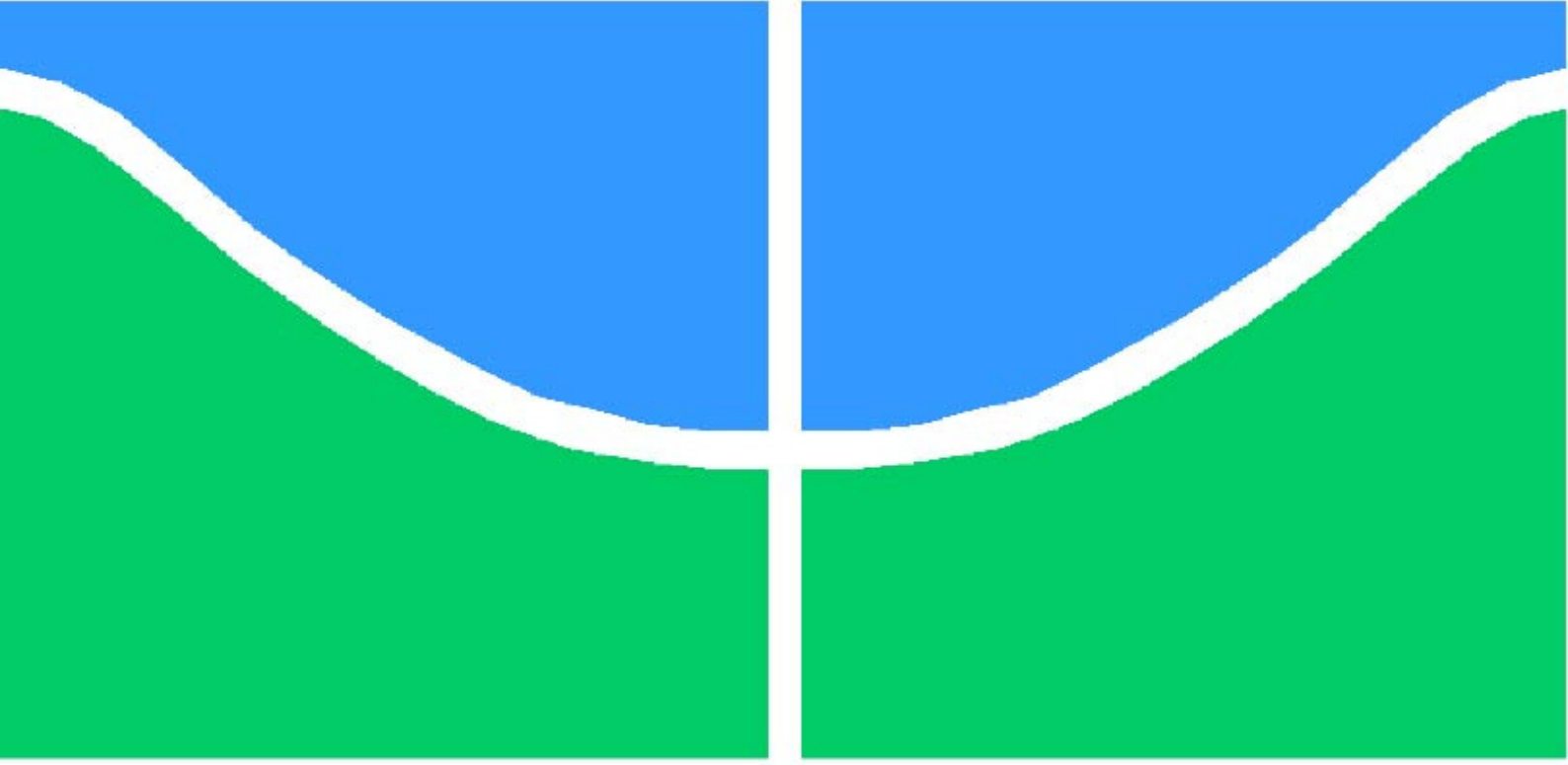


Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia de *Software*

Big Points: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos

Autor: Mateus Medeiros Furquim Mendonça
Orientador: Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior

Brasília, DF
2016

Mateus Medeiros Furquim Mendonça

Big Points: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de *Software* da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de *Software*.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior

Brasília, DF

2016

Mateus Medeiros Furquim Mendonça

Big Points: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos/ Mateus Medeiros Furquim Mendonça. – Brasília, DF, 2016-

57 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2016.

1. Teoria dos Jogos. 2. Análise Combinatória de Jogos. I. Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. *Big Points*: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos

CDU 02:141:005.6

Mateus Medeiros Furquim Mendonça

Big Points: Uma Análise Baseada na Teoria dos Jogos

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de *Software* da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de *Software*.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 7 de julho de 2017:

Prof. Dr. Edson Alves da Costa Júnior
Orientador

Prof. Dr. Fábio Macedo Mendes
Convidado 1

Prof. Dra. Carla Silva Rocha Aguiar
Convidado 2

Brasília, DF
2016

Resumo

A Teoria dos Jogos estuda as melhores estratégias dos jogadores em um determinado jogo. Aplicando suas teorias em um jogo de tabuleiro eletrônico, este trabalho propõe analisar o jogo *Big Points* a partir de um determinado estado da partida e, como resultado, identificar as melhores heurísticas para os jogadores e uma possível inteligência artificial.

Palavras-chaves: Teoria dos Jogos, Análise Combinatória de Jogos.

Abstract

Key-words: Game Theory, Combinatorial Game Theory.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de Códigos

Lista de abreviaturas e siglas

I.A.	Inteligência Artificial

Lista de símbolos

Símbolos para conjuntos e operações matemáticas

$\varnothing$	O conjunto vazio
$\{\ \}$	Delimita conjunto, de forma que $S = \{\}$ é um conjunto vazio
$\forall$	Para cada elemento
$x \in S$	x pertence ao conjunto S
$x \notin S$	x não pertence ao conjunto S
$S \subseteq T$	Conjunto S é um subconjunto de T
$S \cup T$	União entre dois conjuntos
$S \cap T$	Inteseção entre dois conjuntos
$S_1 \times \ldots \times S_n$	Produto cartesiano
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	Somatório de x_1 até x_n
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	Produto de x_1 até x_n
$A_{p,q}$	Arranjo de p elementos tomados de q a q
$\binom{p}{q}$	Combinação de p elementos tomados de q a q

Para jogos de soma zero com dois jogadores

σ, τ	Estratégias puras
x	Estratégia mista para o jogador 1
X	Conjunto de todas as estratégias mistas para o jogador 1
y	Estratégia mista para o jogador 2
Y	Conjunto de todas as estratégias mistas para o jogador 2
$P(x, y)$	Ganho do jogador 1

Para jogos não cooperativos com n jogadores

σ_i	uma estratégia pura para o jogador i
S_i	Conjunto de todas as estratégias puras para o jogador i
x_i	uma estratégia mista para o jogador i
X_i	Conjunto de todas as estratégias mistas para o jogador i
$P_i(x_1, \ldots, x_n)$	Ganho do jogador i
$x \Vert x_i'$	Considerando $x = (x_1, \ldots, x_n)$ o conjunto com todas as estratégias dos n jogadores, jogador i substitui a estratégia x_i pela estratégia x_i'

Sumário

Introdução

Imagine que um grupo de pessoas concordam em obedecer certas regras e agir de forma individual, ou em grupos menores, sem violar as regras especificadas. No final, suas ações como um todo levará a uma certa situação chamada **resultado**. Os membros deste grupo são chamados de **jogadores** e as regras que eles concordaram em obedecer constitui um **jogo**. Estes conceitos são exemplos das ideias utilizadas em análises baseadas na **teoria dos jogos**.

FALAR SOBRE AS POSSÍVEIS ANÁLISES E PKE FAZER ESSAS ANÁLISES

A proposta deste trabalho foi realizar uma destas análise em um jogo de tabuleiro chamado *Big Points*. O que levou a realização deste trabalho foi verificar o balanceamento do jogo, ou seja, se quem começa a jogar tem vantagens sobre o segundo jogador. Dito isso, o objetivo principal deste trabalho foi analisar várias partidas distintas de uma versão reduzida do jogo. E como objetivos secundários, identificar uma heurística na qual tem-se uma maior chance de ganhar uma partida, dessa forma, seria possível a implementação de uma inteligência artificial (I.A.) com diferentes dificuldades para jogar contra uma pessoa.

A análise utilizada para solucionar[1] o jogo neste trabalho foi o teorema *minimax*, onde cada jogador tenta aumentar sua pontuação e diminuir a pontuação do oponente. Os resultados obtidos ao final da análise computacional baseadas neste teorema sugere a possibilidade do jogo completo ser desbalanceado[2], dando ao primeiro jogador uma maior chance de vencer o jogo.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo, Fundamentação Teórica, relata um pouco sobre a história da teoria dos jogos, esclarece alguns conceitos relevantes para o entendimento do trabalho, e explica as regras do próprio jogo. Em seguida, tem-se o capítulo 2, referente à análise e ao desenvolvimento do projeto até sua conclusão, e no capítulo 3 os resultados desta análise são discutidos. Por último, o capítulo 4 onde são feitas as considerações finais do trabalho e são citados alguns possíveis trabalhos futuros a partir do trabalho atual.

[1] Solucionar um jogo é percorrer todas as sua possibilidades de movimento e seus resultados.
[2] É dito um jogo balanceado aquele que a chance dos jogadores de ganhar é a mesma.

1 Fundamentação Teórica

Para um bom entendimento da análise realizada no jogo *Big Points* é preciso um conhecimento básico sobre teoria dos jogos e programação dinâmica. A primeira seção deste capítulo conta brevemente sobre a história da Teoria dos Jogos, com alguns nomes icônicos para esta área. A Seção 1.2 explica um pouco sobre os conceitos da Teoria dos Jogos, mas apenas o necessário para o entendimento deste trabalho. Na Seção 1.3, são apresentados os conceitos sobre programação dinâmica e, na última seção, as regras do jogo *Big Points* são explicadas.

1.1 Histórico da Teoria dos Jogos

Pode-se dizer que a análise de jogos é praticada desde o século XVIII, tendo como evidência uma carta escrita por James Waldegrave ao analisar uma versão curta de um jogo de baralho chamado *le Her* (PRAGUE, 2004). No século seguinte, o matemático e filósofo Augustin Cournot fez uso da teoria dos jogos para estudos relacionados à política (COURNOT, 1838 apud SARTINI et al., 2004).

Mais recentemente, em 1913, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos (ZERMELO, 1913 apud SARTINI et al., 2004). Outros dois grandes matemáticos que se interessaram na teoria dos jogos foram Émile Borel e John von Neumann. Nas décadas de 1920 e 1930, Emile Borel publicou vários artigos sobre jogos estratégicos (BOREL, 1921 apud PRAGUE, 2004) (BOREL, 1924 apud PRAGUE, 2004) (BOREL, 1927 apud PRAGUE, 2004), introduzindo uma noção abstrada sobre jogo estratégico e estratégia mista.

Em 1928, John von Neumann provou o teorema *minimax*, no qual há sempre uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos cujos interesses são completamente opostos (NEUMANN, 1928 apud ALMEIDA, 2006). Em 1944, Neumann publicou um trabalho junto a Oscar Morgenstern introduzindo a teoria dos jogos na área da economia e matemática aplicada (NEUMANN; MORGENSTERN, 1944 apud SARTINI et al., 2004). Além destas contribuições, John von Neumann ainda escreveu trabalhos com grande impacto na área da computação, incluindo a arquitetura de computadores, princípios de programação, e análise de algoritmos (MIYAZAWA, 2010).

John Forbes Nash Junior, um matemático estadunidense que conquistou o prêmio Nobel de economia em 1994, é um dos principais nomes da história da Teoria dos Jogos. Foi formado pela Universidade de Princeton, em 1950, com a tese *Non-Cooperative Games* (Jogos Não-Cooperativos, publicada em 1951). Nesta tese, Nash provou a existência de

ao menos um ponto de equilíbrio em jogos de estratégias para múltiplos jogadores, mas para isso é necessário que os jogadores se comportem racionalmente (ALMEIDA, 2006).

O equilíbrio de Nash era utilizado apenas para jogos de informação completa. Posteriormente, com os trabalhos de Harsanyi e Selten, foi possível aplicar este método em jogos de informação incompleta. A partir de então, surgiram novas técnicas de solução de jogos e a teoria dos jogos passou a ser aplicada em diferentes áreas de estudo, como na economia, biologia e ciências políticas (ALMEIDA, 2006).

Entre 1949 e 1953, Nash escreveu mais artigos ligados à solução de jogos estratégicos: *The Bargaining Problema* (O Problema da Barganha, 1949) e *Two-Person Cooperative Games* (Jogos Cooperativos de Duas Pessoas, 1953). Também escreveu artigos de matemática pura sobre variedades algébricas em 1951, e de arquitetura de computadores em 1954 (ALMEIDA, 2006).

Várias publicações contribuíram para este marco histórico da teoria dos jogos, mas o livro de Thomas Schelling, publicado em 1960, se destacou em um ponto de vista social(SCHELLING, 1960 apud CARMICHAEL, 2005). Em 1982, Elwyn Berlekamp, John Conway e Richard Guy publicaram um livro em dois volumes que se tornou uma referência na área da teoria dos jogos combinatorial por explicar os conceitos fundamentais para a teoria dos jogos combinatorial (BERLEKAMP; CONWAY; GUY, 1982 apud GARCIA; GINAT; HENDERSON, 2003).

1.2 Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas[1] sob condições de conflito[2]. O campo da teoria dos jogos divide-se em três áreas: Teoria Econômica dos Jogos que normalmente analisa movimentos simultâneos (definição 1) de dois ou mais jogadores; Teoria Combinatória dos Jogos, no qual os jogadores fazem movimentos alternadamente, e não faz uso de elementos de sorte, diferente da Teoria Econômica dos Jogos que também trata desse fenômeno; e Teoria Computacional dos Jogos, que engloba jogos que são possíveis resolver por força bruta ou inteligência artificial (GARCIA; GINAT; HENDERSON, 2003), como jogo da velha e xadrez respectivamente. Nestre trabalho, será utilizado alguns conceitos da Teoria Econômica dos Jogos para analisar um jogo de movimentos alternados para ser resolvido computacionalmente.

Definição 1. Em jogos com **movimentos simultâneos**, os jogadores devem escolher o que fazer ao mesmo tempo ou, o que leva à mesma situação, as escolhas de cada jogador

[1] É considerado que os jogadores são seres racionais e possuem conhecimento completo das regras.
[2] Condições de conflito são aquelas no qual dois ou mais jogadores possuem o mesmo objetivo.

é escondida de seu oponente. Em qualquer um dos dois casos, o jogador deve escolher sua jogada levando em consideração a possível jogada do outro (CARMICHAEL, 2005).

Os elementos básicos de um jogo são: o conjunto de jogadores ; o conjunto de estratégias para cada jogador; uma situação, ou perfil, para cada combinação de estratégias dos jogadores; uma função utilidade para atribuir um *payoff*, ou ganho, para os jogadores no final do jogo. Começando com o conjunto de **jogadores**, são dois ou mais seres racionais que possuem um mesmo objetivo e para alcançar esse objetivo, cada jogador possui um conjunto de **estratégias**. A partir das escolhas de estratégias de cada jogador, tem-se uma **situação** ou **perfil** e, no final do jogo, um **resultado** para cada perfil (SARTINI et al., 2004). Em outras palavras, os jogadores escolhem seus movimentos simultaneamente como explicado na Definição 1, o que levará a vitória de algum deles no final do jogo, ou a um empate.

Em termos matemáticos é dito que um jogador tem uma **função utilidade**, que atribui um ***payoff***, ou **ganho**, para cada situação do jogo. Quando essa informação é inserida em uma matriz, tem-se uma **matriz de *payoff*** (SARTINI et al., 2004). Ou seja, matriz de ganho é a representação matricial dos *payoffs* dos jogadores, onde as estratégia de um jogador estão representadas por cada linha e as de seu oponente estão representadas pelas colunas.

Para um melhor entendimento destes conceitos, será utilizado uma versão curta do jogo *Nim*. Considere a versão simplificada do jogo, que começa com quatro palitos e dois montes (com dois palitos cada monte). Cada um dos dois jogadores joga alternadamente retirando quantos palitos quiser, mas de apenas um dos montes. O jogador que retirar o último palito do jogo perde (JONES, 1980).

Começando com o conceito de abstração e representação de um jogo, existe uma maneira chamada forma extensiva que é descrito na Definição 2. De acordo com esta definição, a árvore do jogo *Nim* é representada como mostrado na Figura 1.

Definição 2. É dito que um jogo está representado na sua **forma extensiva** se a árvore do jogo reproduzir cada estado possível, junto com todas as possíveis decisões que levam a este estado, e todos os possíveis resultados a partir dele (JONES, 1980, grifo nosso). Os nós são os estados do jogo e as arestas são as possíveis maneiras de alterar aquele estado, ou em outras palavaras, os movimentos permitidos a partir daquele estado.

A ordem dos jogadores está sendo indicada ao lado esquerdo da figura, de forma que o jogador J_1 é o primeiro a realizar um movimento, o J_2 é o segundo, o terceiro movimento é do J_1 e assim por diante. O estado do jogo é representado por cada nó da árvore, sendo que os quatro palitos estão divididos em dois montes dentro do retângulo. Cada aresta representa uma jogada válida para o jogador atual. Ao analisar bem a primeira jogada,

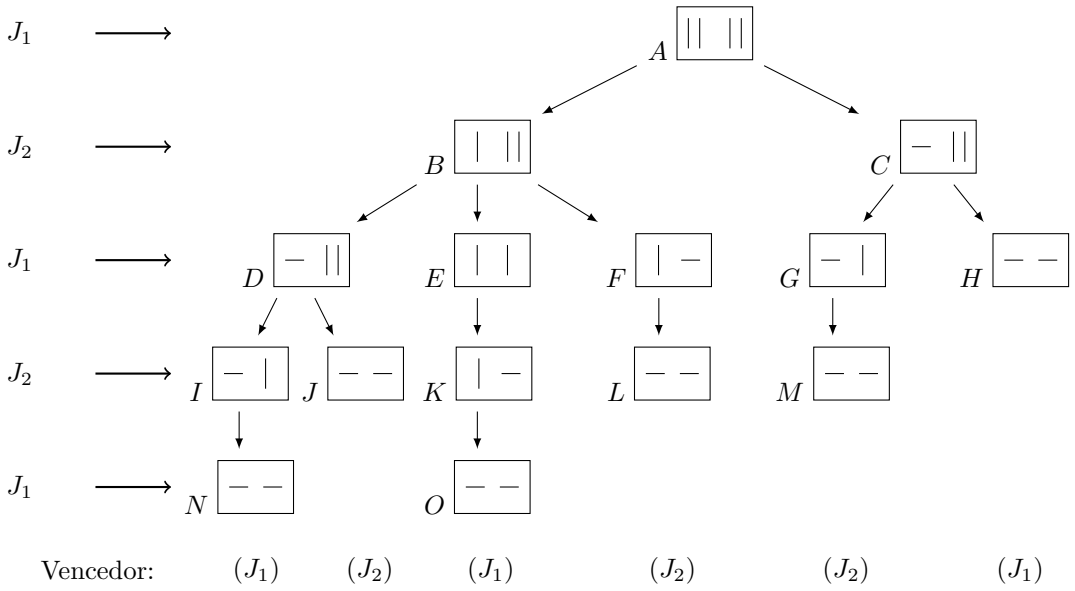


Figura 1 – Árvore do jogo *Nim*

percebe-se que J_1 possui quatro jogadas possíveis: retirar um palito do primeiro monte; retirar dois palitos do primeiro monte; retirar um palito do segundo monte; e retirar dois palitos do segundo monte. As últimas jogadas foram omitidas da árvore do jogo por serem simétricas às outras duas primeiras. Na aresta (A, B)[3], o primeiro jogador pega apenas um palito de um dos montes de palito, enquanto a aresta (A, C) representa o movimento de pegar todos os dois palitos de um monte. Da mesma maneira, as arestas (B, D), (B, E), (B, F), (C, G) e (C, H) são os movimentos de J_2 em resposta às jogadas de J_1.

No final da figura, há uma representação para cada folha[4] para representar o vencedor no final daquela série de movimentos. Nos nós terminais N, O e H, o jogador J_2 retirou o último palito do jogo, resultando na vitória de J_1. Para as folhas J, L e M, a vitória é do segundo jogador.

Olhando para a árvore de baixo pra cima, o jogador J_1 ganha na folha N. Na verdade, ele já havia ganhado no nó anterior (I), pois o jogador J_2 só tem uma jogada a fazer. Como a decisão de chegar no nó I é de escolha do primeiro jogador ao realizar a jogada (D, I), pode-se dizer que essa jogada é um de seus *winning moves*.

Ao mesmo tempo que J_1 é um jogador inteligente que tenta sempre jogar da melhor maneira possível, o segundo jogador também fará as melhores jogadas que puder. Sabendo que o nó D garante sua derrota, J_2 fará de tudo para escolher outras jogadas. De fato, ao observar essa árvore com mais cuidado, o jogador J_2 sempre irá vencer, pois há sempre um nó no qual, a partir dele, lhe garante à vitória. Para entender melhor o por quê do jogador J_2 sempre ganhar, será utilizado uma análise partindo do conceito de estratégia

[3] A aresta pode ser representada como (A, B), sendo a aresta que sai do nó A e vai até o nó B, ou como $\overrightarrow{B}$, sendo a aresta que incide em B (ADELSON-VELSKY; ARLAZAROV; DONSKOY, 1988).

[4] Um nó é considerado folha (ou nó terminal) quando não há nenhum filho abaixo dele.

pura (Definição 3).

Definição 3. Estratégia pura é definido como um conjunto de decisões a serem feitas para cada ponto de decisão no jogo (JONES, 1980, grifo nosso).

A estratégia pura também pode ser vista como um caminho[5] único na árvore, que tem origem no primeiro nó de decisão do jogador e termina em uma folha. No caso do jogador J_1, o caminho começa na raíz, e no caso do jogador J_2, o caminho pode começar em B ou em C. Devido à isso, J_2 deve considerar os dois casos e decidir de antemão o que fazer. A partir da definição de estratégia pura (3), tem-se as estratégias de ambos os jogadores nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 – Estratégias pura do jogador J_1 para o jogo *Nim*

Estratégia	**1º Turno**	**2º Turno**	
		Se em	Vá para
σ_1	$A \to B$	D	I
σ_2	$A \to B$	D	J
σ_3	$A \to C$	–	–

Tabela 2 – Estratégias pura do jogador J_2 para o jogo *Nim*

Estratégia	**1º Turno**	
	Se em	Vá para
τ_1	B	D
	C	G
τ_2	B	E
	C	G
τ_3	B	F
	C	G
τ_4	B	D
	C	H
τ_5	B	E
	C	H
τ_6	B	F
	C	H

Na Tabela 1, os movimentos de J_1 estão separadas em dois turnos. O primeiro turno é o nó raiz (A). A partir deste estado, o jogador possui duas escolhas (A, B) ou (A, C), representados na tabela como as estratégias pura σ_1 e σ_3. Mas além dessa informação, ainda deve-se representar a próxima decisão a ser feita após escolher (A, B). Se J_2 escolher certos movimentos que chegue no D, o primeiro J_1 ainda tem mais uma escolha a fazer.

[5] Uma sequência de arestas onde o nó no final de uma aresta coincide com o nó no começo da próxima aresta, é chamado de **caminho** (ROSENTHAL, 1972, grifo nosso).

Essa segunda escolha está representada nas colunas: *Se em*, no caso se o jogador estiver naquele nó; e *Vá para*, que são as possíveis jogadas a serem feitas a partir do nó em questão. Então, a diferença de σ_1 e σ_2 é apenas nesta segunda escolha. Ao chegar em um nó terminal, acaba também a descrição de uma estratégia pura.

Definição 4. Considere um jogo no qual o jogador J_1 move primeiro e, a partir de então, ambos os jogadores alternam as jogadas. Ao chegar em um nó terminal, tem-se uma função para atribuir um valor ao jogador J_1 naquela folha. Essa sequência de movimento é chamado de **jogo**, e o valor na folha é chamado **resultado do jogo** (ADELSON-VELSKY; ARLAZAROV; DONSKOY, 1988, p. 2).

De acordo com a definição de um jogo (Definição 4), a versão reduzida do *Nim* possui dezoito jogos no total, de forma que a quantidade de jogos pode ser calculado com $nm = 18$, com $n = 3$ e $m = 6$. Alguns exemplos são monstrados a seguir:

$$\sigma_1 \text{ e } \tau_1 \text{ resultam no jogo } A \to B \to D \to I \to N,$$
$$\sigma_2 \text{ e } \tau_1 \text{ resultam no jogo } A \to B \to D \to J,$$
$$\sigma_3 \text{ e } \tau_2 \text{ resultam no jogo } A \to C \to G \to M, \text{ etc.}$$

Olhando para a tabela do jogador J_2 (2), sua primeira jogada já depende da jogada do outro jogador. Por isso, cada estratégia τ_j com $j \in \{1, \cdots, m\}$ descreve duas possibiliades de movimento. Observando τ_1, no primeiro turno seu movimento será (B, D) se estiver em B, caso contrário, jogará (C, G).

Definição 5. A **forma normal** é a representação do resultado do jogo a partir das escolhas de estratégia pura dos jogadores, onde, ciente das regras do jogo, cada jogador seleciona uma estratégia pura sem saber a escolha do outro.

Ao escolher suas estratégias pura, os jogadores percorrem a árvore até chegar a uma folha. Essa sequência de movimentos (a escolha de uma estratégia pura σ_i e uma τ_j) é chamada de **jogo**. Dependendo das escolhas de J_1 e J_2, tem-se um jogo diferente. Esses diferentes jogos são representados pela análise normal (definição 5) na Tabela 3.

Tabela 3 – Forma Normal para o jogo *Nim*

		J₂					
		τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
	σ_1	N	O	L	N	O	L
J₁	σ_2	J	O	L	J	O	L
	σ_3	M	M	M	H	H	H

Nesta tabela, as estratégias dos jogadores estão nas linhas e colunas, e as folhas são os resultados de caminhos tomados a partir de cada estratégia σ_i e τ_j. Cada linha é uma estratégia pura de J_1 ($\sigma_i \forall i \in \{1,2,3\}$) e, cada coluna, uma estratégia de J_2 ($\tau_j \forall j \in \{1,2,3,4,5,6\}$). Para transformar esta tabela em uma "matriz" de *payoff*, basta substituir os nós terminais pelo resultado do jogo. Se o primeiro jogador ganhar, seu ganho é 1, se o segundo jogador vencer, o resultado para J_1 é −1.

Tabela 4 – Matriz de Ganho para o jogo *Nim*

		J₂					
		τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
	σ_1	1	1	-1	1	1	-1
J₁	σ_2	-1	1	-1	-1	1	-1
	σ_3	-1	-1	-1	1	1	1

1.3 Programação dinâmica

Dynamic programming typically applies to optimization problems in which we make a set of choices in order to arrive at an optimarl solutions. As we make each choice, subproblems of the same form often arise. Dynamic programming is effective when a given subproblem may arise from more than one partial set of choices; the key technique is to store the solution to each such subproblem in case it shoudl reapper.

Dynamic programming, like the divide-and-conquer method, solves problems by combining the solution to subproblems. Divide and conquer algorithms partition the the problem into disjoint subproblems, solve the subproblems recursively, and then combine their solutions to solve the original problem. In contrast, dynamic programming applies when the subproblems overlap - that is, when subproblems share subsubproblmes. In this contextm a divide-and-conquer algorithm does more work than necessary, repeatedly solving the common subsubproblems. A dynamic-programming algorithm solves each subsubproblem just once and then saves its answer in a table, thereby avoiding the work of recomputing the answer every time it solves each subsubproblem.

We typically apply dynamic programming to optimization problems. Such problems can have many possible solutions. Each solution has a value, and we wish to find a solution with the optimal (minimum or maximum) value. We call such a solution an optimal solution to the problem, as opposed to the optimal solution.

Programação dinâmica é uma técnica de programação capaz de reduzir significantemente o tempo de processamento de um problema no qual os estados possam se repetir. (CORMEN et al., 2001) Um exemplo clássico é o programa de para calcular os números

da sequência de *Fibonacci*. No Código **??** está escrito um programa bem simples para resolver este problema.

Take a problem, split in subproblems, solve the subproblems and reuse

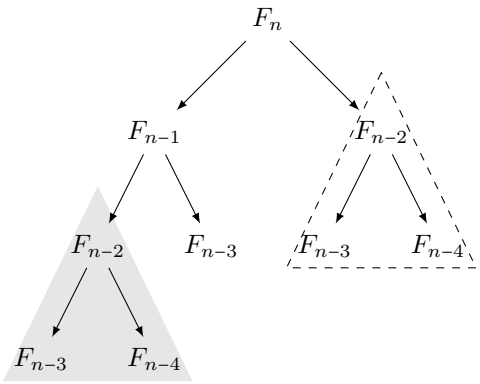


Figura 2 – Árvore de fibonacci em PD

```
#include <iostream>
#include <map>

std::map<int,int> memoization;

int fibonacci(int);

int main()
{
    std::cout << fibonacci(15) << std::endl;

    return 0;
}
```

Código 1.1 – Funcao main de Fibonacci

```
int fibonacci(int n)
{
    int fib_number = 0;

    int a_0 = 1;
    int a_1 = 1;
    for (int i = 1; n > n; n++) {
        fib_number = a_0 + a_1;

        a_0 = a_1;
        a_1 = fib_number;
    }

    return fib_number;
}
```

Código 1.2 – Fibonacci Iterativo

```
int fibonacci(int n)
{
    // Declara e inicia a variável
    int fib_number = 0;

    // Os dois primeiros termos são iguais a 1
    if (n <= 2) fib_number = 1;

    // Cada número em seguida são a soma dos dois anteriores
    else fib_number = fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);

    return fib_number;

}
```

Código 1.3 – Fibonacci Recursivo

```
int fibonacci(int n)
{
    // Verifica se a_n já foi calculado
    auto it = memoization.find(n);
    if (it != memoization.end()) {
        return memoization.at(n);
    }

    // Declara e inicia a variável
    int fib_number = 0;

    // Os dois primeiros termos são iguais a 1
    if (n <= 2) fib_number = 1;

    // Cada número em seguida são a soma dos dois anteriores
    else fib_number = fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);

    // Armazena a_n para referências futuras
    memoization[n] = fib_number;

    return fib_number;
}
```

Código 1.4 – Fibonacci com Programação Dinâmica

The Online Encyclopedia of Integers Sequences (OEIS)

https://oeis.org/A000045

https://oeis.org/A000045/a000045_3.txt

Na Figura 3 fica claro que a implementação recursiva do algoritmo cresce exponencialmente de acordo com o número de cálculos a ser realizado. Para tratar desse problema,

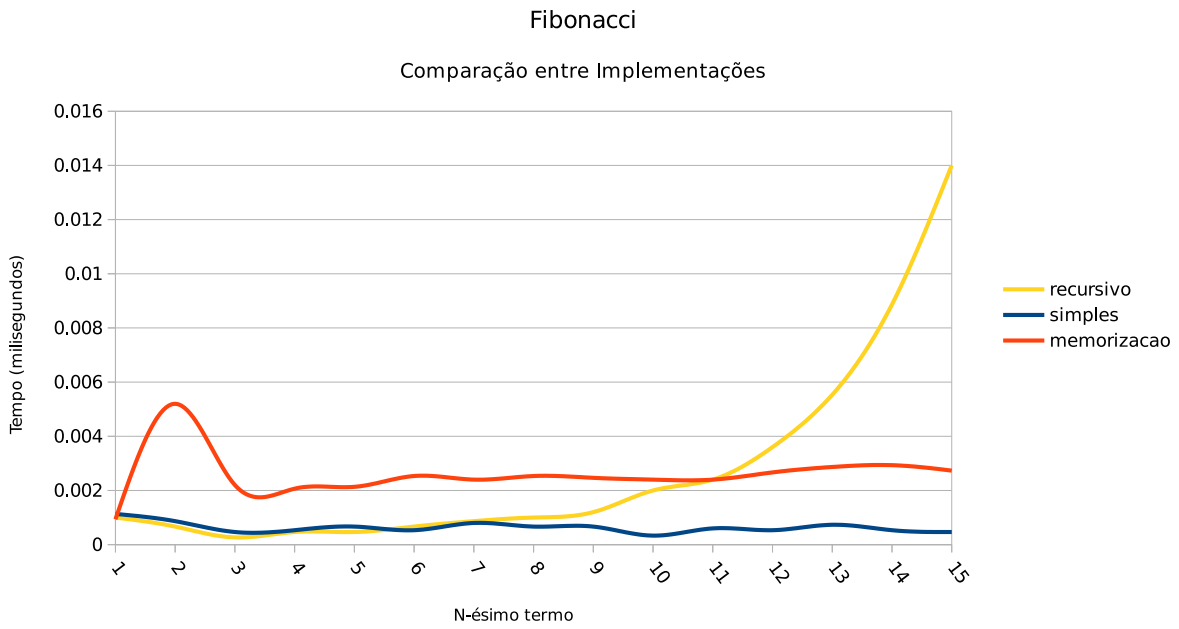


Figura 3 – Comparação entre implementações de fibonacci

a técnica de memorização armazena os valores da sequência de *fibonacci* em um *map* e depois acessa seus valores ao invés de recalcular aquele n-ésimo termo. Isso faz com que o tempo do cálculo se torne

1.4 *Big Points*

Big Points é um jogo abstrato e estratégico com uma mecânica de colecionar peças que pode ser jogado de dois a cinco jogadores. São cinco peões de cores distintas, que podem ser usadas por qualquer jogador, para percorrer um caminho de discos coloridos até chegar à escada. Durante o percurso, os jogadores coletam alguns destes discos e sua pontuação final é determinada a partir da ordem de chegada dos peões ao pódio e a quantidade de discos adquiridos daquela cor. Ganha o jogador com a maior pontuação.

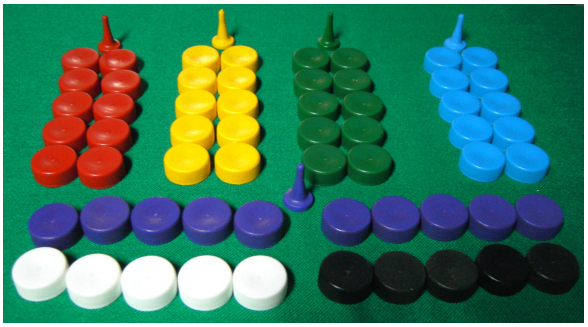
O jogo é composto por cinco peões, como demonstrado na Figura 4, um de cada uma das seguintes cores, denominadas **cores comuns**: vermelha, verde, azul, amarela e violeta. Para cada cor de peão, tem-se dez discos, como mostrado na Figura 5a, (totalizando cinquenta discos) denominados **discos comuns**, e cinco discos das cores branca e preta (totalizando dez discos) denominados **discos especiais**. Por fim, há um pódio (ou escada) com um lugar para cada peão. A escada determinará a pontuação equivalente a cada disco da cor do peão, de maneira que o peão que ocupar o espaço mais alto no pódio (o primeiro a subir) fará sua cor valer quatro, o segundo peão, três pontos e assim por diante, até o último valer zero pontos. No caso de um jogo com menos de cinco peões, a seguinte fórmula se aplica: $Score = N_c - P_{pos}$, onde $Score$ é a pontuação daquela

Figura 4 – Caixa do jogo *Big Points*

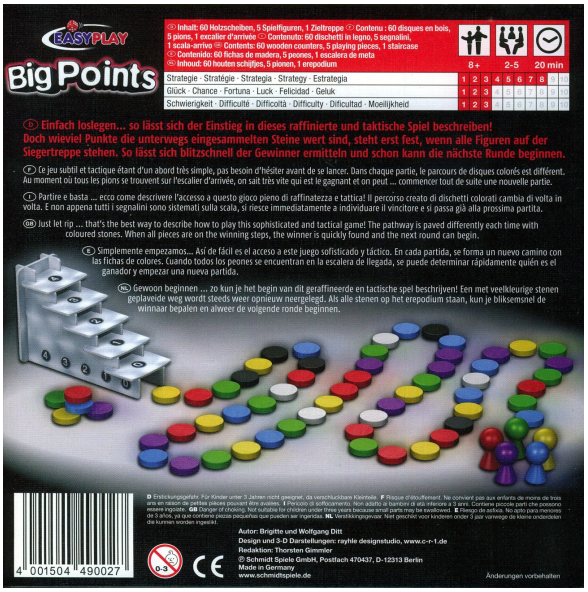
determinada cor, N_c é o número de discos comuns e P_{pos} é a posição do peão no pódio.

No final da preparação, o jogo ficará parecido com as peças na Figura 5b. A preparação do jogo ocorre em algumas etapas envolvendo a posição dos peões, a aleatoriedade do tabuleiro e alguns discos ao lado da escada. A primeira coisa é retirar um disco de cada cor comum e posicioná-los ao lado da escada, estes serão os discos coletados pelo jogador que subir o peão da sua cor para a escada. Com isso, restará nove discos de cada uma das cinco cores comuns mais cinco discos de cada uma das duas cores especiais resultando em $(n_{dc} - 1) \cdot n_{cc} + n_{de} \cdot n_{ce} = (10 - 1) \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 55$ *discos*, onde n_{dc} é o número de discos comuns, n_{cc} é o número de cores comuns, n_{de} é o número de discos especiais, e n_{ce} é o número de cores especiais. Em seguida, deve-se embaralhar todos os 55 discos restantes e formar uma fila até a escada, estes são os discos possíveis de serem coletados e onde os peões andam até chegar na escada. Por último, é preciso posicionar os peões no começo da fila de discos, de forma que fique oposto à escada.

Após preparar o jogo, deve-se escolher o primeiro jogador de forma aleatória. Na sua vez, cada jogador deve escolher um peão, que não esteja na escada, para movê-lo até o disco à frente mais próximo de sua cor. Caso não haja um disco de sua cor para movê-lo, o peão sobe na escada para a posição mais alta que não esteja ocupada e coleta



(a) Conteúdo do jogo *Big Points*



(b) Preparação do jogo *Big Points*

Figura 5 – Organização do jogo *Big Points*

o disco daquela cor que está ao lado da escada. Em seguida, o jogador escolhe para pegar o primeiro disco disponível[6] à frente ou atrás da nova posição do peão. Caso o disco não esteja disponível, verifique o próximo disco até encontrar um que esteja disponível. Ao encontrar um disco que o jogador possa pegar, retire-o do tabuleiro e coloque-o na mão do jogador atual. A sua vez termina e passa para o próximo escolher um peão e pegar um disco. O jogo segue desta maneira até que todos os peões se encontrem na escada. No final do jogo, conta-se os pontos e ganha o jogador que tiver a maior pontuação.

A pontuação do jogo é dependente da ordem de chegada dos peões na escada e da quantidade de discos de cada cor que o jogador tiver. O primeiro peão que chegou na escada faz com que cada disco de sua cor valha quatro pontos. Os jogadores devem então multiplicar a quantidade de discos daquela cor pelo valor da ordem de chegada do peão da sua cor na escada. Exemplo: se o primeiro jogador tiver dois discos vermelhos, um disco verde e três azuis e a ordem de chegada deles for azul em primeiro lugar, verde logo em seguida e depois o vermelho, sua pontuação será descrita de acordo com a equação 1.1, onde n_c é o número de cores do jogo, n_r, n_g e n_b são as quantidades de discos vermelhos, verdes e azuis, respectivamente, que o jogador possui e p_r, p_g e p_b são as posições dos peões vermelho, verde e azul, respectivamente, na escada.

$$\begin{aligned} S &= n_r \cdot (n_c - p_r) + n_g \cdot (n_c - p_g) + n_b \cdot (n_c - p_b) \\ S &= 2 \cdot (3 - 3) + 1 \cdot (3 - 2) + 3 \cdot (3 - 1) \\ S &= 7 \end{aligned} \tag{1.1}$$

[6] É dito disponível aquele disco presente no tabuleiro que não possui um peão em cima.

2 Metodologia

2.1 Fluxo de Trabalho

O *framework scrum* é ideal para o desenvolvimento de projetos complexos no qual a produtividade e a criatividade são essenciais para a entrega de um produto de alto valor (SCHWABER; SUTHERLAND, 2016). Inicialmente, tal método de organização e gerenciamento do projeto foi aplicado para o desenvolvimento do sistema em questão. O *kanban* do waffle.io[1] foi utilizado para registrar tarefas devido à sua integração com as *issues* do github[2]. Reuniões com o orientador foram realizadas para discutir aspectos técnicos do jogo, como as estruturas de dados a serem utilizadas para reduzir os dados armazenados, e alguns métodos importantes para agilizar o processamento.

Porém, ao longo do tempo, o esforço para manter a rastreabilidade das tarefas tornou-se muito alto em relação à complexidade do projeto, e ao tamanho da equipe. As tarefas passaram a ser *branchs* locais com nomes significativos, representando a funcionalidade a ser desenvolvida. Após a conclusão da tarefa, testes simples e manuais foram aplicados para então unir à *branch* mestre[3]. Por fim, para trabalhar em outra *branch*, sempre foi necessário atualizá-la em relação à mestre[4] para garantir a consistência do trabalho.

2.2 Análise do jogo *Big Points*

Para analisar o jogo *Big Points*, é preciso realizar todas as jogadas de todos os jogos possíveis. Cada jogador, na sua vez, deve escolher uma jogada na qual lhe garanta a vitória, se houver mais de uma, escolha a que tiver a maior pontuação. Caso não tenha uma jogada para vencer, o jogador deve minimizar a pontuação do adversário. Após fazer isso para um jogo inicial, os resultados são escritos em um arquivo *csv* para análise. Esse procedimento é repetido para *cada* combinação possível do tabuleiro inicial.

Exaurir todas as possibilidades de jogadas é um trabalho computacional imenso e cresce exponencialmente de acordo com o tamanho do jogo. Para um jogo pequeno com apenas dois discos e duas cores comuns (sem especiais) as jogadas possíveis são: mover o peão vermelho e pegar o disco da direita, ou da esquerda; e mover o peão verde e pegar o disco da direita ou da esquerda. Isso gera uma árvore onde cada nó possui quatro

[1] https://waffle.io/mfurquim/tcc
[2] https://github.com/mfurquim/tcc
[3] `$ git checkout <to-branch>; git merge <from-branch>`
[4] `$ git rebase <from-branch> <to-branch>`

filhos e a altura média dessa árvore é quatro, totalizando uma quantidade de estados de aproximadamente $\sum_{h=0}^{4} 4^h \approx 341$.

2.2.1 Quantidade de partidas

$$
\begin{aligned}
P &= (J-1)\binom{D_T}{D_W}\binom{D_{L1}}{D_K}\binom{D_{L2}}{D_R}\binom{D_{L3}}{D_G}\binom{D_{L4}}{D_B}\binom{D_{L5}}{D_Y}\binom{D_{L6}}{D_V} \\
P &= 4 \cdot \binom{55}{5}\binom{50}{5}\binom{45}{9}\binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} \\
P &= 560.483.776.167.774.018.942.304.261.616.685.408.000.000 \\
P &\approx 5 \times 10^{41}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

2.3 Estrutura de dados

Devido à enorme quantidade de estados de um jogo reduzido de *Big Points*, foi implementado duas funções para codificar e decodificar a *struct State* para um *long long int*, de forme que ocupe apenas 64 *bits* na memória. Após testar nos limites da capacidade da variável, percebeu-se um erro quando executado com quatro cores e cinco discos, o que levou à implementação por *bit fields*.

2.3.1 Estado do jogo

Para escrever a programação dinâmica capaz de otimizar o processamento recursivo, é necessário identificar as variáveis do jogo que representam um **estado**. Um estado do jogo depende dos discos do tabuleiro, dos peões que estão na escada, da mão dos jogadores, e do jogador atual.

2.3.2 *Bit fields*

Dentro da estrutura `State` foi declarado duas estruturas anônimas[5] utilizando *bit fields*. As duas estruturas servem para garantir a utilização correta dos *bits* quando as variáveis chegarem próximo ao limite da sua capacidade. Essas estruturas possuem variáveis do tipo `unsigned long long int`, que ocupa 64 *bits*. Após a declaração da variável, é declarado a quantidade de *bits* que será utilizado para ela, de modo que `ll _tabuleiro :20` ocupe apenas 20 *bits* da variável `unsigned long long int`, `ll _peao :15` ocupe 15 *bits*, e assim por diante de forma que não ultrapsse os 64 *bits* da variável. Como o comportamento do armazenamento é desconhecido quando a variável é ultrapassada, e

[5] Estruturas anônimas permitem acesso às suas variáveis de forma direta, como por exemplo: `state._tabuleiro` acessa a variável `_tabuleiro` dentro da estrutura anônima, que por sua vez se encontra dentro da estrutura `State`.

para garantir consistência no armazenamento, foi utilizado duas *structs* com, no máximo, uma variável `unsigned long long int` (64 *bits*).

A estrutura `State` possui cinco variáveis: `_tabuleiro`, no qual pode armazenar informações sobre um tabuleiro até 20 discos[6]; `_peao`, que representa a posição $p_i \in \{0, 1, ..., n_d, n_d + 1\}$, onde n_d é o número de discos de cores comuns no jogo e p_i é o peão da cor i[7]; `_escada`, que indica as posições dos peões na escada, sendo a p_i*-ésima* posição de `_escada` é a posição do peao p_i; `_jogadores`, possui informações sobre os discos coletados dos dois jogadores; e por fim, a variável `_atual` que representa o jogador que fará a jogada.

```
10 struct State
11 {
12     // Cinco cores, quatro discos
13     struct {
14         // 5 cores * 4 discos (1bit pra cada)
15         ll _tabuleiro:20;
16
17         // 0..5 posições possíveis (3bits) * 5 peões
18         ll _peao:15;
19
20         // 0..5 posições (3bits) * 5 peões
21         ll _escada:15;
22     };
23
24     struct {
25         // 0..5 discos (3bits) * 5 cores * 2 jogadores
26         ll _jogadores:30;
27
28         // Jogador 1 ou Jogador 2
29         ll _atual:1;
30     };
```

Código 2.1 – Definição da estrutura `State`

O cálculo para determinar os *bits* necessários para armazenar as informações de cada variável foi realizado será explicado nas subseções seguintes.

Cálculo de bits do atributo `tabuleiro`

$$\begin{aligned} \texttt{\_tabuleiro} &= n_c \cdot n_d \\ \texttt{\_tabuleiro} &= 5 \cdot 4 \\ \texttt{\_tabuleiro} &= 20 \ \textit{bits} \end{aligned} \tag{2.2}$$

[6] Cinco cores e quatro discos.

[7] As cores de peão seguem a ordem RGBYP começando do 0, onde **R***ed* = 0, **G***reen* = 1, **B***lue* = 2, **Y***ellow* = 3, e **P***urple* = 4.

Na equação 2.2, n_c e n_d são o número de cores e o número de discos do jogo, respectivamente. Seus valores são, no máximo $n_c = 5$ e $n_d = 4$.

Cálculo de bits do atributo `peao`

$$\begin{aligned} \texttt{\_peao} &= \lceil \log_2(n_d + 1) \rceil \cdot n_p \\ \texttt{\_peao} &= \lceil \log_2(5 + 1) \rceil \cdot 4 \\ \texttt{\_peao} &= 3 \cdot 4 \\ \texttt{\_peao} &= 15 \ \textit{bits} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na segunda equação, 2.3, o valor de n_d é o número de discos e n_p é o número de peões do jogo, que por sua vez é igual a n_c (número de cores comuns). Cada peão pode estar: fora do tabuleiro, com $peao(p_i) = 0$; em cima de um disco da sua cor, com $peao(p_i) \in \{1, 2, ..., n_d\}$; e na escada, com $peao(p_i) = n_d + 1$.

Cálculo de bits do atributo `escada`

$$\begin{aligned} \texttt{\_escada} &= \lceil \log_2(n_p + 1) \rceil \cdot n_p \\ \texttt{\_escada} &= \lceil \log_2(6) \rceil \cdot 5 \\ \texttt{\_escada} &= 15 \ \textit{bits} \end{aligned} \tag{2.4}$$

A equação 2.4 possui as variáveis n_p e n_c com $n_p, n_c \in \{2, 3, 4, 5\}$ e $n_p = n_c$. Cada peão tem um local na escada, que armazena a posição dele de forma que $0 \leqslant escada(p_i) \leqslant n_c$. As situações possíveis são: $escada(p_i) = 0$ quando o peão não estiver na escada; e $escada(p_i) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sendo a ordem de chegada do peão na escada[8].

Cálculo de bits do atributo `jogadores`

$$\begin{aligned} \texttt{\_jogadores} &= \lceil \log_2(n_d + 1) \rceil \cdot n_c \cdot n_j \\ \texttt{\_jogadores} &= \lceil \log_2(4 + 1) \rceil \cdot 5 \cdot 2 \\ \texttt{\_jogadores} &= 3 \cdot 5 \cdot 2 \\ \texttt{\_jogadores} &= 30 \ \textit{bits} \end{aligned} \tag{2.5}$$

A capacidade da variável `_jogadores` é de 30 *bits*, como demonstrado na equação **??**. As variáveis utilizadas nessa equação são: n_d, o número de discos $n_d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; n_c, o número de cores $n_c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; e n_j, o número de jogadores $n_j = 2$. A informação armazenada na mão dos jogadores, para cada disco, vai até o número máximo de discos mais um, pois o jogador pode pegar todos os discos no tabuleiro e o disco adquirido ao

[8] O primeiro peão p_i a chegar na escada é indicado com $escada(p_i) = 1$.

mover o peão para a escada. Para armazenar o número seis, são necessários $\lceil \log_2(6) \rceil = 3 bits$

Cálculo de bits do atributo `atual`

$$\begin{aligned} \texttt{\_atual} &= \lceil \log_2(2) \rceil \\ \texttt{\_atual} &= 1 \ bit \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3.3 Funções de acesso da estrutura `State`

A estrutura possui um construtor que atribui valores às variáveis através de RAII[9], dessa forma não se faz necessário nenhuma extra implementação. Todas as variáveis possuem um valor padrão, verdadeiro para qualquer tamanho de tabuleiro t_i, onde $4 \leqslant t_i \leqslant 20$.

```
33    State(int mtabuleiro = (1<<20)-1, int mpeao = 0, int mescada = 0,
34        int mjogadores = 0, int matual = 0) : _tabuleiro(mtabuleiro),
35        _peao(mpeao), _escada(mescada), _jogadores(mjogadores),
36        _atual(matual)
37    {
38    }
```

Código 2.2 – Construtor da estrutura `State`

cpp programing language criador do c++

Atributo `tabuleiro`

```
41    int tabuleiro (int pos) const {
42        return (_tabuleiro & (1<<pos))>>pos;
43    }
44
45    void settabuleiro (int pos, int available) {
46        _tabuleiro = (_tabuleiro & ~(1<<pos)) | ((available&1)<<pos);
47    }
```

Código 2.3 – Funções de acesso ao atributo `tabuleiro`

Atributo `peao`

```
50    int peao (int cor) const {
51        return (_peao & (7<<(3*cor)))>>(3*cor);
52    }
53
54    void setpeao (int cor, int pos) {
55        _peao = (_peao&~(7<<(3*cor)))|((pos&7)<<(3*cor));
56    }
57
58    void movepeao (int cor) {
```

[9] *Resource Aquisition Is Initialization* é uma técnica de programação que vincula o ciclo de vida do recurso ao da estrutura (CUBBI; MAGGYERO; FRUDERICA,).

```
59          setpeao(cor,peao(cor)+1);
60      }
```

Código 2.4 – Funções de acesso ao atributo `peão`

Atributo `escada`

```
63      int escada (int cor) const {
64          return (_escada & (7<<(3*cor)))>>(3*cor);
65      }
66
67      void setescada (int cor, int pos) {
68          _escada = (_escada&~(7<<(3*cor)))|((pos&7)<<(3*cor));
69      }
```

Código 2.5 – Funções de acesso ao atributo `escada`

Atributo `jogador`

```
72      int jogador (int jogador, int cor) const {
73          return ((_jogadores>>(15*jogador)) & (7<<(3*cor)))>>(3*cor);
74      }
75
76      void setjogador (int jogador, int cor, int qtd) {
77          _jogadores = (_jogadores & ~(7<<(3*cor + 15*jogador) ))
78              | ((qtd & 7) << (3*cor + 15*jogador));
79      }
80
81      void updatejogador (int player, int cor) {
82          setjogador(player, cor, jogador(player, cor)+1);
83      }
```

Código 2.6 – Funções de acesso ao atributo `jogador`

Atributo `atual`

```
86      int atual () const {
87          return _atual;
88      }
89
90      void updateatual () {
91          _atual ^= 1;
92      }
```

Código 2.7 – Funções de acesso ao atributo `atual`

2.3.4 Comparador da estrutura `State`

```
95      // Operator to use it in map
96      bool operator<(const struct State& s) const {
97          if (_tabuleiro != s._tabuleiro) return _tabuleiro < s._tabuleiro;
98          if (_peao != s._peao) return _peao < s._peao;
99          if (_escada != s._escada) return _escada < s._escada;
```

```
100         if (_jogadores != s._jogadores) return _jogadores < s._jogadores;
101         return _atual < s._atual;
102     }
```

Código 2.8 – Comparado da estrutura `State`

2.4 Implementação da Programação Dinâmica

Programação dinâmica é um método para a construção de algoritmos no qual há uma memorização de cada estado distinto para evitar recálculo, caso este estado apareça novamente. A memorização dos estados do jogo *Big Points* foi feita em uma *hash*, com a chave sendo o estado do jogo e o valor armazenado, a pontuação máxima dos dois jogadores a partir daquele nó.

a melhor jogada para ganhar maximizar seus pontos. Caso não Na vez de cada Caso a quantidade de jogos vencidos pelo primeiro jogador seja aproximadamente 50%

Para analizar o jogo, é preciso exaurir todas as jogadas possíveis a partir de um jogo inicial. Como

utilizando programação dinâmica[^dynamic_programing] onde os estados são armazenados em uma *hash*, tem-se que o número de estados distintos varia entre 17 e 25.

Devido ao imenso número de jogadas possíveis ao longo do do jogo, decidiu-se utilizar a programação dinâmica para - Duas funções para melhor entendimento da DP e regras do jogo

A função `dp` possui os casos base para retornar a função,

```
129 ii dp(map<struct State,ii>& dp_states, struct Game game, struct State state
    )
130 {
131     // If all pawns are in the stair
132     if (is_pawns_stair(game, state)) {
133         return calculate_score(game, state);
134     }
135 
136     auto it = dp_states.find(state);
137     if (it != dp_states.end()) {
138         return dp_states[state];
139     }
140 
141     vector<ii> results;
142     for (short pawn = 0; pawn < game.num_cores; pawn++) {
143         struct Turn right(state.atual(), pawn, true);
144         struct Turn left(state.atual(), pawn, false);
145 
146         // DP após jogadas
147         game_res result = play(dp_states, game, state, left);
```

```
148         if (result.first) {
149             results.push_back(result.second);
150         }
151 
152         result = play(dp_states, game, state, right);
153         if (result.first) {
154             results.push_back(result.second);
155         }
156     }
```

Código 2.9 – Programação Dinâmica

A função `play` foi implementada com o objetivo de separar a lógica do jogo da lógica da programação dinâmica.

```
13 game_res play(map<struct State,ii>& dp_states, struct Game game, struct
       State state, struct Turn turn)
14 {
15     short player = turn.current_player;
16     short pawn = turn.pawn_to_move;
17     bool pick_right = turn.pick_right;
18     short prev_pos = state.peao(pawn);
19 
20     // Cannot move pawn, it's already on the stair
21     if (state.escada(pawn) != 0) {
22         // cout << "Can't move. Pawn already on the stair" << endl;
23         return game_res(false, ii(-1,-1));
24     }
25 
26     // Remove discs from the board according to tabuleiro
27     for (size_t i = 0; i < game.board.size(); i++) {
28         if (state.tabuleiro(i) == 0) {
29             game.board[i] = '0';
30         }
31     }
32 
33     // Moving Pawn
34     bool available = false;
35     bool in_range = false;
36     do {
37         if (state.peao(pawn) <= game.num_discos) {
38             state.movepeao(pawn);
39         }
40         in_range = state.peao(pawn) <= game.num_discos;
41         if (in_range) {
42             available = game.board[game.color_index[pawn][state.peao(pawn)
       -1]] != '0';
43         }
44     } while (!available && in_range);
```

```
45
46      // Step in the stair
47      if (!in_range) {
48          if (state.escada(pawn) == 0) {
49              state.setescada(pawn, max_in_escada(game, state)+1);
50              state.updatejogador(player, pawn);
51              state.updateatual();
52          }
53      }
54
55      // Update board: Discs under pawns are unavailable
56      for (int color = 0; color < game.num_cores; color++) {
57          // If pawn is in board
58          if (state.peao(color) != 0 and state.peao(color) <= game.num_discos
    ) {
59              // Removing disc under pawns' current position
60              game.board[game.color_index[color][state.peao(color)-1]] = '0';
61          }
62      }
63
64      // If pawn is in board and was on the board before moving
65      if (state.peao(pawn)-1 > 0 and prev_pos > 0) {
66          // Replacing disc under pawn's previous position
67          game.board[game.color_index[pawn][prev_pos-1]] = '1' + pawn;
68      }
69
70      // Pick a disc if the pawn has moved within the range of the board
71      bool pick = false;
72      if (in_range) {
73          short pawn_pos = state.peao(pawn)-1;
74          short disc_pos = -1;
75
76          for (short i = 1;; i++) {
77              // Pick right
78              if (pick_right) {
79                  disc_pos = game.color_index[pawn][pawn_pos]+i;
80
81                  // Does not pick right (out of board)
82                  if (disc_pos >= (short) game.board.size()) {
83                      return game_res(false, ii(-1,-1));
84                  }
85              }
86              // Pick left
87              else {
88                  disc_pos = game.color_index[pawn][pawn_pos]-i;
89
90                  // Does not pick left (out of board)
```

```
91                  if (disc_pos < 0) {
92                      return game_res(false, ii(-1,-1));
93                  }
94              }
95
96              // Does not pick if disc is 0, try again
97              if (game.board[disc_pos] == '0') {
98                  continue;
99              }
100
101             // There is a disc to be picked
102             pick = true;
103             break;
104         }
105
106         // If There is a disc to be picked
107         if (pick) {
108             char pick_char = -1;
109
110             // Disc's char to pick
111             pick_char = game.board[disc_pos];
112
113             // Remove it from the board
114             state.settabuleiro(disc_pos, 0);
115
116             // Add it to the player's hand
117             state.updatejogador(player, pick_char-'1');
118
119             // Calculate next player
120             state.updateatual();
121         }
122     }
123
124     auto max_score = dp(dp_states, game, state);
125
126     return game_res(true, max_score);
127 }
```

Código 2.10 – Função Play

- Explicação da DP e da função Play (função para realizar as jogadas)

2.5 Implementação do Minimax

```
158     auto p1_order = [](const ii& a, const ii& b){
159         if (a.first > a.second) {
160             if (b.first > b.second) {
```

```
161                 return a.first > b.first ? true : false;
162             }
163             else {
164                 return true;
165             }
166         }
167         else if (a.first == a.second) {
168             if (b.first > b.second) {
169                 return false;
170             }
171             else if (b.first == b.second) {
172                 return a.first > b.first ? true : false;
173             }
174             else {
175                 return true;
176             }
177         }
178         else {
179             if (b.first >= b.second) {
180                 return false;
181             }
182             else {
183                 return a.second < b.second ? true : false;
184             }
185         }
186     };
187 
188     auto p2_order = [](const ii& a, const ii& b){
189         if (a.second > a.first) {
190             if (b.second > b.first) {
191                 return a.second > b.second ? true : false;
192             }
193             else {
194                 return true;
195             }
196         }
197         else if (a.second == a.first) {
198             if (b.second > b.first) {
199                 return false;
200             }
201             else if (b.second == b.first) {
202                 return a.second > b.second ? true : false;
203             }
204             else {
205                 return true;
206             }
207         }
```

```
208         else {
209             if (b.second >= b.first) {
210                 return false;
211             }
212             else {
213                 return a.first < b.first ? true : false;
214             }
215         }
216     };
217
218
219     if (state.atual() == 0) {
220         sort(results.begin(), results.end(), p1_order);
221     }
222     else {
223         sort(results.begin(), results.end(), p2_order);
224     }
225
226     dp_states[state] = results.size() == 0 ? ii(-1, -1) : results.front();
227
228     return dp_states[state];
```

Código 2.11 – Implementação do *Minimax*

2.6 Verificação dos estados

Foi escrito os estados e suas transições em *post-it*s para garantir que a *DP* foi feita corretamente. Os estados

3 Resultados

Ao final do cálculo deste jogo reduzido, temos que o número de estados distintos varia entre 17 e 25, dependendo do estado inicial do tabuleiro. Devido a este grande número de estados repetidos, escrever o algoritmo fazendo uso de programação dinâmica economizou bastante tempo e processamento.

O jogo seria um jogo balanceado se ambos os jogadores ganharem aproximadamente metade das vezes. Se existem seis jogos diferentes (combinação de duas cores com dois discos cada), o jogo é considerado balanceado se cada jogador ganhar três jogos. Neste caso, temos os jogos $j_i \in \{1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211\}$, e para cada j_i temos a pontuação máxima e a quantidade de estados distintos, como demonstrado na tabela +@tbl:1.

Tabela 5 – Pontuação utilizando *minimax*

Jogo	**Pontuação**	**#Estados**
1122	(2,1)	17
1212	(2,0)	25
1221	(2,1)	25
2112	(2,1)	25
2121	(2,1)	25
2211	(2,0)	17

Em todos as possíveis combinações de tabuleiros iniciais, o primeiro jogador sempre ganha com dois pontos enquanto o segundo jogador consegue fazer no máximo um ponto, na maioria das vezes. Isso torna o jogo desequilibrado.

4 Considerações Finais

4.1 Trabalhos futuros

Desenvolvimento de uma I.A. para competir contra um jogador humano. Análise mais complexa do jogo *Big Points*, utilizando processamento paralelo e distribuído.

Referências

ADELSON-VELSKY, G. M.; ARLAZAROV, V. L.; DONSKOY, M. V. *Algorithms for Games*. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1988. ISBN 0-387-96629-3. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.

ALMEIDA, A. N. de. Teoria dos jogos: As origens e os fundamentos da teoria dos jogos. UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

BERLEKAMP, E. R.; CONWAY, J. H.; GUY, R. K. *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 1*. 1. ed. London, UK: Academic Press, 1982. Disponível em: <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20&path=ASIN/1568811306>. Citado na página 24.

BOREL Émile. *The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels*. 1921. Citado na página 23.

BOREL Émile. *On Games that Involve Chance and the Skill of Players*. 1924. Citado na página 23.

BOREL Émile. *On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play*. 1927. Citado na página 23.

CARMICHAEL, F. *A Guide to Game Theory*. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 24.

CORMEN, T. et al. *Introduction To Algorithms*. MIT Press, 2001. ISBN 9780262032933. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=NLngYyWFl_YC>. Citado na página 29.

COURNOT, A.-A. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. L. Hachette (Paris), 1838. Disponível em: <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb30280488q>. Citado na página 23.

CUBBI; MAGGYERO; FRUDERICA. *RAII*. <http://en.cppreference.com/w/cpp/language/raii>. Accessed May 31, 2017. Citado na página 39.

GARCIA, D. D.; GINAT, D.; HENDERSON, P. Everything you always wanted to know about game theory: But were afraid to ask. *SIGCSE Bull.*, ACM, New York, NY, USA, v. 35, n. 1, p. 96–97, jan. 2003. ISSN 0097-8418. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/792548.611900>. Citado na página 24.

JONES, A. J. *Game Theory*: Mathematical models of conflict. [S.l.: s.n.], 1980. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

MIYAZAWA, F. K. Introdução à teoria dos jogos algorítmica. UNICAMP, São Paulo, SP, Brasil, 2010. Disponível em: <http://www.ic.unicamp.br/~fkm/lectures/algorithmicgametheory.pdf>. Citado na página 23.

NEUMANN, J. von. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. [S.l.]: Mathematische Annalen, 1928. 295–320 p. Citado na página 23.

NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. [S.l.]: Princeton University Press, 1944. Citado na página 23.

PRAGUE, M. H. *Several Milestones in the History of Game Theory*. VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik, Wien, 2004. 49–56 p. Disponível em: <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/game_theory/games_materials.html>. Citado na página 23.

ROSENTHAL, R. W. Some topics in two-person games (t. parthasarathy and t. e. s. raghavan). *SIAM Review*, v. 14, n. 2, p. 356–357, 1972. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1014044>. Citado na página 26.

SARTINI, B. A. et al. *Uma Introdução a Teoria dos Jogos*. 2004. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

SCHELLING, T. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=7RkL4Z8Yg5AC>. Citado na página 24.

SCHWABER, K.; SUTHERLAND, J. *The Scrum Guide*. [S.l.]: Scrum.Org, 2016. Citado na página 35.

ZERMELO, E. F. F. *Über eine Anwendung der Mengdenlehre auf die theories des Schachspiels*. 1913. 501–504 p. Citado na página 23.

Anexos

ANEXO A – Regras Originais do Jogo *Big Points*

BigPoints

De Brigitte e Wolfgang Ditt
para 2 a 5 jogadores a partir dos 8 anos

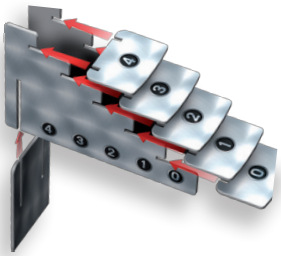
PORTUGUES

O material

- 60 discos em madeira (10 discos de cada umas das seguintes cores : azul, vermelho, amarelo, verde e violeta e ainda 5 brancos e 5 pretos)
- 5 peões : azul, vermelho, amarelo, verde e violeta
- 1 escada de chegada

Conceito do jogo

Os jogadores movem um peão qualquer para o próximo disco da mesma cor do peão. Depois, recolhem o disco situado à frente ou atrás desse peão. O valor dos discos recolhidos depende da ordem dos peões na escada de chegada no fim do jogo.



Antes do primeiro jogo, destacar cuidadosamente as peças do cartão e montar a escada de chegada como mostra a ilustração.

Os preparativos

Formar uma pilha com um disco de cada uma das cores seguintes : azul, vermelho, amarelo, verde e violeta e colocar essa pilha ao lado da escada. (Esses discos destinam-se aos jogadores que coloquem o seus peão na escada de chegada.) Misturar os discos restantes (e claro, os blancos e os pretos) e colocá-los como desejar de maneira a formar um percurso desde a base da escada. A ordem das cores não importa. Posicionar os peões no início do percurso (ver a ilustração à direita).

O desenvolvimento do jogo

Escolher um jogador inicial. Depois, joga-se à vez seguindo o sentido dos ponteiros do relógio. Na sua vez, o jogador escolhe um peão **qualquer**. Coloca-o sobre o disco seguinte cuja **cor** corresponda ao peão escolhido, em direcção à meta. Não é permitido mover um peão para trás.

Depois, o jogodor retira o dico do percurso. Ele pode escolher **entre o disco livre à frente** do peão que acabou de mover, ou **entre o disco primeiro livre atrás** do peão que acabou de mover. Os discos já ocupados não podem ser retirados do percurso. Cada jogador guarda os seus discos (escondidos) na palma da mão até ao final do jogo.

Exemplo:
O jogador move o peão azul para o disco azul seguinte. Em seguida, ele pode ficar com o disco verde que se encontra à frente do peão azul (ilustração de cima), ou com o disco preto que se encontra atrás do peão azul (ilustração de baixo).

- Nota: se, no início, não houver discos livres atrás do peão, o jogador **tem** de ficar com o disco livre seguinte **na direcção do movimento.** Esta regra também se aplica movermos um peão para

um disco à frente da escada de chegada e não haja mais discos livres à frente desse peão; nesse caso, o jogador fica com o último disco livre que se encontre **atrás** do peão.

- Se não houver mais disco nenhum da cor correspondente ao peão, entre este e a escada de chegada, move-se o peão para a escada. O jogador coloca-o no degrau livre mais alto, de seguida pode retirar o disco da cor correspondente da pilha que se encontra ao lado da escada.

Os discos pretos

Se um jogador tirar um disco preto, pode utilizá-lo mais tarde para um turno suplementar:

- No momento em que o jogador decida utilizar um disco preto, ele pode - depois da sua vez - mover outro peão. Ele pode escolher o peão que acabou de mover ou outro peão. Depois, ele retira um disco - segundo as regras descritas anteriormente. Segue-se a vez do jogador seguinte.
- Durante o seu turno suplementar (e exclusivamente nesse), o jogador também pode mover um peão **para trás** colocando-o num disco da cor correspondente.

Não se pode usar mais que um disco preto no mesmo turno. Além disso, um disco preto **não pode usar-se no mesmo turno** em que foi conquistado. Ou seja, o jogador só pode usá-lo no turno seguinte à sua conquista.

Os discos pretos retiram-se do jogo depois de terem sido usados pelos jogadores e não voltam a ser utilizados.

Fim do jogo e pontuação

O jogo acaba quando o último peão é colocado na escada de chegada.

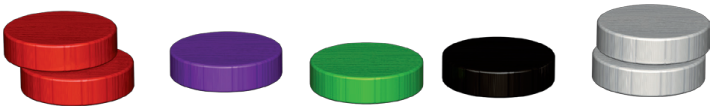
Em seguida, calculam-se os pontos:

- Cada disco vale tantos pontos quantos os indicados no degrau da escada do peão da cor correspondente.
- Os discos pretos não valem nada.
- Cada disco branco vale tantos pontos quanto o número de discos de cores diferentes que o jogador possua.

Exemplo :

No fim do jogo, a escada terá um aspecto como o da ilustração do lado.

O jogador tem os seguintes discos:



A sua pontuação será:

2 x vermelhos (4 pontos cada um) = 8 points

1 x violeta (2 pontos cada um) = 2 pontos

1 x verde (0 pontos cada um) = 0 pontos

1 x preto (0 pontos cada um) = 0 pontos

2 x brancos (além do branco, o jogador possui 4 cores diferentes por isso recebe 4 pontos por cada um) = 8 pontos

No total: 18 pontos

O jogador que obtiver mais pontos ganh o jogo. Em caso de empate, há vários vencedores!

Várias partidas

Como os jogos não são muito longos, podem fazer-se várias partidas. Jogar tantas partidas como o número de jogadores. Em cada uma dessas partidas, começa um novo jogador. Adicionar os resultados das diferentes partidas. O jogador com mais pontos ganha. Em caso de empate, há vários vencedores!