**MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio**. Semestre Primavera 2023
**Profesor:** Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Matías V. Vera. **Ayudante:** S. Adrián Arellano

# Laboratorio #2

Controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad

**Descripción**: El objetivo de este laboratorio es estudiar la controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad de un sistema lineal controlado. Para esto, se pide verificar los respectivos criterios de manera directa y usando el paquete `control` de Python. También se estudian conceptos relacionados como la matriz Gramiana y la forma canónica de Brunovski.

## Parte A. Modelamiento y simulación

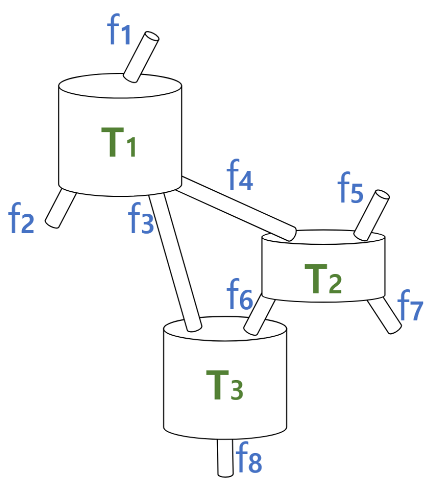


Figura 1: Flujo de líquido entre los tanques.

La Figura 1 describe el flujo de un líquido con sustrato, entre tres tanques. El sustrato no es capaz de saturar la sustancia, el volumen del líquido con o sin sustrato, es el mismo y, por motivos pedagógicos, el sustrato puede tomar concentraciones negativas. Además asumiremos que el volumen total de cada tanque es ilimitado. Los flujos (indicados por $f_n$ $[m^3/s]$) son tales que siempre el volumen entrante a un tanque es mayor o igual al de salida, i.e.

$$
\begin{aligned}
f_1 &\geq f_2 + f_3 + f_4 \\
f_4 + f_5 &\geq f_6 + f_7 \\
f_3 + f_6 &\geq f_8
\end{aligned}
$$

Mientras que los flujos $f_2, f_3, f_4, f_6, f_7$ y $f_8$ transportan líquido proveniente de los mismos tanques, las concentraciones entregadas por los flujos $f_1$ y $f_5$ son provistas por una bomba que permite controlar la concentración del sustrato. Esta bomba puede entregar el líquido a cualquier concentración en $f_1$, pero siempre deberá entregar el doble de dicha concentración en la otra salida de la bomba $f_5$ (por ejemplo, si la concentración en $f_1$ es de 5 $[m^3/s]$, entonces la de $f_5$ será 10 $[m^3/s]$).

Finalmente, cada tanque tiene un dispositivo en su interior que homogeneiza totalmente la mezcla en cada instante. El objetivo del problema es diseñar un control que permita llevar los tres tanques a las concentraciones $\left(C^1_{t_f}, C^2_{t_f}, C^3_{t_f}\right) = (0,0,0)$ $[kg/m^3]$.

**Ejercicio 1** Piense el problema para solo un tanque, con $n$ tubos de entrada y solo un tubo de salida, sea $k \in n$:

- $V_0$ : volumen inicial
- $C_0$ : concentración inicial
- $f_e^k$ : flujo de entrada $k$
- $f_s$ : flujo de salida
- $V(t)$ : volumen de tanque
- $C(t)$ : concentración de tanque
- $C_e^k(t)$ : concentración de entrada $k$

Se puede demostrar que:

$$V(t) = V_0 + \left(\sum_k (f_e^k) - f_s\right) t \qquad\qquad \dot{C}(t) = \frac{\sum_k (C_e^k(t)\, f_e^k) - C(t)\sum_k (f_e^k)}{V(t)}$$

A partir de lo anterior, muestre que la dinámica sistema resulta ser:

$$(S)\begin{cases} \dot{C}_1(t) = C_1(t)\dfrac{-f_1}{V_1 + t\cdot\Delta_1} + u(t)\dfrac{f_1}{V_1 + t\cdot\Delta_1} \\[2ex] \dot{C}_2(t) = C_1(t)\dfrac{f_4}{V_2 + t\cdot\Delta_2} + C_2(t)\dfrac{-(f_4+f_5)}{V_2 + t\cdot\Delta_2} + u(t)\dfrac{2f_5}{V_2 + t\cdot\Delta_2} \\[2ex] \dot{C}_3(t) = C_1(t)\dfrac{f_3}{V_3 + t\cdot\Delta_3} + C_2(t)\dfrac{f_6}{V_3 + t\cdot\Delta_3} + C_3(t)\dfrac{-(f_3+f_6)}{V_3 + t\cdot\Delta_3} \end{cases}$$

Donde $u(t)$ es el control, y $\Delta_1 := (f_1 - f_2 - f_3 - f_4)$, $\Delta_2 := (f_4 + f_5 - f_6 - f_7)$ y $\Delta_3 := (f_3 + f_6 - f_8)$.

**Ejercicio 2** Escriba el sistema matricial de la forma $\dot{X} = AX + BU$.
De ahora en adelante vamos a considerar que los flujos siguientes (en $[m^3/s]$):

| $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 1 | 5 | 3 | 3 | 5 |

los volúmenes iniciales que tenemos aproximación (en $[m^3]$):

| $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ |
|---|---|---|
| 200 | 100 | 300 |

y las concentraciones iniciales(en $[kg/m^3]$):

| $C_0^1$ | $C_0^2$ | $C_0^3$ |
|---|---|---|
| 5000 | 0 | 1000 |

**Ejercicio 3** Reescriba el nuevo sistema autónomo, y utilizando el comando `solve_ivp` simule trayectorias del sistema lineal para distintos controles (nulo, constantes, sinusoidales, feedbacks, bang bang, etc).

### Parte B. Controlabilidad, observabilidad y estabilidad

**Ejercicio 4** Utilizando `python` (sin el paquete de control), calcule la matriz de controlabilidad para el sistema. Compare el resultado con el obtenido usando el comando `ctrb` del paquete `control` de `python`. ¿Es el sistema controlable?

**Ejercicio 5** Usualmente es difícil conocer completamente las variables de estado ya que sólo podemos obtener observaciones imprecisas de estas. Por esto, en lo que sigue, supondremos que solamente observamos $C_2$ y $C_3$. Esto nos lleva a considerar un observador de la forma:

$$\vec{Y} \;=\; \mathcal{C}\vec{X}. \tag{1}$$

Identifique $\mathcal{C}$ y utilice `python` (sin el paquete de control) para calcular la matriz de observabilidad del sistema $(S)$ - (1). Compare con lo obtenido usando el comando `obsv` del paquete `control` de `python`. ¿Es el sistema observable?

**Ejercicio 6** A partir de lo aprendido en clases, calcule la forma canónica de Brunovski de los sistemas del ejercicio anterior (sin utilizar el toolbox de Control). Compare con los resultados obtenidos al utilizar `canonical_form`.

### Parte C. Reguladores y estabilizadores

**Ejercicio 7** Construya un estabilizador por feedback lineal, $\vec{U} = -K\vec{X}$ para una matriz $K$ apropiada, para el sistema $(S)$. Para esto, utilice los comandos `place` y `lqr` para obtener distintas matrices de ganancia $K$. Con el comando `eig` de `numpy.linalg` verifique los sistemas son estabilizables. Compare los resultados obtenidos al utilizar ambos comandos. Simule las trayectorias obtenidas por estos controles.

**Ejercicio 8** Construya el estimador de Luenberger asociado al sistema controlado y observado del ejercicio 5. Simule el estimador para otros tipos de observaciones $Y(\cdot)$ y controles $U(\cdot)$.

**Ejercicio 9** Considere los sistemas lineales controlados y observados del ejercicio 5. A partir de lo aprendido en clases, construya un control estabilizador por feedback lineal a partir de la observación $\vec{Y}$. Simule lo obtenido y compare con las trayectorias del sistema original para distintas condiciones iniciales. Discuta los resultados numéricos obtenidos en base a la teoría vista en cátedra.