**Universidade de Brasília - UnB**

**Faculdade UnB Gama - FGA**

**Engenharia de *Software***


# ***Big Points*: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos**


**Autor: Mateus Medeiros Furquim Mendonça**

**Orientador: Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior**

**Coorientador: Prof. Dr. Nilton Correia da Silva**



**Brasília, DF**

**2016**

Mateus Medeiros Furquim Mendonça

# *Big Points*: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de *Software* da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de *Software*.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior

Coorientador: Prof. Dr. Nilton Correia da Silva

Brasília, DF

2016

Mateus Medeiros Furquim Mendonça

# *Big Points*: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de *Software* da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de *Software*.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 7 de julho de 2016:

**Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior**
Orientador

**Prof. Dr. Fábio Macedo Mendes**
Convidado 1

**Prof. Dra. Carla Silva Rocha Aguiar**
Convidado 2

Brasília, DF
2016

# Resumo

A Teoria dos Jogos estuda as melhores estratégias dos jogadores em um determinado jogo. Aplicando suas teorias em um jogo de tabuleiro eletrônico, este trabalho propõe analisar o jogo *Big Points* a partir de um determinado estado da partida e, como resultado, identificar as melhores heurísticas para os jogadores e uma possível inteligência artificial.

**Palavras-chaves**: Teoria dos Jogos, Análise Combinatória de Jogos.

# Abstract

**Key-words**: Game Theory, Combinatorial Game Theory.

# Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

# Sumário

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização

A **Teoria dos Jogos** é uma área de estudos derivada da matemática que, por alguns anos vem estudando o comportamento de indivíduos sob uma situação de conflito, como em jogos, balança de poder, leilões, e até mesmo evolução genética (SARTINI et al., 2004). Esta área possui duas frentes de estudo: (a) *teoria econômica dos jogos*, o qual possui motivações predominante econômicas, e (b) *teoria combinatória dos jogos*, que faz uso dos aspectos combinatórios de jogos de mesa e não permite elementos imprevisíveis.

## 1.2 Objetivos Principais e Secundários

O objetivo deste trabalho é, fazendo uso da *teoria combinatória dos jogos*, encontrar um *winning move*[1]. Além do objetivo principal, este trabalho ainda possui dois objetivos secundários: (a) estabelecer uma heurística[2] para se maximizar o ganho (*payoff*), fazendo uso da *teoria econômica dos jogos* e; (b) criar uma inteligência artificial com três níveis de dificuldade para jogar contra um jogador.

## 1.3 Estrutura do Trabalho

O restante deste trabalho está organizado da seguinte maneira: Na seção 2 é narrado uma breve história da teoria dos jogos e seus conceitos fundamentais, além de conter explicação para os temas de análise de complexidade, análise combinatória e programação dinâmica, e explicação das regras do jogo *Big Points*. A seção seguinte (3) lista os equipamentos, *softwares* e metodologia utilizados para o desenvolvimento do trabalho e, também, a maneira que a foi analisado o jogo. Os resultados, até o momento, são descritos na seção 4, o cronograma de trabalho na seção 5, e as considerações finais na seção 6.

[1] *Winning move* é um movimento que, a partir de uma determinada jogada, garantirá a vitória independente do resto do jogo

[2] Heurística é uma abordagem para solucionar um problema sem garantias de que o restulado é a solução ótima.

# 2 Fundamentação Teórica

## 2.1 O que é Teoria dos Jogos?

Teoria dos jogos é o estudo do comportamento estratégico interdependente[1] (SPANIEL, 2011), não apenas o estudo de como vencer ou perder em um jogo, apesar de às vezes esses dois fatos coincidem. Isso faz com que o escopo seja mais abranjente, desde comportamentos no qual as duas pessoas devem cooperar para ganhar, ou as duas tentam se ajudar, ou, por fim, comportamento de duas pessoas que tentam vencer individualmente.

## 2.2 Histórico da Teoria dos Jogos

Pode-se dizer que a análise de jogos é praticada desde o séculco XVIII tendo como evidência uma carta escrita por James Waldegrave ao analisar uma versão curta de um jogo de baralho chamado *le Her* (PRAGUE, 2004), explicado na seção 2.3.4. No século seguinte, Augustin Cournot fez uso da teoria dos jogos para estudos relacionados à política (COURNOT, 1838). Mais recentemente, em 1913, Ernst Zermelo publica o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos (ZERMELO, 1913).

Dois grandes matemáticos que se interessaram na teoria dos jogos foram Émile Borel e John von Neumann. Nas décadas de 1920 e 1930, Emile Borel publicou três artigos (BOREL, 1921) (BOREL, 1924) (BOREL, 1927) e um livro (BOREL, 1938) sobre jogos estratégicos, introduzindo uma noção abstrada sobre jogo estratégico e estratégia mista. Em 1928, John von Neumann demonstrou que todo jogo finito de soma zero[2] com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas (NEUMANN, 1928). Em 1944, Neumann publicou um trabalho, junto a Oscar Morgenstern (NEUMANN; MORGENSTERN, 1944), e com isso, a teoria dos jogos entrou na área da economia e matemática aplicada.

Outro matemático que contribuiu para a área foi John Forbes Nash Júnior, que publicou quatro artigos importantes para teoria dos jogos não-cooperativos. Dois destes artigos (NASH, 1950) (NASH, 1951) provando a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos, denominado **equilíbrio de Nash**, que será explicado na seção 2.3.3.5. Nash recebeu o prêmio Nobel em 1994, junto com John Harsanyi e Reinhard Selten, por suas contribuições para a teoria dos jogos.

---

[1] Estratégia interdependente significa que as ações de uma pessoa interfere no resultado da outra, e vice-versa.

[2] Um jogo soma zero é um jogo no qual a vitória de um jogador implica na derrota do outro.

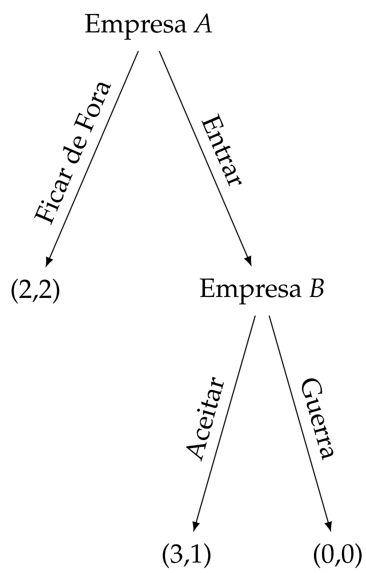


Figura 1: Jogo do monopólio, fonte: (SPANIEL, 2011)

## 2.3 Conceitos Fundamentais da Teoria dos Jogos

Esta seção introduz os conceitos fundamentais da teoria dos jogos, tais como definição de um jogo não cooperativo, formas de representá-lo e teoremas para encontrar soluções.

### 2.3.1 Definição de Jogo Não Cooperativo

Considerando a definição de um jogo como sendo uma atividade interativa e competitiva no qual os jogadores devem obedecer a um determinado conjunto de regras, então um jogo não cooperativo não permite nenhum tipo de acordo entre os jogadores e o ganho de cada jogador é determinado pelo conjunto de regras (JONES, 1980).

### 2.3.2 Estratégia Pura

Estratégia pura é um conjunto de escolhas a se fazer para cada momento de decisão possível. Considere o seguinte exemplo retirado do livro de Willian Spaniel (SPANIEL, 2011): Uma empresa $A$ quer entrar no mercado onde outra empresa $B$ possui o monopólio. Se a empresa $A$ entrar no mercado, a outra pode decidir aceitar ou declarar uma guerra de preços. Considerando que a empresa $A$ só quer entrar no mercado se a empresa $B$ não declarar guerra de preços, e que a guerra de preços não é lucrativa para a empresa $B$, a situação é representada na figura 1.

### 2.3.3 Soluções para jogos

Uma solução de um jogo é uma prescrição ou previsão sobre o resultado do jogo. Há soluções para os jogos que as escolhas dos jogadores são feitas simultaneamente e soluções para os jogos que possuem turnos. Para o primeiro caso, as soluções são encontradas fazendo uso de **dominância estrita iterada**, enquanto para o segundo caso a solução é encontrada utilizando-se de ***backward induction***.

#### 2.3.3.1 Dominância estrita

É dito que uma estratégia é **estritamente dominada** para um jogador se esta estratégia gera um ganho maior do que qualquer outra estratégia independente do que o outro jogador fizer. Considera-se que jogadores racionais nunca fazem uso de estratégias estritamente dominadas, pois não há motivos para escolher uma estratégia que sempre será pior em todos os casos. O exemplo do **dilema do prisioneiro** demonstra tal conceito.

##### 2.3.3.1.1 O Dilema do Prisioneiro

Formulado por Albert W. Tucker em 1950 (SARTINI et al., 2004), o dilema do prisioneiro é, provavelmente, um dos exemplos mais conhecidos na teoria dos jogos. O propósito de Tucker foi ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos por razões que ficarão óbvias após o exemplo. Eis a situação: dois suspeitos são presos com suspeita de roubo mas os policiais podem apenas provar que os suspeitos invadiram o local. Precisando da confissão dos criminosos, o policial faz a seguinte proposta

- Se nenhum confessar o roubo, o policial vai prendê-los por intrusão.
- Se um confessar e o outro não, o que confessou será liberto e o calado será preso por 12 meses.
- Se os dois confessarem, ambos serão presos por 8 meses.

Dado essas informações, é possível representá-las no formato **matriz de *payoffs*** de acordo com a tabela 1, onde o ganho do *jogador linha* é representado pelo número à esquerda dentro de uma célula, e o ganho do *jogador coluna* é representado à direita.

Considerando que os dois suspeitos querem minimizar seu tempo na cadeia, eles devem confessar à polícia?

Para resolver este jogo é preciso raciocinar como um jogador responderia de acordo com a ação do outro. Supondo que o *jogador coluna* fique *Quieto*, o *jogador linha* pode ficar *Quieto* e ir pra cadeia por 1 mês, sendo representado na tabela 1 pela célula superior esquerda, ou aceitar a proposta do policial e *Confessar* o crime que iriam cometer, sendo representado pela célula inferior esquerda. Como os jogadores querem

| | | Coluna | |
|---|---|---|---|
| | | QUIETO | CONFESSA |
| Linha | QUIETO | (-1,-1) | (-12,0) |
| | CONFESSA | (0,-12) | (-8,-8) |

Tabela 1: Dilema do prisioneiro, fonte: (SPANIEL, 2011)

minimizar seu tempo na prisão, que é representado por um valor negativo, deve-se buscar o maior valor dentre essas duas escolhas, que neste caso é *Confessar* com um ganho de *0*. Observando a outra possibilidade do *jogador coluna*, que seria *Confessar*, o *jogador linha* teria um ganho de *-12* ao ficar *Quieto* e um ganho de *-8* ao *Confessar*. Em ambos os casos, o *jogador linha* terá um melhor ganho ao *Confessar*, e como o jogo é simétrico[3] o mesmo raciocínio pode ser feito para o *jogador coluna*.

Essa preferência de *Confessar* a ficar *Quieto* para cada escolha do outro jogador (*Quieto* ou *Confessar*) é dito que *Confessar* é estritamente dominante.

#### 2.3.3.2 Eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas

Eliminação por dominância estrita iterada, como o próprio nome já diz, é um processo iterado no qual estratégias são eliminadas por serem dominadas estritamente (SPANIEL, 2011). Se uma estratégia for estritamente dominada, elimine-a imediatamente, não importando a ordem da eliminação. Se ao final do processo sobrar apenas uma única célula, este resultado será alcançado começando a eliminação por qualquer estratégia estritamente dominada. Considere a tabela 2.

| | | Jogador Coluna | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ESQUERDA | CENTRO | DIREITA |
| Jogador Linha | CIMA | (13,3) | (1,4) | (7,3) |
| | MEIO | (4,1) | (3,3) | (6,2) |
| | BAIXO | (-1,9) | (2,8) | (8,-1) |

Tabela 2: Exemplo de dominância estrita iterada, fonte: (SPANIEL, 2011)

Na tabela 2, o *jogador linha* tem três estratégias *cima*, *meio* e *baixo*, enquanto o *jogador coluna* possui as estratégias *esquerda*, *centro* e *direita*, gerando um total de 9

[3] Um jogo é dito simétrico quando as regras são as mesmas para todos os jogadores.

resultados. Observando as estratégias do *jogador linha*, não é possível fazer nenhuma dominância estrita, pois o *jogador linha* possui uma preferência diferente de suas próprias estratégias para cada estratégia do *jogador coluna*. No caso da estratégia *esquerda*, a melhor estratégia para o *jogador linha* é *cima*, assim como *centro* e *meio*, e *direita* e *baixo*.

Porém, observando as estratégias *centro* e *direita*, é possível eliminar a segunda estratégia por dominância estrita, pois, para o *jogador coluna*, todos os ganhos da estratégia *centro* são melhores do que os ganhos da estratégia *direita*. Com a eliminação da estratégia *direita*, é possível eliminar a estratégia *baixo*, que é estritamente dominada pela estratégia *meio* para o *jogador linha*. Com essas duas eliminações, é possível eliminar as estratégias *esquerda*, pois, para o jogador *jogador coluna*, é estritamente dominada pela estratégia *centro*, e por fim, para o jogador *jogador linha*, a estratégia *cima* é estritamente dominada pela estratégia *meio*.

No final da eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas. sobra apenas uma única célula da tabela 2, como demonstrado na tabela 3, e é chamado de **equilíbrio de estratégia dominante**.

| | Centro |
|---|---|
| Meio | (3,3) |

Tabela 3: Final do exemplo de dominância estrita iterada, fonte: (SPANIEL, 2011)

#### 2.3.3.3 Estratégia Pura

Considere a situação a seguir: Dois caçadores devem decidir o que caçar no dia e levar o equipamento apropriado. Eles sabem que, no local de caça, existem duas lebres, que valem uma unidade de carne cada, e um veado, que vale seis unidades de carne. O veado vale mais carne dividindo para cada um do que a soma das duas lebres, mas é preciso o auxílio do outro caçador para caçar um veado, enquanto as lebres podem ser caçadas sem nenhuma ajuda (SPANIEL, 2011). Estas informações são condensadas na tabela 4.

| | | **Coluna** | |
|---|---|---|---|
| | | Veado | Lebre |
| **Linha** | Veado | (3,3) | (0,2) |
| | Lebre | (2,0) | (1,1) |

Tabela 4: Caça ao Veado, fonte: (SPANIEL, 2011)

#### 2.3.3.4 Teorema Minimax

#### 2.3.3.5 Equilíbrio de Nash

### 2.3.4 Análise primitiva do jogo *le Her*

O objetivo do jogo *le Her* é terminar o jogo com a carta mais alta, sendo que o baralho é contado de Ás ($A$) à Rei ($K$). Essa versão reduzida podia ser jogada apenas com dois jogadores, um deles chamado *dealer* e outro *receiver*. O *dealer* embaralha as cartas e distribui uma carta para o *receiver* e uma para si. O *receiver* tem a escolha de manter sua carta ou trocá-la com o *dealer*, e em seguida o *dealer* tem a mesma opção de manter ou de trocar sua carta com uma carta nova do baralho. A única regra que impede a troca é o caso da carta recebida ser um Rei ($K$), neste caso a troca deve ser desfeita e o jogador mantém sua carta original.

### 2.3.5 Representação de um Jogo

Há duas formas de representar um jogo de uma maneira que seja possível analisá-lo em seguida, a **forma extensiva** e a **forma normal**. A forma extensiva faz uso de uma estrutura de árvore, onde os nós representam estados do jogo e as arestas representam as jogadas possíveis a partir daquele estado. Dado um jogo $\Gamma$, não cooperativo com $n$ jogadores tem-se:

## 2.4 O Jogo *Big Points*

### 2.4.1 Conceito do Jogo

*Big Points* é um jogo abstrato e estratégico com uma mecânica de colecionar peças. São cinco peões de cores distintas, que podem ser usadas por qualquer jogador, para percorrer um caminho de discos coloridos até chegar ao pódio. Durante o percurso, os jogadores coletam alguns destes discos. A pontuação de cada jogador é determinada a partir da ordem de chegada dos peões ao pódio e a quantidade de discos adquiridos de cada cor. Ganha o jogador com a maior pontuação.

### 2.4.2 Regras do Jogo

O jogo *Big Points* pode ser jogado de dois a cinco jogadores. No seu turno, o jogador escolhe qualquer um dos cinco peões, que possuem cores distintas, e o move para cima do próximo disco de sua mesma cor. Em seguida, o jogador deve pegar o próximo disco disponível[4] à frente ou atrás deste peão. Caso não haja discos atrás (à

[4] É dito indisponível aqueles discos que já foram pegos por algum jogador ou que possuem um peão em cima.

frente) do peão, o jogador deve pegar o disco que está à frente (atrás). Caso o jogador já possua um disco preto no começo do turno, tal jogador pode escolher descartá-lo para realizar um segundo movimento. Este movimento pode ser com qualquer cor de peão como uma jogada normal, mas dessa vez o movimento pode ser feito para trás.

# 3 Metodologia

Este capítulo descreve os passos para a realização deste trabalho, explicando os equipamentos e softwares utilizados.

## 3.1 Levantamento Bibliográfico

Após a definição do tema, foi realizado uma pesquisa a respeito dos conceitos básicos da Teoria dos Jogos, a existência de trabalhos semelhantes e materiais suficientes para a realização deste trabalho.

## 3.2 Lista de Equipamentos e Softwares

Para a realização deste trabalho foi utilizado um computador da linha *Inspiron 14Rx* fabricado pela *Dell*, no qual possui processador *Intel Core i7* de 2,2 GHz, GPU *NVIDIA GeForce GT 630M* de 1GB e 8GB de memória RAM. Quanto aos softwares utilizados, foram apenas os pacotes básicos de desenvolvimento em C/C++, incluindo *GCC* e *GNU Makefile*. Para serviço de versionamento foi utilizado o *GitHub* e para controle de tarefas e *issues* foi utilizado o *waffle.io*.

## 3.3 Análise combinatória

### 3.3.1 Número de partidas distintas

O jogo *Big Points* possui 55 discos no tabuleiro e podem jogar de dois a cinco jogadores. Com isso, tem-se que a quantidade de jogos distintos, como demonstrado na equação e.q. Números de Partidas Distintas, é maior do que $5 \times 10^{41}$. Considerando a possibilidade de calcular a melhor estratégia para cada jogo por segundo, este cálculo levaria mais do que $10^{34}$ anos.

$$
\begin{aligned}
Partidas &= (\#J-1) \times \binom{\#D_T}{\#D_W} \times \binom{\#D_{L1}}{\#D_K} \times \binom{\#D_{L2}}{\#D_R} \times \binom{\#D_{L3}}{\#D_G} \times \binom{\#D_{L4}}{\#D_B} \times \binom{\#D_{L5}}{\#D_Y} \times \binom{\#D_{L6}}{\#D_P} \\
Partidas &= 4 \times \binom{55}{5} \times \binom{50}{5} \times \binom{45}{9} \times \binom{36}{9} \times \binom{27}{9} \times \binom{18}{9} \times \binom{9}{9} \\
Partidas &= 560'483'776'167'774'018'942'304'261'616'685'408'000'000 \\
Partidas &\approx 5 \times 10^{41}
\end{aligned}
$$

(e.q. Números de Partidas Distintas)

$$\begin{aligned}
Anos &= \frac{N_{partidas\ distintas}}{{}^{partida}/_{segundo} \times {}^{segundos}/_{minuto} \times {}^{minutos}/_{hora} \times {}^{horas}/_{dia} \times {}^{dias}/_{ano}} \\
Anos &= \frac{560'483'776'167'774'018'942'304'261'616'685'408'000'000}{{}^{1}/_{1} \times {}^{60}/_{1} \times {}^{60}/_{1} \times {}^{24}/_{1} \times {}^{365}/_{1}} \\
Anos &= 96'526'964'154'064'571'465'728 \\
Anos &\approx 9 \times 10^{34}
\end{aligned}$$

(e.q. Tempo de Computação das Partidas)

### 3.3.2 Número de estados

Dado uma partida inicial $\gamma \in \Gamma$ de *Big Points*, sendo $\Gamma$ o conjunto contendo todas as $5 \times 10^{41}$ partidas distintas, foi calculado o número de estados de uma partida. Para calcular o número de estados, é preciso determinar as características que definem um estado do jogo. De acordo com a seção 2.4.2, tem-se que essas características são: (a) o estado do tabuleiro; (b) o estado dos peões; (c) o estado da escada; (d) o estado dos discos na mão dos jogadores e; (e) o jogador atual. Como demonstrado na equação e.q. Caso Geral, a quantidade de estados existentes para uma partida, considerando um caso geral, é maior do que $3 \times 10^{30}$, levando mais de $9 \times 10^{22}$ anos para calcular todos os estados a uma velocidade de $1^{Estado}/_{Segundo}$.

$$\begin{aligned}
Estados &= 2^{55} \times 61^{5} \times (10^{5} + 6^{2}) \\
Estados &= 3'044'074'341'562'580'507'100'339'765'248 \\
Estados &\approx 3 \times 10^{31}
\end{aligned} \qquad \text{(e.q. Caso Geral)}$$

$$\begin{aligned}
Anos &= \frac{N_{estados\ distintos}}{{}^{estado}/_{segundo} \times {}^{segundos}/_{minuto} \times {}^{minutos}/_{hora} \times {}^{horas}/_{dia} \times {}^{dias}/_{ano}} \\
Anos &= \frac{3'044'074'341'562'580'507'100'339'765'248}{{}^{1}/_{1} \times {}^{60}/_{1} \times {}^{60}/_{1} \times {}^{24}/_{1} \times {}^{365}/_{1}} \\
Anos &= 96'526'964'154'064'571'465'728
\end{aligned}$$

(e.q. Tempo de Computação dos Estados)

### 3.3.3 Espaço de armazenamento

A quantidade de memória necessária para armazenar um *estado* do jogo depende das características que descrevem um *estado*. Como dito anteriormente, o jogo pode ter até cinco jogadores, possui um tabuleiro com 55 discos, uma escada com cinco degraus, e cinco peões no qual a posição varia entre 0 e 60. Considerando que o estado inicial do tabuleiro é aleatório mas conhecido desde o começo da partida e que os discos não mudam de posição, é possível representar o tabuleiro com uma máscara binária indicando se o disco está ou não disponível, $^{55\ Discos}/_{8\ Bits}$. A posição de cada peão pode ser representada por um *char*, pois varia apenas entre 0 e 60, sendo que 0 indica que o peão não está no tabuleiro, 1 a 55 indica a posição que o peão está no tabuleiro e 56 a 60 indica a posição na escada. Por fim, para representar a mão de cada jogador, foi utilizado sete *chars*, cada um indicando a quantidade de discos de uma determinada cor, e como são cinco jogadores, tem-se $5 \times 7$. Todos esses *bytes* são somados como demonstrado na equanção e.q. Bytes na memória, totalizando 47 bytes.

$$\begin{aligned} Bytes &= \frac{55}{8} + 5 + 5 \times 7 \\ Bytes &= 47\ bytes \end{aligned} \tag{e.q. Bytes na memória}$$

#### 3.3.3.1 Podas

A quantidade de estados distintos para cada partida foi calculada da seguinte maneira: cada um dos cinco possíveis jogadores pode ter entre zero e cinco discos das cores branco e preta, assim como pode ter entre zero e dez discos das cores restantes; cada peão pode estar em uma posição entre zero e dez (considerando apenas os de sua cor); e, por fim, cada espaço de disco no tabuleiro pode ou não estar ocupado. Partindo destas informações, temos a equação e.q. Poda por posição.

A posição dos peões pode ser determinada considerando-se apenas as casas do tabuleiro de sua respectiva cor. Com essa poda, o número de estados distintos de um jogo é reduzido, mas ainda se encontra na ordem de $10^{21}$.

$$\begin{aligned} Estados &= 2^{55} \times 11 \times 5 \times (5 \times 10 + 2 \times 6) \\ Estados &= 2^{55} \times 11 \times 5 \times 72 \\ Estados &= 142'674'036'195'097'313'280 \end{aligned} \tag{e.q. Poda por posição}$$

$$\begin{aligned} Anos &= \frac{N_{estados\ distintos}}{^{estado}/_{segundo} \times {}^{segundos}/_{minuto} \times {}^{minutos}/_{hora} \times {}^{horas}/_{dia} \times {}^{dias}/_{ano}} \\ Anos &= \frac{142'674'036'195'097'313'280}{^{1}/_{1} \times {}^{60}/_{1} \times {}^{60}/_{1} \times {}^{24}/_{1} \times {}^{365}/_{1}} \\ Anos &= 4'524'164'009'230 \end{aligned} \tag{e.q. Tempo de Computação dos Estados}$$

- O jogo eletrônico está sendo implementado
- Foi feito uma análise para descobrir a possibilidade de computar a melhor jogada possível para um ou vários jogos. Nesta análise, levou-se em consideração:

- A quantidade de memória necessária
- O número de estados existentes
- A complexidade assintótica do algoritmo (pois o número de entrada pro algorítimo é muito grande)
- O tempo de processamento para um determinado número de estados

# 4 Resultados Parciais

# 5 Cronograma

# 6 Conclusão

# Referências


BOREL Émile. *The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels*. 1921. Citado na página 15.

BOREL Émile. *On Games that Involve Chance and the Skill of Players*. 1924. Citado na página 15.

BOREL Émile. *On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play*. 1927. Citado na página 15.

BOREL Émile. *Le jeu de poker*. [S.l.: s.n.], 1938. Citado na página 15.

COURNOT, A.-A. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. L. Hachette (Paris), 1838. Disponível em: <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb30280488q>. Citado na página 15.

JONES, A. J. *Game Theory*: Mathematical models of conflict. [S.l.: s.n.], 1980. Citado na página 16.

NASH, J. F. N. J. *Equilibrium Points in n-person Games*. [S.l.]: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1950. 48–49 p. Citado na página 15.

NASH, J. F. N. J. *Non-Cooperative Games*. [S.l.]: Annals of Mathematics, 1951. 286–295 p. Citado na página 15.

NEUMANN, J. von. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. [S.l.]: Mathematische Annalen, 1928. 295–320 p. Citado na página 15.

NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. [S.l.]: Princeton University Press, 1944. Citado na página 15.

PRAGUE, M. H. *Several Milestones in the History of Game Theory*. VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien, 2004. 49–56 p. Disponível em: <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/game_theory/games_materials.html>. Citado na página 15.

SARTINI, B. A. et al. *Uma Introdução a Teoria dos Jogos*. 2004. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 17.

SPANIEL, W. *Game Theory 101*: The complete textbook. [S.l.: s.n.], 2011. Citado 6 vezes nas páginas 7, 9, 15, 16, 18 e 19.

ZERMELO, E. F. F. *Über eine Anwendung der Mengdenlehre auf die theories des Schachspiels*. 1913. 501–504 p. Citado na página 15.