Esercizi per Fondamenti matematici per l'informatica

Matteo Franzil

5 marzo 2019

Indice

1 Esercizi sul Principio d'Induzione

Esercizio 1.1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, $\forall n \geq 0$, vale:

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i! \cdot i = (n+1)! - 1 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2}{(3i+1)(3i+4)} = \frac{2n+2}{3n+4} \qquad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (4)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \qquad (5)$$

Esercizio 1.2. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, $\forall n \geq 1$, vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{n}{2n+3} \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{3^i} = 3 - \frac{2n+3}{3^n} \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 3 \cdot 4^i = 4^{n+1} - 4 \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 9i \cdot 4^i = 4 + 4^{n+1}(3n-1) \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 6i^2 = n(n+1)(2n+1) \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i! \cdot (i+2)} = 1 - \frac{2}{(n+2)!} \qquad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 5^i = \frac{5^{n+1}-5}{4} \qquad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1} \qquad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \qquad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2+2i-1}{(2i+1)!} = 1 - \frac{1}{(2n+1)!} \qquad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-1)(3i+2)} = \frac{n}{6n+4} \tag{19}$$

Esercizio 1.3. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, $\forall n \geq 2$, vale:

$$\sum_{i=2}^{n} (i-1) \cdot i = \frac{n \cdot (n^2-1)}{3} \tag{20}$$

$$n^3 - n^2 - n + 1 \geq 0 \tag{21}$$

Esercizio 1.4. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, $\forall n \geq 5$, vale:

$$2^n > n^2 - \frac{1}{2} \tag{22}$$

Esercizio 1.5. Siano F_i i numeri di Fibonacci. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che, $\forall n \geq 1$, vale:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1 \tag{23}$$

2 Esercizi sul Teorema cinese del resto

Esercizio 2.1. Determinare tutte le soluzioni (se esistono) dei seguenti sistemi di congruenze, indicando la minima soluzione positiva.

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{113} \\ x \equiv 87 \pmod{84} \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} x \equiv 28 \pmod{45} \\ x \equiv 46 \pmod{18} \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} x \equiv 37 \pmod{168} \\ x \equiv 51 \pmod{770} \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} x \equiv 30 \pmod{1015} \\ x \equiv 75 \pmod{195} \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} x \equiv 71 \pmod{148} \\ x \equiv 67 \pmod{180} \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} x \equiv 37 \pmod{280} \\ x \equiv 47 \pmod{165} \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} x \equiv 42 \pmod{426} \\ x \equiv 72 \pmod{78} \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} x \equiv 112 \pmod{72} \\ x \equiv 4 \pmod{330} \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} x \equiv 20 \pmod{156} \\ x \equiv 8 \pmod{108} \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} x \equiv 165 \pmod{164} \\ x \equiv 79 \pmod{75} \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{168} \\ x \equiv 25 \pmod{119} \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} x \equiv 27 \pmod{218} \\ x \equiv 31 \pmod{102} \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} x \equiv -44 \pmod{48} \\ x \equiv 72 \pmod{28} \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} x \equiv 45 \pmod{95} \\ x \equiv 80 \pmod{135} \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} x \equiv 48 \pmod{108} \\ x \equiv -12 \pmod{42} \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{90} \\ x \equiv -1 \pmod{33} \end{cases} \tag{39}$$

Esercizio 2.2. Determinare tutte le soluzioni (se esistono) dei seguenti sistemi di congruenze, indicando la minima soluzione positiva. Si determini, inoltre, motivando la risposta, se esiste una soluzione

$$\begin{cases} x \equiv 112 \pmod{72} \\ x \equiv 4 \pmod{330} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 51.} \tag{40}$$

$$\begin{cases} x \equiv 28 \pmod{45} \\ x \equiv 46 \pmod{18} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 16.} \tag{41}$$

$$\begin{cases} x \equiv 20 \pmod{117} \\ x \equiv 11 \pmod{81} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 15.} \tag{42}$$

$$\begin{cases} x \equiv -7 \pmod{21} \\ x \equiv 41 \pmod{81} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 14.} \tag{43}$$

$$\begin{cases} x \equiv 9 \pmod{603} \\ x \equiv 27 \pmod{144} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 5.} \tag{44}$$

$$\begin{cases} x \equiv -63 \pmod{267} \\ x \equiv 75 \pmod{186} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 5.} \tag{45}$$

$$\begin{cases} x \equiv 52 \pmod{126} \\ x \equiv -11 \pmod{91} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 101.} \tag{46}$$

$$\begin{cases} x \equiv -4 \pmod{402} \\ x \equiv -37 \pmod{279} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 9.} \tag{47}$$

$$\begin{cases} x \equiv 9 \pmod{162} \\ x \equiv -9 \pmod{114} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 17.} \tag{48}$$

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{96} \\ x \equiv 20 \pmod{170} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 4.} \tag{49}$$

$$\begin{cases} x \equiv -39 \pmod{42} \\ x \equiv -7 \pmod{26} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 5.} \tag{50}$$

$$\begin{cases} x \equiv 36 \pmod{99} \\ x \equiv -36 \pmod{171} \end{cases} \qquad \text{divisibile per 50.} \tag{51}$$

Esercizio 2.3. Determinare tutte le soluzioni (se esistono) dei seguenti sistemi di congruenze, indicando la minima soluzione positiva. Si determini, inoltre, motivando la risposta, se esiste una soluzione

$$\begin{cases} x \equiv 122 \pmod{210} \\ x \equiv 66 \pmod{77} \end{cases} \qquad \text{la cui cifra delle decine è pari a 7} \tag{52}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{111} \\ x \equiv 55 \pmod{63} \end{cases} \qquad \text{la cui cifra delle decine è pari a 8} \tag{53}$$

$$\begin{cases} x \equiv 20 \pmod{84} \\ x \equiv -32 \pmod{136} \end{cases} \qquad \text{la cui cifra delle unità è pari a 5} \tag{54}$$

$$\begin{cases} x \equiv 89 \pmod{125} \\ x \equiv -3 \pmod{78} \end{cases} \qquad \text{la cui somma delle cifre è pari a 11} \tag{55}$$

Esercizio 2.4. Determinare tutte le soluzioni (se esistono) dei seguenti sistemi di congruenze, indicando la minima soluzione positiva. Si determini, inoltre, motivando la risposta, se tutte le soluzioni di tale sistema sono divisibili per 17.

$$\begin{cases} x \equiv 85 \pmod{102} \\ x \equiv 133 \pmod{264} \end{cases} \tag{56}$$

3 Esercizi sulla crittografia RSA

Esercizio 3.1. Determinare le soluzioni delle seguenti congruenze. Individuare tra tali soluzioni il minimo numero intero positivo.

$$x^7 \equiv 9 \pmod{82} \tag{57}$$

$$x^{35} \equiv 5 \pmod{144} \tag{58}$$

$$x^{31} \equiv 47 \pmod{122} \tag{59}$$

$$x^{17} \equiv 19 \pmod{120} \tag{60}$$

$$x^{17} \equiv 2 \pmod{51} \tag{61}$$

$$x^5 \equiv 49 \pmod{171} \tag{62}$$

$$x^{53} \equiv 17 \pmod{117} \tag{63}$$

$$x^{11} \equiv 25 \pmod{62} \tag{64}$$

$$x^{23} \equiv 3 \pmod{31} \tag{65}$$

$$x^{33} \equiv 2 \pmod{55} \tag{66}$$

$$x^{11} \equiv 35 \pmod{38} \tag{67}$$

$$x^7 \equiv 8 \pmod{77} \tag{68}$$

$$x^9 \equiv 12 \pmod{355} \tag{69}$$

$$x^{23} \equiv 9 \pmod{31} \tag{70}$$

$$x^{13} \equiv 8 \pmod{143} \tag{71}$$

4 Esercizi sugli isomorfismi

Data la relativa difficoltà e diversità del materiale di studio, è risultato impossibile inserire gli esercizi sugli isomorfismi in questa dispensa. Se qualcuno fosse disposto a farlo, è libero di effettuare una pull request e modificare questo documento.

5 Esercizi sugli score di un grafo

Esercizio 5.1. Si dica, motivando la risposta, se il dato vettore è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo il teorema dello score. Si dica inoltre, se esiste, un tale grafo che soddisfi i requisiti richiesti.

$$d = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 5) \tag{72}$$

(a) sia sconnesso (b) sia 2-connesso (c) sia connesso

$$d = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 6) \tag{73}$$

(a) sia sconnesso (b) abbia esattamente tre componenti connesse (c) sia un albero

$$d = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5) \tag{74}$$

(a) sia connesso (b) sia un albero (c) con dei cicli

$$d = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 4, 5) \tag{75}$$

(a) sia aciclico (b) sia sconnesso (c) abbia esattamente due componenti connesse

$$d = (1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 7) \tag{76}$$

(a) sia connesso (b) sia un albero (c) sia aciclico

Esercizio 5.2. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo il teorema dello score. Si dica inoltre, se esiste, un tale grafo che soddisfi i requisiti richiesti.

$$d_1 = (1, 1, 3, 3, 3, 5, 7, 7), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 4) \tag{77}$$

(a) sia un albero (b) sia 2 connesso (c) sia aciclico

$$d_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 10, 11), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 8, 8) \tag{78}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia connesso

$$d_1 = (1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 10, 10), \qquad d_2 = (0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 6, 8) \tag{79}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia connesso

$$d_1 = (0, 1, 2, 3, 3, 3, 5, 8, 8, 9), \qquad d_2 = (1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5) \tag{80}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia connesso

$$d_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 11, 11), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 6) \tag{81}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia 2-connesso

$$d_1 = (l, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 9, 9), \qquad d_2 = (2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 9, 9, 9) \tag{82}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia 2-connesso

$$d_1 = (3, 3, 3, 4, 4, 5, 6), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 4, 4) \tag{83}$$

(a) sia sconnesso (b) sia 2-connesso (c) sia aciclico

$$d_1 = (2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 7), \qquad d_2 = (0, 0, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 9) \tag{84}$$

(a) sia sconnesso (b) sia Hamiltoniano (c) sia un albero

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 8, 9) \tag{85}$$

(a) sia connesso (b) abbia tre componenti connesse (c) sia un albero

$$d_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 8, 8), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 5) \tag{86}$$

(a) sia connesso (b) sia 2–connesso (c) sia un albero

$$d_1 = (3, 4, 5, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5) \tag{87}$$

(a) sia connesso (b) sia un albero (c) abbia tre componenti connesse

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6) \tag{88}$$

(a) sia Hamiltoniano (b) sia sconnesso (c) sia un albero

$$d_1 = (0, 0, 0, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 10), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7) \tag{89}$$

(a) abbia due componenti connesse (b) sia 2–connesso (c) sia un albero

$$d_1 = (3, 3, 3, 3, 5, 6, 9, 10, 10, 10, 10), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4) \tag{90}$$

(a) sia sconnesso (b) sia 2–connesso (c) sia un albero

$$d_1 = (2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 8), \qquad d_2 = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 8, 14, 14) \tag{91}$$

(a) sia un albero (b) sia Hamiltoniano (c) sia sconnesso

$$d_1 = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 6, 8), \qquad d_2 = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5) \tag{92}$$

(a) sia connesso (b) sia sconnesso (c) sia un albero

$$d_1 = (2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7), \qquad d_2 = (1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 8, 8, 9) \tag{93}$$

(a) sia Hamiltoniano (b) sia sconnesso (c) sia un albero

$$d_1 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,3,4), \qquad d_2 = (1,1,1,2,2,2,3,3,5,6,6,7,8,8) \tag{94}$$

(a) sia Hamiltoniano (b) sia aciclico (c) sia connesso

$$d_1 = (1,2,2,2,3,4,4,4,9,9), \qquad d_2 = (1,1,1,2,2,2,2,4,5,6) \tag{95}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia connesso

$$d_1 = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11), \qquad d_2 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,4,5,5) \tag{96}$$

(a) abbia tre componenti connesse (b) sia 2–connesso (c) sia un albero

$$d_1 = (1,1,1,1,1,1,1,4,6,8,8,8,9,10,12,13,13), \qquad d_2 = (1,1,2,2,4,4,4,4,4,4) \tag{97}$$

(a) sia Hamiltoniano (b) sia un albero (c) sia sconnesso

$$d_1 = (1,1,1,2,3,3,3,4,4,5,6,6,6,7,7), \qquad d_2 = (2,2,2,2,3,3,3,4,4,4,7) \tag{98}$$

(a) sia Hamiltoniano (b) abbia due componenti connesse (c) sia un albero

$$d_1 = (3,3,3,3,5,5,5,5), \qquad d_2 = (1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,4,4,5) \tag{99}$$

(a) sia Hamiltoniano (b) sia sconnesso (c) sia un albero

$$d_1 = (1,2,2,2,3,3,4,5,9,9), \qquad d_2 = (1,1,1,1,1,1,1,1,3,4,5) \tag{100}$$

(a) sia 2–connesso (b) sia sconnesso (c) sia un albero

$$d_1 = (2,2,2,3,3,3,3,4,8,8), \qquad d_2 = (1,1,1,1,2,2,6,6) \tag{101}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia Hamiltoniano

$$d_1 = (1,1,1,2,4,4,4,5,5,7), \qquad d_2 = (0,1,1,2,2,2,2,6,8) \tag{102}$$

(a) sia connesso (b) sia sconnesso (c) sia Hamiltoniano

$$d_1 = (1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,3,3,4), \qquad d_2 = (2,2,3,3,4,5,6,6,6,7,7) \tag{103}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia Hamiltoniano

$$d_1 = (2,2,2,2,4,4,5,5,8), \qquad d_2 = (1,2,3,3,3,4,5,5,5,10,10,10) \tag{104}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia Hamiltoniano

$$d_1 = (2,2,2,2,2,2,2,3,4,4,10,11), \qquad d_2 = (1,1,1,1,1,1,2,8,8) \tag{105}$$

(a) sia un albero (b) sia sconnesso (c) sia 2-connesso

$$d_1 = (1,1,1,1,1,2,2,3,8,8,8), \qquad d_2 = (1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,4,4,5) \tag{106}$$

(a) abbia un 4–ciclo come una delle sue componenti connesse

(b) sia 2–connesso (c) sia un albero

$$d_1 = (3,3,4,4,4,6,9,9,9,9), \qquad d_2 = (1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,4,4) \tag{107}$$

(a) sia 2–connesso (b) sia un albero

(c) abbia un 3–ciclo come una delle sue componenti connesse

$$d_1 = (2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,5), \qquad d_2 = (0,0,0,1,1,1,3,3,4,5,6,6,10) \tag{108}$$

(a) sia Hamiltoniano (b) sia un albero

(c) abbia un 4–ciclo come una delle sue componenti connesse

$$d_1 = (1,1,1,1,2,2,2,3,3,4,5,6,7,8,9,9,9,9,11) \tag{109}$$

$$d_2 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,4,6)$$

(a) una foresta (b) sia connesso (c) contenga un 3–ciclo

$$d_1 = (1,1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,6) \tag{110}$$

$$d_2 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,4,4,6)$$

(a) sia Hamiltoniano (b) abbia esattamente tre componenti connesse (c) sia un albero

$$d_1 = (1,1,1,1,1,2,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4) \tag{111}$$

$$d_2 = (1,1,1,1,1,1,3,3,3,3,3,3,4,4,4)$$

(a) sia Hamiltoniano (b) sia un albero (c) abbia quattro componenti connesse