$\bar{x}_{грj}$			
-----------------	--	--	--

Вказівка. Перейти до умовних варіант  $y_{ij} = x_{ij} - C$ .

## **Розв'язання:**

### **Основна мета аналізу:**

Дисперсійний аналіз дозволяє розкласти загальну дисперсію на дві складові:

1. Міжгрупова дисперсія (через різницю між середніми значеннями груп);
2. Внутрішньогрупова дисперсія (різниця значень всередині груп).

Порівнюючи ці дисперсії, за допомогою F-критерію Фішера визначається, чи існує статистично значуща різниця між групами.

### **Основні формули:**

1. Загальна середня значення по всіх  $x_{ij}$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}}{kn}, \text{ де}$$

де  $k$  — кількість груп (3 рівні фактора  $F$ ),  $n$  — кількість спостережень у кожній групі.

### **Середні значення по групах:**

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n}, j = 1, 2, 3.$$

Це середнє значення для кожного рівня фактора  $F$ .

### **Загальна сума квадратів ( $S_{\text{общ}}$ ):**

$$S_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2.$$

загальна варіація даних навколо загального середнього.

**Міжгрупова сума квадратів  $S_{\text{факт}}$ :**

$$S_{\text{факт}} = n \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{x})^2.$$

варіація, обумовлена відмінностями між груповими середніми.

**Внутрішньогрупова сума квадратів  $S_{\text{ост}}$ :**

$$S_{\text{ост}} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2.$$

варіація, обумовлена відмінностями всередині груп.

**Оцінка дисперсій:**

середньоквадратична міжгрупова дисперсія:  $S_{\text{міжгруп}} = \frac{S_{\text{факт}}}{k-1}.$

середньоквадратична внутрішньогрупова дисперсія:  $S_{\text{вгруп}} = \frac{S_{\text{ост}}}{k(n-1)}.$

**F-критерій Фішера:**  $F = \frac{S_{\text{міжгруп}}}{S_{\text{вгруп}}}.$

Порівняння значення F з критичним значенням  $F_{\text{кр}}$  при рівні значущості  $\alpha=0.05$ .

Якщо  $F > F_{\text{кр}}$ , то відхиляємо нульову гіпотезу.

Усі формули записані, отже переходмо до розв'язку.

Знаходимо середні значення по групах:

$$\text{Група } F_1: \bar{x}_1 = \frac{36+34+35+32}{4} = 34.25.$$

$$\text{Група } F_2: \bar{x}_2 = \frac{30+24+26+20}{4} = 25.$$

$$\text{Група } F_3: \bar{x}_3 = \frac{21+22+34+31}{4} = 27.$$

Знайдемо загальне середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{36+34+35+32+30+24+26+20+21+22+34+31}{12} = 28.75.$$

Далі знайдемо міжгрупову суму квадратів:

$$\text{для } F_1: (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 = (34.25 - 28.75)^2 = 30.25.$$

$$\text{для } F_2: (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 = (25 - 28.75)^2 = 14.0625.$$

$$\text{для } F_3: (\bar{x}_3 - \bar{x})^2 = (27 - 28.75)^2 = 3.0625.$$

$$\text{Знайдемо } S_{\text{факт}}: S_{\text{факт}} = 4 * (30.25 + 14.0625 + 3.0625) = 4 * 47.375 = 189.5.$$

Тепер знайдемо внутрішньогрупову суму квадратів для кожного рівня:

для  $F_1$ (середнє  $\bar{x}_1 = 34.25$ ):

$$(36 - 34.25)^2 = 3.0625,$$

$$(34 - 34.25)^2 = 0.0625,$$

$$(35 - 34.25)^2 = 0.5625,$$

$$(32 - 34.25)^2 = 5.0625.$$

$$\text{Сума} = 3.0625 + 0.0625 + 0.5625 + 5.0625 = 8.75.$$

для  $F_2$ (середнє  $\bar{x}_2 = 25$ ):

$$(30 - 25)^2 = 25,$$

$$(24 - 25)^2 = 1,$$

$$(26 - 25)^2 = 1,$$

$$(20 - 25)^2 = 25.$$

$$\text{Сума} = 25 + 1 + 1 + 25 = 52.$$

для  $F_3$ (середнє  $\bar{x}_3=27$ ):

$$(21-27)^2 = 36,$$

$$(22-27)^2 = 25,$$

$$(34-27)^2 = 49,$$

$$(31-27)^2 = 16.$$

$$\text{Сума} = 36 + 25 + 49 + 16 = 126.$$

Знайдемо  $S_{\text{ост}}$ :

$$S_{\text{ост}} = 8.75 + 52 + 126 = 186.75.$$

Тепер обчислимо середньоквадратичну міжгрупову та середньоквадратичну внутрішньогрупову дисперсію:

$$S_{\text{міжгруп}} = \frac{189.5}{2} = 94.75.$$

$$S_{\text{взгруп}} = \frac{186.75}{9} = 20.75.$$

Тепер можемо обчислити F-критерій Фішера:

$$F = \frac{94.75}{20.75} = 4.57.$$

При рівні значущості  $\alpha=0.05$ , ступені вільності  $df_1=2$  (міжгрупові) і  $df_2=9$  (внутрішньогрупові), критичне значення  $F_{\text{кр}}$  знаходиться з таблиці Фішера. Для цих параметрів  $F_{\text{кр}} \approx 4.26$ .

$$F_{\text{обч}} = 4.57 > F_{\text{кр}} = 4.26.$$

**Висновок:** Оскільки обчислене значення  $F$  більше критичного значення, ми відхиляємо нульову гіпотезу. Це означає, що середні значення для трьох рівнів чинника значущо відрізняються.