Lista de Exercícios 2

May 7, 2021

Notação: Sempre que usarmos I, estamos nos referindo a um intervalo (e.g. (a, b), ou $[a, b]$...).

Questão 1. Dê uma demonstração de que $f'' \geq 0 \implies f$ convexa usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Questão 2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ onde I é um intervalo. Prove que todo mínimo local $c \in I$ é um mínimo global em I.

Questão 3. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in \text{int}I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$. Prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

Questão 4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ em I. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x_0, x \in I$ quaisquer, vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Questão 5. Seja f dada por

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calcule a série de Taylor de f centrada em 0. Mostre que a série não converge para f, i.e. $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(0)}}{n!} x^n$.

Questão 6. Seja f contínua em $[a, b]$ e duas vezes derivável em (a, b). Sejam $A := (a, f(a))$ e $B := (b, f(b))$. Suponha que se o segmento de reta ligando A e B intersecta o gráfico da f num terceiro ponto (diferente de A e B), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$

Questão 7. Sejam $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ e f uma função limitada em $[a, b]$. Prove que se $P \subset Q$, então

$$I(f; P) \leq I(f; Q) \leq S(f; Q) \leq S(f; P).$$

Questão 8. Prove que se modificarmos uma função integrável f num conjunto enumerável, então a integral pode deixar de existir.

Questão 9. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que $f = 0$ para todo $x \in [a, b]$ se alguma das seguintes condições é satisfeita:

a) $\int_a^b |f(x)|dx = 0$;

b) $\int_x^y f(s)ds = 0$ para todo $x, y \in [a, b]$;

c) $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ para toda função g;

d) $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ para toda função g que satisfaz $g(a) = g(b) = 0$.

References

Elon Lages Lima. *Análise real*. Impa, 2004.