

Lista de Exercícios 1

April 7, 2021

Questão 1. Prove que se $f \in C([a, b])$, então $|f| \in C([a, b])$. Mostre que $|f| \in C([a, b])$ não implica que $f \in C([a, b])$.

Questão 2. (Teorema do ponto fixo de Browder) Prove que se $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é contínua, então f possui um ponto fixo, ou seja, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Dê um exemplo de função contínua $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ onde não há ponto fixo.

Questão 3. Seja f contínua tal que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = cx$, onde $c := f(1)$.

Questão 4. Prove que se f_1, \dots, f_n são contínuas em $A \subset \mathbb{R}$, então $h : \max\{f_1, \dots, f_n\}$ é contínua em A (i.e. $h(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$).

Questão 5. (Teorema da Contração Uniforme) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existe $c \in (0, 1)$ e

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- (a) Prove que f é contínua.
- (b) Escolha qualquer $y \in \mathbb{R}$ e defina uma sequência $y, f(y), f(f(y)), \dots$. Prove que essa sequência converge para um ponto fixo de f .
- (c) Prove que o ponto fixo é único.

References

Elon Lages Lima. *Análise real*. Impa, 2004.