Zur Theorie der Gesellschaftsspiele[1]).

Von

J. v. Neumann in Berlin.

Einleitung.

1. Die Frage, deren Beantwortung die vorliegende Arbeit anstrebt, ist die folgende:

n Spieler, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, spielen ein gegebenes Gesellschaftsspiel $\mathfrak{G}$. Wie muß einer dieser Spieler, S_m, spielen, um dabei ein möglichst günstiges Resultat zu erzielen?

Die Fragestellung ist allgemein bekannt, und es gibt wohl kaum eine Frage des täglichen Lebens, in die dieses Problem nicht hineinspielte; trotzdem ist der Sinn dieser Frage kein eindeutig klarer. Denn sobald $n > 1$ ist (d. h. ein eigentliches Spiel vorliegt), hängt das Schicksal eines jeden Spielers außer von seinen eigenen Handlungen auch noch von denen seiner Mitspieler ab; und deren Benehmen ist von genau denselben egoistischen Motiven beherrscht, die wir beim ersten Spieler bestimmen möchten. Man fühlt, daß ein gewisser Zirkel im Wesen der Sache liegt.

Wir müssen also versuchen, zu einer klaren Fragestellung zu kommen. Was ist zunächst ein Gesellschaftsspiel? Es fallen unter diesen Begriff sehr viele, recht verschiedenartige Dinge: von der Roulette bis zum Schach, vom Bakkarat bis zum Bridge liegen ganz verschiedene Varianten des Sammelbegriffes „Gesellschaftsspiel" vor. Und letzten Endes kann auch irgendein Ereignis, mit gegebenen äußeren Bedingungen und gegebenen Handelnden (den absolut freien Willen der letzteren vorausgesetzt), als Gesellschaftsspiel angesehen werden, wenn man seine Rückwirkungen auf die in ihm handelnden Personen betrachtet[2]). Was ist nun das gemeinsame Merkmal aller dieser Dinge?

---

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit ist (mit einigen Kürzungen) am 7. XII. 1926 der Göttinger Math. Ges. vorgetragen worden.

[2]) Es ist das Hauptproblem der klassischen Nationalökonomie: was wird, unter gegebenen äußeren Umständen, der absolut egoistische „homo œconomicus" tun?

Man darf wohl annehmen, daß es dieses ist:

Ein Gesellschaftsspiel besteht aus einer bestimmten Reihe von Ereignissen, deren jedes auf endlich viele verschiedene Arten ausfallen kann. Bei gewissen unter diesen Ereignissen hängt der Ausfall vom Zufall ab, d. h.: es ist bekannt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die einzelnen möglichen Resultate eintreten werden, aber niemand vermag sie zu beeinflussen. Die übrigen Ereignisse aber hängen vom Willen der einzelnen Spieler $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *ab. D. h.: es ist bei jedem dieser Ereignisse bekannt, welcher Spieler* S_m *seinen Ausfall bestimmt, und von den Resultaten welcher anderer („früherer") Ereignisse er im Moment seiner Entscheidung bereits Kenntnis hat. Nachdem der Ausfall aller Ereignisse bereits bekannt ist, kann nach einer festen Regel berechnet werden, welche Zahlungen die Spieler* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *aneinander zu leisten haben.*

Es ist leicht, diese mehr qualitative Erklärung in die Form einer exakten Definition zu bringen. Diese Definition des Gesellschaftsspieles würde so lauten:

Um ein Gesellschaftsspiel $\mathfrak{G}$ *vollständig zu beschreiben, sind die folgenden Angaben notwendig, die zusammen die „Spielregel" ergeben:*

α) Es muß angegeben werden, wie viele vom Zufall abhängige Ereignisse oder „Ziehungen" und wieviel vom Willen der einzelnen Spieler abhängige Ereignisse oder „Schritte" erfolgen. Diese Anzahlen seien z *bzw.* s, *die „Ziehungen" bezeichnen wir mit* $E_1, E_2, \ldots, E_z$, *die „Schritte" mit* $F_1, F_2, \ldots, F_s$.

β) Es muß angegeben werden, auf wie viele Arten jede „Ziehung" E_μ *und jeder „Schritt"* F_ν *ausfallen kann. Diese Anzahlen seien* M_μ *bzw.* N_ν $(\mu = 1, 2, \ldots, z,\ \nu = 1, 2, \ldots, s)$. *Wir bezeichnen die betreffenden Resultate kurz mit ihren Nummern* $1, 2, \ldots, M_\mu$ *bzw.* $1, 2, \ldots, N_\nu$.

γ) Bei jeder „Ziehung" E_μ *müssen die Wahrscheinlichkeiten* $\alpha_\mu^{(1)}, \alpha_\mu^{(2)}, \ldots, \alpha_\mu^{(M_\mu)}$ *der einzelnen Resultate* $1, 2, \ldots, M_\mu$ *gegeben sein. Natürlich ist*

$$\alpha_\mu^{(1)} \geqq 0,\ \alpha_\mu^{(2)} \geqq 0, \ldots, \alpha_\mu^{(M_\mu)} \geqq 0,$$
$$\alpha_\mu^{(1)} + \alpha_\mu^{(2)} + \ldots + \alpha_\mu^{(M_\mu)} = 1.$$

δ) Bei jedem „Schritt" F_ν *muß erstens derjenige Spieler* S_m *angegeben sein, der den Ausfall dieses „Schrittes" bestimmt („dessen Schritt"* F_ν *ist):* $S_{(F_\nu)}$. *Ferner müssen die Nummern aller „Ziehungen" und „Schritte" angegeben sein, über deren Ausfall er im Momente seiner Entscheidung über* F_ν *Kenntnis hat. (Diese „Ziehungen" und „Schritte" nennen wir „früher" als* F_ν.)