

Moderne Methoden der Regelungstechnik 2

Josua Braun, Tobias Scheuermann

22. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Linearisierende Entwürfe | 3 |
| 1.1 | Ein- und Ausgangslinearisierung | 3 |
| 1.1.1 | Differenzordnung (= relativer Grad) | 3 |
| 1.1.2 | Ein- und Ausgangslinearisierung | 3 |
| 1.1.3 | Polvorgabe | 4 |
| 1.1.4 | Führungsverhalten | 5 |
| 1.1.5 | I-Anteil | 6 |
| 1.1.6 | Stabilität | 7 |
| 1.2 | Eingangs- Zustandslinearisierung (Eingrößensystem) | 7 |
| 1.2.1 | Gezieltes Erzeugen maximaler Differenzordnung $\delta = n$ | 7 |
| 1.2.2 | Nichtlineare Regelung und Eingangszustandslinearisierung | 9 |
| 1.2.3 | Verallgemeinerte Regelungsnormalform | 10 |
| 1.3 | Differentielle Flachheit | 10 |
| 1.3.1 | Motivation | 10 |
| 1.3.2 | Verallgemeinerung | 11 |
| 1.4 | Zustandsbeobachtung nichtlinearer Systeme | 12 |
| 1.4.1 | Entwurf durch Linearisierung der Fehler DGL | 12 |
| 1.4.2 | Entwurf über Beobachtungsnormalform | 14 |
| 2 | Stabilität | 15 |
| 2.1 | Stabilitätsverhalten der Ruhelagen | 15 |
| 2.2 | Dauerschwingungen | 16 |
| 2.3 | Absolute Stabilität und Popow Kriterium | 17 |
| 3 | Analyse und Synthese mittels Ljapunow-Funktionen | 18 |
| 3.1 | Grundgedanke der Direkten Methode nach Ljapunow | 18 |
| 3.2 | Stabilitätskriterien | 19 |
| 3.3 | Konstruktion von Ljapunow-Funktionen | 20 |
| 3.3.1 | V positiv definit vorgeben | 20 |
| 3.3.2 | Methode des variablen Gradienten | 22 |
| 3.4 | Reglersynthese mittels Ljapunow-Funktionen | 22 |
| 3.4.1 | Regelungs-Ljapunow-Funktionen | 22 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.4.2 | Sontagsche Reglerform | 23 |
| 3.5 | Ausblick: Passivität und nichtlineare H_∞ -Regelung | 23 |
| 4 | Optimierung dynamischer Systeme als Variationsproblem | 24 |
| 4.1 | Gütemaß und Optimierungsproblem | 24 |
| 4.2 | Optimale Regelung | 25 |
| 4.3 | Lösung des Optimierungsproblems | 25 |
| 4.3.1 | Vorbereitung: Grundproblem der Variationsrechnung | 25 |
| 4.3.2 | Anwendung auf das Problem der optimalen Steuerung | 26 |
| 4.4 | Grundsätzlicher Lösungsweg | 28 |
| 4.5 | Beispiel | 28 |
| 4.6 | Grenzen der Methode | 29 |
| 4.7 | Optimierung <i>linearer</i> Systeme mit <i>quadratischem</i> Gütemaß | 30 |
| 4.7.1 | Aufgabe | 30 |
| 4.7.2 | Bestimmung des optimalen Regelgesetzes aus der Riccati Gleichung | 31 |
| 4.7.3 | Bestimmung des optimalen Regelgesetzes bei unendlichem Steuerintervall | 33 |
| 4.8 | Nichtlineare quadratische optimale Regelung | 33 |
| 4.9 | Ausblick: Model Predictive Control | 33 |
| 5 | Das Minimum-Prinzip von Pontrjagin | 34 |
| 5.1 | Entwurf <i>zeitoptimaler</i> Systeme | 35 |
| 5.1.1 | optimale Steuerfunktion | 35 |
| 5.1.2 | Der Satz von Feldbaum (Satz von den N Schaltintervallen) | 37 |
| 5.1.3 | Anwendungsbeispiel zeitoptimaler Lageregelung | 37 |
| 5.1.4 | Suboptimale Regelung | 39 |
| 5.2 | Weitere Anwendung des Minimierungsprinzips (BB 5.5) | 43 |
| 6 | Dynamische Programmierung und Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung | 45 |
| 6.1 | Beispiel: Auffinden eines optimalen Pfades in einem Wegenetz | 45 |
| 6.2 | Das Bellmannsche Optimierungsprinzip | 47 |
| 6.3 | Die Bellmannsche Rekursionsformel | 48 |
| 6.4 | Bezug zum Minimumsprinzip | 48 |
| 6.5 | Anwendung: quadratisch optimale Regelung | 49 |

Kapitel 1

Linearisierende Entwürfe

1.1 Ein- und Ausgangslinearisierung

Ausgangspunkt:

$$\dot{\mathbf{x}}_{(n,1)} = \mathbf{a}_{(n,1)}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{(n,p)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_{(p,1)} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}_{(p,1)} = \mathbf{c}_{(p,1)}(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_p(x) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

1.1.1 Differenzordnung (= relativer Grad)

Die Differenzordnung δ_i bezüglich y_i ($i = 1, \dots, p$) zeigt die niedrigste Ableitung an, auf die u direkt einwirkt. (D.h. BB 1.2)

$$\begin{aligned} y_i &= c_i(\mathbf{x}) \\ \dot{y}_i &= \underbrace{\left[\frac{\partial c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{a}(\mathbf{x})}_{L_{\mathbf{a}c_i}(\mathbf{x})} + \underbrace{\left[\frac{\partial c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}_{=0^T} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} y_i^{(\delta_i-1)} &= L_{\mathbf{a}}^{\delta_i-1} c_i(\mathbf{x}) + \underbrace{\left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta_i-2} c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}_{=0^T} \\ y_i^{(\delta_i)} &= L_{\mathbf{a}}^{\delta_i} c_i(\mathbf{x}) + \underbrace{\left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta_i-1} c_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}_{\neq 0^T} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$\delta = \delta_1 + \dots + \delta_p$ heißt *Differenzordnung des Systems*.

1.1.2 Ein- und Ausgangslinearisierung

Gleichung 1.4 legt nahe, von $y_i^{(\delta_i)}$ lineares Verhalten bezüglich eines neuen Eingangs v_i zu verlangen; am einfachsten

$$y_i^{(\delta_i)} = v_i; \quad i = 1, \dots, p \quad (1.5)$$

also *Linearität* und *Entkopplung*.

Dann wird 1.4:

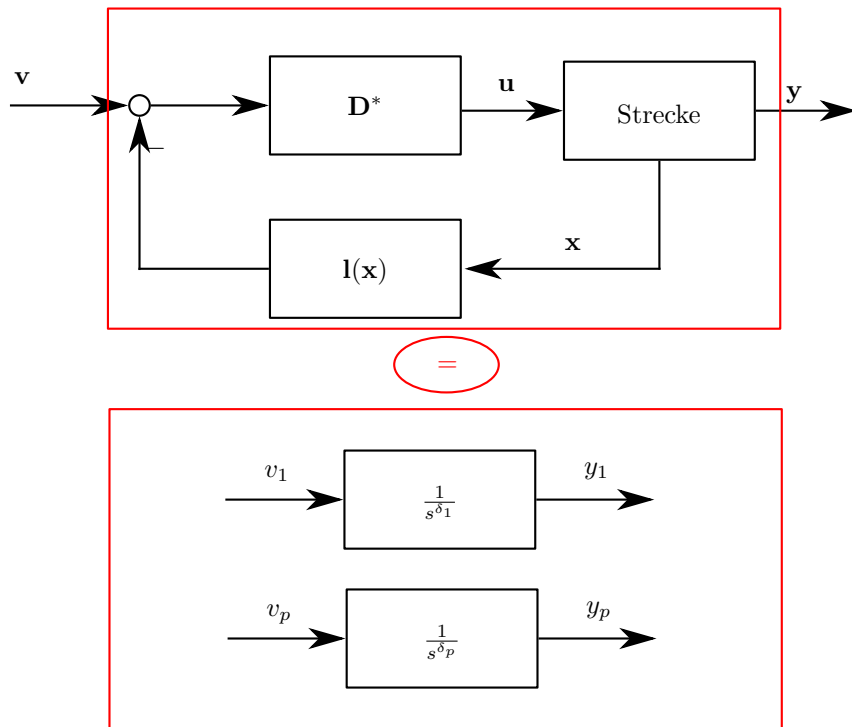
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta_1-1} c_1}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{B} \\ \vdots \\ \left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{\delta_p-1} c_p}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^*(\mathbf{x})_{(p,p)}} \mathbf{u} = - \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\mathbf{a}}^{\delta_1} c_1 \\ \vdots \\ L_{\mathbf{a}}^{\delta_p} c_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{l}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

Regelgesetz: $\mathbf{u} = \mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{v} - \mathbf{l}(\mathbf{x}))$

Voraussetzung: $\det \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) \neq 0$, zumindest im interessierten Bereich des Zustandsraumes.

Deshalb heißt $\mathbf{D}^*(\mathbf{x})$ Entkoppelbarkeitsmatrix.

Ist \mathbf{D}^* singulär, $\det \mathbf{D}^* \equiv 0$, so schafft Vorschalten eines I-Gliedes vor einem der Stelleingänge häufig Abhilfe. (siehe Übung)



Linearisierung und Entkopplung

Für jeden der p entkoppelten Kanäle kann nun eine geeignete Regelung überlagert werden, durch geeignete Wahl von v_1, \dots, v_p .

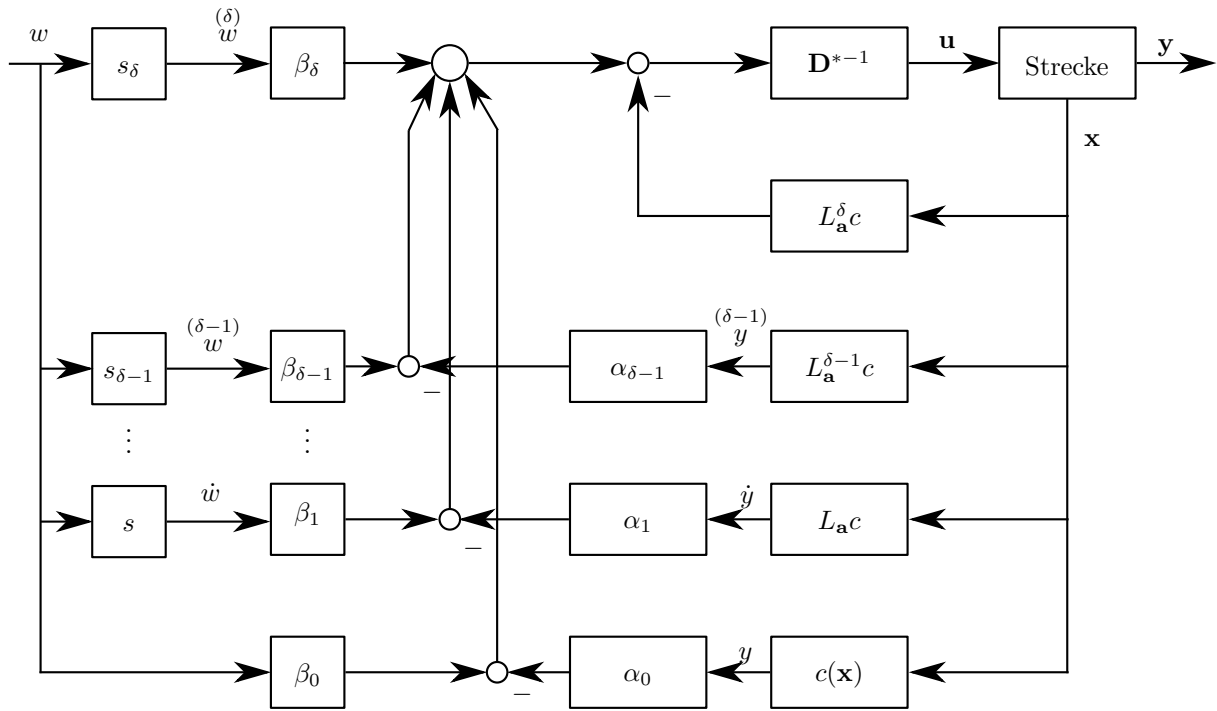
1.1.3 Polvorgabe

Mit

$$v_i = -\alpha_{i,\delta_i-1} y_i^{(\delta_i-1)} - \dots - \alpha_{i,1} \dot{y}_i - \alpha_{i,0} y_i + \beta_{i,\delta_i} w_i^{(\delta_i)} + \dots + \beta_{i,0} w_i \quad (1.6)$$

wird 1.5

$$Y_i(s) = \frac{\beta_{i,\delta_i} s^{\delta_i} + \dots + \beta_{i,1} s + \beta_{i,0}}{s^{\delta_i} + \dots + \alpha_{i,1} s + \alpha_{i,0}} W_i(s) \quad (1.7)$$



Blockschaltbild (Eingrößensystem)

Polvorgabe: $\alpha_{i,j}$ so vorgeben, dass sich günstiges Anfangswertverhalten (Störverhalten) einstellt.

1.1.4 Führungsverhalten

Führungsverhalten wird durch die Wahl der $\beta_{i,j}$ eingestellt.

- a) $\beta_{i,0} = \alpha_{i,0}$ alle anderen $\beta_{i,j} = 0$

$$\rightarrow Y_i(s) = \frac{\alpha_{i,0}}{s^{\delta_i} + \dots + \alpha_{i,0}} W_i(s)$$

– einfachste Lösung, stationäre Genauigkeit

- b) alle $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j}$ und $\beta_{i,\delta_i} = 1$

$$\rightarrow Y_i(s) = W_i(s)$$

(Führungsverhalten)

Aus 1.6 folgt mit $e_i = w_i - y_i$:

$$e_i^{(\delta_i)} + \alpha_{i,\delta_i-1} e_i^{(\delta_i-1)} + \dots + \alpha_{i,0} e_i = 0$$

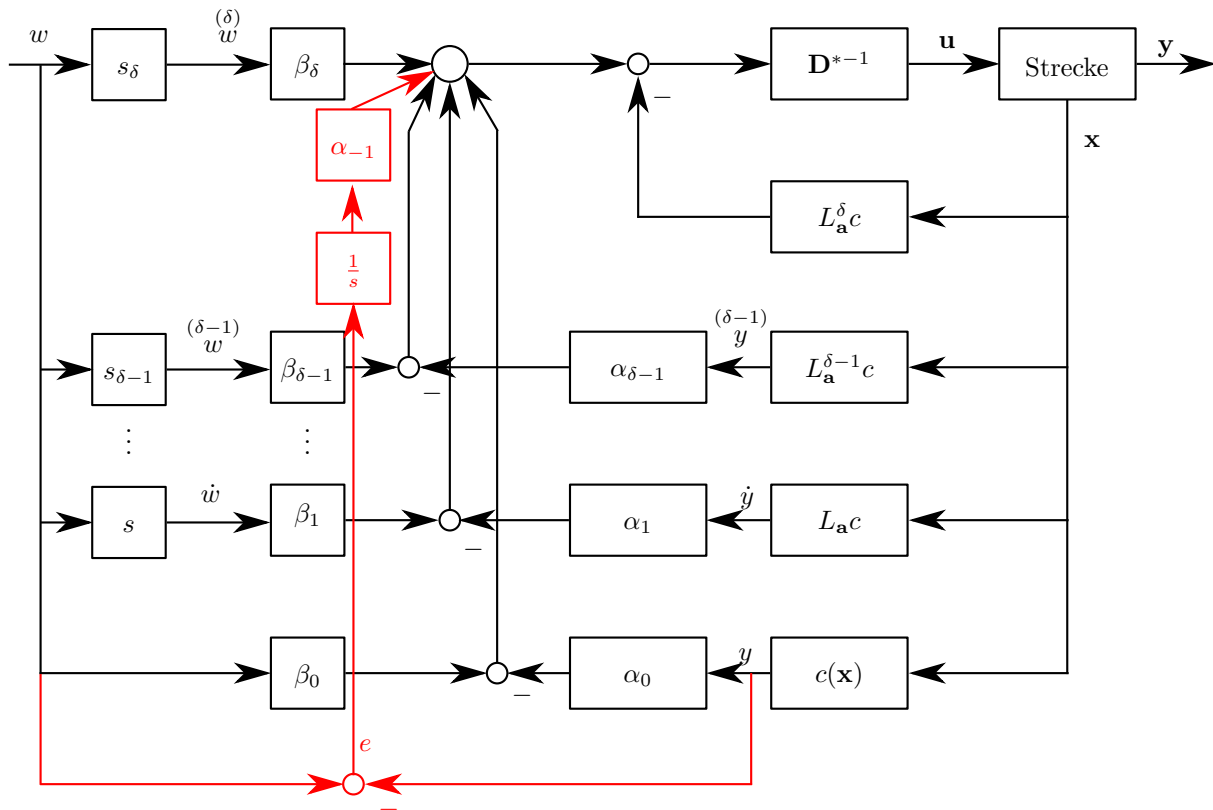
(Anfangswertverhalten, Fehlerdynamik)

Also eine DGL für den Folgefehler e_i .

- exaktes Tracking, Führungsfehler $e_i = 0$
- $w(t)$ muss wegen Differentiation hinreichend glatt, „weich“ gestaltet sein

1.1.5 I-Anteil

Um kleine Dauerstörung und Modellierungsfehler auszuregeln, kann ein I-Anteil hinzugefügt werden, wie in der Grafik gezeigt.



Blockschaltbild (Eingrößensystem) mit I-Anteil

Zu v_i tritt dann hinzu

$$v_i = \dots + \alpha_{-1} \int_0^t (w - y) dt$$

Das charakteristische Polynom ist dann

$$s^{\delta_i+1} + \alpha_{i,\delta_i-1} s^{\delta_i} + \dots + \alpha_{i,0} s + \alpha_{i,-1}$$

Beispiel Kraftfahrzeug: wird in der Übung 1.2 behandelt.

Stellgrößen:

$$u_1 = v \quad \text{Vorwärtsgeschwindigkeit}$$

$$u_2 = \varphi \quad \text{Lenkwinkel}$$

Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = u_1 \cos(\theta)$$

$$\dot{y} = u_1 \sin(\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{u_1}{l} \tan u_2$$

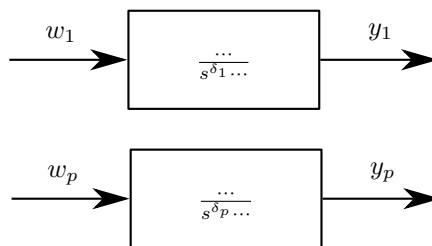
Ausgangsgrößen:

$$y_1 = x$$

$$y_2 = y$$

1.1.6 Stabilität

Bei obigen Entwürfen $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_p$ Pole vorgegeben.



Es gilt $\delta \leq n$

Fall I: $\delta < n$,

man gibt also weniger als n Pole vor. Schon bei der Entkopplung linearer Systeme gilt: Es entstehen nicht beobachtbare Eigenwerte durch Kompensation mit invarianten Nullstellen. Liegen solche IN auf oder rechts der imaginären Achse, so tritt Instabilität ein. Entsprechendes gilt bei nichtlinearen Systemen. Man spricht von (stabilen oder instabilen) zero dynamics (zu deutsch: Nulldynamik).

Fall II: $\delta = n$,

platziert man alle n Pole links, so ist die Regelung im Allgemeinen „asymptotisch stabil“, jedoch nur, wenn keine Singularitäten in den diversen Nichtlinearitäten zum Tragen kommen.

Offene Frage: Was tun bei Stabilitätsproblemen wegen $\delta < n$?

1.2 Eingangs- Zustandslinearisierung (Eingrößensystem)

1.2.1 Gezieltes Erzeugen maximaler Differenzordnung $\delta = n$

System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}) \cdot u$$

$$y = c(\mathbf{x})$$

Grundgedanken: Führt der natürliche Ausgang y auf $\delta < n$ so liegt es nahe, einen fiktiven Ausgang $y^* = c^*(\mathbf{x})$ zu suchen, der $\delta^* = n$ hat. Für diesen Ausgang kann eine stabilisierende Regelung entworfen werden. Allerdings weist der natürliche Ausgang dann im Allgemeinen kein lineares Verhalten auf.

Weg 1: durch Probieren: Aus der Anschauung eine technisch sinnvolle Größe wählen, die von der Stellgröße „möglichst weit weg“ liegt (BB 1.3)

Weg 2: Systematische Lösung: Für $\delta = n$ darf u erst auf $y^{(n)}$ direkt einwirken.

$$\begin{aligned}
 y^* &= c^*(\mathbf{x}) \\
 \dot{y}^* &= L_{\mathbf{a}} c^*(\mathbf{x}) + \underbrace{\left[\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T}_{=0} \mathbf{b} \cdot u \\
 &\vdots \\
 y^{(n-1)*} &= L_{\mathbf{a}}^{n-1} c^*(\mathbf{x}) + \underbrace{\left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{n-2} c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T}_{=0} \mathbf{b} \cdot u
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$y^{(n)*} = L_{\mathbf{a}}^n c^* + \underbrace{\left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{n-1} c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T}_{=g^*(\mathbf{x}) \neq 0} \mathbf{b} \cdot u \tag{1.9}$$

Die n Forderungen als Zeilenvektor

$$\left[\left[\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{b} \quad \left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}} c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{b} \quad \dots \quad \left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{n-2} c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{b} \quad \left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{n-1} c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{b} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Mit 1.8 gilt hier die Regel (BB 1.4):

$$\left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^k c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{b} = \left[\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{k-1} c^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \quad k = 1, \dots, \delta - 1 \tag{1.11}$$

Darin ist die sogenannte Lie-Klammer $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ definiert:

$$\langle \mathbf{b}(\mathbf{x}), \mathbf{a}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Durch sukzessive Anwendung vereinfacht sich 1.10:

$$\left[\left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{b} \quad \left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \quad \left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \langle \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \mathbf{a} \rangle \quad \dots \quad \left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \langle \langle \dots \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \mathbf{a}, \dots \rangle, \mathbf{a} \rangle \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

$$\left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & \langle \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \mathbf{a} \rangle & \dots & \langle \langle \dots \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \mathbf{a}, \dots \rangle, \mathbf{a} \rangle \end{bmatrix}}_{\text{„Steuerbarkeitsmatrix“ } \mathbf{Q}_S(\mathbf{x})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

speziell für $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ ist $\mathbf{Q}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$

Ergebnis: Der fiktive Ausgang $y^* = c^*(\mathbf{x})$ muss aus den n partiellen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \mathbf{Q}_S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}_S^{-1}(\mathbf{x}) \quad (1.15)$$

bestimmt werden.

1.2.2 Nichtlineare Regelung und Eingangszustandslinearisierung

Besitzt das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u$, $y^* = c^*(\mathbf{x})$ Differentialordnung $\delta = n$, dann ist eine *Transformation* auf Regelungsnormalform (RNF) gegeben durch

$$\begin{aligned} z_1 &= y^* = c^*(\mathbf{x}) \\ z_2 &= \dot{y}^* = L_{\mathbf{a}}c^*(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ z_n &= \overset{(n)}{y^*} = L_{\mathbf{a}}^{n-1}c^*(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Man kann zeigen: Diese Abbildung $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$ ist (zumindest lokal) invertierbar $\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z})$.

Wegen

$$\overset{(n)}{y^*} = \underbrace{L_{\mathbf{a}}^n c^*(\mathbf{x})}_{f(\mathbf{x})} + \underbrace{\left(\frac{\partial L_{\mathbf{a}}^{n-1} c^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T}_{g(\mathbf{x})} \mathbf{b} u$$

lautet das System in nichtlinearer Regelungsnormalform:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= f(\phi^{-1}(\mathbf{z})) + g(\phi^{-1}(\mathbf{z})) \cdot u \\ y^* &= z_1 \end{aligned}$$

Durch das Regelgesetz

$$u = \frac{1}{g(\phi^{-1}(\mathbf{z}))} \cdot [-f - a_{n-1}z_n - \dots - a_0z + a_0w]$$

geht das System über in ein *lineares* System in Regelungsnormalform.

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= -a_{n-1}z_n - \dots - a_0z + a_0w\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Suche nach einer Transformation auf nichtlineare Regelungsnormalform ist gleichbedeutend mit der Suche nach einem fiktiven Ausgang $\delta = n$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1 - k_2)x_2 + k_1 \sin(x_1 + x_2) + u \\ \dot{x}_2 &= -k_2x_2 + k_1 \sin(x_1 - x_2) + u\end{aligned}$$

für $\delta > 1$

$$\left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{z.B. } \left(\frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial c^*}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial c^*}{\partial x_2} = -1, y^* = \underbrace{x_1 - x_2}_{c^* \text{ bestimmt werden.}}$$

Transformation

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= y^* = x_1 - x_2 \\ z_2 &= \dot{y}^* = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_2 \end{aligned} \right\} \mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$$

Umkehrung

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= z_1 + z_2 \\ x_2 &= z_2 \end{aligned} \right\} \mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z})$$

Ergebnis: Regelungsnormalform

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_2z_2 + k_1 \sin(z_1) + u\end{aligned}$$

1.2.3 Verallgemeinerte Regelungsnormalform

siehe Beiblatt 1.6

1.3 Differentielle Flachheit

1.3.1 Motivation

Besitzt ein System Differenzialordnung $\delta = n$, so kann man einen gewünschten (hinreichend oft differenzierbaren) Zeitverlauf $y(t)$ frei vorgeben und den dafür notwendigen Stellgrößenverlauf $u(t)$ wie folgt berechnen:

Nichtlineare Regelungsnormalform (NLRNF)

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 = \dot{y} \\
 \dot{z}_3 &= z_3 = \ddot{y} \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{n-1} &= z_n = {}^{(n-1)}y \\
 \dot{z}_n &= \tilde{f}(\mathbf{z}) + \tilde{g}(\mathbf{z}) u \\
 y &= z_1
 \end{aligned}$$

Durch umstellen nach u

$$u = \frac{1}{\tilde{g}\left(y, \dot{y}, \dots, {}^{(n-1)}y\right)} \left[{}^{(n)}\dot{y} - \tilde{f}\left(y, \dot{y}, \dots, {}^{(n-1)}y\right) \right]$$

Auch die Verläufe der Zustandsgrößen \mathbf{z} (und damit auch von $\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z})$) lassen sich aus $y(t)$ direkt angeben:

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= y(t) \\
 &\vdots \\
 z_n(t) &= {}^{(n-1)}y(t)
 \end{aligned}$$

1.3.2 Verallgemeinerung

Ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}}_{(n,1)} = \mathbf{f}_{(n,1)}\left(\mathbf{x}_{(n,1)}, \mathbf{u}_{(p,1)}\right), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.16)$$

heißt *differentiell flach* (kurz flach), wenn sich p fiktive Ausgangsgrößen

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} c_1\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, {}^{(\alpha)}\dot{\mathbf{u}}\right) \\ \vdots \\ c_p\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, {}^{(\alpha)}\dot{\mathbf{u}}\right) \end{bmatrix} = \mathbf{c}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, {}^{(\alpha)}\dot{\mathbf{u}}\right) \quad (1.17)$$

angeben lassen, derart dass die Zustandsgrößen und die Stellgrößen darstellbar sind als

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, {}^{(\beta)}\dot{\mathbf{y}}\right) \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, {}^{(\beta+1)}\dot{\mathbf{y}}\right) \quad (1.19)$$

Der Vektor \mathbf{y} heißt dann *flacher Ausgang* der Systems (BB 1.7).

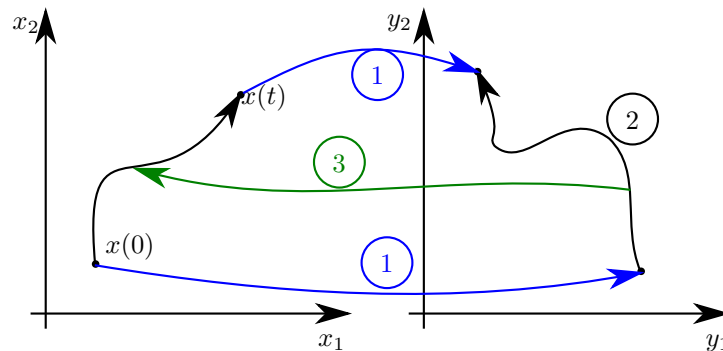
Anwendung: Steuerung und Trajektorienfindung. Durch die Gleichungen (1.18) und (1.19) kann eine Steuerung sofort angegeben werden.

Beispiel:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \text{ flach}$$

gegeben: $\mathbf{x}(0)$ und gewünschtes $\mathbf{x}(t_e)$

gesucht: $\mathbf{u}(t)$

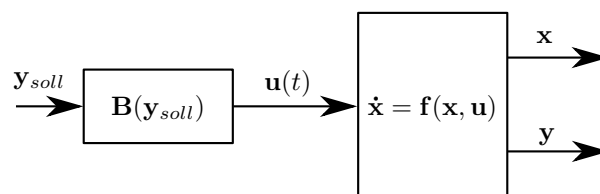


1. Durch $\mathbf{x}(0)$ und $\mathbf{x}(t_e)$ sind $\mathbf{y}(0)$ und $\mathbf{y}(t_e)$ gegeben.
2. Nun kann sein Verlauf $\mathbf{y}_{\text{soll}}(t)$ zwischen diesen Punkten frei vorgegeben werden, aber so dass 1.18 für $t = 0$ und $t = t_e$ eingehalten wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A} \left(\mathbf{y}_{\text{soll}}(0), \dot{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(0), \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(0) \right) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A} \left(\mathbf{y}_{\text{soll}}(t_e), \dot{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(t_e), \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(t_e) \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \left(\mathbf{y}_{\text{soll}}(t), \dot{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(t), \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(t) \right) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{B} \left(\mathbf{y}_{\text{soll}}(t), \dot{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(t), \dots, \overset{(\beta+1)}{\mathbf{y}}_{\text{soll}}(t) \right) \end{aligned}$$



1.4 Zustandsbeobachtung nichtlinearer Systeme

1.4.1 Entwurf durch Linearisierung der Fehler DGL

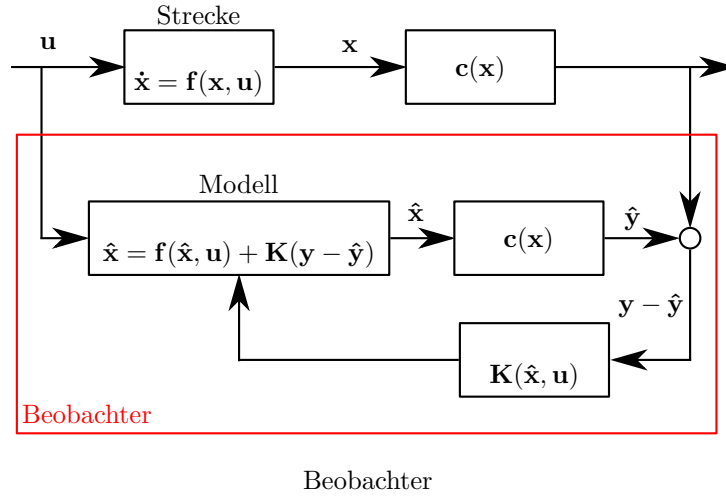
nichtlineare Strecke:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}, \underset{(p,1)}{\mathbf{u}} \right), \quad \underset{(q,1)}{\mathbf{y}} = \mathbf{c}(\mathbf{x})$$

Ansatz für Beobachter:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}_{\text{Streckenmodell}} + \underbrace{\mathbf{k}_{(n,q)}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}_{\text{Ausgangsfehler}} \cdot \underbrace{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}_{\text{Ausgangsfehler}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}})$$



$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) (\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}})) \quad (1.20)$$

Taylorentwicklung von \mathbf{f} um $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \underbrace{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}_{\tilde{\mathbf{x}}} + \text{Rest} \xrightarrow{0} \quad (1.21)$$

$$\text{dabei ist } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Entsprechend

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \underbrace{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}_{\tilde{\mathbf{x}}} + \text{Rest} \xrightarrow{0} \quad (1.22)$$

Somit aus (1.20):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \right]}_{\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})} \tilde{\mathbf{x}}$$

Nun $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ so wählen, dass $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ konstant wird und gewünschte Eigenwerte β_i hat.

Bestimmung von \mathbf{K} :

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = \det \left[s\mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \right] \stackrel{!}{=} (s - \beta_1) \cdots (s - \beta_n)$$

$$s^n + a_{n-1}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{K}) s^{n-1} + \cdots + a_0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{K}) \stackrel{!}{=} s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \cdots + p_0$$

$$\rightarrow \text{Koeffizientenvergleich : } \left. \begin{array}{l} a_0(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{K}) = p_0 \\ \vdots \\ a_n(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{K}) = p_n \end{array} \right\} n \text{ Gleichungen zur Bestimmung von } \mathbf{K}$$

Im Allgemeinen wird durch die so erhaltene Matrix \mathbf{K} die Matrix \mathbf{F} nicht konstant gehalten. Wie sich in der Praxis zeigt kann der Beobachter dennoch brauchbar sein. (siehe Beiblatt 1.8)

1.4.2 Entwurf über Beobachtungsnormalform

Liegt das System in folgender verallgemeinerter *Beobachtungsnormalform* vor

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

Dann wird der Beobachter folgendermaßen gewählt:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

Für die Ableitung $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$ des Fehlers $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{a}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \mathbf{K}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Darin kann \mathbf{K} zur Einstellung gewünschter Beobachtereigenwerte gewählt werden, sofern (\mathbf{A}, \mathbf{C}) beobachtbar ist. (siehe Beiblatt 1.6)

Kapitel 2

Stabilität

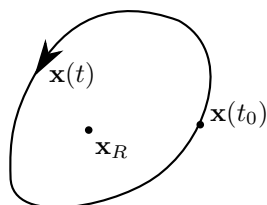
2.1 Stabilitätsverhalten der Ruhelagen

Ruhelagen eines nichtlinearen Systems (siehe Beiblatt 2.1)

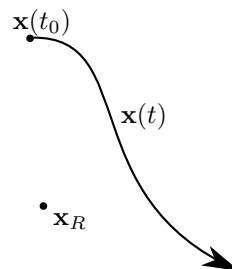
Definition: Die *Ruhelage* \mathbf{x}_R eines Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \text{ mit } \mathbf{u} = \text{konstant}$$

heißt *stabil*, wenn der Zustandspunkt $\mathbf{x}(t)$ des Systems für alle Zeiten $t > t_0$ in einer beliebig engen Umgebung der Ruhelage bleibt, sofern der Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$ genügend nahe bei der Ruhelage liegt. Anderenfalls heißt \mathbf{x}_R instabil.



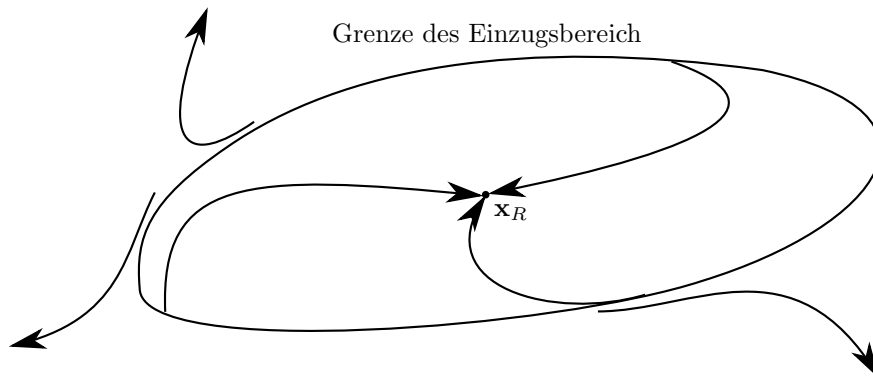
(a) \mathbf{x}_R stabil



(b) \mathbf{x}_R instabil

Betrachtung der Ruhelage

Definition: Eine Ruhelage heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und überdies eine Umgebung besitzt, aus der $\mathbf{x}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen die Ruhelage strebt. Eine stabile aber nicht asymptotisch stabile Ruhelage heißt auch „*schwach stabil*“. Definition: Die Gesamtheit aller Punkte im Zustandsraum, aus denen die Trajektorie für $t \rightarrow \infty$ gegen \mathbf{x}_R strebt, heißt *Einzugsbereich* der Ruhelage \mathbf{x}_R .

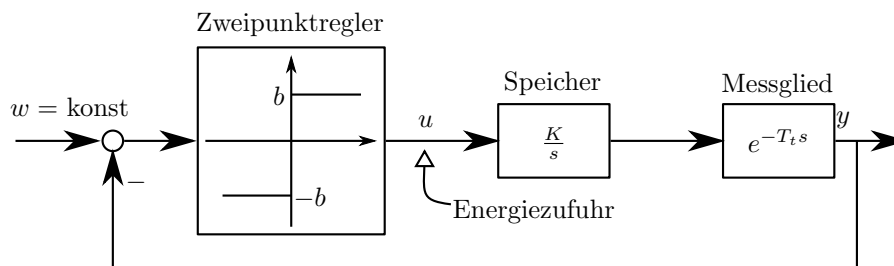


Der Einzugsbereich

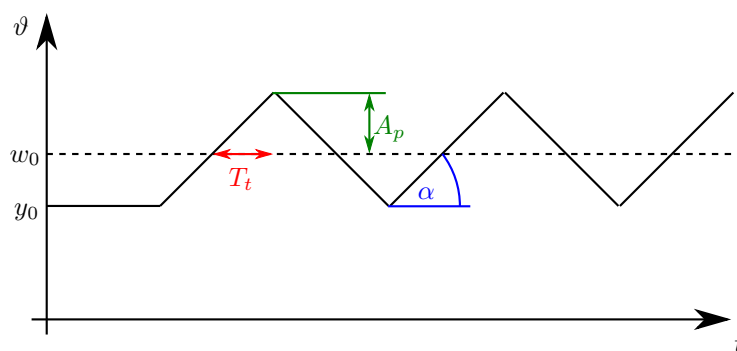
Definition: Eine Ruhelage heißt *global asymptotisch stabil*, wenn sie asymptotisch stabil ist und wenn ihr Einzugsbereich den gesamten Zustandsraum umfasst. (siehe Beiblatt 2.1, 2.2 Dauerschwingung)

2.2 Dauerschwingungen

Beispiel Temperaturregelung



Blockschaltbild Temperaturregelung



Zeitverlauf der Temperatur

$$\tan \alpha = b \cdot K = \frac{A_p}{T_t} \rightarrow A_p = b K T_t \quad T_{\text{Periodendauer}} = 4 T_t \quad \text{Resultat: Dauerschwingung}$$

Wird die Amplitude A_p einer Dauerschwingung (DS) um ΔA geändert, so weist der entstehende Übergangsvorgang vor allem drei Verhaltensweisen auf:

I Er strebt stets gegen die ursprüngliche Dauerschwingung (abgesehen von einer Phasenverschiebung) → stabile Grenzschwingung (GS)

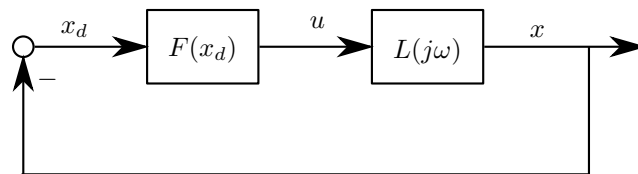
II Er strebt für $\delta A > 0$ gegen die ursprüngliche Dauerschwingung, für $\delta A < 0$ aber von ihr weg, oder umgekehrt. → semistabile Grenzschwingung

III Er strebt stets von der ursprünglichen Dauerschwingung weg. → instabile Grenzschwingung

Kriterium zum Auftreten von Dauerschwingung, sowie Ermittlung von Amplitude und Frequenz durch „*Harmonische Balance*“.

2.3 Absolute Stabilität und Popov Kriterium

Ausgangspunkt: nichtlinearer Standardregelkreis (siehe Beiblatt 2.3)



(siehe Beiblatt 2.4)

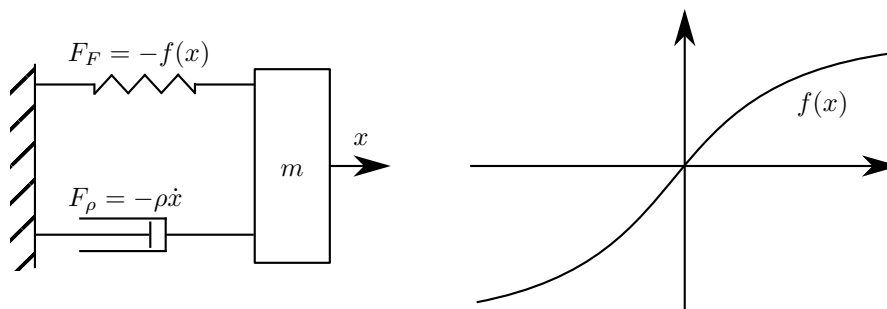
Kapitel 3

Analyse und Synthese mittels Ljapunow-Funktionen

3.1 Grundgedanke der Direkten Methode nach Ljapunow

Direkte Methode = Methode zur Stabilitätuntersuchung, ohne die Zustands-DGL zu lösen (Ljapunow 1893).

Durch Energiebetrachtung: Wenn die Energie eines Systems laufend abnimmt, wird es zur Ruhe kommen.



Beispiel: Mechanischer Schwinger

Zustandsvariablen: $x_1 = x$ $x_2 = \dot{x}$

$$m\ddot{x} = -f(x) - \rho\dot{x}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{m}f(x_1) - \frac{\rho}{m}x_2 \end{aligned} \right\} \text{Ruhelage } x_{1s} = x_{2s} = 0$$

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \int_0^{x_1} f(\nu) d\nu$$

Dieses Beispiel ist positiv definit. Das heißt $E \geq 0$, wobei $E = 0$ nur für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gilt.

$$\begin{aligned} \dot{E} &= mx_2\dot{x}_2 + f(x_1)\dot{x}_1 \\ &= mx_2 \cdot \left[-\frac{1}{m}f(x_1) - \frac{\rho}{m}x_2 \right] + f(x_1)x_2 \\ &= -\rho x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

\dot{E} ist negativ semidefinit ($\dot{E} = 0$ für $x_2 = 0$, x_1 beliebig)

Wenn $\dot{E} \equiv 0$, dann $x_2 \equiv 0$, $\rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \rightarrow f(x_1) \equiv 0 \rightarrow x_1 \equiv 0$: Ruhelage $x_1 = x_2 = 0$

Also: Energie nimmt monoton ab. Diese Abnahme kommt erst zum Stillstand, wenn $x_1 = x_2 = 0$. Ruhelage $\mathbf{0}$ ist global asymptotisch stabil.

Verallgemeinerung auf beliebige dynamische Systeme undurchführbar, weil die Abnahme der Energie komplizierter erfolgen kann z.B. oszillierend und dann schwer überschaubar.

Grundgedanken von Ljapunow: Statt der Energie $E(\mathbf{x})$ nimmt man eine Funktion $V(\mathbf{x})$, die positiv definit ist und deren Ableitung $\dot{V}(\mathbf{x})$ negativ definit (oder zumindest negativ semidefinit) ist. Sie heißt Ljapunow-Funktionen.

3.2 Stabilitätskriterien

1. Kriterium für asymptotische Stabilität in kleinen (lokal).

Gegeben:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, \dots, n$$

mit der Ruhelage: $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$

Es gebe eine Funktion $V(\mathbf{x})$, die in einer Umgebung um $\mathbf{0}$ stetig differenzierbar ist und die beiden folgenden Eigenschaften hat:

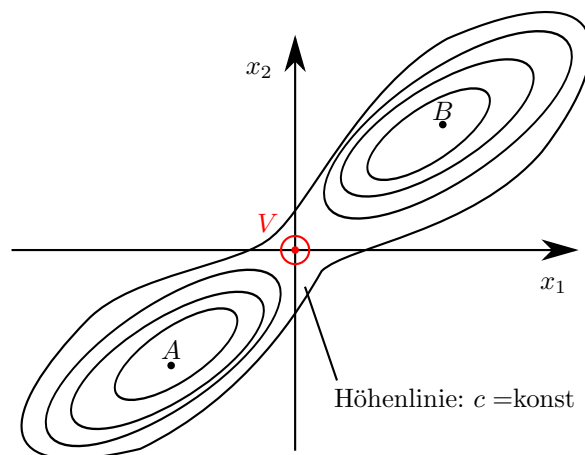
I V ist positiv definit, das heißt $V \geq 0$ und $= 0$ nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

II $\dot{V} = \frac{d}{dt} V(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x})$ ist negativ definit, das heißt $\dot{V} \leq 0$ und $= 0$ nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

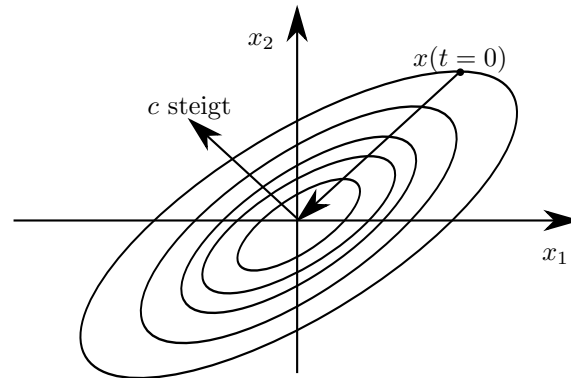
Dann ist die Ruhelage $\mathbf{0}$ *asymptotisch stabil*

2. Kriterien für asymptotische Stabilität im ganzen (global). Gelten die Voraussetzungen I und II im gesamten Zustandsraum und strebt zusätzlich.

III $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \rightarrow \infty$ so ist die Ruhe $\mathbf{0}$ *global asymptotisch stabil*.



Geometrische Plausibilitätsbetrachtung für $n = 2$

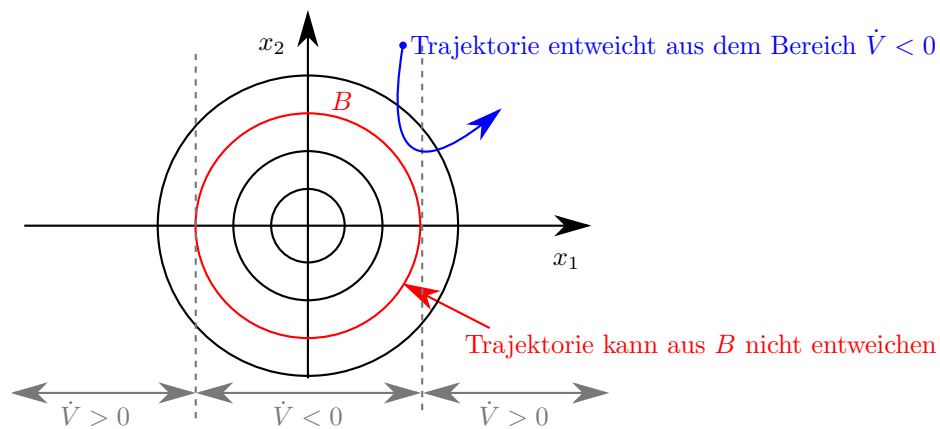


$\dot{V} < 0$, d.h. $V(t)$ fällt streng monoton $\Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$

Mit Voraussetzung I, II und III

Hinweis: Hier gilt auch die Umkehrung: Wenn ein System $\dot{x} = f(\mathbf{x})$ (mit stetig differenzierbarem f) global asymptotisch stabil ist, dann existiert eine positiv definite Funktion V mit negativ definiter Ableitung \dot{V} .

3. Kriterium des asymptotischen Stabilität mit großem Einzugsbereich (lokal mit Einzugsbereich). $V(\mathbf{x})$ sei in einem Bereich des Zustandsraums stetig differenzierbar und positiv definit, während \dot{V} dort negativ definit ist. Innerhalb dieses Bereichs sei B ein Gebiet, das durch eine geschlossene Höhenlinie $V(\mathbf{x}) = c > 0$ begrenzt werde und die Ruhelage $\mathbf{0}$ enthalte. Dann ist die Ruhelage $\mathbf{0}$ asymptotisch stabil und B gehört zu ihrem Einzugsbereich.



Abschwächung von II:

II* $V \leq 0$ aber nicht identisch 0 entlang einer Trajektorie der Zustandsgleichung (außer $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

Anwendung: Man weist nach, dass die Identität $\dot{V} = 0$ mit den Zustandsgleichungen nur verträglich ist für $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

Beispiel für Schwinger: Kriterium für gewöhnliche Stabilität (siehe Beiblatt 3.2)

3.3 Konstruktion von Ljapunow-Funktionen

3.3.1 V positiv definit vorgeben

Man geht von einer positiv definiten Funktion aus, die freie Parameter enthält. Man bildet \dot{V} und wählt die Parameter so, dass in einem möglichst großen Bereich um die Ruhelage $\mathbf{0}$ \dot{V} negativ definit ist. Auf diesen

Bereich wendet man das Kriterium für asymptotische Stabilität im Großen an.

Einfacher Typ positiv definiter Funktionen:

$$V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2, \quad \lambda_i > 0$$

Verallgemeinerung

Quadratische Form:

$$V = \sum_{i,k=1}^n p_{ik} x_i x_k = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad \text{mit } \mathbf{P}^T = \mathbf{P}$$

Wann ist V positiv definit?

1. Kriterium von Sylvester: Genau dann, wenn die „nordwestlichen“ Unterdeterminanten von \mathbf{P} positiv sind.

Das heißt man bildet

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$
$$p_{11}, \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \det \mathbf{P}$$

Diese müssen > 0 sein.

2. Kriterium: \mathbf{P} ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von \mathbf{P} positiv sind.

Beispiel für die Anwendung der Ljapunow-Funktion:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^3 x_2 & \text{Ruhelage: } \mathbf{x}_R = 0 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

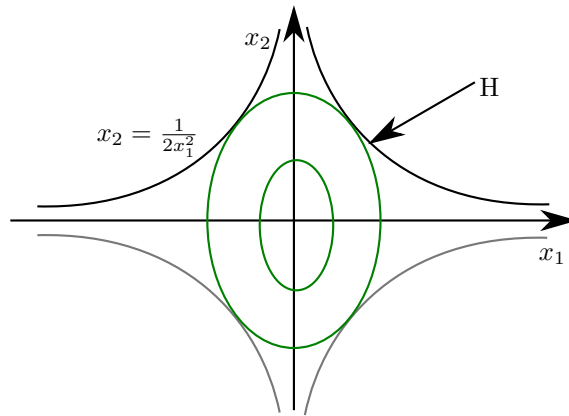
Ansatz:

$$\begin{aligned} V &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2, & \lambda_{1/2} > 0 \rightarrow V \text{ positiv definit} \\ \dot{V} &= 2\lambda_1 x_1 \dot{x}_1 + 2\lambda_2 x_2 \dot{x}_2 \\ &= 2\lambda_1 x_1 (-x_1 + 2x_1^3 x_2) + 2\lambda_2 x_2 (-x_2) \\ &= -2\lambda_1 x_1^2 (1 - 2x_1^2 x_2) - 2\lambda_2 x_2^2 \end{aligned}$$

$\rightarrow \dot{V}$ negativ definit wenn $1 - 2x_1^2 x_2 > 0$ bzw. $2x_1^2 x_2 < 1$

Grenzfall:

$$\begin{aligned} 2x_1^2 x_2 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{2x_1^2} \end{aligned}$$



Höhenlinien von V sind Ellipsen: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$

Eine der Ellipsen berührt diese Hyperbel H . Ihr Innengebiet ist Teil des Einzugsbereichs von $\mathbf{0}$, nach dem Kriterium für asymptotische Stabilität im Großen. Wählt man λ_1 und λ_2 variabel, aber so dass die Ellipsen H berühren, so erhält man den rot schraffierten Bereich als gesicherten Teil des gesamten Einzugsbereichs. (siehe Beiblatt 3.3)

3.3.2 Methode des variablen Gradienten

Siehe BB 3.4

3.4 Reglersynthese mittels Ljapunow-Funktionen

3.4.1 Regelungs-Ljapunow-Funktionen

Strecke:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u, \quad \mathbf{x}_R = \mathbf{0}$$

Ziel: Regelgesetz so, dass die Regelung die globale asymptotisch stabile Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ besitzt.

Funktion $V(\mathbf{x})$ ist positiv definit und $V(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$

Damit $\dot{V} < 0$, muss gelten:

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x})}_{a(\mathbf{x})} + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x})}_{b(\mathbf{x})} \cdot u \stackrel{!}{<} 0$$

Für $b(\mathbf{x}) \neq 0$ kann $\dot{V} < 0$ durch ein geeignetes u stets erreicht werden. Für $b(\mathbf{x}) = 0$ muss erfüllt sein: $a(\mathbf{x}) < 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Definition: Eine stetig differenzierbare, positiv definite Funktion V (mit $V(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$) heißt *Regelungs-Ljapunow-Funktion* des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u$, wenn für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ aus $b(\mathbf{x}) = 0$ folgt: $a(\mathbf{x}) < 0$.

3.4.2 Sontagsche Reglerform

$$u = \begin{cases} -b(x) \underbrace{\frac{a(\mathbf{x}) + \sqrt{a^2(\mathbf{x}) + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} b^2(\mathbf{x})}}{b^2(\mathbf{x})}}_{\lambda(\mathbf{x}) > 0} & \text{für } b \neq 0 \\ 0 & \text{für } b = 0 \end{cases}$$

sorgt (mit Q positiv definit) für global asymptotische Stabilität, sofern $V(\mathbf{x})$ eine Regelungs-Ljapunow-Funktion ist.

Beweis: Einsetzen von u in \dot{V} liefert für $b \neq 0$:

$$\dot{V} = a + b \left(-\frac{a + \sqrt{a^2 + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} b^2}}{b} \right) = -\sqrt{\dots} < 0$$

Gleichzeitig wird das Gütemaß

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^2) dt$$

minimiert. (siehe Beiblatt 3.5 mit Beispiel)

3.5 Ausblick: Passivität und nichtlineare H_{∞} -Regelung

siehe Beiblatt 3.6

Kapitel 4

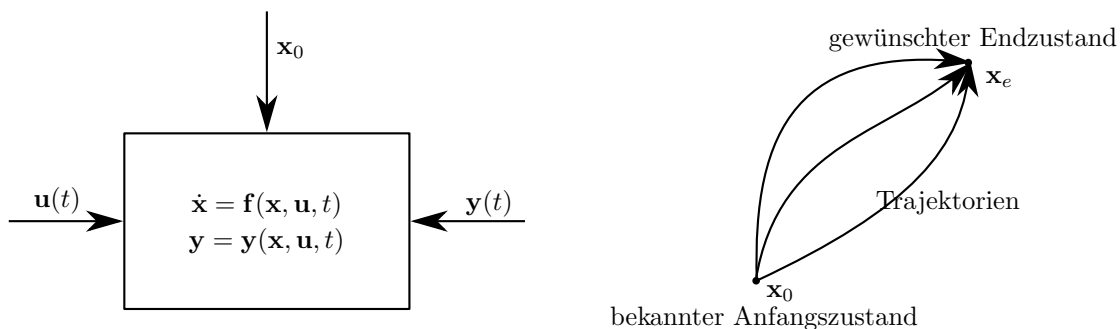
Optimierung dynamischer Systeme als Variationsproblem

Optimieren heißt, ein Gütemaß durch geeignete Wahl der verfügbaren technischen Daten zum Extremum zu machen. Man kann sich dabei auf das Minimum beschränken.

Es gibt zwei Arten der Optimierung:

1. Parameteroptimierung: Struktur des Reglers liegt fest, (PI-Regler) und nur die Parameter sind verfügbar.
2. Strukturoptimierung: Vorgegeben: Strecke und Gütemaß; Gesucht: Steuergröße $u(t)$ (bzw. Struktur des Reglers)

Im Folgenden: Strukturoptimierung



System und Trajektorie

4.1 Gütemaß und Optimierungsproblem

siehe Beiblatt 4.0

Strukturoptimierung = Minimierung eines Funktionals = Variationsproblem

4.2 Optimale Regelung

Angenommen Variationsproblem sei gelöst

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}_0) \quad \text{optimale Steuerfunktion}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}_0) \quad \text{optimale Trajektorie}$$

Um zeitliche Störungen abzufangen, geht man zur Regelung über

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$$

in u einsetzen:

$$\begin{aligned} u &= u^*(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x})) \\ &= k(\mathbf{x}, t) \quad \text{optimales Regelgesetz} \end{aligned}$$

4.3 Lösung des Optimierungsproblems

4.3.1 Vorbereitung: Grundproblem der Variationsrechnung

$$J = \int_{t_0}^{t_e} g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt \stackrel{!}{=} \min \quad t_0, t_e, \text{ fest} \quad (4.1)$$

gegeben $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$

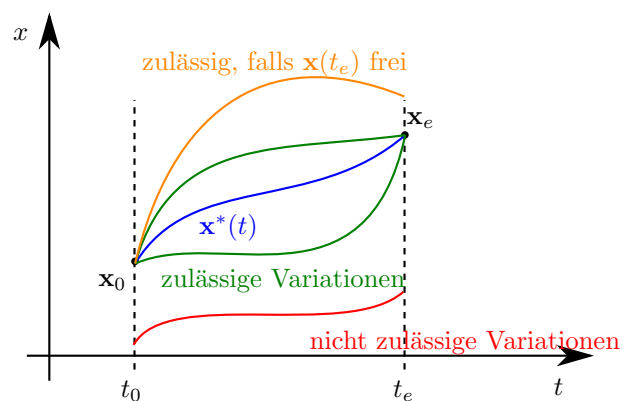
gesucht $\mathbf{x}(t)$

Annahme: die optimale Lösung sei $\mathbf{x}^*(t)$

Vergleichskurven nach Euler

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \underbrace{\epsilon \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}_{\text{Variation}} \quad |\epsilon| < \epsilon_0, \epsilon_0 > 0 \quad (4.2)$$

Die optimale Lösung ist für $\epsilon = 0$ enthalten. $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ beliebig, jedoch so, dass $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0}$ und $\tilde{\mathbf{x}}(t_e) = \mathbf{0}$



Die optimale Trajektorie und zulässige Varianten

Einsetzen von 4.2 in 4.1:

$$J = \int_{t_0}^{t_e} g(\mathbf{x}^* + \epsilon \tilde{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}^* + \epsilon \dot{\tilde{\mathbf{x}}}, t) dt = F(\epsilon) \quad (4.3)$$

Da die optimale Lösung für $\epsilon = 0$ hervorgeht, muss F für $\epsilon = 0$ ein Minimum aufweisen:

$$\left. \frac{dF}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (4.4)$$

\Rightarrow Zurückführung des Variationsproblems auf ein Extremalproblem ((4.4) ist jedoch nur notwendige Bedingung).

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_e} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \epsilon}}_{=\tilde{\mathbf{x}}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \epsilon}}_{=\dot{\tilde{\mathbf{x}}}} \right] dt \bigg|_{\epsilon=0} \\ &\stackrel{\epsilon=0}{=} \int_{t_0}^{t_e} \left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \tilde{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der zweite Summand wird partiell integriert, $\int ab = ab \int \dot{a}b$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t_e} \left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \right] \tilde{\mathbf{x}} dt}_{(1)} + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \tilde{\mathbf{x}} \right]_{t_0}^{t_e}}_{=0, \text{ da } \tilde{\mathbf{x}}(t_0)=\tilde{\mathbf{x}}(t_e)=\mathbf{0}} = 0$$

(1) Da $\tilde{\mathbf{x}}$ frei ist, kann das Integral nur 0 sein, wenn für die optimale Lösung folgender Zusammenhang gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 \quad (4.6)$$

Euler-Lagrange-Differentialgleichung

4.3.2 Anwendung auf das Problem der optimalen Steuerung

Problem:

Gütemaß:

$$J = h(\mathbf{x}(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \stackrel{!}{=} \min \quad (4.7)$$

Nebenbedingung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.8)$$

Anfangsbedingung: t_0 gegeben, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ beliebig gegeben

Endbedingung: t_e gegeben und

Fall 1: $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$ fest, dann $h = 0$

Fall 2: $\mathbf{x}(t_e) =$ frei

Lösung mittels eines Kunstgriffs von Lagrange: Berücksichtigung der Nebenbedingung $\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ im Gütemaß über *Lagrange-Multiplikatoren* $\psi(t)$

$$J = h(\mathbf{x}_e, t_e) + \int_{t_0}^{t_e} \underbrace{\left[g + \psi^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) \right]}_{\bar{g}} dt \quad (4.9)$$

Gesucht sind $\mathbf{x}^*(t)$, $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ und $\mathbf{u}^*(t)$, die wir zusammenfassen zu

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\psi}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

somit ist für Fall 1 ($h = 0$, $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$) das Gütemaß 4.9 vom Typ

$$J = \int_{t_0}^{t_e} \bar{g}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t) dt \quad (4.11)$$

und wir wenden die Euler-Lagrange-Differentialgleichung

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{z}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = 0$$

für jeden der Teilvektoren \mathbf{x} , $\boldsymbol{\psi}$ und \mathbf{u} an mit $\bar{g} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}(t))$.

1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \underbrace{(g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t))}_{H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, t)} - \frac{d}{dt} (-\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0} \\ \boxed{\dot{\boldsymbol{\psi}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \boldsymbol{\psi}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \cdot 0 = \mathbf{0} \\ \boxed{\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Das Gütemaß (4.9) ist also gegenüber (4.7) unverändert.

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \underbrace{(g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t))}_{H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, t)} - \frac{d}{dt} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \boxed{\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} &= 0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ergebnis (Fall 1): Die optimalen Verläufe \mathbf{x}^* , $\boldsymbol{\psi}^*$, und \mathbf{u}^* genügen notwendig 4.12 - 4.14 mit t_0 , t_e , \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_e fest.

Für Fall 2 ($\mathbf{x}(t_e)$ frei, $h \neq 0$) tritt noch die Transversalitätsbedingung

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right|_{t_e} = \mathbf{0}$$

hinzu. Hier

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t_e} - \boldsymbol{\psi}(t_e) = \mathbf{0} \quad \text{Transversalitätsbedingung} \quad (4.15)$$

Dabei ist

| | | |
|-----------------------------|-------------------|--------|
| $H = g + \psi^T \mathbf{f}$ | Hamilton Funktion | (4.16) |
|-----------------------------|-------------------|--------|

4.4 Grundsätzlicher Lösungsweg

siehe Beiblatt 4.2 bis 4.6

4.5 Beispiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_e} u^2 dt, \quad t_e \text{ ist fest} \\ x(0) &= x_0, \quad x(t_e) = 0\end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \psi u$$

a) Steuerungsgleichung $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ nach u auflösen.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \psi = 0$$

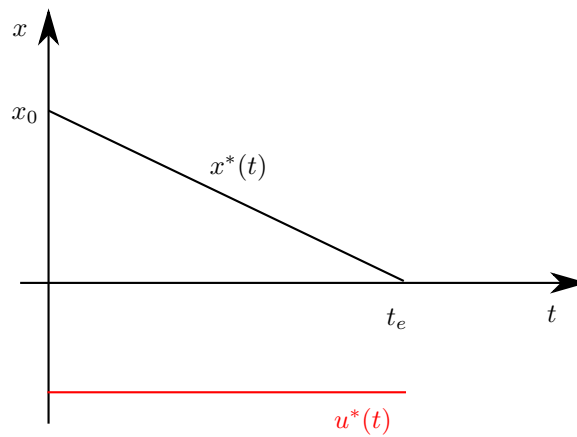
$u = -\psi$

b) kanonische Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u = -\psi \\ \dot{\psi} &= 0 \Rightarrow \psi(t) = c \\ \Rightarrow x(t) &= -ct + x(0)\end{aligned}$$

c) Randbedingung

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\ x(t_e) &= 0 \rightarrow ct_e = x_0 \rightarrow c = \frac{x_0}{t_e} \\ x^*(t) &= -\frac{x_0}{t_e}t + x_0 = x_0 \left(1 - \frac{t}{t_e}\right)\end{aligned}$$

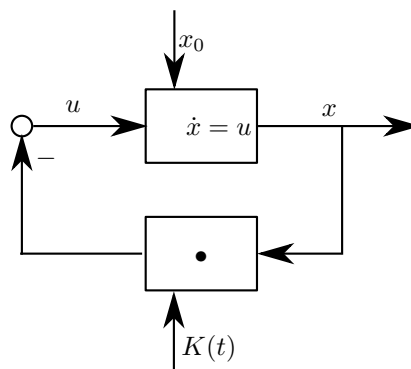


Verlauf der Zustände

d) Regelgesetz

$$u^*(t) = -\frac{x_0}{t_e}$$

$$u^*(t) = -\frac{1}{t_e \left(1 - \frac{t}{t_e}\right)} x^* = -\underbrace{\frac{1}{t_e - t}}_{k(t)} x^*(t)$$



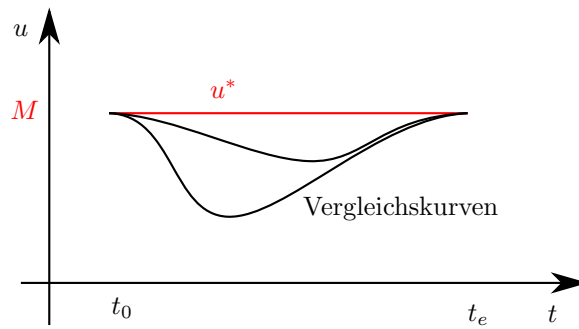
Regelkreis

Hinweis: Lineare Strecke und quadratisches Gütemaß mit t_e und $\mathbf{x}(t_e)$ fest, führt immer auf einen Regler, dessen Verstärkung gegen ∞ geht, für $t \rightarrow t_e$. Deshalb in der Praxis: $\mathbf{x}(t_e)$ und/oder t_e frei.

4.6 Grenzen der Methode

Die Herleitung der Gleichungen (1) bis (5) von Beiblatt 4.2 ist hinfällig, wenn *Beschränkungen* von Variablen berücksichtigt werden müssen.

Plausibilitätsbetrachtung: $u(t) \leq M$, $J = \int g dt$



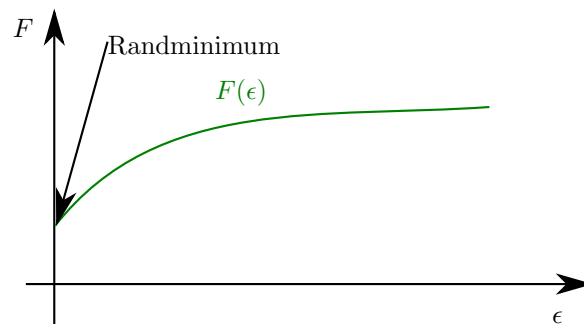
Beschränkter Eingang \mathbf{u}

Es sei $u^*(t) = M$

Vergleichskurve $u(t) = u^*(t) + \epsilon \tilde{u}(t)$

Damit sie zulässig sind: $\tilde{u}(t) \leq 0, \epsilon \geq 0$

Dann ist $J = F(\epsilon)$ nur noch für $\epsilon \geq 0$ erklärt



F in Abhängigkeit von ϵ

Dann ist $F(0)$ ein Randminimum $\rightarrow \frac{dF}{d\epsilon} > 0$, nicht $= 0$. Damit ist der früheren Schlussweise der Boden entzogen.

4.7 Optimierung *linearer* Systeme mit *quadratischem* Gütemaß

4.7.1 Aufgabe

Lineare Strecke: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

Quadratisches Gütemaß: $J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_e) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_e) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt$

Anfangsbedingung: t_0 gegeben, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ beliebig, fest

Endbedingung: t_e gegeben, $\mathbf{x}(t_e)$ frei

$\mathbf{S}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ symmetrisch

\mathbf{R} sei positiv definit, das heißt $\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} > 0$ für $\mathbf{u} \neq 0$

\mathbf{Q}, \mathbf{S} sei positiv semidefinit, das heißt $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \geq 0$

gesucht: Regelgesetz so, dass $\mathbf{x}(t_e)$ möglichst nah an $\mathbf{x}_B = 0$

4.7.2 Bestimmung des optimalen Regelgesetzes aus der Riccati Gleichung

Hamilton-Gleichungen:

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} &= -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} && \text{adjungierte Differentialgleichung} \\ 0 &= \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} && \text{Steuerungsgleichung} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} \quad (4.17)$$

Inverse \mathbf{R}^{-1} existiert, da \mathbf{R} positiv definit

4.17 in kanonische Differentialgleichungen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} \quad (4.18)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} \quad (4.19)$$

Es liegt nahe: linearer Ansatz für das Regelgesetz

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \quad (4.20)$$

Gemäß 4.17 ist das der Fall, wenn

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (4.21)$$

denn dann ist 4.17

$$\mathbf{u} = -\underbrace{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)}_{\mathbf{K}(t)} \mathbf{x}(t) \quad (4.22)$$

Bestimmung von \mathbf{P} durch Einsetzen von 4.21 in 4.18 und 4.19:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

$\dot{\mathbf{x}}$ eingesetzt:

$$\dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

$$\left(\dot{\mathbf{P}} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} \right) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Da diese Gleichung für beliebiges \mathbf{x} gelten soll, muss

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad (4.23)$$

Ricatti Gleichung (nichtlineare Matrix-Differentialgleichung)

Differentialgleichung 1. Ordnung für die n^2 Elemente der $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{P}(t)$

Anfangsbedingung zur Riccati-Gleichung:

Da $\mathbf{x}(t_e)$ frei, Transversalitätsbedingung

$$\boldsymbol{\psi}(t_e) - \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_e} = \mathbf{0}$$

hier:

$$h = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \Rightarrow \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t_e} = \mathbf{S} \mathbf{x}(t_e)$$

Außerdem wegen 4.21:

$$\boldsymbol{\psi}(t_e) = \mathbf{P}(t_e) \mathbf{x}(t_e)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(t_e) = \mathbf{S} \mathbf{x}(t_e)$$

für $\mathbf{x}(t_e)$ frei:

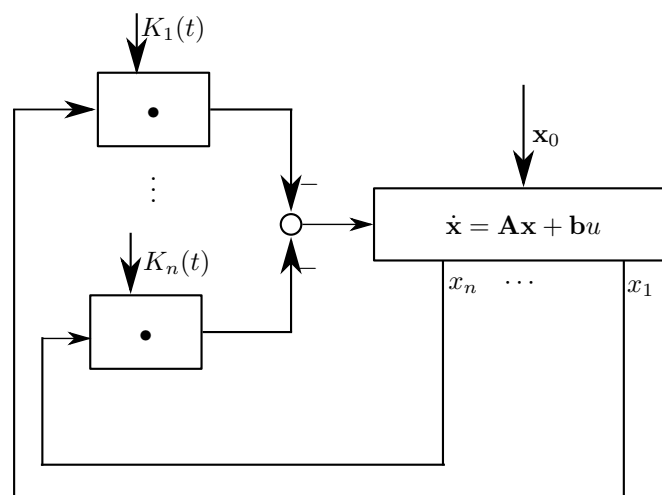
$$\mathbf{P}(t_e) = \mathbf{S} \quad (4.24)$$

Das Regelgesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$$

wobei $\mathbf{P}(t)$ die Lösung der Ricattigleichung mit der Endbedingung 4.24 ist, liefert unter allen möglichen Regelgesetzen $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ den kleinsten Wert des Gütemaßes J und zwar für beliebiges $t_0 < t_e$ und beliebigen Anfangszustand $\mathbf{x}(t_0)$.

Der Regler ist linear aber zeitvariant.



Eingrößensystem

Weitere Eigenschaften des Entwurfs:

- $\mathbf{P}(t)$ ist symmetrisch (siehe Beiblatt 4.3)

- Der minimale Wert des Gütemaßes ist

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

Die Lösung der Riccati-Gleichung erfolgt numerisch.

Beispiel siehe Beiblatt 4.4

Um einen *konstanten* Regler zu erhalten: $t_e \rightarrow \infty$ (Abschnitt 4.7.4)

4.7.3 Bestimmung des optimalen Regelgesetzes bei unendlichem Steuerintervall

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$; \mathbf{A} , \mathbf{B} konstant

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}(t_e)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t_e) + \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

damit das Integral existiert: $\mathbf{x}(\infty) = 0$ (bei \mathbf{Q} , \mathbf{R} , positiv definit und konstant)

Lösungsweg 1: Algebraische Riccati-Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q}$$

Daraus kann \mathbf{P} numerisch bestimmt werden. Zu nehmen ist die positiv definite Lösung von \mathbf{P} , das heißt $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$.

Lösungsweg 2: über Hamilton-Gleichungen (siehe Beiblatt 4.5)

4.8 Nichtlineare quadratische optimale Regelung

siehe Beiblatt 4.6

4.9 Ausblick: Model Predictive Control

Model Predictive Control (MPC) siehe Beiblatt 4.7 und numerische Integration siehe Beiblatt 4.8, 4.9

Kapitel 5

Das Minimum-Prinzip von Pontrjagin

Problem:

$$J = h((x)(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \stackrel{!}{=} \min$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

t_e fest oder frei, Endbedingung

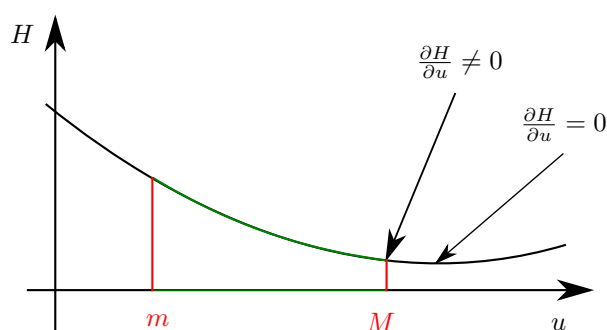
Die Lösung $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ genügt den Hamilton-Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

sofern die Variablen \mathbf{x} , \mathbf{u} unbeschränkt sind. Bei technischen Problemen ist aber die Steuergröße \mathbf{u} häufig beschränkt. Wie ändern sich dann die Hamilton-Gleichungen?

$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass H bezüglich \mathbf{u} ein Extremum annimmt, genauer ein Minimum, wie man durch Untersuchung von $\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2}$ zeigen kann. Das gilt sofern \mathbf{u} unbeschränkt ist.

Falls \mathbf{u} beschränkt ist, kann ein Randminimum auftreten



Minimum von H an der Schranke von u

Daher Vermutung: Falls \mathbf{u} beschränkt ist, ist $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ durch die allgemeine Forderung

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}, t) \stackrel{!}{=} \min_{\mathbf{u}}$$

zu ersetzen. In der Tat gilt: die Lösung \mathbf{x}, \mathbf{u} des Optimierungsproblems genügt auch bei beschränktem \mathbf{u} den folgen Beziehungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}, t) = \min_{\mathbf{u}}$$

Minimum-Prinzip von L.S. Pontrjagin (1956)

ursprünglich „Maximum-Prinzip“, siehe Beiblatt 5.0

Das Minimumprinzip ist nur eine notwendige Bedingung für die Lösung des Optimierungs-Problems. Es ist auch hinreichend beim zeitoptimalen Problem mit linearer Zeininvarianter Strecke.

5.1 Entwurf *zeitoptimaler* Systeme

5.1.1 optimale Steuerfunktion

$$J = \int_0^{t_e} 1 dt = t_e \stackrel{!}{=} \min$$

Strecke:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

Anfangsbedingung:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{beliebig}$$

Endbedingung:

$$\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{0}$$

Beschränkung:

$$-M_k \leq u_k \leq M_k \quad k = 1, \dots, p$$

Hamilton Funktion:

$$H = 1 + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Für ein Minimum von H bezüglich \mathbf{u} genügt es zu betrachten

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b}_p \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\psi} & \cdots & \mathbf{b}_p^T \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\psi} u_1 + \cdots + \mathbf{b}_p^T \boldsymbol{\psi} u_p \end{aligned}$$

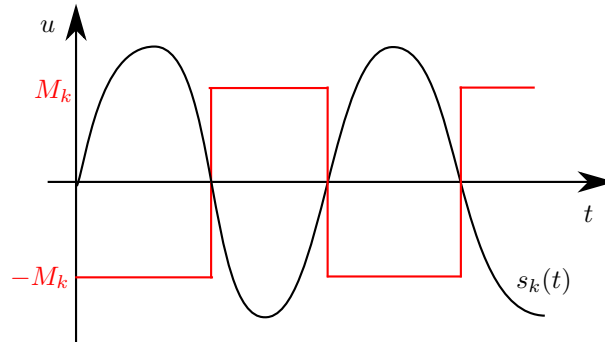
Zeitoptimale Steuerfunktion:

$$\begin{aligned} u_k^* &= \begin{cases} -M_k & \text{falls } \mathbf{b}_k^T \boldsymbol{\psi} > 0 \\ M_k & \text{falls } \mathbf{b}_k^T \boldsymbol{\psi} < 0 \end{cases} \\ u_k^* &= -M_k \operatorname{sgn}(\mathbf{b}_k^T \boldsymbol{\psi}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Umschaltung erfolgt, dann wenn die Schaltfunktion

$$s_k(t) = \mathbf{b}_k^T \boldsymbol{\psi}(t)$$

das Vorzeichen wechselt.



Schaltfunktion

Berechnung von $\boldsymbol{\psi}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\psi}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\psi}(t) &= e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\psi}(0)\end{aligned}$$

Somit aus 5.1:

$$u_k = -M_k \operatorname{sgn} \left[\mathbf{b}_k^T e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\psi}(0) \right] \quad (5.2)$$

Man kann zeigen: Ist die Strecke von jedem u_k aus steuerbar, so wird $\mathbf{b}_k^T \boldsymbol{\psi}$ nicht $\equiv 0$ in einem Zeitbereich. (Ohne Beweise)

Grundsätzliche Ermittlung von $\boldsymbol{\psi}(0)$: Nutzung der Endbedingung

$$\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{0}.$$

Lösung der Zustandsgleichung:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

oder

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(x) &= e^{\mathbf{A}t} \left[\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad \text{für } t = t_e \\ \Rightarrow \mathbf{x}(0) &+ \int_0^{t_e} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{B} \mathbf{u} = b_1 u_1 + \dots + b_p u_p$ folgt

$$\stackrel{4.19}{\rightarrow} \mathbf{x}_0 = \int_0^{t_e} e^{-\mathbf{A}\tau} \sum_{k=1}^p \mathbf{b}_k M_k \operatorname{sgn} \left[\mathbf{b}_k^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} \boldsymbol{\psi}(0) \right] d\tau \quad (5.3)$$

Da die adjungierte Differentialgleichung homogen ist, ist $\boldsymbol{\psi}(0)$ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Es wird zum Beispiel so gewählt, dass

$$|\boldsymbol{\psi}(0)|^2 = \psi_1(0)^2 + \dots + \psi_n(0)^2 = 1 \quad (5.4)$$

5.3 und 5.4 sind $n + 1$ Gleichungen für die $n + 1$ Unbekannten

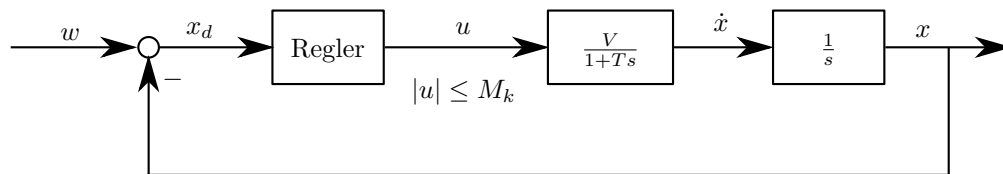
$$t_e, \psi_1(0), \dots, \psi_n(0)$$

im Allgemeinen nur numerisch lösbar.

5.1.2 Der Satz von Feldbaum (Satz von den N Schaltintervallen)

siehe Beiblatt 5.1

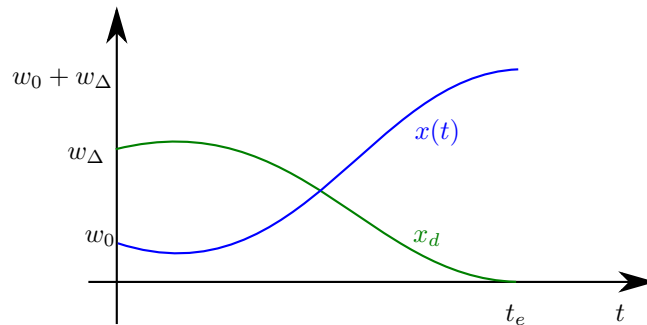
5.1.3 Anwendungsbeispiel zeitoptimaler Lageregelung



Regelstrecke

$$\text{für } t < 0 \quad w = w_0, \quad x_d = 0$$

$$\text{für } t \geq 0 \quad w = w_0 + w_\Delta$$



Trajektorien

Zustandsvariablen:

$$x_1 = x_d$$

$$x_2 = \dot{x}_d$$

$$X(s) = \frac{V}{s(1+Ts)}U(s) \rightarrow Ts^2X(s) + sX(s) = VU(s) \rightarrow T\ddot{x} + \dot{x} = Vu$$

$$\text{mit } x_d = w - x \rightarrow \dot{x}_d = -\dot{x}, \ddot{x}_d = -\ddot{x}$$

$$\rightarrow T\ddot{x}_d + \dot{x}_d = -Vu$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{V}{T}u \end{aligned} \right\} \text{Zustandsdifferentialgleichung}$$

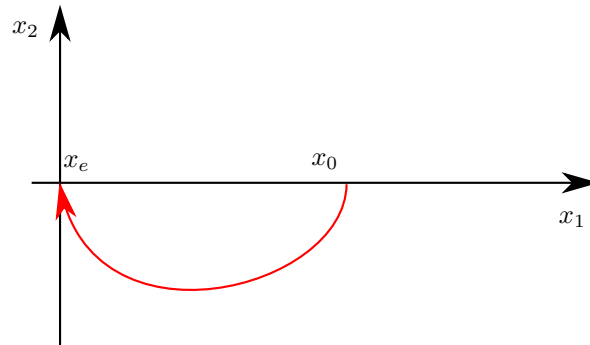
Anfangszustand:

$$x_d(0) = w_\Delta, \quad \dot{x}_d(0) = 0$$

$$x_d(t_e) = 0, \quad \dot{x}_d(t_e) = 0$$

also

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} w_\Delta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Trajektorie mit Anfang in \mathbf{x}_0

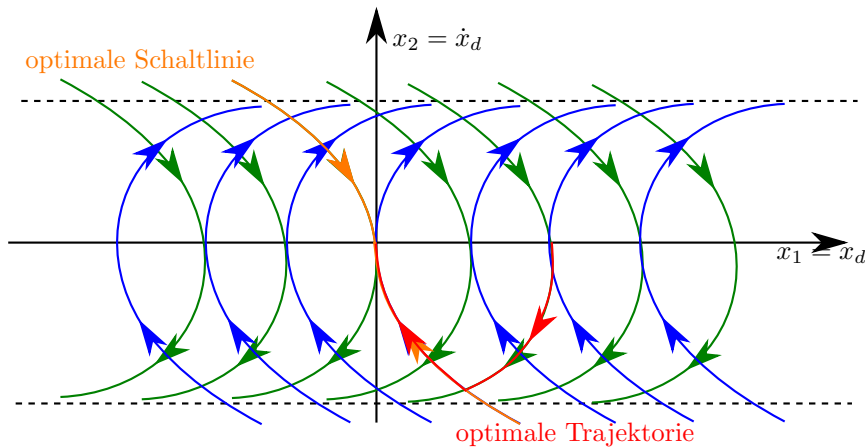
Aufgrund des allgemeinen Typs der zeitoptimalen Steuerfunktion $u = \pm M$: Berechnung der Trajektorien der Strecke:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{Vu + x_2}{Tx_2}$$

\Rightarrow Lösung mit Trennung der Veränderlichen und Polynomdivision

$$\begin{aligned} -\frac{Tx_2}{x_2 + Vu} dx_2 &= dx_1 \\ -T dx_2 + \frac{TVu}{x_2 + Vu} dx_2 &= dx_1 \\ \Rightarrow x_1 &= -Tx_2 + TVu \ln|x_2 + Vu| + C \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{blau} & u = -M : x_1 = -Tx_2 - kT \ln|k - x_2| + C \\ \text{grün} & u = +M : x_1 = -Tx_2 + kT \ln|k + x_2| + C \end{array} \right\} \text{ mit } k = VM > 0$$



Optimale Trajektorie und optimale Schaltlinie

Anwendung des Feldbaumschen Satzes: höchstens eine Umschaltung

Optimale Schaltlinie (orange)

$$S(x_2) = \begin{cases} \text{blaue Nulltrajektorie} & u = -M, \quad x_2 \leq 0 \\ \text{grüne Nulltrajektorie} & u = +M, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

für die blaue Nulltrajektorie gilt:

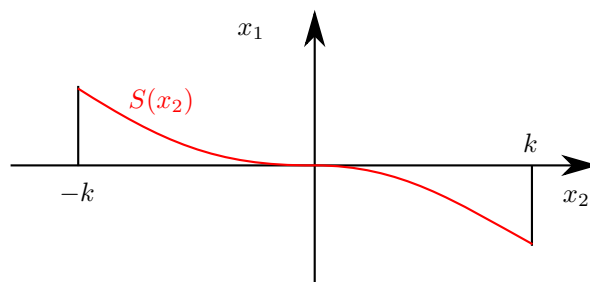
$$0 = -T \cdot 0 - kT \ln |k - 0| + C \rightarrow C = kT \ln k$$

$$\Rightarrow x_1 = -Tx_2 - kT \ln |K - x_2| + KT \ln k$$

$$\Rightarrow x_1 = -Tx_2 - kT \ln \left(1 - \frac{x_2}{k}\right)$$

Entsprechend für grüne Nulltrajektorie

$$\rightarrow S(x_2) = \begin{cases} -Tx_2 - kT \ln \left(1 - \frac{x_2}{k}\right), & x_2 \leq 0 \\ -Tx_2 - kT \ln \left(1 + \frac{x_2}{k}\right), & x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Schaltlinie: $x_2 = k$ so folgt $s(k) = -0,31kT$

Regelgesetz:

$$u = \begin{cases} -M & \text{für } x_1 - S(x_2) < 0 \\ +M & \text{für } x_1 - S(x_2) > 0 \end{cases}$$

Optimales Regelgesetz

$$\begin{aligned} u &= M \operatorname{sgn}(x_1 - S(x_2)) \\ &= M \operatorname{sgn}(x_d - S(\dot{x}_d)) \\ &= M \operatorname{sgn}(S(\dot{x}) - (x - w)) \end{aligned}$$

Realisierung siehe Beiblatt 5.3

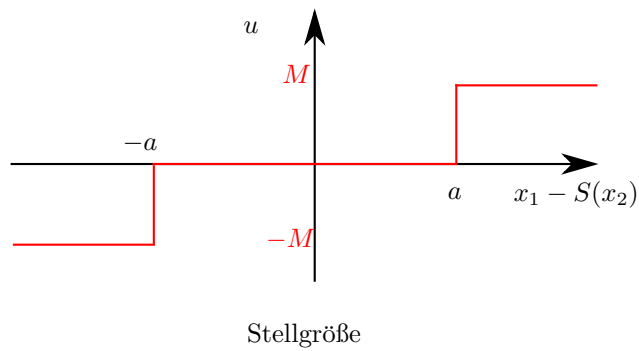
5.1.4 Suboptimale Regelung

Gründe

- a) Verringerung der Parameterempfindlichkeit / Störanfälligkeit
- b) Verringerung des Realisierungsaufwands
- c) Exakte Bestimmung des optimalen Regelgesetzes zu schwierig

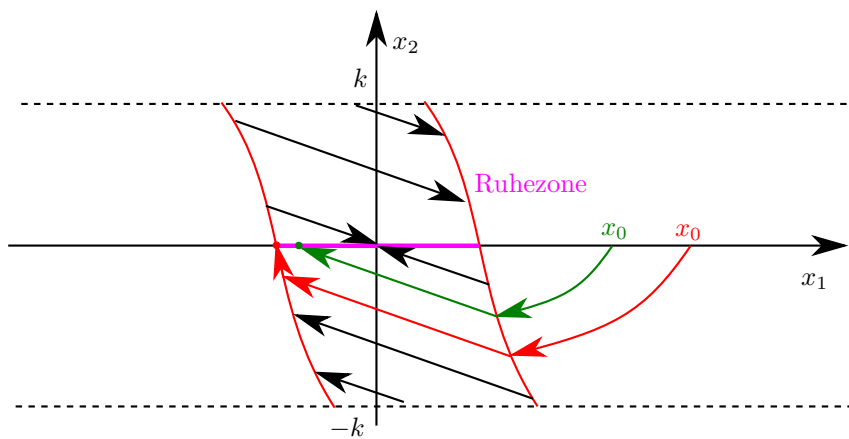
zu a) Variante 1

Einführung eines Dreipunktgliedes anstelle des Zweipunktgliedes zur Schonung der Stellanrichtung



$$u = \begin{cases} +M & \text{für } x_1 - S(x_2) > a \\ -M & \text{für } x_1 - S(x_2) < -a \\ 0 & \text{dazwischen} \end{cases}$$

in der Zustandsebene

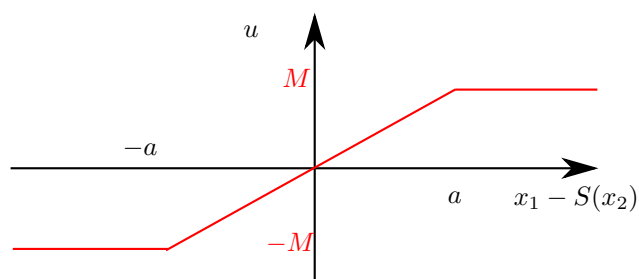


Trajektorie für $u = 0$

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-Vu - x_2}{Tx_2} = -\frac{1}{T}$$

$$x_2 = -\frac{1}{T}x_1 + C$$

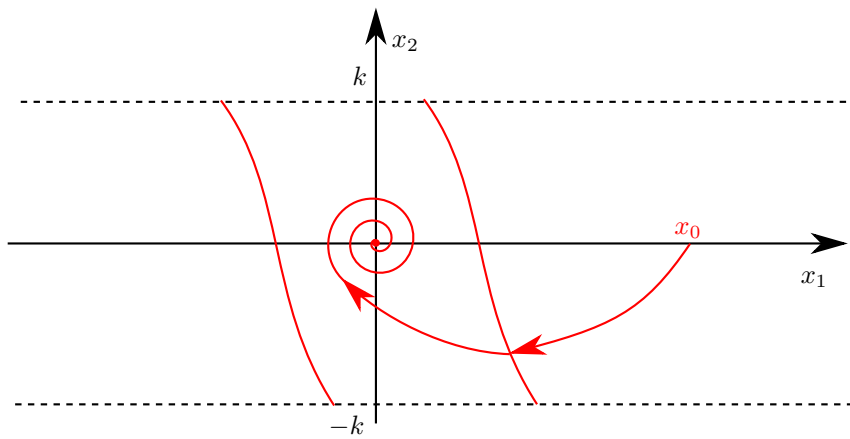
zu a) Variante 2



Stellgröße

$$u = \begin{cases} +M & \text{für } x_1 - S(x_2) > a \\ -M & \text{für } x_1 - S(x_2) < -a \\ \frac{M}{a}(x_1 - S(x_2)) & \text{dazwischen} \end{cases}$$

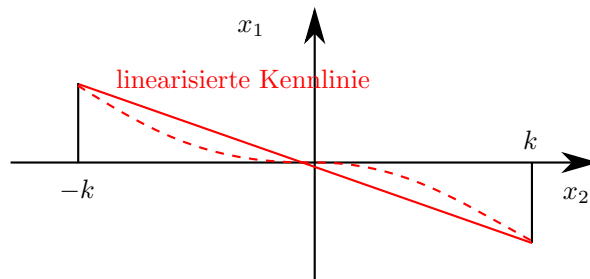
in der Zustandsebene:



Trajektorie

zu b)

Linearisierung der optimalen Schaltlinie



Schaltlinie

Regelgesetz:

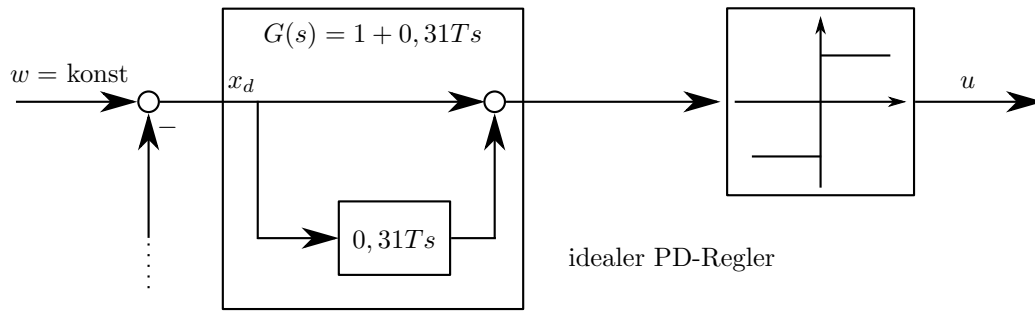
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-0,31kT}{k} = -0,31T \quad x_1 = -0,31Tx_2$$

Suboptimaler Regler

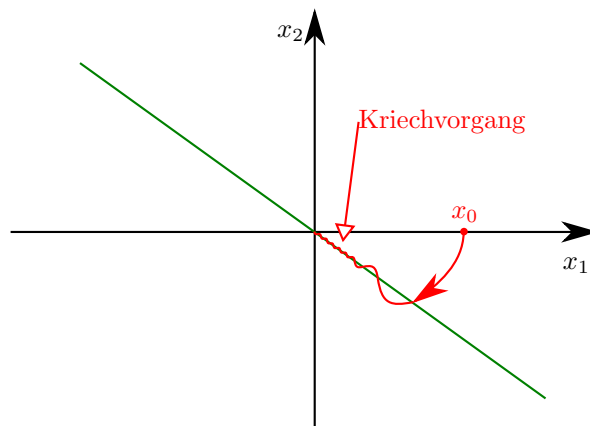
$$u = M \operatorname{sgn} \left(\underset{=x_d}{x_1} + 0,31T \underset{=\dot{x}_d}{x_2} \right)$$

$$\text{mit: } x_1 = x_d \quad x_2 = \dot{x}_d$$

$$u = \underbrace{M \operatorname{sgn}(x_d + 0,31T \dot{x}_d)}_{\text{idealer PD-Regler}}$$



idealer PD-Regler

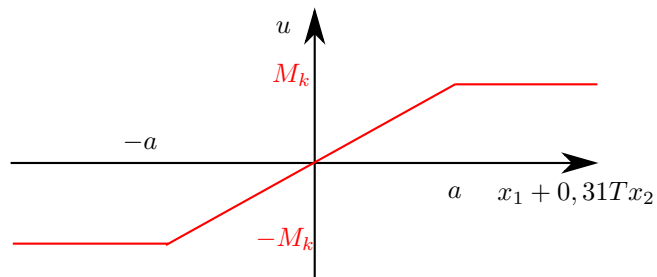


Trajektorie

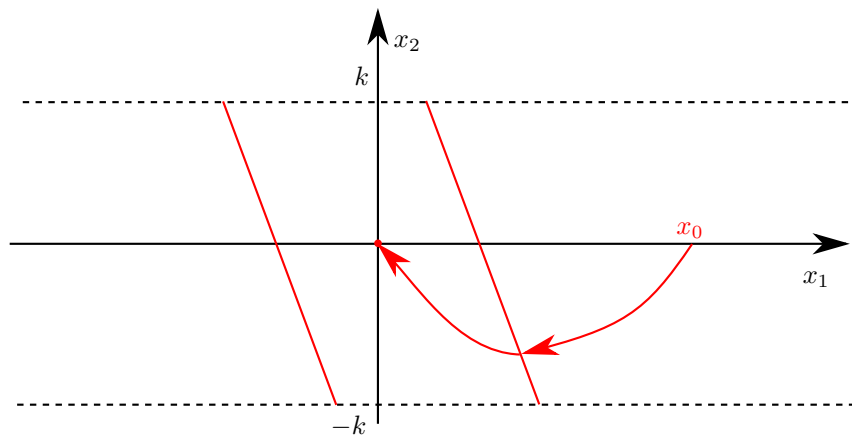
Abweichung von der streng optimalen Lösung infolge des Kriecheffekts, mit schnellen Umschaltungen in u .
Im Kriechfall gilt $\dot{x}_d = -0,31T\ddot{x}_d$

$$\Rightarrow x_d(t) = x_{d0}e^{-\frac{t}{0,31T}}$$

Hinweis: Gezielte Nutzung derartiger Vorgänge im Rahmen der Sliding-Mode-Regelung. Abhilfe gegen schnelle Umschaltungen: Begrenzungskennlinie



Stellgröße

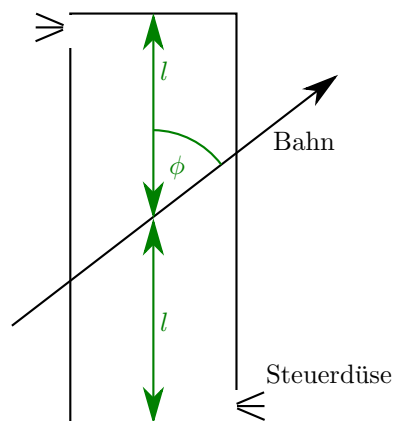


Trajektorie

Dank geeigneter Wahl von a kann ein überschwingungsfreier Übergang nach $\mathbf{0}$ eingestellt werden.
zu c) BB 5.4

5.2 Weitere Anwendung des Minimierungsprinzips (BB 5.5)

Treibstoffoptimales Problem: Drehmanöver eines Raumfahrzeugs



Raumfahrzeug auf Flugbahn

$$|u| \leq M$$

Zustandsvariablen:

$$x_1 = \phi \quad , \quad x_2 = \dot{\phi}$$

Anfangszustand:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Endzustand:

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

t_e sei vorgegeben.

Bewegungsgleichung:

$$\Theta \ddot{\phi} = -l u$$

oder

$$\ddot{\phi} = -V u \text{ mit } V = \frac{l}{\Theta}$$

Zustandsdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -V u \end{aligned}$$

Gütemaß:

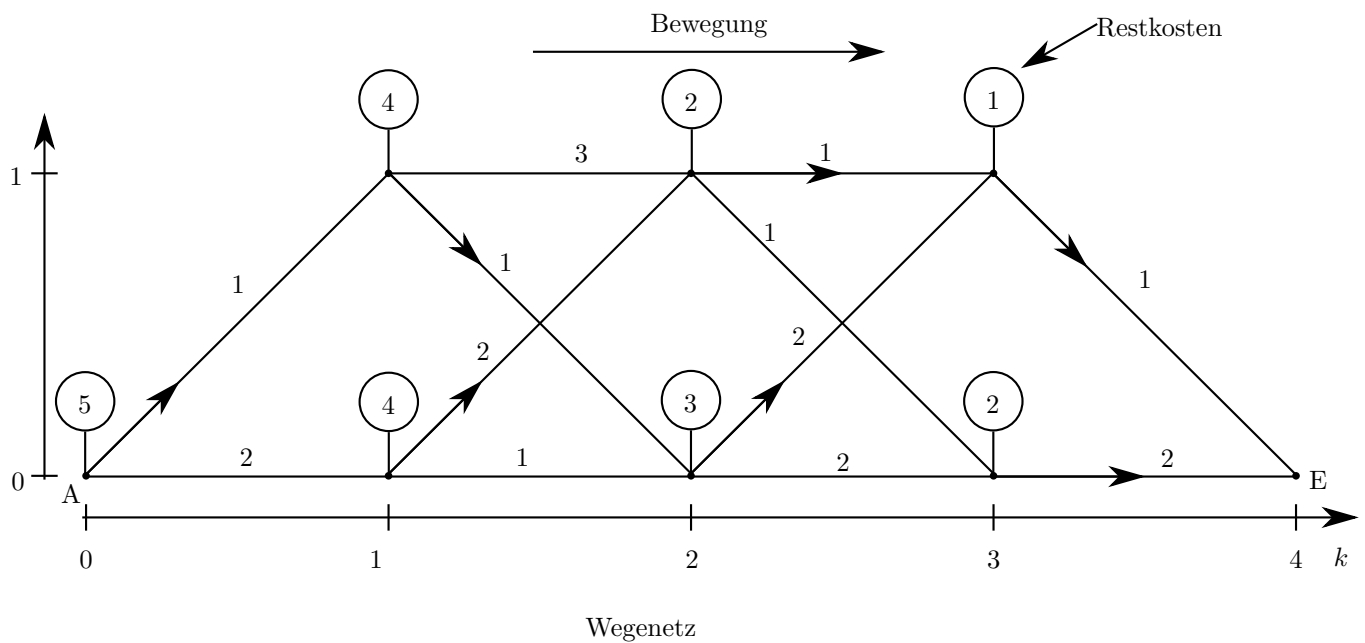
$$J = \int_0^{t_e} |u(t)| dt$$

denn $|u(t)| \sim \text{Treibstoffverbrauch} \Rightarrow \text{Übung}$

Kapitel 6

Dynamische Programmierung und Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung

6.1 Beispiel: Auffinden eines optimalen Pfades in einem Wegenetz



Wie kommt man am schnellsten von A nach E?

Naive Lösung: Nebeneinanderstellen aller Lösungen

(0=rechts, 1=links abbiegen)

| | Abbiegen | Kosten | Gesamtkosten |
|----|----------|---------|--------------|
| 1. | 0 0 0 | 2 1 2 2 | 7 |
| 2. | 0 0 1 | 2 1 2 1 | 6 |
| 3. | 0 1 0 | 2 2 1 2 | 7 |
| 4. | 0 1 1 | 2 2 1 1 | 6 |
| 5. | 1 0 0 | 1 1 2 2 | 6 |
| 6. | 1 0 1 | 1 1 2 1 | 5 ← Optimum |
| 7. | 1 1 0 | 1 3 1 2 | 7 |
| 8. | 1 1 1 | 1 3 1 1 | 6 |

Zahl der Wege: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Allgemein: $x \cdot \dots \cdot x = x^n$

Dabei sind

n : Anzahl der Stationen

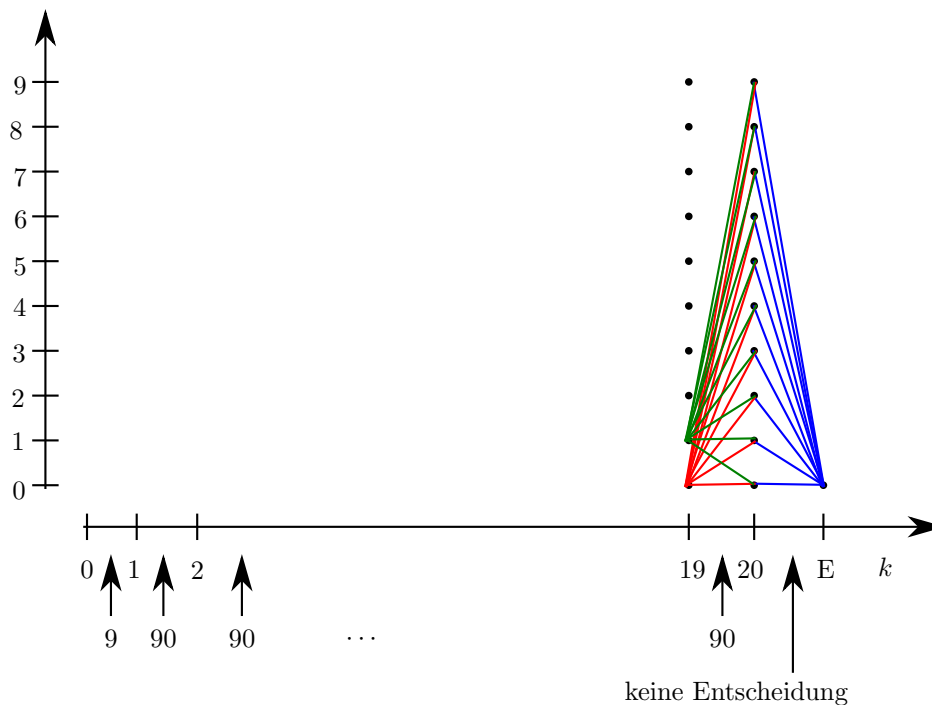
x : Anzahl der Verzweigungsmöglichkeiten

Realer Fall: zum Beispiel $x = 10$, $n = 20$

Zahl der Wege: 10^{20} , was zu $10^{20} - 1$ Entscheidungen führt

Rechenzeit beläuft sich auf $10^{20} \mu s \approx 3,1 \text{ mio. Jahre}$, falls $1 \mu s$ pro Entscheidung

Bessere Lösung: Übergang zu einem Mehrstufigen Entscheidungsprozess



Rechenaufwand: $x = 10$, $n = 20$ Das führt zur Gesamtzahl: $19 \cdot 90 + 9 = 1719$ was zu einer Rechenzeit von $\approx 2ms$ führt

6.2 Das Bellmannsche Optimierungsprinzip

Der Zustandspunkt eines dynamischen Systems nehme nacheinander die Werte \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, N$; dabei N gegeben und $\mathbf{x}_k \in X$ gegebene Menge des n -dimensionalen Zustandsraumes.

Es gelte

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.1)$$

Zusammenhang kann sich mit k ändern

Beispiel:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi \mathbf{x}_k + \mathbf{H} \mathbf{u}_k$$

Dabei $\mathbf{u}_k \in U$ = gegebene Menge des Steuerprogrammes

Dem k -ten Schritt wird ein Gütemaß $I_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ zugeordnet.

Dadurch wird jede Strategie oder Steuerfolge $(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+m-1})$ ein Gütemaß zugeordnet

$$J_{k,k+m} = I_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + I_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) + \dots + I_{k+m-1}(\mathbf{x}_{k+m-1}, \mathbf{u}_{k+m-1})$$

hierin ist mit 6.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{x}_{k+2} &= \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

also

$$J_{k,k+m} = J_{k,k+m}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{k+m-1})$$

Das Gütemaß verhält sich additiv, das heißt, ist $k_1 < k_2 < k_3$, so gilt

$$J_{k_1 k_3} = J_{k_1 k_2} + J_{k_2 k_3}$$

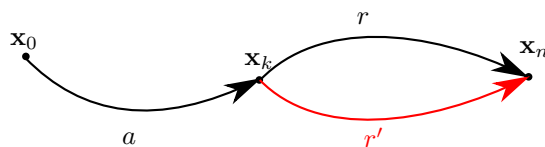
Kurzbezeichnung: $J_{kN} = J_k$, N : Endzustand

$$\min_{(\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} J_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{N-1}) = J_k^*(\mathbf{x}_k)$$

die zugehörige optimale Strategie sei $(\mathbf{u}_k^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*)$

Optimale Strategie zu \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x}_n sei gefunden

$$\left(\underbrace{\mathbf{u}_0^*, \dots, \mathbf{u}_{k-1}^*}_{\text{Anfangsstrategie}}, \mathbf{x}_k, \underbrace{\mathbf{u}_k^*, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^*}_{\text{Reststrategie}} \right)$$



Alternative Reststrategie

Optimalitätsprinzip: Die Gesamtstrategie kann nur dann optimal sein, wenn die Reststrategie (von einem beliebigen Zwischenzustand aus) optimal ist.

Beweis: Angenommen es gebe ein r' mit

$$\begin{aligned} J(r') &< J(r) \\ \rightarrow J(a) + J(r') &< J(a) + J(r) \\ &\Downarrow \text{Additiv} \\ J(a, r') &< J(a, r) \end{aligned}$$

Ausgeschlossen, weil die Gesamtstrategie (a, r) optimal vorausgesetzt ist.

6.3 Die Bellmannsche Rekursionsformel

Für die Strategie $(\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$ gilt

$$\min_{(\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} I(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{N-1}) = \min_{(\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} [I_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{N-1})]$$

\Downarrow Optimalitätsprinzip

$$\min_{(\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{N-1})} J_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{N-1},)$$

\Downarrow

$$J_k^*(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} \left[I_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \underbrace{J_{k+1}^*(\mathbf{x}_{k+1})}_{= \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \right]$$

$$K = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0$$

Bellmannsche Rekursionsformel

Abschätzung des Rechenaufwandes siehe Beiblatt 6.2

6.4 Bezug zum Minimumsprinzip

gegeben: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, \mathbf{x}_0 beliebig, \mathbf{x}_e fest, t_e frei

$$J^*(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \int_{t_0}^{t_e} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) d\tau \right\} \quad (6.2)$$

Zerlegt man $[t_0, t_e]$ in zwei Intervalle $[t_0, t_0 + \Delta t]$, $[t_0 + \Delta t, t_e]$, so lautet die Bellmannsche Rekursionsformel

$$J^*(\mathbf{x}_0) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \\ t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t}} \left\{ \underbrace{\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) d\tau}_{\textcircled{2}} + \underbrace{J(\mathbf{x}(t_0 + \Delta t))}_{\textcircled{1}} \right\} \quad (6.3)$$

⇓ Taylorreihe um t_0

$$\textcircled{1} J^*(\mathbf{x}(t_0 + \Delta t)) = J^*(\mathbf{x}(t_0)) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \underset{=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}{\dot{\mathbf{x}}} \cdot \Delta t + \text{Rest}$$

$$\textcircled{2} \dots = g(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \Delta t + \text{Rest}$$

$$\Delta t \xrightarrow{\text{klein}} J^*(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}_0} \left\{ g(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \right\} \Delta t + J^*(\mathbf{x}_0)$$

Mit den Variablen \mathbf{x}, \mathbf{u} anstatt $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ folgt:

Hamilton-Jacobi-Bellmann-Differentialgleichung (HJB)

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right\} = 0 \quad (6.4)$$

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ \underbrace{g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}_{H(\mathbf{x}, \psi, \mathbf{u})} \right\} = 0 \text{ mit } \psi = \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} !$$

$$\min_{\mathbf{u}} \{ H(\mathbf{x}, \psi, \mathbf{u}) \} = \min_{\mathbf{u}} \left\{ H \left(\mathbf{x}, \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u} \right) \right\} \quad (6.5)$$

= Minimumprinzip

$$\rightarrow H(\mathbf{x}^*, \psi^*, \mathbf{u}^*) = H \left(\mathbf{x}^*, \frac{\partial J^*(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{u}^* \right)$$

Wegen 6.2 für $t_0 \rightarrow t_e$:

Endbedingung: $J^*(\mathbf{x}_e) = 0$

außerdem: $\left. \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e} = \mathbf{0}$

6.5 Anwendung: quadratisch optimale Regelung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \quad J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e=\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) d\tau$$

$\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ Ruhelage mit $\mathbf{u}_R = \mathbf{0}$

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \psi^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}) \quad (6.6)$$

Für ein Extremum von 6.5:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} &\rightarrow \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{G}^T \psi = 0 \\ \rightarrow \mathbf{u} &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \psi = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \underbrace{\left(\frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right)}_{\mathbf{J}_{\mathbf{x}}^*} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Einsetzen in 6.6:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \psi^T \mathbf{G} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \psi + \psi^T \mathbf{f} - \psi^T \mathbf{G} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \psi$$

So erhält man die Hamilton-Jakobi-Bellmann-Differentialgleichung

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{*T} \mathbf{Q} \mathbf{x}^* - \frac{1}{2} \mathbf{J}_x^{*T} \mathbf{G} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{J}_x^* + \mathbf{J}_x^{*T} \mathbf{f} = 0$$

mit $J^*(\mathbf{x}_e = 0) = 0$

Partielle Differentialgleichung in $J^*(\mathbf{x})$, deren Lösung liefert unmittelbar das optimale Regelgesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{J}_x^*(\mathbf{x})$$

Beispiele siehe Beiblatt 6.1 und 4.6-2