

Übungsaufgaben mit Lösungen zu Band I

Aufgabe 1

Wie lauten die Zustandsgleichungen des im Bild A1 dargestellten Regelkreises? $G(s)$ ist eine rationale Übertragungsfunktion n -ter Ordnung mit einfachen Polen, deren Zählergrad höchstens gleich dem Nennergrad ist.

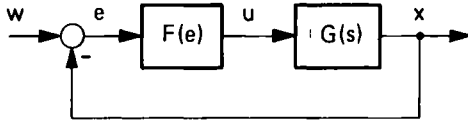


Bild A1

Aufgabe 2

Ein Totzeitglied und ein Kennlinienglied sind gemäß Bild A2 in Reihe geschaltet. Kann man sie vertauschen, ohne den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ zu verändern?

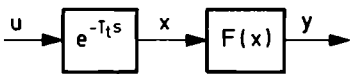


Bild A2

Aufgabe 3

Zwei Fälle werden betrachtet:

$$R(s) = K_R \quad (\text{P-Regler}),$$

$$R(s) = K_R \frac{1+3s}{1+0,3s} \quad (\text{realer PD-Regler}).$$

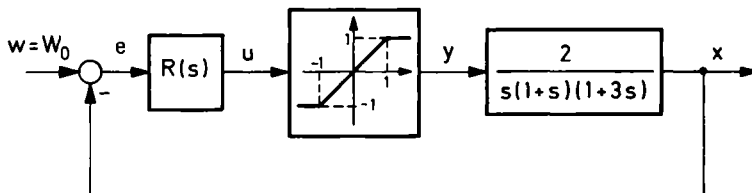


Bild A3

- Man bestimme den Ruhezustand des nichtlinearen Regelkreises.
- Man beschreibe den Regelkreis in Abweichungen vom Ruhezustand und skizziere den zugehörigen Standardregelkreis.

- c) Warum verliert der PD-Regler bei großen sprungförmigen Sollwertänderungen seine dynamischen Vorzüge gegenüber dem P-Regler?

Aufgabe 4

Im Regelkreis von Bild A3 wird die Begrenzungskennlinie durch das Dreipunktglied nach Bild A4 ersetzt.

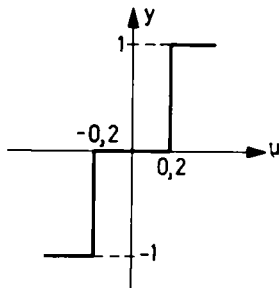


Bild A4

Wie steht es mit der stationären Genauigkeit?

Aufgabe 5

Das Stabilitätsverhalten des im Bild A5 dargestellten Regelkreises mit Zweipunktglied und instabilem linearem Teilsystem ist in der Zustandsebene zu untersuchen.

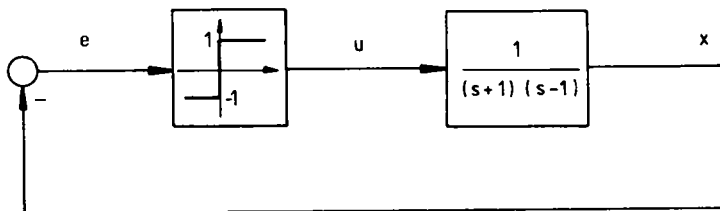


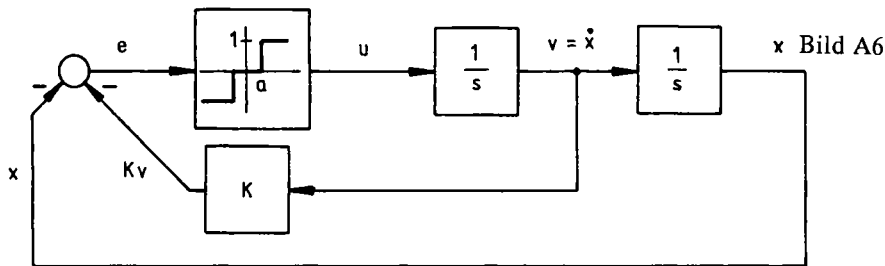
Bild A5

Aufgabe 6

Das Verhalten der im Bild A6 dargestellten Regelung mit Dreipunktglied und innerer Rückführung ist zu untersuchen.

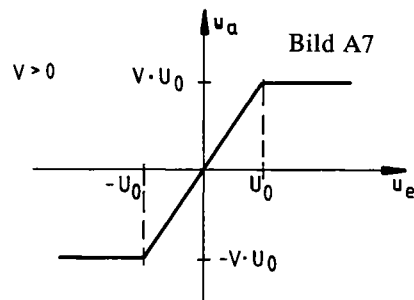
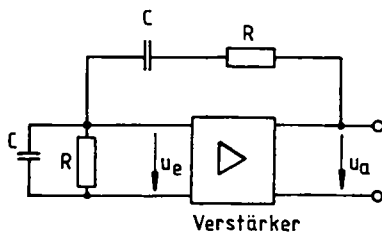
- Die Trajektorien des linearen Teilsystems $X(s) = \frac{1}{s^2}U(s)$ sind zu berechnen.
- Man setze zunächst $K = 0$ und skizziere die Trajektorien des geschlossenen Kreises.

- c) Welchen Einfluß hat die Rückführung $K > 0$ auf die Schaltlinie?
d) Die Trajektorien des geschlossenen Regelkreises sind zu skizzieren.
e) Die Ruhelage des Regelkreises ist anzugeben. Wie ist ihr Stabilitätsverhalten?
f) Auf welchen Teilen der Schaltlinien können Gleitvorgänge auftreten? Welchen Differentialgleichungen genügen diese?



Aufgabe 7

Bild A7 zeigt einen RC-Generator, d.h. einen beschalteten elektronischen Verstärker zur Erzeugung von Schwingungen.



Die RC-Beschaltung des Verstärkers wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{u}_e + \frac{3}{RC}\dot{u}_e + \frac{1}{(RC)^2}u_e = \frac{1}{RC}\dot{u}_a \quad (\text{A1})$$

beschrieben. Das Verhalten des unbeschalteten Verstärkers ist durch die Begrenzungskennlinie im rechten Teil von Bild A7 charakterisiert.

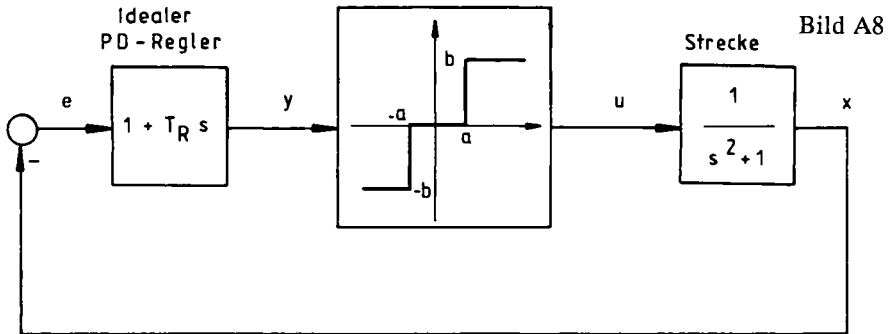
Das Verhalten des beschalteten Verstärkers ist qualitativ in der Zustandsebene zu beschreiben.

Aufgabe 8

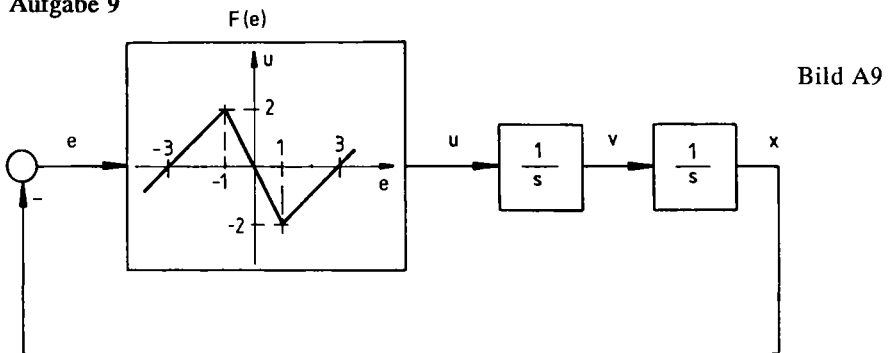
Die Strecke stellt hier ein ungedämpftes Schwingungsglied dar.

- a) Ihre Trajektorien sind zu berechnen.

- b) Die Schaltlinien des Regelkreises sind zu bestimmen.
 c) Man skizziere die Trajektorien des geschlossenen Kreises.
 d) Existiert ein Grenzyklus? Wie ist das Stabilitätsverhalten der Ruhelage?



Aufgabe 9



- a) Die Ruhelagen des Regelkreises sind zu bestimmen.
 b) Man berechne die Trajektorien des geschlossenen Kreises für $e \leq -1$, $e \geq 1$, $-1 \leq e \leq 1$.
 c) Daraus skizziere man die Trajektorien des Regelkreises für beliebiges e . Wie ist das Stabilitätsverhalten der Ruhelagen?

Aufgabe 10

Der P-Regler im Bild A10 sei umschaltbar zwischen zwei Werten K_{P1} und K_{P2} . Wie sind sie zu wählen und wie ist die Umschaltstrategie zu wählen, damit die Ruhelage der Regelung global asymptotisch stabil wird?

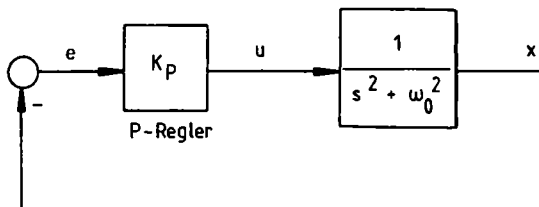


Bild A10

Aufgabe 11

Das Bild A11a zeigt die elektronische Schaltung eines einfachen Oszillators zur Erzeugung von Kippschwingungen, wie er häufig in der Digitaltechnik angewandt wird.

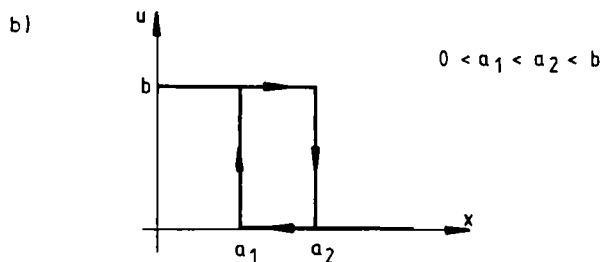
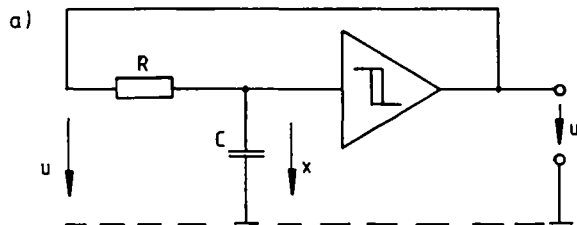


Bild A11

Sie ist aufgebaut aus einem RC-Tiefpaß mit der Übertragungsgleichung

$$X(s) = \frac{1}{1 + RCs} U(s)$$

und einem invertierenden Schmitt-Trigger, der durch seine Kennlinie im Bild A11b charakterisiert ist.

Die Schaltung in der Zustandsebene ist zu untersuchen:

- Man bestimme die Trajektorien des linearen Teilsystems.
- Man berechne und skizziere die Schaltlinie.
- Die Trajektorien des gesamten Oszillators sind zu bestimmen.
- Wie groß muß man die Kapazität C wählen, damit sich bei gegebenem Widerstand R und gegebener Kennlinie eine gewünschte Periodendauer T einstellt?

Aufgabe 12

Im Abschnitt 2.5 wurde erwähnt, daß es manchmal möglich ist, ein System höherer Ordnung durch Einführung unterlagerter Regelkreise näherungsweise auf eine Reihenschaltung zweier I-Glieder zurückzuführen und diese dann zeitopti-

mal zu regeln. Dieser zeitoptimale Entwurf soll hier näher ausgeführt werden, wobei vom Bild A12 ausgegangen wird

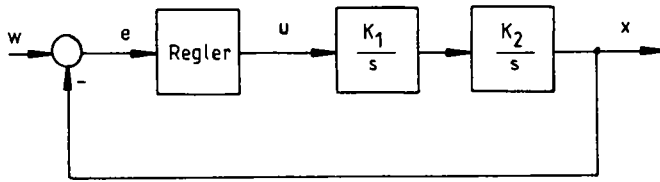


Bild A12

Die Führungsgröße w sei stückweise konstant. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird vom Wert $w = W_0$ auf den Wert $w = W_1 = W_0 + W_\Delta$ umgeschaltet. Die Regelgröße x soll in kürzestmöglicher Zeit t_e den neuen Führungswert annehmen und festhalten. Dabei sei $u(t)$ beschränkt: $|u(t)| \leq M$. Dann liegt die zeitoptimale Stellfunktion $u(t)$ am oberen oder unteren Anschlag und weist dabei nur eine Umschaltung auf.

- Man formuliere das Problem in der Zustandsebene.
- Man berechne die Trajektorien der Strecke.
- Dann ermittle man die optimale Schaltlinie.
- Schließlich bestimme man das zeitoptimale Regelungsgesetz.
- Was ist zu tun, wenn zusätzlich auch noch $\dot{e} = v$ beschränkt ist, z.B. deshalb, weil bei einem elektromechanischen System die Geschwindigkeit nicht zu groß werden darf?

Aufgabe 13

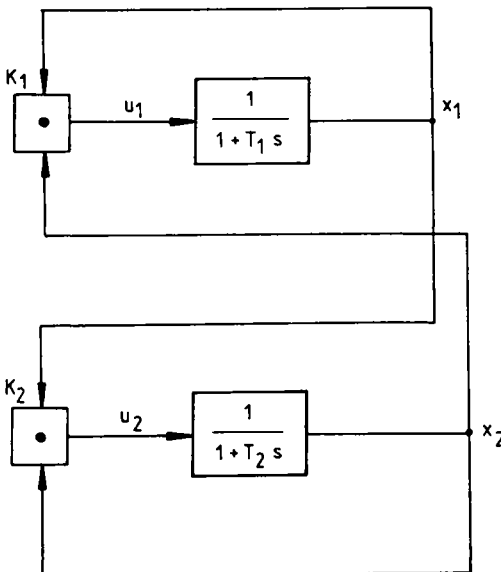


Bild A13

Bild A13 zeigt ein System mit multiplikativer Kopplung, wobei sämtliche Parameter positiv seien.

- Man bestimme die Ruhelagen des Systems.
- Mit der Direkten Methode untersuche man das Stabilitätsverhalten der Ruhelage $\underline{0}$. Dabei kann man als Ljapunow-Funktion eine gewichtete Quadratsumme der Zustandsvariablen benutzen.
- Das Stabilitätsverhalten der zweiten Ruhelage untersuche man mit der Methode der ersten Näherung.

Aufgabe 14

Das nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_3,$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - 4x_3$$

soll mit der Direkten Methode untersucht werden. Die Ljapunow-Funktion ist nach dem Verfahren von *M. A. Aiserman* zu konstruieren.

Aufgabe 15

Das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems im Bild A14 ist mit der Direkten Methode zu untersuchen. Man kann die Ljapunow-Funktion als gewichtete Quadratsumme der Zustandsvariablen ansetzen.

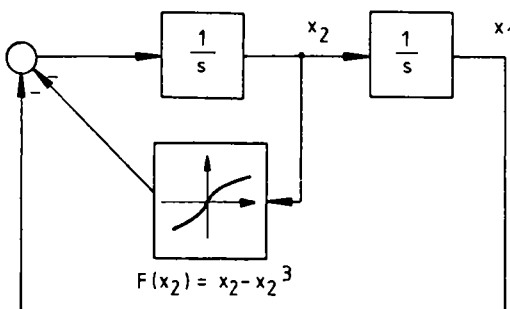


Bild A14

Aufgabe 16

Die Führungsgröße des Regelkreises im Bild A15 sei konstant: $w = W_0 > 0$. Mit der Methode der ersten Näherung ist festzustellen, für welche Werte W_0 der Regelkreis asymptotisch stabil ist.

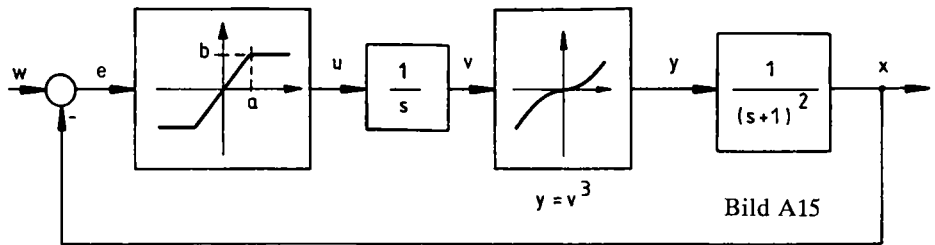


Bild A15

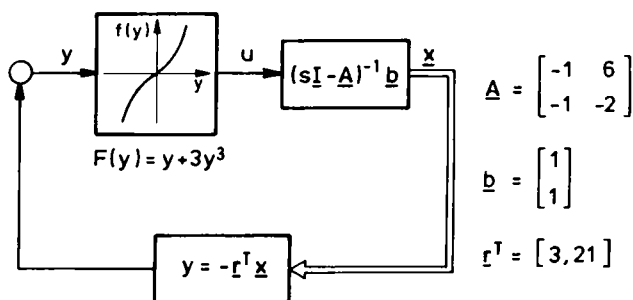
Aufgabe 17

- Man stelle die Zustandsdifferentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises auf.
- Man bestimme die Ruhelage \underline{x}_R des Regelkreises.
- Mit Hilfe der Methode der ersten Näherung zeige man, daß die Ruhelage asymptotisch stabil ist.
- Mit der Direkten Methode von Ljapunow soll gezeigt werden, daß die Ruhelage des Regelkreises sogar global asymptotisch stabil ist. Dabei hat eine geeignete Ljapunow-Funktion die Form

$$V = (\underline{x} - \underline{x}_R)^T \underline{P} (\underline{x} - \underline{x}_R).$$

Bei der Bildung von \dot{V} verwende man die Gleichung

$$\underline{x}^T \underline{P} \underline{b} = -y. \quad (\text{A2})$$



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^T = [3, 21]$$

Bild A16

Aufgabe 18

Für das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x_2^4 + u \end{aligned}$$

mit der Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$, $u_R = 0$ soll durch Anwendung des im Abschnitt 3.6 beschriebenen Verfahrens der Gütemaßgleichung eine nichtlineare Regelung entworfen werden. Die vorab berechnete lineare Vergleichsregelung habe dabei die Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

Weiterhin seien die Anfangsstörungen um die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ etwa gleichverteilt.

Lösung von Aufgabe 1

Partialbruchzerlegung von $G(s)$:

$$G(s) = \sum_{\nu=1}^n \frac{r_\nu}{s - \lambda_\nu} + r_0.$$

Definition der Zustandsvariablen:

$$X_\nu(s) = \frac{1}{s - \lambda_\nu} U(s), \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Dann Zustandsgleichungen zu $G(s)$:

$$\dot{x}_\nu = \lambda_\nu x_\nu + u, \quad \nu = 1, \dots, n, \quad (L1)$$

$$x = \sum_{\nu=1}^n r_\nu x_\nu + r_0 u. \quad (L2)$$

Dazu kommt die Rückführung

$$u = F(e) = F(w - x). \quad (L3)$$

Eingangsgröße des *geschlossenen* Regelkreises ist w , Ausgangsgröße x . Aus (L1) bis (L3) ist daher u zu eliminieren.

Fall I: $r_0 = 0$, d.h. der Zählergrad von $G(s)$ ist kleiner als der Nennergrad.

$$\begin{aligned}\dot{x}_\nu &= \lambda_\nu x_\nu + F \left[w - \sum_{\nu=1}^n r_\nu x_\nu \right], \\ x &= \sum_{\nu=1}^n r_\nu x_\nu.\end{aligned}$$

Fall II: $r_0 \neq 0$, d.h. der Zählergrad von $G(s)$ ist gleich dem Nennergrad (wird praktisch selten vorkommen).

Setzt man abkürzend $v = \sum_{\nu=1}^n r_{\nu} x_{\nu}$, so hat man aus den Gleichungen

$$x = v + r_0 u, \quad (\text{L4})$$

$$e = w - x, \quad (\text{L5})$$

$$u = F(e) \quad (\text{L6})$$

u in Abhängigkeit von der Eingangsgröße w darzustellen. Aus (L4) und (L6) folgt

$$x = v + r_0 F(e),$$

also wegen (L5)

$$e + r_0 F(e) = w - v. \quad (\text{L7})$$

Der Ausdruck

$$f(e) = e + r_0 F(e) \quad (\text{L8})$$

stellt eine neue Kennlinie dar, die mit $F(e)$ bekannt ist. Setzt man voraus, daß $F(e)$ streng monoton ist, so gilt dies wegen $r_0 = G(0) > 0$ auch für $f(e)$. Dann existiert die inverse Kennlinie f^{-1} zu f , und man erhält aus (L7)

$$e = f^{-1}(w - v)$$

oder

$$x = w - f^{-1}(w - v). \quad (\text{L9})$$

Damit wird aus (L4):

$$u = \frac{1}{r_0} \left[w - v - f^{-1}(w - v) \right].$$

Nach (L1), (L2) lauten die Zustandsgleichungen somit

$$\dot{x}_{\nu} = \lambda_{\nu} x_{\nu} + \frac{1}{r_0} \left[w - \sum_{i=1}^n r_i x_i - f^{-1} \left[w - \sum_{i=1}^n r_i x_i \right] \right], \quad \nu = 1, \dots, n,$$

$$x = w - f^{-1} \left[w - \sum_{i=1}^n r_i x_i \right],$$

letzteres wegen (L9).

Lösung von Aufgabe 2

Es gilt: $x(t) = u(t - T_t)$, $y(t) = F[x(t)]$, also

$$y(t) = F[u(t - T_t)] .$$

Nach Vertauschung der beiden Übertragungsglieder hat man $x^*(t) = F[u(t)]$,
 $y^*(t) = x^*(t - T_t)$, also

$$y^*(t) = F[u(t - T_t)] .$$

Also: $y^*(t) = y(t)$ (obgleich die Zwischengrößen x und x^* verschieden sind).
 D.h.: Totzeitglied und Kennlinienglied sind vertauschbar, ohne daß sich der Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ ändert.

Ersetzt man aber das Totzeitglied durch ein *beliebiges* lineares Übertragungsglied, so gilt diese Vertauschungsregel *nicht* mehr.

Lösung von Aufgabe 3

a) Da das lineare Teilsystem ein I-Glied enthält, kann es nur zur Ruhe kommen, wenn seine Eingangsgröße Null wird:

$$y_R = 0 .$$

Daraus folgt weiter:

$$u_R = 0 , \text{ wegen der Gestalt der Kennlinie;}$$

$$e_R = 0 , \text{ wegen } u_R = K_R e_R, K_R \neq 0;$$

$$x_R = W_0 , \text{ wegen } e_R = W_0 - x_R .$$

Die Regelung ist also stationär genau. Die Begrenzung der Stellgröße y spielt dabei keine Rolle, weil die Begrenzung im Ruhezustand im Nullpunkt angesteuert wird.

b) Beim Übergang zu den Abweichungen von der Ruhelage bleiben die linearen Teilsysteme unverändert, während die Kennlinie in einem parallel verschobenen Koordinatensystem mit dem Ursprung (u_R, y_R) zu beschreiben ist. Wegen $u_R = y_R = 0$ fällt hier das neue Koordinatensystem mit dem ursprünglichen zusammen und die Darstellung der Kennlinie bleibt unverändert. Verlegt man den Regler entgegen der Wirkungsrichtung, so erhält man den Standardregelkreis im Bild L1.

Faßt man die beiden linearen Blöcke zusammen, so ergibt sich für beide Reglertypen die gleiche Struktur, weil die Zählerzeitkonstante des PD- Reglers gerade

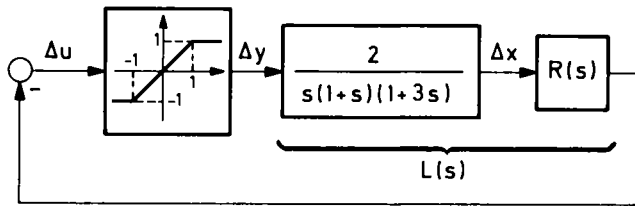


Bild L1

so gewählt ist, daß sie die größte Nennerzeitkonstante der Strecke kompensiert:
Bild L2. Darin ist

$$T_2 = \begin{cases} 3 & \text{für P-Regelung,} \\ 0,3 & \text{für PD-Regelung.} \end{cases}$$

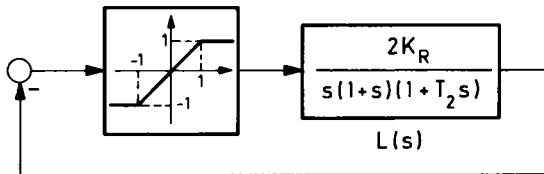


Bild L2

c) Der Sollwertsprung erfolge in $t = 0$. Mit w springt auch e , da sich x wegen des Verzögerungsverhaltens der Strecke stetig ändert. Dann gilt für den P-Regler

$$u(+0) = K_R e(+0),$$

für den PD-Regler

$$\begin{aligned} u(+0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sU(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot K_R \frac{1+3s}{1+0,3s} E(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} K_R \frac{\frac{1}{s} + 3}{\frac{1}{s} + 0,3} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = 10K_R e(+0). \end{aligned}$$

Der PD-Regler hat somit dynamisch einen weit größeren Verstärkungsfaktor als stationär, was zu hohen Anfangsspitzen der Funktion $u(t)$ führt. Darauf beruht die stärkere Wirkung des PD-Reglers gegenüber dem P-Regler. Ist aber eine nachgeschaltete Begrenzung vorhanden, so werden diese Spitzen abgeschnitten und können nicht auf die Strecke einwirken.

Lösung von Aufgabe 4

Wegen des I-Gliedes im linearen Teilsystem ist zunächst wieder

$$y_R = 0.$$

Hierzu gehört aber, im Gegensatz zur Begrenzungskennlinie, kein eindeutiger Wert u_R . Vielmehr ist jeder Wert aus dem Intervall

$$-0,2 < u_R < 0,2$$

möglich. Wegen

$$e_R = \frac{1}{K_R} u_R$$

gilt für die bleibende Regeldifferenz

$$-\frac{0,2}{K_R} < e_R < \frac{0,2}{K_R}.$$

Dieser nichtlineare Regelkreis hat also, verursacht durch die Unempfindlichkeitszone des Dreipunktgliedes, unendlich viele Ruhelagen. Welche sich einstellt, hängt vom Anfangszustand und der Art der Störung ab. *Trotz I-Glied im Vorwärtszweig ist der Regelkreis nicht stationär genau.*

Lösung von Aufgabe 5

Für das lineare Teilsystem im Bild A5 gilt:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} U(s) = \frac{1}{s^2-1} U(s),$$

$$s^2 X(s) - X(s) = U(s),$$

also

$$\ddot{x}(t) = x(t) + u(t).$$

Hierbei ist nach Bild A5

$$u = \begin{cases} -1 & \text{für } e < 0, \text{ also } x > 0, \\ 1 & \text{für } e > 0, \text{ also } x < 0. \end{cases} \quad (\text{L10})$$

Die v -Achse ist also die Schaltlinie.

Zustandsdifferentialgleichungen: $\dot{x} = v$, $\dot{v} = x + u$, also

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x+u}{v}.$$

Trennung der Veränderlichen:

$$v dv = x dx + u dx,$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} x^2 + u x + \text{const},$$

$$(x+u)^2 - v^2 = C, \quad C \text{ Integrationsparameter.}$$

Betrachten wir etwa den Fall $u = -1$:

$$(x-1)^2 - v^2 = C. \quad (\text{L11})$$

Dies sind Hyperbeln mit dem Mittelpunkt $(1,0)$, deren Asymptoten die Steigung 1 haben (g_1 und g_2 im Bild L3). Aus (L11) folgt

$$v = \pm \sqrt{(x-1)^2 - C}.$$

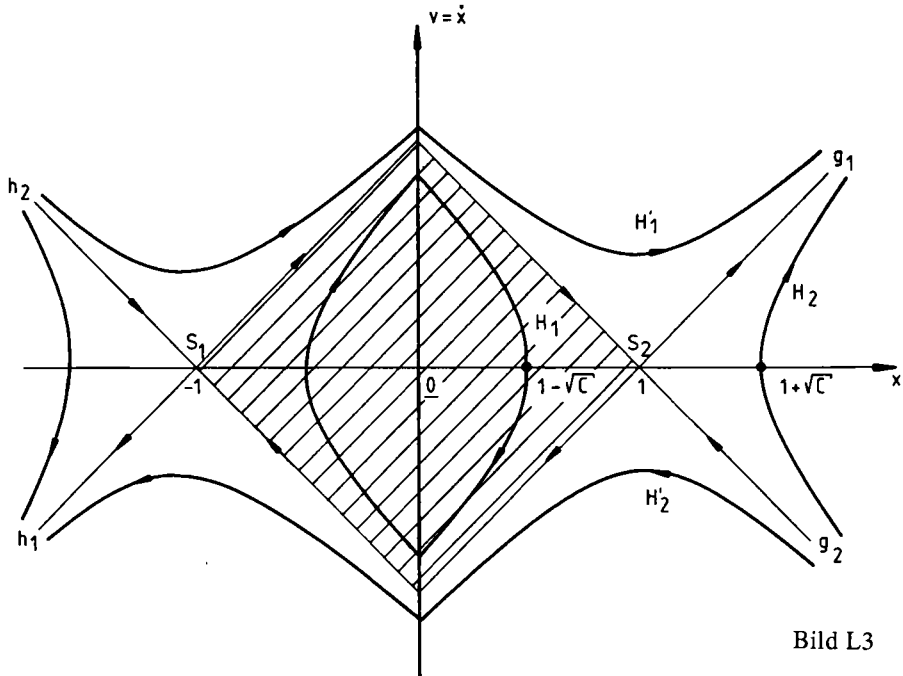


Bild L3

Ist $C < 0$, so kann v niemals Null werden, und man erhält Hyperbeln, deren Hauptachse senkrecht auf der x -Achse steht. Im Bild L3 sind die beiden Äste einer solchen Hyperbel mit H'_1 und H'_2 bezeichnet. Sie sind nur für $x > 0$ eingezeichnet, da nach (L10) in diesem Bereich $u = -1$ gilt. Ist hingegen $C > 0$, so wird $v = 0$, wenn $(x-1)^2 - C = 0$, also $x = 1 \pm \sqrt{C}$ ist. Für solche C -Werte ergeben sich also Hyperbeln, deren Hauptachse in der x -Achse liegt. H_1 und H_2 im Bild L3 sind die beiden Äste einer derartigen Hyperbel, wiederum nur für $x > 0$ eingezeichnet. Für $C = 0$ sind die Asymptoten in der Hyperbelschar enthalten.

Auch im Fall $u = 1$ ergibt sich eine Hyperbelschar. Sie geht durch Spiegelung an der v -Achse aus der Schar zu $u = -1$ hervor. Sie ist im Bild L3 für $x < 0$ eingetragen, da gemäß (L10) in diesem Bereich $u = 1$ ist.

Durch Umschalten an der v -Achse erhält man die Trajektorien des geschlossenen Regelkreises, wie sie im Bild L3 dargestellt sind. Wie man daraus ersieht, gibt es drei Ruhelagen: $\underline{0} = (0,0)$, $S_1 = (-1,0)$, $S_2 = (1,0)$. Hierin ist $\underline{0}$ ein

Wirbelpunkt und somit stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil. Hingegen sind S_1 und S_2 Sattelpunkte und als solche instabil. Zu ihnen gelangt der Zustandspunkt nur, wenn er auf dem oberen bzw. unteren Rand des schraffierten Quadrates im Bild L3 startet. Startet er im Inneren des Quadrates, führt der Regelkreis eine Dauerschwingung aus. Liegt der Anfangspunkt aber außerhalb dieses Quadrates, strebt $x(t)$ ins Unendliche – es sei denn, der Anfangspunkt liegt auf der unteren Hälfte von g_2 oder der oberen Hälfte von h_2 , in welchem Fall der Zustandspunkt (theoretisch) gegen S_1 bzw. S_2 geht.

Lösung von Aufgabe 6

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad X(s) &= \frac{1}{s^2} U(s), \\ s^2 X(s) &= U(s), \\ \ddot{x}(t) &= u(t). \end{aligned}$$

Daraus folgen mit $v = \dot{x}$ die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u,$$

also

$$\frac{dv}{dx} = \frac{u}{v}. \quad (\text{L12})$$

Dabei kann u die Werte 0, 1 und -1 annehmen. Für $u = 0$ ist $dv/dx = 0$, also

$$v = \text{const.}$$

Für $u = \pm 1$ erhält man aus (L12)

$$v^2 = 2ux + C, \quad C \text{ Integrationsparameter.} \quad (\text{L13})$$

Das sind Parabeln, deren Achsen in die x -Achse fallen. Ihr Scheitel ist somit durch $(x_S, 0)$ gegeben. Daraus folgt $C = -2ux_S$. Dies gibt, in (L13) eingesetzt:

$$v^2 = 2u(x - x_S).$$

Somit ist

$$v^2 = 2(x - x_S) \quad \text{für } u = 1: \quad \text{Parabeln nach rechts geöffnet,}$$

$$v^2 = 2(x_S - x) \quad \text{für } u = -1: \quad \text{Parabeln nach links geöffnet.}$$

b) Für $K = 0$ gilt:

$$u = \begin{cases} -1 & \text{für } e < -a \quad \text{oder} \quad x > a, \\ 1 & \text{für } e > a \quad \text{oder} \quad x < -a, \\ 0 & \text{dazwischen.} \end{cases} \quad (\text{L14})$$

Man hat somit in der x - v -Ebene die beiden Schaltlinien $x = -a$ und $x = a$, welche die drei Bereiche mit $u = -1$, $u = 0$ und $u = 1$ trennen (Bild L4). Startet

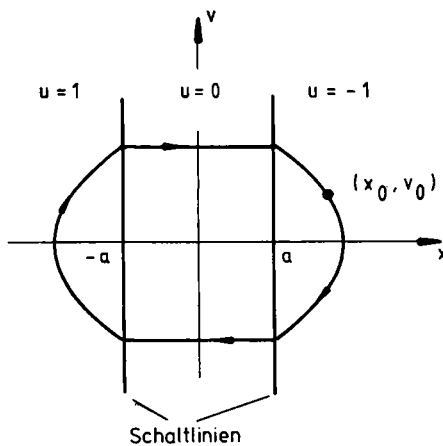


Bild L4

man in irgendeinem Anfangspunkt (x_0, v_0) , so ergibt sich die im Bild L4 skizzierte Trajektorie. Da sie geschlossen ist, führt der Regelkreis eine Dauerschwingung aus.

c) Ist $K > 0$, so liest man aus dem Bild A6 ab:

$$u = \begin{cases} -1 & \text{für } -x - Kv < -a \quad \text{oder} \quad x + Kv > a, \\ 1 & \text{für } -x - Kv > a \quad \text{oder} \quad x + Kv < -a, \\ 0 & \text{dazwischen.} \end{cases}$$

Die beiden Schaltgeraden sind nunmehr

$$\begin{aligned} g_1: x + Kv &= a & \text{oder} & \quad \frac{x}{a} + \frac{v}{a/K} = 1, \\ g_2: x + Kv &= -a & \text{oder} & \quad \frac{x}{-a} + \frac{v}{-a/K} = 1. \end{aligned}$$

Die positive Rückführung K bewirkt somit eine Neigung der Schaltgeraden nach links: Bild L5.

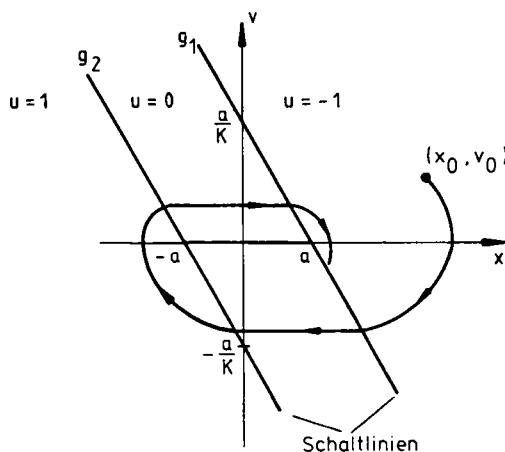


Bild L5

d) Für die Trajektorien des geschlossenen Kreises folgt daraus, daß sie sich spiralartig zusammenziehen (Bild L5).

e) Die Ruhelage ist dadurch gegeben, daß die Eingangsgrößen der Integrierglieder Null sind. Nach Bild A6 muß also $u = 0$ und $v = 0$ sein. Ersteres ist der Fall für $|e| < a$, also $|x + Kv| < a$. Wegen $v = 0$ folgt daraus weiter $|x| < a$. Die Ruhelagen erfüllen somit die Strecke zwischen $-a$ und a auf der x -Achse. Faßt man ihre Gesamtheit als *eine* Ruhelage auf, so ist diese global asymptotisch stabil (Bild L5).

f) Aus dem Trajektorienbild folgt, daß Gleitvorgänge auf der rechten Schaltlinie nur oberhalb der x -Achse, auf der linken Schaltlinie nur unterhalb der x -Achse auftreten können. Bild L6 zeigt dies für den 1. Quadranten. Genau eine der Parabeln zu $u = -1$ berührt die Schaltgerade g_1 . Ist B_1 der Berührungspunkt, so kann der Zustandspunkt die Schaltgerade zwischen B_1 und S_1 nicht überschreiten, muß also auf ihr gleiten.

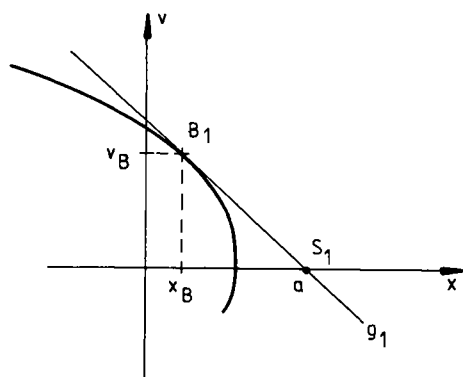


Bild L6

Um B_1 zu berechnen, hat man die Parabel der Schar

$$v^2 = 2(x_S - x), \quad \text{Scharparameter } x_S, \quad (\text{L15})$$

zu bestimmen, welche die Gerade

$$g_1: x + Kv = a \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{1}{K}(a - x) \quad (\text{L16})$$

berührt.

Die Schnittpunkte einer beliebigen derartigen Parabel mit g_1 erhält man durch Einsetzen von (L16) in (L15):

$$\frac{1}{K^2}(a - x)^2 = 2(x_S - x),$$

also

$$x_{1,2} = a - K^2 \pm K \sqrt{K^2 + 2x_S - 2a}.$$

Sollen die beiden Schnittpunkte in einen Berührungspunkt übergehen, muß $x_1 = x_2$ sein, also

$$K^2 + 2x_S - 2a = 0$$

gelten. Daraus folgt der Scharparameter x_S der gesuchten Parabel:

$$x_S = a - \frac{K^2}{2}.$$

Wegen (L15) erhält man für dessen Ordinate

$$v_B^2 = 2(x_S - x_B) = K^2.$$

Damit ist

$$B_1 = (a - K^2, K).$$

Trifft der Zustandspunkt auf die Strecke $\overline{B_1 S_1}$ von g_1 , so wandert er auf ihr zum Punkt $S_1 = (a, 0)$. Dabei genügt er der Gleichung von g_1 . Wegen $v = \dot{x}$ genügt er somit der Differentialgleichung

$$x + K\dot{x} = a \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} = -\frac{1}{K}x + \frac{a}{K}, \quad (\text{L17})$$

also der Differentialgleichung eines P-T₁-Gliedes mit der Zeitkonstante K und dem Verstärkungsfaktor a. Ist t_0 der Zeitpunkt, in dem er auf das Geradenstück g_1 trifft, und x_0 die zugehörige Abszisse, so folgt für den weiteren Zeitverlauf aus (L17):

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-\tau}{K}} \cdot \frac{a}{K} d\tau + e^{-\frac{t-t_0}{K}} x_0$$

oder

$$x(t) = a - (a - x_0)e^{-\frac{t-t_0}{K}}.$$

Der Zustandspunkt "kriecht" also für $t \rightarrow +\infty$ gegen seine Ruhelage $(a, 0)$.

Lösung von Aufgabe 7

Nach Bild A7, rechte Hälfte, ist

$$u_a = \begin{cases} -VU_0 & \text{für } u_e \leq -U_0, \\ VU_0 & \text{für } u_e \geq U_0, \\ Vu_e & \text{für } |u_e| \leq U_0. \end{cases}$$

Ist u_a konstant, also $|u_e| \geq U_0$, so gilt die Differentialgleichung

$$\ddot{u}_e + \frac{3}{RC}\dot{u}_e + \frac{1}{(RC)^2}u_e = 0.$$

Sie ist vom Typ $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$. Da

$$a_1^2 - 4a_0 = \frac{5}{(RC)^2} > 0 \quad \text{und} \quad a_0 = \frac{1}{(RC)^2} > 0,$$

sind gemäß Bild 2/11 die Trajektorien im Bereich $|u_e| \geq U_0$ die Trajektorien eines Knotens. Da die Koeffizienten der Differentialgleichung positiv sind, handelt es sich um einen *stabilen* Knoten. Die Trajektorien streben deshalb nach $(0,0)$.

Im Bereich $|u_e| \leq U_0$ ist $u_a = Vu_e$. Aus (A1) wird deshalb die Differentialgleichung

$$\ddot{u}_e + \frac{3-V}{RC}\dot{u}_e + \frac{1}{(RC)^2}u_e = 0. \quad (L18)$$

Jetzt ist

$$a_1^2 - 4a_0 = \frac{(V-3)^2 - 4}{(RC)^2}.$$

Ist $(V-3)^2 < 4$, also $|V-3| < 2$ oder $-2 < V-3 < 2$ bzw. $1 < V < 5$, so stellt $(0,0)$ nach Bild 2/11 einen Strudelpunkt dar. Im anderen Fall, also für $V \leq 1$ und $V \geq 5$, handelt es sich um einen Knoten.

Man erhält so das Bild L7 für die grundsätzliche Gesatlt der Trajektorienscharen. Ist $V > 3$, so wird ein Koeffizient in der Differentialgleichung (L18) nega-

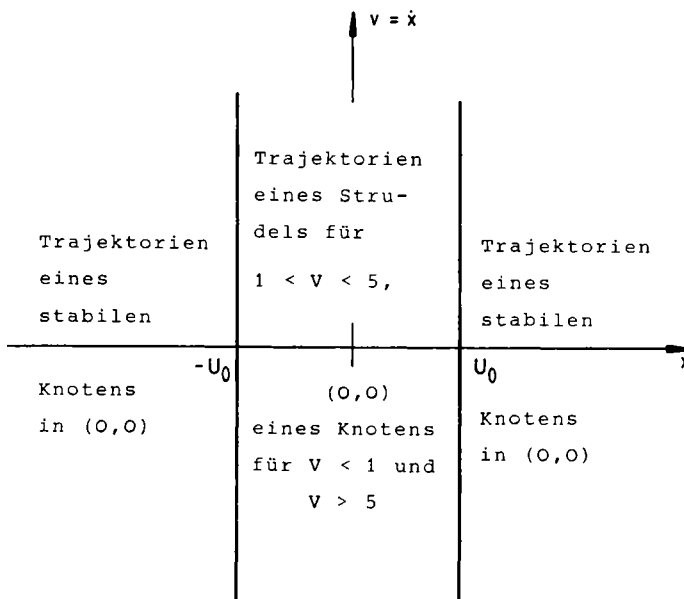


Bild L 7

tiv. Dann ist die Ruhelage $(0,0)$ instabil. Die Trajektorien des mittleren Bereiches sind dann *expandierende* logarithmische Spiralen bzw. Knotenkurven, die von $(0,0)$ wegstreben. Da die Trajektorien der äußeren Bereiche im Bild L7 aber auch dann nach $(0,0)$ hinstreben, muß sich für $V > 3$ zwangsläufig ein Grenzyklus ergeben. Die Schaltung im Bild A7 erzeugt dann wunschgemäß eine Dauerschwingung, genauer gesagt: eine stabile Grenzschiwingung. Bild L8 zeigt einen Rechnerschirieb des Grenzyklus für $RC = 3 \text{ sec}$, $V = 4$ und $U_0 = 0,25 \text{ Volt}$.

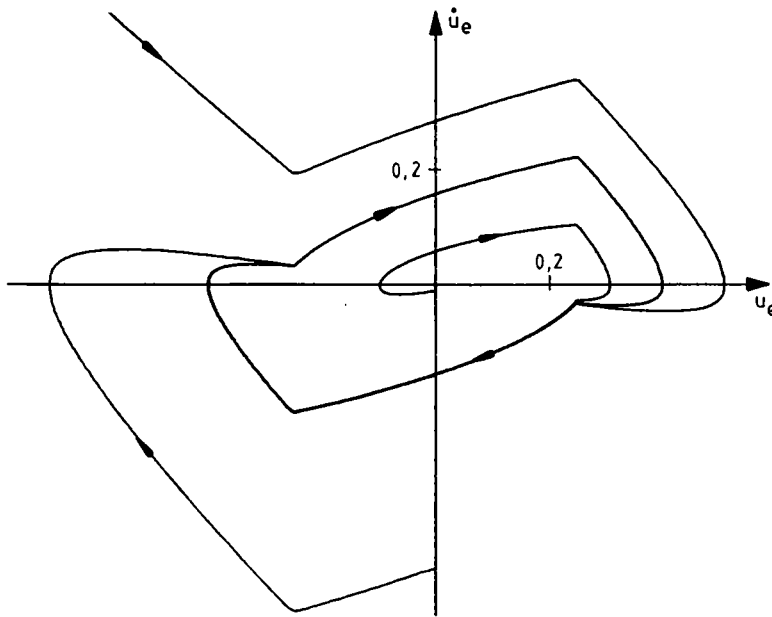


Bild L8

Lösung von Aufgabe 8

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad X(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} U(s), \\ s^2 X(s) + X(s) &= U(s), \\ \ddot{x}(t) &= -x(t) + u(t). \end{aligned}$$

Zustandsdifferentialgleichungen: $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x + u$, also

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{-x+u}{v}, \\ v dv &= -x dx + u dx, \\ \frac{1}{2} v^2 &= -\frac{1}{2} x^2 + ux + \text{const}, \\ x^2 - 2ux + v^2 &= \text{const}, \\ (x - u)^2 + v^2 &= C^2, \quad C \geq 0 : \text{Kreisschar um } (u, 0), \end{aligned}$$

wobei $u = -b, 0, b$.

b) Aus dem Bild A8 liest man ab:

$$Y(s) = (1+T_R s)E(s) = -(1+T_R s)X(s), \text{ also}$$

$$y(t) = -x(t) - T_R \dot{x}(t) \text{ oder}$$

$$y = -(x + T_R v).$$

Damit ist

$$u = \begin{cases} -b & \text{für } y < -a \text{ oder } x + T_R v - a > 0, \\ b & \text{für } y > a \text{ oder } x + T_R v + a < 0, \\ 0 & \text{dazwischen.} \end{cases}$$

Man erhält so Bild L9.

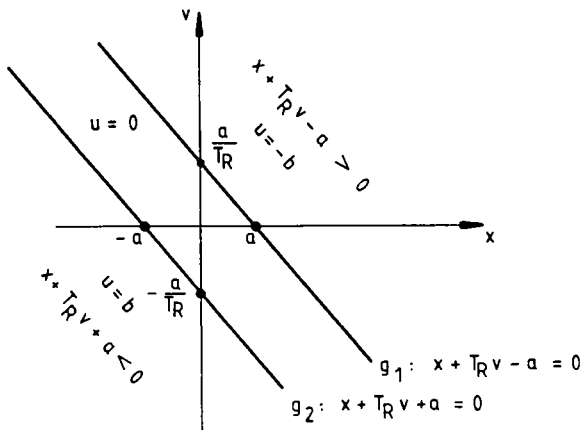


Bild L9

c) Im Bild L10 sieht man die Konstruktion der Trajektorien des geschlossenen Kreises, wobei $a = b = 1$ und $T_R = 1/2$ sowie $(x_0, v_0) = (3, 0)$ gewählt wurde. Rechts der Geraden g_1 gilt $u = -1$, so daß sich der Zustandspunkt auf einem Kreisbogen um $(-1, 0)$ bewegt. Auf g_1 angekommen, geht er auf einen Kreisbogen um $(0, 0)$ über, usw. Es ergibt sich so eine Kurve von spiralförmiger Gestalt, die sich auf den Kreis C zusammenzieht, wobei ein Kriechvorgang von E nach B auf g_1 dazwischengeschaltet ist.

Startet der Zustandspunkt innerhalb von C, so bewegt er sich auf dem Kreis um 0 durch seinen Startpunkt.

d) Der Kreis C zieht also außerhalb von ihm startende Trajektorien an, nicht jedoch diejenigen, welche innerhalb von ihm beginnen. Er hat also die wesentliche Eigenschaft eines semistabilen Grenzzyklus, wenngleich er nicht genau dessen

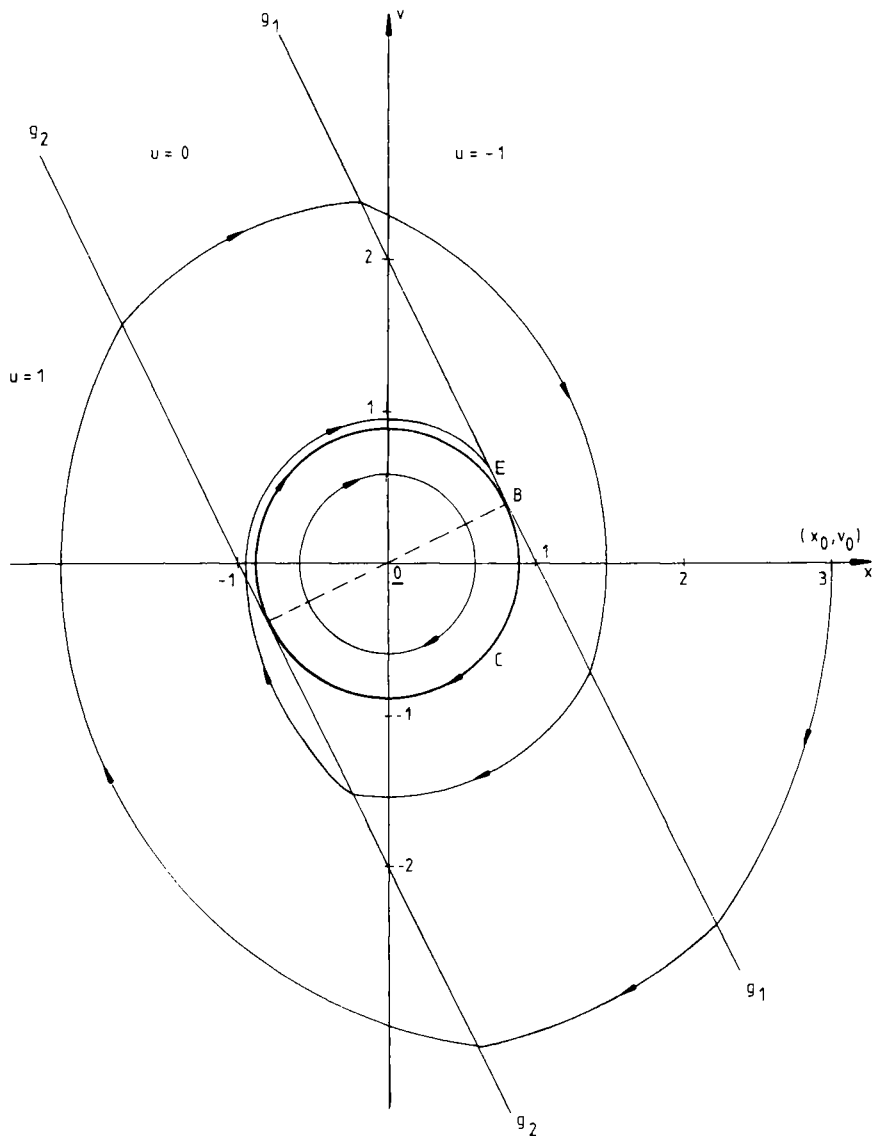


Bild L10

Definition entspricht. Aus dem Bild L11 erhält man seinen Radius R . Einerseits gilt $\sin \alpha = R/a$, andererseits

$$\sin \alpha = \frac{a/T_R}{\sqrt{a^2 + (a/T_R)^2}} = \frac{1}{\sqrt{T_R^2 + 1}}.$$

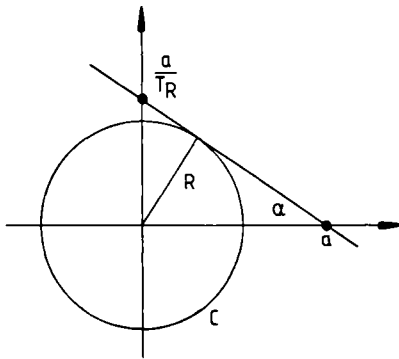


Bild L11

Somit ist

$$R = \frac{a}{\sqrt{1+T_R^2}}$$

Ist daher a genügend klein, so kann man die Ruhelage $\underline{0}$ als praktisch global asymptotisch stabil ansehen. Das ist exakt richtig für $a = 0$, also im Fall eines Zweipunktgliedes.

Lösung von Aufgabe 9

a) Ruhe ist nur möglich, wenn die Eingangsgrößen der I-Glieder eines Systems Null sind. Daraus folgt $u = 0$ und $v = 0$. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt weiter nach Bild A9 $e = -3, 0, 3$. Daher hat der Regelkreis die drei Ruhelagen

$$(-3,0), (0,0), (3,0) .$$

b) Es gilt:

$$u = e+3 \quad \text{für } e \leq -1 ,$$

$$u = e-3 \quad \text{für } e \geq 1 ,$$

$$u = -2e \quad \text{dazwischen}$$

oder

$$u = -x+3 \quad \text{für } x \geq 1 ,$$

$$u = -x-3 \quad \text{für } x \leq -1 ,$$

$$u = 2x \quad \text{dazwischen.}$$

Damit lautet die Differentialgleichung des geschlossenen Regelkreises wegen $\ddot{x} = u$:

$$\ddot{x} = -x+3 \quad \text{für } x \geq 1 , \quad (\text{L19})$$

$$\ddot{x} = -x-3 \quad \text{für } x \leq -1 , \quad (\text{L20})$$

$$\ddot{x} = 2x \quad \text{dazwischen.} \quad (\text{L21})$$

In den Fällen (L19) und (L20) erhält man wie im Teil a) der Aufgabe 8

Kreise um (3,0) für $x \geq 1$,

Kreise um (-3,0) für $x \leq -1$.

Für den Fall (L21) wird

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{v},$$

woraus sich

$$x^2 - \frac{v^2}{2} = C$$

ergibt. Das ist eine Schar von Hyperbeln mit dem gemeinsamen Asymptotenpaar

$$v = \pm \sqrt{2} x,$$

die man ganz entsprechend wie in Aufgabe 5 genauer untersuchen kann.

c) Im Bild L12 sieht man die Trajektorien der Regelung, die sich so für beliebige e bzw. x ergeben. Es sind sämtlich geschlossene Kurven. Ein Grenzzyklus tritt jedoch nicht auf. Man erkennt daraus, daß die Ruhelagen (3,0) und (-3,0) stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil sind, während die Ruhelage (0,0) instabil ist. Die Gestalt der Trajektorien zeigt an, daß es sich bei den erstgenannten Ruhelagen um Wirbelpunkte handelt, während die Ruhelage (0,0) einen Sattelpunkt darstellt.

Lösung von Aufgabe 10

Wegen

$$\frac{1}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{\omega_0^2}{s^2}} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\frac{\omega_0^2}{s^2}}{1 + \frac{\omega_0^2}{s^2}}$$

läßt sich das ungedämpfte Schwingungsglied im Bild A10 als Rückkopplung zweier I-Glieder mit einem vorgeschalteten P-Glied wiedergeben: Bild L13a. Verlegt man die Verzweigungsstelle im Sinne der Wirkungsrichtung vor die linke Summierungsstelle, so ergibt sich Bild L13b. Die Parallelschaltung im linken Teil dieses Bildes ist ein P-Glied mit der Übertragungskonstante

$$- \left[1 + \frac{K_p}{\omega_0^2} \right].$$

Man gelangt so zu Bild L13c.

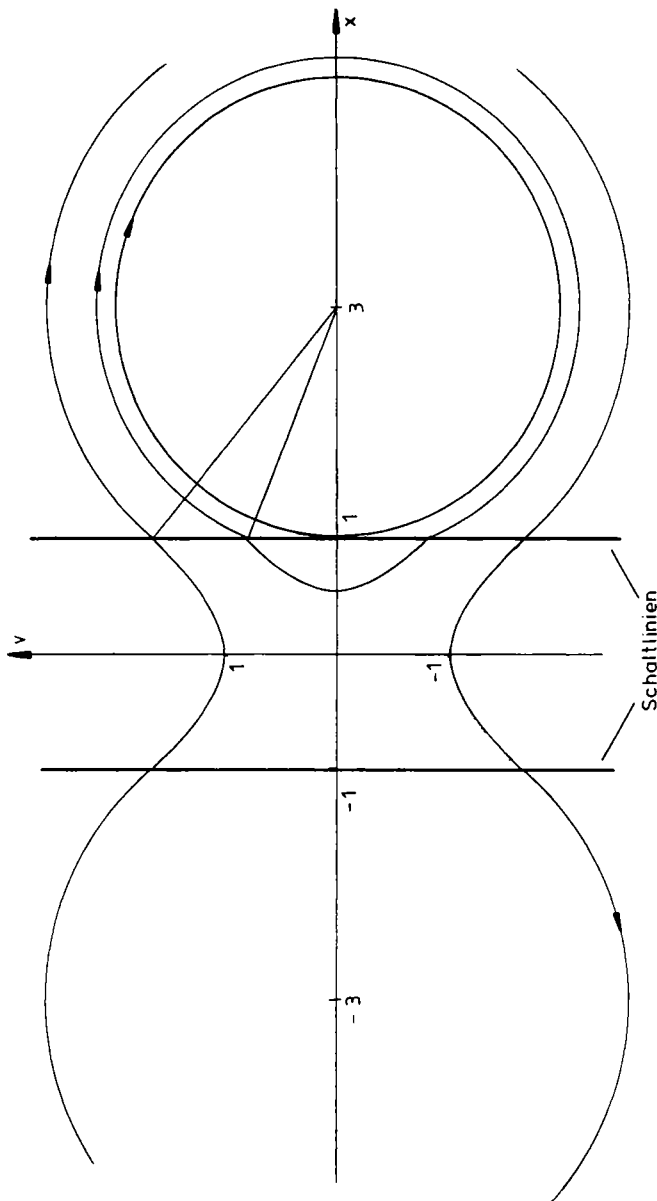


Bild L12

Es entspricht genau dem Bild 2/45, sofern man

$$K_R = 1 + \frac{K_P}{\omega_0^2} \quad (L22)$$

und

$$K_S = \omega_0^2$$

setzt.

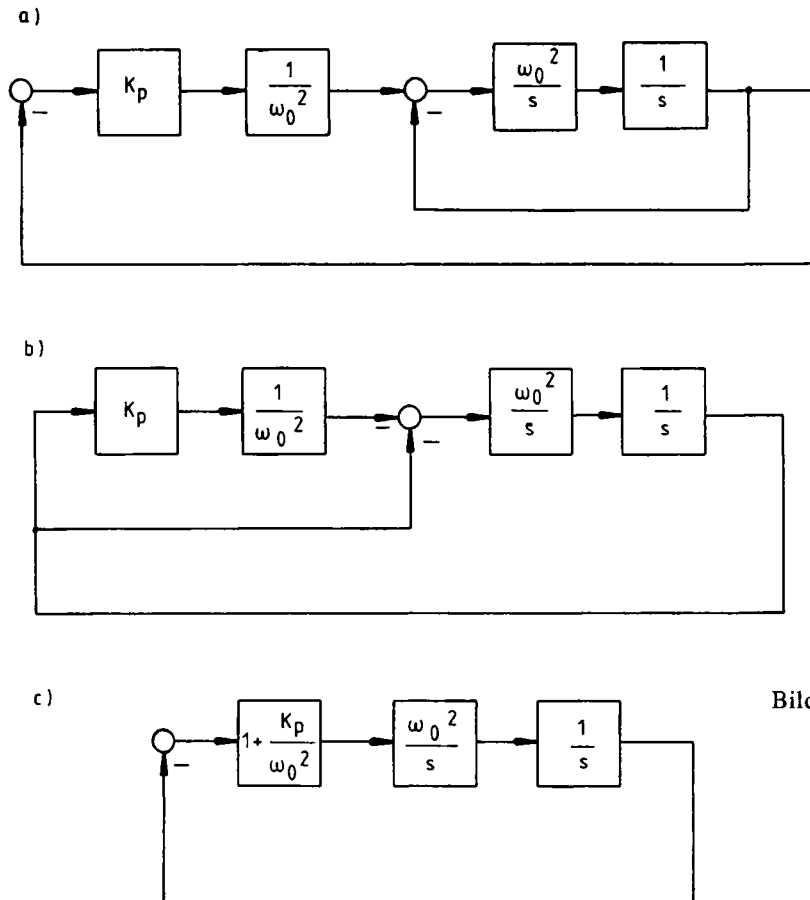


Bild L13

Der weitere Entwurf des struktumschaltenden Reglers kann nun wie in Abschnitt 2.3.6 erfolgen. Dabei muß gelten:

$$K_{R1}K_S = K_{p1} + \omega_0^2 > 1,$$

$$K_{R2}K_S = K_{p2} + \omega_0^2 < 1,$$

also

$$K_{p1} > 1 - \omega_0^2, \quad (L23)$$

$$K_{p2} < 1 - \omega_0^2. \quad (L24)$$

Dann wird im 1. und 3. Quadranten $K_R = K_{R1}$, im 2. und 4. Quadranten $K_R = K_{R2}$ aufgeschaltet. Die zugehörige Struktur ist im Bild 2/47 dargestellt.

Sofern $\omega_0^2 > 1$ ist, muß nach (L24) $K_{p2} < 0$ sein, so daß die Regelung während dieser Arbeitsphase (im 2. und 4. Quadranten der Zustandsebene) eine Mitkopp-

lung darstellt und keine Gegenkopplung, wie dies bei einem Regelkreis normalerweise der Fall ist. Dabei ist aber folgendes zu beachten. Bei dem im Abschnitt 2.3.6 beschriebenen Entwurfsverfahren ist vorausgesetzt, daß K_R positiv ist. Nach (L22) muß deshalb

$$K_{p2} + \omega_0^2 > 0$$

bzw.

$$K_{p2} > -\omega_0^2$$

sein. Insgesamt muß also K_{p2} der folgenden Ungleichung genügen:

$$-\omega_0^2 < K_{p2} < 1 - \omega_0^2$$

oder

$$\omega_0^2 - 1 < |K_{p2}| < \omega_0^2 \quad (\text{für } \omega_0^2 > 1).$$

Das Bild L14 zeigt einen Rechnerschnitt dieses Falles. Dabei ist $\omega_0^2 = 2$, so daß

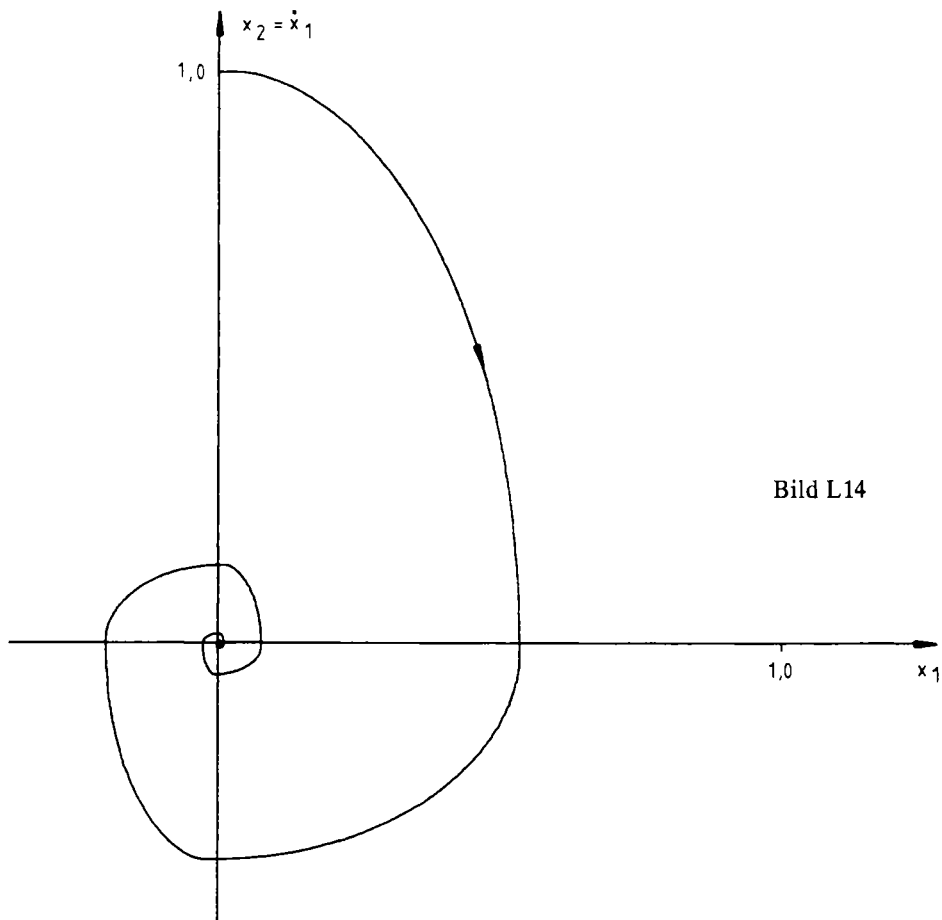


Bild L14

K_{p2} der Ungleichung $1 < |K_{p2}| < 2$ genügen muß. Deshalb wurde $K_{p2} = -\frac{3}{2}$ gewählt. K_{p1} wurde symmetrisch dazu angenommen: $K_{p1} = \frac{3}{2}$.

Im konkreten Fall könnte eine Schwierigkeit darin bestehen, die Ableitung $\dot{x} = v$ der Regelgröße x meßtechnisch zu erfassen. Dann müßte \dot{x} durch Differentiation der Regelgröße gewonnen werden.

Lösung von Aufgabe 11

a) Für das lineare Teilsystem (RC-Tiefpaß) gilt:

$$RCsX(s) + X(s) = U(s),$$

$$RC\dot{x}(t) + x(t) = u(t),$$

also wegen $\dot{x} = v$:

$$v = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u.$$

Da u nur die beiden Werte 0 und b annehmen kann, folgt daraus

$$g_1: \quad v = -\frac{1}{RC}x \quad \text{für } u = 0,$$

$$g_2: \quad v = -\frac{1}{RC}x + \frac{b}{RC} \quad \text{für } u = b.$$

Das sind die beiden Trajektorien des linearen Teilsystems 1. Ordnung: Bild L15.

b) Aus dem Bild A11b liest man ab:

$$u = b \quad \text{für} \quad \begin{cases} \dot{x} < 0 & (\text{unterer Ast}), \quad x < a_1, \\ \dot{x} > 0 & (\text{oberer Ast}), \quad x < a_2. \end{cases}$$

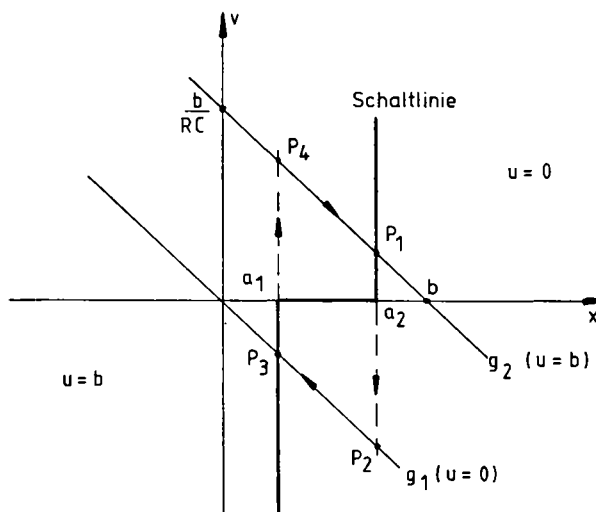


Bild L15

Somit ist $u = b$ in demjenigen Bereich der Zustandsebene, der durch

$$v < 0, x < a_1 \quad \text{und} \quad v > 0, x < a_2$$

charakterisiert ist. Sein Rand bildet die Schaltlinie (Bild L15). Links von ihr ist, wie eben gezeigt, $u = b$, rechts von ihr demgemäß $u = 0$.

c) Man startet nun in irgendeinem Punkt von g_1 oder g_2 (andere Zustandspunkte kann das System ja nicht annehmen), z.B. in $(0, b/RC)$. Dann bewegt sich der Zustandspunkt zunächst bis P_1 . Hier erfolgt die Umschaltung auf $u = 0$. Der Zustandspunkt muß daher auf die Gerade g_1 überspringen, auf der er sich nun von P_2 aus nach links bewegt. Usw. Insgesamt bewegt sich der Zustandspunkt nunmehr auf dem Parallelogramm $P_1P_2P_3P_4$ der Zustandsebene. Die Übergänge von P_1 nach P_2 und P_3 nach P_4 erfolgen dabei sprungartig. Sie entsprechen den steilen Flanken der Kippschwingung.

d) Die Schwingungsdauer T setzt sich somit aus den Zeiten T_{41} und T_{23} zusammen, die der Zustandspunkt benötigt, um von P_4 nach P_1 und von P_2 nach P_3 zu kommen:

$$T = T_{41} + T_{23}.$$

Dabei ergibt sich T_{41} aus der Differentialgleichung zu g_2 :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x+b}{RC}.$$

Aus ihr folgt

$$dt = -RC \frac{dx}{x-b},$$

also

$$T_{41} = -RC \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x-b} = -RC \ln \frac{|a_2-b|}{|a_1-b|}$$

oder wegen $b > a_2 > a_1$:

$$T_{41} = RC \ln \frac{b-a_1}{b-a_2}.$$

Entsprechend erhält man T_{23} aus der Differentialgleichung zu g_1 :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{RC}x,$$

$$dt = -RC \frac{dx}{x},$$

$$T_{23} = -RC \int_{a_2}^{a_1} \frac{dx}{x} = -RC \ln \frac{a_1}{a_2},$$

also

$$T_{23} = RC \ln \frac{a_2(b-a_1)}{a_1(b-a_2)}.$$

Durch Auflösen der resultierenden T-Formel nach C erhält man die Antwort auf die Frage d).

Lösung von Aufgabe 12

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $e(+0) = W_\Delta$, $\dot{e}(+0) = 0$. Wählt man e und $v = \dot{e}$ als Zustandsvariablen, so ist zum Zeitpunkt $t = 0$ $(e, v) = (W_\Delta, 0)$. Zum Endzeitpunkt t_e soll die Regelgröße den neuen Führungswert W_1 annehmen und festhalten. Deshalb muß $e(t_e) = 0$, $v(t_e) = \dot{e}(t_e) = 0$ gelten. Der Zustandspunkt der Regelung soll sich somit in möglichst kurzer Zeit von einem beliebigen Punkt der e -Achse nach 0 bewegen.

b) Für die Strecke gilt

$$E(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2} U(s), \quad \text{also} \quad \ddot{x} = K_1 K_2 u.$$

Da für $t > 0$ $e = W_1 - x$, gilt $\dot{e} = -\dot{x}$ und infolgedessen $\ddot{x} = -\ddot{e}$. Mithin gilt die Differentialgleichung $\ddot{e} = -K_1 K_2 u$. Hierin nimmt u nur die beiden Werte M und $-M$ an.

In der üblichen Weise folgt für die Trajektorien

$$v^2 = -2K_1 K_2 u e + C. \quad (\text{L25})$$

Dies sind Parabeln, deren Achse mit der e -Achse zusammenfällt. Für ihren Scheitelpunkt $(e_S, 0)$ gilt

$$0 = -2K_1 K_2 u e_S + C,$$

woraus

$$C = 2K_1 K_2 u e_S$$

und damit

$$v^2 = 2K_1 K_2 u (e_S - e)$$

folgt. Daher ist

$$\begin{cases} v^2 = 2K(e_S - e) & \text{für } u = M, \\ v^2 = 2K(e - e_S) & \text{für } u = -M, \end{cases} \quad (\text{L26})$$

wobei

$$K = K_1 K_2 M$$

gesetzt ist. Bild L16 zeigt die beiden Parabelscharen.

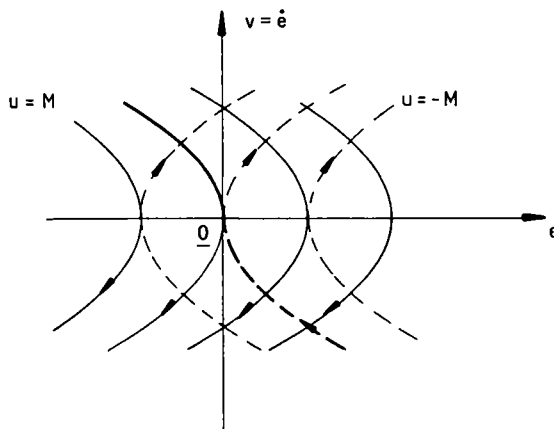


Bild L16

c) Durch einmalige Umschaltung muß der Zustandspunkt (e, v) des Systems von einem beliebigen Punkt der e -Achse nach $(0, 0)$ gelangen. Das ist gemäß Bild L16 offensichtlich nur dadurch möglich, daß in der unteren Halbebene an der durch 0 gehenden Parabel zu $u = -M$, in der oberen Halbebene an der durch 0 gehenden Parabel zu $u = M$ umgeschaltet wird. Diese Parabelstücke machen also die optimale Schaltlinie aus. Da für die durch Null gehenden Parabeln $e_s = 0$ ist, erhält man als Gleichung der optimalen Schaltlinie:

$$v = \begin{cases} -\sqrt{2Ke} & , \quad e \geq 0 \\ \sqrt{-2Ke} & , \quad e \leq 0 \end{cases} = -\sqrt{2K|e|} \cdot \operatorname{sgn} e = S(e) . \quad (\text{L27})$$

d) Damit der Zustandspunkt auf die Schaltlinie gelangt, muß nach Bild L16 gelten:

$$u = \begin{cases} M & \text{oberhalb der Schaltlinie,} \\ -M & \text{unterhalb der Schaltlinie,} \end{cases}$$

also

$$u = \begin{cases} M & \text{für } v > S(e) \text{ oder } v - S(e) > 0, \\ -M & \text{für } v < S(e) \text{ oder } v - S(e) < 0. \end{cases}$$

Damit lautet das optimale Regelungsgesetz

$$u = M \operatorname{sgn}[v - S(e)] .$$

Ausführlich geschrieben:

$$u = M \operatorname{sgn} \left[\dot{e} + \sqrt{2K|e|} \cdot \operatorname{sgn} e \right] .$$

Die Realisierung durch eine elektronische Schaltung kann nun ganz entsprechend wie im Bild 2/60 oder 2/61 erfolgen, der Übergang zur suboptimalen Regelung ähnlich wie im Abschnitt 2.4.3.

e) Zusätzlich sei nun auch $v = \dot{e}$ beschränkt: $|v| \leq N$. Das heißt: Der Regler muß dafür sorgen, daß v die Grenzen $-N$ und N nicht überschreitet (Bild L17). Das ist sicher der Fall, wenn er $u = 0$ liefert, sofern $|v| > N$ wird. Wie man aus der für beliebiges konstantes u geltenden Gleichung (L25) abliest, wird dann nämlich $v = \text{const}$, so daß der Zustandspunkt (e, v) auf dem Rand des zulässigen Bereiches bleibt. Bild L17 zeigt eine Trajektorie der Regelung, die auf diese Weise möglich ist.

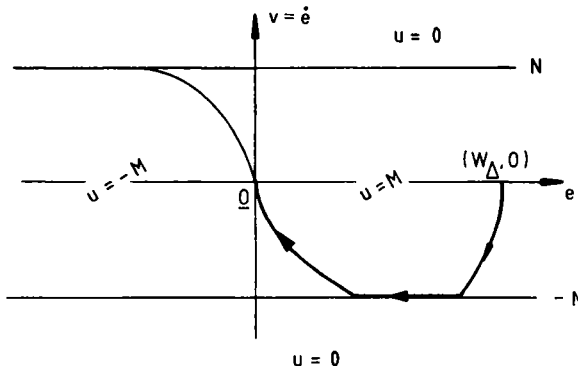


Bild L17

Es muß somit gelten

$$u = \begin{cases} 0 & \text{für } |v| > N \\ M & \text{für } |v| < N \text{ und } v > S(e) \\ -M & \text{für } |v| < N \text{ und } v < s(e) \end{cases} = R(e, \dot{e}). \quad (\text{L28})$$

Man muß also den Zustandspunkt (e, \dot{e}) laufend meßtechnisch erfassen und durch eine geeignete Vorrichtung, z.B. mittels eines Mikrorechners, die Stellfunktion $u = R(e, \dot{e})$ gemäß (L28) erzeugen.

Mit Hilfe einer elektronischen Schaltung kann man sie beispielsweise folgendermaßen hervorbringen. Man bildet zunächst die Schaltvariable

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{für } N - |v| < 0, \\ 1 & \text{für } N - |v| > 0. \end{cases}$$

Sie läßt sich darstellen in der Form

$$u^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[N - |v|] = h(v).$$

Bild L18 zeigt die Funktion $h(v)$. Dann ist weiter nach (L28)

$$u = u^* \cdot \begin{cases} M, & \text{falls } v - S(e) > 0, \\ -M, & \text{falls } v - S(e) < 0. \end{cases}$$

Daher ist

$$u = u^* \cdot M \operatorname{sgn}[v - S(e)].$$

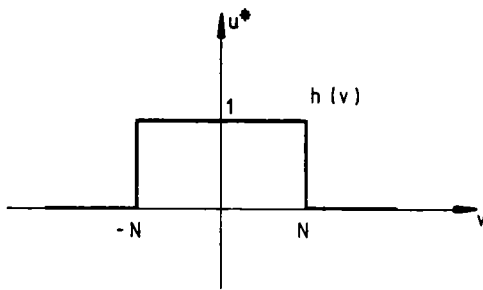


Bild L18

In der Tat ist dann

für $|v| > N$: $u^* = 0$ und damit auch $u = 0$;

für $|v| < N$ und $v > S(e)$: $u^* = 1$ und $u = M$;

für $|v| < N$ und $v < S(e)$: $u^* = -1$ und $u = -M$.

Bild L19 zeigt die grundsätzliche Realisierung dieses nichtlinearen Reglers.

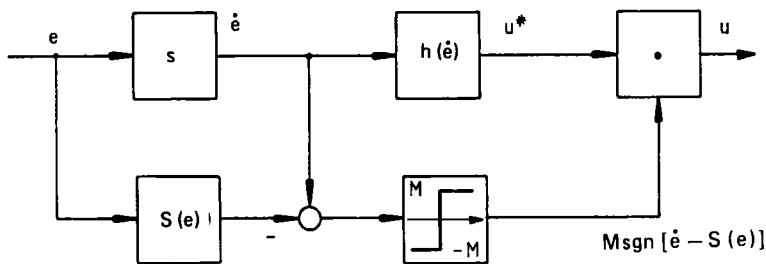


Bild L19

Lösung von Aufgabe 13

a) Die Zustandsdifferentialgleichungen des Systems lauten nach Bild A13

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1}x_1 + \frac{K_1}{T_1}x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2}x_2 + \frac{K_2}{T_2}x_1x_2. \end{cases} \quad (\text{L29})$$

Für die Ruhelagen des Systems folgt daraus

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$x_1 = \frac{1}{K_2}, \quad x_2 = \frac{1}{K_1}.$$

b) $V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$, λ_1 und λ_2 beliebig > 0 .

Damit ist

$$\dot{V} = 2\lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + 2\lambda_2 x_2 \dot{x}_2,$$

$$\dot{V} = -2\frac{\lambda_1}{T_1}x_1^2 \left[1 - K_1 x_2 \right] - 2\frac{\lambda_2}{T_2}x_2^2 \left[1 - K_2 x_1 \right].$$

\dot{V} ist daher negativ definit in demjenigen Bereich der x_1 - x_2 -Ebene, für den gilt:

$$1 - K_1 x_2 > 0, \quad 1 - K_2 x_1 > 0$$

oder

$$x_2 < \frac{1}{K_1}, \quad x_1 < \frac{1}{K_2}.$$

Im Bild L20 ist der Rand dieses Bereiches von innen schraffiert.

Nun wählt man

$$\lambda_1 = K_2^2, \quad \lambda_2 = K_1^2.$$

Dann sind die Höhenlinien der Ljapunow-Funktion durch

$$K_2^2 x_1^2 + K_1^2 x_2^2 = \gamma, \quad \gamma \geq 0,$$

gegeben. Speziell für $\gamma = 1$ ist dies eine Ellipse C mit den Halbachsen $1/K_2$ und $1/K_1$. Sie berührt infolgedessen gerade den Rand des Bereiches, in dem V positiv definit und \dot{V} negativ definit ist (Bild L20). Nach dem Kriterium für die asymptotische Stabilität im großen ist somit die Ruhelage $\underline{0}$ asymptotisch stabil und das Innengebiet von C gehört zu ihrem Einzugsbereich.

Das gleiche Resultat kann man auch mit dem Verfahren von *M.A. Aiserman* erhalten, jedoch umständlicher.

c) Die Nichtlinearitäten sind von der Form

$$y = x_1 x_2. \quad (\text{L30})$$

Geht man zu den Abweichungen von der Ruhelage

$$x_{1B} = \frac{1}{K_2}, \quad x_{2B} = \frac{1}{K_1}$$

über, so wird aus (L30)

$$\Delta y = x_{2B} \Delta x_1 + x_{1B} \Delta x_2 = \frac{1}{K_1} \Delta x_1 + \frac{1}{K_2} \Delta x_2.$$

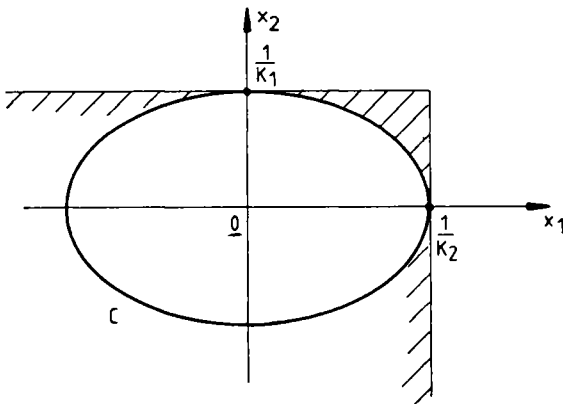


Bild L20

Damit wird aus (L29) das linearisierte System

$$(\Delta x_1)' = -\frac{1}{T_1} \Delta x_1 + \frac{1}{T_1} \Delta x_1 + \frac{1}{T_1 K_2} \Delta x_2,$$

$$(\Delta x_2)' = -\frac{1}{T_2} \Delta x_2 + \frac{1}{T_2 K_1} \Delta x_1 + \frac{1}{T_2} \Delta x_2$$

oder

$$(\Delta x_1)' = \frac{1}{T_1 K_2} \Delta x_2,$$

$$(\Delta x_2)' = \frac{1}{T_2 K_1} \Delta x_1.$$

Die charakteristische Gleichung dieses Systems ist

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{T_1 K_2} \\ -\frac{1}{T_2 K_1} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{T_1 T_2}.$$

Sie hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$. Da eine Nullstelle rechts der imaginären

Achse der s -Ebene liegt, ist die Ruhelage $(\frac{1}{K_2}, \frac{1}{K_1})$ des nichtlinearen Systems instabil.

Das Bild L21 zeigt das mit dem Rechner aufgezeichnete Trajektorienbild des Systems von Bild A13, und zwar für die Parameterwerte $K_1 = 1$, $K_2 = 1/2$, $T_1 = T_2 = 1$. Da die beiden Achsen mit verschiedenen Maßstäben versehen sind, wird aus der Ellipse von Bild L20 hier ein Kreis. Wie man sieht, umfaßt der gesamte Einzugsbereich die x_1 - x_2 -Ebene mit Ausnahme eines Teils des 1. Quadranten.

Lösung von Aufgabe 14

Die Ruhelagen erhält man aus

$$0 = -x_1 + 2x_1x_2,$$

$$0 = -x_2 + x_3,$$

$$0 = x_2 - 4x_3.$$

Durch Addition der letzten beiden Gleichungen folgt $x_3 = 0$, damit aus der zweiten Gleichung $x_2 = 0$ und hiermit schließlich aus der ersten Gleichung $x_1 = 0$. $\underline{x} = \underline{0}$ ist also die einzige Ruhelage des Systems.

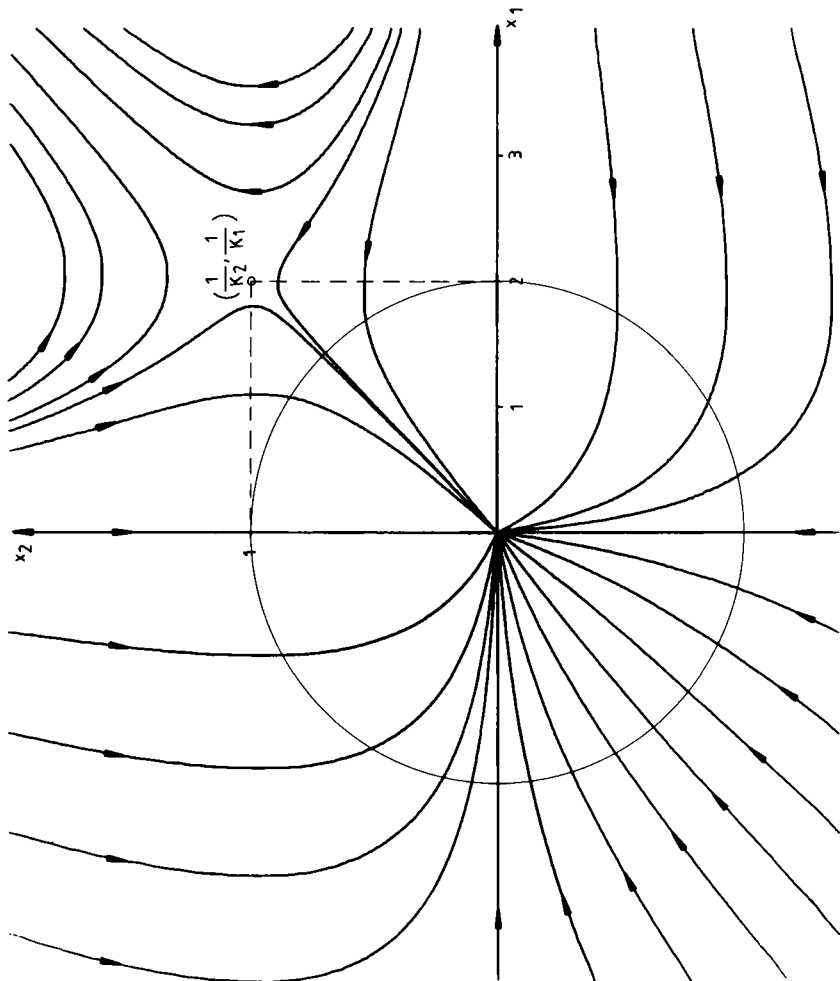


Bild L21

Formale lineare Schreibweise der Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1+2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}}_{\underline{A}(\underline{x})} \underline{x}.$$

Zerlegung von $\underline{A}(\underline{x})$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_L = -\underline{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_R(\underline{x})}.$$

Berechnung von \underline{P} aus der Gleichung $\underline{A}_L^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A}_L = -\underline{I}$:

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{I},$$

also

$$V = \frac{1}{2} \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right].$$

Damit ist

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} = \frac{1}{2} (\underline{A}^T + \underline{A}) = \underline{A},$$

da \underline{A} symmetrisch ist. Somit ist

$$-\underline{Q}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1-2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Gemäß dem Kriterium von Sylvester bildet man die „nordwestlichen“ Unterdeterminanten:

$$D_1 = D_2 = 1-2x_2, \quad D_3 = 3(1-2x_2).$$

Mithin ist $-\underline{Q}(\underline{x})$ positiv definit, wenn

$$1-2x_2 > 0$$

oder

$$x_2 < \frac{1}{2}$$

ist. In diesem Bereich des Zustandsraumes ist also sowohl V positiv definit als auch \dot{V} negativ definit.

Die Niveauflächen von V sind Kugelflächen um $\underline{0}$. Diejenige Kugelfläche, welche die Ebene $x_2 = \frac{1}{2}$ berührt, sei mit C bezeichnet. Nach dem Kriterium der asymptotischen Stabilität im großen ist dann die Ruhelage $\underline{0}$ asymptotisch stabil, und das Innere von C gehört zu ihrem Einzugsbereich.

Man kann die gegebenen Zustandsdifferentialgleichungen auch in anderer Weise formal linear schreiben:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2x_1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}}_{\underline{A}(\underline{x})} \underline{x}.$$

Spaltet man auch hier wieder

$$\underline{A}_L = -\underline{I}$$

ab, so gelangt man wiederum zu $\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{I}$. Damit wird

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (\underline{A}^T + \underline{A}) = \begin{bmatrix} -1 & x_1 & 0 \\ x_1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

also $D_1 = 1$, $D_2 = 1 - x_1^2$, $D_3 = 3 - 4x_1^2$.

Es muß daher gelten:

$$|x_1| < 1 \quad \text{und} \quad |x_1| < \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,86.$$

Die letzte Bedingung ist schärfer und deshalb maßgebend. Als gesicherten Teil des Einzugsbereiches erhält man somit das Innengebiet der Kugel um $\underline{0}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Man bekommt also bei dieser formal linearen Darstellung der Zustandsdifferentialgleichung ein günstigeres Resultat als bei der vorangegangenen Darstellung.

Lösung von Aufgabe 15

Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (\text{L31})$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3. \quad (\text{L32})$$

$\underline{x} = \underline{0}$ ist also die einzige Ruhelage des Systems.

Mit $V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ wird

$$\dot{V} = 2\lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + 2\lambda_2 x_2 \dot{x}_2,$$

$$\dot{V} = 2\lambda_1 x_1 x_2 - 2\lambda_2 x_1 x_2 - 2\lambda_2 x_2^2 + 2\lambda_2 x_2^4.$$

Wählt man $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, so wird daraus

$$\dot{V} = -2x_2^2(1 - x_2^2).$$

Daher ist \dot{V} gewiß negativ semidefinit im Bereich $|x_2| < 1$.

Dabei ist $\dot{V} \equiv 0$ nur für $x_2 \equiv 0$. Da mit $x_2 \equiv 0$ auch $\dot{x}_2 \equiv 0$ ist, ergibt sich aus (L32) auch $\dot{x}_1 \equiv 0$. Somit verschwindet \dot{V} im Bereich $|x_2| < 1$ nur dann längs einer Trajektorie des Systems, wenn es sich bei dieser um die Ruhelage $\underline{0}$ handelt.

Die Höhenlinien von $V = x_1^2 + x_2^2$, wie die Ljapunow-Funktion nunmehr lautet, sind Kreise um $\underline{0}$. Wendet man daher das Kriterium der asymptotischen Stabilität im großen in der Form (3.4) an, so ergibt sich die Ruhelage $\underline{0}$ als asymptotisch stabil mit dem Einheitskreis als gesichertem Teil des Einzugsbereiches.

Bild L22 zeigt die mit dem Rechner ermittelte Trajektorienschar des Systems. Hier tritt ein Grenzzyklus auf, dessen Innengebiet den Einzugsbereich von $\underline{0}$ darstellt. Es wird durch den Einheitskreis recht gut angenähert.

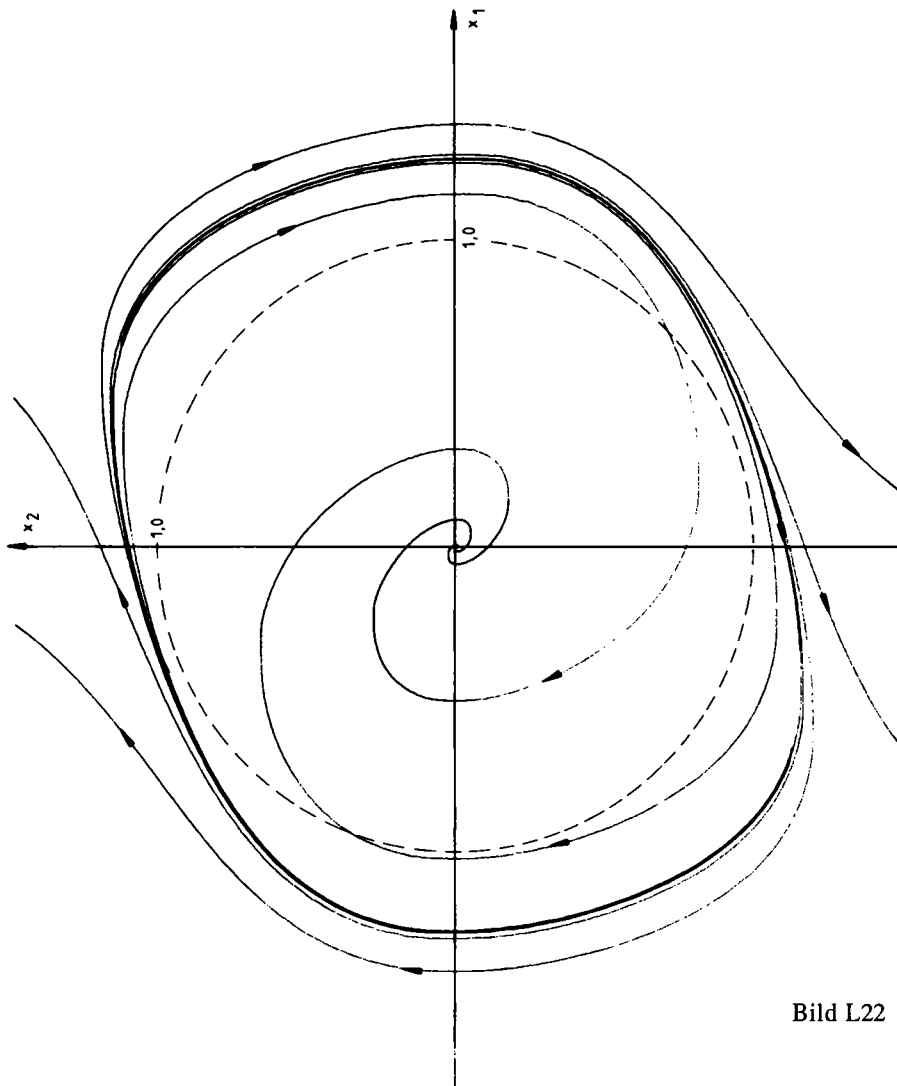


Bild L22

Lösung von Aufgabe 16

Soll der Regelkreis von Bild A15 in Ruhe sein, muß die Eingangsgröße des I-Gliedes Null werden: $u_S = 0$. Daraus folgt für den stationären Zustand (Index S) $e_S = 0$ und damit $x_S = W_0$. Daraus folgt weiter $y_S = x_S = W_0$ und schließlich wegen $y_S = v_S^3$: $v_S = \sqrt[3]{W_0}$.

Geht man nun zu den Abweichungen von der Ruhelage über, so bleiben die linearen Glieder im Bild A15 unverändert, während die Kennlinien durch ihre Tangenten im Arbeitspunkt zu ersetzen sind. Die Steigung der Begrenzungskennlinie im Arbeitspunkt $e_S = 0$ ist $\frac{b}{a}$, die Steigung der kubischen Parabel im

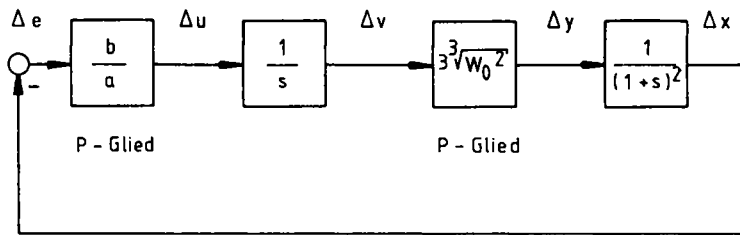


Bild L23

Arbeitspunkt $v_S = \sqrt[3]{W_0}$ ist $\left[\frac{dF}{dv} \right]_{v_S} = 3v_S^2 = 3\sqrt[3]{W_0^2}$.

Man erhält so Bild L23 für das um die Ruhelage linearisierte System.

Die charakteristische Gleichung der linearisierten Regelung ist

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{s} \cdot 3\sqrt[3]{W_0^2} \cdot \frac{1}{(1+s)^2} + 1 = 0,$$

also

$$s^3 + 2s^2 + s + p = 0 \quad \text{mit} \quad p = 3 \frac{b}{a} \sqrt[3]{W_0^2}.$$

Die Hurwitz-Determinante dieser Gleichung 3. Grades ist

$$H = \begin{vmatrix} 2 & p & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix}.$$

Daher liegen die Nullstellen der charakteristischen Gleichung links der j -Achse, wenn

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & p \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - p > 0, \quad \text{also} \quad p < 2 \quad \text{ist.}$$

Nach Ljapunows Stabilitätssatz (3.54) über die erste Näherung ist somit die Ruhelage der nichtlinearen Regelung im Bild A15 asymptotisch stabil, wenn

$$W_0 < \left(\frac{2a}{3b} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Lösung von Aufgabe 17

a) Die Zustandsdifferentialgleichungen des linearen Teilsystems lauten nach Bild A16

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 6x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 + u. \end{aligned} \right\} \quad (\text{L33})$$

Für seine Eingangsgröße u gilt im geschlossenen Regelkreis wegen

$$u = F(y) = y + 3y^3 \quad (\text{L34})$$

und

$$y = -3x_1 - 21x_2 \quad (\text{L35})$$

die Beziehung

$$u = -3x_1 - 21x_2 - 81(x_1 + 7x_2)^3.$$

Eingesetzt in (L33) ergeben sich die Zustandsdifferentialgleichungen des geschlossenen Regelkreises zu

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1 - 15x_2 - 81(x_1 + 7x_2)^3, \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 23x_2 - 81(x_1 + 7x_2)^3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{L36})$$

b) In der Ruhelage gilt

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

Daraus folgt für das lineare Teilsystem (L33):

$$0 = -x_{1R} + 6x_{2R} + u_R,$$

$$0 = -x_{1R} - 2x_{2R} + u_R$$

oder

$$x_{1R} = u_R, \quad x_{2R} = 0. \quad (\text{L37})$$

Entsprechend folgt für den geschlossenen Regelkreis unter Beachtung von (L37):

$$0 = -4x_{1R} - 81x_{1R}^3,$$

also

$$x_{1R} = 0.$$

$\underline{x}_R = (0, 0)^T$ ist also die einzige Ruhelage des Regelkreises.

c) Die Gleichungen des um die Ruhelage linearisierten Systems lauten

$$(\Delta x_1)' = -4\Delta x_1 - 15\Delta x_2,$$

$$(\Delta x_2)' = -4\Delta x_1 - 23\Delta x_2.$$

Die charakteristische Gleichung des Systems ist

$$\begin{vmatrix} \lambda + 4 & 15 \\ 4 & \lambda + 23 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 27\lambda + 32 = 0.$$

Da die Koeffizienten dieses Polynoms sämtlich positiv sind, liegen seine Nullstellen links der j -Achse der komplexen Ebene. Deshalb ist die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ des Regelkreises asymptotisch stabil.

d) Wegen $\underline{x}_R = \underline{0}$ ist $\dot{V} = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$, also

$$\dot{V} = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}}$$

und somit wegen $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u$:

$$\dot{V} = \left[\underline{x}^T \underline{A}^T + \underline{b}^T u \right] \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \left[\underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \right].$$

Da $\underline{b}^T \underline{P} \underline{x}$ als Skalar seinen Wert bei Transposition nicht ändert, ist $\underline{b}^T \underline{P} \underline{x} = \underline{x}^T \underline{P} \underline{b}$ und damit

$$\dot{V} = \underline{x}^T (\underline{P} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}) \underline{x} + 2 \underline{x}^T \underline{P} \underline{b} u. \quad (\text{L38})$$

Wie in der Aufgabenstellung vorgeschlagen, wird nun

$$\underline{x}^T \underline{P} \underline{b} = -y \quad (\text{L39})$$

gesetzt. Dies bedeutet eine implizite Forderung an die noch freie Matrix \underline{P} :

$$\underline{x}^T \underline{P} \underline{b} = -y = \underline{r}^T \underline{x} = \underline{x}^T \underline{r},$$

woraus wegen der Beliebigkeit von \underline{x}

$$\underline{P} \underline{b} = \underline{r} \quad (\text{L40})$$

folgt.

Aus (L38) wird mit (L39)

$$\dot{V} = \underline{x}^T (\underline{P} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}) \underline{x} - 2yu.$$

Wegen $u = y + 3y^3$ wird nun aus dem zweiten Term von \dot{V} in (L38):

$$-2yu = -2y(y + 3y^3) = -2y^2(1 + 3y^2) = -2(\underline{r}^T \underline{x})^2 [1 + 3(\underline{r}^T \underline{x})^2],$$

eine Funktion von \underline{x} , die im gesamten Raum negativ definit ist.

Es bleibt zu untersuchen, wann der erste Term in \dot{V} ,

$$\underline{x}^T (\underline{P} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}) \underline{x},$$

negativ definit wird, die Matrix

$$\underline{Q} = -\underline{P} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P}$$

also positiv definit ist.

Hierzu bestimmt man zunächst \underline{P} . Die Gleichung (L40) lautet ausführlich

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt

$$p_{11} + p_{12} = 3, \quad p_{12} + p_{22} = 21 \quad (\text{L41})$$

oder

$$p_{11} = 3 - p_{12}, \quad p_{22} = 21 - p_{12},$$

wonach

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 3-p_{12} & p_{12} \\ p_{12} & 21-p_{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{L42})$$

Soll diese Matrix negativ definit sein, muß sie das Sylvesterkriterium (10) erfüllen. D.h. hier: Es muß

$$6 \cdot (84 - 16p_{12}) - (3 + 8p_{12})^2 > 0$$

sein. Das ist sicher der Fall, wenn man beispielsweise $p_{12} = 0$ wählt.

Bildet man daher die Ljapunow-Funktion $V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$ mit

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix},$$

so ist $\dot{V}(\underline{x})$ im gesamten Raum negativ definit und $V(\underline{x})$ selbst positiv definit. Da überdies V als positiv definite quadratische Form für $|\underline{x}| \rightarrow +\infty$ gegen $+\infty$ strebt, ist nach dem Kriterium (3.2) die Ruhelage $\underline{0}$ global asymptotisch stabil.

Lösung von Aufgabe 18

Die gegebene *Strecke* kann formal linear in der Form

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & x_2 \\ x_1 & x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

geschrieben werden, sodaß

$$\underline{A}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -1 & x_2 \\ x_1 & x_2^3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ist. Der *Regler* wird ebenfalls formal linear angesetzt:

$$u = -\underline{r}^T(\underline{x})\underline{x} = -\left[r_1(\underline{x})x_1 + r_2(\underline{x})x_2\right].$$

In der Aufgabenstellung ist die *lineare Vergleichsregelung* durch

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{L43})$$

gegeben, liegt also bereits in Diagonalform vor und hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Man kann deshalb eine IL-Funktion („ideale Ljapunow-Funktion“) ohne Durchführung einer Transformation wählen:

$$V = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x} \quad \text{mit} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}.$$

Da die Anfangsstörungen als gleichverteilt um die Ruhelage $\underline{0}$ angenommen sind, kann man $p_1 = p_2 = 1$ nehmen, sodaß also

$$\underline{P} = \underline{I}$$

wird. Daher ist hier

$$\underline{V} = \underline{x}^T \underline{x} = x_1^2 + x_2^2.$$

Demgemäß gilt für die lineare Vergleichsregelung wegen (L43):

$$\dot{\underline{V}}_L(\underline{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -(2x_1^2 + 2x_2^2),$$

sodaß

$$\underline{Q}_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{L44})$$

Nun wird $\dot{\underline{V}}(\underline{x})$ zur nichtlinearen Regelung berechnet:

$$\dot{\underline{V}} = \dot{\underline{x}}^T \underline{P} \underline{x} + \underline{x}^T \underline{P} \dot{\underline{x}},$$

wobei

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(\underline{x})\underline{x} + \underline{b}u, \quad u = -\underline{r}^T(\underline{x})\underline{x},$$

also

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}(\underline{x}) - \underline{b}\underline{r}^T(\underline{x})]\underline{x}.$$

Damit wird

$$\dot{\underline{V}} = -\underline{x}^T \underline{Q}(\underline{x}) \underline{x}$$

mit

$$\underline{Q}(\underline{x}) = (\underline{r}\underline{b}^T - \underline{A}^T)\underline{P} + [\underline{r}\underline{b}^T - \underline{A}^T]\underline{P}^T,$$

wobei der Übersichtlichkeit halber die Variable \underline{x} auf der rechten Seite weggelassen wurde. Im vorliegenden Fall ist

$$\underline{r}\underline{b}^T - \underline{A}^T = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] - \begin{bmatrix} -1 & x_1 \\ x_2 & x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 - x_1 \\ -x_2 & r_2 - x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Infolgedessen wird

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2 & r_1 - x_1 - x_2 \\ r_1 - x_1 - x_2 & 2r_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix}. \quad (\text{L45})$$

Das Ziel der Gütemaßangleichung besteht darin, die Norm

$$N = \|\underline{Q}(\underline{x}) - \underline{Q}_L\|$$

zum Minimum zu machen. Der Idealfall, der sich aber nur unter gewissen Voraussetzungen verwirklichen läßt, besteht darin, daß

$$\underline{Q}(\underline{x}) \equiv \underline{Q}_L \quad \text{für alle } \underline{x} \quad (\text{L46})$$

gilt. Bei der vorliegenden Aufgabe läuft dies gemäß (L44) und (L45) auf die Forderung

$$r_1 - x_1 - x_2 = 0,$$

$$2r_2 - 2x_2^3 = 2$$

hinaus, aus der

$$r_1 = x_1 + x_2,$$

$$r_2 = 1 + x_2^3$$

folgt. Man erhält so *das nichtlineare Regelungsgesetz*

$$\underline{u} = - \left[(x_1 + x_2)x_1 + (1 + x_2^3)x_1 \right].$$

Wegen der Identität (L46) ist in diesem Beispiel die Gütemaßangleichung *exakt* durchführbar. Das hat zur Folge, daß $\dot{V}(\underline{x}) \equiv \dot{V}_L(\underline{x})$ ist. D.h. aber: $\dot{V}(\underline{x})$ ist negativ definit im gesamten Raum. Nach dem Kriterium (4.2) ist deshalb die *Ruhe-lage 0* der nichtlinearen Regelung *global asymptotisch stabil*.