Coloration optimale de graphes

Travaux d'études et de recherches

Michaël Gabay

Tutrice : Nadia Brauner

Laboratoire : G-SCOP

26 mai 2010

Coloration des sommets

Colorier un graphe c'est attribuer une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents (i.e. reliés par une arête) soient de couleurs différentes.

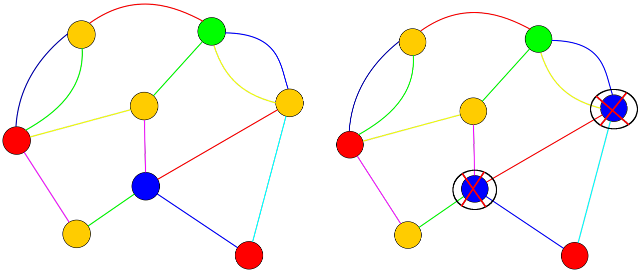

FIG. 1: Une bonne et une mauvaise coloration

Nombre chromatique

Le nombre chromatique est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier un graphe.

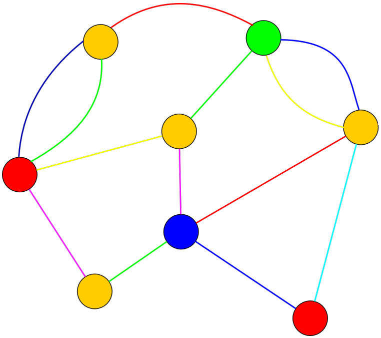

FIG. 2: Une bonne coloration et une coloration optimale

Complexité du problème

Déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque est un problème $\mathcal{NP} - complet$

Objectifs :

- Mettre en place des méthodes utilisant des outils à la pointe pour colorier optimalement des graphes

Objectifs :

- Mettre en place des méthodes utilisant des outils à la pointe pour colorier optimalement des graphes
- Déterminer les limites de la coloration optimale

- Modélisation du problème en **Programme Linéaire en Nombres Entiers** (PLNE)
- Implémentation et résolution du problème en utilisant un solveur (`CPLEX`)
- Validation et tests de performances
- Optimisations

- Modélisation du problème en **Programme Linéaire en Nombres Entiers** (PLNE)
- Implémentation et résolution du problème en utilisant un solveur (`CPLEX`)
- Validation et tests de performances
- Optimisations
- Modélisation du problème en utilisant la **Programmation Par Contraintes** (PPC)
- Implémentation et résolution du problème en utilisant des solveurs (`CHOCO` - `CP`)
- Validation et tests de performances
- Optimisations

- Modélisation du problème en **Programme Linéaire en Nombres Entiers** (PLNE)
- Implémentation et résolution du problème en utilisant un solveur (`CPLEX`)
- Validation et tests de performances
- Optimisations
- Modélisation du problème en utilisant la **Programmation Par Contraintes** (PPC)
- Implémentation et résolution du problème en utilisant des solveurs (`CHOCO` - `CP`)
- Validation et tests de performances
- Optimisations
- Campagne de tests de performances

Programme linéaire en nombre entiers :

$$\begin{cases} \min z & \\ c_i \leq z & \forall i \in V \\ c_i \leq c_j - 1 + n \times y_{i,j} & \forall (i,j) \in E \\ c_j \leq c_i - 1 + n \times (1 - y_{i,j}) & \forall (i,j) \in E \\ y_{i,j} \in \{0, 1\} & \forall (i,j) \in E \\ c \in (\mathbb{N}^*)^{|V|} & \end{cases} \tag{1}$$

Programme par contraintes :

$$\begin{cases} \min z & \\ c_i \leq z & \forall i \in V \\ c_i \neq c_j & \forall (i,j) \in E \\ c \in (\mathbb{N}^*)^{|V|} & \end{cases} \tag{2}$$

Théorème

Dans un graphe simple G de n sommets et m arêtes, on a :

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}$$

Le théorème donne une minoration du nombre chromatique (très puissante lorsque le graphe est dense).

- Fixer la couleur du premier sommet

- Fixer la couleur du premier sommet
- Utiliser la minoration obtenue par le théorème précédent

- Fixer la couleur du premier sommet
- Utiliser la minoration obtenue par le théorème précédent
- Ajout des contraintes conditionné à l’existence d’une arête

- Fixer la couleur du premier sommet
- Utiliser la minoration obtenue par le théorème précédent
- Ajout des contraintes conditionné à l'existence d'une arête
- Contraintes de non adjacence des couleurs pour $j > i$ seulement

- Fixer la couleur du premier sommet
- Utiliser la minoration obtenue par le théorème précédent
- Ajout des contraintes conditionné à l'existence d'une arête
- Contraintes de non adjacence des couleurs pour $j > i$ seulement
- Ajout la contrainte $y_{i,j} = 1 - y_{j,i}$

- Fixer la couleur du premier sommet
- Utiliser la minoration obtenue par le théorème précédent
- Ajout des contraintes conditionné à l'existence d'une arête
- Contraintes de non adjacence des couleurs pour $j > i$ seulement
- Ajout la contrainte $y_{i,j} = 1 - y_{j,i}$
- Ajout de la coupe $c_i \leq i$

- Fixer la couleur du premier sommet
- Utiliser la minoration obtenue par le théorème précédent
- Ajout des contraintes conditionné à l'existence d'une arête
- Contraintes de non adjacence des couleurs pour $j > i$ seulement
- Ajout la contrainte $y_{i,j} = 1 - y_{j,i}$
- Ajout de la coupe $c_i \leq i$
- Test de la coupe $c_i \leq d(v_i) + 1$ (inéfficace - retirée)

- Fixer la couleur du premier sommet
- Utiliser la minoration obtenue par le théorème précédent
- Ajout des contraintes conditionné à l'existence d'une arête
- Contraintes de non adjacence des couleurs pour $j > i$ seulement
- Ajout la contrainte $y_{i,j} = 1 - y_{j,i}$
- Ajout de la coupe $c_i \leq i$
- Test de la coupe $c_i \leq d(v_i) + 1$ (inéfficace - retirée)
- Prise en compte d'une clique dans la coloration

Instances de tests :

- instances du challenge DIMACS de coloration de graphes (problème des *n* reines, allocation de registres, book graphs, graphes de Mycielski)
- graphes aléatoires générés dont la répartition des arêtes suit une loi uniforme

Clique trouvée en utilisant une heuristique basique.

Résolution testée avec `CPLEX` 10 et 12.

Trois modèles utilisés : PLNE en prennant en compte la clique trouvée par l'heuristique et sans la prendre en compte et PPC.

Résultats :

- Très nette supériorité de la résolution en utilisant `CP` (PPC) sur la résolution utilisant `CPLEX` (PLNE).

Résultats :

- Très nette supériorité de la résolution en utilisant `CP` (PPC) sur la résolution utilisant `CPLEX` (PLNE).
- Grande sensibilité de la résolution à la structure du graphe.

Résultats :

- Très nette supériorité de la résolution en utilisant `CP` (PPC) sur la résolution utilisant `CPLEX` (PLNE).
- Grande sensibilité de la résolution à la structure du graphe.
- Sensibilité de la résolution à l'ordre des sommets.

Résultats :

- Très nette supériorité de la résolution en utilisant `CP` (PPC) sur la résolution utilisant `CPLEX` (PLNE).
- Grande sensibilité de la résolution à la structure du graphe.
- Sensibilité de la résolution à l'ordre des sommets.
- La résolution est généralement plus rapide en prennant en compte une clique.

Résultats :

- Très nette supériorité de la résolution en utilisant `CP` (PPC) sur la résolution utilisant `CPLEX` (PLNE).
- Grande sensibilité de la résolution à la structure du graphe.
- Sensibilité de la résolution à l'ordre des sommets.
- La résolution est généralement plus rapide en prennant en compte une clique.
- Une solution optimale est très rapidement trouvée (même lorsque le calcul ne termine pas).

Résultats :

- Très nette supériorité de la résolution en utilisant `CP` (PPC) sur la résolution utilisant `CPLEX` (PLNE).
- Grande sensibilité de la résolution à la structure du graphe.
- Sensibilité de la résolution à l'ordre des sommets.
- La résolution est généralement plus rapide en prennant en compte une clique.
- Une solution optimale est très rapidement trouvée (même lorsque le calcul ne termine pas).
- On peut avec assurance colorier optimalement des graphes ayant moins de 50 sommets avec les trois méthodes.

Limites :
Avec une densité de $\frac{1}{2}$, on peut aller avec confiance jusqu'à 50 sommets avec les trois modèles et 75 sommets en utilisant la programmation par contraintes.
On peut aller beaucoup plus loin dans la plupart des cas.

Résolution améliorable :
Meilleure heuristique pour clique voire algorithme exact.

Pistes :
Algorithmes spécialisés.
Utilisation d'une "heuristique exacte" : allouer un temps à la résolution exacte et passé ce temps prendre la meilleure coloration trouvée.

Merci.

- C. Berge.
  Graphes et hypergraphes.
  Dunod, Paris, 1970.
- T.R. Jensen and B. Toft.
  Graph coloring problems.
  Bull. Amer. Math. Soc. 33.
- Wikipedia.
  http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page.
- Michael Trick's Operations Research Page.
  http://mat.tepper.cmu.edu/.
- CHOCO.
  http:
  //www.emn.fr/z-info/choco-solver/index.html.