

## 3 Grundzüge und Anwendung der Direkten Methode

### 3.1 Grundgedanke der Direkten Methode

Die so überaus anschauliche Betrachtung dynamischer Systeme in der Zustands-ebene, mit der wir uns im vorangegangenen Kapitel befaßt haben, ist leider auf Systeme 1. und 2. Ordnung beschränkt und kann nur in speziellen Fällen auf Systeme höherer Ordnung ausgedehnt werden.

Was man vor allem bräuchte, wäre ein Verfahren, mit dessen Hilfe man bei einem System *beliebiger* Ordnung auf das Stabilitätsverhalten der Ruhelage schließen könnte – aber ohne daß es erforderlich wäre, die Zustandsdifferentialgleichungen des Systems zu lösen. Denn eine analytische Lösung ist bei einem nichtlinearen System im allgemeinen nicht zu erlangen, eine numerische Lösung zur Gewinnung allgemeiner Einsichten aber unbefriedigend – was beides schon zu Beginn des vorigen Kapitels ausgeführt wurde.

Wie kann man nun etwas über das Stabilitätsverhalten der Ruhelage sagen, ohne sich auf die Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen zu beziehen, durch die das Stabilitätsverhalten doch definiert ist? Das scheint auf den ersten Blick recht aussichtslos zu sein. Daß es aber doch möglich ist, wird einleuchtend, wenn man von einer Energiebetrachtung bei physikalischen Systemen ausgeht. Wir wollen annehmen, daß sich die Energie eines dynamischen Systems als Funktion seiner Zustandsvariablen darstellen läßt und daß diese Funktion mit wachsender Zeit gegen Null strebt. Dann wird die Bewegung des Systems schließlich zum Stillstand kommen. Betrachtet man sie im Zustandsraum, so werden die Trajektorien gegen eine Ruhelage streben, die demnach asymptotisch stabil ist. Auf diese Weise ist es möglich, aus dem Verhalten der Energiefunktion auf die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage zu schließen, ohne die Trajektorien zu kennen, also ohne die Zustandsdifferentialgleichungen zu lösen.

Am Beispiel eines einfachen mechanischen Systems sei dieser Gedankengang noch etwas ausgeführt. Bild 3/1 zeigt ein schwingungsfähiges System mit der Masse  $m$ . An ihr greift die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

$$F_{\rho} = -\rho \dot{x}$$

und außerdem die Federkraft

$$F_c = -f(x)$$

an, die stets der Auslenkung  $x$  entgegenwirkt und im übrigen durch die Kennlinie im Bild 3/2 gegeben ist, die symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Dann gilt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\rho\dot{x} - f(x).$$

Führt man die Zustandsvariablen

$$x = x_1, \quad \dot{x} = x_2$$

ein, so gelten die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{\rho}{m}x_2 - \frac{1}{m}f(x_1).$$

Aus  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$  folgt wegen  $f(0) = 0$  für die Ruhelage des Systems

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Die Energie des Systems setzt sich aus der kinetischen und der potentiellen Energie zusammen. Erstere ist durch

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mx_2^2$$

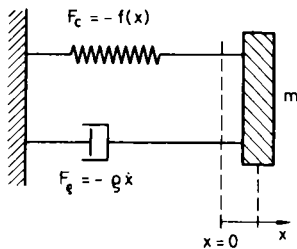


Bild 3/1

Schwingungsfähiges mechanisches System

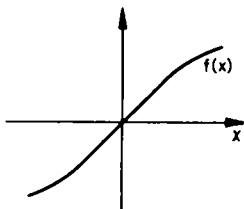


Bild 3/2 Kennlinie der Federrückstellkraft

gegeben. Letztere ist gleich der von der Federkraft geleisteten Arbeit, welche die Masse  $m$  aus der Lage  $x = x_1$  in die Ruhelage  $x = 0$  bringt:

$$E_p = \int_{x_1}^0 [-f(\xi)] d\xi = \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi = F(x_1).$$

Wie man aus dem Bild 3/2 ersieht, ist diese Funktion  $\geq 0$  für alle  $x_1$ . Damit ist die Gesamtenergie des Systems

$$E = F(x_1) + \frac{1}{2} m x_2^2.$$

Die Energie ist jetzt als Funktion der Zustandsvariablen dargestellt. Wie man sieht, ist sie im gesamten Zustandsraum  $\geq 0$  und nimmt den Wert Null nur im Nullpunkt an. Eine derartige Funktion pflegt man als *positiv definit* zu bezeichnen.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Energie ändert, wenn das System durch eine Anfangsauslenkung aus seiner Ruhelage gebracht und dadurch in Bewegung versetzt wird. Dazu hat man  $\dot{E}$  zu berechnen:

$$\dot{E} = \frac{dF}{dx_1} \dot{x}_1 + m x_2 \dot{x}_2 = f(x_1) \dot{x}_1 + m x_2 \dot{x}_2.$$

Hierin sind  $\dot{x}_1$  und  $\dot{x}_2$  durch die Zustandsdifferentialgleichungen des Systems gegeben:

$$\dot{E} = f(x_1) x_2 + m x_2 \left[ -\frac{\rho}{m} x_2 - \frac{1}{m} f(x_1) \right] = -\rho x_2^2.$$

Damit ist auch  $\dot{E}$  als Funktion im Zustandsraum dargestellt. Sie ist dort überall  $\leq 0$ . Der Wert Null kann von ihr aber auch außerhalb des Ursprungs angenommen werden, nämlich überall dort, wo  $x_2 = 0$  ist, also auf der gesamten  $x_1$ -Achse. Eine derartige Funktion heißt *negativ semidefinit*.

Aus diesem Ergebnis kann man folgendes schließen: Von welchem Anfangszustand man auch ausgeht und wie die Bewegung des Systems im einzelnen verlaufen mag, die Energie des Systems wird ständig abnehmen. Ein endgültiger Stillstand in dieser Abnahme kann nur dadurch zustande kommen, daß  $x_2$  identisch Null wird und damit auch  $\dot{x}_2$ . Dann folgt aus der zweiten Zustandsdifferentialgleichung, daß auch  $f(x_1)$  und damit  $x_1$  identisch Null ist, daß also die Ruhelage

eingenommen wird. Mithin ist die Ruhelage  $(0,0)$  als *global asymptotisch stabil* erwiesen. Das gelang, ohne die Trajektorien des Systems zu untersuchen, deren Gestalt bei nichtlinearer Kennlinie  $f(x)$  ja nicht ohne weiteres bekannt ist.

So bestechend die Energiebetrachtung im vorliegenden Fall ist, in dieser Form ist sie für kompliziertere dynamische Systeme nicht praktikabel. Zunächst einmal kann es schwierig sein, einen Formelausdruck für die Energie aufzustellen. Aber auch dann, wenn das möglich ist, wird die Beurteilung der zeitlichen Änderung der Energiefunktion mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein. In dem betrachteten einfachen Beispiel nimmt die Energiefunktion monoton ab. Das braucht jedoch nicht der Fall zu sein. Auch dann, wenn sie oszilliert und nur im Mittel fällt, kommt die Bewegung des Systems zur Ruhe. Ein derartiges Verhalten der Energie ist aber viel schwieriger nachzuprüfen.

Trotz dieser Einwände stellt die Energiebetrachtung einen Ausgangspunkt dar, an dem sich der Hebel der Stabilitätsanalyse ansetzen läßt. Nur muß das zu eng an die physikalische Beschaffenheit des Systems gebundene Energiekonzept abstrakter gefaßt werden. Dieser Schritt wurde von *A. M. Ljapunow* durchgeführt<sup>1)</sup>. Worin er besteht, kann man am obigen Beispiel ersehen, wenn man sich die Schlußweise, die zum Stabilitätsverhalten der Ruhelage führt, nochmals vor Augen hält. Es ist gar nicht wesentlich, daß die dort aufgestellte Funktion  $E(x_1, x_2)$  die Energie des Systems darstellt. Entscheidend ist allein, daß es eine Funktion der Zustandsvariablen gibt, die selbst positiv definit ist, während ihre mit Hilfe der Zustandsdifferentialgleichungen gebildete zeitliche Ableitung negativ semidefinit wird.

Indem man diesen Gedankengang verallgemeinert und die Voraussetzungen noch etwas verschärft, gelangt man zu dem folgenden Vorgehen. Ein dynamisches System sei durch seine Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

bzw. die Vektordifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

<sup>1)</sup> *A. M. Ljapunow*: Problème générale de la stabilité de mouvement. Ann. Fac. Sci. Toulouse 9 (1907), S. 203 – 474 (Übersetzung einer Arbeit aus Comm. Soc. math. Charkow, 1893).

gegeben. Es besitze als Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$ , also den Ursprung des Zustandsraums <sup>2)</sup>. Man versucht nun, eine Funktion  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(\underline{x})$  zu finden, die in einer Umgebung der Ruhelage positiv definit ist und überdies die Eigenschaft hat, daß die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{d}{dt} V(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n) \\ &= \left[ \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x})\end{aligned}$$

in der Umgebung der Ruhelage *negativ definit* wird, d.h.  $\leq 0$  ist und nur im Nullpunkt selbst verschwindet. Man wird dann erwarten dürfen, daß die Ruhelage asymptotisch stabil ist. Das ist der *Grundgedanke der Direkten Methode von Ljapunow*. Eine Funktion  $V(x_1, \dots, x_n)$  mit den angegebenen Eigenschaften, wobei  $\dot{V}$  eventuell auch außerhalb der Ruhelage  $= 0$  sein darf, wird als eine *Ljapunow-Funktion* bezeichnet.

Es handelt sich bei der Direkten Methode um eine weitverzweigte Theorie. Hier sollen nur die Grundzüge beschrieben werden, die für die regelungstechnischen Anwendungen von Interesse sind. Im übrigen sei auf [22, 26, 28, 31] verwiesen.

Zuvor noch eine Bemerkung zur Terminologie. Die Bezeichnung „Direkte Methode“ wird benutzt, weil das Stabilitätsproblem direkt und nicht über die Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen angegangen wird. *Ljapunow* selbst sprach von der „zweiten Methode“. Im Gegensatz zu ihr faßte er unter der „ersten Methode“ die Versuche zusammen, durch Lösen der Zustandsdifferentialgleichungen Aussagen über das Stabilitätsverhalten zu gewinnen. Sie ist also nur ein Sammelbegriff, um all das zu bezeichnen, was nicht zur Direkten Methode gehört, charakterisiert jedoch kein bestimmtes Verfahren. Nicht mit ihr identisch ist die „Methode der ersten Näherung“, ebenfalls eine von *Ljapunow* stammende Bezeichnung. So benennt er das Verfahren, aus dem um einen Arbeitspunkt linearisierten System auf das Stabilitätsverhalten des zugrunde liegenden nichtlinearen Systems in der Umgebung des Arbeitspunktes zu schließen. Wie später gezeigt wird, ergeben sich die einschlägigen Sätze aus der Direkten Methode (Abschnitt 3.4).

<sup>2)</sup> Durch Übergang zu den Abweichungen von der betrachteten Ruhelage läßt sich dies stets erreichen: Siehe hierzu den Anfang von Abschnitt 1.4.

### 3.2 Stabilitätskriterien

Ausgehend von einem physikalischen Beispiel wurde im vorigen Abschnitt eine Vermutung geäußert, wie ein Kriterium für die asymptotische Stabilität der Ruhelage wohl aussehen könnte. Diese Vermutung läßt sich in der Tat beweisen, und man gelangt so zu einem Satz, den wir als *Kriterium der asymptotischen Stabilität im kleinen* bezeichnen wollen:

*Das dynamische System*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

besitze die Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$ . Es gebe eine in der Umgebung von  $\underline{0}$  samt ihren partiellen Ableitungen 1. Ordnung stetige Funktion  $V(x_1, \dots, x_n) = V(\underline{x})^3$ , die dort positiv definit ist, d.h.  $\geq 0$  ist und nur in  $\underline{0}$  selbst verschwindet. Man bilde

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = \left[ \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x}).$$

Diese Funktion sei in der Umgebung von  $\underline{0}$  negativ definit, d.h.  $\leq 0$  und verschwinde nur in  $\underline{0}$  selbst. Dann ist die Ruhelage  $\underline{0}$  asymptotisch stabil.

(3.1)

So bemerkenswert dieser Satz vom theoretischen Standpunkt aus ist, hinsichtlich der praktischen Anwendung kann er oftmals nicht recht befriedigen. Denn man erfährt nichts über den Umfang des Einzugsbereiches der Ruhelage. Ist er sehr klein hinsichtlich der im System möglichen Störauslenkungen, so ist die asymptotische Stabilität der Ruhelage nur von akademischem Interesse, praktisch ist sie instabil. Entspricht etwa die Ruhelage einer Spannung von 100 V, so ist ein Durchmesser ihres Einzugsbereiches von 1 mV bei normaler Störwelligkeit des Systems durchaus unzureichend, da bereits eine kleine Störung den Zustandspunkt des Systems aus dem Einzugsbereich hinauswirft. Eine asymptotisch stabile Ruhelage mit so kleinem Einzugsbereich kann praktisch schlechter sein als eine theoretisch instabile Ruhelage. Man stelle sich nur ein System zweiter Ordnung vor, das einen Grenzzyklus besitzt, dessen Abmessungen klein gegenüber den Störauslenkungen sind (Bild 3/3). Ist er instabil, so ist die Ruhela-

<sup>3)</sup> Eine solche Funktion sei im folgenden kurz als stetig differenzierbar bezeichnet.

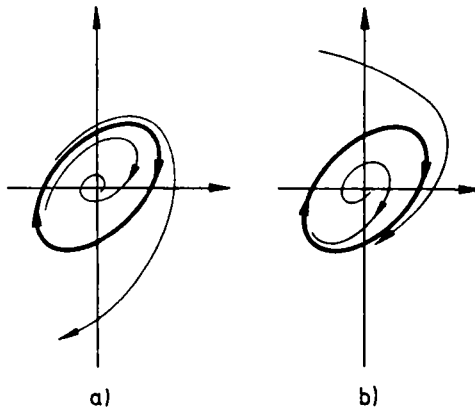


Bild 3/3 Diskrepanz zwischen theoretischer und praktischer Stabilität bei geringer Ausdehnung des Grenzzyklus

- a) Ruhelage in der Theorie asymptotisch stabil, praktisch aber instabil
- b) Ruhelage in der Theorie instabil, praktisch jedoch asymptotisch stabil

ge zwar asymptotisch stabil, wird jedoch wegen des zu kleinen Einzugsbereiches vom Zustandspunkt alsbald vollständig verlassen, da auch der Grenzzyklus ihn nicht festzuhalten vermag. Ist der Grenzzyklus hingegen asymptotisch stabil, die Ruhelage also instabil, so kehrt der Zustandspunkt bei irgendwelchen Störauslenkungen zum Grenzzyklus und damit in die unmittelbare Nähe der Ruhelage zurück. Sie ist daher praktisch asymptotisch stabil.

Es ist somit bei praktischen Problemen wichtig, etwas über die Größe des Einzugsbereiches der Ruhelage zu erfahren. Vom Standpunkt des Regelungstechnikers aus besteht der Idealfall darin, daß die Ruhelage asymptotisch stabil im ganzen ist, d.h. der gesamte Zustandsraum zu ihrem Einzugsbereich gehört. Das obige Kriterium läßt sich zu einem *Kriterium der asymptotischen Stabilität im ganzen* verschärfen, wenn es gelingt, eine Ljapunow-Funktion zu finden, die unendlich groß wird, falls der Punkt  $\underline{x}$  ins Unendliche strebt:

*Das dynamische System*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

besitze die Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$ . Es gebe eine im gesamten Zustandsraum stetig differenzierbare und positiv definite Funktion  $V(x_1, \dots, x_n) = V(\underline{x})$ , deren Ableitung

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$$

dort negativ definit ist. Wenn dann für  $|\underline{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \rightarrow +\infty$  auch  $V(\underline{x}) \rightarrow +\infty$  strebt, so ist die Ruhelage  $\underline{0}$  asymptotisch stabil im ganzen oder global asymptotisch stabil.

(3.2)

Auf einen exakten Beweis dieses Kriteriums wie auch des vorhergehenden und nachfolgenden Stabilitätssatzes wollen wir verzichten. Diese Beweise kann man etwa in [22, 26, 31] nachlesen. Das Kriterium soll aber für ein System 2. Ordnung geometrisch verständlich gemacht werden. Dazu gehen wir von den Höhenlinien (Niveaulinien) der Funktion  $V(\underline{x})$  aus:  $V(x_1, x_2) = c$ ,  $c \geq 0$ . Für einen festen  $c$ -Wert handelt es sich um eine Kurve der Zustandsebene. Für variables  $c$  erhält man eine Kurvenschar, welche die gesamte Zustandsebene überdeckt. Da die Funktion  $V(x_1, x_2)$  eindeutig ist, kann durch jeden Punkt der Ebene nur eine Höhenlinie gehen. Man erhält so ganz allgemein eine Höhenlinienkarte, wie sie in Bild 3/4 skizziert ist.

In diesem Funktionsgebirge gibt es zwei Typen singulärer Stellen:

a) Höchst- und Tiefstpunkte.

Hier schrumpfen die Höhenlinien auf einen Punkt zusammen. Im Bild 3/4 sind dies die Punkte 1 und 3.

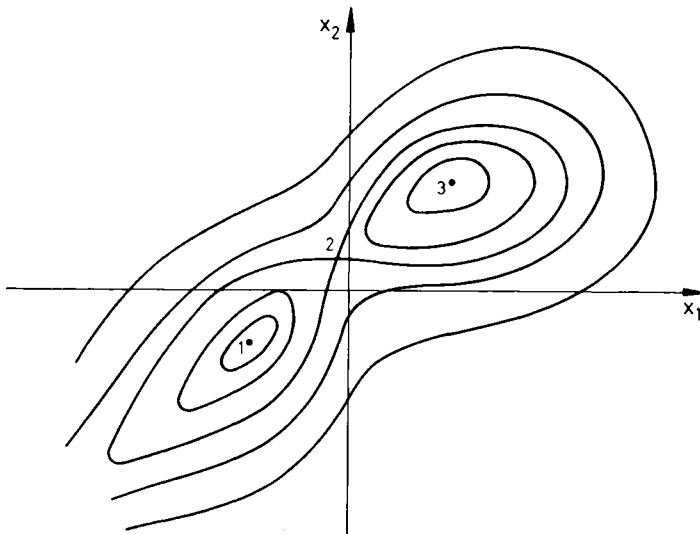


Bild 3/4 Höhenlinienkarte einer beliebigen Funktion von zwei Variablen



## b) Sattelpunkte.

Das sind Punkte, in denen sich eine Höhenlinie selbst überschneidet. Punkt 2 in Bild 3/4 ist ein Sattelpunkt.

In beiden Fällen liegt die Tangentialebene an die Fläche  $V = V(x_1, x_2)$  waagrecht, so daß  $\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$ ,  $\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$  gilt.

Macht man die Voraussetzung, daß

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2$$

negativ definit ist, so sind die Fälle a), b) für  $\underline{x} \neq \underline{0}$  ausgeschlossen, da für diese Fälle

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = 0$$

ist. Außerhalb der Ruhelage können also weder Gipfel noch Talböden noch Sättel auftreten.

Weiterhin können sich bei einer beliebigen Funktion die Höhenlinien ins Unendliche erstrecken, wie dies am linken Rand von Bild 3/4 angedeutet wird. Das ist jedoch nur möglich, wenn eine bestimmte Höhe  $c$  bis ins Unendliche eingehalten werden kann. Gerade dies wird aber durch die letzte Voraussetzung über die Funktion  $V$  ausgeschlossen. Geht  $|\underline{x}| \rightarrow \infty$ , so muß der Funktionswert  $V$  unendlich groß werden. Daher müssen sämtliche Höhenlinien geschlossen sein.

Sie stellen somit eine Schar geschlossener, sich nicht selbst überschneidender Kurven um  $(0,0)$  dar, deren Höhe nach außen ununterbrochen anwächst. Da  $V(x_1, x_2)$  positiv definit ist, muß der Ursprung der tiefste Punkt des Funktionsgebirges sein, das in einen einzigen großen Talkessel übergegangen ist.

Da längs jeder Trajektorie  $\dot{V} < 0$  gilt, muß die Funktion  $V(\underline{x}(t))$  ununterbrochen abnehmen. Daher müssen die Trajektorien die Höhenlinien von außen nach innen durchdringen, wie im Bild 3/5 skizziert. In welchem Punkt  $A$  des Zustandsraumes die Trajektorie auch beginnen mag, sie muß mit wachsender Zeit gegen den Ursprung streben. Dieser ist daher global asymptotisch stabil.

In völlig entsprechender Weise lassen sich die anderen Stabilitätskriterien plausibel machen.

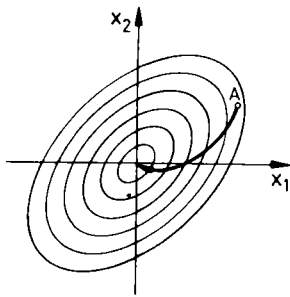


Bild 3/5

Höhenlinienkarte einer Ljapunow-Funktion  
samt einer Trajektorie

Wenn die Ruhelage eines Systems nicht *global* asymptotisch stabil ist, läßt sich keine Ljapunow-Funktion mit den im letzten Kriterium genannten Eigenschaften finden. Man wird dann versuchen, eine solche Ljapunow-Funktion aufzuspüren, die einen möglichst großen Teil des Einzugsbereichs sichert. Hierfür gilt das folgende *Kriterium der asymptotischen Stabilität im großen*:

*Das dynamische System*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

besitze die Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$ .  $V(\underline{x})$  sei in einem Bereich  $S$  des Zustandsraumes stetig differenzierbar und positiv definit, während  $\dot{V}$  in  $S$  negativ definit ist.  $B$  sei ein Gebiet aus  $S$ , in dem  $V(\underline{x}) < c$  gilt und dessen Rand durch  $V(\underline{x}) = c$  gebildet wird, wobei  $c$  eine positive Konstante darstellt.  $B$  sei beschränkt und enthalte die Ruhelage  $\underline{0}$ . Dann ist die Ruhelage  $\underline{0}$  asymptotisch stabil, und  $B$  gehört zu ihrem Einzugsbereich.

(3.3)

Damit ein Gebiet  $B$  zum Einzugsbereich der Ruhelage  $\underline{0}$  gehört, genügt es also im allgemeinen nicht, daß in  $B$   $V$  positiv und  $\dot{V}$  negativ definit ist. Es wird dadurch nicht ausgeschlossen, daß eine in  $B$  beginnende Trajektorie aus  $B$  austritt und somit nicht gegen  $\underline{0}$  strebt. Eine solche Konfiguration zeigt das Bild 3/6. Die Funktion  $V(x_1, x_2)$  möge dort in der gesamten Zustandsebene positiv definit sein, während  $\dot{V}$  nur innerhalb eines zur  $x_2$ -Achse parallelen Streifens  $< 0$ , außerhalb desselben aber  $> 0$  ist. Die Höhenlinien von  $V$  seien ovale Kurven um  $\underline{0}$ . Dann ist die im Bild 3/6 dargestellte Situation möglich, daß eine im Punkt  $A$  des Streifens beginnende Trajektorie den Streifen verläßt. Nur bei den innerhalb der Höhenlinie  $C$  gelegenen Trajektorien ist man sicher, daß sie in  $\underline{0}$  enden. Das Innere von  $C$ , in dem  $V(x_1, x_2) < c$  mit einer gewissen positiven Zahl  $c$  ist, stellt somit den Bereich  $B$  des Kriteriums dar. Natürlich ist es *möglich*, daß auch außerhalb von  $C$  beginnende Trajektorien gegen  $\underline{0}$  streben, doch ist

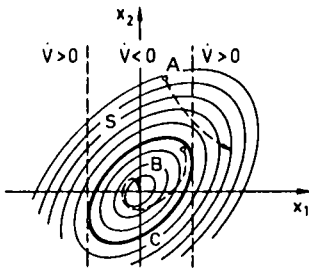


Bild 3/6

Veranschaulichung des Kriteriums der asymptotischen Stabilität im großen

dies auf Grund des Kriteriums nicht gesichert. Wie man sieht, liefert es im allgemeinen nicht den gesamten Einzugsbereich, sondern nur einen Teil desselben, der möglicherweise recht klein ist.

Bei dem soeben formulierten Kriterium muß  $\dot{V}$  negativ definit sein. Es kann schwierig sein, eine solche Funktion  $V$  zu finden, während sich unter Umständen leicht eine nur semidefinite Funktion  $\dot{V}$  angeben läßt. Daher sei noch ein *weiteres Kriterium der asymptotischen Stabilität* angegeben [26]:

*Das dynamische System*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

besitze die Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$ . In einem Bereich  $S$  des Zustandsraumes sei  $V(\underline{x})$  stetig differenzierbar, und es gelte dort:

- (I)  $V$  ist positiv definit.
- (II)  $\dot{V}$  ist negativ semidefinit.
- (III) Die Punktmenge, auf der  $\dot{V} = 0$  ist, enthält außer  $\underline{x} = \underline{0}$  keine Trajektorie.

$B$  sei ein Gebiet aus  $S$ , in dem  $V(\underline{x}) < c$  gilt und dessen Rand durch  $V(\underline{x}) = c$  gebildet wird, wobei  $c$  eine positive Konstante darstellt.  $B$  sei beschränkt und enthalte die Ruhelage  $\underline{0}$ .

Dann ist die Ruhelage  $\underline{0}$  asymptotisch stabil, und  $B$  gehört zu ihrem Einzugsbereich.

Gelten die Bedingungen (I), (II) und (III) im gesamten Zustandsraum und strebt zusätzlich  $V(\underline{x}) \rightarrow +\infty$  für  $|\underline{x}| \rightarrow +\infty$ , so ist die Ruhelage global asymptotisch stabil.

(3.4)

Was die in diesem Kriterium neu auftretende Bedingung (III) betrifft, so ist sie im allgemeinen leicht nachzuprüfen. Man setzt hierzu die Funktion  $\dot{V}(x_1, \dots, x_n)$  gleich Null und erhält so Bedingungen für die Variablen  $x_1$  bis  $x_n$ , die man in

die rechten Seiten der Zustandsdifferentialgleichungen einsetzt. Soll (III) erfüllt sein, muß dies zum Resultat  $x_1 \equiv 0, \dots, x_n \equiv 0$  führen. Das wird normalerweise der Fall sein. Bereits in unserem einführenden Beispiel (Abschnitt 3.1) hatten wir diese Schlußweise verwandt.

Bisher war nur von Kriterien der *asymptotischen* Stabilität die Rede, weil dieses Stabilitätsverhalten der Ruhelage für die technischen Anwendungen am wichtigsten ist und beim Entwurf meist angestrebt wird. Abschließend sollen aber noch zwei andere Kriterien für das Stabilitätsverhalten angegeben werden, als erstes ein *Kriterium für die schwache Stabilität* (bei der kein asymptotisches Verhalten gefordert ist):

#### Das dynamische System

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

besitze die Ruhelage  $\underline{Q}$ . Sie ist stabil, wenn es eine in der Umgebung von  $\underline{Q}$  stetig differenzierbare Funktion  $V(x_1, \dots, x_n)$  gibt, die dort

positiv definit ist, während  $\dot{V}$  negativ semidefinit ist. (3.5)

Den geometrischen Inhalt dieses Kriteriums veranschaulicht das Bild 3/7. Da  $V$  in der Umgebung von  $\underline{Q}$  positiv definit ist, besitzt  $V$  in  $\underline{Q}$  selbst den Tiefstwert Null und steigt nach allen Richtungen an. Seine Höhenlinien sind daher ovale Kurven, die den Nullpunkt umschließen. Da  $\dot{V}$  negativ semidefinit ist, also  $\leq 0$  in der Umgebung des Nullpunktes, kann  $V(\underline{x}(t))$  nicht zunehmen. Daher kann eine Trajektorie  $\underline{x}(t)$  niemals von einer Niveaulinie zu einer höhergelegenen übergehen. Sie muß deshalb auf jeden Fall innerhalb oder allenfalls auf der Niveaulinie ihres Anfangspunktes bleiben, wie dies in Bild 3/7 skizziert ist. Somit muß  $\underline{Q}$  stabil sein.

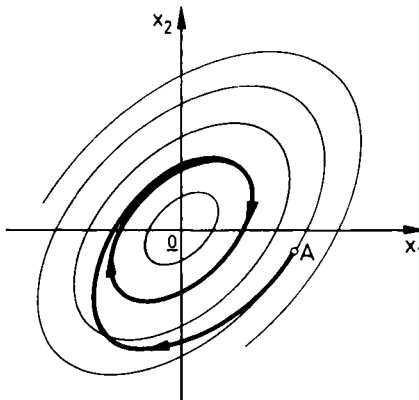


Bild 3/7  
Geometrische Deutung des Stabilitätskriteriums

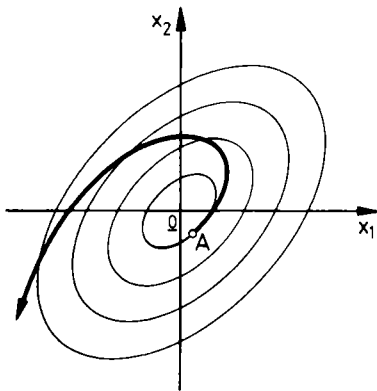


Bild 3/8  
Geometrische Deutung des  
Instabilitätskriteriums

Zum Abschluß noch ein Kriterium der Instabilität, eines der beiden von Ljapunow bewiesenen Instabilitätskriterien:

*Das dynamische System*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{bzw.} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

besitze die Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$ . Es gebe eine stetig differenzierbare Funktion  $V(x_1, \dots, x_n)$  mit  $V(\underline{0}) = 0$ , die beliebig nahe bei  $\underline{0}$  positive

Werte annimmt und für die  $\dot{V}$  in einer Umgebung von  $\underline{0}$  positiv definit ist. Dann ist die Ruhelage  $\underline{0}$  instabil.

(3.6)

Der geometrische Kern dieses Satzes ist ebenso einleuchtend wie beim Stabilitätskriterium. Ist  $V(\underline{x})$  etwa positiv definit, so liegt die in Bild 3/8 dargestellte Situation vor. Die Höhenlinien sind wieder Ovale um  $\underline{0}$ , deren Niveau nach außen ansteigt. Da aber jetzt außerhalb  $\underline{0}$   $\dot{V} > 0$  ist, wächst  $V(\underline{x}(t))$ , so daß die Trajektorie  $\underline{x}(t)$  zu ständig höherem Niveau übergehen muß. Wie nahe bei  $\underline{0}$  die Trajektorien auch beginnen, sie bleiben nicht in einer vorgeschriebenen genügend engen Umgebung von  $\underline{0}$ . Somit ist  $\underline{0}$  instabil.

### 3.3 Konstruktion von Ljapunow-Funktionen

Wir haben nunmehr eine Reihe von Kriterien bereitgestellt, mit denen sich die verschiedenen Fälle des Stabilitätsverhaltens behandeln lassen. Sie gehen sämtlich davon aus, daß man eine  $V$ -Funktion gefunden hat. Aber wie findet man eine Ljapunow-Funktion? Und nicht nur irgendeine, sondern eine möglichst gute, die also beispielsweise bei einer global asymptotisch stabilen Ruhelage auch wirklich die globale asymptotische Stabilität sichert und nicht nur die

Aussage liefert, daß eine kleine Umgebung der Ruhelage zum Einzugsbereich gehört. Hier liegt nun die Schwierigkeit dieser theoretisch so umfassenden Methode, was ihre Anwendung auf konkrete technische Problemstellungen betrifft. Es gibt zwar eine Reihe von Vorschlägen zur Ermittlung von Ljapunow-Funktionen [2, 4, 7, 9, 10, 22, 31], aber kein praktikables Verfahren, das man zur Stabilitätsanalyse ernsthafter technischer Systeme verwenden könnte. Dazu wächst der Schwierigkeitsgrad bei der Konstruktion von Ljapunow-Funktionen allzusehr mit der Ordnung des Systems.

Für den Regelungstechniker wird die Lage jedoch durch zwei Tatsachen entschärft:

- (I) Für die *globale* asymptotische Stabilität von Regelkreisen steht in Gestalt des Popow-Kriteriums (Kapitel 5) eine hinreichende Bedingung zur Verfügung, die bei Systemen beliebiger Ordnung einfach zu handhaben ist.
- (II) Dem Regelungstechniker geht es in erster Linie nicht um die Analyse, sondern um den Entwurf einer Regelung. Dieser läßt sich aber mit einfach zu konstruierenden Ljapunow-Funktionen anpacken, wie die beiden letzten Abschnitte des vorliegenden Kapitels zeigen werden.

Wir werden uns daher im folgenden auf die Konstruktion von Ljapunow-Funktionen aus quadratischen Formen beschränken.

### 3.3.1 Positiv definite Funktionen

Eine ganz einfache positiv definite Funktion von zwei Variablen ist durch

$$V = x_1^2 + x_2^2$$

gegeben. Sie ist gewiß  $\geq 0$  in der gesamten  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und verschwindet nur in  $\underline{0}$ . Ihre Höhenlinien sind Kreise um  $\underline{0}$ .

Von ihr aus kann man geometrisch leicht zu allgemeineren positiv definiten Funktionen kommen. Denkt man sich die Kreise in Richtung einer Achse gedehnt oder zusammengedrückt, so erhält man eine Schar von Ellipsen. Sie sind die Höhenlinien der Funktion

$$V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

mit festen, positiven Koeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Es liegt auf der Hand, daß sie ebenfalls positiv definit ist. Dreht man dieses Funktionsgebirge um einen bestimmten Winkel  $\alpha$ , so bleibt  $V$  selbstverständlich positiv definit, hat aber nunmehr die Gleichung

$$V = P_{11}x_1^2 + 2P_{12}x_1x_2 + P_{22}x_2^2$$

mit gewissen festen Zahlen  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  und  $P_{22}$ , die aber nicht mehr alle positiv zu sein brauchen. Die letzte Gleichung kann man auch in der Form

$$V = P_{11}x_1x_1 + P_{12}x_1x_2 + P_{21}x_2x_1 + P_{22}x_2x_2 = \sum_{i,k=1}^2 P_{ik}x_ix_k$$

schreiben, sofern man festsetzt, daß

$$P_{12} = P_{21}$$

ist.

Die letzte Schreibweise hat den Vorteil, daß sie ohne weiteres auf den  $n$ -dimensionalen Raum erweitert werden kann:

$$V = \sum_{i,k=1}^n P_{ik}x_ix_k. \quad (3.7)$$

Dabei seien die  $P_{ik}$  reelle Zahlen, für die

$$P_{ik} = P_{ki} \quad (3.8)$$

gilt, die aber sonst beliebig sein dürfen. Eine derartige *quadratische Form* lautet beispielsweise für  $n = 3$

$$V = P_{11}x_1^2 + P_{22}x_2^2 + P_{33}x_3^2 + 2P_{12}x_1x_2 + 2P_{13}x_1x_3 + 2P_{23}x_2x_3,$$

letzteres wegen  $P_{12} = P_{21}$ ,  $P_{13} = P_{31}$  und  $P_{23} = P_{32}$ .

Führt man die Matrix

$$\underline{P} = (P_{ik}) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

ein, so kann man für die quadratische Form (3.7) kurz schreiben:

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} . \quad (3.9)$$

Bei der Einführung der quadratischen Form waren wir von speziellen Formen ausgegangen, bei denen geometrisch klar war, daß sie positiv definit sein mußten. Wenn nun aber eine quadratische Form nicht geometrisch, sondern durch ihre Gleichung, also durch Angabe ihrer Koeffizienten gegeben ist, wie kann man dann erkennen, ob sie positiv definit ist? Hierfür gilt das *Kriterium von Sylvester* [26, 72]:

Um zu erkennen, ob die quadratische Form

$$V(\underline{x}) = \sum_{i,k=1}^n P_{ik} x_i x_k = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}, \quad P_{ik} = P_{ki}, \quad (3.10)$$

positiv definit ist, bilde man ihre Determinante

$$D = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots & P_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \cdots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

und von dieser die „nordwestlichen“ Unterdeterminanten, d.h. diejenigen Unterdeterminanten, deren linke obere Ecke mit der linken oberen Ecke der gesamten Determinante zusammenfällt:

$$D_1 = P_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = D .$$

Die quadratische Form  $V$  ist genau dann positiv definit, und zwar im gesamten Raum, wenn diese Unterdeterminanten sämtlich positiv sind. (3.10)

Eine quadratische Form in zwei Variablen ist also beispielsweise genau dann positiv definit, wenn

$$P_{11} > 0 \quad \text{und} \quad P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0$$



gilt. Ist eine quadratische Form positiv definit, so strebt sie  $\rightarrow +\infty$ , wenn  $|\underline{x}| \rightarrow +\infty$  geht.

Die positiv definiten quadratischen Formen repräsentieren die einfachste Klasse positiv definiter Funktionen. Sie bilden bei den im folgenden beschriebenen Verfahren den Ausgangspunkt zur Konstruktion von Ljapunow-Funktionen. Dabei erhält man häufig „quadratische Pseudo-Formen“ vom Typ

$$V = \sum_{i,k=1}^n P_{ik}(x_1, \dots, x_n) x_i x_k = \underline{x}^T \underline{P}(\underline{x}) \underline{x}$$

mit

$$P_{ik}(x_1, \dots, x_n) = P_{ki}(x_1, \dots, x_n),$$

bei denen also die Koeffizienten nicht konstant sind, sondern von  $x_1, \dots, x_n$  abhängen. Aber auch hier gilt noch das Sylvestersche Kriterium. D.h. also:

*Erfüllen die Koeffizienten  $P_{ik}(x_1, \dots, x_n)$  in einem den Nullpunkt enthaltenden Bereich des Zustandsraumes das Sylvestersche Kriterium, so ist dort die Pseudo-Form*

$$V = \sum_{i,k=1}^n P_{ik}(x_1, \dots, x_n) x_i x_k$$

*positiv definit.*

(3.11)

Man betrachte nämlich irgendeinen Punkt  $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$  aus diesem Bereich. Da die festen Zahlen  $P_{ik}(\underline{x}_0)$  das Kriterium erfüllen, ist die mit ihnen gebildete echte

quadratische Form  $\sum_{i,k=1}^n P_{ik}(\underline{x}_0) x_i x_k$  positiv definit, hat daher in  $\underline{x}_0$  einen positiven Wert  $\sum_{i,k=1}^n P_{ik}(\underline{x}_0) x_{i0} x_{k0}$ . Das ist aber gerade der Funktionswert der Pseudo-Form  $V$ .

Zur Vereinfachung der Sprechweise wollen wir solche Pseudo-Formen im folgenden ebenfalls als quadratische Formen bezeichnen.

Bisher war nur von positiv definiten Funktionen die Rede. Auf die negativ definiten braucht nicht besonders eingegangen zu werden, da durch Multiplikation mit  $-1$  die einen in die anderen übergehen. Will man für eine Form (oder Pseudo-Form)  $V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$  nachweisen, daß sie negativ definit ist, so hat man lediglich zu zeigen, daß  $-V = \underline{x}^T (-\underline{P}) \underline{x}$  positiv definit ist, hat also auf  $-\underline{P}$  das Kriterium von Sylvester anzuwenden.

### 3.3.2 Ljapunow-Funktionen für lineare Systeme

Wir betrachten zunächst das lineare System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} \quad (3.12)$$

mit der konstanten  $(n, n)$ -Matrix  $\underline{A}$ . Das Stabilitätsverhalten dieses Systems ist wohl bekannt (Abschnitt 1.7) und bedarf keiner Durchleuchtung mittels der Direkten Methode. Dennoch ist es nützlich, die Direkte Methode anzuwenden, weil die hierbei anfallenden Resultate später beim Entwurf nichtlinearer Regelungen verwandt werden können.

Will man die Direkte Methode auf (3.12) anwenden, so setzt man üblicherweise die Ljapunow-Funktion in der Form

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$$

mit der konstanten, symmetrischen  $(n, n)$ -Matrix  $\underline{P}$  an, deren Elemente im übrigen noch beliebig sind.

Daraus bildet man durch Differentiation nach der Zeit  $t$  unter Anwendung der Produktregel der Differentiation, die ja auch für Vektoren und Matrizen gilt, wobei man nur auf die Nichtvertauschbarkeit zu achten hat,

$$\dot{V} = \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}} + \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x}.$$

Daraus folgt wegen (3.12)

$$\dot{V} = \underline{x}^T \underline{P} \underline{A} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{x},$$

also

$$\dot{V} = \underline{x}^T (\underline{P} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}) \underline{x}. \quad (3.13)$$

Um asymptotische Stabilität der Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$  von (3.12) nachweisen zu können, muß diese quadratische Form negativ definit sein, also vom Typ

$$\dot{V} = \underline{x}^T (-\underline{Q}) \underline{x} \quad (3.14)$$

mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix  $\underline{Q}$ , die im übrigen grundsätzlich beliebig sein darf. Der Vergleich von (3.13) und (3.14) führt auf die Beziehung

$$\underline{P}\underline{A} + \underline{A}^T \underline{P} = -\underline{Q} \quad (3.15)$$

Bei gegebenem  $\underline{Q}$  ist dies eine Gleichung für die bislang noch weitgehend freie Matrix  $\underline{P}$ . Man bezeichnet eine Matrizengleichung dieser Art, die in der Systemdynamik und Regelungstechnik an verschiedenen Stellen, z.B. auch bei der Optimierung dynamischer Systeme, auftritt, als *Ljapunow-Gleichung*.

Die Frage nach ihrer Lösung wird durch den folgenden Satz beantwortet <sup>4)</sup>:

*Ist  $\underline{Q}$  eine symmetrische und positiv definite Matrix, so gibt es eine eindeutig bestimmte symmetrische und positiv definite Lösung  $\underline{P}$  der Gleichung (3.15), wenn die Eigenwerte der Matrix  $\underline{A}$  links von der  $j$ -Achse der komplexen Ebene liegen.* (3.16)

Unter den in (3.16) gemachten Voraussetzungen kann man die Lösung  $\underline{P}$  formelmäßig angeben (siehe z.B. [73], Unterabschnitt 13.4.2):

$$\underline{P} = \int_0^{\infty} e^{\underline{A}^T t} \underline{Q} e^{\underline{A} t} dt. \quad (3.17)$$

Für die numerische Berechnung von  $\underline{P}$  im konkreten Fall hat man verschiedene Verfahren entwickelt. Man braucht sich jedoch als Regelungstechniker normalerweise nicht mehr mit solchen numerischen Betrachtungen herumzuschlagen, da die regelungstechnischen Standardoperationen, zu denen auch die Lösung der Ljapunow-Gleichung gehört, in den an verschiedenen Stellen entwickelten regelungstechnischen Programmsystemen enthalten sind<sup>5)</sup>. An späterer Stelle (Un-

<sup>4)</sup> Zur Herleitung siehe etwa [26], Satz XI und XII oder [31], Anhang C.

<sup>5)</sup> Eine Übersicht über derartige Programmsysteme findet man in dem Aufsatz "CAE von Regelsystemen mit IBM-kompatiblen Personal-Computern" von R. Schumann in der atp 33 (1991), S. 147–152. Die in den Kapiteln 3, 6 und 7 behandelten Beispiele wurden mit dem Programmsystem PILAR des Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme der Universität Karlsruhe berechnet.

terabschnitt 3.6.1) wird eine formelmäßige Lösung der Ljapunow-Gleichung auf rein algebraischem Weg hergeleitet werden.

Überblickt man den im vorhergehenden skizzierten Weg zur Anwendung der Direkten Methode auf lineare Systeme, so läßt sich zusammenfassend sagen: Die Matrix  $\underline{Q}$  in  $\dot{\underline{V}} = -\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}$  wird als symmetrische und positiv definite Matrix, beispielsweise als Einheitsmatrix  $\underline{I}$ , vorgegeben, und dann wird aus der Ljapunow-Gleichung die Matrix  $\underline{P}$  der Ljapunow-Funktion  $V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$  in Abhängigkeit von  $\underline{Q}$  bestimmt. Es ist klar, daß  $\underline{P}$  überdies von der Systemmatrix  $\underline{A}$  abhängt.

Man kann aber auch den umgekehrten Weg einschlagen, der eigentlich näherliegend ist:  $\underline{P}$  aus  $V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$  wird als konstante, symmetrische und positiv definite Matrix vorgegeben, beispielsweise als Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen, und daraus wird

$$\underline{Q} = -(\underline{P}\underline{A} + \underline{A}^T \underline{P})$$

berechnet. Man hat dann darauf zu achten, daß  $\dot{\underline{V}} = \underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}$  negativ definit wird.

Dieser Weg wurde von *B. Itschner* eingeschlagen<sup>6)</sup>. Die sich so ergebenden  $V$ -Funktionen wurden von ihm optimistischerweise „Ideale Ljapunow-Funktionen“ genannt und seien von uns kurz als IL-Funktionen bezeichnet.

Wir setzen voraus, daß die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\underline{A}$  einfach und deshalb die zugehörigen Eigenvektoren  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  von  $\underline{A}$  linear unabhängig sind. Mittels der Transformation

$$\underline{x} = \underline{T} \underline{z}, \quad (3.18)$$

wobei die Transformationsmatrix

$$\underline{T} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$$

aus den Eigenvektoren von  $\underline{A}$  aufgebaut ist, kann die Differentialgleichung (3.12) auf Diagonalform gebracht werden. Setzt man nämlich (3.18) in (3.12) ein, so wird

<sup>6)</sup> *B. Itschner*: Einführung Idealer Ljapunow-Funktionen. Regelungstechnik 25 (1977), S. 216–222.

Derselbe: Stabilitätsanalyse mit Hilfe Idealer Ljapunow-Funktionen. Regelungstechnik 25 (1977), S. 251–257.

$$\underline{T} \dot{\underline{z}} = \underline{A} \underline{T} \underline{z}, \quad \text{also} \quad \dot{\underline{z}} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \underline{z} \quad \text{oder}$$

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\Lambda} \underline{z}, \quad (3.19)$$

wobei

$$\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (3.20)$$

ist und somit eine Diagonalmatrix darstellt, deren Hauptdiagonale aus den Eigenwerten von  $\underline{A}$  besteht ([73], Unterabschnitt 12.1.1).

Die V-Funktion wird nunmehr in den Modalkoordinaten  $z_i$  angesetzt. Dabei ist zu beachten, daß die Koordinaten  $z_i$  nicht unbedingt reell zu sein brauchen. Sind z.B.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  konjugiert komplex, also  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ , so ist auch  $z_2 = \bar{z}_1$ . Damit V reell bleibt, bildet man deshalb

$$V = \bar{\underline{z}}^T \tilde{\underline{P}} \underline{z}, \quad (3.21)$$

wobei also  $\bar{\underline{z}}^T$  der konjugiert komplexe Vektor zu  $\underline{z}^T$  ist. In der Diagonalmatrix

$$\tilde{\underline{P}} = \text{diag}(\tilde{P}_{11}, \dots, \tilde{P}_{nn})$$

sind die Diagonalelemente  $\tilde{P}_{ii} > 0$ . Sind  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  konjugiert komplex, so sollen die zugehörigen Diagonalelemente  $\tilde{P}_{ii}$  und  $\tilde{P}_{jj}$  gleich sein.

Nach (3.21) ist dann

$$V = [\tilde{P}_{11} \bar{z}_1, \tilde{P}_{22} \bar{z}_2, \dots, \tilde{P}_{nn} \bar{z}_n] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$

also

$$V = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} \bar{z}_i z_i = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} |z_i|^2. \quad (3.22)$$

V ist somit gewiß reell und positiv definit.

Nun ist zu untersuchen, wann  $\dot{V}$  negativ definit ist. Nach (3.22) ist

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} \left[ \dot{\bar{z}}_i z_i + \bar{z}_i \dot{z}_i \right]. \quad (3.23)$$

Schreibt man die Vektordifferentialgleichung (3.19) zeilenweise, so erhält man

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

woraus durch Übergang zur konjugiert komplexen Zahl

$$\dot{\bar{z}}_i = \bar{\lambda}_i \bar{z}_i$$

folgt. Damit ergibt sich aus (3.23)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} \left[ \bar{\lambda}_i \bar{z}_i z_i + \bar{z}_i \lambda_i z_i \right] = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} |z_i|^2 \left[ \bar{\lambda}_i + \lambda_i \right], \\ \dot{V} &= 2 \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} |z_i|^2 \operatorname{Re} \lambda_i. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Wie man sieht, ist  $\dot{V}$  genau dann negativ definit, wenn sämtliche Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\underline{A}$  links der  $j$ -Achse liegen. Da  $V$  nach Konstruktion positiv definit ist und  $\rightarrow +\infty$  strebt für  $|z| \rightarrow +\infty$ , ist dann die Ruhelage  $\underline{z} = \underline{0}$  bzw.  $\underline{x} = \underline{0}$  nach dem Kriterium (3.2) global asymptotisch stabil. Man hat so mittels der Direkten Methode die Stabilitätsaussage (I) im Kriterium (1.66) auch für Mehrgrößensysteme hergeleitet (allerdings unter der Voraussetzung einfacher Eigenwerte).

Aus der Beziehung (3.25) kann man den Vorzug der IL-Funktionen erkennen. Setzt man dort gemäß (3.24)

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0)$$

ein, so erhält man

$$\dot{V}(\underline{z}(t)) = 2 \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} \left| e^{\lambda_i t} \right|^2 |z_i(0)|^2 \operatorname{Re} \lambda_i,$$

also wegen

$$\left| e^{\lambda_i t} \right| = e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} :$$

$$\dot{V}(\underline{z}(t)) = 2 \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} \operatorname{Re} \lambda_i |z_i(0)|^2 e^{2t \operatorname{Re} \lambda_i}. \quad (3.26)$$

$\dot{V}$  nimmt daher nach Art einer  $e$ -Funktion  $e^{-at}$ ,  $a > 0$ , ab. Dies bedeutet, daß  $V(\underline{z}(t))$  zügig gegen 0 strebt. Bei einer aus der Ljapunow-Gleichung (3.15) gewonnenen  $V$ -Funktion braucht dies nicht der Fall zu sein. Zwar sinkt auch diese monoton mit wachsendem  $t$ , da ja  $\dot{V} < 0$  ist, doch kann diese Abnahme erheblich langsamer erfolgen, indem  $\dot{V}(\underline{x}(t))$  z.B. stufenförmig abfällt. In der schnellen Abnahme der IL-Funktionen liegt ihr „ideales Verhalten“.

Es bleibt noch die Aufgabe,  $V$  im ursprünglichen  $\underline{x}$ -Koordinatensystem darzustellen. Nach (3.18) ist

$$\underline{z} = \underline{T}^{-1} \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \underline{x},$$

wobei  $\underline{w}_i^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die Linkseigenvektoren von  $\underline{A}$  sind. Demgemäß ist

$$\bar{\underline{z}}^T = \bar{\underline{x}}^T [\bar{\underline{w}}_1, \dots, \bar{\underline{w}}_n],$$

also

$$\bar{\underline{z}}^T = \bar{\underline{x}}^T [\bar{\underline{w}}_1, \dots, \bar{\underline{w}}_n],$$

da  $\underline{x}$  reell ist. Aus dem Ansatz (3.21) für  $V$  wird so

$$V = \bar{\underline{x}}^T [\bar{\underline{w}}_1, \dots, \bar{\underline{w}}_n] \tilde{\underline{P}} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \underline{P} &= [\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n] \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{P}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix}, \\ \underline{P} &= [\tilde{P}_{11}\underline{w}_1, \dots, \tilde{P}_{nn}\underline{w}_n] \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix}, \\ \underline{P} &= \sum_{i=1}^n \tilde{P}_{ii} \underline{w}_i \underline{w}_i^T, \end{aligned} \quad (3.27)$$

letzteres nach einer allgemeinen Regel für die Multiplikation zweier Matrizen:

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \\ (n, m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b}_1^T \\ \vdots \\ \underline{b}_m^T \\ (m, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \underline{b}_1^T + \dots + \underline{a}_m \underline{b}_m^T \\ (n, p) \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $\underline{P}$  ist reell. Sind etwa  $\lambda_1, \lambda_2$  konjugiert komplex, also  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ , so gilt auch  $\underline{w}_2 = \bar{\underline{w}}_1$  und damit wegen der Voraussetzung  $\tilde{P}_{22} = \tilde{P}_{11}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{11} \underline{w}_1 \underline{w}_1^T + \tilde{P}_{22} \underline{w}_2 \underline{w}_2^T &= \tilde{P}_{11} \underline{w}_1 \underline{w}_1^T + \tilde{P}_{11} \underline{w}_1 \bar{\underline{w}}_1^T = \\ &= \tilde{P}_{11} [\underline{w}_1 \underline{w}_1^T + \overline{\underline{w}_1 \underline{w}_1^T}] = \tilde{P}_{11} 2 \operatorname{Re} \{ \underline{w}_1 \underline{w}_1^T \}. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\underline{P}$  positiv definit. Denn es gilt  $\underline{x}^T \underline{P} \underline{x} = V = \bar{\underline{z}}^T \tilde{\underline{P}} \underline{z}$ . Ist nun  $\underline{x} \neq 0$ , so muß wegen  $\underline{x} = \underline{T} \underline{z}$  auch  $\underline{z} \neq 0$  sein. Dann ist aber, wie gezeigt,  $V > 0$ .

Die hiermit beschriebene IL-Funktion wurde von *B. Itschner* zur Behandlung strukturumschaltender Systeme benutzt (siehe das zweite Zitat der letzten Fußnote), läßt sich aber auch in anderer Weise bei der Betrachtung nichtlinearer Systeme verwenden. In Abschnitt 3.6 werden wir sie zur Synthese nichtlinearer Regelkreise heranziehen.<sup>7)</sup>

<sup>7)</sup> Ebenfalls auf der Basis quadratischer Formen arbeitet ein Verfahren zur Konstruktion von Ljapunow-Funktionen für die Stabilitätsanalyse von linearen Systemen mit veränderlichen Parametern: *H. Ossadnik – H. Kiendl: Robuste quadratische Ljapunov-Funktionen. Automatisierungstechnik 38 (1990), S. 174–182.*



### 3.3.3 Beispiele zur Konstruktion von Ljapunow-Funktionen für nichtlineare Systeme

Wir betrachten das System

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^3x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

das wegen des multiplikativen Terms  $2x_1^3x_2$  nichtlinear ist. Seine Ruhelage ist  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ . Wir setzen als Ljapunow-Funktion die quadratische Form

$$V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \quad (3.29)$$

an. Dabei seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  positive, aber im übrigen beliebige Parameter. Dann ist  $V$  gewiß positiv definit in der gesamten Zustandsebene.

Aus (3.29) folgt durch Differentiation nach  $t$

$$\dot{V} = 2\lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + 2\lambda_2 x_2 \dot{x}_2.$$

Mit (3.28) erhält man daraus weiter

$$\dot{V} = 2\lambda_1 x_1 (-x_1 + 2x_1^3x_2) + 2\lambda_2 x_2 (-x_2)$$

oder

$$\dot{V} = -2\lambda_1 x_1^2 (1 - 2x_1^2x_2) - 2\lambda_2 x_2^2.$$

Da  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  positiv sind, ist diese Funktion gewiß  $\leq 0$ , wenn

$$1 - 2x_1^2x_2 > 0$$

oder

$$x_2 < \frac{1}{2x_1^2}$$

gilt. Diese Ungleichung ist für jeden Punkt  $(x_1, x_2)$  unterhalb der Hyperbelkurve

$$x_2 = \frac{1}{2x_1^2}$$

erfüllt (stark durchgezogene Kurve im Bild 3/9). Im gesamten Bereich unterhalb dieser Kurve (schraffiert) ist  $V$  positiv definit und  $\dot{V}$  negativ definit.

Nun wenden wir das Kriterium der asymptotischen Stabilität im großen an. Dazu betrachten wir die Höhenlinien unserer Ljapunow-Funktion (3.29):

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \text{const.}$$

Das sind Ellipsen, deren Mittelpunkt mit  $0$  zusammenfällt und deren Achsen in der  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse liegen. Sie haben sämtlich das gleiche Halbachsenverhältnis  $\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$ , also auch die gleiche Gestalt, und gehen durch Streckung auseinander hervor. Diejenige Ellipse, welche die Hyperbelkurve  $x_2 = \frac{1}{2x_1^2}$  berührt, werde mit  $C$  bezeichnet. Dann erfüllt ihr Innengebiet  $B$  die Voraussetzungen des Kriteriums der asymptotischen Stabilität im großen. Daher ist die Ruhelage  $0$  asymptotisch stabil, und  $B$  gehört zu ihrem Einzugsbereich.

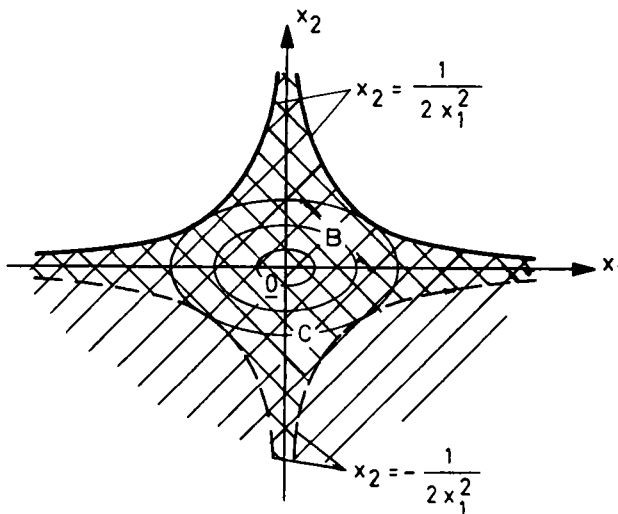


Bild 3/9 Anwendung des Kriteriums der asymptotischen Stabilität im großen auf das Beispiel (3.28)

Die Zahlen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , mit denen die Ljapunow-Funktion (3.29) gebildet wird, sind positiv und fest, aber beliebig wählbar. Für verschiedene Wahl von  $(\lambda_1, \lambda_2)$  erhält man verschieden gestaltete Ellipsen  $C$ . Das Innengebiet *jeder* solchen Ellipse gehört zum Einzugsbereich von  $\underline{0}$ . Für alle möglichen positiven Wertepaare  $(\lambda_1, \lambda_2)$  erhält man alle Ellipsen, deren Mittelpunkt in  $\underline{0}$  liegt, deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen und welche die Hyperbelkurve  $x_2 = \frac{1}{2x_1^2}$  berühren. Sie überdecken den Bereich zwischen dieser Kurve und ihrem Spiegelbild

$$x_2 = -\frac{1}{2x_1^2}$$

an der reellen Achse. Dieser Bereich, kreuzschraffiert im Bild 3/9, ist *das* Teilgebiet des Einzugsbereiches von  $\underline{0}$ , das wir durch unsere Anwendung der Direkten Methode sichern konnten.

Der gesamte Einzugsbereich ist freilich noch erheblich umfangreicher. Bei einem System 2. Ordnung kann man ihn in einfacher Weise dadurch ermitteln, daß man mittels eines Rechners die Trajektorien für verschiedene Anfangspunkte aufzeichnet. Man erhält so das Bild 3/10. Man ersieht aus ihm, daß wir mit unserem einfachen Verfahren immerhin einen beträchtlichen Teil des Einzugsbereichs erhalten haben<sup>8)</sup>.

Die in unserem Beispiel benutzte Vorgehensweise läßt sich ohne Schwierigkeit auch auf Systeme anwenden, wie sie im Bild 3/11 dargestellt sind. Es handelt sich dabei um zwei Regelkreise 1. Ordnung, die nichtlinear gekoppelt sind. Es gelte  $F_1(0,0) = 0$ ,  $F_2(0,0) = 0$ . Die Gleichungen des Systems ergeben sich aus

$$T_1 \dot{x}_1 + x_1 = u_1, \quad u_1 = F_1(x_1, x_2),$$

$$T_2 \dot{x}_2 + x_2 = u_2, \quad u_2 = F_2(x_1, x_2)$$

<sup>8)</sup> Es sei angemerkt, daß die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes (eines Satzes aus der Funktionalanalysis) auf unser Beispiel zu einem erheblich schlechteren Ergebnis führt. Der dabei gesicherte Teil des Einzugsbereiches ist von ähnlicher Gestalt wie oben, ist aber erheblich enger um die Koordinatenachsen zusammengezogen.

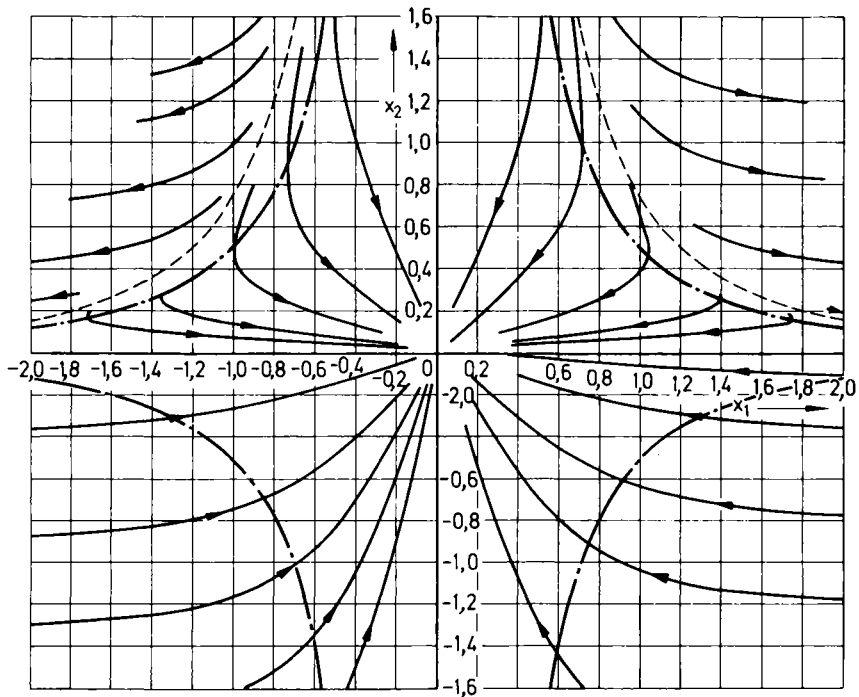


Bild 3/10 Trajektorien der Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2$$

----- Ungefähre Grenze des Einzugsbereichs

- · - · - Grenze des Teils des Einzugsbereichs, der durch unsere Anwendung der Direkten Methode gesichert wurde

zu

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1}x_1 + \frac{1}{T_1}F_1(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2}x_2 + \frac{1}{T_2}F_2(x_1, x_2).$$

$x_1 = 0, x_2 = 0$  ist eine Ruhelage des Systems. Setzt man auch jetzt die Ljapunow-Funktion in der Form

$$V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ beliebig } > 0, \quad (3.30)$$

an, so wird entsprechend wie oben

$$\dot{V} = 2\lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + 2\lambda_2 x_2 \dot{x}_2 = -\frac{2\lambda_1}{T_1}x_1^2 \left[ 1 - \frac{F_1(x_1, x_2)}{x_1} \right] - \frac{2\lambda_2}{T_2}x_2^2 \left[ 1 - \frac{F_2(x_1, x_2)}{x_2} \right].$$

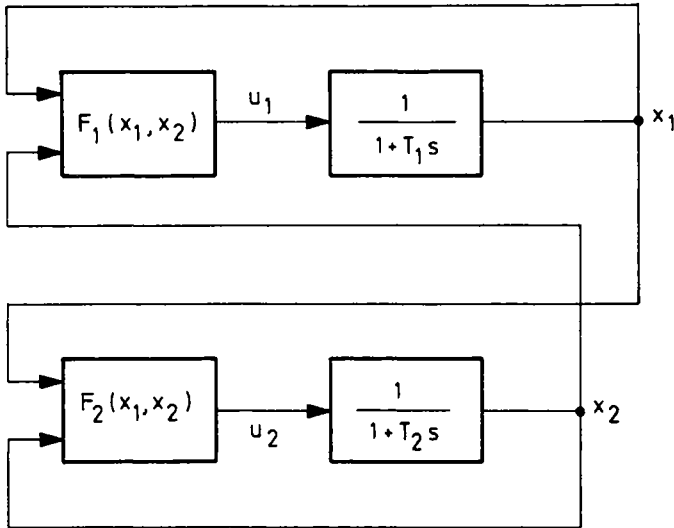


Bild 3/11 Zwei Regelkreise mit nichtlinearer Kopplung

$\dot{V}$  ist daher gewiß  $\leq 0$  in dem Bereich der Zustandsebene, dessen Punkte die beiden Ungleichungen

$$\frac{F_1(x_1, x_2)}{x_1} < 1, \quad (3.31)$$

$$\frac{F_2(x_1, x_2)}{x_2} < 1 \quad (3.32)$$

erfüllen. Durch die Ungleichung (3.31) bzw. (3.32) wird ein Bereich  $N_1$  bzw.  $N_2$  der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene definiert, welcher durch die Kurve

$$x_1 = F_1(x_1, x_2) \quad \text{bzw.} \quad x_2 = F_2(x_1, x_2)$$

berandet wird (Bild 3/12). Im Durchschnitt  $S$  der Bereiche  $N_1$  und  $N_2$  (kreuzschraffiert) ist  $\dot{V} \leq 0$ , wobei das Gleichheitszeichen nur für  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , also im Ursprung, gilt. Es werde angenommen, daß dieser in  $S$  gelegen ist. Da  $V$  in der gesamten Zustandsebene positiv definit ist, hat man in  $S$  einen Bereich, in dem sowohl  $V$  positiv definit als auch  $\dot{V}$  negativ definit ist.

Nun wendet man das Kriterium der asymptotischen Stabilität im großen in ganz entsprechender Weise wie im obigen Beispiel an. Die Höhenlinien von  $V$  sind wiederum Ellipsen um  $0$ , deren Achsen in die  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse fallen. Diejenige Ellipse  $C$ , welche den Rand von  $S$  tangiert, begrenzt den durch das Kriterium gesicherten Teil  $B$  des Einzugsbereiches.

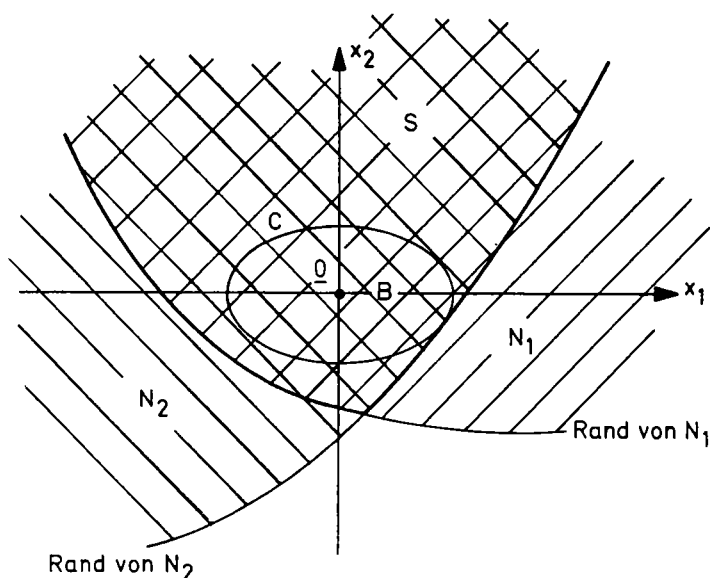


Bild 3/12 Stabilitätsuntersuchung für das System aus Bild 3/11

$$N_1: \frac{F_1(x_1, x_2)}{x_1} < 1, \quad N_2: \frac{F_2(x_1, x_2)}{x_2} < 1, \quad S = N_1 \cap N_2$$

Betrachtet man alle möglichen Paare  $(\lambda_1, \lambda_2)$  von positiven Werten, so erhält man unendlich viele derartige Bereiche B. Ihre Vereinigungsmenge bildet den insgesamt mit diesem Verfahren erreichbaren Teil des Einzugsbereiches. Das Verfahren ist anwendbar, wenn der Bereich S die Ruhelage  $(0,0)$  enthält. Es liefert einen passablen Teil des gesamten Einzugsbereiches, wenn  $\underline{0}$  vom S-Rand genügend weit entfernt ist.

Einen speziellen Typ der Struktur von Bild 3/11 sieht man im Bild 3/13: zwei nichtlineare Regelkreise 1. Ordnung, die multiplikativ gekoppelt sind. Hier ist

$$F_1(x_1, x_2) = F(x_1)x_2,$$

$$F_2(x_1, x_2) = x_1 G(x_2).$$

Der Bereich S, in dem sowohl die Ljapunow-Funktion V nach (3.30) positiv definit als auch  $\dot{V}$  negativ definit ist, ergibt sich demgemäß als Durchschnitt von

$$N_1: \frac{F(x_1)x_2}{x_1} < 1 \quad \text{und} \quad N_2: \frac{x_1 G(x_2)}{x_2} < 1.$$

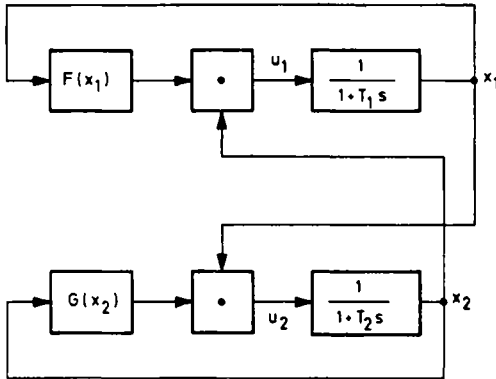


Bild 3/13 Zwei multiplikativ gekoppelte nichtlineare Regelkreise

Setzt man voraus, daß

$$\frac{F(x_1)}{x_1} > 0 \quad \text{für } x_1 \neq 0,$$

$$\frac{G(x_2)}{x_2} > 0 \quad \text{für } x_2 \neq 0,$$

so kann man dafür auch schreiben:

$$N_1: x_2 < \frac{x_1}{F(x_1)}, \quad N_2: x_1 < \frac{x_2}{G(x_2)}.$$

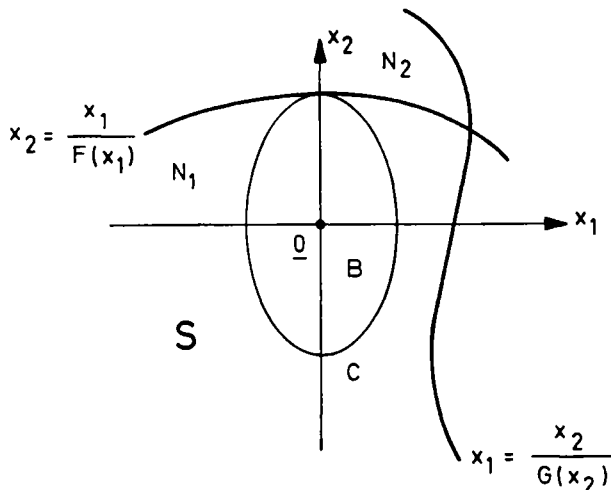


Bild 3/14 Stabilitätsuntersuchung für das System aus Bild 3/13

$$N_1: x_2 < \frac{x_1}{F(x_1)}, \quad N_2: x_1 < \frac{x_2}{G(x_2)}, \quad S = N_1 \cap N_2$$

Der so erhaltene Bereich  $S$  ist im Bild 3/14 dargestellt. Die weitere Untersuchung des Einzugsbereiches von  $\underline{Q}$  erfolgt wie bisher.

Ein Beispiel zeigt Bild 3/15. Bei den Kennlinien handelt es sich um eine Begrenzung mit

$$F(x_1) = \begin{cases} -1, & x_1 \leq -1, \\ x_1, & -1 \leq x_1 \leq 1, \\ 1, & x_1 \geq 1 \end{cases}$$

und eine kubische Parabel mit  $G(x_2) = x_2^3$ .

Demnach ist

$$\frac{x_1}{F(x_1)} = \begin{cases} -x_1, & x_1 \leq -1, \\ 1, & -1 \leq x_1 \leq 1, \\ x_1, & x_1 \geq 1. \end{cases}$$

Als oberen Rand des Bereiches  $N_1$  erhält man somit den Polygonzug im Bild 3/16 (strichpunktiert). Weiter ist

$$\frac{x_2}{G(x_2)} = \frac{1}{x_2^2}.$$

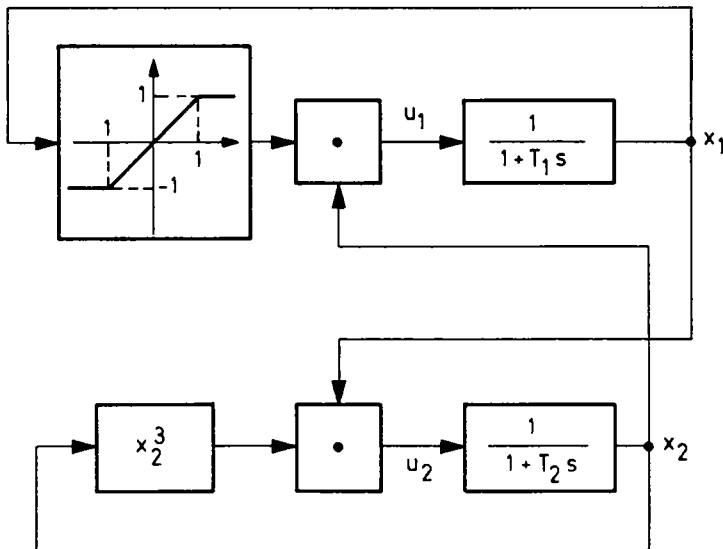


Bild 3/15 Beispiel zweier multiplikativ gekoppelter Regelkreise



Der rechte Rand von  $N_2$  ist daher eine hyperbelartige Kurve (durchgezogen im Bild 3/16). Der Bereich S wird also insgesamt durch die schraffierte Kurve R berandet.

Das Innengebiet irgendeiner Ellipse

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad 0 < b \leq 1, \quad (3.33)$$

welche die Kurve R berührt, stellt einen gesicherten Teil des Einzugsbereiches dar. Das gleiche gilt daher auch von der Vereinigungsmenge aller derartigen Ellipsenscheiben. Um den Rand dieser Menge zu bestimmen, ermittelt man die Ellipse (3.33) mit  $b = 1$ , welche die Hyperbelkurve  $x_1 = 1/x_2^2$  berührt. Die Ellipsen mit  $b = 1$  haben die Gleichung  $x_1^2/a^2 + x_2^2 = 1$ . Ihre Ableitung erhält man aus

$$\frac{2x_1}{a^2} + 2x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \quad \text{zu} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{a^2 x_2}.$$

Die Ableitung von  $x_2^2 = 1/x_1$  ergibt sich entsprechend aus

$$2x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{x_1^2} \quad \text{zu} \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{2x_1^2 x_2}.$$

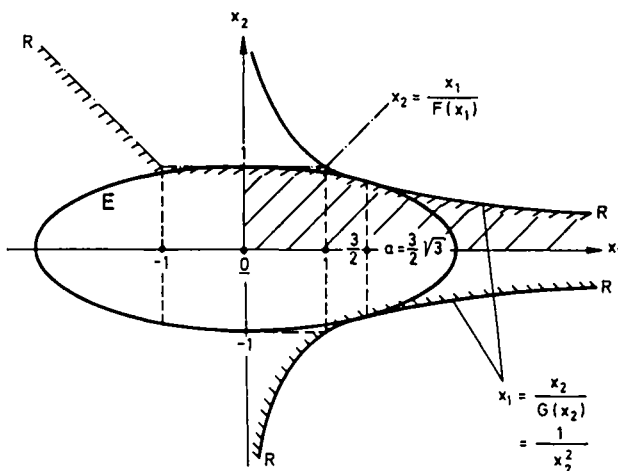


Bild 3/16 Stabilitätsuntersuchung für das System aus Bild 3/15

Da im Berührungspunkt beide Ableitungen gleich sein müssen, folgt die Beziehung  $x_1^3 = a^2/2$ . Geht man damit in die Gleichungen von Ellipse und Hyperbelkurve, so erhält man

$$a = \frac{3}{2}\sqrt{3}, \quad x_{1B} = \frac{3}{2},$$

wobei  $x_{1B}$  die Abszisse des Berührungspunktes ist. Die Ellipse E ist im Bild 3/16 eingezeichnet.

Der im 1. Quadranten gelegene gesicherte Teil des Einzugsbereichs von  $\underline{Q}$  ist im Bild 3/16 locker schraffiert. In  $0 \leq x_1 \leq x_{1B}$  wird er nach oben durch die Ellipse E begrenzt, für  $x_1 \geq x_{1B}$  durch die Hyperbelkurve. Durch Spiegelung dieses Bereichs an der  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse erhält man den gesamten gesicherten Teil des Einzugsbereichs von  $\underline{Q}$ .

Zum Vergleich zeigt das Bild 3/17 eine Analogrechneraufzeichnung der Trajektorien des nichtlinearen Systems aus Bild 3/15. Da die Maßstäbe auf den beiden Achsen hier verschieden gewählt sind, nimmt die Ellipse E aus Bild 3/16 die Ge-

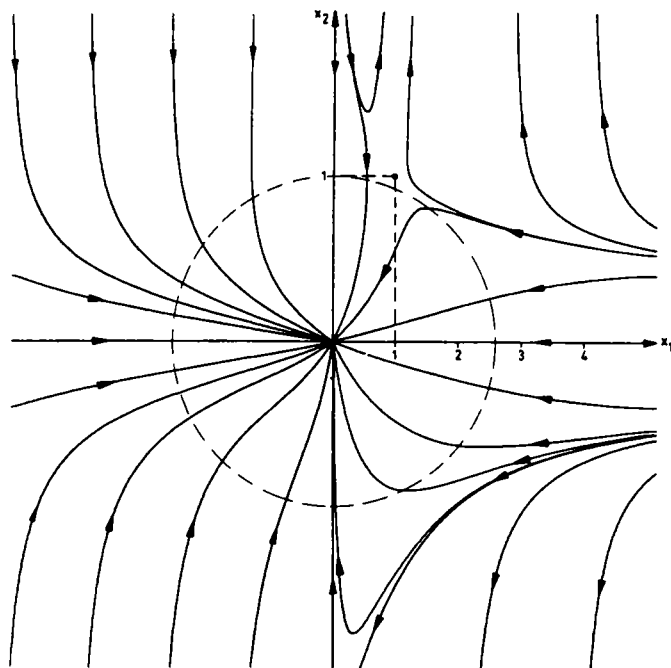


Bild 3/17 Trajektorien des nichtlinearen Systems aus Bild 3/15  
 $(T_1 = T_2 = 1)$   
 - - - - Ellipse E aus Bild 3/16

stalt eines Kreises an, ohne daß sich aber etwas Wesentliches ändert. Aus dem Trajektorienverlauf sieht man, daß der gesicherte Teil des Einzugsbereiches erheblich kleiner ist als der gesamte Einzugsbereich, dessen Rand jedoch im 1. und 4. Quadranten recht nahe kommt. Im 1. Quadranten befindet sich eine zweite Ruhelage des Systems. Aus den Systemgleichungen erkennt man, daß sie in (1,1) liegt. Sie ist instabil und hat den Charakter eines Sattelpunktes.

### 3.3.4 Die Methode von M. A. Aiserman

Als Beispiel eines allgemeinen Verfahrens zur Ermittlung von Ljapunow-Funktionen soll nun die Methode von *M. A. Aiserman* beschrieben werden.

Als erstes schreiben wir das System der nichtlinearen Zustandsdifferentialgleichungen so, daß es in der äußeren Form einem linearen System gleicht:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(\underline{x})\underline{x}. \quad (3.34)$$

Zum Unterschied von einem wirklich linearen System ist aber die Matrix  $\underline{A}$  nicht konstant, sondern mindestens ein Element  $a_{ik}$  von  $\underline{A}$  hängt vom Zustandsvektor  $\underline{x}$  ab. Es handelt sich also nur um eine *formal lineare Schreibweise der Zustandsdifferentialgleichungen*.

Als Beispiel betrachten wir den Regelkreis im Bild 3/18, der zwei nichtlineare Kennlinien enthält. Die Übertragungskonstanten der linearen Übertragungsglieder sind zum vorhergehenden nichtlinearen Glied geschlagen. Die Zeitkonstante des einen linearen Gliedes ist zu 1 normiert. Dann gelten die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - G(x_2), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 + \frac{1}{T}F(x_1). \end{aligned}$$

Führt man die Quotienten

$$\frac{G(x_2)}{x_2} = g(x_2), \quad \frac{F(x_1)}{x_1} = f(x_1)$$

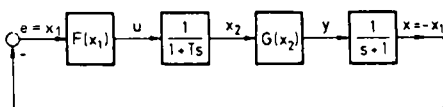


Bild 3/18  
Regelkreis mit zwei  
Kennlinien

ein, so ist

$$G(x_2) = x_2 g(x_2), \quad F(x_1) = x_1 f(x_1).$$

Damit kann man die Zustandsdifferentialgleichungen formal linear schreiben:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - g(x_2)x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T}f(x_1)x_1 - \frac{1}{T}x_2$$

oder

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -g(x_2) \\ \frac{1}{T}f(x_1) & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

In diesem Fall ist also

$$\underline{A}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -1 & -g(x_2) \\ \frac{1}{T}f(x_1) & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}.$$

Im zweiten Schritt des Aiserman-Verfahrens wird die Matrix  $\underline{A}(\underline{x})$  in einen konstanten Anteil  $\underline{A}_L$  und einen von  $\underline{x}$  abhängigen Rest  $\underline{A}_R$  zerlegt:

$$\underline{A}(\underline{x}) = \underline{A}_L + \underline{A}_R(\underline{x}). \quad (3.35)$$

In unserem Beispiel kann die Matrix  $\underline{A}(\underline{x})$  in der folgenden Weise zerlegt werden:

$$\underline{A}(\underline{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}}_{\underline{A}_L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -g(x_2) \\ \frac{1}{T}f(x_1) & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_R(\underline{x})}.$$

Jetzt kommt der entscheidende dritte Schritt des Verfahrens. Man setzt eine quadratische Form

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} = \sum_{i,k=1}^n P_{ik} x_i x_k \quad (3.36)$$

mit noch unbestimmten konstanten Koeffizienten  $\underline{P}_{ik}$  an. Diese versucht man so zu bestimmen, daß in einem möglichst großen Bereich um die Ruhelage  $\underline{0}$   $\underline{V}$  positiv definit und  $\dot{\underline{V}}$  negativ definit ist. Hierzu muß man noch  $\dot{\underline{V}}$  bilden:

$$\dot{\underline{V}} = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}}. \quad (3.37)$$

Nach (3.34) ist  $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x}$ , woraus durch Transponieren folgt:

$$\dot{\underline{x}}^T = \underline{x}^T \underline{A}^T.$$

Setzt man die letzten beiden Gleichungen in (3.37) ein, so entsteht die Beziehung

$$\dot{\underline{V}} = \underline{x}^T (\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}) \underline{x} = \underline{x}^T \underline{Q}(\underline{x}) \underline{x}. \quad (3.38)$$

Man betrachtet nun die Matrix

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}. \quad (3.39)$$

Wegen (3.35) kann man sie in zwei Bestandteile zerlegen:

$$\begin{aligned} \underline{Q}(\underline{x}) &= [\underline{A}_L^T + \underline{A}_R^T(\underline{x})] \underline{P} + \underline{P} [\underline{A}_L + \underline{A}_R(\underline{x})] = \\ &= [\underline{A}_L^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}_L] + [\underline{A}_R^T(\underline{x}) \underline{P} + \underline{P} \underline{A}_R(\underline{x})] = \\ &= \underline{Q}_L + \underline{Q}_R(\underline{x}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Hierin ist  $\underline{Q}_L$  konstant, während  $\underline{Q}_R(\underline{x})$  von  $\underline{x}$  abhängt.

Bis jetzt ist  $\underline{P}$  vollständig frei. Nun wählen wir  $\underline{P}$  so, daß

$$\underline{A}_L^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}_L = -\underline{C} \quad (3.41)$$

ist, wobei  $\underline{C}$  eine positiv definite, im übrigen aber beliebige konstante Matrix darstellt <sup>9)</sup>, z.B.  $\underline{C} = \underline{I}$ . Aus (3.40) folgt dann  $\underline{Q}_L = -\underline{C}$ , also

$$\underline{Q}(\underline{x}) = -\underline{C} + \underline{Q}_R(\underline{x}), \quad (3.42)$$

<sup>9)</sup> Es sei daran erinnert, daß man eine symmetrische Matrix als positiv (negativ) definit bezeichnet, wenn die zugehörige quadratische Form positiv (negativ) definit ist.

und daraus wegen (3.38)

$$\dot{V} = -\underline{x}^T \underline{C} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{Q}_R(\underline{x}) \underline{x}. \quad (3.43)$$

Der erste Summand ist eine im gesamten Zustandsraum negativ definite Funktion. Wir dürfen annehmen, daß er in einer Umgebung der Ruhelage  $\underline{0}$  den zweiten Summanden überwiegt. Das ist z.B. sicher der Fall, wenn  $\underline{Q}_R(\underline{x}) \rightarrow \underline{0}$  strebt für  $\underline{x} \rightarrow \underline{0}$ , aber nicht nur dann. In dieser Umgebung, von der man hofft, daß sie nicht zu klein ausfällt, ist  $\dot{V}$  negativ definit.

Wie man sieht, stellt (3.41) eine Ljapunow-Gleichung dar. Sie hat daher bei einer symmetrischen und positiv definiten, sonst aber beliebigen Matrix  $\underline{C}$  gewiß eine eindeutig bestimmte symmetrische und positiv definite Lösung  $\underline{P}$ , wenn die Eigenwerte von  $\underline{A}_L$  links der  $j$ -Achse liegen (Unterabschnitt 3.3.2).

Um die Umgebung von  $\underline{0}$ , in der  $\dot{V}$  negativ definit ist, genauer abzugrenzen, berechnet man zunächst  $\underline{P}$  aus (3.41), nachdem man  $\underline{C}$  vorgegeben hat. Damit bildet man  $\underline{Q}(\underline{x})$  gemäß (3.39). Entsprechend (3.38) stellt man nun fest, in welchem Bereich des Zustandsraumes  $\dot{V}$  negativ definit ist. Dazu wendet man das Kriterium von *Sylvester* auf die Matrix  $-\underline{Q}(\underline{x})$  an.

Man hat so eine Funktion  $V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$  erhalten, die im gesamten Zustandsraum positiv definit ist und deren Ableitung  $\dot{V}$  in einer Umgebung  $U$  von  $\underline{0}$  negativ wird. Wie groß sich diese Umgebung erhalten läßt, muß von Fall zu Fall untersucht werden. In ihr stellt die so konstruierte Funktion  $V$  eine Ljapunow-Funktion dar. Jetzt hat man das Kriterium der asymptotischen Stabilität im großen anzuwenden. Hierzu bestimmt man eine möglichst ausgedehnte Niveauhyperebene  $V(x_1, \dots, x_n) = c$ , die noch in  $U$  liegt. Ihr Innengebiet gehört dann mit Sicherheit zum Einzugsbereich der Ruhelage  $\underline{0}$ .

Das hiermit allgemein beschriebene Verfahren sei an dem begonnenen Beispiel zu Ende durchgeführt. Wählt man für die positiv definite Matrix  $\underline{C}$  die Einheitsmatrix  $\underline{I}$ , so lautet die Ljapunow-Gleichung (3.41) wegen  $\underline{A}_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}$  und  $P_{21} = P_{12}$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2P_{11} & -P_{12} - \frac{1}{T}P_{12} \\ -\frac{1}{T}P_{12} - P_{12} & -2\frac{1}{T}P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wie man sieht, ist die links stehende Matrix  $\underline{A}_L^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}_L$  symmetrisch, was eine allgemeine Eigenschaft ist und bei Systemen höherer Ordnung die Berechnung erleichtert. Aus der letzten Matrixgleichung erhält man durch Vergleich der entsprechenden Elemente ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der  $P_{ik}$ :

$$-2P_{11} = -1, \quad -P_{12} - \frac{1}{T}P_{12} = 0, \quad -2\frac{1}{T}P_{22} = -1.$$

Aus ihm folgt sofort

$$P_{11} = \frac{1}{2}, \quad P_{12} = 0, \quad P_{22} = \frac{T}{2}, \quad \text{also} \quad \underline{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}.$$

Nun bildet man gemäß (3.39)  $\underline{Q}(\underline{x})$ , um zu untersuchen, wo  $\dot{V}$  negativ definit ist:

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{T}f(x_1) \\ -g(x_2) & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -g(x_2) \\ \frac{1}{T}f(x_1) & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}.$$

Daher ist

$$-\underline{Q}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}[g(x_2) - f(x_1)] \\ \frac{1}{2}[g(x_2) - f(x_1)] & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit  $\dot{V}$  negativ definit ist, muß die zu  $-\underline{Q}(\underline{x})$  gehörige quadratische Form positiv definit sein. Wendet man das Kriterium von Sylvester an, so muß hierzu

$$1 - \frac{1}{4}[g(x_2) - f(x_1)]^2 > 0$$

oder

$$|g(x_2) - f(x_1)| < 2,$$

$$-2 < g(x_2) - f(x_1) < 2,$$

$$f(x_1) - 2 < g(x_2) < f(x_1) + 2 \quad (3.44)$$

gelten.

Ist diese Ungleichung für alle  $x_1$  und  $x_2$  erfüllt, so ist  $\dot{V}$  im gesamten Raum negativ definit. Da

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} = \frac{1}{2} (x_1^2 + T x_2^2)$$

eine positiv definite quadratische Form ist und als solche für  $|\underline{x}| \rightarrow +\infty$  gegen  $+\infty$  strebt, ist die Ruhelage des Regelkreises global asymptotisch stabil, wenn die Ungleichung (3.44) für alle  $x_1$  und  $x_2$  gilt.

Für die von uns betrachteten Kennlinien  $F(e)$  ist die Funktion  $f(e) = F(e)/e$  für alle  $e$  beschränkt und  $\geq 0$ , liegt also in einem Streifen oberhalb der  $e$ -Achse. Das Bild 3/19 zeigt diese Funktion für die Begrenzung, die Dreipunktkennlinie und die Totzone. Ist im vorliegenden Beispiel  $|f(x_1)| < 2$  für alle  $x_1$ , so liegt  $f(x_1) - 2$  im Streifen zwischen  $-2$  und  $0$ , während  $f(x_1) + 2$  im Streifen zwischen  $2$  und  $4$  gelegen ist. Die Ungleichung (3.44) ist daher gewiß erfüllt, wenn auch die zweite Kennlinie im Streifen zwischen  $0$  und  $2$  liegt. Man hat so die hinreichende Stabilitätsbedingung

$$|f(x_1)| < 2, |g(x_2)| < 2$$

oder

$$|F(x_1)| < 2|x_1|, |G(x_2)| < 2|x_2|.$$

Somit ist der Regelkreis in Bild 3/18 gewiß global asymptotisch stabil, wenn die beiden Kennlinien im Sektor  $0 \leq u/e \leq 2$  der Kennlinienebene liegen (Bild 3/20).

Zum ersten Mal bei unseren Untersuchungen treffen wir hier auf eine *Sektorbedingung* als entscheidende Voraussetzung für die globale asymptotische Stabilität eines Systems. D.h.: Auf die Forderung, daß eine Kennlinie in einem bestimmten

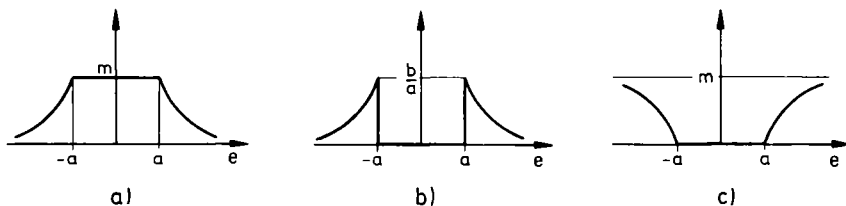


Bild 3/19 Die Funktion  $f(e) = \frac{F(e)}{e}$  für die Begrenzung (a), Dreipunktkennlinie (b) und Totzone (c)



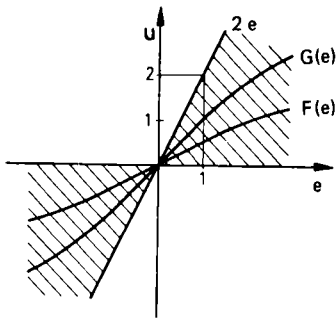


Bild 3/20

Sektorbedingung für die globale asymptotische Stabilität des Regelkreises aus

Bild 3/18

Sektor der Kennlinienebene liegen soll. Beim Popow- und Kreiskriterium wird diese Forderung dann eine grundlegende Rolle spielen (Kapitel 5).

Was unser Beispiel angeht, so liegt die Frage nahe, ob man es nicht auch mittels der einfachen Konstruktion des vorigen Unterabschnitts hätte behandeln können. Man kann sich leicht überzeugen, daß das nicht möglich ist und deshalb stärkere Hilfsmittel erforderlich sind. Mit

$$V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

erhält man hier nämlich

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 x_2 \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 [-x_1 - G(x_2)] + \lambda_2 x_2 \left[-\frac{1}{T} x_2 + \frac{1}{T} F(x_1)\right] \\ &= -\lambda_1 x_1^2 \left[1 + \frac{G(x_2)}{x_1}\right] - \frac{\lambda_2}{T} x_2^2 \left[1 - \frac{F(x_1)}{x_2}\right]. \end{aligned}$$

Daraus folgen gemäß der Vorgehensweise des vorigen Unterabschnitts die Ungleichungen

$$\frac{F(x_1)}{x_2} < 1, \quad \frac{G(x_2)}{x_1} > -1$$

oder

$$\frac{x_1}{x_2} f(x_1) < 1, \quad \frac{x_2}{x_1} g(x_2) > -1. \quad (3.45)$$

Nimmt man beispielsweise eine Begrenzungskennlinie für  $F(x_1)$  und eine kubische Parabel für  $G(x_2)$ , so sind  $f(x_1)$  und  $g(x_2)$  positiv (abgesehen von  $x_2 = 0$ ). Ist nun  $x_1$  irgendeine feste, etwa positive, Stelle, so hat dort  $f(x_1)$  irgendeinen

festen positiven Wert. Daher braucht man nur  $x_2 > 0$  genügend klein zu wählen, damit die erste der beiden Ungleichungen (3.45) verletzt ist. Da hierbei  $x_1 > 0$  beliebig klein gewählt sein darf, kann man also nicht einmal asymptotische Stabilität im kleinen sichern, geschweige denn globale asymptotische Stabilität.

Von komplizierteren Methoden zur Erzeugung von Ljapunow-Funktionen wollen wir – wie schon gesagt – absehen, weil sie bei ernsthaften technischen Problemen doch kaum anzuwenden sind, vor allem deshalb, weil die Schwierigkeiten der Anwendung mit der Systemordnung rapide anwachsen.

Wir wollen jetzt vielmehr zu verschiedenen Anwendungen der Direkten Methode übergehen und werden sehen, daß wir dabei mit dem einfachen Ansatz der Ljapunow-Funktion als quadratische Form gut zurecht kommen.

### 3.4 Eine Anwendung der Direkten Methode: Methode der ersten Näherung

Für viele Zwecke der Praxis genügt die Feststellung, daß eine Ruhelage asymptotisch stabil ist, auch wenn man nichts über den Umfang des Einzugsbereiches sagen kann. Natürlich wäre die letztere Kenntnis stets erwünscht. Aber wenn sie nur unter großem Aufwand zu bekommen ist, verzichtet man auf sie – in der Hoffnung, daß der tatsächliche Einzugsbereich nicht allzu klein ist und der im Bild 3/3a skizzierte Sonderfall nicht vorliegt.

Ist man damit zufrieden, die asymptotische Stabilität im kleinen zu sichern, so gibt es in der Tat eine sehr einfach zu handhabende Methode. Sie beruht darauf, *das nichtlineare System um seinen Arbeitspunkt zu linearisieren*, d.h. es in der Umgebung seines Betriebszustandes durch ein lineares System zu approximieren, *und sodann vom leicht zu ermittelnden Stabilitätsverhalten des linearen Systems auf das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems zu schließen*. Letzterer Schluß ist mit Hilfe der Direkten Methode möglich. Diese Vorgehensweise wurde von *Ljapunow* als „Methode der ersten Näherung“ bezeichnet. Sie wird in der Praxis auf Schritt und Tritt angewandt, ohne daß sich der Praktiker bewußt ist, dabei eine Anwendung der Direkten Methode zu benutzen.

Ausgangspunkt sind die nichtlinearen Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.46)$$

worin die als konstant vorausgesetzten Werte  $u_{1R}, \dots, u_{pR}$  der Eingangsgrößen des dynamischen Systems nicht mehr aufgeführt sind. Die betrachtete Ruhelage sei

$$\underline{x}_R = \begin{bmatrix} x_{1R} \\ \vdots \\ x_{nR} \end{bmatrix}.$$

Wir gehen nun zu den Abweichungen

$$\Delta x_i = x_i - x_{iR}, \quad i = 1, \dots, n,$$

von der Ruhelage über. Daraus folgt  $x_i = x_{iR} + \Delta x_i$ , also  $\dot{x}_i = (\Delta x_i)'$  und damit aus (3.46)

$$(\Delta x_i)' = f_i(x_{1R} + \Delta x_1, \dots, x_{nR} + \Delta x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.47)$$

Auf die Funktion  $f_i$  wird nun der Taylorsche Satz angewandt:

$$(\Delta x_i)' = f_i(x_{1R}, \dots, x_{nR}) + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right]_R \Delta x_k + r_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.48)$$

Dabei ist  $r_i$  das Restglied 2. Ordnung, ist also von der Form

$$r_i = \sum_{k,m=1}^n f_{km,i}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \Delta x_k \Delta x_m, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.49)$$

wobei die aus den zweiten partiellen Ableitungen der  $f_i$  nach den  $x_k$  gebildeten Koeffizienten  $f_{km,i}$  in der Umgebung der Ruhelage  $\underline{\Delta x} = \underline{0}$  gewiß beschränkt sind, aber nicht im einzelnen interessieren. Der Index R an den partiellen Ableitungen 1. Ordnung bringt zum Ausdruck, daß als Argumente  $x_{1R}, \dots, x_{nR}$  zu nehmen sind.

Da in der Ruhelage  $\underline{x}_R$  die zeitlichen Ableitungen  $\dot{x}_i$  verschwinden, folgt aus (3.46)

$$0 = f_i(x_{1R}, \dots, x_{nR}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Damit wird aus (3.48)

$$(\Delta x_i)' = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right]_R \Delta x_k + r_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.50)$$

Dies sind nach wie vor die nichtlinearen Zustandsdifferentialgleichungen, nur daß an Stelle der ursprünglichen Zustandsvariablen deren Abweichungen von der Ruhelage auftreten. Geometrisch gesprochen: Der Ursprung des Koordinatensystems wurde durch Parallelverschiebung in die Ruhelage  $\underline{x}_R$  verlegt.

Die Linearisierung besteht nun darin, daß die Restglieder  $r_i$  vernachlässigt werden:

$$(\Delta x_i)' = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right]_R \Delta x_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.51)$$

stellt das linearisierte System dar.

Sofern man in einer genügend engen Umgebung der Ruhelage  $\underline{x}_R$  bzw.  $\underline{\Delta x} = 0$  bleibt, also die  $|\Delta x_k|$  klein hält, sind die Produkte  $\Delta x_k \Delta x_m$  betragsmäßig klein gegen die  $\Delta x_k$  selbst, so daß man in der Tat das Restglied 2. Ordnung gegen die Glieder 1. Ordnung in (3.50) vernachlässigen darf. Das nichtlineare System (3.50) bzw. (3.46) wird in einer solchen Umgebung durch das linearisierte System (3.51) approximiert.

Vorausgesetzt ist bei dieser Schlußweise, daß die rechten Seiten  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  der Zustandsdifferentialgleichungen bei  $\underline{x}_R$  zweimal stetig differenzierbar sind<sup>10)</sup>. Die Ruhelage  $\underline{x}_R$  darf also nicht mit der Sprung- oder Knickstelle einer nichtlinearen Kennlinie zusammenfallen. Um eine solche kann nicht linearisiert werden.

Die Gleichung (3.51) des linearisierten Systems läßt sich vektoriell schreiben, wenn man die Matrix

$$\underline{A} = (a_{ik}) = \left[ \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right]_R \right] \quad (3.52)$$

eingührt:

<sup>10)</sup> Diese Bedingung läßt sich abschwächen: Siehe [2], Unterabschnitt 4.2.1, oder [43], Abschnitt 2.4.

$$(\underline{\Delta x})' = \underline{A} \underline{\Delta x}, \quad (3.53)$$

wobei die Ruhelage also  $\underline{\Delta x} = \underline{0}$  ist.

Man wird die Linearisierung in der eben beschriebenen Weise durchführen, wenn das nichtlineare System in Zustandsdarstellung gegeben ist. Falls es jedoch im Strukturbild vorliegt, ist es einfacher, die Linearisierung in der dann üblichen Weise vorzunehmen ([73], Abschnitt 2.7), da sie weniger Rechenaufwand erfordert. Bestimmt man dann aus dem linearisierten Strukturbild die Zustandsdifferentialgleichungen, so sind sie von der Form (3.53) mit einer bekannten, konstanten Matrix  $\underline{A}$ .

Man darf erwarten, daß sich das nichtlineare System (3.46) in der Umgebung der Ruhelage im wesentlichen wie das linearisierte System (3.53) verhält, besonders auch hinsichtlich der Stabilität. Der Anwender, welcher bei der Behandlung dynamischer Probleme sehr oft linearisieren muß, sieht es als ziemlich selbstverständlich an, daß aus der Stabilität des linearisierten Systems auch die Stabilität des nichtlinearen Systems folgt, sofern man sich auf kleine Abweichungen von der Ruhelage beschränkt. Ein großer Teil seiner Bemühungen um die Stabilisierung und Verbesserung von Systemen geht von dieser Grundlage aus. Diese Vermutung ist in der Tat im wesentlichen richtig, wie das Ljapunowsche *Stabilitätskriterium nach der ersten Näherung* (d.h. mittels des linearisierten Systems) zeigt:

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

mit der Ruhelage  $\underline{x}_R$  und der bei  $\underline{x}_R$  zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $\underline{f}(\underline{x})$ . Es sei

$$\underline{A} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (x_{1R}, \dots, x_{nR}) \right]_{i,k=1,\dots,n}.$$

Dann gilt:

(I) Liegen die Eigenwerte von  $\underline{A}$ , also die Nullstellen der charakteristischen Gleichung  $\det(s\underline{I} - \underline{A}) = 0$ , sämtlich links der  $j$ -Achse der komplexen Ebene, so ist die Ruhelage  $\underline{x}_R$  asymptotisch stabil.

(II) Liegt mindestens ein Eigenwert von  $\underline{A}$  rechts der  $j$ -Achse, so ist die Ruhelage  $\underline{x}_R$  instabil.

(III) *Liegt mindestens ein Eigenwert von  $\underline{A}$  auf der  $j$ -Achse, aber keiner rechts davon, so kann die Ruhelage  $\underline{x}_R$  asymptotisch stabil, nur stabil oder auch instabil sein.* (3.54)

Im Fall (I) ist das linearisierte System global asymptotisch stabil. Aber die Ruhelage  $\underline{x}_R$  des nichtlinearen Systems braucht deshalb keineswegs *global* asymptotisch stabil zu sein, da nichtlineares und linearisiertes System nur in einer möglicherweise recht kleinen Umgebung von  $\underline{x}_R$  mit genügender Näherung übereinstimmen. So läßt sich nur die asymptotische Stabilität der Ruhelage  $\underline{x}_R$  des nichtlinearen Systems folgern, ohne Aussage über den Umfang des Einzugsbereiches. Bei vielen Problemen der Regelungstechnik stört das aber nicht, weil man weiß, daß die Regelung den Zustandspunkt in einer engen Umgebung der Ruhelage hält, und man annehmen darf, daß diese Umgebung innerhalb des Einzugsbereiches liegt.

In dem Sonderfall (III), daß mindestens eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung auf der imaginären Achse, aber keine rechts davon liegt, ist kein Schluß vom linearisierten auf das nichtlineare System möglich. Hier muß man die höheren Glieder der Taylorentwicklung berücksichtigen. Man bezeichnet ihn als den *kritischen Fall*, und er ist schwierig zu behandeln. Er spielt in der Mechanik eine wichtige Rolle [28]. Für den Regelungstechniker ist er unwesentlich. Falls er vorliegt, wird man das System als praktisch instabil ansehen und die Regelungseinrichtung entsprechend auswählen. Immerhin zeigt der kritische Fall, daß der Schluß vom Verhalten des linearisierten Systems auf das Verhalten des nichtlinearen Systems doch nicht so selbstverständlich ist, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte.

Für den allgemeinen Beweis des Stabilitätskriteriums (3.54) sei auf die Literatur verwiesen, etwa auf [26, 28, 31, 43]. Uns kommt es nur darauf an, den Grundgedanken aufzuzeigen, wie das Kriterium aus der Direkten Methode gefolgert wird. Dazu wollen wir die *Teilaussage* (I) herleiten, unter der vereinfachenden Annahme, daß die Eigenwerte von  $\underline{A}$  einfach und reell sind.

Wenn die Eigenwerte von  $\underline{A}$  einfach sind, kann man die Matrix auf Diagonalform transformieren ([73], Unterabschnitt 12.1.1). Diese Transformation, die wir schon im Unterabschnitt 3.3.2 benutzt haben, wird jetzt auf das nichtlineare Differentialgleichungssystem (3.50) angewandt. Zur Vereinfachung der Bezeichnung wird zuvor zur Vektordarstellung übergegangen und  $\underline{x}$  statt  $\underline{\Delta x}$  geschrieben:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{\rho}(\underline{x}), \quad (3.55)$$

wobei (3.52) berücksichtigt wurde und

$$\underline{\rho}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} r_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ r_n(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

der Vektor der Restglieder ist, der demgemäß nur Terme 2. Ordnung enthält. Mittels der Transformation  $\underline{x} = \underline{T}\underline{z}$  auf Diagonalform wird aus (3.55)

$$\underline{T}\dot{\underline{z}} = \underline{A}\underline{T}\underline{z} + \underline{\rho}(\underline{T}\underline{z}),$$

$$\dot{\underline{z}} = \underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T}\underline{z} + \underline{T}^{-1}\underline{\rho}(\underline{T}\underline{z}).$$

Hierin ist

$$\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} = \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonale aus den Eigenwerten von  $\underline{A}$  besteht. Setzt man abkürzend

$$\underline{T}^{-1}\underline{\rho}(\underline{T}\underline{z}) = \tilde{\underline{\rho}}(\underline{z}),$$

so erhält man als Zustandsdifferentialgleichung des nichtlinearen Systems

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\Lambda}\underline{z} + \tilde{\underline{\rho}}(\underline{z}) \quad (3.56)$$

mit der Ruhelage  $\underline{z} = \underline{T}^{-1}\underline{x} = \underline{0}$ .

Nun wählt man als Ljapunow-Funktion ganz einfach die Quadratsumme

$$V = z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

Dann ist

$$\dot{V} = 2z_1\dot{z}_1 + \dots + 2z_n\dot{z}_n = 2\underline{z}^T\dot{\underline{z}},$$

also wegen (3.56)

$$\dot{V} = 2\mathbf{z}^T[\mathbf{A}\mathbf{z} + \tilde{\rho}(\mathbf{z})],$$

$$\dot{V} = 2\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T\tilde{\rho}(\mathbf{z}),$$

$$\dot{V} = 2(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2) + r(\mathbf{z}). \quad (3.57)$$

Der erste Term in  $\dot{V}$  ist negativ definit im gesamten Zustandsraum, *sofern die – als reell vorausgesetzten – Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $\mathbf{A}$  negativ sind*. Der zweite Term  $r(\mathbf{z}) = 2\mathbf{z}^T\tilde{\rho}(\mathbf{z})$  enthält ausschließlich Summanden 3. Ordnung. Bleibt man daher in einer genügend engen Umgebung der Ruhelage  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ , so überwiegt der erste Term in  $\dot{V}$ , und deshalb ist  $\dot{V}$  in dieser Umgebung negativ definit. Wendet man das Kriterium (3.1) der asymptotischen Stabilität im kleinen an, so sieht man, daß die Ruhelage  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  asymptotisch stabil ist – was zu zeigen war.

Das Stabilitätskriterium nach der ersten Näherung soll nun auf zwei Beispiele angewandt werden. Beim ersten ist das zu untersuchende System durch das Strukturbild gegeben, beim zweiten durch die Zustandsgleichungen.

#### Beispiel 1: Regelkreis im Bild 3/21

Zwei Vorgehensweisen sind möglich:

- Man stellt zunächst die Zustandsdifferentialgleichungen des nichtlinearen Regelkreises auf und linearisiert diese dann wie oben beschrieben.
- Man linearisiert erst im Strukturbild und stellt dann die Zustandsdifferentialgleichungen des linearisierten Systems auf.

Bei kompliziertem Strukturbild ist letztere Vorgehensweise mit weniger Rechenaufwand verbunden, weil man im Strukturbild nur die Nichtlinearitäten selbst zu linearisieren braucht, während die linearen Glieder unverändert bleiben ([73], Abschnitt 2.7). Wir wollen hier aber doch das erste Verfahren anwenden, weil es sich unmittelbar an die allgemeinen Ausführungen anschließt.

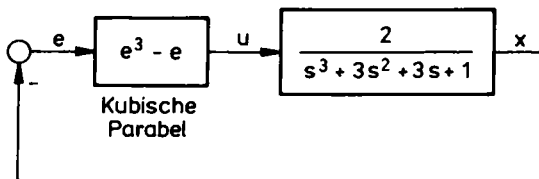


Bild 3/21 Regelkreis mit kubischer Kennlinie



Die Differentialgleichungen des linearen Teilsystems lauten

$$\stackrel{(3)}{x} + 3 \ddot{x} + 3 \dot{x} + x = 2u$$

oder wegen  $x = -e$  :

$$\stackrel{(3)}{e} + 3 \ddot{e} + 3 \dot{e} + e = -2u .$$

Wegen  $u = e^3 - e$  folgt daraus weiter

$$\stackrel{(3)}{e} + 3 \ddot{e} + 3 \dot{e} - e + 2e^3 = 0 .$$

Mit  $x_1 = e$  ,  $x_2 = \dot{e}$  ,  $x_3 = \ddot{e}$  erhält man die Zustandsdifferentialgleichungen der nichtlinearen Regelung:

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1 ,$$

$$\dot{x}_2 = x_3 = f_2 ,$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - 2x_1^3 - 3x_2 - 3x_3 = f_3 .$$

Ihre Ruhelagen ergeben sich aus  $\dot{x}_1 = 0$  ,  $\dot{x}_2 = 0$  ,  $\dot{x}_3 = 0$  :

$$x_{2R} = 0 ,$$

$$x_{3R} = 0 ,$$

$$x_{1R} - 2x_{1R}^3 = 0 \quad \text{oder} \quad x_{1R}(1 - 2x_{1R}^2) = 0 ,$$

woraus folgt:

$$x_{1R}^I = 0 , \quad x_{1R}^{II} = \frac{1}{2}\sqrt{2} , \quad x_{1R}^{III} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} .$$

Somit hat der Regelkreis drei Ruhelagen:

$$\underline{x}_{RI} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{x}_{RII} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{x}_{RIII} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Um das Stabilitätsverhalten dieser 3 Ruhelagen zu bestimmen, bildet man

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_k} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-6x_1^2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Setzt man hierin  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  ein, so erhält man die Dynamikmatrix

$$\underline{A} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_R$$

der linearisierten Regelung. Deren charakteristisches Polynom ist

$$D = \det \left[ s\mathbf{I}_3 - \left[ \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_R \right] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6x_{1R}^2 - 1 & 3 & s+3 \end{vmatrix}.$$

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$D = s[s(s+3) + 3] + (6x_{1R}^2 - 1) \cdot 1.$$

Also ist

$$s^3 + 3s^2 + 3s + (6x_{1R}^2 - 1) = 0 \quad (3.58)$$

die charakteristische Gleichung der linearisierten Regelung. Ihre Nullstellen sind die Eigenwerte der linearisierten Regelung. Deren Lage zur  $j$ -Achse der komplexen Ebene gilt es nun für die drei Ruhelagen zu ermitteln.

Dazu kann man das Hurwitz-Kriterium verwenden (z.B. [73], Unterabschnitt 4.11.3). Die Hurwitz-Determinante lautet

$$H = \begin{vmatrix} 3 & 6x_{1R}^2 - 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6x_{1R}^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Ihre „nordwestlichen“ Unterdeterminanten lauten

$$H_1 = 3,$$

$$H_2 = 10 - 6x_{1R}^2,$$

$$H_3 = (6x_{1R}^2 - 1) \cdot H_2.$$

Genau dann, wenn diese Unterdeterminanten sämtlich positiv sind, liegen die Eigenwerte des betrachteten Systems links der  $j$ -Achse. Da  $H_1$  stets positiv ist, braucht man hier nur  $H_2$  und  $H_3$  zu berechnen.

Für die Ruhelagen  $\underline{x}_{RII}$  und  $\underline{x}_{RIII}$  ist wegen  $x_{1R} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$   $H_2 = 7$  und  $H_3 = 14$ . Daher liegen in beiden Fällen die Eigenwerte des linearisierten Systems sämtlich links der  $j$ -Achse.

Für die Ruhelage  $\underline{x}_{RI}$  ist wegen  $x_{1R} = 0$  hingegen  $H_2 = 10$  und  $H_3 = -10$ . Mindestens ein Eigenwert des linearisierten Systems muß auf oder rechts der  $j$ -Achse gelegen sein. Um zu sehen, daß tatsächlich ein Eigenwert *rechts* der  $j$ -Achse liegt, gehen wir von der Feststellung aus, daß bei einer kubischen Gleichung entweder alle 3 Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  reell sind oder aber 1 reelle Nullstelle  $\lambda_1$  und 1 konjugiert komplexes Nullstellenpaar  $\lambda_2, \lambda_3$  existieren. Überdies gilt nach den Vietaschen Wurzelsätzen gemäß (3.58)

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (3.59)$$

Im erstgenannten Fall muß mindestens eine Nullstelle positiv sein, da sonst das Produkt  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  nicht positiv sein könnte. Im letztgenannten Fall geht (3.59) in die Gleichung

$$\lambda_1(a_2 + b_2j)(a_2 - b_2j) = 1,$$

also

$$\lambda_1(a_2^2 + b_2^2) = 1$$

über, woraus  $\lambda_1 > 0$  folgt. Im Fall der Ruhelage  $\underline{x}_{RI}$  liegt somit ein Eigenwert des linearisierten Systems rechts der  $j$ -Achse.

Wendet man nunmehr das Stabilitätskriterium (3.54) an, so sieht man, daß die Ruhelage  $\underline{x}_{RI}$  des Regelkreises im Bild 3/21 instabil ist, während die weiteren Ruhelagen  $\underline{x}_{RII}$  und  $\underline{x}_{RIII}$  dieser Regelung asymptotisch stabil sind.

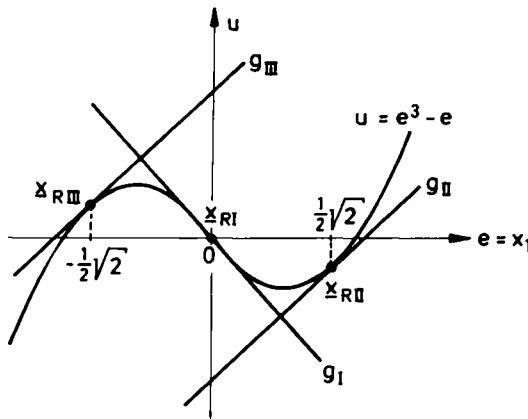


Bild 3/22

Die kubische Parabel des Regelkreises von Bild 3/21

Dieses Ergebnis wird anschaulich plausibel, wenn man die kubische Parabel des Regelkreises betrachtet: Bild 3/22. Die drei Parabelpunkte, welche den Ruhelagen entsprechen, sind mit  $x_{RI}$ ,  $x_{RII}$  und  $x_{RIII}$  bezeichnet. Im Strukturbild besteht die Linearisierung darin, daß man die Kennlinie durch ihre Tangente in der jeweiligen Ruhelage ersetzt. Diese 3 Tangenten sind mit  $g_I$ ,  $g_{II}$  und  $g_{III}$  bezeichnet. Wie man sieht, hat die zur Ruhelage  $x_{RI}$  gehörende Tangente  $g_I$  die Steigung

$$\left. \frac{du}{de} \right|_{e=0} = 3e^2 - 1 \Big|_{e=0} = -1.$$

Zusammen mit der Vorzeichenumkehr im Soll-Istwert-Vergleich der linearisierten Regelung entsteht so eine *Mitkopplung*, was zur Instabilität führt. Hingegen ist für die beiden anderen Ruhelagen die Tangentensteigung

$$\left. \frac{du}{de} \right|_{e=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}.$$

Es liegt also die normale Gegenkopplung einer Regelung vor, die bei dem vorliegenden linearen Teilsystem und niedriger Kreisverstärkung (global asymptotisch) stabiles Verhalten der linearisierten Regelung zur Folge hat.

### Beispiel 2: Reihenschlußmotor (Bild 3/23)

Es handelt sich um einen Gleichstrommotor, bei dem Feld und Anker in Reihe liegen, also vom gleichen Strom  $i$  durchflossen werden. Eingangsgrößen sind die Spannung  $u$  und das von der angetriebenen Last ausgeübte Lastmoment  $M_L$ .

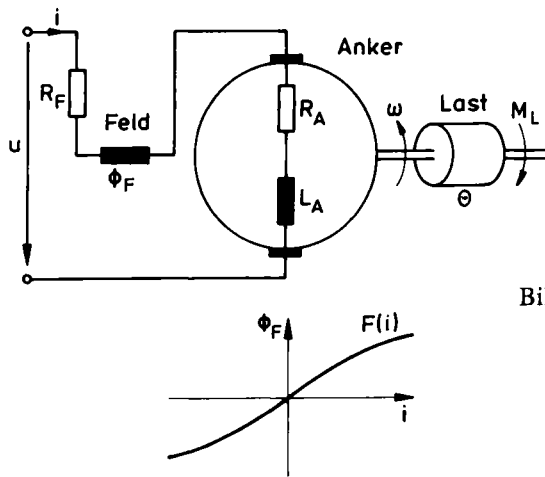


Bild 3/23 Reihenschlußmotor

Für den elektrischen Kreis liest man folgende Gleichung ab:

$$u - e_M = R_F i + \dot{\Phi}_F + R_A i + L_A \dot{i}. \quad (3.60)$$

Dabei ist  $e_M$  die im Ankerkreis induzierte Gegen-EMK, die der Spannung  $u$  entgegenwirkt. Sie ist durch die Beziehung

$$e_M = c \Phi_F \omega, \quad c > 0 \text{ konstant}, \quad (3.61)$$

gegeben, wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Motors und  $\Phi_F$  der magnetische Fluß des Feldes ist, in dem sich der Anker bewegt.  $\Phi_F$  und  $i$  hängen über die im Bild 3/23 skizzierte nichtlineare Kennlinie

$$\Phi_F = F(i) \quad (3.62)$$

zusammen. Die Differenzspannung  $u - e_M$  ist nach der Kirchhoffschen Spannungsregel gleich der Summe der Spannungsabfälle in dem elektrischen Kreis:

$R_F i$  am Ohmschen Widerstand des Feldes ,

$\dot{\Phi}_F$  an der Feldinduktivität ,

$R_A i$  am Ohmschen Widerstand des Ankers ,

$L_A \dot{i}$  an der Ankerinduktivität .

Wegen (3.62) ist

$$\dot{\Phi}_F = F'(i) \cdot \dot{i},$$

wobei  $F'(i) = dF/di$  ist. Damit folgt aus den Gleichungen (3.60) bis (3.62)

$$\dot{i} = \frac{-(R_F + R_A)i - cF(i)\omega + u}{L_A + F'(i)}. \quad (3.63)$$

Für die mechanische Bewegung des Motorankers mit Last erhält man nach dem 2. Newtonschen Axiom die Gleichung

$$\Theta \dot{\omega} = M_A - M_L,$$

wobei  $\Theta$  das Trägheitsmoment von Anker und Last ist und  $M_A$  das Antriebsmoment des Motors darstellt. Dieses ist durch

$$M_A = c\Phi_F i$$

gegeben, mit der gleichen Konstante  $c$  wie in (3.61). Damit erhält man die Gleichung

$$\dot{\omega} = \frac{c}{\Theta} iF(i) - \frac{1}{\Theta} M_L. \quad (3.64)$$

(3.63) und (3.64) sind die *Zustandsdifferentialgleichungen des Reihenschlußmotors*.

Um den *Arbeitspunkt des Motors*, also seine Ruhelage, zu ermitteln, nehmen wir  $u = u_R$  und  $M_L = M_{LR}$  als konstant an und setzen  $\dot{i} = 0$ ,  $\dot{\omega} = 0$ . Dann folgt aus (3.64)

$$iF(i) = M_{LR}/c.$$

Ist  $M_{LR} = 0$ , so folgt daraus  $i_R = 0$  oder  $F(i_R) = 0$ . Wegen der Gestalt der Kennlinie  $F$  hat jede dieser beiden Gleichungen auch die andere zur Folge. Sie gelten also beide. Damit ergibt sich aus (3.63)  $u_R = 0$ . Diese Möglichkeit ist jedoch auszuschließen, da dann das System nicht in Betrieb ist. Man hat so als erstes Resultat: *Der unbelastete Reihenschlußmotor hat keine Ruhelage.*

Nehmen wir nun  $M_{LR} \neq 0$  an. Dann folgt aus (3.64) wegen  $\dot{\omega} = 0$ :

$$F(i) = \frac{M_{LR}}{c i}. \quad (3.65)$$

Aus ihr erhält man die Lösung  $i_R$  als Schnitt zweier Kennlinien, wie dies Bild 3/24 zeigt.  $\omega_R$  folgt dann aus (3.63) für  $\dot{i} = 0$ :

$$\omega_R = \frac{u_R - (R_F + R_A)i_R}{cF(i_R)}. \quad (3.66)$$

Um nun das Stabilitätsverhalten der Ruhelage zu bestimmen, bildet man die partiellen Ableitungen der rechten Seiten  $f_1(i, \omega)$ ,  $f_2(i, \omega)$  von (3.63), (3.64) und setzt dann  $i = i_R$  und  $\omega = \omega_R$ . Dann erhält man unter Berücksichtigung der aus (3.63) folgenden Beziehung  $(R_F + R_A)i_R + c_R F(i_R)\omega_R - u_R = 0$ :

$$a_{11} = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial i} \right]_R = - \frac{R_A + R_F + cF'(i_R)\omega_R}{L_A + F'(i_R)} < 0.$$

Weiterhin ist

$$a_{12} = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \omega} \right]_R = - \frac{c F(i_R)\omega_R}{L_A + F'(i_R)} < 0,$$

$$a_{21} = \left[ \frac{\partial f_2}{\partial i} \right]_R = \frac{c}{\Theta} [F(i_R) + i_R F'(i_R)] > 0,$$

$$a_{22} = \left[ \frac{\partial f_2}{\partial \omega} \right]_R = 0.$$

Damit wird die charakteristische Gleichung des linearisierten Reihenschlußmotors

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s \end{vmatrix} = s^2 - a_{11}s - a_{12}a_{21} = 0.$$

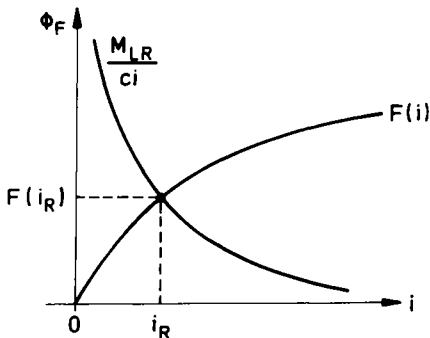


Bild 3/24  
Bestimmung des Arbeitspunktes  
eines Reihenschlußmotors

Da  $a_{11} < 0$  und ebenso  $a_{12}a_{21} < 0$  ist, sind die Koeffizienten dieser quadratischen Gleichung positiv. Dann liegen ihre Eigenwerte links der  $j$ -Achse ([73], Satz (4.92)).

Nach dem Kriterium (3.54) ist somit die *Ruhelage (Arbeitspunkt) des belasteten Reihenschlußmotors asymptotisch stabil*.

Wie man aus (3.66) erkennt, geht für  $M_{LR} \rightarrow 0$ , also  $i_R, F(i_R) \rightarrow 0$ ,  $\omega_R \rightarrow +\infty$ : Der unbelastete Reihenschlußmotor, der ja keine Ruhelage hat, „geht durch“.

### 3.5 Weitere Anwendung der Direkten Methode: Entwurf struktumschaltender Regelungen

#### 3.5.1 Zweck und mathematische Beschreibung struktumschaltender Regelungen

Von Strukturumschaltung war schon im Unterabschnitt 2.3.6 die Rede. Ihre Wirksamkeit wurde dort an Beispielen gezeigt. Der dabei eingeschlagene Weg war aber an der Anschauung orientiert und ist deshalb für Systeme höherer als 2. Ordnung kaum gangbar. Was läßt sich tun, um die Strukturumschaltung für Systeme höherer Ordnung nutzbar zu machen? Hier eröffnet die Direkte Methode einen praktikablen Zugang, wie schon frühzeitig erkannt wurde<sup>11)</sup>. Im folgenden soll ein von C. Becker angegebenes Verfahren<sup>12)</sup> beschrieben werden, das durch seine Einfachheit geeignet ist, den grundsätzlichen Weg bei der Anwendung der Direkten Methode auf strukturvariable Systeme aufzuzeigen.

Grundlage unserer Betrachtung ist ein struktumschaltendes System nach Bild 3/25. Die Zustandsdifferentialgleichung der Strecke lautet

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}_L \underline{x} + \underline{b}_L u_L \quad (3.67)$$

<sup>11)</sup> R. E. Kalman – J. E. Bertram: Control System Analysis and Design Via the "Second Method" of Ljapunov. I: Continuous-Time Systems. Trans. ASME, Journal of Basic Engineering 1960, Seite 371–393.

S. Weissenberger: Stability – Boundary Approximations for Relay-Control Systems Via a Steepest-Ascent Construction of Ljapunov Functions. Trans. ASME, Journal of Basic Engineering 1966, Seite 419–428.

<sup>12)</sup> C. Becker: Synthese strukturvariabler Regelungssysteme mit Hilfe von Ljapunow-Funktionen. Hochschulverlag, Stuttgart, 1979.



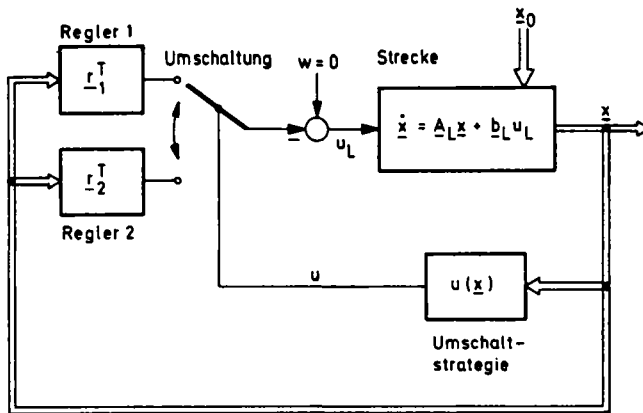


Bild 3/25 Blockscha eines struktumschaltenden Systems

Die Strecke ist also ein lineares und zeitinvariantes System. Als äußere Einflüsse wirken auf sie die Stellgröße  $u_L(t)$  und die Anfangswerte der Zustandsvariablen, zusammengefaßt zum Vektor  $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$ . Der Regler sei durch

$$u_L = -\underline{r}^T \underline{x} = -(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) \quad (3.68)$$

gegeben. Für die Strukturumschaltung ist nun kennzeichnend, daß man zwischen zwei (oder mehr) Reglern umschalten kann, wie dies im Bild 3/25 angedeutet ist. Diese Regler sind in der üblichen Weise entworfen, ob mit Frequenzbereichsmethoden oder im Zustandsraum, ist ohne Belang. Im folgenden wird angenommen, daß sie bereits vorliegen, also die Reglervektoren  $\underline{r}_1^T$  und  $\underline{r}_2^T$  gegeben sind. Die Frage ist, wie zwischen ihnen umgeschaltet werden soll, wie also die Umschaltstrategie

$$u = u(\underline{x}) \quad (3.69)$$

zu wählen ist.

Aber worin liegt überhaupt der Vorteil der Strukturumschaltung gegenüber einem linearen Regler? Er besteht in erster Linie in der Möglichkeit, eine bessere Dynamik zu erzielen, als sie ein linearer Regler erreichen kann, und zwar mit geringerem Aufwand. So ist es bei Anfahrvorgängen oft wünschenswert, der Regelgröße einen in der Anfangsphase schnellen, in der Endphase jedoch gut gedämpften Verlauf zu sichern. Mit einem linearen Regler ist dies schwerlich zu erreichen: Ist er schnell eingestellt, wird er zwar den gewünschten Anfangsverlauf erzeugen, in der Endphase aber Oszillationen hervorrufen. Ist er so ge-

dämpft eingestellt, daß diese vermieden werden, wird die Regelung in der Anfangsphase zu langsam sein. Die Annahme liegt nahe, daß eine Kombination zweier derartiger Regler, zwischen denen in der richtigen Weise umgeschaltet wird, den gewünschten Anfahrvorgang liefern könnte. Im Unterabschnitt 3.5.3 wird dies an einem Beispiel bestätigt.

Zwar wird man mit einem strukturoptimalen (z.B. zeitoptimalen) Regler ein noch günstigeres Verhalten erzielen können als mit einer Strukturumschaltung. Indessen ist bei ersterem der Berechnungs- und Realisierungsaufwand ganz erheblich größer. Hinzu kommt die Tatsache, daß strukturoptimale Regler häufig sehr empfindlich auf Abweichungen der realen Strecke von dem der Berechnung zugrunde gelegten Verhalten reagieren und dann allenfalls noch „suboptimal“ funktionieren. Da kann man auch von vornherein zu einem weniger aufwendigen „suboptimalen“ Regler übergehen, wie ihn der strukturumschaltende Regler darstellt.

Um nun an die Wahl einer günstigen Umschaltstrategie  $u(x)$  herangehen zu können, muß zuvor eine zweckmäßige mathematische Beschreibung des strukturumschaltenden Systems von Bild 3/25 entwickelt werden. Die Umschaltung bewirkt, daß der Reglervektor  $\underline{r}^T$  im Schaltzustand 1 den Wert  $\underline{r}_1^T$ , im Schaltzustand 2 den Wert  $\underline{r}_2^T$  annimmt. Diesen Zusammenhang kann man durch eine einfache Gleichung ausdrücken, wenn man die *Schaltvariable*  $u$  einführt, die nur die beiden Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen kann:

$$u = \begin{cases} +1 & (\text{Regler 1 ist eingeschaltet}) , \\ -1 & (\text{Regler 2 ist eingeschaltet}) . \end{cases} \quad (3.70)$$

Dann werden beide Regler gemeinsam durch die Gleichung

$$\underline{r}^T = \frac{1}{2} (\underline{r}_1^T + \underline{r}_2^T) + u \cdot \frac{1}{2} (\underline{r}_1^T - \underline{r}_2^T) \quad (3.71)$$

beschrieben. Wie man sich nämlich sofort durch Einsetzen von  $u = 1$  und  $u = -1$  überzeugen kann, gilt

$$\underline{r}^T = \begin{cases} \underline{r}_1^T & \text{für } u = 1 , \\ \underline{r}_2^T & \text{für } u = -1 . \end{cases}$$

Die Beziehung (3.71) beschreibt also beide Regler samt Umschaltung.

Faßt man nunmehr die Gleichungen (3.67), (3.68) und (3.71) zusammen, so hat man eine Beschreibung des struktumschaltenden Systems. Zunächst folgt aus (3.67) und (3.68)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}_L \underline{x} - \underline{b}_L \underline{r}^T \underline{x}.$$

Durch Einsetzen von (3.71) wird daraus

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}_L - \frac{1}{2} \underline{b}_L (\underline{r}_1^T + \underline{r}_2^T)] \underline{x} - u \cdot \frac{1}{2} \underline{b}_L (\underline{r}_1^T - \underline{r}_2^T) \underline{x}.$$

Dafür kann man kürzer schreiben

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + u \underline{N} \underline{x} = (\underline{A} + u \underline{N}) \underline{x} \quad (3.72)$$

mit

$$\underline{A} = \underline{A}_L - \frac{1}{2} \underline{b}_L (\underline{r}_1^T + \underline{r}_2^T), \quad (3.73)$$

$$\underline{N} = -\frac{1}{2} \underline{b}_L (\underline{r}_1^T - \underline{r}_2^T). \quad (3.74)$$

Dies ist die Gleichung des geschlossenen Regelkreises, sofern man die Schaltvariable  $u$  als Eingangsgröße ansieht, also als Zeitfunktion von außen vorgibt. Sie hat die Gestalt einer Rechteckfunktion, die lediglich die Werte 1 und -1 annimmt. Ist speziell  $u = 1$ , so ist die Systemmatrix der geschlossenen Regelung

$$\underline{A} + \underline{N} = \underline{A}_L - \underline{b}_L \underline{r}_1^T = \underline{A}_1, \quad (3.75)$$

entsprechend der Tatsache, daß dann die Rückführung über den Regler  $\underline{r}_1^T$  geschlossen wird. Für  $u = -1$  hingegen wird die Rückführung über den Regler  $\underline{r}_2^T$  geschlossen, und demgemäß ist die Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\underline{A} - \underline{N} = \underline{A}_L - \underline{b}_L \underline{r}_2^T = \underline{A}_2. \quad (3.76)$$

Die Gleichung (3.72) umfaßt beide Schaltzustände. Sie ist sowohl linear bezüglich  $\underline{x}$  als auch linear bezüglich  $u$ , jedoch nichtlinear, wenn man *beide* Variablen betrachtet, denn es treten ja die Produkte  $u(t)x_1(t)$ , ...,  $u(t)x_n(t)$  der zeitveränderlichen Größen  $u(t)$  und  $x_i(t)$  auf. Ein nichtlineares System dieser Art bezeich-

net man als *bilinear*. Allgemein ist es durch eine Differentialgleichung von der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \sum_{k=1}^p u_k \underline{N}_k \underline{x} \quad (3.77)$$

gegeben. Darin sind  $u_1, \dots, u_p$  die Komponenten des Eingangsvektors  $\underline{u}$ . Sie dürfen beliebige Zeitfunktionen sein. In unserem Fall hat der Eingangsvektor nur eine Komponente, die überdies die spezielle Gestalt einer Schaltvariablen hat. Außerdem fehlt der Term  $\underline{B}\underline{u}$ . Diese von *C. Becker* angegebene *Darstellung eines strukturumschaltenden Systems als bilineares System*<sup>13)</sup> ermöglicht eine effizientere Behandlung als die Beschreibung durch stückweise lineare Differentialgleichungen.

Die *bilinearen Systeme* bilden eine spezielle Klasse nichtlinearer Systeme, die den linearen Systemen noch nahe steht, da bezüglich jeder einzelnen Variablen Linearität herrscht. Die Nichtlinearitäten bilinearer Systeme haben also multiplikative Struktur. Bei der mathematischen Modellbildung treten derartige Systeme besonders in der Ökologie und Biomedizin, aber auch in ökonomischen Systemen auf. Wegen ihrer Verwandtschaft mit den linearen Systemen darf man hoffen, weitergehende Aussagen über ihre Eigenschaften, wie z.B. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, machen zu können, als dies bei allgemeinen nichtlinearen Systemen möglich ist. Das ist in der Tat der Fall. Auch kann es von Vorteil sein, schwierigere nichtlineare Systeme durch bilineare zu approximieren, weil die Annäherung besser ist als bei Verwendung linearer Systeme, die Bearbeitung aber einfacher als bei einem komplizierteren nichtlinearen System.

Im Rahmen dieser Einführung werden wir auf bilineare Systeme nicht näher eingehen, es seien aber einige Literaturangaben gemacht:

- *E. P. Hofer*: Zur Theorie und Anwendung optimaler bilinearer Systeme. Dissertation Stuttgart, 1970.
- *R. R. Mohler*: Bilinear Control Processes. Academic Press, 1973.
- *C. Bruni – G. Di Pillo – G. Koch*: Bilinear Systems: An Appealing Class of „Nearly Linear“ Systems in Theory and Applications. IEEE Transactions on Automatic Control 19 (1974), S. 334–348.
- *R. R. Mohler – W. J. Kolodziej*: An Overview of Bilinear Systems. Theory and Applications. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 10 (1980), S. 683–688.

<sup>13)</sup> *C. Becker*: Beschreibung strukturvariabler Systeme als eine spezielle Klasse bilinearer Systeme. Regelungstechnik 25 (1977), S. 364–366.

- *H. Schwarz*: Homogene bilineare Systeme. Automatisierungstechnik 35 (1987), S. 262–269 (Übersichtsaufsatz).
- *R. R. Mohler*: Nonlinear Systems II. Prentice Hall, 1991.
- *H. Schwarz*: Nichtlineare Regelungssysteme. R. Oldenbourg Verlag, 1991. Vor allem: Kapitel 3 bis 6.

Kehren wir nun zur Beschreibung der strukturumschaltenden Regelung im Bild 3/25 zurück! Wie man aus (3.72) unmittelbar ersieht, ist  $\underline{x} = \underline{0}$  eine Ruhelage der strukturumschaltenden Regelung. Ist es die einzige? Die Systemmatrix  $\underline{A} + u\underline{N}$  in (3.72) nimmt gemäß (3.75) und (3.76) die beiden Werte  $\underline{A}_1$  und  $\underline{A}_2$  an, ersteren in dem Bereich des Zustandsraumes, der zu  $u = 1$  gehört, letzteren in dem Bereich mit  $u = -1$ . Man wird annehmen dürfen, daß mindestens eine dieser beiden Matrizen stabil ist, also ihre Eigenwerte links der  $j$ -Achse liegen. Ist das etwa für  $\underline{A}_1$  der Fall, so ist  $\underline{A}_1$  regulär, da eine Matrix nur dann singulär sein kann, wenn mindestens einer ihrer Eigenwerte Null ist. Somit existiert  $\underline{A}_1^{-1}$ . Ist nun  $\underline{x}_B$  irgendeine Ruhelage des Systems in dem zu  $\underline{A}_1$  gehörenden Bereich des Zustandsraumes, so gilt definitionsgemäß  $\dot{\underline{x}}_B = \underline{0}$ , also  $\underline{A}_1 \underline{x}_B = \underline{0}$ . Daraus folgt durch Multiplikation mit  $\underline{A}_1^{-1}$  von links:  $\underline{x}_B = \underline{0}$ . Ganz entsprechend sieht man, daß in dem zu  $\underline{A}_2$  gehörenden Bereich des Zustandsraumes als Ruhelage ebenfalls nur  $\underline{x} = \underline{0}$  in Frage kommt, sofern man annimmt, daß  $\underline{A}_2$  keinen Eigenwert in Null hat.

Bis jetzt haben wir uns darauf konzentriert, eine zweckmäßige Beschreibung des schaltenden Regelkreises zu finden. Dabei haben wir uns um die Umschaltstrategie nicht gekümmert, vielmehr  $u$  als Eingangsgröße angesehen. Nunmehr wenden wir uns der entscheidenden Frage zu, wie die Umschaltstrategie  $u = u(\underline{x})$  zweckmäßig zu wählen ist.

### 3.5.2 Entwurf der Umschaltstrategie mittels einer Ljapunow-Funktion

Da  $u$  nur die Werte 1 und -1 annehmen kann, muß die Umschaltstrategie von der Form

$$u = -\operatorname{sgn} s(\underline{x}) \quad (3.78 \text{ a})$$

sein. Dann ist

$$u = \begin{cases} -1 & \text{für } s(\underline{x}) > 0, \\ 1 & \text{für } s(\underline{x}) < 0. \end{cases} \quad (3.78 \text{ b})$$

Das Problem besteht also darin, die *Schaltfunktion*  $s(\underline{x})$  zweckmäßig zu wählen.

Halten wir zuvor den Aufbau der strukturumschaltenden Regelung fest, wie er sich durch unsere Untersuchungen ergeben hat. Er ist durch die Gleichungen (3.78) für die Schaltvariable  $u$ , (3.71) für den Reglervektor  $\underline{r}$  und (3.68) für die Stellgröße  $u_L$  bestimmt, wozu noch die Zustandsdifferentialgleichung der Strecke kommt. In Bild 3/26 ist diese Struktur dargestellt. Dabei ist das negative Vorzeichen der Signum-Funktion an die nächstfolgende Summierstelle verlegt worden.

Um zu einer Wahl der Schaltfunktion  $s(\underline{x})$  zu gelangen, ordnen wir nun der Zustandsdifferentialgleichung (3.72) der schaltenden Regelung (mit  $u$  als Eingangsgröße) eine Ljapunow-Funktion zu:

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}, \quad (3.79)$$

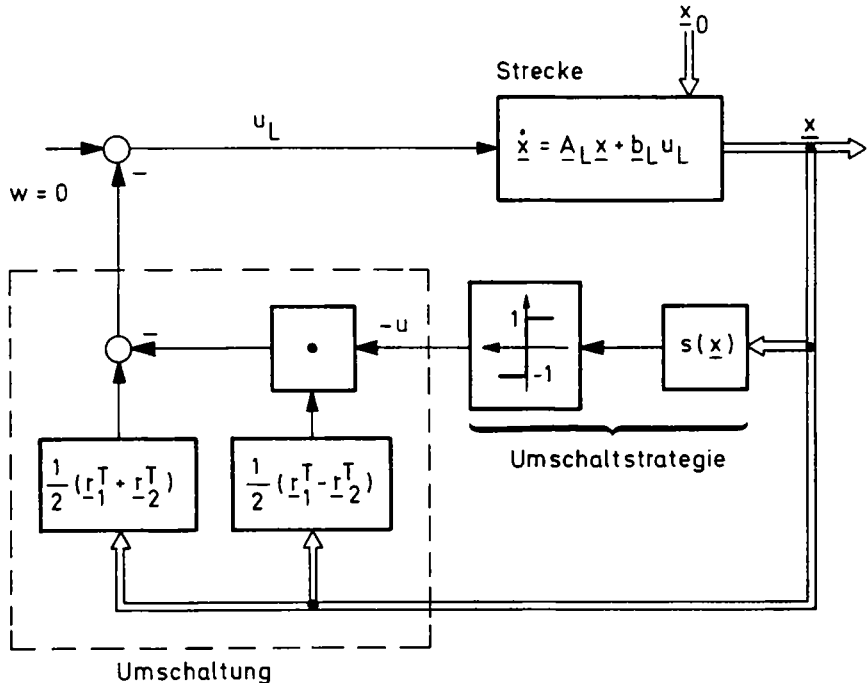


Bild 3/26 Strukturbild der strukturumschaltenden Regelung von Bild 3/25

wobei  $\underline{P}$  eine konstante, symmetrische und positiv definite Matrix darstellt, die vorläufig frei ist und im Lauf der Untersuchungen bestimmt werden soll. Dann ist

$$\dot{V} = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}},$$

also wegen (3.72)

$$\dot{V} = \underline{x}^T (\underline{A}^T + u \underline{N}^T) \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} (\underline{A} + u \underline{N}) \underline{x},$$

$$\dot{V} = \underline{x}^T [\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} + u (\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N})] \underline{x},$$

$$\dot{V} = \underline{x}^T (\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}) \underline{x} + u \cdot \underline{x}^T (\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N}) \underline{x}. \quad (3.80)$$

Die Variable  $u$  soll nun so umgeschaltet werden, daß  $V(\underline{x})$  möglichst rasch abnimmt. Zur Motivierung dieser Forderung gehen wir davon aus, daß die Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$  der gewünschte Betriebszustand der Regelung ist. Wird sie infolge einer äußeren Einwirkung verlassen, so soll der Zustandspunkt möglichst rasch in sie zurückkehren. Gedanklich am nächstliegenden wäre zweifellos der Entwurf der Regelung als zeitoptimales System. Er ist jedoch für höhere Ordnung des Systems sehr aufwendig, sowohl hinsichtlich der Berechnung als auch der Realisierung. Da liegt von der Direkten Methode her der Gedanke nicht fern, den Zustandspunkt  $\underline{x}(t)$  der Regelung dadurch schnell nach  $\underline{0}$  zu bringen, daß man ihm eine Ljapunow-Funktion  $V(\underline{x})$  zuordnet, die kräftig abnimmt und dadurch mittelbar einen Zwang auf den Zustandspunkt  $\underline{x}(t)$  ausübt, sich eilends zur Ruhelage  $\underline{0}$  zu bewegen.

Die Ljapunow-Funktion  $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$  wird hierbei als ein Maß für den Abstand des Zustandspunktes  $\underline{x}$  von der Ruhelage  $\underline{0}$  aufgefaßt. Das ist in der Tat ganz natürlich: Der übliche Abstand

$$d(\underline{x}) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}}$$

stellt einen Spezialfall des Ausdrucks

$$\delta(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$$

dar, den man deshalb zwanglos als verallgemeinerten Abstand interpretieren kann.

Die Schaltvariable  $u$  muß also so gewählt werden, daß die Funktion  $\dot{V}(\underline{x}, u)$  aus (3.80) in jedem Punkt  $\underline{x}$  möglichst klein wird. Ist nun in einem Punkt  $\underline{x}$

$$\underline{x}^T(\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N})\underline{x} > 0,$$

so wird  $\dot{V}$  minimal, wenn  $u$  von seinen beiden möglichen Werten den Wert  $-1$  annimmt. Ist hingegen

$$\underline{x}^T(\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N})\underline{x} < 0,$$

so ist  $u = +1$  zu wählen, um  $\dot{V}$  möglichst klein zu machen. Man erhält somit die Umschaltstrategie

$$u = \begin{cases} -1 & \text{für } \underline{x}^T(\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N})\underline{x} > 0, \\ 1 & \text{für } \underline{x}^T(\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N})\underline{x} < 0. \end{cases}$$

Der Vergleich mit (3.78 b) zeigt, daß

$$s(\underline{x}) = \underline{x}^T(\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N})\underline{x} \quad (3.81)$$

die Schaltfunktion darstellt.

So plausibel die bisherige Vorgehensweise sein mag, es ist noch nicht gesichert, daß sie tatsächlich zum Ziel führt, daß also der Zustandspunkt  $\underline{x}(t)$  der Regelung wirklich nach  $\underline{0}$  strebt. Aber noch ist ja auch die Matrix  $\underline{P}$  nicht gewählt. Dazu betrachten wir die Gleichung (3.80). In ihr nimmt  $u$  nur die Werte  $1$  und  $-1$  an, und zwar so, daß in einem Punkt  $\underline{x}$  der *kleinere* der beiden möglichen  $\dot{V}$ -Werte gebildet wird. Setzt man statt des optimalen  $u$ -Wertes auf der rechten Seite von (3.80) stets den Wert  $u = +1$  ein, so wird der Ausdruck auf der rechten Seite von (3.80) vergrößert. Daher ist

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \underline{x}^T(\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A})\underline{x} + \underline{x}^T(\underline{N}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{N})\underline{x}, \\ \dot{V} &\leq \underline{x}^T[(\underline{A} + \underline{N})^T \underline{P} + \underline{P}(\underline{A} + \underline{N})]\underline{x}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Jetzt wählt man  $\underline{P}$  so, daß

$$(\underline{A} + \underline{N})^T \underline{P} + \underline{P}(\underline{A} + \underline{N}) = -\underline{Q} \quad (3.83)$$



gilt, wobei  $\underline{Q}$  eine konstante, symmetrische, positiv definite Matrix darstellt, die man im übrigen beliebig wählen kann.

Man sieht, daß sich auch hier wieder eine *Matrizengleichung vom Ljapunow-Typ* ergibt. Nach Satz (3.16) hat sie eine eindeutige Lösung  $\underline{P}$ , wenn die Eigenwerte von  $\underline{A} + \underline{N}$  sämtlich links der  $j$ -Achse liegen. Unter der eben gemachten Voraussetzung über  $\underline{Q}$  ist  $\underline{P}$  überdies positiv definit. Da wegen (3.82) und (3.83)

$$\dot{V} \leq -\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}$$

gilt, ist weiterhin  $\dot{V}$  negativ definit, und zwar im gesamten Zustandsraum. Ist nämlich eine quadratische Form wie  $-\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x}$  überhaupt negativ (oder auch positiv) definit, so ist sie dies im gesamten Zustandsraum. Schließlich strebt  $V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$  als positiv definite quadratische Form  $\rightarrow +\infty$ , wenn  $|\underline{x}| \rightarrow +\infty$  strebt. Nach dem Kriterium der asymptotischen Stabilität im ganzen ist also die Ruhelage der struktumschaltenden Regelung global asymptotisch stabil – sofern nur die Eigenwerte der Matrix  $\underline{A} + \underline{N}$  links der  $j$ -Achse liegen.

Wendet man dann die Schaltfunktion (3.81) mit  $\underline{P}$  aus (3.83) an, so strebt der Zustandspunkt  $\underline{x}(t)$  mit wachsendem  $t$  auf jeden Fall der Ruhelage  $\underline{0}$  zu. Im Hinblick auf die Wahl der Schaltfunktion darf man annehmen, daß dieser Übergang genügend schnell stattfindet. Dabei ist zu beachten, daß es im Realfall nicht darauf ankommt, die Ruhelage  $\underline{0}$  exakt zu erreichen, was wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeiten auch gar nicht möglich ist, daß es vielmehr genügt, in eine hinreichend enge Umgebung von  $\underline{0}$  zu gelangen.

Die Schaltfunktion  $s(\underline{x})$  läßt sich noch etwas vereinfachen. Die beiden Summanden  $\underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x}$  und  $\underline{x}^T \underline{P} \underline{N} \underline{x}$  in (3.81) sind Skalare. Durch Transposition wird ein Skalar nicht verändert. Daher ist

$$\underline{x}^T \underline{P} \underline{N} \underline{x} = (\underline{x}^T \underline{P} \underline{N} \underline{x})^T = \underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P}^T \underline{x},$$

also wegen  $\underline{P}^T = \underline{P}$ :

$$\underline{x}^T \underline{P} \underline{N} \underline{x} = \underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x}.$$

Damit wird aus (3.81)

$$s(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \underline{N} \underline{x} = 2 \underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x}.$$

Da der positive Faktor 2 auf die Signum-Funktion keinen Einfluß hat, kann man ihn weglassen und erhält so als vereinfachte Schaltfunktion

$$s(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x} . \quad (3.84)$$

Auf eine Änderung des Funktionssymbols  $s$  ist dabei verzichtet worden.

Bei dem beschriebenen Entwurf der Umschaltstrategie wird nur vorausgesetzt, daß die Eigenwerte der Matrix  $\underline{A} + \underline{N}$  links der  $j$ -Achse liegen. Nach (3.75) ist

$$\underline{A} + \underline{N} = \underline{A}_L - \underline{b}_L \underline{r}_1^T = \underline{A}_1 ,$$

also gleich der Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises im Schaltzustand 1. Das Regelungsgesetz  $\underline{r}_1$  muß also so gewählt werden, daß die Eigenwerte des geschlossenen Kreises links der  $j$ -Achse gelegen sind. Im übrigen spielt es keine Rolle, wie der Regler bestimmt wurde, ob durch Rechnung im Frequenzbereich oder im Zustandsraum oder durch empirische Einstellung.

Sehr bemerkenswert ist die Tatsache, daß an das Stabilitätsverhalten des über den Regler  $\underline{r}_2$  geschlossenen Regelkreises keine Anforderungen gestellt werden. Der über  $\underline{r}_2$  geschlossene Kreis darf also instabil sein, ohne daß dadurch die globale asymptotische Stabilität des Gesamtsystems gefährdet wird. Diese Möglichkeit kann von Interesse sein, um schnelle Einschwingvorgänge zu erzeugen.

Frei wählbar ist in dem Entwurf die Matrix  $\underline{Q}$ , abgesehen davon, daß sie symmetrisch und positiv definit sein muß. Wenn keine besonderen Gründe vorliegen, wird man  $\underline{Q}$  als Diagonalmatrix wählen. Sie beeinflusst  $\underline{P}$  gemäß (3.83) und damit die Schaltfunktion  $s(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x}$ . Man kann z.B. versuchen,  $\underline{Q}$  so zu bestimmen, daß die nicht meßbaren Zustandsvariablen nur unwesentliche Beiträge zu  $s(\underline{x})$  liefern. Dann kann man darauf verzichten, sie zurückzuführen, und ein sonst zur Realisierung der Umschaltstrategie notwendiger Zustandsbeobachter entfällt damit.

Halten wir abschließend fest: Der Entwurf der Umschaltstrategie mit Hilfe einer Ljapunow-Funktion zeichnet sich gegenüber den Optimierungsmethoden dadurch aus, daß er relativ einfach zu handhaben und auch für höhere Streckenordnung weitgehend analytisch durchführbar ist. Gegenüber elementaren Umschaltstrategien hat er den wesentlichen Vorzug, die globale asymptotische Stabilität des Gesamtsystems zu garantieren.

### 3.5.3 Beispiel und Literaturanmerkungen

Stellen wir zunächst noch einmal die Schritte zusammen, welche zum Entwurf einer struktumschaltenden Regelung mit der beschriebenen Methode erforderlich sind! Gegeben ist die Zustandsdifferentialgleichung der Strecke

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}_L \underline{x} + \underline{b}_L u_L.$$

Außerdem hat man zwei lineare und zeitinvariante Regler  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2$  gewählt, von denen mindestens einer, den man dann mit  $\underline{r}_1$  bezeichnet, das System stabilisiert und darüber hinaus einen genügend gedämpften Einschwingvorgang bei den zu erwartenden äußeren Einwirkungen liefert. Der andere Regler kann hingegen so ausgelegt sein, daß er ein relativ wenig gedämpftes, vielleicht sogar instabiles, dafür aber schnelles Verhalten erzeugt (wobei aber kein Eigenwert des über ihn geschlossenen Regelkreises Null sein darf).

Unter diesen Voraussetzungen ist die Umschaltstrategie durch die folgenden Schritte zu bestimmen:

- (I) Man berechnet die Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{N}$  des struktumschaltenden (und damit bilinearen) Systems  $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + u\underline{N}\underline{x}$  gemäß (3.73) und (3.74):

$$\underline{A} = \underline{A}_L - \frac{1}{2}\underline{b}_L(\underline{r}_1^T + \underline{r}_2^T), \quad (3.85)$$

$$\underline{N} = \frac{1}{2}\underline{b}_L(\underline{r}_2^T - \underline{r}_1^T). \quad (3.86)$$

- (II) Man gibt die symmetrische und positiv definite Matrix  $\underline{Q}$  vor. Man wird dabei mit  $\underline{Q} = \underline{I}$  beginnen und dann gegebenenfalls auf Grund von Simulationen des struktumschaltenden Systems günstigere Werte der Diagonalelemente ermitteln. Unter welchen Gesichtspunkten das geschieht, hängt von der konkreten Problemstellung ab.

- (III) Man bestimmt die Matrix  $\underline{P}$  aus der Ljapunow-Gleichung (3.83):

$$(\underline{A} + \underline{N})^T \underline{P} + \underline{P}(\underline{A} + \underline{N}) = -\underline{Q}. \quad (3.87)$$

- (IV) Dann lautet die Umschaltstrategie gemäß (3.78 a) und (3.84):

$$u = -\operatorname{sgn}(\underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x}). \quad (3.88)$$

Als Beispiel betrachten wir die Verladebrücke im Bild 3/27. Die Laufkatze fährt aus irgendeiner Anfangsposition in eine gegebene Endposition, in welcher der Greifer eine Last aufnehmen bzw. absetzen soll. Angeregt durch die Bewegung der Katze führt der Greifer Schwingungen aus, die praktisch ungedämpft sind. Eine Regelung soll dafür sorgen, daß der Greifer trotzdem in möglichst kurzer Zeit an dem vorgegebenen Ort zur Ruhe kommt. Die Strecke wird durch vier Zustandsvariablen beschrieben:

- Katzposition  $s_K = x_1$ ,
- Katzgeschwindigkeit  $\dot{s}_K = x_2$ ,
- Greiferwinkel  $\vartheta = x_3$ ,
- Greiferwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\vartheta} = x_4$ .

Die Zustandsdifferentialgleichung der Strecke lautet unter der Voraussetzung, daß die Regelung den Greiferwinkel klein hält und die Strecke deshalb mit guter Näherung als linear angesehen werden kann:<sup>14)</sup>

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}_L \underline{x} + \underline{b}_L u_L$$

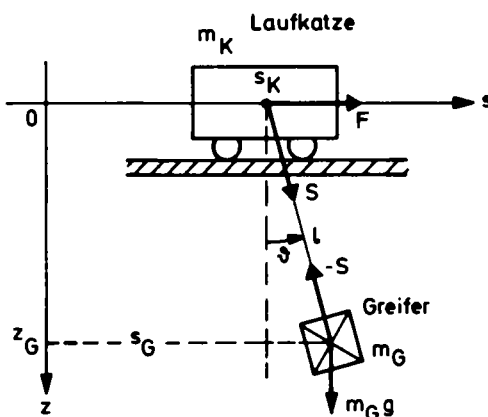


Bild 3/27 Verladebrücke

<sup>14)</sup> Für die Herleitung des mathematischen Modells siehe [73], Abschnitt 11.3.

mit

$$\underline{A}_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_G}{m_K} g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{m_G + m_K}{m_K} \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_K} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_K l} \end{bmatrix}.$$

Dabei ist

$m_K = 1000 \text{ kg}$  die Katze Masse,

$m_G = 4000 \text{ kg}$  die Masse des Greifers einschließlich der Last,

$l = 10 \text{ m}$  die Greiferlänge,

$g \approx 10 \text{ m/sec}^{-2}$  die Erdbeschleunigung.

Damit wird

$$\underline{A}_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 0 \\ -10^{-4} \end{bmatrix}.$$

Zu Beginn des Fahrvorgangs befinde sich die Katze in einer Anfangsposition  $x_1(0) = s_K(0)$ , während die übrigen Zustandsvariablen Null seien:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} s_K(0) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Im folgenden sei speziell  $s_K(0) = 25 \text{ m}$ . Die angestrebte Endposition der Katze darf man zu  $s_K = 0$  annehmen. Dann soll die Verladebrücke in Ruhe sein. Also ist der gewünschte Endzustand

$$\underline{x}_e = \underline{0}.$$

Da die Greiferposition  $s_G$  nach Bild 3/27 durch

$$s_G = s_K + l \sin \vartheta \approx s_K + l \vartheta = x_1 + l x_3$$

gegeben ist, wird dann auch  $s_G = 0$ , so daß sich der Greifer an der gewünschten Stelle befindet. Im konkreten Fall kann man den Punkt  $Q$  natürlich nicht exakt erreichen. Man wird vielmehr für jede Zustandsvariable  $x_k$  eine Schranke  $x_{km}$  vorgeben, nach deren Unterschreitung der Endzustand als erreicht anzusehen ist. Für die Katzposition  $x_1 = s_K$  ist beispielsweise  $x_{1m} = 12,5$  cm. Man hat so als Zielmenge  $Z$ :

$$|x_k| \leq x_{km}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Zu der Strecke wurden nun mittels des Verfahrens der Polvorgabe zwei Regler entworfen, von denen jeder eine vorgegebene Lage der Eigenwerte des geschlossenen Kreises in der komplexen Ebene sichert. Die Eigenwertkonfigurationen wurden so gewählt, daß die Regler die nicht meßbaren Zustandsvariablen  $x_3$  (Greiferwinkel) und  $x_4$  (Greiferwinkelgeschwindigkeit) nicht benötigen. Diese müssen also nicht zurückgeführt werden. Überdies wurde beim Reglerentwurf darauf geachtet, daß keine zu hohen Stellbeträge auftreten.<sup>15)</sup> Die beiden Regler sind

$$\mathbf{r}_1^T = [r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}] = [415, 2110, 0, 0],$$

$$\mathbf{r}_2^T = [r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}] = [540, 3180, 0, 0].$$

Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises lauten beim ersten Regler

$$\lambda_{1,2} = -0,843 \pm j1,970,$$

$$\lambda_{3,4} = -0,212 \pm j0,212,$$

beim zweiten Regler

$$\lambda_1 = -0,500, \quad \lambda_2 = -0,312,$$

$$\lambda_{3,4} = -1,18 \pm j1,44,$$

so daß also die zweite Regelung stärker gedämpft ist als die erste. Die großen Werte der Reglerelemente  $r_{ik}$  rühren daher, daß die Vortriebskraft mit  $N$  (Newton) und nicht mit  $kN$  normiert ist.

<sup>15)</sup> Für einen derartigen Entwurf siehe *L. Litz – H.–P. Preuß*: Bestimmung einer Ausgangsvektorrückführung mittels Frequenzbereichsmethoden. Regelungstechnik 25 (1977), Seite 119–126.

Jetzt kommen wir zum Entwurf der Umschaltstrategie. Nach (3.85) und (3.86) ist

$$\begin{aligned} \underline{A} + \underline{N} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{r_{11}}{m_K} & -\frac{r_{12}}{m_K} & \frac{m_G}{m_K}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{r_{11}}{m_K l} & \frac{r_{12}}{m_K l} & -\frac{m_G + m_K}{m_K} \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,4150 & -2,110 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,0415 & 0,211 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{N} &= \frac{1}{2} \underline{b}_L (\underline{r}_2^T - \underline{r}_1^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0625 & 0,535 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,00625 & -0,0535 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Im zweiten Entwurfsschritt ist die symmetrische und positiv definite Matrix  $\underline{Q}$  zu bestimmen. In diesem Entwurfsschritt ist man also weitgehend frei. Hat man sich für eine bestimmte Matrix  $\underline{Q}$  entschieden, so sind die weiteren Entwurfsschritte völlig determiniert. Aber die Freiheit bei der Wahl der Matrix  $\underline{Q}$  läßt sich nur schwer ausnutzen, weil man keinen Anhaltspunkt hat, wie die Vielzahl der Elemente  $q_{ik}$  von  $\underline{Q}$  gewählt werden könnte. Man wird sich daher von vornherein auf eine Diagonalmatrix beschränken, zunächst  $\underline{Q} = \underline{I}_4$ , also gleich der vierreihigen quadratischen Einheitsmatrix, wählen und dann die einzelnen Diagonalelemente variieren. Nach jeder Wahl von  $\underline{Q}$  rechnet man die zugehörige Matrix  $\underline{P}$  aus, bestimmt die Schaltfunktion und simuliert das struktumschaltende System (Bild 3/26) auf dem Rechner. Als Kriterium für die Qualität des Entwurfs kann man die Zeit  $t_e$  nehmen, welche die Zustandsvariable  $x_1 = s_K$  benötigt, um vom Anfangswert  $x_1(0) = 25$  m in die vorgeschriebene Umgebung  $|x_1| \leq 12,5$  cm von  $x_1 = 0$  zu gelangen. Die Simulation ergibt, daß die Veränderung von  $q_{11}$  einen günstigeren Effekt hat als die Variation der anderen  $q_{ii}$ , obgleich auch er nicht gerade überwältigend ist: Die Einschwingdauer des Systems sinkt von  $t_e = 17,3$  sec für  $\underline{Q} = \underline{I}$  auf  $t_e = 16$  sec für  $\underline{Q} = \text{diag}(10, 1, 1, 1)$ . Bei weiterer Vergrößerung von  $q_{11}$  verringert sich  $t_e$  kaum mehr. Es zeigt sich aber, daß die Schaltfunktion  $s(\underline{x})$  um so steiler durch Null geht, je größer  $q_{11}$  ist. Da die Nullstellen von  $s(\underline{x})$  mit den Umschaltpunkten der Schaltvariable  $u$  zusammenfallen, besteht bei flachem Verlauf von  $s(\underline{x})$  die Tendenz zu häufigem Um-

schalten. Da dies also bei hohem Betrag von  $q_{11}$  vermieden wird, wurde endgültig

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gewählt.

Im dritten Entwurfsschritt ist nun mittels des benutzten regelungstechnischen Programmsystems die Matrix  $\underline{P}$  aus der Ljapunow-Gleichung (3.87) zu bestimmen.

Für die Schaltfunktion erhält man so:

$$\begin{aligned} s(\underline{x}) &= \underline{x}^T \underline{N}^T \underline{P} \underline{x} = \\ &= 7,5301 \cdot 10^4 x_1^2 + 8,2302 \cdot 10^5 x_1 x_2 + 1,5274 \cdot 10^6 x_2^2 - \\ &\quad - 0,15625 \cdot 10^{-2} x_1 x_3 - 1,3375 \cdot 10^{-2} x_2 x_3 + \\ &\quad + 1,42751 \cdot 10^6 x_1 x_4 + 1,22195 \cdot 10^7 x_2 x_4. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Damit ist die Umschaltstrategie vollständig entworfen.

Bild 3/28 zeigt das dynamische Verhalten des struktumschaltenden Systems im Vergleich zu demjenigen der linearen Einzelregelungen (mit den Systemmatrizen  $\underline{A}_1$  und  $\underline{A}_2$ ). Dabei ist der Einschwingvorgang der Katzposition  $x_1(t) = s_K(t)$  beim Übergang vom Anfangszustand

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{nach} \quad \underline{x}_e = \underline{0}$$

aufgezeichnet. Man erkennt, daß die Einschwingzeit des struktumschaltenden Systems um gut 30% kleiner ist als die Einschwingzeit des schnelleren linearen Systems.

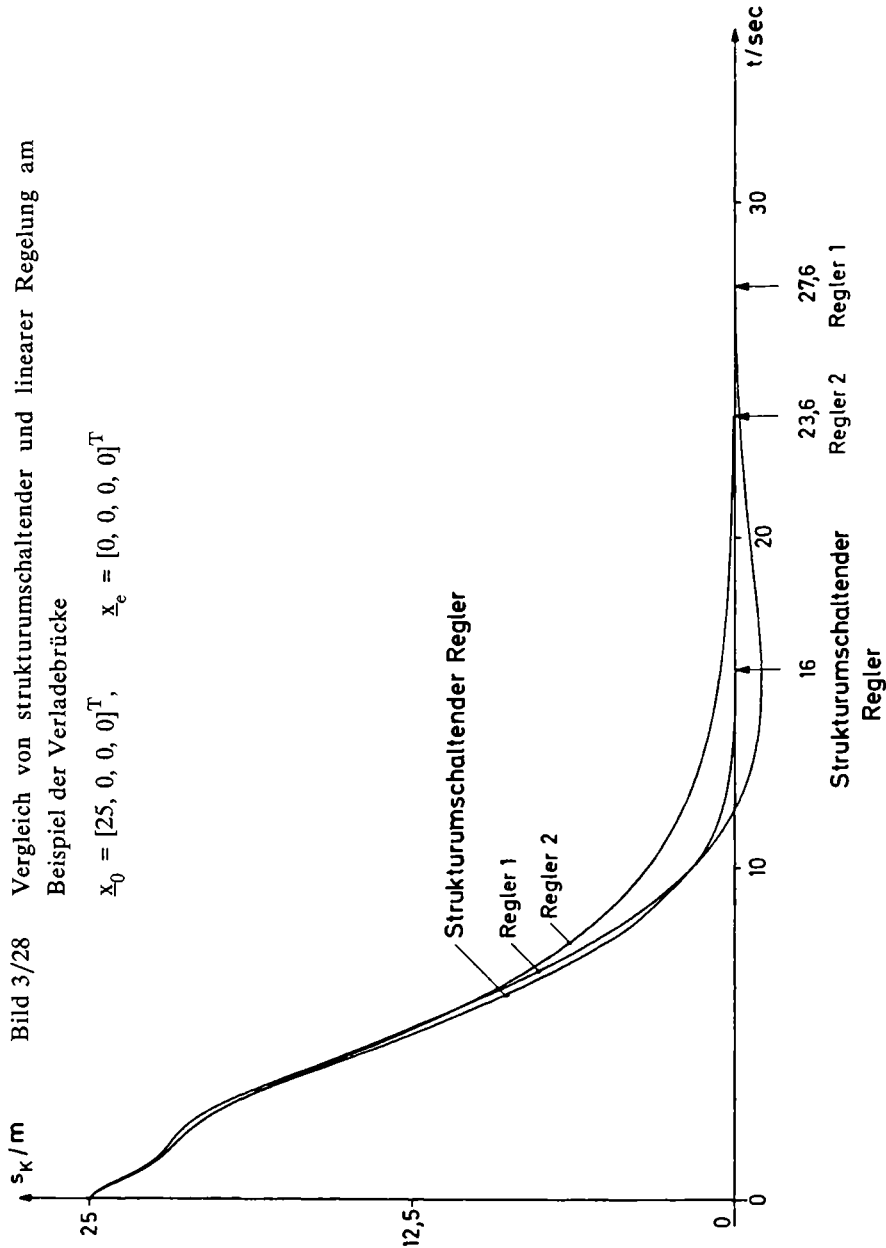
Zur Ergänzung zeigt Bild 3/29 die Übergangsvorgänge aller vier Zustandsgrößen, der Schaltvariablen  $u$  und der Stellgröße  $u_L = F$ , also der Vortriebskraft des Katzmotors. Daraus liest man unter anderem ab, daß der Greiferwinkel rechtzeitig abgebaut wird und daß der Regler vier Umschaltungen benötigt, um den gewünschten Endzustand herzustellen.



Der bisherige Entwurf hat noch einen Nachteil, der nicht nur ein Schönheitsfehler ist: Während die beiden Regler mit den meßbaren Zustandsvariablen  $x_1$  und  $x_2$  auskommen, benötigt die Schaltstrategie den gesamten Zustandsvektor, also auch die nicht meßbaren Zustandsvariablen  $x_3$  und  $x_4$ . Wie die Gleichung (3.89) lehrt, sind aber die Koeffizienten der Terme mit  $x_3$  vergleichsweise so klein, daß sie gegenüber den anderen Summanden in  $s(\underline{x})$  vernachlässigt werden können.

Bild 3/28 Vergleich von struktumschaltender und linearer Regelung am Beispiel der Verladebrücke

$$\underline{x}_0 = [25, 0, 0, 0]^T, \quad \underline{x}_e = [0, 0, 0, 0]^T$$



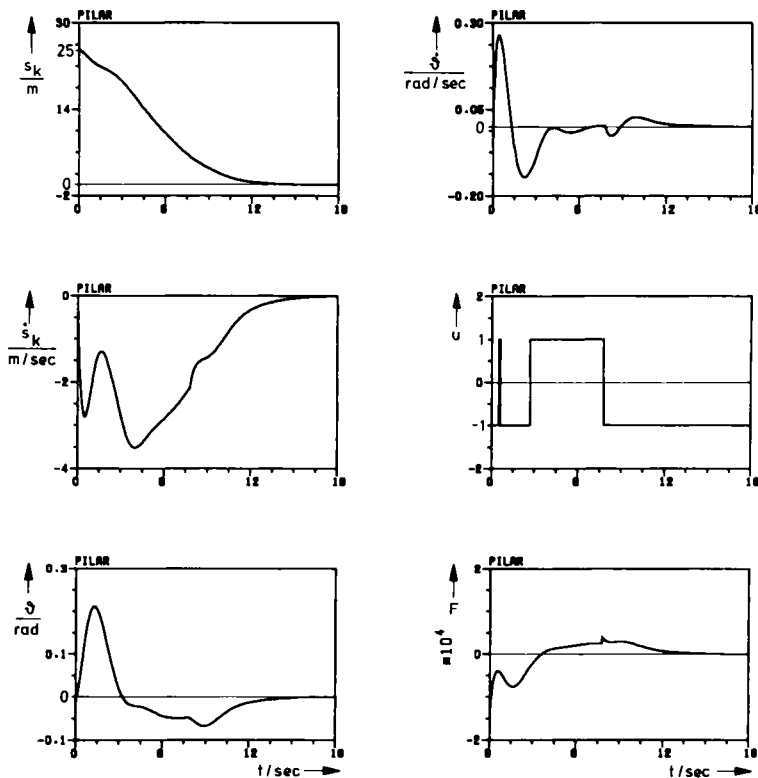


Bild 3/29 Einschwingungsvorgänge der Zustandsvariablen, der Schaltvariablen  $u$  und der Stellgröße  $u_L = F$  bei der Verladebrücke

$$\underline{x}_0 = [25, 0, 0, 0]^T, \quad \underline{x}_e = [0, 0, 0, 0]^T$$

Für die Koeffizienten der Glieder mit  $x_4$  gilt dies allerdings nicht. Doch ist hier zu bedenken, daß  $s(\underline{x})$  als Argument der Signum-Funktion auftritt und daher vom gesamten Verlauf der Schaltfunktion  $s(\underline{x})$  lediglich die Nulldurchgänge interessieren. Bild 3/30 zeigt, daß in der Tat trotz gewisser Abweichungen in den Extremen die Nulldurchgänge von  $s(\underline{x})$  und seiner Näherung sehr gut übereinstimmen. Man kann daher auch in der Schaltstrategie auf die Zustandsvariablen  $x_3$  und  $x_4$  verzichten, ohne daß hierdurch das Verhalten des struktumschaltenden Systems verschlechtert wird. Die Rechnersimulation bestätigt dies: Zwischen den Zeitverläufen in Bild 3/29 und den entsprechenden Zeitverläufen, die sich bei der vereinfachten Schaltfunktion ergeben, gibt es nur ganz geringfügige Abweichungen. Beim vorliegenden Beispiel eines struktumschaltenden Systems wird also kein Zustandsbeobachter benötigt. Doch kann man keinesfalls allgemein hiermit rechnen.

Zur Vermeidung von Weitläufigkeiten wurde ausschließlich das Führungsverhalten, d.h. die Reaktion des Systems auf Änderungen der Katzposition, betrachtet. Treten Störungen in Form von Anfangsauslenkungen des Greifers auf, so gelten ganz entsprechende Ergebnisse.

Weitergehende Arbeiten über strukturvariable Systeme begnügen sich nicht mit der Erzeugung einer gewünschten Dynamik, sondern suchen weitere günstige Eigenschaften der Regelung zu sichern, z.B. Robustheit oder eine sinnvolle Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen. Hier sind vor allem die Arbeiten von *D. Franke* zu erwähnen:

- Entwurf robuster Regelungssysteme mittels zustandsabhängiger Strukturveränderung. Regelungstechnik 29 (1981), S. 119–125.
- Strukturvariable Regelung ohne Gleitzustände. Regelungstechnik 30 (1982), S. 271–276.
- Ausschöpfen von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung. Regelungstechnik 30 (1982), S. 348–353.
- Ein nichtlinearer dynamischer Regler mit adaptiven Eigenschaften. Regelungstechnik 31 (1983), S. 369–374.

Der Entwurf erfolgt dabei mittels Ljapunow-Funktionen. In den letztgenannten drei Arbeiten geht es um „weiche“ strukturvariable Regelungen, bei denen die veränderlichen Reglerparameter nicht umgeschaltet, sondern stetig verändert werden, was größere Beeinflussungsmöglichkeiten eröffnet, aber auch aufwendiger ist.

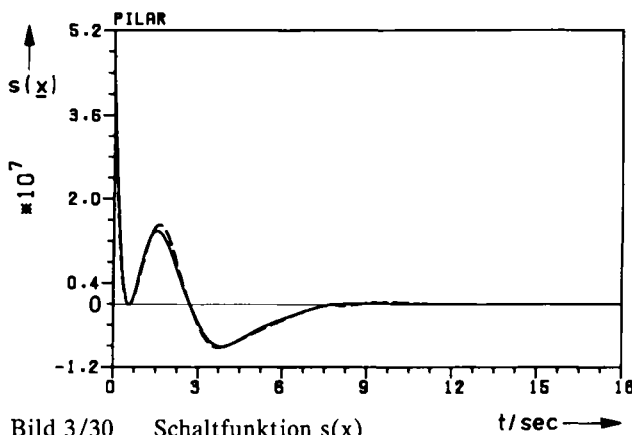


Bild 3/30    Schalfunktion  $s(\underline{x})$

—    exakt gemäß Gleichung (3.89)

---    ohne die Terme mit  $x_3$  und  $x_4$

Weiterhin sind hier die Publikationen von *H. Kiendl* und seinen Mitarbeitern zu erwähnen. Ausgangspunkt dieser Richtung sind die Arbeiten

- *H. Kiendl – G. Schneider*: Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke  $\text{const/s}^2$  aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. Regelungstechnik 20 (1972), S. 289–296, und
- *H. Kiendl*: Suboptimale Regler mit abschnittsweise linearer Struktur. Springer-Verlag, 1972,

wobei in der zweiten Arbeit das Regelungskonzept auf beliebige lineare Strecken verallgemeinert wird.

Sehr bemerkenswert ist hierbei die Einführung von „spatförmigen Ljapunow-Funktionen“, deren Niveauflächen keine Ellipsoide sind, wie bei den üblicherweise benutzten quadratischen Ljapunow-Funktionen, sondern einen Spat umschließen. Eine weiterführende Behandlung und Verwendung dieser Ljapunow-Funktionen für struktumschaltende Regelungen findet sich in zwei Dissertationen, die am Kiendlischen Lehrstuhl durchgeführt wurden:

- *P. Stelzner*: Spatförmige Ljapunow-Funktionen und ihre Anwendungen in der Regelungstechnik. Dortmund, 1981.
- *K. Albers*: Syntheseverfahren für nichtlineare parameter- und strukturvariable Zustandsregler unter Berücksichtigung von Begrenzungen. Dortmund, 1983.

Eine weitere unkonventionelle Art von Ljapunow-Funktionen, die „impliziten“ Ljapunow-Funktionen, die implizit durch eine Gleichung gegeben sind, wird in der folgenden Dissertation eingeführt:

- *J. Adamy*: Strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunow-Funktionen. VDI-Verlag, 1991.

Mit dem dort beschriebenen Konzept lassen sich auch „weiche“ strukturvariable Regelungen entwerfen; überdies ist es auch für nichtlineare Strecken geeignet. In dieser Arbeit findet man eine zusammenfassende Darstellung über die Behandlung strukturvariabler Regelungen.

Schließlich werden in der Arbeit

- *H. Kiendl– T. Scheel*: „Integral Lyapunov-Functions“ based on Incomplete State Feedback. First IFAC-Symposium on Design Methods of Control Systems, Zürich, 1991

Ljapunow-Funktionen eingeführt, die es ermöglichen, Strukturumschaltung auch dann zu benutzen, wenn nur ein Teil der Zustandsvariablen zur Verfügung steht.

Selbstverständlich kann man den Entwurf strukturvariabler Regelungen auch in anderer Weise als mit der Direkten Methode angehen. Hierfür sei auf die schon früher erwähnten Lehrbücher von *Emeljanow* [32], *Ilkis* [34] und *Utkin* [35] hingewiesen, auch auf die in Unterabschnitt 2.3.6 zitierten Arbeiten von *G. Stein*. Schließlich seien die Arbeiten von *H. P. Opitz* erwähnt, die mit der Popowschen Hyperstabilitätstheorie (Kapitel 6) arbeiten und dadurch ausgezeichnet sind, daß in ihnen Ausgangsrückführungen, d.h. Rückführungen nur der Meßgrößen, entworfen werden, also keine vollständigen Zustandsrückführungen, die einen Beobachter benutzen:

- Entwurf robuster, strukturvariabler Regelungssysteme mit der Hyperstabilitätstheorie. VDI-Verlag, 1984.
- Synthese robuster, strukturvariabler Regler mit Meßvektorrückführung. Automatisierungstechnik 34 (1986), S. 480–487.

### 3.6 Eine dritte Anwendung der Direkten Methode: Synthese nichtlinearer Regelungen durch Gütemaßangleichung nach U. Sieber<sup>16)</sup>

#### 3.6.1 Mathematische Vorbemerkung: Kronecker-Produkt und Vektorisierungsoperator

Im folgenden werden neben den üblichen Rechenregeln der Matrizenrechnung zwei weitere Operationen benötigt, die nicht allgemein geläufig sind: das *Kronecker-Produkt* und der *Vektorisierungsoperator*, die eng miteinander zusammenhängen. Über sie muß daher zunächst etwas gesagt werden, wobei wir uns auf die Einführung der Begriffe und die Angabe der wichtigsten Rechenregeln beschränken wollen<sup>17)</sup>. Es sind dies jedoch Begriffsbildungen, die nicht nur für

<sup>16)</sup> *U. Sieber*: Ljapunow-Synthese nichtlinearer Systeme durch Gütemaßangleichung. VDI-Verlag, 1991 (Dissertation, Karlsruhe, 1990).

*U. Sieber*: Nichtlinearer Zustandsreglerentwurf durch Gütemaßangleichung. Automatisierungstechnik 41 (1993).

<sup>17)</sup> Für eine eingehendere Behandlung siehe

- *H. Graham*: Kronecker products and matrix calculus with applications. J. Wiley, 1981.
- *J. Brewer*: Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory. IEEE Trans. Cir. Systems CAS 25 (1978), S. 772–781.
- *R. Bellman*: Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill, 1960.

die hier vorliegende Problemstellung von Bedeutung sind, sondern in zunehmendem Maße auch bei anderen Fragestellungen aus Systemdynamik und Regelungstechnik in Erscheinung treten<sup>18)</sup>.

Während  $\underline{A}\underline{B}$  das gewöhnliche Matrizenprodukt bezeichnet, wird das *Kronecker-Produkt* der Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  durch das Symbol  $\otimes$  charakterisiert. Ist  $\underline{A} = (a_{ik})$  eine beliebige  $(m,n)$ -Matrix und  $\underline{B} = (b_{\mu\nu})$  eine beliebige  $(p,q)$ -Matrix, so lautet seine Definitionsgleichung

$$\underset{(m,n)}{\underline{A}} \underset{(p,q)}{\otimes} \underline{B} = \underset{(mp,nq)}{\begin{bmatrix} a_{11}\underline{B} & a_{12}\underline{B} & \dots & a_{1n}\underline{B} \\ a_{21}\underline{B} & a_{22}\underline{B} & \dots & a_{2n}\underline{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\underline{B} & a_{m2}\underline{B} & \dots & a_{mn}\underline{B} \end{bmatrix}}. \quad (3.90)$$

Betrachten wir als Beispiel das Kroneckerprodukt zweier  $(2,2)$ - Matrizen:

$$\underline{A} \otimes \underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\underline{B} & a_{12}\underline{B} \\ a_{21}\underline{B} & a_{22}\underline{B} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{array} \right].$$

Das Kronecker-Produkt ist also vom gewöhnlichen Matrizenprodukt ganz verschieden. Im Gegensatz zu diesem gibt es beim Kronecker-Produkt keinerlei Einschränkung: Es kann mit beliebigen Matrizen gebildet werden. Es entsteht dabei eine Hypermatrix von erheblich größerer Dimension als die beiden Faktormatrizen.

Es ist wie das gewöhnliche Matrizenprodukt assoziativ und distributiv, d.h.:

$$\begin{aligned} (\underline{A} \otimes \underline{B}) \otimes \underline{C} &= \underline{A} \otimes (\underline{B} \otimes \underline{C}), \\ \underline{A} \otimes (\underline{B} + \underline{C}) &= \underline{A} \otimes \underline{B} + \underline{A} \otimes \underline{C}. \end{aligned}$$

Es ist aber ebenfalls nicht kommutativ, d.h. *im allgemeinen* ist

$$\underline{A} \otimes \underline{B} \neq \underline{B} \otimes \underline{A}.$$

<sup>18)</sup> Siehe beispielsweise

• D. Franke – K. Krüger – M. Knapp: Systemdynamik und Reglerentwurf – Ein Zugang über verallgemeinerte Fourier-Reihen. R. Oldenbourg Verlag, 1992.

So ist im letzten Beispiel

$$\underline{B} \otimes \underline{A} = \begin{bmatrix} b_{11}\underline{A} & b_{12}\underline{A} \\ b_{21}\underline{A} & b_{22}\underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & \dots \\ b_{11}a_{21} & b_{11}a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Der *Vektorisierungsoperator* verwandelt eine beliebige Matrix in einen Vektor, in dem er die Spaltenvektoren der Matrix der Reihe nach untereinander setzt:

$$\text{vec } \underline{F}_{\substack{(m,n)}} = \text{vec}[\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n] = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_n \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

Es liegt auf der Hand, daß

$$\text{vec}(\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots) = \text{vec } \underline{F}_1 + \text{vec } \underline{F}_2 + \dots$$

ist.

Der für viele Untersuchungen wichtigste Zusammenhang zwischen Kronecker-Produkt und Vektorisierungsoperator besteht in der Beziehung

$$\text{vec}(\underline{F}\underline{G}\underline{H}) = (\underline{H}^T \otimes \underline{F}) \text{vec } \underline{G}, \quad (3.92)$$

wobei von den Matrizen  $\underline{F}$ ,  $\underline{G}$  und  $\underline{H}$  lediglich vorausgesetzt wird, daß man das gewöhnliche Produkt  $\underline{F}\underline{G}\underline{H}$  bilden kann. Die Bedeutung von (3.92) besteht darin, daß die im Innern des gewöhnlichen Matrizenprodukts  $\underline{F}\underline{G}\underline{H}$  stehende Matrix  $\underline{G}$  in Gestalt ihres Vektors  $\text{vec } \underline{G}$  "freigeschaufelt" wird. Dies macht die algebraische Lösung von Matrizengleichungen möglich, und hierin liegt – jedenfalls für viele Untersuchungen – die wesentliche Bedeutung von Kronecker-Produkt und Vektorisierungsoperator. Zur Eingewöhnung in den Umgang mit diesen Operationen ist es von Nutzen, sich von der Verwendung der obigen Beziehung wie auch der späteren an einfachen Beispielen zu überzeugen.

Dies sei sogleich am Beispiel der *Sylvester-Gleichung*

$$\underline{P} \cdot \underline{M} - \underline{N} \cdot \underline{P} = -\underline{Q} \quad (3.93)$$

$\substack{(m, m) \quad (n, n) \quad (n, m)}$

gezeigt, wobei  $\underline{M}$ ,  $\underline{N}$  und  $\underline{Q}$  beliebige Matrizen der angegebenen Dimensionen sind und die  $(n,m)$ -Matrix  $\underline{P}$  die gesuchte Unbekannte ist. Um die Situation der Gleichung (3.92) herzustellen, wird (3.93) von links mit  $\underline{I}_n$ , von rechts mit  $\underline{I}_m$  multipliziert ( $n$ - bzw.  $m$ -reihige quadratische Einheitsmatrix):

$$\underline{I}_n \underline{P} \underline{M} - \underline{N} \underline{P} \underline{I}_m = -\underline{I}_n \underline{Q} \underline{I}_m, \quad (3.94)$$

wobei die Faktoren  $\underline{I}$  nur insoweit angeschrieben wurden, wie sie für die folgende Rechnung wichtig sind. Wendet man hierauf den  $\text{vec}$ -Operator an, so wird wegen (3.92)

$$(\underline{M}^T \otimes \underline{I}_n) \text{vec } \underline{P} - (\underline{I}_m^T \otimes \underline{N}) \text{vec } \underline{P} = -(\underline{I}_m^T \otimes \underline{I}_n) \text{vec } \underline{Q}.$$

Da

$$\underline{I}_m^T \otimes \underline{I}_n = \underline{I}_m \otimes \underline{I}_n = \begin{bmatrix} \underline{I}_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{I}_n & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \underline{I}_n \end{bmatrix} = \underline{I}_{m \cdot n}$$

ist, folgt hieraus weiter

$$\text{vec } \underline{P} = - \left[ \underline{M}^T \otimes \underline{I}_n - \underline{I}_m \otimes \underline{N} \right]^{-1} \text{vec } \underline{Q}. \quad (3.95)$$

Dies ist eine *geschlossene Lösung der Sylvester-Gleichung*.

In der Sylvester-Gleichung ist als Spezialfall die Ljapunow-Gleichung

$$\underline{P} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P} = -\underline{Q}$$

für  $\underline{M} = \underline{A}$  und  $\underline{N} = -\underline{A}^T$  enthalten. Somit folgt aus (3.95) für die *Lösung der Ljapunow-Gleichung*

$$\text{vec } \underline{P} = - \left[ \underline{A}^T \otimes \underline{I}_n + \underline{I}_m \otimes \underline{A}^T \right]^{-1} \text{vec } \underline{Q}. \quad (3.96)$$

Darin ist also

$$\underline{A}^T \otimes \underline{I}_n = \begin{bmatrix} a_{11} \underline{I}_n & a_{21} \underline{I}_n & \dots & a_{1n} \underline{I}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} \underline{I}_n & a_{2n} \underline{I}_n & \dots & a_{nn} \underline{I}_n \end{bmatrix},$$



$$\underline{I}_m \otimes \underline{A}^T = \begin{bmatrix} \underline{A}^T & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}^T & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \underline{0} & . & . & \underline{A}^T \end{bmatrix}.$$

Beide Matrizen sind vom Typ  $(n^2, n^2)$ , haben also normalerweise hohe Dimension, bestehen jedoch größtenteils aus Nullen.

Wie man sieht, bieten Kronecker-Produkt und vec-Operator die Möglichkeit, Matrixgleichungen in einfacher Weise formelmäßig zu lösen. Diese Feststellung werden wir später an komplizierteren Fällen erhärten. Zuvor ist aber noch die Einführung einiger Rechenregeln erforderlich.

Hierfür benötigen wir den Begriff der *Permutationsmatrix*. Um ihn zu erläutern, werde von einer  $(n, n)$ -Matrix  $\underline{E}_{\mu, \nu}$  ausgegangen, die an der Stelle  $(\mu, \nu)$  eine 1 enthält und im übrigen aus Nullen besteht. Dann gilt

$$\underline{A} \underline{E}_{\mu, \nu} = [\underline{0}, \dots, \underline{0}, \underset{\nu}{\underline{a}_{\mu}}, \underline{0}, \dots, \underline{0}],$$

wobei  $\underline{a}_{\mu}$  die  $\mu$ -te Spalte der beliebigen  $(m, n)$ -Matrix  $\underline{A}$  ist. Durch die Rechtsmultiplikation mit  $\underline{E}_{\mu, \nu}$  wird also die  $\mu$ -te Spalte von  $\underline{A}$  zur  $\nu$ -ten Spalte der Produktmatrix.

Unter einer Permutationsmatrix  $\underline{U}$  versteht man nun eine quadratische Matrix, die in jeder Zeile und Spalte genau eine 1 enthält und im übrigen aus Nullen besteht. Steht die 1 der  $k$ -ten Spalte in der  $\mu_k$ -ten Zeile, so kann man schreiben:

$$\underline{U} = \underline{E}_{\mu_1, 1} + \underline{E}_{\mu_2, 2} + \dots + \underline{E}_{\mu_n, n}.$$

Daraus folgt

$$\underline{A} \underline{U} = \sum_{k=1}^n \underline{A} \underline{E}_{\mu_k, k} = [\underline{a}_{\mu_1}, \underline{a}_{\mu_2}, \dots, \underline{a}_{\mu_n}].$$

Durch *Rechtsmultiplikation* von  $\underline{A}$  mit  $\underline{U}$  wird also die  $\mu_1$ -te Spalte zur 1. Spalte, die  $\mu_2$ -te Spalte zur 2. Spalte usw.. Es wird so eine *Permutation der Spalten* von

$\underline{A}$  bewirkt. Ganz entsprechend sieht man, daß eine *Linksmultiplikation* mit  $\underline{U}$  zu einer *Permutation der Zeilen* führt.

Im folgenden wird eine spezielle Klasse von Permutationsmatrizen betrachtet, die dem Kronecker-Produkt angepaßt ist:

$$\underline{U}_{u \times v} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{1,1} & \underline{E}_{2,1} & \cdots & \underline{E}_{v,1} \\ \underline{E}_{1,2} & \underline{E}_{2,2} & \cdots & \underline{E}_{v,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{E}_{1,u} & \underline{E}_{2,u} & \cdots & \underline{E}_{v,u} \end{bmatrix},$$

wobei  $\underline{E}_{i,k}$  eine  $(v,u)$ -Matrix der oben definierten Art ist: Sie besteht aus Nullen mit Ausnahme der 1 in der Position  $(i,k)$ .  $\underline{U}_{u \times v}$  ist somit eine quadratische Matrix vom Typ  $(uv, vu)$ , bei der in jeder Zeile und Spalte genau eine 1 steht, während sonst nur Nullen auftreten.

Beispiel:

$$\underline{U}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{1,1} & \underline{E}_{2,1} & \underline{E}_{3,1} \\ \underline{E}_{1,2} & \underline{E}_{2,2} & \underline{E}_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Allgemein gilt

$$\underline{U}_{n \times p} \cdot \underline{U}_{p \times n} = \underline{I}_{pn}, \quad (3.97)$$

wobei also  $\underline{I}_{pn}$  die  $pn$ -reihige quadratische Einheitsmatrix ist, für die man in diesem Zusammenhang auch  $\underline{I}_{p \times n}$  zu schreiben pflegt. Aus (3.97) folgt

$$\underline{U}_{n \times p}^{-1} = \underline{U}_{p \times n}. \quad (3.98)$$

Im Zusammenhang mit dem Vektorisierungsoperator und dem Kronecker-Produkt gelten die folgenden Rechenregeln:

Ist  $\underline{H}$  eine beliebige  $(p,n)$ -Matrix, so ist

$$\text{vec } \underline{H}^T = \underline{U}_{p \times n} \cdot \text{vec } \underline{H}, \quad (3.99)$$

wodurch also die Transposition auf eine Multiplikation zurückgeführt wird.

$$\underline{G} \otimes \underline{F} = \underline{U}_{m \times n} \cdot (\underline{F} \otimes \underline{G}) \cdot \underline{U}_{q \times p} \quad (3.100)$$

Einen solchen Vertauschungssatz für die Matrizen  $\underline{F}$  und  $\underline{G}$  gibt es im Rahmen der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation nicht.

Multipliziert man (3.100) von links mit  $\underline{U}_{n \times m}$ , von rechts mit  $\underline{U}_{p \times q}$ , so folgt wegen (3.97)

$$\underline{F} \otimes \underline{G} = \underline{U}_{n \times m} \cdot (\underline{G} \otimes \underline{F}) \cdot \underline{U}_{p \times q} \quad (3.101)$$

Zum Schluß dieser mathematischen Einschaltung seien noch einige Eigenschaften des Kronecker-Produktes zusammengestellt, die wir zwar im folgenden nicht benötigen, die aber an sich interessant sind und dem Leser vielleicht an anderer Stelle nützlich sein können. Es gilt

$$\begin{aligned} (\underline{A}_1 \otimes \underline{B}_1) \cdot (\underline{A}_2 \otimes \underline{B}_2) \cdot \dots \cdot (\underline{A}_n \otimes \underline{B}_n) &= \\ = (\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2 \cdot \dots \cdot \underline{A}_n) \otimes (\underline{B}_1 \cdot \underline{B}_2 \cdot \dots \cdot \underline{B}_n) \end{aligned} \quad (3.102)$$

Im Spezialfall  $\underline{A}_1 = \dots = \underline{A}_n = \underline{A}$ ,  $\underline{B}_1 = \dots = \underline{B}_n = \underline{B}$  wird daraus

$$(\underline{A} \otimes \underline{B})^n = \underline{A}^n \otimes \underline{B}^n \quad (3.103)$$

Ebenso gilt

$$(\underline{A} \otimes \underline{B})^{-1} = \underline{A}^{-1} \otimes \underline{B}^{-1} \quad (3.104)$$

Vertauscht man in (3.102) die Operationen  $\otimes$  und  $\cdot$ , so erhält man wiederum eine gültige Beziehung:

$$(\underline{A}_1 \underline{B}_1) \otimes (\underline{A}_2 \underline{B}_2) \otimes \dots \otimes (\underline{A}_n \underline{B}_n) = (\underline{A}_1 \otimes \underline{A}_2 \otimes \dots \otimes \underline{A}_n) \cdot (\underline{B}_1 \otimes \underline{B}_2 \otimes \dots \otimes \underline{B}_n) \quad (3.105)$$

Speziell für  $\underline{A}_1 = \dots = \underline{A}_n = \underline{A}$ ,  $\underline{B}_1 = \dots = \underline{B}_n = \underline{B}$  entsteht daraus

$$(\underline{A} \underline{B})^{[k]} = \underline{A}^{[k]} \cdot \underline{B}^{[k]}, \quad (3.106)$$

wobei das Symbol  $[k]$  die  $k$ -te Potenz im Sinne der Kronecker-Multiplikation bezeichnen soll.

### 3.6.2 Beschreibung des Syntheseverfahrens

Stellt man die Zustandsgleichungen von nichtlinearen technischen Systemen auf, so zeigt sich, daß die Zustandsdifferentialgleichung häufig linear im Stellvektor  $\underline{u}$  ist und allein vom Zustandsvektor  $\underline{x}$  nichtlinear abhängt. Sie ist dann von der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{B}\underline{u}. \quad (3.107)$$

Darin ist vielfach  $\underline{B}$  eine konstante Matrix. Als Beispiele solcher nichtlinearer Systeme seien angeführt: Rührkesselreaktor, über Feld und Anker angesteuerter Gleichstromantrieb, Rendezvous-Manöver von Raumfahrzeugen,  $H_2/O_2$ -Dampfzeuger.

Falls die Matrix  $\underline{B}$  vom Zustandsvektor  $\underline{x}$  abhängt, ist es nicht selten möglich, durch eine Transformation der Zustandsvariablen und des Steuervektors  $\underline{u}$  auf eine Zustandsdifferentialgleichung zu kommen, in welcher der transformierte Steuervektor  $\tilde{\underline{u}}$  mit einer *konstanten* Matrix  $\tilde{\underline{B}}$  multipliziert ist. Ein Beispiel hierfür liefert das nichtlineare Modell des balancierten Stabes (inverses Pendel).

Wir betrachten eine Ruhelage  $(\underline{x}_R, \underline{u}_R)$  des Systems und dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie in  $(\underline{0}, \underline{0})$  liegt, da sich dies durch Übergang zu den Abweichungen von der Ruhelage stets erreichen läßt. Gemäß (3.107) ist dann  $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$ . Infolgedessen wird man  $\underline{f}(\underline{x})$  in der formal linearen Form

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x})\underline{x}$$

mit einer in der Umgebung von  $\underline{x} = \underline{0}$  stetigen Matrizenfunktion  $\underline{A}(\underline{x})$  darstellen können. Das leuchtet sogleich ein, wenn man an den skalaren Fall denkt:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots = (a_1 + a_2 x + \dots)x = a(x)x.$$

Von dieser formal linearen Darstellung wurde schon beim Verfahren von *M. A. Aiserman* (Unterabschnitt 3.3.4) Gebrauch gemacht.

Wir betrachten also im folgenden ein nichtlineares System, das durch die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underset{(n, n)}{\underline{A}(\underline{x})} \underline{x} + \underset{(n, p)}{\underline{B}} \underline{u} \quad (3.108)$$

mit der konstanten Matrix  $\underline{B}$  beschrieben wird. Es hat die Ruhelage  $\underline{x} = \underline{0}$ ,  $\underline{u} = \underline{0}$ .

Es liege nun folgende Situation vor. Der Zustandspunkt  $\underline{x}(t)$  des Systems befindet sich zum Zeitpunkt  $t_0$  in einer Anfangslage  $\underline{x}_0$ . Er soll von hier aus in eine Ruhelage  $\underline{x}_R$  überführt werden. Bei  $\underline{x}_0$  kann es sich um eine Anfangsauslenkung aus  $\underline{x}_R$  infolge von Störungen handeln.  $\underline{x}_0$  kann aber auch eine andere Ruhelage des Systems sein. Dann geht es darum, von  $\underline{x}_0$  aus die neue Ruhelage  $\underline{x}_R$  anzufahren, also von einem gegebenen Betriebszustand oder Arbeitspunkt des Systems zu einem neuen Arbeitspunkt überzugehen. Gerade dieser Fall tritt in den Anwendungen häufig auf, wie auch die späteren Beispiele zeigen. Der Übergang von  $\underline{x}_0$  nach  $\underline{x}_R$  soll gutes dynamisches Verhalten aufweisen, also zügig und ohne zu starke Oszillationen, dabei mit erträglicher Stellamplitude ablaufen.

Um dieses Ziel anzustreben, entwirft man – nach dem Vorschlag von U. Sieber – eine dynamisch gute *lineare* Regelung, etwa mittels Polvorgabe oder Riccati-Optimierung (siehe z.B. [73], Kapitel 13), und sucht dann das dynamische Verhalten der nichtlinearen Regelung an das Verhalten der linearen Regelung anzugleichen.

Aus diesem Grund wurde die Strecke bereits formal linear geschrieben, und aus dem gleichen Grund wird auch der Regler formal linear angesetzt:

$$\underline{u} = \underset{(p, n)}{-\underline{R}(\underline{x})} \underline{x} . \quad (3.109)$$

Damit lautet die Zustandsdifferentialgleichung der geschlossenen nichtlinearen Regelung

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}(\underline{x}) - \underline{B}\underline{R}(\underline{x})] \underline{x} . \quad (3.110)$$

Die *lineare Vergleichsregelung* wird in der Form

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}(\underline{0}) - \underline{B}\underline{R}_V] \underline{x} \quad (3.111)$$

angesetzt. Dabei ist also  $\underline{A}(\underline{0})$  die Matrix  $\underline{A}(\underline{x})$  in der Ruhelage  $\underline{x}_R = \underline{0}$ . Die konstante Rückführmatrix  $\underline{R}_V$  wird – wie schon erwähnt – mit einem linearen Standardverfahren so berechnet, daß die lineare Vergleichsregelung eine gute Dynamik besitzt.  $\underline{R}_V$  wird für das Folgende als bekannt angesehen.

Zur linearen Vergleichsregelung konstruiert man nun eine Ljapunow-Funktion, und zwar in Gestalt einer  $\tilde{I}L$ -Funktion („ideale Ljapunow-Funktion“ nach *B. Itchner*, Unterabschnitt 3.3.2)<sup>19</sup>:

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} \quad (3.112)$$

mit  $\underline{P}$  gemäß Formel (3.27). Dann ist  $\underline{P}$  durch die Dynamikmatrix  $\underline{A}(0) - \underline{B}\underline{R}_V$  der linearen Ersatzregelung bestimmt, abgesehen von den zunächst freien Gewichtungsfaktoren  $\tilde{P}_{11}, \dots, \tilde{P}_{nn}$ .

Durch sie kann man die Hauptachsenlängen der Hyperellipsoide

$$\underline{x}^T \underline{P} \underline{x} = \text{const},$$

also die Niveauhypereflächen der Ljapunow-Funktion, beeinflussen. Normalerweise geht man von der Annahme aus, daß die Anfangsstörungen um die Ruhelage  $\underline{x}_R = \underline{0}$  etwa gleichverteilt sind. Dann wird man die  $\tilde{P}_{ii}$  sämtlich gleich, etwa  $= 1$ , wählen, so daß die Niveauhypereflächen Kugeloberflächen darstellen. Sollten sich aber die Anfangsstörungen z.B. längs einer Achse konzentrieren, so kann man durch die  $\tilde{P}_{ii}$  dafür sorgen, daß die Hyperellipsoide längs dieser Achse gestreckt werden. Eine Anfangsauslenkung  $\underline{x}_0$  wird dann schon durch niedrigeres  $V$ -Niveau eingeschlossen und dadurch schneller nach  $\underline{0}$  überführt werden.

Für das Folgende seien die  $\tilde{P}_{ii}$  fest gewählt. Damit ist die Ljapunow-Funktion  $V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$  der linearen Vergleichsregelung vollständig festgelegt. Ihre zeitliche Ableitung bezüglich dieses Systems lautet dann

$$\dot{V}_L = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}},$$

also wegen (3.111)

$$\dot{V}_L(\underline{x}) = -\underline{x}^T \underline{Q}_L \underline{x} = \underline{x}^T (-\underline{Q}_L) \underline{x}$$

<sup>19</sup> Man kann die Ljapunow-Funktion der linearen Vergleichsregelung auch anders wählen. Von *U. Sieber* (siehe die Zitate zu Beginn des Abschnitts 3.6) wurde ein effizienteres, aber auch aufwendigeres, numerisches Verfahren von *E. J. Davison* und *E. M. Kurak* angewandt [A computational method for determining quadratic Lyapunov functions for nonlinear systems. Automatica 7 (1971), S. 627–635].

mit der Matrix

$$\underline{Q}_L = \left[ \underline{R}_V^T \underline{B}^T - \underline{A}^T(0) \right] \underline{P} + \underline{P} \left[ \underline{B} \underline{R}_V - \underline{A}(0) \right]. \quad (3.113)$$

Hierbei ist, wie dies auch sonst häufig geschieht, die Matrix von  $\dot{V}$  nicht mit  $\underline{Q}_L$ , sondern mit  $-\underline{Q}_L$  bezeichnet. Soll  $\dot{V}$  negativ definit sein, so muß  $\underline{Q}_L$  positiv definit sein. Diese Schreibweise ist z.B. dann zweckmäßig, wenn man das Sylvester-Kriterium (3.10) anwenden will, das ja auf *positive* Definitheit abzielt.

$\underline{Q}_L$  ist offensichtlich konstant und symmetrisch. Da  $\underline{P}$  die Matrix einer IL-Funktion ist und die Eigenwerte der Matrix  $\underline{A}(0) - \underline{B} \underline{R}_V$  als Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises gewiß links der j-Achse liegen, ist  $-\underline{Q}_L$  überdies negativ definit, wie im Unterabschnitt 3.3.2 gezeigt wurde.

Man wählt nun die Ljapunow-Funktion

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$$

der linearen Vergleichregelung auch als Ljapunow-Funktion der nichtlinearen Regelung. Ihre zeitliche Ableitung  $\dot{V}(\underline{x})$  bezüglich des nichtlinearen Systems ist aber verschieden von  $\dot{V}_L(\underline{x})$ :

$$\dot{V}(\underline{x}) = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}},$$

also wegen (3.110)

$$\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \underline{Q}(\underline{x}) \underline{x} = \underline{x}^T [-\underline{Q}(\underline{x})] \underline{x}$$

mit

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \left[ \underline{R}^T(\underline{x}) \underline{B}^T - \underline{A}^T(\underline{x}) \right] \underline{P} + \underline{P} \left[ \underline{B} \underline{R}(\underline{x}) - \underline{A}(\underline{x}) \right]. \quad (3.114)$$

Wählt man nun

$$\underline{R}(0) = \underline{R}_V, \quad (3.115)$$

so ist gemäß (3.113) und (3.114)

$$\underline{Q}(0) = \underline{Q}_L.$$

Da  $-\underline{Q}_L$  negativ definit ist, folgt daraus, daß auch  $-\underline{Q}(\underline{x})$  in der Umgebung der Ruhelage  $\underline{x}_R = \underline{0}$  negativ definit ist. Nach dem Kriterium (3.1) der asymptotischen Stabilität im kleinen ist somit die Ruhelage  $\underline{x}_R = \underline{0}$  der nichtlinearen Regelung gewiß asymptotisch stabil.

Nun kommt der entscheidende Punkt der gesamten Betrachtung. Da die lineare Vergleichsregelung so entworfen ist, daß sie gutes dynamisches Verhalten besitzt, wird  $\underline{x}(t)$  zügig  $\rightarrow \underline{0}$  streben. Daher wird  $\underline{V}_L(\underline{x})$  als IL-Funktion schnell abnehmen und somit  $\dot{\underline{V}}_L(\underline{x})$  kräftig negativ sein. Um eine ähnlich gute Dynamik für das nichtlineare System zu erhalten, liegt es nahe, die Funktion  $\dot{\underline{V}}(\underline{x})$  nach Möglichkeit an  $\dot{\underline{V}}_L(\underline{x})$  anzugleichen und deshalb die Differenz

$$\underline{x}^T \underline{Q}_L \underline{x} - \underline{x}^T \underline{Q}(\underline{x}) \underline{x} = \underline{x}^T [\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})] \underline{x}$$

betragsmäßig möglichst klein zu machen. Da der Betrag dieses Ausdrucks

$$\leq |\underline{x}| \cdot \|\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})\| \cdot |\underline{x}|^{20})$$

ist, läuft dies darauf hinaus, die Norm

$$N = \|\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})\| \quad (3.116)$$

durch geeignete Wahl der noch freien Reglermatrix  $\underline{R}(\underline{x})$  zum Minimum zu machen. Diese Angleichung von  $\underline{Q}(\underline{x})$  an  $\underline{Q}_L$  wurde von U. Sieber – in etwas anderer Darstellung – als Gütemaßangleichung bezeichnet<sup>21)</sup>.

<sup>20)</sup> Allgemein bezeichnet  $\|\underline{M}\|$  die Euklidische Norm der Matrix  $\underline{M} = (m_{ij})$ . Sie ist durch

$$\|\underline{M}\| = \left[ \sum_{i,j} m_{ij}^2 \right]^{1/2}$$

gegeben. Für Vektoren geht sie in den üblichen Vektorbetrag über:

$$\|\underline{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = |\underline{x}|.$$

<sup>21)</sup> Man kann nämlich  $\dot{\underline{V}}$  und  $\dot{\underline{V}}_L$  als Integranden zweier Gütemaße  $J$  und  $J_L$  auffassen, die den gleichen Wert  $V$  haben, sich aber durch ihre Integranden unterscheiden, welche nach Möglichkeit aneinander angeglichen werden sollen (siehe die Zitate zu Beginn des Abschnitts 3.6).



### 3.6.3 Herleitung der Reglerformel

Um die Minimierung der Norm  $N$  durchzuführen, wird zunächst die Matrizen-differenz  $\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})$  umgeformt, um ihre Abhängigkeit von der Reglermatrix  $\underline{R}(\underline{x})$  möglichst übersichtlich darzustellen. Um die Formeln nicht unnötig zu komplizieren, wird das Argument  $\underline{x}$  im folgenden weggelassen.

Nach (3.114) ist

$$\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x}) = \underline{Q}_L + \underline{P}\underline{A} + \underline{A}^T\underline{P} - \underline{P}\underline{B}\underline{R} - \underline{R}^T\underline{B}^T\underline{P}.$$

Auf diese Gleichung wird der Vektorisierungsoperator angewandt:

$$\begin{aligned} \text{vec}[\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})] &= \text{vec}\underline{Q}_L + \text{vec}(\underline{P}\underline{A}\underline{I}_n) + \text{vec}(\underline{I}_n\underline{A}^T\underline{P}) \\ &\quad - \text{vec}(\underline{P}\underline{B}\cdot\underline{R}\cdot\underline{I}_n) - \text{vec}(\underline{I}_n\cdot\underline{R}^T\cdot\underline{B}^T\underline{P}). \end{aligned}$$

Um im 2. und 3. Summanden der rechten Seite  $\underline{A}$ , im 4. und 5. Summanden  $\underline{R}$  herausziehen zu können, wendet man nun die Rechenregel (3.92) an, wozu bereits die Einheitsmatrix  $\underline{I}$  an geeigneter Stelle eingeführt wurde. Beispielsweise ergibt sich so für den zweiten Summanden

$$\text{vec}(\underline{P}\underline{A}\underline{I}_n) = (\underline{I}_n^T \otimes \underline{P}) \text{vec}\underline{A} = (\underline{I}_n \otimes \underline{P}) \text{vec}\underline{A}.$$

Insgesamt wird unter Berücksichtigung von  $\underline{P}^T = \underline{P}$ :

$$\begin{aligned} \text{vec}[\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})] &= \text{vec}\underline{Q}_L + (\underline{I}_n \otimes \underline{P}) \text{vec}\underline{A} + (\underline{P} \otimes \underline{I}_n) \text{vec}\underline{A}^T - \\ &\quad [\underline{I}_n \otimes (\underline{P}\underline{B})] \text{vec}\underline{R} - [(\underline{P}\underline{B}) \otimes \underline{I}_n] \text{vec}\underline{R}^T. \end{aligned}$$

Um nun die Glieder mit  $\underline{A}$  sowie die Glieder mit  $\underline{R}$  zusammenfassen zu können, wendet man auf den 3. und 5. Summanden der rechten Seite die Rechenregel (3.99) an:

$$\begin{aligned} \text{vec}[\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})] &= \text{vec}\underline{Q}_L + (\underline{I}_n \otimes \underline{P}) \text{vec}\underline{A} + (\underline{P} \otimes \underline{I}_n) \underline{U}_{n \times n} \text{vec}\underline{A} - \\ &\quad [\underline{I}_n \otimes (\underline{P}\underline{B})] \text{vec}\underline{R} - [(\underline{P}\underline{B}) \otimes \underline{I}_n] \underline{U}_{p \times n} \text{vec}\underline{R} \end{aligned}$$

oder

$$\text{vec}[\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})] = \text{vec}\underline{Q}_L + \underline{J} \text{vec}\underline{A}(\underline{x}) - \underline{M} \text{vec}\underline{R}(\underline{x}), \quad (3.118)$$

wobei

$$\underline{\mathbf{J}}_{\binom{n^2}{n^2}, \binom{n^2}{n^2}} = (\underline{\mathbf{I}}_n \otimes \underline{\mathbf{P}}) + (\underline{\mathbf{P}} \otimes \underline{\mathbf{I}}_n) \underline{\mathbf{U}}_{n \times n}, \quad (3.119)$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{\binom{n^2}{n^2}, \binom{n^2}{np}} = \underline{\mathbf{I}}_n \otimes (\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{B}}) + [(\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{B}}) \otimes \underline{\mathbf{I}}_n] \underline{\mathbf{U}}_{p \times n} \quad (3.120)$$

bekannte konstante Matrizen sind, welche die Permutationsmatrizen  $\underline{\mathbf{U}}_{n \times n}$  und  $\underline{\mathbf{U}}_{p \times n}$  enthalten. Auf eine weitere Umformung dieser Matrizen können wir verzichten.

Nun ist offensichtlich für eine beliebig Matrix  $\underline{\mathbf{Z}}$

$$\|\underline{\mathbf{Z}}\| = \|\text{vec } \underline{\mathbf{Z}}\|.$$

Daher folgt aus (3.118)

$$\mathbf{N} = \|\underline{\mathbf{Q}}_{\underline{\mathbf{L}}} - \underline{\mathbf{Q}}(\underline{\mathbf{x}})\| = \|\text{vec } \underline{\mathbf{Q}}_{\underline{\mathbf{L}}} + \underline{\mathbf{J}} \text{vec } \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{M}} \text{vec } \underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{x}})\|.$$

Dieser Ausdruck soll durch geeignete Wahl von  $\underline{\mathbf{R}}$  zum Minimum gemacht werden. Der Idealfall besteht darin, daß  $\mathbf{N} = 0$  wird. Dies führt auf die Matrizen-gleichung

$$\underline{\mathbf{M}}_{\binom{n^2}{n^2}, \binom{n^2}{np}} \text{vec } \underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{x}})_{\binom{n^2}{np}, 1} = \text{vec } \underline{\mathbf{Q}}_{\underline{\mathbf{L}}} + \underline{\mathbf{J}}_{\binom{n^2}{n^2}, 1} \text{vec } \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{x}}). \quad (3.121)$$

Das sind  $n^2$  Gleichungen für die  $np$  gesuchten Elemente von  $\underline{\mathbf{R}}$ . Da fast immer  $p < n$  ist, stellt (3.121) ein überbestimmtes Gleichungssystem für die  $\underline{\mathbf{R}}$ -Elemente dar, das im allgemeinen keine Lösung besitzt.

Mit Hilfe des Penrose-Theorems<sup>22)</sup> läßt sich aber stets eine Näherungslösung von (3.121) angeben:

$$\text{vec } \underline{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{M}}^+ \text{vec } \underline{\mathbf{Q}}_{\underline{\mathbf{L}}} + \underline{\mathbf{M}}^+ \underline{\mathbf{J}} \text{vec } \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{x}}). \quad (3.122)$$

Dabei ist  $\underline{\mathbf{M}}^+$  die (stets existierende und eindeutig bestimmte) Pseudo-Inverse zu  $\underline{\mathbf{M}}$ , die man mit Hilfe eines regelungstechnischen Programmsystems berechnen

<sup>22)</sup> Über die Moore-Penrosesche Pseudo-Inverse und das Penrose-Theorem siehe etwa [73], Unterabschnitt 17.3.10. Dort auch weitere Literatur.

kann. Ist (3.121) exakt lösbar, so stellt (3.122) diese Lösung dar. Andernfalls ist  $\underline{R}(\underline{x})$  aus (3.122) die bestmögliche Näherungslösung der Gleichung (3.121), und zwar in dem Sinne, daß sie die Norm  $N$  unter allen möglichen Reglermatrizen  $\underline{R}(\underline{x})$  zum Minimum macht. Das entspricht gerade unserer Zielsetzung. Sollte es mehrere derartige Minimallösungen geben, so besitzt  $\underline{R}(\underline{x})$  aus (3.122) die kleinste Norm  $\|\underline{R}(\underline{x})\|$ , was tendenziell auf eine Verkleinerung der Stellgrößenbeträge hinwirkt.

Aus numerischen Gründen ist es zweckmäßig, die symmetrische und positiv definite Matrix  $\underline{Q}_L$  mittels des Cholesky-Verfahrens in der Form

$$\underline{Q}_L = \underline{\Gamma}^T \underline{\Gamma}$$

darzustellen, wobei  $\underline{\Gamma}$  eine reguläre obere Dreiecksmatrix ist ([72], § 6.3).

Dann erhält man aus

$$\underline{\Gamma}^T \underline{\Gamma} - \underline{Q}(\underline{x}) \stackrel{!}{=} \underline{0}$$

bzw.

$$\underline{I}_n - \underline{\Gamma}^{-T} \underline{Q} \underline{\Gamma}^{-1} = \underline{0}$$

ganz entsprechend zu (3.122):

$$\left. \begin{aligned} \text{vec } \underline{R}(\underline{x}) &= \underline{M}^+ \text{vec } \underline{I}_n + \underline{M}^+ \underline{J} \text{vec } \underline{A}(\underline{x}) \\ \text{mit} \quad \underline{M} &= \underline{\Gamma}^{-T} \otimes (\underline{\Gamma}^{-T} \underline{P} \underline{B}) + \left[ (\underline{\Gamma}^{-T} \underline{P} \underline{B}) \otimes \underline{\Gamma}^{-T} \right] \underline{U}_{p \times n}, \\ \underline{J} &= \underline{\Gamma}^{-T} \otimes (\underline{\Gamma}^{-T} \underline{P}) + \left[ (\underline{\Gamma}^{-T} \underline{P}) \otimes \underline{\Gamma}^{-T} \right] \underline{U}_{n \times n}. \end{aligned} \right\} \quad (3.123)$$

Darin ist

$$\underline{\Gamma}^{-T} = \left[ \underline{\Gamma}^{-1} \right]^T = \left[ \underline{\Gamma}^T \right]^{-1}.$$

Was die Durchführung der Reglerberechnung betrifft, so hat man nach dem Entwurf der linearen Vergleichsregelung nacheinander  $\underline{P}$ ,  $\underline{J}$ ,  $\underline{M}$  und  $\underline{M}^+$  numerisch zu bestimmen, woraus dann  $\underline{R}(\underline{x})$  gemäß (3.122) bzw. (3.123) folgt. Wie man aus diesen Formeln ersieht, ist jedes Element der Matrix  $\underline{R}(\underline{x})$  eine Linearkombination der Elemente  $a_{ik}(\underline{x})$  der Matrix  $\underline{A}(\underline{x})$ , zuzüglich einer von  $\underline{Q}_L$  herrührenden Konstante.  $\underline{R}(\underline{x})$  wird also formelmäßig erhalten.

Es ist zu beachten, daß bei realistischen Problemen gewöhnlich die Mehrzahl der Elemente von  $\underline{A}$  konstant, meist 0 oder 1, ist und daher nur relativ wenige tatsächlich von  $\underline{x}$  abhängende Elemente  $a_{ik}(\underline{x})$  auftreten.

Gewiß ist ein derartiger nichtlinearer Regler, verglichen mit einem üblichen linearen Regler, nicht mehr einfach. Aber immerhin ist er nur vom Komplikationsgrad der Strecke, während beispielsweise ein mit der sogenannten „differentialgeometrischen Methode“ gewonnener Regler (siehe Kapitel 7) außerordentlich viel komplizierter als die Strecke werden kann.

Hat man  $\underline{R}(\underline{x})$  gemäß (3.122) bzw. (3.123) bestimmt, so darf man annehmen, daß die nichtlineare Regelung durch die Angleichung an die gut ausgelegte Vergleichsregelung ebenfalls gutes dynamisches Verhalten besitzt, daß also ihre durch eine Anfangsstörung  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  erzeugte Trajektorie ohne große Umschweife gegen die Ruhelage  $\underline{x}_R = \underline{0}$  strebt.

Dabei ist vorausgesetzt, daß  $\underline{x}_0$  in deren Einzugsbereich liegt. Da – wie gezeigt – die Ruhelage  $\underline{x}_R = \underline{0}$  asymptotisch stabil ist, gibt es einen solchen Einzugsbereich (der nicht nur aus  $\underline{x}_R$  besteht). Man darf auf Grund der Angleichung an die lineare Regelung erwarten, daß er nicht zu mager ausfällt, was Beispiele bestätigen. Doch läßt sich über seinen Umfang nur unter bestimmten Voraussetzungen eine analytische Aussage machen (siehe hierzu die in Fußnote 16 an erster Stelle zitierte Arbeit von U. Sieber). Im allgemeinen ist man auf den numerischen Nachweis angewiesen. Dazu wird

$$\dot{\underline{V}}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \underline{Q}(\underline{x}) \underline{x}$$

gemäß (3.114) auf einem Punktgitter um den Ursprung des Zustandsraumes daraufhin überprüft, wo negative Werte vorliegen. Mittels des Kriteriums (3.3) der asymptotischen Stabilität im großen kann dann ein gesicherter Teil des Einzugsbereiches nachgewiesen werden.

### 3.6.4 Beispiel: Über Feld und Anker geregelter Gleichstrommotor<sup>23)</sup>

Im Bild 3/31 ist der grundsätzliche Aufbau des Motors dargestellt. Der Unterschied gegenüber Bild 1/2 besteht in der Annahme, daß die Kennlinie

$$\Phi_F = F(i_F),$$

die den Feldstrom  $i_F$  mit dem magnetischen Fluß  $\Phi_F$  verknüpft, mit genügender Näherung durch die lineare Beziehung

$$\Phi_F = L_F i_F, \quad L_F \text{ konstant,}$$

angenähert werden kann. Im übrigen gelten die Bezeichnungen nach Bild 1/2.

Aus Bild 3/31 ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$u_F = R_F i_F + L_F \dot{i}_F \quad (\text{Feldkreis}),$$

$$u_A - c L_F i_F \omega = R_A i_A + L_A \dot{i}_A \quad (\text{Ankerkreis}),$$

$$\Theta \dot{\omega} = c L_F i_F i_A \quad (\text{mechanische Bewegung}),$$

wobei vorausgesetzt ist, daß sich der Motor im Leerlauf bewegt, also kein Lastmoment  $M_L$  aufgeschaltet ist. Setzt man

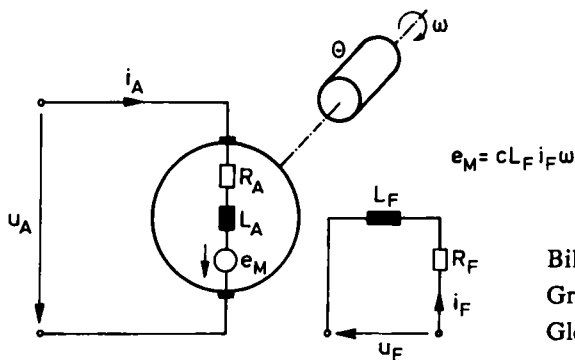


Bild 3/31  
Grundsätzlicher Aufbau eines  
Gleichstrommotors

<sup>23)</sup> Das Beispiel wurde mit einer ganz anderen Methode von *R. Sommer* behandelt: Synthese nichtlinearer, zeitvarianter Systeme mit Hilfe einer kanonischen Form. VDI-Verlag, 1981, Abschnitt 4.4.

Die hier beschriebene Vorgehensweise ist – in etwas modifizierter Form – entnommen aus *U. Sieber*: Ljapunow-Synthese nichtlinearer Regelungen über die Approximation einer linearen Regelung, Automatisierungstechnik 37 (1989), S. 455–461.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= i_F && \text{(Feldstrom),} \\
 x_2 &= i_A && \text{(Ankerstrom),} \\
 x_3 &= \omega && \text{(Winkelgeschwindigkeit),} \\
 u_1 &= u_A && \text{(Ankerspannung),} \\
 u_2 &= u_F && \text{(Feldspannung)}
 \end{aligned}$$

und löst nach den zeitlichen Ableitungen auf, so erhält man die Zustandsdifferentialgleichungen des Motors:

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + b_2 u_2, \quad (3.124)$$

$$\dot{x}_2 = -a_{21} x_2 - a_{22} x_1 x_3 + b_1 u_1, \quad (3.125)$$

$$\dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \quad (3.126)$$

mit

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{R_F}{L_F}, & b_2 &= \frac{1}{L_F}, & a_{21} &= \frac{R_A}{L_A}, & a_{22} &= \frac{cL_F}{L_A}, \\
 b_1 &= \frac{1}{L_A}, & a_3 &= \frac{cL_F}{\Theta}.
 \end{aligned}$$

Infolge der Produkte  $x_1 x_3$  und  $x_1 x_2$  liegt ein nichtlineares System vor.

Die Ruhelage (stationärer Zustand, Arbeitspunkt) dieses Systems ergibt sich nach Abschnitt 1.4 aus den Gleichungen

$$0 = -a_1 x_{1R} + b_2 u_{2R}, \quad (3.127)$$

$$0 = -a_{21} x_{2R} - a_{22} x_{1R} x_{3R} + b_1 u_{1R}, \quad (3.128)$$

$$0 = a_3 x_{1R} x_{2R}. \quad (3.129)$$

Hierbei ist  $u_{2R} \neq 0$ , da andernfalls kein Erregerfeld vorhanden wäre, also keine Motordrehung zustande käme. Nach (3.127) ist deshalb auch  $x_{1R} \neq 0$ . Wegen (3.129) muß dann  $x_{2R} = 0$  sein: Der Ankerstrom ist bei Leerlauf im stationären Zustand Null.

Es verbleiben die beiden Gleichungen (3.127) und (3.128). Von den in ihnen vorkommenden Werten  $x_{1R}$ ,  $x_{3R}$ ,  $u_{1R}$ ,  $u_{2R}$  kann man zwei vorgeben und dann die

beiden anderen berechnen. Normalerweise wird man den Wert  $x_{3R}$ , also den stationären Wert der Winkelgeschwindigkeit, vorschreiben. Gibt man zusätzlich  $x_{1R}$  vor, so kann man die stationären Werte  $u_{1R}$  und  $u_{2R}$  der Stellgrößen eindeutig bestimmen. Durch Vorgabe des Tripels  $(x_{1R}, 0, x_{3R})$  liegt also der Arbeitspunkt des Motors fest.

Der Motor befinde sich nun in einer bestimmten Ruhelage  $\underline{x}_0$ . Aus ihr will man zu einem neuen Arbeitspunkt  $\underline{x}_R$  übergehen. Dazu soll ein Regler entworfen werden, der für den Übergang von irgendeiner Anfangslage  $\underline{x}_0$  in die gewünschte Endlage  $\underline{x}_R$  gutes dynamisches Verhalten sichert.

Um das Verfahren der Gütemaßangleichung zu verwenden, gehen wir zunächst zu den Abweichungen

$$\Delta x_i = x_i - x_{iR}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Delta u_\nu = u_\nu - u_{\nu R}, \quad \nu = 1, 2,$$

von der Zielruhelage über. Aus den Zustandsdifferentialgleichungen (3.124–126) wird so, wenn man dort

$$x_i = x_{iR} + \Delta x_i, \quad u_\nu = u_{\nu R} + \Delta u_\nu$$

einsetzt:

$$(\Delta x_1)' = [-a_1 x_{1R} + b_2 u_{2R}] - a_1 \Delta x_1 + b_2 \Delta u_2,$$

$$\begin{aligned} (\Delta x_2)' = & [-a_{21} x_{2R} - a_{22} x_{1R} x_{3R} + b_1 u_{1R}] - \\ & - a_{22} x_{3R} \Delta x_1 - a_{22} \Delta x_3 \Delta x_1 - a_{21} \Delta x_2 - a_{22} x_{1R} \Delta x_3 + b_1 \Delta u_1, \end{aligned}$$

$$(\Delta x_3)' = [a_3 x_{1R} x_{2R}] + a_3 x_{2R} \Delta x_1 + a_3 \Delta x_2 \Delta x_1 + a_3 x_{1R} \Delta x_2.$$

Wegen der Gleichungen (3.127–129) fallen die in eckige Klammern gesetzten Ausdrücke weg, und es bleibt

$$(\Delta x_1)' = -a_1 \Delta x_1 + b_2 \Delta u_2,$$

$$(\Delta x_2)' = -a_{22}(x_{3R} + \Delta x_3) \Delta x_1 - a_{21} \Delta x_2 - a_{22} x_{1R} \Delta x_3 + b_1 \Delta u_1,$$

$$(\Delta x_3)' = a_3(x_{2R} + \Delta x_2)\Delta x_1 + a_3x_{1R}\Delta x_2.$$

Man gelangt so zu einer formal linearen Zustandsbeschreibung des Gleichstrom-motors:

$$(\underline{\Delta x})' = \underline{A}(\underline{\Delta x})\underline{\Delta x} + \underline{B}\underline{\Delta u}$$

mit

$$\underline{A}(\underline{\Delta x}) = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ -a_{22}(x_{3R} + \Delta x_3) & -a_{21} & -a_{22}x_{1R} \\ a_3(x_{2R} + \Delta x_2) & a_3x_{1R} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mittels  $\underline{A}(0)$  und  $\underline{B}$  geht man zu der um  $\underline{x}_R$  linearisierten Strecke über und bestimmt dazu den linearen Vergleichsregler  $\underline{R}_V$  mittels eines Standardverfahrens. Sodann wird die Ljapunow-Funktion zur linearen Ersatzregelung in Form einer IL-Funktion konstruiert.

Das nichtlineare Regelungsgesetz ist durch

$$\underline{\Delta u} = \underline{u} - \underline{u}_R = -\underline{R}(\underline{\Delta x})\underline{\Delta x}$$

bzw.

$$\Delta u_i = u_i - u_{iR} = - \sum_{k=1}^3 r_{ik}(\underline{\Delta x}) \cdot \Delta x_k, \quad i = 1, 2,$$

gegeben, wobei die  $r_{ik}(\underline{\Delta x})$  aus (3.122) bzw. (3.123) erhalten werden. Wie schon im Unterabschnitt 3.6.3 erwähnt, sieht man aus diesen Formeln unmittelbar, daß die  $r_{ik}(\underline{\Delta x})$  Linearkombinationen der Elemente der Matrix  $\underline{A}(\underline{\Delta x})$  sind, zusätzlich einer Konstante. Im vorliegenden Beispiel sind sie deshalb von der Form

$$r_{ik}(\underline{\Delta x}) = c_{ik,1} + c_{ik,2}\Delta x_2 + c_{ik,3}\Delta x_3.$$



Damit wird

$$\Delta u_i = - \sum_{k=1}^3 \left[ c_{ik,1} + c_{ik,2} \Delta x_2 + c_{ik,3} \Delta x_3 \right] \Delta x_k, \quad i = 1, 2.$$

Setzt man  $\Delta x_k = x_k - x_{kR}$  ein und multipliziert aus, so nimmt  $u_i = u_{iR} + \Delta u_i$  folgende Gestalt an:

$$u_i = u_{iR} - \left[ C_{i0} + C_{i1}x_1 + C_{i2}x_2 + C_{i3}x_3 + C_{i12}x_1x_2 + C_{i13}x_1x_3 + C_{i23}x_2x_3 + C_{i22}x_2^2 + C_{i33}x_3^2 \right], \quad i = 1, 2, \quad (3.130)$$

mit konstanten Zahlen  $C_{i\mu}$  und  $C_{i\mu\nu}$ . Da sich im vorliegenden Fall sämtliche Zustandsvariablen ohne besonderen Aufwand messen lassen, kann man auf einen Zustandsbeobachter verzichten. Der Regler kann daher in der obigen Form realisiert werden.

Für die konkrete Durchführung ist es zweckmäßig, die Zustandsvariablen zunächst zu normieren. Für das numerische Beispiel, von dem die folgenden Rechenschnitte stammen, wurde der Feldstrom  $x_1$  auf 5A normiert, der Ankerstrom  $x_2$  auf 400A, die Winkelgeschwindigkeit  $x_3$  auf  $100 \text{ sec}^{-1}$ , die Spannungen  $u_F$  und  $u_A$  auf 1V. Die Werte der Koeffizienten in den Zustandsdifferentialgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,3969; a_{21} = 16,6667; a_{22} = 439,2084; \\ a_3 &= 1,4060; b_1 = 0,8333; b_2 = 0,00315. \end{aligned}$$

Aus der Ruhelage  $\underline{x}_0 = [3A, 0, 100 \text{ sec}^{-1}]^T$  soll das System in die Ruhelage  $\underline{x}_R = [5A, 0, 70 \text{ sec}^{-1}]^T$  überführt werden.

Die lineare Vergleichsregelung wurde mittels Polvorgabe entworfen, wobei die Eigenwerte  $\lambda_1 = -10$ ,  $\lambda_2 = -8$ ,  $\lambda_3 = -1,5$  vorgeschrieben waren. Als Regler ergab sich

$$\underline{R}_V = \begin{bmatrix} -368,9 & 1,6 & -458,8 \\ 350,2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Als Gewichtungsmatrix der IL-Funktion wurde

$$\tilde{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 \end{bmatrix}$$

gewählt, wobei die starke Betonung des letzten Hauptdiagonalelements zu möglichst kugelförmigen Niveauflächen der IL-Funktion führen soll. Diese ist durch

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0,13 \\ 0 & 0,13 & 0,82 \end{bmatrix}$$

gegeben.

Im Regler, der gemäß (3.130) gebildet wird, treten Terme auf, die vergleichsweise kleine Koeffizientenbeträge aufweisen und die Zustandsvariablen von nicht allzu großem Betrag enthalten, wie man aus den Ruhewerten grob überschlagen kann. Solche Terme wurden vernachlässigt. Man erhält dann den folgenden nichtlinearen Regler:

$$u_1 = 47,85 - 0,01x_1 + 0,02x_2 - 0,68x_3 - 0,01x_1x_2 + 1,054x_1x_3, \quad (3.131)$$

$$u_2 = 475,98 - 70,04x_1 - 0,1x_3 + 0,0015x_3^2.$$

Wie man sieht, ist der Regler kaum aufwendiger als ein linearer Regler. Die folgenden Bilder zeigen seine Wirksamkeit. Bild 3/32 bringt einen Vergleich zwischen dem nichtlinearen Regler und dem linearen Vergleichsregler, beide angewandt auf die nichtlineare Strecke. Während die Verläufe des Feldstroms  $i_F$  in beiden Fällen praktisch übereinstimmen, erweist sich bei den Verläufen des Ankerstroms  $i_A$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  die Regelung über den nichtlinearen Regler als wesentlich schneller und besser gedämpft. Aus Bild 3/33 erkennt man, daß diese Verbesserung der Dynamik nicht durch zu hohe Stellamplituden erkaufte wird, vielmehr die Ankerspannung  $u_A$  bei Verwendung des nichtlinearen Reglers erheblich ruhiger verläuft. Bild 3/34 schließlich zeigt den Vergleich zwischen der nichtlinear geregelten nichtlinearen Strecke und der linearen Vergleichsregelung. Man sieht, daß die Zeitvorgänge in der nichtlinearen Regelung gut an die Verläufe der linearen Regelung angeglichen sind und erkennt hieraus die Wirksamkeit der Gütemaßangleichung.

### 3.6.5 Entwurf nichtlinearer Ausgangsrückführungen

Die im vorhergehenden beschriebenen Entwurfsverfahren für nichtlineare Zustandsregler führen zu *vollständigen Zustandsrückführungen*, also der Rückführung *sämtlicher* Zustandsvariablen. Will man einen solchen Regler realisieren, sei es als Gerät oder als Rechneralgorithmus, so ist es erforderlich, ihm alle Zustands-

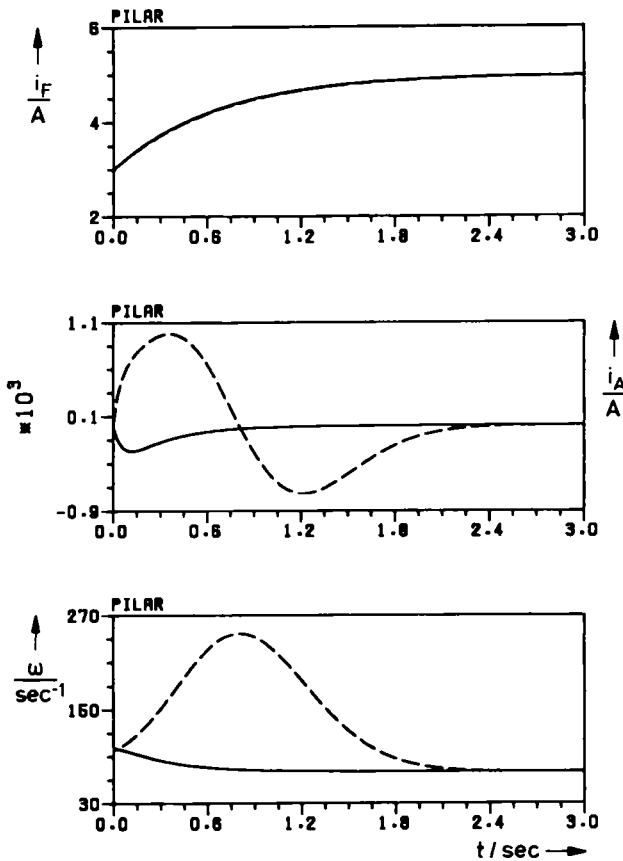


Bild 3/32 Regelung des Gleichstrommotors: Verläufe der Zustandsvariablen

— Nichtlinear geregelte nichtlineare Strecke  
 --- Linear geregelte nichtlineare Strecke

variablen zuzuführen. Nun ist aber, von Ausnahmefällen abgesehen, nur ein Teil der Zustandsvariablen mit vertretbarem Aufwand meßbar. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die restlichen Zustandsvariablen näherungsweise durch einen Zustandsbeobachter zu rekonstruieren. Der Entwurf eines solchen *nichtlinearen Beobachters*, der also die nicht meßbaren Zustandsvariablen eines nichtlinearen Systems schätzt, ist jedoch eine schwierige Aufgabe, die entweder auf die Linearisierung mit ungewissem Gültigkeitsbereich des Beobachters führt oder aber nur unter stark einschränkenden Bedingungen über das zu beobachtende System zu lösen ist. Überdies erfordert die Realisierung des nichtlinearen Beobachters einen nicht unbeträchtlichen zusätzlichen Aufwand.

Will man aus solchen Gründen einen Beobachter vermeiden, so ist man gezwungen, den Regler allein mittels der Meßgrößen zu betreiben, also derjenigen Grös-

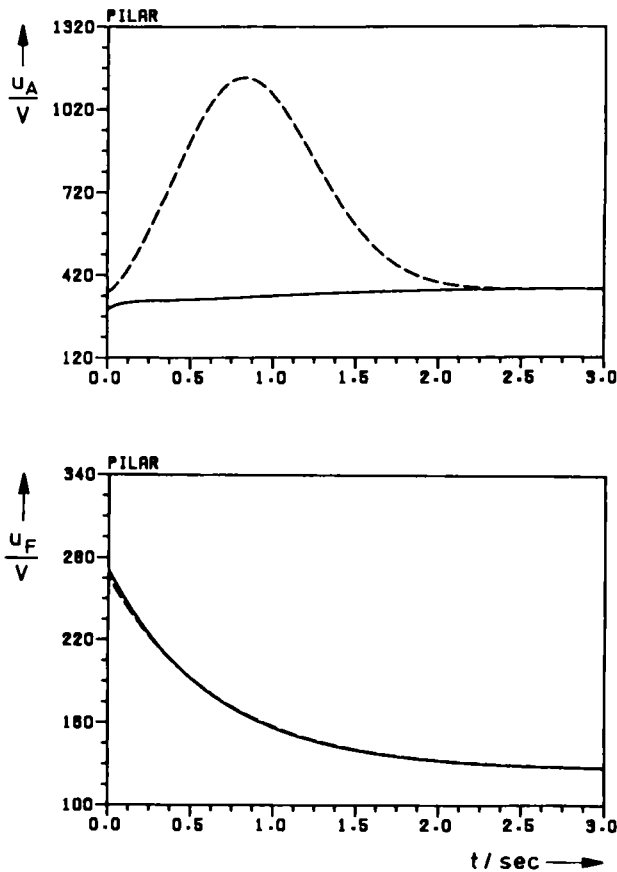


Bild 3/33 Regelung des Gleichstrommotors: Verläufe der Stellgrößen

- Nichtlinear geregelte nichtlineare Strecke  
 ---- Linear geregelte nichtlineare Strecke

sen des nichtlinearen Systems, die ohne zu großen technischen Aufwand meßbar sind. Man spricht dann von einer *Ausgangsrückführung*, auch *Teilzustandsrückführung* oder *Meßvektorrückführung* genannt. Der Entwurf einer solchen Ausgangsrückführung ist allerdings schon im Linearen schwieriger als der Entwurf einer vollständigen Zustandsrückführung. In viel höherem Maße noch gilt dies im nichtlinearen Bereich. Kein Wunder deshalb, daß es an praktikablen Syntheseverfahren für nichtlineare Ausgangsrückführungen mangelt!

Es ist daher erfreulich, daß der vorstehend beschriebene Entwurf durch Gütemaßangleichung für eine gewisse Klasse nichtlinearer Strecken auch auf Ausgangsrückführungen übertragen werden kann. Dazu muß die Strecke von der folgenden Form sein:

$$\dot{\underline{x}} = \underset{(n,n)}{\underline{A}(\underline{y})} \underline{x} + \underset{(n,p)}{\underline{B}} \underline{u}, \quad (3.132)$$

$$\underline{y} = \underset{(q,n)}{\underline{C}} \underline{x} \quad (3.133)$$

mit konstanten Matrizen  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$ , wobei  $\underline{y}$  der  $q$ -dimensionale Meßvektor der Strecke ist.  $\underline{x}_R = \underline{0}$ ,  $\underline{u}_R = \underline{0}$  und damit auch  $\underline{y}_R = \underline{0}$  sei eine Ruhelage der Strecke.

Die wesentliche Voraussetzung besteht also darin, daß die Strecke linear in  $\underline{u}$  ist und der von  $\underline{u}$  freie Term der Zustandsdifferentialgleichung eine formal lineare

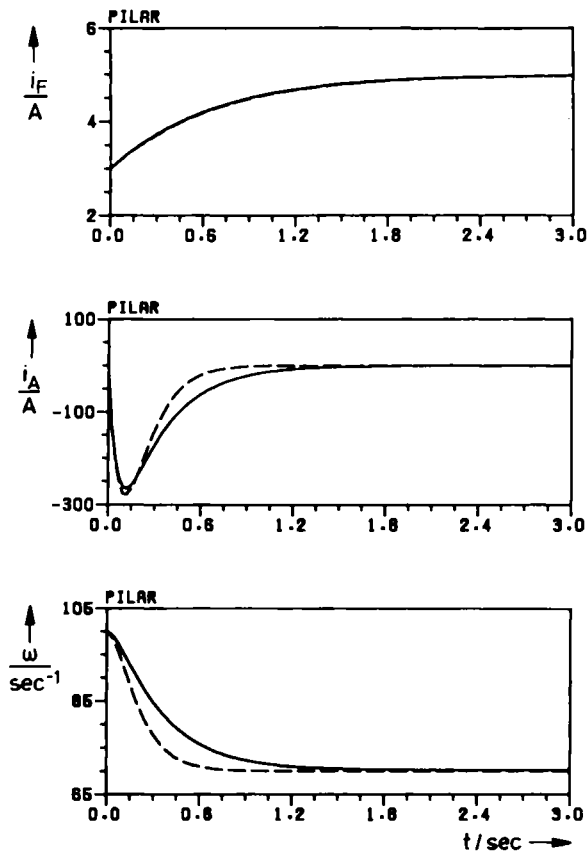


Bild 3/34 Regelung des Gleichstrommotors: Vergleich zwischen nichtlinearer Regelung und linearer Vergleichsregelung  
 — Nichtlinear geregelte nichtlineare Strecke (— aus Bild 3/32, aber anderer Maßstab)  
 ---- Linear geregelte linearisierte Strecke (lineare Vergleichsregelung)

Darstellung  $\underline{A}(\underline{y})\underline{x}$  mit der nur vom Meßvektor  $\underline{y}$  abhängenden Matrix  $\underline{A}(\underline{y})$  erlaubt. Das ist nicht selten der Fall. Beispiele sind: Rührkesselreaktor, über Feld und Anker gesteuerter Gleichstrommotor, Synchrongenerator<sup>24)</sup>.

Der Regler wird nun als Meßvektorrückführung ebenfalls formal linear angesetzt:

$$\underline{u} = - \underline{K}(\underline{y}) \underline{y} . \quad (3.134)$$

(p, q)

Damit lautet die Zustandsdifferentialgleichung der geschlossenen Regelung

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}(\underline{y}) - \underline{B}\underline{K}(\underline{y})\underline{C}]\underline{x} . \quad (3.135)$$

Die lineare Vergleichsregelung wird ebenfalls als Ausgangsrückführung entworfen, mit einem der im linearen Bereich vorhandenen leistungsfähigen Verfahren (siehe etwa [73], Kapitel 14). Ihre Gleichungen lauten:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(0)\underline{x} + \underline{B}\underline{u} ,$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} ,$$

$$\underline{u} = - \underline{K}_V \underline{y} ,$$

wobei also  $\underline{K}_V$  die Reglermatrix der Vergleichsregelung ist. Zusammenfassend hat man die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}(0) - \underline{B}\underline{K}_V\underline{C}]\underline{x}$$

der Vergleichsregelung.

Wie früher wählt man nunmehr die Ljapunow-Funktion

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$$

<sup>24)</sup> Das erste Beispiel wird nachstehend behandelt. Das zweite Beispiel wurde im vorigen Unterabschnitt betrachtet. Da die Messung aller Zustandsvariablen hier problemlos ist, wurde der Regler jedoch als vollständige Zustandsrückführung entworfen. Das mathematische Modell des dritten Systems findet man bei *B. M. Mukhopadhyay – D. P. Malik: Optimal control of synchronous-machine excitation by quasilinearisation techniques. Proc. IEE 119 (1972), S. 91–98.*

zur linearen Vergleichsregelung als IL-Funktion. Dann ist  $\underline{P}$  vollständig bekannt, und man darf erwarten, daß  $V(\underline{x}(t))$  und damit  $\underline{x}(t)$  zügig gegen Null strebt.

Die gleiche Ljapunow-Funktion wird dann für die nichtlineare Regelung benutzt. Um deren Abstieg an denjenigen der linearen Vergleichsregelung anzugleichen, fordert man ganz entsprechend wie früher,  $\underline{K}(\underline{y})$  so zu wählen, daß die Norm

$$N = \|\underline{Q}_L - \underline{Q}(\underline{x})\|$$

minimal wird, wobei  $\underline{Q}_L$  und  $\underline{Q}(\underline{x})$  analog wie im Unterabschnitt 3.6.3 gebildet sind. Entsprechend wie dort erhält man das Ergebnis

$$\left. \begin{aligned} \text{vec } \underline{K}(\underline{y}) &= \underline{M}^+ \text{vec } \underline{Q}_L + \underline{M}^+ \underline{J} \text{vec } \underline{A}(\underline{y}) \\ \text{mit} \quad \underline{M} &= \underline{C}^T \otimes (\underline{P}\underline{B}) + [(\underline{P}\underline{B}) \otimes \underline{C}^T] \underline{U}_{pq} , \\ \underline{J} &= \underline{I}_n \otimes \underline{P} + (\underline{P} \otimes \underline{I}_n) \underline{U}_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (3.136)$$

bzw. analog zu (3.123)

$$\left. \begin{aligned} \text{vec } \underline{K}(\underline{y}) &= \underline{M}^+ \text{vec } \underline{I}_n + \underline{M}^+ \underline{J} \text{vec } \underline{A}(\underline{y}) \\ \text{mit} \quad \underline{M} &= (\underline{\Gamma}^{-T} \underline{C}^T) \otimes (\underline{\Gamma}^T \underline{P}\underline{B}) + [(\underline{\Gamma}^{-T} \underline{P}\underline{B}) \otimes (\underline{\Gamma}^{-T} \underline{C}^T)] \underline{U}_{pq} , \\ \underline{J} &= \underline{\Gamma}^{-T} \otimes (\underline{\Gamma}^T \underline{P}) + [(\underline{\Gamma}^{-T} \underline{P}) \otimes \underline{\Gamma}^{-T}] \underline{U}_{nn} . \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

Die vollständige Zustandsrückführung kann man als Spezialfall der Ausgangsrückführung für  $\underline{y} = \underline{x}$  ansehen, wobei dann  $\underline{C} = \underline{I}_n$  ist.

Als **Beispiel** betrachten wir einen **Rührkesselreaktor**<sup>25)</sup>, dessen schematischer Aufbau im Bild 3/35 dargestellt ist. In den Rührkessel wird kontinuierlich ein Stoff A eingeleitet, um dort unter der Einwirkung eines Katalysators einer Zer-

<sup>25)</sup> Das Beispiel ist (in etwas vereinfachter Form) entnommen aus *M. Zeitz: Nichtlineare Beobachter für chemische Reaktoren. VDI-Verlag, 1977.*

fallsreaktion unterworfen zu werden, durch die er in andere Stoffe zerlegt wird. Da der Reaktorinhalt laufend durchmischt wird, darf man annehmen, daß sich keine örtlichen Unterschiede ausbilden und der Rührkesselreaktor deshalb ein System mit konzentrierten Parametern darstellt. Konzentration  $c$  und Temperatur  $T$  von Stoff A im Reaktor hängen daher nur von der Zeit  $t$  ab. Das dynamische Verhalten des Rührkesselreaktors wird deshalb durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben. Da eine Zerfallsreaktion exotherm ist, also Energie abgibt, tendiert der Rührkesselreaktor zu unstabilem Verhalten und führt Dauerschwingungen aus, was unerwünscht ist. Zur gezielten Beeinflussung des Reaktors steht als Stellgröße die Kühlmitteltemperatur  $T_K(t)$  zur Verfügung. Statt  $T_K$  wird eigentlich der Kühlmittelzufluß  $q_K$  durch ein Ventil verstellt. Dies wirkt sich aber auf die abgeführte Prozeßwärme wie eine Verstellung der Temperatur  $T_K$  (an einer mittleren Stelle des Kühlaggregats) aus.  $T_K$  und  $q_K$  sind durch eine bekannte Kennlinie  $T_K = f(q_K)$  miteinander verknüpft.

Es ist zweckmäßig, als Zustandsvariablen die bezogene Konzentration und Temperatur von Stoff A einzuführen, als Eingangsgröße die bezogene Kühlmitteltemperatur:

$$x_1 = \frac{c_0 - c}{c_0}, \quad x_2 = \frac{T - T_0}{T_0}; \quad u = \frac{T_K - T_0}{T_0}.$$

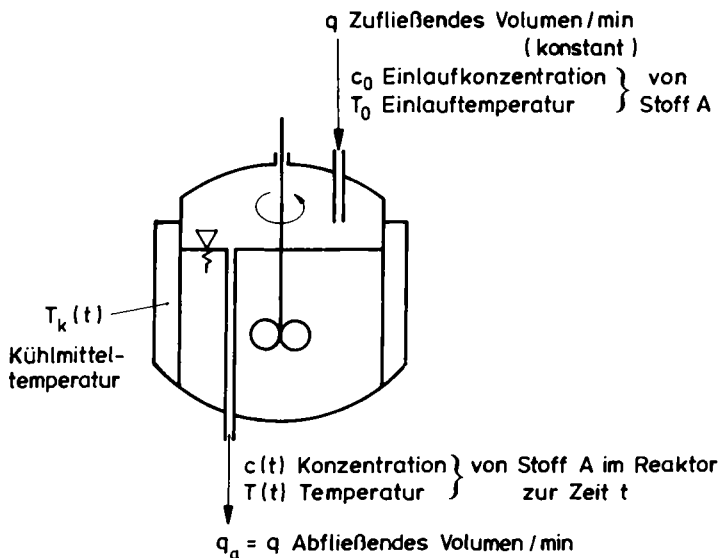


Bild 3/35 Schema eines Rührkesselreaktors



Dann ist für  $t > 0$  gewiß  $x_1 > 0$  und  $x_2 > 0$ . Stellt man nun die Material- und Enthalpiebilanz auf, so erhält man die beiden *Zustandsdifferentialgleichungen des Rührkesselreaktors*:

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + \gamma(x_1, x_2), \quad (3.138)$$

$$\dot{x}_2 = -a_{21} x_2 + a_{22} \gamma(x_1, x_2) + bu. \quad (3.139)$$

Darin sind  $a_1$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  und  $b$  Konstanten, während  $\gamma(x_1, x_2)$  die Reaktionsgeschwindigkeit darstellt, mit welcher der Stoff A zerfällt. Sie hängt von der Konzentration und Temperatur ab und sei durch

$$\gamma(x_1, x_2) = (1 - x_1)k_0 e^{-\frac{\epsilon}{1+x_2}} \quad (3.140)$$

gegeben, wobei  $k_0$  und  $\epsilon$  positive Konstanten sind. Im nachstehend betrachteten Zahlenbeispiel, bei dem die Zeit auf 1 min normiert ist, gilt

$$\begin{aligned} c_0 &= 0,848 \text{ mol/l}, \\ T_0 &= 308,5 \text{ K}, \\ a_1 &= 0,2674, \\ a_{21} &= 1,815, \\ a_{22} &= 0,4682, \\ b &= 1,5476, \\ k_0 &= 1,05 \cdot 10^{14}, \\ \epsilon &= 34,2894. \end{aligned}$$

Wir wenden uns zunächst der Bestimmung der *Ruhelage* zu. Aus den Zustandsdifferentialgleichungen folgt für  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$

$$a_1 x_{1R} = \gamma(x_{1R}, x_{2R}), \quad (3.141)$$

$$a_{21} x_{2R} = a_{22} \gamma(x_{1R}, x_{2R}) + bu_R \quad (3.142)$$

und daraus durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite:

$$x_{1R} = \frac{a_{21}}{a_1 a_{22}} x_{2R} - \frac{b}{a_1 a_{22}} u_R.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden  $g$  (Bild 3/36), auf welcher die Ruhelage  $(x_{1R}, x_{2R})$  liegt. Wird  $u_R$  verändert, so wird diese Gerade parallel verschoben.

Weiterhin folgt aus (3.140) und (3.141)

$$a_1 x_{1R} = (1 - x_{1R}) k_0 e^{-\frac{\epsilon}{1+x_{2R}}}.$$

Auflösung nach  $x_{1R}$  führt zu

$$x_{1R} = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{k_0} e^{\frac{\epsilon}{1+x_{2R}}}}.$$

Dies ist eine S-förmige Kurve in der  $x_2$ - $x_1$ -Ebene, die hier nur für  $x_2 > 0$  interessiert. In Bild 3/36 ist sie skizziert. Ihre Schnittpunkte mit der Geraden  $g$  stellen die Ruhelagen des Rührkesselreaktors bei gegebenem  $u_R$  dar. Wie man sieht, kann es 1 oder 3 Schnittpunkte geben. Bei den oben angegebenen konkreten Daten liegt genau ein Schnittpunkt vor. Beispielsweise wird für  $u_R = 0$ , wenn also die Kühlmitteltemperatur gleich der Zulauftemperatur ist,

$$\underline{x}_R = [0,72; 0,05]^T.$$

Man möchte nun von der Ruhelage

$$\underline{x}_0 = [0,42; 0,01]^T, \quad u_0 = -0,0224$$

in die neue Ruhelage

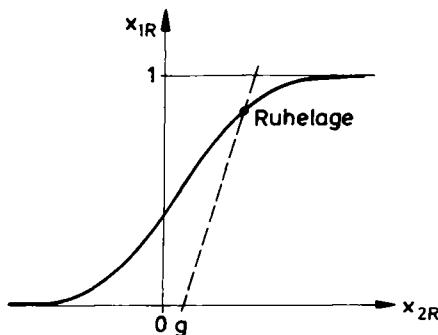


Bild 3/36  
Bestimmung der Ruhelagen des  
Rührkesselreaktors

$$\underline{x}_R = [0,72; 0,05]^T, \quad u_R = 0$$

übergehen, die sich also von der vorhergehenden durch höhere Temperatur und geringere Konzentration von Stoff A und somit durch eine intensivere Reaktion auszeichnet. Wie man mittels der Methode der ersten Näherung (Abschnitt 3.4) feststellen kann, ist die gewünschte Ruhelage  $\underline{x}_R$  instabil. Das wird durch die Simulation im Bild 3/37 illustriert, welche die Entstehung einer stabilen Grenzschwingung bei Start in der Nähe der Ruhelage  $\underline{x}_R$  zeigt.

Um den Rührkessel im Arbeitspunkt  $\underline{x}_R$  zu betreiben, ist also eine Regelung notwendig. Um sie mit der Methode der Gütemaßangleichung entwerfen zu können, ist es erforderlich, zu den Abweichungen von der Ruhelage  $\underline{x}_R$  überzugehen

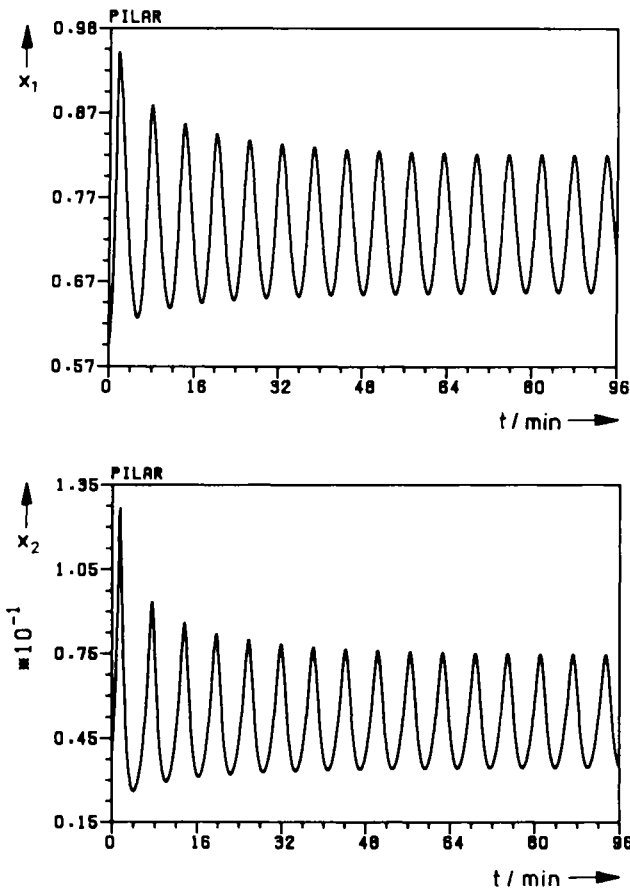


Bild 3/37 Zeitverhalten des unregelmäßig betriebenen Rührkesselreaktors für  $u = 0$  und  $\underline{x}(0) = [0,6; 0,04]^T$

und die formal lineare Darstellung einzuführen. Im Hinblick auf die letztgenannte Maßnahme schreiben wir die Zustandsdifferentialgleichungen (3.138/139) etwas um:

$$\dot{x}_1 = -[a_1 + \rho(x_2)]x_1 + \rho(x_2), \quad (3.143)$$

$$\dot{x}_2 = -a_{22}\rho(x_2)x_1 - a_{21}x_2 + a_{22}\rho(x_2) + bu, \quad (3.144)$$

wobei

$$\rho(x_2) = k_0 e^{-\frac{\epsilon}{1+x_2}}. \quad (3.145)$$

Mit

$$x_1 = x_{1R} + \Delta x_1, \quad x_2 = x_{2R} + \Delta x_2$$

wird daraus

$$(\Delta x_1)' = -[a_1 + \rho(x_2)]\Delta x_1 - [a_1 + \rho(x_2)]x_{1R} + \rho(x_2), \quad (3.146)$$

$$(\Delta x_2)' = -a_{22}\rho(x_2)\Delta x_1 - a_{22}\rho(x_2)x_{1R} - a_{21}x_{2R} - a_{21}\Delta x_2 + a_{22}\rho(x_2) + bu. \quad (3.147)$$

In der formal linearen Darstellung muß die erste dieser Gleichungen von der Form

$$(\Delta x_1)' = A_{11}(\underline{x})\Delta x_1 + A_{12}(\underline{x})\Delta x_2$$

sein. Der erste Summand in (3.146) hat diese Form, nicht jedoch der restliche Ausdruck

$$r(x_2) = -[a_1 + \rho(x_2)]x_{1R} + \rho(x_2). \quad (3.148)$$

Man kann nicht einfach  $\Delta x_2$  herausziehen, da sonst der Faktor von  $\Delta x_2$  für  $x_2 \rightarrow x_{2R}$ , also  $\Delta x_2 \rightarrow 0$ , ein ungeklärtes Verhalten hätte.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, betrachten wir die Zustandsdifferentialgleichung (3.146) in der Ruhelage  $\underline{x}_R$ , also für  $\Delta x_1 = 0$ :

$$0 = -[a_1 + \rho(x_{2R})]x_{1R} + \rho(x_{2R}).$$

Diesen Nullausdruck subtrahieren wir vom Ausdruck (3.148), wodurch sich dessen Wert nicht ändert, und erhalten so

$$\begin{aligned} r(x_2) &= -a_1 x_{1R} - \rho(x_2)x_{1R} + \rho(x_2) + a_1 x_{1R} + \rho(x_{2R})x_{1R} - \rho(x_{2R}), \\ r(x_2) &= (1 - x_{1R})[\rho(x_2) - \rho(x_{2R})]. \end{aligned}$$

Nunmehr ist es möglich,  $\Delta x_2 = x_2 - x_{2R}$  herauszuziehen:

$$r(x_2) = (1 - x_{1R}) \frac{\rho(x_2) - \rho(x_{2R})}{x_2 - x_{2R}} \Delta x_2.$$

Da  $\rho(x_2)$  an der Stelle  $x_{2R}$  differenzierbar ist, strebt der obige Differenzenquotient gegen  $\rho'(x_{2R})$ , womit die frühere Unklarheit beseitigt ist.

Insgesamt wird so aus der Zustandsdifferentialgleichung (3.146)

$$(\Delta x_1)' = -[a_1 + \rho(x_2)]\Delta x_1 + (1 - x_{1R}) \frac{\rho(x_2) - \rho(x_{2R})}{x_2 - x_{2R}} \Delta x_2.$$

Ganz entsprechend kann man die Zustandsdifferentialgleichung (3.147) umformen. Man gelangt so zu der formal linearen Darstellung

$$(\underline{\Delta x})' = \underline{A}(x)\underline{\Delta x} + \underline{b}u \quad (3.149)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{A}(x) &= \begin{bmatrix} -a_1 - \rho(x_2) & (1 - x_{1R}) \frac{\rho(x_2) - \rho(x_{2R})}{x_2 - x_{2R}} \\ -a_{22} \rho(x_2) & -a_{21} + a_{22} (1 - x_{1R}) \frac{\rho(x_2) - \rho(x_{2R})}{x_2 - x_{2R}} \end{bmatrix}, \\ \underline{b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Setzt man in  $\underline{A}(x)$   $x = x_R + \underline{\Delta x}$ , so kann man  $\underline{A}$  auch als Funktion von  $\underline{\Delta x}$  statt von  $x$  ausdrücken.

Wie man sieht, hängt  $\underline{A}$  nur von  $x_2$ , also von der normierten Temperatur, ab. Diese kann ohne Schwierigkeit gemessen werden, stellt also die Meßgröße  $y$  dar:

$$y = x_2.$$

Hingegen liegt die Konzentration  $x_1$  normalerweise nicht als Meßgröße vor. Will man einen Beobachter vermeiden, ist man also gezwungen, eine Ausgangsrückführung zu entwerfen. Dies ist mit dem Verfahren der Gütemaßangleichung in der Tat möglich, weil eben  $\underline{A}$  nur von  $y$  abhängt.

Der Entwurf des Reglers

$$u = -k(y)y$$

erfolgt nun in der beschriebenen Weise. Zu der um  $\underline{x}_R$  linearisierten Strecke wird die lineare Ausgangsrückführung

$$u = -K_R y$$

entworfen. Das entspricht dem in der Praxis üblichen Betrieb des Rührkesselreaktors bei Änderungen des Arbeitspunktes. Im vorliegenden Fall wurde  $K_R = 0,8$  gewählt<sup>26)</sup>. Dann sind die Matrizen der linearen Vergleichsregelung

$$\underline{A}_L = \begin{bmatrix} -0,957 & 5,98 \\ -0,323 & 0,986 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5476 \end{bmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte lauten

$$\lambda_{1,2} = -0,605 \pm j1,344.$$

Die IL-Funktion wurde mit der Gewichtungsmatrix  $\tilde{\underline{P}} = \underline{I}_2$  angesetzt und führt zu

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0,5633 & -0,6154 \\ -0,6154 & 10,4392 \end{bmatrix}.$$

Der Reglerfaktor  $k(y)$  ergibt sich aus (3.136) bzw. (3.137) als Linearkombination der Elemente von  $\underline{A}(y)$ , zuzüglich einer additiven Konstante:

<sup>26)</sup> Vergleiche hierzu R. Sommer: Synthese nichtlinearer, zeitvarianter Systeme mit Hilfe einer kanonischen Form. VDI-Verlag, 1981. Unterabschnitt 3.4.4.

$$k(y) = c_{00} + c_{11}A_{11}(y) + c_{12}A_{12}(y) + c_{21}A_{21}(y) + c_{22}A_{22}(y) \quad (3.151)$$

mit festen Zahlen  $c_{\mu\nu}$  und

$$\left. \begin{aligned} A_{11}(y) &= -a_1 - \rho(y), \\ A_{12}(y) &= (1 - x_{1R}) \frac{\rho(y) - \rho(y_R)}{y - y_R}, \\ A_{21}(y) &= -a_{22}\rho(y), \\ A_{22}(y) &= -a_{21} + a_{22} (1 - x_{1R}) \frac{\rho(y) - \rho(y_R)}{y - y_R} \end{aligned} \right\} \quad (3.152a)$$

mit

$$\rho(y) = k_0 e^{-\frac{\epsilon}{1+y}}. \quad (3.152b)$$

Setzt man (3.152) in (3.151) ein, so erhält man als nichtlineares Regelungsgesetz

$$u = -k(y)y = - \left[ C_0 y + C_1 y e^{-\frac{\epsilon}{1+y}} + C_2 y \frac{e^{-\frac{\epsilon}{1+y}} - e^{-\frac{\epsilon}{1+y_R}}}{y - y_R} \right],$$

$$C_0, C_1, C_2 \text{ konstant.} \quad (3.153)$$

Der lineare Regler  $u = -C_0 y$  wird durch die beiden nachfolgenden nichtlinearen Terme ergänzt, welche die wesentliche Nichtlinearität der Strecke enthalten.

In dem hier betrachteten numerischen Beispiel ist

$$\begin{aligned} k(y) &= 0,021A_{11}(y) - 0,019A_{12}(y) + 0,365A_{21}(y) + \\ &+ 0,646A_{22}(y) - 0,377. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Die Wirkung dieses nichtlinearen Reglers wird durch Bild 3/38 veranschaulicht. An die Stelle der im unregulierten Zustand auftretenden Dauerschwingung tritt ein schnell abklingender, gut gedämpfter Vorgang. Verglichen mit dem linearen Regler (gestrichelte Kurve) sind die Ausschläge erheblich geringer. Insbesondere wird die beim linearen Regler auftretende sehr hohe Temperaturspitze im  $x_2$ -Verlauf, die unter Umständen nicht mehr toleriert werden kann, durch den

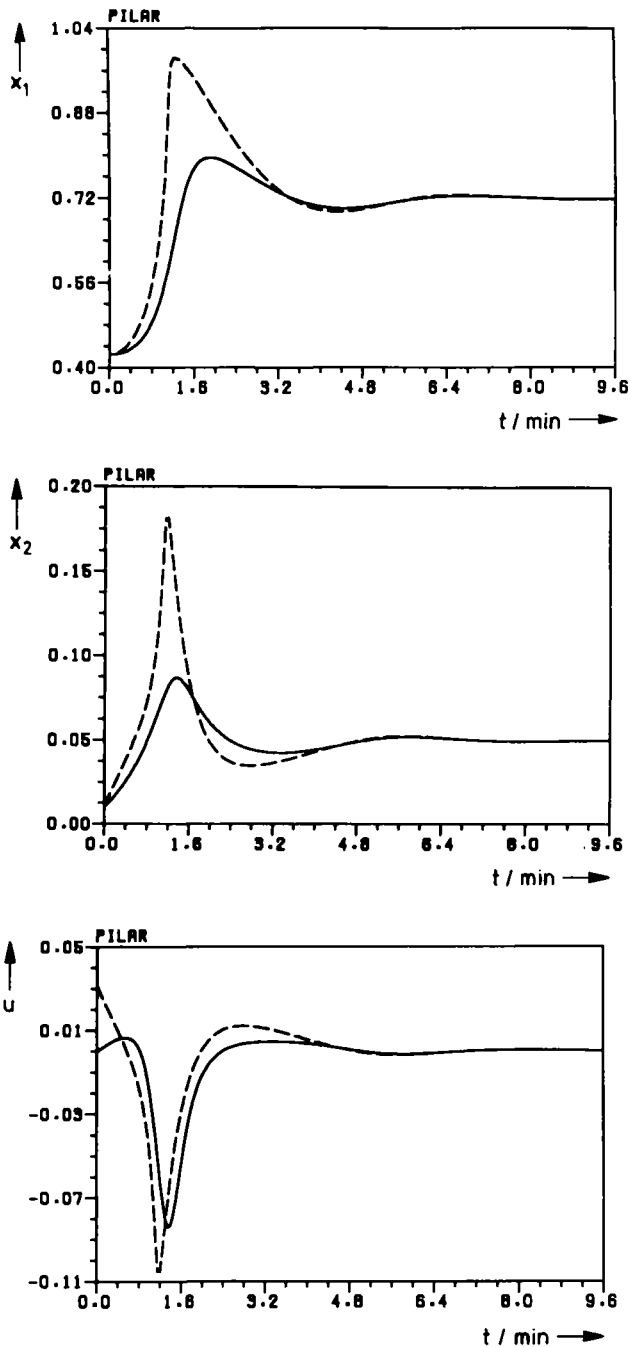


Bild 3/38 Regelung des Rührkesselreaktors  
 — Nichtlinear geregelte nichtlineare Strecke  
 - - - Linear geregelte nichtlineare Strecke



nichtlinearen Regler stark herabgedrückt. Dabei ist der Stellbetrag der nichtlinearen Regelung niedriger als im linearen Fall. Im realen Betrieb läuft dies darauf hinaus, daß der neue Arbeitspunkt mit dem nichtlinearen Regler schneller angefahren werden kann als mit dem linearen Regler, da dieser bei schneller Fahrweise unzulässige Temperaturspitzen erzeugt.

Bild 3/39 bringt die Wirksamkeit der Gütemaßangleichung zum Ausdruck, indem es die Zustandsverläufe der nichtlinearen Regelung und der linearen Vergleichsregelung nebeneinanderstellt. Man erkennt, daß in der Tat die durch die nichtlineare Regelung erzeugten Zustandsverläufe sich an die entsprechenden Verläufe der linearen Ersatzregelung weitgehend angleichen.

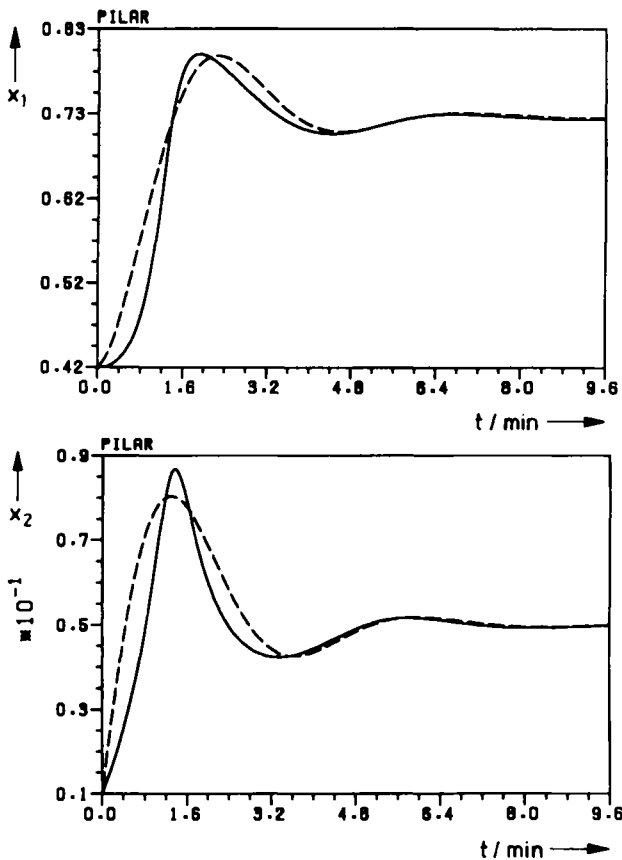


Bild 3/39 Vergleich von nichtlinearer Regelung und linearer Vergleichsregelung beim Rührkesselreaktor

- Nichtlinear geregelte nichtlineare Strecke (— aus Bild 3/38)
- Linear geregelte linearisierte Strecke (lineare Vergleichsregelung)

Zum Schluß wollen wir noch einen Blick auf die Stabilitätssituation des geregelten Rührkesselreaktors werfen! Bild 3/40 zeigt den Teil des Einzugsbereiches von  $\underline{x}_R = [0,72; 0,05]^T$ , welcher durch die von uns konstruierte IL-Funktion gesichert wird.

Der Ursprung ist in die Ruhelage verlegt, so daß also die Abweichungen  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  als Koordinaten auftreten. Das strichpunktiert umrahmte Rechteck entspricht dem Bereich technisch sinnvoller Auslenkungen, der zu

$$0\% \leq c \leq 100\%, \quad -20^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C}$$

angenommen wurde. Der gesicherte Teil des Einzugsbereiches, welcher durch die Ellipse C, eine Höhenlinie unserer IL-Funktion, berandet ist, wurde durch das am Schluß von Unterabschnitt 3.6.3 skizzierte numerische Verfahren ermittelt. Der ursprüngliche Arbeitspunkt

$$\underline{x}_0 = [0,42; 0,01]^T \quad \text{bzw.} \quad \underline{\Delta x}_0 = [-0,30; -0,04]^T,$$

aus dem das System in den neuen Arbeitspunkt  $\underline{x}_R$  überführt wird, ist dort eingezeichnet. Die gestrichelte Kurve D, welche C umschließt, stellt den Teil des Einzugsbereiches von  $\underline{x}_R$  dar, der sich mit dem im Unterabschnitt 3.6.2 erwähnten Verfahren von *Davison* und *Kurak* garantieren läßt.

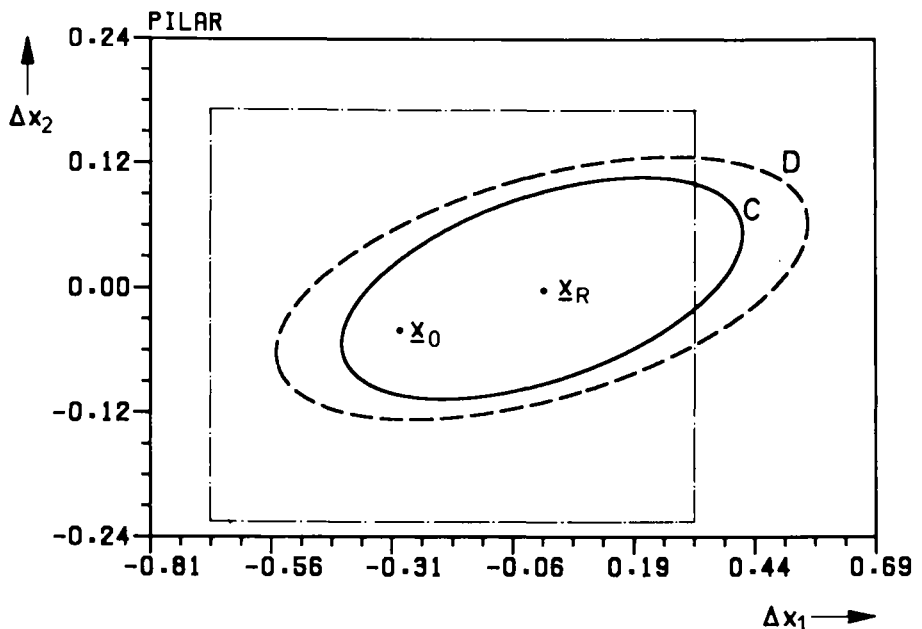


Bild 3/40 Stabilitätsbetrachtung zum geregelten Rührkesselreaktor