Aula 8 - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas e Jogos dinâmicos

Manoel Galdino

24 de maio de 2023

Como calcular ENEM

Definições

Uma estgratégia mista do jogador i chamamos de p_i, indicando uma dada distribuição de probabilidade sobre o conjunto de estratégias puras S_i do jogador. E $p_i \in \Delta S_i$, para indicar o conjunto de todas as distribuições de probabilidades possíveis.

Def. 8.1. Utilidade esperada.

A *Utilidade esperada* (ou payoff esperado) do jogador i quando ele escolhe a estratégia pura $s_i \in S_i$ e seu oponente joga a estratégia mista $p_{-i} \in \Delta S_i$ é:

$u_i(s_i, p_{-i}) = \sum_{si \in S_i} u_i(s_i, p_{-i}) * p_i(s_i)$

Achando o ENEM

Considere o jogo do par ou ímpar. Seja p a probabilidade com que a jogadora 1 joga "Par" e $(1-p)$ a probabilidade com o que elajoga "ímpar". De maneira análoga, definimos q e $q-1$ para a jogadora 2.

a utilidade esperada da jogadora de cada uma de suas estratégias puras é:

$ue_i(par, q) = q * 1 + (1-q) * (-1) = q - 1 + q = 2q - 1$

$ue_i(ímpar, q) = q * (-1) + (1-q) * (1) = -q + 1 - q = 1 - 2q$

Sabemos que o ENEM deixa a jogadora 1 indiferente entre par ou ímpar. Notem que se $ue_i(par, q) > ue_i(ímpar, q)$, a melhor resposta é jogar "par", e se a desigualdade for menor, a melhor resposta é jogar "ímpar".

$ue_i(par, q) = ue_i(ímpar, q)$

$2q - 1 = 1 - 2q$

$4q = 2$

$q = 1/2$

Em termos de melhor resposta (de correspondência), $p = 0$ se $q < 1/2$, $p = 1/2$ se $q = 1/2$ e $p = 1$ se $q > 1/2$.

Similarmente para a jogadora 2 (exercício para o leitor), mostrando que $(p = 1/2, q = 1/2)$ é a melhor resposta de ambos os jogadores e constitui um Equilíbrio de Nash (em estratégias mistas).

Exercício

Considere o seguinte jogo.

	Baixa juros	Mantém juros
Não Critica	(10,-5)	(5,-10)
critica	(20,-20)	(0,0)

Jogados Dinâmicos

Racionalidade Sequencial

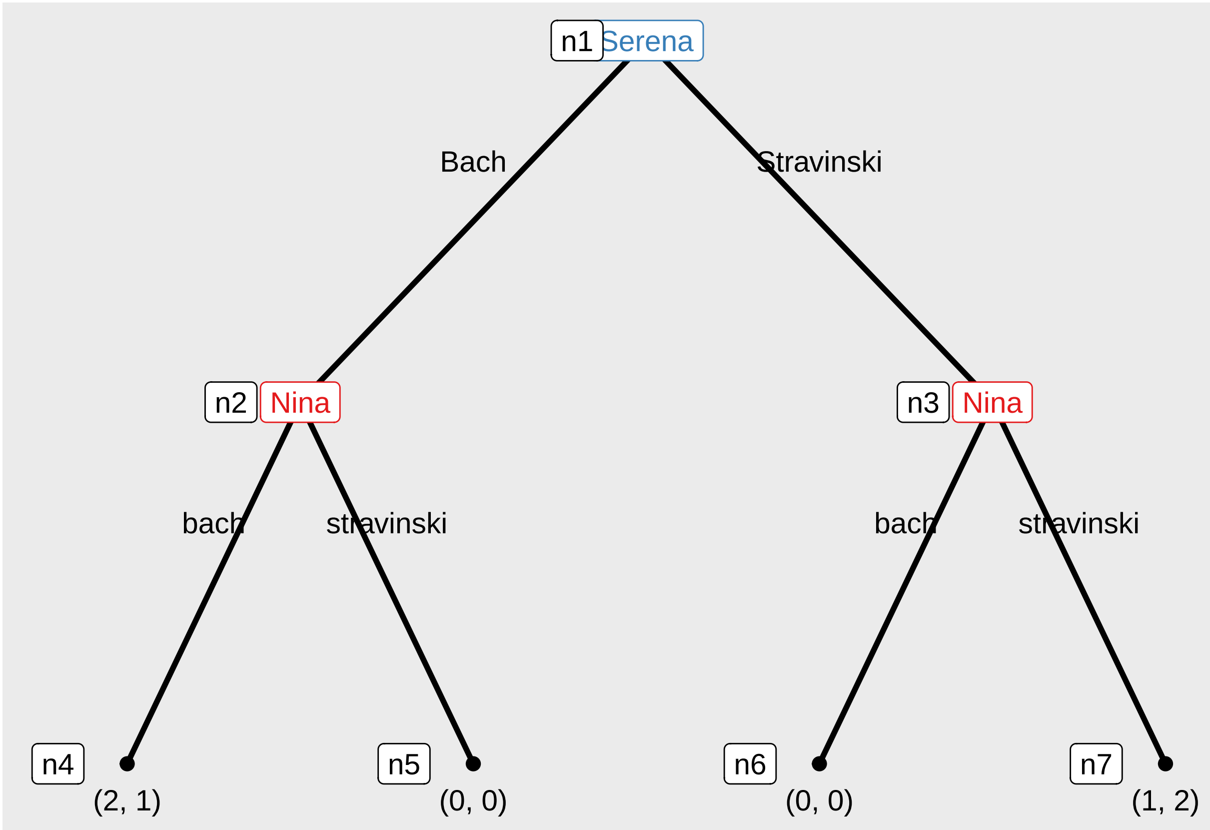
Considere novamente o jogo Bach e Stravinsky. Suponha que a jogadora 1 joga primeiro e e a jogadora 2 pode observar a esoclha de 1. Imagine que ela vai para um lugar, liga para a amiga e diz: estou aqui no lugar tal (espetáculo do Bach ou do Stravinsky).

Veja que em termos de equilíbrios de Nash, continuamos com os mesmos dois equilíbrios de antes. Porém, não faz sentido achar que o equilíbrio (S,S) será jogado, pois a jogadora 1 sabe que, se for para Bach, 2 também irá. Jogos na forma normal não capturam muito bem a noção de jogos sequenciais e racionalidade sequencial.

A forma estratégica do jogo, de fato, não traz informações nem sobre a ordem dos movimentos, nem as ações disponíveis para cada jogadora na sua vez de jogar (apenas estratégias. A distinção ficará mais clara depois.) # Jogo na forma extensiva

Por isso, iremos alterar a representação de nosso jogo, para a forma extensiva.

```
## Carregando pacotes exigidos: ggplot2
```



A árvore do jogo é lida de cima para baixo. No topo está quem joga primeiro. O retângulo com o nome da jogadora é chamado de nó. No primeiro nó, Serena tem duas ações possíveis, Bach e Stravinski. Uma vez que ela escolha sua ação, é a vez da Nina, que também tem duas opções ("bach" e "stravinsky", em caixa baixa, para distinguir as ações das duas jogadoras). Se Serena escolheu Bach, Nina está no galho da esquerda. Se Serena escolheu Stravinsky, Nina está no galo da direita. E uma vez que Nina faça sua escolha, o jogo acaba e os payoffs finais são mostrados. O primeiro payoff é da jogadora 1, e o segundo da jogadora 2.

Assim, acrescentaremos:

1. ordem dos movimentos
2. Ações das jogadores quando for a vez deles de se moverem.
3. O conhecimento que as jogadoras possuem quando é sua vez de se moverem.

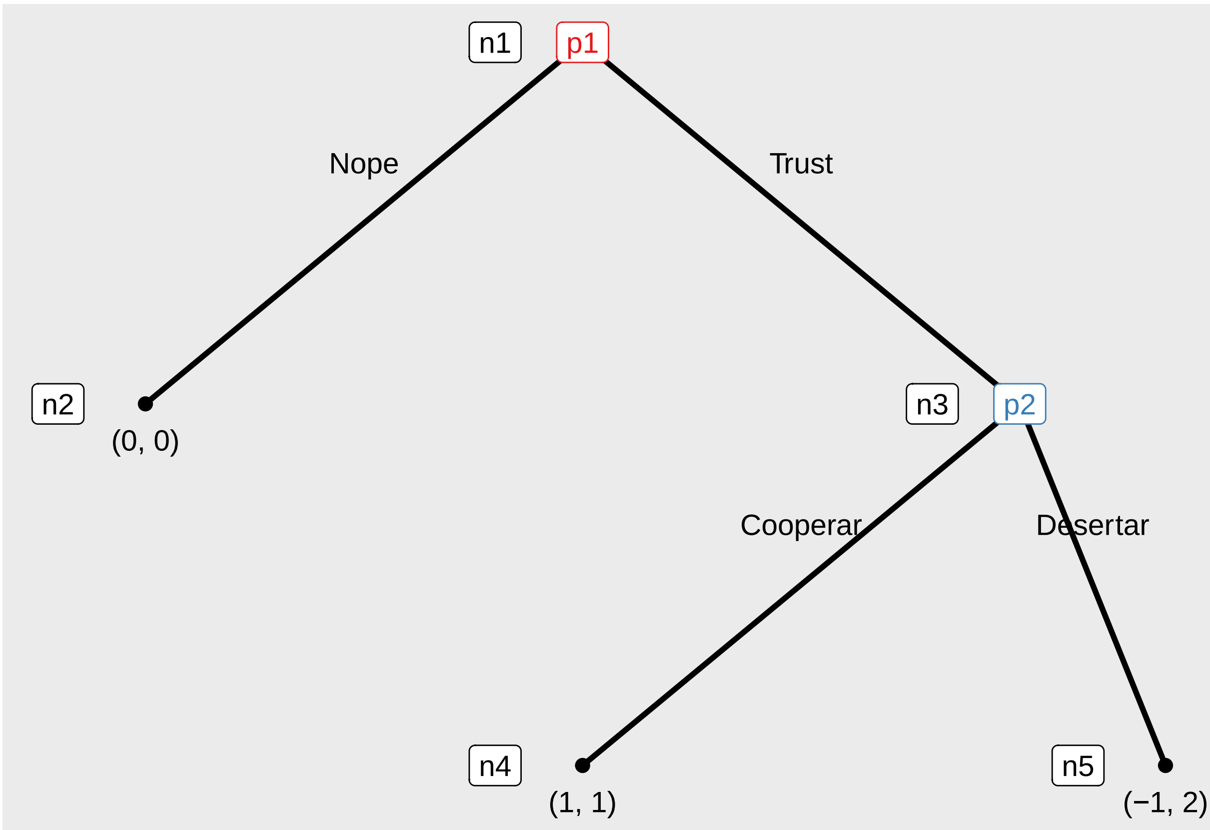
Há um novo elemento que também iremos introduzir, que são distribuições de probabilidade sobre eventos exógenos.

Também é possivel representar nosso jogo original em que as jogadoras escolhem simultaneamente ou, mais propriamente, sem saber o que a outra jogadora fez. Porém, precisaremos modificar um pouquinho nossa árvore do jogo. Antes de fazer isso, vamos defini-la.

Definição de árvore do jogo

Uma **árvore do jogo** é formada por um conjunto de nós $x \in X$ com uma relação de precedência $x > x'$, que significa "x precede a x"'. Ou seja, x vem antes de x'. Cada nó só tem um predecessor. A relação de precedência é transitiva ($x > x', x' > x'' => x > x''$), assimetrica (x > x' => não (x' > x)), isto é, x precede x', mas x' não precede x, e incompleta (nem todos os pares podem ser ordenados). Há um nó especial, chamado raiz da árvore, denotada por n1, que precede quaisquer outros nós $x \in X$. Nós que não precedem outros ós são chamados de nós terminais, denotados pelo conjunto $Z \subset X$. Nós terminais denotam o fim do jogo, com os payoffs associados. Cada nós x que não é terminal é atribuído a um jogador $i(x)$ com o conjunto de ações $A_i(x)$, ou para natureza.

Jogo da confiança



O jogador p1 joga primeiro. Logo, i(n1) = p1.

Informações

Quais informações cada jogador tem quando é sua vezde jogar? Uma jogadora pode ter informação bem fina sobre onde está no jogo, ou bem grosseira. Vamos então introduzir a seguinte definição:

Definição conjunto de informações:

Cada jogador i tem uma coleção de conjuntos de informação h_i the particione (divide) os nós do jogo no qual uma jogadora i move com as seguintes propriedades:

1. Se h_i é uma conjunto unitário (singleton) que inclui apenas x, então a jogadora i que se move em x sabe que está em x.
2. Se $x \neq x'$ e se ambos $x \in h_i$ e $x' \in h_i$ então a jogadora i que se move em x não sabe se está em em x ou x'.
3. Se $x \neq x'$ e se ambos x e $x' \in h_i$, então $A_i(x) = A_i(x')$.