Tutorato di
Calcolo delle Probabilità

Camilla Righetti

Matteo Franzil

UNIVERSITÀ DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

20 aprile 2022

Esercizio 1

Esercizio (*Password cdp* – 6pt)

Il sito dedicato al calcolo delle probabilità "`cdp.com`" richiede ai suoi utenti di registrarsi con una password. Le regole per la costruzione della password sono le seguenti:

- *deve essere lunga esattamente 5 caratteri;*
- *lettere maiuscole e minuscole sono considerate distinte (la password è case-sensitive);*
- *deve contenere almeno una lettera (non importa se maiuscola o minuscola) e almeno un simbolo (punto . oppure underscore _);*
- *le lettere possibili sono quelle dell'alfabeto inglese (26 lettere);*
- *sono consentiti solamente lettere maiuscole o minuscole, il punto (.) e l'underscore (_).*

Esercizio 1

Esercizio (*Password cdp* – 6pt)

(a) *Quante sono le password possibili?*

(b) *Quante delle password precedenti contengono la stringa "`cdp`" al loro interno? La stringa si intende scritta con caratteri maiuscoli e/o minuscoli a piacere, sono opzioni distinte sia "`CdP`" che "`cDP`".*

Soluzione.

a) Se le 26 lettere maiuscole sono considerate distinte dalle 26 minuscole, e aggiungendo 2 simboli grafici, ottengo un totale di $26 + 26 + 2 = 54$ simboli. Senza regole, posso scegliere 54^5 password possibili; da queste vanno escluse le 52^5 consistenti solamente di lettere (senza simboli) e le 2^5 consistenti solo di simboli (senza lettere), arrivando così a

$$n = 54^5 - 52^5 - 2^5 = 78960960$$

$\square$

Soluzione.

b) Ci sono due modi per scrivere ciascuna lettera della stringa “cdp” (lettera maiuscola oppure minuscola), per un totale di $2^3 = 8$ modi diversi.

La stringa può essere posizionata all'inizio della password, nel mezzo o alla fine (cdp*, *cdp* oppure *cdp), per un totale di 3 posizionamenti possibili.

I rimanenti due caratteri possono essere due simboli grafici (2^2 possibilità) oppure una lettera e un simbolo (le due lettere sono escluse, perché deve essere presente almeno un simbolo, per un totale di $52 \cdot 2 \cdot 2$ modi). In totale, le password di questo tipo sono

$$m = \underbrace{8}_{\text{modi}} \cdot \underbrace{3}_{\text{posiz.}} \cdot \big(\underbrace{2 \cdot 2}_{\text{simb.}} + \underbrace{52 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{lett+simb}}\big) = 5088$$

■

Esercizio 2

Esercizio (*Tombola ridotta* – 6pt)

Viene organizzata una tombola "ristretta". Vi sono 20 palline numerate (da 1 a 20) in un vaso, e ne vengono pescate (senza reinserimento) 5, una alla volta. Su ognuna delle tessere distribuite ai giocatori sono presenti 8 numeri (da 1 a 20). Due estrazioni si considerano differenti se differiscono per almeno un numero o per l'ordine di uscita dei numeri.

(a) *In quanti modi diversi può avvenire l'estrazione?*

(b) *Sulla tessera di un giocatore sono presenti i numeri 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Se la prima pallina estratta è stata quella con il numero 6, per quante estrazioni differenti questa scheda realizza almeno un terno (ovvero almeno 3 dei suoi numeri vengono estratti)?*

Soluzione.

(a) L'estrazione può avvenire in $D_{20,5} = \frac{20!}{15!} = 1860480$ modi diversi.

(b) Visto che uno dei 5 numeri che vengono estratti non è presente sulla scheda, è possibile solo fare terno o quaterna. La quaterna può essere estratta in

$$D_{8,4} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

modi. Per la terna, 3 dei numeri estratti devono essere tra gli 8 presenti sulla scheda, e l'ultimo può essere uno degli altri $20 - 8 - 1 = 11$ numeri. L'ultimo numero può essere estratto come secondo, terzo, quarto o quinto, per un totale di

$$4 \cdot 11 \cdot D_{8,3} = 4 \cdot 11 \cdot \frac{8!}{5!} = 14784$$

modi. Sommando le due possibilità si ottiene il totale di $n = 1680 + 14784 = 16464$. ∎

Esercizio 3

Esercizio (*Calcio scommesse* – 8pt)

Un tifoso vuole scommettere sulla vittoria della propria squadra nella prossima partita di calcio. Sa che la sua squadra vince nel 70% dei casi e pareggia nel 20% dei casi con la squadra che la affronterà se il tempo è asciutto, mentre vince nel 30% dei casi e pareggia nel 25% se piove.

(a) *Se le previsioni per il giorno della partita sono per il 45% sole e per il restante pioggia, qual è la probabilità che la squadra del tifoso non perda?*

(b) *Sapendo che la partita è finita in pareggio, qual è la probabilità che quel giorno abbia piovuto?*

Soluzione.

Indichiamo con W, D, L rispettivamente la vittoria (**w**_in_), il pareggio (**d**_raw_) e la sconfitta (**l**_oss_) della squadra. Inoltre, con R (**r**_ain_) e S (**s**_un_) indichiamo la pioggia e il tempo asciutto.

Piccola nota: a calcio, "non perdere" significa vincere oppure pareggiare.

(a) Affinché una squadra *non perda*, calcoliamo $p(\overline{L})$:

$$
\begin{aligned}
p(\overline{L}) &= \overbrace{p(S)\,[1 - p(L|S)] + p(R)\,[1 - p(L|R)]}^{\text{Teorema della probabilità totale}} \\
&= 0.45 \cdot 0.9 + 0.55 \cdot 0.55 \\
&= 0.7075
\end{aligned}
$$

□

Soluzione.

(b) Per come è posto il quesito (e per le richieste del primo punto), possiamo formulare la probabilità richiesta con Bayes:

$$
\begin{aligned}
p(R|D) &= \frac{p(D|R)p(R)}{p(D)} \\
&= \frac{p(D|R)p(R)}{p(D|R)p(R) + p(D|S)p(S)} \\
&= \frac{0.25 \cdot 0.55}{0.25 \cdot 0.55 + 0.2 \cdot 0.45} \\
&= 0.604
\end{aligned}
$$

∎

Esercizio 4

Esercizio (*Deadline* – 8pt)

Uno studio di ingegneria ha recentemente vinto l'appalto per la produzione di tre progetti, A, B e C.

Il progetto A non è vincolato a una scadenza e viene pagato 100. Il progetto B viene pagato 120 se lo studio lo finisce in tempo, e 80 se la deadline non viene rispettata; la deadline verrà rispettata con una probabilità del 50%. Il terzo progetto, del valore di 90, verrà completato rispettando la scadenza prevista con la probabilità del 70% e viene pagato esclusivamente se completato entro la deadline.

Qual è la probabilità che lo studio venga pagato almeno 200?

Soluzione.

Siano A, B, C gli eventi che rappresentano il rispetto delle deadline per i progetti corrispondenti. Allora $p(A) = 1$, $p(B) = 0.5$, $p(C) = 0.7$. Sia T il pagamento totale ricevuto dall'azienda.

Il primo progetto porta sicuramente 100 all'azienda, dunque è sufficiente che il progetto B e C combinati vengano pagati almeno 100. Se B rispetta la scadenza, si superano i 200 totali; se B non supera la scadenza, deve essere rispettata la scadenza di C.

$$p(T \geq 200) = p(B) + p(\overline{B}) \cdot p(C) = 0.5 + 0.5 \cdot 0.7 = 0.85$$

$\blacksquare$

Esercizio 5

Esercizio (*Crescita economica* – 5pt)

Una azienda prevede che, con una probabilità del 5%, l'economia sarà in crescita. Inoltre, c'è una probabilità del 90% che i ricavi della azienda aumentino, se l'economia sarà in crescita. Se invece l'economia non sarà in crescita, i ricavi aumenteranno solamente con una probabilità del 40%.

(a) Qual è la probabilità che i ricavi non aumentino?

(b) Se i ricavi dopo un anno sono effettivamente aumentati, qual è la probabilità che l'economia sia stata in crescita?

Soluzione.

Indichiamo con C l'evento "economia in crescita" e con R l'aumento dei ricavi.
Allora:

$$p(R|C) = 0.9$$

$$p(R|\overline{C}) = 0.4$$

$$p(C) = 0.05$$

$$\Rightarrow p(\overline{C}) = 0.95$$

$\longrightarrow$

Soluzione.

(a) Similarmente all'esercizio sul calcio, il Teorema della probabilità totale ci viene in aiuto:

$$\begin{aligned}
p(\overline{R}) = 1 - p(R) &= 1 - \Big(\overbrace{p(R|C)\cdot p(C) + p(R|\overline{C})\cdot p(\overline{C})}^{\text{Teorema della probabilità totale}}\Big) \\
&= 1 - (0.9\cdot 0.05 + 0.4\cdot 0.95) \\
&= 1 - 0.425 \\
&= 0.575
\end{aligned}$$

□

Soluzione.

(b) Quando ci viene chiesta una probabilità con la condizione invertita, possiamo velocemente ri-invertirla:

$$
\begin{aligned}
p(C|R) &= \frac{p(R|C) \cdot p(C)}{p(R)} \\
&= \frac{p(R|C) \cdot p(C)}{1 - p(\overline{R})} \\
&= \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.425} \\
&= 0.106
\end{aligned}
$$

■