

Mateus Garcia Lopes

Instabilidades de Rayleigh-Plateu em fluidos com superfícies livres

Artigo científico

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo –

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – EPUSP/PPGEM

Área de concentração: Engenharia Mecânica Energia e Fluidos

Curso: Mestrado

Ano de matrícula: 2022

Universidade de São Paulo

Escola Politécnica

Programa de Pós-Graduação

Brasil

2022

Resumo

A propagação de perturbações infinitesimais pode levar a transição do tipo de escoamento de laminar para turbulento. Neste trabalho foram analisadas a evolução das perturbações em um caso clássico de instabilidade fluido-dinâmica de Rayleigh-Plateau.

Para isso foram estudados as maiores taxas de crescimento para perturbações do tipo axi-simétrica e assimétricas bem como a sensibilidade da evolução do comprimento do jato com as variáveis relacionadas e as menores escalas de tempo, e comprimento para análises de turbulência. Os códigos foram elaborados utilizando o software Mathematica e posteriormente comparados com uma compilação de resultados experimentais publicados anteriormente.

Palavras-chaves: Rayleigh-Plateau, instabilidades axi-simétricas, instabilidades assimétricas, maiores taxas de crescimento, jato de fluido, perturbações, transição de escoamento.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Perturbações iniciais no jato	7
Figura 2 – Crescimento da pressão de acordo com o tempo em um escoamento perturbado	12
Figura 3 – Algoritmo de comprimento (L) teórico	13
Figura 4 – Algoritmo de comprimento (L) experimental	14
Figura 5 – Gráfico L - Eq. teórica	14
Figura 6 – Gráfico L - Eq. experimental	14
Figura 7 – Algoritmo da relação de dispersão	14
Figura 8 – Algoritmo da relação de dispersão	15
Figura 9 – Algoritmo de crescimento axi-simétrico	16
Figura 10 – Crescimento das perturbações axi-simétricas em função do número de onda	16
Figura 11 – Gráfico de comprimento do jato vs velocidade	17
Figura 12 – Crescimento das perturbações em função do número de onda adimensional	18
Figura 13 – Crescimento das perturbações em função do número de onda adimensional	19

Sumário

	INTRODUÇÃO	5
1	DESENVOLVIMENTO	6
1.1	Materiais e métodos	6
1.2	Revisão bibliográfica	6
1.3	Modelo matemático	13
1.3.1	Rotinas de comprimento de jato	13
1.3.2	Função da relação de dispersão assimétrica	14
1.3.3	Taxa de crescimento axi-simétrico	15
1.4	Experimentos estudados	17
1.4.1	Comprimento do jato	17
1.4.2	Taxa de crescimento das perturbações assimétricas	17
2	RESULTADOS	19
3	CONCLUSÃO	21
	REFERÊNCIAS	22

Introdução

Das diversas instabilidades já conhecidas, a instabilidade de Rayleigh-Plateau consiste na subdivisão de um fluido em queda formando diversos "pacotes" menores (gotículas). A quebra em pacotes menores surge da possibilidade de diminuição da tensão superficial.

Historicamente, foi em 1873 que Plateau determinou através de experimentos que um fluido em queda vertical se dividiria em gotas se seu comprimento de onda fosse maior que 3,13 a 3,18 vezes seu diâmetro. Posteriormente, em 1896, Rayleigh provou numericamente que uma coluna de líquido não viscoso de seção circular caindo verticalmente deve se dividir em gotas se seu comprimento de onda exceder sua circunferência, que é então igual a π vezes seu diâmetro (PAPAGEORGIOU, 1995).

Este fenômeno, pode ser visto na natureza em quedas livres, por exemplo, em cachoeiras ou quedas d'água e também tem aplicações mais diretas nas tecnologias mais recentes como o uso em impressoras à tinta, na pintura automotiva e é também estudada na indústria automotiva visando melhor aproveitamento energético durante o processo de injeção.

Qualquer jato ou pluma, está sujeita a propagação de micro-perturbações que podem levar a instabilidades do tipo de Rayleigh-Plateau. Conforme estudado ao longo da disciplina de Instabilidades fluidodinâmicas e transição para turbulência, o surgimento destas perturbações está mais relacionada ao grau de perturbação pelo qual o fluido está submetido do que a uma característica inerente do escoamento. Para dois sistemas com um objetivo semelhante, aquele que possuir um melhor amortecimento destas perturbações será capaz de produzir resultados menos turbulentos para velocidades similares.

Consequentemente, não existe um número de transição único para os fenômenos estudados. Neste trabalho a origem das perturbações não será abordada e terá como tema qual o comportamento de um fluido invíscido quando submetido a perturbações iniciais.

As perturbações estudadas serão analisadas a partir da análise de diferentes números de onda e as taxas de crescimento respectivamente.

1 Desenvolvimento

1.1 Materiais e métodos

Seguindo a teoria de instabilidades aplicadas à fluidodinâmica, neste artigo serão estudados os efeitos de crescimento das perturbações axis-simétricas e assimétricas causadas em um jato genérico de raio " r " em queda livre sob o efeito da gravidade.

Para isto estudaremos a variação do perfil de pressões para perturbações instáveis, a relação de dispersão do crescimento, e as taxas de crescimento de acordo com o número de onda. As rotinas foram elaboradas utilizando o Software Mathematica para resolução analítica e visualização gráfica dos resultados demonstrados.

Posteriormente, dados experimentais de outros trabalhos foram consolidados afim de compara-los com os resultados teóricos desenvolvidos neste trabalho.

Na seção de resultados os resultados computados pelas rotinas serão finalmente comparados com os dados experimentais e os dados teóricos dos trabalhos que serviram como alicerce para a elaboração deste artigo.

Este trabalho tem como objetivo consolidar os resultados demonstrados nos trabalhos anteriores de ([KELLY, 1992](#); [LIN; REITZ, 1998](#); [BOGY, 1979](#); [GOLDIN et al., 1969](#)).

1.2 Revisão bibliográfica

Um jato de água com raio inicialmente constante caindo sob o efeito da gravidade tem seu comprimento prolongado até que atinja um limite, a partir deste momento os ligamentos são subdivididos em gotas. Este efeito pode ser observado inicialmente como uma consequência natural da ação da tensão superficial.

Em geral, essa deformação da coluna, chamada de *varicose perturbation*, é representado como uma série de senoides de deslocamento periódico, conforme representado na imagem abaixo. Para certos comprimentos de onda, essas ondas de perturbação crescerão com maior intensidade no tempo.

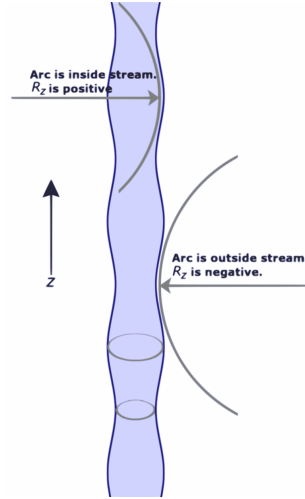


Figura 1 – Perturbações iniciais no jato

Conforme já citado anteriormente, o surgimento destas perturbações é considerado espontâneo e presente em qualquer sistema, com a ressalva de que as perturbações são diretamente proporcionais ao nível de ruído do sistema.

A medida que o sistema evolui e a amplitude do deslocamento aumenta, o raio da coluna não é mais constante. Foi então que Laplace observou que as regiões de raios maiores possuem uma maior pressão quando comparadas com as seções de menor raio, gerando assim um gradiente de pressão no fluido, a partir de uma certa diferença de pressão existe a iniciação da formação das gotículas com o rompimento das partes de raio menor (ASLANOV, 1999).

Essa formação das gotículas é então fruto de um equilíbrio entre a força de inércia e a tensão superficial, a aplicação da equação abaixo, relaciona ambas as forças:

$$t_0 = \frac{\rho R^3}{\gamma} \quad (1.1)$$

Onde R é o raio da gotícula formada, ρ é a massa específica, γ o coeficiente de tensão de superfície e o t_0 é o tempo do estágios finais do processo de rompimento do filamento e formação de uma gotícula.

Para iniciar o processo de formulação do problema, é necessário a definição da perturbação a partir dos valores médios de velocidade e pressão:

- $u_i = U_i + u_{pi}$ = Velocidade instantânea
- $p_i = P_i + p_{pi}$ = Pressão instantânea

Onde as variáveis U e P representam os valores médios de velocidade e pressão enquanto u_p e p_p representam as perturbações instantâneas nos vetores de velocidade e

pressão. O subscrito i será utilizado como notação para valores de 1 e 2 para as fases líquidas e gasosas, respectivamente.

Utilizando as equações de conservação de massa e movimento em coordenadas cilíndricas para descrever o problema, as equações linearizadas são:

$$\nabla u_i = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + U_i \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i \quad (1.3)$$

Seguindo o desenvolvimento feito por (KELLY, 1992):

Com o divergente da equação 1.3 e a definição da equação 1.2 podemos então chegar em uma equação única para a perturbação da pressão:

$$\nabla^2 p_i = 0, \quad (1.4)$$

Onde:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

Dessa forma, podemos descrever a perturbação de uma onda tridimensional com números de ka e m no sentido horário e na direção radial respectivamente. As expressões para as quantidades perturbadas são:

$$p_i = p_i(r) e^{i(kz+m\theta)+at}, \quad (1.6)$$

$$u_i = u_i(r) e^{i(kz+m\theta)+at} \quad (1.7)$$

Onde a é a taxa de crescimento relativa ao tempo. o termo m na expressão acima é responsável por adicionar variações não axis-simétricas na perturbação. Por fim, a equação 1.4 se torna:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - k^2 \right) p_i(r) = 0 \quad (1.8)$$

Onde a solução para $p_i(r)$ em termos da enésima ordem é:

$$p_i(r) = C_{i1} I_m(kr) + C_{i2} K_m(kr) \quad (1.9)$$

Substituindo a ultima equação com a 1.3 é possível determinar os componentes de velocidade:

$$u_i = -\frac{1}{[\rho_i(a + ikU_i)] \nabla [p_i(r) e^{i(kz+m\theta)+at}]} \quad (1.10)$$

Existem quatro constantes que precisam ser determinadas de acordo com as condições de contorno ($C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$) para os líquidos ($i = 1$), o valor da pressão em $r = 0$:

$$C_{12} = 0 \quad (1.11)$$

Analogamente para os gases ($i = 2$), o valor finito da pressão relativa em $r \rightarrow \infty$:

$$C_{21} = 0 \quad (1.12)$$

As outras duas constantes podem ser determinadas pela equação de continuidade da pressão e deslocamento na face de contato:

$$p_1 - p_2 = \Delta p_\sigma \quad (1.13)$$

$$\eta_1 = \eta_2 \quad (1.14)$$

Onde Δp_σ é a diferença de pressão devido a tensão de superfície σ ,

$$\Delta p_\sigma = \sigma(1/R_1 + 1/R_2) \quad (1.15)$$

E R_1 e R_2 são os raios principais da curvatura da superfície, enquanto η_1 e η_2 são as perturbações de deslocamento da superfície entre a fase gasosa e líquida, de tal forma que satisfazem:

$$v_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \eta_i}{\partial z}, i = 1, 2 \quad (1.16)$$

Sendo por fim v_i a componente de velocidade na direção radial (r).

Considerando

$$\eta = \eta_1 = \eta_2 = \eta_0 e^{i(kz + m\theta) + at} \quad (1.17)$$

Para o termo de primeira ordem η , pode ser demonstrado com:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}[1 - m^2 - (ka)^2]\eta_0 \quad (1.18)$$

As pressões da equação 1.13 contém o termo de pressão estática (P_i). De tal forma, que ao realizar as substituições, as equações 1.13 e 1.14 se tornam:

$$C_{11}I_m(ka) - \sigma/a^2[1 - m^2 - (ka)^2]I'_m(ka)/[\rho_1(a + ikU_1)^2] - C_{22}K_m(ka) = 0 \quad (1.19)$$

$$C_{11}I'_m(ka)/[\rho_1(a + ikU_1)^2] - C_{22}K'_m(ka)/[\rho_2(a + 1kU_2)^2] = 0 \quad (1.20)$$

A solução para o conjunto de equações acima pode ser determinada através da solução de um problema de autovetores/ autovalores porém só é diferente de zero, se o determinante da matriz de coeficientes for nula. Esta condição leva a seguinte equação característica:

$$(\rho_{1m} + \rho_{2m}a^2 + 2ika(\rho_{2m}U_2 + \rho_{1m}U_1) - k^2(\rho_{2m}U_2^2 + \rho_{1m}U_1^2) - k\sigma/a^2[1 - m^2 - (ka)^2]) = 0 \quad (1.21)$$

Onde

$$\rho_{1m} = \gamma_m \rho_1, \rho_{2m} = \beta_m \rho_2, \quad (1.22)$$

Com

$$\gamma_m = kI_m(ka)/I'_m(ka), \beta_m = -kK_m(ka)/K'_m(ka), \quad (1.23)$$

E

$$I'_m(ka) = \frac{dI_m(kr)}{dr}\bigg|_{r=a}, K'_m(ka) = \frac{dK_m(kr)}{dr}\bigg|_{r=a} \quad (1.24)$$

Segundo (LIN; REITZ, 1998) e seguindo a teoria de evolução das perturbações em um escoamento, a solução de interesse parte para valores positivos de a na equação quadrática (1.23).

Considerando

$$a = a_r + ia_i \quad (1.25)$$

Então

$$(a_r^*)_m^2 = \gamma_m \beta_m Q (ka)^2 / (\gamma_m + \beta_m Q)^2 + We(ka) \times [1 - m^2 - (ka)^2] / (\gamma_m + \beta_m Q) \quad (1.26)$$

Onde $(a_r^*)_m^2$ e We são o quadrado da taxa de crescimento adimensional para o enésimo modo e o número de Weber, respectivamente:

$$(a_r^*)_m^2 = (a_r)_m^2 / [(U_1 - U_2)^2 / a^2], \quad (1.27)$$

$$We = [2a(U_1 - U_2)^2 \rho_1] / \sigma \quad (1.28)$$

E Q é o coeficiente de ambas as densidades:

$$Q = \rho_2 / \rho_1 \quad (1.29)$$

O modo de crescimento axis-simétrico acontece quando $m = 0$. Para qualquer número inteiro de $m > 0$, a variável (a) , representa a taxa de crescimento do mesmo grau de distúrbio.

Com o passar do tempo, algumas deduções foram surgindo afim de determinar o comprimento máximo do jato antes que as perturbações fossem grandes o suficiente para quebra-los. Goldin , em 1967, utilizou duas equações diferentes para a determinação do comprimento L , sendo uma baseada na maior taxa de crescimento (α^*) e a outra baseada nos valores dos adimensionais de Weber e Reynolds obtidos através do estudo experimental:

$$L = \frac{CV}{\alpha^*} \quad (1.30)$$

Sendo α^* :

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{\frac{\sigma}{2\rho a^3}}{2 + \frac{3\eta_0}{\rho} \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma a}}}} \quad (1.31)$$

Nesta equação V é a velocidade característica do jato, C uma constante experimental (que varia entre 8-16).

$$\frac{L}{2a} = C \left[We^{1/2} + 3 \frac{We}{Re} \right] \quad (1.32)$$

Sendo We o número de Weber, já demonstrado anteriormente, em sua forma mais simplificada:

$$We = 2\rho a V^2 / \sigma \quad (1.33)$$

Onde o V da equação é a diferença de velocidade entre as duas fases, enquanto o σ é tensão superficial

O adimensional de Reynolds, pode ser determinado como:

$$Re = 2\rho V a / \eta_0 \quad (1.34)$$

Para o número de Reynolds, o V é a velocidade do jato, e o η_0 é a viscosidade cinemática do fluido.

Em ambas as equações (1.33 e 1.34) o valor de a é referente ao raio característico do jato, podendo ser substituído por $d/2$ durante a fase de desenvolvimento matemático.

Outra abordagem comumente utilizada nas pesquisas relacionadas a instabilidades de Rayleigh-Plateau é com relação as frequências de onda que favorecem o crescimento das perturbações do tipo assimétricas que também levam a subdivisão do jato em ligamentos.

(BRESLOUER, 2010), partiu da equação de Navier-Stokes e obteve a equação do escoamento em função do raio (R), como:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - (1 + kR)^2 R = 0 \quad (1.35)$$

A partir da equação que governa o escoamento, foi realizado uma transformação para a forma não dimensional, com as coordenadas do raio local (r) e do número de onda k em função do raio inicial (nominal) R_0 e em função de R de acordo com a velocidade do jato.

$$\tilde{r}^2 \frac{d^2 \Re}{d\tilde{r}^2} + \tilde{r} \frac{d\Re}{d\tilde{r}} - (1 + (K\Re)^2) \Re = 0 \quad (1.36)$$

Onde \Re é a forma não dimensional da variável de R e \tilde{r} é a função não dimensional da variável r .

A solução da equação não dimensionalizada demonstrada acima é uma equação de Bessel de primeira ordem do tipo "I", e a sua solução pode ser representada como:

$$\Re = CI_1(K\tilde{r}) \quad (1.37)$$

A partir da relação entre a pressão e o raio, a forma dimensional de P é:

$$P = \frac{-\omega \rho C}{k} I_0(kr). \quad (1.38)$$

Normalizando o campo de pressão com base na pressão do fluido no seu estado estável:

$$p_0 = \frac{\gamma}{R_0} \quad (1.39)$$

Dividindo a relação da forma dimensional da pressão pela pressão no campo estável, tem-se a determinação do campo de pressão:

$$\tilde{P} = \frac{-\omega \rho C}{k} \frac{R_0}{\gamma} I_0(kr) \quad (1.40)$$

A parte do resultado acima $\left(\frac{-\omega \rho}{k} \frac{R_0}{\gamma}\right)$ está relacionada com a pressão de perturbação.

Aplicando as condições de contorno adequadas ao problema, a velocidade da coluna perturbada é aproximadamente igual a velocidade normalizada do fluido, com isso $C = \frac{\varepsilon \omega}{U_{jato}} I_1$. Aplicando agora a Young-Laplace na superfície, a equação da pressão normalizada em função dos raios de curvatura principais R_i e o raio nominal R_0 .

$$\tilde{p} = \left[\frac{R_0}{\gamma} \right] \left[\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]. \quad (1.41)$$

A partir do momento que o escoamento está perturbado, o raio de curvatura tangencial R_2 não é mais zero, e pode ser utilizado como um parâmetro para determinar a perturbação do cilindro com base no seu estado inicial. Utilizando a definição acima e a função do raio de curvatura é possível obter a seguinte relação:

$$\tilde{p} = \frac{\varepsilon}{R_0} (1 + (K\Re)^2) e^{\Omega T + iKZ} \quad (1.42)$$

e

$$\Re = \frac{\varepsilon \omega}{U_{jato}} I_1(K\tilde{r}) \quad (1.43)$$

A taxa de crescimento e o tempo são normalizados por T_{crit} (menor escala de tempo). A imagem abaixo representa o crescimento de pressão através de um escoamento.

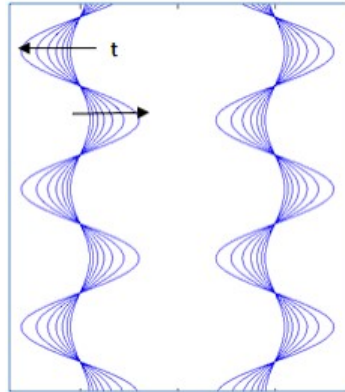


Figura 2 – Crescimento da pressão de acordo com o tempo em um escoamento perturbado

Igualando-se a pressão derivada de Young-Laplace (1.41) com a pressão derivada por Navier-Stokes (1.40), obtém-se a relação de dispersão:

$$\omega^2 \frac{\gamma}{\rho R_0^3} = \omega^2 T_{crit} = k R_0 \frac{I_1(k R_0)}{I_0(k R_0)} (1 - (k R_0)^2) \quad (1.44)$$

Com a análise do lado direito da equação, os valores de $(k R_0)$ precisam ser menores que um e positivos para que as perturbações sejam negativas e decaiam com o tempo. Caso o lado direito da equação seja positivo, as perturbações irão crescer exponencialmente e transformar o escoamento em instável. A análise da taxa de dispersão tem a sua importância para determinar a situação crítica onde o escoamento está mais sujeito a instabilidade.

1.3 Modelo matemático

As diversas rotinas elaboradas no software Mathematica utilizadas estão descritas em cada subseção deste capítulo e podem ser acessadas em repositório público do Github, a partir do seguinte link <https://github.com/mgalopes/Rayleigh-Plateau_MGL>.

1.3.1 Rotinas de comprimento de jato

Os primeiros modelos elaborados foram para a análise do Weber para fluidos newtonianos e a equação experimental para comprimentos de jato, para isso foram utilizadas as formas analíticas das equações (1.30) e (1.32) com o fluido de base sendo a água a 20°C.

Para a solução analítica, a rotina utilizada foi:

```
delta0 = (3.1415 * (2 * (1 + (3 * eta0 / ((2 * d * rho * sigma)^(1/2)))^(1/2)))^(1/2)) * (2 * d / 2)
eta0 = 0.001002
rho = 998
sigma = 0.07273
d = 0.0263
L = d * c * ({we}^(1/2) + {3 * {we / re}})
c = 8
we = 2 * rho * {d / 200} * v * v / sigma
re = 2 * rho * {d / 200} * v / eta0
Plot[L / d, {v, 0, 10}, PlotTheme -> "Detailed"]
|gráfico |tema do gráfico
```

Figura 3 – Algoritmo de comprimento (L) teórico

Conforme a equação (1.30), a rotina para o cálculo experimental do comprimento (L), foi:

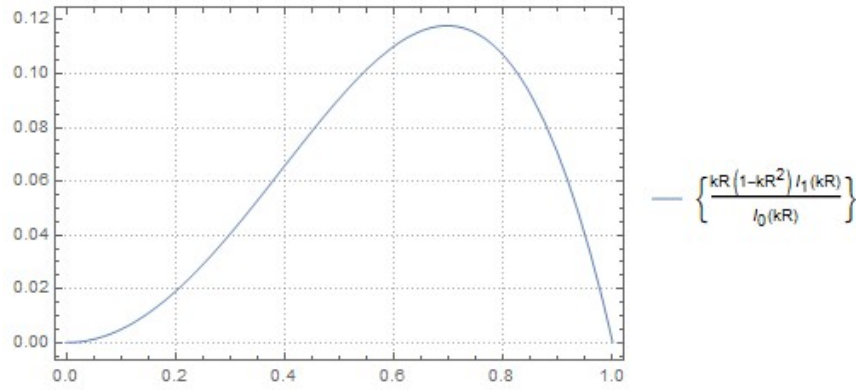


Figura 8 – Algoritmo da relação de dispersão

Com essas rotinas os resultados obtidos podem ser caracterizados como os resultados teóricos, após a apresentação dos experimentos estudados, comparações foram feitas e comentários sobre as possíveis variações.

1.3.3 Taxa de crescimento axi-simétrico

Para as taxas de crescimento simétricas com relação ao eixo (axi-simétricas), foi utilizada uma rotina baseada nas equações demonstradas anteriormente na equação 1.44, porém com os valores de Bessel, aproximados aos maiores termos de cada uma das expressões, de tal forma que:

$$\alpha^2 + \frac{3k^2}{\rho}\eta(\alpha)\alpha - \frac{\sigma k^2}{2\rho a}(1 - k^2 a^2) = 0 \quad (1.45)$$

Onde para os fluidos invíscidos e newtonianos o valor de η varia entre 0 e 1 respectivamente.

O código utilizado para a aplicação foi:

```

In[803]:= alpha^2 + 3 * k / rho * eta * alpha - sigma * k^2 / (2 * rho * a) * (1 - k^2 * a^2) == 0
sigma = 70
rho = 1
a = 0.1
eta0 = 0
eta1 = 1
g1 =
ContourPlot[{alpha^2 + 3 * k / rho * eta0 * alpha - sigma * k^2 / (2 * rho * a) * (1 - k^2 * a^2) == 0},
|gráfico de contornos
{k, 0, 10}, {alpha, 0, 100}, ContourStyle -> {{Red, Thick}}, FrameLabel -> {"k", "alpha"},
|estilo de contorno |ve... |espesso |legenda do quadro
PlotLegends -> "Expressions"]
|legenda do gráfico

g2 =
ContourPlot[{alpha^2 + 3 * k / rho * eta1 * alpha - sigma * k^2 / (2 * rho * a) * (1 - k^2 * a^2) == 0},
|gráfico de contornos
{k, 0, 10}, {alpha, 0, 100}, ContourStyle -> {{Blue, Thick}}, FrameLabel -> {"k", "alpha"},
|estilo de contorno |azul |espesso |legenda do quadro
PlotLegends -> "Expressions"]
|legenda do gráfico

ContourPlot[{alpha^2 + 3 * k / rho * eta0 * alpha - sigma * k^2 / (2 * rho * a) * (1 - k^2 * a^2) == 0,
|gráfico de contornos
alpha^2 + 3 * k / rho * eta1 * alpha - sigma * k^2 / (2 * rho * a) * (1 - k^2 * a^2) == 0},
{k, 0, 10}, {alpha, 0, 100}, ContourStyle -> {Blue, Thick {Red, Thick}},
|estilo de contorno |azul |espe... |ve... |espesso
FrameLabel -> {"k", "alpha"}, PlotLegends -> "Expressions"]
|legenda do quadro |legenda do gráfico

```

Figura 9 – Algoritmo de crescimento axi-simétrico

Dessa forma os gráficos resultantes para os fluidos invíscitos e newtonianos foram:

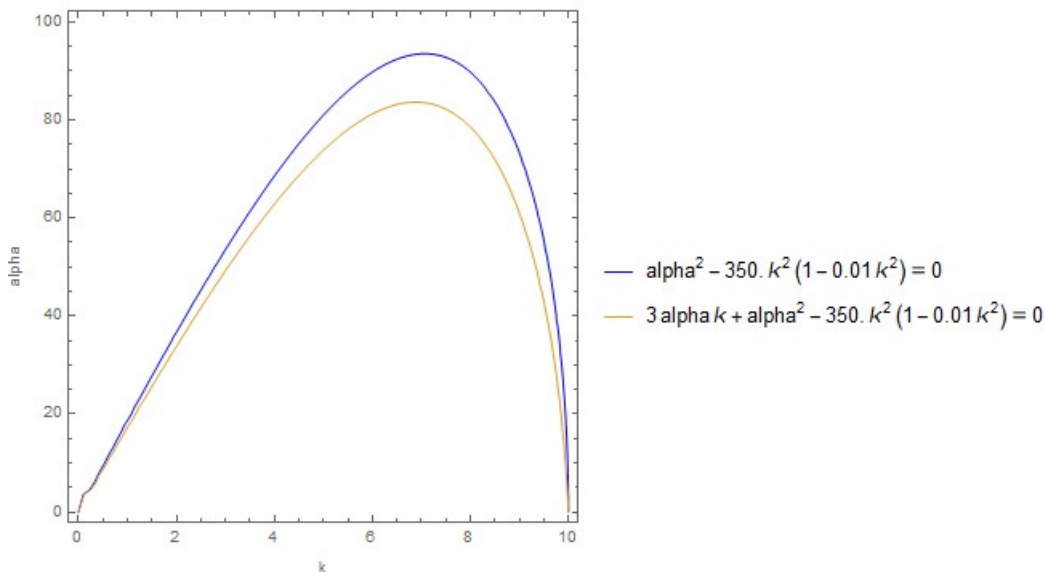


Figura 10 – Crescimento das perturbações axi-simétricas em função do número de onda

1.4 Experimentos estudados

1.4.1 Comprimento do jato

A análise de Weber sugere que para fluidos Newtonianos o comportamento de $L/2a$ é proporcional a $\sqrt{2a}$ com fluidos de baixa viscosidade e independentes de $(2a)$ para fluidos com alta viscosidade. O resultado foi comprovado por Goldin (GOLDIN et al., 1969) que realizou um experimento para avaliar o comprimento do jato vs a velocidade utilizando uma mistura de água e 0,1% de Carbopol em diferentes bicos de spray.

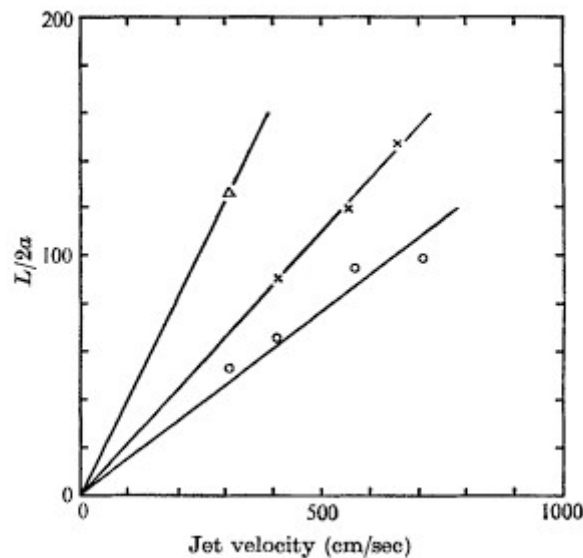


Figura 11 – Gráfico de comprimento do jato vs velocidade

Os resultados mostram que a estabilidade do jato aumenta com o aumento da velocidade, permitindo assim atingir maiores comprimentos antes do rompimento. Os resultados da mistura de carbopol são proporcionais a $2a^{1/2}$ indicando um comportamento similar a um fluido inviscido.

1.4.2 Taxa de crescimento das perturbações assimétricas

Para o estudo da taxa de crescimento das perturbações Eagers,(EGGERS, 1997) consolidou os trabalhos experimentais apresentados por Donnelly e Glaberson em 1966, com Goedde e Yuen em 1970 e os comparou com a linha teórica apresentada por Rayleigh para escoamentos invíscidos.

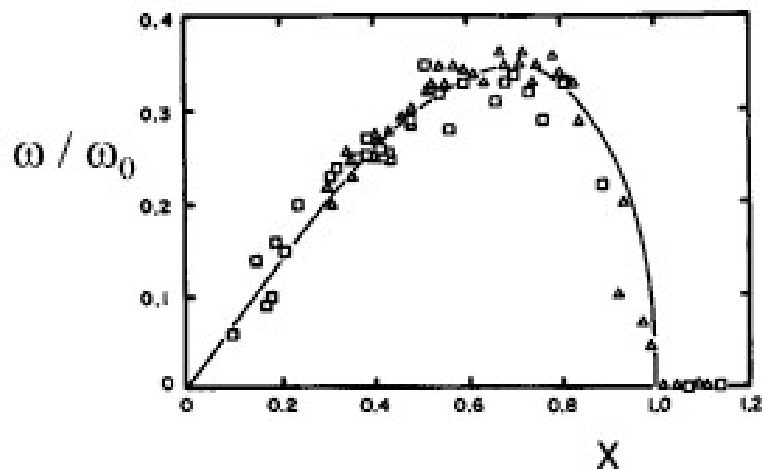


Figura 12 – Crescimento das perturbações em função do número de onda adimensional

É possível notar que apesar da concordância entre os dados teóricos e os dados experimentais (de ambos os experimentos) existe um nível de flutuação nos resultados obtidos por experimentos, uma possível explicação pode estar relacionada com as diferentes perturbações sistêmicas inerentes de cada uma das bancadas, similar aos experimentos realizados por Reynolds, o nível de perturbação crítica também é influenciado pelas perturbações individuais de cada sistema, que podem ser oriundas dos equipamentos, do ambiente ou até mesmo relacionadas com o procedimento de execução do experimento.

2 Resultados

Iniciando pelo estudo do comprimento do jato (subseção 1.3.1), pode-se perceber que para fluidos Newtonianos ou fluidos inviscidos, onde a taxa tensão de cisalhamento é proporcional da deformação (Newtonianos) ou constante (inviscidos). É possível perceber o comportamento similar do comprimento do jato entre os resultados experimentais e cálculos teóricos (pelos dois métodos apresentados).

Assumindo que os fluidos estudados são incompressíveis os valores de comprimento do jato são linearmente proporcionais ao aumento da velocidade, caso os estudos fossem realizados em fluidos compressíveis ou com propriedades não newtonianas o comprimento do jato seria afetado por outras variáveis (independentes da velocidade) e a curva observada teria um aspecto polinomial de segundo grau com a concavidade para baixo, indicando um ponto ótimo entre a velocidade de injeção e maior comprimento do jato.

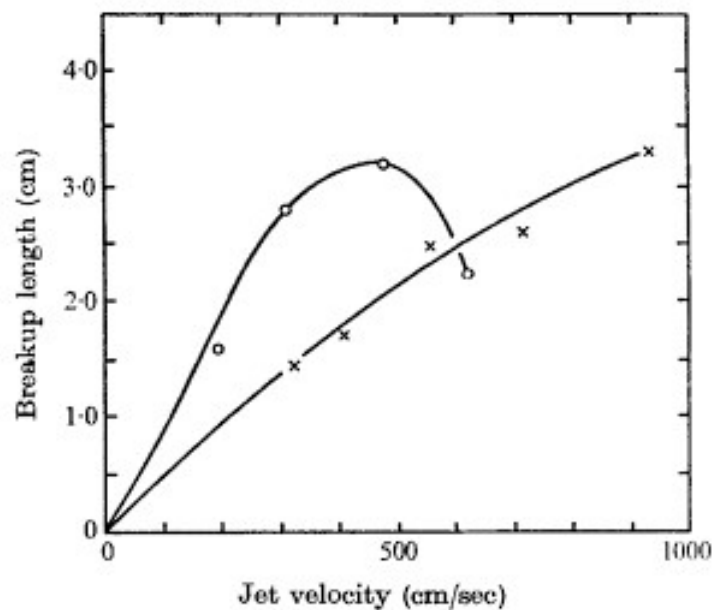


Figura 13 – Crescimento das perturbações em função do número de onda adimensional

Para o estudo de máximo crescimento de onda em perturbações axi-simétricas (subseção 1.3.3), o valor de k de 7,07 é o que fornece o maior crescimento da perturbação (93,54) nos fluidos inviscidos. Já para os fluidos newtonianos o maior crescimento (83,65) é em $k=6,88$ (Figura 10). Do ponto de vista de valor absoluto, os fluidos inviscidos possuem, de forma geral, uma menor amortização das perturbações, alcançando assim valores mais altos para as taxas de crescimento das perturbações.

Com relação as perturbações assimétricas (subseção 1.3.2), a partir da Figura 8

consegue-se deduzir o valor de máximo local, sendo que para o gráfico obtido este valor é dado para $k=0,697$.

$$\omega_{max}@kR_0 = 0,697 \quad (2.1)$$

Assumindo então o tempo crítico como $T=1$, obtém-se o valor máximo de $\omega = 0,1332$. Dessa forma, aplicando as equações de comprimento crítico e tempo crítico, as seguintes funções são definidas:

$$L_{crit} \cong 2,74 \left[U \left(\frac{\rho R^3}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.2)$$

$$T_{crit} \cong 2,74 \left[\left(\frac{\rho R^3}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.3)$$

Então, com os valores críticos de comprimento de jato, tempo, taxa de crescimento e comprimento de onda mais rápidos é possível determinar que a formação das gotículas acontece a uma frequência λU_{jet} , e de que igualando a equação da energia da coluna de água com a energia das gotículas, o diâmetro das gotas tem um raio aproximado de $2R_0$ ([BRESLOUER, 2010](#)).

3 Conclusão

Os resultados a partir dos cálculos teóricos apresentados neste trabalho estão em concordância com os dados experimentais demonstrados. O fenômeno de turbulência ainda é considerado um "problema aberto" no mundo acadêmico, e por este motivo não existe uma concordância absoluta nos valores demonstrados.

Este fenômeno pode ser observado até mesmo entre equações puramente teóricas, como é o caso da determinação do comprimento do jato utilizada por Weber e a determinação do comprimento do jato a partir da dedução de Rayleigh, apesar dos valores serem muito similares não são numericamente exatos e utilizam diferentes variáveis para descrever o mesmo fenômeno. Este problema, quando extrapolado para o mundo experimental é ainda mais complexo, uma vez que dois experimentos similares podem estar sujeitos a perturbações diferentes, causadas por diferentes ruídos e variáveis que ainda não podem ser controladas.

Uma vez que os experimentos são realizados múltiplas vezes para a redução do ruído sistêmico os dados teóricos apresentam uma concordância de mais de 95% quando comparados com os experimentos.

Do ponto de vista computacional, este trabalho oferece as condições de contorno para uma análise computacional do fenômeno estudado, com os valores críticos de comprimento e escala de tempo, é possível determinar o tamanho "ideal" para elaboração de malhas e definição do time-step, já os valores de k que promovem o maior crescimento da perturbação servem para definir quais são as situações críticas em que pode ocorrer a transição para turbulência do escoamento.

Referências

- ASLANOV, S. K. Theory of the breakup of a liquid jet into drops. *Technical Physics*, v. 44, p. 1386–1387, 1999. Citado na página 7.
- BOGY, D. B. Drop formation in a circular liquid jet. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 11, p. 207–228, 01 1979. Citado na página 6.
- BRESLOUER, O. *Rayleigh-Plateau Instability: Falling Jet Analysis and Applications*. 2010. Disponível em: <<https://www.princeton.edu/~stonelab/Teaching/Oren%20Breslouer%20559%20Final%20Report.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- EGGERS, J. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Reviews of Modern Physics*, v. 69, p. 865–930, 07 1997. Citado na página 17.
- GOLDIN, M. et al. Breakup of a laminar capillary jet of a viscoelastic fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 38, p. 689–711, 10 1969. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/breakup-of-a-laminar-capillary-jet-of-a-viscoelastic-fluid/9C8BF3067E37236E66E1B926844AA0E6>>. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 17.
- KELLY, R. E. Stabilization of rayleigh–bénard convection by means of a slow nonplanar oscillatory flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 4, p. 647–648, 04 1992. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.
- LIN, S. P.; REITZ, R. D. Drop and spray formation from a liquid jet. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 30, n. 1, p. 85–105, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.85>>. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 10.
- PAPAGEORGIOU, D. T. On the breakup of viscous liquid threads. *Physics of Fluids*, v. 7, p. 1529–1544, 07 1995. Citado na página 5.