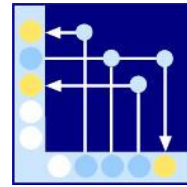




Hochschule Aalen

Fakultät Elektronik und Informatik
Studiengang Informatik



Analysis und Lineare Algebra

Vorlesung im Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. habil. Christian Heinlein

1. Übungsblatt (9. Oktober 2014)

Aufgabe 1: Grenzwertdefinition

Formulieren Sie die Definition folgender Grenzwerte direkt ohne Verwendung von „Textkästen“ und geben Sie jeweils ein passendes Beispiel an:

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$



- a) Definition: f besitzt an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ den (beidseitigen) uneigentlichen Grenzwert ∞ , wenn gilt:
Zu jedem $Y > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt:
 $f(x) > Y$ für $0 < |x - a| < \delta(Y)$.

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

- b) Definition: f besitzt an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ den linksseitigen uneigentlichen Grenzwert $-\infty$, wenn gilt:
Zu jedem $Y < 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(Y) > 0$, sodass gilt:
 $f(x) < Y$ für $-\delta(Y) < x - a < 0$.

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

- c) Definition: f besitzt für $x \rightarrow -\infty$ den (rechtsseitigen) (eigentlichen) Grenzwert $b \in \mathbb{R}$, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $X(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
 $|f(x) - b| < \varepsilon$ für $x < X(\varepsilon)$.

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



Aufgabe 2: Grenzwerte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4x^2 - 4x - 24}{x - 3}$.

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert bzw. nicht definiert?
- Berechnen Sie einige Funktionswerte in der Nachbarschaft der undefinierten Stelle, um eine Vermutung über den Grenzwert an dieser Stelle zu erhalten!
- Beweisen Sie Ihre Vermutung durch Anwendung der Grenzwertdefinition, indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ das zugehörige $\delta(\varepsilon)$ angeben!
- Wie lauten konkret $\delta(0.01)$ und $\delta(0.001)$?



- Die Funktion ist für alle $x \neq 3$ definiert.
- Funktionswerte in der Nachbarschaft von 3:

| | | | | | | |
|--------|------|-------|--------|------|-------|--------|
| x | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3.1 | 3.01 | 3.001 |
| $f(x)$ | 19.6 | 19.96 | 19.996 | 20.4 | 20.04 | 20.004 |

Vermutung: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 20$

- Beweis der Vermutung:

- Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein zugehöriges $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass gilt:
 $|f(x) - 20| < \varepsilon$ für $0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon)$.
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
- Vorüberlegung zur Wahl von $\delta(\varepsilon)$: Für $x \neq 3$ gilt:

$$|f(x) - 20| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24}{x - 3} - 20 \right| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24 - 20(x - 3)}{x - 3} \right| = \left| \frac{4x^2 - 4x - 24 - 20x + 60}{x - 3} \right| =$$

$$\left| \frac{4x^2 - 24x + 36}{x - 3} \right| = \left| \frac{4(x^2 - 6x + 9)}{x - 3} \right| = \left| \frac{4(x - 3)^2}{x - 3} \right| = 4|x - 3| < \varepsilon, \text{ wenn } |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

- Wähle daher $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$.
 - Dann gilt für $0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon)$ aufgrund der Vorüberlegung: $|f(x) - 20| < \varepsilon$ q. e. d.
- $\delta(0.01) = \frac{0.01}{4} = 0.0025$, $\delta(0.001) = \frac{0.001}{4} = 0.00025$

