Предел функции

Предел функции в точке

- Определение Коши (в терминах $\varepsilon - \delta$)

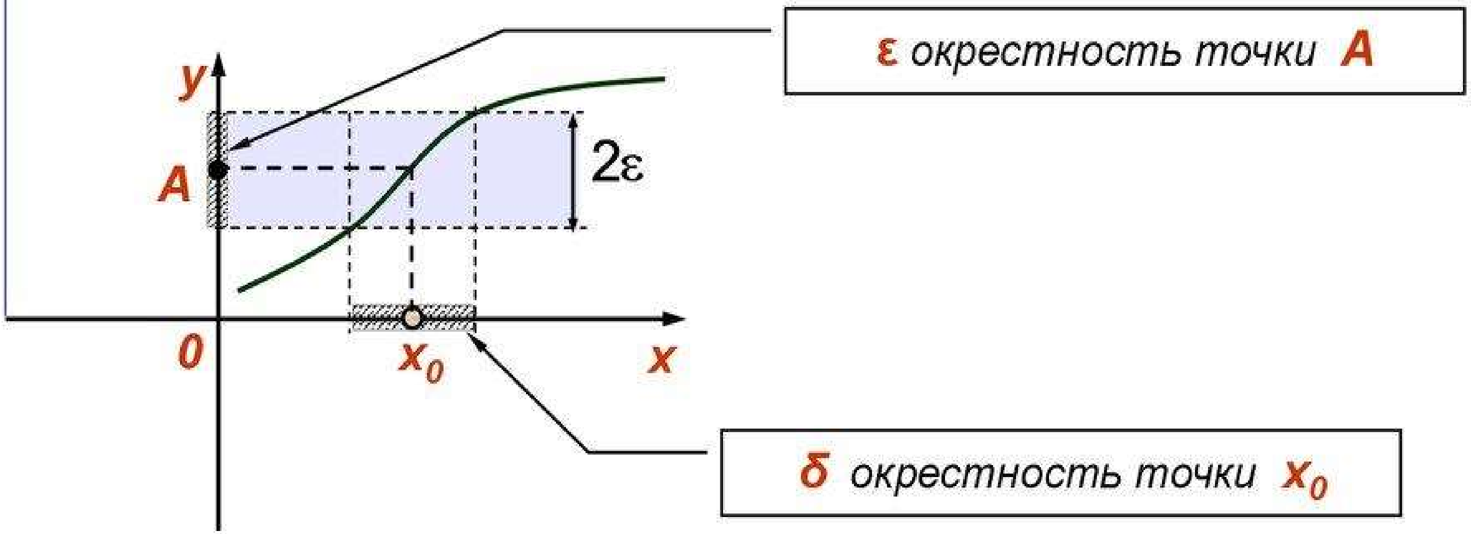
Число А называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\boxed{\begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A\end{gathered}}$$

Обозначение предела функции в точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow \right.$$
$$\left. \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



Геометрический смысл предела: для всех ***x*** из ***δ*** – окрестности точки x_0 точки графика функции лежат внутри полосы, шириной **2ε**, ограниченной прямыми: ***y* = *A* + ε** , ***y* = *A* - ε** .

Бесконечный предел функции в точке

- Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечный предел, если $\forall M > 0$ (сколь угодно большого) $\exists \delta > 0$ такое что $\forall x: |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > M$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

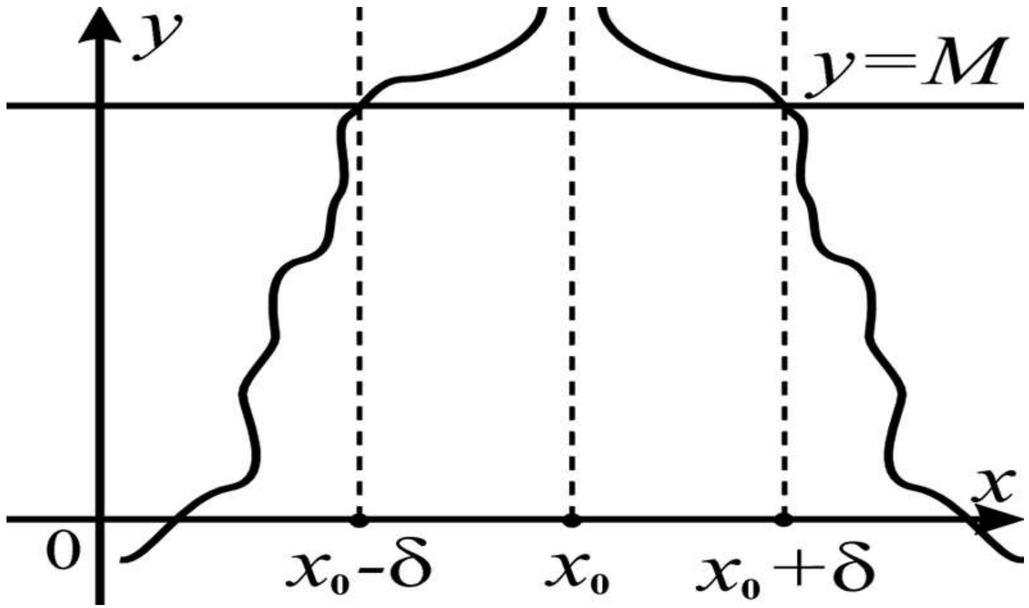
Бесконечный предел функции в точке

- Функция $f(x)$ имеет в точке x_0, своим пределом $+\infty$, если $\forall M > 0$ (сколь угодно большого) $\exists \delta > 0$ такое что $\forall x : |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $f(x) > M$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Бесконечный предел функции в точке

Геометрически определение означает, все точки графика функции $y = f(x)$ для которых $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ лежат выше прямой $y = M$



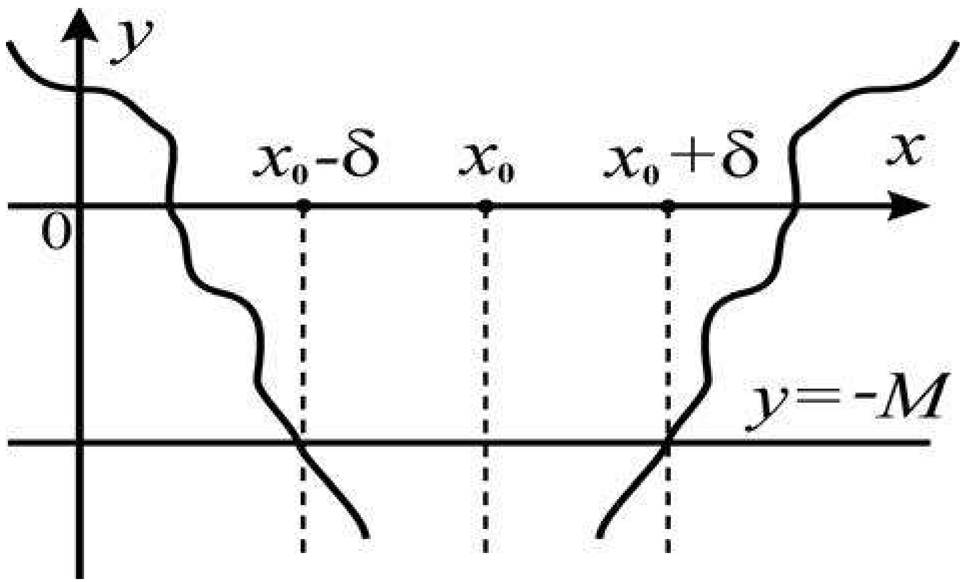
Бесконечный предел функции в точке

- Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 , своим пределом $-\infty$, если $\forall M>0$ (сколь угодно большого) $\exists \delta>0$ такое что $\forall x : |x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $f(x)<-M$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

Бесконечный предел функции в точке

Геометрически определение означает, все точки графика функции $y = f(x)$ для которых $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ лежат ниже прямой $y = -M$



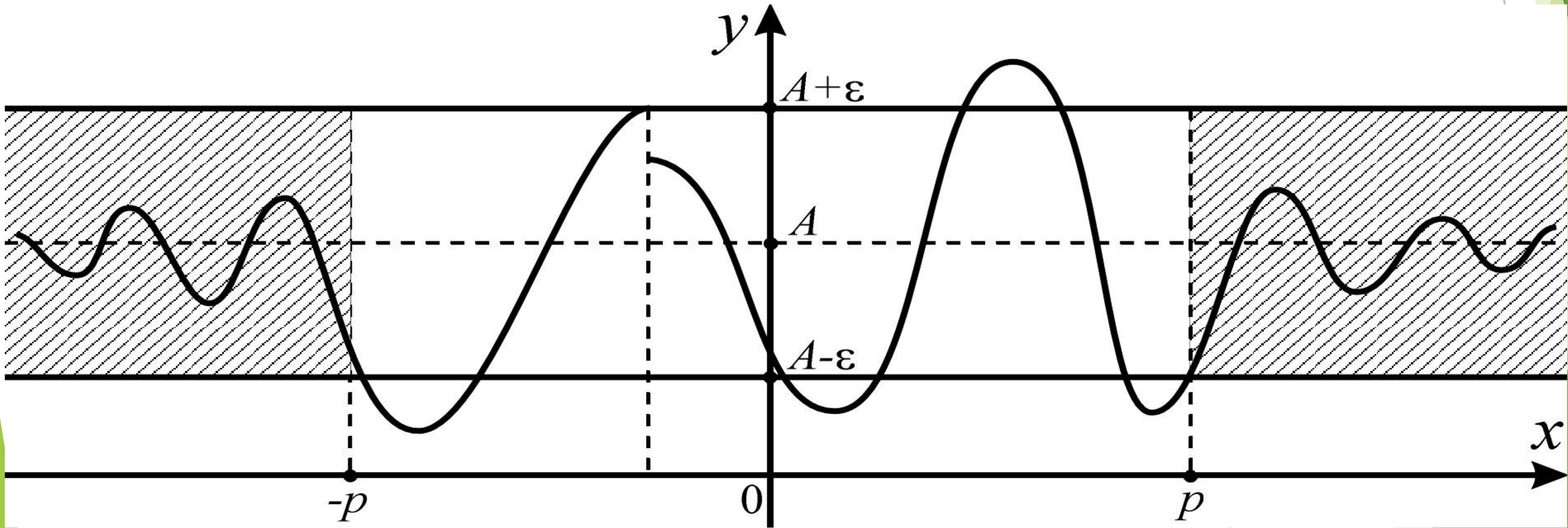
Конечный предел функции на бесконечности

- Число *A* называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ (на бесконечности), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P \in R, P > 0$ такое что $\forall |x| > P$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Геометрический смысл предела функции на бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$



Конечный предел функции на бесконечности

- Приписывая знаку ∞ арифметические знаки + или – можно получить еще два определения

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists P>0: \forall x>P \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists P>0: \forall x<-P \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

Бесконечный предел функции на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Бесконечный предел функции на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists P>0: \forall |x|>P \Rightarrow |f(x)|>M$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$$