Tutorato di Calcolo delle Probabilità

Camilla Righetti

Matteo Franzil

UNIVERSITÀ DI TRENTO
Dipartimento di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

6 aprile 2022

Un piccolo recap...

Operazione	Con ripetizione	Senza ripetizione
Disposizioni di n elementi in k posizioni	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$D^r_{n,k} = n^k$
Permutazioni di n elementi	$P_n = n!$	$P^r_{n,k} = n^n$
Combinazioni di n elementi presi k alla volta	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C^r_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

...anche in altre parole

	modalità	di estrazione
configurazione	senza rimessa	con rimessa
ordinata	$D_{n,k} = \frac{P_n}{(n-k)!}$	$D^r_{n,k}$
non ordinata	$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$	$C^r_{n_k}$

Esercizio 3.1

Esercizio (3.1, ex. Esercizio 12 PDF "Esercizi" su Moodle)

Quattro ragazzi e quattro ragazze partecipano ad una caccia al tesoro a coppie.

1. *Se ciascuna coppia è formata da un ragazzo e da una ragazza in quanti modi diversi si può formare la quaterna di coppie?*
2. *Se ciascuna coppia è formata da persone dello stesso sesso, in quanti modi diversi si può formare la quaterna di coppie?*
3. *In quanti modi diversi si può formare la quaterna di coppie (insieme di due elementi)?*

Risoluzione.

1. $\frac{(4\cdot 4)\cdot(3\cdot 3)\cdot(2\cdot 2)\cdot(1\cdot 1)}{4!} = \frac{16\cdot 9\cdot 4\cdot 1}{24} = 4!$. Per la prima coppia, possiamo scegliere 4 ragazzi e 4 ragazze. Per la seconda, 3 e 3, e così via. Dividiamo tutto per 4!, ovvero le permutazioni possibili – in quanto non ci interessa l'ordine e una disposizione $A_1A_2, B_1B_2, \cdots$ è sempre uguale a $B_1B_2, A_1A_2, \cdots$.
2. $(\binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2!}) \cdot (\binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2!})$. Per i maschi, scegliamo dai 4 disponibili 2 persone (l'altra coppia è di conseguenza vincolata). Dobbiamo contare il caso in cui le coppie sono scambiate. Stessa cosa per le femmine.
3. Stavolta non abbiamo vincoli legati al genere dei partecipanti delle coppie, quindi possiamo trattare il problema come una permutazione con ripetizione, ovvero: $\frac{8!}{2!2!2!2!} \cdot \frac{1}{4!}$. In altre parole, abbiamo le permutazioni di tutti gli 8 partecipanti, divise per le permutazioni delle singole coppie (in quanto $AB = BA$ per una coppia), diviso infine per le permutazioni di tutte le coppie (in quanto 1234 e 1423 sono equivalenti). ∎

Esercizio 3.2

Esercizio (3.2, esame 28/06/2016 degli Informatici)

Un messaggio di posta elettronica viene spedito dal calcolatore A al calcolatore B. Il collegamento tra i due calcolatori è di questo tipo, ogni messaggio in partenza da A viene spedito a C e D, i quali spediscono il messaggio a B.
Ad ogni passaggio il messaggio può arrivare integro o non integro (il controllo viene fatto attraverso un codice), nel caso in cui il messaggio è integro viene re-inviato secondo lo schema descritto sopra, altrimenti il messaggio viene cancellato e perduto.

Esercizio 3.2

Esercizio (3.2, esame 28/06/2016 degli Informatici)

Le probabilità che da un passaggio ad un altro il messaggio arrivi integro è così descritto ($P(A \to C)$ indica la probabilità che il messaggio inviato da A giunga integro in C e così via):

$$P(A \to C) = 0.79, P(A \to D) = 0.92$$
$$P(C \to B|A \to C) = 0.81, P(D \to B|A \to D) = 0.66$$
$$P(C \to B|\overline{A \to C}) = 0, P(D \to B|\overline{A \to D}) = 0$$

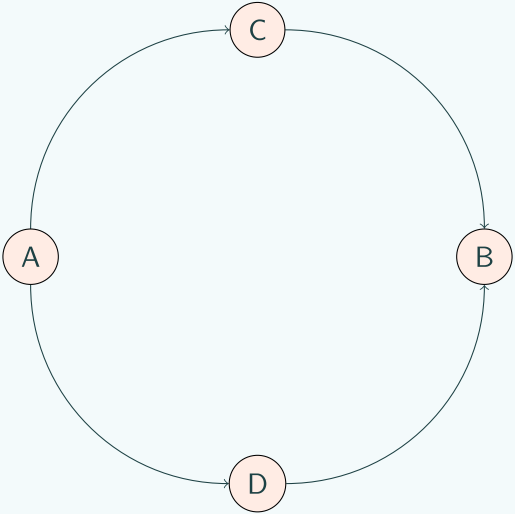
Esercizio 3.2

Esercizio (3.2, esame 28/06/2016 degli Informatici)

Infine, tutti gli eventi che riguardano una linea di trasmissione ($A \to C \to B$) sono stocasticamente indipendenti da quelli dell'altra linea ($A \to D \to B$).

1. *Qual è la probabilità che il messaggio venga recapitato SOLO attraverso il canale $A \to C \to B$?*
2. *Qual è la probabilità che il messaggio venga recapitato attraverso il canale $A \to C \to B$?*
3. *Qual è la probabilità che il messaggio venga recapitato?*
4. *Sapendo che il messaggio è stato ricevuto da B qual è la probabilità dell'evento $A \to D$?*

Punto 1.



Punto 1.

Affinché il pacchetto venga recapitato soltanto attraverso il percorso $A \to C \to B$, dobbiamo imporre che il pacchetto **non** passi dall'altro, contemporaneamente:

$$P((A \to C \to B) \cap \overline{(A \to D \to B)}) = P(A \to C \to B)P(\overline{A \to D \to B})$$

Grazie all'indipendenza dei due eventi, siamo in grado di trasformare l'intersezione degli eventi nella rispettiva moltiplicazione. Ora possiamo trasformare separatamente i due casi nelle relative probabilità condizionate, utilizzando il teorema di Bayes.

$$P(A \to C \to B) \cdot P(\overline{A \to D \to B}) =$$
$$(P(C \to B | A \to C)P(A \to C)) \cdot P(\overline{A \to D \to B})$$

$\longrightarrow$

Punto 1.

Il primo caso è abbastanza semplice: è sufficiente utilizzare la formula inversa. Per il secondo caso, invece, dobbiamo dividere la formula: infatti,

$$P(\overline{A \to D \to B}) =$$
$$P(\overline{D \to B} | A \to D) P(A \to D) + P(\overline{D \to B} | \overline{A \to D}) P(\overline{A \to D})$$

in quanto dobbiamo tenere conto sia dell'eventualità che il pacchetto venga perso nel tratto AD, sia nel tratto DB. Questo porta a dover dividere la probabilità in due e a considerarle separatamente come somma.

$$(P(C \to B | A \to C) P(A \to C)) \cdot$$
$$\left(P(\overline{D \to B} | A \to D) P(A \to D) + P(\overline{D \to B} | \overline{A \to D}) P(\overline{A \to D})\right) =$$
$$= 0.251$$

$\square$

Punto 2.

Questo punto lo si ricava direttamente dal precedente: infatti, richiedere la probabilità che il messaggio venga recapitato (senza solo) dal primo canale è pari a $P(A \to C \to B)$, che possiamo velocemente espandere in $P(C \to B|A \to C)P(A \to C) = 0.6399$ $\square$

Punto 3.

In questo caso, invece, ci viene richiesta la probabilità che il messaggio venga recapitato e basta. Allora si tratta di un unione di eventi. Tuttavia, per risolvere un unione, non possiamo affidarci alle semplici moltiplicazioni:

$$P((A \to C \to B) \cup \overline{(A \to D \to B)}) \neq P(A \to C \to B)P(\overline{A \to D \to B})$$

$\longrightarrow$

Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Allora procediamo con la sostituzione:

$\square$

Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Allora procediamo con la sostituzione:

$$P((A \to C \to B) \cup (A \to D \to B)) = \tag{a}$$

$\longrightarrow$

Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Allora procediamo con la sostituzione:

$$\begin{aligned} P(A \to C \to B)+ \\ P(A \to D \to B)- \\ P((A \to C \to B) \cap (A \to D \to B)) = \end{aligned} \tag{b}$$

$\longrightarrow$

Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Allora procediamo con la sostituzione:

$$\begin{gathered} P(C \to B|A \to C)P(A \to C) + \\ (D \to B|A \to D)P(A \to D) - \\ P((A \to C \to B) \cap (A \to D \to B)) = \end{gathered} \tag{c}$$

$\longrightarrow$

Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Allora procediamo con la sostituzione:

$$\underbrace{0.81 \cdot 0.79}_{P(A \to C \to B)} + \underbrace{0.66 \cdot 0.92}_{P(A \to D \to B)} - \underbrace{(0.81 \cdot 0.79) \cdot (0.66 \cdot 0.92)}_{P((A \to C \to B) \cap (A \to D \to B))} = 0.859$$

$\longrightarrow$

Punto 3.

Fortunatamente, le nozioni insiemistiche ci soccorrono: infatti, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Allora procediamo con la sostituzione:

$$
\begin{aligned}
P((A \to C \to B) \cup (A \to D \to B)) = \quad & \text{(a)}\\
P(A \to C \to B) + \quad & \\
P(A \to D \to B) - \quad & \\
P((A \to C \to B) \cap (A \to D \to B)) = \quad & \text{(b)}\\
P(C \to B | A \to C) P(A \to C) + \quad & \\
(D \to B | A \to D) P(A \to D) - \quad & \\
P((A \to C \to B) \cap (A \to D \to B)) = \quad & \text{(c)}
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{0.81 \cdot 0.79}_{P(A \to C \to B)} + \underbrace{0.66 \cdot 0.92}_{P(A \to D \to B)} - \underbrace{(0.81 \cdot 0.79) \cdot (0.66 \cdot 0.92)}_{P((A \to C \to B) \cap (A \to D \to B))} = 0.859 \qquad \square$$

Punto 4.

Questo punto presenta una richiesta abbastanza schietta: calcolare $P(A \to D|A \to B)$. Con il teorema di Bayes, la liquidiamo velocemente:

$$P(A \to D|A \to B) = \frac{P((A \to D) \cap (A \to B))}{P(A \to B)} = \frac{P(A \to D \to B)}{P(A \to B)}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che se dobbiamo cercare l'intersezione tra la probabilità che un messaggio venga consegnato e che passi per B, siamo necessariamente "costretti" a cercare la probabilità che sia passato per quel canale. I calcoli numerici seguono per sostituzione. ■