

УДК 539.42, 539.375
№ держреєстрації 0122U000828
Інв. №

Національна академія наук України
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
(Імех НАНУ)
03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3
тел. (044) 456-93-51

ЗАТВЕРДЖУЮ
В. о. директора Інституту механіки
ім. С. П. Тимошенка НАНУ
академік НАН України
В.М. Назаренко
2025.12.

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
Розв'язання плоских та просторових задач механіки руйнування для тріщин
нормального відриву із когезійними зонами
АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ В РОБОТІ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ РУЙНУВАННЯ
НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ ТА В'ЯЗКОПРУЖНИХ ТІЛ ТА РОЗРОБКА
РЕКОМЕНДАЦІЙ ПО ЗАСТОСУВАННЮ ЗАПРОПОНОВАНИХ МЕТОДІВ
ЩОДО ВИЗНАЧЕННЯ ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ ТА ДОВГОВІЧНОСТІ
СУЧАСНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

(остаточний)
1.3.1.436-22

Керівник НДР
професор, доктор фізико-математичних наук

А.О. Камінський

2025

Рукопис закінчено 17 грудня 2025 р.
Результати цієї роботи розглянуті секцією Вченої ради Імех НАНУ
протокол № від грудня 2025 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР,
проф.,
д. ф.-м. н.

А.О. Камінський (вступ,
розділи 1–3, висновки,
рекомендації)

Пров. н.с., заст.
директора з
наукової роботи,
чл.-кор. НАНУ, д.
ф.-м. н.

М. Ф. Селіванов (реферат, вступ,
розділи 2–3, висновки,
рекомендації)

Пров. н.с., д. ф.-м. н.

Р.М. Мартиняк (вступ, висновки,
рекомендації)

С.н.с., к. ф.-м. н.

О. С. Богданова (вступ, висновки)

С.н.с., к. ф.-м. н.

Є. Є. Курчаков (реферат, вступ,
розділ 1, висновки, рекомендації)

С.н.с., к. ф.-м. н.

Ю. О. Чорноіван (реферат, вступ,
розділи 1–3, висновки,
рекомендації)

С. н.с., к. ф.-м. н.

Л. М. Терещенко (висновки,
рекомендації)

Пров. інженер

Є. О. Дмитрієва (висновки)

Ст. технік

С. М. Масалова (висновки,
рекомендації)

Метролог

Н. В. Романова

Нормоконтролер

О. А. Гамшеєва

Ідентичність
підписів засвідчую

Учений секретар
Інституту механіки
ім. С.П. Тимошенка,
д. т. н.

Ю. В. Скосаренко

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 28 сторінок, 14 рисунків, бібліографія 23 джерела.

НЕЛІНІЙНО ПРУЖНЕ ТІЛО, ЛІНІЙНО В'ЯЗКОПРУЖНЕ ТІЛО, ТРІЩИНА, КОГЕЗІЙНА ЗОНА, ЗОНА ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ, ДОВГОВІЧНІСТЬ, ТРІЩИНОСТІЙКІСТЬ, АНАЛІЗ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ, РЕКОМЕНДАЦІЇ.

Об'єкт дослідження — елементи конструкцій, виготовлені з анізотропних лінійно в'язкопружних та нелінійно-пружних матеріалів, зокрема полімерів та композитів, які містять тріщини із зонами передруйнування (когезійними зонами). Дослідження присвячені аналізу довготривалого руйнування.

Мета роботи — аналіз отриманих в роботі закономірностей руйнування нелінійно-пружних та в'язкопружних тіл та розробка рекомендацій по застосуванню запропонованих методів щодо визначення тріщиностійкості та довговічності сучасних елементів конструкцій.

Проаналізовано методики та алгоритми розрахунків для визначення тріщиностійкості та довговічності композитних матеріалів, розроблені авторами роботи, та виконано аналіз підходів до моделювання та розв'язання задач щодо визначення параметрів тріщиностійкості елементів конструкцій. На основі отриманих закономірностей наведено основні рекомендації щодо використання моделей та методик розрахунків.

Отримані результати мають не лише фундаментальний, але й прикладний характер і можуть бути використані для проєктування елементів конструкцій, виготовлених із полімерних і композитних матеріалів, а також для визначення довговічності елементів конструкцій з тріщинами. Рівень досліджень відповідає міжнародним стандартам високого рівня.

Умови одержання звіту: за договором.

УкрІНТЕІ, вул. Антоновича, 180, м. Київ-171, 02171, Україна.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 АНАЛІЗ ВПЛИВУ МЕХАНІЧНИХ ТА ГЕОМЕТРИЧНИХ ЕФЕКТІВ НА ПРОЦЕСИ РУЙНУВАННЯ ВИГОТОВЛЕНОЇ З НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ ПЛАСТИНИ СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ.....	7
1.1 Постановка задачі та використані моделі	7
1.2 Обчислювальний метод розв'язання задачі	8
1.3 Аналіз отриманих результатів	9
2 АНАЛІЗ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ДОВГОТРИВАЛОГО РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ, ЯКІ ВИГОТОВЛЕНО З ЛІНІЙНО В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ	11
2.1 Методика моделювання в'язкопружного стану та руйнування.....	11
2.1.1 Числово-аналітичний метод.....	11
2.1.2 Модель руйнування	12
2.2 Аналіз закономірностей розвитку тріщини в умовах плоского напруженого стану.....	13
2.3 Поширення дископодібної тріщини, залежне від часу	14
2.4 Закономірності руйнування просторових елементів конструкцій	16
3. АНАЛІЗ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ВНАСЛІДОК ПОШИРЕННЯ КРАЙОВОЇ ТРІЩИНИ.....	19
3.1 Методика розв'язання задачі про крайову тріщину.....	19
3.2 Аналіз докритичного та критичного стану тріщини.....	20
3.3 Моделювання повільного росту крайової тріщини у в'язкопружній півплощині.....	21
ВИСНОВКИ.....	23
РЕКОМЕНДАЦІЇ.....	25
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	27

ВСТУП

Визначення оптимальних підходів до моделювання поведінки елементів конструкцій, які виготовлено з полімерних композитних матеріалів, є важливим завданням сучасної механіки суцільних середовищ через широке використання таких матеріалів у промисловості та побуті. Складна природа поведінки цих матеріалів, які часто виявляють значні нелінійно-пружні та в'язкопружні властивості, зумовлює потребу в точному описі процесу руйнування. Руйнування в'язкопружних матеріалів може відбутися через деякий час після прикладання навантаження, яке вважається безпечним без врахування спадкових властивостей матеріалу – це явище називається відтермінованим руйнуванням.

Оскільки важливим фактором визначення терміну експлуатації елемента конструкції є врахування наявності в ньому тріщин, аналіз підходів сучасної механіки руйнування до визначення характеристик тріщиностійкості елементів конструкцій є актуальним питанням. Для вивчення процесу руйнування матеріалів зі спадковими властивостями потрібне введення моделей та критеріїв, що якісно відрізняються від тих, що застосовуються для крихких матеріалів. Численні дослідження підтверджують, що поблизу вершин тріщин у полімерах і композитах виникають зони передруйнування (зони нелінійності), які рухаються разом із фронтом тріщини. Застосування моделей руйнування, що враховують ці зони (зони зчеплення або когезійні зони), виявилось найбільш ефективним способом опису розвитку тріщин, зокрема, у нелінійно пружних та в'язкопружних тілах.

На попередніх етапах виконання науково-дослідної роботи були виконані такі ключові завдання:

- На першому етапі було розроблено метод розв'язання задач механіки руйнування для нелінійно-пружних тіл з тріщинами нормального відриву при двовісному навантаженні, а також виявлено вплив розтягування уздовж тріщини на її розкриття та на розміри і форму зони нелінійності (01.2022 – 12.2022).

- На другому етапі було розроблено числово-аналітичні методи для розв'язання плоских і просторових задач механіки руйнування в'язкопружних елементів конструкцій послаблених тріщинами з когезійними зонами, включаючи моделювання інкубації та повільного поширення тріщини (01.2023 – 12.2023).

- На третьому етапі було розв'язано нові плоскі і просторові задачі механіки довготривалого руйнування в'язкопружних тіл з тріщинами нормального відриву, визначено параметри тріщиностійкості елементів конструкцій з полімерів та композитів, а також проаналізовано докритичний та критичний стани тріщин (01.2024 – 12.2024).

У цьому звіті, що є завершальним етапом науково-дослідної роботи, викладено аналіз отриманих в роботі закономірностей руйнування як нелінійно-пружних, так і в'язкопружних тіл. Головна мета цього етапу — розробка рекомендацій щодо застосування запропонованих методів стосовно

визначення тріщиностійкості та довговічності сучасних елементів конструкцій, виготовлених із полімерних та композитних матеріалів.

Таким чином, у звіті викладено синтез та зіставлення результатів, отриманих для обох класів матеріалів, що надає змогу отримати основні рекомендації для проєктування та вивчення міцності елементів конструкцій.

1 АНАЛІЗ ВПЛИВУ МЕХАНІЧНИХ ТА ГЕОМЕТРИЧНИХ ЕФЕКТІВ НА ПРОЦЕСИ РУЙНУВАННЯ ВИГОТОВЛЕНОЇ З НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ ПЛАСТИНИ СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

1.1 Постановка задачі та використані моделі

У межах виконання науково-дослідної роботи основну увагу було приділено вивченню впливу розтягування уздовж тріщини на її розкриття, а також на розміри та форму зони нелінійності. Руйнування в нелінійно-пружному тілі починається в обмеженій області біля кінця тріщини, відомій як зона передруйнування. Ця зона виникає всередині зони нелінійної деформації (зони нелінійності). Матеріали досліджень викладено у звіті з першого розділу науково-дослідної роботи.

Для постановки першої основної задачі про рівновагу нелінійного пружного тіла з тріщиною (рисунок 1) було використано компоненти вектора переміщення [1], [2]. Визначальні рівняння, що пов'язують контраваріантні компоненти тензора напружень із коваріантними компонентами тензора деформацій, були обрані тензорно-лінійними та обґрунтовані з позицій першого та другого законів термодинаміки.

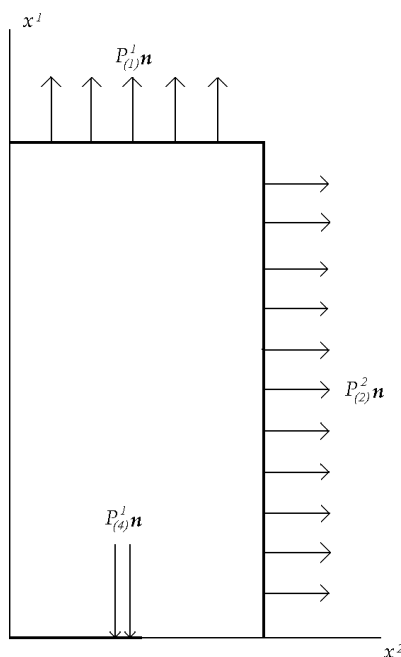


Рисунок 1 – Координатні вісі та схема навантаження четвертої частини тіла

Вважається, що зв'язок між напруженнями і деформаціями є лінійним на початковій стадії деформації, але стає нелінійним надалі. Нелінійність виникає завдяки скалярній функції Φ , яка дорівнює нулю, якщо величина Ω (що являє собою подвоєну різницю всієї енергії деформації та тієї її частини, що йде на

зміну об'єму) не перевищує сталу Ω_0 . Таким чином, критерій нелінійності встановлюється умовою $\Omega > \Omega_0$. При моделюванні зони передруйнування використано припущення, що довжина зони залишається незмінною зі збільшенням навантаження, тоді як напруження, прикладені до поверхонь розрізу, підлягають визначенню при розв'язанні крайової задачі.

1.2 Обчислювальний метод розв'язання задачі

Для розв'язання крайової задачі (за умови плоского напруженого стану) було розроблено метод, що включає перетворення диференціальних рівнянь у частинних похідних (виведених із статичних рівнянь Нав'є) до вигляду, зручного для інтегрування.

Розв'язок було знайдено шляхом дискретизації змінних (рисунок 2) за допомогою сітки координат. Це дозволило отримати n лінійних алгебричних рівнянь із невідомими компонентами переміщень у вузлах сітки. Інтегрування рівнянь здійснювалося методом послідовних наближень Іллюшина. У першому наближенні величини, що відповідають нелінійним доданкам, прирівнювались до нуля, а в кожному наступному наближенні обчислювались за результатами попереднього.

Дискретизуємо змінні, для чого утворимо, уводячи крок h , сітку координат (рисунок 2).

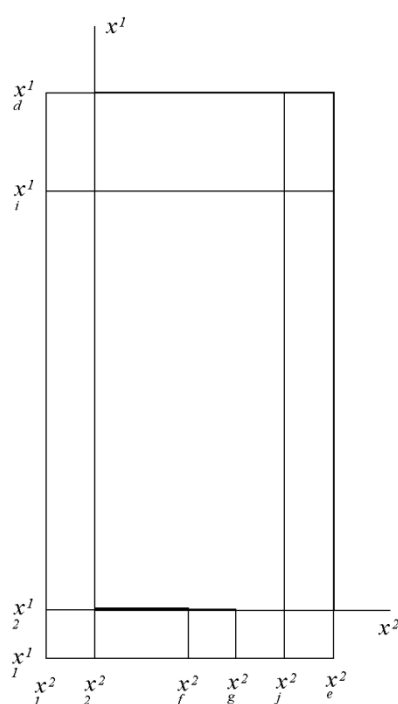


Рисунок 2 – Дискретизація тіла за допомогою прямокутної сітки

1.3 Аналіз отриманих результатів

В результаті числового розв'язання було досліджено вплив розтягування уздовж тріщини (σ_x) на розкриття тріщини в її кінці (u_y) та на розміри і форму зони нелінійності навколо зони передруйнування (рисунок 3).

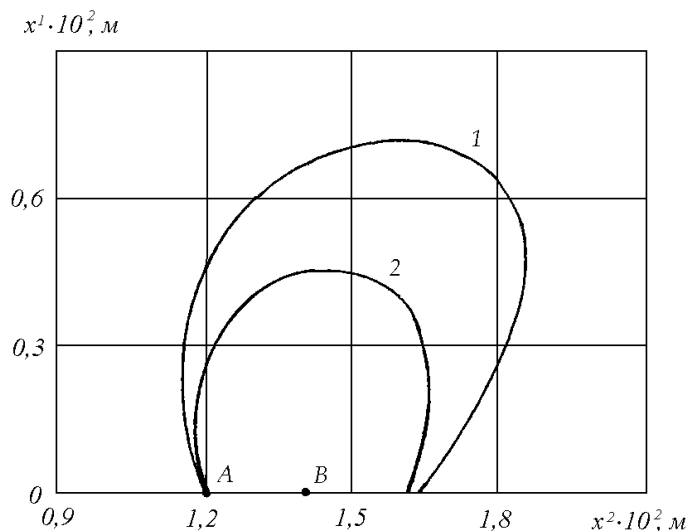


Рисунок 3 – Межа зони нелінійності

Ключові висновки аналізу:

Вплив на розкриття тріщини. Встановлено, що розтягування уздовж тріщини слабо впливає як на напруження, прикладене до верхньої поверхні розрізу, так і на розкриття тріщини в її кінці. Проте було помічено, що зі збільшенням компоненти σ_x характер її дії змінюється: напруження σ_y та розкриття u_y спочатку незначно зменшується, а потім збільшується (таблиця 1).

Таблиця 1 – Залежність розкриття тріщини в її кінці від прикладених навантажень

$P_{(2)}^2 \cdot 10^{-7}$, Па	$-P_{(4)}^1 \cdot 10^{-7}$, Па	$u_1^F \cdot 10^6$, м
0,00	14,14	6,907
1,00	14,21	6,824
2,00	14,25	6,784
3,00	14,24	6,777
4,00	14,21	6,797
5,00	14,16	6,838
6,00	14,08	6,896
7,00	13,99	6,971
8,00	13,89	7,062

Вплив на зону нелінійності (геометричний ефект). Розтягування уздовж тріщини спричиняє значну зміну протяжності зони нелінійності (виявленої за

критерієм $\Omega = \Omega_0$) в напрямках осей, а також супроводжується суттєвою зміною форми зони нелінійності.

При низьких значеннях σ_x (наприклад, перехід від нульового до четвертого значення) протяжність зони нелінійності зменшилася в обох напрямках.

При середніх значеннях σ_x (наприклад, п'яте та шосте значення) протяжність зони нелінійності виявилася меншою в напрямку осі x , але більшою в напрямку осі y .

При вищих значеннях σ_x (наприклад, восьме та дев'яте значення) протяжність зони нелінійності збільшилася в обох напрямках.

Таким чином, для нелінійно-пружних матеріалів, хоча розтягування уздовж тріщини має незначний вплив на її кінцеве розкриття (механічний ефект), воно суттєво трансформує геометрію зони нелінійності перед фронтом тріщини. Це підкреслює необхідність врахування двовісного навантаження для точного визначення несучої здатності елементів конструкцій з тріщиною.

2 АНАЛІЗ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ДОВГОТРИВАЛОГО РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ, ЯКІ ВИГОТОВЛЕНО З ЛІНІЙНО В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

2.1 Методика моделювання в'язкопружного стану та руйнування

Дослідження довготривалого руйнування вимагає поєднання надійних методів прогнозування напружено-деформованого стану в'язкопружних елементів конструкцій та обґрунтованих моделей поширення тріщин. Результати досліджень викладено у звіті з виконання другого етапу науково-дослідної роботи.

2.1.1 Числово-аналітичний метод

Для визначення напружено-деформованого стану лінійно в'язкопружного матеріалу використовувався підхід, в основі якого лежить метод скінченних елементів та підхід внутрішньої змінної. Цей підхід ефективно застосовується для ортотропних в'язкопружних матеріалів.

Інкрементальна форма: Складові конститутивного рівняння в інтегральній формі (Больцмана–Вольтерра) були перетворені в інкрементну форму на основі скінченних різниць. Це дозволило реалізувати процедуру розв'язання задач лінійної в'язкопружності у формулюванні методу скінченних елементів.

Функції релаксації: Функції релаксації матеріалу (що є залежними від часу модулями) описувалися у формі ряду Проні–Діріхле. Це дало змогу рекурсивно визначати внутрішню змінну задачі в точках інтегрування на кожному часовому інтервалі.

Застосування: Розроблений метод був успішно проілюстрований на прикладі дослідження зміни концентрації напружень біля кругового отвору в трансверсально ізотропній просторовій пластині, підтверджуючи його надійність для прогнозування стану тіла зі спадковими характеристиками [3] – [5].

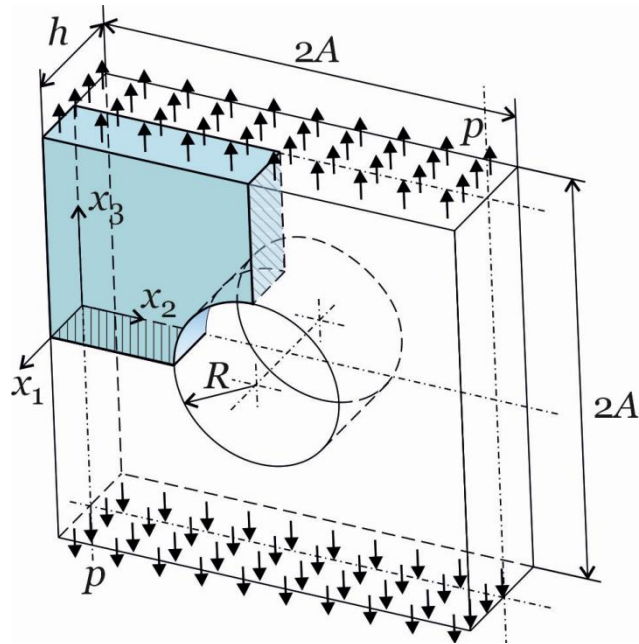


Рисунок 4 – Геометрія тіла з концентратором напружень та схема прикладання навантаження

2.1.2 Модель руйнування

Для моделювання довготривалого руйнування та поширення тріщин використовувалася модель зони зчеплення (когезійної зони).

Було використано такі компоненти моделі:

Закон зчеплення–відриву (ЗЗВ). Використовувався згладжений трапецоїдальний ЗЗВ, який вважався незмінним у кожний момент часу ініціації та квазістатичного поширення тріщини.

Критерій руйнування. Застосовувався деформаційний критерій руйнування (критерій критичного розкриття), оскільки він збігається з критерієм критичної роботи зчеплення у випадку рівномірного розподілу зчеплення.

Через труднощі зі збіжністю при наближенні розкриття в вершині тріщини до критичного значення (пов'язані з ефектом snap-back instability), було обрано підхід розв'язання оберненої задачі. На кожному часовому інтервалі задача розв'язувалася відносно приростів переміщень, а також сил когезії та приросту часу (рисунок 5).

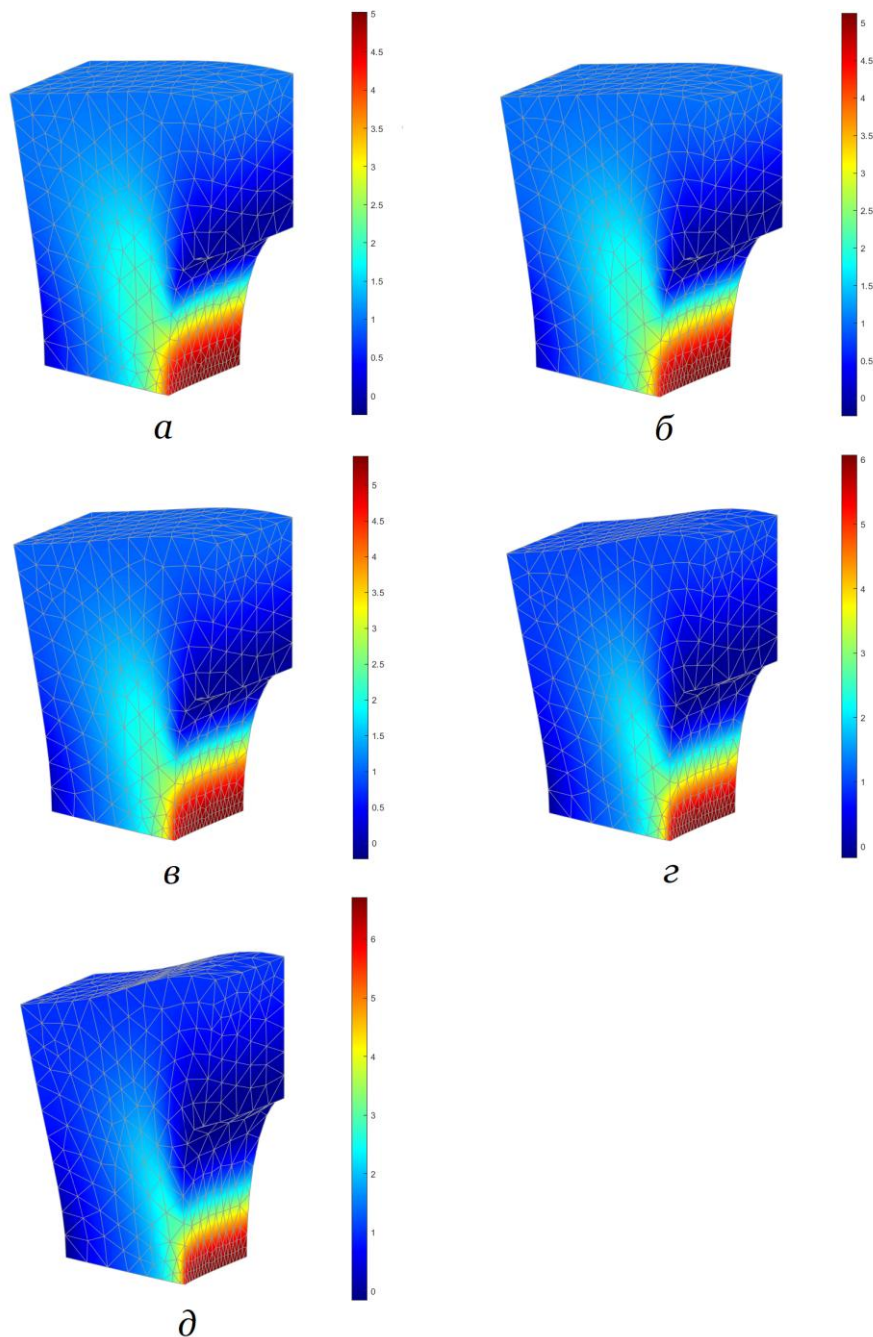


Рисунок 5 – Поле відносного площинного напруження у різні моменти часу [5].

2.2 Аналіз закономірностей розвитку тріщини в умовах плоского напруженого стану

Розроблений алгоритм дозволив виокремити та проаналізувати три послідовні етапи довготривалого руйнування в'язкопружного ортотропного середовища під постійним докритичним навантаженням:

1. *Миттєвий етап.* Відбувається розкриття тріщини внаслідок пружних властивостей матеріалу за незначного рівня зовнішнього навантаження.

2. *Інкубація тріщини.* Цей період характеризується зростанням розкриття тріщини до критичного рівня без зміни її довжини, що відбувається виключно за рахунок в'язкопружних властивостей матеріалу (повзучості). Тривалість цього періоду визначає час відтермінованого руйнування.

3. *Квазістатичний розвиток тріщини.* Після досягнення критичного розкриття тріщина послідовно розриває суцільний матеріал, формуючи нову зону передруйнування на лінії свого розвитку.

Числові приклади чітко проілюстрували перерозподіл напружень з часом в околі зони зчеплення, а також залежність розкриття та довжини тріщини від часу (рисунк 6).

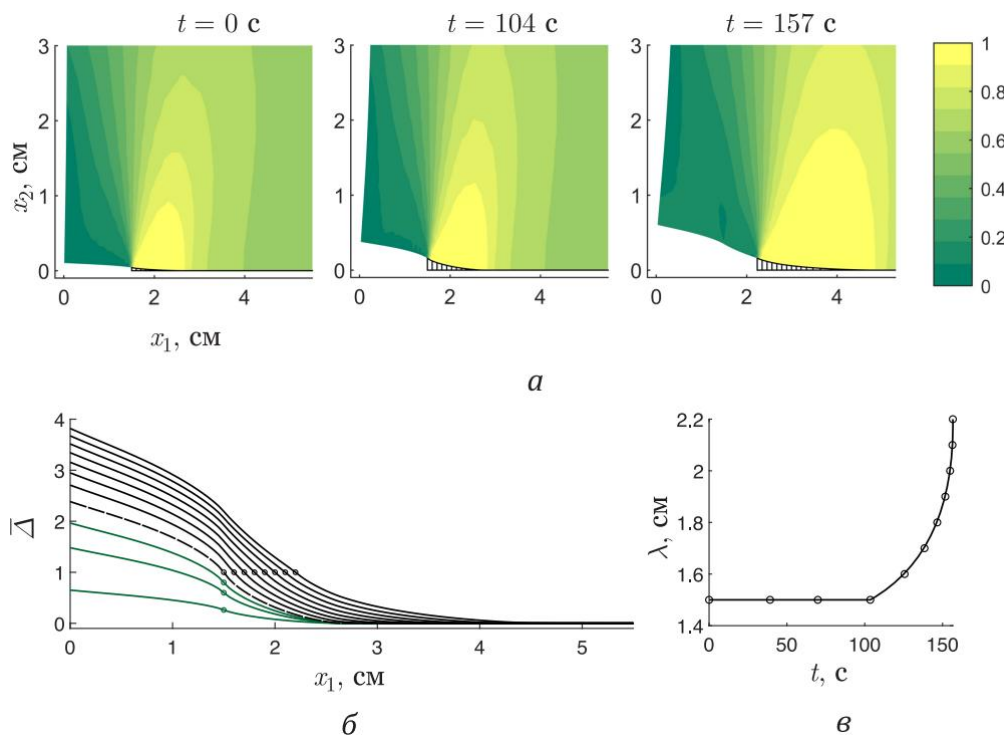


Рисунок 6 – Напруження в околі когезійної зони (а), відносне розкриття для моментів часу, отриманих в рамках алгоритму (б), залежність довжини тріщини від часу (в)

2.3 Поширення дископодібної тріщини, залежне від часу

У роботі наведено результати чисельного дослідження поширення дископодібної тріщини, залежного від часу, у тривимірному в'язкопружному тілі. Ріст тріщини зумовлений релаксацією напружень за сталого зовнішнього навантаження та відбувається у квазістатичному режимі. Аналіз спрямований на виявлення якісних особливостей еволюції когезійної зони та напружено-деформованого стану поблизу фронту тріщини.

Розрахунки виконано з урахуванням симетрії задачі для восьмої частини просторової області. Поблизу фронту тріщини використано локально згущену

скінченно-елементну сітку, у межах якої введено когезійну зону, що описує процес відриву берегів тріщини за законом зчеплення-відриву. Такий підхід дозволив простежити еволюцію процесної зони та перерозподіл напружень у часі без порушення чисельної стійкості.

На рисунку 7 показано еволюцію розкриття тріщини та когезійних сил уздовж поверхні для послідовних моментів часу. На початковій стадії спостерігається інкубаційний період, протягом якого радіус тріщини залишається сталим, однак відбувається перерозподіл напружень і локалізація деформацій у зоні фронту. Подальше зростання тріщини супроводжується поступовим зміщенням когезійної зони назовні, при цьому зберігається гладкий характер розподілу як розкриття, так і когезійних сил. Отримані результати свідчать про стабільний характер росту тріщини, керований релаксаційними властивостями матеріалу.

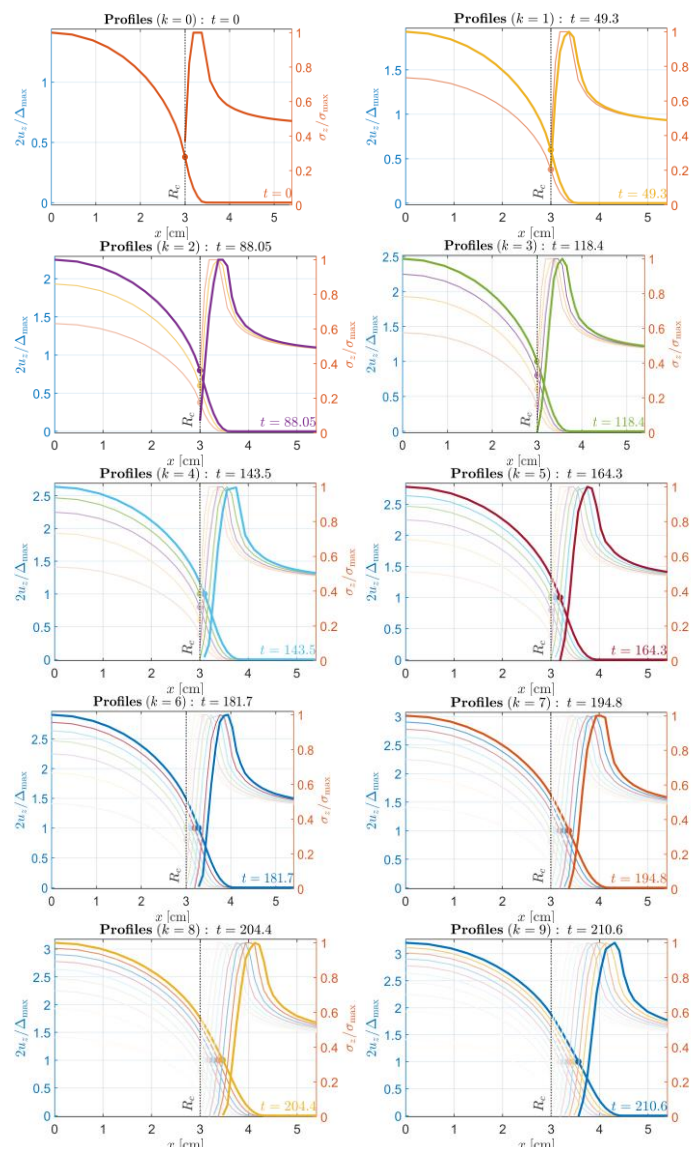


Рисунок 7 – Еволюція розкриття тріщини та когезійних сил

На рисунку 8 наведено поле напружень поблизу фронту тріщини для характерних моментів часу: початкового моменту, моменту завершення інкубації тріщини та моменту, близького до ініціювання динамічного руйнування. Видно формування кільцевої зони підвищених напружень, яка супроводжує фронт тріщини та поступово зміщується разом із ним у процесі росту. Отримана картина підтверджує якісну узгодженість обчислювальних результатів із уявленнями механіки руйнування та демонструє можливість опису інкубаційних ефектів у тривимірних задачах з використанням когезійного підходу.

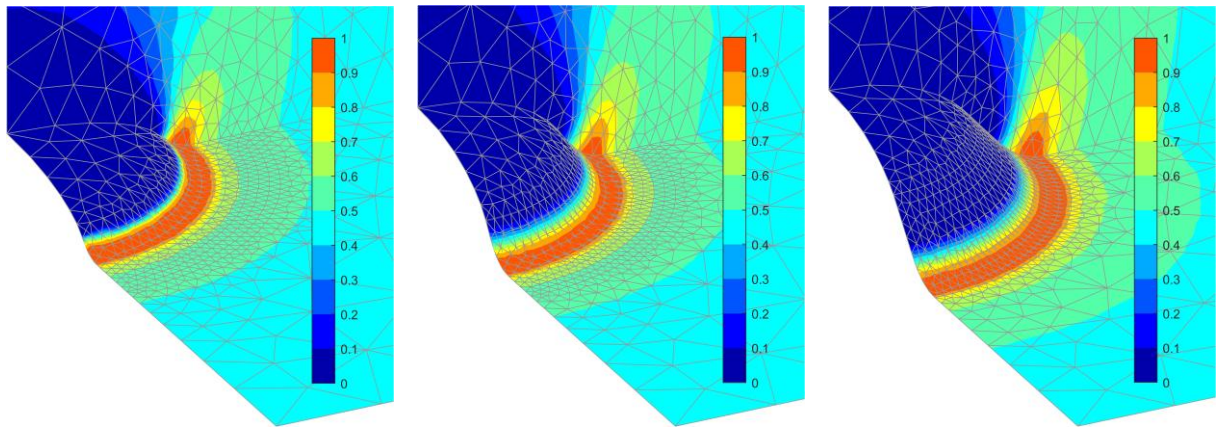
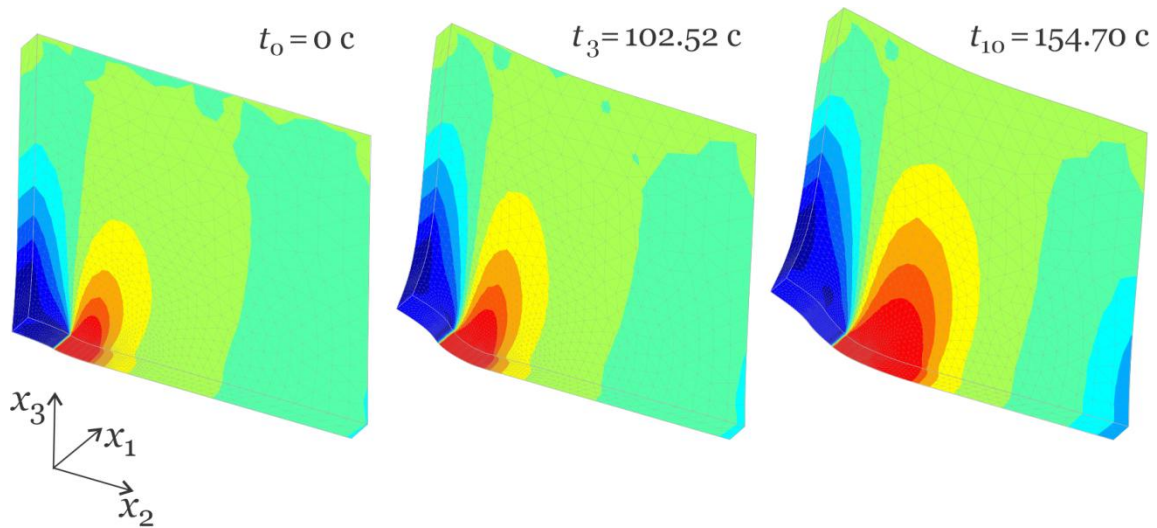


Рисунок 8 – Поле напружень поблизу фронту тріщини

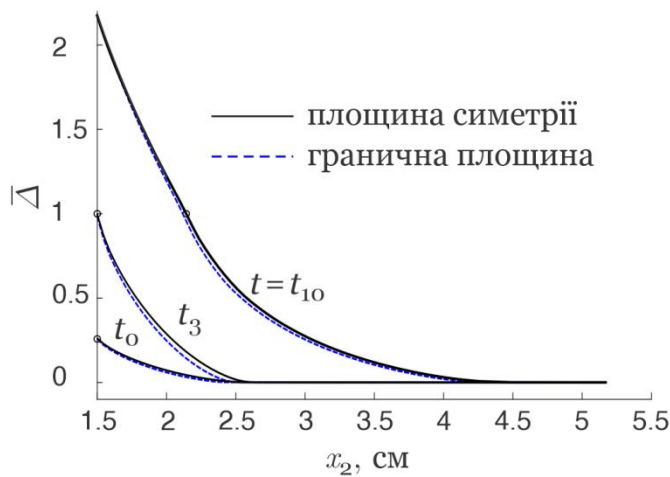
2.4 Закономірності руйнування просторових елементів конструкцій

Розроблений алгоритм моделювання ініціації та поширення тріщини в умовах плоского напруженого стану було поширено на просторову задачу для в'язкопружної трансверсально ізотропної пластини.

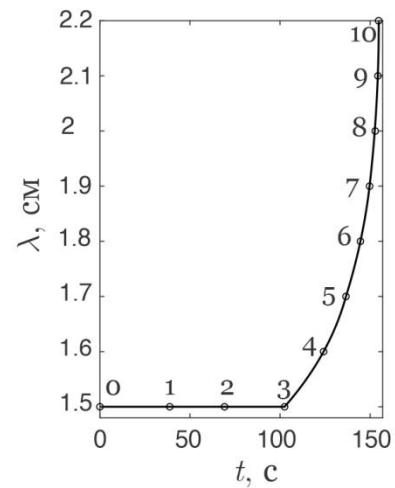
Просторова реалізація. Моделювання спадкових властивостей було виконано шляхом інкременталізації конститутивних співвідношень, а додаткові критеріальні рівняння (зокрема, умова критичного розкриття) були знесені на площину симетрії пластини, перпендикулярну площині поширення тріщини (рисунок 9).



а



б



в

Рисунок 9 – Напруження в околі когезійної зони (а), відносне розкриття, що відповідають моменту прикладання навантаження, кінцю інкубації та завершенню квазістатичного зростання (б), залежність довжини тріщини від часу (в)

Геометричні закономірності. За допомогою розробленого авторами роботи підходу вдалося визначити контур фізичної тріщини, що зростає, та границі зони передруйнування зі зміною часу. Отримані числові приклади підтвердили зростання когезійної довжини як під час інкубаційного періоду, так і під час поширення тріщини.

Вплив товщини. Порівняння результатів для плоского напруженого стану та для просторових пластин різної товщини показало незначне збільшення довговічності тіла зі збільшенням товщини пластини.

Таким чином, у ході досліджень було підтверджено ефективність синтезу методу інкременталізації конститутивних рівнянь із моделлю тріщини, що містить зону зчеплення, для прогнозування довговічності в'язкопружних

анізотропних елементів конструкцій. Виявлено, що процес руйнування є часозалежним і обов'язково включає інкубаційний період, що визначається спадковими властивостями матеріалу.

3. АНАЛІЗ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ВНАСЛІДОК ПОШИРЕННЯ КРАЙОВОЇ ТРІЩИНИ

Цей розділ містить аналіз розв'язання нових задач довготривалого руйнування (визначення параметрів тріщиностійкості та довговічності) елементів конструкцій з в'язкопружних матеріалів, які містять крайові тріщини. Результати досліджень викладено у звіті з виконання третього етапу науково-дослідної роботи. Дослідження було виконано в межах підходу моделі когезійної зони (МКЗ), яка є ефективним інструментом для опису розвитку тріщин, зокрема, у матеріалах зі спадковими властивостями

3.1 Методика розв'язання задачі про крайову тріщину

Для моделювання зони руйнування біля вершини тріщини використовується МКЗ, згідно з якою вершина тріщини представляється фіктивним розрізом на продовженні лінії тріщини, до берегів якого прикладені сили зчеплення відповідно до закону зчеплення-відриву (ЗЗВ) (рисунок 10).

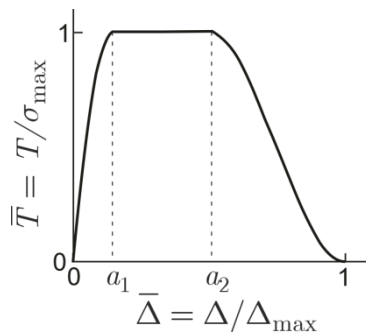


Рисунок 10 – Ефективний ЗЗВ

Для аналізу було використано такі основні моменти, пов'язані із фізичною коректністю постановки задачі:

- Ключовим моментом є задоволення умови плавного змикання берегів тріщини, що забезпечує відсутність розриву напружень на лінії тріщини і скінченність напружень у тілі.
- Розкриття тріщини в пружному напівнескінченному тілі (крайова тріщина, перпендикулярна до межі) визначається розв'язком сингулярного інтегрального рівняння першого роду з узагальненим ядром Коші,.
- При розв'язанні цього рівняння безпосередньо (без регуляризації) було встановлено, що інтенсивність розкриття тріщини (або щільність зсуву) коливається, особливо для малих довжин когезійної зони. Ці коливання пов'язані з неперервністю когезивної сили, прикладеної в межах моделі.
- Для усунення коливань була розроблена напіваналітична методика, заснована на регуляризації сингулярного інтегрального рівняння. Це дозволило отримати фізично правильний розв'язок (без коливань) для інтенсивності розкриття (рисунок 11).

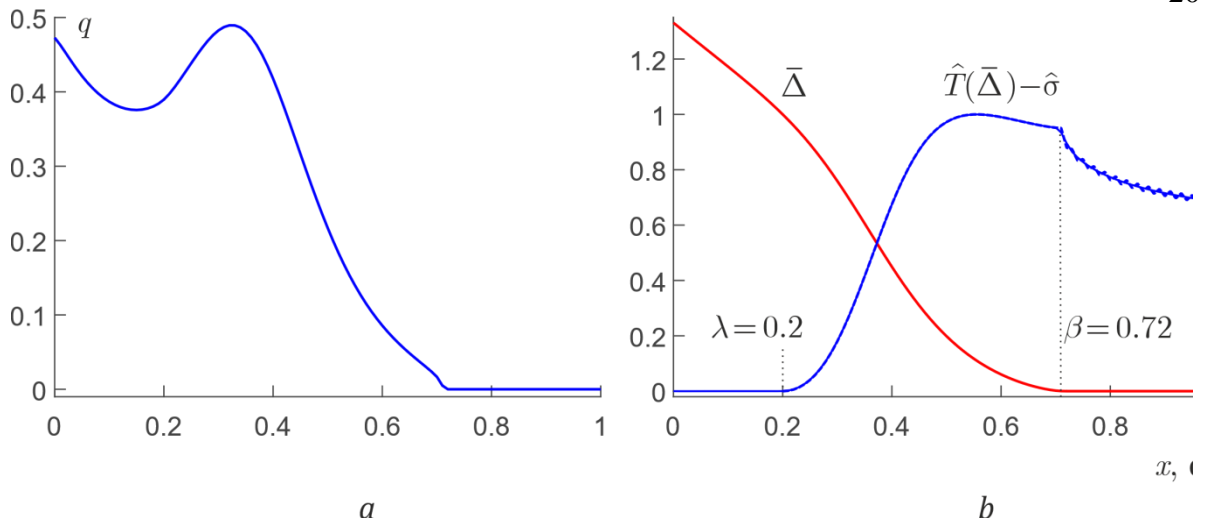


Рисунок 11 – Відносна інтенсивність розкриття (a), відповідна когезійна сила і відокремлення

3.2 Аналіз докритичного та критичного стану тріщини

У межах роботи отримано результати за допомогою обох підходів (з регуляризацією та без неї), що дозволило визначити критичні та докритичні стани крайової тріщини:

Встановлено, що обидва розв'язки (з регуляризацією та без неї) дають дуже близькі значення критичного навантаження (рисунок 12). Це свідчить, що для визначення граничного навантаження можна використовувати простіший, нерегуляризований напіваналітичний алгоритм.

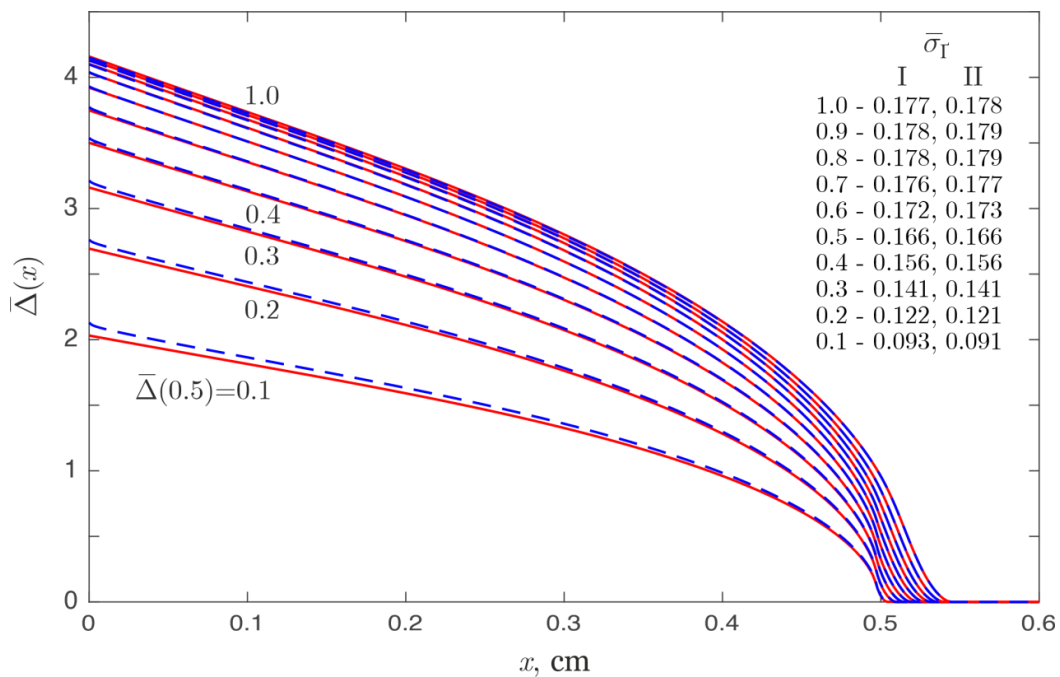


Рисунок 12 – Порівняння розв'язків

При вивченні докритичного стану (коли розкриття вершини тріщини менше критичного) також було отримано розв'язок без коливань після застосування регуляризації.

Для когезійних законів, близьких до рівномірного (моделі Дагдейла), використовується критерій руйнування, згідно з яким повне руйнування настає, якщо розкриття стає більшим за характеристичну довжину Δ_* .

3.3 Моделювання повільного росту крайової тріщини у в'язкопружній півплощині

Аналіз повільного зростання крайової тріщини у лінійно в'язкопружному матеріалі (що не старіє) було виконано за постійного докритичного зовнішнього навантаження в ізотермічних умовах.

В'язкопружне розкриття: Нормальне розкриття тріщини $\Delta(x, t)$ у в'язкопружному тілі визначається через згортковий інтеграл Вольтерра, у якому в'язкопружне розкриття $\Delta(x, t)$ пов'язане з функцією повзучості $l(t)$ та відповідним пружним розв'язком $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$ (рисунок 13).

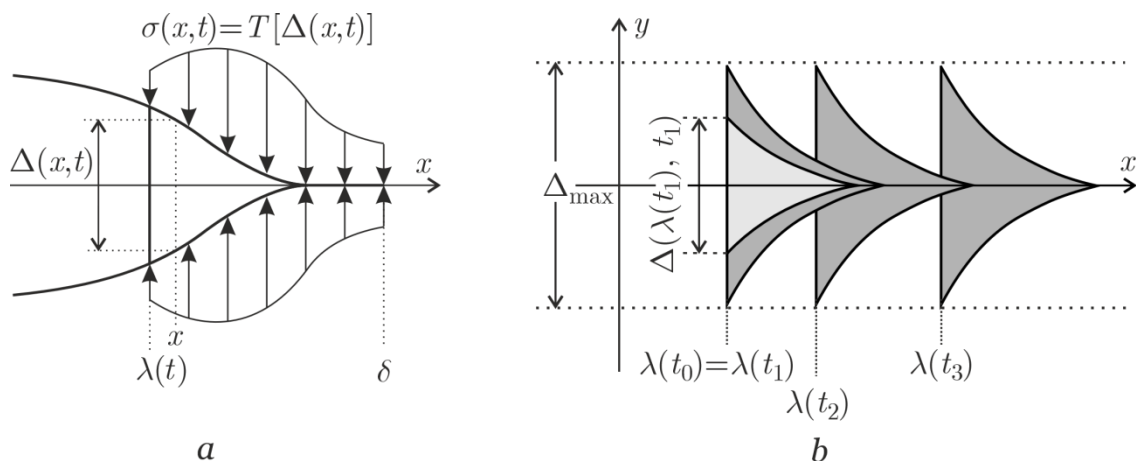


Рисунок 13 – Залежність когезивної сили від розкриття (a) та моделювання повільного зростання тріщини в рамках підходу моделі когезивної зони (b)

Розвиток тріщини поділяється на три етапи:

1. Миттєвий стан: У момент прикладання навантаження тріщина знаходиться в докритичному стані (розкриття у вершині не перевищує граничного рівня).

2. Інкубаційний період (t_0): За рахунок повзучості (в'язкопружних властивостей) розкриття у вершині тріщини зростає до критичного значення Δ_{\max} , але довжина тріщини λ не змінюється.

3. Квазістатичний розвиток: Після завершення інкубаційного періоду тріщина починає повільне зростання $\lambda(t)$.

Алгоритм визначення довговічності. Було використано підхід, де замість визначення положення вершини λ у задані моменти часу, знаходяться моменти часу t_k , коли вершина тріщини проходить задані точки на своєму шляху.

Тривалість інкубаційного періоду t_0 визначається рівнянням, коли розкриття досягає критичного значення Δ_{\max} при незмінній довжині λ .

Умова існування періоду докритичного поширення виражається нерівностями, які запобігають як миттєвому динамічному зростанню, так і ситуації, коли тріщина ніколи не досягне критичного розкриття (рисунок 14).

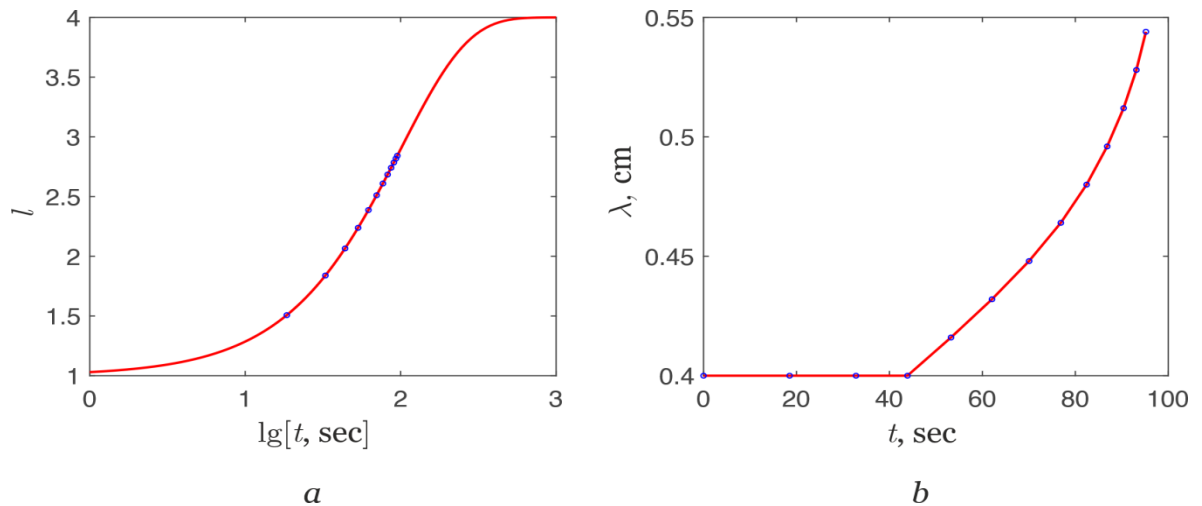


Рисунок 14 – Функція безрозмірної повзучості (a) і довжина тріщини (b)

Закономірності. Числовий розв'язок підтвердив, що тріщина може продовжувати повільне зростання протягом достатньо тривалого проміжку часу, досягаючи розміру, що в рази перевищує початковий. Ефективність методики моделювання росту квазістатичних тріщин за рахунок спадкових в'язкопружних властивостей матеріалу була продемонстрована.

ВИСНОВКИ

З аналізу отриманих у роботі результатів щодо закономірностей руйнування нелінійно-пружних та в'язкопружних тіл можна зробити такі висновки:

1. В компонентах вектора переміщення поставлено першу основну задачу про рівновагу нелінійно-пружного тіла з внутрішньою тріщиною, біля кінців якої існує зона передруйнування (зона нелінійності). Для цього залучено обґрунтовані з позицій першого та другого законів термодинаміки тензорно-лінійні визначальні рівняння.
2. Виявлено вплив розтягування уздовж тріщини на її розкриття та на розміри і форму зони нелінійності навколо зони передруйнування. Установлено, що розтягування уздовж тріщини слабо впливає на її розкриття.
3. З'ясовано, що розтягування уздовж тріщини спричиняє значну зміну протяжності зони нелінійності (в усіх напрямках), що супроводжується суттєвою зміною форми зони нелінійності. Це підкреслює важливість врахування двовісного навантаження для точного визначення несучої здатності елементів конструкцій з тріщиною.
4. Розроблено та проілюстровано алгоритм для прогнозування розкриття тріщини, що зростає у в'язкопружному ортотропному середовищі, шляхом синтезу методу інкременталізації конститутивних рівнянь та моделі тріщини із зоною зчеплення (когезійною зоною).
5. У процесі поширення тріщини у в'язкопружних матеріалах виокремлено три етапи: (i) миттєвий стан (розкриття внаслідок пружних властивостей), (ii) інкубація тріщини (зростання розкриття до критичного рівня за рахунок в'язкопружних властивостей/повзучості) та (iii) квазістатичний розвиток тріщини (послідовний розрив суцільного матеріалу).
6. Алгоритм для дослідження ініціювання та поширення тріщини в умовах плоского напруженого стану поширено на випадок просторової задачі для в'язкопружної пластини. За допомогою цього підходу вдалося визначити контур фізичної тріщини, що зростає, та границі зони передруйнування зі зміною часу, а також проілюстровано зростання когезійної довжини як під час інкубаційного періоду, так і під час поширення тріщини.
7. Розв'язано нові плоскі і просторові задачі механіки довготривалого руйнування в'язкопружних тіл з тріщинами нормального відриву та розроблено методики визначення параметрів довговічності та тріщиностійкості елементів конструкцій.
8. Побудовано напіваналітичний метод для розв'язання задачі механіки тріщин для крайової прямолінійної тріщини у межах підходу моделі когезійної зони. Встановлено, що розв'язок задачі без регуляризації (інтенсивність розкриття тріщини) коливається, що пов'язано з неперервністю когезивної сили.
9. Виконано регуляризацію сингулярного інтегрального рівняння першого роду, що дозволило отримати фізично правильний розв'язок (без коливань) для інтенсивності розкриття, який є більш адекватним, особливо для малих довжин когезійної зони та для докритичного стану тріщини.

10. Показано, що обидва розв'язки (з регуляризацією та без неї) дають дуже близькі значення критичного навантаження, що робить простіший нерегуляризований напіваналітичний алгоритм привабливим для визначення граничного навантаження.
11. Описано та проілюстровано алгоритм моделювання повільного росту крайової тріщини у в'язкопружному матеріалі за рахунок спадкових властивостей, що підтвердило ефективність запропонованої методики прогнозування довговічності.
12. Отримані результати і висновки по темі опубліковані в наукових статтях [1]-[23].

РЕКОМЕНДАЦІЇ

Наведемо основні рекомендації, що стосуються застосування отриманих у роботі результатів для проектування та вивчення міцності елементів конструкцій, які виготовлено з нелінійно-пружних, в'язкопружних та композитних матеріалів.

1. При визначенні несучої здатності елементів конструкцій з тріщиною, виготовлених із нелінійно-пружних тіл, в умовах двовісного навантаження (розтягування уздовж тріщини, σ_x) необхідно враховувати вплив цього навантаження. Хоча розтягування уздовж тріщини слабо впливає на її кінцеве розкриття, воно суттєво змінює розміри та форму зони нелінійності (зони передруйнування), що є критичним для точного визначення міцності.

2. Для ефективного моделювання в'язкопружних властивостей полімерних композитних матеріалів у задачах механіки руйнування варто використовувати розроблений у межах науково-дослідної роботи метод операторних ланцюгових дробів або комбінований метод, який засновано на розкладах Проні та перетворенні Лапласа. Ці методи дають змогу з високою точністю визначати характеристики в'язкопружної поведінки композитів на основі властивостей їхніх компонентів без надмірного збільшення кількості параметрів задачі.

3. Для визначення довговічності та залишкового строку служби елементів конструкцій, які виготовлено з в'язкопружних полімерних композитних матеріалів, слід застосовувати алгоритми, що поєднують модель зчеплення (МКЗ) з методом інкременталізації конститутивних співвідношень. Це забезпечує ефективне прогнозування довготривалого руйнування, враховуючи необхідний інкубаційний період (час, протягом якого розкриття тріщини зростає до критичного рівня за рахунок повзучості) та подальший квазістатичний розвиток тріщини.

4. Для точного визначення характеристик тріщиностійкості елементів конструкцій, які перебувають під дією зосереджених навантажень або несиметричного навантаження, варто використовувати запропоновані ітеративні алгоритми для дослідження напружено-деформованого стану за умови наявності контакту берегів тріщини. Неврахування контактних напружень може призвести до значного (у декілька разів) відхилення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) від його справжнього значення. При цьому вплив тертя на величину контактного напруження можна не враховувати в інженерних розрахунках, оскільки він, як правило, незначний.

5. Визначення параметрів тріщиностійкості елементів конструкцій у випадку наявності системи колінеарних тріщин або крайових тріщин доцільно виконувати з використанням розроблених у межах роботи підходів на основі моделі зчеплення (МКЗ), які дозволяють застосовувати різноманітні закони зчеплення-відриву (ЗЗВ) для точного опису поведінки матеріалу в околі вершини тріщини.

6. При розв'язанні задач для крайових тріщин, де може виникати коливання інтенсивності розкриття (особливо для малих довжин когезійної зони), що пов'язано з неперервністю когезивної сили, слід застосовувати

розроблену методику регуляризації сингулярного інтегрального рівняння для отримання фізично правильного розв'язку. Проте для визначення критичного навантаження можна використовувати простіший нерегуляризований напіваналітичний алгоритм, оскільки обидва підходи дають дуже близькі критичні значення.

7. Через значний вплив на розвиток тріщини зміщення лінії прикладання зосередженого зусилля відносно середини тріщини, необхідно забезпечувати високу точність вимірювання геометричних та силових параметрів інженерної задачі для отримання надійних даних щодо довговічності елементів конструкцій.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Kaminsky A. O., Kurchakov E. E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58, No. 2. P. 154–159.
2. Kaminsky A. O., Kurchakov E. E., Chornoivan Yu. O. Boundary-value problems of fracture mechanics for a nonlinear anisotropic body. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58, No. 3. P. 243–279.
3. Selivanov M., Protsan V. Solving the problem on the subcritical state. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* 2022. No. 1. P. 39–47. (in Ukrainian).
4. Selivanov M., Fernati P. Determining the change of stress concentration with time in a 3-D viscoelastic transverse isotropic plate. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* 2023. No. 1. P. 33–39. (in Ukrainian).
5. Selivanov M., Fernati P. Modelling the quasistatic crack propagation in a viscoelastic orthotropic medium using the incrementalization of constitutive equations. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* 2023. No. 2. P. 65–75. (in Ukrainian).
6. Selivanov M., Fernati P. Initiation and slow propagation of a crack along the plane of symmetry of a 3-D viscoelastic transversely isotropic plate. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* 2023. No. 4. P. 26–32. (in Ukrainian).
7. Selivanov M., Nazarenko L., Altenbach H. Modeling the slow crack growth of an edge crack within the cohesive zone model approach. *Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials: A Tribute to Francesco dell'Isola* / eds.: G. Giorgio, L. Placidi, E. Barchiesi, B. E. Abali, H. Altenbach. Cham: Springer International Publishing, 2022. P. 505–535.
8. Про границі застосовності і обмеження моделі Комніноу для тріщини з ламаною межею розділу / А. О. Камінський та ін. *Прикладна механіка*. 2022. Т. 58, № 4. С. 32–44.
9. Камінський А. О., Дудик М. В., Феньків В. М. Про зрушення міжфазної тріщини з контактом берегів від кутової точки ламаної межі розділу. *Прикладна механіка*. 2022. Т. 58, № 5. С. 39–51.
10. An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials / A. Kaminsky et al. *International Journal of Solids and Structures*. 2023. Vol. 267. Art. 112117.
11. Selivanov M., Bogdanov V., Altenbach H. Solving some problems of crack mechanics for a normal edge crack in orthotropic solid within the cohesive zone model approach. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59, No. 2. P. 335–362.
12. Investigation of the initial stage of fracture of a piecewise homogeneous body with interface crack compressed along the interface / A. O. Kamins'kyi et al. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 273, No. 6. P. 1016–1030.
13. Mechanics of inner core debonding of composite sandwich beam with CFRP hexagonal honeycomb / P. Xue et al. *International Journal of Solids and Structures*. 2024. Vol. 293. Art. 112760.
14. Kaminsky A. O., Dudyk M. V. Analytical Methods of Modeling the Prefracture

- Zone near an Interfacial Crack Tip (Review). *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 59, No. 4. P. 505–539.
15. Kaminsky A. O., Dudyk M. V., Reshitnyk Yu. V. Two-parameter model of the prefracture zone in a quasi-elastic material near the tip of an interface crack. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*. 2023. No. 2. P. 116–119.
 16. Kaminsky A. O., Dudyk M. V. Development of plastic zone near tip of interfacial crack with contacting faces. *International Applied Mechanics*. 2024. Vol. 60, No. 2. P. 149–162.
 17. Камінський А. О., Дудик М. В., Поліщук Т. В. Модель зародження тріщини у пружному кусково-однорідному тілі з ламаною межею поділу. *Прикладна механіка*. 2024. Т. 60, № 6. С. 41–52.
 18. Streliaev Y. M., Martynyak R. M. Partial Slipping of Flat Punch in Thermomechanical Contact with Elastic Half-Space. *International Applied Mechanics*. 2024. Vol. 60, No. 2. P. 212–220.
 19. On analytical model of interface crack in bonding quasi-brittle material between distinct elastic media / M. Dudyk et al. *European Conference on Fracture 2024: Book of Abstracts* (Zagreb, Croatia, August 26–30, 2024). Zagreb : University of Zagreb, 2024. P. 8.
 20. Kaminsky A. A., Dudyk M. V., Chornoivan Y. O. An Analytical Solution for the Interface Crack in a Quasi-Brittle Bonding Material. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2025. Vol. 48, No. 7. P. 2995–3006.
 21. Kaminsky A. O., Dudyk M. V., Polishchuk T. V. Crack Initiation Model in Elastic Piecewise Homogeneous Body with Broken Interface. *International Applied Mechanics*. 2024. Vol. 60, No. 6. P. 677–688.
 22. On analytical model of interface crack in bonding quasi-brittle material between distinct elastic media / M. Dudyk et al. *Procedia Structural Integrity*. 2025. Vol. 68. P. 53–58.
 23. Martynyak R. M., Mykytyn M. M., Malanchuk N. I. Thermomechanical contact of an elastic half-space and a rigid base under the action of a circular heat sink. *Materials Science*. 2025. Vol. 61. P. 129–136.