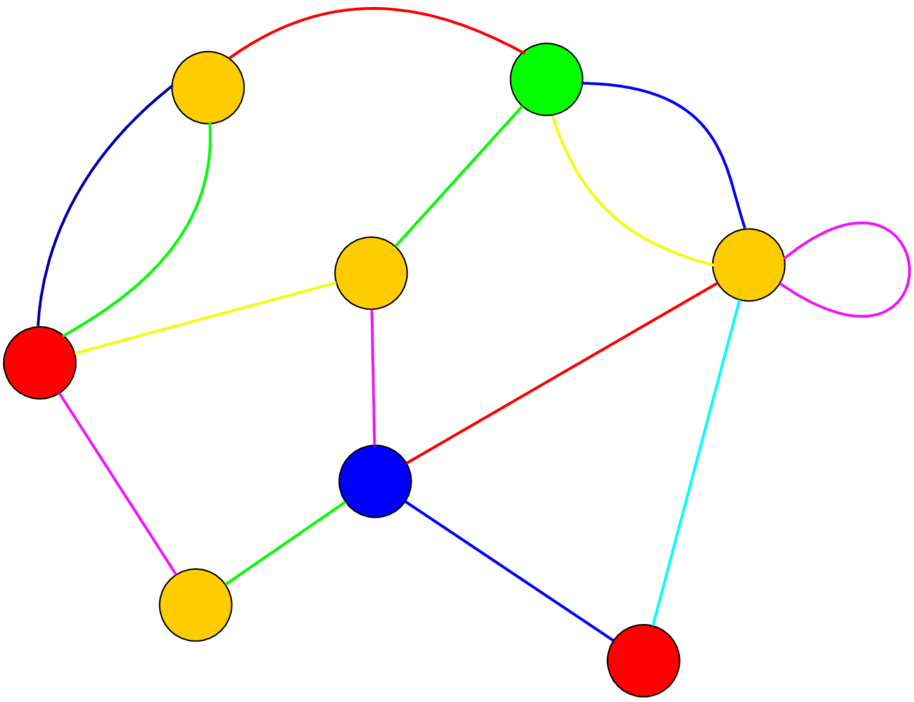
TER : Coloration de graphes

Notes

Tuteur :
Nadia Brauner

Etudiant :
Michaël Gabay



Laboratoire G-SCOP

Année 2010

Table des matières

1 Bibliographie **2**

1.1 Définitions générales 2

1.2 Etude générale 2

1.2.1 Coloration des arêtes 2

1.2.2 Coloration des sommets 3

1.2.3 Graphes χ-critiques 4

1.2.4 Construction de Hajós 6

1.2.5 Dénombrement des colorations : polynômes chromatiques 6

1.2.6 Coloration de graphes planaires 7

1.3 Étude spécifique 7

2 Idées **9**

1 Bibliographie

1.1 Définitions générales

Graphe $G(X, E)$.

Définition 1 (Ensemble d'articulation)**.** Si $G(X, E)$ est connexe et $A \in X$ est tel que G_{X-A} n'est plus connexe, alors A est un ensemble d'articulation de G.

Définition 2 (Pièces)**.** Les composantes connexes $C_1, ...C_p$ de G_{X-A} définissents des graphes connexes : $G_{C_1 \cup A}, ..., G_{C_p \cup A}$ appelés les pièces (relativement à A).

Définition 3 (Stable)**.** $S \in X$ est stable si deux sommets distincts de S ne sont jamais adjacents, i.e. : $\Gamma_G(S) \cap S = \varnothing$.

Définition 4 (Nombre de stabilité)**.** Soit $\mathcal{S}$ la famille des ensembles stables du graphe, le nombre de stabilité du graphe G est :

$$\alpha(G) = \underset{S \in \mathcal{S}}{max} |S|$$

Définition 5 (Graphe planaire)**.** Un graphe G est planaire s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples, et que deux arêtes ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.

Définition 6 (Base d'un graphe)**.** B est une base de $G(X, U)$ si :

1. il n'existe pas de chemin reliant deux sommets distincts de B
2. Tout sommet $x \notin B$ est l'extrémité initiale d'un chemin aboutissant dans B

Définition 7 (Point d'articulation)**.** Sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes

Définition 8 (Isthme)**.** Arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes

Définition 9 (Bloc)**.** Ensemble de sommets A qui engendre un sous-graphe G_A connexe, sans points d'articulation, et maximal avec cette propriété.

Définition 10 (Graphe parfait)**.** Graphe tel que pour tout sous-graphe induit, le nombre chromatique est égal à la taille de la plus grande clique.

1.2 Etude générale

Livre : cf [1].

1.2.1 Coloration des arêtes

Référence : [2] + cf notes écrites

1.2.2 Coloration des sommets

Référence : [3]

Définition 1 (Nombre chromatique)**.** Plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier les sommets, de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de même couleur. Désigné par $\chi(G)$.

Définition 2 (Graphe k-chromatique)**.** Graphe tel que $\chi(G) \leq k$.

Algorithmes pour la recherche du nombre chromatique

Principe des reliements-contractions : Soient a et b deux sommets de G non adjacents, on appelle *reliement* le graphe $\tilde{G} = G \cup [a, b]$. On appelle contraction le graphe $\bar{G}$ obtenu en assimilant $\{a, b\}$ à un sommet unique $c(a, b)$ joint à tout sommet $x \neq a, b$ de G adjacent à a et/ou b.

Dans tout coloration de G, ou bien les sommets a et b ont la même couleur (et alors c'est une coloration de $\bar{G}$) ou bien ils sont de couleurs différents (et alors c'est une coloration de $\tilde{G}$).

En répétant le processus des reliements-contractions autant que possible pour $\bar{G}$ et $\tilde{G}$ considérés séparément, on finira par obtenir des graphes qui sont des cliques, et pour lesquels le nombre chromatique est nécessairement égal au nombre de sommets. Si la plus petit clique obtenue est une k-clique, on a : $\chi(G) = k$.

Principe de la séparation des pièces : Si au cours de la procédure de reliements-contractions, on obtient un graphe admettant comme ensemble d'articulation une clique A, la suppression de A crée des composantes connexes $C_1, C_2, \ldots$; on remarque alors que les sous-graphes $G_{A \cup C_1} = H_1$, $G_{A \cup C_2} = H2, \ldots$ peuvent être coloriés séparément à condition de faire coïncider les couleurs des sommets de A dans chaque sous-graphe.

Théorème 1. *Si G est un graphe d'ordre n, on a :* $\begin{cases} \chi(G) * \alpha(G) & \geq n \\ \chi(G) + \alpha(G) & \leq n + 1 \end{cases}$

Théorème 2 (Gaddum, Nordhaus, 1960)**.** *Si $\bar{G}$ est le graphe simple complémentaire du graphe simple G, on a :*

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$$

De plus, cette borne est la meilleur possible.

Corollaire 1. *Si $\bar{G}$ est le graphe simple complémentaire d'un graphe simple G d'ordre n, on a :*

$$\chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Cette borne est la meilleur possible.

Théorème 3. *Dans un graphe simple G de n sommets et m arêtes, on a :*

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}$$

Théorème 4 (Roy, 1967 ; Gallai, 1968)**.** *Etant donné un graphe simple $G = (X, E)$ avec $\chi(G) = q$, pour toute orientation des arêtes il existe un chemin élémentaire de longueur $\geq q - 1$; en outre, pour une certaine orientation, il n'existera pas de chemin de longueur $> q - 1$.*

Corollaire 2. *Si G est un graphe simple coloré avec $q = \chi(G)$ couleurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, il existe une chaîne élémentaire qui rencontre successivement les q couleurs α_i dans cet ordre.*

Remarque 1. Le théorème 4 implique l'existence d'un chemin hamiltonien dans un graphe complet.

Théorème 5. *Si dans un graphe simple G, une partition $(S_1, S_2, \ldots, S_q)$ est une q-coloration (pas forcément minimale) et si l'on pose $d_k = \underset{x \in S_k}{max}\ d_G(x)$, alors :*

$$\chi(G) \leq \underset{k \leq q}{max}\ min\{k, d_k + 1\}$$

Corollaire 1. *Soit G un graphe simple dont les sommets sont indexés de sorte que $d_G(x_1) \geq d_G(x_2) \geq \cdots \geq d_G(x_n)$. Si, pour un entier $q \geq 0$, le nombre de sommets de degré $\geq q + 1$ est $\leq q + 1$ (et en particulier, pour $q \leq n - 2$, si $d_G(x_{q+2}) \leq q$), alors on a $\chi(G) \leq q + 1$.*

Corollaire 2. *Si G est un graphe simple de degré maximum h, on a $\chi(G) \leq h + 1$.*

Remarque 1 (Utilisation du théorème 5 pour une meilleure borne sup)**.** Trouver une k-coloration $(S_1, \ldots, S_k)$ telle que S_1 un ensemble stable maximal qui contient beaucoup de sommets de degrés élevés, S_2 ensemble stable maximal de $X - S_1$ qui contient le plus possible de sommets de degrés élevés...

Remarque 2 (Gamme des degrés étendue)**.** Lorsque $\xi = |\{d_G(x)/x \in X\}|$ est élevé, cette méthode est intéressante :

$$\left[\left[\frac{\xi}{2}\right]\frac{1}{n - \xi}\right] + 1 \leq \chi(G) \leq n - \left[\frac{\xi}{2}\right]$$

Théorème 6 (brooks, 1941)**.** *Soit G un graphe simple de degré maximum h, qui n'admet pas pour composante connexe une $(h + 1)$-clique (ni, si $h = 2$, un cycle impair) ; alors on a $\chi(G) \leq h$.*

1.2.3 Graphes χ-critiques

Définition 3 (Graphe χ-critique)**.** Un graphe G simple est dit χ-critique si pour tout sommet x_0, le sous-graphe G_0 engendré par $X - \{x_0\}$ a un nombre chromatique $\chi(G_0) < \chi(G)$.

Propriété 1. *Dans tout graphe G avec $\chi(G) = q + 1$, il existe un sous-graphe χ-critique avec $\chi(G) = q + 1$.*

Propriété 2. *Dans un graphe simple χ-critique avec $\chi(G) = q + 1$, le degré de chaque sommet x vérifie :*

$$d_G(x) \geq q$$

Propriété 3. *Un graphe χ-critique est connexe.*

Propriété 4. *Un graphe χ-critique n'admet pas une clique pour ensemble d'articulation.*

Propriété 5. *Un graphe χ-critique n'admet pas de points d'articulation.*

Propriété 6. *Si G est χ-critique et avec $\chi(G) = q+1$ et si $A = \{a, b\}$ est un ensemble d'articulation de deux éléments, il y a exactement deux pièces $B'_1 et B'_2$ relatives à cet ensemble d'articulation, et on a :*

$$\chi(B'_1) = \chi(B'_2) = q$$

Propriété 7. *SI G est χ-critique avec $\chi(G) = q + 1 \geq 4$, et si $A = \{a, b, c\}$ est un ensemble d'articulation de trois éléments :*

1. *S'il y a une arête dans A : cet ensemble d'articulation admet au plus 3 pièces, et celles-ci sont de nombre chromatique q.*
2. *S'il y a deux arête dans A : cet ensemble d'articulation admet au plus 2 pièces, et celles-ci sont de nombre chromatique q.*
3. *S'il y a trois arête dans A, G n'est pas χ-critique (prop 4).*
4. *S'il n'y a pas d'arêtes dans A : cet ensemble d'articulation admet au plus 5 pièces, et celles-ci sont de nombre chromatique q ou $q - 1$.*

Propriété 8. *Un graphe $G = (X, E)$, χ-critique, avec $\chi(G) = q + 1$, ne peut être disconnecté par l'élimination de $q - 1$ arêtes ; autrement dit :*

$$m_G(A, X - A) \geq q \quad (A \in X, A \neq \varnothing, X).$$

Théorème 7. *Si G est un graphe χ-critique avec $\chi(G) = q + 1$, on a $d_G(x) \geq q$ pour tout x et le sous-graphe G_M engendré par $M = \{x/x \in X, d_G(x) = q\}$ a pour chacun de ses blocs soit une clique soit un cycle impair sans cordes.*

Théorème 8 (Dirac, 1952)**.** *Si G est un graphe de nombre chromatique $\chi(G) = q+1$, sans cliques de $q + 1$ éléments, et si l'on pose $S = \{x/d_G(x) > q\}$, alors on a :*

$$\sum_{x \in S} (d_G(x) - q) \geq q - 2$$

Corollaire 1. *Si G est χ-critique avec $\chi(G) = q + 1$ et sans cliques de $(q + 1)$ éléments, alors le nombre n de sommets et le nombre m des arêtes vérifient :*

$$2m \geq (n + 1)q - 2$$

1.2.4 Construction de Hajós

Définition 4 (Contraction élémentaire)**.** Soit G un graphe simple ; on appelle contraction élémentaire sur G tout opération qui consiste à retirer deux sommets adjacents a et b de G et à ajouter un sommet c que l'on relie à tous les sommets de $\Gamma_G(a) \cup \Gamma_G(b)$

***Conjecture* 1** (Hadwiger, 1943)**.** *Tout graphe G connexe avec $\chi(G) = q$ peut devenir un graphe complet à q sommets au moyen de contractions élémentaires.*

Transformation de Hajós
Permet de construire à partir d'une $(q+1)$-clique tous les graphes qui ne sont pas q-chromatiques.

Soit $\mathcal{G}_q$ la classe de graphes tels que $\chi(G) > q$. On considère les trois opérations suivantes sur $\mathcal{G}_q$:

1. On ajoute des arêtes et des sommets à $G \in \mathcal{G}_q$.
2. Soient G_1 et G_2 deux graphes disjoints de $\mathcal{G}_q$, soient a_1, b_1 deux sommets adjacents dans G_1 et soient a_2, b_2 adjacents dans G_2 ; on enlève l'arête $[a_1, b_1]$ dans G_1, l'arête $[a_2, b_2]$ dans G_2, on identifie a_1 et a_2, et l'on joint b_1 et b_2 par une arête.
3. On contracte en un seul point deux sommets non adjacents du graphe $G \in \mathcal{G}_q$.

Théorème 9 (Hajós, 1961)**.** *Tout graphe G tel que $\chi(G) > q$ peut être obtenu à partir de la $(q+1)$-clique K_{q+1} à l'aide des opérations 1, 2 et 3.*

1.2.5 Dénombrement des colorations : polynômes chromatiques

$G = (X, E)$ un graphe, $x_1, \ldots, x_n$ ses sommets.

Définition 5 (Nombre de λ-colorations)**.** Nombre d'application $f(x) : X \longrightarrow \{1, 2, \ldots, \lambda\}$ telles que :

$$[x, y] \in E \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

Définition 6 (Polynôme chromatique de G en λ)**.** Fonction $P(G; \lambda)$ qui exprime le nombre des λ-colorations de G.

Remarque 1. On désigne par $[\lambda]_n : \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1)$.

Propriété 1. *Soit a, b deux sommets non adjacents du graphe G, soit $\tilde{G}$ le graphe obtenu à partir de G en reliant a et b par une nouvelle arête, et soit $\bar{G}$ le graphe obtenu à partir de G en contractant $\{a, b\}$. On a :*

$$P(G; \lambda) = P(\tilde{G}; \lambda) + P(\bar{G}; \lambda)$$

Corollaire 1. *Si G est un graphe d'ordre n, la fonction $P(G; \lambda)$ est un polynôme de degré n en λ ; en outre, le terme en λ^n a pour coefficient 1 et le terme constant est nul.*

Propriété 2. *Si un graphe G admet p composantes connexes $H_1, \ldots, H_p$, on a :*

$$P(G;\lambda) = \prod_{i=1}^{p} P(H_i;\lambda)$$

Propriété 3. *Si un graphe G admet un ensemble d'articulations A qui est une k-clique, avec q pièces $H_1, \ldots, H_q$ relativement à A, alors :*

$$P(G,\lambda) = ([\lambda]_k)^{1-q} \prod_{i=1}^{q} P(H_i;\lambda)$$

Théorème 10. *Les coefficients de $P(G;\lambda)$ sont alternativement ≥ 0 et ≤ 0.*

Corollaire 1. *Si G est un graphe d'ordre n avec m arêtes, le coefficient de λ^{n-1} est $-m$.*

Théorème 11. *Un graphe G d'ordre n est un arbre si et seulement si $P(G;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$*

1.2.6 Coloration de graphes planaires

Résultats :

1. Un graphe planaire qui ne contient pas quatre cycles de longueur 3 est coloriable avec 3 couleurs (Grünbaum, 1963).
2. Un graphe planaire sans cycles de longueur 3 est coloriable avec 3 couleurs (Grötzsch, 1958).

Théorème 12. *Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 5$.*

Théorème 13 (des quatre couleurs)**.** *Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.*

Théorème 14. *Si G est un graphe simple planaire à faces triangulaires et si les degrés sont tous des multiples de 2 (ou tous des multiples de 3), alors $\chi(G) \leq 4$.*

1.3 Étude spécifique

Référence : cf [4]
$G = (V, E)$

Définition 7 (Coloring number)**.** $col(G)$ is the smallest number d s.t. for some linear ordering $<$ of the vertex set ; the "back degree" $|\{y : y < x, xy \in E(G)\}|$ of every vertex x is strictly less than d.
i.e. if $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, then :

$$col(G) = 1 + \underset{p}{min}\underset{i}{max}\{d(x_{p(i)}, G_{p(i)}\}$$

where the minimum is taken over all permutations p of $\{1, 2, \ldots, ni\}$, and $G_{p(i)}$ is the subgraph induced by $\{x_{p(1)}, \ldots, x_{p(i)}\}$, and where $d(x, H)$ denotes the degree of a vertex x in a graph H.

The coloring number can be computed in polynomial time.

Théorème 15 (Hajnal, Szemerédi, 1970)**.** *A graph G may be colored by $\Delta(G)+1$ colors s.t. for any 2 colors i and j, where $1 \leq i \leq j \leq \Delta(G)+1$, the numbers of vertices of color i and color j differ by at most one.*

Théorème 16 (König, [1916,1936])**.** *Un graphe est 2-colorable ssi il n'admet pas de cycle impair.*

Théorème 17 (Dirac, [1957])**.** *Soit G un graphe k-critique. Si $k \geq 4$ et $G \neq K_k$, alors :*

$$2|E(G)| \geq (k-1)|V(G)| + (k-3)$$

Le nombre chromatique d'un graphe parfait peut être calculé en temps polynomial (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1981).
MAIS :
EST_PARFAIT $\in$ ***co-NP*** et on ne sait pas si EST_PARFAIT appartient au moins à ***NP*** (cf [4] p142).

Théorème 18 (Perfect Graph Theorem. [Lovász, 1972])**.** *A graph is perfect if and only if its complement is perfect.*

Définition 8. An induced cycle of odd length at least 5 is called an **odd hole**. An induced subgraph that is the complement of an odd hole is called an **odd antihole**. A graph that does not contain any odd holes or odd antiholes is called a **Berge graph**.

Théorème 19 (Strong Perfect Graph Theorem. [Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul D. Seymour, Robin Thomas])**.** *A graph is perfect if and only if it is a Berge graph (i.e. ni lui ni son complémentaire ne contiennent de cycle impair induit de longueur au moins cinq).*

Théorème 20 (Minty, 1962)**.** *A graph G is k-colorable if and only if G has an orientation in which the flow ratio of any cycle C (i.e. the maximum of m/n and n/m, where n is the number of edges of C pointing in one direction and m is the number of edges of C pointing in the opposite direction is at most $k-1$.*

Théorème 21 (Roy [1967], Gallai [1968])**.** *A graph G is k-colorable if and only if G has an orientation in which the length of every directed path is at most $k-1$.*

There exists a function g and a polynomial alorithm that for any given input graph G will find a number s, s.t. the $s \leq \chi(G) \leq g(s)$.
Proven by Alon, 1993 by replacing $\chi(G)$ by the list-chromatic number $\chi_l(G)$

2 Idées

L'identification d'un graphe planaire se fait en $O(n)$: `http://en.wikipedia.org/wiki/Planarity_testing`
La coloration avec 6 couleurs se fait en $O(n)$ (cf [4] p33).
La coloration avec 5 couleurs se fait en $O(n^2)$ (cf [4] p33).

Références

[1] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris, 1970.

[2] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*, chapter 12. Indice chromatique, pages 236–259. Dunod, Paris, 1970.

[3] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*, chapter 15. Nombre chromatique, pages 314–346. Dunod, Paris, 1970.

[4] T.R. Jensen and B. Toft. Graph coloring problems. *Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996), 287-288. DOI : 10.1090/S0273-0979-96-00651-9 PII : S 0273-0979 (96) 00651-9 Copyright of article : Copyright 1996, American Mathematical Society*, 1996.