Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis und Lineare Algebra

Vorlesung im Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

2. Übungsblatt (13. Oktober 2014)

Aufgabe 3: Grenzwerte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2}$.

Geben Sie die Grenzwerte für $x \to 2+$, $x \to 2-$, $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an und beweisen Sie Ihre Aussagen jeweils!

✎

a) $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = -\infty$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $Y < 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt: $f(x) < Y$ für $0 < x - 2 < \delta(Y)$.
- Sei $Y < 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $\delta(Y)$: Für $x > 2$ gilt:

  $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2} < Y$, wenn $3 - Y < \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 < \frac{2}{3-Y}$

  (Beachte beim Umformen der Ungleichung:
  $x - 2 > 0$ und $3 - Y > 0$, daher bleibt das Ungleichheitszeichen unverändert.)
- Wähle daher $\delta(Y) = \frac{2}{3-Y}$.
- Dann gilt für $0 < x - 2 < \delta(Y)$ aufgrund der Vorüberlegung: $f(x) < Y$ q. e. d.

b) $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \infty$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $Y > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt: $f(x) > Y$ für $-\delta(Y) < x - 2 < 0$.
- Sei $Y > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $\delta(Y)$: Für $x < 2$ gilt:

  $f(x) = 3 - \frac{2}{x-2} > -\frac{2}{x-2} > Y$, wenn $-\frac{2}{Y} < x - 2$

  (Beachte beim Umformen der Ungleichung:
  $x - 2 < 0$ und $Y > 0$, daher dreht sich das Ungleichheitszeichen um.)

- Wähle daher $\delta(Y) = \frac{2}{Y}$.
- Dann gilt für $-\delta(Y) < x - 2 < 0$ aufgrund der Vorüberlegung: $f(x) > Y$ q. e. d.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $X(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $|f(x) - 3| < \varepsilon$ für $x > X(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $X(\varepsilon)$: Für $x > 2$ gilt:

  $|f(x) - 3| = \left|3 - \frac{2}{x-2} - 3\right| = \left|-\frac{2}{x-2}\right| = \frac{2}{x-2} < \varepsilon$, wenn $\frac{2}{\varepsilon} < x - 2 \Leftrightarrow x > 2 + \frac{2}{\varepsilon}$

  (Beachte beim Weglassen der Betragsstriche und beim Umformen der Ungleichung: $x - 2 > 0$ und $\varepsilon > 0$.)
- Wähle daher $X(\varepsilon) = 2 + \frac{2}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $x > X(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|f(x) - 3| < \varepsilon$ q. e. d.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Beweis:

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $X(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $|f(x) - 3| < \varepsilon$ für $x < X(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $X(\varepsilon)$: Für $x < 2$ gilt:

  $|f(x) - 3| = \left|3 - \frac{2}{x-2} - 3\right| = \left|-\frac{2}{x-2}\right| = -\frac{2}{x-2} < \varepsilon$, wenn $-\frac{2}{\varepsilon} > x - 2 \Leftrightarrow x < 2 - \frac{2}{\varepsilon}$

  (Beachte beim Weglassen der Betragsstriche und beim Umformen der Ungleichung: $x - 2 < 0$ und $\varepsilon > 0$.)
- Wähle daher $X(\varepsilon) = 2 - \frac{2}{\varepsilon}$.
- Dann gilt für $x < X(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|f(x) - 3| < \varepsilon$ q. e. d.

✐

Aufgabe 4: Rechenregeln für Grenzwerte

Führen Sie die folgenden Grenzwerte durch Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte auf Grenzwerte zurück, die in der Vorlesung bereits bestimmt wurden:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x}$

✎

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{x}{\sin x} = \left(\lim_{x \to 0} x \right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

✐