

[Preparación] Algoritmos de Euclides

Antes de empezar necesitamos un sistema para cálculo del máximo común divisor (mcd en castellano, gcd en inglés) de dos números, y el inverso de un anillo cíclico. Ambas cosas se conocen desde hace tiempo: son dos "algoritmos de Euclides".

No es preocupado de entender ningún algoritmo de esta sección, simplemente ejecutadlos porque los necesitaremos para el resto de ejercicios.

Máximo común divisor

Algoritmo de Euclides para determinar el máximo común divisor (gcd por sus siglas en inglés) de dos enteros a y b

```
In [3]: def gcd(a, b):
        while b != 0:
            a, b = b, a % b
        return a

print('gcd(2, 3) = ', gcd(2, 3))
print('gcd(20, 30) = ', gcd(20, 30))
print('gcd(60729, 48184) = ', gcd(60729, 48184))

gcd(2, 3) = 1
gcd(20, 30) = 10
gcd(60729, 48184) = 2536
```

Inverso multiplicativo de un número en un anillo cíclico \mathbb{Z}_p

Un inverso multiplicativo en un anillo cíclico en ϕ de un número a es un número a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} \bmod \phi = 1$

Recuerda que `mod` es la operación módulo, es decir, divide un número entre otro y quedáste solo con el resto.

Por ejemplo: $(3 \cdot 5 \bmod 7) = (15 \bmod 7) = 1$ porque 15 entre 7 son 2 (que esto no nos importa) y **de resto 1**. Por tanto 5 es el inverso de 3 en \mathbb{Z}_7 .

```
In [4]: def multiplicative_inverse(a, phi):
        d = 0
        x1 = 0
        x2 = 1
        y1 = 1
        temp_phi = phi

        while a > 0:
            temp1 = temp_phi // a
            temp2 = temp_phi - temp1 * a
            temp_phi = a
            a = temp2

            x = x2 - temp1 * x1
            y = y2 - temp1 * y1

            x2 = x1
            x1 = x
            y2 = y1
            y1 = y

        if temp_phi == 1:
            return d + phi
        else:
            return None

print('3*(-1) mod 7 = ', multiplicative_inverse(3, 7))
print('3*(-1) mod 10 = ', multiplicative_inverse(3, 10))
print('7*(-1) mod 10 = ', multiplicative_inverse(7, 10))
print('7*(-1) mod 15 = ', multiplicative_inverse(7, 15))

3*(-1) mod 7 = 6
3*(-1) mod 10 = 7
```

```

24: 21 (3) mod 18 = None
25: 24 (3) mod 18 = 6

```

Test de si un número es primo

Algoritmo de testeo muy ineficiente de si un número es primo, pero que nos servirá en nuestros ejercicios porque usaremos números pequeños.

```

In [5]: def is_prime(num):
        if num <= 2:
            return True
        if num < 2 or num % 2 == 0:
            return False
        for n in range(3, int(num**0.5) + 2, 2):
            if num % n == 0:
                return False
            return True

        for i in [2, 3, 5, 15, 25, 222, 314, 317]:
            print(f'{i}: ', is_prime(i))

2: True
3: True
15: True
25: False
222: False
314: False
317: True

```

RSA

Bien, ya tenemos todo lo necesario para poder hacer los ejercicios.

RSA es un algoritmo de cifrado asimétrico. Es decir, tiene dos claves: una para cifrar y otra diferente para descifrar. Puede usarse tanto para cifrar una información como para firmar digitalmente un documento.

RSA está compuesto por dos funciones sencillas:

- Una función que genera el par de claves necesario. Da como resultado dos claves, una se podrá hacer pública y la otra tiene que permanecer siempre privada.
- Una función que cifra, que es la misma función que para descifrar pero usando la otra clave.

¡Aquí vemos los dos algoritmos. Fíjate qué sencilla es la función para cifrar o descifrar.

```

In [6]: import random

def generate_keypair(p, q):
    if not (is_prime(p) and is_prime(q)):
        raise ValueError('Both numbers must be prime.')

```

```

def p = q:
    raise ValueError('p and q cannot be equal')
elif p % q:
    n = p // q
    while n == q:
        n = p // q
    #phi is the totient of n
    phi = (p - 1) * (q - 1)

    # Choose an integer e such that e and phi(n) are coprime
    e = random.randrange(1, phi)

    # Use Euclid's Algorithm to verify that e and phi(n) are coprime
    g = gcd(e, phi)
    while g != 1:
        e = random.randrange(1, phi)
        g = gcd(e, phi)

    # Use Extended Euclid's Algorithm to generate the private key
    d = multiplicative_inverse(e, phi)

```

```

def generate_public_and_private_keys(p, q):
    """Generate public and private keys for RSA encryption.
    Returns (e, n), (d, n)"""

    def encrypt(pk, number):
        # Unpack the key into it's components
        key, n = pk
        return (number ** key) % n

    # The decrypt function is exactly the same than the encrypt function
    decrypt = encrypt

    En los ejemplos usaremos como parámetros de configuración 17 y 23, dos números primos que simplemente sirven para configurar el algoritmo inicialmente. Cuanto más grandes sean, mayor será el tamaño en bits de la clave. Como estamos usando algoritmos poco eficientes para aprender, no usamos números demasiado altos.

In [17]: pk, sk = generate_keypair(17, 23)
print(f'Clave pública pk(e, n): {pk}')
print(f'Clave privada o secreta sk(d, n): {sk}')

Clave pública pk(e, n): (271, 391)
Clave privada o secreta sk(d, n): (229, 391)

Fijen si generamos dos par de claves, aunque usemos los mismos primos, obtenemos unas claves diferentes. Eso es porque el parámetro n se escoge al azar

In [18]: pk, sk = generate_keypair(17, 23)
print(f'Clave pública pk(e, n): {pk}')
print(f'Clave privada o secreta sk(d, n): {sk}')

Clave pública pk(e, n): (281, 391)
Clave privada o secreta sk(d, n): (345, 391)

Vamos a intentar cifrar un texto sencillo:

In [19]: print(encrypt(pk, 'hola'))

-----
TypeError
Call 20(s), line 1                                     Traceback (most recent call last)
----> 1 print(encrypt(pk, 'hola'))

Call 20(s), line 32, in encrypt(pk, number)
    30 def encrypt(pk, number):
    31     # Unpack the key into it's components
    32     key, n = pk
----> 23     return (number ** key) % n

TypeError: unsupported operand type(s) for **: pow() 'str' and 'int'

No podemos: RSA solo puede cifrar enteros. Una posibilidad es codificar el mensaje como un conjunto de enteros

In [20]: msg = [ord(c) for c in 'hola']
print(f'mensaje = {msg}')

c = [encrypt(pk, n) for n in msg]
print(f'cifrado = {c}')

mensaje = [104, 112, 105, 97]
cifrado = [125, 291, 232, 66]

¿Qué pasa si intentamos cifrar varias veces lo mismo?

In [21]: print([encrypt(pk, ord(c)) for c in 'aaaa'])

[66, 66, 66, 66]

```

El texto cifrado es siempre igual. Pocas veces querremos eso. RSA debe usarse siguiendo recomendaciones como PKCS#1. Lo veremos un poco más abajo.

(semi) Homomorfismo

RSA es semihomomórfico con la multiplicación: se pueden hacer cálculos con los números cifrados, aunque no sepas lo que son ni qué resultado tienes. Al descifrar, el resultado es correcto. Más detalles: <https://iberseguridad.com/guia/prevencion-proteccion/cifrado/homomorfico/>

Por ejemplo, vamos a multiplicar los mensajes cifrados `c1` y `c2`, que son los cifrados de 5 y 2 respectivamente

```
In [12]: m1 = 5
         c1 = encrypt(pk, m1)
         print(f"encrypt(pk, {m1}) = {c1}")
         print(f"decrypt(sk, {c1}) = {decrypt(sk, c1)}")

encrypt(pk, 5) = 148
decrypt(sk, 148) = 5
```

```

c2 = encrypt(pk, m2)
print(f'encrypt(pk, m2) = {c2}')
print(f'decrypt(sk, c2) = {decrypt(sk, c2)}')
```

```

encrypt(pk, 2) = 376
decrypt(sk, 376) = 2
```

```

In [14]: c1 = c1 * c2
          print(f'c1 = {c1}, c2 = {c2}, cm = {cm}')

c1 = 148; c2 = 376; cm = 65648
```

Un atacante no sabe cómo vale $c1 \cdot c2$, ni sabe qué valor tiene cm , pero sabe que, sea lo que sea, ha multiplicado $c1$ y $c2$ y cuando se descifre el resultado va a ser correcto

```

In [15]: print(f'decrypt(sk, c1 * c2) = m1 * m2 = {m1} * {m2} = {decrypt(sk, cm)}')
```

```

decrypt(sk, c1 * c2) = m1 * m2 = 5 * 2 = 10
```

Según la utilidad, el semihomomorfismo puede ser así o no:

- Sistemas PET (private enhanced technologies) necesitan calcular sin descifrar. Por ejemplo, voto electrónico
- Pero en general no queremos que un atacante pueda multiplicar una orden de pago por otro número y que el resultado sea válido: recomendaciones PKCS#1

PyCryptoDome

La función de arriba es para jugar y solo sirve para ver cómo funciona RSA a alto nivel.

Vamos a usar PyCryptoDome, que incluye una librería RSA real.

Mide cuánto tiempo necesitamos para generar las claves ya más dígitos de 2048 y 4096 bits. Prueba a generar claves mayores, de 10384 bits, por ejemplo, que es similar en seguridad al cifrado AES de 256 bits.

```
In [14]: !python2 -m pip install pycryptodome

# Clave de 2048 bits
import hashlib
```

```

start2048 = timeit.default_timer()

from Crypto.PublicKey import RSA
key2048 = RSA.generate(2048)
key2048

stop2048 = timeit.default_timer()

print('Tiempo para generar una clave de 2048 bits: ', stop2048 - start2048)

Requirement already satisfied: pycryptodome in /home/gattaca/.cache/pypoetry/virtualenvs/crypto-626d6c0b-py3.10/lib/python3.10/site-packages (3.17)

[notice] A new release of pip is available: 23.0 -> 23.1
[notice] To update, run: pip install --upgrade pip
Tiempo para generar una clave de 2048 bits: 0.6507128210167968

In [17]: # Clave de 4096 bits
start4096 = timeit.default_timer()
```

```
key4096 = RSA.generate(4096)

stop4096 = timeit.default_timer()

print("Tiempo para generar una clave de 4096 bits: ", stop4096 - start4096)

Tiempo para generar una clave de 4096 bits: 2.715338264941238

In [18]: start = timeit.default_timer()
key = RSA.generate(8192)
stop = timeit.default_timer()
print("Tiempo para generar una clave de 8192 bits: ", stop - start)

Tiempo para generar una clave de 8192 bits: 29.330083863065713

In [23]: start = timeit.default_timer()
key = RSA.generate(16384)
stop = timeit.default_timer()
print("Tiempo para generar una clave de 16384 bits: ", stop - start)
```

```

KeyError: Traceback (most recent call last)
Cell In[2], line 2
      1 start = timeit.default_timer()
--> 2 key = RSA.generate(1024)
      3 stop = timeit.default_timer()
      4 print(f"Tiempo para generar una clave de 1024 bits: ", stop - start)

File ~/anaconda/Python37/Scripts/cryptography-3.0.0a0_V0-py3.10/lib/python3.10/site-packages/Crypto/PublicKey/RSA.py:402, in generate(bits, randfunc, e)
    400 def generate(bits):
    401     """Generate a random RSA keypair.
    402     """
    403     (candidate + min, n) =
    404     (candidate - 1) * p * q) == 1 and
    405     abs(candidate - p) < min.distance
--> 406     generate_probable_prime(candidate, bits, randfunc,
    407                               randfunc, randfunc)
    408     prime_list = filler(q)
    409     n = p * q
    410     lcm = (p - 1) * lcm(q - 1)

```

```

File # /cache/zypper/virt/talenes/cryptos-8Max_Vb-py3.10/lib/python3.10/site-packages/CryptoMath/Primalty.py:234, in generate_probable_prime(candidate)
232     if not is_prime_tester(candidate):
233         continue
234     result = test_probable_prime(candidate, randfunc)
235     return candidate

File # /cache/zypper/virt/talenes/cryptos-8Max_Vb-py3.10/lib/python3.10/site-packages/CryptoMath/Primalty.py:272, in test_probable_prime(candidate, randfunc)
269 except IndexError:
270     w = iterations + 1
271     >> 25 if miller_rabin_test(candidate, w, iterations):
272         randfunc=randfunc) == COMPOSITE:
273
274     return COMPOSITE
275 if lucas_test(candidate) == COMPOSITE:

File # /cache/zypper/virt/talenes/cryptos-8Max_Vb-py3.10/lib/python3.10/site-packages/CryptoMath/Primalty.py:180, in miller_rabin_test(candidate, iterations, randfunc)
178 answer = 0
179 if lucas_test(candidate) == COMPOSITE:
180     return 0
181 >> 25 if randfunc(candidate) == COMPOSITE:
182     if i in (0, 1, 2, 3, 4):
183         continue

```

```

File ~/c:\python\virtualenvs\crypto-8Max-Vb-py3-10\lib\site-packages\CryptoMath_IntegerGMP.py:450, in IntegerGMP.__pow__(self, exponent, modulus)
448 def __pow__(self, exponent, modulus=None):
449     """ self ** exponent mod modulus """
--> 450     return result.inplace_pow(exponent, modulus)

File ~/c:\python\virtualenvs\crypto-8Max-Vb-py3-10\lib\site-packages\CryptoMath_IntegerGMP.py:442, in IntegerGMP.inplace_pow(self, exponent, modulus)
440     elif exponent is negative:
441         raise ValueError("Exponent must not be negative")
--> 442         gmp_pow_mod(self._mpz_ptr,
443                     self._mpz_ptr,
444                     exponent, self._mpz_ptr)
445     return self
446 return self
modulus._mpz_ptr]

KeyboardInterrupt:

```

Ejercicios

Hemos visto cómo crear claves con PyCryptoDome, pero no cómo usarlo para cifrar o descifrar.

Recomienda a las transparencias que no es recomendable utilizar RSA "de forma pura", es decir, sin tener en cuenta muchas consideraciones sobre padding, conversiones, longitudes... que se recogen en [PKCS#1](#). De hecho, PyCryptoDome no nos va a dejar utilizar el `chacha` y descifrado directamente:

Observa que la línea siguiente da un error, avisando que uses el módulo `Crypto.Cipher.PKCS1_OAEP`:

```
In [10]: keyD4B.encrypt(b'holá', None)
```

```
Traceback (most recent call last):
  File "<ipython-input-10-1>", line 1, in <module>
    keyD4B.encrypt(b'holá', None)
  File "/usr/lib/python2.7/site-packages/Crypto/PublicKey/RSA.py", line 412, in RSAKey.encrypt(self, plaintext, K)
```

[illegible]

1. Una posibilidad es cifrar cada carácter por separado y descifrarlos también por separado, como hemos hecho antes. ¿Cuánto ocupa el cifrado, en bytes?

Respuesta. El cifrado debería ocupar no más de 256 bytes, dado que 2048 bits / 8 bits = 256 bytes. También habría que restarle 11 bytes de Padding por utilizar PKCS#1. Entonces 256 - 11 = 244 bytes por cifrado

```
[ 2]: def byte_length(int):
    """
    Calcula los bytes ocupados por un entero
    """
    return (1.bit_length() + 7) // 8

# Utilizamos bit_length en vez de getsizeof para verificar cuanto realmente ocupan los enteros
# Ver: https://python-reference.readthedocs.io/en/latest/docs/int/bit_length.html
encrypted = (byte_length(key) * len(msg)) * 8 + len("hola")
print(f"Tamaño del texto 'hola' encriptado por partes: {encrypted}")

Tamaño del texto 'hola' encriptado por partes: 256, 256, 256, 256
```

2. Otra posibilidad es codificar la cadena como un enorme entero, es decir, cada carácter representa un byte de un número entero: `msg = int.from_bytes(b"¡hola mundo!", "big")` ¿Cuánto ocupa el cifrado, en bytes?

Respuesta: Evidentemente, la misma cantidad (256 bytes) dado que muestra que en de 2048 + RSA cifra los datos hasta el tamaño máximo de nuestro key size.

```
[22]: msg = int.from_bytes("hola mundo", "big")
      encrypted = bytes2048_encrypt(msg)
      print(f"tamaño del texto encriptado: {encrypted}")

Tamaño del texto encriptado: 256
```

3. ¿Puedes probar el método anterior para cifrar una cadena realmente larga, como `msg = int.from_bytes(b"holaa mundo" * 1000, "big")` ? ¿Por qué crees que no funciona? ¿Cómo lo harías?

```
[23]: # DEMOSTRACION
      msg = int.from_bytes("holaa mundo" * 1000, "big")
      print(f"tamaño del texto desencriptado: {bytes2048_decrypt(msg)}")

Tamaño del texto desencriptado: 1000
```

```
[24]: encrypted = bytes2048_encrypt(msg)
```

```
print("Tamaño del texto encriptado: (byte_length(encrypted))*")

# El tamaño del texto encriptado es 1011 bytes
ValueError: Traceback (most recent call last):
Cell In[24], line 1
----> 1 print("Tamaño del texto encriptado: (byte_length(encrypted))*")
2 print("Tamaño del texto encriptado: (byte_length(encrypted))*")

File ~/cabe/zyper/cyrt/ruins/zyper/rsa.py:304, in rsa_encrypt(self, plaintext)
303     return int(pow(Integer(plaintext), self.e, self.n))
304
--> 305 raise ValueError("Plaintext too large")
306
307 return int(pow(Integer(plaintext), self.e, self.n))

ValueError: Plaintext too large
```

- Para encriptar mis datos de nuestro límite, podríamos utilizar un **citafado muto**:
 - Generar una random key **K** de 256 bits
 - Encriptar nuestros datos (en texto plano) con esa **K**, utilizando AES (CBC u OFB) o ChaCha20
 - Encriptar **K** con RSA
 - Enviar **K** y nuestros datos encriptados previamente al receptor

Vamos a hacer las cosas bien: cifra "hola mundo" * 1000 usando PKCS1. Encontrarás en ejemplo en la documentación de pyCryptoDome: <https://pycryptodome.readthedocs.io/en/latest/src/cipher/oaep.html>

```
[25]: from Crypto.Cipher import PKCS1_OAEP
from Crypto.PublicKey import RSA
msg = b'hola mundo'

# Generamos la key inicial en formato privado y público
```

[illegible][illegible][illegible]

Cifrado híbrido

En el caso de TLS siempre un cifrado híbrido: ciframos con RSA a clave AES que usamos para cifrar el resto.

1. Bob: Crea key de clave RSA
2. Alice: Crea clave simétrica AES. Cifra la clave AES con la clave pública de Bob. Envía mensaje
3. Alice: cifra "hola mundo" con clave AES. Envía mensaje

4. Ahora desmota clave AES con clave privada. Útilliza mensaje de Alice

Entre los ejemplos de RSA preprocesado verán algo así: <https://cryptography.io/en/latest/examples.html#encrypt-data-with-rsa>

- ¿Puedes hacer chisno híbrido del mensaje "hola mundo"?

```
In [4]: from Crypto.PublicKey import RSA
        from Crypto.Util.Padding import pad, unpad
        from Crypto.Random import get_random_bytes
        from Crypto.Cipher import AES, PKCS1_OAEP

sig = b'hola mundo"

# Generamos la key (initial es formato privado y publico
private_key = RSA.generate(2048)
public_key = private_key.public_key()
```

```

#ase ENVIO aaaa

# Generamos la session key (simetrica)
session_key = get_random_bytes(16)

# Encriptamos la clave simetrica 'session_key' con la RSA publica
cipher_rsa = PCKCS_5_OAEP_new(public_key)
enc_session_key = cipher_rsa.encrypt(session_key)

# Encriptamos los datos a enviar ("hola mundo") con la clave simetrica en AES CBC
iv = get_random_bytes(16)
cipher = AES.new(session_key, AES.MODE_CBC, iv=iv)
ciphertext = cipher.encrypt(payload.encode('utf-8'))

# Ahora enviamos una tupla con los datos a enviar (la clave simetrica encriptada, el IV (nonce) en plano y el texto cifrado)
data = (enc_session_key, iv, ciphertext)

print(f"Texto encriptado: {ciphertext}")

```

```
In [5]: from Crypto.Cipher import AES
from Crypto.Util.Padding import pad, unpad
from Crypto.Protocol.KDF import PBKDF2

# Texto a encriptar: b'0x5bf5c8b5d45c2d4eff3f25c0b5c0d8'
mensaje = b'0x5bf5c8b5d45c2d4eff3f25c0b5c0d8'

# Creamos un receptor
def recibir_mensaje():
    # Se supone que recibimos los datos por un canal inseguro
    mc_session_key, iv, ciphertext = data

    # Desencriptamos la clave simétrica de AES con nuestra clave privada definida en el paso anterior
    cipher_rsa = PKCS_OAEP_MGF1(cipher_rsa_private_key)
    decrypted_session_key = cipher_rsa.decrypt(mc_session_key)

    # Desencriptamos los datos con AES CBC
    decipher = AES.new(decrypted_session_key, AES.MODE_CBC, iv)
    data = decipher.decrypt(ciphertext)
    print(f'Mensaje desencriptado: {data.decode("utf-8")}')

mensaje_desencriptado = recibir_mensaje()
```

La razón por la cual es necesario es lo expuesto antes, RSA no fue diseñado para encriptar grandes porciones de datos. De hacerlo, habría que crear claves realmente grandes. En cambio, ChaCha20, AES y la criptografía simétrica es ideal para esto, haciendo uso de pequeñas claves para encriptar grandes cantidades de datos. Pero dado que es necesario compartir las claves para tener encriptación simétrica, y nuevamente, que las mismas son pequeñas, la criptografía asimétrica es el complemento ideal para este caso de uso.