Aula 1

Manoel Galdino

2023-03-16

Aula 1

Biliografia da aula 1:

Tadelis, cap. 1. Fiani, cap. 1.

Dilema do Prisioneiro

Nessa aula 1 nós iremos começar com um jogo, talvez o mais famoso da história da Teoria do Jogos, chamado Dilema do Prisioneiro, e que foi proposto em 1951 por Merrill Flood em 1951, e primeiramente formalizado por Albert W. Tucker.

A história é mais ou menos assim. A polícia prendeu dois suspeitos de cometer um crime. Tem evidência de um crime de pena menor, mas gostaria de condená-los por crimes com penas maiores. Se um ou ambos confessarem o crime maior, podem conseguir obter o que precisam.

Para dar concretude, imaginem que a Polícia Federal prendeu dois executivos suspeitos de corrupção e lavagem de dinheiro, a dez anos de prisão. Possuem provas suficientes para condená-los por um crime menor, como tráfico de influência (dois anos de prisão), mas gostariam de condená-los pelo crime de pena maior. A PF colocou os dois presos em celas separadas e decidiu fazer a seguinte oferta para eles:

"Nós temos evidência suficiente para condená-los, você e seu parceiro, pelo crime de tráfico de influência, que dá 2 anos de prisão para cada. Contudo, se você assinar um acordo de colaboração premiada com a gente e confessar o crime de corrupção e lavagem de dinheiro, você sairá livre e seu parceiro será condenado a dez anos de prisão. Um outro policial está na cela do seu parceiro, neste exato momento, fazendo a mesma oferta a ele. Se ele aceitar confessar o crime, e você não, então ele sairá livre e você ficará preso dez anos. Por fim, se ambos confessarem o crime, a pena de dez anos será reduzida à metade e vocês ficarão cinco anos presos. Essa proposta está por escrito, incluindo o fato de que seu parceiro está recebendo proposta igual".

O que você faria?

Discussão em sala de aula, ouvindo as opiniões dos estudantes.

Em seguida, escrevo a matriz de payoff abaixo e peço para os alunos formarem duplas e jogarem o jogo por 8 rodadas. Pedimos para os alunos registrarem as escolhas (estratégias) e payoffs de cada rodada. Em seguida, trocamos os pares de jogadores, e repetimos o jogo por mais 4 rodadas. Quem ficar com mais pontos ganha um prêmio.

	Coopera	Não coopera
Coopera	(2,2)	(10,0)
Não coopera	(0,10)	(5,5)

Discussão do DP

Alguns exemplos de aplicação do DP (jogar lixo na rua, pagar a conta com amigos).

Explicar a matriz de payoff.

Todo problema de tomada de decisão consiste de três componentes básicos: 1. Ações : todas as alternativas que um jogador pode escolher 2. Resultados: As consequências que resultam de cada ação 3. Preferências: descreve como os jogadores ranqueiam os possíveis resultados, do mais desejado para o menos.

Identificar no DP os três elementos.

Relações

O conceito de relação (binária) na matemática está associada à presença de um tipo de vínculo específico entre elementos de um conjunto. Suponha o conjunto $A = 1, 2, 3$. A Relação $\geq$, entendida por "maior ou igual que" expressa uma relação de comparação de magnitude entre os elementos do conjunto. Assim, podemos dizer que $3 > 2$, ou que $2 = 2$ e assim por diante. Em geral, podemos dizer que para quaisquer pares $xey \in A$ podemos estabelecer a relação $x \geq y$.

A partir desse exemplo, temos uma intuição para construir outros tipos de relações. Em particular, a relação de preferência.

Relações de preferência $\succcurlyeq$ são tais que,se $x \succcurlyeq y$, isso quer dizer que x é pelo menos tão bom quanto y. Às vezes aparece como fracamente preferido, no jargão econômico. Se $x \succ y$, então x é preferível a y, ou x é melhor que y. Por fim, quando temos $x \sim y$, então o jogador ou jogadora é indiferente entre x e y, ou x é tão bom quanto y.

Racionalidade

Falamos em ação racional no DP. Mas o que é ser racional? A partir da noção de relação de preferência, podemos definir racionalidade a partir de dois axiomas:

1. Axioma da completude. A relação de preferência $\succcurlyeq$ é completa. Ou seja, para quaisquer dois resultados $x, y \in X$ é possível ranqueá-los pela relação de preferência, tal que ou $x \succcurlyeq y$ ou $y \succcurlyeq x$ ou $x \sim y$.

O axioma da completude me diz apenas que, se eu tiver dois resultados, sempre vou poder dizer qual prefiro (incluindo dizer que sou indiferente). Porém, não posso ficar na dúvida e não conseguir decidir qual é preferido (ou se sou indiferente). Portanto, é um axioma que requer pouco das pessoas para poder chamá-las de racionais.

O segundo axioma é um pouco mais exigente e irá garantir que podemos ranquear *todos* os resultados.

2. Axioma da transitividade. A relação de preferência $\succcurlyeq$ é transitiva. Ou seja, para quaisquer três resultados $x, yez \in X$, se $x \succcurlyeq y$ e $y \succcurlyeq z$, então $x \succcurlyeq z$.

O axioma da completude me diz que posso ranquear quaisquer dois resultados, e o axioma da transitividade me diz que não há contradição no meu ranqueamento. Para ver porque a condição de transitividade é mais demandante, considere o seguinte exemplo. Algumas pessoas preferem estritamente café sem açúcar a café com duas colheres de açúcar. Vamos supor que duas colheres de açúcar são 100 gramas de açúcar. A maioria das pessoas é indiferente entre café com 100 gramas e café com 99 gramas, porque a diferença de sabor é imperceptível. Igualmente, é indiferente entre café com 98 gramas e café com 99 gramas. E assim por diante, de modo que é indiferente a café com duas gramas de açúcar e uma grama, e também é indiferente a café com uma grama e café sem açúcar. Porém, prefere café sem açúcar a café com duas colheres de açúcar. As preferências não são transitivas.

De todo modo, parece razoável exigir que pessoas racionais tenham preferências transitivas. A razão para isso é porque, se elas não tiverem de fato preferências transitivas, é possível explorar essa irracionalidade. Tomando o exemplo acima, suponha que um café sem açúcar seja mais caro que um café com açúcar (digamos que a loja é patrocinada por uma empresa de açúcar, de modo que ela ganha mais dinheiro se vende café com açúcar). Em tese a pessoa aceitaria fazer 100 trocas de um café pelo outro com uma diferença de uma grama, tendo pagado mais caro pelo produto que poderia ser comprado mais barato. E o ciclo começaria de novo, até a pessoa ficar completamente sem dinheiro.

Então, uma relação de preferência que é completa e transitiva, isto é, satisfaz os dois axiomas postulados por nós, é uma relação de preferência racional.

Questão em sala de aula: Será que a escolha de sofia é um exemplo de violação do axioma da completude?

Para mais críticas ao axioma da completude, ver por exemplo (no contexto da teoria da utilidade cardinal): Aumann, R. J. (1962). Utility theory without the completeness axiom. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 445-462.

Funções de Payoff

Uma das vantagens de se assumir relação de preferência racional é que é possível adotar uma esquema matemático mais operacional do seguinte modo. Suponha que você vai vender suco de limão e tem três possíveis ações: suco de baixa-qualidade b, que custa 10 e você vende a 15; suco de média-qualidade m, que custa 15 e você vende a 25, e suco de alta-qualidade, a, que custa 25 e você vende a 32. Exercício em sala. Escrever o conjunto de ações $ A = {b, m ,a}$, o conjunto de payoffs ou resultados, considerando o lucro, e não a receita apenas: $X = 5, 10, 7$. Escrever a relação de preferência: $10 \succ 7 \succ 5$.

Assim, a melhor escolha é m, que dá o maior lucro.

Uma outra forma de escolher a melhor ação seria definir uma função de lucro p(A), e ver qual a escolha de A que maximiza o lucro. Por exemplo $P(b) = 5$, $P(A) = 10$ e $P(A) = 7$).

Essa mesma lógica do lucro pode ser aplicada para qualquer decisão, mesmo que não envolva retornos monetários, contanto que a relação de preferência seja racional.

Definição 1. Uma função de payoff (ou função de utilidade) $u : X- > R$ representa a relação de preferência $\succcurlyeq$ para todo par $x, y \in X$, $u(x) >= u(y)$ se e somente se $y \succcurlyeq z$.

O que estamos dizendo é que a função de utilidade u recebe resultados do conjunto X, e retorna um número real para cada resultado. E essa função representa nossa relação de preferência racional se, sempre que a utilidade de x for maior que a utilidade de y, para qualquer x e y, isso implicar que $x \succcurlyeq y$ e vice-versa.

Veja que o número real a ser atribuído não tem sigifnicado algum e pode ser qualquer valor, desde que a relação de ordem seja preservada. A função de utilidade é uma construção ordinal, porque os payoffs são ordinais. Se um resultado gerar utilidade 10 e outro utilidade 5, não podemos dizer de verdade que o primeiro é duas vezes preferido ao segundo.

Utilidade Ordinal

Não função de utilidade definida acima, a utilidade é ordinal. Uma das consequências é que podemos fazer quaisquer transformações na função utilidade que preservem a ordem de preferência. Esse tipo de transformação é chamado de transformação monotônica.

Exercícios em sala: Digamos que eu tenha uma função de utilidade $u(x)$ qualquer. Diga se as seguintes transformações são montônicas (isto é, preservam a ordem). 1. $2 * u(x)$
2. $u(x) + 10$
3. $log(u(x))$. Suponha que $u(x) > 0$ para todo x.
4. $u(x)^3$
5. $u(x)^2$
6. $u(x) - 10$

Formalmente, uma transformação da função utilidade por outra função f é monotônica se $f(u)$ for uma função estritamente crescente de u. Lembrando que uma função $f(x)$ é estritamente crescente se ela cresce à medida que x cresce. Ou seja, $u_1 > u_2 \implies f(u_1) > f(u_2)$.

Jogos

Jogos de Informação Completa (como o DP) diferem de problemas de decisão, pois envolvem considerações estratégicas sobre o que os outros jogadores irão fazer.

Um jogo de informação completa é caracterizado pelas seguintes quatro informações serem de *conhecimentocomum*: 1. todas as possíveis ações de todos os jogadores, 2. todos os possíves resultados, 3. Como a combinação de cada ação de todos os jogadores afetam qual resultado irá acontecer e, materialize, and 4. As preferências de cada e todos jogador sobre os resultados.

Vejam que o DP satisfaz esse requerimento.

Conhecimento Comum.

Definição 2. Um evento E é conhecimento comum se todo mundo sabe E, todo mundo sabe que todos sabem E, todo mundo sabe que todo mundo sabe que todos sabem E e assim por diante, até infinito.

Um exemplo simples em que podemos assumir que um evento é conhecimento comum. Suponha que duas pessoas saiam da sala e, andando na rua, começa a chover e eles correm para não se molhar. É razoável assumir que é conhecimento comum que está chovendo para essas duas pessoas. Nós iremos discutir em sala de aula como na prática funciona essa suposição e como experimentos têm levado a relaxamento dessa suposição e outros tipos de modelo.