Przybliżone rozwiązanie równania transportu ciepła metodą elementów skończonych

Mateusz Furga

21 grudnia 2021

1 Zadanie

Proszę rozwiązać metodą elementów skończonych następujące równanie różniczkowe:

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,2] \end{cases}, u(2) = 0, \frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja: $[0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$.

2 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Dla wygody przyjmujemy oznaczenia $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ oraz $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Zatem nasze równanie przybiera następującą postać:

$$-k(x)u''(x) = 0$$

Dzielimy obustronnie równanie przez funkcję $k(x)$, ponieważ $k(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$ oraz mnożymy obustronnie przez funkcję testującą $v(x)$ taką że $v(2) = 0$.

$$-u''(x)v(x) = 0$$

Następnie całkujemy obustronnie równanie po dziedzinie Ω oraz całkujemy przez części aby dostać pochodną pierwszego stopia z $u(x)$ pod całką.

$$-\int_0^2 u''(x)v(x)dx = 0 \implies \int_0^2 u'(x)v'(x)dx - u'(2)v(2) + u'(0)v(0) = 0$$

Ponieważ dobraliśmy funkcję v tak żeby $v(2) = 0$ oraz $u'(0) = 20 - u(0)$. Redukujemy równanie do następującej postaci:

$$\int_0^2 u'(x)v'(x)dx - u(0)v(0) = -20v(0)$$

Oznaczamy lewą stronę równania przez $B(u,v)$ oraz prawą przez $L(v)$.

$$B(u,v) = \int_0^2 u'(x)v'(x)dx - u(0)v(0)$$

$$L(v) = -20v(0)$$

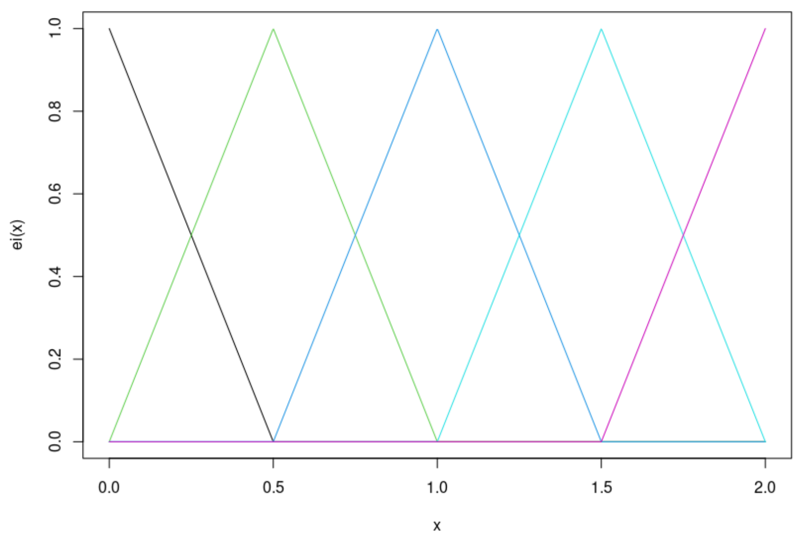
3 Funkcje bazowe

Naszą dziedzinę $\Omega = [0, 2]$ dzielimy na n równych przedziałów zwanych elementami o długości $h = \frac{2}{n}$ każdy. Na każdym z nich będziemy opisywać $n+1$ funkcji bazowych e_i dla $i \in \{0, 1, ..., n\}$ zdefinowanych następująco:

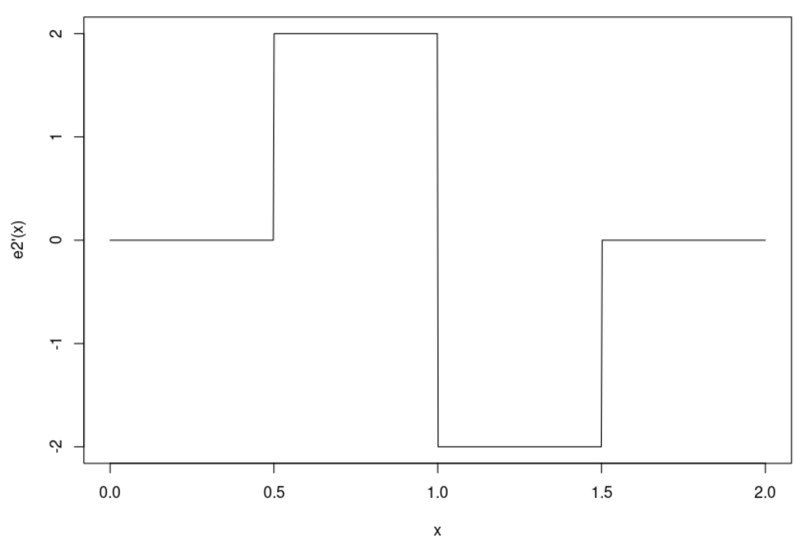
$$e_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{n}{2}(x - \frac{2i}{n}) & x \in [\min\{h(i-1), 0\}, hi) \\ 1 - \frac{n}{2}(x - \frac{2i}{n}) & x \in [hi, \max\{h(i+1), 2\}] \\ 0 & wpp. \end{cases}$$

Będziemy potrzebować również pochodnych funkcji bazowych.

$$e_i'(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & x \in [\min\{h(i-1), 0\}, hi) \\ -\frac{n}{2} & x \in [hi, \max\{h(i+1), 2\}] \\ 0 & wpp. \end{cases}$$



Rysunek 1: Wykres funkcji bazowych $e_i(x)$ dla $n = 4$.



Rysunek 2: Wykres pochodnej funkcji bazowej $e_2(x)$ dla $n = 4$.

4 Rozwiązanie równania

Biorąc pod uwagę określony zerowy warunek Dirichleta na brzegu Ω w punkcie $x = 2$, pomijamy n-tą funkcję bazową. Poszukiwaną funkcję u będziemy przybliżać przy użyciu kombinacji liniowej funkcji bazowych.

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} u_i e_i(x)$$

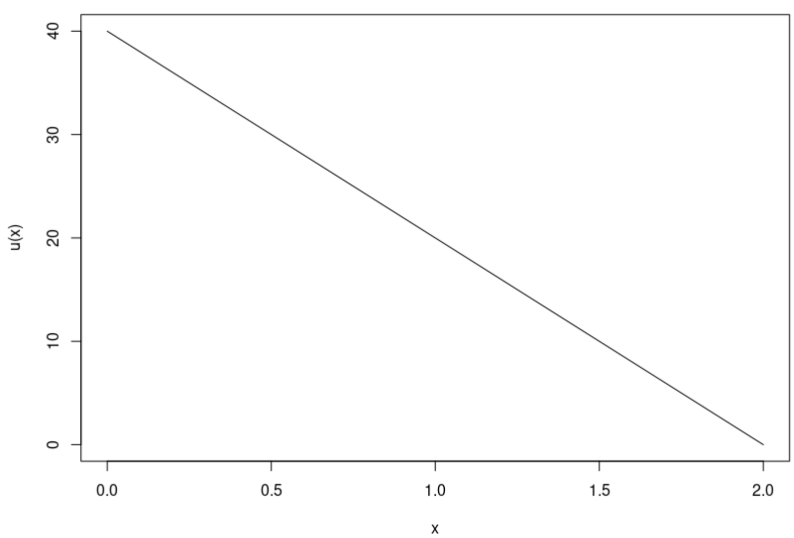
Nieznanne współczynniki u_i obliczamy rozwiązując następujący układ równań.

$$\begin{cases} u_0 B(e_0, e_0) + u_1 B(e_1, e_0) + & \ldots + u_{n-1} B(e_{n-1}, e_0) = L(e_0) \\ u_1 B(e_0, e_1) + u_1 B(e_1, e_1) + & \ldots + u_{n-1} B(e_{n-1}, e_1) = L(e_1) \\ u_2 B(e_0, e_2) + u_1 B(e_1, e_2) + & \ldots + u_{n-1} B(e_{n-1}, e_2) = L(e_2) \\ & \vdots \\ u_{n-1} B(e_0, e_{n-1}) + u_1 B(e_1, e_{n-1}) + & \ldots + u_{n-1} B(e_{n-1}, e_{n-1}) = L(e_{n-1}) \end{cases}$$

Macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \cdots & B(e_{n-1}, e_0) \\ B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_{n-1}, e_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_0, e_{n-1}) & B(e_1, e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) \\ L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Po wyliczeniu współczynników u_i otrzymujemy następujący wykres szukanej funkcji $u(x)$.



Rysunek 3: Wykres funkcji $u(x)$ dla $n = 100$.