Technische Universität München

Vorlesungsmitschrift

Moderne Methoden der Regelungstechnik I

Sommersemester 2014

Autor
Konstantin Werner
konstantin.werner@gmail.com

1. Überarbeitung
Christian Dengler
sumo_spider@yahoo.de

2. Überarbeitung
Tobias Scheuermann
mail@tobias-scheuermann.de

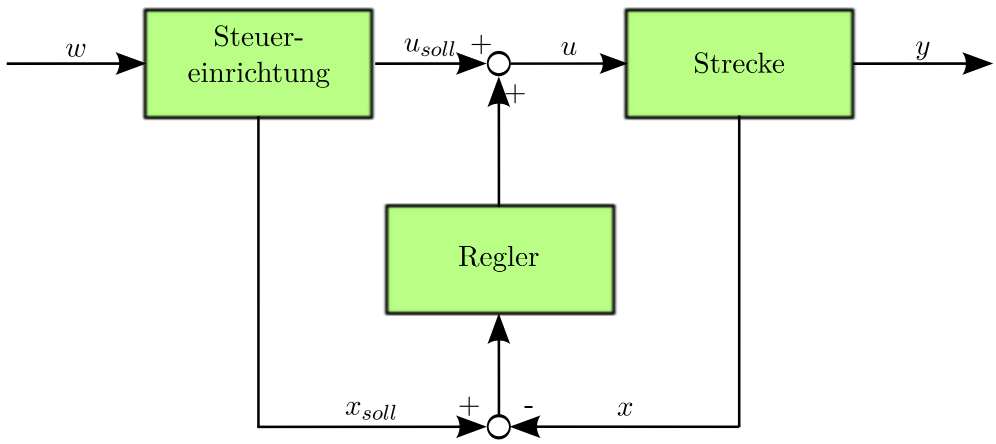
19. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. Einführung und Zustandsregelung

Entwurf von Regelsystemen im Zustandsraum, „Zustandsregelung“



=Verallgemeinerung der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (BB 1.1)

Abbildung 1.1.: Übersicht über die Struktur der Zustandsregelung

Ziele:

1. Stabilität
2. Sollwertfolge und Störminderung
3. Dynamik
4. Robustheit dieser Eigenschaften

2. Konstante Zustandsrückführung und Führungsgrößenaufschaltung für lineare Systeme

2.1. Struktur der Zustandsregelung

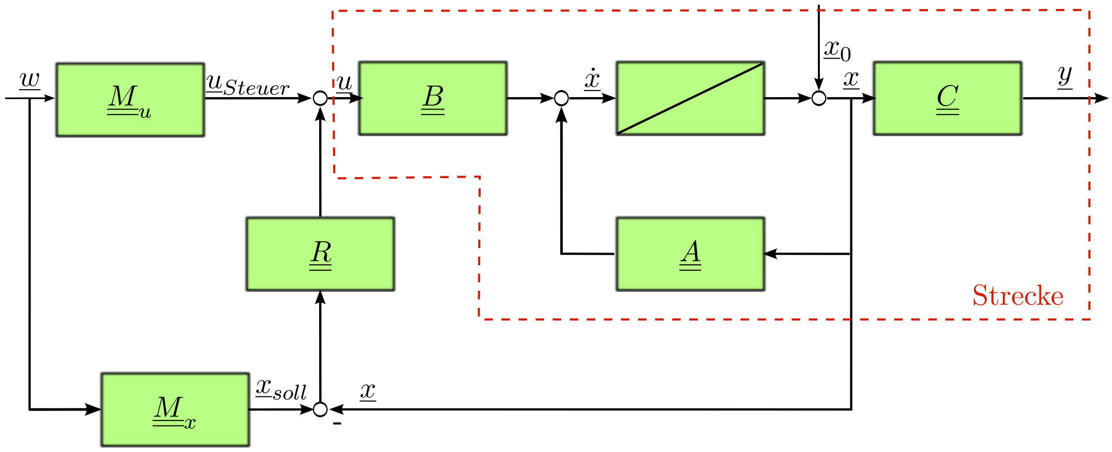


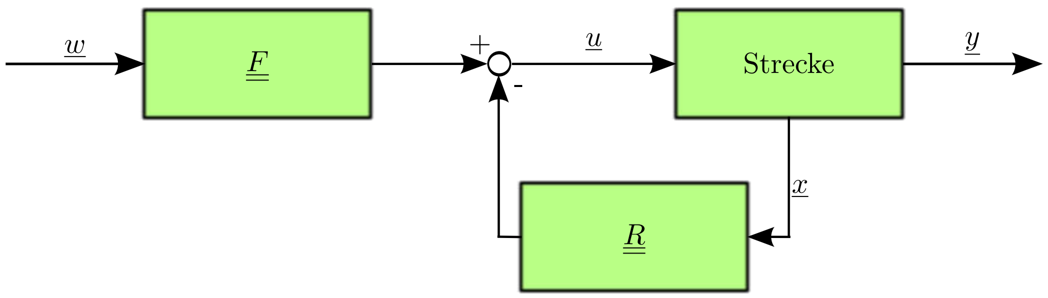
Abbildung 2.1.: detaillierte Struktur der Zustandsregelung

$$\text{Strecke:} \quad \dot{\underline{x}} = \underset{(n\times n)}{\underline{\underline{A}}}\;\underset{(n\times 1)}{\underline{x}} + \underset{(n\times p)}{\underline{\underline{B}}}\;\underset{(p\times 1)}{\underline{u}}, \qquad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \tag{1}$$

$$\underline{y} = \underset{(q\times n)}{\underline{\underline{C}}}\;\underline{x} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Regelgesetz:} \quad \underline{u} &= \underline{\underline{R}}(\underline{x}_{\text{soll}} - \underline{x}) + \underline{u}_{\text{steuer}} \\
&= \underset{(p\times n)}{\underline{\underline{R}}}\;(\underset{(n\times q)}{\underline{\underline{M}}_x}\;\underset{(q\times 1)}{\underline{w}} - \underline{x}) + \underset{(p\times q)}{\underline{\underline{M}}_u}\;\underline{w} && (3) \\
&= -\underline{\underline{R}}\,\underline{x} + \underbrace{(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{M}}_x + \underline{\underline{M}}_u)}_{\underline{\underline{F}}}\,\underline{w} && (4)
\end{aligned}$$

also:



ohne Soll-Ist-Wertvergleich

Abbildung 2.2.: alternative Darstellung

(3),(4) in (1):

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\underline{x} + \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{M}}_x + \underline{\underline{M}}_u)\underline{w} \\
&= (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{w} \qquad (5) \\
\underline{y} &= \underline{\underline{C}}\,\underline{x}
\end{aligned}
}
$$

Zustandsgleichungen des geregelten Systems. Es ist stabil, wenn die Eigenwerte von $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}$ in der linken komplexen Halbebene liegen.

1. Stabilitätsforderung: $\underline{\underline{R}}$ so wählen, dass die Anfangsstörung $\underline{x}_o$ ausgeregelt wird.

$$\underline{x}(t) \to \underline{0} \text{ für } t \to \infty \qquad (\text{mit } \underline{w} = \underline{0})$$

2. Sollwertfolge (=stationäre Genauigkeit):
   $\underline{\underline{M}}_x$ und $\underline{\underline{M}}_u$ so wählen, dass stationär.

$$\underline{y}_{\text{stat.}} = \underline{w}_{\text{stat.}}, \quad \underline{x}_{\text{soll,stat.}} = \underline{x}_{\text{stat.}}, \qquad (\text{mit } \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{0}})$$

2.2. Wahl von M_x und M_u (für $p = q$)

Stationär gilt:

$$
\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_{\text{st}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}_{\text{st}} \overset{!}{=} 0 \\
\underline{y}_{\text{st}} &= \underline{\underline{C}}\,\underline{x}_{\text{st}} \overset{!}{=} \underline{w}_{\text{st}}
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{P}}_0} \begin{bmatrix} \underline{x}_{\text{st}} \\ \underline{u}_{\text{st}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{w}_{\text{st}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{\text{st}} \\ \underline{u}_{\text{st}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}^{-1}(0) \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{w}_{\text{st}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}^{-1}(0) \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \underline{w}_{\text{st}}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun soll} \quad \underline{x}_{\text{st}} &= \underline{x}_{\text{soll,st}} = \underline{\underline{M}}_x \underline{w}_{\text{st}}, \\ \text{folglich} \quad \underline{u}_{\text{st}} &= \underline{u}_{\text{steuer,st}} = \underline{\underline{M}}_u \underline{w}_{\text{st}} \text{ sein.} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_x \underline{w}_{\text{st}} \\ \underline{\underline{M}}_u \underline{w}_{\text{st}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_x \\ \underline{\underline{M}}_u \end{bmatrix} \underline{w}_{\text{st}} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} \underline{x}_{\text{st}} \\ \underline{u}_{\text{st}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}^{-1}(0) \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \underline{w}_{\text{st}}$$

Da w_{st} beliebig und konstant ist, gilt das nur mit

$$\boxed{\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_x \\ \underline{\underline{M}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}} \end{bmatrix}}$$

Dies ist die stationär genaue Steuereinrichtung. Sie ist unabhängig von $\underline{\underline{R}}$.

Die Lösungen von

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} - \eta \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{P}}(\eta)} = 0 \qquad (*)$$

heißen invariante Nullstellen des Systems $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{C}}$. Liegt keine von ihnen in 0, so ist $\underline{\underline{P}}(0)$ invertierbar und $(*)$ eindeutig lösbar.

Hinweis: Falls p≠q: $\underline{\underline{P}}(0) \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_x \\ \underline{\underline{M}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}} \end{bmatrix}$ zu lösen versuchen.

2.3. Führungsübertragungsmatrix $G_w(s)$

Laplace-Transformation von (5) und (2) mit $\underline{x}_0 = \underline{0}$

$$\begin{aligned} s\underline{X}(s) &= (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\underline{X}(s) + \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{M}}_x + \underline{\underline{M}}_u)\underline{W}(s) \\ (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\underline{X}(s) &= \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{W}(s) \\ \underline{X}(s) &= (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{W}(s) \qquad (6) \\ \text{mit } \underline{Y}(s) &= \underline{\underline{C}}\,\underline{X}(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{G}}_w(s)}\,\underline{W}(s) \qquad (7)}$$

$\underline{\underline{G}}_w(s)$ ist die Führungsübertragungsmatrix.
$\underline{\underline{G}}_w(s)$ ist übertragungsstabil, wenn das char. Polynom $\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})$ nur Nullstellen in der linken Halbebene hat, wenn also alle EW von $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}$ links liegen
Stationäres Verhalten wird mit $s = 0$ beschrieben (vgl. Endwertsatz):

$$\underline{y}_{\text{stat}} = \underbrace{\underline{\underline{C}}(-\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{G}}_w(0)}\,\underline{w}_{\text{stat}}$$

$$\underline{\underline{G}}_w(0) \overset{!}{=} \underline{\underline{I}} \text{ für stationäre Genauigkeit}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{F}} = \left[\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}}\right]^{-1}}$$

hängt von $\underline{\underline{R}}$ ab, siehe BB.2.1.

2.4. Entwurf der Zustandsrückführung R durch Eigenwertvorgabe (engl.: Pole Placement)

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{w}$$

Grundgedanke ist, die Eigenwerte $\lambda_{R_1}, \ldots, \lambda_{R_n}$ (Regelungseigenwerte) vorzugeben, um eine gewünschte Dynamik zu sichern und $\underline{\underline{R}}$ so zu wählen, dass sich diese Eigenwerte tatsächlich einstellen.
Dazu vergleicht man das charakteristische Polynom mit dem Polynom der gewünschten Regelungseigenwerte:

$$\underbrace{\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})}_{\text{charakteristisches Polynom}} = \underbrace{(s - \lambda_{R_1}) \ldots (s - \lambda_{R_n})}_{\text{vorgegebene Eigenwerte}}$$

$$s^n + a_{n-1}(\underline{\underline{R}})s^{n-1} + \cdots + a_0(\underline{\underline{R}}) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_0$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{n-1}(\underline{\underline{R}}) & = & p_{n-1} \\ & \vdots & \\ a_0(\underline{\underline{R}}) & = & p_0 \end{array}\right\} \text{Synthese-Gleichungen}$$

n Gleichungen für $n \cdot p$ Elemente von $\underline{\underline{R}}$.

- Fall 1: $p = 1$ (Eingrößensystem). In diesem Fall sind die Synthesegleichungen linear und können eindeutig gelöst werden, sofern das System steuerbar ist.
- Fall 2: $p > 1$ (Mehrgrößensystem). Die Synthesegleichungen sind nichtlinear und unterbestimmt. Unendlich viele Lösungen.

Beispiel 1. Zweitank-System

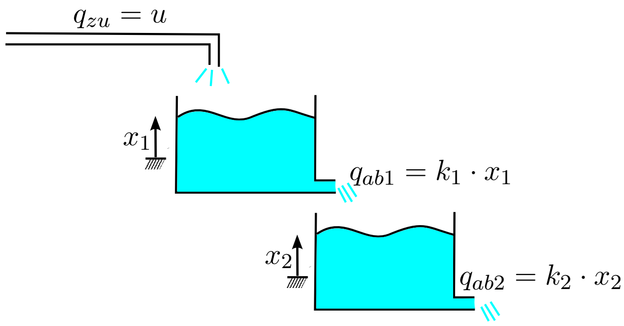


Abbildung 2.3.: Zweitanksystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{c}^T} \underline{x}$$

Hinweis: negative Füllhöhen und Fließgeschwindigkeiten machen physikalisch keinen Sinn. Man kann das System als Abweichung von einem gewählten Arbeitspunkt verstehen. Auch negative Einträge in $\underline{x}$ und sind dann zulässig. Negative Geschwindigkeite $\underline{\dot{x}}$ würden aber immer noch bedeuten, dass das Wasser in den Tank zurück fließt, dies soll aber hier so hingenommen werden.

Regelgesetz:

$$u = -\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}}_{\underline{r}^T} \underline{x} + f_w(t)$$

charakteristisches Polynom des geregelten Systems:

$$\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{b}\,\underline{r}^T) = \det \begin{bmatrix} s + k_1 + r_1 & r_2 \\ -k_1 & s + k_2 \end{bmatrix}$$

$$= s^2 + s(k_1 + r_1 + k_2) + k_2k_1 + k_2r_1 + r_2k_1$$

Eigenwertvorgabe: z.B. $\lambda_{r_1} = -2, \lambda_{r_2} = -3$

$$(s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$$

Koeffizientenvergleich:

$$k_1 + r_1 + k_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 5 - k_1 - k_2$$

$$k_1k_2 + k_2r_1 + r_2k_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{6 - k_2(5 - k_2)}{k_1}$$

mit $k_1 = k_2 = 1$:

$$\underline{r}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vorfilter f:

$$\begin{aligned} f &= [\underline{c}^T \cdot (\underline{b} \cdot \underline{r}^T - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{b}]^{-1} \\ &= \dots = 6 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{b} \\ \underline{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{m_x} \\ m_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{x1} \\ m_{x2} \\ m_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{m_x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, m_u = [1]$$

Probe: $\underline{r}^T \underline{m_x} + m_u = f \quad \surd$

2.5. Berechnung von R über die Regelungsnormalform

(für Eingrößensysteme)
Definition der Regelungsnormalform (RNF), alle * sind Größen in RNF:

$$\underline{\dot{x}}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^*} \underline{x}^* + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}^*} u$$

Die negierten Elemente der letzten Zeile von $\underline{\underline{A}}^*$ sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}^*) = s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_0$$

2.5.1. Berechnung von r^T bei vorhandener RNF

$$\underline{\dot{x}}^* = \underline{\underline{A}}^* \underline{x}^* + \underline{b}^* u^*$$

$$u = -\underline{r}^{T*} \underline{x}^* = \begin{bmatrix} r_1^* & \dots & r_n^* \end{bmatrix} \cdot \underline{x}^*$$

$$\underline{\dot{x}}^* = (\underline{\underline{A}}^* - \underline{b}^* \underline{r}^{T*}) \underline{x}^*$$

Dabei:

$$\underline{\underline{A}}^* - \underline{b}^* \underline{r}^{T*} = \underline{\underline{A}}^* - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^* & \dots & r_n^* \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}^* - \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ r_1^* & \dots & \dots & r_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 - r_1^* & \dots & \dots & -a_{n-1} - r_n^* \end{bmatrix}$$

Somit hat auch der geschlossene Regelkreis Regelungsnormalform.
Daraus berechnet sich das charakteristische Polynom des Regelkreises:

$$s^n + (a_{n-1} + r_n^*) s^{n-1} + \dots + (a_0 + r_1^*)$$

Eigenwertvorgabe:

$$s^n+(a_{n-1}+r_n^*)s^{n-1}+\dots+(a_0+r_1^*) = (s-\lambda_{R_1})\cdot\dots\cdot(s-\lambda_{R_n}) = s^n+p_{n-1}s^{n-1}+\dots+p_0$$

Koeffizientenvergleich:

$$r_1^* = p_0 - a0\,;\ \dots\ ;\ r_n^* = p_{n-1} - a_{n-1}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\underline{r}^{T*} = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 & \dots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (1)}$$

Diese Wahl von $\underline{r}^{*T}$ garantiert die gewünschten Regelungseigenwerte $\lambda_{R_1} \dots \lambda_{R_n}$.

2.5.2. Berechnung von r^T bei beliebiger Zustandsdarstellung

Gegeben:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,\underline{u}$$

Gesucht: Transformation auf Regelungsnormalform

$$\underline{x}^* = \underline{\underline{T}}\,\underline{x}; \underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}^* \quad \text{mit } \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \vdots \\ \underline{t}_n^T \end{bmatrix}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\underline{\underline{T}}^{-1}\dot{\underline{x}}^* = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{x}^* + \underline{b}u$$

$$\dot{\underline{x}}^* = \underbrace{\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}}_{\underline{\underline{A}}^*}\underline{x}^* + \underbrace{\underline{\underline{T}}\,\underline{b}}_{\underline{b}^*}\,u$$

Forderung 1: $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{T}}$

$$\begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \vdots \\ \underline{t}_n^T \end{bmatrix} \underline{\underline{A}} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \vdots \\ \underline{t}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{t}_1^T\underline{\underline{A}} \\ \vdots \\ \underline{t}_n^T\underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{t}_2^T \\ \vdots \\ -a_0\underline{t}_1^T - a_1\underline{t}_2^T - \dots - a_{n-1}\underline{t}_n^T \end{bmatrix}$$

Zeilenweiser Vergleich:

$$\begin{aligned} \underline{t}_2^T &= \underline{t}_1^T\underline{\underline{A}} \\ \underline{t}_3^T &= \underline{t}_2^T\underline{\underline{A}} = \underline{t}_1^T\underline{\underline{A}}^2 \\ &\vdots \\ \underline{t}_n^T &= \underline{t}_{n-1}^T\underline{\underline{A}} = \underline{t}_1^T\underline{\underline{A}}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^1 \\ \vdots \\ \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2)}$$

Aus der letzten Zeile folgt:

$$-a_0 \underline{t}_1^T - a_1 \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}} - \cdots - a_{n-1} \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^{n-1} = \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^n \qquad (3)$$

Dies ist laut Theorem von Cayley-Hamilton immer erfüllt, liefert also keine neue Information und kann somit nicht zur Berechnung von $\underline{t}_1^T$ verwendet werden. (Siehe BB.2.2).

Forderung 2: $\underline{\underline{T}}\, \underline{b} = \underline{b}^*$

$$\underline{\underline{T}}\, \underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}} \\ \vdots \\ \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elementweiser Vergleich:

$$\underline{t}_1^T \underline{b} = 0, \quad \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}\, \underline{b} = 0, \quad \ldots, \quad \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^{n-1} \underline{b} = 1$$

$$\underline{t}_1^T \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{\underline{A}}\, \underline{b} & \ldots & \underline{\underline{A}}^{n-1} \underline{b} \end{bmatrix}}_{\text{Steuerbarkeitsmatrix } \underline{\underline{Q}}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_n^T}$$

$$\boxed{\underline{t}_1^T = \underline{e}_n^T \underline{\underline{Q}}_s^{-1} = \text{letzte Zeile von } \underline{\underline{Q}}_s^{-1}}$$

Vorraussetzung für die freie Eigenwertvorgabe ist die Steuerbarkeit des Systems! Dann können alle Regelungseigenwerte frei vorgegeben werden.

In der Regelungsnormalform gilt:

$$u = -\underline{r}^{T*} \underline{x}^*, \quad \underline{x}^* = \underline{\underline{T}}\, \underline{x}, \quad \Rightarrow \underline{r}^T = \underline{r}^{T*} \underline{\underline{T}}$$

Aus (1)

$$\underline{r}^T = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 & \ldots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{t}_1^T \\ \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^1 \\ \vdots \\ \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = (p_0 - a_0) \underline{t}_1^T + \cdots + (p_{n-1} - a_{n-1}) \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^{n-1}$$

mit (3) folgt die 'Ackermann-Formel'(1972)

$$\underline{r}^T = p_0 \underline{t}_1^T + p_1 \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}} + \cdots + p_{n-1} \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^{n-1} + \underline{t}_1^T \underline{\underline{A}}^n$$

Beispiel 2. Zweitanksystem

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

gesucht: Regelgesetz

$$u=-\begin{bmatrix}r_1 & r_2\end{bmatrix}\underline{x}$$

Eigenwertvorgabe: $\lambda_{R_1}=-2$; $\lambda_{R_2}=-3$
Charakteristisches Polynom:

$$(s+2)(s+3)=s^2+\underset{p_1}{5}\,s+\underset{p_0}{6}=0$$

Bestimmung von $\underline{t}_1^T$

$$\underline{\underline{Q}}_s=\begin{bmatrix}\underline{b} & \underline{\underline{A}}\,\underline{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q}}_s^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\underline{t}_1^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\underline{r}^T=6\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$$

Siehe BB.2.6.

2.6. Berechnung von R über vollständige modale Synthese

(für Mehrgrößensysteme)
1. Ausgangspunkt:

$$\underline{\dot{x}}=\underline{\underline{A}}\underset{(n\times 1)}{\underline{x}}+\underset{(n\times p)}{\underline{\underline{B}}}\underset{(p\times 1)}{\underline{u}};\quad\operatorname{rang}(\underline{\underline{B}})=p$$

Regelgesetz: $\underline{u}=-\underline{\underline{R}}\,\underline{x}$; Annahme: $\underline{\underline{R}}$ sei bereits bekannt
geschlossener Regelkreis: $\underline{\dot{x}}=(\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\underline{x}$
Die Regelungseigenwerte $\lambda_{R_1}\dots\lambda_{R_n}$ seien von den Streckeneigenwerten $\lambda_1\dots\lambda_n$ verschieden und einfach.
Die Eigenvektoren $\underline{v}_{R1},\dots,\underline{v}_{Rn}$ von $(\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})$ sind dann linear unabhängig.
2. Dann gilt:

$$\left[\lambda_{R_i}\underline{\underline{I}}-(\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\right]\underline{v}_{R_i}=\underline{0}$$

$$(\lambda_{R_i}\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{A}})\underline{v}_{R_i}=-\underline{\underline{B}}\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{v}_{R_i}}_{\underline{p}_i}$$

Definition 1. Parametervektoren $\underline{p}_i$

$$\underline{p}_i=\underline{\underline{R}}\,\underline{v}_{R_i},\quad i=1...n \tag{1}$$

$$(\lambda_{R_i}\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{A}})\underline{v}_{R_i}=-\underline{\underline{B}}\,\underline{p}_i \tag{2}$$

$$\Rightarrow\underline{v}_{R_i}=(\underline{\underline{A}}-\lambda_{R_i}\underline{\underline{I}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{p}_i \tag{3}$$

3. Umkehrung: $\lambda_{R_1}\dots\lambda_{R_n}$ und $\underline{p}_1\dots\underline{p}_n$ werden frei vorgegeben. Dann folgt die Berechnung von $\underline{v}_{R_1}\dots\underline{v}_{R_n}$ nach (3). Diese $\underline{v}_{R_i}$ werden genau dann Regelungseigenvektoren sein, wenn ein $\underline{\underline{R}}$ existiert, derart dass die $\underline{p}_i$ tatsächlich $\underline{p}_i = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}_{R_i}$ erfüllen.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\underline{p}_1 & \dots & \underline{p}_n\end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{v}_{R_1} & \dots & \underline{v}_{R_n}\end{bmatrix}}_{\substack{\underline{\underline{V}}_R \\ (n\times n)}}$$

Ein solches $\underline{\underline{R}}$ existiert, wenn die mit (3) gefundenen $\underline{v}_{R_1}\dots\underline{v}_{R_n}$ linear unabhängig sind bzw. $\underline{\underline{V}}_R$ invertierbar ist.

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix}\underline{p}_1 & \dots & \underline{p}_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{v}_{R_1} & \dots & \underline{v}_{R_n}\end{bmatrix}^{-1} \tag{4}$$

Mit (3):

Allgemeine Formel für den Polvorgaberegler:

$$\underbrace{\underline{\underline{R}}}_{(p\times n)} = \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{p}_1 & \dots & \underline{p}_n\end{bmatrix}}_{(p\times n)}\underbrace{\begin{bmatrix}(\underline{\underline{A}}-\lambda_{R_1}\underline{\underline{I}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{p}_1 & \dots & (\underline{\underline{A}}-\lambda_{R_n}\underline{\underline{I}})^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{p}_n\end{bmatrix}^{-1}}_{(n\times n)} \tag{5}$$

'Roppenecker-Formel' (1981) (parametric state feedback)

siehe BB.2.3.

2.7. Entkoppelung des Ein/Ausgangsverhaltens

Strecke

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underset{(n\times p)}{\underline{\underline{B}}}\,\underline{u};\quad \underline{y} = \underset{(q\times n)}{\underline{\underline{C}}}\,\underline{x};\quad p = q;\quad \operatorname{rang}(\underline{\underline{C}}) = \operatorname{rang}(\underline{\underline{B}}) = p$$

Regelgesetz

$$\underline{u} = -\underline{\underline{R}}\,\underline{x} + \underline{\underline{F}}\,\underline{w} \tag{1}$$

Aufgabe ist es nun, $\underline{\underline{F}}$ und $\underline{\underline{R}}$ so zu wählen, dass jede Regelgröße y_i ihrer Führungsgröße w_i möglichst gut folgt („Entwurf auf Führungsverhalten“) und durch die anderen Führungsgrößen nicht angeregt wird („Entkoppelung“).
Schritt 1: Differentialgleichung für y_i

$$\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x} \Rightarrow \begin{bmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{c}_1^T\\ \vdots \\ \underline{c}_p^T\end{bmatrix}\underline{x} \Rightarrow y_i = \underline{c}_i^T\underline{x}$$

Nach Ableitung:

$$\dot{y}_i = \underline{c}_i^T\underline{\dot{x}} = \underline{c}_i^T\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{c}_i^T\underline{\underline{B}}\,\underline{u}$$

sofern $\underline{c}_i^T\underline{\underline{B}} = \underline{0}^T$ folgt $\dot{y}_i = \underline{c}_i^T\underline{\underline{A}}\,\underline{x}$
nach nochmaligem Ableiten:

$$\ddot{y}_i = \underline{c}_i^T\underline{\ddot{x}} = \underline{c}_i^T\underline{\underline{A}}^2\underline{x} + \underline{c}_i^T\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}$$

sofern $\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{0}^T$ folgt $\ddot{y}_i = \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^2 \underline{x}$
usw. so lange bis

$$\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}} \neq \underline{0}^T$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{c}_i^T \underline{\underline{B}} &= \underline{0}^T \\ \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} &= \underline{0}^T \\ &\vdots \\ \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 2} \underline{\underline{B}} &= \underline{0}^T \\ \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}} &\neq \underline{0}^T \end{aligned}$$

δ_i heißt Differenzordnung des Systems bezüglich y_i und bezeichnet die niedrigste Ableitung von y_i auf die $\underline{u}$ unmittelbar zugreift.
Wir haben also für $i = 1...p$:

$$\left.\begin{array}{ccc} y_i & = & \underline{c}_i^T \underline{x} \\ \dot{y}_i & = & \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \\ \vdots & & \vdots \\ \overset{(\delta_i - 1)}{y_i} & = & \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{x} \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\overset{(\delta_i)}{y_i} = \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i} \underline{x} + \underbrace{\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}}}_{\neq \underline{0}^T} \underline{u} \tag{3}$$

Nun (1) in (3) einsetzen

$$\overset{(\delta_i)}{y_i} = (\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}) \underline{x} + \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{w} \tag{4}$$

Schritt 2: Entkoppelung
Damit y_i nur von seiner Führungsgröße w_i abhängt, ist $\underline{\underline{F}}$ so zu wählen, dass

$$\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{w} \overset{!}{=} k_i w_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & k_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \underline{w} \tag{5}$$

oder

$$\begin{aligned} \underline{c}_1^T \underline{\underline{A}}^{\delta_1 - 1} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}} &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{\underline{A}}^{\delta_p - 1} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & k_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oder

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{\underline{A}}^{\delta_1 - 1} \underline{\underline{B}} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{\underline{A}}^{\delta_p - 1} \underline{\underline{B}} \end{bmatrix}}_{\underset{(p \times p)}{\underline{\underline{D}}^*}} \underline{\underline{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_p \end{bmatrix}}_{\underset{(p \times p)}{\underline{\underline{K}}}} = \mathrm{diag}(k_1 \dots k_p)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{D}}^*)^{-1}\underline{\underline{K}} \qquad (6) \\ \text{sofern } \det(\underline{\underline{D}}^*) \neq 0 \text{ (Entkoppelbarkeitsbedingung)} \end{array}}$$

Somit wird (4) mit (5)

$$\overset{(\delta_i)}{y_i} = (\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{R}})\underline{x} + k_i w_i \tag{7}$$

Um den Term mit $\underline{x}$ durch einen mit $y_i, \dot{y}_i, \ldots$ zu ersetzen, wählt man $\underline{\underline{R}}$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} (\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{R}})\underline{x} &\overset{!}{=} -(M_{i_0} y_i + M_{i_1} \dot{y}_i + \cdots + M_{i_{\delta_i - 1}} \overset{(\delta_i - 1)}{y_i}) \\ &= -\sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} M_{i_\nu} \overset{(\nu)}{y_i} \quad M_{i_\nu} \text{ beliebig (konstant)} \end{aligned} \tag{8}$$

Aus (2) ist bekannt

$$\overset{(\nu)}{y_i} = \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^\nu \underline{x}; \quad \nu < \delta_i$$

$$\underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i} - \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^{\delta_i - 1} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{R}} = -\sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} M_{i_\nu} \underline{c}_i^T \underline{\underline{A}}^\nu \quad \forall\, i = 1 \ldots p$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{\underline{A}}^{\delta_1 - 1} \underline{\underline{B}} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{\underline{A}}^{\delta_p - 1} \underline{\underline{B}} \end{bmatrix}}_{\underset{(p \times p)}{\underline{\underline{D}}^*}} \underset{(p \times n)}{\underline{\underline{R}}} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{\underline{A}}^{\delta_1} + \sum_{\nu=0}^{\delta_1 - 1} M_{1_\nu} \underline{c}_1^T \underline{\underline{A}}^\nu \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{\underline{A}}^{\delta_p} + \sum_{\nu=0}^{\delta_p - 1} M_{p_\nu} \underline{c}_p^T \underline{\underline{A}}^\nu \end{bmatrix}_{(p \times n)}$$

hieraus wird $\underline{\underline{R}}$ ermittelt.
Somit wird aus (7) wegen (8):

$$\overset{(\delta_i)}{y_i} = -\sum_{\nu=0}^{\delta_i - 1} M_{i_\nu} \overset{(\nu)}{y}_i + k_i w_i$$

oder

$$\begin{gathered} \overset{(\delta_1)}{y_1} + \cdots + M_{1_0} y_1 = k_1 w_1 \\ \vdots \\ \overset{(\delta_p)}{y_p} + \cdots + M_{p_0} y_p = k_p w_p \end{gathered}$$

$\Rightarrow$ entkoppeltes System

Nach Laplacetransformation

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{k_1}{s^{\delta_1} + \cdots + M_{1_1} s + M_{1_0}} W_1(s) \\ &\vdots \\ Y_p(s) &= \frac{k_p}{s^{\delta_p} + \cdots + M_{p_1} s + M_{p_0}} W_p(s) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beschreiben das Ein-/Ausgangsverhalten des geregelten Systems

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{w} \\ \underline{y} &= \underline{\underline{C}}\,\underline{x} \end{aligned}$$

Es besitzt eine diagonalförmige Führungsübertragungsmatrix.

Schritt 3: Polvorgabe
Man gibt nun die Pole der einzelnen Übertragungsfunktionen vor, dadurch sind die M_{i_ν} bestimmt. Außerdem kann man für stationäre Genauigkeit ($y_i = w_i$ für $s = 0$) $k_i = M_{i_0}$ wählen. Ist die Entkoppelbarkeitsbedingung $\det(\underline{\underline{D}}^*) \neq 0$ erfüllt, so kann man entkoppeln und $\delta_1 + \cdots + \delta_p = \delta$ Eigenwerte vorgeben.
δ ist die Differenzordnung des Systems (relativer Grad).

- Fall 1 $\delta = n$: alle Eigenwerte können vorgegeben werden.
- Fall 2 $\delta < n$: Es existieren Eigenwerte, die nicht als Pole der Übertragungsmatrix $\underline{\underline{G}}(s)$ auftreten. Sie sind kompensiert durch invariante Nullstellen an gleicher Stelle. Die nicht vorgegebenen Eigenwerte werden durch $\underline{\underline{R}}$ in invariante Nullstellen verschoben, sie werden unbeobachtbar.

$\Rightarrow$ Stabilität der Entkoppelungsregelung tritt genau dann ein, wenn alle invarianten Nullstellen in der linken komplexen Halbebene liegen (und die δ vorgegebenen Pole links platziert wurden).
siehe BB.2.5./2.4.

2.8. Minimierung eines quadratischen Gütemaßes

2.8.1. Aufgabe

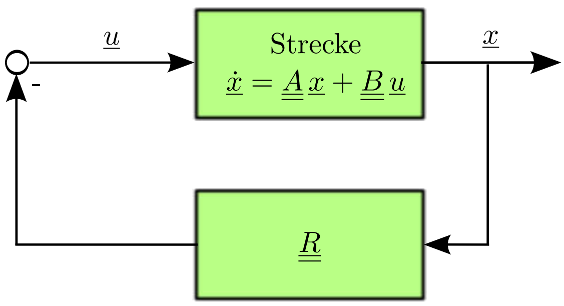


Abbildung 2.4.: Strecke & Rückführung

Rückführung $\underline{\underline{R}}$ ist so zu wählen, dass

- (a) der Übergang von $\underline{x}_0$ nach $\underline{x}_s = \underline{0}$ schnell und nicht zu stark oszillierend erfolgt.
- (b) die dazu erforderliche „Steuerenergie“ möglichst klein ist.

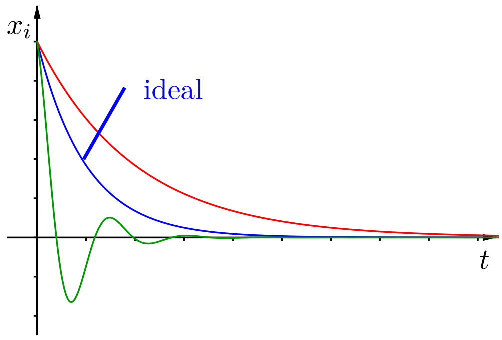


Abbildung 2.5.: mögliche Verläufe einer Zustandsgröße x_i

Die Fläche unter der Kurve ist ein Maß für die Energie
Quantitative Erfassung von Forderung (a)
Gütemaß für den Verlauf von x_i:

$$J_i = \int\limits_0^\infty x_i^2(t)dt$$

Um alle Zustandsvariablen zu berücksichtigen

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left[q_{11}x_1^2(t) + \dots + q_{nn}x_n^2(t)\right] dt$$

Darin sind $q_{ii} > 0$ Gewichtungsfaktoren.
Soll z.B. x_1 besonders klein gemacht werden, dann ist q_{11} besonders groß zu wählen.
Mit

$$\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{nn} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{Q}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = q_{11}x_1^2 + \dots + q_{nn}x_n^2$$

folgt

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \underline{x}^T(t)\underline{\underline{Q}}\,\underline{x}(t)dt$$

$\underline{\underline{R}}$ ist so zu wählen, das J minimal wird.

Quantitative Erfassung von (b):

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left[\tilde{q}_{11}u_1^2(t) + \dots + \tilde{q}_{pp}u_p^2(t)\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \underline{u}^T(t)\underline{\underline{\tilde{Q}}}\underline{u}(t)dt \quad \text{mit } \underline{\underline{\tilde{Q}}} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{q}_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Erfüllung (a) und (b) mit Gütemaß:

$$J = J(\underline{\underline{R}}) = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \underline{x}^T(t)\underline{\underline{Q}}\,\underline{x}(t)dt}_{\text{verlaufsoptimaler Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \underline{u}^T(t)\underline{\underline{\tilde{Q}}}\,\underline{u}(t)dt}_{\text{verbrauchsoptimaler Anteil}}$$

$\underline{\underline{R}}$ ist so zu wählen, das J minimal wird.

2.8.2. Lösung

Optimales Regelgesetz (Herleitung in „moderne Methoden der Regelungstechnik 2“):

$$u = -\underbrace{\underline{\underline{\tilde{Q}}}^{-1}\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{P}}}_{\underline{\underline{R}}}\,\underline{x}$$

Darin ist $\underline{\underline{P}}$ die konstante, symmetrische, positiv definite $(n \times n)$ Matrix, die sich als Lösung von:

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{\tilde{Q}}}^{-1}\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{0}}$$

ergibt. Sie heißt algebraische Riccati Gleichung.

$\underline{\underline{P}}$ heißt positiv definit, wenn $\underline{x}^T\underline{\underline{P}}\,\underline{x} > 0$ für $\underline{x} \neq \underline{0}$.
Routinen zur Lösung in jedem Programmpaket.

Beispiel 3. skalare Ricatti-Gleichung

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= ax + bu \\
J &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left(qx^2 + \tilde{q}u^2\right)\mathrm{d}t \\
u &= -\underbrace{\frac{1}{\tilde{q}}bp}_{r}\,x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pb\frac{1}{\tilde{q}}bp - pa - ap - d &= 0 \quad \text{Ricatti-Gleichung} \\
\frac{b^2}{\tilde{q}}p^2 - 2ap - q &= 0
\end{aligned}$$

$$p_{1/2} = \frac{a\tilde{q}}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a\tilde{q}}{b^2}\right)^2 + \frac{q\tilde{q}}{b^2}}$$

Es ist die positiv definite Lösung zu nehmen $(px^2 > 0)$.

$$p_1 = \frac{a\tilde{q}}{b^2} + \sqrt{\left(\frac{a\tilde{q}}{b^2}\right)^2 + \frac{q\tilde{q}}{b^2}}$$

3. Zustandsbeobachter

3.1. Prinzip

Problem der Zustandsrückführung $\underline{u} = -\underline{\underline{R}}\,\underline{x}$ ist, dass alle n Zustandsgrößen gemessen und rückgeführt werden müssen. Die Messung bestimmter Größen kann aber sehr teuer oder sogar unmöglich sein.
Abhilfe schafft die Schätzung der nicht messbaren Zustandsgrößen durch einen sog. Beobachter.
Gesamtheit der Messgrößen: $\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}$ Messvektor
Gesamtheit der Regelgrößen: $\underline{y}_a = \underline{\underline{C}}_a\underline{x}$ Regelvektor

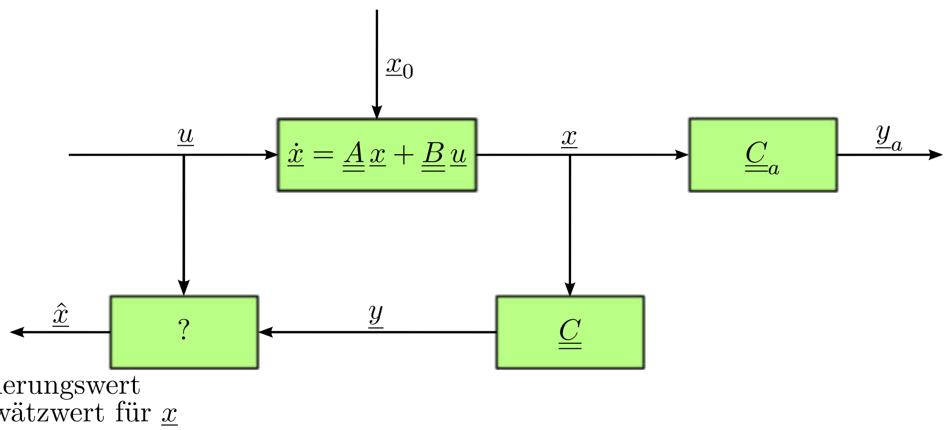


Abbildung 3.1.: Ansatz für Beobachter

Vorschlag von Luenberger

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{\underline{M}}\,\hat{\underline{x}} + \underline{\underline{G}}\,\underline{u} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y} \tag{1}$$

=Dynamisches System (Luenberger-Beobachter)

Darin sind $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{K}}$ so zu wählen, dass der Schätzfehler

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) \qquad \to \underline{0} \text{ für } t \to \infty$$

und zwar für beliebiges $\underline{x}_0, \hat{\underline{x}}_0$.
Fehler-Differentialgleichung:

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} - \underbrace{\underline{\underline{M}}\,\hat{\underline{x}}}_{\underline{\underline{M}}(\underline{x}-\tilde{\underline{x}})} - \underline{\underline{G}}\,\underline{u} - \underbrace{\underline{\underline{K}}\,\underline{y}}_{\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{x}}$$

$$\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\underline{M}}\,\underline{\tilde{x}} + (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})\underline{x} + (\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{G}})\underline{u}$$

Man wählt:

1. $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{B}}$ damit der Einfluss von $\underline{u}$ verschwindet und der Beobachter somit für jedes $\underline{u}$ gilt.

2. $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{M}}$ so, dass $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$, also $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}}$. Somit ist nur $\underline{\underline{K}}$ frei wählbar.

Dann gilt:

$$\dot{\underline{\tilde{x}}} = \underline{\underline{M}}\,\underline{\tilde{x}}$$

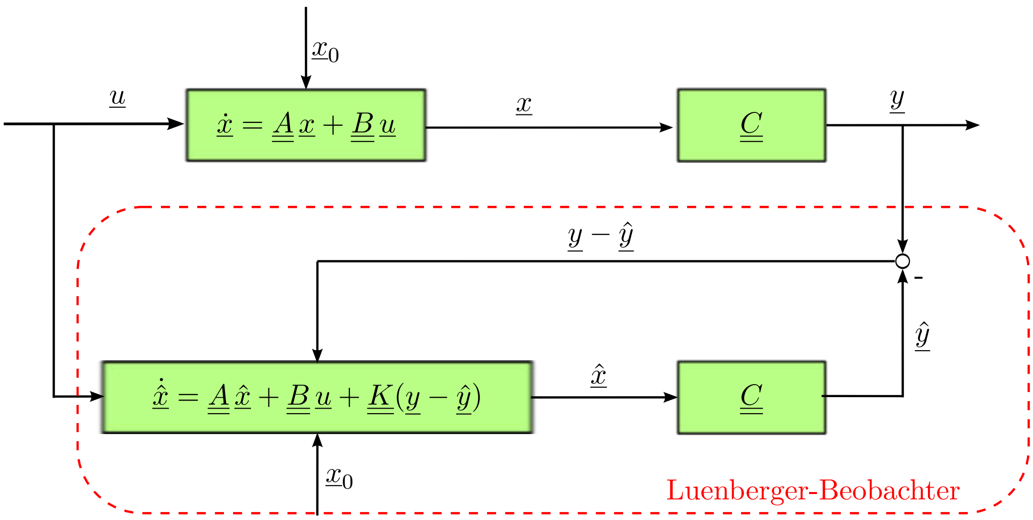
$\underline{\tilde{x}}(t) \to \underline{0}$, falls alle Eigenwerte von $\underline{\underline{M}}$ links liegen.
Luenberger-Beobachter:

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \underbrace{(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})}_{\underline{\underline{M}}}\,\underline{\hat{x}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y} \tag{2}$$

wobei $\underline{\underline{K}}$ so zu wählen ist, dass die Eigenwerte von $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}}$ links liegen.
Umformung:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\hat{x}} = \left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}}\right)\underline{\hat{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\hat{x}} - \underline{\underline{K}}\,\underbrace{\underline{\underline{C}}\,\underline{\hat{x}}}_{\underline{\hat{y}}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\hat{x}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\hat{y}}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{\hat{x}}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\hat{x}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\hat{y}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y}$$



Parallelmodell mit Korrekturterm $\underline{\underline{K}}(\underline{y} - \underline{\hat{y}})$

Abbildung 3.2.: Luenberger-Beobachter = vollständiger Zustandsbeobachter (BB 3.1)

$\underline{\hat{x}}_0$ wird $= \underline{0}$ gewählt oder auf vorbekannte Werte gesetzt (wenn verfügbar).

3.2. Entwurf des Beobachters

1. Man gibt die Eigenwerte $\beta_1, ..., \beta_n$ von $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}}$ vor und zwar (Faustregel) links der Eigenwerte des ohne Beobachter geschlossenen Regelkreises, aber nicht zu weit links, da der Beobachter sonst differenzierend wirkt.

2. Bestimmung von $\underline{\underline{K}}$

$$\det[s\underline{\underline{I}} - (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})] \stackrel{!}{=} (s-\beta_1)\cdot\dots\cdot(s-\beta_n) = s^n + \dots + p_1 s + p_0 = p(s)$$

   durch Koeffizientenvergleich: Synthesegleichungen des Beobachters

Beispiel: Zweitanksystem BB 3.4

3.3. Berechnung des Beobachters über einen Zustandsreglerentwurf

(Bei Transposition bleibt die Determinante unverändert)

$$\det[s\underline{\underline{I}} - (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})] = \det[s\underline{\underline{I}} - (\underline{\underline{A}}^T - \underline{\underline{C}}^T\underline{\underline{K}}^T)] \stackrel{!}{=} (s-\beta_1)\cdot\dots\cdot(s-\beta_n)$$

Das ist das charakteristische Polynom des folgenden fiktiven Regelkreises

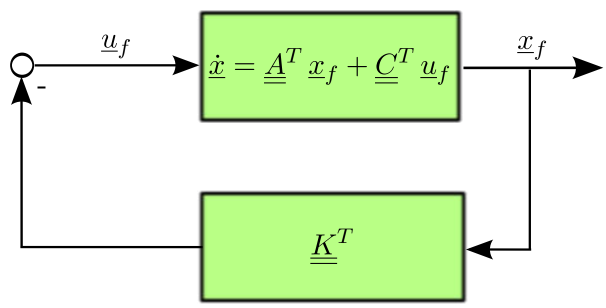


Abbildung 3.3.: fiktiver Regelkreis

$$\dot{\underline{x}}_f = \underline{\underline{A}}^T\underline{x}_f + \underline{\underline{C}}^T\underline{u}_f \quad ; \quad \underline{u}_f = -\underline{\underline{K}}\,\underline{x} \quad [f \text{ für fiktiv}]$$
$$\dot{\underline{x}}_f = (\underline{\underline{A}}^T - \underline{\underline{C}}^T\underline{\underline{K}}^T)\underline{x}_f$$

Bei Polvorgabe war

$$\det[s\underline{\underline{I}} - (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})] \stackrel{!}{=} p(s)$$

Somit das gleiche Problem wie Eigenwertvorgabe durch Zustandsrückführung nur mit $\underline{\underline{A}}^T$ statt $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{C}}^T$ statt $\underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{K}}^T$ statt $\underline{\underline{R}}$.
Daher kann jedes Verfahren zur Zustandsreglerberechnung durch Polvorgabe Anwendung finden.

- nur eine Messgröße: Ackermann-Formel
- mehrere Messgrößen: Roppenecker-Formel

3.4. Vorgebbarkeit von Beobachter-Eigenwerten

BB 3.2

3.5. Reduzierter Beobachter

Messgrößen $y_1, ..., y_q$ werden als Zustandsvariablen eingeführt, die nicht messbaren Zustandsvariablen seien mit $v_1, ..., v_{n-q}$ bezeichnet.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{v} \end{bmatrix}$$

Dann wird $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ zu

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{v} \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{11} & \underline{\underline{A}}_{12} \\ \underline{\underline{A}}_{21} & \underline{\underline{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_1 \\ \underline{\underline{B}}_2 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{A}}_{11}\underline{y} + \underline{\underline{A}}_{12}\underline{v} + \underline{\underline{B}}_1\underline{u}$$

$$\dot{\underline{v}} = \underline{\underline{A}}_{21}\underline{y} + \underline{\underline{A}}_{22}\underline{v} + \underline{\underline{B}}_2\underline{u}$$

Vollständigen Beobachter für $\underline{v}$ entwerfen:

$$\underbrace{\dot{\underline{v}}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\underline{\underline{A}}_{22}\underline{v}}_{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}} + \underbrace{(\underline{\underline{A}}_{21}\underline{y} + \underline{\underline{B}}_2\underline{u})}_{\underline{\underline{B}}\,\underline{u}}$$

Messgleichung:

$$\underbrace{\dot{\underline{y}} - \underline{\underline{A}}_{11}\underline{y} - \underline{\underline{B}}_1\underline{u}}_{\underline{y}} = \underbrace{\underline{\underline{A}}_{12}\underline{v}}_{\underline{\underline{C}}\,\underline{x}}$$

Für dieses System wird nun ein vollständiger Beobachter für $\underline{v}$ entworfen:

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})\hat{\underline{x}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{\underline{v}}} = (\underline{\underline{A}}_{22} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{A}}_{12})\hat{\underline{v}} + (\underline{\underline{A}}_{21}\underline{y} + \underline{\underline{B}}_2\underline{u}) + \underline{\underline{K}}(\dot{\underline{y}} - \underline{\underline{A}}_{11}\underline{y} - \underline{\underline{B}}_1\underline{u})$$

Um die Differentiation von $\underline{y}$ zu vermeiden führt man anstelle von $\hat{\underline{v}}$ den Vektor $\underline{z} = \hat{\underline{v}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{y}$ ein.

$$\hat{\underline{v}} = \underline{z} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y} \qquad \dot{\hat{\underline{v}}} = \dot{\underline{z}} + \underline{\underline{K}}\,\dot{\underline{y}}$$

$$\dot{\underline{z}} + \underline{\underline{K}}\,\dot{\underline{y}} = (\underline{\underline{A}}_{22} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{A}}_{12})(\underline{z} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y}) + (\underline{\underline{A}}_{21}\underline{y} + \underline{\underline{B}}_2\underline{u}) + \underline{\underline{K}}\,\dot{\underline{y}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{A}}_{11}\underline{y} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{B}}_1\underline{u}$$

$\dot{\underline{y}}$ fällt herraus. Der reduzierte Beobachter lautet:

$$\dot{\underline{z}} = (\underline{\underline{A}}_{22} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{A}}_{12})\underline{z} + (\underline{\underline{B}}_2 - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{B}}_1)\underline{u} + \left[(\underline{\underline{A}}_{22} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{A}}_{12})\underline{\underline{K}} + (\underline{\underline{A}}_{21} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{A}}_{11})\right]\underline{y}$$

$$\underset{(n-q\times 1)}{\underline{v}} = \underline{z} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y}$$

Der Beobachter hat die Ordnung $n - q$.

Siehe Beiblatt 3.2. zur Vorgebbarkeit von Beobachtereigenwerten und Beiblatt 3.4. für Beispiele

3.6. Beobachter im Regelkreis - Separationstheorem

Struktur des über Beobachter und Zustandsregler geschlossenen Regelkreises nach Beiblatt 3.1.
Wird durch das Einfügen des Beobachters in den geschlossenen Regelkreis die Lage der zuvor festgelegten Eigenwerte in unkontrollierbarer Weise verändert?
Gleichungen der Regelung (mit $\underline{w} = 0$, ohne $\underline{y}_0$)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} \qquad \underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})\hat{\underline{x}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{K}}\,\underline{y} \qquad \underline{u} = -\underline{\underline{R}}\,\hat{\underline{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}\,\hat{\underline{x}} \qquad \dot{\hat{\underline{x}}} = (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})\hat{\underline{x}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}\,\hat{\underline{x}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{x}$$

Zustandsdifferentialgleichung des über den Beobachter geschlossenen Regelkreis.

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & -\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} \\ \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}} & \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\det \begin{bmatrix} s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} \\ -\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}} & s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} \end{bmatrix} = 0$$

Addition der zweiten Spalte zur ersten:

$$\det \begin{bmatrix} s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} \\ s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} & s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} \end{bmatrix} = 0$$

Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten:

$$\det \begin{bmatrix} s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} \\ 0 & s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}} \end{bmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})}_{\substack{\text{char.Polynom} \\ \text{des Regelkreises} \\ \text{ohne Beobachter}}} \cdot \underbrace{\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{C}})}_{\substack{\text{char.Polynom} \\ \text{des Beobachters}}} = 0$$

Resultat: Die Eigenwerte des ohne Beobachter geschlossenen Regelkreises werden durch den Beobachter nicht verändert. Zu ihnen treten lediglich die Eigenwerte des Beobachters hinzu.

3.7. Kalman-Filter

Siehe Beiblatt 3.3.

3.8. Digitale Implementierung

Siehe Beiblatt 3.5

4. Berücksichtigung von Störgrößen

Bisher wurden nur Anfangsstörungen berücksichtigt. Nun sollen auch Dauerstörungen einbezogen werden:

- Störung $\underline{z}(t)$ messen oder schätzen und dann gegensteuern (siehe 4.1/4.2)
- Zustandsregler entwerfen, der alle Störungen $\underline{z}(t)$ von $\underline{y}$ fernhält. (siehe 4.3)
- Spezielle andere Strukturen (siehe 5.)

4.1. Störmodell und Störgrößenbeobachter

Manchmal hat man eine Vorstellung von der Gestalt der Störgrößen.

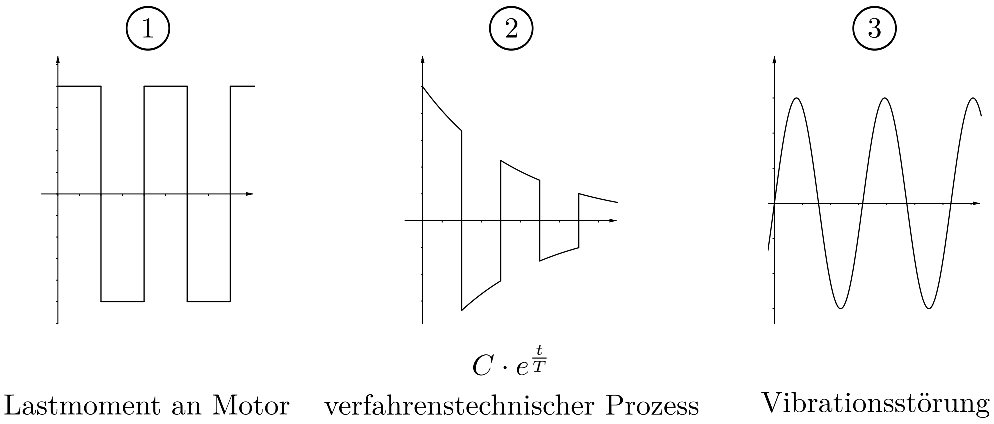


Abbildung 4.1.: Beispielverläufe für Störgrößen

Solche Störungen können durch Differentialgleichungen erzeugt werden, die in zufälligen Zeitpunkten durch zufällige Anfangswerte angeregt werden.

1. $\dot{z} = 0$ (Sprünge entsprechen neuen Anfangswerten)
2. $T\dot{z} + z = 0$
3. $T^2\ddot{z} + z = 0$

allg.: lineare homogene Differentialgleichungen beliebiger Ordnung
Zustandsdarstellung:

$$(\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \Rightarrow) \quad \underline{\dot{w}} = \underline{\underline{W}}\,\underline{w} \qquad \underline{w}(t_0) = \underline{w}_0$$

$$(\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x} \Rightarrow) \quad \underline{z} = \underline{\underline{Z}}\,\underline{w}$$

$\underline{\underline{W}}$ und $\underline{\underline{Z}}$ sind im mathematischem Modell der Störung (=Störmodell) bekannte, konstante Matrizen.
Hinzu kommt das Streckenmodell mit Störeingriff.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{E}}\,\underline{z} \qquad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x} \qquad \text{Messgleichung}$$

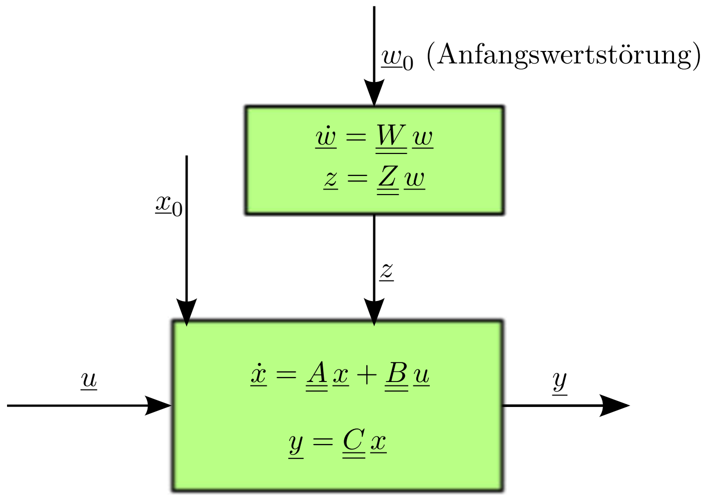


Abbildung 4.2.: Störmodell

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Z}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{W}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \underline{u} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} (*)$$

Beobachter (reduziert) für das Gesamtmodell in gleicher Weise, wie bisher für das Streckenmodell $\Rightarrow$ Zustands- und Störgrößenbeobachter.
Er liefert den Näherungswert $\begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}(t) & \hat{\underline{w}}(t) \end{bmatrix}^T$ und damit eine Näherung- für die Störung $\hat{\underline{z}} = \underline{\underline{Z}}\,\hat{\underline{w}}$.
Damit ist die Störung bekannt.
Falls Komponenten von $\underline{z}$ messbar sind, braucht man hierfür keine Schätzung (und kein Störmodell).

Entwurf eines Zustandsreglers unabhängig vom Beobachter möglich, da das Separationstheorem auch hier gilt.
Ansatz einer Zustandsrückführung wie bisher:

$$\underline{u} = -\underline{\underline{R}}_{\text{gesamt}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{R}} & -\underline{\underline{R}}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} = -\underline{\underline{R}}\,\underline{x} - \underline{\underline{R}}_w \underline{w}$$

Einsetzen in $(*)$

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Z}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}_w \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{W}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$$

Strecke, Störung und Zustandsrückführung enthalten.
Charakteristisches Polynom

$$\det \begin{bmatrix} s\underline{\underline{I}} - (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}) & -\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Z}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}_w \\ \underline{\underline{0}} & s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{W}} \end{bmatrix}$$

$$= \det(s\underline{\underline{I}} - (\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}})) \cdot \det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{W}})$$

Die erste Determinante entspricht der bisherigen Verschiebung der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ durch $\underline{\underline{R}}$. Die Eigenwerte von $\underline{\underline{W}}$ können jedoch von $\underline{\underline{R}}$ oder $\underline{\underline{R}}_{\text{gesamt}}$ nicht verschoben werden.

verbleibendes Problem:
Wie kann die Einwirkung von $\underline{z}$ auf den Regelkreis in anderer Weise als durch Eigenwertvorgabe gemindert werden?

4.2. Störgrößenaufschaltung

4.2.1. Konstante Rückführung von w

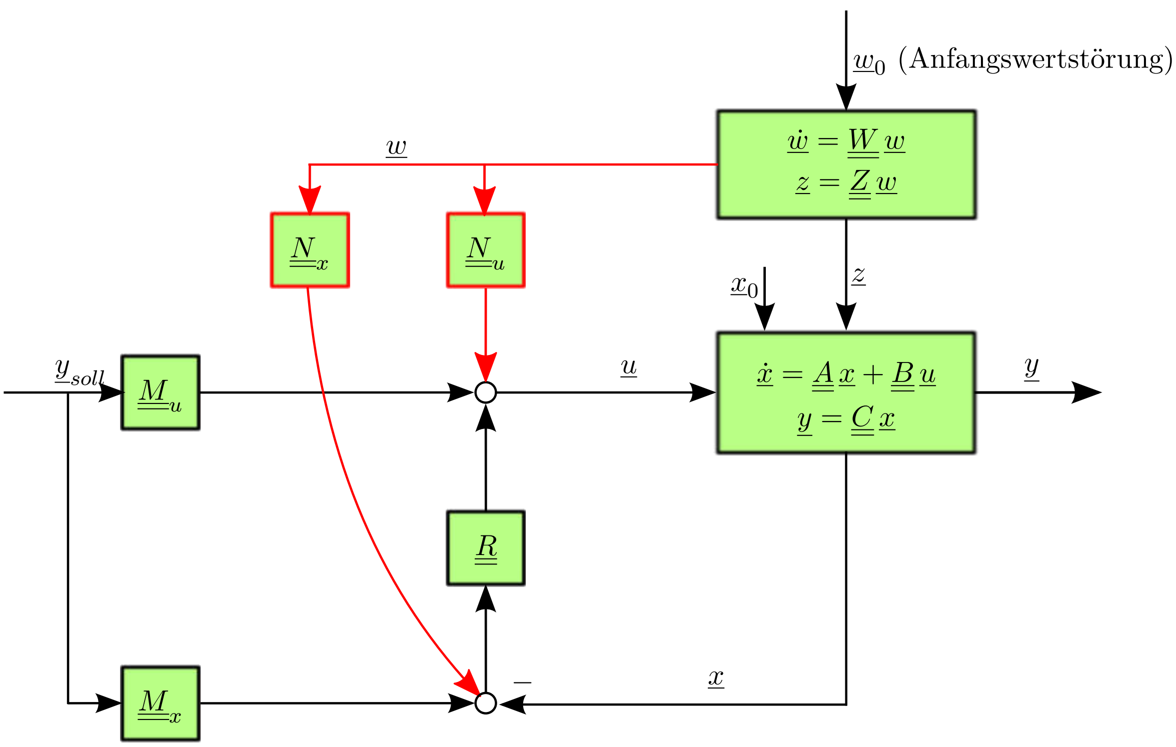


Abbildung 4.3.: konstante Störgrößenaufstellung

Ausgangspunkt: System mit gleich vielen Stell- wie Regelgrößen.
$\underline{\underline{W}}$ in Diagonalform (andernfalls BB.4.1)
$\underline{\underline{N}}_x$ zur Elimination des Einflusses von $\underline{w}$ auf $\underline{\underline{R}}$. $\underline{\underline{R}}$ soll unabhängig von $\underline{w}$ entwerfbar

sein. Für $\underline{y}_{soll} = 0$:

$$\text{Rückführgesetz:} \quad u = \underbrace{\underline{\underline{N}}_u \underline{w} + \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{N}}_x \underline{w}}_{-\underline{\underline{R}}_w \underline{w}} - \underline{\underline{R}}\,\underline{x}$$

Zustandsgleichung

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} & \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Z}} + \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{N}}_x + \underline{\underline{N}}_u) \\ 0 & \underline{\underline{W}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \qquad \underline{e} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{I}} & \underline{\underline{N}}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$$

Idee: $\underline{\underline{N}}_x$ und $\underline{\underline{N}}_u$ so wählen, dass die Eigenwerte des Störmodells $\underset{(s\times s)}{\underline{\underline{W}}}$ in $\underline{y}$ und $\underline{e}$ unbeobachtbar werden.
Dazu Forderungen gemäß Gilbertkriterium:

1. $\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \underline{v}_i = \underline{0}$ für $i = 1 \dots s$

2. $\begin{bmatrix} -\underline{\underline{I}} & \underline{\underline{N}}_x \end{bmatrix} \underline{v}_i = \underline{0}$ für $i = 1 \dots s$

Eigenvektoren $\underline{v}_i$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} - \lambda_i \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{Z}} + \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{N}}_x + \underline{\underline{N}}_u) \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{W}} - \lambda_i \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{v}_{x_i} \\ \underline{e}_i \end{bmatrix}}_{\underline{v}_i} = 0 \quad (**)$$

Mit $\underline{e}_i$ = Einheitsvektor mit 1 an $i-$ter Stelle, da $\underline{\underline{W}}$ diagonal.
Aus Forderung 2:

$$\underline{v}_{x_i} = \underline{\underline{N}}_x \underline{e}_i = \underline{n}_{x_i}$$

$(**)$ wird zu:

$$(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}} - \lambda_i \underline{\underline{I}})\underline{n}_{x_i} + \underline{\underline{E}}\,\underline{z}_i + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{n}_{x_i} + \underline{\underline{B}}\,\underline{n}_{u_i} = 0$$

$$\Rightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}})\underline{n}_{x_i} + \underline{\underline{E}}\,\underline{z}_i + \underline{\underline{B}}\,\underline{n}_{u_i} = 0$$

Aus Forderung 1:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \underline{v}_i = \underline{\underline{C}}\,\underline{v}_{x_i} = \underline{\underline{C}}\,\underline{n}_{x_i} = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{P}}(\lambda_i)} \begin{bmatrix} \underline{n}_{x_i} \\ \underline{n}_{u_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{E}}\,\underline{z}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (***)$$

Ergebnis: Die Spalten der gesuchten Matrizen $\underline{\underline{N}}_u, \underline{\underline{N}}_x$ sind

$$\begin{bmatrix} \underline{n}_{x_i} \\ \underline{n}_{u_i} \end{bmatrix} = -\underline{\underline{P}}^{-1}(\lambda_i) \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}}\,\underline{z}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad i = 1 \dots s$$

worin λ_i die Eigenwerte von $\underline{\underline{W}}$ sind. Die durch $\underline{\underline{W}}, \underline{\underline{Z}}$ beschriebenen Störungen werden unbeobachtbar. Eingenwerte λ_i werden dabei $\neq$ invariante Nullstellen vorausgesetzt Nur Dauereinflüsse werden ausgeblendet.

Speziell für abschnittsweise konstante Dauerstörungen ist $\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{0}}$ und $\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{I}}$, folglich

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{N}}_x \\ \underline{\underline{N}}_u \end{bmatrix} = -\underline{\underline{P}}^{-1}(0) \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

Im Fall $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{0}}$ wird nur $\underline{\underline{N}}_u$ implementiert.
siehe Beiblatt 4.1.-4.

4.2.2. Dynamische Störgrößenaufschaltung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{E}}\,\underline{z} \qquad \underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}$$

$\underline{z}$ sei messbar. Kein Regelgesetz.
Ziel: Vollständige Unstörbarkeit von $\underline{y}$ für beliebiges $\underline{z}(t)$.
Übertragungsverhalten:

$$s\underline{X}(s) = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(s) + \underline{\underline{B}}\,\underline{U}(s) + \underline{\underline{E}}\,\underline{Z}(s)$$

$$\underline{X}(s) = \underbrace{(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{G}}_{ux}(s)}\underline{U}(s) + \underbrace{(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{E}}}_{\underline{\underline{G}}_{zx}(s)}\underline{Z}(s)$$

$$\underline{Y}(s) = \underline{\underline{C}}\,\underline{X}(s) \qquad \underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{G}}_{uy}(s)}\underline{U}(s) + \underbrace{\underline{\underline{C}}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{E}}}_{\underline{\underline{G}}_{zy}(s)}\underline{Z}(s)$$

Forderung: $\underline{Y}(s) \overset{!}{=} 0$.

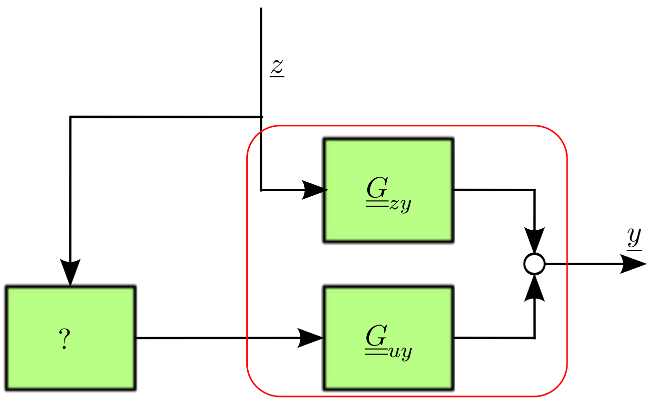


Abbildung 4.4.: dynamische Störgrößenaufstellung

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}}_{uy}(s) \cdot \underline{U}(s) = -\underline{\underline{G}}_{zy}(s)\underline{Z}(s)$$

$$\Rightarrow \underline{U}(s) = -\underline{\underline{G}}_{uy}^{-1}(s) \cdot \underline{\underline{G}}_{zy}(s)\underline{Z}(s)$$

$\Rightarrow$ dynamische Störgrößenaufschaltung.
Sie hält beliebige Verläufe $\underline{z}(t)$ von $\underline{y}$ für alle t fern.

Erweiterungen und Probleme siehe Beiblatt 4.4.
Auswege: Kapitel 5

4.3. Vollständige Unterdrückung von Störungen durch geeignete Zustandsrückführung (=Störentkoppelung)

Vollständige Unterdrückung des Störeinflusses durch geeignete Zustandsrückführung.

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{E}}\,\underline{z} \qquad \underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}$$

Ziel: $\underline{u} = -\underline{\underline{R}}\,\underline{x}$ derart wählen, das $\underline{y} = \underline{0}$ für alle $\underline{z}(t)$.
Störentkoppelung ist genau dann gegeben, wenn sich jede Spalte von $\underline{\underline{E}}$ als Linearkombination derjenigen Regelungseigenvektoren bilden lässt, für die $\underline{\underline{C}}\,\underline{v}_{Ri} = \underline{0}$ gilt.
Beweis siehe Beiblatt 4.2.
Entwurf von $\underline{\underline{R}}$ über die Roppeneckerformel

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \dots & \underline{p}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_{R1} & \dots & \underline{v}_{Rn} \end{bmatrix}^{-1}$$

mit

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_{Ri}\underline{\underline{I}})\underline{v}_{Ri} = \underline{\underline{B}}\,\underline{p}_i \qquad i = 1 \dots n \qquad (*)$$

(λ_{Ri} und $\underline{p}_i$ werden vorgegeben.)
Forderung: $\underline{\underline{C}}\,\underline{v}_{Ri} = \underline{0} \qquad (**)$.
Kombination von $(*)$ und $(**)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} - \lambda_{Ri}\underline{\underline{I}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{P}}(\lambda_{Ri})} \begin{bmatrix} \underline{v}_{Ri} \\ -\underline{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \qquad (***)$$

Diese Gleichung hat genau dann nichttrivale Lösungen $\underline{v}_{Ri}, \underline{p}_i$ wenn man λ_{Ri} gleich den invarianten Nullstellen wählt, da dort $\underline{\underline{P}}(\lambda_{Ri})$ singulär wird.
Entwurfsschritte:

1. Man bestimmt die invarianten Nullstellen und die $\underline{v}_{Ri}, \underline{p}_i$ aus $(***)$.
2. Prüfung der Störentkoppelbarkeitsbedingung: jede Spalte von $\underline{\underline{E}}$ muss als Linearkombination der $\underline{v}_{Ri}$ darstellbar sein.
3. Man gibt diejenigen invarianten Nullstellen, deren zugehörige $\underline{v}_{Ri}$ zur Bildung von $\underline{\underline{E}}$ benötigt werden, als Regelungseigenwerte vor und verwendet die $\underline{v}_{Ri}, \underline{p}_i$ in der Roppeneckerformel.
4. Die restlichen Eigenwerte und $\underline{p}_i$ werden frei vorgegeben.

4.4. Bewertung

Beiblatt 4.3

5. Erweiterte Regelungsstrukturen

5.1. Zustandsregelung mit I-Anteil (p=q)

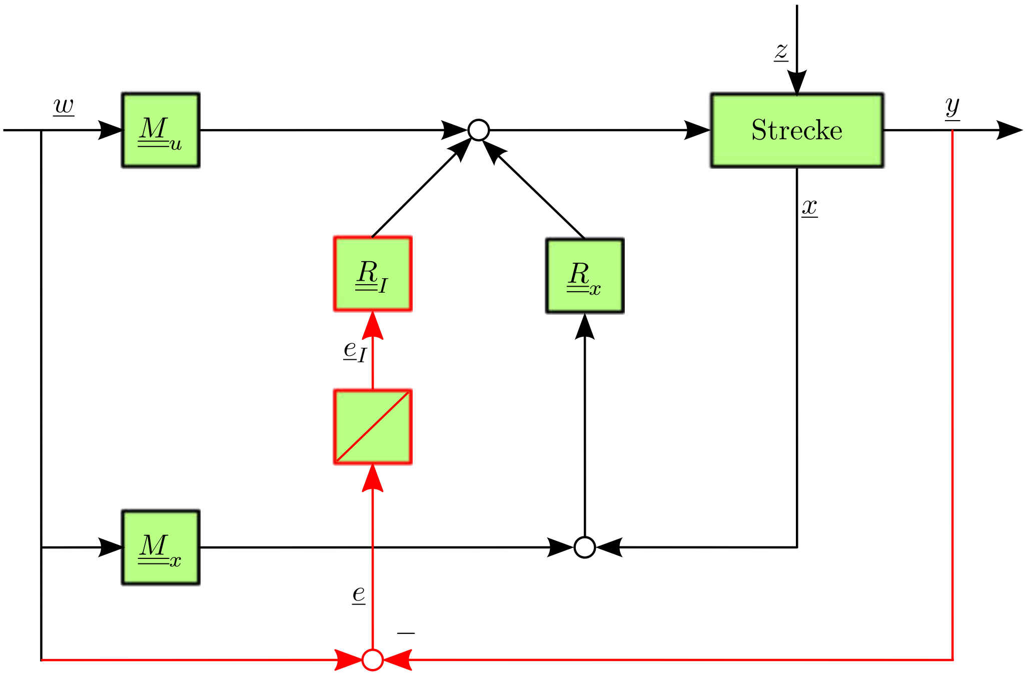


Abbildung 5.1.: Zustandsregelung mit I-Anteil

Herrscht Stabilität, so müssen im stationären Zustand die Eingänge der I-Glieder $= 0$ sein.

$$\underline{e} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_{\text{stat.}} = \underline{w}_{\text{stat.}}$$

d.h. $\underline{z}(t) = \text{const.}$ wird stationär genau ausgeregelt, ebenso Abweichungen durch Modellierungsfehler.
Gleichungen des erweiterten System:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} + \underline{\underline{E}}\,\underline{z}$$

$$\dot{\underline{e}}_I = \underline{w} - \underline{y}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}$$

$$\underline{u} = \underline{\underline{R}}_x(\underline{\underline{M}}_x\underline{w} - \underline{x}) + \underline{\underline{M}}_u\underline{w} + \underline{\underline{R}}_I\underline{e}_I$$

Für die Eigenwertvorgabe darf $\underline{z} = 0$ und $\underline{w} = 0$ gesetzt werden.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} \qquad \dot{\underline{e}}_I = \underline{w} - \underline{y} \qquad \underline{u} = -\underline{\underline{R}}_x\underline{x} + \underline{\underline{R}}_I\underline{e}_I$$

oder

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e}_I \end{bmatrix}^{\bullet} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{\underline{A}}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e}_I \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{\underline{B}}}} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{\underline{C}}}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e}_I \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = -\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}_x & -\underline{\underline{R}}_I \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{\underline{R}}}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e}_I \end{bmatrix}$$

Berechnung des Reglers $\tilde{\underline{\underline{R}}}$ für die erweiterte Strecke in bekannter Weise.

Da die I-Glieder statische Genauigkeit sichern ist die Wahl von $\underline{\underline{M}}_x$, $\underline{\underline{M}}_u$ frei.
Vorschläge für $\underline{\underline{M}}_x$, $\underline{\underline{M}}_u$:

1. $\underline{\underline{M}}_x = 0, \quad \underline{\underline{M}}_u = 0$

Vorteil: einfach

Nachteil: langsames Führungsverhalten (Tracking)

2. Wie bisher

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_x \\ \underline{\underline{M}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}} \end{bmatrix}$$

Vorteil: $\underline{x}_{\text{stat}} = \underline{x}_{\text{soll.stat}}$, $\underline{e}_{I\text{stat}} = \underline{0}$

(Beiblatt 5.1)

5.2. Modellgestützte dynamische Führungsgrößenaufschaltung

Bisher : Statische Führungsgrößenaufschaltung $\underline{\underline{M}}_u, \underline{\underline{M}}_x$

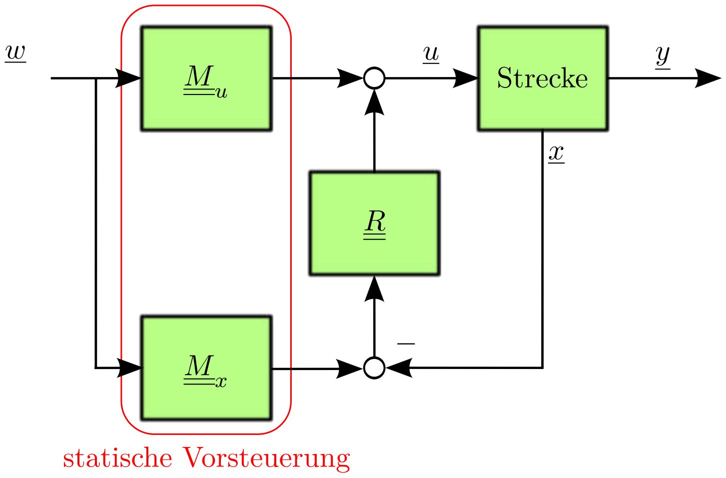


Abbildung 5.2.: statische Führungsgrößenaufschaltung

- Fall 1: Dynamische Steuerung ohne Regelung ($\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{M}}_x = \underline{\underline{0}}$) (Beiblatt 5.2-1)

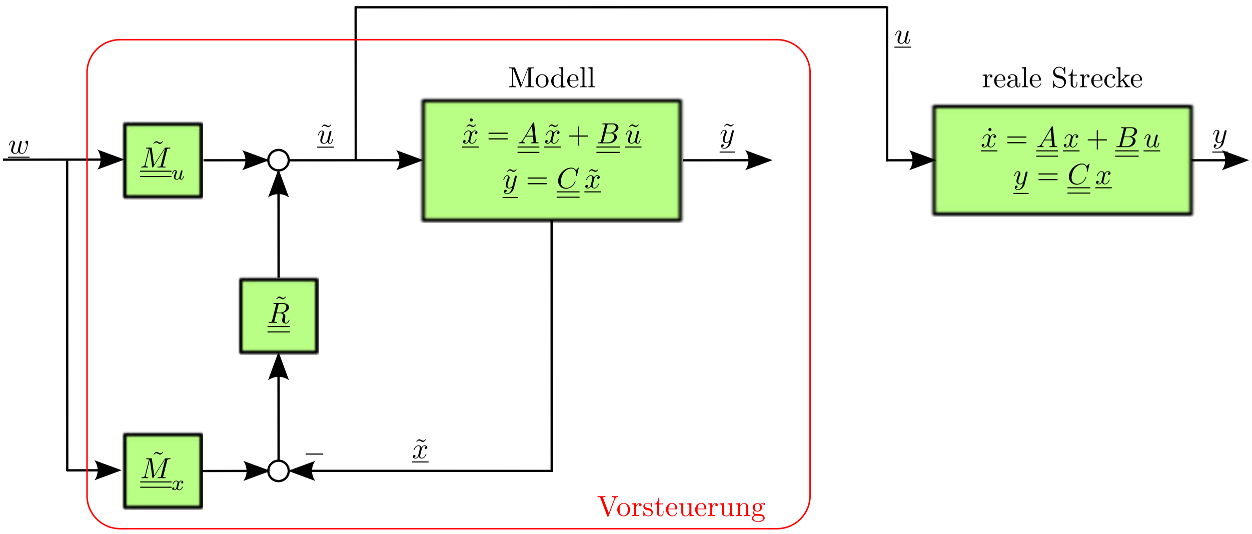


Abbildung 5.3.: Dynamische Steuerung ohne Regelung

- Fall 2: Dynamische Steuerung mit Zustandsregelung (Beiblatt 5.2-2)

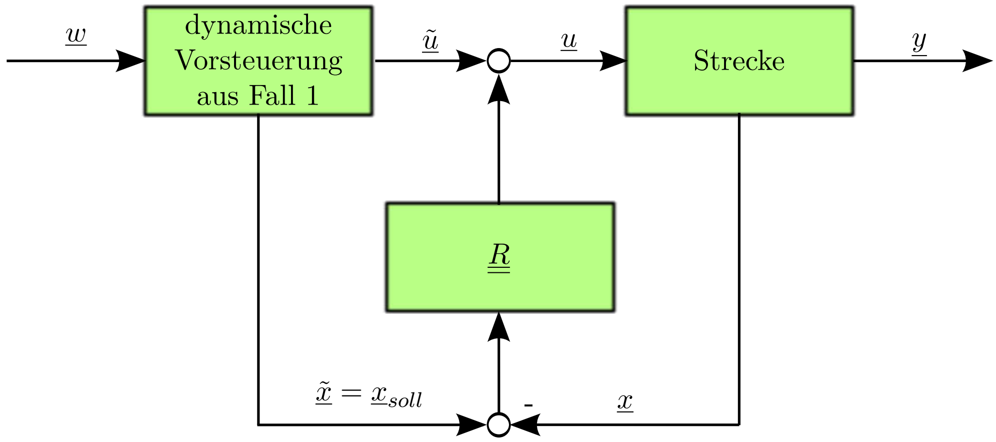


Abbildung 5.4.: Dynamische Steuerung mit Zustandsregelung

- Fall 3: Dynamische Steuerung mit Zustandsregelung, Beobachter und I-Anteil (Beiblatt 5.2-3)

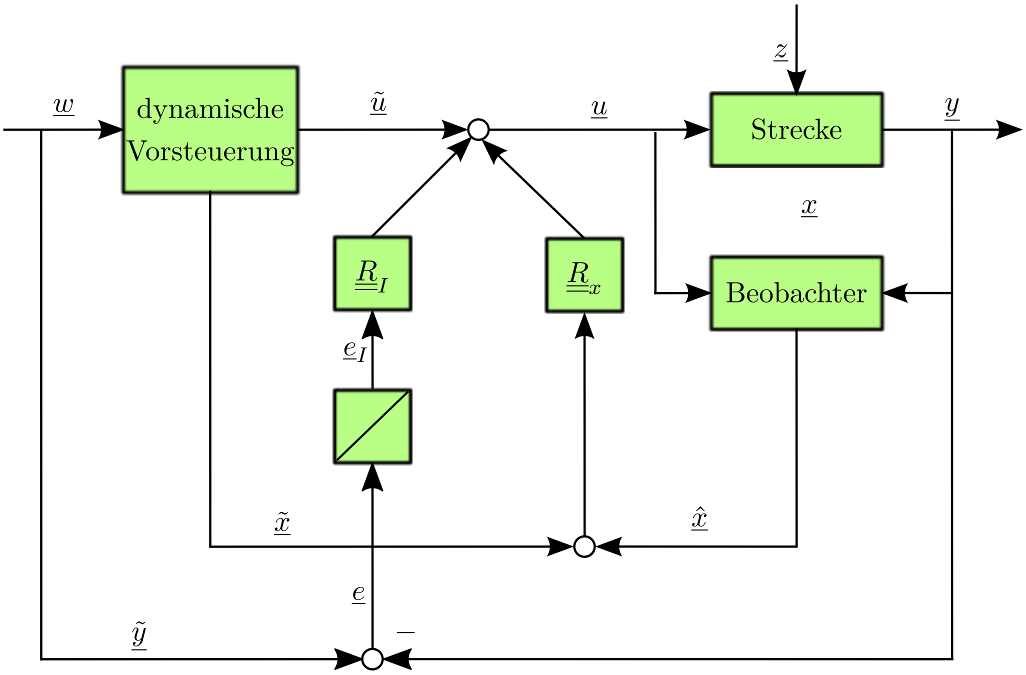


Abbildung 5.5.: Dynamische Steuerung mit Zustandsregelung, Beobachter und I-Anteil

getrennte Auslegung:

- Beobachter und $\underline{\underline{R}}_x$, $\underline{\underline{R}}_I$ auf Störverhalten
- Vorsteuerung auf Führungsverhalten

Diese Struktur kann auch als Zwei-Freiheitsgrade-Regelung dargestellt werden.

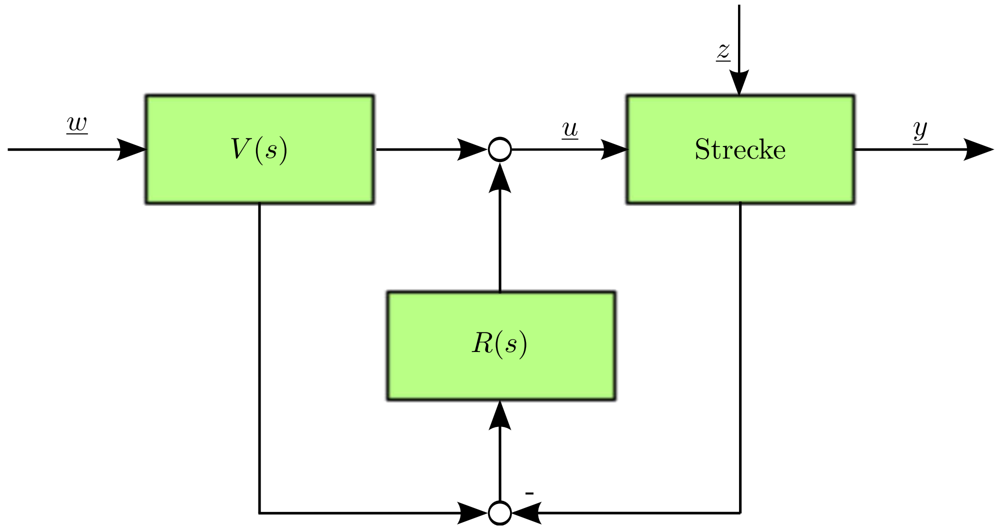


Abbildung 5.6.: Darstellung als Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

5.3. Modellgestützte dynamische Störgrößenaufschaltung

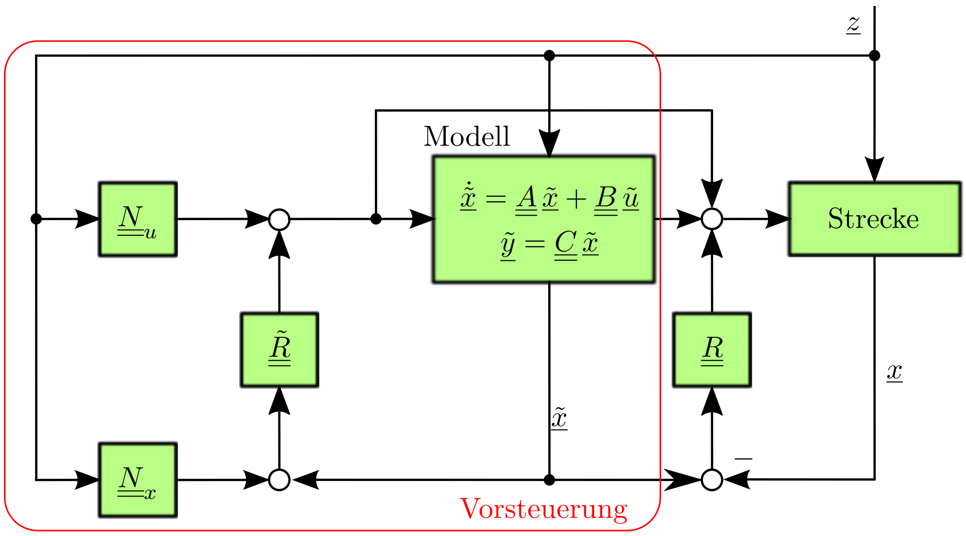


Abbildung 5.7.: dynamische Störgrößenaufschaltung

siehe Beiblatt 5.2 Fall IV

5.4. Trajektoriengenerierung

siehe Beiblatt 5.3.

6. Ein-Ausgangslinearisierung nichtlinearer Systeme

6.1. Einleitung

Ausgangspunkt: Eingangslineares Eingrößensystem:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x}) \cdot u \tag{1}$$

$$y = c(\underline{x}) \tag{2}$$

Beispiel 4 (Inverses Pendel)**.**

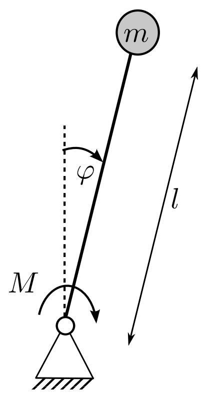


Abbildung 6.1.: inverses Pendel

$$J\ddot{\varphi} - mgl\sin(\varphi) = M \tag{3}$$

oder mit $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, $u = M$, $y = \varphi$ in Regelungsnormalform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mgl}{J}\sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u \tag{4}$$

$$y = x_1$$

Intuitive Regelung: M so wählen, dass (3) eine lineare Differentialgleichung wird:

$$J\ddot{\varphi} + k_d\dot{\varphi} + k_p\varphi = k_p\varphi_{\text{soll}} \tag{5}$$

$\Rightarrow$ Durch Vergleich von (3) und (5) findet man das Regelgesetz:

$$M = -k_d\dot{\varphi} - k_p\varphi - mgl\sin(\varphi) + k_p\underbrace{\varphi_{\text{soll}}}_{w}$$

$$\Rightarrow u = -k_d x_2 - k_p x_1 - mgl\sin(x_1) + k_p w$$

$$\text{in (4):} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{J} & -\frac{k_d}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_p}{J} \end{bmatrix} \varphi_{\text{soll}}, \quad y = x_1$$

Das ist die lineare Regelungsnormalform von

$$Y(s) = \frac{\frac{k_p}{J}}{s^2 + \frac{k_d}{J}s + \frac{k_d}{J}} \varphi_{\text{soll}}(s)$$

Ergebnis: Liegt die Strecke in nichtlinearer Regelungsnormalform vor, so kann ein Regelgesetz sofort angegeben werden.
Frage: Wie lässt sich der ein-ausgangslinearisierende Entwurf *allgemein* durchführen

6.2. Differenzordnung und Lie-Ableitung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x}) \cdot u \tag{1}$$

$$y = c(\underline{x}) \tag{2}$$

Bildung der Ableitung von y: $y = c(\underline{x})$

$$\dot{y} = \frac{\partial c}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial c}{\partial x_n}\dot{x}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial c}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial c}{\partial \underline{x}}\right]^T \dot{\underline{x}}$$

Einsetzen in (1):

$$\dot{y} = \left[\frac{\partial c}{\partial \underline{x}}\right]^T a(\underline{x}) + \left[\frac{\partial c}{\partial \underline{x}}\right]^T b(\underline{x})u \tag{3}$$

Definition 2 (Lie-Ableitung von $c(\underline{x})$ bzgl. $\underline{a}$)**.**

$$L_{\underline{a}}c(\underline{x}) = \left[\frac{\partial c}{\partial \underline{x}}\right]^T a(\underline{x}) \tag{4}$$

$$\dot{y} = L_{\underline{a}}c(\underline{x}) + \underbrace{\left[\frac{\partial c}{\partial \underline{x}}\right]^T b(\underline{x})\, u}_{\text{häufig } =0}$$

Dann

$$\dot{y} = L_{\underline{a}}c(\underline{x}) \tag{5}$$

$$\ddot{y} = \left[\frac{\partial L_{\underline{a}}c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \dot{\underline{x}} = \underbrace{\left[\frac{\partial L_{\underline{a}}c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T a(\underline{x})}_{L_{\underline{a}}(L_{\underline{a}}c(\underline{x})):=L_{\underline{a}}^2 c(\underline{x})} + \underbrace{\left[\frac{\partial L_{\underline{a}}c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T b(\underline{x})\, u}_{\text{häufig } =0}$$

$$\ddot{y} = L_{\underline{a}}^2 c(\underline{x}) \tag{6}$$

$$\overset{(\delta-1)}{y} = L_{\underline{a}}^{(\delta-1)} c(\underline{x}) \tag{7}$$

$$\overset{(\delta)}{y} = L_{\underline{a}}^{(\delta)} c(\underline{x}) + \underbrace{\left[\frac{\partial L_{\underline{a}}^{(\delta-1)} c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T b(\underline{x})\, u}_{\neq 0} \tag{8}$$

δ ist die Differenzordnung des Systems.

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial c}{\partial \underline{x}}\right]^T \underline{b} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad L_{\underline{b}} c(\underline{x}) &&= 0 \\
\left[\frac{\partial L_{\underline{a}} c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \underline{b} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad L_{\underline{b}} L_{\underline{a}} c(\underline{x}) &&= 0 \\
&\vdots \\
\left[\frac{\partial L_{\underline{a}}^{(\delta-2)} c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \underline{b} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^{(\delta-2)} c(\underline{x}) &&= 0 \\
\left[\frac{\partial L_{\underline{a}}^{(\delta-1)} c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \underline{b} \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^{(\delta-1)} c(\underline{x}) &&\neq 0
\end{aligned}
$$

6.3. Reglerentwurf

$$\overset{(\delta)}{y} = L_{\underline{a}}^{(\delta)} c(\underline{x}) + \left[\frac{\partial L_{\underline{a}}^{(\delta-1)} c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T b(\underline{x}) u \overset{!}{=} -\alpha_{\delta-1} \overset{(\delta-1)}{y} - \dots - \alpha_1 \dot{y} - \alpha_0 y + \alpha_0 w \tag{1}$$

Daraus folgt:

$$\overset{(\delta)}{y} + \alpha_{\delta-1} \overset{(\delta-1)}{y} + \dots + \alpha_0 y = \alpha_0 w \tag{2}$$

$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$$

$$Y(s) = \frac{\alpha_0}{s^\delta + \alpha_{\delta-1} s^{\delta-1} + \dots + \alpha_0} W(s)$$

Aus (1): Regelgesetz

$$u = \frac{1}{\left[\frac{\partial L_{\underline{a}}^{(\delta-1)} c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \underline{b}(\underline{x})} \cdot \left[-L_{\underline{a}}^{\delta} c(\underline{x}) - \alpha_{\delta-1} \overset{(\delta-1)}{y} - \dots - \alpha_1 \dot{y} - \alpha_0 y + \alpha_0 w\right]$$

Die α_ν werden so gewählt, dass das System vorgegebene Pole hat.

Ersetzung der y-Ableitungen führt zum Regelgesetz:

$$\boxed{u = \underbrace{\frac{1}{\left[\frac{\partial L_{\underline{a}}^{(\delta-1)} c(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right]^T \underline{b}(\underline{x})}}_{\substack{\text{Kompensation}\\ \text{der Nichtlinea-}\\ \text{ritäten vor}\\ \text{u}}} \cdot \left[\underbrace{-L_{\underline{a}}^{\delta} c(\underline{x}) - \alpha_{\delta-1} L_{\underline{a}}^{\delta-1} c(\underline{x}) - \dots - \alpha_1 L_{\underline{a}} c(\underline{x}) - \alpha_0 c(\underline{x})}_{\text{Einführung einer gewünschten linearen Dynamik}} + \underbrace{\alpha_0 w}_{\text{Führungsverhalten}}\right] \quad (3)}$$

Beispiel 5 (inverses Pendel).

$$\dot{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \end{bmatrix}}_{L_{\underline{a}} c(\underline{x}) = x_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \end{bmatrix}}_{L_{\underline{b}} c(\underline{x}) = 0} u = x_2$$

$$\ddot{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{a}(\underline{x})}_{L_{\underline{a}}^2 c(\underline{x})} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{b}(\underline{x}) u = \frac{mgl}{J} \sin x_1 + \frac{1}{J} u \Rightarrow \delta = 2$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{mgl}{J} \sin(x_1) + \frac{1}{J} u \stackrel{!}{=} -\alpha_1 \dot{y} - \alpha_0 y + \alpha_0 w$$

$$\Rightarrow u = J \left(-\frac{mgl}{J} \sin(x_1) - \alpha_1 x_2 - \alpha_0 x_1 + \alpha_0 w \right)$$

Resultat: Das nichtlineare Regelgesetz bewirkt lineares Ein-/Ausgangsverhalten, nämlich

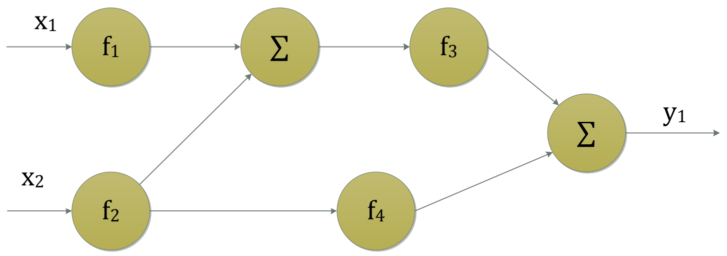
$$Y(s) = \frac{\alpha_0}{s^\delta + \alpha_{\delta-1} s^{\delta-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} W(s)$$

Hinweise:

- Nur praktikabel, wenn keine Singularitäten zum Tragen kommen
- Bei $\delta < n$ *kann* interne Instabilität auftreten
  (vlg. linearer Entkoppelungsentwurf mit inv. Nullstelle in rechter Halbebene)

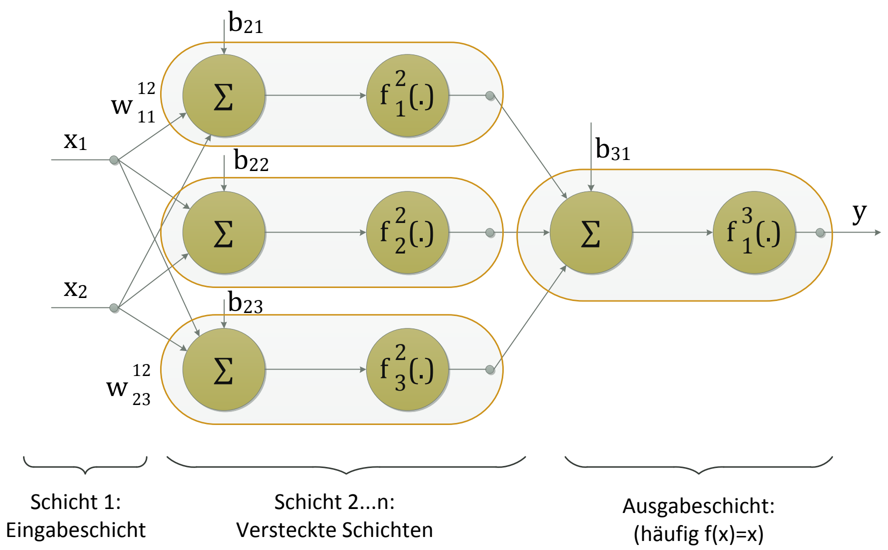
Siehe Beiblatt 6.1.

7. Künstliche neuronale Netze



also $\underline{y}=\underline{f}(\underline{x})$ statische zeitinvariante Abbildung von $\underline{x}$ auf $\underline{y}$

7.1. Multi-Layer-Perception (MLP)

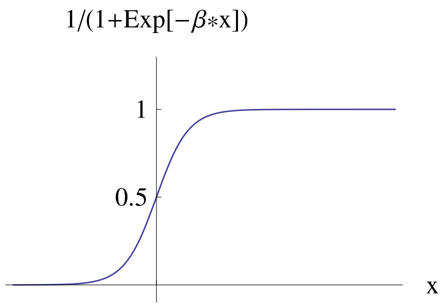


oder

$$y = \sum_{i=1}^{3} w_{i1}^{23} \cdot f_i^2 \cdot (\sum_{j=1}^{2} w_{ji}^{12} \cdot x_j + b_{2i}) + b_{31} \quad \text{mit} \quad f_1^3(x) = x$$

Eine häufig verwendete Aktivierungsfunktion $f()$ ist:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\beta \cdot x}} \ ; \ \beta > 0$$



$Signoidfunktion$

Die Parameter des MLP sind dann:

- Die Gewichte w_{11}^{12}...
- Die Schwellwerte (Bias Werte) $b_{21}, \ldots$
- Parameter β_i
- Die Zahl der Schichten und Neuronen

"Training"des MLP=Optimierung der Parameter derart, dass $\underline{y}$ möglichst eine gewünschte, durch gegebene Trainingsdaten $\begin{bmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{bmatrix}, \ldots$ beschriebene Abhängigkeit von $\underline{x}$ aufweist.

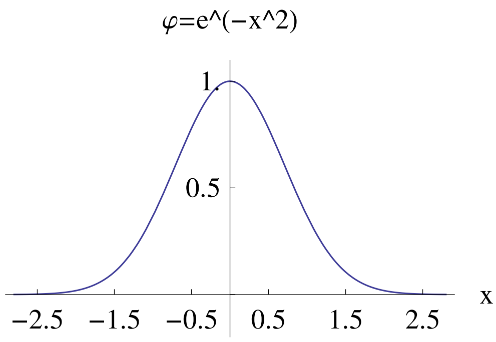
7.2. Radial-Basis-Funktionsnetze (RBFN)

Ähnlich wie MLP, aber mit Gaussglockenfunktion, z.B.:

$$y = \sum_{i=1}^{3} w_i \cdot \varphi_i(\underline{x}, \underline{c}_i, \underline{V}_i)$$

mit

$$\varphi_i = e^{-(\underline{x}-\underline{c}_i)\cdot \underline{V}_i^T \cdot \underline{V}_i \cdot (\underline{x}-\underline{c}_i)} \quad \text{(Gaußsche Radialbasisfunktion)}$$



Parameter:

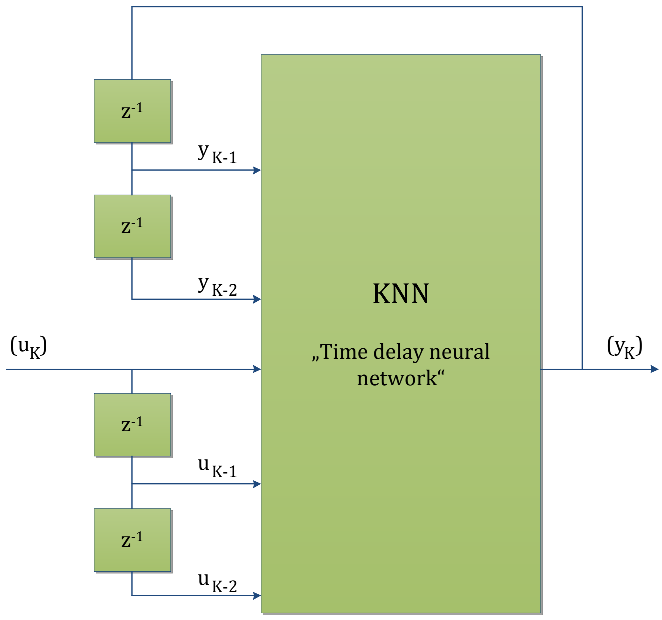
- Gewichte $w_i, \ldots$
- Zentrenlagen $\underline{c}_i$
- Matrizen $\underline{V}_i$
- Zahl der Neuronen

7.3. Nachbildung dynamischer Systeme durch KNN

Speist man ein KNN, $\underline{y}_k = \underline{f}(\underline{x}_k)$, mit $\underline{x}_k = \begin{bmatrix} \underline{y}_{k-1} \\ \underline{y}_{k-1} \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k-m} \end{bmatrix}$ so resultiert:

$$\underline{y}_k = \underline{f}(\underline{y}_{k-1}, \ldots, \underline{y}_{k-n}, u_k, \ldots, u_{k-m})$$

$\Rightarrow$ nichtlineares, zeitdiskretes dynamisches System als Differenzengleichung



A. Notation

Bezeichnung	Symbol	Beispiel
Skalar	a	$a = 1$
Spalten-Vektor im Zeitbereich	$\underline{b}$	$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Zeilen-Vektor im Zeitbereich	$\underline{c}^T$	$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$
Spalten-Vektor im Frequenzbereich	$\underline{D}$	$\underline{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Matrix	$\underline{\underline{E}}$	$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$