

Reporte de Proyecto

Contraste en imágenes de resonancia magnética

Profesor: Héctor Ramírez C.

Auxiliares: Matías V. Vera, Adrián Arellano Antiguay

Estudiante: Vicente Sandoval, Maximiliano S. Lioi, Luis Plaza B.

El objetivo de este proyecto es analizar un modelo de magnetización para la obtención de imágenes médicas que busca obtener el máximo contraste posible, las imágenes de resonancia magnética (MRI) son una técnica de imágenes médicas que no exponen al cuerpo a radiación.

El vector de magnetización $q = (x, y, z) \in B(0, 1)$ para cada partícula de $1/2$ spin sigue las ecuaciones de Bloch, en el modelo simplificado de dos dimensiones, la formulación es:

$$\dot{y} = -\Gamma y - u_1 z ; \quad \dot{z} = \gamma(1 - z) + u_1 y$$

donde u es el campo magnético (control) y γ, Γ son parámetros de relajación que dependen de los tejidos.

Considerando dos partículas con spin q_1, q_2 , el contraste al final de la fase de excitación está relacionado con $||q_1|| - ||q_2||$, encontrar el campo magnético que maximiza el contraste entre dos tipos de tejidos puede ser planteado como un problema de control óptimo.

El modelo clásico de saturación por contraste consiste en llevar un spin al origen (saturación) y el otro tan lejos como sea posible. Asumiendo que ambos spin parten desde un punto de equilibrio en $(0, 1)$, el problema de control óptimo se modela como:

$$\begin{aligned} \max & |q_2(t_f)| \\ \dot{q} &= f(q, u) ; |u(\cdot)| \leq 1 \\ q_1(0) &= q_2(0) = (0, 1); \quad q_1(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Controlabilidad del sistema

Debido a la no linealidad del sistema nos restringimos a estudiar la controlabilidad local en torno a un punto q_0 , para ello, se estudia la controlabilidad del sistema linealizado en torno al punto q_0 , como el sistema controlado es autónomo, si $q_0 \in \mathbb{R}^4$ y $u_0 \in \mathbb{R}$ son tales que $f(q_0, u_0) = 0$ y las matrices $A = \nabla_x f(q_0, u_0)$ y $B = \nabla_u f(q_0, u_0)$ satisfacen la condición de Kalman, y además si A resulta cumplir que $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ para λ un valor propio, entonces el sistema es localmente controlable en torno a q_0

$$A = \begin{bmatrix} -\Gamma_1 & -u_0 & 0 & 0 \\ u_0 & -\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_2 & -u_0 \\ 0 & 0 & u_0 & -\gamma_2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -z_1^0 \\ y_1^0 \\ -z_2^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$$

Luego, para una configuración de constantes, se puede estudiar la controlabilidad hacia algún punto de interés considerando el esquema anterior, se realizan simulaciones numéricas.

Considerando el (*Fluid Case*) [2], lo anterior revela que el sistema no es localmente controlable alrededor del punto inicial.

Infactibilidad con teoría lineal cuadrática (PLC)

El problema anteriormente formulado no puede ser estudiado usando teoría lineal cuadrática, ni siquiera relajando la restricción del control, la dinámica del sistema no es lineal, por lo que no queda definido los roles de las matrices $A(t)$ y $B(t)$ dentro del problema pues no existen, la función objetivo escrita como un problema de minimización se ve como

$$\min J(u(\cdot)) := -|q_2(t_f)| = -(y_2(t_f)^2 + z_2(t_f)^2)$$

De donde deducimos en particular que J no es convexa para el control $u(\cdot) \in L^2([0, t_f], \mathbb{R})$.

Simulaciones en BOCOP

Se realizan simulaciones en BOCOP para distintos medios que van variando las configuraciones de constantes y se prueba para distintos valores de λ para el tiempo de saturación mínimo del problema.

En la Fig. 6 se pueden apreciar los diagramas de fases para el (*Fluid Case*) y el (*Blood Case*) [2] con λ , el múltiplo del tiempo de saturación igual a 2, en la Fig. 9 se aprecia los controles para cada caso.

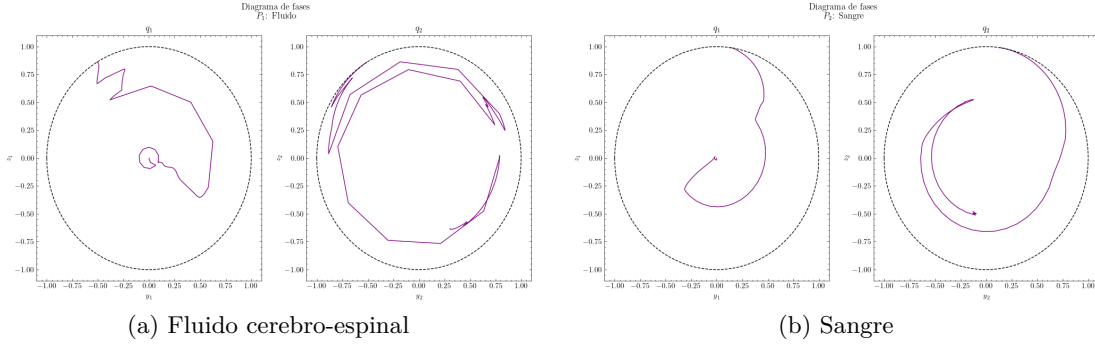


Figura 1: Simulaciones de BOCOP para medios fluido cerebro-espinal y sangre

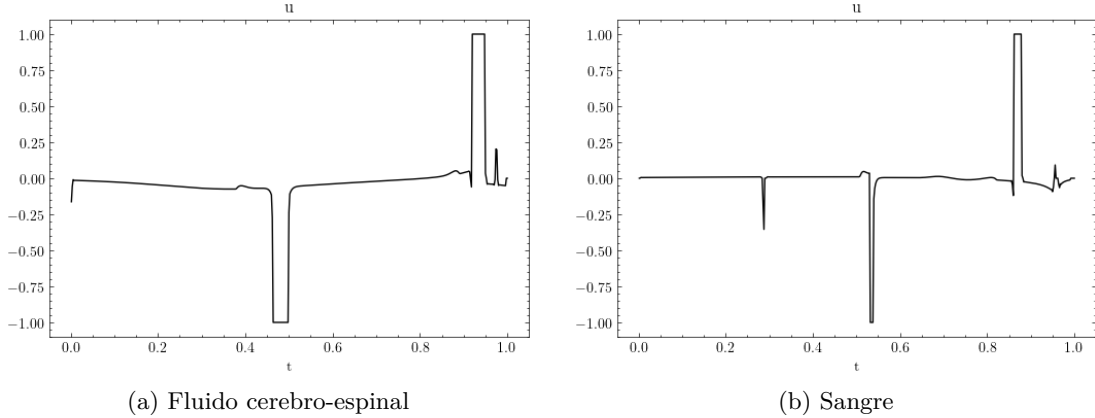


Figura 2: Controles dado por BOCOP para medios fluido cerebro-espinal y sangre

Al aumentar λ , se observa que la trayectoria es mucho más caótica pero el problema aun es factible, en la Fig. 3, 4 se aprecia la trayectoria, controles para los casos $\lambda = 3, 4, 15$ en el (*Fluid Case*), notese que la trayectoria en algunos momentos parece escaparse de la esfera, se aprecia así ya que las cotas impuestas en BOCOP para el estado fueron del estilo $|y_i| < 1.1, |z_i| < 1.1, i = 1, 2$.

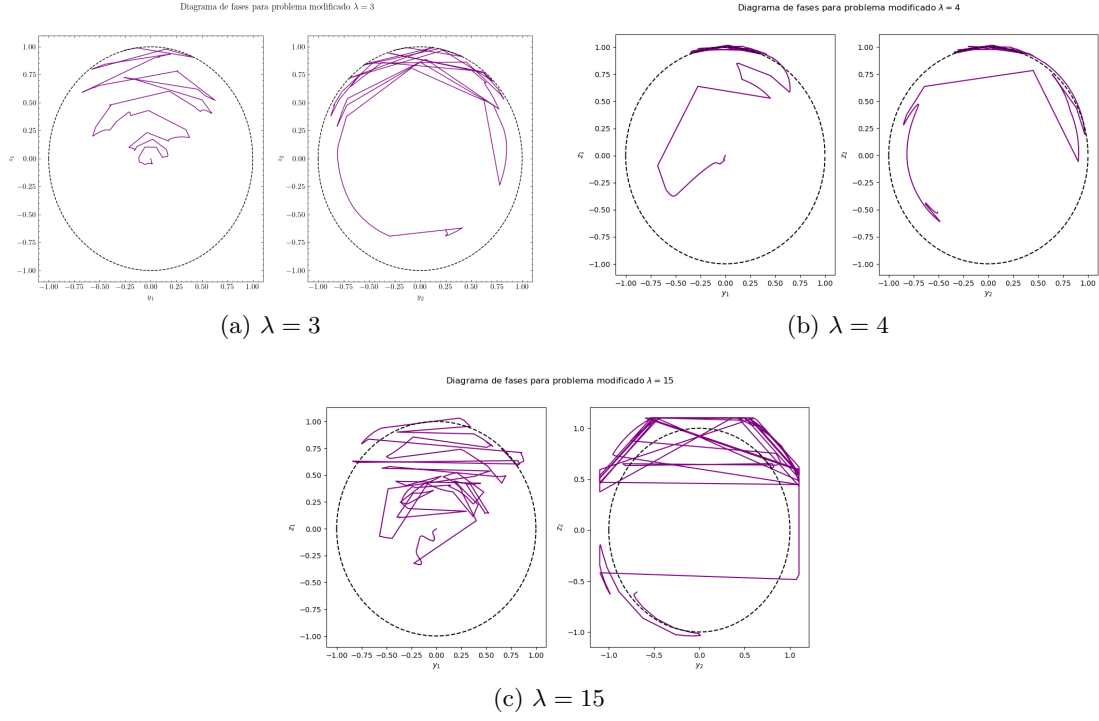


Figura 3: Simulaciones de BOCOP para distintos multiplos de tiempo de saturación

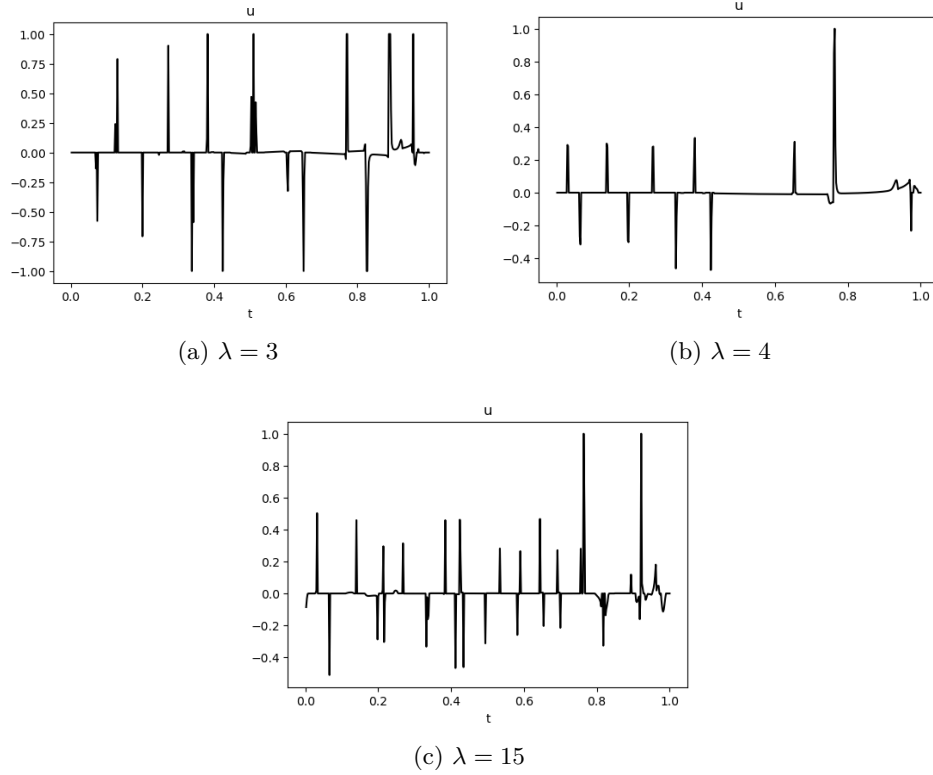


Figura 4: Controles de BOCOP para distintos multiplos de tiempo de saturación

Modificar un poco la condición inicial no genera un comportamiento muy errático, en la Fig. 5 se aprecia la trayectoria al considerar $q_1(0) = (0.5, 1)$.

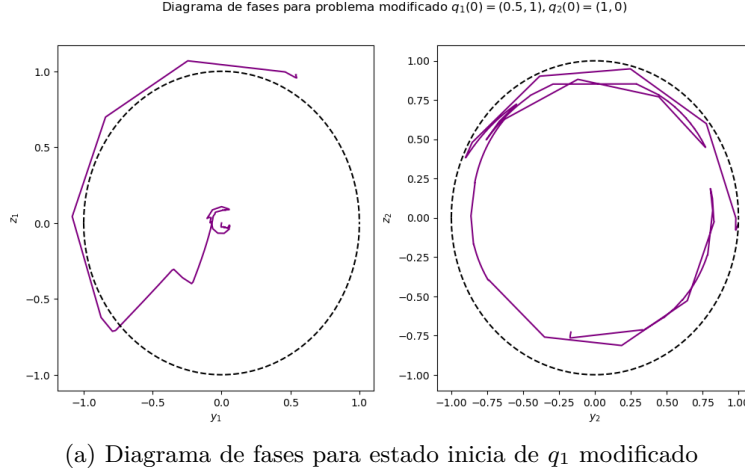


Figura 5: Simulaciones de BOCOP para distinto punto inicial

A partir de ahora solo se trabaja en el (*Fluid Case*).

Principio de máximo de Pontryagin

Verificando las hipótesis, se tiene que f y g son clase C^1 , $U = [-1, 1]$ y u permanece acotado c.t.p en I , luego si $(x(\cdot), u(\cdot))$ es solución del problema de Bolsa (P_B), se tiene que existe $p(\cdot) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ absolutamente continua y $p_0 \geq 0$ tal que $(p(\cdot), p_0)$ es no trivial si $Dg(e[x]) \neq 0$ y satisface la dinámica

$$\dot{p}(t) = -p^T \begin{bmatrix} \Gamma_1 & -u & 0 & 0 \\ u & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 & -u \\ 0 & 0 & u & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Además, $H(t, x(t), p_0, p(t), u(t)) = \min_{v \in U} H(t, x(t), p_0, p(t), v)$, desarrollando se deduce que si

$$H_1(q(t), p(t)) := p(t)^T \begin{bmatrix} -z_1(t) \\ y_1(t) \\ -z_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow u(t) = \text{sgn}(H_1(t, x(t), p(t))),$$

Donde H_1 corresponde a escribir el Hamiltoniano en la forma afín $H = H_0 + H_1 u$.

En el caso contrario debemos analizar la segunda derivada de la función H_1 , además, se hace un estudio de las condiciones de transversalidad.

Las condiciones de transversalidad resultan ser:

$$p_3(t_f) = -2p^0 y_2(t_f) \quad p_4(t_f) = -2p^0 z_2(t_f)$$

Se investigan el caso donde $p_0 \neq 0$, por conveniencia se toma $p_0 = -\frac{1}{2}$ (acá se aplicando Pontryagin pero para problemas de maximización, por ende el p_0 tiene el signo dado vuelta)

Definiendo los brackets de Lie como $[F, G] = \frac{\partial F}{\partial x}(x)G(x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x)F(x)$, y se definen los brackets de Poisson como $\{F, G\}(z) = d\vec{F}(z) \cdot \vec{G}(z)$, $z = (x, p) \in T^*X$, donde T^*X es el espacio tangente de la variedad donde están definidos los pases (x, p) , se nota una regla de calculo que facilita el desarrollo futuro, si se tienen funciones de la forma $H_0 = p^T F$, $H_1 = p^T G$, entonces $\{H_0, H_1\} = p^T [F, G]$.

Así, el control en el arco singular toma la forma [3]

$$u_s(t) = -\frac{\{\{H_1, H_0\}, H_0\}}{\{\{H_1, H_0\}, H_1\}} \quad (1)$$

Se obtiene de la bibliografía [3] la forma particular que toman los brackets para este caso, sea $\delta_i = \gamma_i - \Gamma_i$, sea F, G los componentes afín de la dinámica, es decir $f = F + Gu$

$$[G, F] = \sum_{i=1,2} (\delta_i z_i - \gamma_i) \frac{\partial}{\partial y_i} + \delta_i y_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

$$[[G, F], F] = \sum_{i=1,2} (\gamma_i(\gamma_i - 2\Gamma_i) - \delta_i^2 z_i) \frac{\partial}{\partial y_i} + \delta_i^2 y_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

$$[[G, F], G] = \sum_{i=1,2} 2\delta_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + (\gamma_i - 2\delta_i z_i) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Lo anterior permite la definición de estos brackets en **Python** y la implementación del método de Tiro.

Método de tiro simple

Al igual que en el laboratorio 4 se quiere encontrar los valores de $p(0)$, tal que cumplan que el sistema acoplado $z(t)=(q(t), p(t))$, cumpla con $q_2(t_f) = p_2(t_f)$ (condiciones de transversalidad), pero a pesar de que el método minimize de scipy encuentra un candidato, al momento de graficar las trayectorias la partícula 1 no llega al origen (Fluid-case).

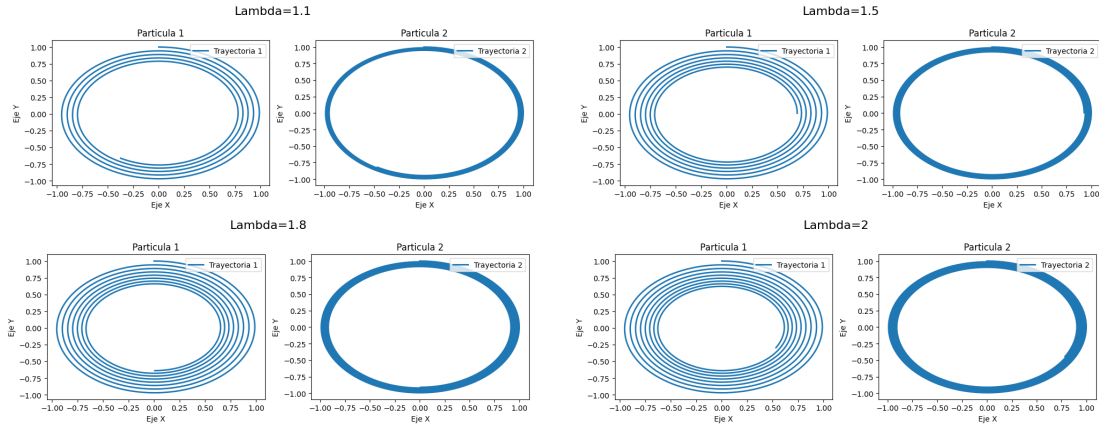


Figura 6: Simulaciones de trayectorias obtenidas por método de tiro analogo al método usado en el Lab4

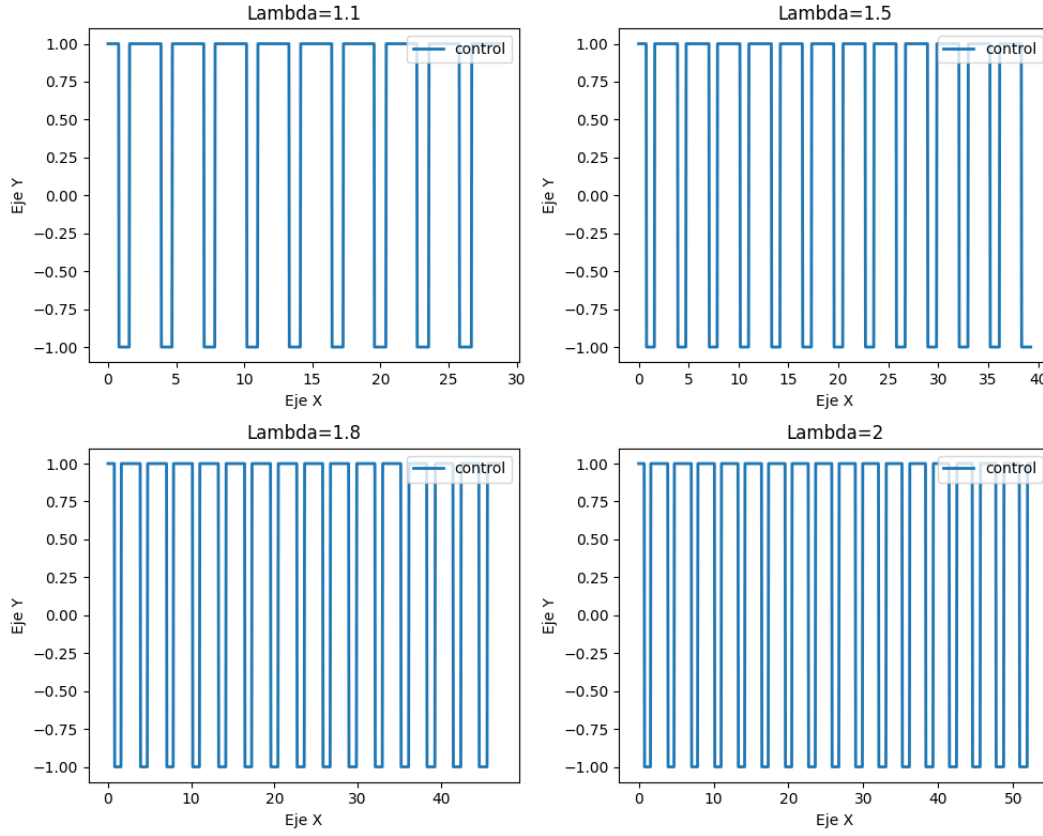


Figura 7: Controles obtenidos por el método de tiro análogo al método usado en el Lab4

Método de tiro múltiple

Consiste en discretizar el intervalo de tiempo en intervalos, los cuales serán parámetros de la función de tiro, la idea es que cada cambio de intervalo corresponde a una conmutación del control, es decir, cuando pase de bang-bang a arco singular (o visa-versa), por ende, en cada intervalo se programa la naturaleza del control que se espera, esto es, se programa como bang bang o como la expresión Eq. 1.

Primero se implementa tiro múltiple suponiendo que el control solo tiene una conmutación, donde el primer intervalo es bang-bang y el segundo es arco singular, este es el control con conmutación mas sencillo posible [3].

El objetivo en este caso será encontrar un cero de la función:

$$\bar{S}_\lambda : \mathbb{R}^{3n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3n+2}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \mapsto \bar{S}_\lambda(p_0, t_1) = \begin{pmatrix} H_1(z_1) \\ \{H_1, H_0\}(z_1) \\ q_{1,s}(t_f, t_1) \\ q_{2,s}(t_f, t_1) - p_{2,s}(t_f, t_1) \end{pmatrix},$$

donde $z_1 = (q(t_1), p(t_1))$

para una mayor cantidad de conmutaciones se agregan más variables t_i (tiempos en los que se cambia de bang-bang a singular o viceversa) y se agregan más términos de la forma $H_1(z_i), \{H_1, H_0\}, (z_i)$

Luego se implementa tiro múltiple suponiendo que el control presenta la siguiente estructura: BSBS [3](donde B denota un intervalo bang-bang y S un arco singular, en [3] esta estructura se denota 2BS).

En [2] se muestra que para $\lambda = 2$ la estructura del control es 2BS, pero al programarlo usando el método de tiro múltiple el método minimize de scipy no puede encontrar una solución de la función S_λ

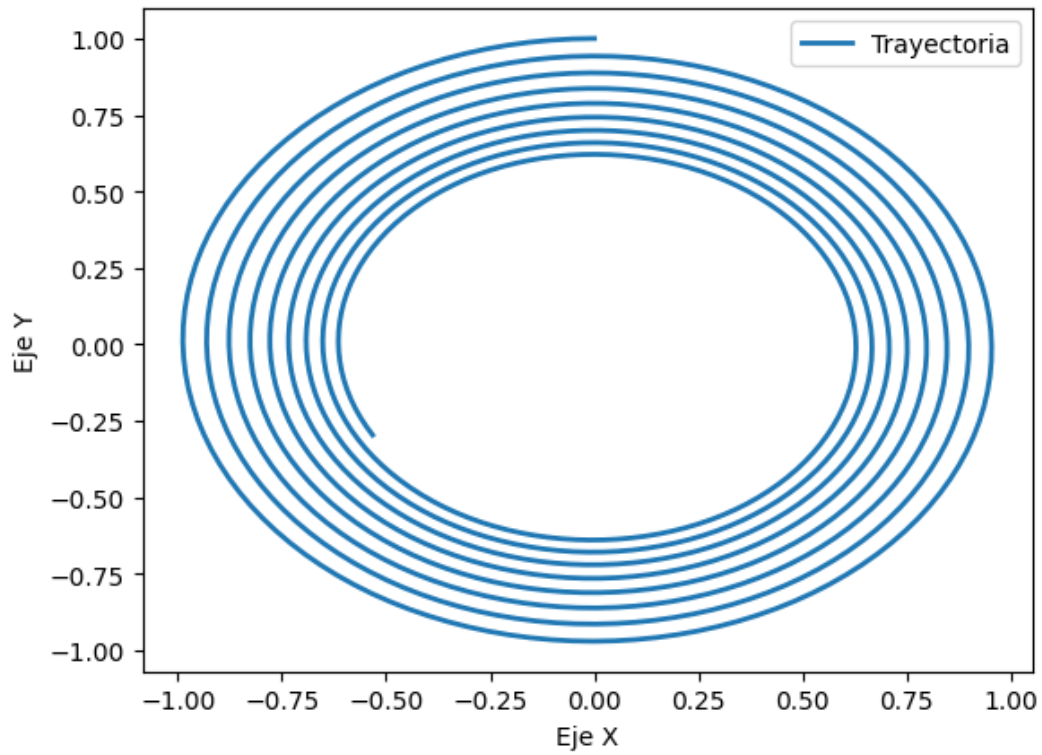


Figura 8: trayectoria obtenida por Multiple shooting 2BS y lambda=2

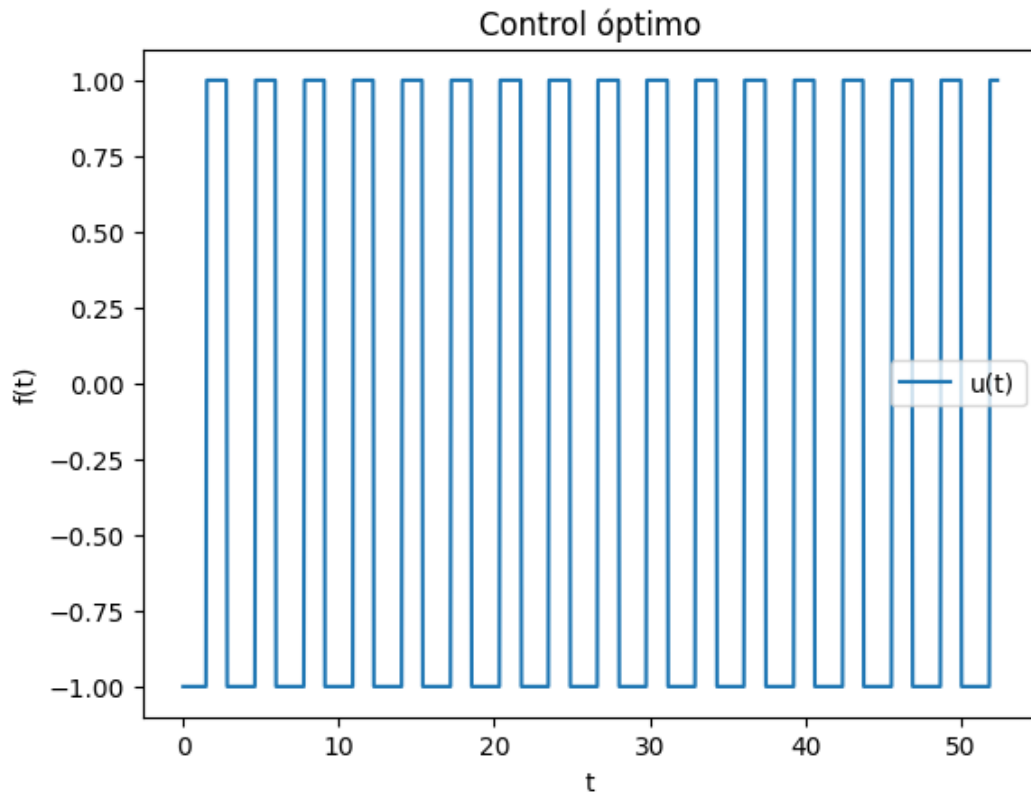


Figura 9: Control obtenido por Multiple shooting 2BS y $\lambda=2$

Referencias

- [1] B. Bonnard, M. Claeys, O. Cots and P. Martinon. Comparison of Numerical Methods in the Contrast Imaging Problem in NMR. In 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Firenze, Italy, 2013.
- [2] B. Bonnard, M. Claeys, O. Cots and P. Martinon. Geometric and numerical methods in the contrast imaging problem in the contrast imaging problem in nuclear magnetic resonance. Acta Applicandae Mathematicae, pages 1–41, 2015.
- [3] O. Cots. Controle optimal geometrique: methodes homotopiques et applications. PhD thesis, 2012.