UNIVERSIDAD CENTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
PROFESOR: LEONARDO SILVA CASTILLO
MATEMÁTICAS ESPECIALES
PERIODO: PRIMER CORTE 2023-2

TALLER 3

1. Considere la función $f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad -4 \leq x \leq -2 \\ x^2+1 & si \quad -2 < x \leq 2 \\ 0 & si \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$

   a) Elabore un análisis detallado de la convergencia de la serie de Fourier de f.

   b) Calcule la serie de Fourier de f.

   c) Para $N = 5, 10, 15, 20, 25$ grafique la N-ésima suma parcial de la serie empleando la plataforma **Desmos**.

2. Sea $f(x) = |x|$ para $-1 \leq x \leq 1$.

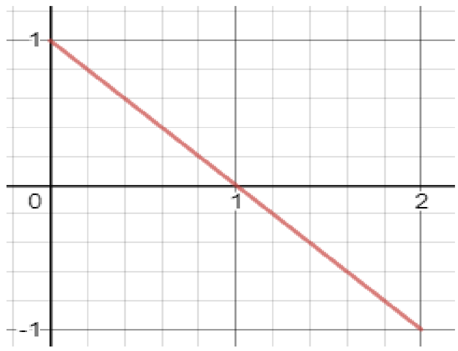
   a) Escriba la serie de Fourier para $f(x)$ en $[-1, 1]$.

   b) Derive término a término la serie de Fourier de $f(x)$ en $(-1, 1)$.

   c) Determine $f'(x)$ y escriba su serie de Fourier en $[-1, 1]$. Compare esta serie con la obtenida en $b)$ y determine si son la misma serie de Fourier.

   d) Emplee la calculadora **Desmos** para describir gráficamente cada una de las series analizadas en este item.

3. Un periodo de la señal periódica $f(x)$ tiene la siguiente forma:



   a) Calcule los valores de a_k y b_k tales que $f(x)$ pueda escribirse de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{sen}(k\pi x) + b_k \cos(k\pi x).$$

   b) Calcule los limites $f(2-) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $f(2+) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

   c) Por medio del item anterior, determine a donde converge la serie cuando $x = 2$.

   d) Repita el procedimiento del item $b)$ y $c)$ pero cuando $x = 1$.

4. Considere la función periódica $f(x)$ definida por

$$\begin{cases} (\pi - x)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2\pi \\ f(x + 2\pi) = f(x) \end{cases}$$

a) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

b) Obtener la expresión en serie de Fourier de $f(x)$.

c) Indique en esta gráfica, donde aparece el fenómeno de Gibbs. Para esto realice el comparativo entre la gráfica obtenida en *a*) y la gráfica de la serie de Fourier para 10 y 15 sumandos empleando la plataforma **Desmos**.

d) Utilice el resultado de la serie de Fourier obtenida en *b*) para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2.$$

5. Escriba la serie de Fourier en cosenos y la serie de Fourier en senos de la función en el intervalo indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & si \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$

6. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)}$.

Sugerencia: *Desarrolle sen(x) en una serie en cosenos en* $[0, \pi]$ *y elija un valor apropiado de* x.