Magnetismo nella materia

Matteo Fiaschi

Aprile 2023

1 Introduzione

Per una particella di massa m immersa in campo magnetico uniforme e costante nel tempo vale

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi$$

Ovviamente la nostra hamiltoniana dovrà essere gauge-invariante in particolare

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\Lambda$$

$$\phi \mapsto \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

dove $\nabla\Lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si può mostrare con semplici calcoli che la trasformazione porta una fase locale nella funzione d'onda, che non provoca nessuna variazione nella fisica del problema.

$$\psi \mapsto e^{(-\frac{i}{\hbar}\Lambda)}\psi$$

Senza perdita di generalità assumiamo che $\mathbf{B} = B\hat{z}$ in questo caso possiamo fare una scelta gauge in modo che

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

scegliamo

$$\mathbf{A} = \hat{y}xB$$

questa scelta di gauge è detta *gauge di Landau.* Con questa scelta l'hamiltoniana diventa:

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - \frac{q}{c}xB)^2}{2m}$$

Supponiamo ora il confinamento di tale particella, notiamo come la ψ è invariante per traslazioni lungo z e y quindi deve valere che $\psi(x, y, z) = \chi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)}$ Le condizioni al bordo ci impogono che

$$p_y = \frac{2\pi\hbar}{L}m_y, \quad p_z = \frac{2\pi\hbar}{L}m_z$$

per opportuni m_y, m_z interi. Così si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi'' + \frac{e^2B^2}{2mc^2}\left(x + \frac{p_y c}{eB}\right)^2 \chi = \left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right)\chi$$

Ma quest'ultima equazione è l'equazione di Schrödinger per un oscillatore armonico di frequenza ω_c con un centro di oscillazione in $p_y c/eB$. I livelli energetici, noti come livelli di Landau, sono quindi

$$E_{n,m_z} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}m_z^2 + \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

La degenerazione di ogni livello è legata ai possibili centri di oscillazione. Per la periodicità delle condizioni al bordo, abbiamo il vincolo

$$0 \leq m_y \leq \frac{eBL^2}{hc}$$

Di conseguenza

$$g = \frac{eBL^2}{hc} = \frac{eBV^{2/3}}{hc}$$

Inoltre, il vincolo su m_y impone che l'unità di flusso può essere espressa come

$$\Phi_0 = \frac{hc}{q}$$

Definiamo la seguente quantità come magntone di Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

Supponiamo ora di avere una collezione di particelle cariche di spin semintero. L'equazione d'onda può essere scritta come

$$\Psi = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i}^{N}\psi_{\sigma(i)}$$

ciò implica che se $\psi_i = \psi_j$ con $j \neq i$ $\Psi = 0$ quindi ogni stato può essere non occupato o occupato da una sola particella. Ora, fissato il numero di particelle possiamo scrivere la funzione di partizione del sistema, indichiamo $n_{i,j}$ l'occupazione dello stato corrispondente a ϵ_i e j-esimo stato degenere. Definiamo l'insieme

$$\mathcal{I}(N) = \left\{\{n_{i,j}\} : \sum_{i,j} n_{i,j} = N\right\}$$

Per il seguente sistema la funzione di grand partizione si può esprimere

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{n_{i,j}\in\mathcal{I}(N)} \exp\left(-\beta\sum_{i,j}\epsilon_i n_{i,j}\right)$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{n_{i,j} \in \mathcal{I}(N)} \prod_i^{\infty} \prod_j^{g_i} \exp\left(-\beta \epsilon_i n_{i,j}\right)$$

$$\mathcal{Z} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + z e^{-\beta \epsilon_i})^{g_i}$$

1.1 Diamagnetismo

$$\log(\mathcal{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \log(1 + z e^{-\beta \epsilon_i})$$

Nel caso in questione siamo nel caso di alte temperature possiamo assumere $\beta \to 0$ quindi

$$\log(\mathcal{Z}) = \sum_{m_z}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_i \log(1 + z e^{-\beta \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} m_z^2 + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)})$$

$$\log(\mathcal{Z}) = \frac{2qBL^3}{h^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + z e^{-\beta \frac{p_z^2}{m} - 2B\mu_B \beta \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)})$$

$$\log(\mathcal{Z}) = \frac{2zqBL^3}{h^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{p_z^2}{m}} dp_z \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2B\mu_B \beta \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\log(\mathcal{Z}) = \frac{2zqBL^3}{h^2 c} \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \frac{e^{-B\mu_B \beta \hbar\omega_c}}{1 - e^{-2nB\mu_B \beta \hbar\omega_c}} = \frac{2V\mathrm{z}}{h^3} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\beta \mu_B B}{\sinh\left(\beta \mu_B B\right)}$$

Aggiungiamo ora l'ulteriore ipotesi che il campo esterno sia debole. Allora si ottiene

$$\log \mathcal{Z} \simeq \frac{2V\mathrm{z}}{h^3} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{\left(\beta \mu_B B\right)^2}{6}\right)$$

Di conseguenza la magnetizzazione e il numero di particelle sono al primo ordine

$$\mathcal{M} \simeq -\frac{2V\mathrm{z}}{h^3} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\beta \mu_B^2 B}{3}$$

$$\mathcal{N} \simeq \frac{2V\mathrm{z}}{h^3} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}$$

ossia

$$\mathcal{M} \simeq -\mathcal{N} \frac{\beta \mu_B^2 B}{3}$$

Questo significa che la suscettività è

$$\chi \simeq -\frac{\mathcal{N} \mu_B^2}{3kT} < 0$$

Il modello appena fatto descrive quindi un materiale diamagnetico. L'andamento $\chi \propto T^{-1}$ è noto come legge di (Pierre) Curie.

1.2 Paramagnetismo

Nella sezione precedente abbiamo trascurato l'interazione dello spin con il campo esterno. Il contributo di tale interazione all'Hamiltoniana è

$$H_{\text{int}} = \frac{e}{mc}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$$

Mentre il contributo ai livelli energetici è

$$E = \pm\mu_B B$$

a seconda che lo spin sia antiparallelo o parallelo a B. In questo caso quindi

$$\log\mathcal{Z} = \frac{V}{h^3}\int \mathrm{d}^3p\left[\log\left[1+\mathrm{z}\exp\left(-\frac{\beta\mathbf{p}^2}{2m}+\beta\mu_B B\right)\right]+\log\left[1+\mathrm{z}\exp\left(-\frac{\beta\mathbf{p}^2}{2m}-\beta\mu_B B\right)\right]\right]$$

Per alte temperature, si trova

$$\begin{aligned}\log\mathcal{Z} &\simeq \frac{V\mathrm{z}}{h^3}\int \mathrm{d}^3p\left[\exp\left(-\frac{\beta\mathbf{p}^2}{2m}+\beta\mu_B B\right)+\exp\left(-\frac{\beta\mathbf{p}^2}{2m}-\beta\mu_B B\right)\right] = \\ &= \frac{2V\mathrm{z}}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}\cosh\left(\beta\mu_B B\right)\end{aligned}$$

La magnetizzazione e il numero di particelle sono allora

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\simeq \frac{2V\mathrm{z}}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}\mu_B\sinh\left(\beta\mu_B B\right)\\ \mathcal{N} &\simeq \frac{2V\mathrm{z}}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}\cosh\left(\beta\mu_B B\right)\end{aligned}$$

ossia

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}\mu_B\tanh\left(\beta\mu_B B\right)$$

L'ultima espressione ci dice che la magnetizzazione è sempre compresa tra $+\mathcal{N}\mu_B$ e $-\mathcal{N}\mu_B$. Questo risultato è intuitivo, dato che possiamo avere al più $\mathcal{N}$ spin paralleli (o antiparalleli) con B. Per campi deboli invece si ha

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}\frac{\mu_B^2 B}{kT}$$

La suscettività è quindi

$$\chi \simeq \frac{\mathcal{N}\mu_B^2}{kT} > 0$$

Anche in questo caso ritroviamo la legge di Curie, ma il materiale studiato è manifestamente paramagnetico. Si noti inoltre che il valore della suscettività è il triplo (a meno del segno) di quello trovato nel caso diamagnetico: tipicamente, se entrambi gli effetti sono presenti nello stesso sistema il paramagnetismo è dominante.