

Esercitazione di Calcolo delle Probabilità

Matteo Franzil



**UNIVERSITÀ
DI TRENTO**

**Dipartimento di
Ingegneria e Scienza dell'Informazione**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

18 maggio 2023

Cosa dobbiamo aspettarci dalla provetta?

- 5 esercizi:
 - ▶ 2 esercizi sui modelli discreti
 - ▶ 2 esercizi sui modelli continui
 - ▶ un esercizio jolly

- **Bernoulli:**

- ▶ 1 in caso di successo, 0 altrimenti
- ▶ probabilità di successo p
- ▶ $\mathbb{E}[X] = p, \mathbb{V}ar[X] = p(1 - p)$

- **Binomiale:**

- ▶ ripetizione di n prove indipendenti
- ▶ $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)}$
- ▶ $\mathbb{E}[X] = np, \mathbb{V}ar[X] = np(1 - p)$

- **Poisson:**

- ▶ processo di Bernoulli con n grande e p piccolo
- ▶ numero medio di successi μ
- ▶ $f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

Modelli continui (1)

● Uniforme:

- ▶ probabilità uniforme su un intervallo
- ▶ $f(x) = \frac{1}{b-a}; F(x) = \frac{x-a}{b-a}$
- ▶ $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \mathbb{V}ar[X] = \frac{b-a^2}{12}$

● Esponenziale:

- ▶ tempo di attesa rispetto a un evento
- ▶ è senza memoria
- ▶ $f(x) = \lambda x e^{-\lambda}$ su valori positivi
- ▶ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- ▶ $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \mathbb{V}ar[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

- **Gamma:**

- ▶ somma di variabili esponenziali

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

- ▶ dove $\Gamma(n) = (n-1)!$ se n è intero, altrimenti

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

- ▶ $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{\lambda}, \mathbb{V}ar[X] = \frac{n}{\lambda^2}$

- **Gaussiana:**

- ▶ non si calcola la pdf, si usano le tavole
- ▶ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ $\mathbb{E}[X] = \mu, \mathbb{V}ar[X] = \sigma^2$

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Come orientarsi negli esercizi?

- Leggere bene il testo
 - ▶ Che dati vengono forniti?
 - ▶ Cosa si chiede di calcolare?
 - ▶ Il mio modello è **discreto** o **continuo**?
- Ripensare agli esercizi già visti
 - ▶ Ho già visto un esercizio simile? Che modello ho usato?
 - ▶ Avete un formulario a disposizione, fatene buon uso!
- Usare la statistica a proprio favore...
 - ▶ È difficile che ci siano due esercizi consecutivi sullo stesso modello...
 - ▶ ... ma non impossibile!

Esercizio 1

Alla mensa di Povo, ogni giorno vi è una grande affluenza di studenti per pranzo, nonostante la discutibile bontà dei pasti serviti. È risaputo che, in media, in un giorno l'1% degli studenti che pranzano alla mensa di Povo la sera poi soffrirà di problemi intestinali.

- Se in un certo giorno pranzano alla mensa 1000 studenti, qual è la probabilità che la sera almeno 10 di loro soffrano di problemi intestinali?

Esercizio 1

Alla mensa di Povo, ogni giorno vi è una grande affluenza di studenti per pranzo, nonostante la discutibile bontà dei pasti serviti. È risaputo che, in media, in un giorno l'1% degli studenti che pranzano alla mensa di Povo la sera poi soffrirà di problemi intestinali.

- Se in un certo giorno pranzano alla mensa **1000 studenti**, qual è la probabilità che la sera **almeno 10** di loro soffrano di problemi intestinali?

Esercizio 1 (soluzione)

$$X \sim \text{Bin}(1000, 0.01)$$

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^9 \binom{1000}{i} 0.01^i 0.99^{1000-i}$$

$$\approx 1 - 0.457$$

$$\approx 0.543$$

Esercizio 2

Un gruppo di *NO-TAV*¹, esasperato dalla poca attenzione dedicatagli dalla politica, decide di passare alle maniere forti. Per bloccare il cantiere che presto verrà aperto, il gruppo raduna un certo numero di persone, che si disporrà in fila indiana lungo il perimetro del cantiere, impedendone l'accesso agli addetti ai lavori.

Chiaramente, le persone non possono rimanere per sempre a bloccare il cantiere.

Esercizio 2a

- Il tempo di permanenza di una persona nel gruppo è una variabile aleatoria X con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Quale è la probabilità che una persona rimanga a protestare per più di 5 ore?

Esercizio 2a (soluzione)

Le informazioni fornite sono abbastanza inequivocabili. Applichiamo direttamente le formule:

$$X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 0.5}) \\ &= e^{-2.5} = 0.082085 \end{aligned}$$

Esercizio 2b

- Tra le persone che protestano, vi è un leader, incaricato di coordinare le azioni del gruppo. Il leader, però, è un tipo piuttosto irascibile, e non è raro che, dopo un certo periodo di tempo, si stanchi e se ne vada.

Assumendo che vi siano a disposizione tante persone per assumere il ruolo di leader (tutte che si comportano come al punto precedente), quale è la probabilità che entro 5 ore il leader venga cambiato esattamente 4 volte?

Esercizio 2b (soluzione)

Una delle proprietà dell'esponenziale è che la somma di variabili aleatorie esponenziali indipendenti è ancora una variabile aleatoria esponenziale, con parametro pari alla somma dei parametri delle variabili sommate.

$$X_1, X_2, \dots, X_4 \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$Y = \sum_{i=1}^4 X_i$$

$$Y \sim \Gamma(n = 4, \lambda = 0.5)$$

$$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5) = 0.242$$

Esercizio 3

Nella pittoresca cittadina di Riva del Garda, c'è un grande afflusso di turisti durante i mesi estivi. Consideriamo la distribuzione del numero di tedeschi che visitano Riva del Garda durante l'estate. Infatti, è noto che questa distribuzione segue una distribuzione gaussiana univariata.

Si stima che il numero medio di turisti tedeschi a Riva del Garda durante l'estate sia pari a 1500, con una deviazione standard di 300.

Esercizio 3a

- Calcolare la probabilità che il numero di turisti tedeschi a Riva del Garda durante l'estate sia compreso tra 1200 e 1800.

Esercizio 3a (soluzione)

$$X \sim N(1500, 300^2) = N(1500, 90000)$$

$$\begin{aligned} P(1200 \leq x \leq 1800) &= P\left(\frac{1200 - 1500}{300} \leq \frac{x - 1500}{300} \leq \frac{1800 - 1500}{300}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6827 \end{aligned}$$

Esercizio 3b

- I ristoranti locali necessitano di una stima abbondante del numero di turisti tedeschi per poter rifornire le cucine di un congruo numero di birre.

La nuova media sarà comunque pari a 1500, ma quale deviazione standard dobbiamo utilizzare affinché la probabilità che il numero di turisti tedeschi sia superiore a 2200 sia pari al 10%?

Esercizio 3b (soluzione)

$$Y \sim N(1500, \sigma^2)$$

$$P(Y > 2200) = 0.1; P(Y \leq 2200) = 0.9$$

$$P\left(\frac{Y - 1500}{\sigma} \leq \frac{2200 - 1500}{\sigma}\right) = 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{2200 - 1500}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{700}{\sigma}\right) = 0.9$$

Consultando la tabella della normale, il valore z per cui $\Phi(z) = 0.9$ è $z \approx 1.28$. Quindi otteniamo $\frac{700}{\sigma} \approx 1.28$, da cui $\sigma \approx 546.88$.

- Grazie alla massiccia campagna di marketing del Trentino, l'estate successiva (2024) il numero medio di turisti tedeschi dovrebbe aumentare del 20%. Quali saranno la nuova media e la deviazione standard?

Nota: la v.a. di partenza è quella del punto b), precedentemente calcolata.

Esercizio 3c (soluzione)

$$Y \sim N(1500, 546.88^2)$$

$$Z \sim N(\mu^*, \sigma^{*2})$$

$$\mu^* = 1500 + 1500 * 0.2 = 1800$$

La deviazione standard rimane invariata poiché l'aumento è proporzionale e non influisce sulla diffusione della distribuzione. Quindi avremo $\sigma^{*2} = 546.88^2$.