MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2023
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Matías V. Vera. **Ayudante:** S. Adrián Arellano

Laboratorio #5

Principio de Pontryaguin & Ecuaciones de HJB.

Descripción: En este laboratorio resolveremos un problema de control óptimo cercano a la realidad, para el cuál utilizaremos, por un lado, las herramientas teóricas dadas por el Principio del Máximo de Pontryaguin, y por otro, el programa BOCOP, permitiéndonos ver el potencial de aplicación que tienen los contenidos de este curso. Luego veremos un problema simple pero interesante acerca de ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, que también compararemos con su resolución hecha en BOCOP.

Parte A. Métodos numéricos basados en Pontryaguin

En las costas de Chile habitan camarones nylon. Estos animales son consumidos al rededor de todo Chile, por lo tanto los pescadores locales se dedican a extraerlos, sin embargo, si los pescan todos, al periodo siguiente no podrán extraer más camarones y se terminará su negocio. En este problema, trataremos de encontrar un modo de hacer que este negocio siga existiendo para los pescadores de las costas de Coquimbo. Localmente (en $2{,}000\,km^2$ [1]), podemos describir el sistema dinámico de los camarones, como sigue:

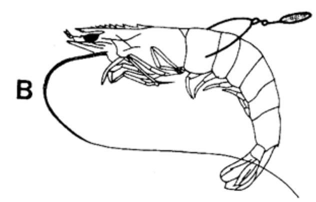

Figura 1: Camarón Marcado [2]

$$\begin{cases} \text{máx} \displaystyle\int_0^{t_f} C(t)\cdot(CA(t)\cdot m_a + CC(t)\cdot m_c)\,dt \\ \text{sa.} \quad \begin{aligned} \tfrac{d}{dt}CA(t) &= \quad A\cdot\zeta(t-d)\cdot CC(t) - (M + C(t))\cdot CA(t) \\ \tfrac{d}{dt}CC(t) &= -A\cdot\zeta(t-d)\cdot CC(t) - (M + C(t))\cdot CC(t) + N\cdot\zeta(t)\cdot CA(t) \\ & \quad C(t)\in[0,C_{max}] \qquad \forall t\in[0,t_f] \end{aligned} \end{cases}$$

con $\zeta(t) := 1 + sin\left(2\pi\frac{t}{c}\right)$.
Donde, las variables dependientes del tiempo son:

- $CA(t)$: la cantidad de camarones adultos en un determinado momento.
- $CC(t)$: la cantidad de crías de camarones en un determinado momento.
- $C(t)$: la intensidad de captura en un instante de tiempo (el control).

Y las constantes ([1] y [2]):

Variable	*Valor*	*Descripción*	*Unidades*
t_f	52	tiempo final	(semanas)
C_{max}	1	captura máxima	
m_a	0,02	masa por camarón adulto	(kg)
m_c	0,005	masa por cría de camarón	(kg)
A	0,5	tasa de paso a la adultez	
N	0,85	tasa de natalidad	
M	0,35	tasa de mortalidad	
c	12	duración de un ciclo de reproducción	(semanas)
d	4	desface del ciclo de reproducción con el de madurez	(semanas)

Además, considere las condiciones iniciales $CA(0) = 3000$ y $CC(0) = 1000$

Ejercicio 1 Utilice el **Principio del Máximo de Pontryaguin** para encontrar la dinámica de los estados adjuntos $p = (p_1, p_2)$, las condiciones de transversalidad, y una caracterización del control óptimo.
Indicación: no necesita derivar a mano, puede usar herramientas como `sympy` o lo que te acomode.

Ejercicio 2 Cree una función en `python` que le permita calcular el control óptimo en un determinado instante, en función de CA, CC, p y t.

Ejercicio 3 Implemente en `python` el sistema dinámico acoplado (CC, CA, p_1, p_2), sin considerar las condiciones de transversalidad.
Note que aquí debe usar la función creada en la parte anterior.

Ejercicio 4 **Método de tiro**: Utilice las condiciones de transversalidad y la parte anterior, para determinar el control óptimo del sistema.
Según este método ¿Cuántas toneladas de camarones, son capaces de extraer los pescadores al año?

Ejercicio 5 Implemente el sistema original en `BOCOP` y resuélvalo.

Ejercicio 6 Compare ambos métodos, mostrando lado a lado, el control, la evolución de las variables de estado y la función de optimización. Compare además el valor objetivo obtenido en cada caso, estime errores y comente acerca del tiempo de ejecución.

Una vez hecho todo lo anterior ¿Cuál de los controles utilizaría para resolver este problema en la vida real? ¿Por qué? ¿Y si fuera otro problema, bajo qué criterios escogería uno o el otro?

Parte B. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman

Consideremos el siguiente sistema dinámico controlado, no lineal:

$$\min J(u(\cdot)) = \int_0^1 \Big(x(t)\, u(t)\Big)^2 \, dt + x(1)^2; \qquad \text{s.a.} \quad \dot{x}(t) = -x(t)u(t), \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

Asumiremos que la solución a la ecuación de HJB asociada al problema es cuadrática, i.e.

$$V(t, x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

para ciertas funciones $a, b, c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 7 Escriba la ecuación de HJB del problema, reemplazando $V(t, x)$ por el presentado antes. Luego implemente en Python una rutina que resuelva dicha ecuación y entregue las funciones a, b y c.

Ejercicio 8 Implemente una función que entregue el valor del control óptimo, i.e.

$$u^*(\cdot) = \Gamma\Big(x(\cdot), \partial x V(\cdot, x(\cdot))\Big)$$

donde $\Gamma(x, p) := \mathrm{argmin}_{w \in U} \{H(t, x, w, p)\}$. Grafíquelo junto a la dinámica. Verifique que el valor del problema coincide con lo entregado por la función.

Ejercicio 9 Resuelva el problema en BOCOP y compare los resultados (grafique, estime errores, compare trayectorias, valores objetivo, eficiencia, etc.).

Referencias:

[1] Pérez, Eduardo P.. (2005). Un modelo simple para describir la dinámica de la biomasa del camarón nailon Heterocarpus reedi en Coquimbo, Chile.

[2] García, S. y L. (1986) Le Reste, Ciclos vitales, dinámica, explotación y ordenación de las poblaciones de camarones peneidos costeros.