# Aula 8 - Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas e Jogos dinâmicos

Manoel Galdino

01 de junho de 2023

## Subjogo

Subjogo de um jogo extensivo com informação perfeita

Um subjogo é qualquer parte de um jogo na forma extensiva que satisfaz as seguintes condições:

1. Sempre se inicia em um único nó de decisão
2. Não está em um nó terminal
3. Contém todos os nós que se seguem após ele

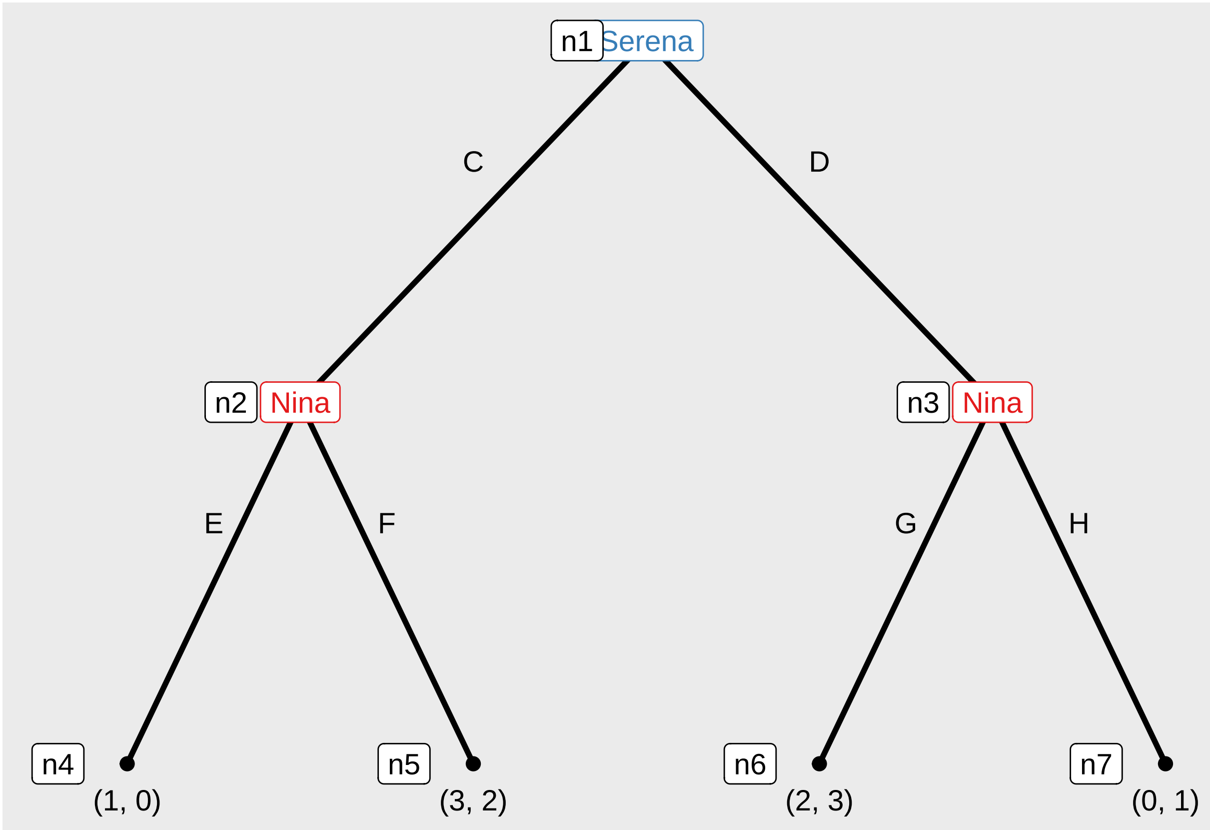
Em um jogo de informação imperfeita, acrescentamos:

4. Se contiver qualquer nós de um conjunto de informação, ele conterá todos os nós do conjunto de informação.

Nós chamamos de subjogo próprio todos os subjogos que não são a árvore do jogo na sua totalidade. # Exercícios

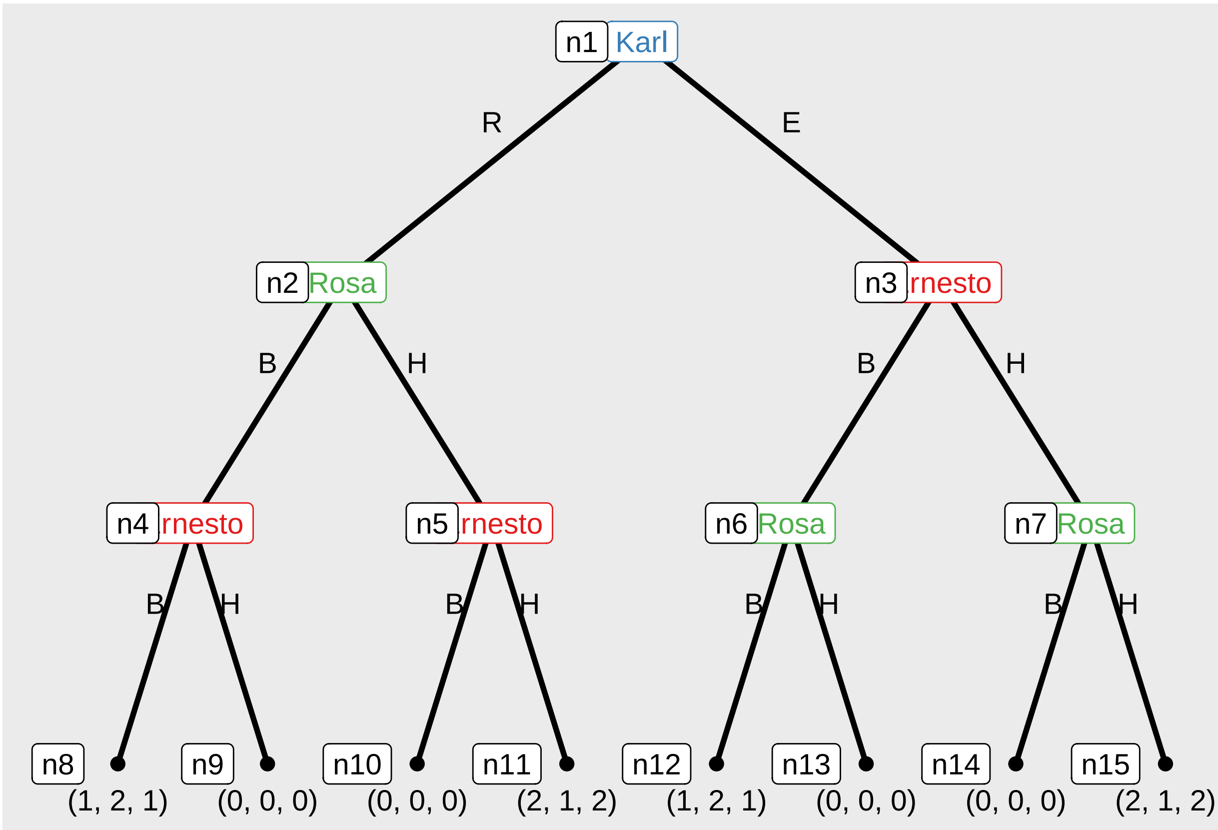
Ache todos os subjogos do jogo abaixo.

```
## Carregando pacotes exigidos: ggplot2
```




Modelo o jogo como uma árvore (forma extensiva) e ache todos os subjogos do jogo abaixo. (exercício 156.2c do Osborne).

Os políticos Rosa e Ernesto precisam tomar uma posição sobre um assunto. As opções são Berlim (B) ou Havana (H). Eles escolhem sequencialmente. Uma terceira pessoa, Karl, determina quem escolhe primeiro. Tanto Rosa quanto Ernesto se importam apenas com as ações que escolhem, não com quem escolhe primeiro. Rosa prefere o resultado em que ambos escolhem B ao resultado em que ambos escolhem H, e prefere esse resultado a qualquer um dos casos em que ela e Ernesto escolhem ações diferentes; ela é indiferente entre esses dois últimos resultados. As preferências de Ernesto diferem das de Rosa no sentido de que os papéis de B e H são invertidos. As preferências de Karl são as mesmas que as de Ernesto. Modele essa situação como um jogo extensivo com informação perfeita. (Especifique os componentes do jogo e represente o jogo em um diagrama.)




Existem 6 subjogos próprios e 7 subjogos no total, contando o jogo inteiro como um subjogo.

Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos

Definição informal: Um equilíbrio perfeito em subjogos é um perfil estratégico $s^*$ com a propriedade de que, em nenhum subjogo, qualquer jogador $i$ pode se sair melhor escolhendo uma estratégia diferente de $s_i^*$, dado que todos os outros jogadores $j$ aderem a $s_j^*$.

Nessa definição (informal), requeremos que a estratrégia de cada jogadora seja ótima para toda história após ser a vez dela jogar, e não apenas no início do jogo, como no equlíbrio de Nash.

Todo jogo extensivo finito com informação perfeita possui (pelo menos) um equilíbrio perfeito de subjogo.

Um jogo finito significa que em nenhum momento um jogador possui infinitas opções de ações. Para dar um exemplo trivial (do Osborne): um único jogador escolhe um número menor que 1 e recebe um pagamento igual ao número que ela escolhe. Não há um número maior que todos os outros números menores que um, então o jogador único não possui uma ação ótima, e assim o jogo não possui um equilíbrio perfeito de subjogo.

## Jogos repetidos

Jogos repetidos diferem de jogos dinâmicos porque os payoffs são realizados a cada estágio do jogo, e não apenas ao final, como no jogo dinâmico. Não iremos gastar muita energia aqui com jogos repetidos, embora eles sejam muito importantes, porque quero concentrar energias em estudar barganhas, com aplicações centrais para a ciência política e RI. Porém, a ideia de jogos repetidos nos permitirá introduzir a questão de descontos intertemporais, que serão importantes para as barganhas.

Um jogo repetido (finito) é, como o nome sugere, um jogo em que o mesmo jogo é repetido várias vezes (finitamente). Em aulas, nós jogamos alguns jogos repetidos, quando por exemplo jogamos o par ou ímpar várias vezes, ou o DP várias vezes. Entretanto, uma modificação precisará ser feita nesses jogos que acontecem em turnos. Payoffs futuros devem ser descontados (trazidos a valor presente), pois os agentes preferem o presente ao futuro.

Usaremos $\delta \in [0,1]$ como fator der desconto comum a todas as jogadoras do jogo. Para ver o que significa, vejamos o DP (já com os payoffs negativos), repetido duas vezes.

A priemria matriz de payoff é como conhecemos:

| | C | NC |
|---|---|---|
| C | (-2,-2) | (-10,0) |
| NC | (0,-10) | (-5,-5) |

A segunda matriz de payoff, porém, será modificada como segue. Todos os payoffs devem ser multiplicados por $\delta$, para indicar que agora têm menos impacto. Ou seja, uma sentença de 2 anos de prisão hoje valem mais do que um sentença de dois anos de prisão no futuro.

E agora temos a seguinte proposição, que não irei provar, mas é bom sabermos. Em um jogo repetido finitas vezes que possui um único equilíbrio de Nash em cada jogo separado, então o jogo repetido possui um único equilíbrio perfeito em subjogo. A ideia é usar indução para trás para ver isso no caso do DP.

Obviamente, parece uma perda muito grande não conseguir fugir do equilíbrio pareto inferior repetidas vezes, especialmente se o jogo for longo.

O que nos leva a jogos infinitos.

Valor presente: Dado o fator de disconto $\delta$, o valor presente de uma sequência infinita de payoffs $\{u_i^t\}_{t=1}^{\infty}$ para a jogadora $i$ é:

$u_i = u_i^1 \delta^0 +$

$u_i^2 \delta^1 + u_i^3 \delta^2$

$... + u_i^t \delta^{t-1} + ... =$

$= \sum (\delta^{t-1} u_i^t)$

## Baron-Ferejohn model

In all variants of the Baron-Ferejohn model a proposer is selected according to a known rule and then proposes an alternative to a group of voters. According to a known voting rule the proposal is either accepted or rejected. If the proposal is accepted, the game ends and all actors receive pay-offs as specified by the accepted proposal. Otherwise, another proposer is selected etc. iv This process continues until a proposal is accepted.

Consider a simple version of the model where there are three political parties that need to decide on how to split one dollar. Suppose that no party has a majority of seats. The Baron- Ferejohn model predicts that the party with proposal power will propose a minimal winning coalition consisting of itself and one other member, leaving the third party with zero. The proposing party will offer its coalition partner just the amount necessary to secure acceptance. This amount (or continuation value) equals the coalition partner's expected pay-off if the proposal was rejected and the bargaining continued. Proposals are thus always accepted in the first round. Note that the proposing party will always choose as its coalition partner the party with the lowest continuation value. The division of spoils will, in general, be highly unequal, especially if the parties' discount factors are low.

Second, the model's prediction is based on the assumption of stationarity, a stronger equilibrium requirement than mere subgame-perfection, which rules out dependence of previous actions and thus eliminates the use of punishment strategies familiar from the study of repeated games. Without it, the Baron-Ferejohn model faces a folk-theorem where all individually rational outcomes can be supported as equilibria. But this means that one cannot test the Baron-Ferejohn model in isolation, but only in conjunction with an additional equilibrium refinement (here stationarity).