MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2023
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Matías V. Vera. **Ayudante:** S. Adrián Arellano

Laboratorio #4
Problema Lineal Cuadrático

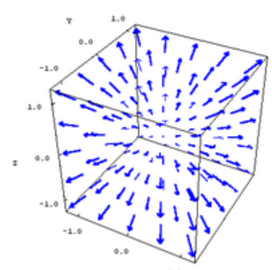
Descripción: Este laboratorio es la continuación del laboratorio anterior. Se trabajará con el mismo sistema dinámico, para el cual se plantea un problema de control óptimo lineal cuadrático. Se resolverá usando Métodos Directos e Indirectos, a través de `Python` y BOCOP.

Problema Lineal Cuadrático

Considere una partícula en el espacio, la cuál está sometida a las fuerzas dadas por $F_x = x + u$ y $F_y = y + v$, donde u y v son los controles del sistema. Además de lo anterior, la velocidad del eje z depende de la posición en los ejes x e y de la forma $x + y$. El sistema queda entonces descrito como sigue:

$$\ddot{x} = x + u; \quad \ddot{y} = y + v; \quad \dot{z} = x + y.$$

Para el sistema de medida usado, la partícula tiene masa unitaria, y en el instante inicial, se encuentra en reposo en la posición $(1, 1, 0)$. El objetivo de este problema es llevarla al origen en tiempo mínimo. Sin embargo, el módulo de cada control, no puede exceder las 5 unidades, es decir, para cada instante t, $u(t), v(t) \in [-5, 5]$.



De ahora en adelante, consideraremos $t_f = 5$ y controles irrestrictos.
El problema presentado consiste en minimizar la fuerza total ejercida, en conjunto con la energía cinética al final del tramo, en particular, se debe minimizar el funcional:

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) := K(t_f) + \int_0^{t_f} \|(u(t), v(t))\|^2 dt,$$

donde $K(t) := \frac{1}{2} m(t)\, \mathrm{v}(t)^2$ es la energía cinética, $m(t)$ es la masa y $\mathrm{v}(t)$ es la velocidad.

Ejercicio 1 Modele el nuevo problema como un problema lineal cuadrático, identificando las matrices $Q(\cdot)$, $W(\cdot)$, $U(\cdot)$. ¿Cumplen las hipótesis que asumimos en cátedra?

Ejercicio 2 Usando el Principio del Máximo de Pontryagin pruebe que el control óptimo esta dado por $(u^*(t), v^*(t)) = (p_2(t), p_4(t))$, con $p(\cdot)$ solución de:

$$\dot{p}(t) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} p(t); \qquad p(t_f) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x(t_f) + y(t_f) \\ \dot{x}(t_f) \\ x(t_f) + y(t_f) \\ \dot{y}(t_f) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 Utilice el resultado de la pregunta anterior, junto a `scipy.integrate.solve_ivp` y nuevamente `scipy.optimize.minimize`, con tal de encontrar un control óptimo para el problema lineal cuadrático. Grafique su trayectoria, control, y la evolución de su función de optimización.

Indicación: Cree una función que tome, como variables, las condiciones iniciales de p, resuelva el sistema acoplado hasta el tiempo final y entregue el error entre el estado final de p conseguido y el esperado según el ejercicio anterior. Luego, minimice dicha función.

NOTA: El método descrito en esta parte se conoce como "Método de tiro". Este es un método indirecto y, a diferencia del método directo, la dimensionalidad del problema es mucho más baja.

Ejercicio 4 Establezca la ecuación de Riccati del problema y resuélvala numéricamente. A partir de esto, escriba y simule numéricamente el control óptimo del problema LC en forma de *feedback*. Compare con la solución obtenida en la pregunta anterior (grafique, estime error, etc.).

Ejercicio 5 Utilice el programa BOCOP para resolver directamente el problema. Compare los resultados obtenidos en la pregunta anterior y haga un análisis completo de los resultados conseguidos y los métodos aplicados (grafique, estime errores, compare trayectorias y valores objetivo, etc.).