

1 Grundbegriffe nichtlinearer Systeme

1.1 Lineare und nichtlineare Übertragungsglieder

Am Anfang einer Betrachtung über nichtlineare Systeme muß die Begriffsbestimmung des nichtlinearen Verhaltens stehen. Da es durch eine Verneinung definiert ist, wird man vom linearen Verhalten ausgehen müssen.

Ganz allgemein sei zunächst unter einem *Übertragungsglied* eine Anordnung verstanden, welche aus einer Eingangsgröße $u(t)$ eine eindeutig bestimmte Ausgangsgröße $y(t)$ erzeugt. Bezeichnet man die Gesamtheit der Operationen, durch die das geschieht, mit dem Symbol φ , so kann man das Übertragungsglied durch die Gleichung

$$y = \varphi\{u\} \quad (1.1)$$

charakterisieren. φ heißt der Operator des Übertragungsgliedes.

Beispielsweise gilt für ein Integrierglied (I-Glied) die Beziehung

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

durch die jeder (integrierbaren) Eingangsgröße $u(t)$ eine eindeutig bestimmte Ausgangsgröße $y(t)$ zugeordnet wird. Der Operator φ besteht hier in der Ausführung der Integration.

Ein Operator kann somit als eine Abbildung von Funktionen auf Funktionen angesehen werden. Er ist daher wohl zu unterscheiden von einer Funktion, die eine Abbildung von Zahlen auf Zahlen vermittelt. So wird z.B. durch $y = e^x$ jeder Zahl x eine Zahl y zugeordnet.

Man nennt nun ein *Übertragungsglied linear*, wenn es das Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip erfüllt. Das soll heißen: Sind für irgend zwei Eingangsgrößen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ die zugehörigen Ausgangsgrößen $y(t)$ und $\tilde{y}(t)$, so ist die zur Summe $u(t) + \tilde{u}(t)$ gehörende Ausgangsgröße $y(t) + \tilde{y}(t)$; ist c irgendeine reelle Zahl, so gehört zu $cu(t)$ die Ausgangsgröße $cy(t)$.

In Formeln: Ist $y = \varphi\{u\}$, $\tilde{y} = \varphi\{\tilde{u}\}$, so gilt $\varphi\{u + \tilde{u}\} = y + \tilde{y}$, also

$$\varphi\{u + \tilde{u}\} = \varphi\{u\} + \varphi\{\tilde{u}\}, \quad (1.2)$$

und $\varphi\{cu\} = cy$, also

$$\varphi\{cu\} = c\varphi\{u\}. \quad (1.3)$$

Das ist die formelmäßige Definition des linearen Übertragungsgliedes, wobei zu beachten ist, daß (1.2) und (1.3) für beliebige Eingangsfunktionen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ sowie für beliebige reelle Zahlen c gelten sollen.

Die beiden Beziehungen (1.2) und (1.3) kann man zu einer Gleichung zusammenfassen:

$$\varphi\{cu + \tilde{c}\tilde{u}\} = c\varphi\{u\} + \tilde{c}\varphi\{\tilde{u}\}. \quad (1.4)$$

Diese *Linearitätsrelation* wird häufig ebenfalls als Überlagerungs- oder Superpositionsprinzip bezeichnet. Ist sie für beliebige Zeitfunktionen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ sowie beliebige Konstanten c und \tilde{c} erfüllt, so ist das Übertragungsglied also linear.

Erfüllt ein Übertragungsglied das Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip nicht, gibt es also Funktionen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$, für die (1.2) nicht gilt, oder eine Funktion $u(t)$ und eine Zahl c , für die (1.3) nicht erfüllt ist, so heißt das Übertragungsglied nichtlinear.

Ein einfaches Beispiel sieht man im Bild 1/1. Hier ist eine Begrenzungskennlinie $y = F(u)$ dargestellt, wie sie in Regelungssystemen häufig vorkommt, vor allem in der Stelleinrichtung. Der Operator besteht hier in der Anwendung der Funktion F auf die Eingangsgröße $u(t)$. Schaltet man speziell die konstante Zeitfunktion $u_0(t) = 0,5$ auf, so ist auch die Ausgangsgröße $y_0(t) = 0,5$. Wählt man dann $4u_0(t) = 2$ als Eingangsgröße, so ist die zugehörige Ausgangsgröße nicht etwa $4y_0(t) = 2$, sondern wegen der Begrenzung nur 1. Also ist $F(4u_0) \neq 4y_0$, d.h. das Verstärkungsprinzip ist verletzt. Entsprechend sieht man, daß auch das Überlagerungsprinzip nicht gilt. Wie hier für die Begrenzung, so kann man generell für alle nichtgeradlinigen Kennlinien einsehen, daß sie nichtlineare Übertragungsglieder sind.

Die Tatsache, daß nichtlineare Übertragungsglieder die beiden so einfachen Gesetze der ungestörten Überlagerung und Verstärkung nicht erfüllen, ist von einschneidender Bedeutung. Sie hat nämlich zur Folge, daß der Zusammenhang zwi-

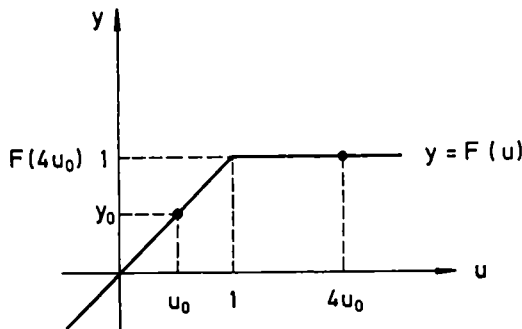


Bild 1/1 Beispiel eines nichtlinearen Übertragungsgliedes

schen Ein- und Ausgangsgröße nicht durch ein Faltungsintegral darstellbar ist und infolgedessen keine komplexe Übertragungsfunktion und kein Frequenzgang erklärt werden können, auch nicht in einem abgeschwächten Sinn wie etwa bei den Abtastsystemen. Die in der linearen Theorie so erfolgreichen Hilfsmittel der Laplace-Transformation und komplexen Funktionentheorie sind hier – abgesehen von Einzelfällen – nicht verwendbar.

Bisher wurden ausschließlich Übertragungsglieder mit einer einzigen Eingangsgröße betrachtet. Bei mehreren Eingangsgrößen sind die Verhältnisse ganz entsprechend. Hat ein Übertragungsglied p Eingangsgrößen u_1, \dots, u_p und faßt man diese zu einem Vektor

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

zusammen¹⁾, so lauten Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip sowie die Linearitätsrelation ganz entsprechend wie oben

$$\varphi\{\underline{u} + \tilde{\underline{u}}\} = \varphi\{\underline{u}\} + \varphi\{\tilde{\underline{u}}\}, \quad (1.5)$$

$$\varphi\{c\underline{u}\} = c\varphi\{\underline{u}\}; \quad (1.6)$$

$$\varphi\{c\underline{u} + \tilde{c}\tilde{\underline{u}}\} = c\varphi\{\underline{u}\} + \tilde{c}\varphi\{\tilde{\underline{u}}\}, \quad (1.7)$$

wobei φ wiederum der Operator des Übertragungsglieds ist.

¹⁾ Wie in der Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme üblich, werden in der Regel Vektoren durch *kleine* Buchstaben mit Unterstreichung gekennzeichnet, Matrizen hingegen durch *große* Buchstaben mit Unterstreichung.

Erfüllt der Operator φ eines Übertragungsgliedes $\underline{y} = \varphi\{\underline{u}\}$ die Gleichungen (1.5) und (1.6) bzw. die Gleichung (1.7) nicht für beliebige $\underline{u}(t)$, $\tilde{u}(t)$, c und \tilde{c} , so ist das Übertragungsglied nichtlinear.

Einfaches Beispiel eines linearen Übertragungsgliedes mit mehreren Eingangsgrößen ist das Summierglied:

$$y = \varphi\{\underline{u}\} = u_1 + u_2 + \dots + u_p = \sum_{\nu=1}^p u_{\nu}.$$

Dann wird aus der Linearitätsrelation

$$\varphi\{c\underline{u} + \tilde{c}\tilde{\underline{u}}\} = \sum_{\nu=1}^p (cu_{\nu} + \tilde{c}\tilde{u}_{\nu}) = c \sum_{\nu=1}^p u_{\nu} + \tilde{c} \sum_{\nu=1}^p \tilde{u}_{\nu} = c\varphi\{\underline{u}\} + \tilde{c}\varphi\{\tilde{\underline{u}}\},$$

ganz gleich, wie man $\underline{u}(t)$, $\tilde{\underline{u}}(t)$, c und \tilde{c} wählt.

Betrachten wir hingegen das Multiplizierglied

$$y = \varphi\{\underline{u}\} = \varphi \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1 \cdot u_2,$$

bei dem der Operator φ also in der Multiplikation zweier zeitveränderlicher Größen besteht, so gilt

$$\begin{aligned} \varphi\{\underline{u} + \tilde{\underline{u}}\} &= \varphi \begin{bmatrix} u_1 + \tilde{u}_1 \\ u_2 + \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = (u_1 + \tilde{u}_1) \cdot (u_2 + \tilde{u}_2) = \\ &= u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1 \cdot u_2 + \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2 = \\ &= \varphi\{\underline{u}\} + u_1 \cdot \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1 \cdot u_2 + \varphi\{\tilde{\underline{u}}\}. \end{aligned}$$

Wegen der beiden mittleren Terme ist also das Überlagerungsprinzip nicht erfüllt, das Multiplizierglied mithin nichtlinear.

Neben der Unterscheidung zwischen linearen und nichtlinearen Übertragungsgliedern gibt es eine weitere fundamentale Einteilung der Übertragungsglieder: in zeitinvariante und zeitvariante (oder zeitvariable) Übertragungsglieder. So wie die linearen Übertragungsglieder durch die Erfüllung des Linearitätsprinzips charak-

terisiert sind, werden die zeitinvarianten Übertragungsglieder dadurch gekennzeichnet, daß für sie das *Verschiebungsprinzip* gilt:

Ist $y(t) = \varphi\{u(t)\}$ und stellt $u(t-t_0)$ die um ein beliebiges Stück $t_0 > 0$ nach rechts verschobene Eingangsgröße $u(t)$ dar, so ist

$$\varphi\{u(t-t_0)\} = y(t-t_0),$$

d.h. es ergibt sich die um t_0 nach rechts verschobene Ausgangsgröße $y(t)$, und dies für eine beliebige Funktion $u(t)$. (1.8)

Betrachten wir als Beispiel die nichtlineare Kennlinie

$$y = u^2. \quad (1.9)$$

Ist etwa $u(t) = \sin t$, so hat man als zugehörige Ausgangsgröße

$$y(t) = \sin^2 t. \quad (1.10)$$

Weiterhin folgt wegen (1.9) aus $u(t-t_0) = \sin(t-t_0)$ die Ausgangsgröße

$$\sin^2(t-t_0).$$

Nach (1.10) ist $\sin^2(t-t_0)$ gleich $y(t-t_0)$, sodaß in der Tat die um t_0 nach rechts verschobene Eingangsgröße die gleichfalls um t_0 nach rechts verschobene Ausgangsgröße erzeugt. Da dies offensichtlich für jede Eingangsgröße $u(t)$ gilt, ist die obige Kennlinie zeitinvariant.

Nehmen wir hingegen die Nichtlinearität

$$y = tu^2, \quad (1.11)$$

ebenfalls für $u(t) = \sin t$:

$$y(t) = t \sin^2 t. \quad (1.12)$$

Schaltet man hier

$$u = \sin(t-t_0)$$

auf, so entsteht nach (1.11) die Ausgangsgröße

$$t \sin^2(t - t_0) .$$

Nach (1.12) ist jedoch

$$y(t - t_0) = (t - t_0) \sin^2(t - t_0) .$$

Diese Nichtlinearität antwortet somit auf $u(t - t_0)$ im allgemeinen nicht mit $y(t - t_0)$ und ist deshalb zeitvariant.

Eine besonders wichtige Klasse stellen die *linearen und zeitinvarianten Übertragungsglieder (LZI-Glieder)* dar (siehe etwa [73], Abschnitt 2.5). Für sie (und nur für sie) gibt es eine komplexe Übertragungsgleichung

$$Y(s) = G(s)U(s) ,$$

zwischen der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$, wobei $U(s)$ und $Y(s)$ die Laplace-Transformierten der Zeitfunktionen $u(t)$ und $y(t)$ sind. Ihr Gegenstück im Zeitbereich ist die Faltungsgleichung

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau ,$$

wobei die Gewichtsfunktion $g(t)$ die Originalfunktion zur Übertragungsfunktion $G(s)$ ist.

Die verschiedenen LZI-Glieder unterscheiden sich durch ihre Übertragungsfunktion. Am häufigsten begegnet man LZI-Gliedern, deren Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

eine rationale Funktion, also der Quotient zweier Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ ist, wobei man im Realfall stets $\text{Grad } Z(s) \leq \text{Grad } N(s)$ und meist sogar $\text{Grad } Z(s) < \text{Grad } N(s)$ voraussetzen darf. Solche LZI-Glieder seien als *rationale Übertragungsglieder* oder kurz als *R-Glieder* bezeichnet ([73], Unterabschnitt 2.4.3). Im Zeitbereich entsprechen ihnen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ein weiteres LZI-Glied, das in Regelstrecken häufig vorkommt, ist das *Totzeitglied* (TZ-Glied, T_t -Glied). Es hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = K e^{-T_t s}, \quad K, T_t > 0 \text{ konstant},$$

und wird demgemäß im Zeitbereich durch die Differenzengleichung

$$y(t) = K u(t - T_t)$$

beschrieben.

Die in diesem Buch auftretenden linearen Systeme bzw. Teilsysteme sind in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle R-Glieder oder entstehen durch Verknüpfung von R- und TZ-Gliedern, sind also linear und zeitinvariant²⁾. Um den Sprachgebrauch nach Möglichkeit zu vereinfachen, wollen wir aber im folgenden kurzerhand von „linearen Systemen“ reden, worin die Zeitinvarianz mitenthalten sei. Auch die weiterhin auftretenden Nichtlinearitäten seien als zeitinvariant vorausgesetzt, ohne daß dies besonders hervorgehoben wird. Sollte es einmal anders sein, wird dies kenntlich gemacht werden.

1.2 Struktur nichtlinearer Systeme

Nachdem der Begriff des nichtlinearen Übertragungsgliedes geklärt ist, erhebt sich sogleich die Frage, welche Arten nichtlinearer Übertragungsglieder es gibt. Es liegt auf der Hand, daß es vom mathematischen Standpunkt eine unübersehbare Mannigfaltigkeit solcher Glieder geben wird, da eben alles, was nicht die Linearitätseigenschaft aufweist, zum nichtlinearen Bereich gehört. Für die technischen Anwendungen, vor allem auf dem Gebiet der Elektrotechnik, des Maschinenbaus und der Verfahrenstechnik, reduziert sich diese Fülle aber sehr stark. Um dies zu sehen, werde ein einfaches Beispiel betrachtet, das für viele andere stehen mag. Es wurde ein elektrotechnisches System gewählt, um seine Gleichungen leicht aufstellen zu können. Technische Systeme mit anderen physikalischen Gesetzmäßigkeiten führen aber auf die gleiche Grundstruktur.

²⁾ Zwischen "Übertragungsglied" und "System" werden wir keinen Unterschied machen. Das gleiche Objekt kann als "Übertragungsglied" oder als "System" bezeichnet werden, je nachdem, ob man mehr Gewicht auf das Ein-Ausgangs-Verhalten oder auf die Innenstruktur legt.

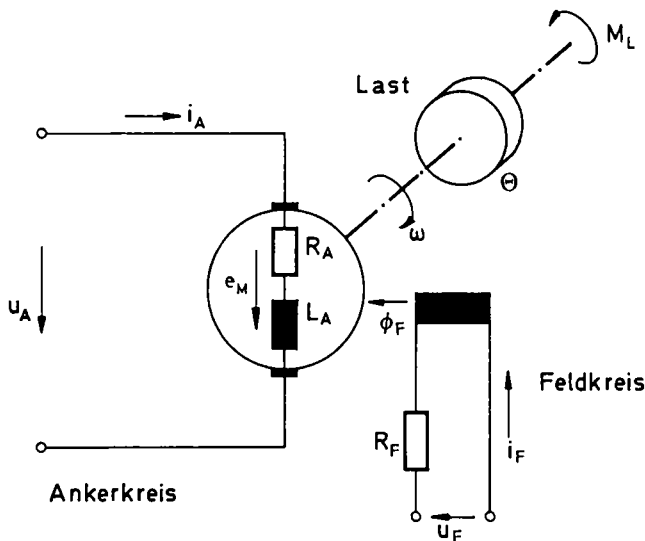


Bild 1/2 Gleichstrommotor

Es werde der *Gleichstrommotor* betrachtet. Aus Bild 1/2 liest man zunächst für den Feldkreis die Gleichung

$$u_F = R_F i_F + \dot{\Phi}_F$$

ab, wobei u_F die von außen angelegte Feldspannung ist, während $R_F i_F$ den Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand R_F des Feldkreises und $\dot{\Phi} = d\Phi/dt$ den induktiven Spannungsabfall an der Feldwicklung darstellt. Dabei hängt der magnetische Fluß Φ_F von dem Feldstrom i_F ab, und zwar über eine Magnetisierungskennlinie

$$\Phi_F = F(i_F),$$

wie sie in Bild 1/3 wiedergegeben ist.

Bezeichnet u_A die von außen aufgeprägte Ankerspannung des Motors und e_M die im Anker induzierte Gegen-EMK, so gilt für den Ankerkreis die Gleichung

$$u_A - e_M = R_A i_A + L_A \dot{i}_A,$$

wobei also $R_A i_A$ bzw. $L_A \dot{i}_A$ der Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand bzw. der Induktivität des Ankerkreises ist. Die Gegen-EMK e_M ist durch das

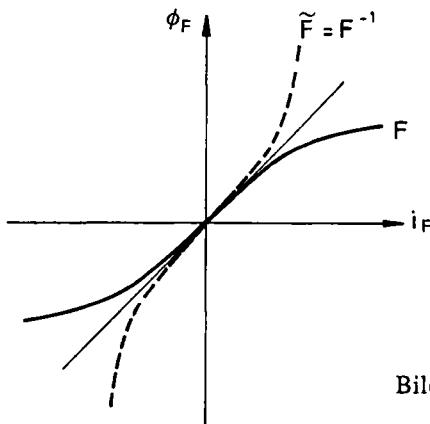


Bild 1/3 Magnetisierungskennlinie

Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit ω des Ankers und dem Feldfluß Φ_F gegeben:

$$e_M = c\omega\Phi_F, \quad c \text{ konstant.}$$

Der Motor entwickelt das Antriebsmoment

$$M_A = c i_A \Phi_F,$$

wobei i_A der Ankerstrom ist. Damit treibt er eine Last an, die starr mit dem Anker gekoppelt sei (z.B. Pumpe, Arbeitsmaschine). Wirkt auf sie das Lastmoment M_L und ist Θ das gemeinsame Trägheitsmoment von Motoranker und Last, so gilt die Bewegungsgleichung

$$\Theta \dot{\omega} = M_A - M_L.$$

Damit sind die Gleichungen, welche das dynamische Verhalten des Motors beschreiben, zusammengestellt. Da die in ihnen enthaltenen Differentialgleichungen linear sind, kann man auf sie die Laplace-Transformation anwenden. Zur Vermeidung von Umständlichkeiten wird dabei hier wie auch im folgenden die Bezeichnung der Größen nicht geändert. Sofern die Anfangswerte Null sind, erhält man so die folgenden Beziehungen:

Feldkreis:

$$\Phi_F = \frac{1}{s} (u_F - R_F i_F),$$

$$i_F = F^{-1}(\Phi_F) = \tilde{F}(\Phi_F) ;$$

Ankerkreis:

$$i_A = \frac{1/R_A}{1+(L_A/R_A)s} (u_A - e_M) ,$$

$$e_M = c\omega\Phi_F ;$$

mechanische Gleichungen:

$$\omega = \frac{1}{\Theta s} (M_A - M_L) ,$$

$$M_A = c i_A \Phi_F .$$

Wie man sieht, besteht jedes der drei Teilsysteme, durch die man die Dynamik des Motors beschreiben kann, aus zwei Gleichungen, einer linearen Differentialgleichung bzw. der zugehörigen komplexen Übertragungsgleichung und einer nichtlinearen gewöhnlichen Gleichung. Darin ist $\tilde{F} = F^{-1}$ die Umkehrfunktion zu F , die man also durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten aus der gewöhnlich graphisch gegebenen Kennlinie F erhält (Bild 1/3).

Stellt man diese Gleichungen in der üblichen Weise im Strukturbild (Signalflußplan, Wirkplan) dar, so ergibt sich Bild 1/4. Da auch nichtlineare Glieder auftreten, muß man bei dem gesamten Bild im Zeitbereich bleiben. Dennoch sind die linearen Übertragungsglieder durch ihre komplexen Übertragungsfunktionen charakterisiert, die man als einfache Symbole für die zugehörigen Differentialgleichungen auffassen kann.

Das Typische an Bild 1/4, das unabhängig von der speziellen Natur des Beispiels ist, besteht darin, daß die Struktur ein *lineares Grundgerüst aufweist, in dem das Zeitverhalten des Systems konzentriert ist und in das einzelne nichtlineare Glieder eingesprengt sind*, welche durch gewöhnliche Gleichungen beschrieben werden.

Das lineare Gerüst setzt sich dabei meist aus sehr einfachen Gliedern zusammen, die entweder durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden (rationale Übertragungsglieder) oder aber Totzeitglieder sind. Die nichtlinearen Übertragungsglieder sind entweder *Kennlinienglieder*, werden also durch eine Gleichung

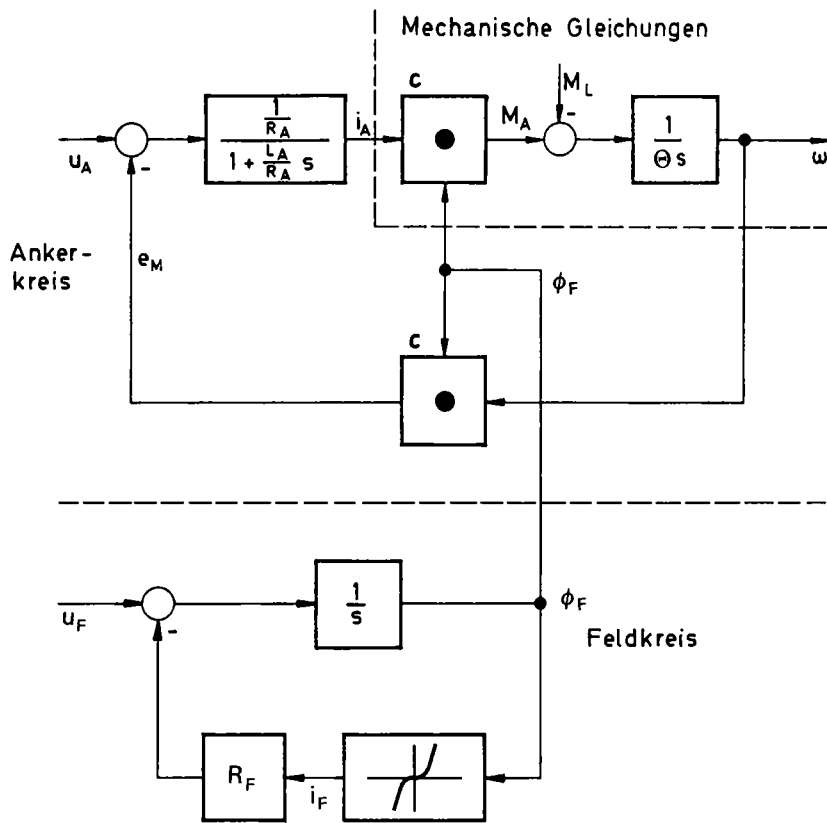


Bild 1/4 Strukturbild des Gleichstrommotors

$$y = F(u) \quad (1.13)$$

charakterisiert, oder stellen *Multiplizierglieder* dar, genügen also der Gleichung

$$y = Ku_1 u_2, \quad K > 0 \text{ konstant.} \quad (1.14)$$

Beide Nichtlinearitäten gemeinsam werden durch eine Beziehung der Form

$$y = F(u_1, u_2, \dots, u_p) \quad (1.15)$$

erfaßt. Gleichungen vom Typ (1.15) können ebenfalls bei der Beschreibung realer Systeme auftreten, lassen sich aber gewöhnlich aus Kennliniengliedern vom Typ (1.13) mit nur einer Eingangsgröße, aus Multipliziergliedern, Proportionalgliedern und Summiergliedern zusammensetzen.

Nichtlineare Strukturen der eben beschriebenen Art treten bei zahlreichen technischen Anwendungen auf. Liegt insbesondere ein *nichtlinearer Regelkreis* vor, so tritt sehr häufig der Fall auf, daß er nur *eine* wesentliche Nichtlinearität enthält, und zwar in Form einer Kennlinie, während die anderen Glieder linear sind oder doch mit genügender Näherung als linear angesehen werden dürfen. Die nichtlineare Kennlinie kann zur Regeleinrichtung gehören, und zwar absichtlich in sie eingebaut sein, um ein gewünschtes dynamisches Verhalten der Regelung zu liefern, oder einfach deshalb, weil sie mit wenig Aufwand zu realisieren ist (z.B. Relaisregler). Sie kann aber auch in der Stelleinrichtung oder Strecke als eine sehr unerwünschte Erscheinung vorkommen, die man nicht vermeiden kann. Das gilt besonders für eine Begrenzung in der Stelleinrichtung, die grundsätzlich stets vorhanden und oft nicht zu ignorieren ist. Ein Regelkreis dieser Art hat meist die in Bild 1/5 wiedergegebene Struktur, wobei es gleichgültig ist, ob die Kennlinie zur dynamischen Beeinflussung der Regelung dient, in der Stelleinrichtung oder der Strecke auftritt, ob sie gewollt oder ungewollt ist. $L_1(s)$, $L_2(s)$ und $L_3(s)$ sind die Übertragungsfunktionen seiner linearen Teilsysteme, wobei $L_1(s)$ und $L_3(s)$ auch identisch 1 sein können (Bild 1/6). An eine nichtlineare Struktur nach Bild 1/5 oder 1/6 ist bei den folgenden Betrachtungen in erster Linie gedacht.

Neben dem Strukturbild werden wir im folgenden häufig die *Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme* benötigen. Sind x_1, \dots, x_n die Zustandsvariablen, u_1, \dots, u_p die Eingangsgrößen und y_1, \dots, y_p die Ausgangsgrößen des dynamischen Systems, so lautet sie allgemein

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.16)$$

$$y_k = g_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t), \quad k = 1, \dots, q. \quad (1.17)$$

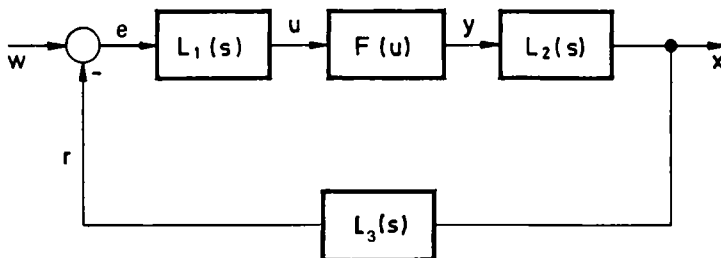


Bild 1/5 Normaltyp einer nichtlinearen Regelung

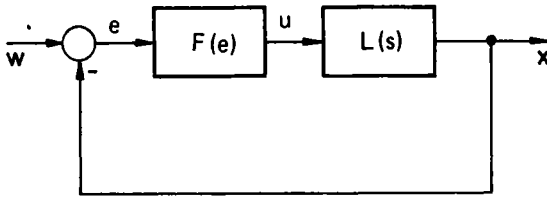


Bild 1/6 Spezialfall des Regelkreises von Bild 1/5

Betrachtet man beispielsweise die Gleichungen von Feldkreis, Ankerkreis und mechanischer Bewegung des Gleichstrommotors, wie sie oben aufgestellt wurden, und geht von den komplexen Übertragungsgleichungen zu den Differentialgleichungen zurück, so erhält man zunächst

$$\dot{\Phi}_F = u_F - R_F i_F, \quad i_F = \tilde{F}(\Phi_F);$$

$$\frac{L_A}{R_A} \dot{i}_A + i_A = \frac{1}{R_A} (u_A - e_M), \quad e_M = c\omega\Phi_F;$$

$$\Theta \dot{\omega} = M_A - M_L, \quad M_A = ci_A\Phi_F.$$

Setzt man die nichtlinearen gewöhnlichen Gleichungen in diese Differentialgleichungen ein und löst dann nach den Ableitungen auf, so wird

$$\dot{\Phi}_F = -R_F \tilde{F}(\Phi_F) + u_F,$$

$$\dot{i}_A = -\frac{c}{L_A} \Phi_F \omega - \frac{R_A}{L_A} i_A + \frac{1}{L_A} u_A,$$

$$\dot{\omega} = \frac{c}{\Theta} \Phi_F i_A - \frac{1}{\Theta} M_L.$$

Dies sind die Zustandsdifferentialgleichungen (1.16), wobei als Eingangsgrößen die Feldspannung u_F , die Ankerspannung u_A und das Lastmoment M_L wirken, während Feldfluß Φ_F , Ankerstrom i_A und Winkelgeschwindigkeit ω als Zustandsvariablen auftreten.

Ist ω die interessierende Ausgangsgröße, wie es meist der Fall ist, so hat man mit

$$y = \omega$$

die Ausgangsgleichung (1.17) vor sich.

Im konkreten Fall wird man das Strukturbild eines Systems häufig den Zustandsgleichungen vorziehen, da im Strukturbild die in einfacher Gestalt vorliegenden Nichtlinearitäten prägnant faßbar sind, während sie in der Zustandsdarstellung zu unübersichtlichen nichtlinearen Beziehungen „verschmiert“ werden. Für die Formulierung allgemeiner Aussagen ist die Zustandsbeschreibung aber nicht zu entbehren.

Faßt man die Zustandsvariablen x_1, \dots, x_n zum Zustandsvektor \underline{x} , die Eingangsgrößen u_1, \dots, u_p zum Eingangsvektor \underline{u} und die Ausgangsgrößen y_1, \dots, y_q zum Ausgangsvektor \underline{y} zusammen, so erhält man aus (1.16) und (1.17) die *vektorielle Darstellung*

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t), \quad (1.18)$$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (1.19)$$

mit den Funktionenvektoren

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}.$$

Zu der vektoriellen Zustandsdifferentialgleichung (1.18) ist noch die Anfangsbedingung

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

hinzuzufügen.

Ist das dynamische System *zeitinvariant*, wie beispielsweise beim Gleichstrommotor, so hängen die rechten Seiten von (1.18) und (1.19) nicht von t ab.

Ist das System *linear*, so sind die Zustandsdifferentialgleichung (1.18) und die Ausgangsgleichung (1.19) von der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}, \quad (1.20)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u}, \quad (1.21)$$

wobei also die rechten Seiten lineare Funktionen der Vektoren \underline{x} und \underline{u} sind. Die

Matrizen A, B, C und D dürfen dabei von der Zeit t abhängig sein. Sind sie konstant, so liegt ein *lineares und zeitinvariantes System* vor.

1.3 Häufig auftretende Kennlinien

Wie am typischen Beispiel des Gleichstrommotors zu Beginn des vorigen Abschnitts zu sehen ist, treten als nichtlineare Blöcke im Strukturbild eines technischen Systems das Multiplizierglied und Kennlinienglieder auf. Einige häufig auftretende Kennlinien wollen wir im folgenden etwas näher betrachten.

Schauen wir als erste die *Zweipunktkennlinie* an, die üblicherweise wie im Bild 1/7 dargestellt wird. Für sie gilt

$$y = \begin{cases} -b & \text{für } u < 0, \\ b & \text{für } u > 0. \end{cases}$$

Ihr Wert an der Sprungstelle $u = 0$ ist für unsere Untersuchungen im allgemeinen ohne Interesse, da an Sprungstellen einer Funktion meist nur die Grenzwerte von links und rechts von Bedeutung sind. Benötigt man den Funktionswert an einer Sprungstelle doch einmal, so nimmt man gewöhnlich das arithmetrische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes, hier also den Wert 0. Eine derartige Wahl des Funktionswertes an einer Sprungstelle ist sachgerecht, da beispielsweise die Fourierentwicklung einer Funktion an Sprungstellen diesen Wert annimmt. Wir können also die obige Definition in der folgenden Weise vervollständigen:

$$y = \begin{cases} -b, & u < 0, \\ 0, & u = 0, \\ b, & u > 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

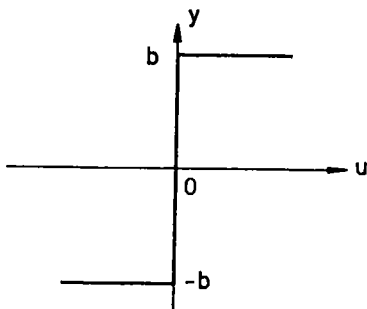


Bild 1/7 Zweipunktkennlinie

Dieser Zusammenhang zwischen u und y läßt sich kürzer ausdrücken, wenn man die *Signum- oder Vorzeichenfunktion*

$$\operatorname{sgn} u = \begin{cases} -1, & u < 0, \\ 0, & u = 0, \\ 1, & u > 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

verwendet:

$$y = b \operatorname{sgn} u. \quad (1.24)$$

Bei der in der Technik üblichen Darstellung der Zweipunktkennlinie, wie sie im Bild 1/7 wiedergegeben ist, wird an der Sprungstelle ein vertikales Geradenstück eingezeichnet, obwohl doch der Funktionswert dort entweder garnicht oder aber eindeutig definiert ist. Diese Darstellung rührt von einer möglichen Realisierung der Zweipunktkennlinie her. Wird sie durch einen Verstärker mit Begrenzung verwirklicht, so erhält man eine Kennlinie mit sehr steil ansteigendem Mittelstück und daran anschließenden horizontalen Geradenstücken. Darauf weist die Darstellung in Bild 1/7 hin. Entsprechendes gilt auch für die Sprungstellen anderer Kennlinien, mit denen wir uns im folgenden befassen.

Die Zweipunktkennlinie tritt beispielsweise dann auf, wenn ein Relais ohne mittlere Ruhelage verwendet wird. Dies ist unter anderem bei *Temperaturregelungen* der Fall, wo das Zweipunktglied als Regler eingesetzt wird. Das Bild 1/8 zeigt die (vereinfachte) Struktur einer solchen Regelung.

Regelgröße x ist die Temperatur eines Raumes. Die Führungsgröße, proportional zur gewünschten Raumtemperatur, habe den konstanten Wert W_0 . Die Stell-einrichtung, z.B. ein Ventil, das einen Warmwasserzustrom steuert, kann hinreichend genau durch ein I-Glied beschrieben werden. Das Totzeitglied kennzeichnet den Wärmetransport vom Stellort zum Meßort. Am Meßort erfolgt der Übergang der Wärme an den auf der gewünschten Temperatur zu haltenden

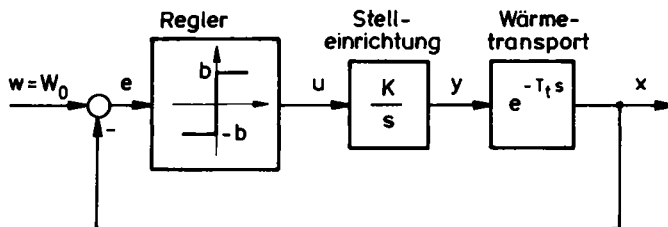


Bild 1/8 Temperaturregelung (vereinfacht)

Raum, was näherungsweise durch ein Verzögerungsglied 1. Ordnung ($P-T_1$ -Glied, VZ_1 -Glied) beschrieben werden kann. Zur Vereinfachung der Betrachtung wurde dieses $P-T_1$ -Glied nicht berücksichtigt, was am grundsätzlichen Verlauf des Vorganges jedoch nichts ändert.

Bei einem so einfachen System kommt man ohne viel Theorie aus, kann den zeitlichen Ablauf vielmehr unmittelbar aus dem Strukturbild im Bild 1/8 ablesen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei etwa $x = x_0 > W_0$. Dann ist $e_0 = W_0 - x_0 < 0$ und damit $u = -b$. y stellt daher eine fallende Rampenfunktion mit dem Gefälle $-bK$ dar. Da die Totzeit lediglich eine Verschiebung bewirkt, ohne die Funktionswerte zu verändern, gilt das gleiche für x , und zwar so lange, bis $x < W_0$ wird. Dann wird $e = W_0 - x > 0$. Damit springt u auf den Wert $+b$ und hierdurch geht y in eine steigende Rampenfunktion mit dem Anstieg $+bK$ über. Bis x dieses Verhalten annimmt, vergeht aber noch die Totzeit T_t . Solange läuft x noch als fallende Rampenfunktion weiter. Setzt man diese Betrachtung fort, so erhält man für $x(t)$ den im Bild 1/9 dargestellten Zeitverlauf in Gestalt einer Dreiecksschwingung.

Aus diesem Bild kann man Amplitude und Frequenz der Dauerschwingung ablesen. Der Anstieg der Rampenfunktion ist einerseits gleich bK , andererseits nach Bild 1/9 durch

$$\tan \alpha = \frac{A}{T_t}$$

gegeben. Aus $bK = A/T_t$ folgt

$$A = KbT_t. \quad (1.25)$$

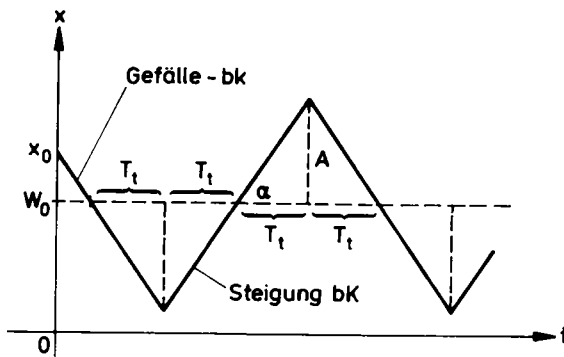


Bild 1/9 Dauerschwingung der Temperaturregelung

Für die Schwingungsperiode liest man aus Bild 1/9

$$T_p = 4 T_t ,$$

also

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{\pi}{2T_t} \quad (1.26)$$

ab.

Es sei noch auf zwei Eigenschaften dieser Schwingung hingewiesen, da sie für eine ganze Klasse nichtlinearer Schwingungen charakteristisch sind:

- (I) Amplitude und Frequenz der Schwingung sind gemäß (1.25) und (1.26) durch Systemparameter bestimmt und hängen nicht von äußeren Einflüssen, wie dem Anfangswert x_0 , ab. Die Schwingung ist also eine Struktureigenschaft des nichtlinearen Systems.
- (II) Ändert man die Systemparameter b , K , T_t , so ändern sich Amplitude und Frequenz, die Schwingung aber bleibt erhalten (sofern keine zu krassen Parameteränderungen vorgenommen werden). Die Schwingung ist daher in der Tat eine *Dauerschwingung*.

Zum Zweipunktglied zurückkehrend sei abschließend festgestellt, daß es auch bei regelungstechnisch ehrgeizigeren Zielsetzungen als einer Temperaturregelung Verwendung findet, nämlich bei zeit- oder schnelligkeitsoptimalen Entwürfen (siehe Kapitel 2).

Die Zweipunktkennlinie hat regeldynamisch den Nachteil, daß sie bei den kleinsten Änderungen der Eingangsgröße u um die Stelle 0 mit Vollausschlag reagiert. Bei häufigen Änderungen von u um diese Stelle, etwa infolge von Störungen, wird dann die Stelleinrichtung stark in Anspruch genommen. Um dies zu vermeiden, kann man zu einer *Dreipunktkennlinie* übergehen (Bild 1/10). Bei ihr ist

$$y = \begin{cases} -b, & u < -a, \\ 0, & -a < u < a, \\ b, & u > a. \end{cases} \quad (1.27)$$

Daher entsteht eine von Null verschiedene Ausgangsgröße erst dann, wenn die Störungen so groß sind, daß $|u| > a$ wird. Man vermeidet so eine zu starke Abnutzung der Stelleinrichtung.

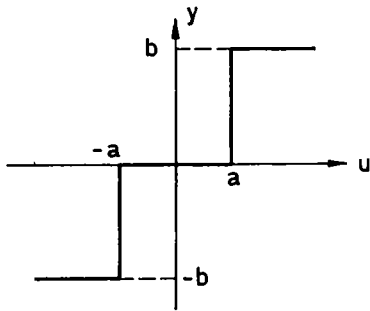


Bild 1/10 Dreipunktkennlinie

In Bild 1/11 ist dargestellt, wie man die Dreipunktkennlinie aus Zweipunktkennlinien aufbauen kann: Man sieht unmittelbar, daß die Dreipunktkennlinie durch Addition der beiden dort gestrichelt eingezeichneten Zweipunktkennlinien hervorgeht. Die obere von ihnen hat gegenüber der Zweipunktkennlinie im Bild 1/7 nur die Sprunghöhe $b/2$ und ist überdies um a nach rechts und um $b/2$ nach oben verschoben. Daher ist sie durch die Funktion

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \operatorname{sgn}(u - a)$$

gegeben. Entsprechend erhält man für die untere Zweipunktkennlinie im Bild 1/11

$$-\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \operatorname{sgn}(u + a).$$

Die Addition dieser beiden Beziehungen liefert für die Dreipunktkennlinie die Gleichung

$$y = \frac{b}{2} [\operatorname{sgn}(u - a) + \operatorname{sgn}(u + a)]. \quad (1.28)$$

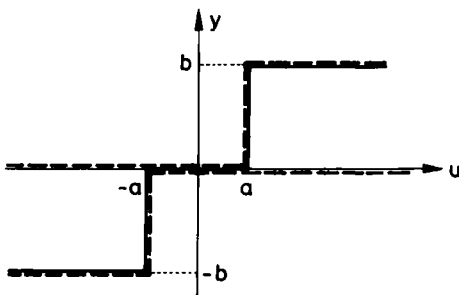


Bild 1/11 Aufbau der Dreipunktkennlinie aus Zweipunktkennlinien

Es werde jetzt wieder das Zweipunktglied im Bild 1/7 betrachtet und von einem Zustand mit $u > 0$ und $\dot{u} < 0$ ausgegangen. Dann wird die Stelle $u = 0$ von rechts überschritten. Es kann dann sein, daß das Zweipunktglied nicht sofort umschaltet, sondern auf Grund von Verzögerungseffekten erst für einen Wert $u = -a$ auf $y = -b$ umspringt. Geht u wachsend durch den Nullpunkt, so kann ganz entsprechend der Fall eintreten, daß y nicht sofort auf $+b$ übergeht, sondern erst dann, wenn u bis auf $+a$ angewachsen ist. Der Zusammenhang zwischen u und y wird dann durch die Kennlinie im Bild 1/12 gegeben. Sie besteht aus zwei Ästen, die nur teilweise zusammenfallen und von denen der eine für wachsendes u , der andere für abnehmendes u durchlaufen wird:

$$y = \begin{cases} F_o(u) \text{ für } \dot{u} < 0 \text{ (gestrichelt)}, \\ F_u(u) \text{ für } \dot{u} > 0 \text{ (durchgezogen)}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} F_o(u) &= b \operatorname{sgn}(u + a), \\ F_u(u) &= b \operatorname{sgn}(u - a), \end{aligned}$$

sodaß also das Vorzeichen von a dem Vorzeichen von \dot{u} gerade entgegengesetzt ist. Es wird so aus (1.29)

$$y = b \operatorname{sgn}[u - a \operatorname{sgn} \dot{u}]. \quad (1.30)$$

Im vorhergehenden ist vorausgesetzt, daß \dot{u} im Intervall $-a < u < a$ nicht sein Vorzeichen wechselt, also $u(t)$ auf der u -Achse seine Fortschrittrichtung beibehält. Andernfalls würde der Punkt (u, y) auf dem gleichen Ast zurückwandern.

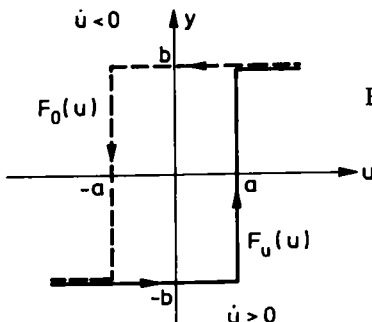


Bild 1/12 Zweipunktkenmlinie mit Hysterese

Wie man aus (1.30) erkennt, hängt die Beziehung zwischen u und y , die durch eine mehrdeutige Kennlinie vermittelt wird, nicht nur von der Eingangsgröße u selbst, sondern auch von ihrer zeitlichen Ableitung \dot{u} ab, wobei \dot{u} allerdings nur unter der Signum-Funktion auftaucht. Diese Tatsache ist charakteristisch für mehrdeutige Kennlinien, die also durch eine Beziehung von der Form

$$y = F(u, \operatorname{sgn} \dot{u}) \quad (1.31)$$

gegeben sind. Hat man mit ihnen zu rechnen, so wird man allerdings nicht von einer solchen formelmäßigen Darstellung, sondern von ihrer geometrischen Gestalt ausgehen und berücksichtigen, daß sie nach Art von (1.29) in zwei Äste aufzuspalten sind.

Da mehrdeutige Kennlinien zuerst bei magnetischen Erscheinungen eine Rolle spielten, bezeichnet man sie auch allgemein, ohne Rücksicht auf ihre physikalische Herkunft, als *Hysteresekennlinien*. Im eben besprochenen Fall handelt es sich um das *Zweipunktglied mit Hysterese*. Ganz Entsprechendes gilt für das *Dreipunktglied mit Hysterese*, das im Bild 1/13 wiedergegeben ist.

Die bisher betrachteten Kennlinien setzen sich aus achsenparallelen Geradenstücken zusammen. Derartige Kennlinien nennt man *Relaiskennlinien*. Sie brauchen keineswegs durch eine Relaischaltung realisiert zu sein. Als Beispiel sei die im Bild 1/14 dargestellte Kennlinie der *Trockenen (oder Coulombschen) Reibung* genannt, die bei mechanischen Problemen vorkommt. Sie kommt

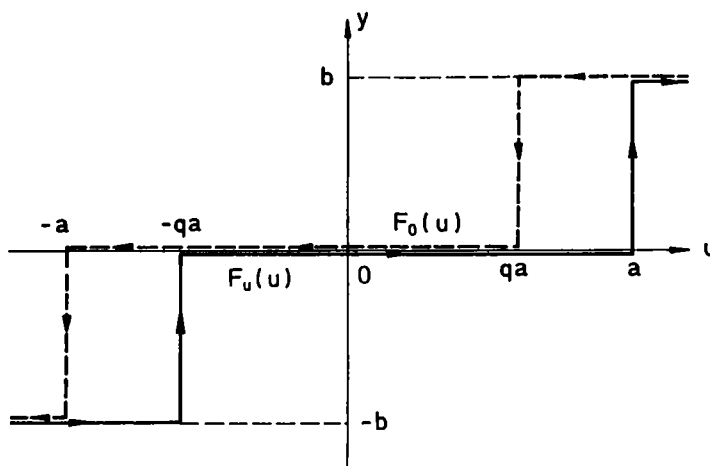


Bild 1/13 Dreipunktkenmlinie mit Hysterese

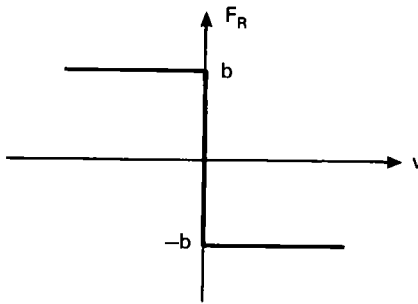


Bild 1/14 Trockene Reibung

dadurch zustande, daß der Betrag der Reibungskraft von der Geschwindigkeit v unabhängig ist, aber die Reibungskraft, als der Geschwindigkeit entgegengerichtet, das entgegengesetzte Vorzeichen wie diese hat. Daher ist sie gleich $-b \operatorname{sgn} v$.

Die Klasse der Relaiskennlinien ist in der großen Menge der *stückweise linearen Kennlinien* enthalten, die aus beliebigen Geradenstücken zusammengesetzt sind. Von ihnen seien zwei für die Regelungstechnik besonders wichtige angeführt: die *Begrenzungs- oder Sättigungskennlinie* (Bild 1/15) und die *Totzone* (Bild 1/16). Erstere hat die Gleichung

$$y = \begin{cases} -b & \text{für } u \leq -a, \\ \frac{b}{a} u & \text{für } -a \leq u \leq a, \\ b & \text{für } u \geq a. \end{cases}$$

Sie darf neben der Zweipunktkennlinie als die wichtigste nichtlineare Kennlinie angesehen werden. Denn bei jedem Entwurf eines Regelkreises muß man die Begrenzung der Stellgröße berücksichtigen, also die Tatsache, daß die Strecke keine beliebig hohen Werte der Stellgröße verarbeiten kann. Das kann verschiedene Ursachen haben. Bei einem mechanischen System gehen die Größen an den Anschlag. So dürfen bei der Steuerung eines Schiffes oder Flugzeuges die Ruderwinkel einen gewissen Betrag nicht überschreiten, da sonst die Strömung

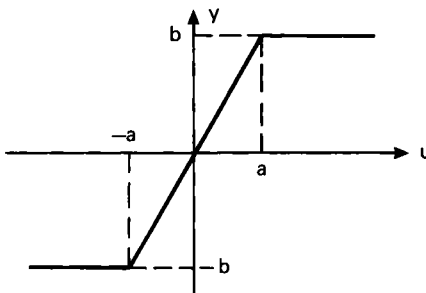


Bild 1/15 Begrenzung (Sättigung)

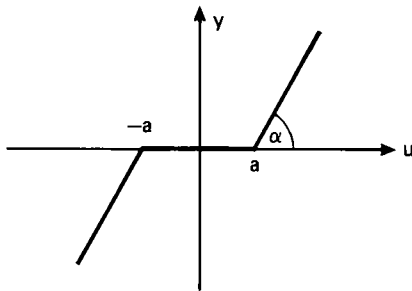


Bild 1/16 Totzone

abreißt. Bei elektrischen Maschinen macht sich bei der Aussteuerung über einen größeren Bereich die Eisensättigung bemerkbar, bei elektronischen Verstärkern ihre Begrenzung. Für den Regelungstechniker bedeutet ein solcher Effekt, daß es sinnlos ist, Stellimpulse zu erzeugen, welche die Begrenzung überschreiten. Hierdurch wird der Einsatz vieler linearer Reglertypen eingegrenzt, so insbesondere von PID- und Abtastreglern.

Die Totzone hat die Gleichung

$$y = \begin{cases} m(u+a) & \text{für } u \leq -a, \\ 0 & \text{für } -a \leq u \leq a \quad \text{mit } m = \tan \alpha, \\ m(u-a) & \text{für } u \geq a. \end{cases}$$

Sie tritt beispielsweise bei Meßeinrichtungen als Ansprechzone auf, kann bei elektrischen Systemen als Schwellwert vorkommen, findet sich bei mechanischen Systemen mit Haftreibung und kann auch mit einer Begrenzung kombiniert sein.

Auch bei Kennlinien vom Typ der Begrenzung und der Totzone können Hysteresereerscheinungen vorkommen. Bild 1/17 zeigt eine solche Möglichkeit. Auch hier ist

$$y = \begin{cases} F_u(u) & \text{für } \dot{u} > 0, \\ F_o(u) & \text{für } \dot{u} < 0. \end{cases}$$

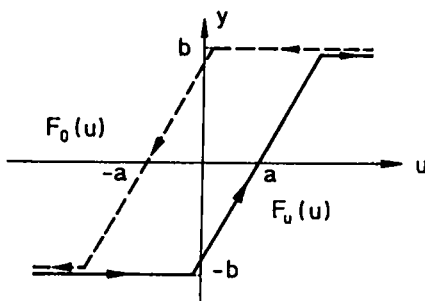


Bild 1/17 Begrenzung mit Hysterese

Manchmal kann man stückweise lineare Kennlinien benutzen, um „*krumme*“ Kennlinien zu approximieren, also solche, die nicht aus Geradenstücken bestehen. Aus der Vielzahl solcher Kennlinien seien zwei Beispiele herausgegriffen. Die elastische Rückstellkraft F_e einer Feder genügt bei kleinen Auslenkungen dem Hookeschen Gesetz, bei großen Auslenkungen (sofern sie nicht zu groß werden) kann man sie in Abhängigkeit von der Auslenkung x durch eine kubische Parabel beschreiben (Bild 1/18):

$$F_e = -(\alpha x + \beta x^3), \quad \alpha > 0, \quad \beta \text{ beliebig.} \quad (1.32)$$

Ein anderes Beispiel bietet der Strömungswiderstand F_w in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des strömenden Mediums (Bild 1/19):

$$F_w = \begin{cases} kv^2, & v \leq 0 \\ -kv^2, & v \geq 0 \end{cases} = -kv|v|. \quad (1.33)$$

Weitere Beispiele nichtlinearer Kennlinien findet man in den folgenden Kapiteln sowie in den Übungsaufgaben.

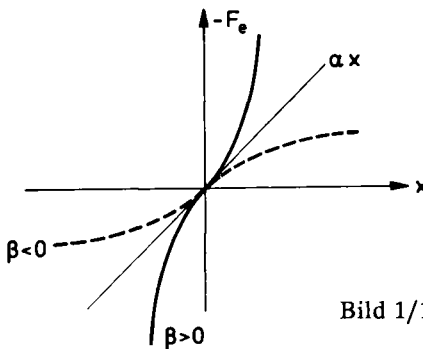


Bild 1/18 Elastische Rückstellkraft einer Feder

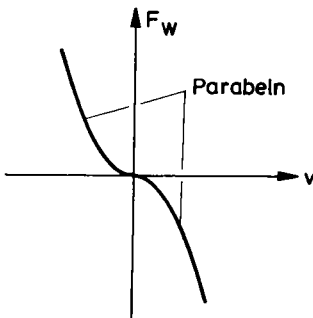


Bild 1/19 Strömungswiderstand

1.4 Ruhelagen dynamischer Systeme

Ein zeitinvariantes dynamisches System, linear oder nichtlinear, sei durch seine Zustandsgleichungen (1.16/17) bzw. (1.18/19) gegeben, etwa durch

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.34)$$

$$y_k = g_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p), \quad k = 1, \dots, q. \quad (1.35)$$

Dann besteht das gewünschte Betriebsverhalten des Systems häufig darin, daß es sich in einem Ruhezustand befindet. Beispielsweise liegt dieser Fall bei einer Festwertregelung vor, bei der die Regelgröße auf dem festen Wert der Führungsgröße bleiben soll.

Soll ein Ruhezustand überhaupt möglich sein, so dürfen sich die Eingangsgrößen u_1, \dots, u_p gewiß nicht beliebig verhalten. Man wird vielmehr annehmen müssen, daß sie identisch konstant sind:

$$u_1(t) \equiv u_{1R}, \dots, u_p(t) \equiv u_{pR}.$$

Der *Ruhezustand* (*stationärer Zustand, Beharrungszustand, Gleichgewichtszustand*) ist dadurch charakterisiert, daß sich die Zustandsvariablen nicht ändern, daß also

$$\dot{x}_1 \equiv 0, \dots, \dot{x}_n \equiv 0$$

gilt. Somit müssen im Ruhezustand die Gleichungen

$$f_i(x_1, \dots, x_n; u_{1R}, \dots, u_{pR}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.36)$$

gelten. Bei gegebenen Werten u_{pR} ist das ein System von n gewöhnlichen Gleichungen für die n Unbekannten x_1, \dots, x_n . Es ist durchaus möglich, daß es keine Lösungen besitzt, daß es also zu den gegebenen Werten der Eingangsgrößen keinen Ruhezustand des Systems gibt. Gelingt es, einen Lösungsvektor \underline{x}_R zu finden, so stellt er einen Punkt im Zustandsraum dar, eben die „Ruhelage“ des Systems. Ein System kann bei gegebenen Werten der u_{pR} mehrere, sogar unendlich viele Ruhelagen haben.

Hat man eine Lösung x_{1R}, \dots, x_{nR} der Gleichungen (1.36) gefunden, so bilden die Funktionen

$$\underline{x}_1(t) \equiv \underline{x}_{1R}, \dots, \underline{x}_n(t) \equiv \underline{x}_{nR}$$

eine Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen zu den Eingangsgrößen $\underline{u}_{1R}, \dots, \underline{u}_{pR}$. Da sie nämlich einerseits (1.36) erfüllen und für sie andererseits $\dot{\underline{x}}_i \equiv 0$ gilt, genügen sie den Zustandsdifferentialgleichungen (1.34). Daher stellt jede Ruhelage eine Trajektorie des Systems dar, die allerdings in einen Punkt entartet ist.

Zu jeder Ruhelage \underline{x}_R gehören feste Werte der Ausgangsgrößen. Nach (1.35) sind sie durch

$$y_{kR} = g_k(\underline{x}_{1R}, \dots, \underline{x}_{nR}; \underline{u}_{1R}, \dots, \underline{u}_{pR}), \quad k = 1, \dots, q,$$

gegeben.

In vektorieller Form lautet die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}_R),$$

wenn man hierin bereits $\underline{u} = \underline{u}_R$ gesetzt hat. \underline{x}_R sei eine Ruhelage des Systems, für die demgemäß

$$\underline{0} = \underline{f}(\underline{x}_R, \underline{u}_R)$$

gilt. Geht man zur Abweichung

$$\underline{\Delta x} = \underline{x} - \underline{x}_R$$

von der Ruhelage über, so folgt aus der Vektordifferentialgleichung wegen

$$\underline{x} = \underline{x}_R + \underline{\Delta x}, \quad \dot{\underline{x}} = (\underline{\Delta x})' :$$

$$(\underline{\Delta x})' = \underline{f}(\underline{x}_R + \underline{\Delta x}, \underline{u}_R).$$

Da die rechte Seite nur noch von $\underline{\Delta x}$ abhängt, kann man kürzer

$$(\underline{\Delta x})' = \tilde{\underline{f}}(\underline{\Delta x})$$

schreiben. Wegen $\tilde{\underline{f}}(\underline{0}) = \underline{f}(\underline{x}_R, \underline{u}_R) = \underline{0}$ ist die Ruhelage dieser Differentialgleichung

$$\underline{\Delta x} = \underline{0}.$$

Geht es um die Untersuchung der Ruhelage eines Systems, so kann man sich also auf die von \underline{u} freie Vektordifferentialgleichung bzw. die zugehörigen skalaren Differentialgleichungen beschränken.

Betrachten wir einige Beispiele! Zunächst ein lineares System, das durch seine Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (1.37)$$

mit der (n,n) -Matrix \underline{A} gegeben ist, wobei $\underline{u} = \underline{u}_R$ ein konstanter Vektor sei. Dann gilt im Ruhezustand

$$\underline{0} = \underline{A}\underline{x}_R + \underline{B}\underline{u}_R, \quad (1.38)$$

woraus

$$\underline{x}_R = -\underline{A}^{-1}\underline{B}\underline{u}_R$$

folgt, sofern \underline{A}^{-1} existiert, also $\det \underline{A} \neq 0$ ist. Dann gibt es also genau eine Ruhelage.

Ist $\det \underline{A} = 0$, was genau dann eintritt, wenn mindestens ein Eigenwert von \underline{A} in $s = 0$ liegt, so ändert sich das Systemverhalten. Es kann jetzt sein, daß es überhaupt keine Ruhelage gibt oder aber unendlich viele Ruhelagen existieren. Betrachten wir etwa das rationale Übertragungsglied (R-Glied)

$$Y(s) = \frac{k}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_n)} U(s), \quad (1.39)$$

wobei $k > 0$ ist und die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des R-Gliedes einfach (voneinander verschieden) seien. Über Partialbruchzerlegung gelangt man zu den Zustandsdifferentialgleichungen (siehe z.B. [73], Unterabschnitt 11.4.3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + b_1 u, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + b_2 u, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + b_n u, \quad b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0. \end{aligned}$$

Für einen Ruhezustand muß gelten:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x_{1R} + b_1 u_R, \\ 0 &= \lambda_2 x_{2R} + b_2 u_R, \\ &\vdots \\ 0 &= \lambda_n x_{nR} + b_n u_R. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Ist hierin $\lambda_1 = 0$, enthält also das System ein Integrierglied (I-Glied), so folgt aus der ersten Gleichung (1.40)

$$0 = b_1 u_R.$$

Da $b_1 \neq 0$ ist, kann diese Gleichung nur erfüllt sein für $u_R = 0$: Die Eingangsgröße des I-Gliedes muß im Ruhezustand verschwinden. Dies ist auch unmittelbar einsichtig: Liegt eine Konstante $u_R \neq 0$ am Eingang des I-Gliedes, so wird dieses eine Rampenfunktion erzeugen, die mit wachsendem t keinem endlichen Wert zustrebt.

Ist aber $u_R = 0$, so folgt aus (1.40), daß x_{1R} beliebig gewählt werden darf, während $x_{2R} = \dots = x_{nR} = 0$ gelten muß, da $\lambda_2, \dots, \lambda_n \neq 0$ sind. Die Ruhelagen erfüllen daher die gesamte x_1 -Achse, also einen 1-dimensionalen Unterraum des Zustandsraumes.

Falls $\det \underline{A} = 0$, hängt das Vorhandensein einer Ruhelage somit offensichtlich von der Wahl des Eingangsvektors \underline{u}_R ab. Wir wollen nun annehmen, daß zu gegebenem \underline{u}_R eine Ruhelage \underline{x}_R existiert, also eine Lösung \underline{x}_{R0} von Gleichung (1.38) vorhanden ist. Dann gilt

$$\underline{0} = \underline{A} \underline{x}_{R0} + \underline{B} \underline{u}_R,$$

woraus durch Subtraktion von (1.38) folgt:

$$\underline{A}(\underline{x}_R - \underline{x}_{R0}) = \underline{0}. \quad (1.41)$$

Hat die (n,n) -Matrix \underline{A} den Rang r , so hat die homogene Vektorgleichung (1.41) genau $d = n - r$ linear unabhängige Lösungen, wobei d der sogenannte Defekt der Matrix \underline{A} ist (siehe etwa [72], § 8). Sind $\underline{x}_{R1}, \dots, \underline{x}_{Rd}$ linear unabhängige Lösungen von (1.41), so ist also

$$\underline{x}_R - \underline{x}_{R0} = c_1 \underline{x}_{R1} + \dots + c_d \underline{x}_{Rd}, \quad c_\nu \text{ beliebig.}$$

Das heißt: Die Ruhelagen erfüllen einen d -dimensionalen Unterraum des Zustandsraumes, der die ursprüngliche Ruhelage \underline{x}_{R0} enthält.

Zusammenfassend hat man das folgende Resultat:

Bei einem linearen System sind 3 Fälle möglich:

(I) Ist $\det \underline{A} \neq 0$, so gibt es genau eine Ruhelage.

Falls $\det \underline{A} = 0$:

(II) Es gibt unendlich viele Ruhelagen. Sie bilden einen Unterraum des Zustandsraumes.

(III) Es gibt keine Ruhelage. Dieser Fall ist ausgeschlossen für

$$\underline{u}_R = \underline{0}. \quad (1.42)$$

Die letzte Bemerkung folgt sofort daraus, daß für $\underline{u}_R = \underline{0}$ die Gleichung (1.38) stets die Lösung $\underline{x}_{R0} = \underline{0}$ hat.

Bemerkenswerterweise tritt ein Fall in (1.42) nicht auf: Daß es zwar mehrere, aber nur endlich viele Ruhelagen gibt. Dieser Fall kann nur bei nichtlinearen Systemen vorkommen.

Ein einfaches Beispiel hierfür bietet das *ebene Schwebependel*, im folgenden kurz *Pendel* genannt (Bild 1/20). Auch ohne mathematische Beschreibung ist klar, daß das Pendel zwei verschiedene Ruhelagen hat: Die *untere Ruhelage*, gekennzeichnet durch die Auslenkung $\varphi = 0$, und die *obere Ruhelage* mit $\varphi = \pi$. Ohne Zweifel handelt es sich hierbei um eine Ruhelage, die dadurch verursacht wird, daß die an der Pendelmasse angreifende Schwerkraft durch die Starrheit der Pendelstange aufgehoben wird, und das Pendel daher in Ruhe bleibt. Durch die kleinste Störung wird es allerdings aus dieser Ruhelage entfernt und kehrt nicht mehr zurück – aber das ist schon eine Frage des Stabilitätsverhaltens.

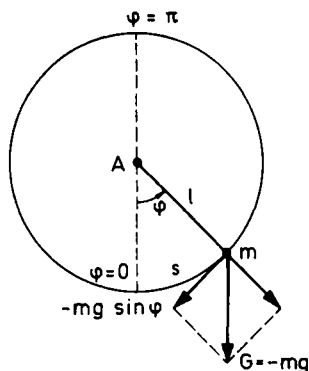


Bild 1/20 Pendel

Wir gehen nun zum *nichtlinearen Regelkreis* über, wie er durch das Bild 1/5 gegeben ist. Die darin auftretenden linearen Glieder sind durch eine Übertragungsgleichung vom Typ

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = R(s) e^{-T_t s} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} e^{-T_t s} \quad (1.43)$$

mit $a_n, b_m \neq 0$ und $m \leq n$ gegeben. Im Zeitbereich lautet ihre Gleichung demgemäß

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u(t - T_t) + b_1 \dot{u}(t - T_t) + \dots + b_m u^{(m)}(t - T_t).$$

Da im stationären Zustand alle zeitlichen Ableitungen verschwinden und die Zeitfunktionen selbst konstant werden, schrumpft diese Gleichung dann auf die gewöhnliche Gleichung

$$a_0 y_R = b_0 u_R \quad (1.44)$$

mit den festen Werten u_R, y_R zusammen. Wie stets bei solchen Betrachtungen über den stationären Zustand ist dessen Existenz vorausgesetzt. Dabei darf man $b_0 \neq 0$ annehmen, da sonst das Eingangssignal u im Ruhezustand nicht durchgeschaltet würde. Ist $a_0 \neq 0$, so hat man

$$y_R = \frac{b_0}{a_0} u_R$$

als Zusammenhang zwischen den Ruhewerten der Ein- und Ausgangsgröße. Wenn jedoch $a_0 = 0$ gilt, das Übertragungsglied also Integrierverhalten hat, kann die Gleichung (1.44) nur erfüllt sein, wenn $u_R = 0$ ist. y_R ist dann beliebig. Das ist der gleiche Zusammenhang zwischen der Ein- und Ausgangsgröße im Ruhezustand, wie er mittels der Zustandsvariablen hergeleitet wurde.

Bei dem Regelkreis im Bild 1/5 soll es sich um eine Festwertregelung handeln, w also konstant sein und höchstens von Zeit zu Zeit verstellt werden. Wir wollen annehmen, daß der Regelkreis eine Ruhelage besitzt. Dann müssen im Ruhezustand

stand gemäß (1.44) die folgenden Gleichungen gelten, in denen der Index R weglassen wurde:

$$e = w - r \quad (\text{Soll-Istwert-Vergleich}),$$

$$a_0 u = b_0 e \quad (\text{Lineares Teilsystem } L_1),$$

$$y = F(u) \quad (\text{Nichtlineare Kennlinie}),$$

$$a'_0 x = b'_0 y \quad (\text{Lineares Teilsystem } L_2),$$

$$a''_0 r = b''_0 x \quad (\text{Lineares Teilsystem } L_3).$$

Dabei darf man $b_0, b'_0, b''_0 > 0$ und $a_0, a'_0, a''_0 \geq 0$ voraussetzen. Faßt man die linearen Gleichungen zusammen, so erhält man

$$y = \alpha - \beta u \quad (1.45)$$

mit

$$\alpha = \frac{a'_0 a''_0}{b'_0 b''_0} w \geq 0, \text{ sofern } w \geq 0, \text{ und}$$

$$\beta = \frac{a_0 a'_0 a''_0}{b_0 b'_0 b''_0} \geq 0.$$

Die Schnittpunkte der linearen Kennlinie (1.45) mit der nichtlinearen Kennlinie $y = F(u)$ liefern die Ruhewerte u_R und y_R (Bild 1/21). Aus ihnen bekommt man die restlichen Ruhewerte durch Einsetzen in die linearen Gleichungen des Ruhezustandes.

Ein Spezialfall ist besonders hervorzuheben, weil er sehr häufig vorliegt. Zeigt eines der beiden Teilsysteme $L_2(s)$ und $L_3(s)$ Integrerverhalten, so ist einer der

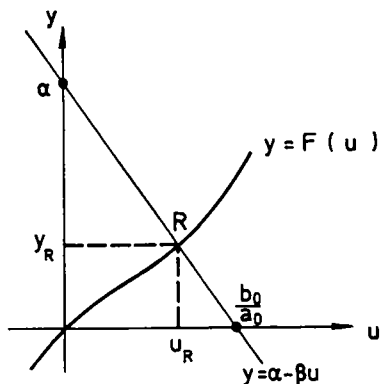


Bild 1/21

Ruhelage eines nichtlinearen Regelkreises

beiden Koeffizienten a'_0, a''_0 Null. Dann fällt die lineare Kennlinie mit der u -Achse zusammen und der Nullpunkt $u = 0, y = 0$ charakterisiert eine Ruhelage des Systems, jedenfalls dann, wenn die nichtlineare Kennlinie durch Null geht.

Liegt in diesem Fall speziell eine Dreipunktkennlinie oder eine Totzone vor, so besteht das ganze Intervall $-a < u < a$ aus Schnittpunkten der linearen und der nichtlinearen Kennlinie und bestimmt so eine ganze Zone von Ruhelagen. Obwohl der offene Kreis ein Integrierglied enthält, regelt der geschlossene Kreis nicht auf Nullabweichung.

Man kann sich auch leicht Fälle vorstellen, in denen es *mehrere, aber nur endlich viele* Ruhelagen der nichtlinearen Regelung gibt. Betrachten wir etwa den Regelkreis mit Hysterese im Bild 1/22, bei dem einfachheitshalber $w = 0$ angenommen ist, so daß er lediglich durch eine Anfangsstörung x_0 erregt wird. Zu einer Ruhelage muß hier der Wert $u_R = b$ oder $u_R = -b$ gehören, da die Zwischenwerte (gestrichelt) nicht angenommen werden. Daraus folgt zunächst, daß $L(s)$ kein I-Glied enthalten kann, denn in diesem Fall müßte $u_R = 0$ sein. Man darf daher $L(0)$ als endlich annehmen, und zwar wie stets bei einem Regelkreis als positiv:

$$K = L(0) > 0.$$

Die lineare Kennlinie lautet hier gemäß Bild 1/22

$$e = -x = -L(0)u = -Ku$$

oder

$$u = -\frac{1}{K}e. \quad (1.46)$$

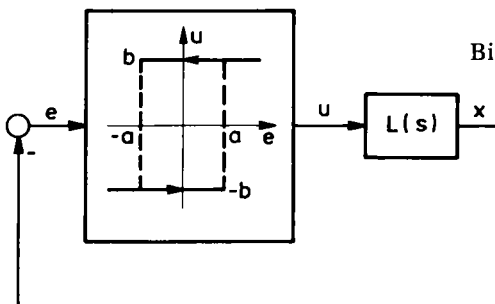


Bild 1/22 Regelkreis mit Hysterese

Bild 1/23 zeigt die lineare und nichtlineare Kennlinie. Da eine Ruhelage nur für $u = \pm b$ eintreten kann, muß nach Bild 1/23 für die Steigung der linearen Kennlinie gelten:

$$\frac{1}{K} > \frac{b}{a}$$

oder

$$0 < K < \frac{a}{b}. \quad (1.47)$$

Dies ist also die Bedingung dafür, daß eine Ruhelage existiert. Es gibt dann zwei mögliche Ruhelagen:

$$u_R = b, \quad e_R = -Ku_R = -Kb$$

und

$$u_R = -b, \quad e_R = -Ku_R = +Kb.$$

Damit eine solche Ruhelage wirklich angenommen wird, muß $e(t)$ zur Ruhe kommen, also $\dot{e}(t)$ Null werden.

Anhand des Hysteresebeispiels sei noch auf einen allgemeinen Punkt hingewiesen. Es ist möglich, daß in einer nichtlinearen Regelung ein gewünschtes Betriebsverhalten in Gestalt einer bestimmten Ruhelage nicht ohne weiteres zu realisieren ist. So ist es beim Regelkreis vom Bild 1/22 unmöglich, eine Ruhelage $e = 0$, $u = 0$ zu verwirklichen. Dennoch kann es durchaus vernünftig sein, das Verhalten der Regelung in der Umgebung einer solchen „geforderten“ Ruhelage zu untersuchen.

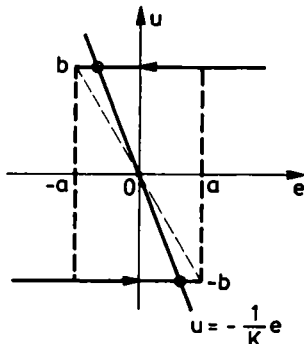


Bild 1/23
Ruhelage des Regelkreises aus Bild 1/22

Aber auch dann, wenn es sich bei \underline{x}_R nicht nur um eine geforderte, sondern um eine wirkliche Ruhelage des Systems handelt, bedeutet dies nur, daß \underline{x}_R die Systemgleichungen erfüllt. Das zugehörige reale System braucht keineswegs im Punkt \underline{x}_R zu verharren. Selbst dann, wenn es zu irgendeinem Zeitpunkt die Ruhelage \underline{x}_R einnimmt, wird es infolge der ständig vorhandenen Störungen die Ruhelage nicht beibehalten. Bestenfalls bleibt es in einer engen Umgebung der Ruhelage. Es kann sich unter dem Einfluß der Störungen aber auch vollständig und endgültig aus der Ruhelage entfernen. Damit aber ist bereits die Frage nach dem Stabilitätsverhalten der Ruhelage angeschnitten, der wir uns im übernächsten Abschnitt ausführlich widmen werden. Zuvor werde der nichtlineare Regelkreis auf eine für die weiteren Untersuchungen zweckmäßige Form gebracht.

1.5 Nichtlineare Standardregelung

Wir betrachten den nichtlinearen Regelkreis in Bild 1/5, wobei $w = w_R$ konstant sei, und gehen zu den Abweichungen

$$\begin{aligned}\Delta e &= e - e_R, \\ \Delta u &= u - u_R, \\ \Delta y &= y - y_R, \\ \Delta x &= x - x_R, \\ \Delta r &= r - r_R\end{aligned}$$

über.

Bei diesem Übergang zu den Abweichungen ändert sich das Übertragungsverhalten eines linearen Glieds nicht. Sei nämlich

$$x_a = \varphi\{x_e\} \quad (1.48)$$

ein allgemeines lineares Übertragungsglied mit dem Operator φ . Für einen Ruhezustand gilt dann speziell

$$x_{aR} = \varphi\{x_{eR}\}. \quad (1.49)$$

Subtrahiert man (1.49) von (1.48), so wird

$$x_a - x_{aR} = \varphi\{x_e\} - \varphi\{x_{eR}\},$$

also wegen des Superpositionsprinzips

$$x_a - x_{aR} = \varphi\{x_e - x_{eR}\}$$

oder

$$\Delta x_a = \varphi\{\Delta x_e\} . \quad (1.50)$$

Der Operator φ bleibt also beim Übergang zu den Abweichungen unverändert.

In der komplexen Darstellung, bei welcher der Operator φ in der Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ besteht, bleibt also diese unverändert. Daher folgen aus Bild 1/5 die Gleichungen

$$\Delta x = L_2(s)\Delta y , \quad (1.51)$$

$$\Delta u = L_1(s)\Delta e , \quad (1.52)$$

$$\Delta r = L_3(s)\Delta x . \quad (1.53)$$

Für den Soll-Istwert-Vergleich hat man zunächst die Gleichung

$$e_R + \Delta e = w_R - (r_R + \Delta r) .$$

Da im Ruhezustand

$$e_R = w_R - r_R$$

gilt, folgt daraus

$$\Delta e = - \Delta r . \quad (1.54)$$

Schließlich wird aus der Kennliniengleichung

$$y_R + \Delta y = F(u_R + \Delta u)$$

oder

$$\Delta y = F(u_R + \Delta u) - y_R = \tilde{F}(\Delta u) . \quad (1.55)$$

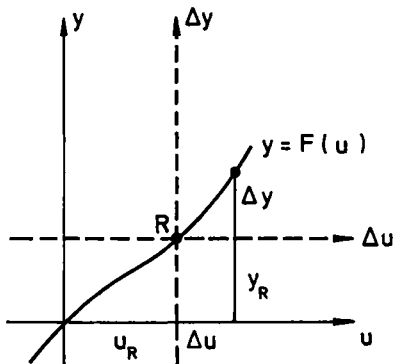


Bild 1/24 Nichtlineare Kennlinie beim Übergang zu den Abweichungen von einer Ruhelage

Ein Blick auf das Bild 1/24 zeigt, daß die so erhaltene Kennlinie \tilde{F} nichts weiter ist als die ursprüngliche Kennlinie, nur in einem neuen Achsenkreuz, dessen Ursprung in der Ruhelage R liegt. Die Gleichungen (1.51) bis (1.55) ergeben zusammen die Darstellung in Bild 1/25.

Nunmehr kann man die linearen Blöcke entgegen der Wirkungsrichtung des Regelkreises hinter das Kennlinienglied verschieben. Dort kann man sie zu einem einzigen Block mit der Übertragungsfunktion

$$L(s) = L_1(s)L_2(s)L_3(s)$$

vereinigen. Führt man in der so erhaltenen Schleife nachträglich wieder eine möglichst einfache Bezeichnung ein, so gelangt man zu dem *nichtlinearen Standardregelkreis* im Bild 1/26. Er liegt den folgenden Betrachtungen zugrunde.

Abschließend sei betont, daß der hier durchgeführte Übergang zu den Abweichungen von einem Ruhezustand nichts mit irgendeiner Linearisierung zu tun

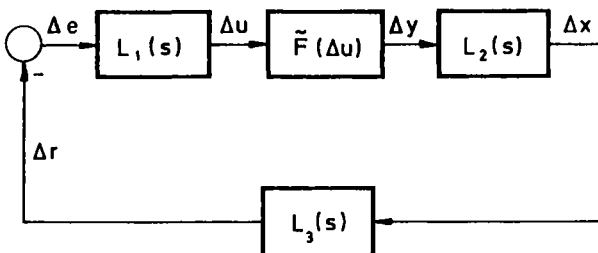


Bild 1/25 Nichtlinearer Regelkreis in Abweichungen von einer Ruhelage

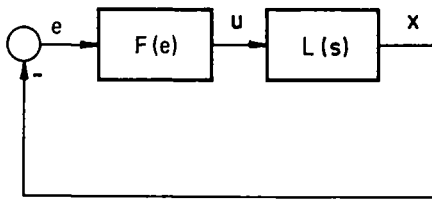


Bild 1/26

Nichtlinearer Standardregelkreis

hat. Vielmehr dürfen die Abweichungen beliebig groß sein. Es handelt sich lediglich um die Einführung neuer zweckmäßiger Koordinaten.

1.6 Stabilitätsverhalten einer Ruhelage

Betrachtet man das Pendelbeispiel von Bild 1/20, so sieht man, daß das Verhalten eines dynamischen Systems in der Umgebung einer Ruhelage sehr unterschiedlich sein kann. Lenkt man das Pendel aus der unteren Ruhelage $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ ein wenig aus, so bleibt es in einer engen Umgebung der Ruhelage, und diese Umgebung wird beliebig klein, wenn man die anfängliche Auslenkung genügend klein wählt. Hingegen wird die Pendelmasse bei der geringsten Auslenkung aus der oberen Ruhelage $\varphi = \pi$, $\dot{\varphi} = 0$ nicht mehr in einer engen Umgebung von ihr verbleiben. Man wird daher die untere Ruhelage als stabil, die obere als instabil bezeichnen. Das entspricht dem Sprachgebrauch des täglichen Lebens, wie er in den Bezeichnungen „stabile Preise“ oder „stabile Wetterlage“ zum Ausdruck kommt.

Um diese Begriffe zu verallgemeinern und schärfer zu fassen, gehen wir von der allgemeinen Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad (1.56)$$

aus. Damit eine Ruhelage existieren kann, setzen wir $\underline{u} = \underline{u}_R$ als konstant voraus. Wir definieren dann:

Eine Ruhelage \underline{x}_R des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ mit konstantem \underline{u} heißt stabil, wenn der Zustandspunkt $\underline{x}(t)$ des Systems für alle $t > t_0$ in einer beliebig engen Umgebung der Ruhelage bleibt, sofern sein Anfangszustand $\underline{x}(t_0)$ genügend nahe bei \underline{x}_R liegt. Andernfalls heißt die Ruhelage instabil. (1.57)

Der Leser wird vermutlich schon erkannt haben, daß diese Definition eine ϵ - δ -Aussage in weicher Formulierung enthält. Explizit lautet sie:

Die Ruhelage \underline{x}_R ist stabil, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert derart, daß $|\underline{x}(t) - \underline{x}_R| < \epsilon$ für alle $t > t_0$, sofern $|\underline{x}(t_0) - \underline{x}_R| < \delta$. (1.58)

Das Bild 1/27 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Vektoren.

Als *Beispiel* betrachten wir das schon oben erwähnte *Pendel* aus Bild 1/20. Zunächst werde angenommen, daß das Pendel ungedämpft ist, also nur die Schwerkraft einwirkt, jedoch Luftwiderstand und Lagerreibung vernachlässigt werden können. Aus Bild 1/20 liest man ab, daß die wirksame Komponente der Schwerkraft durch $-mg\sin\varphi$ gegeben ist, also nach dem 2. Newtonschen Axiom die Differentialgleichung $m\ddot{s} = -mg\sin\varphi$ und daher wegen $s = l\varphi$ die Gleichung $\ddot{\varphi} = -(g/l)\sin\varphi$ folgt. Führt man die Zustandsvariablen φ und $\dot{\varphi} = v$ ein, so erhält man daraus die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{\varphi} = v, \quad \dot{v} = -\frac{g}{l} \sin\varphi. \quad (1.59)$$

Die Differentialgleichungen sind also in der Tat nichtlinear. Es handelt sich um ein dynamisches System, dessen Eingangsgröße u von vornherein Null ist, das also allein durch Anfangsbedingungen angeregt wird. Seine Ruhelagen sind durch

$$v = 0, \sin\varphi = 0$$

gegeben, woraus für

$$v = 0, \varphi = k \cdot 2\pi, \quad k \text{ beliebig ganz,}$$

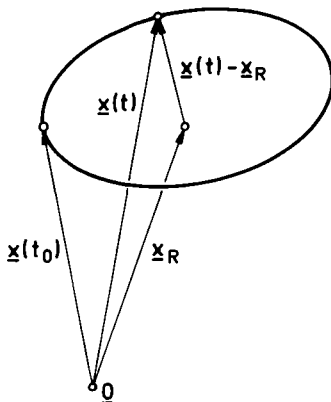


Bild 1/27 Zur Stabilitätsdefinition

die untere Ruhelage und für

$$v = 0, \varphi = \pi + k \cdot 2\pi = (2k + 1)\pi, \quad k \text{ beliebig ganz,}$$

die obere Ruhelage folgt. Wegen der Vieldeutigkeit des Winkels erhält man also in der φ - v -Ebene, der Zustandsebene des Systems, unendlich viele Ruhelagen, die aber nur *zwei* physikalisch verschiedenen Ruhelagen entsprechen.

Um das Verhalten des Pendels in der Umgebung der Ruhelagen genauer zu verfolgen, ermitteln wir die Trajektorien, also die Lösungen der Zustandsdifferentialgleichungen, in der Nähe der Ruhelagen. Dies gelingt in einfacher Weise, wenn man den Quotienten der beiden Differentialgleichungen (1.59) bildet:

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{g}{l} \frac{\sin\varphi}{v}. \quad (1.60)$$

Trennung der Veränderlichen führt zur Beziehung

$$v dv = -\frac{g}{l} \sin\varphi d\varphi,$$

woraus durch Integration

$$v^2 = \frac{2g}{l} \cos\varphi + C \quad (1.61)$$

mit dem Integrationsparameter C folgt.

Für den Schnittpunkt einer solchen Kurve mit der v -Achse gilt wegen $\varphi = 0$:

$$v_0^2 = \frac{2g}{l} + C,$$

also

$$C = v_0^2 - \frac{2g}{l}.$$

Aus (1.61) wird so

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2g}{l} (1 - \cos\varphi),$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4g}{l} \sin^2(\varphi/2). \quad (1.62)$$

Dies ist somit die *Gleichung der Pendeltrajektorien*. Im Bild 1/28 sind sie skizziert.

Da in der oberen bzw. unteren Halbebene $\dot{\varphi} > 0$ bzw. < 0 ist, muß $\varphi(t)$ in der oberen Halbebene wachsen, in der unteren aber abnehmen, woraus sich der Durchlaufungssinn der Trajektorien ergibt. Auf der φ -Achse liegen demgemäß Scheitelpunkte der Trajektorien. Die Punkte $\varphi = k\pi$, $v = 0$, k beliebig ganz, bilden eine Ausnahme. Als Ruhelagen stellen sie selbst auf einen Punkt zusammengeschrunppte Trajektorien dar. Es sind *singuläre Punkte* der Zustandsdifferentialgleichungen.

Um die Trajektorien in der Umgebung der Ruhelagen anschaulich zu erfassen, betrachten wir zwei Spezialfälle der Gleichung (1.62). Zunächst starten wir in der Nähe des Ursprungs, also mit betragsmäßig kleinem v_0 . Mit der Näherung

$$\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$$

wird dann aus (1.62)

$$v^2 + \frac{g}{l} \varphi^2 = v_0^2.$$

Das sind Ellipsen um die untere Ruhelage $(0,0)$.

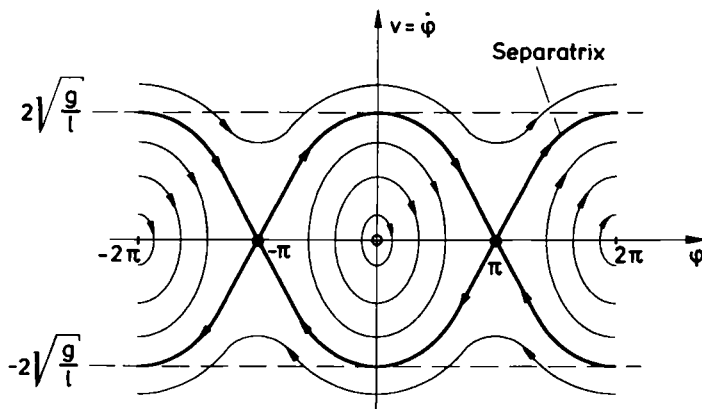


Bild 1/28 Trajektorien des ungedämpften Pendels

Wächst $|v_0|$, so weichen die Trajektorien mehr und mehr von der Ellipsen-
gestalt ab. Betrachten wir nun den durch Gleichung (1.62) nahegelegten Spezial-
fall

$$v_0 = 2 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Dann wird

$$v^2 = \frac{4g}{l} \cos^2(\varphi/2),$$

also

$$v = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (1.63)$$

Da für $\varphi = \pi$ die Ordinate $v = 0$ ist, sieht man, daß es sich um die in Bild 1/28
stärker ausgezogene Kurve handelt. Man bezeichnet sie als *Separatrix*, da sie
zwei verschiedene Trajektorienbereiche trennt. In ihrem Innenbereich liegen
geschlossene Kurven, während ihr Außenbereich von unbegrenzten Wellenkurven
durchzogen wird, da für $v_0^2 > (4g/l)$ v^2 für beliebige φ positiv ist.

Betrachten wir nun die untere Ruhelage $(0,0)$ im Bild 1/28, so sieht man unmit-
telbar, daß sie stabil ist: Die ellipsenförmigen Trajektorien bleiben in ihrem Ge-
samtverlauf beliebig nahe bei der Ruhelage, wenn ihr Anfangspunkt genügend
nahe am Ursprung liegt. Im Bild 1/29 ist dies noch etwas genauer ausgeführt.
Man legt eine Kreisscheibe mit dem Radius ϵ um 0 . Nun bestimmt man irgend-
eine Trajektorie, die im Innern der ϵ -Scheibe liegt, z.B. die eingezeichnete
Kurve C. Jetzt legt man eine Kreisscheibe um $(0,0)$, die im Innern von C liegt,
sonst aber beliebig ist. Ihr Radius sei mit δ bezeichnet. Betrachtet man nun ir-
gendeine Trajektorie, deren Anfangspunkt im δ -Kreis liegt, für die also $|x_0| =$
 $\sqrt{\varphi_0^2 + v_0^2} < \delta$ ist, so liegt sie erst recht vollständig innerhalb C, da die
Trajektorien ineinander geschachtelt sind, ohne sich zu überschneiden. Um so
mehr muß sie innerhalb des ϵ -Kreises gelegen sein. Für alle $t \geq 0$ gilt also
 $|\underline{x}(t)| = \sqrt{\varphi^2(t) + v^2(t)} < \epsilon$. Da diese Konstruktion für jedes positive ϵ
durchführbar ist, gilt die Stabilitätsdefinition.

Was die obere Ruhelage $(\pi,0)$ angeht, so sieht man aus Bild 1/28 sofort, daß sie
instabil sein muß, da Trajektorien, die beliebig nahe bei ihr beginnen, sich
definitiv von ihr entfernen.

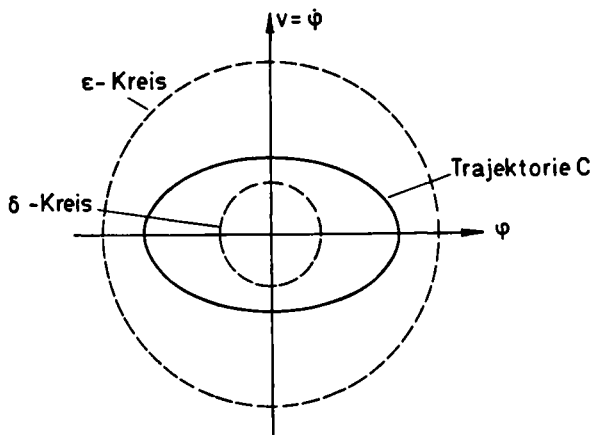


Bild 1/29 Stabilitätsnachweis für die Ruhelage $\varphi = 0$, $v = 0$ des ungedämpften Pendels

Im Bild 1/28, das die Trajektoriencharakteristik des ungedämpften Pendels in der Zustandsebene darstellt, hat man das gesamte dynamische Verhalten des Pendels anschaulich vor sich. Nimmt man eine Anfangsauslenkung φ_0 aus der stabilen Ruhelage vor, ohne dem Pendel eine Anfangsgeschwindigkeit zu verleihen ($v_0 = 0$), so startet man in einem Punkt $(\varphi_0, 0)$ der φ -Achse bei $(0, 0)$. Dann sind nur geschlossene Trajektorien möglich, also Dauerschwingungen, und zwar von der Amplitude φ_0 . Andere Bewegungszustände sind durch reine Anfangsauslenkungen nicht möglich. Im Grenzfall $\varphi_0 = \pi$, $v_0 = 0$ befindet man sich gerade in der oberen Ruhelage und verbleibt demgemäß in ihr. Um in den Bereich der Wellenkurven zu kommen, muß man eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit vorgeben. Wählt man etwa $\varphi_0 = 0$, aber $v_0 > 0$, startet also auf der v -Achse, so gibt es

bei kleinen v_0 wiederum Dauerschwingungen. Ist aber $v_0 > 2\sqrt{g/l}$, so entsteht eine Wellenkurve, d.h. φ wächst ununterbrochen, und das Pendel kreist um seinen Aufhängepunkt. Im Grenzfall $\varphi_0 = 0$, $v_0 = 2\sqrt{g/l}$ bewegt sich der Zustandspunkt auf der Separatrix gegen die obere Ruhelage $(\pi, 0)$, d.h. das Pendel strebt für $t \rightarrow +\infty$ aus der unteren Vertikallage in die obere Vertikallage.

Wir wollen nun wieder zur allgemeinen Stabilitätsbetrachtung übergehen. Ist eine Ruhelage in dem oben definierten Sinn stabil, so wird ein solches Verhalten vielfach nicht befriedigen. Man möchte vielmehr, daß der Zustandspunkt $\underline{x}(t)$ des dynamischen Systems mit wachsendem t , theoretisch also für $t \rightarrow +\infty$, in die Ruhelage zurückkehrt – was bisher ja nicht verlangt war. Man gelangt so zu einer zweiten Stabilitätsdefinition:

Ein Ruhelage \underline{x}_R heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und überdies eine Umgebung ³⁾ besitzt, aus welcher $\underline{x}(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ gegen die Ruhelage strebt.

Die Gesamtheit aller Punkte des Zustandsraums, aus denen die Trajektorien gegen \underline{x}_R streben, heißt *Einzugsbereich* der Ruhelage. (1.64)

Vielleicht ist der Leser überrascht, daß die Stabilität der Ruhelage besonders vorausgesetzt wird. Aber die Stabilität folgt nicht unbedingt aus dem asymptotischen Verhalten. Das ersieht man aus Bild 1/30, in dem die Trajektorienschar einer Zustandsdifferentialgleichung dargestellt ist, die in den schraffierten Bereich nicht eindringen möge. Es handelt sich um ein System mit einer einzigen Zustandsvariablen x , das die Ruhelage $x_R \equiv 0$ besitzt. Die Trajektorien $x(t)$ streben für $t \rightarrow +\infty$ sämtlich gegen die Ruhelage 0, ganz gleich, mit welchem Anfangswert $x(0)$ sie beginnen. Aber wie nahe bei 0 man den Anfangswert auch wählen mag, es gibt stets Kurven, für die $|x(t)| < \epsilon$ nicht für alle t gilt. Also ist die Ruhelage instabil. Ein technisches System mit einem derartigen Verhalten wäre sehr unangenehm, da es selbst bei kleinsten Störungen stark reagieren kann.

Zur Bezeichnungsweise ist anzumerken, daß man eine stabile, aber nicht asymptotisch stabile Ruhelage auch als „schwach stabil“ [30] oder „grenzstabil“ [70] bezeichnet. Letztere Benennung wird allerdings im Rahmen des Popow-Kriteriums (Kapitel 5) in anderer Bedeutung benutzt [49].

Es liegt auf der Hand, daß es bei einer asymptotisch stabilen Ruhelage sehr auf die Größe des Einzugsbereiches ankommt. Umfaßt er nur eine sehr enge Umgebung der Ruhelage, so daß schon geringfügige Anfangsstörungen $\underline{x}(t_0)$ den Zu-

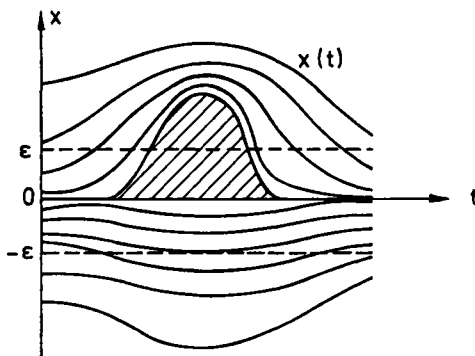


Bild 1/30
Instabile Ruhelage mit
asymptotischem Verhalten

³⁾ Unter einer Umgebung eines Punktes \underline{x}_R kann man sich stets eine Kugelumgebung vorstellen: $|\underline{x} - \underline{x}_R| < \epsilon$ mit irgendeinem positiven ϵ .

standspunkt $\underline{x}(t)$ des Systems aus ihm entfernen, so ist die Ruhelage praktisch instabil. Gutes Stabilitätsverhalten liegt erst dann vor, wenn die asymptotisch stabile Ruhelage einen genügend umfangreichen Einzugsbereich besitzt, in dem die praktisch anfallenden Anfangsstörungen enthalten sind. Der Idealfall liegt dann vor, wenn die Trajektorien aus sämtlichen Punkten des Zustandsraumes zur Ruhelage streben:

Eine asymptotisch stabile Ruhelage heißt global asymptotisch stabil, wenn ihr Einzugsbereich den gesamten Zustandsraum umfaßt. (1.65)

Beispiel einer asymptotisch stabilen Ruhelage ist die untere Ruhelage des gedämpften Pendels, bei dem Luftwiderstand und Lagerreibung berücksichtigt werden. Dessen Bewegung nimmt mit wachsender Zeit ab. Sie stellt einen oszillierenden oder möglicherweise auch aperiodischen Vorgang dar, der für $t \rightarrow +\infty$ dem Ruhezustand $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ zustrebt. Die Trajektorien gehen daher für $t \rightarrow +\infty$ gegen die Ruhelage $(0,0)$, etwa so, wie das in Bild 1/31 skizziert ist. Der Einzugsbereich umfaßt nicht den gesamten Zustandsraum. Befindet sich der Zustandspunkt nämlich in der oberen Ruhelage $(\pi, 0)$, so bleibt er dort, sofern er nicht durch eine Störung in einen anderen Anfangszustand versetzt wird. Der Punkt $(\pi, 0)$ gehört daher nicht zum Einzugsbereich der unteren Ruhelage. Diese ist also nicht global asymptotisch stabil.

Der im vorhergehenden eingeführte Stabilitätsbegriff wird als *Ljapunowscher Stabilitätsbegriff* bezeichnet, da er von dem bedeutenden russischen Mathematiker und Mechaniker *M. A. Ljapunow* stammt ⁴⁾. Seine exakte mathematische Be-

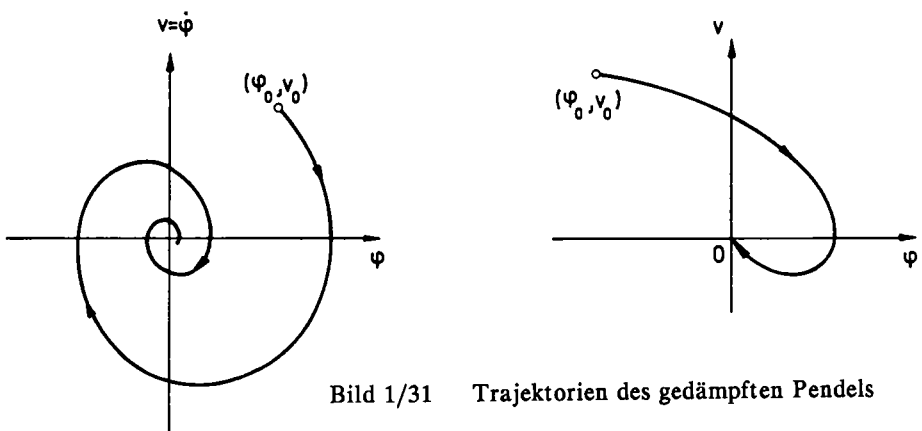


Bild 1/31 Trajektorien des gedämpften Pendels

⁴⁾ *M. A. Ljapunow*: Allgemeines Problem der Stabilität der Bewegung (russisch). Comm. Soc. math. Charkow 1892. (Französische Übersetzung in Ann. Fac. Sci. Toulouse 9 (1907).

handlung samt Erweiterungen auf allgemeinere, z.B. zeitvariante, Systeme findet man beispielsweise in [22, 30, 31, 70]. Neben ihm werden in der nichtlinearen Theorie noch andere Stabilitätsbegriffe benutzt. So kann man die vom Linearen her bekannte „Übertragungsstabilität“ oder „BIBO-Stabilität“ auch im nichtlinearen Bereich verwenden (siehe z.B. [31, 70]). In neuerer Zeit sind es vor allem Begriffe, die aus der Funktionalanalysis stammen. Ganz überschlägig gesprochen, wird bei ihnen einer Zeitfunktion $y(t)$ eine Maßzahl zugeordnet, durch die gewissermaßen die „Größe“ der Funktion erfaßt wird, z.B.

$$\|y\| = \left[\int_0^{\infty} y^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Eine Stabilitätsaussage kann dann darin bestehen, daß die Maßzahl der Ausgangsgröße y eines Übertragungsgliedes höchstens gleich einer bekannten Funktion von der Maßzahl der Eingangsgröße u ist:

$$\|y\| \leq \varphi \left\{ \|u\| \right\}, \quad \varphi \text{ bekannt}.$$

Über solche Stabilitätsbegriffe und ihre Verwendung kann man zum Beispiel in [10] nachlesen, vor allem aber in [2], wo auch die erforderlichen Grundlagen aus der Funktionalanalysis im Anhang gebracht werden.

Wir werden uns im folgenden an den Ljapunowschen Stabilitätsbegriff halten, der unmittelbar aus den physikalisch-technischen Anwendungen stammt und daher sehr anschaulich ist. Überdies hat er den Vorzug, daß man ihn mit relativ geringem mathematischen Aufwand handhaben kann.

Bevor wir nun an die nichtlinearen Systeme herangehen, wollen wir noch einen Blick auf die *linearen* Systeme werfen, um zu sehen, wie sich ihr Verhalten im Licht des Ljapunowschen Stabilitätsbegriffs ausnimmt. Im folgenden werden wir verschiedentlich davon Gebrauch machen.

1.7 Anwendung des Ljapunowschen Stabilitätsbegriffs auf lineare Systeme

Zunächst eine Vorbemerkung, welche die Rechnung etwas vereinfacht! Betrachtet wird die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}_R,$$

wobei $\underline{u} = \underline{u}_R$ konstant ist, damit eine Ruhelage \underline{x}_R existieren kann. Für sie gilt

$$\underline{0} = \underline{A}\underline{x}_R + \underline{B}\underline{u}_R.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(\underline{x} - \underline{x}_R),$$

wofür man wegen $\dot{\underline{x}}_R = \underline{0}$ auch

$$(\underline{x} - \underline{x}_R)' = \underline{A}(\underline{x} - \underline{x}_R)$$

schreiben kann. Indem man zur Abweichung

$$\underline{\Delta x} = \underline{x} - \underline{x}_R$$

von der Ruhelage übergeht, kann man sich bei der Stabilitätsuntersuchung also auf die homogene Zustandsdifferentialgleichung beschränken, wobei die Ruhelage dann $\underline{\Delta x} = \underline{0}$ ist. Mit anderen Worten: Bei der Stabilitätsuntersuchung eines linearen Systems kann man vornherein $\underline{u} = \underline{0}$ setzen und die betrachtete Ruhelage zu $\underline{x} = \underline{0}$ annehmen.

Wir wenden uns zunächst einem rationalen Übertragungsglied (R-Glied) mit der Übertragungsgleichung

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} U(s)$$

zu, wobei man für die Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ $\text{Grad } Z \leq \text{Grad } N$ voraussetzen darf. Die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des Nennerpolynoms $N(s)$ sind die Eigenwerte des R-Gliedes. Sofern Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen haben, sind sie gleich den Polen des R-Gliedes.

Vorerst sei vorausgesetzt, daß sie einfach sind. Dann lauten die Zustandsdifferentialgleichungen des R-Gliedes, die man durch Partialbruchzerlegung aus der Übertragungsgleichung erhalten kann:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei – wie oben begründet – die Eingangsgröße $u = 0$ gesetzt ist. Offensichtlich ist $\underline{x} = \underline{0}$ eine Ruhelage. Das Verhalten der Trajektorien in ihrer Umgebung überblickt man sofort aus der Lösung dieser Zustandsdifferentialgleichungen:

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} x_i(0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Liegen die Eigenwerte λ_i des rationalen Übertragungsgliedes sämtlich links von der imaginären Achse der komplexen Ebene, so streben die Funktionen $x_i(t)$ mit wachsendem t gegen 0, ganz gleich, wo der Anfangspunkt $\underline{x}(0)$ liegt. Die Ruhelage $\underline{0}$ ist also global asymptotisch stabil. Liegt mindestens ein λ_i rechts der j -Achse, so strebt für $x_i(0) \neq 0$ die zugehörige Funktion $x_i(t)$ dem Betrage nach $\rightarrow +\infty$ oder stellt eine aufklingende Schwingung dar. Dann ist die Ruhelage $\underline{0}$ also instabil.

Schließlich möge mindestens ein λ_i auf der j -Achse liegen, aber keines rechts davon. Ist $\lambda_1 = 0$, so ist $x_1(t) = x_1(0)$. $x_1(t)$ strebt dann also nicht gegen 0 mit wachsendem t , wird aber dem Betrage nach kleiner als ein beliebig kleines positives ϵ , wenn man nur den Anfangswert $x_1(0)$ genügend klein wählt. Handelt es sich um ein nichtreelles Polpaar $\lambda_1 = j\omega_0$ und $\lambda_2 = -j\omega_0$, so ist $|x_1(t)| = |x_1(0)|$ und $|x_2(t)| = |x_2(0)|$, so daß diese Funktionen zwar ebenfalls nicht $\rightarrow 0$ streben für $t \rightarrow +\infty$, aber in ihrem ganzen Verlauf beliebig nahe bei Null bleiben, wenn ihre Anfangswerte genügend klein gemacht werden. Die Ruhelage $\underline{0}$ ist in diesem Fall stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

Sei nun etwa λ_1 ein m -facher Eigenwert des R -Gliedes. Zu ihm gehören die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_1 x_2 + x_1, \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= \lambda_1 x_m + x_{m-1}.\end{aligned}$$

Zu ihrer Lösung wendet man am besten die Laplace-Transformation an:

$$\begin{aligned}sX_1 - x_{10} &= \lambda_1 X_1, \\ sX_2 - x_{20} &= \lambda_1 X_2 + X_1, \\ &\vdots \\ sX_m - x_{m0} &= \lambda_1 X_m + X_{m-1},\end{aligned}$$

wobei die x_{i0} die Anfangswerte bezeichnen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} x_{10}, \\ X_2(s) &= \frac{1}{s-\lambda_1} X_1(s) + \frac{1}{s-\lambda_1} x_{20} = \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} x_{10} + \frac{1}{s-\lambda_1} x_{20}, \\ &\vdots \\ X_m(s) &= \frac{1}{(s-\lambda_1)^m} x_{10} + \frac{1}{(s-\lambda_1)^{m-1}} x_{20} + \dots + \frac{1}{s-\lambda_1} x_{m0}. \end{aligned}$$

Durch Rücktransformation erhält man

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} e^{\lambda_1 t}, \\ x_2(t) &= (x_{10} t + x_{20}) e^{\lambda_1 t}, \\ &\vdots \\ x_m(t) &= \left[x_{10} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + x_{m0} \right] e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung, die für irgendeinen mehrfachen Eigenwert des rationalen Übertragungsgliedes gilt, ersieht man sofort, daß auch beim Auftreten mehrfacher Eigenwerte die Ruhelage global asymptotisch stabil ist, wenn alle Eigenwerte links der j -Achse liegen, hingegen instabil, wenn mindestens ein Eigenwert rechts davon gelegen ist. Liegt aber ein *mehrfacher* Eigenwert auf der j -Achse und kein Eigenwert rechts von ihr, so ändern sich die Verhältnisse gegenüber dem Auftreten einfacher Eigenwerte auf der j -Achse. Dort war die Ruhelage stabil; jetzt aber wird sie instabil. Auch jetzt ist zwar $\lambda_1 = j\omega_0$ (worin $\lambda_1 = 0$ eingeschlossen ist), also $|e^{\lambda_1 t}| = 1$. Aber als Faktor der e -Funktion tritt nicht nur ein konstanter Anfangswert auf, sondern bei mindestens einem x_i ein Polynom in t . Diese Funktion $x_i(t)$ strebt daher für wachsendes t gegen $+$ oder $-\infty$ oder stellt eine aufklingende Schwingung dar.

Faßt man zusammen, so bekommt man das im Bild 1/32 wiedergegebene Übersichtsschema.

Betrachten wir nun ein *beliebiges* lineares (zeitinvariantes) System mit der homogenen Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x},$$

Lage der Eigenwerte des R-Gliedes		Verhalten der Ruhelagen
alle Eigenwerte links der j-Achse		global asymptotisch stabil
mindestens ein Eigenwert auf der j-Achse, aber keiner rechts von ihr	alle Eigenwerte auf der j-Achse haben die Ordnung 1	stabil, aber nicht asymptotisch stabil
	mindestens ein Eigenwert auf der j-Achse hat die Ordnung > 1	instabil
mindestens ein Eigenwert rechts der j-Achse		instabil

Bild 1/32 Stabilitätsverhalten eines R-Gliedes

das also die Ruhelage $\underline{0}$ besitzt, so bleiben die wesentlichen Aussagen unverändert:

- (I) Liegen alle Eigenwerte von \underline{A} links der j-Achse, so ist die Ruhelage global asymptotisch stabil.
- (II) Liegt mindestens ein Eigenwert von \underline{A} rechts der j-Achse, so ist die Ruhelage instabil.
- (III) Liegt mindestens ein Eigenwert von \underline{A} auf der j-Achse, aber keiner rechts davon, so ist die Ruhelage entweder stabil, aber nicht asymptotisch stabil, oder instabil. (1.66)

Einen Unterschied gibt es jedoch gegenüber dem oben betrachteten Fall des rationalen Übertragungsgliedes: Falls in der Situation (III) mehrfache Eigenwerte auftreten, kann die Ruhelage dennoch stabil sein. Ein einfaches Beispiel hierfür zeigt das Bild 1/33. Aus ihm liest man die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + u_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4 + u_1, \\ \dot{x}_4 &= -3x_4 + u_2\end{aligned}$$

ab, woraus man für $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ die homogenen Differentialgleichungen erhält. Aus dem Bild ist abzulesen, daß sie den zweifachen Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = -3$ besitzen. Wie man etwa mit Laplace-Transformation findet, lautet die Lösung der homogenen Differentialgleichungen

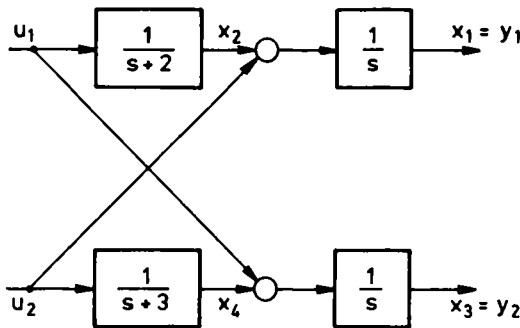


Bild 1/33 Mehrgrößensystem mit mehrfachem Eigenwert

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}(1 - e^{-2t}), \\
 x_2(t) &= x_{20}e^{-2t}, \\
 x_3(t) &= x_{30} + \frac{1}{3}x_{40}(1 - e^{-3t}), \\
 x_4(t) &= x_{40}e^{-3t} \quad \text{mit } x_i(0) = x_{i0}.
 \end{aligned}$$

Man sieht daraus, daß die $|x_i(t)|$ für alle $t > 0$ beliebig klein bleiben, wenn die $|x_{i0}|$ genügend klein gewählt werden. Die Ruhelage ist also stabil, ohne jedoch asymptotisch stabil zu sein.

Wie man aus dem Beispiel erkennt, ist dieses Verhalten dadurch bedingt, daß die zu einem mehrfachen Eigenwert gehörenden Eigenwerte in *verschiedenen* Signalpfaden $Y_i(s) = G_{ij}(s)U_j(s)$ des Mehrgrößensystems liegen. Bei einem Eingrößensystem ist dieser Fall ausgeschlossen, weil es nur einen einzigen Signalpfad gibt. Tritt hier beispielsweise ein zweifacher Eigenwert $s = 0$ auf, so liegen die zugehörigen I-Glieder *hintereinander*, was im Zeitbereich zu einer Rampenfunktion und damit zur Instabilität der Ruhelage führt.

Die Verhältnisse des „Zwischenfalles“ (III) im Kriterium (1.66) werden völlig geklärt durch den folgenden Satz:

Liegt mindestens ein Eigenwert des linearen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}$ auf der j -Achse, aber keiner rechts davon, so ist die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ des Systems genau dann stabil, wenn zu jedem auf der j -Achse gelegenen Eigenwert der Vielfachheit m genau m linear unabhängige Eigenvektoren gehören.

(1.67)

Die Beweise der Sätze (1.66) und (1.67) findet man z.B. in [25], [31], [70].

Überblickt man abschließend nochmals das Stabilitätsverhalten der linearen Systeme, so sieht man zwei charakteristische Unterschiede gegenüber dem nicht-linearen Verhalten:

- (I) Es gibt im Linearen keine Ruhelage, die asymptotisch stabil, aber nicht global asymptotisch stabil ist – dieser Fall kommt in Bild 1/32 und Satz (1.66) nicht vor. *Ist die Ruhelage eines linearen Systems asymptotisch stabil, so umfaßt ihr Einzugsbereich also stets den gesamten Zustandsraum.*
Daß der Einzugsbereich einer asymptotisch stabilen Ruhelage in irgendeiner Weise eingeschränkt ist, kann also nur bei nichtlinearen Systemen der Fall sein. Die untere Ruhelage des gedämpften Pendels liefert bereits ein Beispiel hierfür.
- (II) Wenn ein lineares System eine Ruhelage hat, so ist diese entweder eindeutig bestimmt oder es gibt unendlich viele Ruhelagen. Stets gilt aber: *Hat ein lineares System mehrere Ruhelagen, so haben diese das gleiche Stabilitätsverhalten.* Dies folgt sofort daraus, daß das Stabilitätsverhalten durch die Eigenwerte (und in Sonderfällen zusätzlich durch die Eigenvektoren) des Systems bestimmt, also durch die Systemmatrix \underline{A} festgelegt ist, ganz gleich, wieviele Ruhelagen vorhanden sind.
Bei einem nichtlinearen System kann es anders sein. Hier kann es mehrere Ruhelagen mit verschiedenem Stabilitätsverhalten geben, wie man wiederum am Pendelbeispiel sieht.

Bei einem linearen System kann man daher vom „Stabilitätsverhalten des Systems“ schlechthin sprechen. Bei einem nichtlinearen System hingegen ist das im allgemeinen nur sinnvoll, wenn man weiß, daß es genau eine Ruhelage gibt, deren Stabilitätsverhalten man dann als „Stabilitätsverhalten des Systems“ auffaßt.

Die letzten Bemerkungen machen deutlich, daß es notwendig war, bei nichtlinearen Systemen einen differenzierteren Stabilitätsbegriff als im linearen Bereich einzuführen, wo es genügt, zwischen „stabil“ und „instabil“ zu unterscheiden. Für das kompliziertere dynamische Verhalten nichtlinearer Systeme genügt dies aber nicht mehr, wie schon das einfache Beispiel des Pendels zeigt. An den nun zu behandelnden nichtlinearen Regelungen wird sich das mannigfach bestätigen.