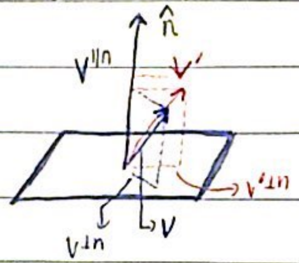
쿼터니언 회전

아래 그림는 벡터회전축 $\hat{n}$과 벡터 v의 $\hat{n}$에 대한 회전을 보여주고 있다.



위 그림은 로드리게스 회전을 이용해 아래와 같이 쓸 수 있습니다.

$$v' = v^{\parallel n} + v'^{\perp n}$$

$v'^{\perp n}$은 오일러의 각을 이용해 아래와 같이 다시 쓸 수 있습니다.

$$v'^{\perp n} = e^{\theta \hat{n}} v^{\perp n}$$

$$\rightarrow v' = v^{\parallel n} + e^{\theta \hat{n}} v^{\perp n}$$

앞으로 보게 될 두 가지 정리는 위 식을 이용해 회전을 사원수의 곱셈을 표현하는데 이용한다. 첫번째 정리는 아래와 같다

$$e^{\theta \hat{n}} v^{\perp n} = v^{\perp n} e^{-\theta \hat{n}}$$

사원수의 곱셈을 이용해 이를 증명할 수 있다.

$$e^{\theta \hat{n}} \cdot v^{\perp n} = (\cos\theta, \hat{n}\sin\theta)(0, v^{\perp n})$$

$$= -\hat{n} \cdot v^{\perp n} \sin\theta + v^{\perp n}\cos\theta + (\hat{n} \times v^{\perp n})\sin\theta$$

$$= v^{\perp n}\cos\theta + (\hat{n} \times v^{\perp n})\sin\theta \quad (\because \underbrace{\hat{n} \cdot v^{\perp n} = 0}_{\text{직교 관계}})$$

$$v^{\perp n} \cdot e^{-\theta \hat{n}} = (0, v^{\perp n})(\cos\theta, -\hat{n}\sin\theta)$$

$$= -v^{\perp n} \cdot (-\hat{n}\sin\theta) + v_{\perp}\cos\theta - (v_{\perp} \times \hat{n})\sin\theta$$

$$= v_{\perp}\cos\theta + (\hat{n} \times v_{\perp})\sin\theta \quad (\because \hat{n} \cdot v^{\perp n} = 0)$$

$$\therefore e^{\theta \hat{n}} v^{\perp n} = v^{\perp n} e^{-\theta \hat{n}}$$

CamScanner로 스캔하기

3 두번째 정리는 아래와 같다

$$e^{\theta\hat{n}} v^{\parallel n} = v^{\parallel n} e^{\theta\hat{n}}$$

증명은 첫번째 정리와 같이 사원수의 곱셈을 이용한다

$$\begin{aligned} e^{\theta\hat{n}} v^{\parallel n} &= (\cos\theta, \hat{n}\sin\theta)(0, v^{\parallel n}) \\ &= -\hat{n}\cdot v^{\parallel n}\sin\theta + v^{\parallel n}\cos\theta + (\hat{n}\times v^{\parallel n})\sin\theta \\ &= -\hat{n}\cdot v^{\parallel n}\sin\theta + v^{\parallel n}\cos\theta \quad (\because \underbrace{\hat{n}\times v^{\parallel n} = 0}_{\text{평행관계}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{\parallel n} e^{\theta\hat{n}} &= (0, v^{\parallel n})(\cos\theta, \hat{n}\sin\theta) \\ &= -v^{\parallel n}\cdot\hat{n}\sin\theta + v^{\parallel n}\cos\theta + (v^{\parallel n}\times\hat{n})\sin\theta \\ &= -v^{\parallel n}\cdot\hat{n}\sin\theta + v^{\parallel n}\cos\theta \quad (\because \underbrace{v^{\parallel n}\times\hat{n} = 0}_{\text{평행관계}}) \end{aligned}$$

$$\therefore e^{\theta\hat{n}} v^{\parallel n} = v^{\parallel n} e^{\theta\hat{n}}$$

이제 식 $v' = v^{\parallel \hat{n}} + e^{\theta\hat{n}} v^{\perp\hat{n}}$을 조금 변경해보겠다.

$$v' = e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} e^{-\frac{\theta}{2}\hat{n}} \cdot v^{\parallel n} + e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} v^{\perp\hat{n}}$$

↳ 앞서 정리한 두 개의 정리를 이용하여 식을 변경하겠다

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} v^{\parallel\hat{n}} e^{-\frac{\theta}{2}\hat{n}} + e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} v^{\perp n} e^{-\frac{\theta}{2}\hat{n}} \\ &= e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} (v^{\parallel\hat{n}} + v^{\perp n}) e^{-\frac{\theta}{2}\hat{n}} \\ &= e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} v e^{-\frac{\theta}{2}\hat{n}} \end{aligned}$$

따라서 사원수 $q = e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} = \cos\frac{\theta}{2} + \hat{n}\sin\frac{\theta}{2}$ 라는 식이라면

$e^{\frac{\theta}{2}\hat{n}} v e^{-\frac{\theta}{2}\hat{n}} = q v q^*$로 쓸 수 있다

↳ 이는 축 $\hat{n}$에 대해 θ만큼 회전한 v'입니다

쿼터니언 회전 행렬

단위 사원수 q와 벡터 v에 대한 식 qvq^*를 이용해 쿼터니언 회전행렬을 구해보겠다.

$$qvq^* = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(v_1 i + v_2 j + v_3 k)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k)$$

$$= \{v_1(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + 2v_2(q_1 q_2 - q_0 q_3) + 2v_3(q_0 q_2 + q_1 q_3)\} i$$
$$+ \{2v_1(q_0 q_3 + q_1 q_2) + v_2(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + 2v_3(q_2 q_3 - q_0 q_1)\} j$$
$$+ \{2v_1(q_1 q_3 - q_0 q_2) + 2v_2(q_0 q_1 + q_2 q_3) + v_3(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)\} k$$

↳ 전개는 나중에 (무지 복잡함)

⇓ 행렬로 바꾸면

$$M_V = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_0 q_3 + q_1 q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

($q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, q는 단위 사원수이므로)

⇓

$$M = 2 \cdot \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - 0.5 & q_1 q_2 - q_0 q_3 & q_0 q_2 + q_1 q_3 \\ q_0 q_3 + q_1 q_2 & q_0^2 + q_2^2 - 0.5 & q_2 q_3 - q_0 q_1 \\ q_1 q_3 - q_0 q_2 & q_0 q_1 + q_2 q_3 & q_0^2 + q_3^2 - 0.5 \end{bmatrix}$$

회전행렬 M을 이용해 사원수의 원소 q_0, q_1, q_2, q_3를 구하는 식 유도

행렬의 대각원소의 합 $Trace(M)$을 이용해 다음과 같이 쓸 수 있다

$$Trace(M) = 2(3q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1.5)$$
$$= 2\{3q_0^2 + (1 - q_0^2) - 1.5\}$$
$$= 4q_0^2 - 1$$

$$\therefore |q_0| = \sqrt{\frac{Trace(M) + 1}{4}}$$

4

q_1은 $M_{11} = 2(q_0^2 + q_1^2 - 0.5)$ 임을 이용해

$$M_{11} = 2(q_0^2 + q_1^2 - 0.5)$$
$$= 2\left(\frac{Trace(M)+1}{4} + q_1^2 - 0.5\right)$$
$$\frac{M_{11}}{2} = \frac{Trace(M)+1}{4} + q_1^2 - \frac{1}{2}$$
$$q_1^2 = \frac{M_{11}}{2} + \frac{1-Trace(M)}{4}$$
$$\therefore |q_1| = \sqrt{\frac{M_{11}}{2} + \frac{1-Trace(M)}{4}}$$

같은 방법으로 M_{22}, M_{33}을 이용해 q_2, q_3를 구할 수 있다.

제일 중요한 문단 한편 쿼터니언 회전 행렬을 오일러 회전 행렬과 같게 두어 오일러 회전의 x, y, z축에 대한 회전에 대응하는 사원수의 원소를 구할 수 있다.
아래는 z축에 대해 ψ만큼 회전하게 하는 행렬입니다.

$$M = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

사원수의 원소 $|q_0|$에 대한 식 $|q_0| = \sqrt{\frac{Trace(M)+1}{4}}$에 행렬의

대각행렬의 합 ⟸ $Trace(M) = \cos\psi + \cos\psi + 1$을 대입하면 $|q_0|$를 알 수 있다

$$|q_0| = \sqrt{\frac{2\cos\psi + 2}{4}} = \sqrt{\frac{\cos\psi + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\psi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\psi}{2}}$$
$$= \cos\frac{\psi}{2}$$

$$|q_1| = \sqrt{\frac{M_{11}}{2} + \frac{1-Trace(M)}{4}} = \sqrt{\frac{\cos\psi}{2} + \frac{1-(2\cos\psi+1)}{2}} = 0$$
$$|q_2| = \sqrt{\frac{M_{22}}{2} + \frac{1-Trace(M)}{4}} = \sqrt{\quad ''\quad} = 0$$
$$|q_3| = \sqrt{\frac{M_{33}}{2} + \frac{1-Trace(M)}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1-(2\cos\psi+1)}{4}} = \sin\frac{\psi}{2}$$

$\therefore$ 행렬 M에 대응하는 사원수는 $q = \cos\frac{\psi}{2} + k\sin\frac{\psi}{2}$이다

전 페이지의 변환과정을 활용해 오일러 회전에서의 roll, pitch, yaw을 사원수의 곱으로 표현해 보았다

roll : ϕ, pitch : θ, yaw : ψ

$$\underbrace{\left(\cos\frac{\psi}{2}+k\sin\frac{\psi}{2}\right)}_{\text{Yaw}}\underbrace{\left(\cos\frac{\theta}{2}+j\sin\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{pitch}}\underbrace{\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)}_{\text{roll}}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+ \\
& \left(\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right)i+ \\
& \left(\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right)j+ \\
& \left(\cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\right)k
\end{aligned}$$

$\therefore$ roll, pitch, yaw를 알고 있을 때 위 식을 통해 q를 찾고 q에 허수부의 부호를 달리한 q^{-1}을 찾습니다. 마지막으로 세 사원수의 곱 qvq^{-1}으로 벡터 v에 대한 회전을 구합니다

$$\frac{dq(t)}{dt}=\frac{1}{2}W(t)q(t)$$

$$\frac{dq_0(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\left(W_x q_1+W_y q_2+W_z q_3\right)$$

$$\frac{dq_1(t)}{dt}=\frac{1}{2}\left(W_x q_0+W_y q_3-W_z q_2\right)$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt}=\frac{1}{2}\left(W_y q_0+W_z q_1-W_x q_3\right)$$

$$\frac{dq_3(t)}{dt}=\frac{1}{2}\left(W_z q_0+W_x q_2-W_y q_1\right)$$

$$\therefore \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -w_x & -w_y & -w_z \\ w_x & 0 & -w_z & w_y \\ w_y & w_z & 0 & -w_x \\ w_z & -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$