

## 三角网格表面上的等距曲线构造

刘 斌<sup>1</sup>, 闫伟国<sup>2</sup>, 黄常标<sup>1</sup>, 林俊义<sup>1</sup>, 江开勇<sup>1</sup>

(1. 华侨大学 数字化视觉测量厦门市重点实验室, 福建 厦门 361021;

2. 松下压缩机(大连)有限公司, 辽宁 大连 116033)

**摘 要:**为了用明确的数学形式表示三角曲面网格中的基曲线和等距曲线,提出一种流形网格曲面上曲线等距线的计算方法,网格表面上的曲线用测地 B 样条表示,具有明确的数学表示形式。采用节点插入技术将源曲线分解为分段 Bezier 曲线,并进行线性化逼近,通过曲线细分策略使其误差控制在给定的容差  $\epsilon_1$  内;提出一种给定源点和初始方向的离散化测地线构造算法,以该算法为基础,按照顶点等距方法获得源曲线的初始等距线;以初始等距线作为控制多边形并适当插入一些顶点,构造满足给定容差  $\epsilon_2$  的  $G^1$  连续分段 Bezier 曲线作为源曲线的等距线。等距曲线的整体逼近误差由  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  之和构成,因此可以实现误差的全局控制。针对曲面上曲线自交点计算工作量大的问题,提出先识别局部自交区域再求自交点的策略,减少了线段求交的计算量。实验结果表明,所提方法健壮、有效,能满足曲面上曲线的等距计算要求。

**关键词:**等距曲线;三角网格;测地 B 样条;自交

中图分类号:TP391

文献标识码:A

### Computing offsets of curves on triangular mesh

LIU Bin<sup>1</sup>, YAN Wei-guo<sup>2</sup>, HUANG Chang-biao<sup>1</sup>, LIN Jun-yi<sup>1</sup>, JIANG Kai-yong<sup>1</sup>

(1. Xiamen Key Laboratory of Digital Vision Measurement, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;

2. Panasonic Appliances Compressor(Dalian)Co. Ltd., Dalian 116033, China)

**Abstract:** To represent the base curve and offset curve in triangle meshes with explicit mathematical form, a method was proposed for calculating offset curves on manifold mesh. The curve on the mesh surface was represented by geodesic B-spline, which had the explicit mathematical representation. The progenitor curve was decomposed into piecewise Bezier curves by using knot insertion algorithm, and linearized approximation was made, and its error was controlled in given tolerance  $\epsilon_1$  through the curve subdivision strategy. A discretization geodesic structure algorithm with given source and initial direction was proposed, and the initial offset curve of the progenitor curve were obtained on this basis. The  $G^1$  continuous piecewise Bezier curves which was satisfied for given tolerance  $\epsilon_2$  was constructed as the offset curve of the progenitor curve by initial offset curve and some proper vertex. The integral approximation error of offset curve consisted of tolerance  $\epsilon_1$  plus  $\epsilon_2$  which could realize the global error control. Aiming at the massive calculation to get the intersection of curve on mesh surface, the strategy that the partial self-intersection area was first identified and the intersection point was computed was proposed to reduce the calculation of segment intersection point. Experimental results showed that the proposed method was robust and effective, and could meet the requirements of curve offset on mesh surfaces.

**Key words:** offset curves; triangular meshes; geodesic B-spline; self-intersections

收稿日期:2013-09-20;修订日期:2014-12-30。Received 20 Sep. 2013; accepted 30 Dec. 2014.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51175191,51105150);浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放课题资助项目(A1303)。Foundation items: Project supported by the National Natural Science Foundation, China(No. 51175191,51105150), and the Open Project Program of the State Key Lab of CAD&CG of Zhejiang University, China (No. A1303).

## 0 引言

曲线等距在计算机辅助几何设计和计算机图形学中扮演着重要的角色,广泛应用于数控加工中的刀具轨迹生成、机器人路径规划、工业图案设计等领域<sup>[1-2]</sup>。目前,大部分研究工作集中于平面曲线的等距设计,而表面上的曲线等距计算研究则相对较少<sup>[3-7]</sup>。由于三角网格曲面已在工业界和图形系统中广泛采用,本文提出一种直接在三角网格曲面上计算等距曲线的方法,该方法不依赖于网格参数化和曲面展平技术,且全局误差可控。

不同于平面上曲线的等距,曲面上曲线等距操作的距离是基于测地线计算的。HOLLA 等<sup>[8]</sup>提出一种网格曲面上曲线的等距方法,该方法以三角网格面表示曲面,曲线表示为网格上的空间折线段,采用增量方法避免局部自交,而全局自相交则通过等距线段两两求交来检测和删除;陈正鸣等<sup>[9]</sup>提出一种三角网格面上曲线的等距线计算方法,该方法基于三角面特性,将原始边离散成多条新边,沿测地线方向计算各条新边端点的等距点,同时对导致两相邻等距边断裂的顶点采用“圆弧段”进行连接,在边等距过程中删除局部自交点,然后依次连接所有等距点生成初步等距线,在初步等距线中删除全局自相交点得到等距线;文献<sup>[9]</sup>的方法能完成三角网格曲面上曲线的等距操作,稳定性较好,但当等距距离增加时该算法的效率急剧下降;舒莲卿等<sup>[10]</sup>提出一种新的球面上曲线的等距线构造方法,将球面与某一空间隐式曲面求交,以所得交线作为球面上的基曲线,用逐步递增求等距的方法求出球面基曲线的等距线,在逐步递增求等距的过程中能消除局部无效环。

现有方法一方面以离散的折线表示基曲线和等距曲线,没有明确的数学表示形式,不利于后续的处理;另一方面没有考察等距曲线的逼近误差。文献<sup>[2]</sup>提出一种可以控制等距曲线全局逼近误差的等距算法,受其思想的启发,借助于测地 B 样条的概念,本文提出一种在三角网格曲面上进行全局误差可控的曲线等距方法,并给出了局部自交和全局自交的去除算法。

## 1 网格表面上的样条曲线表示模型

### 1.1 测地 B 样条曲线的节点插入算法

针对网格表面上的曲线设计问题,提出测地 B

样条的概念<sup>[11]</sup>。下面将经典的节点插入算法拓展到曲面空间。伯姆给出了经典 B 样条曲线的节点插入算法。给定一条  $k$  次非均匀 B 样条曲线

$$p(u) = \sum_{j=0}^n d_j N_{j,k}(u). \quad (1)$$

式中:  $d_j (j=0, 1, \dots, n)$  为控制顶点, B 样条基函数  $N_{j,k}(u)$  由节点矢量  $U=[u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$  决定。在曲线某个节点区间内插入一个节点  $u \in [u_i, u_{i+1}] \subset [u_k, u_{n+1}]$ , 得到一个新的节点矢量  $\bar{U}=[u_0, u_1, \dots, u_i, u, u_{i+1}, \dots, u_{n+k+1}]$ , 对该节点矢量重新编号,  $\bar{U}=[\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}, \dots, \bar{u}_{n+k+2}]$ , 这个新的节点矢量便决定了一组新的 B 样条基函数。原来的 B 样条曲线(式(1))就可以用这组新的 B 样条基函数与未知新顶点  $\bar{d}_j$  定义<sup>[12]</sup>为

$$p(u) = \sum_{j=0}^{j=n+1} \bar{d}_j \bar{N}_{j,k}(u). \quad (2)$$

控制顶点数虽然增加了一个,但曲线形状及其连续性仍保持不变。未知的新顶点为

$$\begin{aligned} \bar{d}_j &= d_j, j = 0, 1, \dots, i-k; \\ \bar{d}_j &= d_{j-1}, j = i-r+1, \dots, n+1; \\ \bar{d}_{j+1} &= (1-\alpha_j)d_j + \alpha_j d_{j+1}, j = i-k, \dots, i-r-1. \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $r$  为  $u$  在  $U$  中的重复度;  $\epsilon_j$  为系数;  $\alpha_j = \frac{u - u_{j+1}}{u_{j+k+1} - u_{j+1}}$ , 规定  $\frac{0}{0} = 0$ 。

在式(3)中,用  $d_j$  和  $d_{j+1}$  两点的测地距离代替其欧氏距离,在两点间的最短测地线上进行线性插值计算  $\bar{d}_{j+1}$ , 即可将欧氏空间中经典 B 样条曲线的节点插入算法拓展到曲面空间中,应用于测地 B 样条曲线。类似于拓展德布尔算法,其计算过程也是线性的,计算稳定。

### 1.2 给定源点和方向的离散测地线构造

给定网格曲面  $M$  上一点  $V$  和  $V$  点切平面  $T_v$  上的一个方向矢量  $l_v$ , 求过  $V$  点的一段测地线,其起始切矢的方向与  $l_v$  一致。

为了便于说明问题,给出网格表面上点  $V$  的邻接边集合定义。如图 1 所示,当点  $V$  为网格曲面的顶点时,其邻接边集合定义为该顶点邻接三角形中与点  $V$  相对的边的集合,如图 1a 所示;当点  $V$  位于网格曲面的边上时,其邻接边集合定义为该点所在边的两个邻接三角形除去该所在边之后的所有边的集合,如图 1b 所示;当点  $V$  位于网格曲面的三角面内时,其邻接边集合就为该三角面的三条边,如图

1c 所示。

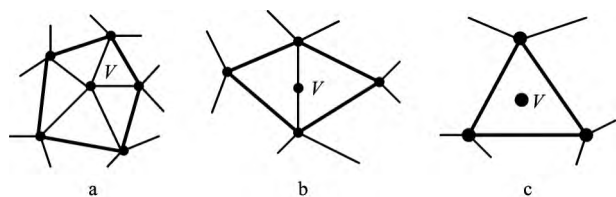


图1 点的邻接边

设  $V$  点的法矢  $n_v, n_v$  与  $l_v$  的叉积为  $n_p$ , 过  $V$  点、以  $n_p$  为法矢的平面为  $\beta$ , 如图 2 所示。平面  $\beta$  与点  $V$  的邻接边集合会有两个交点  $Q_1$  和  $Q_2$ , 点  $V$  到  $Q_1, Q_2$  的矢量分别为  $l_1$  和  $l_2$ , 如果  $l_v$  与  $l_1$  的点积大于 0, 则线段  $VQ_1$  就是所求测地线的第一段; 否则, 线段  $VQ_2$  为所求测地线的第一段。

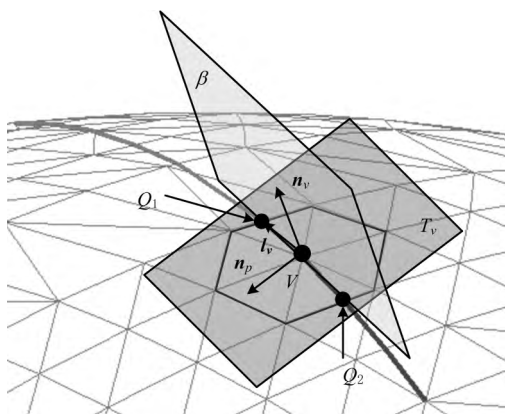


图2 给定源点和方向的测地线

有了测地线的第一段, 就可以采用离散化测地线延长线算法<sup>[13]</sup>, 给出测地线的下一段。反复执行延长线算法, 得到过源点且起始点切矢方向与给定方向一致的一段测地线。算法以网格曲面的拓扑邻接关系为基础, 其计算量仅与测地线所经过的三角面个数有关, 与网格模型的整体规模无关, 因此算法效率高。

## 2 测地 B 样条曲线偏距

### 2.1 问题描述与算法思路

给定三角网格曲面  $M$  和约束于网格表面上的样条曲线  $c \in M$ , 沿着用户指定的方向和距离生成曲线  $c$  的等距曲线。在曲线偏距的过程中, 应满足如下条件: ①将曲线始终约束于网格表面上, 以适应曲面形状的变化; ②保证曲线偏距的误差控制在一定的精度范围内; ③识别与去除由偏距产生的曲线

自交。

由测地 B 样条曲线的定义可知, 测地 B 样条曲线可以保证曲线上的每一点都位于其控制顶点所在的曲面上, 因此对测地 B 样条曲线而言, 一方面可以保证曲线在偏移后仍然约束于网格表面上, 满足第一个约束条件; 另一方面, 偏移曲线用测地 B 样条表示, 有明确的数学表示形式, 有利于对其进行进一步编辑和操作。

对于给定的源曲线  $c \in M$ 、用户给定的偏移距离  $d_c$  和逼近容差  $\epsilon$ , 将总体容差  $\epsilon$  分为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  两部分, 其等距曲线的生成流程如图 3 所示。

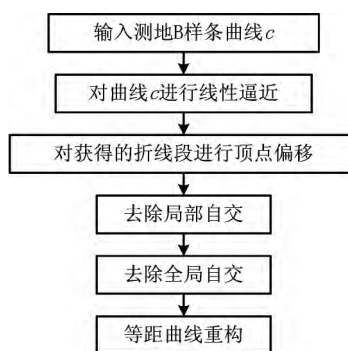


图3 等距曲线生成方法流程图

首先对源曲线进行线性逼近, 使其误差控制在  $\epsilon_1$  之内; 然后采用前面给出的基于源点和方向的测地线构造方法实现顶点的偏移; 再对偏移后的折线段进行自交检查与去除; 最后对去除自交后的顶点序列进行适当的顶点插入操作, 并以这些顶点序列为控制顶点构造  $G^1$  连续的分段 Bezier 曲线作为源曲线等距曲线的逼近表示。在此过程中, 可以通过 Bezier 曲线的控制多边形细分来保证将逼近误差控制在  $\epsilon_2$  之内。

### 2.2 原始曲线的线性逼近

给定原始曲线  $c \in M$ , 用测地 B 样条模型表示。首先利用前述的测地 B 样条曲线节点插入技术, 将曲线分解为分段 Bezier 曲线的组合。不失一般性, 设曲线为 3 次的, 则分解后的 Bezier 曲线有两种形式, 如图 4 所示。由曲线的凸包性可知, 不管哪种形式, 以直线段  $P_0P_3$  逼近曲线, 其误差不会超过控制顶点  $P_1$  和  $P_2$  到  $P_0P_3$  距离的最大值  $\max(d_1, d_2)$ , 称  $P_0P_3$  为该段 Bezier 曲线的基线,  $d_1$  和  $d_2$  是  $P_1$  和  $P_2$  到基线的距离。

如果其中某一段 Bezier 曲线  $c_i$  采用基线逼近后误差超出给定的允差  $\epsilon_1$ , 则利用拓展德布尔算法

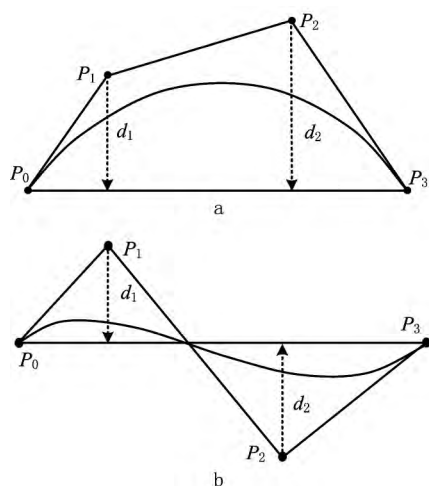


图4 三次Bezier曲线段的线性逼近误差

的特例——拓展 de Casteljau 算法对曲线在参数域的中点处进行细分,反复执行这一过程,直至各段曲线用其基线逼近后的误差都在给定允差范围内。如图 5 所示, $c_i$  的 4 个控制顶点为  $P_0, P_1, P_2$  和  $P_3$ ,经一次细分后,曲线分成左右两段,新的控制顶点分别为  $P_0, P_0^1, P_0^2, P_0^3$  和  $P_0^3, P_1^2, P_2^1, P_3$ 。显然,新的控制多边形构成的凸包小于原控制多边形构成的凸包,因此可以更好地逼近原曲线。

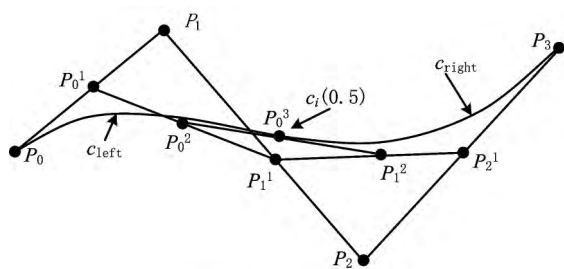


图5 Bezier曲线细分

在欧氏空间中,计算某段 Bezier 曲线的两个内部控制顶点到基线的距离  $d_1, d_2$  很容易,但在曲面空间中,计算相应的测地距离则要困难得多,主要问题在于垂足点的计算。为此,以该段 Bezier 曲线的中点为源点  $S$ ,采用文献[14]介绍的离散指数映射方法,将曲线的控制顶点  $P_0, P_1, P_2$  和  $P_3$  映射到源点  $S$  的切平面上,得到曲线控制顶点在切空间中的对应点  $P_0^T, P_1^T, P_2^T$  和  $P_3^T$ ,在切空间中容易计算  $P_1^T, P_2^T$  到基线的距离  $d_1^T, d_2^T$ 。由于离散指数映射保持了两点间的测地距离,  $d_1^T$  和  $d_2^T$  就等于曲面空间中控制顶点  $P_1, P_2$  到基线的测地距离。

当全部 Bezier 曲线段的线性逼近误差都满足

给定的允差时,就可以用各段 Bezier 曲线的控制多边形或基线来逼近原始曲线  $c$ 。对于位于首、末位置的 Bezier 曲线段,用其控制多边形逼近曲线,以保证曲线在首、末点处的切矢和法矢不受影响;对于中间的其他段曲线,则用其基线逼近曲线。最后将它们顺序收集起来,就完成了原始曲线的线性逼近。

### 2.3 顶点偏距

得到原始曲线的线性逼近后,下一步的工作是采用顶点偏置方法获得线性逼近曲线的等距线。为了计算各个顶点的偏移距离,首先对除首末顶点外的其他顶点进行分类。

设顶点  $p_i$  与其前后顶点  $p_{i-1}, p_{i+1}$  构成的矢量分别为  $l_{i,i-1}$  和  $l_{i,i+1}$ ,  $l_{i,i-1}$  与  $l_{i,i+1}$  的叉积为  $l_i$ ,  $p_i$  点的法矢为  $n_i$ ,如图 6 所示。如果  $l_i$  与  $n_i$  的点积大于 0,则定义该点为凹点,反之为凸点。由于曲线位于网格曲面上,  $p_i$  与  $p_{i-1}$  之间以及  $p_i$  与  $p_{i+1}$  之间均通过测地线相连,在实际计算时,只取  $p_i$  到  $p_{i-1}$  间测地线的第一段直线来计算  $l_{i,i-1}$ ;同理,只取  $p_i$  到  $p_{i+1}$  间测地线的第一段直线来计算  $l_{i,i+1}$ 。这里的凸、凹是相对的,仅是一种分类标识。

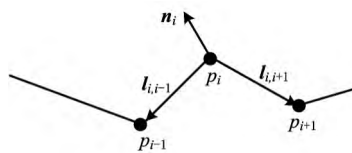


图6 顶点分类

对顶点进行分类后,就可以根据顶点类型分别计算其偏移距离和偏移方向。为了便于说明问题,首先考虑平面曲线的情况。对于首、末顶点而言,可以沿曲线控制多边形首、末边的垂线方向偏移用户指定的偏移量即可。对于其他顶点,首先将顶点  $p_i$  与其前后顶点  $p_{i-1}, p_{i+1}$  分别构成的矢量  $l_{i,i-1}$  和  $l_{i,i+1}$  单位化,单位化后的  $l_{i,i-1}$  和  $l_{i,i+1}$  相加得到矢量  $q_i$ 。沿着曲线行走,对于偏置曲线在其左侧的情况而言,当顶点  $p_i$  为凸点时,  $p_i$  的偏移矢量为  $d_i = q_i \cdot d_i^n / |q_i|$ ;当控制顶点  $p_i$  为凹点时,  $p_i$  的偏移矢量为  $d_i = -q_i \cdot d_i^n / |q_i|$ ,其中:  $d_i^n = d_c / \sin \theta_i$ ,  $d_c$  为用户给定的偏距量,  $p_i'$  为  $p_i$  偏移后的位置点。如图 7 所示。

在网格曲面上,点  $p_i$  到  $p_i'$  的连线为测地线,距离为测地距离。确定  $p_i'$  的具体步骤为:

(1)将顶点  $p_{i-1}, p_{i+1}$  分别映射到  $p_i$  点的切平面  $T_{p_i}$  上,得到对应的映射点  $p_{i-1}^T$  和  $p_{i+1}^T$ ,如图 8

所示。

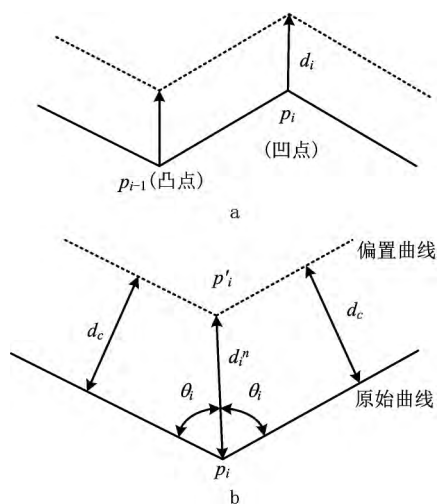


图7 顶点偏移矢量

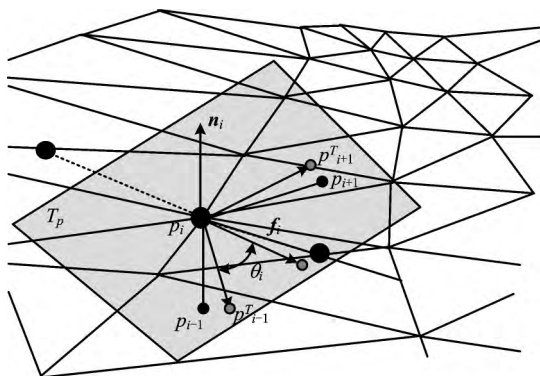


图8 曲面上曲线的顶点偏移

(2) 确定偏移方向。在切平面  $T_p$  上, 类似于平面曲线顶点偏移方法, 设  $p_i$  与  $p_{i-1}^T$  和  $p_{i+1}^T$  构成的矢量分别为  $T_{i,i-1}$  和  $T_{i,i+1}$ , 对  $T_{i,i-1}$  和  $T_{i,i+1}$  进行单位化, 单位化后的  $T_{i,i-1}$  和  $T_{i,i+1}$  相加得到矢量  $f_i$ 。如果  $p_i$  为凸点, 则其偏移方向矢量为  $D_i = f_i$ , 否则,  $D_i = -f_i$ 。偏移距离  $d_i^n$  为

$$d_i^n = d_c / \sin \theta_i;$$

$$\theta_i = \arccos(D_i \cdot T_{i,i-1} / |D_i| |T_{i,i-1}|). \quad (4)$$

(3) 有了源点  $p_i$  和方向矢量  $D_i$  之后, 就可以采用 1.2 节的离散化测地线生成方法逐段生成测地线段, 直至其测地线长度  $s \geq d_i^n$  为止。

(4) 设生成的离散测地线的最后一段的两个顶点分别为  $Q_{n-1}$  和  $Q_n$ , 最后一段的长度为  $s_n$ , 则  $p_i$  偏移后的位置点  $p'_i$  为

$$p'_i = (1-t)Q_{n-1} + tQ_n; \\ t = (s - d_i^n) / s_n. \quad (5)$$

## 2.4 自交识别与去除

与平面曲线的等距类似, 曲面上曲线的自交分为局部自交和全局自交两种情况。本文方法中, 首先去除局部自交, 然后去除全局自交。

### 2.4.1 去除局部自交

为了使局部自交的去除计算“局部化”以减小计算量, 首先需要识别自交区域。如图 9a 所示, 类似于顶点凸凹性的判断方法, 对于顶点  $q_i$ , 设其法矢为  $n_q$ ,  $q_{i-1}$  到  $q_i$  的矢量为  $L_{i-1}$ ,  $q_i$  到  $q_{i+1}$  的矢量为  $L_i$ ,  $L_{i-1}$  与  $L_i$  的叉积为  $w_i$ ,  $w_i$  与  $n_q$  的点积为  $g$ 。相应地, 对于顶点  $q_i$  偏置后的点  $q'_i$ , 设其法矢为  $n'_q$ ,  $q'_{i-1}$  到  $q'_i$  的矢量为  $L'_{i-1}$ ,  $q'_i$  到  $q'_{i+1}$  的矢量为  $L'_i$ ,  $L'_{i-1}$  与  $L'_i$  的叉积为  $w'_i$ ,  $w'_i$  与  $n'_q$  的点积为  $g'$ 。如果  $g'$  与  $g$  符号不一致, 则标记点  $q'_i$  为局部自交区域点。如此继续搜索, 直到找出与点  $q'_i$  相邻接的所有局部自交区域点, 如图 9b 所示。设该区域内最后一个局部自交区域点为  $q'_{i+m}$ , 则自交点  $I_q$  应为

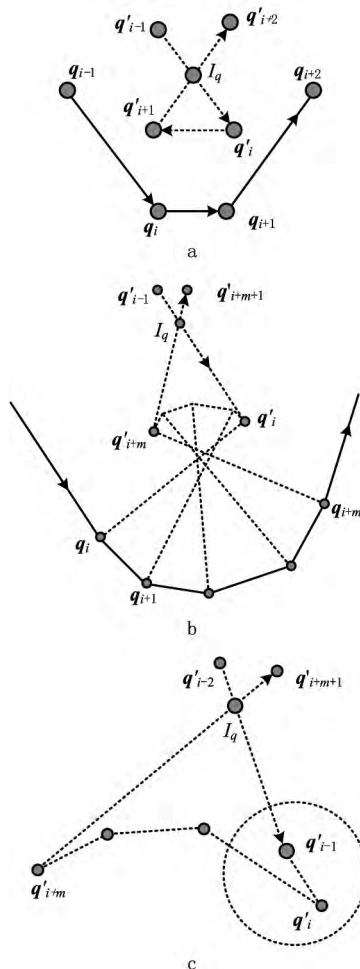


图9 局部自交识别

$q'_{i-1}$  到  $q'_i$  的线段与  $q'_{i+m}$  到  $q'_{i+m+1}$  的线段的交点, 即  $q'_i, \dots, q'_{i+m}$  等局部自交区域点将合并为点  $I_q$ , 实现局部自交的去掉。

在某些情况下, 会出现如图 9c 所示的特殊情况, 在用上述局部自交区域识别方法识别出  $q'_i$  到  $q'_{i+m}$  为局部自交区域点、但自交点  $I_q$  并不是  $q'_{i-1}$  到  $q'_i$  的线段与  $q'_{i+m}$  到  $q'_{i+m+1}$  的线段的交点时, 需从  $q'_i$  向前、从  $q'_{i+m}$  向后逐步扩展, 直至找到两相交线段并求出它们的交点  $I_q$ , 将两相交线段中间的所有顶点合并到  $I_q$  点, 完成局部自交的去掉工作。图 10 所示为一去除局部自交的实例。

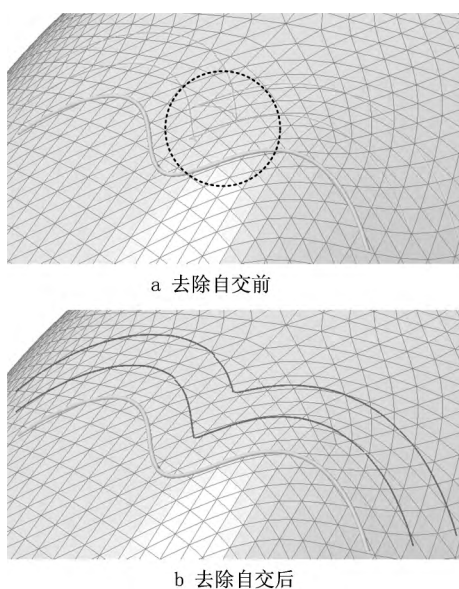


图10 等距曲线的局部自交

先识别局部自交区域再求自交点的方法, 减少了线段求交的计算量, 但需要矢量叉积、点积运算, 这在平面曲线的等距计算中并不具有明显的优势, 但对于网格表面上的曲线而言其优势是明显的。因为网格表面上的线段是测地线, 一方面测地线计算本身的计算量较大, 另一方面测地线段又是由一系列直线段组成, 判断两测地线段是否相交, 还要转化为判断一系列直线段之间是否相交, 其计算量较大, 所以要尽可能减少这种判断计算。

#### 2.4.2 去除全局自交

全局自交的识别参照文献[9]的方法进行。每一个全局无效环都对应一对等距线段的自交点。由此先找出所有等距线中的自交点, 对这些自交点进行两两组合以形成交点对, 交点对之间的等距线段即为全局无效环。如图 11a 所示, 外层黑粗线为源曲线, 虚线为等距曲线,  $I_1, I_2, I_3$  和  $I_4$  为等距线的

自交点。

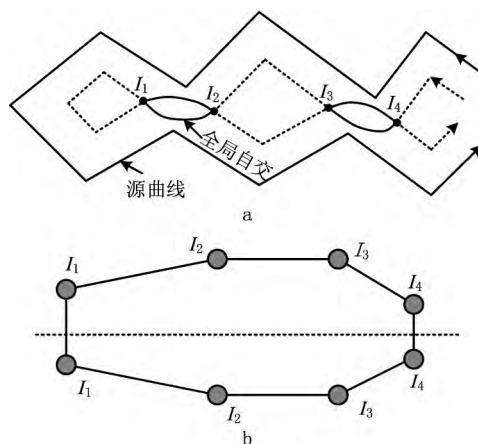


图11 全局自交环示意图

确定全局无效环的主要步骤如下:

(1) 从等距线起点开始, 沿行进方向遍历整条等距线直至曲线终点, 将所有自交点按遍历经过的先后顺序排列成一个封闭环, 如图 11b 所示。在环中, 每个自交点都出现两次。

(2) 以其中一个两次出现在相邻位置上的点作为起点, 以另一个两次出现在相邻位置上的点为终点, 依次两两组合<sup>[9]</sup>。图 11b 中的情况, 就是以  $I_1$  ( $I_4$ ) 为起点、以  $I_4$  ( $I_1$ ) 为终点的  $I_1$  与  $I_2$  组合和  $I_3$  与  $I_4$  组合。

(3) 两两组合在一起的两个自交点就是全局无效环上的顶点, 它们之间的曲线就是全局自交无效环, 需要去除。图 12 所示为一去除全局自交的实例。



图12 三角网格表面上的等距曲线

#### 2.5 等距曲线的 $G^1$ 分段 Bezier 曲线拟合

前述步骤完成了等距曲线的线性逼近, 用  $c^*$  表示。下面以  $c^*$  作为控制多边形, 生成等距曲线至少  $G^1$  连续的分段 Bezier 曲线表示形式。

为了达到曲线段之间至少  $G^1$  连续,需要在  $c^*$  中插入一些顶点,这些顶点位于控制多边形某些边的中点上,作为 Bezier 曲线段间的连接点。设曲线为 3 次的,从第三条边开始,在边的中点处每隔一条边插入一个点,当  $c^*$  的顶点数目为奇数时,在最后一边的中点处需要额外增加一个点,如图 13a 所示;当  $c^*$  的顶点数目为偶数时,不需要在最后一边的中点处插入点,如图 13b 所示。

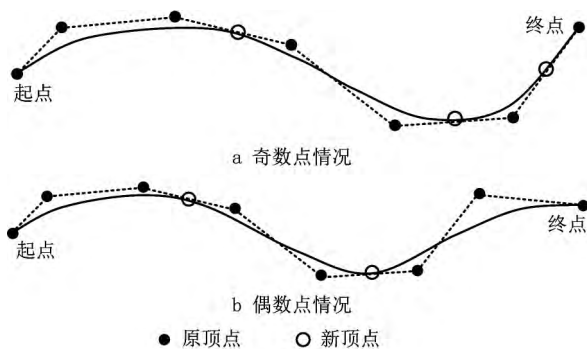


图13 控制顶点插入

将源曲线等距后的折线段拟合为分段 Bezier 曲线,其误差的评定同 2.2 节。当某段 Bezier 曲线的误差超过给定的容差范围  $\epsilon_2$  时,对该段曲线的控制多边形进行细分,即在控制多边形的每条边的中点插入一个新的控制顶点(如图 14),新的拟合曲线更逼近控制多边形,反复执行细分操作,直至其误差满足要求为止。图 15 所示为曲线等距的效果图。

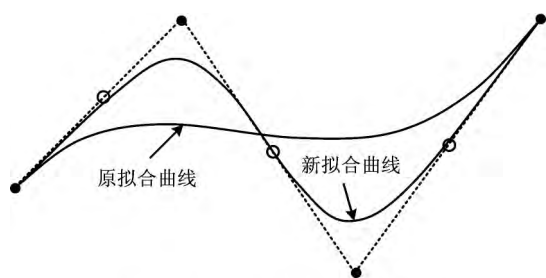


图14 Bezier曲线控制多边形细分

### 3 算法实例分析

#### 3.1 等距操作对曲面形状的适应性

表面上的曲线采用测地 B 样条表示,对曲面形状变化具有很强的适应性。图 16a 所示为在具有曲率突然变化的曲面上生成的等距曲线;图 16b 所示为在具有大的形状变化的帽形零件模型上生成的等距曲线,说明该方法对曲率有急剧变化和复杂形状

的曲面亦有很强的适应能力。

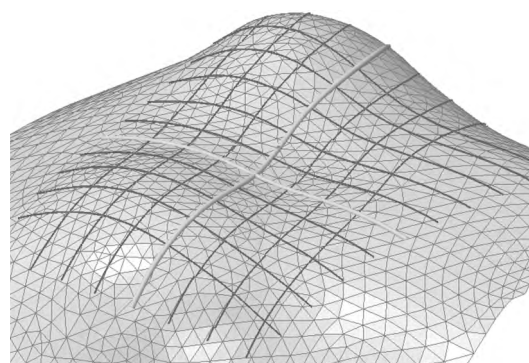
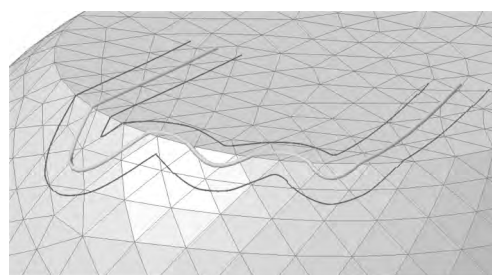
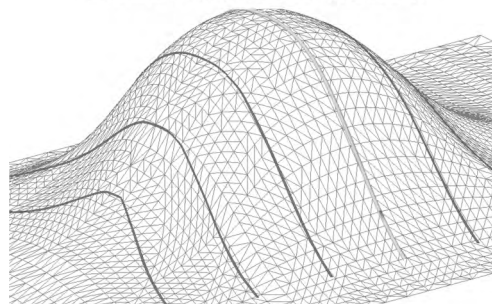


图15 三角网格表面上的等距曲线



a 曲面曲率急剧变化对曲线偏置的影响



b 曲面形状变化对曲线偏置的影响

图16 等距曲线对曲面形状的适应性

#### 3.2 等距距离对曲线生成时间的影响

欧氏空间中,在没有自交的情况下,等距曲线的计算时间基本与等距距离无关,而对于网格表面上的等距曲线,因为要计算偏移方向和测地距离,所以其计算时间会受等距距离的影响。本文确定等距点的方法是基于给定源点和初始方向的测地线构造算法,其计算量仅与延长线所经过的三角面个数有关,与网格模型的整体规模无关,因此在无自交的情况下,等距曲线的计算时间基本上不会因等距距离的改变而有大的变化。下面通过图 17 中的等距曲线实验研究计算时间与等距距离间的关系。

在 CPU 2.2 GHz、内存 4 GB 的计算环境下,等距曲线计算时间与等距距离的关系如图 18 所示。

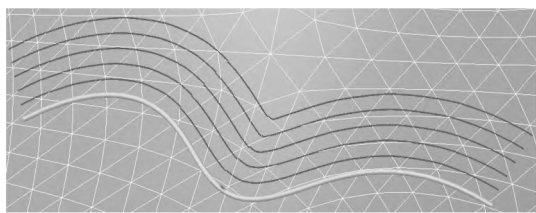


图17 钣金件上的曲线阵列

等距距离从 10 mm, 20 mm 增加到 30 mm 时, 其计算时间基本都在 0.5 s 左右, 没有显著变化。当等距距离增加到 40 mm 时, 计算时间开始有显著变化, 主要因为这时开始存在自交问题, 需要对自交进行识别与去除, 而进一步增加等距距离时, 计算时间保持相对稳定, 说明本文提出的网格曲面上曲线顶点的等距点计算方法是高效的, 基本与等距距离无关, 计算时间的增加主要用于自交的认识与去除。

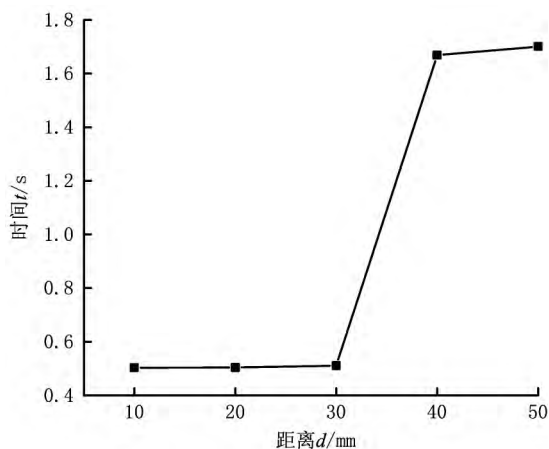


图18 等距曲线计算时间与等距距离的关系

本文方法可以将等距曲线的总体逼近误差控制在给定的误差范围  $\epsilon$  之内,  $\epsilon$  由原始曲线的线性逼近误差  $\epsilon_1$  和等距折线的 Bezier 曲线拟合误差  $\epsilon_2$  两部分组成, 总体误差  $\epsilon$  在  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  中的分配比例问题还需作进一步讨论。文献[2]通过实验分析, 给出了  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的建议分配比例为 3 : 7, 这是因为从尽量减少最后输出的等距线的控制顶点个数的角度, 在原始曲线的线性逼近过程中, 每细分一次 Bezier 曲线就产生一个控制顶点, 而等距折线的 Bezier 曲线拟合过程中, 每细分一次控制多边形会产生 3 个控制顶点, 因此希望  $\epsilon_1$  所占比例较少为好。但对于网格曲面上的曲线偏置而言, 情况还要更复杂, 除了要考虑等距曲线输出时的控制顶点个数之外, 还要考虑  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  不同比例分配所产生的不同计算量。在原始

曲线的线性逼近步骤中, 每细分一次 Bezier 曲线, 需要计算 6 次测地线并进行插值, 如图 5 所示; 在后续的 Bezier 曲线拟合过程中, 每细分一次控制多边形, 只需计算 3 次测地线和插值, 如图 14 所示。因此, 对于网格曲面上曲线的等距曲线计算,  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的分配比例应比 3 : 7 大一点。在未来的工作中, 将讨论等距曲线的  $C^1$  连续逼近, 以表示成统一的测地 B 样条形式, 减少控制顶点数, 也为减少控制顶点数和减少计算量二者的平衡提供更大的空间。

相对于现有三角网格曲面上基于轮廓边生成的刀路轨迹, 在鞋楦模型上利用本文所提曲线偏置算法生成的等距加工刀路轨迹更加光顺, 如图 19 所示。

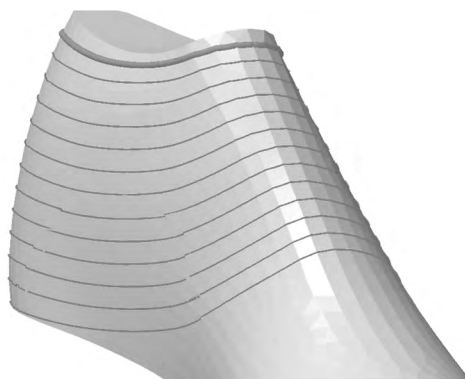


图19 鞋楦曲面上基于等距曲线的刀路轨迹

## 4 结束语

本文以三角网格曲面上的样条曲线为对象, 深入研究了曲面空间中样条曲线的表示模型和等距曲线生成方法, 实例分析了所提方法对曲面形状变化的适应性和计算效率。主要结论包括:

(1) 所提出的网格曲面上等距曲线构造方法, 不依赖于网格参数化和曲面展平技术, 所生成的曲线有明确的数学表示形式。采用扩展德布尔算法生成曲线, 对曲面形状变化有良好的适应性。

(2) 所提方法可以在整体上控制等距曲线的全局逼近误差, 相对于现有方法仅评判离散采样点处的逼近误差, 具有明显的优势。

(3) 给定源点和初始方向, 提出一种离散化测地线生成方法, 算法以网格曲面的拓扑邻接关系为基础, 其计算量仅与测地线所经过的三角面个数有关, 与网格模型的整体规模无关, 因此计算效率较高。

用本文方法产生的等距曲线仅有  $G^1$  连续, 控



制顶点数较多,未来工作将进一步提高其连续性,探讨 $G^2$ 连续等距曲线的生成方法,减少所生成等距曲线的控制顶点数。

### 参考文献:

- [1] MAEKAWA T. An overview of offset curves and surfaces[J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(3): 165-173.
- [2] SHIH J L, CHUANG S H F. One-sided offset approximation of freeform curves for interference-free NURBS machining[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(9): 931-937.
- [3] LEE C S, PHAN T T, KIM D S. 2D curve offset algorithm for pockets with islands using a vertex offset[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2009, 10(2): 127-135.
- [4] LIU X Z, YONG J H, ZHENG G Q, et al. An offset algorithm for polyline curves[J]. Computers in Industry, 2007, 58(3): 240-254.
- [5] ZHU Chaoyan, CHEN Xiaodiao. Offset algorithm and its applications of B-spline curves[J]. Journal of Engineering Graphics, 2010, 31(3): 94-100(in Chinese). [朱朝艳, 陈小雕. B样条曲线的等距算法及应用[J]. 工程图学学报, 2010, 31(3): 94-100.]
- [6] CHEN Xiao, WANG Guojin. Disk bezier curve approximation of the offset curve[J]. Journal of Software, 2005, 16(4): 616-624(in Chinese). [陈笑, 王国瑾. 等距曲线的圆域 Bézier 逼近[J]. 软件学报, 2005, 16(4): 616-624.]
- [7] WANG Jun, JIANG Ping. Approximation of the offset curves of bézier curves by bézier curves of the same degree [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(9): 1251-1256 (in Chinese). [王珺, 江平. Bézier 曲线的等距曲线的同次多项式逼近[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(9): 1251-1256.]
- [8] HOLL A V D, SHASTRY K G, PRAKASH B G. Offset of curves on tessellated surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(12): 1099-1108.
- [9] CHEN Zhengming, LIU Jing, WANG Zhijian. Offset algorithm for curves on triangle meshes [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2008, 14(1): 125-131 (in Chinese). [陈正鸣, 刘景, 王志坚. 一个三角网格上曲线的等距线计算方法[J]. 计算机集成制造系统, 2008, 14(1): 125-131.]
- [10] SHU Lianqing, YU Zhengsheng, DU Hui. Mesh based offset algorithm for curves on spherical surfaces [J]. Computer Simulation, 2010, 27(7): 321-325 (in Chinese). [舒莲卿, 余正生, 杜辉. 基于网格的球面上等距线的构造方法[J]. 计算机仿真, 2010, 27(7): 321-325.]
- [11] LIU Bin, HUANG Changbiao, LIN Junyi, et al. Interpolation of geodesic B-spline curves on manifold triangulation [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(19): 136-142(in Chinese). [刘斌, 黄常标, 林俊义, 等. 流形网格曲面上测地 B 样条插值[J]. 机械工程学报, 2011, 47(19): 136-142.]
- [12] SHI Fazhong. Computer-aided geometric design and non-uniform rational B-spline[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001(in Chinese). [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.]
- [13] LIU Bin, LIN Junyi, HUANG Changbiao, et al. Construction of smooth transition curve between nonadjacent curves on mesh surface[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2013, 19(3): 468-473(in Chinese). [刘斌, 林俊义, 黄常标, 等. 网格曲面上两相离曲线段的光滑过渡[J]. 计算机集成制造系统, 2013, 19(3): 468-473.]
- [14] SCHMIDT R, GRIMM C, WYVILL B. Interactive decal compositing with discrete exponential maps [J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 605-613.

### 作者简介:

刘斌(1972—),男,河南南阳人,教授,博士,研究方向:数字化设计等, E-mail: mold\_bin@hqu.edu.cn;

闫伟国(1974—),男,山东潍坊人,高级工程师,博士,研究方向:计算机集成制造;

黄常标(1976—),男,湖南资兴人,副教授,博士,研究方向:数字化制造技术;

林俊义(1977—),男,福建莆田人,讲师,博士研究生,研究方向:计算机视觉;

江开勇(1961—),男,福建莆田人,教授,博士,博士生导师,研究方向:数字化设计制造。