Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA
NA KIERUNKU MATEMATYKA

MODELE RYNKOWE INFLACJI

Autor:
Mateusz Golatowski

Promotor:
dr inż. Mariusz Niewęgłowski

Warszawa, grudzień 2017

....

podpis promotora podpis autora

Spis treści

Wstęp

Rozdział 1

Inflacja

1.1. Rynek inflacji

Klasyczna definicja inflacji określa ją, jako proces wzrostu przeciętnego poziomu cen usług i towarów w gospodarce. Jego skutkiem jest spadek siły nabywczej pieniądza zaś na poziom inflacji wpływa polityka pieniężna banku centralnego, który jest nadrzędnym organem odpowiadającym za pomiar i ocenę ogólnego poziomu cen. Procesem przeciwnym jest deflacja, czyli ogólny spadek cen.

Samo zjawisko inflacji jest jednym z elementów, który nie można pominąć przy modelowaniu rynków finansowych. W obecnych czasach rozwoju gospodarczego i technologicznego obserwujemy szybsze tempo przepływów pieniężnych a więc wzrost szybkości cyrkulacji pieniądza. Dodatkowo następuje zwyżka podaży pieniądza emitowanego, która odbywa się poprzez zwiększenie ilości pieniądza papierowego w obiegu. Prowadzi to do nagłego spadku jego wartości i wzrostu cen. Skutkuje to zwiększaniem się zadłużenia i jedynie częściowym wpływem środków do gospodarki. Oznacza to, że w miarę upływu czasu koszty usług i towarów wzrastają, zaś siła nabywcza pensji i oszczędności spada.

Wzrost ilości pieniądza w obiegu może spowodować nagły spadek jego wartości i gwałtowny wzrost cen towarów. Jest to jeden z przykładów powstawania inflacji. Ekonomiści podejmują próby znalezienia innych przyczyn. Prowadzi to powstawania wielu teorii dotyczących tego zagadnienia. Oprócz przykładu podanego wcześniej, istotną rolę odgrywa popyt i podaż. Jeśli popyt wzrasta szybciej niż podaż, powoduje to znaczny wzrost cen towarów i usług, a zatem inflację. Inną przyczyną powstawania inflacji jest wzrost wynagrodzeń pracowników, który łączy się z podniesieniem cen produktów. W krajach rozwijających się umiarkowana inflacja może świadczyć o dobrej koniunkturze, jednak z drugiej strony może działać niekorzystnie w szczególności, jeśli nie jest brana pod uwagę w zarządzaniu ryzykiem portfeli inwestycyjnych.

Uwzględnienie spadku siły nabywczej pieniądza jest niezwykle ważne w przypadku systemów emerytalnych, gdzie zabezpieczenie w postaci indeksacji do wskaźnika inflacji gwarantuje, że realna wartość przyszłych wypłacanych świadczeń nie będzie istotnie spadać w czasie. Instrumenty powiązane z inflacją (ang. Inflation Linked Products, ILP) takie jak obligacje indeksowane do inflacji (ang. Inflation Linked Bonds, ILB) oraz instrumenty pochodne powiązane z inflacją oferują rozwiązania, dzięki którym możemy bezpośrednio zabezpieczyć się przez ryzykiem związanym ze wzrostem inflacji. Wykorzystanie tych instrumentów gwarantuje utrzymanie stabilnego poziomu siły nabywczej pieniądza w czasie.

Sam rynek instrumentów pochodnych inflacji wzrósł z prawie nieistniejącego poziomu i dość egzotycznej gałęzi gospodarki do elementu o dużym potencjale wzrostu. Tempo tego wzrostu było bardzo szybkie. W 2012 wielkość transakcji na samym rynku obligacji inflacyjnych wzrosła do 2 000 mld dolarów (ponad dziesięciokrotnie więcej w porównaniu z rokiem 2002, źródło Lazard Research). Rozrost tej gałęzi rynku w ciągu ostatnich kilku lat wynika częściowo z korzystnej sytuacji makroekonomicznej. Niskie zyski z tradycyjnych produktów o stałym dochodzie i niechęć ze strony inwestorów do podejmowania ryzyka w formie innych aktywów doprowadziły do gwałtownego wzrostu popytu na produkty strukturyzowane. Rynek produktów powiązanych z inflacją szybko rośnie i stanowi ok 2% części rynku nominalnych kontraktów wymiany stóp procentowych.

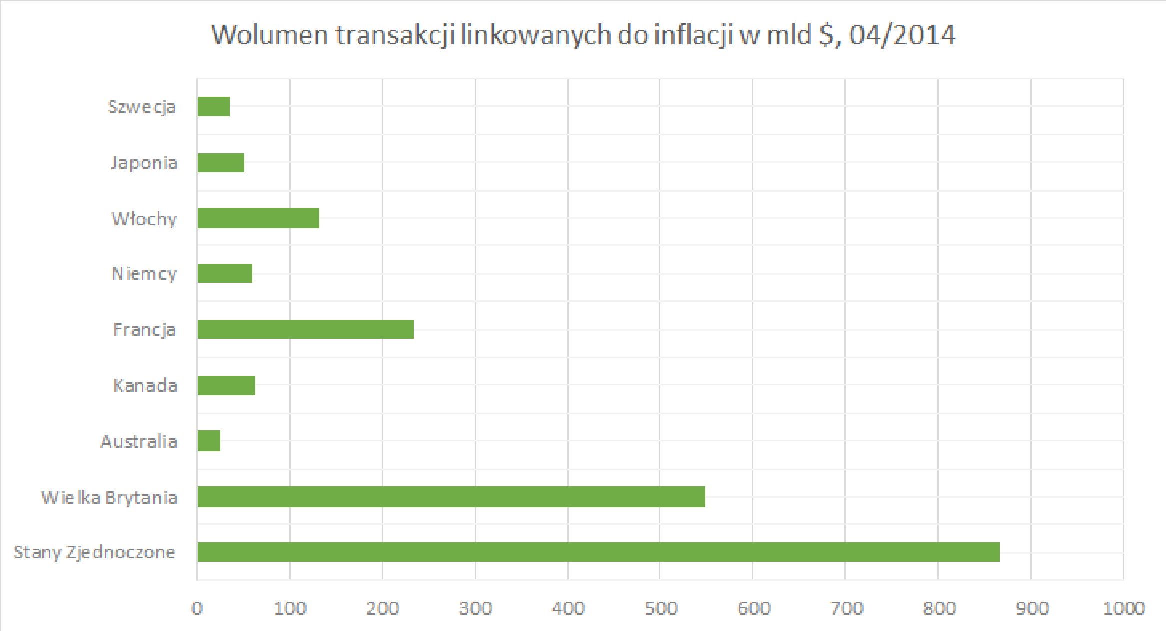
Inflacja mierzona jest za pomocą wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych w gospodarce. Pod względem indeksów inflacji, rynek instrumentów pochodnych w dużej mierze skupia się na tych samych wskaźnikach, jak na rynku rządowych obligacji indeksowanych do inflacji. Głównym wskaźnikiem inflacji na rynku europejskim jest indeks HICPxT z Eurostatu, na rynku francuskim indeks FRCPI z INSEE, na rynku brytyjskim wykorzystywany jest indeks RPI, a na rynku amerykańskim indeks CPI.

1.2. Rys historyczny

Praktyka powiązania płatności odsetek od obligacji z indeksacją jest stosunkowo stara. Już w 1742 roku w stanie Massachusetts w USA wprowadzono rachunki związane z ceną srebra na London Exchange. W czasie rewolucji amerykańskiej, żołnierzom zostały wydawane szczególne papiery wartościowe - noty dewaluacyjne. Dzięki nim mogli oni zachować realną wartość wynagrodzenia. Indeksacja kontraktów do pojedynczego towaru stała się istotna dopiero później, w momencie gdy gwałtownie wzrosła cena srebra. W związku z tym w 1780 roku zostały wyemitowane obligacje, które pozwalały na zachowanie realnej wartości wynagrodzenia dla żołnierzy. Pod uwagę wzięto wtedy najbardziej popularny koszyk dóbr spożywczych: pięć buszli kukurydzy, sześćdziesiąt osiem i cztery siódme funtów wołowiny, dziesięć funtów owczej wełny i szesnaście funtów jeleniej skóry. Produkty finansowe zabezpieczające przed wzrostem inflacji były jednak zbyt trudne dla zrozumienia dla ludzi bez wykształcenia ekonomicznego lub matematycznego, dlatego nie cieszyły się dużą popularnością.

W czasach obecnych obligacje indeksowane do inflacji po raz pierwszy zostały wydane na międzynarodowych rynkach kapitałowych przez Izrael w 1955r. Ich rozwój rozszerzył się na całym świecie i produkty te zostały zintegrowane w wielu portfelach. Celem ILB (ang. Inflation Linked Bonds) jest zapewnienie zabezpieczenia siły nabywczej przez bezpośrednie powiązanie papieru wartościowego z indeksem inflacji przez cały okres życia obligacji. Kontrakty te zawierają dwie formy płatności: realną stopę procentową ustanowiona na początku okresu i rekompensatę za utratę siły nabywczej. W kontraktach ILB realny dochód w okresie ich trwania jest pewny, natomiast dochód nominalny jest zdeterminowany ex post. Tak więc klasa aktywów ILB i ich pochodnych daję szeroką gamę okazji dla inwestorów do ochrony przed inflacją.

W XX wieku wiele państw doświadczyło wysokiej inflacji. Było to głównym powodem wyemitowania pierwszych obligacji indeksowanych inflacją jako zabezpieczenia dla długoterminowych kontraktów. Rząd UK w 1981 rozpoczął program wydawania ILB a zaraz po nim Australia w 1985, Kanada w 1991, Szwecja w 1994, USA w 1997, Francja w 1998, Włochy w 2003, Japonia w 2004 oraz Niemcy w 2006r. W większości to właśnie rządy państw emitowały papiery wartościowe indeksowane inflacją. Z czasem podobne kontrakty zaczęły wprowadzać do obiegu także większe korporacje.



Rysunek 1.1: Wolumen transakcji zawieranych na największych rynkach produktów inflacyjnych na świecie.

1.3. Uczestnicy rynku

Produkty indeksowane inflacją mogą przyciągnąć różne grupy inwestorów, takich jak: banki, fundusze emerytalne, fundusze inwestycyjne, firmy ubezpieczeniowe czy fundusze hedgingowe. Dla przykładu bank zajmie pozycję otrzymującą dany poziom inflacji w celu zabezpieczenia produktów hipotecznych powiązanych z inflacją. Z kolei firmy ubezpieczeniowe i fundusze emerytalne inwestują pieniądze w akcje, obligacje i nieruchomości. Z nich pokrywają później przyszłe zobowiązania, które obejmują głównie emerytury i świadczenia. Aktywa ILB (ang. Inflation Linked Bonds) stanowią idealne dopełnienie, które pozwala zabezpieczyć ich długoterminowe pozycje inwestycyjne.

W ostatnich latach rynek produktów indeksowanych urósł niezwykle szybko również na wschodzących rynkach kapitałowych (Brazylia, Meksyk, Turcja, Południowa Afryka). Ponadto odbyło się kilka emisji przez prywatnych emitentów, głównie banków i funduszy emerytalnych.

1.4. Zarządzanie ryzykiem

Inflacja jest także istotnym czynnikiem, który powinien zostać uwzględniony w obszarze zarządzania ryzykiem. Niemal każda decyzja finansowa podejmowana przez organizację i prywatnych inwestorów wiąże się z podejmowaniem szeregu różnych ryzyk. Zarządzanie ryzykiem ma na celu stosowanie zasad i metod, które pozwalają kontrolować i optymalizować ryzyko finansowe w szczególności jeśli dotyczy ono inwestycji długoterminowych. Ryzyko operacji na rynkach finansowych może przyjmować wiele form i mieć odmienne źródła pochodzenia. W ramach obszaru ryzyka rynkowego związanego ze zmiennością na rynkach finansowych można wyróżnić ryzyko inflacji, które występuję w momencie, gdy zmienia się siła nabywcza dochodu z inwestycji. Identyfikacja i ocena wpływu efektu tego ryzyka jest w szczególności istotna w przypadku pozycji inwestycyjnych o wieloletnim terminie zapadalności i w ramach zarządzania powinna zostać w odpowiedni sposób zabezpieczona. Ochronę przed negatywnymi skutkami inflacji zapewniają odpowiednio dobrane instrumenty pochodne, które w szczegółowy sposób zostaną opisane w poniższej pracy.

Rozdział 2

Modelowanie inflacji

W rozdziale drugim zostały przedstawione właściwe podejście do modelowania procesu inflacji. Wprowadzono w tym celu podział na ujęcie nominalne i rzeczywiste. W dalszej części przedstawiono wskaźnik cen konsumpcyjnych a także omówiono metody tworzenia krzywej projekcyjnej indeksu zmiany cen.

2.1. Indeksacja

Porównując kwoty pieniądza pochodzące z różnych okresów wykorzystujemy wskaźniki cen, aby usunąć skutki inflacji. Korygując wartości o wybrany indeks inflacji stosujemy indeksację (ang. indexed).
Definicja 2.1. *Indeksacją nazywamy zmianę wartości jednostki pieniądza dokonywaną automatycznie na mocy umowy prawnej mającą na celu uwzględnienie skutków inflacji.*

W dalszej części pracy o indeksacji będziemy mówić w kontekście instrumentów finansowych indeksowanych do inflacji, w których nominał, od którego naliczane jest oprocentowanie, jest indeksowany do wskaźnika inflacji.

2.2. Stopa nominalna, rzeczywista i inflacja

Uwzględniając przepływy finansowe następujące w różnych okresach czasu możemy podejść do ich analizy w sposób nominalny lub rzeczywisty. Pierwszy z nich jest podejściem standardowym i zakłada odniesienie się do cen lub stóp zwrotu w kategorii ich nominalnych wartości. Zakładamy, że jednostka pieniądza jest niezmienna w czasie i nie rozpada się ze względu na spadek jej siły nabywczej. Nominalne stopy przedstawiają stawki w kategorii wartości pieniądza ale nie w znaczeniu siły nabywczej. Jeżeli uwzględnimy proces inflacji otrzymamy rzeczywistą wartość pieniądza i realne stopy a także będziemy mogli rozważać jaką realną wartość mają nasze oszczędności lub kapitał inwestycyjny. Odróżnienie nominalnego i realnego podejścia jest szczególnie istotne w przypadku inwestycji długoterminowych. Inwestorzy myśląc o wartości kapitału i późniejszych potencjalnych zyskach, bardzo często ignorują wpływ inflacji i zmianę siły nabywczej pieniądza w czasie. Przykład obrazujący dany problem został przedstawiony poniżej.

Załóżmy, że jesteśmy zainteresowani kupnem amerykańskiej obligacji jednorocznej o oprocentowaniu 8%. Opisując inwestycję w prosty sposób: dziś płacimy 100$ za rok mamy zagwarantowaną wypłatę równą 108$, podchodzimy do problemu nominalnie - patrzymy na wartości pieniądza, działamy stopą nominalną, nie bierzemy pod uwagę innych czynników.

Dodatkowo zakładamy, że stopa inflacji przez najbliższy rok będzie wynosiła 4%. Oznacza to, że wybrany koszyk dóbr, dziś nominalnie wart 100$ za rok będzie kosztował 104$. Jeśli wypłatę z obligacji będziemy chcieli przeznaczyć i wydać na wybrany koszyk dziś zapłacilibyśmy za niego 100$ a za rok już 104$. W momencie zapadalności obligacji dostajemy nominalnie 108$ jednak za tą samą cenę w porównaniu z poprzednim rokiem możemy kupić już mniej. Realna wartość naszej inwestycji uwzględniająca zmianę wartości pieniądza w czasie będzie zatem równa 108$ - 104$ = 4$.

Definicja 2.2. *Nominalną stopą procentową (ang. nominal interest rate) nazywamy stopę, zgodnie z którą bank nalicza odsetki.*

Stopa nominalna zazwyczaj obrazuje informacje z rynku i nie jest skorygowana o skutki zmiany wartości pieniądza w czasie. Stopa realna obrazuje jak zmienia się siła nabywcza pieniądza.

Definicja 2.3. *Realną stopą procentową (ang. real interest rate) nazywamy stopę procentową skorygowaną o skutki inflacji.*

Związek pomiędzy zmianą poziomu cen i stóp procentowych opisuje uproszczone równanie Fishera [8], zgodnie z którym:

$$r = n - i \tag{2.1}$$

gdzie r oraz n oznaczają odpowiednio realną i nominalną stopę zwrotu zaś i inflację. Realna stopa procentowa stanowi różnicę nominalnej stopy procentowej i stopy inflacji. Jeśli inflacja jest dodatnia, to realna stopa jest mniejsza od nominalnej. Jeżeli mamy do czynienia z procesem odwrotnym do inflacji, czyli spadkiem cen - deflacją - stopa nominalna będzie większa niż rzeczywista.

2.3. Wskaźnik cen konsumpcyjnych

Wskaźnik cen konsumpcyjnych (ang. Consumer Price Index, CPI) lub indeks cen konsumenta jest najczęściej używaną miarą wykorzystywaną do pomiaru poziomu cen dóbr i usług kupowanych przez typowego nabywcę. Zazwyczaj raz w miesiącu biuro statystyczne odpowiednie, dla każdego kraju publikuje informacje o wartości wskaznika cen. Jego wartość jest podstawą do wyznaczenia stopy inflacji.

Definicja 2.4. *Stopą inflacji nazywamy wyrażoną w procentach zmianę wskaznika cen dla danego okresu w porównaniu z rokiem poprzednim.*

Celem inwestorów jest możliwie jak najlepsze zabezpieczenie zobowiązań. Dla inwestorów zasadniczym problemem jest wybór odpowiednio skonstruowanego wskaźnika wzrostu cen, względem którego odbywa się indeksacja w wybranych instrumentach finansowych. Następnie proces inflacji mierzony jest jako procentowy wzrost wskaźnika inflacji. Przykładowe najpopularniejsze indeksy inflacyjne wraz z krajami występowania prezentuje tabela poniżej:

Indeks	**Waluta**
US CPI Urban NSA	USD
UK RPI	GBP
HICP (Harmonised Index of Consumer Prices)	EUR
France HICP ex-tobacco	EUR
German Euroland HICP ex-tabacco	EUR
CPI	PLN

2.4. Indeks referencyjny

W standardowej miesięcznej konwencji instrumenty finansowe indeksowane do inflacji używają wartości indeksu cen - indeksu referencyjnego (ang. Reference Index). Praktycznie jest on powiązany z indeksem wzrostu cen za dany miesiąc odnoszący się do pierwszego dnia miesiąca, a wartości wskaźnika są ustalone z odpowiednim opóźnieniem (zazwyczaj opóźnienie jest równe trzem miesiącom).

Definicja 2.5. *Indeksem referencyjnym (ang, Reference index) nazywamy wybrany indeks wzrostu cen (inflacji) odpowiadający danemu miesiącowi:*

$$Reference\_Index = Price\_Index(m),$$

gdzie m oznacza dany miesiąc.

Uwaga 2.1. *Może się też zdarzyć, że instrument wykorzystuje indeks referencyjny powiązany z inną datą niż data płatności. Dla przykładu w standardowej miesięcznej konwencji instrument finansowy, dla którego następuje przepływ w 4 dniu listopada (ang. payment date) z ustalonym opóźnieniem indeksu równym trzem miesiącom wykorzysta wartość indeksu z sierpnia.*

2.5. Interpolacja indeksu

W innych przypadkach wartość współczynnika inflacji jest interpolowana liniowo pomiędzy dwoma miesiącami i wykonywana dla wartości w miesiącu płatności. Końcowa wartość współczynnika wzrostu cen wyznaczana jest następująco:

$$Reference\_Index = Price\_Index(m_1) + \left(\frac{d-1}{D}\right)\Big(Price\_Index(m_2) - Price\_Index(m_1)\Big),$$

gdzie d oznacza dzień miesiąca daty terminu płatności, zaś D liczbę dni kalendarzowych w miesiącu płatności. Referencyjny indeks dla daty startu transakcji jest obliczany w ten sam sposób przy zastosowaniu daty rozpoczęcia transakcji.

2.6. Notacja indeksu

Określamy, że wartość referencyjnego indeksu cen będziemy oznaczać symbolem $I(t)$ dla $t \leq T^*$, gdzie T^* to ustalony horyzont czasowy. Oznacza to, że jeżeli jesteśmy w chwili czasu t równej dacie 2016/11/20 i zachowując standardową konwencję opóźnienia trzymiesięcznego oraz wartości indeksu z początku miesiąca (nieinterpolowaną) wartość referencyjnego indeksu będzie równa:

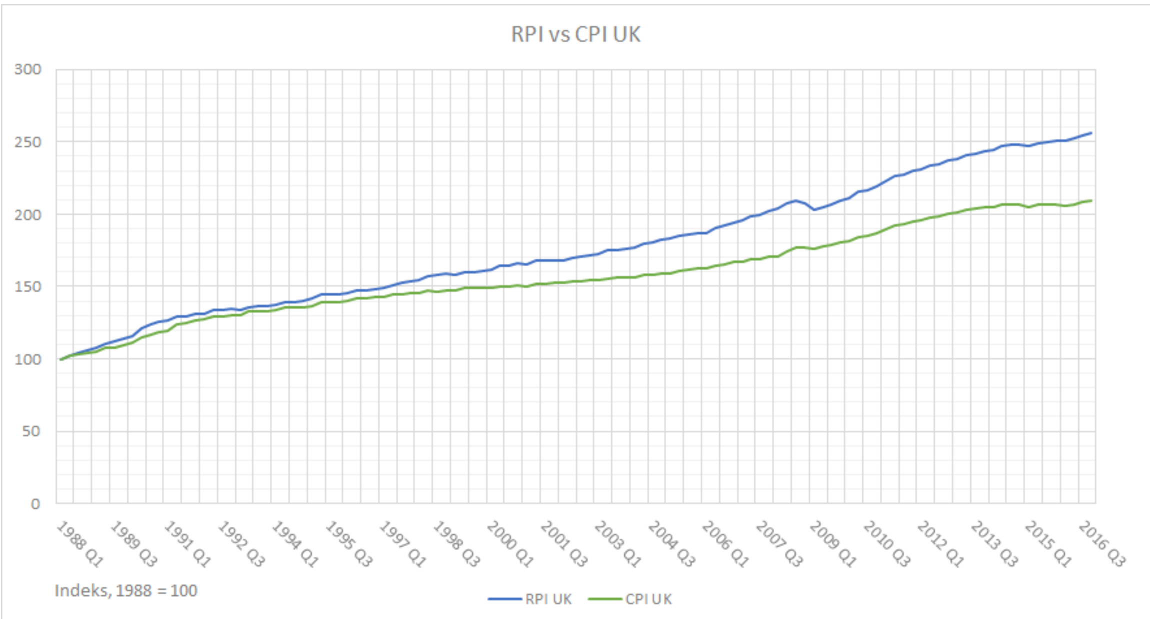
$$I(t) = Price\_Index(Sierpien2016).$$

W poniżeszj tabeli przedstawiono standardowe konwencje kwotowań swapów zerokuponowych:

Obszar	**Indeks**	**Opóźnienie**	**Konwencja**
Strefa Euro	HICPexT	3M	Miesięczna
USA	CPI	3M	Interpolacja
Wielka Brytania	UK RPI	2M/8M	Miesięczna
Kanada	CPI	3M	Miesięczna
Australia	HICPxT	6M	Miesięczna
Francja OATi	French CPIxT	3M	Miesięczna
Francja OATei	HICPxT	3M	Miesięczna
Niemcy	HICPxT	3M	Miesięczna

2.7. Detale techniczne

W celu zrozumienia obrotu i wyceny ILP istotne jest zwrócenie uwagi na dwa punkty: obliczanie wskaźnika indeksu oraz ochrona przed deflacją. Wskaźnik indeksu jest obliczany codziennie przez emitenta i udostępniany do obrotu (agencje: Bloomberg, Reuters). Ważną kwestią przy obliczaniu inseksów jest wybranie wskaźnika inflacji. W przypadku USA jest to wskaźnik cen konsumpcyjnych CPI, w Wielkiej Brytanii wskaźnik cen detalicznych RPI, Francja ma obligacje powiązane z CPI ex-tabacco jak i inne z HICP ex-tabacco.



Rysunek 2.1: Wykres historycznych kwotowań indeksu RPI oraz CPI w Wielkiej Brytanii.

Uwaga 2.2. *Instrumenty finansowe ILP zawsze są połączone z ustalonym wskaźnikiem, a ten może oznaczać różne poziomy ochrony siły nabywczej.*

Właściwą ochronę przed inflacją inwestor może uzyskać dopiero, jeżeli weźmie pod uwagę metodologię uzyskiwania składu koszyka i obliczania wartości dla danego wskaźnika zmiany cen. W czasach gdy nieufności i ingerencji rządów w instytucje finansowe należy rozważyć czy wybrana zabezpieczenie przed wzrostem inflacji oferuję realną ochronę i czy bazowy indeks cen nie podlega manipulacji poprzez np. holistyczne podejście do wskaźników cen. Dla przykładu w Stanach Zjednoczonych poprawa jakości produktów jest zawarta w obliczaniu indeksu co może spowodować "sztuczne" zaniżenie inflacji. W Wielkiej Brytanie z kolei trwa dyskusja dotycząca wyboru między wskaźnikami RPI a CPI, która wynika zasadniczych różnic we wzorach w długim okresie z powodu dodatkowych kosztów wynajmu i odsetek.

Uwaga 2.3. *Wskaźniki inflacji nie są obliczane każdego dnia lecz za okres jednego miesiąca i z opóźnieniem czasowym. W zależności od wybranego indeksu, "bieżąca" wartość zostaję podana od jednego do trzech miesięcy później. Dlatego codzienne obliczenie wskaźnika inflacji zależy od szczegółowych przepisów w odniesieniu do których poziom indeksu odniesienia ma być traktowany jako "bieżący" (indeksacja opóźnienia).*

Oddzielnym czynnikiem, który należy wziąć pod uwagę jest fakt, że obligacje różnią się procedurą podejścia do zjawiska przeciwstawnego - deflacji. Przykładem może być Japonia, w której spadek cen w dłuższych okresach czasu może spowodować, że wskaźnik spadnie poniżej jednostki. W takiej sytuacji kupon nominalny jest mniejszy niż kupon rzeczywisty lub wartość nominalna obligacji spadnie poniżej 100. W wielu krajach (USA, Francja, Włochy, Szwecja) istnieje zabezpieczenie przed takim zjawiskiem poprzez nałożenie ograniczenia dolnego, gdzie wartość nominalna obligacji nie może spaść poniżej 100. Wprowadzenie takiego zabezpieczenia stanowi wbudowaną opcję,która powinna zostać uwzględniona przy wycenie instrumentu. Ponadto w przypadku obligacji korporacyjnych należy pamiętać o włączeniu do wyceny premii związanej z ryzykiem kredytowym kontrahenta (ryzykiem niedotrzymania warunków umowy) i płynności (ryzyko braku płynności instrumentu występuje jeśli warunki rynkowe uniemożliwiają dokonanie transakcji kupna/sprzedaży danego instrumentu). Standardem w przypadku obligacji komercyjnych jest także wbudowana opcja przedwczesnego wykupienia obligacji przez emitenta. W praktyce rynkowej cenę każdej z powyższych wbudowanych opcji wyraża się w postaci czynnika korygującego (ang. Option Adjusted Spread) oraz spreadu związanego z ryzykiem kredytowym i płynności, który jest dodawany do faktora dyskontującego przyszłe przepływy. W tej pracy będziemy rozważać jedynie wyceny bez uwzględnienia powyższych opcji i ryzyk.

2.7.1. Interpolacja

Krzywa forwardowa indeksu cen wyznaczana jest przy wykorzystaniu informacji dotyczących aktualnych kwotowań instrumentów powiązanych inflacją, które notowane są zazwyczaj w odstępach rocznych lub kilkuletnich. Dostępne na rynku są kwotowania o następujących terminach zapadalności: 1Y, 2Y, 3Y, 4Y, 5Y, 6Y, 7Y, 8Y, 9Y, 10Y, 12Y, 15Y, 20Y, 25Y, 30Y, 40Y, 50Y. Nie znamy jednak wartości w datach zapadalności dla każdej chwili w przyszłości, dlatego aby wyznaczyć wartości krzywej w terminach pomiędzy dostępnymi węzłami stosujemy interpolacje. Jedną z możliwych i najczęściej wykorzystywaną jest metoda interpolacji logarytmicznej.

Definicja 2.6. *Roczny wzrost indeksu cen q w chwili t definiujemy jako:*

$$q = ln[I(t, m + 12)] - ln[I(t, m)], \tag{2.2}$$

gdzie m oznacza miesiąc (pierwszy dzień miesiąca), dla którego znana jest wartość indeksu $I(t,m)$ w chwili t zaś $I(t,m+12)$ oznacza wartość indeksu cen rok później.

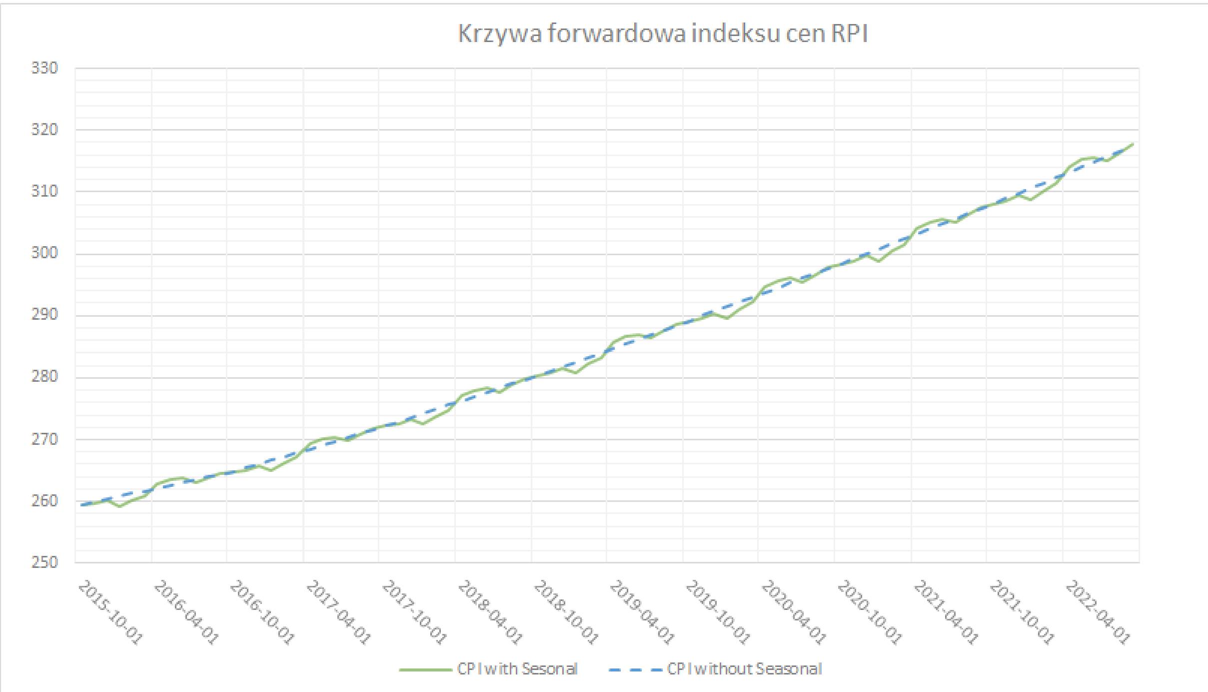
Uwaga 2.4. *Wówczas dla $i \in [0,11]$ kolejnych miesięcy dostajemy zinterpolowane wartości cen forward indeksu cen wyznaczamy w następujący sposób:*

$$I(t,m+i) = I(t,m) * \exp\left(\frac{i*q}{12}\right). \tag{2.3}$$

Metodę te możemy w łatwy sposób zastosować dla przypadków, jeśli różnica pomiędzy kursami forward jest większa niż jeden rok, pamiętając o założeniu, że tempo wzrostu pomiędzy każdym miesiącem jest stałe.

2.7.2. Sezonowość

Jedną z cech procesu inflacji jest jej sezonowość. Oznacza to zmianę struktury ceny, która zależy od danego okresu w ciągu roku, w którym zmienia się przede wszystkim popyt na żywność i energię. Wzrost wskaźnika nie jest regularny i podlega miesięcznym wahaniom. W konsekwencji tego wskaźnik inflacji wykazuje zmiany sezonowe, które należy uwzględnić w momencie wycen instrumentów. Chcąc zbudować realistyczną krzywą indeksu cen, należy pamiętać o włączeniu sezonowej korekty.



Rysunek 2.2: Wykres krzywej forward z uwzględnieniem i bez efektu sezonowości.

Podejście multiplikatywne

W zależności od wyboru metody jedną z możliwości uwzględnienia wyrównania sezonowego dla indeksu cen jest zastosowanie czynników korygujących w podejściu multiplikatywnym.

Definicja 2.7. *Czynnikiem korygującym f_i nazywamy wartość korekty odpowiadająca kolejnym miesiącom m_i dla $i \in \{0, ..., 11\}$, gdzie faktor f_0 jest czynnikiem zmiany pomiędzy grudniem a styczniem.*

Definicja 2.8. *Multiplikatywnym czynnikiem sezonowości $Adj(t, m)$ korygującym początkową wartość ceny dla roku t nazywamy funkcję spełniającą równanie:*

$$Adj(t, m_{i+1}) = f_i * Adj(t, m_i)$$

Uwaga 2.5. *Korektę dla stycznia $Adj(t, m_1)$ wyznaczamy przy pomocy korekty grudniowej $Adj(t, m_0)$.*

Uwaga 2.6. *Wartości czynników korygujących są wyznaczane na podstawie historycznych obserwacji przy założeniu, że skumulowana korekta sezonowości w okresie jednego roku spełnia warunek:*

$$\prod_{i=0}^{11} f_i = 1.$$

Wówczas skorygowany indeks ceny jest równy:

$$I(t, m) = Adj(t, m) * I_{notAdj}(t, m),$$

gdzie $I_{notAdj}(t, m)$ jest wartością indeksu przed uwzględnieniem sezonowości.

2.7.3. Konstrukcja krzywej forward

Istnieje wiele sposobów, które można wykorzystać do konstrukcji krzywej forward: różne metody interpolacji oraz uwzględnienie lub nie czynnika sezonowości. W praktyce rynkowej dla krótszych terminów zapadalności efekt sezonowości może być bardziej istotny i należy uwzględnić go w wyznaczeniu cen. Natomiast w przypadku dłuższych terminów, sięgających nawet 40 lat efekt ten można pominąć i ograniczyć się jedynie do wyboru najlepszej metody interpolacyjnej.

Rozdział 3

Podstawy matematyki finansowej

W poniższym rozdziale przedstawiamy podstawowe pojęcia i twierdzenia matematyki finansowej, używane w kolejnych rozdziałach. Ustalamy horyzont czasowy T^* i zupełną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (dowolny podzbiór zbioru miary zero jest w tej przestrzeni mierzalny) wraz z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}$ generowaną przez proces Wienera W, tzn. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t)$ dla $t \in [0, T^*]$ (W jest adaptowany do $\mathbb{F}$ oraz dla dowolnych $0 \leq s < t$ zmienna losowa $W_t - W_s$ jest niezależna od $\mathcal{F}_s$). Proces Wienera w mierze $\mathbb{Q}$ równoważnej $\mathbb{P}$ będziemy oznaczać przez $W^{\mathbb{Q}}$. Zakładamy także, że obecnie znajdujemy się w chwili 0.

3.1. Rachunek bankowy, obligacja zerokuponowa, kontrakt swapowy

Przez $B = (B_t)_{t\in[0,T^*]}$ oznaczamy proces opisujący rachunek bankowy. Zakładamy, że spełnia on następujące równanie różniczkowe:

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = 1,$$

gdzie $r = (r_t)_{t\in[0,T^*]}$ jest $\mathbb{F}$-adaptowanym procesem stochastycznym w przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nazywanym *krótkoterminową stopą procentową*. Rozwiązaniem powyższego równania jest proces

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad t \in [0, T^*].$$

Definicja 3.1. *Obligacją zerokuponową o terminie zapadalności T nazywamy instrument finansowy, który gwarantuje wypłatę w wysokości 1 jednostki w danej walucie w chwili T. Wartość obligacji w momencie $t \in [0, T]$ oznaczamy przez $P(t, T)$.*

W przypadku ustalonej struktury czasowej $0 \leq T_0 < T_1 < \ldots T_n$ będziemy zakładać, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$ istnieje obligacja zapadalna w T_i..

Na potrzeby następnych definicji zawartych w tym podrozdziale ustalmy strukturę czasową $0 \leq T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ i oznaczmy przez $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$ długość i-tego okresu depozytowego, $i = 1, \ldots, n$.

Definicja 3.2. *Kontrakt IRS (Interest Rate Swap), lub w skrócie: swap, jest to kontrakt wymiany procentowej pomiędzy dwiema stronami, na podstawie którego w ustalonych chwilach* *czasu $T_1, \ldots, T_n$ strony wypłacają sobie wzajemnie odsetki od ustalonego nominału N naliczane według odmiennych stóp procentowych. Jedna ze stron kontraktu dokonuje płatności odsetkowych według stopy stałej K, natomiast druga strona w chwilach T_i dokonuje płatności według stopy zmiennej $S(T_{i-1}, T_i), i = 1, \ldots, n$. Stopy kontraktu IRS zostają ustalone w momencie zawarcia kontraktu T_0. Strumień pieniężny złożony z płatności wyliczonych według stałej stopy nazywa się nogą stałą kontraktu IRS (ang. fixed leg), natomiast strumień płatności według zmiennej stopy – nogą zmienną kontraktu IRS (ang. floating leg). Obie nogi kontraktu kończą się w tym samym momencie w terminie zapadalności.*

1. *pay-fixed IRS lub payer IRS to kontrakt IRS, którego posiadacz płaci stopę stałą i otrzymuje stopę zmienną;*
2. *receive-fixed IRS lub receiver IRS to kontrakt IRS, którego posiadacz płaci stopę zmienną i otrzymuje stopę stałą.*

3.2. Twierdzenie Girsanowa i zamiana miary

Definicja 3.3. ***Równoważność miar***
Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$ nazywamy równoważną mierze $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ ($\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$), jeśli $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ mają te same zbiory miary zero, tzn.

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0 \quad \forall_{A \in \mathcal{F}}.$$

Twierdzenie 3.1. *Jeśli miary probabilistyczne $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ są równoważne na $(\Omega, \mathcal{F})$, to istnieje gęstość miary $\mathbb{Q}$ względem $\mathbb{P}$ - gęstość Radona-Nikodýma: $\varrho = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, tzn.:*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \varrho d\mathbb{P} \quad \forall_{A \in \mathcal{F}}$$

oraz ϱ jest dodatnią zmienną losową mierzalną względem $\mathcal{F}$.
Ponadto mamy $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{\varrho}$.

Definicja 3.4. ***Eksponenta stochastyczna***
Jeśli proces $\gamma \in \mathcal{P}_t$, to równanie:

$$dX_t = \gamma_t X_t dW_t, \quad X_0 = 1 \tag{3.1}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i jest ono zadane wzorem:

$$X_t = \exp\left(\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds\right) = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right), \tag{3.2}$$

gdzie $M_t = \int_0^t \gamma_s dW_s$.

Twierdzenie 3.2. ***Twierdzenie Girsanowa***
Niech $T < \infty$ i niech $\mathbb{Q}$ będzie miarą probabilistyczną równoważną $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ taką, że

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \varrho_T = \exp\left(\int_0^T \gamma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_s^2 ds\right)$$

dla pewnego $\gamma \in \mathcal{P}_T$. Jeśli $W = (W_t)_{t \in [0,T]}$ jest procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ względem filtracji $\mathbb{F}$, to proces $\widetilde{W}$ zdefiniowany wzorem

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \gamma_s ds \quad \forall_{t \in [0,T]}$$

jest procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ *względem filtracji* $\mathbb{F}$.

Wniosek 3.1. *Przy założeniach twierdzenia Girsanowa dynamikę procesu Itô można zapisać w postaci:*

$$dX_t = (a_t + b_t\gamma_t)dt + b_t d\widetilde{W}_t,$$

co oznacza, że współczynnik dyfuzji nie zmienia się przy zmianie miary probabilistycznej na równoważną.

Definicja 3.5. ***Miara martyngałowa***
Miarę probbilistyczną P^* *na* $(\Omega, \mathcal{F}_T$ *równoważną mierze* P *nazywamy miarą martyngałową dla*

- *zdyskontowanego procesu cen* S^*, *gdy* S^* *jest* P^**-martyngałem względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)$,
- *rynku* $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, *gdy dla każdej strategii* $\phi \in \Phi$ *proces* $V^*(\phi)$ *zadany wzorem*

$$V^*(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t},$$

czyli zdyskontowany proces bogactwa, jest P^**-martyngałem względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)$.

Twierdzenie 3.3. ***Pierwsze podstawowe twierdzenie matematyki finansowej***
Rynek $\mathcal{M}$ *jest rynkiem bez możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy istnieje miara martyngałowa.*

Twierdzenie 3.4. *Niech* $\mathcal{M}$ *jest rynkiem bez możliwości arbitrażu. Wówczas cena arbitrażowa w chwili* t *osiągalnej na rynku* M *wypłaty* X *jest dana wzorem:*

$$\Pi_t(X) = B_t \mathbb{E}_{P^*}\left(\frac{X}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

dla dowolnej miary martyngałowej P^*.

Definicja 3.6. ***Rynek zupełny***
Rynak $\mathcal{M}$ *nazywamy zupełnym, gdy każda wypłata jest osiągalna na tym rynku.*

Twierdzenie 3.5. ***Drugie podstawowe twierdzenie matematyki finansowej***
Rynek bez możliwości arbitrażu jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa.

Definicja 3.7. ***Miara forward***
Załóżmy, że przyjmujemy obligację zerokuponową zapadalną w chwili T *jako numéraire. Miarę martyngałową stowarzyszoną z tak przyjętym numérairem nazywamy miarą forwardową* T*-forward i oznaczamy przez* $\mathbb{P}_T$. *Procez Wienera w tej mierze oznaczamy jako* W^T.

Uwaga 3.1. *Miarę* T*-forward możemy zdefiniować za pomocą pochodnej Rodona-Nikodýma wzorem:*

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^*} = \frac{1}{B_T B(0,T)} \quad \mathbb{P}^* - p.n.$$

3.3. Zmiana numéraire

Rozpatrujemy rynek finansowy złożony z d instrumentów, których ceny $S_t^1, \ldots, S_t^d$ są $\mathbb{F}$-adaptowanymi procesami Itô typu càdlàg. Przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ wraz z procesem cen $S = (S^1, \ldots, S^d)$ nazywamy modelem rynku finansowego i oznaczamy przez $\mathcal{M}$.

Definicja 3.8. *Strategią (inwestycyjną) lub portfelem nazywamy proces $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^d)$ o składowych prognozowalnych i lokalnie ograniczonych. Procesem wartości portfela φ nazywamy proces*

$$V_t(\varphi) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_t^i S_t^i, \quad t \in [0, T^*].$$

Definicja 3.9. *Numéraire nazywamy proces stochastyczny $N = (N_t)_{t \in [0,T^*]}$, który z prawdopodobieństwem 1 jest ściśle dodatni dla prawie każdego $t \in [0, T^*]$, tzn.*

$$N_t(\omega) > 0 \quad dla \quad (\lambda \otimes \mathbb{P})\text{-}p.w.\ (t, \omega).$$

Numéraire opisuje instrument N, względem którego normalizowane są ceny wszystkich innych instrumentów. Zamiast cen S_t^k rozpatrywane są ceny $\frac{S_t^k}{N_t}$ (dzielone przez proces numéraira) dla $k = 0, 1, \ldots, d$. Będziemy zakładać, że N w czasie swego istnienia nie płaci dywidendy i prawie na pewno jest ściśle dodatni dla każdego $t \in [0, T^*]$.

Definicja 3.10. *Niech N będzie numéraire. Miarę probabilistyczną $\mathbb{P}^N$ określoną na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywamy (równoważną) miarą martyngałową (RMM) stowarzyszoną z N, jeśli $\mathbb{P}^N$ jest równoważna mierze $\mathbb{P}$ oraz proces $\frac{S}{N} = (\frac{S_t}{N_t})_{t \in [0,T^*]}$ jest $\mathbb{P}^N$-martyngałem względem filtracji $\mathbb{F}$.*

Definicja 3.11. *Niech $\delta > 0$. Prostą strategię inwestycyjną φ nazywamy δ-dopuszczalną (względem N), jeśli*

$$\mathbb{P}\left(\forall_{t \in [0,T^*]} \quad \frac{V_t(\varphi)}{N_t} \geq -\delta\right) = 1.$$

Definicja 3.12. *Mówimy, że proces cen S_t spełnia warunek NFLVR (no free lunch with vanishing risk), jeśli dla każdego ciągu (δ_n) zbieżnego do zera i każdego ciągu (φ_n) prostych strategii takich, że dla $n = 1, 2, \ldots$ φ_n jest δ_n-dopuszczalna (względem N), zachodzi warunek*

$$V_T(\varphi_n) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Twierdzenie 3.6. *Na rynku $\mathcal{M}$ istnieje równoważna miara martyngałowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek NFLVR.*

Twierdzenie 3.7. *Fundamentalne twierdzenie wyceny*
Załóżmy, że istnieje numéraire N i równoważna miara martyngałowa $\mathbb{P}^N$ stowarzyszona z N. Wówczas dla dowolnego numéraire U istnieje równoważna miara martyngałowa $\mathbb{P}^U$ stowarzyszona z U. Co więcej, wartość w chwili $t \in [0, T]$ dowolnej następującej w $T \leq T^*$ wypłaty osiągalnej X dzielona przez U jest $\mathbb{P}^U$-martyngałem, tzn.

$$\frac{\pi_t(X)}{U_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^U}\left(\frac{X}{U_T}\middle|\mathcal{F}_t\right), \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*. \tag{3.3}$$

Ponadto, pochodna Radona-Nikodýma definiująca miarę $\mathbb{P}^U$ jest dana wzorem

$$\frac{d\mathbb{P}^U}{d\mathbb{P}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}. \tag{3.4}$$

Miarę $\mathbb{P}^* := \mathbb{P}^B$ stowarzyszoną z rachunkiem bankowym jako numéraire nazywa się *miarą neutralną względem ryzyka*. Proces Wienera w tej mierze będziemy oznaczać przez W^*.

Ze wzoru (3.3), zwanego *martyngałowym wzorem wyceny*, wynika związek pomiędzy cenami obligacji a procesem krótkoterminowej stopy procentowej:

$$B(t,T) = B_t \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\frac{B(T,T)}{B_T}\bigg|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\bigg|\mathcal{F}_t\right).$$

Technika zmiany numéraire jest narzędziem wyceny instrumentów pochodnych. Jeśli mamy daną wypłatę $h(X_T)$ zależącą od procesu X w chwili T i chcemy obliczyć jej wartość w chwili 0, możemy dobrać odpowiedni numéraire N, tak aby wartość oczekiwana $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^N}\left(\frac{h(X_T)}{N_T}\right)$ była możliwie najprostsza do obliczenia.

3.4. Zmiana numerair'a w modelu rynku zagranicznego

Rozważmy model rynku zagranicznego (foreign market) z czasem ciągłym na przedziale $[0,T^*]$, gdzie $T^* > 0$ jest ustalonym horyzontem czasowym, na którym odbywa się handel aktywem X_f w walucie zagranicznej CUR_f. Jest to instrument, który wypłaca wartość $X_f(T_M)$ w momencie zapadalności $T_M \leq T^*$. Dodatkowo oznaczamy proces $B_f = B_f(t)_{t\in[0,T^*]}$ opisujący rachunek oszczędnościowy. Poprzez Q_f opisujemy miarę martyngałową powiązaną z rynkiem zagranicznym. W analogiczny sposób rozważamy rynek krajowy (domestic market) z procesem opisującym rachunek oszczędnościowy $B_d(t)_{t\in[0,T^*]}$ z walutą CUR_d oraz miarą martyngałową Q_d.

Kurs wymiany spot pomiędzy walutą zagraniczną i domową modelujemy poprzez proces H, co oznacza, że 1 jednostka w walucie CUR_f jest warta $H(t)$ jednostek w walucie CUR_d w chwili t. Filtracja $F = \{F_t : 0 \leq t \leq T_M\}$ jest filtracją generowaną przez powyższy proces H.

Według standardowej bezarbitrażowej teorii wyceny, cena aktywa X_f na rynku zagranicznym w chwili t jest równa:

$$V_f(t) = B_f(t)\mathbb{E}^{Q_f}\left[\frac{X_f(T_M)}{B_f(T_M)}\bigg|F_t\right] \tag{3.5}$$

Z drugiej strony wyrażając ją w walucie krajowej CUR_d otrzymujemy:

$$V_d(t) = H(t)B_f(t)\mathbb{E}^{Q_f}\left[\frac{X_f(T_M)}{B_f(T_M)}\bigg|F_t\right]. \tag{3.6}$$

Oznacza to, że inwestor na rynku krajowym, który kupuje zagraniczne aktywo o cenie X_f w momencie zapadalności T_M otrzymuje wypłatę $X_f(T_M)H(T_M)$. Rozważając cenę podobnego aktywo na rynku krajowym, które w momencie wypłaty T_M wypłaca $X_f(T_M)H(T_M)$ chcąc otrzymać brak arbitrażu musi zostać ona pomnożona przez kurs walutowy. Dostajemy zatem:

$$V_d(t) = H(t)B_f(t)\mathbb{E}^{Q_f}\left[\frac{X_f(T_M)}{B_f(T_M)}\bigg|F_t\right] = B_d(t)\mathbb{E}^{Q_d}\left[\frac{H(T_M)X_f(T_M)}{B_d(T_M)}\bigg|F_t\right]. \tag{3.7}$$

Rozdział 4

Przegląd instrumentów finansowych powiązanych z inflacją

W rozdziale czwartym wprowadzamy podstawowe instrumenty finansowe indeksowane do wybranego wskaźnika inflacyjnego: obligacja indeksowana inflacją, zerokuponowy swap inflacyjny, swap Year-on-Year a także opcje Cap oraz Floor na indeks inflacyjny. Instrumenty te znajdują się w obrocie już od ponad 20 lat. W ogólności są umowami zawartymi pomiędzy dwiema stronami zobowiązującymi do płatności opartych na wartości instrumentu bazowego powiązanego z ustalonym indeksem cen w określonym czasie. Zadaniem instrumentów indeksowanych inflacją jest zminimalizowanie ryzyka związanego z inflacją dla jednej ze stron oferując jednocześnie możliwość wysokiego zwrotu z inwestycji.

4.1. Obligacja indeksowana inflacją

W styczniu 1997 rząd Stanów Zjednoczonych (U.S. Treasury) rozpoczął emitować obligacje indeksowane inflacją - (ang. Treasury Inflation Protected Securities, TIPS). Motywacją do utworzenia takich instrumentów finansowych była potrzeba efektywniejszego zarządzania ryzykiem i wyeliminowania jednego z największych zagrożeń dla inwestycji długoterminowych o stałym dochodzie - ryzyka inflacji - przy jednoczesnym zapewnieniu realnej stopy zwrotu gwarantowanej przez rząd.

Przy inwestycji o stałym dochodzie inwestorzy ponoszą ryzyko inflacji: zmienia się siła nabywcza pieniądza w czasie co może istotnie wpłynąć na pierwotne oczekiwania inwestycyjne. TIPS mogą zagwarantować bezpieczeństwo i zniwelować ryzyko zmniejszenia realnego zysku inwestycji. Inflacja w przypadku tych papierów skarbowych mierzona jest za pomocą indeksu CPI z opóźnieniem dwumiesięcznym. W ślad za Stanami Zjednoczonymi rządy innych krajów również zaczęły emitować obligacje gwarantujące realną stopę zwrotu. Odpowiednikami TIPS na innych światowych rynkach są:

Obligacja	Indeks	Kraj
TIPS	CPI	USA
Index-Linked Gilt	RPI	Wielka Brytania
OATi	CPI ex-tabacco	Francja
Capital Indexed Bonds	CPI	Australia
iBond	Composite CPI	Hong Kong
iBund	EU HICP ex-tobacco	Niemcy
JGBi	CPI	Japonia
Obligacja indeksowana inflacją	CPI	Polska

Definicja 4.1. *Obligacją zerokuponową indeksowaną do inflacji o terminie zapadalności T nazywamy instrument finansowy opierający się na zmianie indeksu inflacji pomiędzy datą zawarcia umowy $t = 0$ a datą wykupu T. W chwili początkowej przy $t = 0$ zostaje ustalona wartość referencyjnego indeksu zmiany cen I_0 oraz nominał kontraktu N. Instrument ten gwarantuje nominalną wypłatę w momencie zapadalności równą $N\frac{I(T)}{I_0}$. Wartość obligacji w momencie $t \in [0, T]$ oznaczamy przez $\mathbf{ZCIIB}(t, T, I_0, N)$.*

Obligacja indeksowana inflacją jest podstawowym instrumentem finansowym gwarantującym zabezpieczenie przed ryzykiem inflacji. Nominalna wypłata w momencie zapadalności ma wartość:

$$N\frac{I(T)}{I_0}, \tag{4.1}$$

zaś realna, gwarantowana kwota w momencie wypłaty jest równa:

$$\frac{N}{I_0}. \tag{4.2}$$

Uwaga 4.1. *Obligacja indeksowana do inflacji zapewnia realną wartość wypłaty w momencie zapadalności, zaś wartość nominalna przed datą wykupu jest nieznana.*

Wycena obligacji indeksowanej do inflacji

Niech $P_r(t, T)$ oznacza realną cenę (uwzględniającą wartość inflacji) w momencie t wypłacanej w dacie wykupu T 1 jednostki pieniędzy. Wówczas:

$$\frac{N}{I_0}P_r(t, T_M) \tag{4.3}$$

oznacza realną wartość w chwili t otrzymywanej jednostki $\frac{N}{I_0}$ dla momentu zapadalności obligacji T oraz wypłatę zerokuponowej obligacji indeksowanej inflacją. Ponieważ wartość ZCIIB w momencie t jest uzyskiwana poprzez normalizację indeksem inflacji otrzymujemy:

$$\frac{\mathbf{ZCIIB}(t, T, I_0, N)}{I(t)} = \frac{NP_r(t, T)}{I_0} \tag{4.4}$$

Definiując wartość obligacji wypłacającej 1 jednostkę pieniężną (N = 1) w momencie T_M jako $P_{IL}(t, T) := \mathbf{ZCIIB}(t, T, 1, 1)$ mamy:

$$P_{IL}(t, T) = I(t)P_r(t, T). \tag{4.5}$$

Otrzymujemy cenę obligacji uzależnioną od wartości indeksu inflacyjnego jak i rzeczywistej krzywej dyskontowej. W praktyce jednak podobnie jak w przypadku rynku zwykłych obligacji, na rynku emitowane są obligacje wypłacające kupony, które mogą być rozpatrywane jako złożenie obligacji zerokuponowych. W ogólności otrzymujemy więc:

$$\mathbf{ILB}(t, T_M, I_0, N) = \frac{N}{I_0}\Bigg[\sum_{i=1}^{M} CP_{IL}(t, T_i) + P_{IL}(t, T_M)\Bigg] = \frac{I(t)}{I_0} N\Bigg[\sum_{i=1}^{M} CP_r(t, T_i) + P_r(t, T_M)\Bigg]$$

gdzie C oznacza wartość a M liczbę wypłacanych kuponów, T_M datę zapadalności, N nominał a I_0 wartość indeksu referencyjnego w dacie wydania kontraktu.

4.2. Swap inflacyjny

4.2.1. Zerokuponowy swap indeksowany do inflacji

Definicja 4.2. *Zerokuponowym swapem indeksowanym do inflacji (ang. Zero-Coupon Inflation Indexed Swap, ZCIIS) nazywamy transakcję wymiany dwóch przepływów pieniężnych w ustalonym momencie zapadalności kontraktu T. W powyższym kontrakcie jedna strona transakcji (inflation buyer) zobowiązuje się do zapłaty stałej kwoty:*

$$N\Big[(1+K)^T - 1\Big],$$

gdzie K oznacza stałą stopę kontraktu (ang. fixed rate), N nominał kontraktu. W zamian druga strona ang. (inflation seller) zobowiązuje się do płatności zmiennej kwoty zależnej od wybranego referencyjnego wskaźnika inflacji:

$$N\left[\frac{I(T)}{I_0} - 1\right]$$

w momencie zapadalności T, gdzie $I(T)$ oraz $I_0 = I(0)$ oznaczają odpowiednio wartość referencyjnego wskaźnika w dacie zapadalności oraz dacie startu transakcji.

Uwaga 4.2. *Stała stopa kontraktu $K = b(0, T)$ nazywana jest stopą rentowności (ang. breakeven inflation rate), której wartości są notowane i publikowane na rynku w zależności od terminu zapadalności T analogicznie jak w przypadku zwykłych kontraktów IRS.*

W zerokuponowych swapach inflacyjncyh ZCIIS płatności zachodzą jedynie w momencie zapadalności. Do tego czasu nie następują żadne przepływy pieniężne pomiędzy stronami. Produkt ten jest najbardziej elastycznym z kontraktów indeksowanych inflacją i stanowi podstawę do tworzenia bardziej złożonych produktów.

Konstrukcja krzywej forward indeksu cen

Kwotowania stóp rentowności swapa zerokuponowego indeksowanego inflacją mogą posłużyć do konstrukcji krzywej forwardowej indeksu cen. W chwili 0 wartość obu nóg transakcji powinna być równa:

$$I(T) = I_0(1 + b(0, T))^T. \tag{4.6}$$

Mając zatem kwotowania stopy rentowności (breakeven) o różnych terminach zapadalności oraz wartość indeksu referencyjnego I_0 (o ustalonym opóźnieniu oraz notacji początku miesiąca lub zinterpolowany na dany dzień miesiąca) możemy wyznaczyć oczekiwaną przez rynek wartość inflacji w terminie T.

4.2.2. Kontrakt Year-on-Year indeksowany do inflacji

Definicja 4.3. *Kontraktem Year-on-Year indeksowanym do inflacji (Year-on-Year Inflation Indexed Swap - YYIIS) nazywamy transakcję swap, w której wymiana płatności następuje rok do roku (lub kilka razy w roku). Poprzez θ_i oznaczmy frakcję roku odpowiadającą nodze stałej (płacącej stałą stopę) dla przedziału $[T_{i-1}, T_i]$ gdzie $i \in \{0, 1, ...M\}$ zaś ψ_i odpowiadającą nodze zmiennej (indeksowanej inflacją), gdzie $T_0 = 0$ co oznacza, że kontrakt rozpoczyna się dzisiaj.(Dla przykładu jeżeli dla nogi stałej płatności następują co pół roku to $\theta_i = 0.5$ a dla nogi zmiennej co kwartał to $\psi_i = 0.25$). Jedna ze stron zobowiązuje się do płatności stałych kuponów o wartości:*

$$N\theta_i K$$

w momentach T_i, gdzie K jest ustaloną stałą stopą procentową (ang. strike). W zamian druga strona kontraktu wypłaca kupony oparte o zmianę referencyjnego indeksu inflacyjnego:

$$N\psi_i \left[\frac{I(T_i)}{(T_{i-1})} - 1 \right]$$

w każdym momencie T_i.

Podobnie jak w przypadku instrumentów zerokuponowych swapy Year-on-Year indeksowane do inflacji są notowane na rynku, jednak ich płynność jest niższa (mała aktywność w tym segmencie rynku, brak notowań) niż w przypadku tych pierwszych, które uważane są za główne punkty odniesienia na rynku instrumentów pochodnych inflacji.

4.3. Opcje inflacyjne

Definicja 4.4. *Binarnym Capletem (ang. Inflation Indexed Caplet, IIC)/Flooretem (ang. Inflation Indexed Flooret, IIF) inflacyjnym nazywamy pojedynczą opcję kupna/sprzedaży stopy inflacyjnej $I(t)$, której okres depozytowy rozpoczyna się w chwili T_{i-1} i kończy w chwili T_i. Wypłata w momencie T_i jest równa:*

$$N^* \psi_i \left[\omega \left(\frac{I(T_i)}{(T_{i-1})} - 1 - K \right) \right]^+,$$

gdzie K oznacza ustaloną wartość ceny wykonania (ang. strike) określającej poziom stopy inflacyjnej, N nominał opcji, ψ_i oznacza długość okresu depozytowego stopy inflacyjnej - okres między T_{i-1} a T_i zaś $\omega = 1$ dla capleta i $\omega = -1$ dla flooreta.
Definicja 4.5. *Binarną opcją cap/floor na stopę inflacyjną nazywamy ciąg pojedynczych capletów/flooretów z tą samą ceną wykonania K i jednakowym nominałem N dla kolejnych jednakowych okresów depozytowych obejmujących łączenie czas trwania opcji cap/floor.*

Zarówno inwestorzy jak i emitenci mogą zabezpieczyć swoje inwestycje za pomocą opcji cap i floor. Opcja cap jest stosowana w celu zabezpieczenia kupca przed zmianą inflacji powyżej ustalonego kursu zaś opcja floor chroni inwestycję przed skokami inflacji poniżej ustalonego poziomu. Binarne capy/floory inflacyjne są najczęściej elementami składowymi finansowych produktów strukturalnych powiązanych z inflacją.

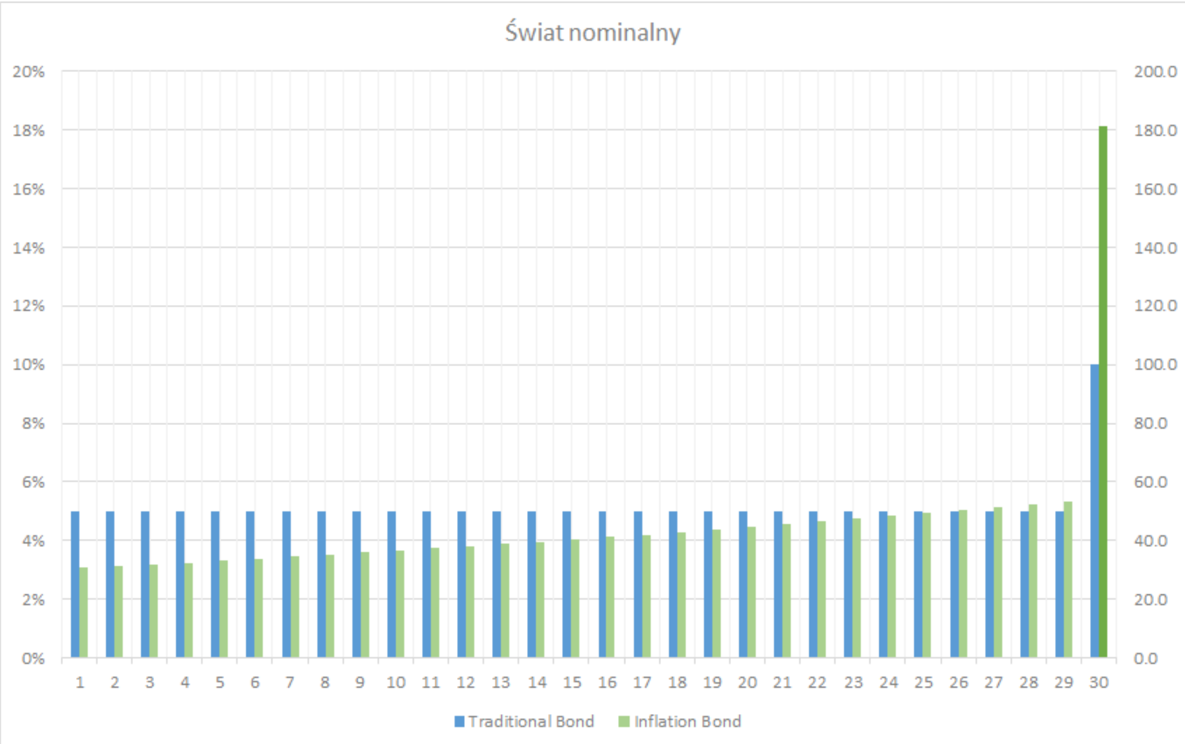
4.4. Obligacja tradycyjna kontra obligacja inflacyjna

Dobrym przykładem ilustrującym działanie instrumentów indeksowanych do inflacji i zabezpieczenie siły nabywczej inwestycji jest porównanie przepływów dwóch obligacji: tradycyjnej oraz indeksowanej do inflacji. Załóżmy, że rozważamy obligacje o terminie zapadalności równym 30 lat. Pierwsza z nich wypłaca co rok kupon o wartości 5% nominału oraz 100 jednostek w terminie zapadalności. Druga z nich płaci kupon w analogicznym okresie przy rzeczywistej stopie procentowej 3%. Zakładamy stałą inflację równą 2% w skali roku przez cały okres 30 lat. W ujęciu świata nominalnego (bez uwzględnienia siły nabywczej) obligacja tradycyjna płaci w każdym roku 5% nominału. Wartość rzeczywista (RV) 100 jednostek w chwili czasu t jest równa:

$$RV(t) = \frac{100}{(1+2\%)^t},$$

gdzie t oznacza kolejne lata. Z kolei rzeczywista wartość jednego kuponu (RC) obligacji tradycyjnej jest równa:

$$RC(t) = \frac{50}{(1+2\%)^t}.$$



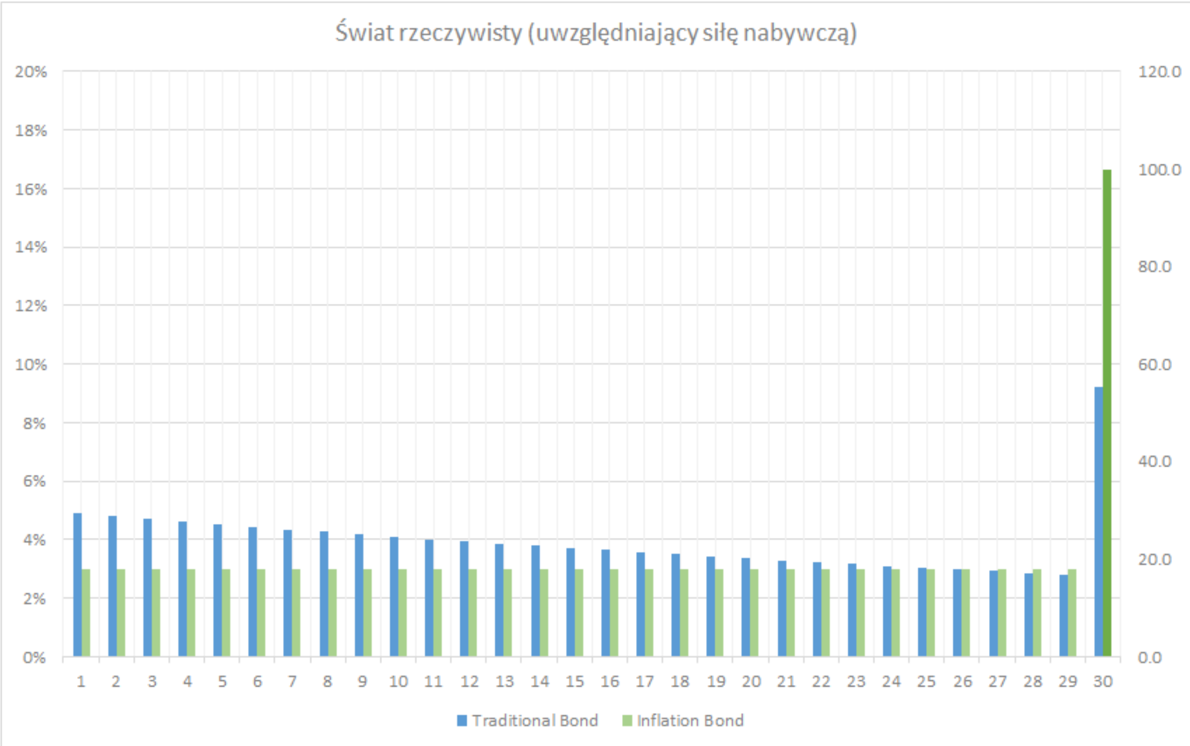
Rysunek 4.1: Wykres przedstawiający przepływy w ramach porównania obligacji tradycyjnej i inflacyjnej udzielonych na 30 lat w ujęciu nominalnym.

W ujęciu rzeczywistym przepływy obu obligacji wyglądają zupełnie inaczej. Wartość rzeczywista przepływów obligacji indeksowanej do inflacji jest stała natomiast wartości nominalna (NV) 100 jednostek jest równa:

$$NV(t) = 100 * (1+2\%)^t,$$

natomiast nominalna wartość jednego kuponu (NC) obligacji linkowanej do inflacji w chwili t jest równa:

$$NC(t) = 30 * (1+2\%)^t.$$



Rysunek 4.2: Wykres przedstawiający przepływy w ramach porównania obligacji tradycyjnej i inflacyjnej udzielonych na 30 lat w ujęciu rzeczywistym.

Rozdział 5

Modele rynkowe

W poniższym rozdziale wprowadzono i zaprezentowano jeden z najczęściej wykorzystywanych modeli do modelowania instrumentów powiązanych z inflacją. Wykorzystując analogię do modelowania walut obcych Jarrow and Yildirim zaproponowali model, w którym cena rzeczywista odpowiada procesowi cen w walucie obcej, cena nominalna procesowi cen w walucie krajowej natomiast indeks inflacyjny jest utożsamiany z kursem walutowym spot (spot exchange rate) . Rozważamy rynek, na który zbudowany jest na bazie zwykłych obligacji zerokuponowych oraz tych indeksowanych do inflacji bez ryzyka kredytowego. Celem będzie ustalenie cen obligacji w taki sposób, aby otrzymać wolny od arbitrażu model rynku finansowego przy wykorzystaniu metody HJM modelowania struktury terminowej, a następnie wyceny instrumentów pochodnych powiązanych z inflacją.

5.1. Model Jarrowa i Yildirima

Przestrzeń probabilistyczna

Rozważamy model rynku z czasem ciągłym na przedziale $[0, T^*]$, gdzie $T^* > 0$ jest ustalonym horyzontem czasowym. Będziemy rozważać obligację zerokuponową bez ryzyka kredytowego wypłacającą jedną jednostkę pieniędzy w ustalonej dacie wykupu $T \leq T^*$. Poprzez symbol n będziemy odnosić się do stopy nominalnej, zaś r będzie oznaczać stopę rzeczywistą - uwzględniające korektę wartością stopy inflacyjnej. Cenę nominalną obligacji w chwili $t \leq T$ o terminie zapadalności $T \leq T^*$ oznaczamy symbolem $P_n(t,T)$, natomiast cenę rzeczywistą obligacji zerokuponowej jako $P_r(t,T)$. Dodatkowo notowanie ustalonego indeksu zmiany cen w momencie t będziemy oznaczać poprzez proces $I(t)$ dla każdego $t \leq T$.

Definicja 5.1. *Niech $f_k(t,T)$ oznacza proces chwilowej stopy forward w momencie t dla $k \in \{n,r\}$ (odpowiednio względem stopy nominalnej i rzeczywistej). Dla dowolnego $t \leq T$ cena obligacji zerokuponowej o terminie zapadalności $T \leq T^*$ jest równa:*

$$P_k(t,T) = \exp\left(- \int_t^T f_k(t,u)du \right),$$

Dla każdego terminu wykupu T warunek początkowy $f(0,T)$ jest określony przez bieżące wartości cen obligacji zerokuponowych.

Standardowo wprowadzamy również dodatkowy dostępny instrument - rachunek oszczędnościowy.

Definicja 5.2. *Zakładamy, że istnieje mierzalna modyfikacja procesu chwilowej stopy forward* $f(t,t)$ *dla* $t \leq T^*$. *Krótkoterminowa stopa procentowa spełnia warunek* $r_k(t) = f_k(t,t)$ *dla każdego* t *oraz dla* $k \in \{n, r\}$. *Proces rachunku oszczędnościowego jest równy:*

$$B_k(t) = \exp\left(\int_0^t f_k(u,u)du\right)$$

dla każdego $t \in [0, T^*]$ *oraz dla* $k \in \{n, r\}$.

Trójfaktorowy model rynku

Rozważamy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, gdzie P jest interpretowane jako prawdopodobieństwo rzeczywiste. Zakładamy, że filtracja $\mathbb{F} = (F_t)_{t\in[0,T]}$ jest generowana przez trzy procesy Wienera:

$$W_n^P(t), W_r^P(t), W_I^P(t).$$

gdzie $t \in [0, T]$. Procesy te startują w 0 i korelacje pomiędzy nimi oznaczamy jako:

$$\begin{aligned} dW_n^P(t)dW_r^P(t) &= \rho_{nr}dt, \\ dW_n^P(t)dW_I^P(t) &= \rho_{nI}dt, \\ dW_r^P(t)dW_I^P(t) &= \rho_{rI}dt. \end{aligned}$$

Model rynku inflacji będziemy modelować za pomocą trzech faktorów: nominalnej i rzeczywistej chwilowej stopy forward oraz procesu inflacji. Dla faktora zdefiniujemy odpowiednie równania dynamik.

Dla dowolnego terminu wykupu $T \leq T^*$ określamy warunek początkowy poprzez bieżące wartości nominalnych cen obligacji zerokuponowych krzywą $f_n^*(0,T)$. Dynamika nominalnej chwilowej stopy forward opisujemy jako:

$$\begin{aligned} df_n(t,T) &= \alpha_n(t,T)dt + \sigma_n(t,T)dW_n^P(t), \\ f_n(0,T) &= f_n^*(0,T) \end{aligned}$$

gdzie procesy α_n oraz σ_n są F-adoptowanymi procesami stochastycznymi.

Analogicznie przedstawiamy dla dowolnego terminu wykupu $T \leq T^*$ dynamikę rzeczywistej chwilowej stopy forward:

$$\begin{aligned} df_r(t,T) &= \alpha_r(t,T)dt + \sigma_r(t,T)dW_r^P(t), \\ f_r(0,T) &= f_r^*(0,T) \end{aligned}$$

gdzie procesy α_r oraz σ_r są F-adoptowanymi procesami stochastycznymi oraz $f_r^*(0,T)$ jest krzywą rzeczywistych bieżących cen obligacji zerokuponowych. Ostatnim modelowanym faktorem jest indeks inflacyjny, dla którego zadajemy następującą postać dynamiki:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I(t)dt + \sigma_I(t)dW_I^P(t),$$

gdzie proces μ_I jest F-adoptowanym procesem stochastycznym zaś σ_I jest funkcją deterministycznym, co implikuje normalność rozkładu logarytmu zmiany indeksu inflacji. Powyższe założenia pozwalają na zastosowanie podejścia HJM modelowania rynku obligacji.

Twierdzenie 5.1. *Trójfaktorwy model rynku Jarrowa and Yildirima jest pozbawiony arbitrażu i jest rynkiem zupełnym, jeżeli istnieje jedyna miara martyngałowa Q równoważna mierze P taka, że procesy:*

$$\frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}$$

są Q-martyngałami.

Uwaga 5.1. *Ponadto korzystając z twierdzenia Girsanowa jeżeli $W_n(t), W_r(t), W_I(t)$ są procesami Wienera przy mierze rzeczywistej P oraz Q jest miarą probabilistyczną równoważną mierze P, wówczas istnieją procesy premii za ryzyko $\lambda_n(t), \lambda_r(t), \lambda_I(t)$ takie, że*

$$W_k^Q(t) = W_k^P(t) - \int_0^t \lambda_k(s)ds, \text{ dla } k \in \{n, r, I\}$$

są procesami Wienera względem miary probabilistycznej Q dla każdego $t \in [0, T]$.

Powyższe rozważania dotyczące struktury terminowej cen obligacji względem stopy nominalnej i rzeczywistej pozwalają na sformułowanie kluczowego twierdzenia przedstawiającego warunki konieczne i wystarczające do otrzymania rynku bez możliwości arbitrażu.

Twierdzenie 5.2. ***Bezarbitrażowa struktura terminowa***
Procesy

$$\frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)},$$

gdzie $t \leq T \leq T^*$ jest martyngałem względem miary martyngałowej Q wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\alpha_n(t,T) = \sigma_n(t,T)\bigg(\int_t^T \sigma_n(t,s)ds - \lambda_n(t)\bigg), \tag{5.1}$$

$$\alpha_r(t,T) = \sigma_r(t,T)\bigg(\int_t^T \sigma_r(t,s)ds - \sigma_I(t)\rho_{rl} - \lambda_r(t)\bigg), \tag{5.2}$$

$$\mu_I(t) = r_n(t) - r_r(t) - \sigma_I(t)\lambda_I(t). \tag{5.3}$$

Dowód. Pierwsze równanie jest warunkiem dryfu przy metodzie HJM dla nominalnej stopy forwardowej, analogicznie kolejne jest warunkiem dla rzeczywistej stopy forwardowej uwzględniające zmienność inflacji a także współczynnik korelacji pomiędzy inflacją a rzeczywistą stopą forwardową. Ostatnie równanie jest równaniem Fishera łączącym zależność pomiędzy nominalną i realną stopą procentową oraz oczekiwaną inflacją i premią za ryzyko inflacyjne.

Dynamika procesu cen obligacji

Punktem wyjścia do wyprowadzenia warunków koniecznych gwarantujących brak możliwości arbitrażu w trójfaktorowym modelu rynku inflacji jest postać dynamiki procesu cen obligacji zerokuponowej $P_k(t,T)$, gdzie $k \in \{r, n\}$. Określamy ją w następujący sposób:

$$dP_k(t,T) = P_k(t,T)\bigg((f(t,t) + \alpha_k^*(t,T) + \frac{1}{2}||\sigma_k^*(t,T)||^2)dt + \sigma_k^*(t,T)dW_k^P(t)\bigg),$$

gdzie dla każdego $t \in [0,T]$ oznaczamy:

$$\alpha_k^*(t,T) := -\int_t^T \alpha_k(t,u)du, \tag{5.4}$$

$$\sigma_k^*(t,T) := -\int_t^T \sigma_k(t,u)du. \tag{5.5}$$

Rachunek oszczędnościowy

Niech $B_r^*(t) = I(t)B_r(t)$. Otrzymujemy wówczas:

$$\begin{aligned} dB_r^*(t) &= B_r(t)dI(t) + I(t)dB_r(t) \\ &= B_r(t)dI(t) + I(t)r_r(t)B_r(t)dt \\ &= B_r(t)(I(t)[\mu_I(t)dt + \sigma_I(t)dW_I^P(t)] + I(t)r_r(t)dt) \\ &= B_r(t)I(t)([\mu_I(t) + r_r(t)]dt + \sigma_I(t)dW_I^P(t)). \end{aligned}$$

Mamy więc:

$$\frac{dB_r^*(t)}{B_r^*(t)} = [\mu_I(t) + r_r(t)]dt + \sigma_I(t)dW_I^P(t). \tag{5.6}$$

Dynamika procesu $B_r^*(t)$ dyskontowanego procesem $B_n(t)$ zapiszemy jako:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{B_r^*(t)}{B_n(t)}\right) &= \frac{dB_r^*(t)}{B_n(t)} - \frac{B^*(t)dB_n(t)}{B_n(t)^2} \\ &= \frac{dB_r^*(t)}{B_n(t)} - \frac{B_r^*(t)r_n(t)B_n(t)dt}{B_n(t)^2} \\ &= \frac{dB_r^*(t)}{B_n(t)} - \frac{B_r^*(t)}{B_n(t)}r_n(t) \\ &= \frac{B_r^*(t)}{B_n(t)}\Big([\mu_I(t) + r_r(t) - r_n(t)]dt + \sigma_I(t)dW_I^P(t)\Big). \end{aligned}$$

Względem miary martyngałowej Q równoważnej mierze P:

$$d\left(\frac{B_r^*(t)}{B_n(t)}\right) = \frac{B_r^*(t)}{B_n(t)}[\sigma_I(t)dW_I^P(t)],$$

gdzie

$$W_I^Q(t) = W_I^P(t) - \int_0^t \lambda_I(u)du.$$

Otrzymujemy wówczas warunek:

$$\mu_I(t) + r_r(t) - r_n(t) = -\lambda_I(t)\sigma_I(t), \tag{5.7}$$

i stąd:

$$\mu_I(t) = r_n(t) - r_r(t) - \lambda_I(t)\sigma_I(t). \tag{5.8}$$

Struktura terminowa obligacji względem stopy nominalnej

Pierwszy proces bezarbitrażowej struktury terminowej:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}\right) &= \frac{dP_n(t,T)}{B_n(t)} - \frac{dB_n(t)P_n(t,T)}{B_n^2(t)} \\ &= \frac{dP_n(t,T)}{B_n(t)} - \frac{B_n(t)r_n(t)dtP_n(t,T)}{B_n^2(t)} \\ &= \frac{dP_n(t,T)}{B_n(t)} - \frac{P_n(t,T)r_n(t)dt}{B_n(t)} \\ &= \frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}\Big[\alpha_n^*(t,T) + \frac{1}{2}||\sigma_n^*(t,T)||^2)dt + \sigma_n^* dW_n^P(t) \end{aligned}$$

Otrzymujemy wówczas:

$$\alpha_n^*(t,T) + \frac{1}{2}||\sigma_n^*(t,T)||^2 = \lambda_n(t)\sigma_n^*(t,T) \tag{5.9}$$

Różniczkując po T:

$$-\alpha_n(t,T) + \sigma_n^*(t,T)\sigma_n(t,T) = \lambda_n(t)\sigma_n(t,T) \tag{5.10}$$

Co prowadzi nas do:

$$\begin{aligned} \alpha_n(t,T) &= -\lambda_n(t)\sigma_n(t,T) + \sigma_n^*(t,T)\sigma_n(t,T) \\ \alpha_n(t,T) &= \sigma_n(t,T)\Big[-\lambda_n(t) + \int_t^T \sigma_n(t,u)du\Big]. \end{aligned}$$

Ostatecznie względem miary rzeczywistej P dynamikę obligacji względem stopy nominalnej możemy zapisać jako:

$$\frac{dP_n(t,T)}{P_n(t,T)} = [r_n(t) + \sigma_n^*(t,T)\lambda_n(t)]dt + \sigma_r^*(t,T)dW_n^P(t) \tag{5.11}$$

zaś względem miary wolnej od ryzyka Q jako:

$$\frac{dP_n(t,T)}{P_n(t,T)} = r_n(t)dt + \sigma_n^*(t,T)dW_n^Q(t) \tag{5.12}$$

Struktura terminowa obligacji względem stopy rzeczywistej

W analogiczny sposób jak wyżej oznaczamy strukturę terminową obligacji względem rzeczywistej stopy procentowej $P_r^*(t) = I(t)P_r(t,T)$. Dynamika procesu ceny obligacji jest równa:

$$dP_r^*(t,T) = P_r(t,T)dI(t) + I(t)dP_r(t,T) + d < P_r(*,T), I(*) >_t . \tag{5.13}$$

Przyjmując wcześniejsze oznaczenia nawias skośny jest równy:

$$d < P_r(*,T), I(*) >_t = I(t)\sigma_I(t)P_r(t,T)\sigma_r^*(t)\rho_{rI}dt.$$

Podstawiając:

$$\begin{aligned} dP_r^*(t,T) &= P_r(t,T)dI(t) + I(t)dP_r(t,T) + I(t)\sigma_I(t)P_r(t,T)\sigma_r^*(t)\rho_{rI}dt, \\ &= I(t)P_r(t,T)\bigg(\Big[r_r(t) + \sigma_r^*(t,T) + \frac{1}{2}||\sigma^*(t,T)||^2 + \mu_I(t) + \sigma_I(t)\sigma_r^*(t,T)\rho_{rI}\Big]dt \\ &+ \sigma^*(t)dW_r^P(t) + \sigma_I(t)dW_I^P(t)\bigg). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{dP_r^*(t,T)}{P_r^*(t,T)} = \Bigg(\Bigg[r_r(t)+\sigma_r^*(t,T)+\frac{1}{2}||\sigma^*(t,T)||^2+\mu_I(t)+\sigma_I(t)\sigma_r^*(t,T)\rho_{rI}\Bigg]dt+\sigma^*(t)dW_r^P(t)+\sigma_I(t)dW_I^P(t)\Bigg).$$

Dynamika procesu $P_r^*(t,T)$ dyskontowanego procesem $B_n(t)$ jest równa:

$$\begin{aligned}
d\Bigg(\frac{P_r^*(t,T)}{B_n(t)}\Bigg) &= \frac{dP_r^*(t,T)}{B_n(t)} - \frac{dB_n(t)P_r^*(t,T)}{B_n^2(t)}\\
&= \frac{dP_r^*(t,T)}{B_n(t)} - \frac{B_n(t)r_n(t)dtP_r^*(t,T)}{B_n^2(t)}\\
&= \frac{dP_r^*(t,T)}{B_n(t)} - \frac{P_r^*(t,T)r_n(t)dt}{B_n^2(t)}\\
&= \frac{P_r^*(t,T)}{B_n(t)}\Bigg[-r_n(t)dt + (r_r(t)+\alpha_r^*(t,T)+\frac{1}{2}||\sigma_r^*(t,T)||^2+\mu_I(t)+\sigma_I(t)\sigma_r^*(t,T)\rho_{rI})dt\\
&+ \sigma_r^*(t,T)dW_r^P(t)+\sigma_I(t)dW_I^P(t)\Bigg]\\
&= \frac{P_r^*(t,T)}{B_n(t)}\Bigg[(-r_n(t)+r_r(t)+\alpha_r^*(t,T)+\frac{1}{2}||\sigma_r^*(t,T)||^2+\mu_I(t)+\sigma_I(t)\sigma_r^*(t,T)\rho_{rI})dt\\
&+ \sigma_r^*(t,T)dW_r^P(t)+\sigma_I(t)dW_I^P(t)\Bigg]
\end{aligned}$$

Względem miary martyngałowej Q równoważnej mierze P:

$$d\Bigg(\frac{P_r^*(t,T)}{B_n(t)}\Bigg) = \frac{P_r^*(t,T)}{B_n(t)}[\sigma_r(t,T)dW_r^Q(t)+\sigma_I(t,T)dW_I^Q(t)],$$

gdzie

$$\begin{aligned}
W_r^Q(t) &= W_r^P(t) - \int_0^t \lambda_r(u)du,\\
W_I^Q(t) &= W_I^P(t) - \int_0^t \lambda_I(u)du.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy wówczas:

$$-r_n(t)+r_r(t)+\alpha_r^*(t,T)+\frac{1}{2}||\sigma_r^*(t,T)||^2+\mu_I(t)+\sigma_I(t)\sigma_I(t,T). \tag{5.14}$$

Różniczkując względem T:

$$-\alpha_r(t,T)+\sigma_r^*(t,T)\sigma_r(t,T)-\sigma_I(t,T)\rho_{rI}\sigma_r(t,T) = \lambda_r(t)\sigma_r(t,T) \tag{5.15}$$

Prowadzi nas to warunku dryfu względem stopy rzeczywistej:

$$\begin{aligned}
\alpha_r(t,T) &= \lambda_r(t)\sigma_r(t,T)+\sigma_r^*(t,T)\sigma_r(t,T)+\sigma_I(t,T)\rho_{rI}\sigma_r(t,T)\\
\alpha_r(t,T) &= \sigma_r(t,T)\Bigg[-\lambda_r(t)+\int_t^T \sigma_r(t,u)du-\sigma_I(t,T)\rho_{rI}\Bigg].
\end{aligned}$$

Ostatecznie względem miary rzeczywistej P dynamikę obligacji względem stopy rzeczywistej możemy zapisać jako:

$$\frac{dP_r(t,T)}{P_r(t,T)} = [r_r(t)+\sigma_r^*(t,T)(\sigma_I(t,T)\rho_{rI}-\lambda_r(t))]dt+\sigma_r^*(t,T)dW_r^P. \tag{5.16}$$

Zaś względem miary wolnej od ryzyka Q jako:

$$\frac{dP_r(t,T)}{P_r(t,T)} = [r_r(t) + \sigma_r^*(t,T)\sigma_I(t,T)\rho_{rI}]dt + \sigma_r^*(t,T)dW_r^Q. \tag{5.17}$$

■

Twierdzenie 5.3. ***Procesy cen względem miary martyngałowej spot***
Względem miary martyngałowej spot zachodzą następujące równości:

$$df_n(t,T) = -\sigma_n(t,T)\sigma_n^*(t,T)dt + \sigma_n(t,T)dW_n^Q(t) \tag{5.18}$$
$$df_r(t,T) = -\sigma_r(t,T)[\sigma_r^*(t,T) + \rho_{rI}\sigma_I(t)]dt + \sigma_r(t,T)dW_r^Q(t) \tag{5.19}$$
$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [r_n(t) - r_r(t)]dt + \sigma_I(t)dW_I^Q(t) \tag{5.20}$$
$$\frac{dP_n(t,T)}{P_n(t,T)} = r_n(t)dt + \sigma_n^*(t,T)dW_n^Q(t) \tag{5.21}$$
$$\frac{dP_r(t,T)}{P_r(t,T)} = [r_r(t) - \sigma_r^*(t,T)\sigma_I(t)\rho_{rI}]dt + \sigma_r^*(t,T)dW_r^Q(t) \tag{5.22}$$
$$\frac{dP_{IL}(t,T)}{P_{IL}(t,T)} := \frac{d(I(t)P_r(t,T))}{I(t)P_r(t,T)} = r_n(t)dt + \sigma_I(t)dW_I^Q(t) + \sigma_r^*(t,T)dW_r^Q(t). \tag{5.23}$$

Dowód. Dowód powyższych równości jest naturalną kontynuacją rozważań w dowodzie dla warunków koniecznych i wystarczających bezarbitrażowej struktury terminowej polegającym na zamianę miary na wolną ryzyka.

W strukturze terminowa obligacji względem stopy nominalnej otrzymaliśmy dynamikę względem stopy nominalnej przy mierze rzeczywistej P:

$$\frac{dP_n(t,T)}{P_n(t,T)} = [r_n(t) + \sigma_n^*(t,T)\lambda_n(t)]dt + \sigma_r^*(t,T)dW_n^P(t) \tag{5.24}$$

Względem miary wolnej od ryzyka Q otrzymujemy:

$$\frac{dP_n(t,T)}{P_n(t,T)} = r_n(t)dt + \sigma_n^*(t,T)dW_n^Q(t). \tag{5.25}$$

Z kolei dla struktury terminowej obligacji względem stopy realnej dynamika obligacji przy stopie rzeczywistej względem miary rzeczywistej P jest równa:

$$\frac{dP_r(t,T)}{P_r(t,T)} = [r_r(t) + \sigma_r^*(t,T)(\sigma_I(t,T)\rho_{rI} - \lambda_r(t))]dt + \sigma_r^*(t,T)dW_r^P, \tag{5.26}$$

zaś względem miary wolnej od ryzyka Q otrzymujemy:

$$\frac{dP_r(t,T)}{P_r(t,T)} = [r_r(t) + \sigma_r^*(t,T)\sigma_I(t,T)\rho_{rI}]dt + \sigma_r^*(t,T)dW_r^Q. \tag{5.27}$$

■

5.2. Uogólniony model Vasicka

Jednym z pierwszych modeli stopy krótkoterminowej jest model zaproponowany przez Vasička w roku 1977, w którym dynamika stopy r w mierze $\mathbb{P}^*$ jest zadana przez równanie:

$$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sigma dW_t^* \tag{5.28}$$

dla stałych $r_0, \theta, a, \sigma > 0$. Stopa krótkoterminowa w tym modelu ma tzw. *własność powrotu do średniej*: w przypadku, gdy $r_t < \frac{\theta}{a}$, dryf procesu jest dodatni; jeśli zaś $r_t > \frac{\theta}{a}$, to dryf jest ujemny. Zatem dla każdego t stopa krótkoterminowa r_t zbiega do wartości $\frac{\theta}{a}$.

Wadą modelu Vasička jest brak dokładnej możliwości dopasowania go do bieżącej struktury terminowej stóp procentowych. Aby dokładnie skalibrować model do rynkowych cen obligacji, musielibyśmy rozwiązać nieskończoną liczbę równań postaci

$$B(0,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)\right), \quad T \in [0,T^*], \tag{5.29}$$

co wymagałoby wprowadzenia nieskończenie wielu parametrów. Ten problem stanowił motywację dla Hulla i White'a do rozszerzenia modelu Vasička poprzez zastąpienie stałych parametrów funkcjami zależnymi od czasu i modelowanie stopy krótkoterminowej równaniem

$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t^*, \quad r_0, \tag{5.30}$$

gdzie funkcje $\theta, a, \sigma : [0,T^*] \to \mathbf{R}$ są ograniczone. *Uogólniony model Vasička*, daje możliwość dokładnej kalibracji do początkowej struktury terminowej stóp procentowych. Ponadto zachowuje on własność powrotu do średniej w tym sensie, że dla każdego t stopa krótkoterminowa r_t zbliża się do krzywej $\frac{\theta(t)}{a(t)}$ $(a(t) \neq 0)$. Parametr $a(t)$ bywa nazywany *parametrem powrotu do średniej.*

5.2.1. Rzeczywista i nominalna struktura terminowa w uogólnionym modelu Vasicka

Jarrow i Yildirim do modelowania stopy krótkoterminowej zarówno w podejściu nominalnym jak i realnym proponują zastosowanie uogólnionego modelu Vasicka.

Lemat 5.1. *Niech proces stopy krótkoterminowej r_k, gdzie $k \in \{n, r\}$ spełnia równie:*

$$dr_k(t) = (a_k(t) - b_k(t)r_k(t))dt + \sigma_k(t)dW_k^*(t), \tag{5.31}$$

gdzie W^* jest jednowymiarowym procesem Wienera zaś a_k, b_k, σ_k są lokalnie ograniczonymi funkcjami. Ponadto zakładamy, że funkcja zmienności przyjmuje następującą postać:

$$\sigma_k(t,T) = \sigma_k e^{-\kappa_k(T-t)}. \tag{5.32}$$

Ponadto niech:

$$a_k(t,T) = -\int_t^T \sigma_k(t,u)du = -\sigma_k \int_t^T e^{-\kappa_k(u-t)}du = -\sigma_k\beta_k(t,T), \tag{5.33}$$

gdzie

$$\beta_k(t,T) = \frac{1}{\kappa_k}[1 - e^{-\kappa_k(T-t)}]. \tag{5.34}$$

Wówczas nominalną i rzeczywista struktura terminowa jest równa:

$$P_n(t,T) = \frac{P_n(0,T)}{P_n(0,T)} \exp\left(\beta_n(t,T)[f_n(0,t) - r_n(t)] - \frac{\sigma_n^2}{4\kappa_n}\beta_n^2(t,T)[1 - e^{-2\kappa_n t}]\right), \tag{5.35}$$

$$P_r(t,T) = \frac{P_r(0,T)}{P_r(0,T)} \exp\left(\beta_r(t,T)[f_r(0,t) - r_r(t)] - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa_r}\beta_r^2(t,T)[1 - e^{-2\kappa_r t}]\right). \tag{5.36}$$

Dowód. Przy mierze martyngałowej Q równanie stopy forward dla $k \in \{n, r\}$ przyjmuje postać:

$$f_k(t,T) = f_k(0,T) + \sigma_k^2 \int_0^t \beta_k(s,T)e^{-\kappa_k(T-s)}ds + \sigma_k \int_0^t e^{-\kappa_k(T-s)}dW_k^Q(s). \tag{5.37}$$

Natomiast dla stopy krótkoterminowej $r_k = f_k(t,t)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} r_k(t) &= f_k(0,t) + \sigma_k^2 \int_0, t\beta_k(s,t)e^{-\kappa_k(T-s)}ds + \sigma_k \int_0^t e^{-\kappa_k(T-s)}dW_k^Q(s) \\ &= f_k(0,t) + \frac{\sigma_k^2}{2} \int_0^t \frac{\delta\beta_k^2(s,t)}{\delta t}ds + \sigma_k \int_0^t e^{-\kappa_k(T-s)}dW_k^Q(s) \\ &= f_k(0,t) + \frac{\sigma_k^2}{2}\frac{\delta}{\delta t}\left(\int_0^t \beta_k^2(s,t)ds\right) + \sigma_k \int_0^t e^{-\kappa_k(T-s)}dW_k^Q(s) \end{aligned}$$

Całkując stopę krótkoterminową dostajemy:

$$\int_0^t r_k(u)du = lnP_k(0,t) + \frac{\sigma_k^2}{2}\int_0^t \beta_k^2(s,t)ds + \int_0^t \left[\sigma_k \int_0^t e^{-\kappa_k(u-s)}dW_k^Q(s)\right]du \tag{5.38}$$

Wprowadzając proces $Y(t) = \int_0^t e^{as}dW_k^Q(s)$ możemy zapisać:

$$\begin{aligned} d(e^{-at}Y(t)) &= e^{-at}dY(t) - ae^{-at}Y(t)dt && (5.39)\\ &= dW_k^Q(t) - ae^{at}T(t)dt. && (5.40) \end{aligned}$$

Całkując dostajemy:

$$e^{-at}Y(t) = W_k^Q(t) - \int_0^t ae^{-au}Y(u)du. \tag{5.41}$$

Wracając do całkowania procesu stopy krótkoterminowej rozpisujemy część wyrażenia zawierającego podwójne całkowanie:

$$\begin{aligned} a\int_0^t \left[e^{-au}\int_0^u e^{as}dW_k^Q(s)\right]du &= W_k^Q(t) - e^{-at}\int_0^t e^{au}dW_k^Q(u) \\ &= \int_0^t \left(1 - e^{-a(t-u)}\right)dW_k^Q(u) \\ &= a\int_0^t \beta(u,t)dW_k^Q(u). \end{aligned}$$

Wobec powyższego całkę procesu stopy krótkoterminowej zapiszemy jako:

$$\int_0^t r_k(u)du = -\ln P_n(0,t) + \ln P_k(0,t) + \frac{\sigma_k^2}{2}\int_0^t \beta_k^2(s,t)ds + \sigma_k \int_0^t \beta_k(s,t)dW_k^Q(s). \tag{5.42}$$

Podstawiając wyprowadzany wzór do ceny obligacji zerokuponowej otrzymujemy:

$$P_k(t,T) = P_k(0,T)\exp\left[\int_0^t \left(r_k(t) - \frac{\sigma_k^2}{2}\beta_k^2(s,T)\right)ds - \sigma_k\int_0^t \beta_k(s,T)dW_k^Q(s)\right] \tag{5.43}$$

$$= \frac{P_k(0,T)}{P_k(0,t)}\exp\left[\frac{\sigma_k^2}{2}\int_0^t (\beta_k^2(s,t) - \beta_k^2(s,T))ds + \sigma_k\int_0^t (\beta_k(s,t) - \beta_k(s,T))dW_k^Q(s)\right] \tag{5.44}$$

Zajmiemy się teraz wyrażeniem wewnątrz funkcji exp. Oznaczmy:

$$\delta = \left[\frac{\sigma_k^2}{2}\int_0^t (\beta_k^2(s,t) - \beta_k^2(s,T))ds + \sigma_k\int_0^t (\beta_k(s,t) - \beta_k(s,T))dW_k^Q(s)\right] \tag{5.45}$$

Wartość $-\beta_k(t,T)r_k(t)$ jest równa:

$$-\beta_k(t,T)r_k(t) = -\beta_k(t,T)f_k(0,t) + \sigma_k^2\int_0^t [\beta_k^2(s,t) - \beta_k(s,T)\beta_k(s,t)]ds \tag{5.46}$$

$$+ \sigma_k\int_0^t [\beta_k(s,t) - \beta_k(s,T)]dW_k^Q(s). \tag{5.47}$$

Wracając do wyrażenia powyżej:

$$\delta = \beta_k(t,T)[f_k(0,t) - r_k(t)] - \frac{\sigma_k^2}{2}\int_0^t [\beta_k(s,t) + \beta_k(s,T)]^2 ds \tag{5.48}$$

$$= \beta_k(t,T)[f_k(0,t) - r_k(t)] - \frac{\sigma_k^2}{4\kappa_k}\beta_k^2(t,T)[1 - e^{-2\kappa_k t}] \tag{5.49}$$

Stąd dostajemy wzory na nominalną i rzeczywistą strukturę terminową:

$$P_n(t,T) = \frac{P_n(0,T)}{P_n(0,T)}\exp\left(\beta_n(t,T)[f_n(0,t) - r_n(t)] - \frac{\sigma_n^2}{4\kappa_n}\beta_n^2(t,T)[1 - e^{-2\kappa_n t}]\right), \tag{5.50}$$

$$P_r(t,T) = \frac{P_r(0,T)}{P_r(0,T)}\exp\left(\beta_r(t,T)[f_r(0,t) - r_r(t)] - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa_r}\beta_r^2(t,T)[1 - e^{-2\kappa_r t}]\right). \tag{5.51}$$

$\blacksquare$

5.3. Przegląd pozostałych podejść do modelowania inflacji

5.3.1. Modele rynku Mercuria

W 2004r. Mercurio przedstawił dwa modele rynkowe do modelowania instrumentów pochodnych indeksowanych do inflacji. Pierwsze z nich opiera się na podejściu do modelowania z zastosowaniem rynkowego modelu lognormalnego LIBOR do modelowania stóp procentowych zarówno dla krzywych nominalnych jak i rzeczywistych oraz indeksu inflacji procesem Wienera jak w przypadku modelu Jarrowa i Yildirima. Drugi model zaproponowany przez Merciuria wykorzystuje założenie, że stawki forwardowe indeksu inflacji są martyngałem w pewnym określonym okresie czasu.

5.3.2. Model Beldgrade-Benhamou-Koehlar Market

Model zaproponowany przez Belgrade, Benhamou i Koehler jest modelem rynkowym i opiera się na wykorzystaniu kwotowań instrumentów o dużej płynności. Podejście zakłada brak arbitrażu pomiędzy stawkami zerokuponowymi oraz Year-on-Year kontraktów swapowych. Dodatkowym założeniem jest niewielka ilość parametrów oraz replikowanie cen rynkowych. Stawki forward indeksu inflacji są modelowane stochastycznie ze zmienność zadaną deterministycznie. Rozważano dwa przypadku podejścia do zmienności: model Blacka Scholesa oraz Hulla White. W pierwszym z nich, gdzie zmienność jest zadana przez funkcję deterministyczną i jednorodną wyprowadzono wzór dla zmienności Year-on-Year jako funkcji zmienności zerokuponowej.

Rozdział 6

Wycena w modelu Jarrowa i Yieldirima

W poniższym rozdziale zostały omówione i wyprowadzone wzory na wyceny w modelu Jarrowa i Yieldirima dla podstawowych instrumentów indeksowanych do inflacji: swapa zerokuponowego, swapa Year-on-Year oraz opcji inflacyjnych.

6.1. Wycena zerokuponowego swapa indeksowanego do inflacji

Lemat 6.1. *Oznaczmy przez* $\boldsymbol{ZCIIS}(t, T_M, I_0, N)$ *proces wartości zerokuponowego swapa indeksowanego do inflacji o terminie zapadalności* T_M*, nominale* N *i początkowej wartości indeksu referencyjnego inflacji* I_0*. Wówczas cena takiego kontraktu w chwili t jest równa:*

$$\boldsymbol{ZCIIS}(t, T_M, I_0, N) = N\left[\frac{I(t)}{I_0}P_r(t, T_M) - P_n(t, T_M)\right]. \tag{6.1}$$

W szczególności cena w chwili 0 jest równa:

$$\boldsymbol{ZCIIS}(0, T_M, I_0, N) = N[P_r(0, T_M) - P_n(0, T_M)]. \tag{6.2}$$

Dowód. Korzystając z standardowej teorii wyceny bez arbitrażu w chwili t, dla czasu zapadalności T_M, przy wybranym indeksie referencyjnym I_0 i nominale kontraktu N otrzymujemy:

$$\mathbf{ZCIIS}(t, T_M, I_0, N) = N\mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_M} r_n(u)du}\left(\frac{I(T_M)}{I_0} - 1\right)\middle| F_t\right]. \tag{6.3}$$

Korzystając z zamiany numéraire dochodzimy do równości:

$$I(t)P_r(t, T_M) = I(t)\mathbb{E}^{Qr}\left[e^{-\int_t^{T_M} r_r(u)du}\middle| F_t\right] = I(t)\mathbb{E}^{Qn}I(t_M)\left[e^{-\int_t^{T_M} r_n(u)du}\left(\frac{I(T_M)}{I_0} - 1\right)\middle| F_t\right].$$

Skąd otrzymujemy wzór na cenę zerokuponowego swapa indeksowanego do inflacji:

$$\mathbf{ZCIIS}(t, T_M, I_0, N) = N\left[\frac{I(t)}{I_0}P_r(t, T_M) - P_n(t, T_M)\right]. \tag{6.4}$$

W szczególności w momencie $t = 0$ dostajemy:

$$\mathbf{ZCIIS}(0, T_M, I_0, N) = N[P_r(0, T_M) - P_n(0, T_M)]] \tag{6.5}$$

■

Ceny te nie zależą od żadnych założeń dynamik stóp procentowych i wynikają z braku arbitrażu na rynku. Dzięki temu krzywą realnej stopy dyskontowej możemy skalibrować do cen indeksowanych inflacją swapów zerokuponowych.

Lemat 6.2. *Niech $b(0, T_M)$ oznacza stopę rentowności kwotowaną na rynku dla terminu zapadalności T_M. Wówczas zależność między rzeczywistą $P_r(0, T_M)$ oraz nominalną $P_n(0, T_M)$ krzywą dyskontową opisuje równość:*

$$P_r(0, T_M) = P_n(0, T_M)[1 + b(0, T_M)]^{T_M}. \tag{6.6}$$

Dowód. Wchodząc w kontrakt swapowy wartość obu nóg jest w chwili początkowej $t = 0$ są równe. Otrzymujemy więc:

$$NP_n(0, T_M)[(1 + b(0, T_M))^{T_M} - 1] = N[P_r(0, T_M) - P_n(0, T_M)]].$$

A stąd zależność pomiędzy rzeczywistą i nominalną krzywą dyskontową możemy zapisać jako:

$$P_r(0, T_M) = P_n(0, T_M)[1 + b(0, T_M)]^{T_M}. \tag{6.7}$$

gdzie $b(0, T_M)$ oznacza stopę rentowności kwotowaną na rynku. ■

6.2. Wycena swapa Year-on-Year indeksowanego do inflacji

Lemat 6.3. *Oznaczmy przez* ***YYIIS***$(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N)$ *proces wartości przepływu swapa Year-on-Year indeksowanego do inflacji w okresie od (T_{i-1}, T_i), nominale N i frakcji roku ψ_i. Wówczas wartość przepływu w chwili t jest równa:*

$$\boldsymbol{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i \mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u)du} P_r(T_{i-1}, T_i) \middle| F_t\right] - N\psi_i P_n(t, T_i). \tag{6.8}$$

Dowód. Korzystając z uprzednio przedstawionej formuły wyceny dla instrumentów zerokuponowych cena pojedynczej nogi kontraktu Year-on-Year jest równa:

$$\mathbf{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i \mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u)du}\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right) \middle| F_t\right]. \tag{6.9}$$

Jeśli $t > T_{i-1}$ wartość $I(T_{i-1})$ jest znana. W takim przypadku wycena kontraktu YYIIS sprowadza do wyceny ZCIIS. W przeciwnym wypadku, jeżeli $t < T_{i-1}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbf{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) &= N\psi_i \mathbb{E}^{Qn}\left[\mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u)du}\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right) \middle| F_{T_{i-1}}\right] \middle| F_t\right] \\ &= N\psi_i \mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} r_n(u)du} \mathbb{E}^{Q_n}\left[e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_n(u)du}\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right) \middle| F_{T_{i-1}}\right] \middle| F_t\right].\end{aligned}$$

Przy czym prawda jest:

$$\mathbb{E}^{Q_n}\left[e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_n(u)du}\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right) \middle| F_{T_{i-1}}\right] = \mathbf{ZCIIS}(T_{i-1}, T_I, i(t_{I-1}), 1).$$

Stąd po podstawieniu wartości wyznaczonej w poprzednim rozdziale otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathbf{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) &= N\psi_i \mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u)du}[P_r(T_{i-1}, T_i) - P_n(T_{i-1,Ti})]\middle|F_t\right] \\ &= N\psi_i E^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u)du} P_r(T_{i-1}, T_i)\middle|F_t\right] - N\psi_i P_n(t, T_i).\end{aligned}$$

■

Uwaga 6.1. *Wyrażanie*

$$\mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u)du} P_r(T_{i-1}, T_i)\middle|F_t\right],$$

możemy interpretować jako cenę nominalną instrumentu wypłacającego w chwili T_{i-1} (w jednostkach nominalnych) realną cenę obligacji zerokuponowej o dacie zapadalności T_i. Zakładając, że stopa rzeczywista jest deterministyczna dostajemy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{Qn}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_n(u)du} P_r(T_{i-1}, T_i)\middle|F_t\right] &= P_n(t, T_{i-1})P_r(T_{i-1}, T_i) \qquad (6.10)\\ &= P_n(t, T_{i-1})\frac{P_r(t, T_i)}{P_r(t, T_{i-1})}. \qquad (6.11)\end{aligned}$$

W praktyce jednak założenie, że stopy rzeczywiste są deterministyczne jest nierealistyczne, więc wyprowadzony wcześniej wzór na cenę instrumentu Year-on-Year jest zależny od modelu.

6.3. Wycena swapa Year-on-Year Inflation Swap w modelu Jarrowa i Yieldirima

Lemat 6.4. *Wartość **YYIIS**$(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N)$ procesu pojedynczego przepływu swapa Year-on-Year indeksowanego do inflacji w okresie (T_{i-1}, T_i), nominale N i frakcji roku ψ_i w modelu Jarrowa i Yieldirima w chwili t jest równa:*

$$\boldsymbol{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i\left[P_n(t, T_{i-1})\frac{P_r(t, T_2)}{P_r(t, T_1)}e^{C(t,T_1,T_2)} - P_n(t, T_i)\right],$$

gdzie:

$$\begin{aligned}C(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma_r\beta_r(T_{i-1}, T_i)\Bigg[&\beta_r(t, T_{i-1})\left(\rho_{rI}\sigma_I - \frac{1}{2}\beta_r(t, T_{i-1}) + \frac{\rho_{nr}\sigma_n}{\kappa_r + \kappa_n}(1 + a_r\beta_n(t, T_{i-1}))\right)\\ &- \frac{\rho_{nr}\sigma_n}{\kappa_r + \kappa_n}\beta_n(t, T_{i-1})\Bigg].\end{aligned}$$

Dowód. Z poprzedniej sekcji wiemy, że:

$$\mathbf{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i(P_n(t, T_{i-1})\mathbb{E}^{T_{i-1}}[P_r(T_{i-1}, T_i)|F_t] - P_n(t, T_i)).$$

Dynamika procesu $P_r(t, T_2)$ przy mierze martyngałowej $T_1 - forward$ możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned}P_r(t, T_2) = P_r(0, T_2)\exp&\left(\int_0^t (r_r(s) - a_r(s, T_2)\sigma_I(s)\rho_{rI} + a_r(s, T_2)a_n(s, T_1)\rho_{nr})ds\right)\\ &* \exp\left(-\int_0^t \frac{a_r^2(s, T_2)}{2}ds + \int_0^t a_r(s, T_2)dW_r^{T_1}(s)\right).\end{aligned}$$

Korzystając z eksponenty stochastycznej:

$$\mathcal{E}(X(t)) = exp\bigg(X(t) - \frac{1}{2} < X, X >_t\bigg).$$

otrzymujemy:

$$\frac{P_r(t,T_2)}{P_r(t,T_1)} = \frac{P_r(0,T_2)}{P_r(0,T_1)}\mathcal{E}\bigg(\int_0^t [a_r(s,T_2) - a_r(s,T_1)]dW_r^{T_1}(s)\bigg)$$
$$* \, exp\bigg(\int_0^t [a_r(s,T_2) - a_r(s,T_1)][a_n(s,T_1)\rho_{nr} - \sigma_I(s)\rho_{rI} - a_r(s,T_1)]ds\bigg)$$

Przyjmując $t = T_1$ mamy:

$$P_r(T_1,T_2) = \frac{P_r(0,T_2)}{P_r(0,T_1)}\mathcal{E}\bigg(\int_0^{T_1} [a_r(s,T_2) - a_r(s,T_1)]dW_r^{T_1}(s)\bigg)$$
$$* \, exp\bigg(\int_0^{T_1} [a_r(s,T_2) - a_r(s,T_1)][a_n(s,T_1)\rho_{nr} - \sigma_I(s)\rho_{rI} - a_r(s,T_1)]ds\bigg)$$

Co jest równoważne:

$$P_r(T_1,T_2)|\mathcal{F}_t = \frac{P_r(t,T_2)}{P_r(t,T_1)}\mathcal{E}\bigg(\int_0^{T_1} [a_r(s,T_2) - a_r(s,T_1)]dW_r^{T_1}(s)\bigg) * e^{C(t,T_1,T_2)}$$

gdzie:

$$C(t,T_1,T_2) = \int_0^{T_1} [a_r(s,T_2) - a_r(s,T_1)][a_n(s,T_1)\rho_{nr} - \sigma_I(s)\rho_{rI} - a_r(s,T_1)]ds.$$

Stąd:

$$\mathbb{E}^{T_1}[P_r(T_1,T_2)|\mathcal{F}_t] = \frac{P_r(t,T_2)}{P_r(t,T_1)}e^{C(t,T_1,T_2)}$$

Oczekiwana przyszła cena rzeczywista obligacji zerokuponowej względem miary forwardowej jest równa obecnej realnej cenie forwardowej pomnożonej przez czynnik korygujący. Czynnik ten zależy od zmienności i korelacji stopy nominalnej, rzeczywistej i indeksu inflacyjnego. Podstawiając otrzymujemy cenę kontraktu Year-on-Year:

$$\mathbf{YYIIS}(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,N) = N\psi_i\bigg[P_n(t,T_{i-1})\frac{P_r(t,T_2)}{P_r(t,T_1)}e^{C(t,T_1,T_2)} - P_n(t,T_i)\bigg]$$

gdzie korelacja jest równa:

$$C(t,T_{i-1},T_i) = \sigma_r\beta_r(T_{i-1},T_i)\bigg[\beta_r(t,T_{i-1})\bigg(\rho_{rI}\sigma_I - \frac{1}{2}\beta_r(t,T_{i-1}) + \frac{\rho_{nr}\sigma_n}{\kappa_r+\kappa_n}(1 + a_r\beta_n(t,T_{i-1}))\bigg)$$
$$- \frac{\rho_{nr}\sigma_n}{\kappa_r+\kappa_n}\beta_n(t,T_{i-1})\bigg],$$

gdzie:

$$\beta_k(t,T) = \frac{1}{\kappa_k}[1 - e^{-\kappa_k(T-t)}].$$

■

Lemat 6.5. *Oznaczmy przez* $\boldsymbol{YYIIS}(0,T,\psi,N)$ *proces wartości swapa Year-on-Year indeksowanego do inflacji o nominale* N*, gdzie* $T = T_1, T_2, ..., T_M$ *oznacza zbiór kolejnych daty zapadalności zaś* $\psi = \psi_1, \psi_2, ..., \psi_M$ *kolejne frakcje roku oraz niech* $\tau(t) = min\{i : T_i > t\}$*. Wówczas wartość kontraktu w chwili* t *jest równa:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{YYIIS}(0,T,\psi,N) &= N\psi_{\tau(t)}\left[\frac{I(t)}{I(T_{\tau(t)-1})}P_r(0,T_{\tau(t)}) - P_n(0,T_{\tau(t)})\right] \\ &+ N\sum_{i=\tau(t)+1}^{M}\psi_i\left[P_n(0,T_{i-1})\frac{P_r(0,T_i)}{P_r(0,T_{i-1})}e^{C(0,T_{i-1},T_i)} - P_n(0,T_i)\right].\end{aligned}$$

W szczególności cena swapa Year-on-Year w chwili $t = 0$ *jest równa:*

$$\boldsymbol{YYIIS}(0,T,\psi,N) = N\psi_1[P_r(0.T_1) - P_n(0,T_1)] \tag{6.12}$$

$$+ N\sum_{i=2}^{M}\psi_i\left[P_n(0,T_{i-1})\frac{P_r(0,T_i)}{P_r(0,T_{i-1})}e^{C(0,T_{i-1},T_i)} - P_n(0,T_i)\right]. \tag{6.13}$$

Dowód. Ponieważ cena swapa Year-on-Year w chwili t jest sumą wszystkich przyszłych przepływów powyższy formuła na cenę swapa Year-on-Year w modelu Jarrowa Yieldirima jest naturalną konsekwencją wcześniejszego lematu. ■

6.3.1. Opcja inflacyjna Cap/Floor

Lemat 6.6. *Oznaczmy przez* $\mathbf{ILCFLT}(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,K,N,\omega)$ *proces wartości płatności capletu/floretu (*$\omega = 1$ *dla capletu,* $\omega = -1$ *dla flooretu) o nominale* N *za okres od* T_{i-1} *do* T_i*, frakcji roku* ψ_i *oraz cenie wykonania* K*. Wówczas wartość kontraktu w chwili* t *jest równa:*

$$\begin{aligned}\mathbf{ILCFLT}(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,K,N,\omega) &= \omega N\psi_i P_n(t,T_i)\left[\frac{P_n(t,T_{i-1})}{P_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_{i-1})}{P_r(t,T_i)}e^{C(t,T_{i-1},T_i)}\right. \\ &\left.\Phi(\omega d_1(t)) - K\Phi(\omega d_2(t))\right] \\ d_1(t) &= \frac{ln\frac{P_n(t,T_{i-1})}{P_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_{i-1})}{P_r(t,T_i)} + C(t,T_{i-1},T_i) + \frac{1}{2}V^2(t,T_{i-1},T_i)}{V(t,T_{i-1},T_i)} \\ d_2(t) &= d_1 - V(t,T_{i-1},T_i),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}C(t,T_{i-1},T_i) = \sigma_r\beta_r(T_{i-1},T_i)&\left[\beta_r(t,T_{i-1})\left(\rho_{rI}\sigma_I - \frac{1}{2}\beta_r(t,T_{i-1}) + \frac{\rho_{nr}\sigma_n}{\kappa_r+\kappa_n}(1 + a_r\beta_n(t,T_{i-1}))\right)\right. \\ &\left.- \frac{\rho_{nr}\sigma_n}{\kappa_r+\kappa_n}\beta_n(t,T_{i-1})\right].\end{aligned}$$

oraz $V^2(t,T_{i-1},T_i)$ *oznacza wariancję zmiennej* $ln\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\right)$.

Dowód. W modelu Jarrowa-Yieldirima jednym z podstawowych założeń jest log-normalność rozkładu procesu inflacji $I(t)$ przy mierze martyngałowej spot Q. Oznacza to, że zmiana indeksu inflacyjnego pomiędzy momentami płatności $\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}$ również ma rozkład log-normalny przy mierze martyngałowej forward.

Fakt 6.1. *Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład log-normalny ze średnią $\mathbb{E}(X) = \mu$ i wariancją v^2 oraz Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego wówczas spełniona jest równość:*

$$\mathbb{E}[(\omega(X-K))^+] = \omega m\Phi\left(\omega\frac{ln\frac{\mu}{K}+\frac{1}{2}v^2}{v}\right) - \omega K\Phi\left(\omega\frac{ln\frac{\mu}{K}-\frac{1}{2}v^2}{v}\right). \tag{6.14}$$

W naszym przypadku procesowi X odpowiada zmiana wartości procesu inflacji:

$$X = \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}.$$

Jeżeli wartość proces korelacji zadamy w analogiczny sposób jak przy wycenie swapa Year-on-Year wartośc oczekiwaną zmiany indeksu inflacji w okresie (T_{i-1}, T_i) możemy zapisać jako:

$$\mathbb{E}^{T_i}\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\middle|F_t\right) = \frac{P_n(t,T_{i-1})}{P_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_i)}{P_r(t,T_{i-1})}e^{C(t,T_{i-1},T_i)}. \tag{6.15}$$

Zmiana miary nie wpływu na wariancję, możemy więc obliczyć ją przy mierze martyngałowej:

$$Var^{T_i}\left[ln\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\right)\middle|F_t\right] = V^2(t,T_{i-1},T_i). \tag{6.16}$$

Wobec powyższego cena Capletu/Flooretu jest równa:

$$\begin{aligned}\mathbf{ILCFLT}(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,K,N,\omega) = \omega N\psi_i P_n(t,T_i)\Bigg[&\frac{P_n(t,T_{i-1})}{P_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_{i-1})}{P_r(t,T_i)}e^{C(t,T_{i-1},T_i)}\\ &\Phi(\omega d_1(t)) - K\Phi(\omega d_2(t))\Bigg],\end{aligned}$$

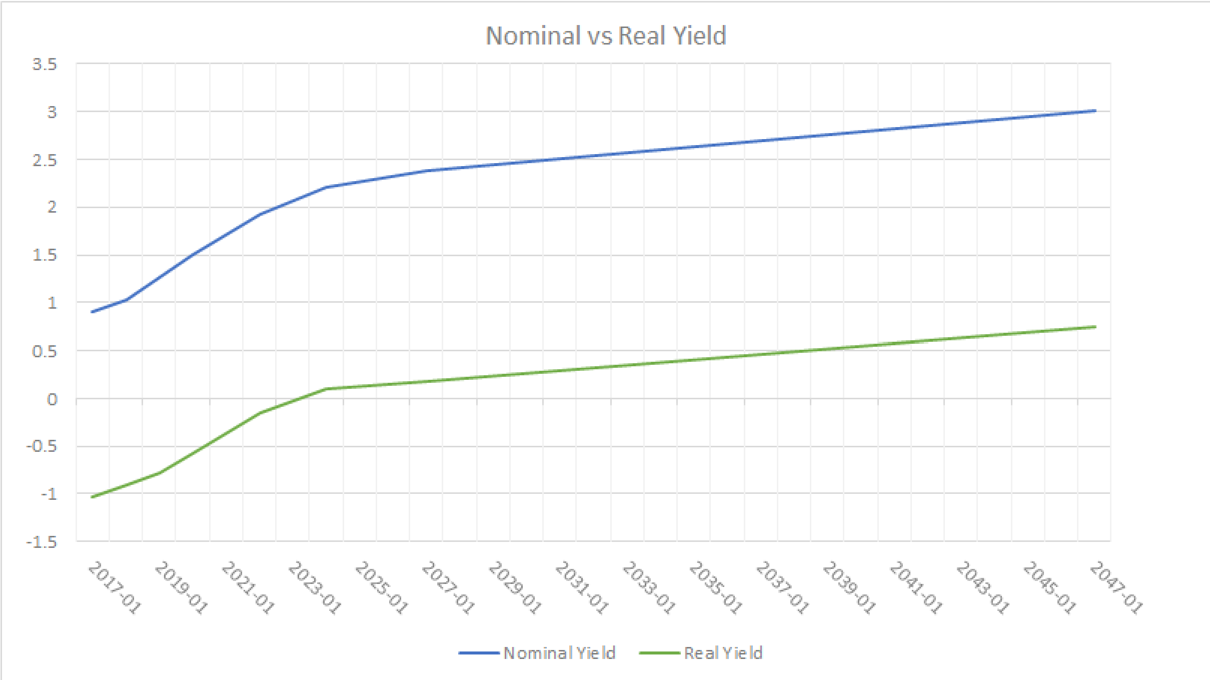
gdzie:

$$\begin{aligned}d_1(t) &= \frac{ln\frac{P_n(t,T_{i-1})}{P_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_{i-1})}{P_r(t,T_i)} + C(t,T_{i-1},T_i) + 0.5V^2(t,T_{i-1},T_i)}{V(t,T_{i-1},T_i)},\\ d_2(t) &= d_1 - V(t,T_{i-1},T_i).\end{aligned}$$

■

Wniosek 6.1. *Podobnie jak w przypadku swapów Year-on-Year cena zależy od wahań rzeczywistych stóp procentowych.*

6.4. Nominalna i rzeczywista struktura terminowa



Rysunek 6.1: Wykresy struktury terminowej stopy procentowej w ujęciu nominalnym i rzeczywistym.

Kalibracja krzywej nominalnej dla US CPI ZC Bond na dzień 2017-04-01 (dane Reuters) oraz US Gov Yield Curve na dzień 2017-04-01.

Podsumowanie

Rynek produktów linkowanych do inflacji jest częścią gospodarki szybko rozwijającą się oraz odpowiada na potrzebę instytucji efektywnie i racjonalnie zarządzających ryzykiem finansowym. Instrumenty finansowe powiązane z inflacją są ważne w szczególności dla instytucji, które identyfikują ryzyko inflacyjne w procesie zarządzania ryzykiem: fundusze emerytalne, fundusze Private Equity, hedgingowe, banki państwowe i komercyjne oraz spółki skarbu państwa

Podstawą zrozumienia i przeprowadzenia wyceny instrumentów pochodnych powiązanych z inflacją jest teoria modelowania stóp procentowych bazująca na ujęciu modelowania w świecie krzywych nominalnych oraz rzeczywistych. W pracy został opisany sposób podejścia do modelowania inflacji oraz konstrukcji krzywych projekcyjnych indeksu zmiany cen a także najważniejszy z modeli wyceny instrumentów powiązanych z inflacją - model Jarrowa i Yildirim. Stanowi on punkt wyjścia do budowy innych modeli wycen instrumentów inflacyjnych.

Bazowym instrumentem zapewniającym zabezpieczenie przed ryzykiem inflacji jest obligacja indeksowana do inflacji. Ponadto na rynku dostępne są także instrumenty pochodne powiązane z procesem inflacji:

- swap zerokuponowy,
- swap Year-on-Year,
- opcje cap oraz floor.

W pracy zostały wyprowadzone wzory na wartości wycen wyżej wymienionych kontraktów w modelu Jarrowa i Yildirima a także przedstawione ceny bazujące na danych dostępnych na rynku.

Motywację do podjęcia tematu modelowania inflacji i instrumentów pochodnych indeksowanych do inflacji stanowił fakt, że na rynku polskim instrumenty te są mało znane i niezrozumiałe. Powyższa praca ta jest pierwszą opisującą aparat matematyczny i podejście do modelowania w języku polskim.

Literatura

[1] N. Belgrade, E. Benhamou, *Smart Modeling of the Inflation Market: Taking into Account the Seasonality , Risk Magazine, Inflation Risk*, Risk Magazine, Inflation Risk, Supplement, 2004.

[2] M. Hinnerich, *Inflation indexed swaps and swaptions*, Journal of Banking and Finance, 2008.

[3] R. Jarrow, Y. Yildirim, *Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivatives using an HJM Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 38(2), 2003, 409-430.

[4] F. Mercurio, *Pricing Inflation-Indexed Derivatives*, Quantitative Finance, 2005.

[5] F. Mercurio, N. Moreni, *Inflation with a smile.* Risk March, Vol. 19(3), 2006, 70-75.

[6] J. Jakubowski , A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner, *Matematyka finansowa*, WNT, Warszawa, 2003.

[7] D. Brigo, F. Mercurio, *Interest Rate Models: Theory and Practice*, 2nd Ed., Springer, Berlin Heidelberg, 2006.

[8] N.G. Mankiw, M.P.Taylor, *Makroekonomia*, PWE, Warszawa, 2009.