

Міністерство освіти і науки України
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Богдана Хмельницького

Факультет Обчислювальної техніки, інтелектуальних та управляючих систем
Кафедра Програмного забезпечення автоматизованих систем

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5
по дисципліні «Вища математика»(2 частина)

Перевірів: ст. викладач кафедри ПЗАС

Гук В.І.

Тема: Дослідження функцій кількох змінних

Варіант 105

Виконав: студент гр. КС-231
Попов А.А.

Черкаси, 2024

Теоретичні відомості:

- Функція багатьох змінних - це математична функція, яка приймає кілька аргументів і повертає одне значення. Зазвичай, якщо ми маємо функцію f з змінними x_1, x_2, \dots, x_n , то її записують як $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де x_1, x_2, \dots, x_n - це аргументи функції, а $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - її значення.

Способи задання:

- аналітично (у вигляді формули)
- таблично (у вигляді таблиці)
- графічно. Графічним зображенням функції $z = f(x, y)$ є поверхня у тривимірному просторі.

Означення. Градієнтом функції $z = f(x, y)$ в точці $A_0(x, y)$ називається вектор площини xOy , координатами якого є частинні похідні в заданій точці.

Неперервність -

- Частинна похідна - нехай у нас є функція f , яка залежить від n змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Тоді частинна похідна функції f за змінною x_i (де i - це номер змінної) обчислюється як похідна цієї функції за x_i , утримуючи інші змінні x_j (де $i \neq j$) постійними.

- Друга частинна похідна функції f за двома змінними x_i і x_j позначається як $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ або $f_{x_i x_j}$. Вона обчислюється шляхом обчислення частинної похідної $\frac{\partial}{\partial x_j}$ від частинної похідної $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

- Диференціал функції f позначається як df і обчислюється за формулою:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - це частинна похідна функції f по змінній x_i , а dx_i - малі зміни цієї змінної.

- Диференціал функції f , позначений як df , визначає лінійне наближення зміни функції в околі точки. За формулою диференціалу:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - частинні похідні функції f за змінними x_i , а dx_i - малі зміни цих змінних.

Цей диференціал може бути використаний для оцінки невеликої зміни Δf функції f внаслідок малих змін Δx_i у її аргументах, де $\Delta f \approx df$.

- Для обчислення частинних похідних неявної функції $y=f(x)$, що визначена

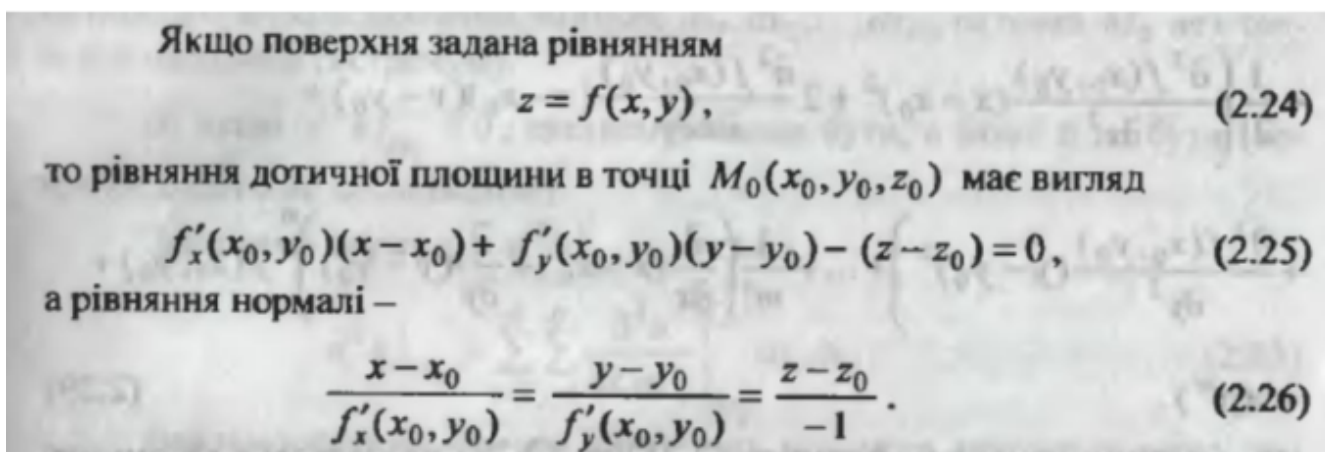
рівнянням $F(x,y)=0$, використовується метод частинних похідних.

- *diff* - знаходження похідної
- *subs* - розв'язування системи рівнянь з підстановкою значень
- *with(plots)* - бібліотека графіків
- *implicitplot3d* - 3д зображення
- *evalf* - спрощення виразів
- *plot3d* - 3д графіки
- *contourplot* - побудова ліній рівня
- *multiply* - множення векторів

Задача 1. Знайти рівняння дотичної площини і нормальної прямої до заданої поверхні σ в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Зробити малюнок.

варіант 105 % 25 = 5

5. $M_0(-1;1;2) \quad \sigma : z = x^2 + y^2$



> $F := -z + x^2 + y^2$

$F := x^2 + y^2 - z$ (1)

Знаходимо похідні відносно x та y :

> $Fx := \text{diff}(F, x)$

$Fx := 2x$ (2)

> $Fy := \text{diff}(F, y)$

$Fy := 2y$ (3)

> $Fz := \text{diff}(F, z)$

$Fz := -1$ (4)

> $Fx0 := \text{subs}(x=-1, Fx)$

$Fx0 := -2$ (5)

> $Fy0 := \text{subs}(y=1, Fy)$

$Fy0 := 2$ (6)

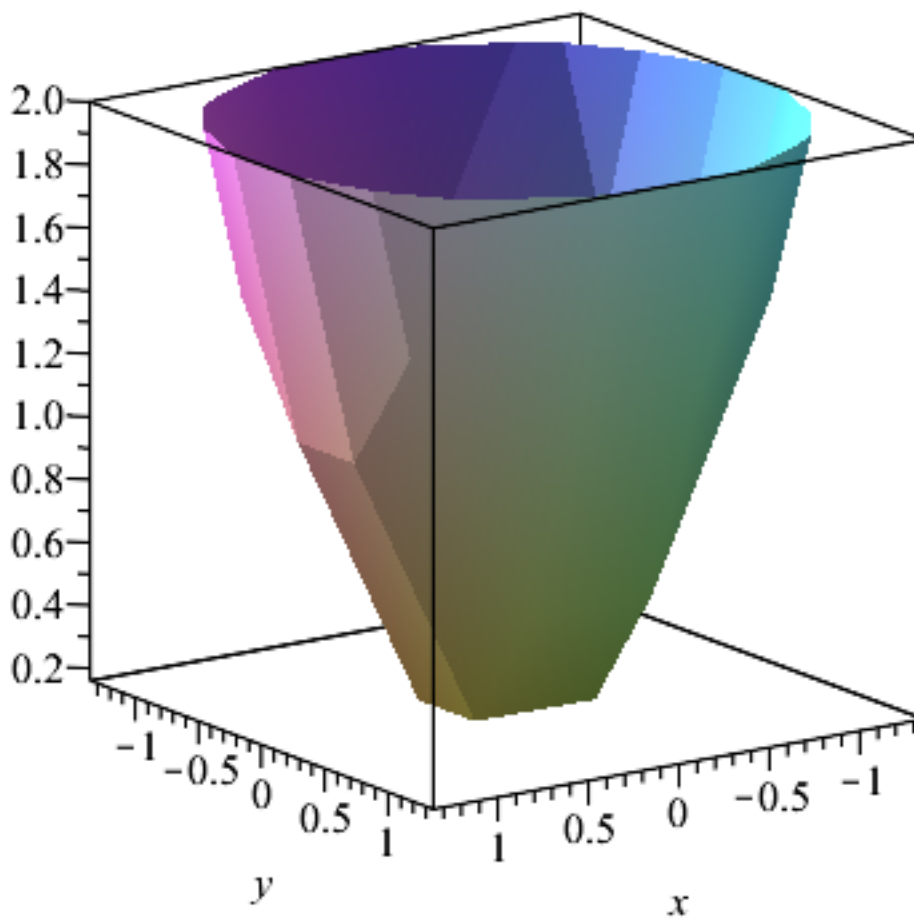
```
> Fz0 := subs(z=2, Fz)
Fz0 := -1 (7)
```

```
> dot := Fx0·(x+1) + Fy(y-1) + Fz0·(z-2) = 0
dot := -2 x + 2 y(y-1) - z = 0 (8)
```

```
> dot1 := z = 2
dot1 := z = 2 (9)
```

```
> norm1 :=  $\frac{z-2}{Fz0} = 0$ 
norm1 := -z + 2 = 0 (10)
```

```
> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d,
conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot,
implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot,
listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple,
odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d,
polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,
setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d,
tubeplot]
> implicitplot3d([F=0, dot1], x=-3..3, y=-2..2, z=-2..2, style=surface); (11)
```



Задача 2. Знайти локальні екстремуми заданих функцій.
Зробити малюнок, використовуючи лінії рівня.

5. $u = e^{2x^2 - y^2 - 4x}$

> restart

> $z := e^{2x^2 - y^2 - 4x}$

$$z := e^{2x^2 - y^2 - 4x}$$

(12)

> $z1x := \text{diff}(z, x)$

$$z1x := (4x - 2y^2) e^{2x^2 - y^2 - 4x}$$

(13)

> $z1y := \text{diff}(z, y)$

$$z1y := -2y e^{2x^2 - y^2 - 4x}$$

(14)

> $\text{evalf}(\text{solve}([z1x=0, z1y=0], [x, y]))$

$$[[x=0.8164965809, y=0.]]$$

(15)

$$\begin{aligned} &> A := \text{diff}(z, x, x) \\ &A := 12 x e^{2x^3 - y^2 - 4x} + (6 x^2 - 4)^2 e^{2x^3 - y^2 - 4x} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &> B := \text{diff}(z, x, y) \\ &B := -2 (6 x^2 - 4) y e^{2x^3 - y^2 - 4x} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &> C := \text{diff}(z, y, y) \\ &C := -2 e^{2x^3 - y^2 - 4x} + 4 y^2 e^{2x^3 - y^2 - 4x} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &> \Delta 0 := \text{subs}(x=0, A) \cdot \text{subs}(y=0, C) - B^2 \\ &\Delta(0) := -32 e^{-y^2} e^{2x^3 - 4x} - 4 (6 x^2 - 4)^2 y^2 (e^{2x^3 - y^2 - 4x})^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &> A1 := \text{subs}(x=1, A) \\ &A1 := 16 e^{-y^2 - 2} \end{aligned} \quad (20)$$

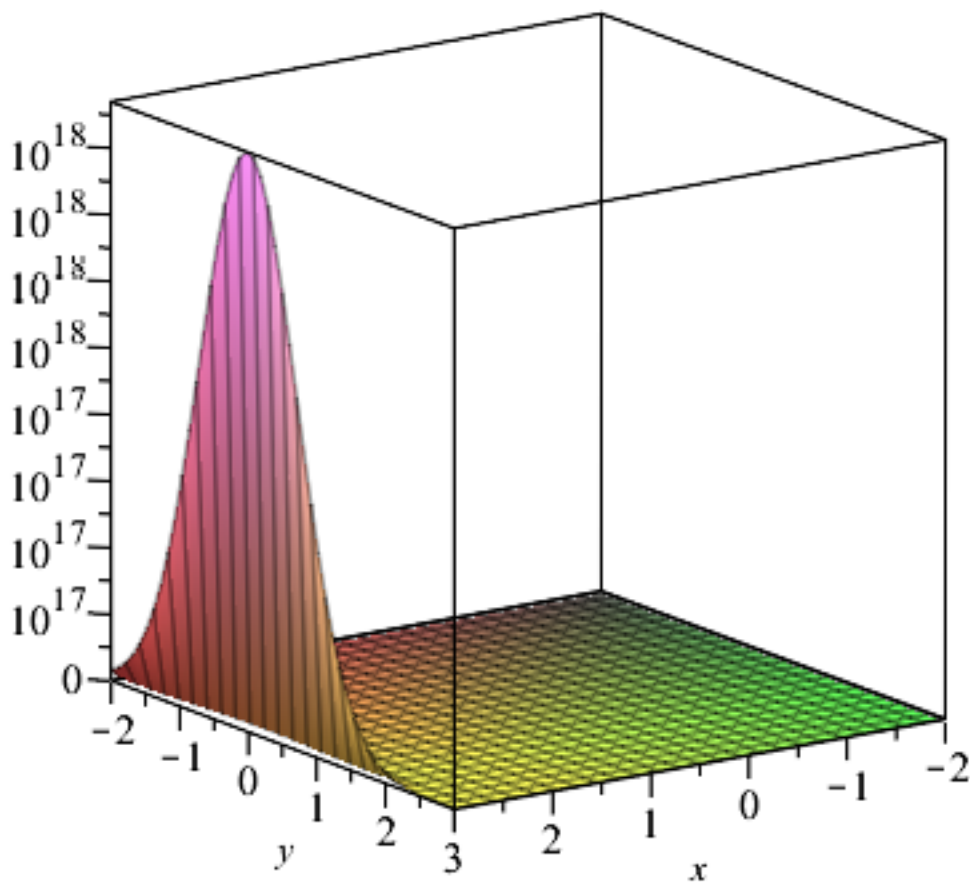
$$\begin{aligned} &> B1 := B \\ &B1 := -2 (6 x^2 - 4) y e^{2x^3 - y^2 - 4x} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &> C1 := \text{subs}(y=1, C) \\ &C1 := 2 e^{2x^3 - 4x - 1} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &> \Delta 1 := A1 \cdot C1 - B1^2 \\ &\Delta(1) := 32 e^{-y^2 - 2} e^{2x^3 - 4x - 1} - B1^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &> \text{with}(\text{plots}) \\ &[\text{animate}, \text{animate3d}, \text{animatecurve}, \text{arrow}, \text{changecoords}, \text{complexplot}, \text{complexplot3d}, \\ &\text{conformal}, \text{conformal3d}, \text{contourplot}, \text{contourplot3d}, \text{coordplot}, \text{coordplot3d}, \text{densityplot}, \\ &\text{display}, \text{dualaxisplot}, \text{fieldplot}, \text{fieldplot3d}, \text{gradplot}, \text{gradplot3d}, \text{implicitplot}, \\ &\text{implicitplot3d}, \text{inequal}, \text{interactive}, \text{interactiveparams}, \text{intersectplot}, \text{listcontplot}, \\ &\text{listcontplot3d}, \text{listdensityplot}, \text{listplot}, \text{listplot3d}, \text{loglogplot}, \text{logplot}, \text{matrixplot}, \text{multiple}, \\ &\text{odeplot}, \text{pareto}, \text{plotcompare}, \text{pointplot}, \text{pointplot3d}, \text{polarplot}, \text{polygonplot}, \text{polygonplot3d}, \\ &\text{polyhedra_supported}, \text{polyhedraplot}, \text{rootlocus}, \text{semilogplot}, \text{setcolors}, \text{setoptions}, \\ &\text{setoptions3d}, \text{shadebetween}, \text{spacecurve}, \text{sparsematrixplot}, \text{surfdata}, \text{textplot}, \text{textplot3d}, \\ &\text{tubeplot}] \end{aligned} \quad (24)$$

$$> \text{plot3d}(z, x=-2..3, y=-2..3)$$



> restart

Задача 3. Знайти вектор градієнта grad U заданої функції U в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Обчислити в цій точці похідну по заданому напрямку вектора $e = M_0A$.

$$U = x \cdot y - x^2 + 3z^2, \quad M_0(1; 1; 2)$$

5. $A(-1; 3; 3)$

> $U := x \cdot y - x^2 + 3 \cdot z^2$

$$U := -x^2 + x y + 3 z^2 \quad (25)$$

> $x0 := 1; y0 := 1; z0 := 2$

$$x0 := 1$$

$$y0 := 1$$

$$z0 := 2$$

(26)

$$\begin{aligned} &> ax := -1; ay := 3; az := 3 \\ & \qquad \qquad \qquad ax := -1 \\ & \qquad \qquad \qquad ay := 3 \\ & \qquad \qquad \qquad az := 3 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &> Ux := \text{diff}(U, x) \\ & \qquad \qquad \qquad Ux := -2x + y \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &> Ux0 := \text{subs}(x=x0, y=y0, z=z0, Ux) \\ & \qquad \qquad \qquad Ux0 := -1 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &> Uy := \text{diff}(U, y) \\ & \qquad \qquad \qquad Uy := x \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &> Uy0 := \text{subs}(x=x0, y=y0, z=z0, Uy) \\ & \qquad \qquad \qquad Uy0 := 1 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &> Uz := \text{diff}(U, z) \\ & \qquad \qquad \qquad Uz := 6z \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &> Uz0 := \text{subs}(x=x0, y=y0, z=z0, Uz) \\ & \qquad \qquad \qquad Uz0 := 12 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &> \text{gradUM0} := \langle Ux0, Uy0, Uz0 \rangle \\ & \qquad \qquad \qquad \text{gradUM0} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &> e := \langle ax - x0, ay - y0, az - z0 \rangle \\ & \qquad \qquad \qquad e := \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &> de := \text{sqrt}((-2)^2 + 2^2 + 1^2) \\ & \qquad \qquad \qquad de := 3 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &> e0 := \frac{e}{de} \\ & \qquad \qquad \qquad e0 := \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

Враховуючи, що $\Delta x = \cos \alpha$, $\Delta y = \cos \beta$ і $\Delta z = \cos \gamma$, отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Для визначення похідної за заданим напрямком треба знати частинні похідні від функції і направляючі косинуси цього напрямку.

> with(linalg)

[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylveste, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

> dUe = multiply(gradUM0, e0)

$$dUe = \frac{16}{3} \quad (39)$$

> restart

Задача 4. Знайти умовний екстремум заданої функції u . Зробити пояснюючий малюнок, використовуючи лінії рівня функції u .

$$5. \quad u = x^2 - y^2 - 2y \quad y = 1$$

> u := x² - y² - 2 y

$$u := x^2 - y^2 - 2 y \quad (40)$$

> y = 1

$$y = 1 \quad (41)$$

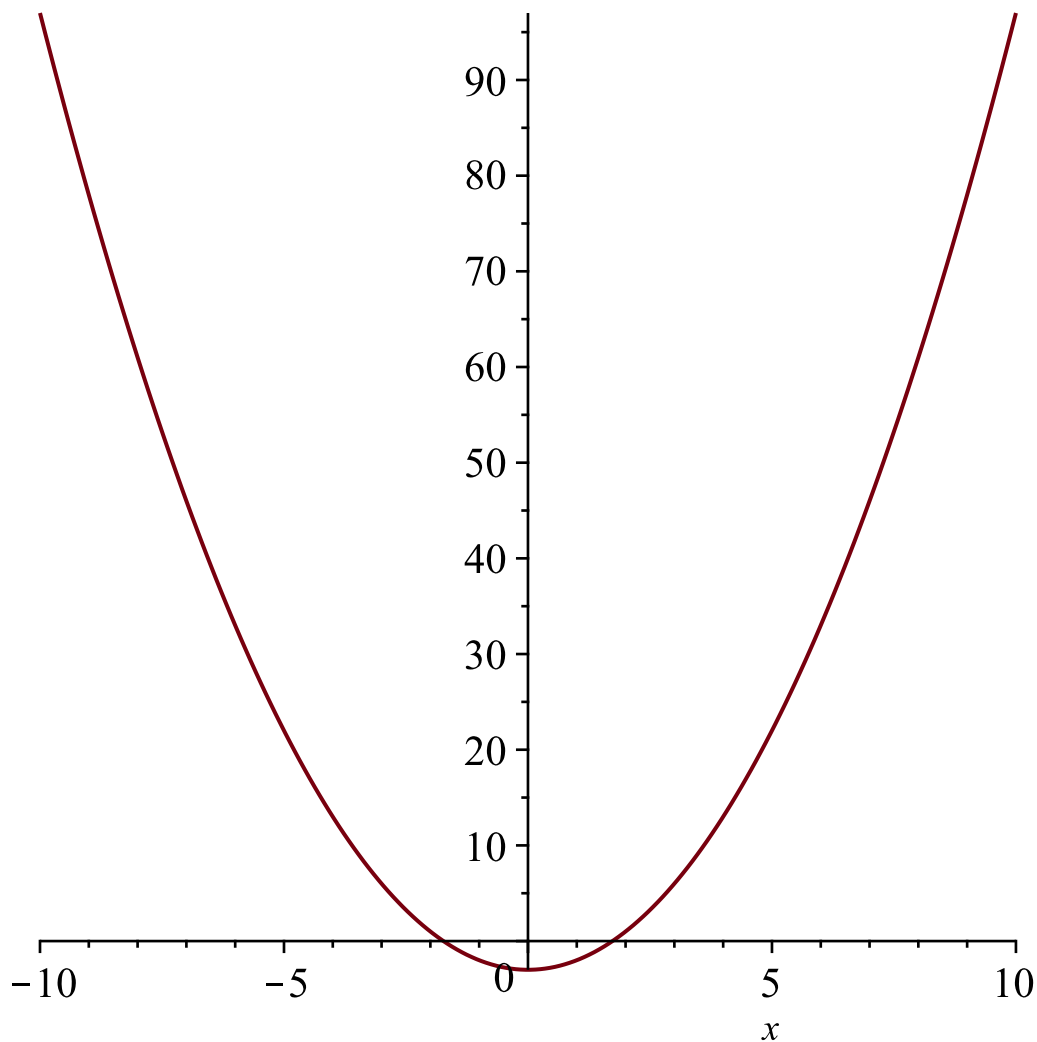
> dlx := diff(u, x)

$$dlx := 2 x \quad (42)$$

> solve(dlx)

$$0 \quad (43)$$

> plot(x² - 1² - 2 · 1)

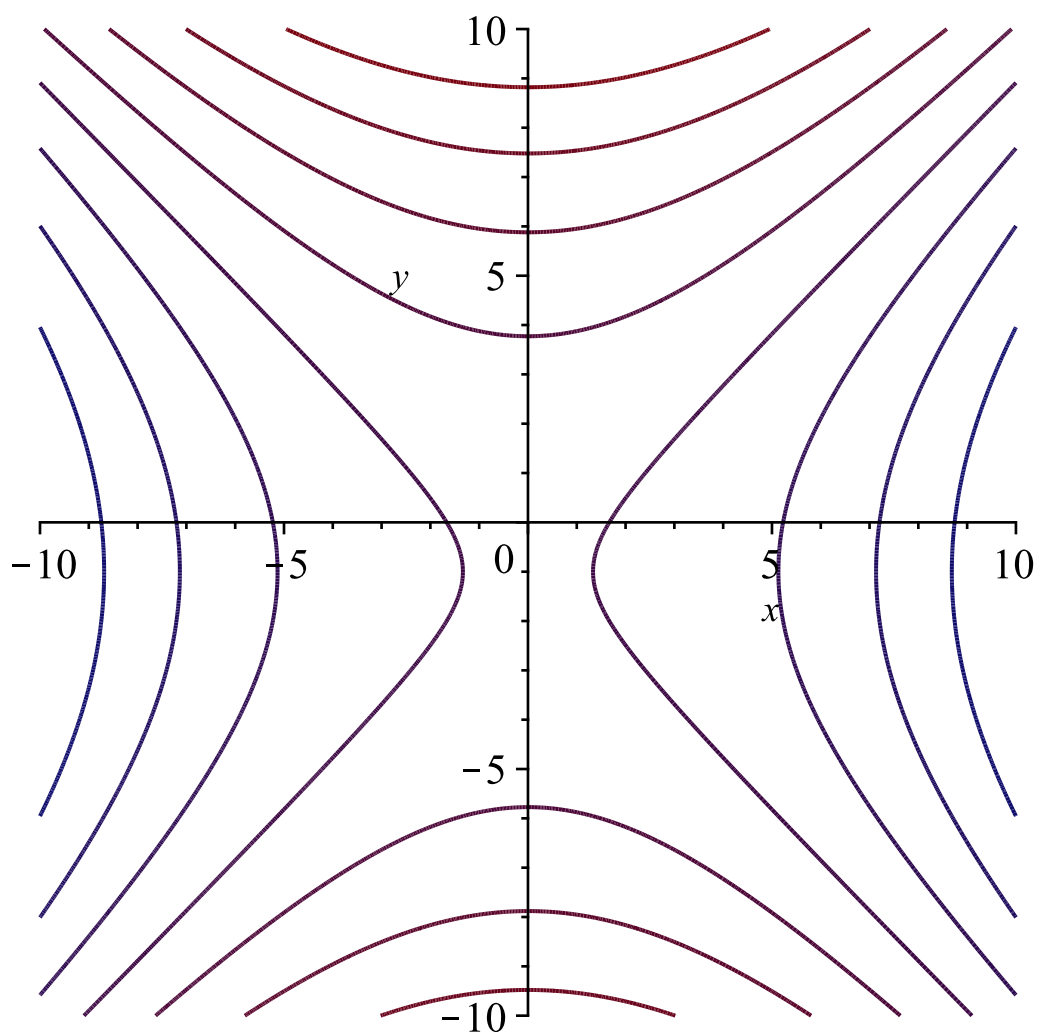


> *with(plots)*

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

(44)

> *contourplot(x^2 - y^2 - 2*y, x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, numpoints = 100000);*



```
> restart
```

Задача 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $u = u(x, y)$ в області D і вказати точки, де ці значення досягаються.

5. $u = x^2 + y^2$

$$D: \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

```
> u := x^2 + y^2
```

$$u := x^2 + y^2$$

(45)

```
> dx := diff(u, x)
```

$$dx := 2x$$

(46)

```
> dy := diff(u, y)
```

(47)

$$dy := 2 y \quad (47)$$

> $x0 := \text{subs}(x=0, y=0, dx)$

$$x0 := 0 \quad (48)$$

> $y0 := \text{subs}(x=0, y=0, dy)$

$$y0 := 0 \quad (49)$$

Стационарна точка M(0;0)

> $str1 := \text{subs}(x=x0, y=y0, u)$

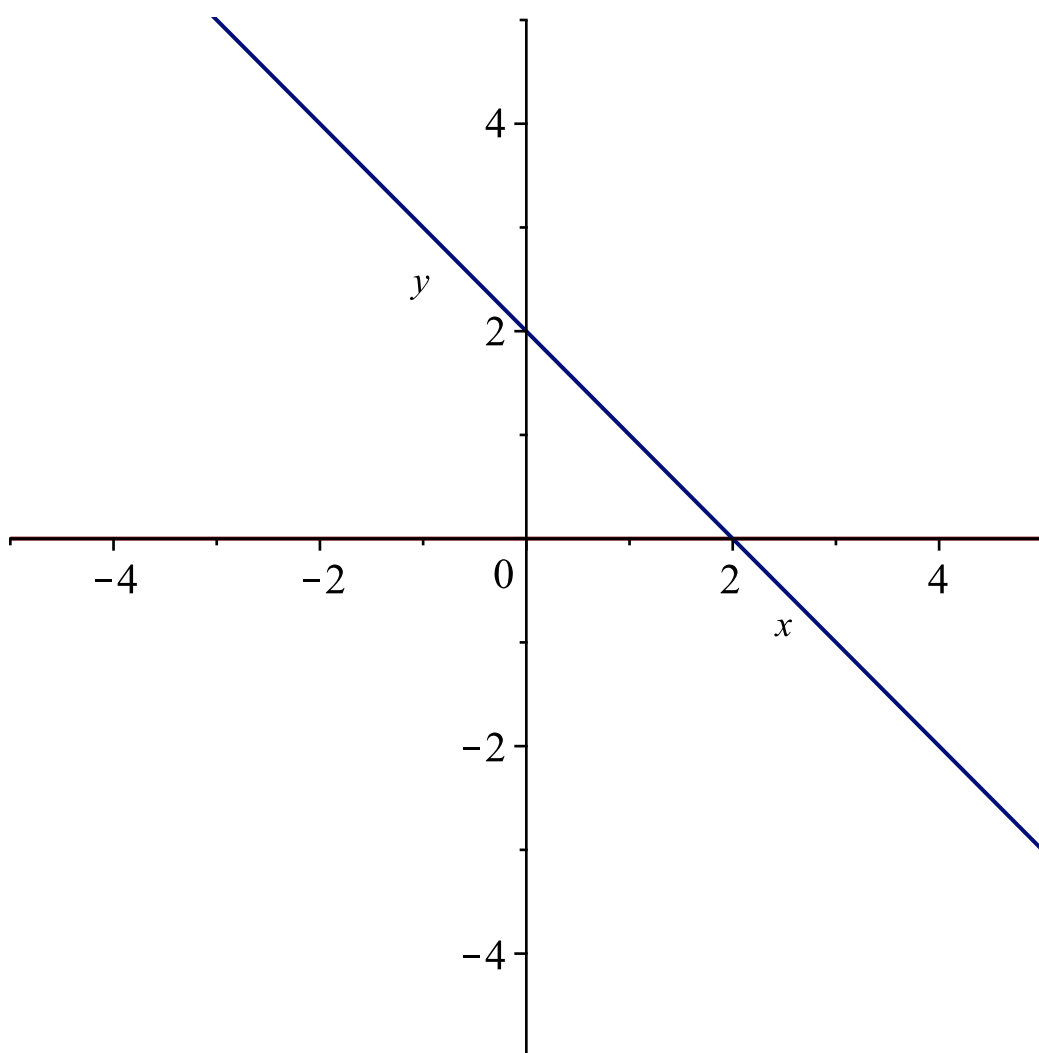
$$str1 := 0 \quad (50)$$

$$D: \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

> $\text{with}(\text{plots})$

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*] (51)

> $\text{plot}\left(\left[0, \frac{2-x}{1}\right], x=-5..5, y=-5..5\right)$



```
> y11 := (2 - x) / 1
```

$$y11 := 2 - x \quad (52)$$

```
> z := subs(y=y11, u)
```

$$z := x^2 + (2 - x)^2 \quad (53)$$

```
> solve(z)
```

$$1 + I, 1 - I \quad (54)$$

```
> x1 := 0; x2 := 2
```

$$x1 := 0$$

$$x2 := 2$$

(55)

```
> y1 := subs(x=x1, y11)
```

$$y1 := 2$$

(56)

```
> y2 := subs(x=x2, y11)
```

$$y2 := 0$$

(57)

Знаходимо Точки В(0;2) С(2;0)

```
> subs(x=x1, y=y1, u)
```

$$4$$

(58)

```
> subs(x=x2, y=y2, u)
```

4

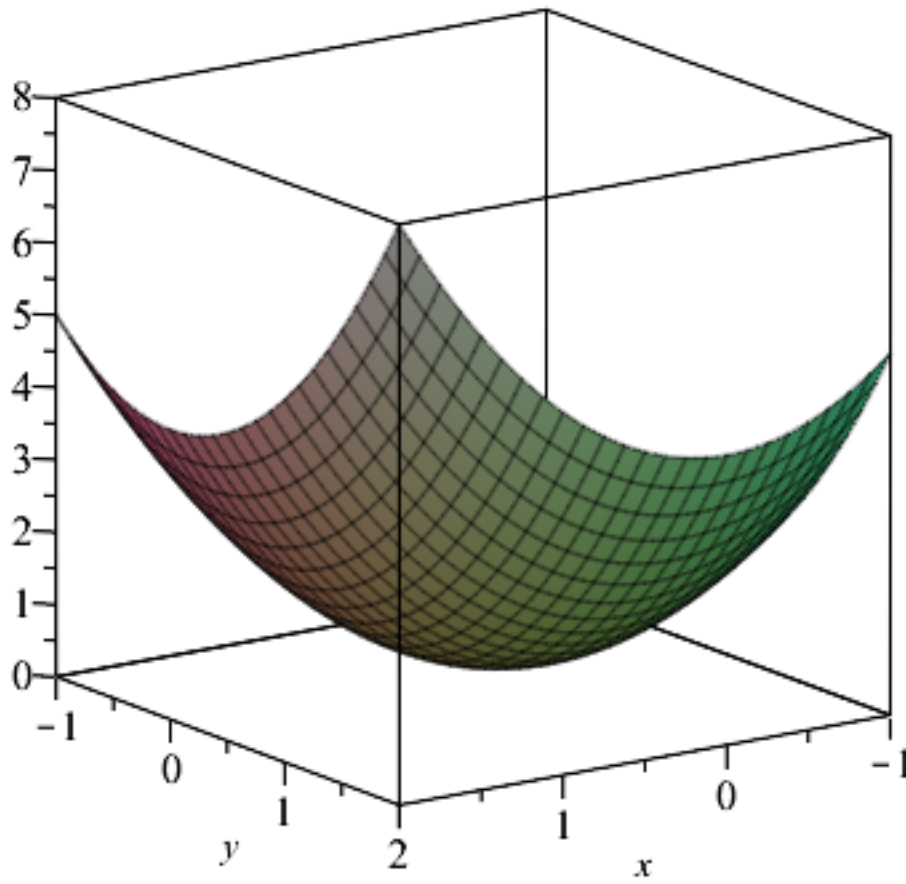
(59)

```
> subs(x=2,y=2,u)
```

8

(60)

```
> plot3d(u,x=-1..2,y=-1..2)
```



```
>
```