Hochschule Aalen
Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik

Analysis und Lineare Algebra

Vorlesung im Wintersemester 2014/2015
Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

1. Übungsblatt (9. Oktober 2014)

Aufgabe 1: Grenzwertdefinition

Formulieren Sie die Definition folgender Grenzwerte direkt ohne Verwendung von „Textkästen“ und geben Sie jeweils ein passendes Beispiel an:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ b) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$

✎

a) Definition: f besitzt an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ den (beidseitigen) uneigentlichen Grenzwert ∞, wenn gilt:
Zu jedem $Y > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt:
$f(x) > Y$ für $0 < |x - a| < \delta(Y)$.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

b) Definition: f besitzt an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ den linksseitigen uneigentlichen Grenzwert $-\infty$, wenn gilt:
Zu jedem $Y < 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt:
$f(x) < Y$ für $-\delta(Y) < x - a < 0$.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

c) Definition: f besitzt für $x \to -\infty$ den (rechtsseitigen) (eigentlichen) Grenzwert $b \in \mathbb{R}$, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $X(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$|f(x) - b| < \varepsilon$ für $x < X(\varepsilon)$.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

✐

Aufgabe 2: Grenzwerte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4x^2 - 4x - 24}{x-3}$.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert bzw. nicht definiert?

b) Berechnen Sie einige Funktionswerte in der Nachbarschaft der undefinierten Stelle, um eine Vermutung über den Grenzwert an dieser Stelle zu erhalten!

c) Beweisen Sie Ihre Vermutung durch Anwendung der Grenzwertdefinition, indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ das zugehörige $\delta(\varepsilon)$ angeben!

d) Wie lauten konkret $\delta(0.01)$ und $\delta(0.001)$?

✎

a) Die Funktion ist für alle $x \neq 3$ definiert.

b) Funktionswerte in der Nachbarschaft von 3:

x	2.9	2.99	2.999	3.1	3.01	3.001
$f(x)$	19.6	19.96	19.996	20.4	20.04	20.004

Vermutung: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 20$

c) Beweis der Vermutung:

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass gilt: $|f(x) - 20| < \varepsilon$ für $0 < |x-3| < \delta(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $\delta(\varepsilon)$: Für $x \neq 3$ gilt:

$$|f(x) - 20| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24}{x-3} - 20 \right| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24 - 20(x-3)}{x-3} \right| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24 - 20x + 60}{x-3} \right| =$$
$$\left| \frac{4x^2 - 24x + 36}{x-3} \right| = \left| \frac{4(x^2 - 6x + 9)}{x-3} \right| = \left| \frac{4(x-3)^2}{x-3} \right| = 4|x-3| < \varepsilon, \text{ wenn } |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

- Wähle daher $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$.
- Dann gilt für $0 < |x-3| < \delta(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|f(x) - 20| < \varepsilon$ q. e. d.

d) $\delta(0.01) = \frac{0.01}{4} = 0.0025, \qquad \delta(0.001) = \frac{0.001}{4} = 0.00025$

✐