Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis und Lineare Algebra

Vorlesung im Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

5. Übungsblatt (3. November 2014)

Aufgabe 8: Bestimmung von Extremwerten

Bestimmen Sie die lokalen Extrema folgender Funktionen:

a) $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 5$

✎

$f'(x) = -3x^2 - 3x + 6 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{-6} = \frac{3 \pm 9}{-6} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$f''(x) = -6x - 3$

$f''(-2) = 9 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei $x = -2$

$f''(1) = -9 < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei $x = 1$

✐

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 7$

✎

$f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x = 2x\left(x^2 - 2x - 3\right) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$f''(x) = 6x^2 - 8x - 6$

$f''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei $x = -1$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei $x = 0$

$f''(3) = 24 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei $x = 3$

✐

Hinweise:

- Nach dem Satz von Fermat muss für ein lokales Extremum $f'(x) = 0$ gelten.
- Wenn dann $f''(x) > 0$ ist, handelt es sich um ein lokales Minimum, bei $f''(x) < 0$ um ein lokales Maximum.
- Eine Gleichung dritten Grades ohne konstantes Glied kann man durch Ausklammern von x auf eine Gleichung zweiten Grades reduzieren.

Aufgabe 9: Additionstheorem der Exponentialfunktion

Beweisen Sie für die Funktion E mit den Eigenschaften $E'(x) = E(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $E(0) = 1$ das Additionstheorem: $E(x+y) = E(x)\,E(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitung der Hilfsfunktion $h(x) = \frac{E(x+y)}{E(x)\,E(y)}$ für ein beliebiges, aber festes $y \in \mathbb{R}$ (d. h. sowohl y als auch $E(y)$ sind Konstanten), die wegen $E(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist.

✎

$$h'(x) = \frac{E'(x+y) \cdot E(x)\,E(y) - E(x+y) \cdot E'(x)\,E(y)}{(E(x)\,E(y))^2} = \frac{E(x+y) \cdot E(x)\,E(y) - E(x+y) \cdot E(x)\,E(y)}{(E(x)\,E(y))^2} = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Nach Satz 7 gilt daher: $\frac{E(x+y)}{E(x)\,E(y)} = h(x) = \text{const} = h(0) = \frac{E(0+y)}{E(0)\,E(y)} = \frac{E(y)}{1 \cdot E(y)} = 1 \Rightarrow E(x+y) = E(x)\,E(y)$

✐