Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis und Lineare Algebra

Vorlesung im Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

4. Übungsblatt (27. Oktober 2014)

Aufgabe 6: Direkte Ableitung von Funktionen

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen ohne Verwendung bekannter Ableitungsregeln direkt durch Anwendung der Definition, d. h. durch Berechnung von $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$!

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$

✎

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}}{x - a} = \frac{\frac{a^2 - x^2}{x^2 a^2}}{x - a} = \frac{(a - x)(a + x)}{x^2 a^2 (x - a)} = -\frac{a + x}{x^2 a^2} \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\frac{2a}{a^4} = -\frac{2}{a^3} \text{ für } a \neq 0$$

Also: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ für $x \neq 0$

✐

b) $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$ (Hinweis: $x - a = \sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2$)

✎

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ für } a > 0$$

Also: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$

✐

Aufgabe 7: Anwendung von Ableitungsregeln

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ für $x \neq -1$

✎

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x + 1) - (x - 1) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

✐

b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

✎

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

✐

c) $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$

✎

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2\,x$ (Kettenregel, Additionstheorem)

✐

d) $f(x) = \sin x^2 = \sin\left(x^2\right)$

✎

$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2\,x = 2\,x \cos x^2$ (Kettenregel)

✐

e) $f(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

✎

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2 x}}\,(0 - 2 \sin x \cos x) = -\dfrac{2 \sin x \cos x}{2 \cos x} = -\sin x$ (zweimal Kettenregel)

✐

f) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

✎

$f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (Quotientenregel)

✐

g) $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

✎

$f'(x) = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (Quotientenregel)

✐