

Tutorato di Calcolo delle Probabilità

Camilla Righetti

Matteo Franzil



**UNIVERSITÀ
DI TRENTO**

**Dipartimento di
Ingegneria e Scienza dell'Informazione**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

6 aprile 2022

Siamo in A205...

...solo oggi.

La prossima volta in A207.

Non è colpa nostra se l'orario non lo aggiornano.

Un piccolo recap...

Operazione	Con ripetizione	Senza ripetizione
Disposizioni di n elementi in k posizioni	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$D_{n,k}^r = n^k$
Permutazioni di n elementi	$P_n = n!$	$P_{n,k}^r = n^n$
Combinazioni di n elementi presi k alla volta	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_{n,k}^r = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

...anche in altre parole

	modalità	di estrazione
configurazione	senza rimessa	con rimessa
ordinata	$D_{n,k} = \frac{P_n}{(n-k)!}$	$D_{n,k}^r$
non ordinata	$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$	$C_{n_k}^r$

Esercizio 3.1

Esercizio (3.1, ex. Esercizio 12
PDF "Esercizi" su Moodle)

Quattro ragazzi e quattro ragazze partecipano ad una caccia al tesoro a coppie.

- ❶ *Se ciascuna coppia è formata da un ragazzo e da una ragazza in quanti modi diversi si può formare la quaterna di coppie?*
- ❷ *Se ciascuna coppia è formata da persone dello stesso sesso, in quanti modi diversi si può formare la quaterna di coppie?*
- ❸ *In quanti modi diversi si può formare la quaterna di coppie (insieme di due elementi)?*

Risoluzione.

- ① $\frac{(4 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 1)}{4!} = \frac{16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}{24} = 4!$. Per la prima coppia, possiamo scegliere 4 ragazzi e 4 ragazze. Per la seconda, 3 e 3, e così via. Dividiamo tutto per $4!$, ovvero le permutazioni possibili – in quanto non ci interessa l'ordine e una disposizione $A_1 A_2, B_1 B_2, \dots$ è sempre uguale a $B_1 B_2, A_1 A_2, \dots$.
- ② $\left(\binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2!}\right) \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2!}\right)$. Per i maschi, scegliamo dai 4 disponibili 2 persone (l'altra coppia è di conseguenza vincolata). Dobbiamo contare il caso in cui le coppie sono scambiate. Stessa cosa per le femmine.
- ③ Stavolta non abbiamo vincoli legati al genere dei partecipanti delle coppie, quindi possiamo trattare il problema come una permutazione con ripetizione, ovvero: $\frac{8!}{2!2!2!2!} \cdot \frac{1}{4!}$. In altre parole, abbiamo le permutazioni di tutti gli 8 partecipanti, divise per le permutazioni delle singole coppie (in quanto $AB = BA$ per una coppia), diviso infine per le permutazioni di tutte le coppie (in quanto 1234 e 1423 sono equivalenti).

Esercizio 3.2

Esercizio (3.2, esame 28/06/2016 degli Informatici)

Un messaggio di posta elettronica viene spedito dal calcolatore A al calcolatore B. Il collegamento tra i due calcolatori è di questo tipo, ogni messaggio in partenza da A viene spedito a C e D, i quali spediscono il messaggio a B.

Ad ogni passaggio il messaggio può arrivare integro o non integro (il controllo viene fatto attraverso un codice), nel caso in cui il messaggio è integro viene re-inviato secondo lo schema descritto sopra, altrimenti il messaggio viene cancellato e perduto.

Esercizio 3.2

Esercizio (3.2, esame 28/06/2016 degli Informatici)

Le probabilità che da un passaggio ad un altro il messaggio arrivi integro è così descritto ($P(A \rightarrow C)$ indica la probabilità che il messaggio inviato da A giunga integro in C e così via):

$$P(A \rightarrow C) = 0.79, P(A \rightarrow D) = 0.92$$

$$P(C \rightarrow B | A \rightarrow C) = 0.81, P(D \rightarrow B | A \rightarrow D) = 0.66$$

$$P(C \rightarrow B | \overline{A \rightarrow C}) = 0, P(D \rightarrow B | \overline{A \rightarrow D}) = 0$$

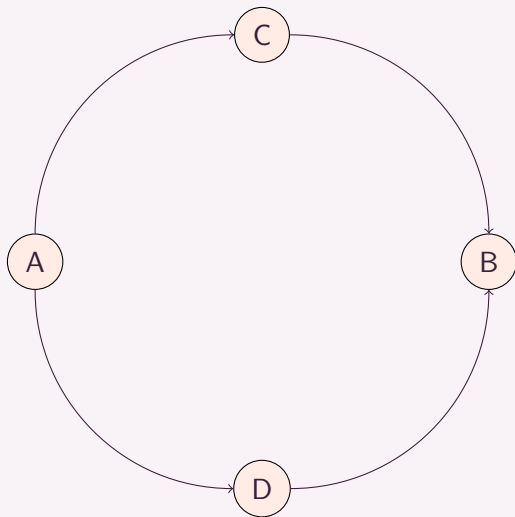
Esercizio 3.2

Esercizio (3.2, esame 28/06/2016 degli Informatici)

Infine, tutti gli eventi che riguardano una linea di trasmissione ($A \rightarrow C \rightarrow B$) sono stocasticamente indipendenti da quelli dell'altra linea ($A \rightarrow D \rightarrow B$).

- ❶ *Qual è la probabilità che il messaggio venga recapitato SOLO attraverso il canale $A \rightarrow C \rightarrow B$?*
- ❷ *Qual è la probabilità che il messaggio venga recapitato attraverso il canale $A \rightarrow C \rightarrow B$?*
- ❸ *Qual è la probabilità che il messaggio venga recapitato?*
- ❹ *Sapendo che il messaggio è stato ricevuto da B qual è la probabilità dell'evento $A \rightarrow D$?*

Punto 1.



Punto 1.

Affinché il pacchetto venga recapitato soltanto attraverso il percorso $A \rightarrow C \rightarrow B$, dobbiamo imporre che il pacchetto **non** passi dall'altro, contemporaneamente:

$$P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cap \overline{(A \rightarrow D \rightarrow B)}) = P(A \rightarrow C \rightarrow B)P(\overline{A \rightarrow D \rightarrow B})$$

Grazie all'indipendenza dei due eventi, siamo in grado di trasformare l'intersezione degli eventi nella rispettiva moltiplicazione. Ora possiamo trasformare separatamente i due casi nelle relative probabilità condizionate, utilizzando il teorema di Bayes.

$$P(A \rightarrow C \rightarrow B) \cdot P(\overline{A \rightarrow D \rightarrow B}) = \\ (P(C \rightarrow B|A \rightarrow C)P(A \rightarrow C)) \cdot P(\overline{A \rightarrow D \rightarrow B})$$



Punto 1.

Il primo caso è abbastanza semplice: è sufficiente utilizzare la formula inversa. Per il secondo caso, invece, dobbiamo dividere la formula: infatti,

$$P(\overline{A \rightarrow D \rightarrow B}) =$$

$$P(\overline{D \rightarrow B} | A \rightarrow D)P(A \rightarrow D) + P(\overline{D \rightarrow B} | \overline{A \rightarrow D})P(\overline{A \rightarrow D})$$

in quanto dobbiamo tenere conto sia dell'eventualità che il pacchetto venga perso nel tratto AD , sia nel tratto DB . Questo porta a dover dividere la probabilità in due e a considerarle separatamente come somma.

$$(P(C \rightarrow B | A \rightarrow C)P(A \rightarrow C)) \cdot$$

$$(P(\overline{D \rightarrow B} | A \rightarrow D)P(A \rightarrow D) + P(\overline{D \rightarrow B} | \overline{A \rightarrow D})P(\overline{A \rightarrow D})) =$$

$$= 0.251$$



Punto 2.

Questo punto lo si ricava direttamente dal precedente: infatti, richiedere la probabilità che il messaggio venga recapitato (senza solo) dal primo canale è pari a $P(A \rightarrow C \rightarrow B)$, che possiamo velocemente espandere in $P(C \rightarrow B|A \rightarrow C)P(A \rightarrow C) = 0.6399$ □

Punto 3.

In questo caso, invece, ci viene richiesta la probabilità che il messaggio venga recapitato e basta. Allora si tratta di un'unione di eventi.

Tuttavia, per risolvere un'unione, non possiamo affidarci alle semplici moltiplicazioni:

$$P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cup \overline{(A \rightarrow D \rightarrow B)}) \neq P(A \rightarrow C \rightarrow B)P(\overline{A \rightarrow D \rightarrow B})$$



Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Allora procediamo con la sostituzione:



Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Allora procediamo con la sostituzione:

$$P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cup (A \rightarrow D \rightarrow B)) = \quad (a)$$



Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Allora procediamo con la sostituzione:

$$\begin{aligned} &P(A \rightarrow C \rightarrow B) + \\ &P(A \rightarrow D \rightarrow B) - \\ &P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cap (A \rightarrow D \rightarrow B)) = \quad (b) \end{aligned}$$



Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Allora procediamo con la sostituzione:

$$\begin{aligned} &P(C \rightarrow B | A \rightarrow C)P(A \rightarrow C) + \\ &\quad (D \rightarrow B | A \rightarrow D)P(A \rightarrow D) - \\ &P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cap (A \rightarrow D \rightarrow B)) = \quad (c) \end{aligned}$$



Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Allora procediamo con la sostituzione:

$$\underbrace{0.81 \cdot 0.79}_{P(A \rightarrow C \rightarrow B)} + \underbrace{0.66 \cdot 0.92}_{P(A \rightarrow D \rightarrow B)} - \underbrace{(0.81 \cdot 0.79) \cdot (0.66 \cdot 0.92)}_{P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cap (A \rightarrow D \rightarrow B))} = 0.859$$



Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Allora procediamo con la sostituzione:

$$P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cup (A \rightarrow D \rightarrow B)) = \quad (a)$$

$$P(A \rightarrow C \rightarrow B) +$$

$$P(A \rightarrow D \rightarrow B) -$$

$$P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cap (A \rightarrow D \rightarrow B)) = \quad (b)$$

$$P(C \rightarrow B | A \rightarrow C)P(A \rightarrow C) +$$

$$(D \rightarrow B | A \rightarrow D)P(A \rightarrow D) -$$

$$P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cap (A \rightarrow D \rightarrow B)) = \quad (c)$$

$$\underbrace{0.81 \cdot 0.79}_{P(A \rightarrow C \rightarrow B)} + \underbrace{0.66 \cdot 0.92}_{P(A \rightarrow D \rightarrow B)} - \underbrace{(0.81 \cdot 0.79) \cdot (0.66 \cdot 0.92)}_{P((A \rightarrow C \rightarrow B) \cap (A \rightarrow D \rightarrow B))} = 0.859 \quad \square$$

Punto 4.

Questo punto presenta una richiesta abbastanza schietta: calcolare $P(A \rightarrow D | A \rightarrow B)$. Con il teorema di Bayes, la liquidiamo velocemente:

$$P(A \rightarrow D | A \rightarrow B) = \frac{P((A \rightarrow D) \cap (A \rightarrow B))}{P(A \rightarrow B)} = \frac{P(A \rightarrow D \rightarrow B)}{P(A \rightarrow B)}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che se dobbiamo cercare l'intersezione tra la probabilità che un messaggio venga consegnato e che passi per B, siamo necessariamente "costretti" a cercare la probabilità che sia passato per quel canale. I calcoli numerici seguono per sostituzione. ■