

## 2 Analyse und Entwurf in der Zustandsebene

Bei regelungstechnischen Untersuchungen spielt das Stabilitätsverhalten eine zentrale Rolle. Die Frage lautet hier: Wie kann man das Stabilitätsverhalten der Ruhelagen eines nichtlinearen Systems erkennen? Im Prinzip ist die Antwort klar: Man löse die Zustandsdifferentialgleichungen des nichtlinearen Systems und stelle fest, wie sich die Lösungen für  $t \rightarrow +\infty$  verhalten. Diese Vorgehensweise folgt unmittelbar aus der Definition des Stabilitätsverhaltens.

Man kann das Problem im konkreten Fall durch Rechnersimulation angehen, indem man die Zustandsdifferentialgleichungen auf dem Rechner nachbildet und für typische Anfangszustände löst. Was man jedoch wünscht, sind *allgemeine* Kriterien der Stabilität, *allgemeine* Verfahren zur Verbesserung des Stabilitätsverhaltens, kurz, *Einsicht* in das Verhalten der nichtlinearen Systeme. Erst auf dieser Grundlage kann man ein konkretes technisches System in sinnvoller Weise untersuchen und gegebenenfalls verbessern. Hat man aufgrund der theoretischen Methoden eine Vorstellung vom Verhalten des Systems entwickelt, so kann man den Rechner in gezielter Weise einsetzen und ist nicht auf blinde Variation der verfügbaren Strukturdaten angewiesen. Vor allem der effiziente Entwurf eines Reglers für eine neu zu bearbeitende Aufgabe setzt theoretische Einsicht in das Systemverhalten voraus.

Die Schwierigkeit, sie zu gewinnen, besteht darin, daß eine formelmäßige Lösung der nichtlinearen Zustandsgleichungen im allgemeinen unmöglich ist. Etwas genauer gesagt: Daß sich die – normalerweise gewiß vorhandene – Lösung nicht durch die üblichen Funktionen (rationale Funktionen, e-Funktionen, trigonometrische Funktionen und die Inversen dieser Funktionen) darstellen läßt.

Es gibt jedoch eine zwar eng begrenzte, aber für die Anwendungen wichtige Klasse nichtlinearer Systeme, bei denen man eine formelmäßige Lösung vielfach ohne große Mühe gewinnen kann. Es sind dies zeitinvariante Systeme 2. Ordnung, welche vom Typ der nichtlinearen Standardregelung (Bild 1/6) sind, also durch Rückführung einer Reihenschaltung aus Kennlinienglied und linearer Differentialgleichung 2. Ordnung entstehen. Ihre Trajektorien lassen sich in der Zustandsebene überblicken, wodurch man in sehr anschaulicher Weise Einblick in nichtlineares Verhalten gewinnen kann. Einen Eindruck hiervon dürfte schon das Pendelbeispiel in Kapitel 1 vermittelt haben. Deshalb wollen wir die Untersuchung nichtlinearer Systeme mit ihrer Behandlung in der Zustandsebene beginnen.

## 2.1 Prinzipielle Vorgehensweise

Die Strecke eines Regelkreises einschließlich der Stelleinrichtung werde, zumindest näherungsweise, durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u). \quad (2.1)$$

Dabei ist  $x$  die Regelgröße und  $u$  die Eingangsgröße der Stelleinrichtung. Die Differentialgleichung soll also nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängen – eine Voraussetzung, die bei den normalerweise auftretenden Regelstrecken mit genügender Näherung erfüllt ist.

Durch Einführung der Zustandsvariablen  $x$  und  $v = \dot{x}$ , die z.B. bei einer Lageregelung Lage und Geschwindigkeit darstellen, kann man die Differentialgleichung (2.1) in ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung verwandeln, die *Zustandsdifferentialgleichungen des Systems*:

$$\dot{x} = v, \quad (2.2)$$

$$\dot{v} = f(x, v, u). \quad (2.3)$$

Wenn die Steuerfunktion  $u(t)$  für  $t > 0$  und der Anfangszustand  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$  gegeben sind, werden hierdurch die Funktionen  $x = x(t)$ ,  $v = v(t)$  für alle  $t > 0$  eindeutig bestimmt, wenn man von einzelnen Ausnahmeständen  $(x_0, v_0)$  absieht.

Die hier getroffene Wahl der Zustandsvariablen ist dadurch charakterisiert, daß die zweite Zustandsvariable die zeitliche Ableitung der ersten ist. Man bezeichnet die Zustandsebene dann auch als *Phasenebene* und nennt die Trajektorien des Systems *Phasenbahnen*. Von wenigen Ausnahmen abgesehen, werden wir in diesem Kapitel die oben eingeführten Zustandsvariablen  $x$  und  $v$  verwenden, bewegen uns also in der Phasenebene. Allerdings ist anzumerken, daß nicht selten „Zustandsebene“ und „Phasenebene“ auch als gleichbedeutend benutzt werden.

Nunmehr werde angenommen, daß die Eingangsgröße  $u$ , die im allgemeinen von  $t$  abhängt, nur konstante Werte annehmen kann, also stückweise konstant ist. Das ist z.B. stets der Fall, wenn  $u$  die Ausgangsgröße eines Kennliniengliedes mit Relais-Charakter ist. Dann hängen die Zustandsdifferentialgleichungen nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, sie stellen ein sogenanntes *autonomes Differen-*

tialgleichungssystem dar. Daher ist es möglich, sie zu einer einzigen Differentialgleichung zu vereinigen, indem man nämlich den Quotienten

$$\frac{\dot{v}}{\dot{x}} = \frac{dv/dt}{dx/dt} = \frac{dv}{dx}$$

bildet. Wegen (2.2) und (2.3) hat man damit die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x, v, u)}{v}, \quad u \text{ konstant.} \quad (2.4)$$

Das ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für  $v = v(x)$ , die bei gegebenem Anfangspunkt  $(x_0, v_0)$  eine eindeutige Lösung besitzt, wenn man von einzelnen Ausnahmepunkten absieht. Sie ist die Trajektorie der Regelstrecke durch den Punkt  $(x_0, v_0)$ , die jetzt nicht in Parameterdarstellung vorliegt, sondern durch eine einzige Beziehung zwischen  $x$  und  $v$  gegeben ist.

Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß man die Untersuchung der ursprünglichen Differentialgleichung 2. Ordnung auf die einfachere und übersichtlichere Behandlung einer Differentialgleichung 1. Ordnung zurückführt. Das wird dadurch ermöglicht, daß die Zustandsdifferentialgleichungen nicht explizit von  $t$  abhängen und  $u$  stückweise konstant ist. Andernfalls würde (2.4) eine Beziehung zwischen  $x$ ,  $u$  und  $t$  darstellen und keineswegs eine Differentialgleichung für  $v = v(x)$ . Wenn die gegebene Differentialgleichung 2. Ordnung nicht elementar lösbar ist, kann das sehr wohl für die Differentialgleichung (2.4) gelten, die ja nur von der 1. Ordnung ist, so daß auf diese Weise eine allgemeine Diskussion des Systemverhaltens ermöglicht wird. Ein schönes Beispiel hierfür ist das in Kapitel 1 behandelte ungedämpfte Pendel. Die Lösung der Gleichung (2.4) in der Phasenebene war bei ihm problemlos, während die ursprüngliche Pendeldifferentialgleichung 2. Ordnung keine elementare Lösung besitzt, vielmehr die Benutzung elliptischer Integrale erforderlich macht (siehe z.B. [44], Abschnitt 2.132).

Aber auch in solchen Fällen, die eine elementare Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung zulassen, ist die Behandlung in der Zustandsebene vorzuziehen, weil die Verhältnisse bei einer Differentialgleichung 1. Ordnung leichter zu überschauen sind als bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung. Bei der ersteren kann man die Lösungsgesamtheit mit *einem* Blick übersehen, da sie nur eine *ein*-parametrische Lösungsschar besitzt. Ein Blick auf diese Trajektorienschar zeigt mit einem Schlag alle Möglichkeiten des Systemverhaltens. Das ist sowohl für

die Beurteilung des Stabilitätsverhaltens wie für die Systemoptimierung von Vorteil.

Die Reduktion der Zustandsdifferentialgleichungen (2.2) und (2.3) auf eine einzige Differentialgleichung 1. Ordnung wird dadurch erkauft, daß man die Zeit  $t$  eliminiert. Der zeitliche Ablauf des Vorganges ist aus der in der Form  $v = v(x)$  dargestellten Trajektorie nicht unmittelbar zu entnehmen. Man erhält ihn jedoch mittelbar aus den Zustandsdifferentialgleichungen (2.2) und (2.3), also aus

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv}{dt} = f(x, v, u)$$

zu

$$t = \int_{P_0}^P \frac{dx}{v} \quad (2.5)$$

bzw.

$$t = \int_{P_0}^P \frac{dv}{f(x, v, u)}. \quad (2.6)$$

Dies sind Kurvenintegrale in der Zustandsebene, die vom Anfangspunkt  $P_0 = (x_0, v_0)$  der Bewegung bis zu dem gerade betrachteten Punkt  $P = (x, v)$  zu erstrecken sind, und zwar längs der Trajektorie des Systems, die von  $P_0$  nach  $P$  führt.

Was die Durchlaufungsrichtung der Trajektorie betrifft, so muß in der oberen Halbebene, da dort  $v = \dot{x}$  positiv ist,  $x$  stets wachsen. Die in der oberen Halbebene gelegenen Trajektorienstücke werden daher ausnahmslos von links nach rechts durchlaufen. Ganz entsprechend werden die Trajektorienstücke in der unteren Halbebene wegen  $v = \dot{x} < 0$  von rechts nach links durchlaufen. Bei  $v = 0$ , also auf der  $x$ -Achse, müssen somit Scheitelpunkte der Trajektorien liegen (sofern die Trajektorie überhaupt einen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse hat).

Es kann der Fall eintreten, daß die Zustandsdifferentialgleichung (2.4) nicht elementar lösbar ist. Für diesen Fall hat man graphische Näherungsmethoden entwickelt. Sie beruhen darauf, die Trajektorie aus den Isoklinen der Zustandsdifferentialgleichung zu bestimmen. Hierauf wollen wir jedoch nicht eingehen. Für die wichtigsten Typen nichtlinearer Regelkreise kann man die Zustandsdifferen-

tialgleichung geschlossen lösen. Ist dies aber einmal nicht möglich, so bildet man das System zweckmäßigerweise am Rechner nach.

Die allgemeinen Ausführungen seien nun an einem einfachen Beispiel verdeutlicht. Es handle sich um ein Feder-Masse-System, wobei an der Masse  $m$  außer der Federkraft

$$F_{\gamma} = -\gamma x, \quad \gamma > 0 \text{ konstant},$$

noch eine Reibungskraft  $F_{\rho}$  angreift. Dabei möge es sich um eine sogenannte *Trockene oder Coulombsche Reibung* handeln, die nicht wie die Flüssigkeitsreibung geschwindigkeitsproportional, sondern von konstantem Betrag  $\rho$  ist. Wie die Flüssigkeitsreibung ist sie der Geschwindigkeit entgegengerichtet. Es ist somit

$$F_{\rho} = \begin{cases} +\rho & \text{für } v < 0 \\ -\rho & \text{für } v > 0 \end{cases},$$

wofür man auch

$$F_{\rho} = -\rho \operatorname{sgn} v = -\rho \operatorname{sgn} \dot{x}, \quad \rho \text{ konstant},$$

schreiben kann. Für die Bewegungsgleichung der Masse  $m$  erhält man somit nach dem 2. Newtonschen Axiom

$$m\ddot{x} = F_{\gamma} + F_{\rho},$$

$$m\ddot{x} + \rho \operatorname{sgn} \dot{x} + \gamma x = 0.$$

Daraus folgt:

$$\dot{x} = v, \tag{2.7}$$

$$m\dot{v} + \rho \operatorname{sgn} v + \gamma x = 0 \tag{2.8}$$

oder

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\rho \operatorname{sgn} v + \gamma x}{v}$$

bzw.

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{\rho}{m} - \frac{\gamma}{m} x \quad \text{für } v > 0,$$

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{\rho}{m} - \frac{\gamma}{m} x \quad \text{für } v < 0.$$

Diese Differentialgleichungen sind sofort durch Trennung der Variablen zu lösen. Für  $v > 0$  ergibt sich

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{\rho}{m} x - \frac{\gamma}{2m} x^2 + \text{const},$$

$$\frac{m}{\gamma} v^2 + 2 \frac{\rho}{\gamma} x + x^2 = \text{const},$$

$$\frac{m}{\gamma} v^2 + \left(x + \frac{\rho}{\gamma}\right)^2 = \text{const} = c^2, \quad c \geq 0 \text{ beliebig,}$$

$$\frac{\left(x + \frac{\rho}{\gamma}\right)^2}{c^2} + \frac{v^2}{\left[c \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right]^2} = 1.$$

Dies ist eine Schar von Ellipsen, deren Achsen den Koordinatenachsen parallel sind und deren Mittelpunkt in  $x = -\rho/\gamma$ ,  $v = 0$  liegt.

Ganz entsprechend erhält man für  $v < 0$  die Ellipsenschar

$$\frac{\left(x - \frac{\rho}{\gamma}\right)^2}{c^2} + \frac{v^2}{\left[c \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right]^2} = 1,$$

deren gemeinsamer Mittelpunkt also in  $x = +\rho/\gamma$ ,  $v = 0$  gelegen ist.

Insgesamt hat man also die in Bild 2/1 dargestellte Trajektorienschar. Die obere wie die untere Hälfte der Zustandsebene wird von einer Schar von Halbellipsen überdeckt. Beide Scharen sind gegeneinander um  $2\rho/\gamma$  versetzt.

Der Zustandspunkt  $(x, v)$  des Systems kann sich nur auf den eingezeichneten Trajektorien bewegen. Geht man etwa von dem Anfangspunkt  $A = (x_0, 0)$  mit  $x_0$

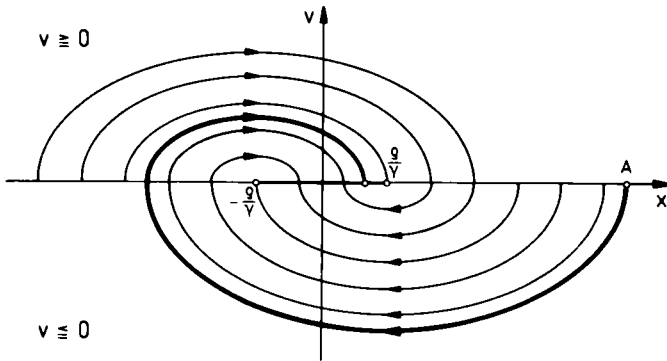


Bild 2/1 Trajektorien eines Systems mit Trockener Reibung

$> \rho/\gamma$  aus, so durchläuft er die stark ausgezogene Trajektorie. Seine Bewegung kommt zur Ruhe, wenn er schließlich zu einem Punkt der  $x$ -Achse zwischen  $-\rho/\gamma$  und  $+\rho/\gamma$  gelangt. Beim Überschreiten dieses  $x$ -Achsen-Stückes würde er sich nämlich sofort auf einer dort endenden Trajektorie der anderen Halbellipsenschar zurückbewegen müssen. Die Gesamtheit der Punkte  $-\rho/\gamma \leq x \leq +\rho/\gamma$ ,  $v = 0$  stellt also Ruhelagen des Systems dar.

Letzteres ist physikalisch einleuchtend. Die Bewegung kommt zum Erliegen, wenn der Betrag der Federkraft unter den Betrag der Reibungskraft sinkt:  $|F_\gamma| \leq |F_\rho|$ . Daraus folgt  $\gamma |x| \leq \rho$ , also  $|x| \leq \rho/\gamma$ .

Bevor wir an die Untersuchung nichtlinearer Regelkreise herangehen, soll zunächst die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten betrachtet werden. Einmal deshalb, um zu zeigen, wie sich diese wohlbekannten Verhältnisse in der Zustandsebene darstellen, zum anderen, weil die Ergebnisse bei der Behandlung nichtlinearer Regelkreise benötigt werden.

Hierbei interessieren uns vor allem drei Typen von Differentialgleichungen:

$$\ddot{x} = \epsilon K \quad \text{mit } K > 0, \epsilon = \pm 1;$$

$$T \ddot{x} + \dot{x} = \epsilon K \quad \text{mit } T > 0, K \geq 0, \epsilon = \pm 1;$$

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad \text{mit } a_0 \neq 0.$$

## 2.2 Lineare Systeme

### 2.2.1 Die Differentialgleichung $\ddot{x} = \epsilon K$

Es handelt sich hier um die Reihenschaltung zweier I- Glieder, die durch eine konstante Eingangsgröße  $u$  angesteuert wird. Denn dann gilt

$$X(s) = \frac{K_1}{s} \cdot \frac{K_2}{s} \cdot U(s) ,$$

$$s^2 X(s) = K_1 K_2 U(s) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}(t) = K_1 K_2 u(t) .$$

Beispielsweise ist die ungedämpfte Bewegung einer Masse  $m$  unter dem Einfluß einer Kraft  $F$  von dieser Art:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F .$$

Führt man die Zustandsvariablen  $x$  und  $v = \dot{x}$  ein, so erhält man die Zustands-differentialgleichungen

$$\dot{x} = v ,$$

$$\dot{v} = \epsilon K$$

und daraus

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\epsilon K}{v} . \quad (2.9)$$

Da  $\dot{v}$  wegen  $K \neq 0$  nicht Null werden kann, gibt es hier keine Ruhelage.

Die Differentialgleichung (2.9) läßt sich ohne Schwierigkeit durch Trennung der Variablen lösen:

$$v dv = \epsilon K dx, \quad \frac{v^2}{2} = \epsilon K x + C_1, \quad v^2 = 2\epsilon K(x - C),$$

wenn man  $-C_1/\epsilon K = C$  setzt. Dies sind Parabeln, deren Achse in die  $x$ -Achse fällt und deren Scheitel bei  $x = C$  liegt, da dort  $v = 0$  ist.



Im übrigen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall I:  $\epsilon = -1$ .

Dann ist

$$v^2 = -2K(x - C).$$

Nur für  $x \leq C$  ist der Ausdruck auf der rechten Seite  $\geq 0$ ,  $v$  also reell. D.h.: Die Parabeln sind nach links geöffnet. Sämtliche Kurven dieser Parabelschar gehen durch Parallelverschiebung in  $x$ -Richtung auseinander hervor. Sie sind in Bild 2/2 als durchgezogene Kurven eingezeichnet.

Fall II:  $\epsilon = +1$ .

Jetzt ist

$$v^2 = 2K(x - C).$$

Daher sind alle Parabeln nach rechts geöffnet. Auch sie gehen durch Parallelverschiebung in  $x$ -Richtung auseinander hervor. In Bild 2/2 sind sie gestrichelt.

Beide Parabelscharen gehen durch Spiegelung an der  $v$ -Achse ineinander über.

## 2.2.2 Die Differentialgleichung $T\ddot{x} + \dot{x} = \epsilon K$

Diese Differentialgleichung beschreibt die Reihenschaltung eines I-Gliedes und eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung ( $P$ - $T_1$ -Gliedes,  $VZ_1$ -Gliedes), auf die

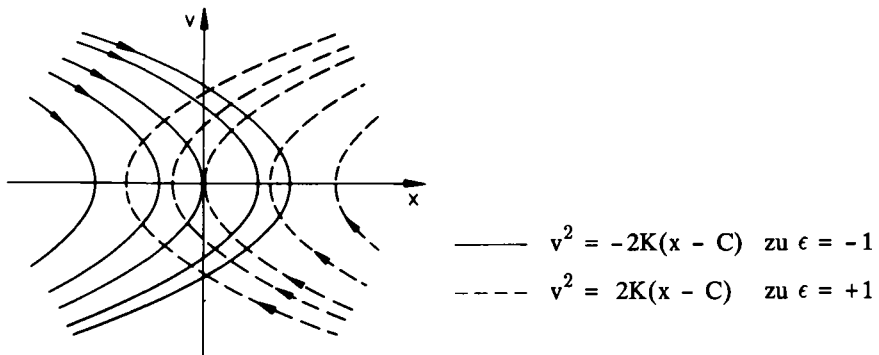


Bild 2/2 Trajektorien der Differentialgleichung  $\ddot{x} = \epsilon K$

eine konstante Eingangsgröße  $u$  wirkt. Hierunter fällt beispielsweise die gedämpfte Bewegung eines Massenpunktes  $m$  unter dem Einfluß einer Kraft  $F$ :

$$m\ddot{x} = F - \rho\dot{x},$$

wobei  $-\rho\dot{x}$  die Dämpfungskraft ist.

Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten

$$\dot{x} = v,$$

$$\dot{v} = \frac{\epsilon K - v}{T} \quad \text{mit } T > 0, K \geq 0, \epsilon = \pm 1.$$

Dieses System kann nur dann eine Ruhelage besitzen, wenn  $K = 0$  ist. Für die Ruhelage folgt dann  $v = 0$ , d.h. jeder Punkt der  $x$ -Achse ist Ruhelage.

In diesem Fall ergeben sich die Trajektorien des Systems aus

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = -\frac{1}{T},$$

woraus

$$v = -\frac{1}{T}x + C$$

folgt. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Trajektorien mit der  $v$ -Achse mit  $v_0$ , so erhält man die Gleichung

$$v = -\frac{1}{T}x + v_0.$$

Es handelt sich also um Geraden. Dabei ist aber zu beachten, daß der Durchlaufungssinn dieser Geraden wegen  $v = \dot{x}$  für  $v > 0$  entgegengesetzt ist wie für  $v < 0$ . Es handelt sich somit eigentlich um zwei Trajektorienscharen, die auf der  $x$ -Achse enden (Bild 2/3).

Nun werde der Fall  $K > 0$  betrachtet. Es ist dann

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\epsilon K - v}{T v}. \quad (2.10)$$

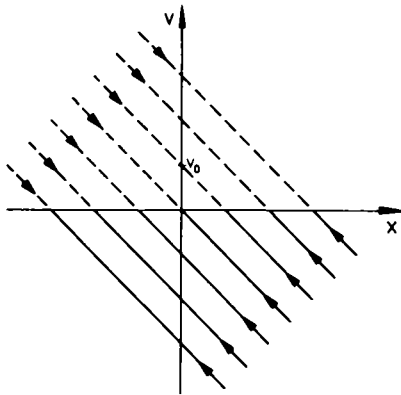


Bild 2/3

Trajektorien der Differentialgleichung

$$T\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

Die Lösung erfolgt auch hier durch Trennung der Variablen:

$$dx = \frac{Tv}{\epsilon K - v} dv ,$$

$$dx = -T \frac{v}{v - \epsilon K} dv ,$$

$$dx = -T \frac{(v - \epsilon K) + \epsilon K}{v - \epsilon K} dv ,$$

$$dx = -Tdv - \epsilon KT \frac{dv}{v - \epsilon K} ,$$

$$x = -Tv - \epsilon KT \ln|v - \epsilon K| + C .$$

Setzt man zunächst  $\epsilon = -1$  ein, so ist

$$x = -Tv + KT \ln|v + K| + C . \quad (2.11)$$

Die Kurven dieser Schar gehen aus der Kurve für  $C = 0$  durch Parallelverschiebung um  $C$  in Richtung der  $x$ -Achse hervor.

Die Gestalt der Kurve mit  $C = 0$  erhält man am einfachsten dadurch, daß man die beiden Summanden

$$x = -Tv$$

und

$$x = KT \ln|v + K|$$

über der  $v$ -Achse darstellt und dann addiert, wie es im Bild 2/4 skizziert ist.

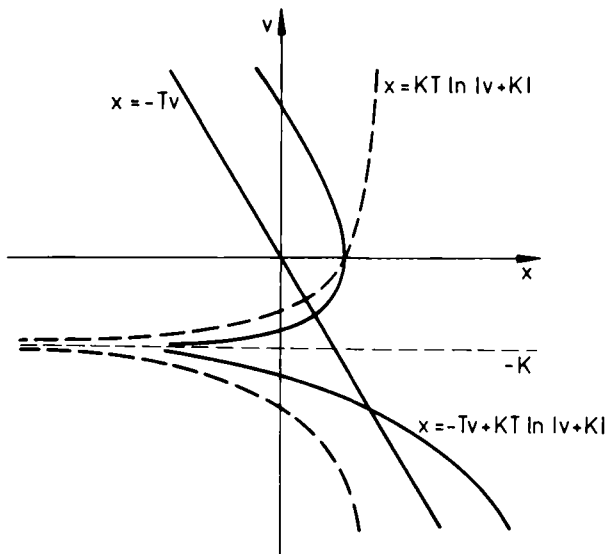


Bild 2/4 Konstruktion der Trajektorien der Differentialgleichung  $T\ddot{x} + \dot{x} = -K$  mit  $T, K > 0$

Ist  $\epsilon = +1$ , so wird

$$x = -Tv - KT \ln|v - K| + C. \quad (2.12)$$

Ein Vergleich von (2.12) mit (2.11) zeigt, daß die Kurven (2.12) aus denen von (2.11) dadurch hervorgehen, daß man  $(x, v)$  durch  $(-x, -v)$  ersetzt, d.h. am Nullpunkt spiegelt. Das Bild 2/5 stellt die beiden sich so ergebenden Kurven-

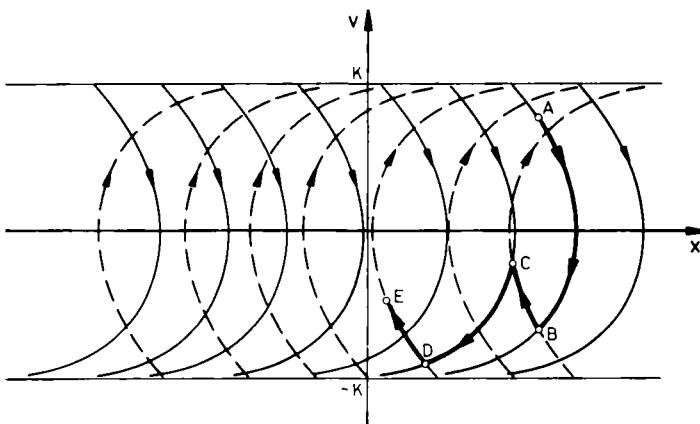


Bild 2/5 Trajektorien der Differentialgleichung  $T\ddot{x} + \dot{x} = \epsilon K$  in  $-K \leq v \leq K$

——  $x = -Tv + KT \ln(K + v) + C$  zu  $\epsilon = -1$

-----  $x = -Tv - KT \ln(K - v) + C$  zu  $\epsilon = +1$

scharfen im Streifen  $-K \leq v \leq +K$  der Phasenebene dar, der späterhin vorwiegend von Interesse ist. Dort ist  $|v + K| = K + v$  und  $|v - K| = K - v$ . Als Beispiel eines möglichen Trajektorienverlaufs bei Umschaltung von  $u$  ist der Kurvenzug ABCDE eingezeichnet.

### 2.2.3 Die Differentialgleichung $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ , $a_0 \neq 0$

Sie beschreibt die Reihenschaltung zweier Verzögerungsglieder 1. Ordnung oder allgemeiner ein Verzögerungsglied 2. Ordnung ( $P-T_2$ -,  $VZ_2$ -Glied), sofern die Eingangsgröße  $u = 0$  ist, das System also nur durch Anfangswerte angeregt wird.

Um in einfacher Weise einen Überblick über den Verlauf der Trajektorien zu erhalten, gehen wir von der inhomogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = u, \quad a_0 \neq 0, \quad (2.13)$$

aus. In ihr führen wir an Stelle der bisherigen Zustandsvariablen  $x$  und  $v$  andere Zustandsvariablen ein, und zwar durch Laplace-Transformation der Differentialgleichung (2.13) und anschließende Partialbruchzerlegung. Hierdurch erhält man rechnerisch besonders übersichtliche Verhältnisse. Aus (2.13) wird so, wenn man die Anfangswerte zu Null annimmt:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} U(s) = \left[ \frac{r_1}{s - \lambda_1} + \frac{r_2}{s - \lambda_2} \right] U(s), \quad (2.14)$$

wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

sind. Sie sind dabei zunächst als einfach angenommen, sind also entweder reell und verschieden oder aber konjugiert komplex.

Nun werden die neuen Zustandsvariablen  $x_1$  und  $x_2$  durch die Gleichungen

$$X_1(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} U(s), \quad (2.15)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s - \lambda_2} U(s) \quad (2.16)$$

eingeführt. Aus (2.15) und (2.16) entsteht

$$sX_1(s) - \lambda_1 X_1(s) = U(s),$$

$$sX_2(s) - \lambda_2 X_2(s) = U(s).$$

Hieraus folgt im Zeitbereich

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u,$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u.$$

Für  $u \equiv 0$  erhält man daraus die gewünschten Zustandsdifferentialgleichungen, welche der homogenen Differentialgleichung  $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$  entsprechen:

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \quad (2.17)$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \quad (2.18)$$

Den Zusammenhang zwischen den bisherigen Zustandsvariablen  $x, v$  und den jetzigen Zustandsvariablen  $x_1, x_2$  ersieht man aus (2.14) und (2.15), (2.16):

$$x = r_1 x_1 + r_2 x_2. \quad (2.19)$$

Durch Differentiation nach  $t$  folgt daraus

$$v = \dot{x} = r_1 \dot{x}_1 + r_2 \dot{x}_2,$$

also wegen (2.17) und (2.18):

$$v = r_1 \lambda_1 x_1 + r_2 \lambda_2 x_2. \quad (2.20)$$

Die beiden Gleichungen (2.19) und (2.20) stellen eine lineare und umkehrbar eindeutige Koordinatentransformation der Zustandsebene dar. Die  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse bilden im allgemeinen ein schiefwinkliges Achsenkreuz in der  $x-v$ -Ebene. Sein Ursprung fällt jedoch mit dem Ursprung des  $x-v$ -Systems zusammen. Dieser gemeinsame Ursprung der beiden Koordinatensysteme ist die Ruhelage der Differentialgleichung.

Da die neuen Zustandsgleichungen entkoppelt sind, lassen sie sich sofort getrennt lösen:

$$x_1 = x_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = x_{20} e^{\lambda_2 t}. \quad (2.21)$$

Dies sind die Trajektorien des Systems im  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatensystem, und zwar in Parameterdarstellung mit dem Parameter  $t$ . Es ist zweckmäßig, dabei zu bleiben, da die Elimination des Parameters zu einer unübersichtlicheren Beziehung zwischen  $x_1$  und  $x_2$  führen würde, deren geometrische Deutung schwieriger ist als bei der Parameterdarstellung.

Welche Kurven durch (2.21) gegeben sind, hängt von den Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  der charakteristischen Gleichung ab. Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden.

**Fall I:**  $\lambda_1, \lambda_2$  reell mit  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ .

Es ist also entweder  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  oder  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

Der Wert  $\lambda = 0$  ist ausgeschlossen, da sonst  $a_0 = 0$  wäre. Wie man aus (2.21) sofort erkennt, strebt im vorliegenden Fall die für  $t = 0$  vom Punkt  $(x_{10}, x_{20})$  ausgehende Trajektorie mit wachsendem  $t$  gegen die Ruhelage  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  bzw. von dieser Ruhelage weg, je nachdem, ob die beiden Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2$  negativ oder positiv sind. Man erhält so das Bild 2/6. In diesem Fall bezeichnet man die Ruhelage  $(x, v) = (0, 0)$  als einen *Knotenpunkt*, da sämtliche Trajektorien von ihr ausgehen ( $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ) oder in ihr enden ( $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ). Im ersteren Fall ist die Ruhelage instabil, im letzteren global asymptotisch stabil.

**Fall II:**  $\lambda_1, \lambda_2$  reell mit  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ .

Hier ist entweder  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  oder  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .

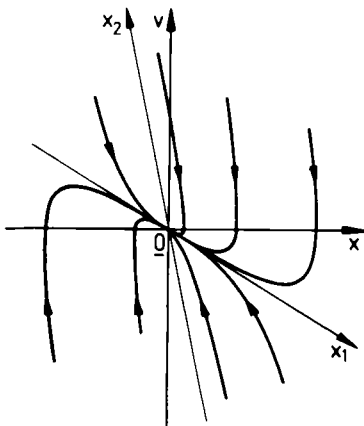


Bild 2/6 Knotenpunkt

Betrachtet man etwa die zweite Möglichkeit, so nimmt  $|x_1|$  mit wachsendem  $t$  unbegrenzt zu, während  $x_2 \rightarrow 0$  strebt. Für  $t \rightarrow -\infty$  zeigt sich das umgekehrte Verhalten. Man erhält so den Trajektorienverlauf im Bild 2/7. Man bezeichnet die Ruhelage  $\underline{0}$  hier als einen *Sattelpunkt*. Sie ist gewiß instabil, da die geringste Auslenkung zu einer Trajektorie führt, die sich endgültig von der Ruhelage entfernt.

Die  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse sind Asymptoten dieser Trajektorienschar. Da sie für spätere Untersuchungen von Interesse sind, sollen sie etwas näher betrachtet werden und seien zu diesem Zweck mit  $h_1$  und  $h_2$  bezeichnet. Im  $x$ - $v$ -Koordinatensystem sind sie durch eine Gleichung vom Typ  $v = \alpha x$  gegeben. Um  $\alpha$  zu ermitteln, betrachten wir die für  $u = 0$  aus (2.13) folgenden Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -a_0 x - a_1 v.$$

Wegen  $\dot{v} = \alpha \dot{x} = \alpha v$  folgt aus der zweiten Zustandsdifferentialgleichung

$$\alpha v = -a_0 x - a_1 v,$$

also

$$\frac{v}{x} = -\frac{a_0}{\alpha + a_1}.$$

Da andererseits  $v/x = \alpha$  ist, erhält man die Bestimmungsgleichung

$$\alpha = -\frac{a_0}{\alpha + a_1}$$

oder

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Dies ist aber gerade die charakteristische Gleichung zur Differentialgleichung (2.13), nur mit der Bezeichnung  $\alpha$  statt  $s$  für die Unbekannte. Somit ist der Asymptotenanstieg  $\alpha$  durch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gegeben:

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}, \quad \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$



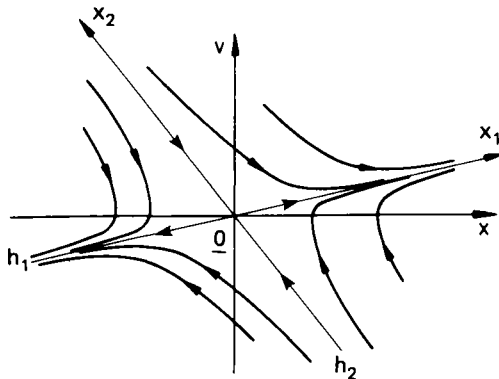


Bild 2/7  
Sattelpunkt, mit  
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Die Gleichungen der beiden Asymptoten im Bild 2/7 sind daher

$$h_1: v = \lambda_1 x \quad \text{und} \quad h_2: v = \lambda_2 x .$$

**Fall III:**  $\lambda_1, \lambda_2$  sind konjugiert komplex, also  $\lambda_{1,2} = \delta_0 \pm j\omega_0$  .

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber den bisher betrachteten Fällen besteht darin, daß die Differentialgleichungen (2.17) und (2.18) nichtreelle Koeffizienten haben, wodurch eine anschauliche Deutung in der Zustandsebene nicht mehr ohne weiteres möglich ist. Um sie zu retten, führt man durch eine zusätzliche Transformation neue Variablen ein, indem man von  $x_1$  und  $x_2$  zu ihrem Real- und Imaginärteil übergeht.

Wegen

$$x_1 = p + jq, \quad x_2 = p - jq \quad (2.22)$$

ist

$$p = \frac{1}{2} (x_1 + x_2), \quad q = \frac{1}{2j} (x_1 - x_2) .$$

$p$  und  $q$  sind dann wieder reelle Koordinaten in einem Achsenkreuz, das schiefwinklig zu dem ursprünglichen  $x-v$ -System liegt, aber mit diesem den Ursprung gemeinsam hat. Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten zunächst

$$\dot{x}_1 = (\delta_0 + j\omega_0)x_1, \quad \dot{x}_2 = (\delta_0 - j\omega_0)x_2$$

und gehen durch die Einführung der Variablen  $p, q$  in die Differentialgleichungen

$$\dot{p} + j\dot{q} = (\delta_0 + j\omega_0)(p + jq) = (\delta_0 p - \omega_0 q) + j(\omega_0 p + \delta_0 q),$$

$$\dot{p} - j\dot{q} = (\delta_0 - j\omega_0)(p - jq) = (\delta_0 p - \omega_0 q) + j(-\omega_0 p - \delta_0 q)$$

über. Hieraus erhält man die beiden reellen Differentialgleichungen

$$\dot{p} = \delta_0 p - \omega_0 q, \quad \dot{q} = \omega_0 p + \delta_0 q,$$

aus denen die Differentialgleichung

$$\frac{dq}{dp} = \frac{\omega_0 p + \delta_0 q}{\delta_0 p - \omega_0 q},$$

folgt.

Um sie zu lösen, führt man Polarkoordinaten ein:

$$p = r \cos \varphi, \quad q = r \sin \varphi,$$

woraus

$$dp = dr \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi,$$

$$dq = dr \sin \varphi + r \cos \varphi d\varphi$$

folgt. Setzt man dies in die obige Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{\omega_0 \cos \varphi + \delta_0 \sin \varphi}{\delta_0 \cos \varphi - \omega_0 \sin \varphi}.$$

Durch Ausmultiplizieren und Vereinfachen erhält man daraus die einfache Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} \omega_0 - r \delta_0 = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\delta_0}{\omega_0}$$

mit der Lösung

$$r = r_0 e^{\frac{\delta_0}{\omega_0} \varphi}.$$

Nun sind zwei Unterfälle zu trennen:

*Fall III/1:*  $\delta_0 \neq 0$ .

Dann sind die Trajektorien logarithmische Spiralen, die sich auf  $\underline{0}$  zusammenziehen, wenn  $\delta_0 < 0$  ist, sich hingegen von  $\underline{0}$  wegbewegen, falls  $\delta_0 > 0$ . Man nennt die Ruhelage einen *Strudelpunkt* (Bild 2/8, in dem das  $p$ - $q$ -Koordinatensystem rechtwinklig und demgemäß das  $x$ - $v$ -System schiefwinklig ist). Der Strudelpunkt ist im ersten Fall global asymptotisch stabil, im letzten instabil.

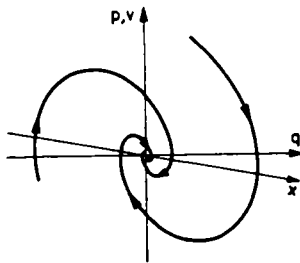


Bild 2/8 Strudelpunkt <sup>1)</sup>

*Fall III/2:*  $\delta_0 = 0$ .

Dann ist  $r = r_0$ , die Trajektorien sind also Kreise um  $\underline{0}$ <sup>2)</sup>. Man spricht von einem *Wirbelpunkt* (Bild 2/9). Die Ruhelage ist jetzt stabil.

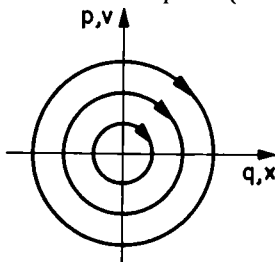


Bild 2/9 Wirbelpunkt <sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Da Polarkoordinaten eingeführt wurden, hat man das  $p$ - $q$ -Koordinatensystem als rechtwinklig anzusehen und demgemäß das  $x$ - $v$ -System als schiefwinklig. Die Berechnung des Zusammenhangs zwischen  $x, v$  und  $p, q$  mittels (2.19), (2.20) und (2.22) führt auf die eingezeichnete Lage der Achsen.

<sup>2)</sup> Bei anderer Wahl des Maßstabs auf den Achsen kann es sich auch um Ellipsen handeln.

<sup>3)</sup> Siehe Fußnote 1).

Bisher wurden die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  der charakteristischen Gleichung als einfach vorausgesetzt. Liegt statt dessen eine *Doppelwurzel*  $\lambda$  vor, so tritt an die Stelle von (2.14) die Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \left[ \frac{r_1}{s - \lambda} + \frac{r_2}{(s - \lambda)^2} \right] U(s) .$$

Man führt dann die Zustandsvariablen durch

$$X_1(s) = \frac{1}{s - \lambda} U(s) ,$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2} U(s) = \frac{1}{s - \lambda} X_1(s)$$

ein, was zu den Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_1 - \lambda x_1 = u , \quad \dot{x}_2 - \lambda x_2 = x_1$$

führt. Die homogenen Gleichungen

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 ,$$

$$\dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_1$$

sind jetzt allerdings nicht mehr entkoppelt.

Genau wie im Fall einfacher Wurzeln ist der Zusammenhang zwischen  $x_1, x_2$  und  $x, v$  durch eine lineare und umkehrbar eindeutige Koordinatentransformation in der Zustandsebene gegeben.

Die sukzessive Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen liefert

$$x_1 = x_{10} e^{\lambda t} ,$$

$$x_2 = (x_{20} + x_{10}t) e^{\lambda t} .$$

Wie man aus diesen Gleichungen erkennt, ist  $0$  wiederum ein *Knotenpunkt*. Er ist global asymptotisch stabil für  $\lambda < 0$ .

Die verschiedenen Verhaltensweisen der Trajektorien lassen sich nunmehr ohne Schwierigkeit aus den Koeffizienten der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv}{dx} = - \frac{a_0 x + \frac{1}{2} a_1^2}{v}$$

erkennen. Wegen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0}$$

erhält man nämlich die Klassifikation in Bild 2/10. Die Aufteilung der ersten Zeile dieses Schemas in Strudel und Wirbel folgt daraus, daß für  $a_1 = 0$  die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  rein imaginär werden, also  $\delta_0 = 0$  gilt. Dann muß nach den früheren Ausführungen ein Wirbel vorliegen, anderenfalls ein Strudel. Die Aufteilung der letzten Zeile ergibt sich aus der Tatsache, daß  $\lambda_1 \lambda_2 = a_0$  gilt, also nach dem oben Gesagten für  $a_0 > 0$  ein Knoten, für  $a_0 < 0$  ein Sattel auftritt.

Diese Verhältnisse werden sehr übersichtlich, wenn man die Ungleichungen in der Ebene der beiden Parameter  $a_1, a_0$  veranschaulicht. Dabei ist zu beachten, daß aus  $a_1^2 - 4a_0 = 0$  die Gleichung  $a_0 = \frac{1}{4} a_1^2$ , also die Gleichung einer Parabel folgt. In deren Innern ist  $a_0 > \frac{1}{4} a_1^2$ , also  $a_1^2 - 4a_0 < 0$ , während für ihr Äußeres  $a_0 < \frac{1}{4} a_1^2$  und damit  $a_1^2 - 4a_0 > 0$  gilt (Bild 2/11).

$a_1^2 - 4a_0$	Wurzeln der charakteristischen Gleichung	Charakter der Ruhelage
negativ	konjugiert komplex	$a_1 \neq 0$ Strudel
		$a_1 = 0$ Wirbel
Null	reelle Doppelwurzel	Knoten
positiv	reell verschieden	$a_0 > 0$ Knoten
		$a_0 < 0$ Sattel

Bild 2/10 Charakter der Ruhelage der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0, \quad a_0 \neq 0$$

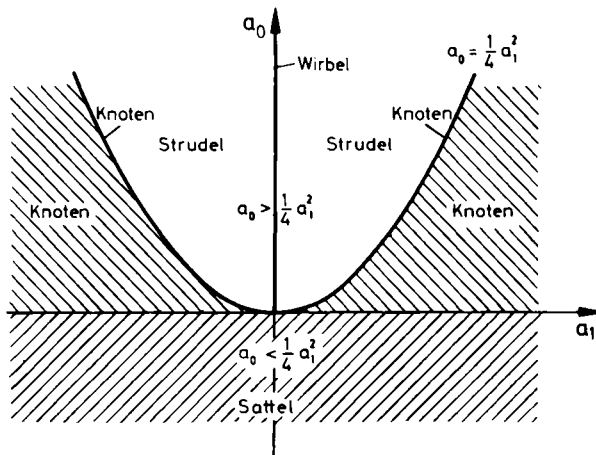


Bild 2/11 Verhalten der Ruhelage der Differentialgleichung  
 $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , in der Parameterebene

Stabilität herrscht genau dann, wenn beide Parameter  $a_0, a_1 > 0$  sind. Das Stabilitätsgebiet umfaßt also das Innere des 1. Quadranten.

## 2.2.4 Lineare Näherung nichtlinearer Differentialgleichungen in der Umgebung einer Ruhelage

Der Gedanke liegt nahe, die im vorhergehenden gewonnenen Einsichten auch für nichtlineare Systeme nutzbar zu machen, indem man sie um ihre Ruhelagen linearisiert. In der Tat ist es auf diese Weise möglich, ihr Trajektorienbild in der Umgebung einer Ruhelage näherungsweise zu erhalten.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

bzw. ihre Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = v,$$

$$\dot{v} = -f(x, v).$$

Ist  $(x_R, v_R)$  eine Ruhelage, so muß

$$v_R = 0, \quad f(x_R, v_R) = 0$$

gelten. Man spricht dann auch von einem *singulären Punkt der Differentialgleichung*, da er das übliche Verhalten der Trajektorien vermissen läßt - sei es, daß er selbst eine zum Punkt entartete Trajektorie darstellt, sei es, daß durch ihn mehrere Trajektorien hindurchgehen.

Wir gehen nun zu den Abweichungen von der Ruhelage über:

$$\Delta x = x - x_R, \quad \Delta v = v - v_R \quad \text{bzw.}$$

$$x = x_R + \Delta x, \quad v = v_R + \Delta v.$$

Damit wird aus den Zustandsdifferentialgleichungen

$$(\Delta x)' = \Delta v,$$

$$(\Delta v)' = -f(x_R + \Delta x, v_R + \Delta v).$$

Entwicklung von  $f(x_R + \Delta x, v_R + \Delta v)$  um die Stelle  $(x_R, v_R)$  liefert nach dem Taylorschen Satz

$$f(x_R, v_R) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_R, v_R) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v}(x_R, v_R) \Delta v + R_2(\Delta x, \Delta v).$$

Berücksichtigt man  $f(x_R, v_R) = 0$ , setzt abkürzend

$$a_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_R, v_R), \quad a_1 = \frac{\partial f}{\partial v}(x_R, v_R)$$

und vernachlässigt das Restglied  $R_2$ , so wird aus den Zustandsdifferentialgleichungen

$$(\Delta x)' = \Delta v,$$

$$(\Delta v)' = -a_0 \Delta x - a_1 \Delta v.$$

Setzt man nun die erste dieser Differentialgleichungen in die zweite ein, so entsteht die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\Delta x)'' + a_1(\Delta x)' + a_0 \Delta x = 0.$$

Das ist gerade die Differentialgleichung (2.13) für  $u = 0$ .

Man hat also das *Resultat*:

Die Trajektorien der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

bzw. der Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -f(x, v)$$

verhalten sich in der Umgebung der Ruhelage  $(x_R, v_R)$  wie die Trajektorien der linearen Differentialgleichung

$$(\Delta x)'' + a_1(\Delta x)' + a_0\Delta x = 0,$$

wobei

$$\Delta x = x - x_R, \quad \Delta v = v - v_R, \quad a_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_R, v_R), \quad a_1 = \frac{\partial f}{\partial v}(x_R, v_R).$$

Sie können somit gemäß Bild 2/10 bzw. 2/11 klassifiziert werden.

Dabei ist vorausgesetzt, daß  $a_0 \neq 0$  und in der Umgebung von  $(x_R, v_R)$

$$|R_2(\Delta x, \Delta v)| = |f((\Delta x, \Delta v) - a_0\Delta x - a_1\Delta v)| \leq M[(\Delta x)^2 + (\Delta v)^2]$$

mit irgendeinem positiven  $M$ , was sicher der Fall, wenn  $f(x, v)$  in  $(x_R, v_R)$  2-mal stetig differenzierbar ist.

(2.23)

Was die Voraussetzungen angeht, so mußte  $a_0 \neq 0$  bereits bei der Differentialgleichung (2.13) zu Grunde gelegt werden, während die letztgenannte Voraussetzung die Vernachlässigung des Restgliedes legitimiert.

Betrachten wir als Beispiel das *ungedämpfte Pendel* aus Bild 1/20. Seine Gleichung lautet  $\ddot{x} + (g/l)\sin x = 0$ , sodaß  $\partial f/\partial x = (g/l)\cos x$ ,  $\partial f/\partial v = 0$  wird. Für die untere Ruhelage  $(0,0)$  ist daher  $a_0 = \partial f/\partial x(0,0) = g/l > 0$ ,  $a_1 = 0$ . Somit liegt nach dem Diagramm im Bild 2/11 ein Wirbelpunkt vor, der – in Übereinstimmung mit dem Resultat in Kapitel 1 – von Trajektorien umgeben wird, die durch Kreise bzw. Ellipsen angenähert werden.

Für die obere Ruhelage  $(\pi, 0)$  ist  $a_0 = \partial f/\partial x(\pi, 0) = -g/l < 0$ ,  $a_1 = 0$ , womit aus Bild 2/11 ein Sattelpunkt folgt. Aus dem Bild 2/7 sieht man, daß diese Ruhelage instabil ist.



## 2.3 Stabilitätsanalyse und Stabilisierung nichtlinearer Regelkreise in der Zustandsebene

### 2.3.1 Regelkreise mit Relaiskennlinie

Als typisches Beispiel eines Regelkreises mit Relaiskennlinie, d.h. einer stückweise achsenparallelen Kennlinie, betrachten wir eine **Regelung mit Zweipunktkennlinie und Doppel-I-Glied** (Bild 2/12).

Aus

$$X(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2} U(s)$$

folgt zunächst

$$\ddot{x} = K_1 K_2 u.$$

Da  $u$  nur die beiden Werte  $b$  und  $-b$  annimmt, kann man

$$u = b\epsilon \quad \text{mit} \quad \epsilon = \pm 1$$

schreiben. Damit geht die obige Differentialgleichung in

$$\ddot{x} = K_1 K_2 b \epsilon$$

über, wofür wir kürzer

$$\ddot{x} = \epsilon K \quad \text{mit} \quad K = K_1 K_2 b$$

schreiben können. Das ist aber gerade die Differentialgleichung aus Unterabschnitt 2.2.1. Als ihre Lösungen ergeben sich somit die beiden Parabelscharen im Bild 2/2. Sie sind im Bild 2/13 nochmals gezeichnet.

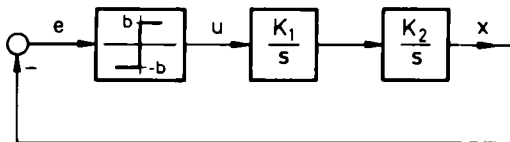


Bild 2/12 Regelkreis mit Zweipunktkennlinie und Doppel-I-Glied

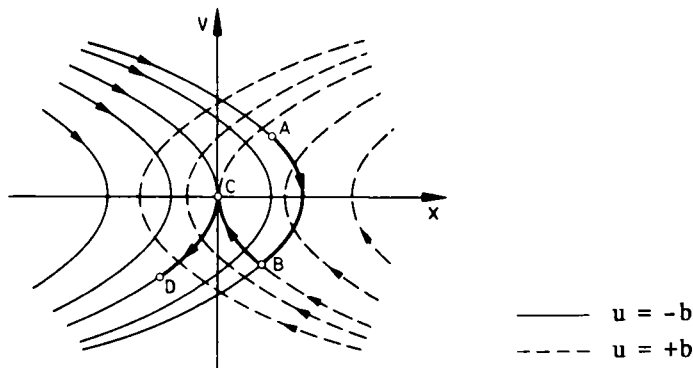


Bild 2/13 Trajektorien des linearen Teilsystems aus Bild 2/12

Bei ihnen handelt es sich um die Trajektorien der Regelstrecke (einschließlich Stelleinrichtung), sofern man die Eingangsgröße  $u = -b$  bzw.  $u = b$  auf die Strecke schaltet. Da keine anderen Werte der Stellfunktion  $u$  auftreten, kann sich der Zustandspunkt  $P = (x, v)$  der Regelstrecke nur auf Kurven der beiden Scharen bewegen; irgendwelche anderen Bahnen sind ausgeschlossen. Nimmt die Stellfunktion  $u(t)$  bei offenem Regelkreis in irgendeiner Reihenfolge die Werte  $-b$  und  $+b$  an, so ist die Trajektorie eine stetige Kurve, die sich aus Stücken von Parabeln der beiden Scharen zusammensetzt. In den Zeitpunkten, zu denen von  $+b$  auf  $-b$  oder von  $-b$  auf  $+b$  umgeschaltet wird, wechselt der Zustandspunkt von einer Parabel der einen Schar zu einer Parabel der anderen Schar. Eine derartige Trajektorie der Strecke ist im Bild 2/13 dick eingezeichnet.

Nunmehr wollen wir den geschlossenen Regelkreis betrachten. Für ihn ist

$$u = \begin{cases} -b, & \text{falls } e < 0, \text{ also } x > 0, \\ +b, & \text{falls } e > 0, \text{ also } x < 0. \end{cases}$$

Wenn  $x$  durch 0 geht, erfolgt die Umschaltung des Zweipunktgliedes. Die Gerade  $x = 0$ , also die  $v$ -Achse, wird deshalb als *Schaltlinie* des geschlossenen Kreises bezeichnet.

Geht man etwa vom Punkt  $(x_0, 0)$  im Bild 2/14 aus, so durchläuft der Zustandspunkt eine geschlossene Kurve, die sich aus den beiden Parabelästen zu  $u = -b$  (durchgezogene Kurve) und  $u = +b$  (gestrichelte Kurve) zusammensetzt. Im Zeitbereich entspricht ihr wegen der periodischen Wiederkehr der gleichen  $x$ -Werte eine Dauerschwingung.

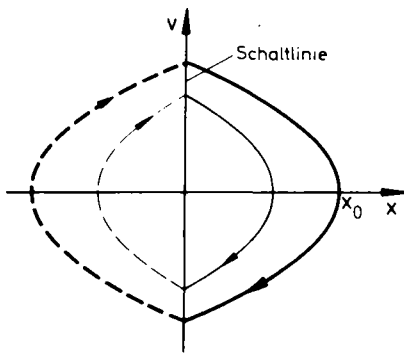


Bild 2/14  
Trajektorien des geschlossenen  
Regelkreises von Bild 2/12

Die Periode der Dauerschwingung kann man mit Hilfe der allgemeinen Formel (2.5) ermitteln. Aus Symmetriegründen ist

$$\frac{T}{4} = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{v}.$$

Mit  $v^2 = 2K(x_0 - x)$ , also  $2v dv = -2K dx$  wird

$$\frac{T}{4} = \int_0^{-\sqrt{2Kx_0}} \left[ -\frac{1}{2K} \right] \frac{2v dv}{v} = \frac{\sqrt{2Kx_0}}{K}.$$

Somit ist

$$T = 4 \sqrt{\frac{2x_0}{K}}. \quad (2.24)$$

Die Periode der Dauerschwingung hängt also vom Anfangszustand ab. Ändert man den Anfangszustand, so erhält man eine andere Trajektorie mit einer veränderten Schwingungsdauer. Man sieht unmittelbar aus dem Bild 2/14, daß diese neue Trajektorie in einer beliebig engen Umgebung der ursprünglichen Trajektorie liegt, wenn die Änderung des Anfangszustands genügend klein ist. Die ursprüngliche Trajektorie bezeichnet man als *bahnstabil* oder *orbital stabil*.

Allgemeiner und etwas präziser gesprochen heißt das folgendes. Wir denken uns um jeden Punkt einer geschlossenen Kurve  $C$  einen Kreis mit dem (positiven) Radius  $\epsilon$  gelegt. Die Vereinigung aller dieser Kreise sei als  $\epsilon$ -Umgebung von  $C$

bezeichnet. Die Kurve  $C$  heißt *bahnstabil*, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  gibt derart, daß eine zum beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  in der  $\delta$ -Umgebung startenden Kurve für alle  $t \geq t_0$  in der  $\epsilon$ -Umgebung bleibt.

Bahnstabilität bedeutet nicht, daß zu zwei in der Zustandsebene benachbarten Trajektorien auch die zugehörigen Vorgänge über der  $t$ -Achse nahe beieinander liegen müssen. D.h.: Betrachtet man die *zum gleichen Zeitpunkt*  $t$  gehörigen Zustandspunkte zweier benachbarter Trajektorien, so brauchen diese keineswegs nahe beieinander zu liegen, wie dicht man auch die Anfangszustände der Trajektorien beieinander wählen mag. Das kann man an unserem Beispiel sehen. Aus (2.24) folgt nämlich: Weichen die Anfangswerte  $x_0$  zweier Trajektorien beliebig wenig voneinander ab, so weichen auch die Perioden der zugehörigen Dauerschwindungen etwas voneinander ab. So wenig dies auch sein mag, die Zeitvorgänge klaffen dann immer wieder weit auseinander.

Bei der Bahnstabilität geht es also um die Annäherung zweier Kurven als Punktmengen, ohne Rücksicht auf ihre zeitliche Durchlaufung. Wie das Beispiel zeigt, können zwei Trajektorien in diesem Sinn benachbart sein, ohne daß etwas Derartiges für die zugehörigen Zeitverläufe gelten muß.

Aus dem Trajektorienverlauf in Bild 2/14 kann man das Stabilitätsverhalten der Ruhelage  $(x,v) = (0,0)$  ablesen. Sie ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil: Die Trajektorien bleiben in einer beliebig engen Umgebung der Ruhelage, wenn sie hinreichend nahe bei ihr beginnen, ohne jedoch für  $t \rightarrow +\infty$  gegen die Ruhelage zu streben.

Es erhebt sich die Frage, wie man *das Stabilitätsverhalten verbessern* kann. Genauer gesagt: Wie kann man die lediglich stabile Ruhelage  $(0,0)$  asymptotisch stabil machen?

Die Betrachtung des Bildes 2/14 legt nahe, daß dies rein geometrisch durch eine Neigung der Schaltgeraden nach links erreicht werden kann. Das zeigt Bild 2/15.

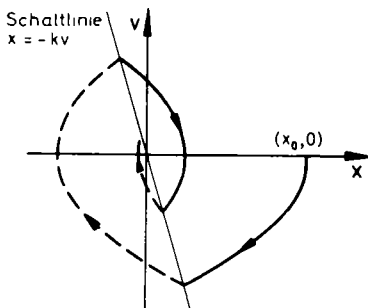


Bild 2/15

Asymptotische Stabilisierung des Regelkreises von Bild 2/12 durch Schrägstellen der Schaltlinie

Die Schaltlinie hat dann die Gleichung  $x = -kv$  mit  $k > 0$  oder

$$x + kv = 0.$$

Liegt ein Punkt  $(x,v)$  links von der Schaltgeraden, so ist für ihn

$$x < -kv \quad \text{oder} \quad x + kv < 0,$$

liegt er rechts von ihr, so ist entsprechend

$$x + kv > 0.$$

Im ersten Fall muß  $u = +b$  sein (gestrichelte Parabeln), im letzteren  $u = -b$  (durchgezogene Parabeln).

Insgesamt muß also gelten:

$$u = \begin{cases} -b & \text{für } x + k\dot{x} > 0 \quad \text{bzw.} \quad e + k\dot{e} < 0, \\ +b & \text{für } x + k\dot{x} < 0 \quad \text{bzw.} \quad e + k\dot{e} > 0. \end{cases}$$

Auf den Eingang des Zweipunktgliedes muß also jetzt nicht nur die Regelgröße  $x$  selbst geschaltet werden, sondern überdies noch  $k\dot{x}$ . Hieraus ergeben sich zwei Möglichkeiten für die Wahl des Reglers, die im Bild 2/16 und 2/17 dargestellt sind.

Welche der beiden Möglichkeiten man im konkreten Fall wählt, hängt von den realen Verhältnissen ab. Wenn die Störwelligkeit im System gering ist, so daß man einigermaßen differenzieren kann, wird man den PD-Regler wählen. An-

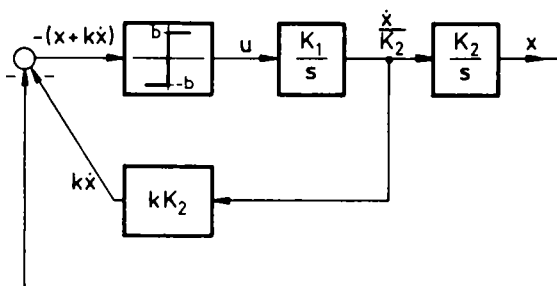


Bild 2/16 Asymptotische Stabilisierung des Regelkreises von Bild 2/12 durch eine zusätzliche Rückführung

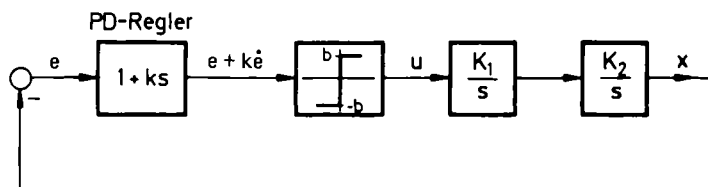


Bild 2/17 Asymptotische Stabilisierung des Regelkreises von Bild 2/12 durch Einführung eines PD-Reglers

derfalls muß man zu der zusätzlichen Rückführung greifen, vorausgesetzt natürlich, daß  $\dot{x}$  mit erträglichem Aufwand meßtechnisch zu erfassen ist.

Das im vorhergehenden beschriebene ideale Verhalten, bei dem der Zustandspunkt auf einer Spiralkurve gegen die Ruhelage strebt, wird allerdings nicht bis zum Schluß durchgehalten. Nach einer gewissen Zahl von Umschaltungen erreicht der Zustandspunkt eine Zone auf der Schaltgeraden, die er nicht überschreiten kann. Sie ist durch die Berührungspunkte der beiden Parabelscharen mit der Schaltgeraden gegeben, wie man aus dem Bild 2/18 ersieht. Trifft der Zustandspunkt auf diese Zone, so kann er die Schaltgerade nicht überschreiten, da die Trajektorien auf der anderen Seite seiner Bewegung entgegengerichtet sind. Er muß daher auf der Schaltgeraden bleiben, also deren Gleichung

$$x + kv = 0$$

erfüllen. Befindet er sich etwa auf dem unteren Teil der Schaltgeraden, so gilt für ihn  $v = \dot{x} < 0$ ,  $x$  muß somit abnehmen. Infolgedessen wandert der Zustandspunkt auf der Schaltgeraden in den Ursprung der Zustandsebene. Währenddessen genügt  $x$  der Differentialgleichung

$$x + k\dot{x} = 0,$$

woraus

$$x = c e^{-\frac{t}{k}}$$

folgt.

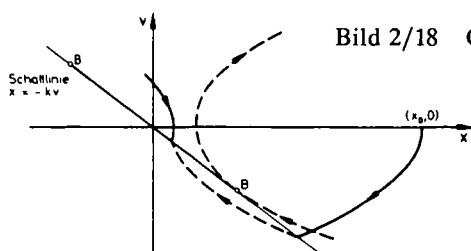


Bild 2/18 Gleitvorgang bei geneigter Schaltlinie

Im konkreten Fall oszilliert die Stellfunktion  $u(t)$  während dieses "Gleitvorganges" mit hoher Frequenz zwischen den Werten  $b$  und  $-b$ , da der Zustandspunkt die Schaltlinie in beiden Richtungen fortwährend geringfügig überschreitet. Durch diese Oszillation wird die Stelleinrichtung strapaziert. Deshalb wird man den Gleitvorgang nicht allzusehr ausdehnen, darf also die Schaltgerade nicht zu stark gegen die  $v$ -Achse neigen, d.h.  $k$  nicht zu groß machen. Das ist plausibel, da  $k$  die Zeitkonstante des Vorgangs ist.

Nunmehr wollen wir eine Zweipunktkennlinie mit Integrier- und Verzögerungsglied betrachten. Bei dem in Bild 2/19 dargestellten Regelkreis kann es sich beispielsweise um die näherungsweise Beschreibung einer Temperaturregelung handeln, bei der die Stelleinrichtung durch ein I-Glied und der Erwärmungsvorgang des Raumes durch ein Verzögerungsglied 1. Ordnung beschrieben wird – vorausgesetzt, daß man den Wärmetransport vernachlässigen kann.

Die Strecke (mit Stelleinrichtung) ist durch die Gleichung

$$X(s) = \frac{K_1 K_2}{s(1 + Ts)} U(s),$$

also durch die Differentialgleichung

$$T\ddot{x} + \dot{x} = K_1 K_2 u$$

gegeben.  $u$  kann nur die beiden Werte  $b$  und  $-b$  annehmen. Damit geht die letzte Differentialgleichung in die Beziehung

$$T\ddot{x} + \dot{x} = K_1 K_2 \epsilon b$$

oder

$$T\ddot{x} + \dot{x} = \epsilon K \quad \text{mit} \quad K > 0, \epsilon = \pm 1$$

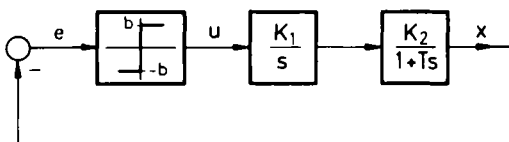


Bild 2/19 Regelkreis mit Zweipunktkennlinie, Integrier- und Verzögerungsglied

über. Das ist aber gerade die Differentialgleichung, welche im Unterabschnitt 2.2.2 behandelt wurde. Demgemäß sind die Trajektorien des offenen Kreises durch das Bild 2/5 gegeben, wobei die durchgezogenen Kurven zu  $u = -b$ , die gestrichelten zu  $u = +b$  gehören.

Aus ihnen kann man nun genau wie im vorigen Beispiel die Trajektorien des geschlossenen Kreises zusammensetzen, indem man die Schaltbedingung berücksichtigt: Ist  $x > 0$ , so ist  $e < 0$  und damit  $u = -b$ , so daß der Zustandspunkt in der rechten Halbebene auf einer durchgezogenen Kurve wandern muß. Hingegen ist in der linken Halbebene, also für  $x < 0$ , d.h.  $e > 0$ ,  $u = +b$ , und daher bewegt sich der Zustandspunkt auf einer gestrichelten Kurve. Geht  $x$  durch Null, so schaltet das Zweipunktglied um, und der Zustandspunkt geht von der einen Kurvenschar zur anderen Kurvenschar über. Auch hier ist also die  $v$ -Achse die Schaltlinie des Systems. Man erhält so die in Bild 2/20 dargestellten Trajektorien des geschlossenen Kreises.

Wie unmittelbar zu sehen, ist die Ruhelage  $\underline{0}$  asymptotisch stabil. Ihr *Einzugsbereich*, d.h. die Gesamtheit der Punkte der Zustandsebene, von denen aus die Trajektorien gegen die Ruhelage streben, umfaßt zumindest den Streifen  $-K \leq v \leq +K$ . Für die Anwendungen ist vor allem dieser Streifen von Interesse, da die normalerweise vorkommenden Anfangsauslenkungen das System nicht aus diesem Streifen entfernen werden. Hält man sich Bild 2/4 vor Augen, so sieht man aber auch ohne Schwierigkeit, daß sogar jede Trajektorie, wo sie auch in der  $x-v$ -Ebene beginnen mag, gegen  $(0,0)$  strebt. Die Ruhelage ist somit global asymptotisch stabil, d.h. ihr Einzugsbereich umfaßt die gesamte Zustandsebene.

Auch hier kann man eine bessere Dämpfung des Einschwingvorganges erhalten, wenn man die Schaltlinie nach links neigt, wie unmittelbar aus Bild 2/20 zu er-

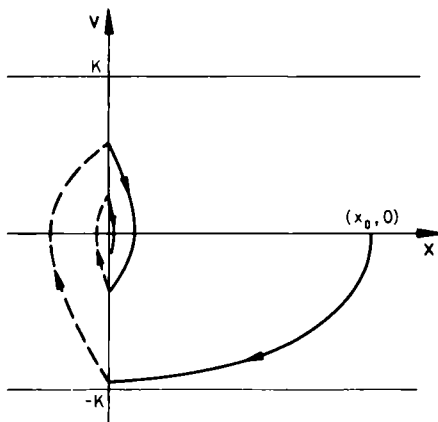


Bild 2/20  
Trajektorie des geschlossenen  
Regelkreises von Bild 2/19



sehen ist. Da die Erscheinungen aber im wesentlichen die gleichen sind wie im vorigen Beispiel, brauchen wir nicht weiter darauf einzugehen.

### 2.3.2 Regelkreise mit stückweise linearer Kennlinie

Stückweise linear heißt eine Kennlinie, die aus Geradenstücken besteht. Falls diese sämtlich achsenparallel sind, liegt speziell eine Relaiskennlinie vor. Der wichtigste Typ einer allgemeineren stückweise linearen Kennlinie ist die Begrenzung. Regelkreise mit Begrenzung sollen im folgenden untersucht werden.

Der Regelkreis im Bild 2/21 kann zum Beispiel dadurch zu Stande kommen, daß eine 3-Zeitkonstanten-Strecke vorliegt und mittels eines PID-Reglers die beiden größten Zeitkonstanten kompensiert werden, wofür ein I-Glied auftritt. Wie dabei die linearen Glieder zur Begrenzungslinie liegen, ist ohne Belang, da nach dem Übergang zum Standardregelkreis die Struktur auf die obige Form gebracht werden kann. Man kann sich unter der Strecke auch eine Lageregelstrecke vorstellen, bei welcher das Verzögerungsglied eine unterlagerte Drehzahlregelung beschreibt, die bereits mittels eines konventionellen Reglers dynamisch korrigiert ist.

Es ist hier

$$X = \frac{K_1 K_2}{s(1 + Ts)} U \quad \text{mit} \quad u = \begin{cases} -b & \text{für } e < -a, \\ \frac{b}{a}e & \text{für } -a < e < a, \\ +b & \text{für } e > a, \end{cases}$$

also

$$T\ddot{x} + \dot{x} = K_1 K_2 u \quad \text{mit} \quad u = \begin{cases} -b & \text{für } x > a, \\ -\frac{b}{a}x & \text{für } a > x > -a, \\ +b & \text{für } x < -a. \end{cases}$$

Setzt man

$$K_1 K_2 b = K,$$

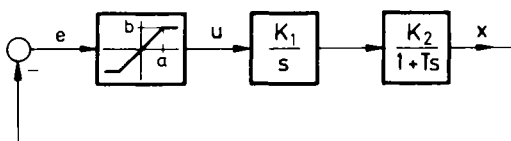


Bild 2/21  
Regelkreis mit Begrenzung

so kann man hierfür schreiben:

$$\begin{aligned} T\ddot{x} + \dot{x} &= K && \text{für } x < -a, \\ T\ddot{x} + \dot{x} + \frac{K}{a}x &= 0 && \text{für } -a < x < +a, \\ T\ddot{x} + \dot{x} &= -K && \text{für } x > a. \end{aligned}$$

Die Zustandsebene zerfällt somit in drei parallele Streifen, in denen verschiedene Differentialgleichungen für die Trajektorien gelten.

In den Streifen links von  $-a$  und rechts von  $a$  gilt die im Unterabschnitt 2.2.2 behandelte Differentialgleichung. Für  $x < -a$  und  $x > a$  bewegt sich der Zustandspunkt des geschlossenen Regelkreises daher auf den Trajektorien aus dem Bild 2/5, und zwar für  $x < -a$  auf den gestrichelten Kurven, für  $x > a$  auf den durchgezogenen Kurven.

Im Intervall  $-a < x < a$  gilt

$$\ddot{x} + \frac{1}{T}\dot{x} + \frac{K}{aT}x = 0.$$

Damit liegt die in Unterabschnitt 2.2.3 betrachtete Differentialgleichung  $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$  vor, mit

$$a_1 = \frac{1}{T}, \quad a_0 = \frac{K}{aT},$$

also

$$a_1^2 - 4a_0 = \frac{1}{T^2} - 4\frac{K}{aT} = \frac{1}{T^2} \left( 1 - 4K_1K_2T\frac{b}{a} \right).$$

Da  $a_0 > 0$  und  $a_1 > 0$  gilt, kann die Ruhelage  $(x, v) = (0, 0)$  nach Bild 2/10 nur ein Strudel oder ein Knoten sein. Für  $4K_1K_2Tb/a > 1$  handelt es sich um einen Strudel, für  $4K_1K_2Tb/a \leq 1$  um einen Knoten. Vergrößerung der linearen Übertragungskonstante  $K_1K_2$ , der Zeitkonstante  $T$  oder des Anstiegs  $b/a$  des mittleren Begrenzungsstücks führen also zum Strudelpunkt, d.h. zu Einschwingvorgängen, die im Unterschied zum Knotenpunkt oszillieren, daher weniger gedämpft sind.

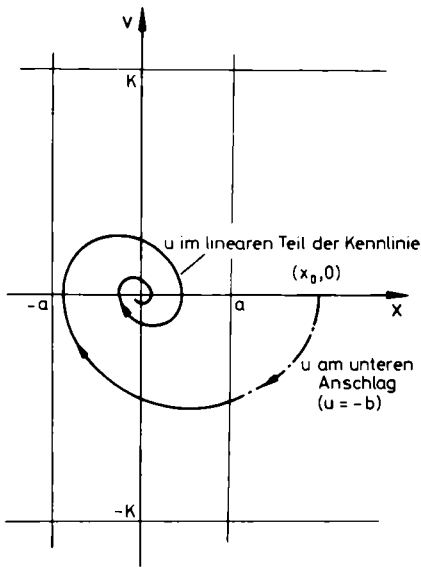


Bild 2/22 Trajektorie des geschlossenen Regelkreises von Bild 2/21

Nimmt man etwa den Fall des Strudels an, so kann die Trajektorie des geschlossenen Kreises durch Bild 2/22 oder 2/23 gegeben sein, wobei zu beachten ist, daß  $x = -e$  gilt.

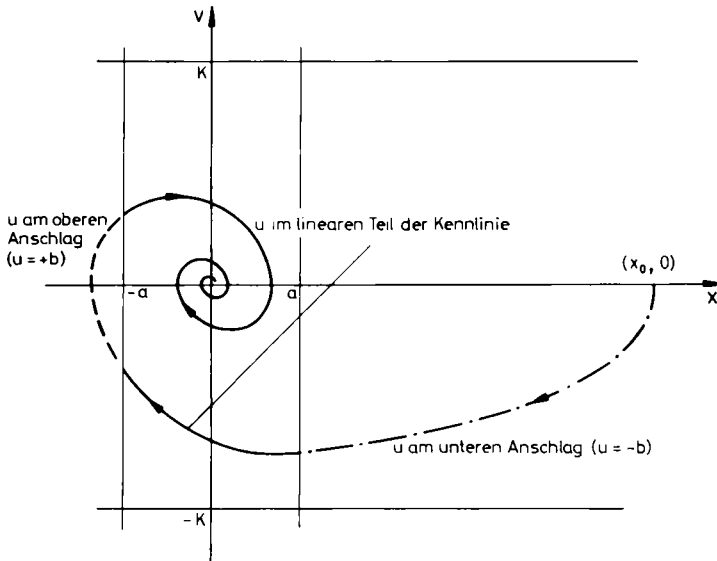


Bild 2/23 Trajektorie des geschlossenen Regelkreises von Bild 2/21 bei anderen Anfangsbedingungen

Als weiteres Beispiel untersuchen wir eine **Regelung mit Begrenzung und Doppel-I-Verhalten**. Der Regelkreis ist in Bild 2/24 gezeichnet. Genau wie im vorigen Beispiel erkennt man, daß der geschlossene Kreis durch drei Differentialgleichungen beschrieben wird, die in verschiedenen Teilen der Zustandsebene gelten:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= K & \text{für } x < -a, \\ \ddot{x} + \frac{K}{a}x &= 0 & \text{für } -a < x < a, \\ \ddot{x} &= -K & \text{für } x > a, \quad K = K_1 K_2 b.\end{aligned}$$

Die erste und dritte Differentialgleichung wurden im Unterabschnitt 2.2.1 behandelt und führen auf die beiden Parabelscharen im Bild 2/2, wobei für den Streifen links von  $-a$  die gestrichelten Kurven, für den Streifen rechts von  $+a$  die durchgezogenen Kurven zu nehmen sind.

Die im mittleren Streifen zwischen  $-a$  und  $+a$  geltende Differentialgleichung ist als Spezialfall in der Differentialgleichung  $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$  enthalten, läßt sich aber auch sehr einfach direkt lösen. Für sie gilt nämlich

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{Kx}{av},$$

also

$$avdv = -Kxdx,$$

woraus

$$a\frac{v^2}{2} = -K\frac{x^2}{2} + \text{const}$$

oder

$$\frac{x^2}{a} + \frac{v^2}{K} = C^2$$

folgt. Das ist eine Schar ähnlicher Ellipsen, deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen und welche die Halbachsen  $C\sqrt{a}$  und  $C\sqrt{K}$  besitzen.

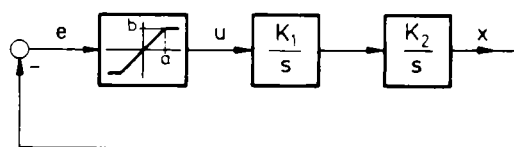


Bild 2/24 Regelkreis mit Doppel-I-Glied und Begrenzung

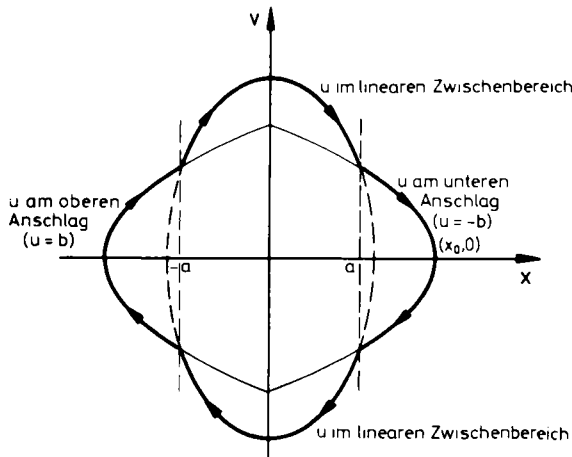


Bild 2/25 Trajektorien des geschlossenen Regelkreises von Bild 2/24

Die Trajektorien des geschlossenen Regelkreises sind daher von dem im Bild 2/25 dargestellten Kurventyp. Man sieht, daß die Ruhelage stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil ist. Sie stellt einen Wirbelpunkt dar.

### 2.3.3 Grenzyklen

Schon in Abschnitt 1.3 wurde am Beispiel der Temperaturregelung darauf hingewiesen, daß Dauerschwingungen, also periodische Vorgänge, eine charakteristische Erscheinung nichtlinearer Systeme sind. Im Zustandsraum entspricht der Dauerschwingung eine geschlossene Trajektorie, da sich die gleichen Zustände periodisch wiederholen.

Ein zweites konkretes Beispiel stellen die Trajektorien des Regelkreises in Bild 2/12 dar, die sämtlich geschlossene Kurven sind (Bild 2/14). Wird der Zustandspunkt dieser Regelung durch eine äußere Störung aus seiner Umlaufbahn auf eine Nachbartrajektorie versetzt, so läuft er auf dieser weiter. Er bleibt dabei in der Nachbarschaft zur bisherigen Umlaufbahn, wenn die Störung klein war, kehrt aber nicht auf seine frühere Bahn zurück. Dieses Verhalten hatten wir als *bahnstabil* bezeichnet (Unterabschnitt 2.3.1).

Man kann sich unschwer auch ein anderes Verhalten vorstellen: Wird der Zustandspunkt durch eine Störung aus seiner Umlaufbahn, der geschlossenen Trajektorie C, gebracht, so strebt er mit wachsender Zeit auf sie zu oder auch von

ihr weg. Man bezeichnet dann die geschlossene Kurve  $C$  als einen *Grenzzyklus*, da die Nachbartrajektorien ihr gegenüber ein Grenzverhalten aufweisen.

Um diese Vorstellung etwas schärfer zu fassen, führen wir den Abstand eines Punktes  $\underline{x}$  der Zustandsebene von der geschlossenen Kurve  $C$  ein. Ist  $\underline{x}_C$  irgendein Punkt von  $C$ , so ist der Abstand des Punktes  $\underline{x}$  vom Punkt  $\underline{x}_C$  durch

$$|\underline{x} - \underline{x}_C| = \sqrt{(x_1 - x_{1C})^2 + (x_2 - x_{2C})^2} \quad (2.25)$$

gegeben. Unter dem Abstand des Punktes  $\underline{x}$  von der Kurve  $C$  wird dann das Minimum aller Abstände (2.25) verstanden, wenn  $\underline{x}_C$  die Kurve  $C$  durchläuft:

$$d(\underline{x}, C) = \min_{\underline{x}_C \in C} |\underline{x} - \underline{x}_C|. \quad (2.26)$$

Der kürzeste Weg, der vom Punkt  $\underline{x}$  der Zustandsebene zur Kurve  $C$  führt, hat also die Länge  $d(\underline{x}, C)$ .

Es sei nun

$$C^*: \underline{x} = \underline{x}^*(t), \quad t \geq t_0,$$

irgendeine Kurve in der Zustandsebene. Geht dann

$$d(\underline{x}^*(t), C) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

so strebt die Kurve  $C^*$  mit wachsendem  $t$  gegen die geschlossene Kurve  $C$ .

Betrachten wir als einfaches Beispiel das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 1, \\ \dot{r} &= 1 - r \end{aligned}$$

mit den ebenen Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$ . Aus der ersten Differentialgleichung folgt  $\varphi = t + c_1$ . Soll  $\varphi = 0$  sein für  $t = 0$ , so folgt  $c_1 = 0$ . Aus der zweiten Differentialgleichung erhält man über

$$\frac{dr}{r-1} = -dt :$$

$$\ln|1 - r| = -t + c_2, \quad \text{also}$$

$$1 - r = e^{-t+c_2} = c_3 e^{-t}.$$

Für  $t = 0$  ist  $c_3 = -(r_0 - 1) = -d_0$ , so daß

$$r = 1 + d_0 e^{-t}.$$

Dabei ist also  $|d_0|$  der Abstand des Startpunktes vom Einheitskreis. Die Gleichung der Trajektorien lautet somit

$$\varphi = t, \quad r = 1 + d_0 e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad (2.27)$$

wobei  $-1 < d_0 < +\infty$  gilt. Der Ursprung  $r = 0$  ist keine Trajektorie des Systems, da er die zweite Differentialgleichung nicht erfüllt. Für  $d_0 = 0$  ist  $r \equiv 1$ , also der Einheitskreis, in der Trajektorienschar enthalten. In Bild 2/26 ist die Trajektorienschar aufgezeichnet. Wie man daraus sieht und wie man ja auch unmittelbar aus (2.27) abliest, streben sämtliche Trajektorien für  $t \rightarrow +\infty$  gegen den Einheitskreis. Der Abstand des Punktes  $(r, \varphi)$  vom Einheitskreis ist hier einfach durch

$$d(\underline{x}, C) = |r - 1| = |d_0| e^{-t}$$

gegeben.

Wir definieren nun allgemein: Die geschlossene Kurve  $C$  werde als *asymptotisch bahnstabiler Grenzzyklus* bezeichnet, wenn sie bahnstabil ist und überdies eine Umgebung besitzt, aus der die Trajektorien für  $t \rightarrow +\infty$  gegen  $C$  streben.

Wie man sieht, ist der Einheitskreis des letzten Beispiels ein asymptotisch bahnstabiler Grenzzyklus. In diesem Fall streben *sämtliche* Trajektorien des Systems mit wachsender Zeit gegen den Grenzzyklus.

Bei unseren Anwendungen darf man voraussetzen, daß sich die geschlossene Kurve  $C$  nicht selbst überschneidet, also zum Beispiel nicht die Gestalt einer 8 hat. Sie besitzt dann ein Innen- und Außengebiet, wobei das Innengebiet zur Linken von  $C$  liegen soll. Dann kann es sein, daß die Trajektorien mit wachsendem  $t$  nur von innen oder nur von außen gegen  $C$  streben, während sie auf der anderen Seite von  $C$  wegstreben. „Wegstreben“ heißt dabei: Es gibt eine (in die-

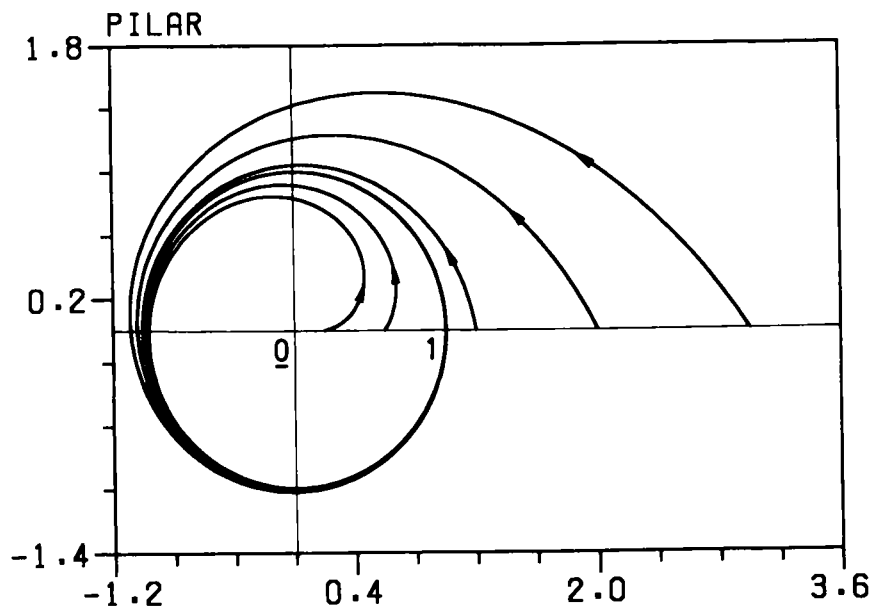


Bild 2/26 Trajektorienschar des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\varphi} = 1, \dot{r} = 1 - r, \quad t \geq 0$$

sem Fall einseitige) Umgebung von  $C$  derart, daß jede von  $C$  verschiedene Trajektorie, die dort startet, ab einem endlichen  $t$  diese Umgebung definitiv verläßt. In diesem Fall wollen wir von einem *asymptotisch semibahnstabilen Grenzzyklus*  $C$  sprechen.

Da wir in der Zustandsebene das Stabilitätsverhalten geschlossener Kurven ausschließlich im Sinne der Bahnstabilität beurteilen, werden wir im folgenden einfachheitshalber die Vorsilbe „bahn“ weglassen. Während der asymptotisch stabile Grenzzyklus völlig entsprechend auch in einem höherdimensionalen Zustandsraum definiert werden kann, kann es die asymptotische *Semistabilität* nur in der Ebene geben, da nur diese durch eine (sich nicht selbst überschneidende) geschlossene Kurve in ein Innen- und Außengebiet zerlegt wird.

Liegt eine geschlossene Trajektorie in der Zustandsebene vor, deren Nachbartrajektorien mit wachsender Zeit sowohl im Innen- wie im Außengebiet von ihr wegstreben, so wollen wir sie als *instabilen Grenzzyklus* bezeichnen. In technischen Systemen tritt dieser Fall nicht selten auf, wie die spätere Darstellung zeigen wird <sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> Für eine mathematisch exakte Betrachtung des dynamischen Verhaltens geschlossener Trajektorien in der Zustandsebene sei auf [2], Abschnitt 2.1 und 2.2, und [25] verwiesen. Siehe auch [26], Kapitel IV, sowie [41], Kapitel V und VI.



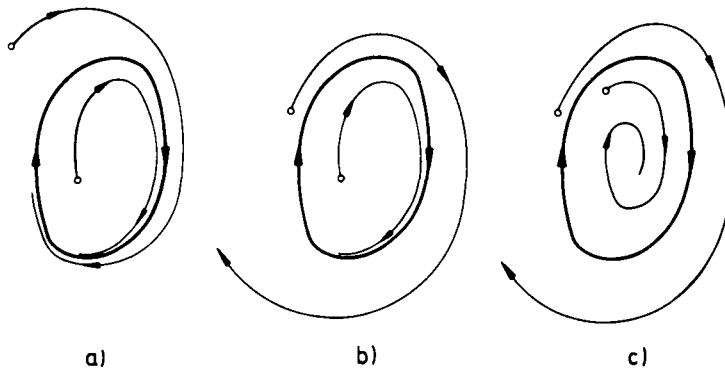


Bild 2/27 Typisches Verhalten von Grenzyklen

- a) asymptotisch stabil
- b) asymptotisch semistabil
- c) instabil

Im Bild 2/27 ist das typische Verhalten von Grenzyklen nochmals veranschaulicht.

Betrachten wir nun einen **Regelkreis mit Grenzyklus!** Es handelt sich um die Regelung aus Bild 2/28, die ein Zweipunktglied mit Hysterese enthält. Da  $u$  nur die Werte  $b$  und  $-b$  annehmen kann, sind die Trajektorien des offenen Kreises durch das Bild 2/5 gegeben, wobei  $K = K_1 K_2 b$  zu setzen ist. Was die Schaltbedingung angeht, so liest man aus der Durchlaufung der Hysterese Kennlinie ab, daß

$$\begin{aligned} u &= -b & \text{für } \dot{e} > 0, e < a & \quad \text{und} \quad \dot{e} < 0, e < -a, \\ u &= +b & \text{für } \dot{e} > 0, e > a & \quad \text{und} \quad \dot{e} < 0, e > -a. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen  $x = -e$ , also  $v = \dot{x} = -\dot{e}$ :

$$\begin{aligned} u &= -b & \text{für } v < 0, x > -a & \quad \text{und} \quad v > 0, x > a, \\ u &= +b & \text{für } v < 0, x < -a & \quad \text{und} \quad v > 0, x < a. \end{aligned}$$

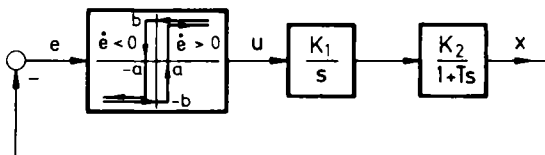


Bild 2/28 Regelkreis mit Hysterese Kennlinie

Das bedeutet: In dem durch die oberen Ungleichungen charakterisierten Bereich der  $x$ - $v$ -Ebene werden die zu  $u = -b$  gehörigen Trajektorien des linearen Teilsystems durchlaufen, also die durchgezogenen Kurven in Bild 2/5, während der Zustandspunkt des geschlossenen Kreises in dem durch die unteren Ungleichungen bestimmten Bereich die zu  $u = +b$  gehörigen Trajektorien des linearen Teilsystems durchläuft, mithin die gestrichelten Kurven im Bild 2/5. Damit erhält man die im Bild 2/29 dargestellte Aufteilung der Zustandsebene in zwei Bereiche, die durch die beiden möglichen Stellungen des Zweipunktgliedes charakterisiert sind. Längs ihrer Grenze findet die Umschaltung statt. Allerdings gilt dies nur für die vertikalen Stücke der Grenzkurve. Das horizontale Geradenstück

$$-a < x < a, \quad v = 0$$

enthält keinen Umschaltspunkt. Gemäß Abschnitt 1.3 wird ein solcher Bewegungszustand nicht angenommen, da sonst kein periodischer Vorgang, also kein Grenzzyklus zustande käme. Wir wollen aber einfachheitshalber auch dieses Stück zur Schaltlinie hinzurechnen und deshalb von einer *gebrochenen Schaltlinie* sprechen.

Infolge der andersartigen Schaltlinie ergeben sich jetzt ganz andere Trajektorien des geschlossenen Kreises als beim Zweipunktglied ohne Hysterese, obwohl die Trajektorien des offenen Kreises die gleichen sind. Geht man zunächst von einem Anfangspunkt  $A_1$  in der Nähe des Ursprungs aus, so erhält man als Trajektorie eine expandierende Spirale, deren Anfangsverlauf durch die gestrichelte Kurve in Bild 2/30 angedeutet ist. Ist der Anfangspunkt jedoch ein weit vom Ursprung entfernter Punkt  $A_2$ , so ist die Trajektorie eine sich zusammenziehende Spirale, deren Anfangsstück die durchgezogene Kurve in Bild 2/30 wiedergibt. Dieser Verlauf der Trajektorien folgt ganz anschaulich aus einer einfachen Eigenschaft der Kurven im Bild 2/5: Zwei Kurven der gleichen Schar gehen durch Parallelverschiebung in Richtung der  $x$ -Achse auseinander hervor. Sie rücken daher, in Ordinatenrichtung gesehen, mit wachsendem  $t$

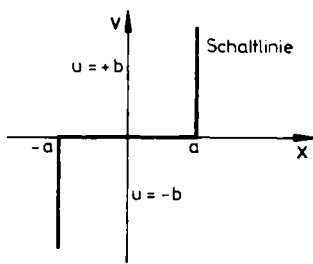


Bild 2/29

Schaltlinie eines Zweipunktgliedes mit Hysterese

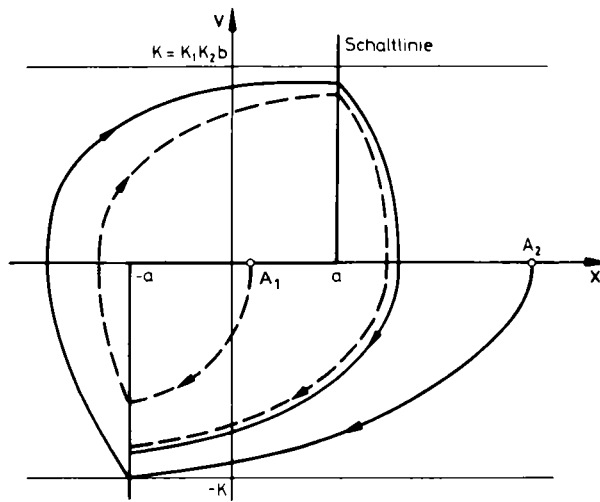


Bild 2/30 Entstehung eines Grenzzyklus beim Regelkreis von Bild 2/28

mehr und mehr zusammen. Aus Bild 2/30 wird geometrisch evident, daß es eine zwischen den beiden gezeichneten Zustandsbahnen gelegene Trajektorie des geschlossenen Kreises geben muß, die in sich selbst zurückkehrt, also einen asymptotisch stabilen Grenzzyklus darstellt. Man erhält ihn nahezu, wenn man die gestrichelte Kurve nochmals bis zur Schaltlinie fortsetzt. Der Deutlichkeit halber ist er im Bild 2/31 gesondert dargestellt.

Der Ursprung der  $x-v$ -Ebene ist keine Ruhelage des Regelkreises. Aus den Zustandsdifferentialgleichungen des Regelkreises

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \frac{K_1 K_2 u - v}{T}$$

folgt nämlich für  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{v} = 0$ , daß  $v = 0$  und  $K_1 K_2 u - v = 0$  sein muß, was zu  $u = 0$  führt. Wie man aus der Hysteresekennlinie sieht, kann für  $u = 0$  aber nicht zugleich  $e = 0$  bzw.  $x = 0$  sein.

Wenn also der Punkt  $(x,v) = (0,0)$  auch keine Ruhelage des Regelkreises darstellt, so hindert doch nichts daran, sein Stabilitätsverhalten zu untersuchen. Ein Blick auf das Bild 2/30 zeigt, daß er instabil ist, da die Trajektorien seiner Umgebung von ihm wegstreben, auf den stabilen Grenzzyklus zu.

Nunmehr wollen wir aus dem Grenzzyklus Amplitude und Periode der zugehörigen Dauerschwingung berechnen.

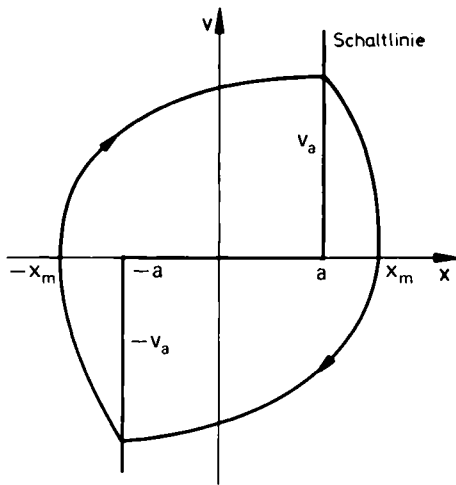


Bild 2/31  
Der Grenzzyklus des Regelkreises  
von Bild 2/28

Die *Amplitude der Dauerschwingung* ist unmittelbar durch den Scheitelwert  $x_m$  gegeben. Nach Bild 2/5 hat der rechts von der Schaltlinie gelegene Teil des Grenzzyklus die Gleichung

$$x = -Tv + KT \ln(v + K) + C, \quad (2.28)$$

wobei allerdings  $C$  noch unbestimmt ist.  $x_m$  erhält man daraus für  $v = 0$ :

$$x_m = KT \ln K + C. \quad (2.29)$$

Um  $C$  zu bestimmen, geht man von derjenigen Eigenschaft aus, die den Grenzzyklus gegenüber den anderen Trajektorien auszeichnet: Er hat an den Stellen  $x = a$  und  $x = -a$   $v$ -Werte vom gleichen Betrag  $v_a$ , die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Demnach gilt

$$a = -Tv_a + KT \ln(v_a + K) + C$$

und

$$-a = Tv_a + KT \ln(-v_a + K) + C.$$

Durch Subtraktion eliminiert man den unbekannten Parameter  $C$  und erhält so eine einzige Gleichung zur Bestimmung von  $v_a$ :

$$2a = -2Tv_a + KT \ln \frac{K + v_a}{K - v_a} \quad (2.30)$$

oder

$$2a = -2Tv_a + 2KTa \tanh \frac{v_a}{K}.$$

Daraus folgt

$$\frac{v_a}{K} = \tanh \frac{a + Tv_a}{KT}.$$

Mit

$$\frac{a + Tv_a}{KT} = w_a,$$

also

$$v_a = Kw_a - \frac{a}{T} \quad (2.31)$$

ergibt sich die Gleichung

$$w_a - \frac{a}{KT} = \tanh w_a. \quad (2.32)$$

Bild 2/32 zeigt, daß es genau eine Lösung  $w_a$  dieser Gleichung gibt, die man numerisch oder graphisch finden kann.

Setzt man den so erhaltenen Wert  $w_a$  in (2.31) ein, so erhält man  $v_a$  und ermittelt hieraus den Parameter  $C$  des Grenzzykus, den man wiederum in (2.29) einzusetzen hat, um  $x_m$  zu bekommen:

$$x_m = KT [w_a - \ln(1 + w_a - \frac{a}{KT})]. \quad (2.33)$$

Die Bestimmung der Periode  $\tau$  des Grenzzykus kann mittels der Beziehung (2.6) erfolgen. Wegen

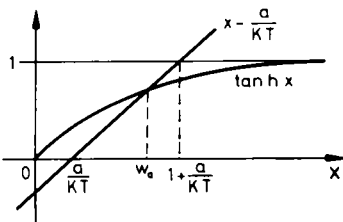


Bild 2/32

Bestimmung der Amplitude des  
Grenzzykus von Bild 2/31

$$f(x, v, u) = -\frac{v + K}{T}, \quad K = K_1 K_2 b,$$

erhält man

$$\frac{1}{2}\tau = - \int_{v_a}^{-v_a} \frac{T}{v + K} dv.$$

Somit ist

$$\tau = 2T \ln \frac{K + v_a}{K - v_a},$$

also wegen (2.30)

$$\tau = \frac{4}{K} (a + T v_a)$$

oder

$$\tau = 4T w_a. \quad (2.34)$$

Ist speziell  $a/KT$  nicht zu klein, etwa  $a/KT > 0,5$ , so ist annähernd, wie man aus dem Bild 2/32 ersieht,  $w_a = 1 + a/KT$ . Damit folgen aus (2.33) und (2.34) die Näherungswerte:

$$x_m = a + KT (1 - \ln 2) \approx a + 0,31 KT, \quad (2.35)$$

$$\tau = 4 \left( T + \frac{a}{K} \right). \quad (2.36)$$

Die Formeln (2.33) und (2.34) seien noch auf ein numerisches Beispiel angewandt:  $a = 0,2$ ;  $K = K_1 K_2 b = 1$ ;  $T = 1$ . Man erhält  $w_a = 0,94$  und damit  $A_p = x_m = 0,39$  sowie  $\tau = 3,76$ , also  $\omega_p = 2\pi/\tau = 1,67$ . Der Rechnerscrib im Bild 2/33 zeigt die Trajektorienschar dieses Regelkreises.

Von *H. Poincaré* und *I. O. Bendixson* stammen Sätze über die Existenz bzw. das Nichtvorhandensein von Grenzyklen in einem Bereich der Zustandsebene<sup>5)</sup>. Bei ihnen sind jedoch gewisse Voraussetzungen über die Stetigkeit und Diffe-

<sup>5)</sup> Hierfür sei etwa verwiesen auf [67], Kapitel 68; [43], Abschnitt 3.4; [7], Unterabschnitt 3.4.1.

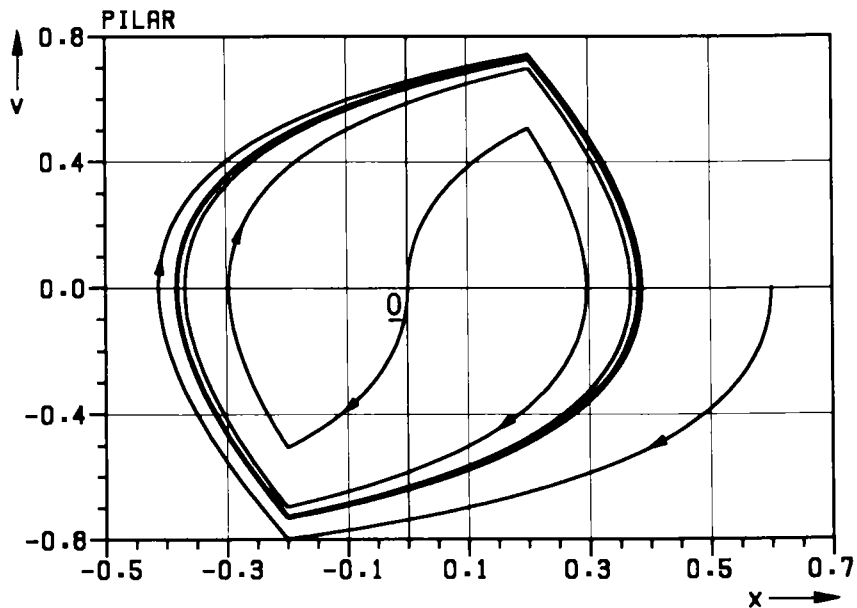


Bild 2/33 Trajektorien des Regelkreises von Bild 2/28 mit  $a = 0,2$ ,  
 $K_1 K_2 b = 1$  und  $T = 1$  (Rechnerschrieb)

renzierbarkeit der rechten Seiten der Zustandsdifferentialgleichungen erforderlich, die in den regelungstechnischen Anwendungen wegen Sprung- und Knickpunkten in den nichtlinearen Kennlinien häufig nicht erfüllt sind.

Rückblickend kann man feststellen, daß asymptotisch stabile Ruhelagen und asymptotisch stabile Grenzzyklen die gemeinsame Eigenschaft aufweisen, die Nachbartrajektorien anzuziehen. Allgemein bezeichnet man derartige Punkt-mengen als *Attraktoren* (sofern nebenbei noch gewisse Bedingungen erfüllt sind)<sup>6)</sup>. In der Ebene sind die erwähnten Punkte und geschlossenen Kurven die einzigen Attraktoren. Im 3- und höherdimensionalen Raum können neben ihnen noch weitere Typen von Attraktoren auftreten: Flächen in Gestalt eines Torus, um den sich die Trajektorien herumschrauben, und entsprechende höherdimensionale Gebilde sowie die sogenannten *seltsamen* oder *fremdartigen Attraktoren* (strange attractors), die sehr komplizierte Gestalt haben, beispielsweise aus unendlich vielen Blättern bestehen, welche längs einer Kurve zusammengeheftet sind, und die in dynamischen Systemen mit chaotischem Verhalten auftreten<sup>7)</sup>.

<sup>6)</sup> Für die exakte Definition der "attraktiven Menge" und des "Attraktors" siehe z.B. [60], Abschnitt 1.5, [61], Abschnitt 1.4, wobei anzumerken ist, daß diese Begriffe bei verschiedenen Autoren etwas differieren können.

<sup>7)</sup> Siehe hierzu die Literaturangaben über dynamische Systeme mit Chaos: [58] bis [62].

### 2.3.4 Regelkreise mit Totzeit

Regelkreise mit Totzeit werden nicht durch Differentialgleichungen, sondern durch Differenzen-Differentialgleichungen beschrieben. Ihre Behandlung in der Zustandsebene muß daher in etwas anderer Weise erfolgen als die der bisher betrachteten Systeme. Als einfaches Beispiel untersuchen wir zunächst den Regelkreis im Bild 2/34.

Die Funktionalgleichung des linearen Systemteils lautet hier

$$X = \frac{V}{s^2} e^{-T_t s} U$$

oder

$$\ddot{x}(t) = V u(t - T_t) .$$

Für den Zusammenhang zwischen  $x$  und der Ausgangsgröße  $y$  des Totzeitglieds gilt jedoch wie bisher:

$$\ddot{x} = Vy = V\epsilon b = \epsilon K \quad \text{mit} \quad K = Vb \quad \text{und} \quad \epsilon = \pm 1 .$$

Das ist wieder die Zustandsdifferentialgleichung des Unterabschnittes 2.2.1, als deren Lösungen sich die beiden Parabelscharen im Bild 2/2 ergeben.

Auf Stücken dieser Parabeln muß sich der Zustandspunkt des geschlossenen Kreises also auch bei vorhandener Totzeit bewegen. Die Frage ist nur, wo die Umschaltung erfolgt. Um dies zu erkennen, gehen wir davon aus, daß sich der Zustandspunkt auf einer Parabel zu  $y = -b$  im 4. Quadranten bewegt, daß also  $x$  abnimmt (Bild 2/35). Geht  $x$  durch 0, überschreitet also der Zustandspunkt die  $v$ -Achse, so springt die Ausgangsgröße  $u$  des Zweipunktgliedes von  $-b$  auf  $+b$ . Ist keine Totzeit vorhanden, so wirkt sich dies sofort auf das nachfolgende Differentialgleichungsglied aus, und der Zustandspunkt geht auf eine Parabel zu  $y = +b$  über. Bei Vorhandensein des Totzeitgliedes verstreicht jedoch die

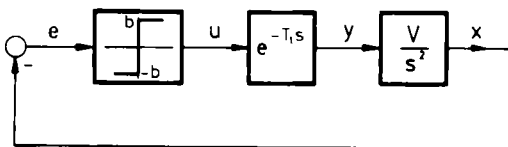


Bild 2/34 Nichtlinearer Regelkreis mit Totzeit und Doppel-I-Glied



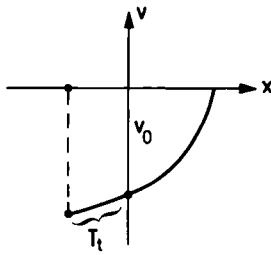


Bild 2/35

Zur Berechnung der Schaltlinie bei  
Vorhandensein von Totzeit

Zeitspanne  $T_t$ , bis sich die Umschaltung in der Differentialgleichung bemerkbar macht. Solange läuft der Zustandspunkt noch auf der zu  $y = -b$  gehörigen Parabel weiter. Die Schaltlinie besteht daher nicht mehr aus der negativen  $v$ -Achse, sondern ist eine demgegenüber nach links verlagerte Kurve. Ganz entsprechend erfolgt der Übergang von der zu  $y = +b$  gehörigen Parabel auf die zu  $y = -b$  gehörige Parabel nicht mehr auf der positiven  $v$ -Achse, sondern auf einer im 1. Quadranten gelegenen Kurve.

Aus Symmetriegründen genügt es, den erstgenannten Teil der neuen Schaltlinie zu bestimmen. Dazu muß man die zeitliche Durchlaufung der Trajektorien heranziehen. Ist allgemein für  $y = -b$

$$\frac{dv}{dt} = f(x, v),$$

so ist die Zeitspanne, die der Zustandspunkt vom Punkt  $(0, v_0)$  der  $v$ -Achse bis zu einem Punkt  $(x, v)$  benötigt, durch

$$t = \int_{(0, v_0)}^{(x, v)} \frac{dv}{f(x, v)}$$

gegeben, wobei also  $v_0 \leq 0$  ist. Soll  $t = T_t$  sein, so muß

$$\int_{(0, v_0)}^{(x, v)} \frac{dv}{f(x, v)} = T_t$$

gelten. Denkt man sich dieses Kurvenintegral ausgerechnet, so erhält man eine Beziehung

$$\varphi(x, v, v_0) = 0.$$

Außerdem muß der Punkt  $(x, v)$  noch die Gleichung der zu  $y = -b$  gehörigen Trajektorien erfüllen, die ja bekannt ist:

$$\psi(x, v, v_0) = 0.$$

Löst man die letzten beiden Gleichungen nach  $x$  und  $v$  auf, so erhält man mit

$$x = f(v_0), \quad v = g(v_0), \quad v_0 \leq 0,$$

eine Parameterdarstellung des unteren Teils der Schaltlinie.

Eliminiert man hingegen den Parameter  $v_0$  aus den genannten Gleichungen, so hat man *eine* Gleichung für den unteren Teil der Schaltlinie:

$$S(x, v) = 0.$$

Aus ihr kann man die Gestalt der Schaltlinie am besten erkennen.

Eigentlich ist die Bezeichnung „Schaltlinie“ hier nicht mehr ganz zutreffend, da der Zeitpunkt der tatsächlichen Umschaltung des Zweipunktgliedes und der Zeitpunkt des Umspringens des Zustandspunktes des geschlossenen Kreises von der einen Trajektorienschar auf die andere nicht mehr zusammenfallen. Doch soll die Bezeichnung beibehalten werden.

Im vorliegenden Beispiel ist  $\dot{v} = \ddot{x} = -K$ , also  $f(x, v) = -K$ . Daher ist

$$T_t = -\frac{1}{K} \int_{v_0}^v dv = -\frac{1}{K} (v - v_0),$$

woraus

$$v + KT_t = v_0 \tag{2.37}$$

folgt. Die Gleichung der zu  $y = -b$  gehörigen Trajektorienschar ist nach Bild 2/2

$$v^2 = -2K(x - C) = -2Kx + 2KC.$$

Für  $x = 0$  wird daraus  $v_0^2 = 2Kx$ , wobei hier  $v_0$  den Schnittpunkt der Parabel mit der negativen  $v$ -Achse bezeichnen soll. Man kann daher die Trajektorien auch in der Form

$$v^2 = -2Kx + v_0^2, \quad v_0 \leq 0, \quad (2.38)$$

schreiben. Setzt man darin  $v$  aus (2.37) ein, so erhält man

$$x = -\frac{1}{2}KT_t^2 + v_0, \quad v_0 \leq 0. \quad (2.39)$$

Zusammen mit der unmittelbar aus (2.37) folgenden Gleichung

$$v = -KT_t + v_0, \quad v_0 \leq 0, \quad (2.40)$$

ist dies die Parameterdarstellung des unteren Teils der Schaltlinie. Wie man sieht, beginnt sie für  $v_0 = 0$  im Punkt

$$(x_a, v_a) = \left(-\frac{1}{2}KT_t^2, -KT_t\right)$$

des 3. Quadranten.

Elimination des Parameters  $v_0$  aus (2.39) und (2.40) führt auf die Gleichung

$$\frac{x}{\frac{1}{2}KT_t^2} - \frac{v}{\frac{1}{2}KT_t} = 1,$$

also auf eine Gerade, wie sie im unteren Teil von Bild 2/36 gezeichnet ist. Das links vom Punkt  $(x_a, v_a)$  gelegene Stück dieser Geraden stellt den unteren Teil der Schaltlinie dar (stark ausgezogen im Bild 2/36). In seinem Anfangspunkt  $(x_a, v_a)$  wird die Schaltlinie von der durch den Ursprung gehenden Parabel (2.38) mit  $v_0 = 0$  tangiert.

Für die Umschaltung von  $y = +b$  auf  $y = -b$  ergibt sich ein ganz entsprechendes Geradenstück im 1. Quadranten. Man erhält hier also *eine aus zwei getrennten Stücken bestehende Schaltlinie*.

Im Bild 2/36 ist eine Trajektorie des geschlossenen Kreises gezeichnet. Man sieht, wie durch das verzögerte Umschalten an Stelle der geschlossenen Trajektorien des totzeitfreien Systems (Bild 2/14) eine expandierende Spiralkurve

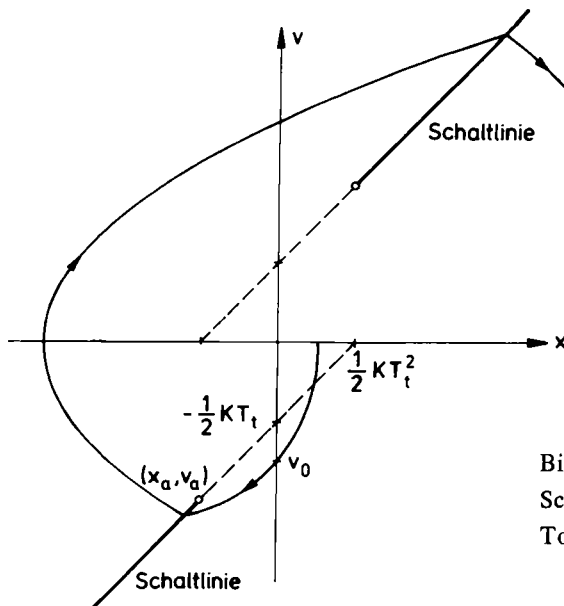


Bild 2/36  
Schaltlinie der nichtlinearen  
Totzeitregelung von Bild 2/34

entsteht. Der Punkt  $(x, v) = (0, 0)$  ist durch das Auftreten der Totzeit instabil geworden.

Nun wollen wir ein anderes Beispiel betrachten, bei dem es zur Entstehung eines Grenzyklus kommt. Der Regelkreis ist im Bild 2/37 wiedergegeben. Ohne Totzeit wurde er bereits früher betrachtet (Bild 2/19, 2/20). Da die Ausgangsgröße  $y$  des Totzeitgliedes die gleichen Werte wie  $u$  annimmt, nämlich  $\pm b$ , ist die Zustandsdifferentialgleichung des auf  $y$  folgenden Systemteils

$$T\ddot{x} + \dot{x} = Vy = V\epsilon b = \epsilon K \quad \text{mit} \quad \epsilon = \pm 1, \quad K = bV.$$

Ihre Trajektorien findet man im Bild 2/5.

Zu  $y = -b$  gehört die Trajektorienschar

$$x = -Tv + KT \ln(v + K) + C.$$

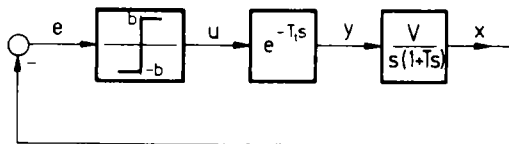


Bild 2/37 Nichtlinearer Regelkreis mit Totzeit, Integrier- und Verzögerungsglied

Für  $x = 0$  sei  $v = v_0$ . Dann ist

$$C = T v_0 - K T \ln(v_0 + K),$$

also

$$x = T(v_0 - v) + K T \ln \frac{v + K}{v_0 + K}. \quad (2.41)$$

Weiter ist  $\frac{dv}{dt} = \ddot{x} = \frac{1}{T}(-K - \dot{x}) = -\frac{1}{T}(v + K)$ , also

$$dt = -\frac{T}{v + K} dv$$

und damit

$$T_t = -T \int_{v_0}^v \frac{dv}{v + K}.$$

Daraus folgt

$$-\frac{T_t}{T} = \ln \frac{v + K}{v_0 + K} \quad (2.42)$$

und weiter

$$v_0 = v e^{\frac{T_t}{T}} - K(1 - e^{\frac{T_t}{T}}). \quad (2.43)$$

Eliminiert man  $v_0$ , indem man (2.42) und (2.43) in (2.41) einsetzt, so hat man die Gleichung der Schaltlinie S:

$$x = m v + q \quad (2.44)$$

mit

$$m = T(e^{\frac{T_t}{T}} - 1) > 0, \quad q = K T(e^{\frac{T_t}{T}} - 1) - K T_t > 0. \quad (2.44a)$$

Sie ist im Bild 2/38 dargestellt. Aus ihm wird überdies anschaulich plausibel, daß ein Grenzzyklus auftreten wird.

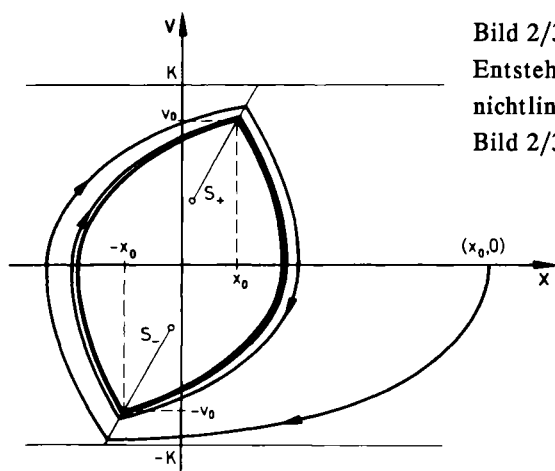


Bild 2/38

Entstehung eines Grenzzyklus bei der  
nichtlinearen Totzeitregelung von  
Bild 2/37

Die allgemeine Bedingung für einen Grenzzyklus dieser Art kann in der folgenden Weise hergeleitet werden. Ist

$$x = h(v) + C$$

die Gleichung der zu  $u = -b$  gehörigen Trajektorienschar und

$$x = S(v) \quad (2.45)$$

die Gleichung der Schaltlinie, so gilt für den Grenzzyklus, wie aus dem Bild 2/38 zu ersehen ist:

$$x_0 = h(v_0) + C_0,$$

$$-x_0 = h(-v_0) + C_0,$$

$$-x_0 = S(-v_0),$$

wobei  $C_0$  der Scharparameter des Grenzzyklus ist. Durch Subtraktion folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$2x_0 = h(v_0) - h(-v_0),$$

also

$$S(-v_0) = \frac{1}{2} [h(-v_0) - h(v_0)]. \quad (2.46)$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für  $v_0$ .

Die Amplitude  $A_p$  des Grenzzyklus, also der maximale  $x$ -Wert, ergibt sich aus dem Schnittpunkt des Grenzzyklus mit der  $x$ -Achse:

$$A_p = x_m = h(0) + C_0.$$

Wegen  $C_0 = x_0 - h(v_0) = -S(-v_0) - h(v_0)$  folgt daraus

$$A_p = h(0) - h(v_0) - S(-v_0). \quad (2.47)$$

Die Periode  $\tau_p$  des Grenzzyklus erhält man aus

$$\frac{\tau_p}{2} = \int_{(x_0, v_0)}^{(-x_0, -v_0)} \frac{dv}{f(x, v)} = g(x_0, v_0) \quad (2.48)$$

mit

$$x_0 = -S(-v_0).$$

Im vorliegenden Fall lautet die Gleichung (2.46), da die Schaltlinie durch  $x = mv + q$  gegeben ist:

$$-mv_0 + q = \frac{1}{2} \left[ Tv_0 + KT \ln(K - v_0) - \{-Tv_0 + KT \ln(K + v_0)\} \right],$$

also

$$-mv_0 + q = Tv_0 - \frac{1}{2}KT \ln \frac{K + v_0}{K - v_0}.$$

Wegen

$$\frac{1}{2} \ln \frac{K + v_0}{K - v_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{v_0}{K}}{1 - \frac{v_0}{K}} = \operatorname{ar} \tanh \frac{v_0}{K}$$

folgt hieraus

$$(m + T)v_0 - q = KT \operatorname{ar} \tanh \frac{v_0}{K}. \quad (2.49)$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für die Unbekannte  $v_0$ . Um sie möglichst einfach lösen zu können, setzt man

$$\frac{m+T}{KT} v_0 - \frac{q}{KT} = w_0,$$

also

$$\frac{v_0}{K} = \frac{T}{m+T} w_0 + \frac{q}{K} \frac{1}{m+T}.$$

Damit wird aus (2.49)

$$w_0 = \operatorname{ar} \tanh \frac{v_0}{K} \quad \text{oder}$$

$$\frac{v_0}{K} = \tanh w_0 \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{T}{m+T} w_0 + \frac{q}{K(m+T)} = \tanh w_0.$$

Man erhält somit  $w_0$  als Lösung der Gleichung

$$\alpha w + \beta = \tanh w, \quad (2.50)$$

wobei gemäß (2.44a)

$$\alpha = e^{-\frac{T_t}{T}}, \quad \beta = 1 - \left(1 + \frac{T_t}{T}\right) e^{-\frac{T_t}{T}}. \quad (2.50a)$$

Im Bild 2/39 ist die graphische Lösung dieser transzenten Gleichung skizziert. Hat man eine Lösung  $w_0$  ermittelt, so erhält man aus (2.47) zunächst

$$A_p = -KT \ln\left(1 + \frac{v_0}{K}\right) + (m+T)v_0 - q$$

und daraus, indem man  $v_0$  durch  $w_0$  ausdrückt:

$$A_p = KT [w_0 - \ln(1 + \alpha w_0 + \beta)]. \quad (2.51)$$



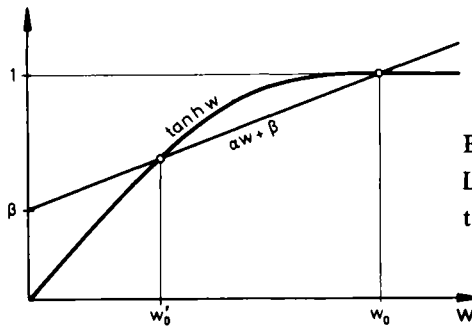


Bild 2/39

Lösung der transzendenten Gleichung

$$\tanh w = \alpha w + \beta$$

Was die Periode  $\tau_p$  des Grenzzyklus betrifft, so folgt aus (2.48)

$$\frac{\tau_p}{2} = - \int_{v_0}^{-v_0} \frac{dv}{v + K} = -T \ln \frac{K - v_0}{K + v_0},$$

also

$$\tau_p = 2T \ln \frac{K + v_0}{K - v_0}.$$

Wegen

$$\frac{1}{2} \ln \frac{K + v_0}{K - v_0} = \frac{m+T}{KT} v_0 - \frac{q}{KT} = w_0$$

ergibt sich schließlich

$$\tau_p = 4T w_0. \quad (2.52)$$

Im vorliegenden Fall liefert die transzendente Gleichung für  $w_0$  zwei Lösungen. Daraus darf man jedoch nicht schließen, daß es zwei Grenzzyklen geben müsse. Vielmehr war der Gedankengang so: Wenn ein Grenzzyklus existiert, so kann man durch geometrische Betrachtung folgern, daß zu ihm eine Lösung der transzendenten Gleichung gehört. Es ist aber nicht gesagt, daß umgekehrt zu jeder Lösung dieser Gleichung wirklich ein Grenzzyklus existieren muß.

Es ist möglich, eine einfache Bedingung für das Auftreten von Grenzzyklen bei einem Zweipunktglied mit Totzeitstrecke anzugeben<sup>8)</sup>. Es muß nämlich die Periode

<sup>8)</sup> M. Pandit: Untersuchung periodischer Zustände in totzeitbehafteten Relaisregelungssystemen. Regelungstechnik 18 (1970), Seite 207 – 210.

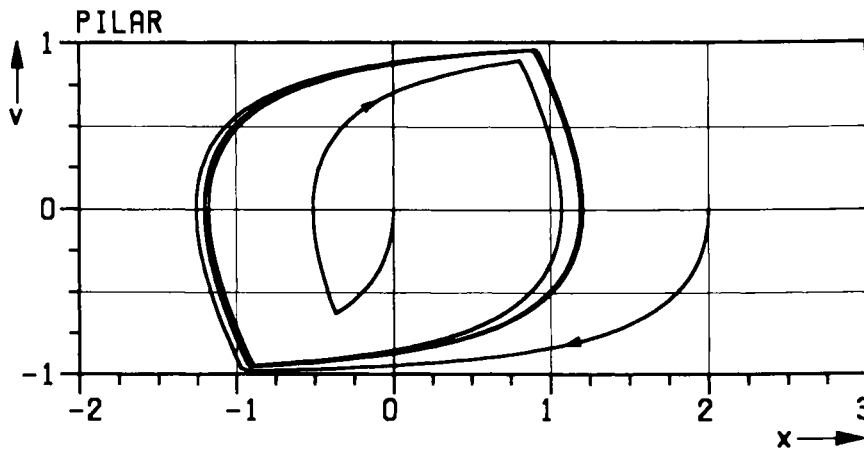


Bild 2/40 Trajektorien der nichtlinearen Totzeitregelung von Bild 2/37

$$\tau_p > 2T_t \quad (2.53)$$

sein bzw.

$$\omega_p T_t < \pi \quad (2.54)$$

gelten. Diese Bedingung ist im konkreten Fall zu überprüfen.

Abschließend sei ein Zahlenbeispiel gebracht:  $K = bV = 1$ ,  $T = 1$ ,  $T_t = 1$ . Man erhält hier zwei Werte:

$$w_0 = 1,87 \quad \text{und} \quad w'_0 = 0,47.$$

Daraus folgt nach (2.52)

$$\tau_p = 7,48 \quad \text{und} \quad \tau'_p = 1,88.$$

Die Bedingung (2.53) ist nur für  $\tau_p$  erfüllt. Nur zu diesem Wert kann daher ein Grenzyklus gehören. Die zugehörige Frequenz ist  $\omega_p = 2\pi/\tau_p = 0,84$ . Die Amplitude ist nach (2.51)  $A_p = 1,20$ . Bild 2/40 zeigt die Trajektorien dieses Regelkreises.

### 2.3.5 Grenzyklen und das Stabilitätsverhalten der Ruhelage

Es liegt auf der Hand, daß ein Zusammenhang zwischen dem Stabilitätsverhalten von Grenzyklen und dem Stabilitätsverhalten von Ruhelagen bestehen

muß. Er wird im folgenden plausibel gemacht. Wir nehmen dazu an, daß die betrachtete Ruhelage im Ursprung liegt und daß sie von einem Grenzyklus umschlossen wird. Sofern mehrere Grenzyklen auftreten, werden es bei realen technischen Systemen nur endlich viele sein, und es werde dann der dem Ursprung am nächsten gelegene Grenzyklus betrachtet. Überdies werde vorausgesetzt, daß das dynamische System außer den Grenzyklen keine weiteren geschlossenen Trajektorien aufweist.

Praktisch werden dann vier Verhaltensweisen auftreten, die man unmittelbar aus dem Bild 2/41 ablesen kann.

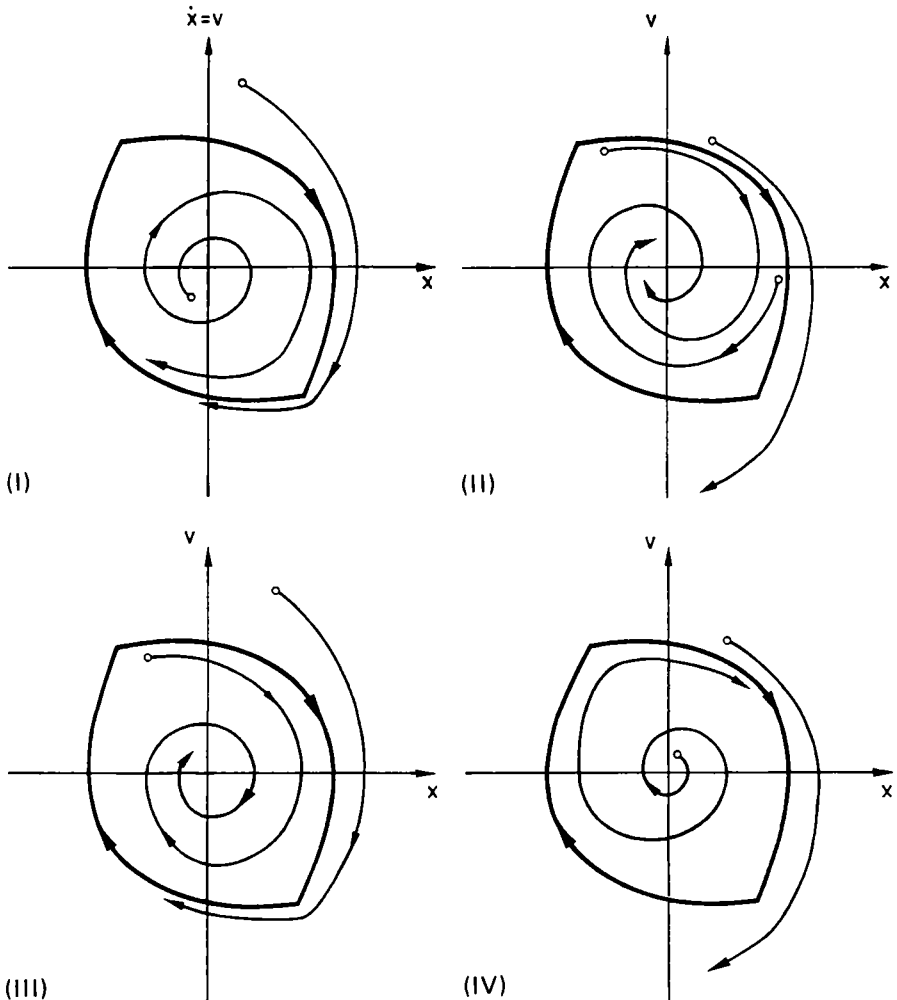


Bild 2/41 Zusammenhang zwischen dem Stabilitätsverhalten der Ruhelage  $0$  und dem Stabilitätsverhalten des innersten Grenzyklus

(I) Der die Ruhelage am engsten umschließende Grenzzzyklus ist *asymptotisch stabil*. Dann zieht er die Trajektorien von beiden Seiten an, und deshalb wird die *Ruhelage instabil* sein

(II) Der die Ruhelage am engsten umschließende Grenzzzyklus ist *instabil*. Dann wird er die Trajektorien nach beiden Seiten abstoßen. Die auf seiner Innenseite gelegenen werden daher gegen die *Ruhelage* streben. Man darf deshalb annehmen, daß sie *asymptotisch stabil* ist und das Innengebiet des Grenzzzyklus als Einzugsbereich besitzt.

(III) Der die Ruhelage am engsten umschließende Grenzzzyklus ist *asymptotisch semistabil*, und zwar „*instabil nach innen*“, d.h. die in seinem Innengebiet gelegenen Trajektorien streben von ihm weg. Man darf dann annehmen, daß sie gegen die *Ruhelage* streben und diese *asymptotisch stabil* ist. Ihr Einzugsbereich umfaßt wieder das Innengebiet des Grenzzzyklus, praktisch aber noch mehr. Denn der Zustandspunkt, welcher von außen gegen den semistabilen Grenzzzyklus strebt, wird durch die kleinste Störung aus ihm entfernt und kann dann nur nach innen streben. Praktisch reicht also der Einzugsbereich der Ruhelage über den innersten Grenzzzyklus hinaus. Ist er der einzige Grenzzzyklus, so kann die Ruhelage global asymptotisch stabil sein.

(IV) Der die Ruhelage am engsten umschließende Grenzzzyklus ist *asymptotisch semistabil*, und zwar „*asymptotisch stabil nach innen*“. Wie in (I) folgt dann, daß die *Ruhelage instabil* ist.

Die vorstehend angewandte Schlußweise ist gewiß nicht streng, wird aber die Mehrzahl der in technischen Systemen auftretenden Fälle erfassen.

Ein Beispiel für den Fall (I) ist der nichtlineare Regelkreis in Bild 2/28, dessen Nichtlinearität ein Zweipunktglied mit Hysterese ist, während das lineare Teilsystem aus I- und P- $T_1$ -Glied besteht. Da der Grenzzzyklus dieses Regelkreises nach Bild 2/30 asymptotisch stabil ist, muß die Ruhelage  $0$  instabil sein. Dies ist auch sofort aus Bild 2/30 sowie dem Rechnerscrib Bild 2/33 abzulesen.

Ein Beispiel für den Fall (II) stellt der Regelkreis im Bild 2/42 dar. Bei der Nichtlinearität handelt es sich um eine Totzone, beim linearen Teilsystem um Totzeit-, I- und P- $T_1$ -Glied. Die formelmäßige Bestimmung des Grenzzzyklus mittels des im Unterabschnitt 2.3.4 beschriebenen Verfahrens ist hier zu mühsam. Mit Hilfe der Methode der Harmonischen Balance läßt sich jedoch ohne Schwierigkeit zeigen, daß ein instabiler Grenzzzyklus existiert, und dessen Amplitude und Frequenz können ohne große Mühe bestimmt werden (Kapitel 4 im Band II).

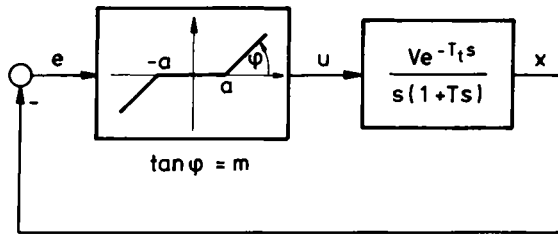


Bild 2/42 Regelkreis mit Totzone und Totzeit

An dieser Stelle wollen wir uns mit einem Rechnerscrib begnügen: Bild 2/43. Es sind zwei Trajektorien aufgezeichnet, die nahe beieinander auf der positiven  $x$ -Achse beginnen, und von denen die eine nach innen, die andere nach außen läuft. Im Anfangsverlauf liegen sie dicht beieinander und zeigen so die Lage des Grenzyklus. Für seine Amplitude erhält man  $A_p = 0,364$ .

Beim Regelkreis von Bild 2/42, der ein I-Glied enthält, sind die Ruhelagen durch  $u = 0$  charakterisiert, da  $u$  dessen Eingangsgröße ist. Also besteht die Zone  $-a \leq e \leq a$  bzw.  $-a \leq x \leq a$  aus Ruhelagen. Diese *Ruhezone* kann man als asymptotisch stabil ansehen.

Diese geometrisch so einleuchtenden Betrachtungen über den Zusammenhang zwischen dem Stabilitätsverhalten von Grenzyklen und Ruhelagen lassen sich leider nicht auf den Zustandsraum höherer Dimension übertragen. Angenom-

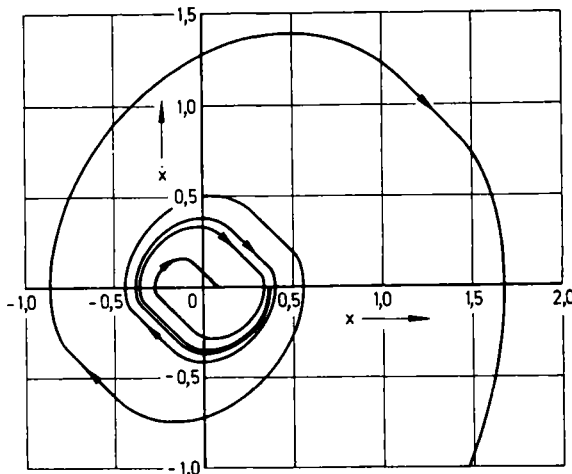


Bild 2/43 Nachweis eines instabilen Grenzyklus des Regelkreises von Bild 2/42 mit dem Rechner

$$a = 0,2 ; m = 3 ; T_t = 1 ; T = 1$$

men etwa, es liege ein System 3. Ordnung vor, das im dreidimensionalen  $x-\dot{x}-\ddot{x}$ -Raum beschrieben sei. Es sei weiter  $\underline{x} = \underline{0}$  eine Ruhelage, und es gebe einen einzigen, in der  $x-\dot{x}$ -Ebene gelegenen instabilen Grenzyklus, der  $\underline{0}$  umschließt. Aus der Tatsache, daß dieser die benachbarten Trajektorien abstößt, kann man dann nicht mehr schließen, daß sie gegen  $\underline{0}$  streben, denn sie können sich z.B. ohne weiteres in Richtung der  $\ddot{x}$ -Achse entfernen. Es ist eben nur in der Ebene so, daß eine geschlossene (sich nicht selbst überschneidende) Kurve den Raum in ein Innen- und Außengebiet zerlegt, sodaß dann die Trajektorien aus dem Innengebiet nicht entweichen können.

### 2.3.6 Strukturumschaltung

Setzt man ein Zwei- oder Dreipunktglied als Regler ein, so wird hierdurch die Eingangsgröße der Strecke (einschließlich Stelleinrichtung) umgeschaltet. Man kann aber auch daran denken, die *Parameter des Reglers* in bestimmter Weise umzuschalten. Man gelangt dann zu einem „strukturvariablen System“, genauer gesagt, einem „strukturumschaltenden System“ [32, 34, 35]. Die Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß bei der Parameterumschaltung Reglerparameter 0 werden können und dann die Funktionalbeziehung, also die Struktur des Reglers, geändert wird. Manchmal spricht man auch von „*Parametersteuerung*“ des Reglers.

Der Grundgedanke einer solchen Strukturumschaltung läßt sich sehr anschaulich in der Zustandsebene darstellen. Dazu betrachten wir ein klassisches Beispiel, nämlich den in Bild 2/44 dargestellten linearen Regelkreis [32, 33]. Seine charakteristische Gleichung lautet

$$\frac{K_S}{s^2} + 1 = 0,$$

sodaß er die Pole  $a_{1,2} = \pm j \sqrt{K_S}$  aufweist und daher bei der geringsten Störung Dauerschwingungen ausführen wird.

Um sein dynamisches Verhalten zu verbessern, wird man auf Grund der Theorie der linearen Regelungen daran denken, einen (realen) PD-Regler hinter den Soll-Istwert-Vergleich zu legen. Ist dessen Übertragungsfunktion

$$G_K = K_R \frac{1 + T_R s}{1 + T_N s}, \quad T_N < T_R,$$

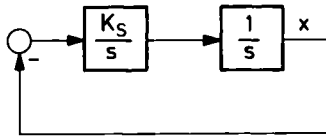


Bild 2/44

Linearer Regelkreis mit Polpaar auf der  $j$ -Achse

so lautet die charakteristische Gleichung der so abgeänderten Regelung

$$K_R \frac{1 + T_R s}{1 + T_N s} \frac{K_S}{s^2} + 1 = 0$$

oder

$$T_N s^3 + s^2 + K_R K_S T_R s + K_R K_S = 0.$$

Etwa mittels des Hurwitz-Kriteriums sieht man, daß die Nullstellen dieser Gleichung in der Tat links der imaginären Achse der komplexen Ebene liegen, wenn  $T_N < T_R$  ist. Um jedoch über die bloße Stabilität hinaus eine genügend starke Dämpfung zu erzielen, muß man  $T_N$  hinreichend klein gegenüber  $T_R$  wählen. Hierdurch wirkt der PD-Regler differenzierend und ist nur verwendbar, wenn die Regelung nicht zu sehr von Störwelligkeit behelligt wird.

Man kann den Regelkreis von Bild 2/44 aber auch durch einen einfachen P-Regler stabilisieren, wenn man diesen nur umschaltbar macht. Betrachten wir zunächst die Struktur in Bild 2/45, wobei  $K_R$  irgendein fester positiver Verstärkungsfaktor sei. Dann gilt

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = K_S u$$

mit

$$u = -K_R x.$$

Der geschlossene Regelkreis wird somit durch die Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -K_S K_R x$$

beschrieben.

Die Trajektorien bekommt man somit aus der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{K_S K_R x}{v}.$$

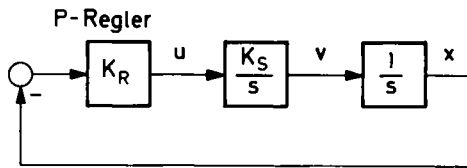


Bild 2/45

Regelkreis von Bild 2/44  
mit P-Regler

Trennung der Veränderlichen liefert

$$v dv = -K_S K_R x dx,$$

also

$$v^2 = -K_S K_R x^2 + C$$

oder

$$\frac{x^2}{C/(K_S K_R)} + \frac{v^2}{C} = 1.$$

Die Trajektorien sind daher Ellipsen um den Ursprung, deren Achsen in den Koordinatenachsen liegen. Dabei gilt

$$\frac{x\text{-Halbachse}}{v\text{-Halbachse}} = \frac{\sqrt{C/(K_S K_R)}}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{K_S K_R}}.$$

Ist

$$K_S K_R > 1, \text{ also } K_R > \frac{1}{K_S},$$

so ist die  $x$ -Halbachse kleiner als die  $v$ -Halbachse und man hat „stehende“ Ellipsen (Bild 2/46). Für

$$K_S K_R < 1, \text{ also } K_R < \frac{1}{K_S}$$

hingegen entstehen die „liegenden“ Ellipsen in Bild 2/46. Wie man sieht, ist die Ruhelage dieses Regelkreises stabil, aber nicht asymptotisch stabil – ganz gleich, welcher Verstärkungsfaktor  $K_R$  des P-Reglers eingestellt ist.



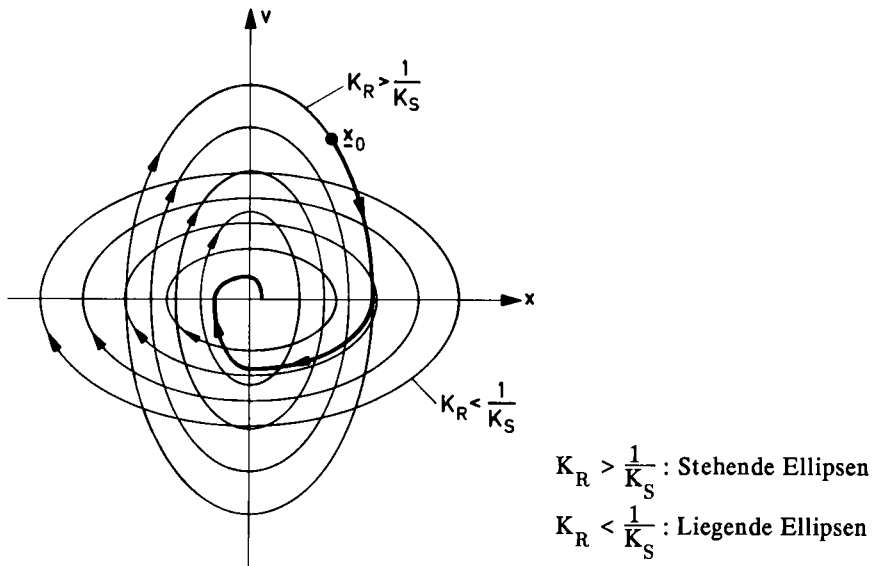


Bild 2/46 Trajektorien des Regelkreises von Bild 2/45 für verschiedene  $K_R$ -Werte

Man denke sich nun den Verstärkungsfaktor  $K_R$  umschaltbar zwischen den beiden Werten

$$K_{R1} > \frac{1}{K_S} \quad \text{und} \quad K_{R2} < \frac{1}{K_S}.$$

$K_{R1}$  sei eingeschaltet, wenn sich der Zustandspunkt  $(x, v)$  im 1. oder 3. Quadranten befindet, hingegen  $K_{R2}$ , wenn er im 2. oder 4. Quadranten liegt. Die Umschaltung von  $K_{R1}$  auf  $K_{R2}$  oder umgekehrt erfolgt, wenn  $(x, v)$  eine Achse überschreitet. Dann bewegt sich der Zustandspunkt im 1. und 3. Quadranten auf einer stehenden Ellipse, im 2. und 4. Quadranten jedoch auf einer liegenden Ellipse. Wie die so entstehenden Trajektorien des geschlossenen Kreises aussehen, ist an der dick eingezeichneten Kurve mit dem Anfangspunkt  $\underline{x}_0$  im Bild 2/46 zu erkennen. Die Ruhelage wird somit *global asymptotisch stabil*, und die Trajektorien streben zügig gegen die Ruhelage, wenn die Ellipsen beider Scharen genügend schmal sind, also  $K_{R1}$  groß genug und  $K_{R2}$  klein genug gewählt wird.

Wie muß nun die Umschaltstrategie beschaffen sein, welche die beschriebene Verhaltensweise bewirkt? Für sie muß

$$K_R = K_{R1} > \frac{1}{K_S}$$

im 1. und 3. Quadranten gelten, also für  $x > 0, v > 0$  und  $x < 0, v < 0$ . Zusammenfassend kann man diesen Bereich durch die Ungleichung  $xv > 0$  charakterisieren. Entsprechend kann man den 2. und 4. Quadranten durch die Ungleichungen  $x < 0, v > 0$  und  $x > 0, v < 0$  beschreiben, die man zu der einen Ungleichung  $xv < 0$  zusammenfassen kann. Damit hat man die Schaltvorschrift

$$K_R = \begin{cases} K_{R1} > \frac{1}{K_S} & \text{für } xv > 0, \\ K_{R2} < \frac{1}{K_S} & \text{für } xv < 0. \end{cases}$$

Man kann sie noch etwas zweckmäßiger formulieren, wenn man die *Schaltvariable*

$$u^* = \operatorname{sgn}(xv) = \begin{cases} 1 & \text{für } xv > 0, \\ -1 & \text{für } xv < 0 \end{cases}$$

eingführt. Dann ist

$$K_R = \begin{cases} K_{R1} & \text{für } u^* = 1, \\ K_{R2} & \text{für } u^* = -1. \end{cases}$$

Dafür kann man schreiben

$$K_R = \frac{1}{2} (K_{R1} + K_{R2}) + u^* \frac{1}{2} (K_{R1} - K_{R2}).$$

Das Bild 2/47 zeigt die Struktur des so erhaltenen schaltenden Reglers, wobei die Signum-Funktion wieder durch ein Zweipunktglied realisiert ist. Die Trajektorie einer solchen Regelung sieht man in Bild 2/48.

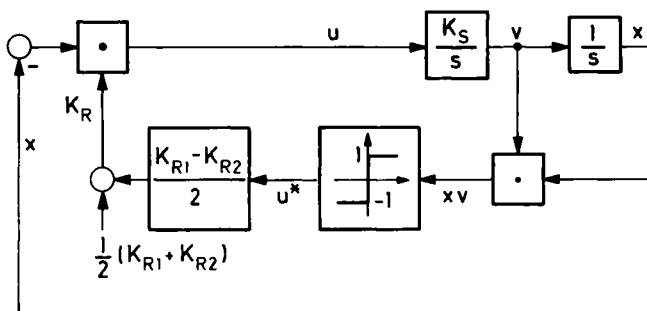


Bild 2/47 Strukturumschaltender Regelkreis zu Bild 2/44

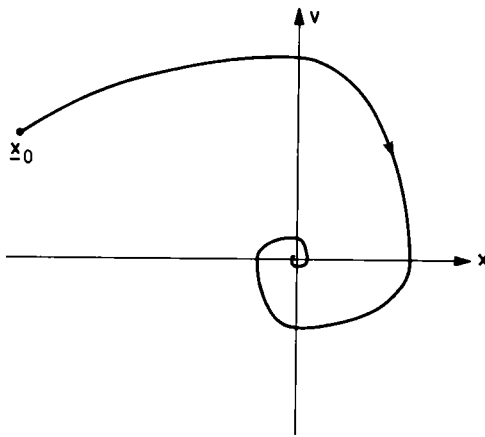


Bild 2/48

Trajektorie der strukturumschaltenden Regelung von Bild 2/47

Strukturumschaltende Regler ganz anderer Art kann man durch Benutzung des Gleitzustandes erhalten. Wir hatten den Begriff des Gleitzustandes schon im Unterabschnitt 2.3.1 eingeführt. Er liegt vor, wenn die auf die Schaltlinie treffenden Trajektorien auf den beiden Seiten der Schaltlinie einander entgegengerichtet sind. Wie er grundsätzlich zum Entwurf einer strukturumschaltenden Regelung benutzt werden kann, zeigt das Bild 2/49.

Dabei ist angenommen, daß die den beiden Schaltzuständen entsprechenden Trajektorienscharen der Regelung längs der gesamten Schaltgeraden  $g$  einander entgegengerichtet sind. Der Zustandspunkt der Regelung kann dann, einmal auf  $g$  angelangt, die Schaltgerade nicht mehr verlassen. Er kann dort nicht in Ruhe

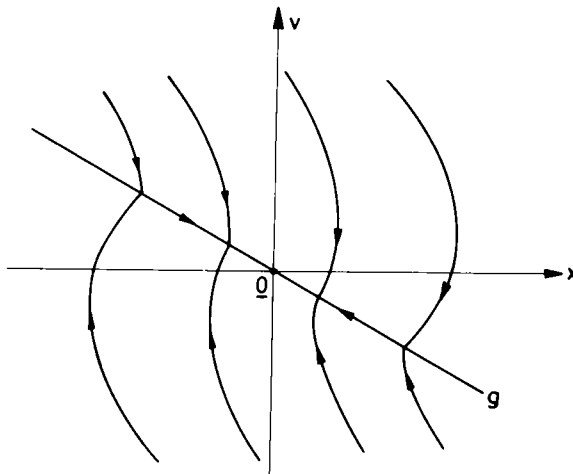


Bild 2/49 Grundgedanke zur Verwendung des Gleitvorganges bei der Strukturumschaltung

bleiben, solange  $v = \dot{x} \neq 0$  ist. Wegen der Lage von  $g$  im 2. und 4. Quadranten strebt  $x$  sowohl für  $v < 0$  als auch für  $v > 0$  mit wachsender Zeit dem Ursprung zu. Die Ruhelage ist somit asymptotisch stabil und bei geeigneter Formung der beiden Trajektorienscharen sogar global asymptotisch stabil.

Die Schaltgerade kann man grundsätzlich beliebig im 2. und 4. Quadranten vorgeben. Sie ist durch die Gleichung  $v = -mx$  gegeben, sodaß also für einen Punkt  $(x, v)$  auf der Schaltgeraden

$$v + mx = 0, \quad m > 0,$$

gilt. Denkt man sich den Punkt  $(x, v)$  bei festgehaltenem  $x$  nach oben verschieben, so wird  $v$  vergrößert. Demgemäß wird dann

$$v + mx > 0.$$

Entsprechend gilt für einen Punkt unterhalb der Schaltgeraden

$$v + mx < 0.$$

Somit ist die Funktion

$$\gamma(x, v) = v + mx \begin{cases} > 0 & \text{oberhalb } g, \\ = 0 & \text{auf } g, \\ < 0 & \text{unterhalb } g. \end{cases} \quad (2.55)$$

Während man Schaltgeraden weitgehend beliebig festlegen kann, gilt dies von den Trajektorienscharen des struktumschaltenden Systems nicht in gleichem Maße. Diese sind vielmehr stark durch die Strecke (samt Stelleinrichtung) geprägt, können allerdings durch die Umschaltung verformt werden. Um hierbei mehr Freizügigkeit zu erlangen, ist es zweckmäßig, eine weitere Umschaltung einzuführen, also eine zweite Schaltgerade zu benutzen. Bereits im letzten Beispiel waren ja in Gestalt der  $x$ - und  $v$ -Achse *zwei* Schaltgeraden verwandt worden. Wir können die zweite Schaltgerade im Prinzip beliebig wählen, begnügen uns aber im Hinblick auf das Folgende, die  $v$ -Achse zu nehmen. Die  $x$ - $v$ -Ebene wird damit in die beiden Sektoren  $S$  (schraffiert in Bild 2/50) und  $\bar{S}$  zerlegt, wobei beide Sektoren als offen angesehen seien, also ohne  $g$  und die  $v$ -Achse genommen werden. Im Sektor  $S$  ist dann entweder  $x < 0$  und  $\gamma(x, v) > 0$  (linker Teil von  $S$ ) oder aber  $x > 0$  und  $\gamma(x, v) < 0$  (rechter Teil von  $S$ ).

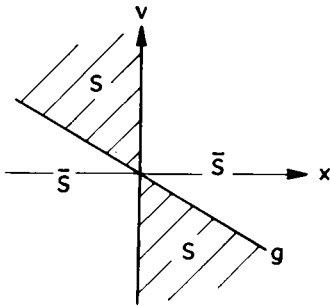


Bild 2/50

Sektorzerlegung der Zustandsebene durch zwei Schaltgeraden (g und v - Achse)

Somit ist der Sektor S durch die Ungleichung

$$x \gamma(x, v) < 0$$

charakterisiert. Für  $\bar{S}$  gilt entsprechend

$$x \gamma(x, v) > 0.$$

Führt man nun die *Schaltvariable*

$$u^* = \text{sgn}[x \gamma(x, v)] = \text{sgn}[x(v + mx)] \quad (2.56)$$

ein, so ist

$$u^* = \begin{cases} -1 & \text{für } (x, v) \text{ aus } S, \\ +1 & \text{für } (x, v) \text{ aus } \bar{S}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Was nun die Formung der Regelungstrajektorien durch Umschaltung angeht, so wird als typisches Beispiel der Regelkreis im Bild 2/51 betrachtet.  $K_R$  sei dabei umschaltbar, werde aber zunächst als konstant, und zwar beliebig ungleich 0, betrachtet. Die Gleichung der Regelung lautet

$$X(s) = \frac{K_S}{s^2 + a_1 s + \alpha} K_R [-X(s)],$$

woraus die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad (2.58)$$

mit

$$a_0 = \alpha + K_R K_S \quad (2.59)$$

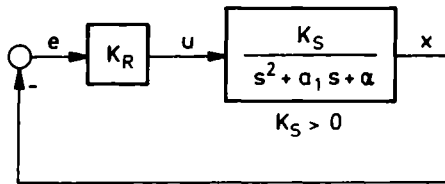


Bild 2/51

Beispiel zur Verwendung des Gleitvorganges bei der Struktumschaltung

folgt. Durch  $K_R$  zu beeinflussen ist allein der Koeffizient  $a_0$ . Über ihn kann dann der Parameter

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0$$

im Bild 2/10 verändert werden. Sieht man vom Spezialfall des Wirbels ab, so kann man also durch Umschaltung von  $K_R$  zwischen dem Trajektorienfeld eines Strudels und eines Sattels bzw. Knotens umschalten. Ob Sattel oder Knoten, hängt gemäß Bild 2/10 vom Vorzeichen des Koeffizienten  $a_0$  ab. Entscheiden wir uns etwa für den Sattel, so ist dessen Trajektorienschar durch Bild 2/7 gegeben, während Bild 2/8 den Strudel veranschaulicht.

Wählt man nun die Schaltgerade  $g$  zwischen der im 2. und 4. Quadranten gelegenen Asymptote  $h_2$  der Satteltrajektorien und der  $x$ -Achse, so erhält man die im Bild 2/52 skizzierte Situation. Während auf der  $v$ -Achse normale Umschaltung stattfindet, herrscht auf der gesamten Geraden  $g$  der Gleitzustand. Die Ruhelage  $\underline{0}$  ist deshalb global asymptotisch stabil. Dabei darf der Strudelpunkt auch instabil sein! Denn selbst wenn die zu ihm gehörenden spiraligen Trajektorien expandieren, werden sie nach weniger als einem Umlauf von der Schaltgeraden  $g$  abgefangen. Auch hier zeigt sich wieder, daß durch die Struktumschaltung eine Regelung ganz neue Eigenschaften erhält. So kann aus zwei instabilen Systemen eine global asymptotisch stabile Regelung gemacht werden.

Es bleibt noch das Schaltgesetz anzugeben, das die geometrische Konfiguration in Bild 2/52 sicherstellt. Die Schaltgerade  $g$  ist durch

$$v = -mx, \quad m > 0,$$

gegeben, die Asymptote  $h_2$  zur Trajektorienschar des Sattelpunktes nach Unterabschnitt 2.2.3 durch

$$v = \lambda_2 x \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \left[ a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right].$$

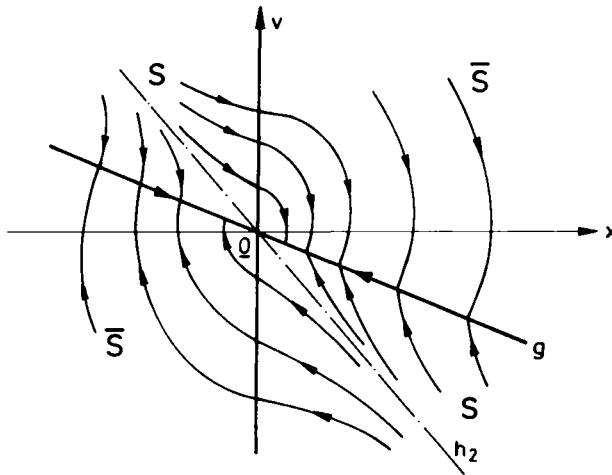


Bild 2/52 Skizze der Regelungstrajektorien zu Bild 2/51 bei Umschaltung zwischen Strudel- und Sattelpunkt

Soll  $g$  gemäß Bild 2/52 zwischen  $h_2$  und der  $x$ -Achse liegen, so muß für  $x > 0$

$$-mx > \lambda_2 x$$

sein, also  $m < -\lambda_2$  oder

$$0 < m < \frac{1}{2} \left[ a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right]. \quad (2.60)$$

Da es sich um die Trajektorienschar eines Sattelpunktes handelt, ist dabei nach Bild 2/10

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0, \quad a_0 < 0. \quad (2.61)$$

Nach (2.59) müssen somit im Sektor  $S$  die Ungleichungen

$$a_1^2 - 4\alpha - 4K_R K_S > 0, \quad \alpha + K_R K_S < 0$$

simultan erfüllt sein. Aus ihnen folgt

$$K_R < \frac{a_1^2 - 4\alpha}{4K_S} = \frac{a_1^2}{4K_S} - \frac{\alpha}{K_S},$$

$$K_R < -\frac{\alpha}{K_S}.$$

Da  $K_S > 0$ , ist die erste dieser Ungleichungen mit Sicherheit erfüllt, wenn die zweite gilt. Somit hat man im Sektor S

$$K_R = K_{R1} < -\frac{\alpha}{K_S} \quad (2.62)$$

zu wählen, damit in diesem Sektor in der Tat die Trajektorienschar eines Sattelpunktes vorliegt.

Im Sektor  $\bar{S}$  hingegen ist die Trajektorienschar eines Strudelpunktes erwünscht. Nach Bild 2/10 muß dann

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0 \quad \text{und} \quad a_1 \neq 0$$

sein. Setzt man letzteres voraus, so muß nach (2.59) die Ungleichung

$$a_1^2 - 4\alpha - 4K_R K_S < 0$$

gelten. Man hat deshalb im Sektor  $\bar{S}$

$$K_R = K_{R2} > \frac{a_1^2 - 4\alpha}{4K_S} = -\frac{\alpha}{K_S} + \frac{a_1^2}{4K_S} \quad (2.63)$$

zu wählen.

Insgesamt gelangt man so zum *Schaltgesetz*

$$K_R = \begin{cases} K_{R1} & \text{für } (x, v) \in S, \\ K_{R2} & \text{für } (x, v) \in \bar{S}, \end{cases} \quad (2.64)$$

wobei  $K_{R1}$  bzw.  $K_{R2}$  der Bedingung (2.62) bzw. (2.63) genügen muß, sonst aber beliebig ist. Mit Hilfe der Schaltvariablen  $u^*$  aus (2.57) kann man für (2.64) schreiben:

$$K_R = \frac{1}{2}(K_{R1} + K_{R2}) + u^* \cdot \frac{1}{2}(K_{R2} - K_{R1}). \quad (2.65)$$

Berücksichtigt man noch die Definition (2.56) der Schaltvariablen, so erhält man das Strukturbild der strukturumschaltenden Regelung im Bild 2/53.



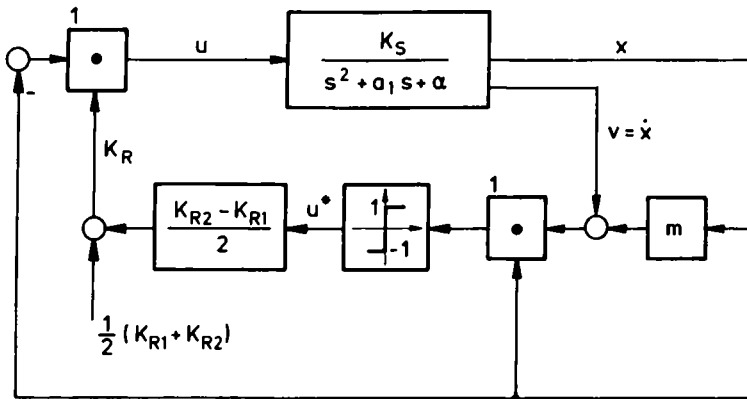


Bild 2/53 Strukturumschaltende Regelung mit Gleitbetrieb

Als *Beispiel* sei die Regelung einer Strecke betrachtet, die durch einen rechts der  $j$ -Achse gelegenen reellen Pol  $p$  monoton instabil ist:

$$G_S(s) = \frac{K_S}{s(s-p)}, \quad K_S > 0.$$

Hier ist  $a_1 = -p$  und  $\alpha = 0$ , also  $a_0 = K_R K_S$ . Man hat daher

$$K_{R1} < 0, \quad K_{R2} > \frac{p^2}{4K_S},$$

$$m < \frac{1}{2} \left[ -p + \sqrt{p^2 - 4K_{R1}K_S} \right] = \frac{1}{2} \left[ -p + \sqrt{p^2 + 4|K_{R1}|K_S} \right]$$

zu wählen. Bild 2/54 zeigt den Rechnerschrift von Gleitvorgängen für  $p = 1$  und  $K_S = 1$ . Dabei wurde

$$K_{R1} = -6, \quad K_{R2} = 6, \quad m = 0,5$$

gewählt.

*Eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft einer strukturumschaltenden Regelung mit Gleitbetrieb besteht in ihrer außerordentlichen Robustheit gegenüber Parameteränderungen der Strecke, mögen diese nun durch Unkenntnis der wahren Streckenparameter oder durch Schwankungen während des Betriebs bedingt sein. Wie man aus der betrachteten, als typisch anzusehenden Konfiguration*

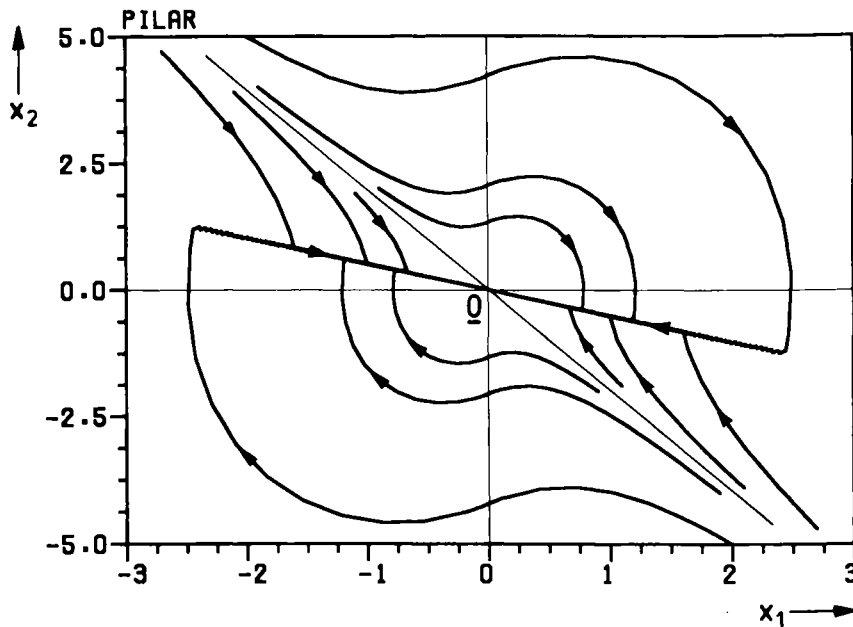


Bild 2/54 Rechnerscrib von Gleitvorgängen einer struktumschaltenden Regelung mit Gleitbetrieb

$$G_S(s) = \frac{K_S}{s(s-p)} \quad \text{mit} \quad K_S = 1, p = 1$$

erkennt, kommt es weder auf die genaue Lage der Schaltgeraden noch auf den Trajektorienverlauf im einzelnen an. Selbst große Parameteränderungen können verkraftet werden. So kommt es bei der zur Konfiguration im Bild 2/52 gehörenden Regelung nicht einmal darauf an, ob der zum Sektor  $\bar{S}$  gehörende Strudelpunkt stabil oder instabil ist, ob also gemäß Bild 2/11 der Koeffizient  $a_1$  der Streckenübertragungsfunktion sein Vorzeichen ändert! Wegen dieser Robustheitseigenschaft wurde die Strukturumschaltung mit Gleitbetrieb ausgiebig untersucht. Hierfür sei auf die Bücher von *S. V. Emeljanov* [32], *U. Itkis* [34] und *V. I. Utkin* [35] hingewiesen.

Ein beträchtlicher *Nachteil des Gleitzustandes* besteht allerdings, wie schon im Unterabschnitt 2.3.1 erwähnt, in der Tatsache, daß die Stellgröße währenddessen mit sehr hoher Frequenz umgeschaltet wird, was eine *starke Beanspruchung der Stelleinrichtung* mit sich bringt. Um diesen Nachteil zu vermeiden, unter Beibehaltung der Robustheit, wurde von *G. Stein* das Schaltgesetz durch

Einschaltung eines Zeitschalters modifiziert und so die Schaltfrequenz herabgesetzt<sup>9)</sup>).

Der im vorhergehenden beschriebene Entwurf strukturumschaltender Regelungen ist in so anschaulicher Weise nur in der Zustandsebene möglich. Will man für Strecken höherer Ordnung strukturumschaltende Regler entwerfen, muß man andere Methoden heranziehen. Wir werden hierauf im nächsten Kapitel zurückkommen.

## 2.4 Optimierung von Regelkreisen in der Zustandsebene

### 2.4.1 Vorbemerkung über Optimierung

Unsere bisherigen Untersuchungen kreisten um das Stabilitätsproblem, hatten es also mit der Frage zu tun, wie man das Stabilitätsverhalten eines nichtlinearen Regelkreises erkennen und möglicherweise verbessern kann. Daneben ist ein anderer Problemkreis für den Regelungstechniker von Wichtigkeit, dessen Ausgangspunkt eine weitergehende Forderung als die nach Stabilität ist, nämlich das Bestreben, die Regelung zu „optimieren“. Von *Optimierung* kann man dann sprechen, wenn dem System ein *Gütemaß*, also eine Maßzahl für die Qualität des dynamischen Verhaltens, zugeordnet ist und durch geeignete Wahl der Regeleinrichtung unter den möglichen Werten des Gütemaßes der beste Wert verwirklicht wird.

Die Behandlung des Optimierungsproblems erfordert eine eigene mathematische Methodik und wird in einem anderen Buch der Reihe „Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik“ dargestellt [74]. Um aber zu zeigen, wie anschaulich auch die Lösung *dieses* Problems für Systeme 2. Ordnung in der Zustandsebene erfolgen kann, soll nachstehend der einfachste Fall des zeitoptimalen Entwurfs betrachtet werden.

Bei einer großen Klasse von Optimierungsproblemen besteht die Aufgabe darin, die Strecke aus irgendeinem Anfangszustand  $\underline{x}_0$  in einen gewünschten Ruhezustand

---

<sup>9)</sup> G. Stein: Anwendung gleitzustandsähnlicher Arbeitsregimes in Regelsystemen mit veränderlicher Struktur zum Entwurf parameterunempfindlicher Regler. Dissertation, TH Leipzig, 1984.

G. Stein: Gestaltung eines reduzierten Gleitzustandes in Regelsystemen mit veränderlicher Struktur. messen, steuern, regeln 29 (1986), S.18–20.

Siehe auch I. Rennert: Entwurf von strukturumschaltenden Regelsystemen bei Arbeitsweise in einem gleitzustandsähnlichen Regime unter Verwendung von quadratischen Ljapunow-Funktionen. Dissertation, TH Leipzig, 1988.

stand zu versetzen derart, daß das Gütemaß  $J$  bei diesem Übergang minimal wird, und zwar durch geeignete Wahl der Steuerfunktion  $u(t)$ .

Die optimale Steuerfunktion, welche  $J$  zum Minimum macht, wird natürlich vom Anfangszustand  $\underline{x}_0$  abhängen:

$$u = U(t, \underline{x}_0) . \quad (2.66)$$

Hat man sie gefunden, so kann man – zumindest grundsätzlich – aus den Zustandsdifferentialgleichungen der Strecke die zugehörige optimale Trajektorie berechnen:

$$\underline{x} = \underline{X}(t, \underline{x}_0) . \quad (2.67)$$

Eliminiert man aus den letzten Gleichungen den Anfangszustand  $\underline{x}_0$ , so erhält man die optimale Steuerfunktion  $u$  in Abhängigkeit vom jeweiligen Zustand  $\underline{x}(t)$  der Strecke:

$$u = k(\underline{x}, t) . \quad (2.68)$$

Dies ist das *optimale Regelungsgesetz*. Es wird im allgemeinen die Form einer mehr oder weniger komplizierten nichtlinearen Beziehung aufweisen.

Liegt beispielsweise ein System 2. Ordnung vor und hat man die Regelgröße  $x$  und ihre Ableitung  $\dot{x}$  als Zustandsvariablen eingeführt, so lauten die Gleichungen (2.66) und (2.67)

$$u = U(t, x_0, \dot{x}_0) ,$$

$$x = X_1(t, x_0, \dot{x}_0) ,$$

$$\dot{x} = X_2(t, x_0, \dot{x}_0) .$$

Löst man die letzten beiden Gleichungen nach  $x_0$  und  $\dot{x}_0$  auf, so erhält man die Funktionen

$$x_0 = f_1(t, x, \dot{x}) ,$$

$$\dot{x}_0 = f_2(t, x, \dot{x}) .$$

Setzt man sie in die Steuerfunktion ein, so wird

$$u = U \left[ t, f_1(t, x, \dot{x}), f_2(t, x, \dot{x}) \right] = k(x, \dot{x}, t) .$$

Die hier skizzierte Herleitung des optimalen Regelungsgesetzes aus der optimalen Steuerfunktion und der optimalen Trajektorie hat nur grundsätzliche Bedeutung. Wenn es möglich ist, wird man versuchen, das optimale Regelungsgesetz zu erhalten, ohne erst die mühsame Bestimmung von optimaler Steuerfunktion und Trajektorie und den darauf notwendigen Eliminationsprozeß explizit durchzuführen. Dies ist mindestens für gewisse Typen von Regelstrecken auf Grund allgemeiner Sätze möglich.

Die optimale Regelung hat die in Bild 2/55 dargestellte grundsätzliche Struktur. Wie man sieht, handelt es sich auch bei ihr wie bei der konventionellen Regelschleife um eine Rückführung. Aber es wird nicht nur die Regelgröße zurückgeführt, sondern, wie durch den Doppelpfeil angedeutet wird, der gesamte Zustandsvektor der Strecke.

#### 2.4.2 Zeitoptimale Regelung

Bei der Forderung nach *Zeitoptimierung*, handelt es sich um eine häufig auftretende Problemstellung: Ein System, daß sich, z.B. aufgrund vorangegangener Störungen, zum Zeitpunkt  $t = 0$  in irgendeinem Anfangszustand  $\underline{x}_0$  befindet, soll in der kürzestmöglichen Zeit in einen gewünschten Ruhezustand versetzt werden, als den man sich stets den Ursprung  $\underline{0}$  des Zustandsraumes vorstellen kann. Es liegt auf der Hand, daß diese Aufgabenstellung bei der Lenkung bewegter Objekte, also in der Luft- und Raumfahrt, auftreten wird, ebenso aber auch im Bereich der Anlagenregelung, wie bei der Steuerung von Personenaufzügen, Förderanlagen, Walzantrieben u. dgl..

Wie kann man nun die Steuerfunktion  $u(t)$  finden, welche den schnellstmöglichen Übergang bewirkt? Die Antwort scheint auf den ersten Blick denkbar

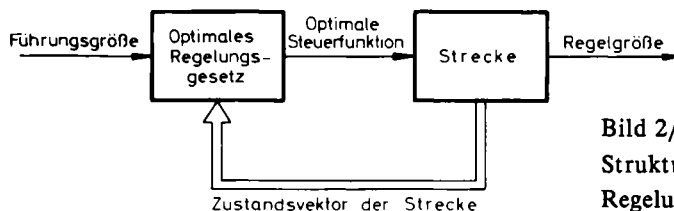


Bild 2/55  
Struktur einer optimalen  
Regelung

einfach zu sein: Wenn man nur hinreichend hohe Steuerimpulse auf das System schaltet, wird es schon in beliebig kurzer Zeit aus seinem Anfangszustand herausgerissen und in den gewünschten Endzustand befördert werden. Diese triviale Lösung scheitert jedoch an der Tatsache, daß die Stellfunktion  $u(t)$  beim Durchlaufen der Stelleinrichtung notwendigerweise begrenzt wird, sei es durch mechanische Anschläge, durch elektrische oder magnetische Sättigungserscheinungen oder durch irgendeinen anderen Effekt. Das Ergebnis ist jedenfalls, daß selbst dann, wenn für  $u(t)$  beliebig hohe Impulse aufgeschaltet werden, nur Impulse bis zu einem bestimmten Maximalbetrag zur Wirkung kommen.

Man muß infolgedessen davon ausgehen, daß  $u(t)$  beschränkt ist, also

$$|u(t)| \leq M \quad (2.69)$$

gilt, wobei  $M$  eine positive Zahl darstellt, die durch die Stelleinrichtung bestimmt wird.

Wie findet man nun die optimale Steuerfunktion unter der zusätzlichen Bedingung (2.69)? Dazu machen wir ein einfaches Gedankenexperiment. Ein Kraftwagen soll auf einer geraden Strecke aus einem gegebenen Anfangspunkt in einen gewünschten Endpunkt in möglichst kurzer Zeit gebracht werden. Dann liegt doch das folgende grundsätzliche Verhalten nahe: Man beschleunigt zunächst so stark wie möglich und bremst von einem gewissen Zeitpunkt an möglichst stark ab, wobei der Umschaltzeitpunkt gerade so gewählt sein muß, daß man mit der Geschwindigkeit Null ins Ziel ankommt, mithin weder vor dem Ziel liegenbleibt, noch über das Ziel hinausschießt. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß die optimale Steuerfunktion  $u(t)$  für ein zeitoptimales System stückweise konstant ist, wobei sie abwechselnd am oberen und unteren Anschlag liegt.

Was hier anschaulich plausibel gemacht wurde, läßt sich in der Tat streng beweisen und zwar für Systeme  $n$ -ter Ordnung. Es gilt nämlich der folgende Satz, der 1953 von *A. A. Feldbaum* allgemein bewiesen wurde und den wir deshalb als *Satz von Feldbaum* bezeichnen wollen:

*Besitzt ein rationales Übertragungsglied  $n$ -ter Ordnung ausschließlich reelle Pole, so ist seine zeitoptimale Steuerfunktion stückweise konstant, sie liegt abwechselnd am oberen und unteren Anschlag und weist höchstens  $n-1$  Umschaltungen auf.* (2.70)

Für den Beweis sei auf [74] verwiesen, wo er im Rahmen des Pontrjaginschen Maximumprinzips erbracht wird.

Die letzte Aussage des Feldbaumschen Satzes ist bemerkenswert: Ganz gleich, wo der Anfangspunkt im Zustandsraum liegt, wie weit also der Anfangszustand vom gewünschten Endzustand entfernt ist, höchstens  $n-1$  Umschaltungen genügen, um den Zustandspunkt dorthin zu überführen. Man hätte statt dessen erwartet, daß die Maximalzahl der erforderlichen Umschaltungen von der Lage des Anfangspunktes abhängt, und zwar im allgemeinen mit dem Abstand vom Ursprung wächst. Das wird in der Tat so, wenn das rationale Übertragungsglied nichtreelle Pole aufweist. Dann muß zwar die optimale Steuerfunktion noch stückweise konstant sein, und zwar abwechselnd am oberen und unteren Anschlag liegen, aber die Maximalzahl der Umschaltungen ist nicht mehr durch die Ordnung des Systems begrenzt. Wir wollen uns hier auf Strecken mit reellen Polen beschränken, bei denen wir uns also auf den Satz von Feldbaum stützen können.

Seine Anwendung soll an einem typischen Beispiel gezeigt werden, nämlich dem im Bild 2/56 dargestellten Regelkreis. Für  $t < 0$  habe die Führungsgröße den konstanten Wert  $W_0$ . Im Zeitpunkt  $t = 0$  werde er sprunghaft auf  $W_1$  verändert, wie dies im Bild 2/57 skizziert ist. Die Regelgröße  $x(t)$  soll den neuen Führungswert so schnell wie möglich annehmen. Dabei ist die Beschränkung  $|u(t)| \leq M$  der Stellgröße zu berücksichtigen.

Das Problem sieht hier zunächst etwas anders aus, als die im vorigen Unterabschnitt umrissene allgemeine Optimierungsaufgabe, insofern das System nicht

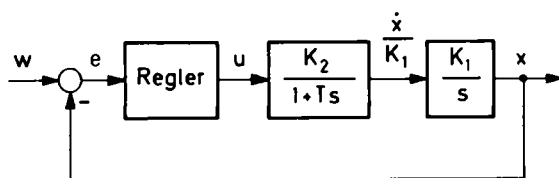


Bild 2/56 Regelkreis, der zeitoptimal entworfen werden soll

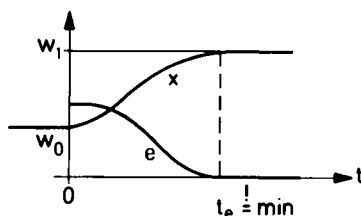


Bild 2/57

Forderungen an den Regelkreis  
von Bild 2/56

aus einem gegebenen Anfangszustand in einen gewünschten Endzustand gebracht werden soll, sondern eine Führungsgrößenänderung zu berücksichtigen ist. Wie sogleich gezeigt wird, ist aber bei einer stückweise konstanten Führungsgröße die letztgenannte Aufgabe als Spezialfall in der ersten enthalten.

Wir wählen die Regeldifferenz  $e$  und ihre Ableitung  $\dot{v} = \dot{e}$  als Zustandsvariablen. Dann ist zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$

$$e(0) = W_1 - x(0) = W_1 - W_0,$$

da im ersten Augenblick  $x$  noch auf dem bisherigen Wert  $W_0$  verharret. Entsprechend ist

$$\dot{e}(0) = 0.$$

Somit ist der Anfangszustand  $\underline{x}_0$  ein Punkt auf der  $x_1$ -Achse. Was den gewünschten Endzustand betrifft, so soll das System nach dem zeitoptimalen Übergangsvorgang in Ruhe sein:  $e = 0$ ,  $\dot{e} = 0$ . Der gewünschte Endzustand ist daher  $\underline{x}_e = \underline{0}$ .

Damit ist unsere jetzige Aufgabe auf die im vorigen Abschnitt formulierte allgemeine Problemstellung zurückgeführt, das System aus einem gegebenen Anfangszustand in einen gewünschten Endzustand zu bewegen. Das soll im vorliegenden Fall in der kürzestmöglichen Zeit geschehen.

Es gilt

$$E(s) = W(s) - \frac{K_1 K_2}{s(1 + Ts)} U(s),$$

also

$$(Ts^2 + s)[E(s) - W(s)] = -K_1 K_2 U(s).$$

Für den Zeitbereich folgt daraus

$$T\ddot{e} + \dot{e} - T\ddot{w} - \dot{w} = -K_1 K_2 u.$$

Da in dem interessierenden Bereich  $t > 0$  die Führungsgröße  $w$  konstant ist, gilt die Differentialgleichung

$$T\ddot{e} + \dot{e} = -K_1 K_2 u.$$



Nach dem Feldbaumschen Satz, der hier gewiß anwendbar ist, weil die Strecke die reellen Pole  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -1/T$  besitzt, kann die zeitoptimale Steuerfunktion  $u(t)$  nur die beiden Werte  $M$  und  $-M$  annehmen: Aus der letzten Differentialgleichung wird so

$$T\ddot{e} + \dot{e} = \begin{cases} -K & \text{für } u = M \\ K & \text{für } u = -M \end{cases}, \quad K = K_1 K_2 M.$$

Damit erhält man wiederum die Trajektorien aus Bild 2/5, wobei die durchgezogenen Kurven zu  $u = M$  und die gestrichelten Kurven zu  $u = -M$  gehören. Bild 2/58 zeigt nochmals diese Trajektorien.

Wir gehen von einem beliebigen Anfangszustand aus, etwa dem Punkt  $\underline{x}_0$  im Bild 2/58. Da es sich bei der Strecke um ein System 2. Ordnung handelt, darf die optimale Steuerfunktion nach dem zweiten Teil des Feldbaumschen Satzes höchstens eine Umschaltung aufweisen. Das bedeutet auf die Zustandsebene übertragen: Der Zustandspunkt darf höchstens einen Übergang von der einen der beiden Trajektorienscharen auf die andere benötigen, um von  $\underline{x}_0$  in den Ursprung zu gelangen. Aus dem Bild 2/58 kann man unmittelbar sehen, daß dies auf genau eine Weise möglich ist:  $\underline{x}$  muß sich zunächst auf der durch  $\underline{x}_0$  gehenden Trajektorie der zu  $u = M$  gehörenden Schar bewegen, und genau dann, wenn er auf die durch  $\underline{0}$  gehende Trajektorie der anderen Schar trifft, auf diese umsteigen. Das ist hier im Punkt S der Fall.

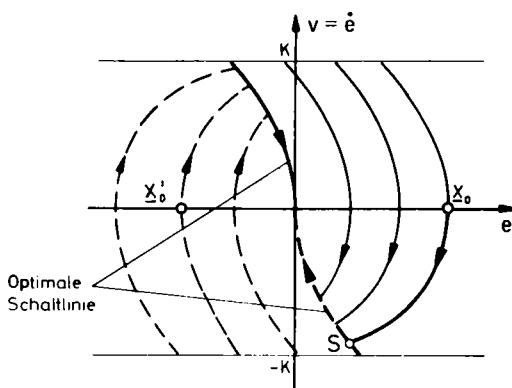


Bild 2/58 Bestimmung der optimalen Schaltlinie zur Regelung von Bild 2/56

————  $e = -Tv + KT \ln(K + v) + C, u = M$

-----  $e = -Tv - KT \ln(K - v) + C, u = -M$

Liegt der Anfangspunkt im linken Teil der Zustandsebene, wie etwa der Punkt  $\underline{x}'_0$ , so hat seine Bewegung zunächst auf der durch  $\underline{x}'_0$  gehenden Trajektorie zu  $u = -M$  zu erfolgen. Wenn er auf die durch  $\underline{0}$  gehende Trajektorie der Schar zu  $u = M$  trifft, muß er sich auf ihr bis zum Ursprung bewegen.

In dem speziellen Fall, daß der Anfangspunkt bereits auf einer der beiden durch Null gehenden Trajektorien liegt, ist keine Umschaltung mehr erforderlich.

Damit ist die *optimale Schaltlinie* gefunden, also diejenige Kurve der Zustandsebene, in welcher der Zustandspunkt umgesteuert werden muß, um in der kürzestmöglichen Zeit von irgendeinem Anfangspunkt zum Ursprung zu gelangen. Sie setzt sich aus zwei Stücken zusammen. Unterhalb der  $e$ -Achse, also für  $v \leq 0$ , besteht sie aus der durch  $\underline{0}$  gehenden Trajektorie der zu  $u = -M$  gehörenden Schar. Um deren Scharparameter  $C$  zu bestimmen, setzt man in der Gleichung von Bild 2/58  $e = 0$  und  $v = 0$ . Das führt zu  $C = KT \ln K$ . Damit wird die Gleichung der gestrichelten Trajektorie durch  $\underline{0}$

$$e = -Tv - KT \ln(K - v) + KT \ln K$$

oder

$$e = -Tv - KT \ln\left(1 - \frac{v}{K}\right), v \leq 0. \quad (2.71)$$

Für  $v \geq 0$  besteht die optimale Schaltlinie aus der durch  $\underline{0}$  gehenden Trajektorie zu  $u = M$ . Ganz entsprechend wie eben erhält man für ihre Gleichung

$$e = -Tv + KT \ln\left(1 + \frac{v}{K}\right), v \geq 0. \quad (2.72)$$

Die beiden Gleichungen (2.71) und (2.72) zusammen bestimmen also die optimale Schaltlinie. Man kann sie zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen, wenn man beachtet, daß das Vorzeichen des Logarithmus gleich  $\operatorname{sgn} v$  ist und innerhalb des Logarithmus in beiden Gleichungen  $|v|$  steht. Schreibt man nun wieder  $v = \dot{e}$ , so erhält man als *Gleichung der optimalen Schaltlinie*

$$e = -T\dot{e} + KT \ln\left[1 + \frac{|\dot{e}|}{K}\right] \operatorname{sgn} \dot{e} = S(\dot{e}). \quad (2.73)$$

Es handelt sich also um eine nichtlineare Kennlinie, deren Gestalt man aus dem Bild 2/58 ansehen kann. Sie ist in Bild 2/59 gesondert dargestellt. Aus (2.71) sieht man, daß sie für  $v = \dot{e} = -K$  den Wert

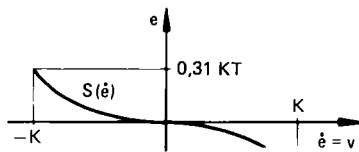


Bild 2/59

Die optimale Schaltlinie zur Regelung von Bild 2/56

$$e = KT - KT \ln 2 = KT(1 - \ln 2) \approx 0.31 KT$$

hat.

Liegt der Zustandspunkt  $(e, \dot{e})$  der Strecke rechts von der Schaltlinie, ist also  $e > S(\dot{e})$ , so muß  $u = M$  aufgeschaltet werden. Ist hingegen  $e < S(\dot{e})$ , so hat  $u = -M$  zu erfolgen. Es muß somit gelten:

$$u = \begin{cases} M & \text{für } e - S(\dot{e}) > 0, \\ -M & \text{für } e - S(\dot{e}) < 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Signum-Funktion kann man hieraus einen einzigen Formelausdruck machen:

$$u = M \operatorname{sgn}[e - S(\dot{e})] = k(e, \dot{e}). \quad (2.74)$$

Damit hat man das *optimale Regelungsgesetz* für das vorliegende Problem gefunden. Wie man sieht, ist es eine recht komplizierte nichtlineare Funktion von  $e$  und  $\dot{e}$ , hängt aber nicht explizit von der Zeit  $t$  ab. Eine Regelung, die so entworfen ist, gelangt aus irgendeinem Anfangszustand in der kürzestmöglichen Zeit, die unter der Beschränkung  $|u| \leq M$  überhaupt erreichbar ist, in den Endzustand  $\underline{0}$ .

Wie kann man das optimale Regelungsgesetz nun gerätetechnisch realisieren? Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Nach Differentiation von  $e$  entsprechend (2.74). Bild 2/60 zeigt die so entstehende Struktur. Darin ist die Signum-Funktion durch ein Zweipunktglied verwirklicht, während die optimale Schaltlinie  $S(\dot{e})$  durch einen Funktionsgeber erzeugt werden kann.

Nachteilig bei dieser Art der Realisierung ist die Differentiation der Regeldifferenz, die bei Vorhandensein einer zu großen Störawelligkeit nicht mehr durchführbar ist.

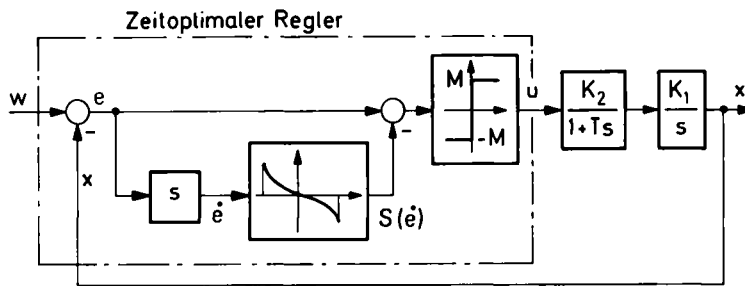


Bild 2/60 Zeitoptimale Regelung zum Bild 2/56: Realisierung des Reglers durch eine Parallelschaltung

b) Sie kann vermieden werden, wenn man das optimale Regelungsgesetz umformt. Da für  $t > 0$   $w$  konstant ist, folgt aus  $e = w - x : \dot{e} = -\dot{x}$ . Damit wird aus (2.74)

$$u = M \operatorname{sgn}[e - S(-\dot{x})] .$$

Weil  $S(\dot{e})$  eine ungerade Funktion ist, folgt daraus weiter

$$u = M \operatorname{sgn}[e + S(\dot{x})] . \quad (2.75)$$

Die so entstehende Regelungsstruktur ist im Bild 2/61 wiedergegeben.

Eine Differentiation wird vermieden. Dafür ist eine zusätzliche Meßeinrichtung erforderlich, um die Größe  $\dot{x}/K_1$  zu erfassen.

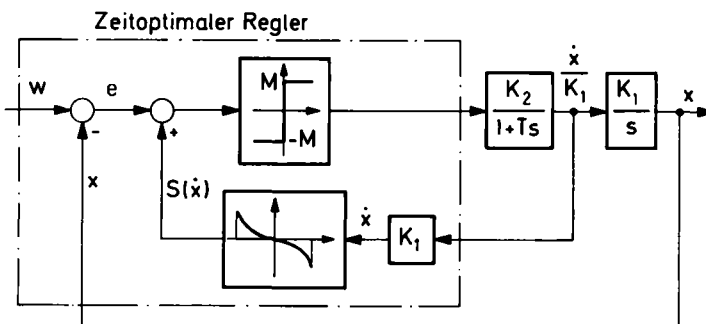


Bild 2/61 Andere Realisierung des zeitoptimalen Reglers von Bild 2/56: Zusätzliche Rückführung

### 2.4.3 Suboptimale Regelung

Regelungen, die nach einem Optimierungsprinzip entworfen wurden, sind nicht zu übertreffen, was den Optimierungsgesichtspunkt anbelangt. In anderer Hinsicht können sie aber Nachteile aufweisen, die so groß sind, daß man lieber von der streng optimalen Lösung etwas abweicht, um diese Nachteile zu vermeiden. Man gelangt dann zu *suboptimalen Regelungen*.

Am letzten Beispiel soll nun im einzelnen gezeigt werden, aus welchen Gründen und in welcher Weise man von der streng optimalen Lösung zu einem suboptimalen Verfahren übergehen kann. Da ist zunächst einmal der komplizierte Aufbau der Schaltfunktion, der als unangenehm empfunden werden kann. Er zwingt zu einem gewissen Realisierungsaufwand, welcher über den Einsatz eines konventionellen Reglers hinausgeht. Dieser Umstand wird vor allem dann stören, wenn man vermutet, daß ein mit geringeren Mitteln arbeitender Regler auch nicht viel schlechter ist als die streng optimale Lösung. Um diesem Übelstand abzuhelpen, liegt nichts näher, als die im Bild 2/59 angegebene Schaltlinie zu linearisieren. Hierzu legt man einfach durch ihre beiden Endpunkte eine Gerade, die dann wegen der Symmetrie der Schaltfunktion zum Ursprung auch durch 0 hindurchgeht. Ihre Gleichung ist demgemäß

$$e = \frac{0,31KT}{-K} \dot{e} = -0,31 T \dot{e}.$$

Man nimmt also jetzt die Approximation

$$S(\dot{e}) \approx -0,31 T \dot{e}$$

vor. Aus dem optimalen Regelungsgesetz (2.74) wird damit das *suboptimale Regelungsgesetz*

$$u = M \operatorname{sgn}(e + 0,31 T \dot{e}) \quad (2.76)$$

oder

$$u = M \operatorname{sgn}(e - 0,31 T \dot{x}). \quad (2.77)$$

Die Realisierung von (2.76) sieht man in Bild 2/62, diejenige von (2.77) im Bild 2/63. Was die erstere betrifft, so ist die Eingangsgröße der Signum-Funktion (des Zweipunktgliedes)  $e + 0,31 T \dot{e}$ , also im komplexen Bereich:  $(1 + 0,31 Ts)E(s)$ . Sie stellt daher die Ausgangsgröße eines idealen PD-Reglers dar,

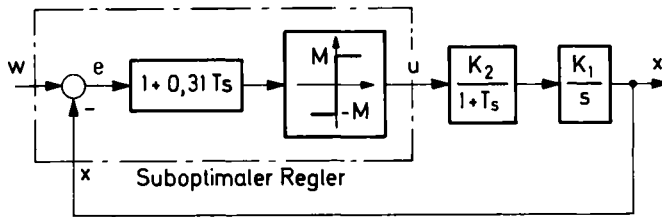


Bild 2/62 Suboptimale Regelung zu Bild 2/60 infolge Linearisierung der Schaltlinie

der von der Regeldifferenz angesteuert wird. Die Koeffizienten sind dabei aber in anderer Weise als beim konventionellen Einsatz des PD-Reglers eingestellt, wo man seine Zählerzeitkonstante häufig gleich der größten Streckenzeitkonstanten, hier also gleich  $T$ , wählen würde.

Was den dynamischen Effekt der Linearisierung der Schaltlinie betrifft, so muß das suboptimale System natürlich langsamer werden gegenüber der streng optimalen Lösung. Das kommt vor allem dadurch zustande, daß die Schaltlinie jetzt nicht mehr der Form der Trajektorien angepasst ist und infolgedessen ein *Gleitvorgang* eintritt, von der Art, wie er im Unterabschnitt 2.3.1 beschrieben wurde. Das Bild 2/64 bringt einen Vergleich zwischen der streng optimalen Regelung nach Bild 2/61 und der suboptimalen Regelung nach Bild 2/63, wobei alle Parameter gleich 1 gesetzt sind. Es sind die Funktionen  $u(t)$ ,  $x(t)$  und  $\dot{x}(t)$  dargestellt, die sich für  $W_1 = 1$ ,  $W_2 = 0$  ergeben. Wie man sieht, sind die Unterschiede nicht sehr groß, und das gilt auch für andere Anfangsbedingungen. Sofern es nicht auf äußerste Zeitersparnis ankommt, wird man daher die suboptimale Lösung gut verwenden können. Das gilt um so mehr, wenn man bedenkt, daß infolge der nie ganz exakten Kenntnis der Strecke, der Vernachlässigungen,

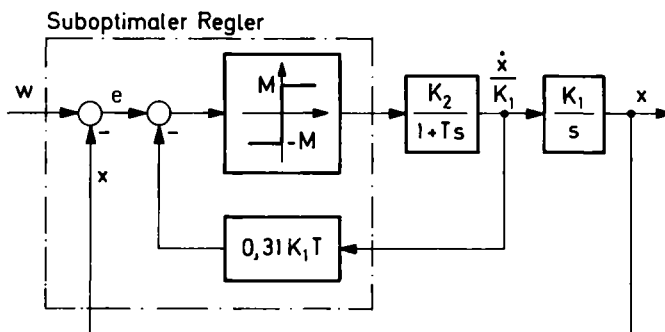


Bild 2/63 Suboptimale Regelung zu Bild 2/61 infolge Linearisierung der Schaltlinie

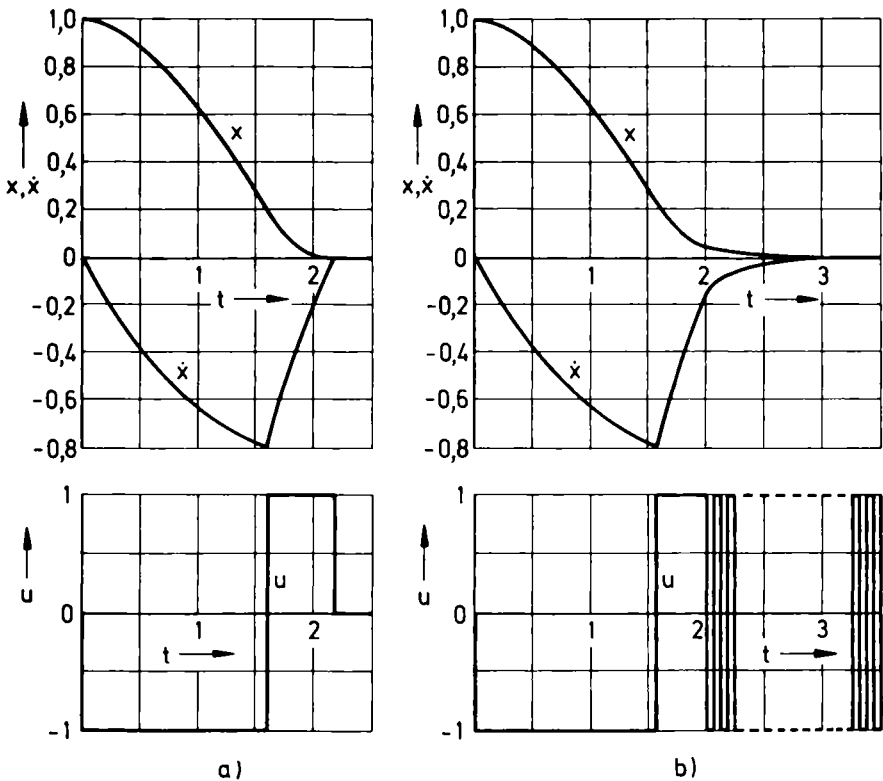


Bild 2/64 Vergleich zwischen der zeitoptimalen (a) und der suboptimalen (b) Regelung von Bild 2/61 und 2/63

die man vorgenommen hat, und dergleichen mehr eine wirklich exakte Optimierung des realen Systems doch nicht möglich ist.

Noch in einer ganz anderen Hinsicht kann die streng optimale Lösung Bedenken hervorrufen. Das im Regler enthaltene Zweipunktglied reagiert auf die geringste Abweichung seiner Eingangsgröße von Null mit dem Vollausschlag  $+M$  oder  $-M$ . Die in jedem System vorhandene Störwelligkeit, die an sich belanglos ist, führt so zu einer fortwährenden Tätigkeit des Reglers, die unnötig ist und nur die Stelleinrichtung strapaziert.

Um dies zu vermeiden, kann man zu einer anderen suboptimalen Lösung als der eben beschriebenen übergehen, indem man in das Zweipunktglied eine Unempfindlichkeitszone einschaltet und es so zu einem Dreipunktglied umgestaltet. Die Breite  $2a$  der Unempfindlichkeitszone ist dabei nach Maßgabe der vorhandenen Störwelligkeit zu wählen. Erst dann, wenn die Eingangsgröße des Dreipunktgliedes diese Zone überschreitet, wird die Regelung in Tätigkeit gesetzt,

während sonst  $u = 0$  ist. Das *suboptimale Regelungsgesetz* lautet hier gemäß (2.74)

$$u = \begin{cases} -M & \text{für } e - S(\dot{e}) < -a, \\ 0 & \text{für } -a < e - S(\dot{e}) < a, \\ M & \text{für } e - S(\dot{e}) > a. \end{cases}$$

Die Zustandsebene zerfällt hier also in drei Bereiche, die durch die *beiden Schaltlinien*

$$e = S(\dot{e}) - a, \quad e = S(\dot{e}) + a$$

getrennt werden. Sie sind durch Parallelverschiebung der ursprünglichen Schaltlinie in  $e$ -Richtung um das Stück  $-a$  bzw.  $+a$  entstanden. Im Bild 2/65 ist diese Konfiguration dargestellt. Für den rechten und linken Bereich gilt unverändert die Differentialgleichung

$$T\ddot{e} + \dot{e} = \pm K.$$

Hier treten also die schon mehrfach betrachteten logarithmischen Trajektorien auf. Im mittleren Bereich hingegen ist

$$T\ddot{e} + \dot{e} = 0.$$

Die zugehörigen Trajektorien sind nach Bild 2/3 Geradenstücke, die auf der  $e$ -Achse enden. Die Trajektorien des geschlossenen Kreises setzen sich aus den logarithmischen Kurven und diesen Geradenstücken zusammen, wie die Kurven im Bild 2/65 zeigen. Je größer  $T$  ist, um so flacher liegen die Geradenstücke, um so länger wird der Übergangsvorgang.

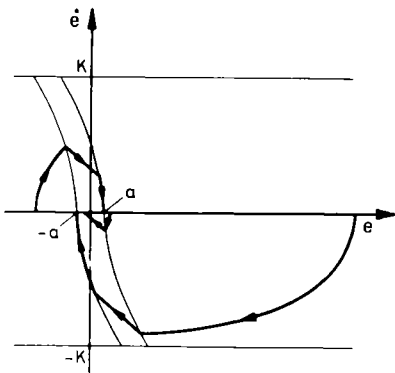


Bild 2/65

Suboptimale Regelung zu Bild 2/56  
durch Einführung eines Dreipunktgliedes



Man kann schließlich die beiden suboptimalen Maßnahmen kombinieren, also sowohl ein Dreipunktglied einführen als auch die Schaltlinie linearisieren. Die Zustandsebene zerfällt dann in drei Bereiche, die durch parallele Geraden getrennt sind und in denen  $u = M$ ,  $0$  und  $-M$  gilt. Auf eine eingehendere Betrachtung können wir verzichten, da keine neuen Effekte auftreten.

## 2.5 Behandlung von Systemen höherer als 2. Ordnung in der Zustandsebene

In der Zustandsebene lassen sich nur Systeme 2. Ordnung darstellen. Will man in ihr ein System höherer Ordnung untersuchen, so ist es erforderlich, es so umzuformen, daß es näherungsweise durch ein System 2. Ordnung beschrieben wird. Wenn es sich um die Regelung des Systems handelt, so gibt es hierfür im wesentlichen zwei verschiedene Möglichkeiten.

(I) Man reduziert die Ordnung der Strecke (einschließlich Stelleinrichtung). Das heißt: Man approximiert die Strecke durch ein System 2. Ordnung, zu dem auch eine Totzeit hinzutreten darf. Eine einfache Möglichkeit besteht z.B. darin, die Stelleinrichtung durch ein I-Glied zu beschreiben, während die Strecke selbst durch ein Verzögerungsglied 1. Ordnung ( $P-T_1$ -Glied,  $VZ_1$ -Glied) und ein in Reihe gelegenes Totzeitglied angenähert wird. Wie im Unterabschnitt 2.3.4 gezeigt wurde, kann die Untersuchung solcher Systeme in der Zustandsebene durchgeführt werden.

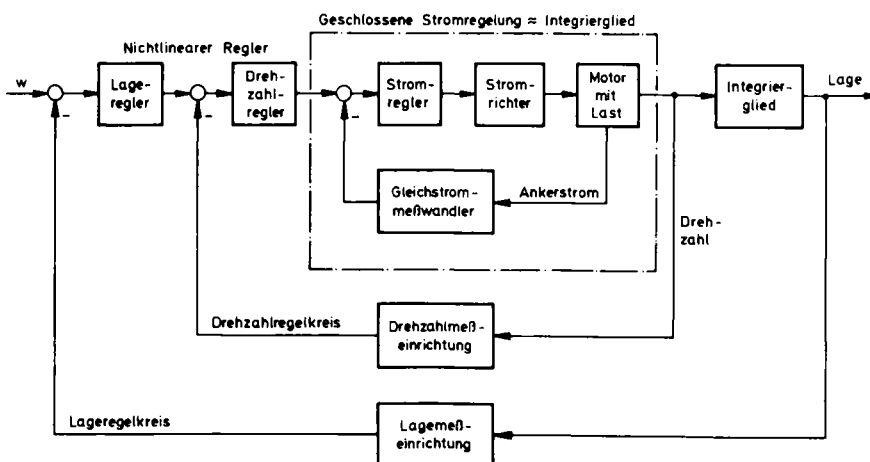
Es ist klar, daß dieses Verfahren der *Ordnungsreduktion* seine Grenzen hat, da es häufig nicht möglich sein wird, ein System höherer Ordnung mit genügender Genauigkeit durch ein System 2. Ordnung (zuzüglich Totzeit) zu approximieren.

(II) Für den Regelungstechniker bedeutsamer ist eine ganz andere Möglichkeit. Vielfach wird eine Regelung mit unterlagerten Regelkreisen (inneren Schleifen) ausgerüstet, um besseres dynamisches Verhalten zu erzielen oder eine gute Störausregelung zu erreichen. Man spricht dann von *Kaskadenregelung*. Der Effekt dieser Maßnahme besteht häufig darin, daß eine geschlossene innere Schleife mit guter Näherung durch ein einfaches Übertragungsglied approximiert werden kann. Die Ordnung des so resultierenden Systems, also der bereits mit einer inneren Schleife versehenen Strecke, kann so möglicherweise auf 2 gesenkt werden.

Klassisches *Beispiel* hierfür ist eine *Lageregelung*, wie sie als Blockschema im Bild 2/66 wiedergegeben ist. Das Objekt, dessen Lage geregelt wird, etwa ein Personenaufzug oder ein Förderkorb, werde von einem Gleichstrommotor angetrieben, dessen Ankerstrom von einem Stromrichter geliefert wird. Der Ankerstrom des Motors wird durch einen Gleichstrommeßwandler erfaßt und über einen Regler auf den Stromrichter zurückgeführt. Damit hat man als innersten Regelkreis die Ankerstromregelung. Legt man den Stromregler in üblicher Weise aus, so kann der geschlossene Stromregelkreis sehr schnell gemacht werden. Man darf ihn daher mit guter Näherung als Proportionalglied ansehen. Die so entstandene Lageregelstrecke besteht dann – abgesehen von P-Gliedern – nur noch aus zwei I-Gliedern. Das erste beschreibt den Übergang vom Ankerstrom bzw. dem zu ihm proportionalen Antriebsmoment des Motors zur Drehzahl, das zweite den Übergang von der Drehzahl zur Lage, also von der Winkelgeschwindigkeit zum Winkel bzw. zur Verschiebung. Insgesamt hat man ein System 2. Ordnung, bei dessen zeitoptimaler Regelung man von einer Beschränkung des Ankerstroms auszugehen hat.

Man hat damit genau die Situation, wie sie beim Beispiel aus Bild 2/56 zu Grunde gelegt wurde und kann den Entwurf ganz entsprechend durchführen. Daß die Strecke hier aus zwei I-Gliedern statt aus P-T<sub>1</sub>- und I-Glied besteht, vereinfacht die Rechnungen noch etwas.

Unter Umständen kann man die in (I) und (II) beschriebene Vorgehensweise kombinieren. Das gilt für ein Beispiel, von dem nur Ausgangspunkt und Ergebnis gebracht seien, da die technische Problemstellung nicht mehr aktuell ist, an dem



**Bild 2/66    Blockschema einer Lageregelung**

aber schön zu sehen ist, wie durch die Approximation infolge Erniedrigung der Ordnung ein suboptimales Verhalten zustande kommt. Es wird der *Walzprozeß einer Blockstraße* betrachtet. Der glühende Stahlblock wird zwischen zwei sich drehende Walzen geschoben, deren Spalt nach jedem Durchgang des Blockes verstellt wird. Es sind zwei Antriebe zu unterscheiden: Der Hauptantrieb, der die Walzen dreht, und der Antrieb zur Verstellung des Spaltes durch Heben und Senken der Oberwalze (während die Unterwalze fest gelagert ist). Im folgenden geht es um die Regelung der Oberwalzenanstellung. Im Hinblick auf die Ergiebigkeit des Walzprozesses soll sie zeitoptimal sein.

Im konkreten Fall, der hier beschrieben wird<sup>10)</sup>, ging es um die Automatisierung einer schon vorhandenen älteren Anlage, die nicht mit einem Stromrichter, sondern mit einem Leonard-Satz als Stelleinrichtung ausgerüstet war. Bei der zeitoptimalen Auslegung solcher Anlagen treten gegenüber direkt thyristorgespeisten Antrieben zwei bedeutsame Unterschiede auf: Die Begrenzung der Übererregbarkeit sowie die sehr große Feldzeitkonstante des Leonard-Generators (hier  $T_f = 1,7 \text{ sec}$ ). Beides führt dazu, daß der Ankerstromregelkreis nicht sehr schnell ausgeführt werden kann. Hinzu kommt aus elektrischen und mechanischen Gründen eine Beschränkung des Ankerstroms und der Drehzahl. Führt man nun unterlagerte Regelkreise entsprechend dem Bild 2/66 sowie die geforderten Begrenzungskennlinien ein, so gelangt man zur Regelungsstruktur im Bild 2/67. Wie man sieht, handelt es sich bei der Strecke um ein System 5. Ordnung, das überdies in Gestalt der Trockenen Reibung von Block 13 eine Nichtlinearität enthält.

Es liegt auf der Hand, daß hier der Entwurf in der Zustandsebene nur suboptimal sein kann. Das Ergebnis zeigen die beiden Rechnerschriften im Bild 2/68 und 2/69. Hierin ist  $u_f(t)$  die Feldspannung des Leonard-Generators, also abgesehen von einer sehr kleinen Verzögerung die Eingangsgröße der Stelleinrichtung,  $i_A(t)$  der Ankerstrom des Gleichstrommotors,  $n(t)$  seine Drehzahl,  $s(t)$  die Oberwalzenverstellung und somit die Regelgröße. Das Bild 2/68 charakterisiert die Dynamik bei einem Führungssprung von 0,3, was 15 cm entspricht. Die Feldspannung  $u_f$  zeigt einen Verlauf, der dem zeitoptimalen Verhalten der Steuergröße nahekommt: Auf einen kräftigen Beschleunigungsimpuls folgt ein entsprechender Bremsimpuls. Nur ein nicht sehr wesentliches Teilstück weicht durch sein „suboptimales Gezappel“ vom Idealverlauf ab, was daran liegt, daß die unterlagerten Regelkreise in der Schlußphase der Bremsung in ihrem Linea-

<sup>10)</sup> D. Franke – P. Schiefer – W. Weber: Schnelligkeitsoptimale Regelung der Oberwalzenanstellung einer Blockstraße. Regelungstechnik 17 (1969), S. 197 – 204.

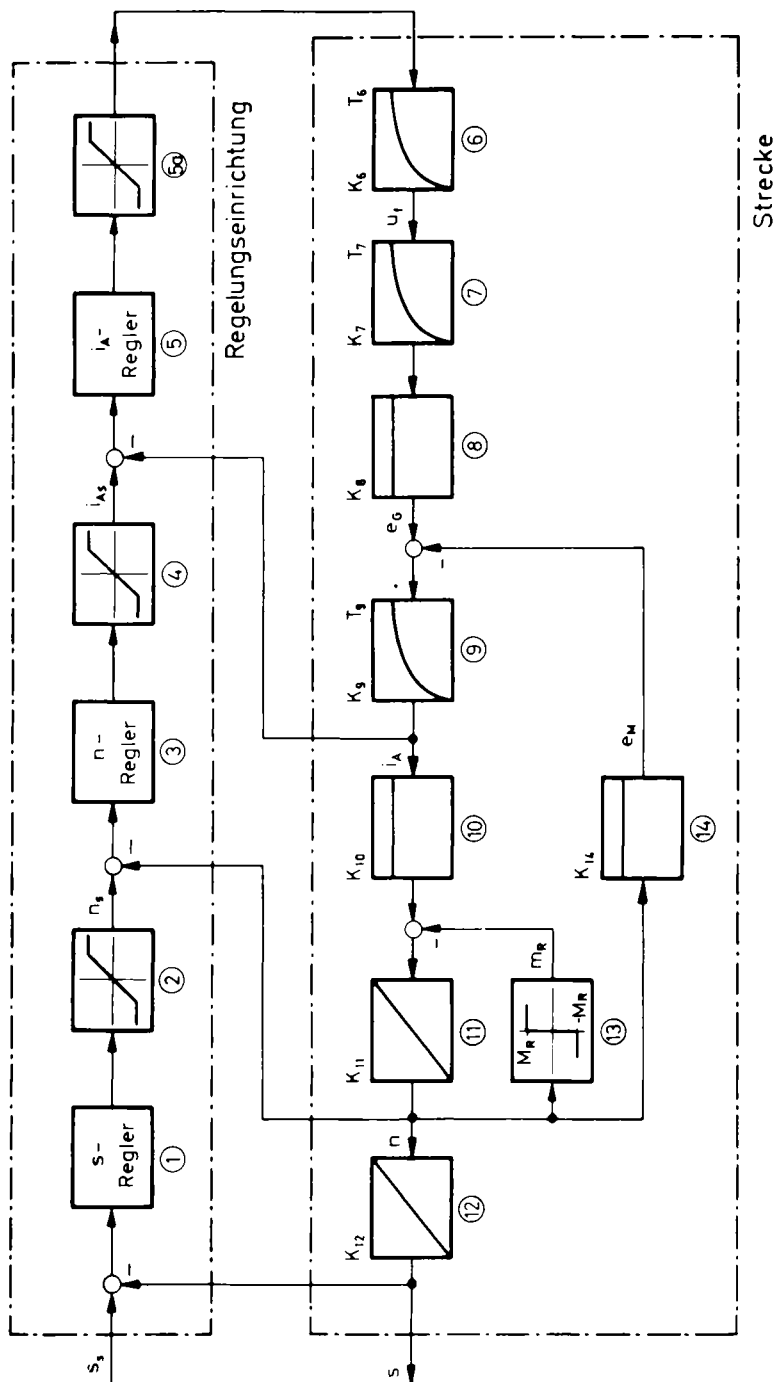


Bild 2/67 Strukturbild für die Regelung einer Oberwalzenanstellung

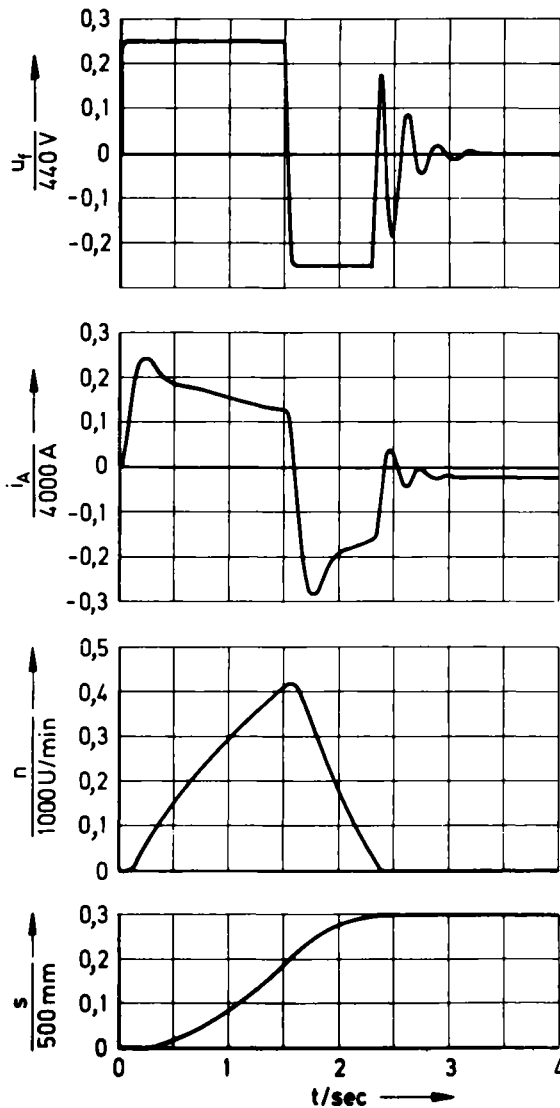


Bild 2/68 Zeitverläufe der Regelung von Bild 2/67 bei einem Führungssprung von 0,3

ritätsbereich arbeiten. Die so entstehende Schwingung tritt besonders in  $u_f(t)$  hervor, macht sich aber auch im Ankerstrom  $i_A(t)$  bemerkbar, kann sich jedoch auf die Drehzahl  $n(t)$  und die Verschiebung  $s(t)$  wegen der Reibung nicht auswirken.

Bild 2/69 zeigt das Zeitverhalten bei einem kräftigen Führungssprung. Hier erkennt man im Verlauf von  $u_f(t)$  eine stärkere Abweichung vom zeitoptimalen Verhalten, insofern am Ende der Beschleunigungsphase  $u_f$  nicht mehr am An-

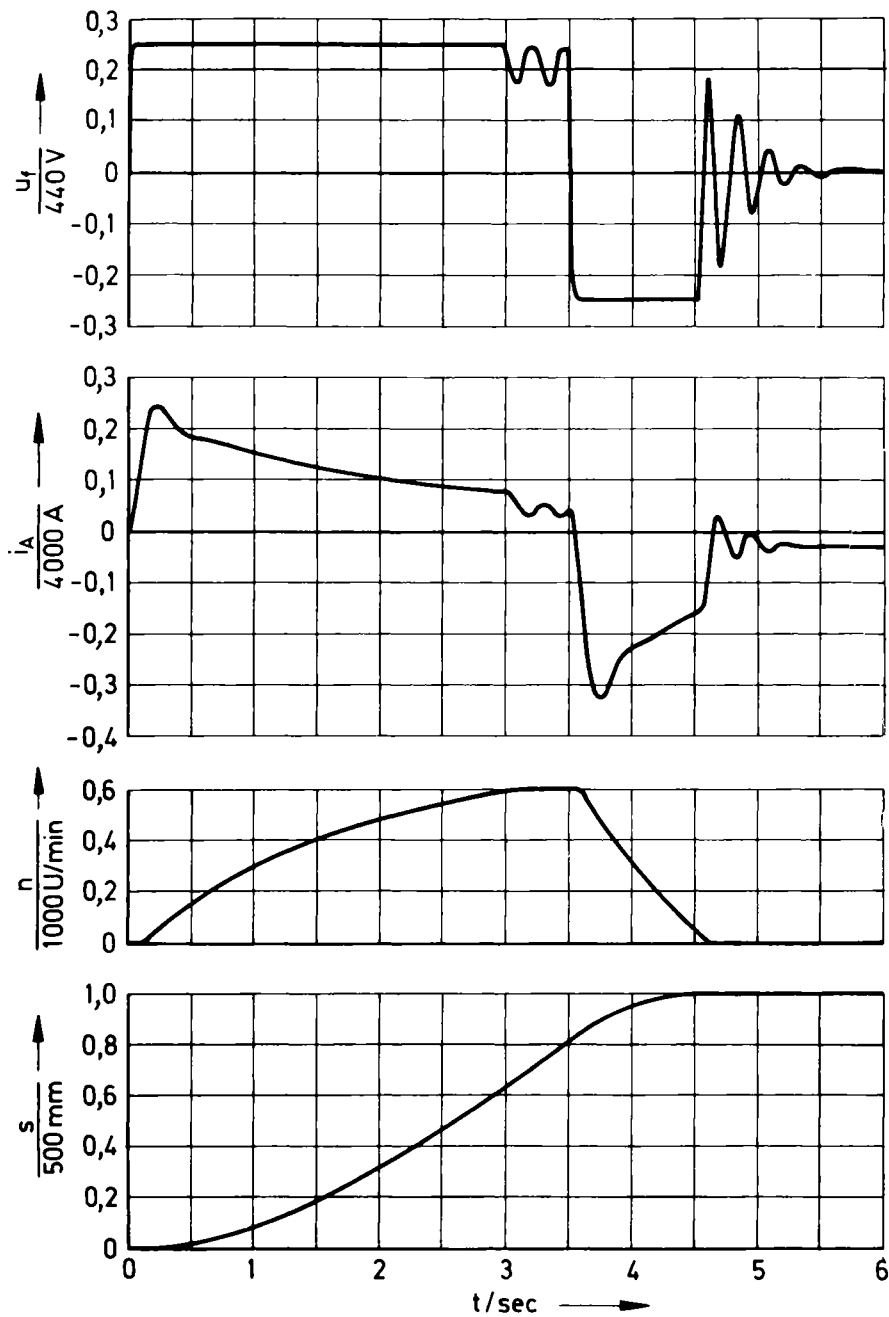


Bild 2/69 Zeitverläufe der Regelung von Bild 2/67 bei einem Führungs-sprung von 1,0

schlag liegt, sondern eine Schwingung mit kleiner Amplitude ausführt. Es handelt sich dabei gerade um das Zeitintervall, in dem die Drehzahl an ihrem Anschlag ist. Sieht man von der Schlußphase ab, so liegt also während des gesamten Regelvorganges stets eine der beschränkten Größen am Anschlag, entweder die Feldspannung  $u_f$  oder die Drehzahl  $n$ . Daher darf man auch jetzt den Übergang als im wesentlichen optimal ansehen.

Die Regelgröße  $s(t)$  zeigt in beiden Fällen den gewünschten Verlauf. Ihre Übergangszeit liegt bei 2,5 bzw. 4,5 sec. Bedenkt man, daß bereits die Feldzeitkonstante in der Strecke 1,7 sec beträgt, so hat man ein zufriedenstellendes Zeitverhalten.

## 2.6 Nichtlineare Systeme 1. Ordnung in der Zustandsebene

Liegt ein nichtlineares System 2. Ordnung vor, so wird man es nach Möglichkeit in der Zustandsebene untersuchen, da diese Betrachtungsweise von besonderer Anschaulichkeit ist. Wie im vorigen Abschnitt ausgeführt wurde, kann man auch Regelkreise höherer Ordnung manchmal auf Systeme 2. Ordnung zurückführen und dadurch einer Behandlung in der Zustandsebene zugänglich machen. Daß es von Nutzen sein kann, auch nichtlineare Systeme 1. Ordnung in der Zustandsebene zu betrachten, um so von der besonderen Anschaulichkeit zu profitieren, soll nun an zwei Beispielen gezeigt werden.

### 2.6.1 Regelkreis mit Hysteresekennlinie

Als erstes wird ein *Regelkreis* betrachtet, dessen *Nichtlinearität ein Zweipunktglied mit Hysterese* und dessen *lineares Teilsystem von 1. Ordnung* ist. Er ist im Bild 2/70 dargestellt. Das lineare Teilsystem wird durch die Differentialgleichung

$$T\dot{x} + x = Ku \quad (2.78)$$

beschrieben, wobei  $u$  nur die beiden Werte  $b$  und  $-b$  annehmen kann. Setzt man, wie bisher schon,  $\dot{x} = v$ , so gelten die beiden Gleichungen

$$Tv + x = Kb \quad \text{für} \quad u = b,$$

$$Tv + x = -Kb \quad \text{für} \quad u = -b.$$

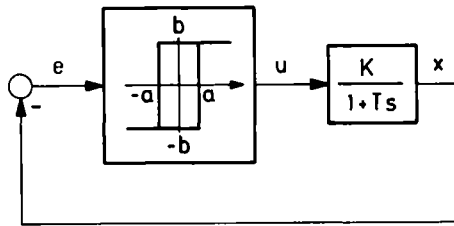


Bild 2/70  
Nichtlinearer Regel-  
kreis 1. Ordnung

Das sind zwei Geraden in der  $x-v$ -Ebene:

$$g_1: v = -\frac{1}{T} (x - Kb) \quad \text{zu} \quad u = b, \quad (2.79)$$

$$g_2: v = -\frac{1}{T} (x + Kb) \quad \text{zu} \quad u = -b. \quad (2.80)$$

Nur auf ihnen kann sich der Zustandspunkt  $(x, \dot{x}) = (x, v)$  des Regelkreises bewegen. Im Unterschied zum Regelkreis 2. Ordnung gibt es keine einparametrische Trajektorienschar, auf dem sich der Zustandspunkt bei einem bestimmten  $u$ -Wert bewegen muß, sondern nur noch eine einzige Trajektorie.

Die Schaltlinie des Zweipunktgliedes mit Hysterese ist, als allein durch die Nichtlinearität bestimmt, nach wie vor die gleiche, also durch Bild 2/29 gegeben. Insgesamt erhält man so für das Verhalten des betrachteten nichtlinearen Regelkreises Bild 2/71. Dabei ist

$$Kb > a$$

angenommen. Die Gerade  $g_1$  ist im Bereich mit  $u = b$  (links der Schaltlinie) durchgezogen. Für diesen  $u$ -Wert muß sich der Zustandspunkt auf  $g_1$  bewegen. Entsprechend ist  $g_2$  im Bereich  $u = -b$  (rechts der Schaltlinie) durchgezogen, da für  $u = -b$  der Zustandspunkt auf  $g_2$  liegen muß.

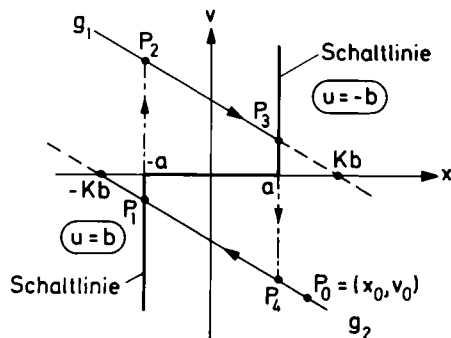


Bild 2/71  
Verhalten des Regelkreises von  
Bild 2/70 in der Zustandsebene  
für  $Kb > a$



Beginnen wir nun mit irgendeinem Anfangszustand  $P_0 = (x_0, v_0)$ , etwa dem, der im Bild 2/71 eingezeichnet ist. Dann bewegt sich der Zustandspunkt zunächst auf  $g_2$  bis zum Punkt  $P_1$ . Dort überschreitet er die Schaltlinie. Da er sich im Bereich  $u = b$  aber nur auf  $g_1$  bewegen kann, springt er auf  $g_1$  über, was durch die strichpunktierte Linie angedeutet ist. Während sich  $x$  bei diesem Übergang stetig ändert, springt  $v = \dot{x}$  vom Wert

$$v_1 = -\frac{1}{T}(-a + Kb) \quad \text{gemäß (2.80)}$$

auf den Wert

$$v_2 = -\frac{1}{T}(-a - Kb) \quad \text{entsprechend (2.79)}.$$

Die Sprunghöhe beläuft sich also auf

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{2Kb}{T}.$$

Das gleiche Ergebnis liefert die Differentialgleichung (2.78), wenn man in ihr von  $u = b$  auf  $u = -b$  umschaltet.

Auf  $g_1$  läuft der Zustandspunkt von  $P_2$  nach  $P_3$ . Dort überschreitet er wiederum die Schaltlinie und springt deshalb auf den Punkt  $P_4$  von  $g_2$  über. Usw.

Wie man sieht, entsteht eine Dauerschwingung, die in der Zustandsebene durch das Parallelogramm  $P_1P_2P_3P_4$  dargestellt wird, wobei allein die Seiten  $P_4P_1$  und  $P_2P_3$  durchlaufen, hingegen die Seite  $P_1P_2$  und  $P_3P_4$  übersprungen werden. Das Geradenstück  $P_0P_4$  kennzeichnet den Einschwingvorgang, der bei unserer willkürlichen Annahme über den Anfangspunkt zustande kam.

Die Amplitude der Dauerschwingung ist  $A_P = a$ . Ihre Periode  $T_P$  erhält man aus  $dx/dt = v$ , also

$$dt = \frac{dx}{v}$$

durch Integration von  $P_2$  nach  $P_3$  längs  $g_1$ :

$$\frac{T_P}{2} = \int_{-a}^a \frac{dx}{-\frac{1}{T}(x - Kb)} = -T \left[ \ln|x - Kb| \right]_{-a}^a = T \ln \frac{|-a - Kb|}{|a - Kb|}.$$

Wegen  $Kb > a$  kann man dafür schreiben:

$$T_p = 2T \ln \frac{Kb + a}{Kb - a} = 2T \ln \frac{1 + \frac{a}{Kb}}{1 - \frac{a}{Kb}}. \quad (2.81)$$

Ist

$$Kb \gg a, \quad (2.82a)$$

wie es meist der Fall sein wird, so kann man wegen

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right], \quad |x| < 1,$$

die Gleichung (2.81) durch eine Näherungsformel ersetzen:

$$T_p = 2T \cdot 2 \frac{a}{Kb},$$

$$T_p = \frac{4aT}{Kb}. \quad (2.82b)$$

Vollständigkeitshalber sei noch der Fall  $Kb < a$  erledigt. Dann liegt die Situation in Bild 2/72 vor. Liegt der Anfangszustand etwa in  $P_0$ , so wandert der Zustandspunkt längs  $g_2$  auf den Punkt E zu. Ihn kann er nicht überschreiten, da die Trajektorie auf der anderen Seite von E entgegengesetzt gerichtet ist. Der Zustandspunkt erreicht E aber auch gar nicht in endlicher Zeit, denn es gilt:

$$t_{P_0 E} = \int_{x_0}^{-Kb} \frac{dx}{-\frac{1}{T}(x + Kb)} = -T \left[ \ln|x + Kb| \right]_{x_0}^{-Kb} = +\infty,$$

da beim Einsetzen der oberen Grenze der Logarithmus  $-\infty$  wird.

Das Ergebnis ist aus Bild 2/70 unmittelbar einleuchtend: Ist  $Kb < a$ , so kommt  $x$  nicht aus der Zone  $|x| < a$  heraus und bleibt daher stets auf dem gleichen Kennlinienast, so daß sich keine Dauerschwingung entwickeln kann.

Das Resultat stimmt auch mit unseren Untersuchungen im Abschnitt 1.4 überein. Dort ergab sich als Bedingung für die Existenz von Ruhelagen bei einem

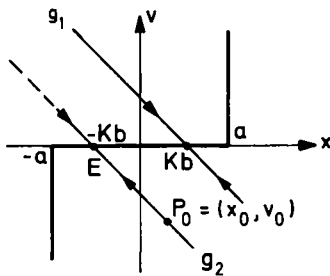


Bild 2/72

Verhalten des Regelkreises von Bild 2/70  
in der Zustandsebene für  $Kb < a$

Regelkreis, der ein Zweipunktglied mit Hysterese enthält (Bild 1/22), die Ungleichung

$$K < \frac{a}{b},$$

und die Ruhelagen selbst waren durch  $x = \pm Kb$  gegeben.

### 2.6.2 Schaltender PI-Regler

Als zweites Beispiel zur Behandlung eines Systems erster Ordnung in der Zustandsebene betrachten wir einen *schaltenden PI-Regler*, wie er in der Verfahrenstechnik weithin üblich ist und beispielsweise durch das System Teleperm der Firma Siemens realisiert wird. Sein Verhalten wurde gewöhnlich dadurch untersucht, daß bestimmte Testfunktionen aufgeschaltet und die sich ergebenden Ausgangsgrößen analysiert wurden<sup>11)</sup>. Wie sich im folgenden zeigen wird, kann man es aber auch recht übersichtlich in der Zustandsebene behandeln.

Die Struktur des Reglers ist in Bild 2/73 wiedergegeben. Dabei kann man sich auf die Betrachtung der Rückführung beschränken, da der Einfluß des nachgeschalteten I-Gliedes dann sofort zu übersehen ist. Sie sei im folgenden kurz als NL-Rückführung bezeichnet. Um uns einen ersten Eindruck von ihrer Wirkungsweise zu verschaffen, betrachten wir sie in der  $\epsilon$ - $\dot{\epsilon}$ -Ebene. Dazu nehmen wir an, daß  $e(t)$  gegenüber der Eigenbewegung der NL-Rückführung langsam veränderlich ist und deshalb für die folgende Untersuchung als konstant angesehen werden darf. Überdies sei  $e > a$ .

<sup>11)</sup> Siehe hierzu P. Schleuning: Die Wirkung des progressiven dynamischen Verhaltens von Impulsreglern. Regelungstechnik 10 (1962), S. 71 - 77. Sowie W. Böttcher: Vergleich von Dreipunktreglern mit einem linearen kontinuierlichen PI-Regler, Teil I und II. Regelungstechnik 10 (1962) S. 114 - 119 und 210 - 213.

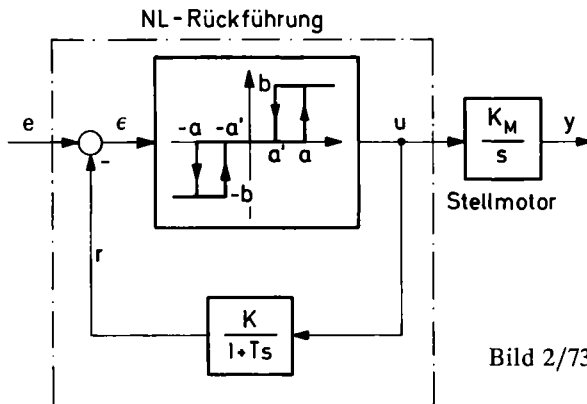


Bild 2/73 Schaltender PI-Regler

Zunächst werden die Schaltlinien des Dreipunktgliedes ermittelt. Es ist

$$u = b \quad \text{für} \quad \begin{cases} \dot{\epsilon} > 0, \epsilon > a, \\ \dot{\epsilon} < 0, \epsilon > a', \end{cases}$$

$$u = -b \quad \text{für} \quad \begin{cases} \dot{\epsilon} > 0, \epsilon < -a', \\ \dot{\epsilon} < 0, \epsilon < -a, \end{cases}$$

$$u = 0 \quad \text{sonst.}$$

Die Grenzen dieser 3 Bereiche werden durch die beiden in Bild 2/74 eingezeichneten gebrochenen Schaltlinien gebildet.

Für die linearen Glieder der NL-Rückführung im Bild 2/73 gelten die Gleichungen

$$T\dot{r} + r = Ku,$$

$$\epsilon = e - r \quad \text{oder} \quad r = e - \epsilon.$$

Mit  $\dot{\epsilon} = 0$  folgt aus ihnen die Beziehung

$$T(-\dot{\epsilon}) + e - \epsilon = Ku$$

oder

$$T\dot{\epsilon} + \epsilon = e - Ku.$$

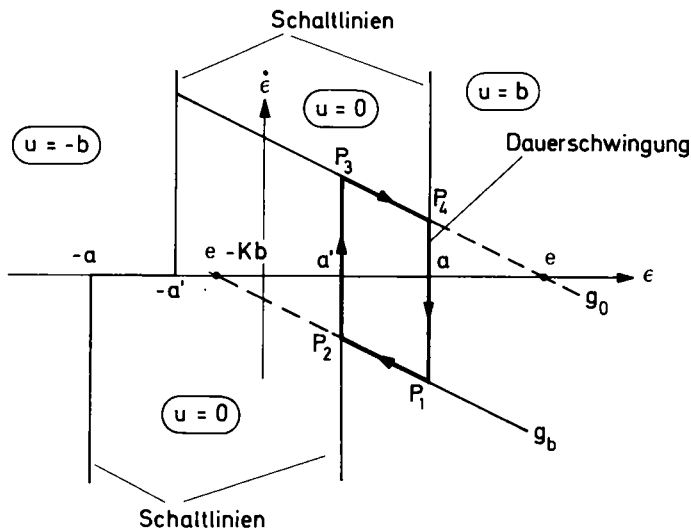


Bild 2/74 Verhalten der NL-Rückführung des schaltenden PI-Reglers in der Zustandsebene

Für  $u = -b, 0$  und  $b$  sind das 3 parallele Geraden in der  $\epsilon$ - $\dot{\epsilon}$ -Ebene, auf denen sich der Zustandspunkt  $(\epsilon, \dot{\epsilon})$  bewegen muß. Im Bild 2/74 sind die Geraden

$$g_0: \quad \dot{\epsilon} = -\frac{1}{T}(\epsilon - e)$$

und

$$g_b: \quad \dot{\epsilon} = -\frac{1}{T} [\epsilon - (e - Kb)]$$

eingezeichnet.

Werde nun etwa der Fall  $a < e < K_b + a'$  betrachtet, so daß insbesondere  $e - K_b < a'$  gilt (andere Fälle sind entsprechend zu untersuchen). Dann schneidet  $g_0$  die  $\epsilon$ -Achse rechts von  $a$ , während sie von  $g_b$  links von  $a'$  geschnitten wird, wie dies im Bild 2/74 eingezeichnet ist. Nunmehr erkennt man genau wie im vorigen Beispiel, daß der Zustandspunkt, ausgehend von irgendeinem möglichen Anfangszustand  $P_0 = (\epsilon_0, \dot{\epsilon}_0)$  auf  $g_0$  oder  $g_b$ , die durch das Parallelogramm  $P_1P_2P_3P_4$  charakterisierte Dauerschwingung ausführt. Der zugehörige Punkt  $(\epsilon, u)$  umläuft dabei die rechte Hystereseschleife des Dreipunktgliedes. Ganz entsprechend sieht man, daß für  $-(K_b + a') < e < -a$  die linke Hystereseschleife des Dreipunktgliedes umlaufen wird. Für die anderen möglichen Lagen von  $e$  bildet sich keine Dauerschwingung aus, vielmehr stellt sich einer der

Werte  $u = 0$ ,  $b$  oder  $-b$  als Festwert ein. Es genügt, den Fall zu untersuchen, daß die rechte Hystereseschleife des Dreipunktgliedes umlaufen wird. Um quantitative Betrachtungen durchzuführen, ist es dann zweckmäßig, nur noch sie allein zu betrachten und das Achsenkreuz symmetrisch zu ihr zu legen: Bild 2/75.

Dann gilt

$$\epsilon = \frac{a + a'}{2} + \epsilon^*, \quad (2.83)$$

$$u = \frac{b}{2} + u^*. \quad (2.84)$$

Setzt man (2.84) in die Differentialgleichung des Verzögerungsgliedes ein, so entsteht

$$T\dot{r} + r = K\frac{b}{2} + Ku^*.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$T(r - K\frac{b}{2})' + (r - K\frac{b}{2}) = Ku^*.$$

Mit  $r^* = r - K\frac{b}{2}$  bzw.

$$r = K\frac{b}{2} + r^* \quad (2.85)$$

entsteht so die Differentialgleichung

$$T\dot{r}^* + r^* = Ku^*, \quad (2.86)$$

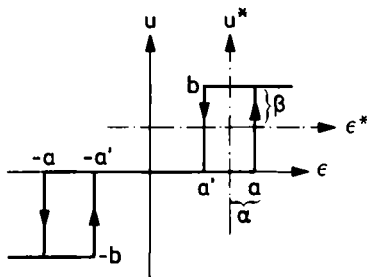


Bild 2/75  
Einführung eines neuen Koordinatensystems

die mit der ursprünglichen Differentialgleichung identisch ist. Setzt man weiterhin (2.83) und (2.85) in die Beziehung

$$\epsilon = e - r$$

ein, so wird

$$\epsilon^* = e - K \frac{b}{2} - \frac{a + a'}{2} - r^*.$$

Mit  $e^* = e - K \frac{b}{2} - \frac{a + a'}{2}$  bzw.

$$e = \frac{a + a'}{2} + K \frac{b}{2} + e^* \quad (2.87)$$

wird daraus

$$\epsilon^* = e^* - r^*. \quad (2.88)$$

Auf Grund von (2.86) und (2.88) erhält man als Resultat die Struktur im Bild 2/76. Im folgenden gehen wir von ihr aus. Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise lassen wir dabei die Sterne weg. Was die Parameter betrifft, so ist  $\alpha/\beta$  von der Größenordnung  $10^{-3}$ ,  $K$  liegt etwa im Bereich von 0,1 bis 1, während für die Zeitkonstante  $T$  verschiedene Einstellungen möglich sind, die im Minutenbereich liegen (z.B. bis 26 min).

Aus den Gleichungen

$$T\dot{r} + r = Ku, \quad \epsilon = e - r \quad (2.89)$$

folgt

$$T(e - \epsilon)' + (e - \epsilon) = Ku$$

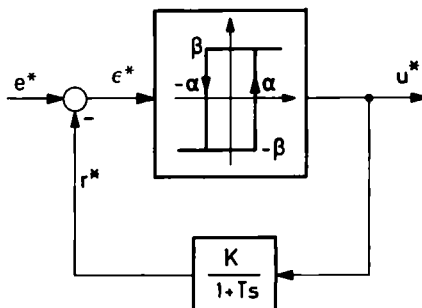


Bild 2/76

Die NL-Rückführung des schaltenden PI-Reglers nach der Transformation gemäß Bild 2/75.

Dabei:  $\alpha = \frac{a - a'}{2}$ ,  $\beta = \frac{b}{2}$

oder

$$\dot{\epsilon} = -\frac{1}{T}[\epsilon - (e + T\dot{e} - Ku)] . \quad (2.90)$$

Wie eben gezeigt, besitzt die NL-Rückführung eine Eigenschwingung.  $e$  sei gegenüber deren Periode langsam veränderlich, so daß man  $e$  und erst recht  $\dot{e}$  als konstant ansehen kann. Da  $T$  relativ groß ist, darf man den Term  $T\dot{e}$  gegenüber  $e$  nicht vernachlässigen. Setzt man abkürzend

$$x_e = e + T\dot{e} , \quad (2.91)$$

wobei also  $x_e$  den gesamten äußeren Einfluß bezeichnet, so wird aus (2.90)

$$\dot{\epsilon} = -\frac{1}{T}[\epsilon - (x_e - Ku)] . \quad (2.92)$$

Daraus folgt für

$$u = \beta : \quad \dot{\epsilon} = -\frac{1}{T}[\epsilon - (x_e - K\beta)] , \text{ Gerade } g_1 \text{ (Bild 2/77)} , \quad (2.93)$$

$$u = -\beta : \quad \dot{\epsilon} = -\frac{1}{T}[\epsilon - (x_e + K\beta)] , \text{ Gerade } g_2 \text{ (Bild 2/77)} . \quad (2.94)$$

Wir dürfen voraussetzen, daß

$$|x_e| < K\beta - \alpha ,$$

also

$$-(K\beta - \alpha) < x_e < K\beta - \alpha \quad (2.95)$$

gilt, da nur dieser Fall für die Verwendung des schaltenden Reglers von Interesse ist. Aus (2.95) folgt einerseits

$$-K\beta + \alpha < x_e \quad \text{oder}$$

$$\alpha < x_e + K\beta , \quad (2.96)$$

d.h.:  $g_2$  schneidet die  $\epsilon$ -Achse rechts von  $\alpha$  (Bild 2/77). Andererseits ergibt sich aus (2.95)  $x_e < K\beta - \alpha$  oder

$$x_e - K\beta < -\alpha , \quad (2.97)$$





Mithin kann man für  $\tau_{12}$  schreiben:

$$\tau_{12} = -T \ln \frac{K\beta - \alpha - x_e}{K\beta + \alpha - x_e} = T \ln \frac{K\beta + \alpha - x_e}{K\beta - \alpha - x_e}. \quad (2.98a)$$

Völlig entsprechend erhält man

$$\tau_{34} = T \ln \frac{K\beta + \alpha + x_e}{K\beta - \alpha + x_e}. \quad (2.98b)$$

Im Unterschied zum ersten Beispiel sind also die Durchlaufungszeiten nicht gleich; die Schwingung der NL-Rückführung wird unsymmetrisch, bedingt durch das Auftreten einer Eingangsgröße.

Für die Periode der Schwingung folgt aus (2.98a,b)

$$T_p = \tau_{12} + \tau_{34} = T \ln \frac{(K\beta + \alpha - x_e)(K\beta + \alpha + x_e)}{(K\beta - \alpha - x_e)(K\beta - \alpha + x_e)} \quad (2.99)$$

oder

$$T_p = T \left\{ 2 \ln \frac{1 + \frac{\alpha}{K\beta}}{1 - \frac{\alpha}{K\beta}} + \ln \left[ 1 - \left[ \frac{x_e}{K\beta + \alpha} \right]^2 \right] - \ln \left[ 1 - \left[ \frac{x_e}{K\beta - \alpha} \right]^2 \right] \right\}. \quad (2.100)$$

Hieraus kann man eine handlichere Näherungsformel herleiten, wenn man die Reihenentwicklungen

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right], \quad |x| < 1,$$

und

$$\ln(1-x) = - \left[ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right], \quad -1 \leq x < 1,$$

benutzt. Setzt man voraus, daß  $|x_e|$  genügend klein gegen  $K\beta - \alpha$  ist und berücksichtigt weiterhin  $\alpha/(K\beta) \ll 1$ , so kann man die Reihen nach dem 1. Glied abbrechen:

$$T_p = T \left[ 2 \cdot 2 \frac{\alpha}{K\beta} - \left[ \frac{x_e}{K\beta + \alpha} \right]^2 + \left[ \frac{x_e}{K\beta - \alpha} \right]^2 \right],$$

$$T_p = T \left[ \frac{4\alpha}{K\beta} + x_e^2 \frac{4\alpha K\beta}{(K\beta)^4 (1 + \frac{\alpha}{K\beta})^2 (1 - \frac{\alpha}{K\beta})^2} \right],$$

$$T_p = \frac{4\alpha T}{K\beta} \left[ 1 + \left( \frac{x_e}{K\beta} \right)^2 \right] \approx \frac{4\alpha T}{K\beta}. \quad (2.101)$$

Die Periode  $T_p$  der Eigenschwingung der NL-Rückführung ist also klein gegenüber der Zeitkonstante  $T$  und damit auch klein gegenüber den zeitlichen Änderungen der Eingangsgröße  $e$ , die man sich in der gleichen Größenordnung vorstellen darf.

Die NL-Rückführung von Bild 2/77 befindet sich im Zustand einer unsymmetrischen Dauerschwingung, wie sie im Bild 2/78 skizziert ist:

$$u = \text{Mittelwert } u_m + \text{Restschwingung der Periode } T_p \quad (2.102)$$

mit

$$u_m = \frac{\beta\tau_{12} + (-\beta)\tau_{34}}{\tau_{12} + \tau_{34}}. \quad (2.103)$$

Die auf die NL-Rückführung folgenden Übertragungsglieder des Gesamtsystems haben Tiefpaßcharakter. Daher darf der Einfluß des relativ hochfrequenten Schwingungsanteils in (2.102) vernachlässigt werden:

$$u = u_m = \beta \frac{\tau_{12} - \tau_{34}}{T_p}. \quad (2.104)$$

Darin ist nach (2.98):

$$\tau_{12} - \tau_{34} = T \ln \frac{1 + \frac{x_e}{K\beta - \alpha}}{1 - \frac{x_e}{K\beta - \alpha}} - T \ln \frac{1 + \frac{x_e}{K\beta + \alpha}}{1 - \frac{x_e}{K\beta + \alpha}}, \quad (2.105)$$

$$\tau_{12} - \tau_{34} = 2T \left[ \frac{x_e}{K\beta - \alpha} + \frac{1}{3} \frac{x_e^3}{(K\beta - \alpha)^3} \right] - 2T \left[ \frac{x_e}{K\beta + \alpha} + \frac{1}{3} \frac{x_e^3}{(K\beta + \alpha)^3} \right].$$

Mit den gleichen Vernachlässigungen wie oben folgt daraus

$$\tau_{12} - \tau_{34} = \frac{4\alpha T}{(K\beta)^2} x_e \left[ 1 + \left( \frac{x_e}{K\beta} \right)^2 \right].$$

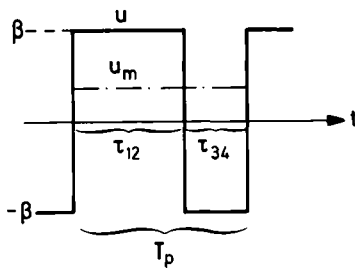


Bild 2/78

Die unsymmetrische Rechteckschwingung der NL-Rückführung von Bild 2/76

Setzt man dies sowie  $T_p$  gemäß (2.101) in (2.104) ein, so bekommt man das überraschend einfache Ergebnis

$$u = \frac{1}{K} x_e. \quad (2.106)$$

Hieraus wird wegen (2.91)

$$u = \frac{1}{K} e + \frac{T}{K} \dot{e}. \quad (2.107)$$

Das heißt also: Die selbstschwingende NL-Rückführung im Bild 2/76 wirkt auf Eingangsgrößen  $e$ , die sich relativ zur Selbstschwingungsfrequenz langsam verändern und überdies dem Betrag nach genügend klein gegen  $K\beta - \alpha$  sind, wie ein PD-Regler.

Ist  $|x_e|$  nicht genügend klein gegenüber  $K\beta - \alpha$ , so gilt die einfache Proportionalität  $u = \frac{1}{K} x_e$  nicht mehr genau, ist vielmehr durch eine Kennlinie  $u = F(x_e)$  zu ersetzen. Man kann sie aus (2.99) und (2.105) durch Einsetzen in (2.104) erhalten. Sie weicht nicht sehr stark vom obigen Proportionalzusammenhang ab<sup>12)</sup>. Ist  $|x_e| > K\beta - \alpha$ , so bleibt  $u = \beta$  oder  $-\beta$  (was man entsprechend wie im ersten Beispiel dieses Kapitels, Bild 2/72, zeigen kann), und das System wirkt nicht mehr als PD-Regler.

Um nun zu der ursprünglichen Rückführung im Bild 2/73 zurückzukehren, hat man in (2.107)  $u$  wieder mit  $u^*$  und  $e$  mit  $e^*$  zu bezeichnen und sodann die Transformation (2.84), (2.87) anzuwenden. Dadurch wird aus (2.107)

<sup>12)</sup> Siehe hierzu G. Kallina: Übertragungsverhalten langsam veränderlicher Signale durch selbstschwingende Systeme. Regelungstechnik 23 (1975) S. 231 - 236.

Dort wird das Verhalten von Regelkreisen mit schneller Eigenschwingung und langsam veränderlicher Eingangsgröße für höhere Ordnung des linearen Teilsystems mittels der Harmonischen Balance untersucht.

$$u - \frac{b}{2} = \frac{1}{K} \left[ e - K \frac{b}{2} - \frac{a+a'}{2} \right] + \frac{T}{K} \dot{e}$$

oder

$$u = \frac{1}{K} \left[ e - \frac{a+a'}{2} \right] + \frac{T}{K} \left[ \dot{e} - \frac{a+a'}{2} \right]. \quad (2.108)$$

Dieses PD-Verhalten erzeugt zusammen mit dem nachgeschalteten Stellmotor, der als I-Glied wirkt, das gewünschte PI-Verhalten des schaltenden Reglers. Seine Übertragungsfunktion ist

$$G_R(s) = \left( \frac{1}{K} + \frac{T}{K}s \right) \frac{K_M}{s} = \frac{K_M T}{K} + \frac{K_M}{K} \frac{1}{s}.$$

Als Eingangsgröße ist dabei  $e - \frac{a+a'}{2}$  anzusehen. Darin drückt sich die Tatsache aus, daß für Eingangsgrößen von sehr kleinem Betrag infolge der Nullzone des Dreipunktgliedes  $u = 0$  wird. Deshalb wurde gerade ein *Dreipunktglied* eingeführt: Das System soll vor unnötigen Reaktionen auf kleine Störungen bewahrt bleiben.