MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2023
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Matías V. Vera. **Ayudante:** S. Adrián Arellano

Laboratorio #3
Problemas de Tiempo Mínimo y Lineal Cuadrático

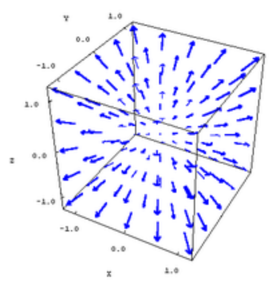
Descripción: En este laboratorio se trabajará con un sistema dinámico para el cual se plantea un problema de control óptimo a tiempo mínimo y otro problema de control óptimo lineal cuadrático. Se resolverán usando Métodos Directos e Indirectos, a través de `Python` y BOCOP.

Parte A. Problema de Tiempo Mínimo

Considere una partícula en el espacio, la cuál está sometida a las fuerzas dadas por $F_x = x + u$ y $F_y = y + v$, donde u y v son los controles del sistema. Además de lo anterior, la velocidad del eje z depende de la posición en los ejes x e y de la forma $x + y$. El sistema queda entonces descrito como sigue:

$$\ddot{x} = x + u; \quad \ddot{y} = y + v; \quad \dot{z} = x + y.$$

Para el sistema de medida usado, la partícula tiene masa unitaria, y en el instante inicial, se encuentra en reposo en la posición $(1, 1, 0)$. El objetivo de este problema es llevarla al origen en tiempo mínimo. Sin embargo, el módulo de cada control, no puede exceder las 5 unidades, es decir, para cada instante t, $u(t), v(t) \in [-5, 5]$.



Ejercicio 1 Estudie la controlabilidad del sistema (sin restricciones), use el método que le acomode y comente sobre la existencia de un control que lleve la partícula al origen en tiempo mínimo.

Ejercicio 2 Mediante la fórmula de discretización de Euler, discretice (de forma equidistribuida) en N puntos, la dinámica del problema en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$ (note que t_f no es conocido, de hecho, es una de las variables a minimizar).

Ejercicio 3 Usando `Python`, grafique en 3-D el cubo $[-1, 1]^3$, de modo que se aprecien las líneas de flujo del sistema. Use flechas para indicar en qué dirección se desplazaría una partícula si parte del reposo en cada posición graficada. Muestre dicho campo para controles $(u, v) \equiv 0$ y uno constante de su elección.
Indicación: Un ejemplo de lo esperado es la imagen adjunta, con otras direcciones. Le puede resultar útil la función `matplotlib.axes.Axes.quiver`.

Ejercicio 4 En el cubo del ejercicio anterior, grafique la trayectoria de la partícula sometida a ambos campos, identificando claramente cuál es el punto de partida y cuál es el de término.
Comentario: Lo anterior le permitirá ver si los vectores de desplazamiento que graficó son correctos. También es recomendable que use estos gráficos (sin los campos) para verificar la efectividad de las funciones que hará después.

Ejercicio 5 Utilice la función del **Ejercicio 2** junto a `scipy.optimize.minimize`, y encuentre numéricamente un control que lleve la partícula al origen. Describa su trayectoria y de gráficos del control.

Ejercicio 6 Utilizado en el comando `scipy.optimize.minimize`, resuelva el problema discretizado para varios valores de N y para varias condiciones iniciales u_i, v_i y t_f. Grafique las trayectorias óptimas y sus controles asociados para distintos valore de N. Comente respecto a las soluciones obtenidas, y el funcionamiento del método.

NOTA: El método descrito en esta parte se conoce como "Método Numérico Directo". Este tipo de métodos se caracterizan por ser de fácil implementación e interpretación, pero adolecen de problemas de dimensionalidad (para mejorar la calidad de la solución se debe incrementar N) y posiblemente el problema no lineal de dimensión finita posea varios mínimos locales.

Ejercicio 7 Utilice el programa BOCOP para resolver el problema de tiempo mínimo (sin discretizar). Utilice diferentes métodos de optimización de BOCOP. Finalmente compare los resultados obtenidos con aquellos del método anteriormente descrito, haga un **análisis completo** de los resultados conseguidos y los métodos aplicados (grafique, estime errores, compare trayectorias y valores objetivo, etc.).

Parte B. Problema Lineal Cuadrático

De ahora en adelante, consideraremos $t_f = 5$ y controles irrestrictos.
El problema presentado ahora, consiste en minimizar la fuerza total ejercida, en conjunto con la energía cinética al final del tramo, en particular, se debe minimizar el funcional:

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) := K(t_f) + \int_0^{t_f} \|(u(t), v(t))\|^2 dt,$$

donde $K(t) := \frac{1}{2} m(t)\, \mathrm{v}(t)^2$ es la energía cinética, $m(t)$ es la masa y $\mathrm{v}(t)$ es la velocidad.

Ejercicio 8 Modele el nuevo problema como un problema lineal cuadrático, identificando las matrices $Q(\cdot)$, $W(\cdot)$, $U(\cdot)$. ¿Cumplen las hipótesis que asumimos en cátedra?

Ejercicio 9 Usando el Principio del Máximo de Pontryagin pruebe que el control óptimo esta dado por $(u^*(t), v^*(t)) = (p_2(t), p_4(t))$, con $p(\cdot)$ solución de:

$$\dot{p}(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} p(t); \qquad p(t_f) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x(t_f) + y(t_f) \\ \dot{x}(t_f) \\ x(t_f) + y(t_f) \\ \dot{y}(t_f) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10 Utilice el resultado de la pregunta anterior, junto a `scipy.integrate.solve_ivp` y nuevamente `scipy.optimize.minimize`, con tal de encontrar un control óptimo para el problema lineal cuadrático. Grafique su trayectoria, control, y la evolución de su función de optimización.

Indicación: Cree una función que tome, como variables, las condiciones iniciales de p, resuelva el sistema acoplado hasta el tiempo final y entregue el error entre el estado final de p conseguido y el esperado según el ejercicio anterior. Luego, minimice dicha función.

NOTA: El método descrito en esta parte se conoce como "Método de tiro". Este es un método indirecto y, a diferencia del método directo, la dimensionalidad del problema es mucho más baja.

Ejercicio 11 Establezca la ecuación de Riccati del problema y resuélvala numéricamente. A partir de esto, escriba y simule numéricamente el control óptimo del problema LC en forma de *feedback*. Compare con la solución obtenida en la pregunta anterior (grafique, estime error, etc.).

Ejercicio 12 Utilice el programa BOCOP para resolver directamente el problema. Compare los resultados obtenidos en la pregunta anterior y haga un análisis completo de los resultados conseguidos y los métodos aplicados (grafique, estime errores, compare trayectorias y valores objetivo, etc.).