

# Aula 4

Manoel Galdino

2023-04-10

## Aula 4

Conceitos de solução de um jogo

Para fazer previsões sobre um jogo, precisamos fazer suposições sobre o comportamento e crenças dos jogadores. Estamos em busca do que chamamos de um conceito de solução.

Essas soluções nós vamos chamar de equilíbrio.

## Avaliando conceitos de solução

### Existência

A existência de um equilíbrio diz respeito à frequência com que ele existe em diferentes tipos de jogos. Quanto mais frequente um tipo de equilíbrio para diferentes tipos de jogos, melhor o conceito de solução.

### Unicidade

Unicidade diz respeito à quanto nosso conceito de equilíbrio restringe os comportamentos previstos. Se tudo pode acontecer, se tudo é um equilíbrio, o conceito é pouco útil.

### Invariância

Nosso conceito de equilíbrio deve ser robusto à pequenas mudanças. Se você muda o jogo só um pouco e a previsão muda, então teremos pouca confiança sobre a previsão dada por uma solução qualquer. Por pequenas mudanças, estamos entendendo variações nos payoffs dos jogadores apenas. Mudanças no número de jogadores e no conjunto de estratégias disponíveis não são pequenas mudanças, pois alteram radicalmente a estrutura de um jogo.

## Pareto optimalidade

Por fim, queremos avaliar os resultados do nosso conceito de solução, em particular, suas propriedades distributivas. E um critério para isso é o “ótimo de Pareto”.

Formalmente, dizemos que um perfil de estratégia  $s \in S$  domina no sentido de Pareto o perfil de estratégia  $s' \in S$  se  $v_i(s) \geq v_i(s')$  para todo  $i$  e  $v_i(s) > v_i(s')$  para pelo menos um  $i$ . Nesse caso, diremos também que  $s' \in S$  é dominada no sentido de Pareto por  $s$ . Por fim, dizemos que um perfil de estratégia é ótimo no sentido de Pareto se não é dominado no sentido de Pareto por nenhuma outra estratégia.

# Vamos agora introduzir alguns conceitos de solução informalmente e discutir em alguns jogos, para depois formalizá-los

## Dominância

Vamos introduzir algumas notações. Se eu tenho dois jogadores, e os dois jogadores possuem apenas duas estratégias cada (como no DP, Bach-Stravinski, Chichken e Stag Hunt), nós dedignamos o payoff do jogador  $i$  decorrente de um dado perfil de estratégias  $s = (s_1, s_2)$  de  $v_i(s)$ . Por exemplo, se  $s_1 = \text{"desvia"}$  e  $s_2 = \text{"desvia"}$  no jogo do chicken, então o payoff do jogador 1,  $v_1(s) = 0$ . Se um jogo qualquer com  $n$  jogadores, pode ser conveniente ordenar os perfis de estratégias associados a um dado payoff da seguinte maneira:  $s = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$  para um payoff  $v_1(s) = 0$ .

Em breve será útil se referir às estratégias de todos os jogadores que não  $i$ . Para isso, diremos que  $s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ . Notem que pulamos  $s_i$ , a estratégia do jogador  $i$ .

Exercício: Se  $s_1 \in S_1$ , o conjunto de estratégias do jogador 1, e  $s_2 \in S_2$ , então escrevemos que um perfil de estratégia específico  $s = (s_1, s_2) \in S_1 * S_2$ , isto é pertence ao conjunto dado pelo produto cartesiano dos conjuntos  $S_1$  e  $S_2$ . Escreva o produto cartesiano ao qual  $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  pertence.

Resposta:  $S_1 * S_2 * \dots * S_{i-1} * S_{i+1} * \dots * S_n$

Para simplificar a notação iremos usar o seguinte atalho: Vamos definir  $S_{-i} \equiv S_1 * S_2 * \dots * S_{i-1} * S_{i+1} * \dots * S_n$  como o conjunto de **todas** as estratégias de todos os jogadores que não o jogador  $i$ . E, finalmente, agora podemos definir  $s_{-i} \in S_{-i}$  como um perfil particular de estratégias possíveis para todos os jogadores que não  $i$ . Portanto, podemos reescrever o payoff do jogador  $i$  em função de um particular perfil de estratégia  $s$  como  $v_i(s_i, s_{-i})$ , em que  $s = (s_i, s_{-i})$ .

## Estratégia dominante

Dizemos que uma estratégia  $s'_i \in S_i$  é estritamente dominada por outra estratégia  $s_i \in S_i$  se  $s'_i$  é estritamente pior do que  $s_i$  não importa o que os outros jogadores façam (isto é, para quaisquer estratégias que os demais jogadores escolham). Mais formalmente,  $s'_i \in S_i$  é estritamente dominada por outra estratégia  $s_i \in S_i$  se para qualquer combinação de estratégias dos outros jogadores  $s_{-i} \in S_{-i}$ ,  $v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s'_i, s_{-i})$  para todo  $s_{-i} \in S_{-i}$ .

Proposição: Um jogador racional jamais jogará um estratégia estritamente dominada.

Exemplo de um jogo, 4.1.

	Esquerda	Direita
Alto	(2,3)	(5,0)
Baixo	(1,0)	(4,3)

Do ponto de vista do jogador 1, Alto é uma estratégia dominante. Se 2 jogar esquerda, alto é a melhor resposta. E se 2 jogar direita, alto é a melhor resposta. Vejam que para o jogador 2, não há estratégia dominante. Nos termos de nossa definição Baixo é dominado por Alto e um jogador racional jamais deveria jogar Baixo.

Exemplo 4.2.

	Esquerda	Centro	Direita
Alto	(8,3)	(0,4)	(4,4)
Médio	(4,2)	(1,5)	(5,3)

	Esquerda	Centro	Direita
Baixo	(3,7)	(0,1)	(2,0)

Nesse exemplo, “Baixo” é dominado por “Médio”. Portanto, um jogador racional jamais deveria jogar “Baixo”.

## Equilíbrio de estratégia dominante.

Estratégia dominante. Definição informal:  $s_i$  é uma estratégia estritamente dominante para  $i$  se todas as outras estratégias forem estritamente dominadas por ela. Mais formalmente, temos  $v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s'_i, s_{-i})$  para toda  $s'_i \in S_i$ ,  $s'_i \neq s_i$  e toda  $S_{-i} \in S_{-i}$ .

Se, como no DP, todo jogador tem uma estratégia desse tipo (isto é, uma estratégia dominante), então nossa previsão do jogo é que todos os jogadores jogarão essa estratégia dominante.

Mais formalmente, dizemos que um perfil de estratégia  $s^D \in S$  é um **equilíbrio de estratégia dominante estrita** se  $s_i^D \in S_i$  é um perfil de estratégia dominante para todo  $i \in N$ .

Portanto, temos agora uma definição formal da nossa previsão no DP. É um equilíbrio de estratégia estritamente dominante, dado por (Confessar, Confessar), e que rende o payoff 5 anos de prisão, 5 anos de prisão.

Note que o equilíbrio é o conjunto de estratégias, e não o conjunto de payoff. É um erro comum entre estudantes (eu mesmo cometia esse erro quando estava aprendendo Teoria dos Jogos) descrever os payoffs como equilíbrio, e não as estratégias. Nosso equilíbrio sempre se refere ao que jogadores irão fazer, e não ao que irá acontecer com eles.

## Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas (IESDS em inglês, EIEED em PT)

Racionalidade + Conhecimento comum

Se um jogador racional nunca irá jogar uma estratégia estritamente dominada e isso é de conhecimento comum, então é razoável supor que todos sabem que essa estratégia nunca será jogada, e todos sabem que todos sabem e assim por diante até infinito. Podemos, portanto, eliminá-la do jogo.

Consideremos o jogo do exemplo 4.2. A estratégia “Baixo” para o jogador 1 é estritamente dominada por “Médio”. Portanto, podemos eliminá-la do jogo, e ter uma nova matriz de payoff:

	Esquerda	Centro	Direita
Alto	(8,3)	(0,4)	(4,4)
Médio	(4,2)	(1,5)	(5,3)

Na nova matriz de payoff, “Esquerda” é estritamente dominada por “centro” para o jogador 2. Podemos, portanto, eliminar “Esquerda” do jogo, resultando na seguinte nova matriz de payoff.

	Centro	Direita
Alto	(0,4)	(4,4)
Médio	(1,5)	(5,3)

Agora, Alto é estritamente dominada por Médio para o jogador 1. Novamente, podemos eliminar essa estratégia do jogo.

	Centro	Direita
Médio	(1,5)	(5,3)

Por fim, “Direita” é estritamente dominada por “Centro” para o jogador 2, de modo que o equilíbrio do jogo é (“Médio”, “Centro”), com payoffs (1,5).

Vejam que esse equilíbrio é inferior ao par de estratégias (“Alto”, “Esquerda”). Ou seja, é um equilíbrio que é Pareto inferior.

Notem que o equilíbrio depende dos seguintes passos: 1. O jogador “1” é racional e elimina a estratégia “Baixo”. No passo 2. o jogador “2” é racional e sabe que “1” é racional, portanto sabendo que “baixo” nuncas será jogada, elimina de suas estratégias a jogada “Esquerda”. No terceiro passo, o jogador 1, racional, sabe que dois é racional e sabe que 1 é racional e, portanto, eliminou a estratégia “Esquerda”. Por isso ele pode eliminar “Alto” do jogo. No quarto passo, o jogador 2 sabe que 1 fez a primeira eliminação, que 1 sabe que 2 eliminou “Esquerda”, e 2 sabe, com isso, que 1 elimina “Alto”. Pode, portanto, eliminar “Direita”.

Ou seja, aqui a iteração os jogadores sabem que eles sabem que eles sabem... não precisa ir até o infinito. Três níveis de sabe que sabe que sabe é suficiente para o equilíbrio do jogo.

Como vimos, para um equilíbrio de estratégia dominante, bastavamos supor racionalidade dos agentes. Contudo, para um equilíbrio de EIED, é necessário supor também conhecimento comum da racionalidade dos jogadores.

Note que o equilíbrio de EIED (que nós não definimos formalmente) é o que resta após a eliminação sucessiva de estratégias estritamente dominadas. Quando não há mais estratégias dominadas para excluir, o que restar é a previsão do jogo.

Considere o jogo Bach-Stravinski. Não há estratégias estritamente dominadas. Portanto, o equilíbrio do jogo é que quaisquer pares de estratégias são possíveis. Nesse caso, há múltiplos equilíbrios e esse conceito de solução não faz previsões úteis para nós.

## Racionalização (Rationalizability ou Racionalizabilidade) de estratégias

Considere novamente o jogo do DP

	Coopera	Não coopera
Coopera	(2,2)	(10,0)
Não coopera	(0,10)	(5,5)

Para facilitar a exposição, vou mudar os payoffs um pouco, mas o jogo ficará igual. Aqui, quanto maior o número, melhor para o jogador. Como os payoffs representam apenas preferências ordinais, não mudamos a essência do jogo.

	Silencia	Confessa
Silencia	(2,2)	(0,3)
Confessa	(3,0)	(1,1)

O equilíbrio é que ambos os jogadores escolhem confessar. Uma forma de ver isso é dizer que, qualquer que seja a crença do jogador  $i$  sobre o jogador  $j$ ,  $i \neq j$ , confessar gera um payoff melhor do que silenciar. Como escolher o que é melhor para si é nossa definição de racionalidade, um agente racional deve escolher confessar. Em outras palavras, nossa previsão do jogo dependeu apenas da suposição de que os agentes são racionais.

Considere agora uma variante do DP, como abaixo.

	Silencia	Confessa
Silencia	(3,2)	(0,3)
Confessa	(2,0)	(1,1)

Se o jogador 1 acredita que 2 irá escolher “silenciar”, então ele deve silenciar. E se acreditar que o outro jogador irá escolher Confessar, deve escolher confessar. Portanto, ambas as estratégias são racionais, a depender da crença do jogador 1 sobre o que o jogador 2 irá fazer. A suposição de racionalidade não restringe a previsão do que o jogador 1 deve fazer. Para que a gente possa restringir a previsão, precisamos fazer alguma suposição adicional. Por exemplo, que 1 acredita que 2 é racional. Se 2 for racional, o que 2 deve fazer? Um agente racional escolhe o que é melhor para si. Do ponto de vista de 2, isso significa confessar, pois essa é a melhor resposta para qualquer comportamento de 1. Portanto, supor racionalidade de 2 implica acreditar que 2 escolherá confessar. Mas se 2 irá confessar, a única ação racional para 1 é confessar.

Em resumo até agora: Na variante do DP apresentada, apenas supor racionalidade de 1 não restringe suas ações, mas restringe a de 2. Adicionar a suposição de que 2 sabe ou acredita que 1 é racional é suficiente para restringir a ação de 1 e gerar uma única previsão para o jogo.

Agora, considerem uma nova variante do DP:

	S	C
S	(4,2)	(0,3)
X	(1,1)	(1,0)
C	(3,0)	(2,2)

Eu adicionei uma nova ação para o jogador 1, que chamei de “X”. O ponto é que, embora a história perca seu sentido com uma nova ação “X”, para o restante das ações ainda guardar alguma similaridade com o original. Se preferirem, podem imaginar que é um outro jogo, não relacionado com o DP.

Para o jogador 1, escolher “S” é racional, se ele acreditar que o outro jogador irá escolher “S”. Igualmente, “C” também é racional se o outro jogador escolher “C”. Porém, “X” não é racional. Para 2, S e C também são racionais, dado que ela acredite que 1 escolher S ou C e X, respectivamente. Portanto, se o jogador 1 assumir que 2 é racional, isso não ajuda 2 a decidir entre S ou C, já que ambas são consistentes com sua racionalidade e a do outro jogador.

Diferentemente do jogo anterior, a suposição de ambos sã oracionais e que 1 sabe que 2 é racional não geou uma previsão única para o jogo.

O que acontece se adicionarmos um passo na cadeia de raciocínio e 1 supor que não apenas 2 é racional, mas que 2 acredita que 1 é racional. Então, dois acredita que 1 jamais jogará “X”, e portanto não achará mais jogar “S” uma boa estratégia e jogará apenas “C”. Mas, se 1 sabe disso, então deverá escolher “C” como sua resposta. Logo, ambos estão escolhendo C, C.

Em resumo, C,C é o equilíbrio do jogo desde que assumamos que: 1. é racional, 2 é racional, 1 sabe que 2 é racional, 2 sabe que 1 é racional e 1 sabe que 2 sabe que 1 é racional.

Nos três jogos (DP, primeira variante e segunda variante), mostramos como, crescendo a suposição de racionalidade dos jogadores uns dos outros, restaram ações consistentes com essa suposições era C,C. É possível mostrar que isso é verdadeiro supondo maiores níveis de racionalidade (mais passos). Mais ainda, posso estender os passos indefinidamente. E nós dizemos que estratégias que possuem essa propriedade são racionalizáveis.

## Melhor resposta

Nós estamos trabalhando com a ideia de melhor resposta, um conceito central para a teoria dos jogos, de modo que vale a pena defini-lo formalmente.

Definição 4.1: Melhor resposta: A estratégia  $s_i \in S_i$  é a melhor resposta do jogador  $i$  às estratégias de seus oponentes  $s_{-i} \in S_{-i}$  se

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s'_i, s_{-i}) \text{ para todo } s'_i \in S_i$$

Em palavras: a utilidade (ou payoff) do jogador  $i$  resultante da sua estratégia e das estratégias dos oponentes é pelo menos tão boa quanto qualquer outra estratégia que  $i$  possa vir a adotar.

Considere o jogo da bandeira, do reality show Survivor. Se é sua vez de jogar existem, digamos 20 bandeira, não importa o que você faça, irá perder o jogo se o outro time for racional. Portanto, sua melhor estratégia pode ser tanto 1, 2 ou 3 bandeiras. Esse exemplo mostra que a melhor estratégia pode 1: ser múltiplas ações; 2. serem igualmente ruins e não fazer diferença nenhuma e resultar todas no mesmo payoff. # Equilíbrio de Nash

Um perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash se cada jogador está escolhendo a melhor resposta para o que acredita que os demais jogadores farão. Ou seja, todo mundo está simultaneamente escolhendo a melhor resposta uns para os outros.