Tutorato di
Calcolo delle Probabilità

Camilla Righetti

Matteo Franzil

UNIVERSITÀ DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

24 maggio 2022

Esercizio d'esempio 1

Esercizio (20210524-1)

Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = 4x^3$$

Questa funzione è la pdf della variabile aleatoria X definita nel dominio $x \in [0, 1]$. Definiamo una seconda variabile aleatoria Y con densità:

$$y = 8\sqrt{x}$$

(a) *Ricavare la cdf della variabile aleatoria X.*
(b) *Ricavare la pdf della variabile aleatoria Y.*
(c) *Ricavare la cdf della variabile aleatoria Y.*

Soluzione.

(a) Ricavare la *cdf* è facile: integriamo la funzione dal punto 0 fino al punto 1.

$$\int_0^1 f(x), dx = \int_0^1 4x^3, dx = x^4$$

□

Soluzione.

(b) Per ricavare la *pdf* di Y, dobbiamo invertire la funzione di trasformazione $g(x) = y$. Allora abbiamo che

$$g^{-1}(y) = (\frac{x}{8})^2$$

e

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{32}x$$

$\longrightarrow$

Soluzione.

(b) Allora ora possiamo procedere con la trasformazione vera e propria. Abbiamo dunque:

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = 4 \cdot ((\frac{x}{8})^2)^3 \cdot \frac{1}{32}x = \frac{1}{2097152}x^7$$

Per trovare gli estremi, verifichiamo che la funzione passa l'asse y in $x = 0$, mentre si interseca con l'inversa in $x = 8$. Verifichiamo effettivamente che l'integrale da 0 a 8 di questa funzione è pari a 1.

(c) L'ultimo punto lo si verifica trivialmente integrando la sopracitata funzione. Otteniamo $F(Y) = \frac{1}{16777216}x^8$

Esercizio d'esempio 2

Esercizio (20210524-2)

La quantità di gin tonic versata in un bicchiere al Mercolegin si comporta come una variabile aleatoria normale, con parametri $\mu = 19$ *ml e* $\sigma^2 = 16$ *ml*^{2}.

(a) *Quale è la probabilità che un bicchiere di gin tonic contenga almeno 25 ml di drink?*

(b) *Uno studente, terminata la seconda provetta di Calcolo delle probabilità, decide di festeggiare andando al Mercolegin per bere 3 bicchieri di gin tonic. Sapendo che ha bisogno di almeno 21 ml di gin tonic per divertirsi, ma sboccherebbe se ne bevesse più di 65 ml, quale è la probabilità che si diverta senza sboccare?*

Esercizio d'esempio 2

Esercizio (20210524-2)

(c) *Per attirare più clientela, il Bar Domo il mercoledì successivo decide di cambiare bicchieri. Con questi nuovi bicchieri, la varianza è sempre* $\sigma^2 = 16$ *ml*^{2}, *ma la media è ignota. Degli studenti, dopo alcuni "attenti" calcoli, verificano che la probabilità che questi bicchieri contengano al massimo* 25 *ml di drink è 0,853. Quale è la media di questa nuova distribuzione?*

Soluzione.

(a) $p = 1 - F(\frac{25\ ml - 19\ ml}{\sqrt{16\ ml^2}}) = 1 - F(\frac{6}{4}) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.933192 = 0.066808$

(b) Abbiamo una nuova variabile aleatoria con $\mu = 19 \cdot 3\ ml$ e $\sigma^2 = 16 \cdot 3\ ml^2$, quindi $\mu = 57\ ml$ e $\sigma^2 = 48\ ml^2$. Allora

$$
\begin{aligned}
P(21 \leq X \leq 65) &= (\frac{65\ ml - 57\ ml}{\sqrt{48\ ml^2}}) - F(\frac{21\ ml - 57\ ml}{\sqrt{48\ ml^2}}) \\
&= F(1.154701) - F(-5.196) \\
&= 0.8758
\end{aligned}
$$

$\square$

Soluzione.

(c) Cerchiamo nella tavola 0.853: otteniamo 1.05 (ovvero, $F(1.05) = 0.853$). Allora abbiamo $z = 1.05$. Possiamo usare la formula inversa della standardizzazione:

$$z = 1.05 = \frac{25\ ml - \mu}{\sqrt{16\ ml^2}} \Leftrightarrow 25 - (1.05 \cdot 4) = \mu = 20.8\ ml$$

$\square$