

Lista de Exercícios 2

April 7, 2021

Questão 1. Prove que não existe função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$ exatamente duas vezes.

Questão 2. Se toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, prove que o conjunto X é fechado, porém não necessariamente compacto.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se existem $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, prove que f é uniformemente contínua.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em a . Sejam (x_n) e (y_n) sequências de pontos tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ e $x_n < a < y_n$. Prove que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a)$$

Questão 5. Prove que f é convexa no intervalo I se, e somente se, para todos $x, y \in I$, tem-se que a função $g(t) := f(y + t(x - y))$ é convexa em $[0, 1]$.

Questão 6. Seja f contínua em $[a, b]$ e duas vezes derivável em (a, b) . Sejam $A := (a, f(a))$ e $B := (b, f(b))$. Suponha que se o segmento de reta ligando A e B intersecta o gráfico da f num terceiro ponto (diferente de A e B), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.

Questão 7. Seja f contínua em (a, b) , e derivável em (a, b) , exceto talvez em $c \in (a, b)$. Prove que se $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ existe e é finito igual a A , então f deve ser derivável em c e $f'(c) = A$.

References

Elon Lages Lima. *Análise real*. Impa, 2004.