

Algorithmen und Datenstrukturen I

Abstrakte Datentypen VII: Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

D. Rösner

Institut für Wissens- und Sprachverarbeitung
Fakultät für Informatik
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Winter 2009/10, 10. Januar 2010, ©2009/10 D.Rösner

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen ist zunächst wie Löschen in gewöhnlichen binären Suchbäumen
- dabei:
 - der Fall eines zu löschenden Knotens *mit zwei nichtleeren Kindern* wird dabei zurückgeführt auf Löschen des Knotens mit dem Minimum im rechten Teilbaum (alternativ: Maximum im linken Teilbaum) und Übernahme des Werts des Minimums in den zu löschenden Knoten
 - die Wertübernahme bei Beibehaltung der Farbe des Knotens ändert nichts an der Schwarztiefe
- also ist nur der Fall des Löschens eines Knotens *mit höchstens einem nichtleeren Kind* zu betrachten

Gliederung

- 1 Rot-Schwarz-Bäume
 - Löschen

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- Fälle:
 - der zu löschende Knoten ist **rot**: Kind muss **schwarz** sein (gilt auch bei leerem Knoten als Kind) und kann ohne Veränderung der Schwarztiefe den zu löschenden Knoten ersetzen
 - der zu löschende Knoten ist **schwarz**:
 - Kind ist **rot**: Kind wird schwarz gefärbt und kann dann ohne Veränderung der Schwarztiefe den zu löschenden Knoten ersetzen
 - Kind ist ebenfalls **schwarz**: dies ist der komplexe Fall, der im folgenden analysiert wird

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- wir ersetzen zunächst den zu löschenden Knoten durch sein schwarzes Kind
- diesen Knoten nennen wir dann **N**
- da vor dem Löschen die Rot-Schwarz-Eigenschaften vorlagen, besitzt **N** einen Elternknoten **P**, einen Geschwisterknoten **S** und dieser hat ein linkes Kind **SL** und ein rechtes Kind **SR**
- wir betrachten im folgenden, welche unterschiedlichen Konstellationen (für **P**, **S**, **SL** und **SR**) möglich sind und mit welchen Operationen dann die Rot-Schwarz-Eigenschaften wiederhergestellt werden können

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

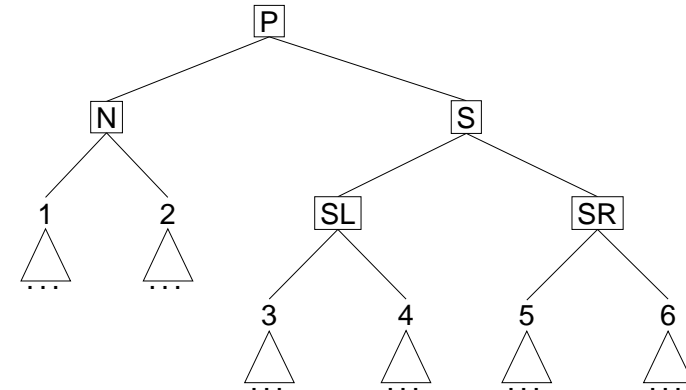


Abbildung: Rot-Schwarz-Baum nach Verkürzung der Schwarztiefe von Pfaden durch N schematisch; im folgenden verschiedene Fälle betrachtet

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- Hinweise:
 - im folgenden betrachten wir immer Fälle, bei denen die zu behebende Verringerung der Schwarztiefe im linken Teilbaum auftritt
 - die symmetrische Situation mit zu behebender Verringerung der Schwarztiefe im rechten Teilbaum erfordert gleichartige 'symmetrische' Transformationen (s. Übung)
 - bei allen Analysen nutzen wir aus, dass vor der Löschung die Eigenschaften eines Rot-Schwarz-Baums erfüllt waren

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

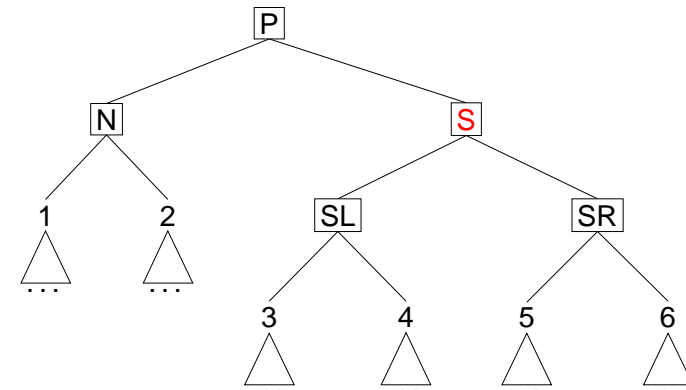


Abbildung: Fall 2: Roter Geschwisterknoten S

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

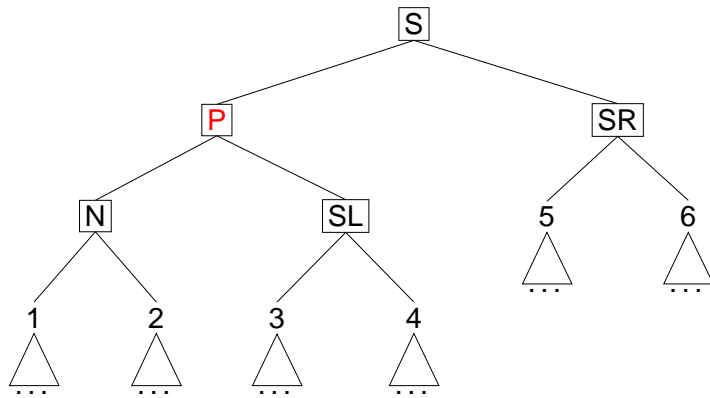


Abbildung: Transformation in Fall 2: Rechtsrotation, Farbentausch zwischen P und S

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

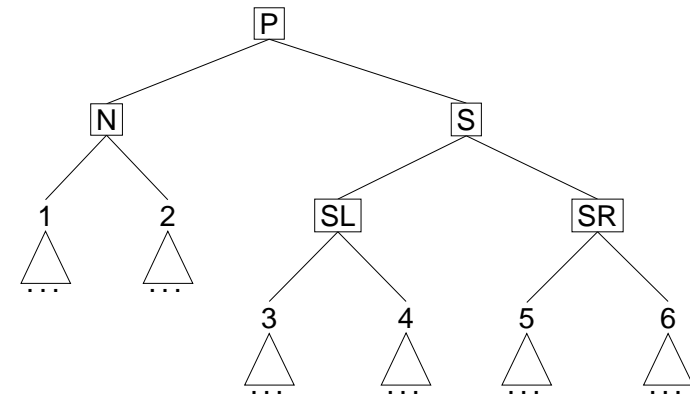


Abbildung: Fall 3: P, S, SL und SR seien schwarz

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

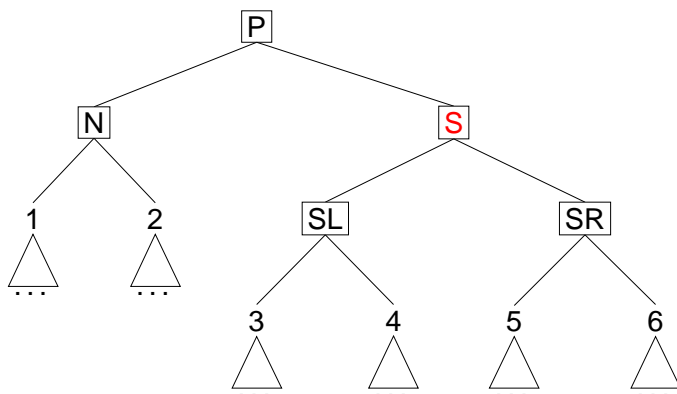


Abbildung: Transformation in Fall 3: lokaler Ausgleich durch Reduktion der Schwarztiefen durch Rotfärbung von S

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- beachte: die Schwarztiefen *aller Pfade durch P* sind nach der Transformation im Fall 3 identisch, aber um 1 geringer als vor der Löschung
- ist P die globale Wurzel, dann ist nichts mehr zu tun (Fall 1)
- andernfalls muss rekursiv ein Ausgleich der Schwarztiefen auf den nächsthöheren Ebenen des Baumes erreicht werden

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

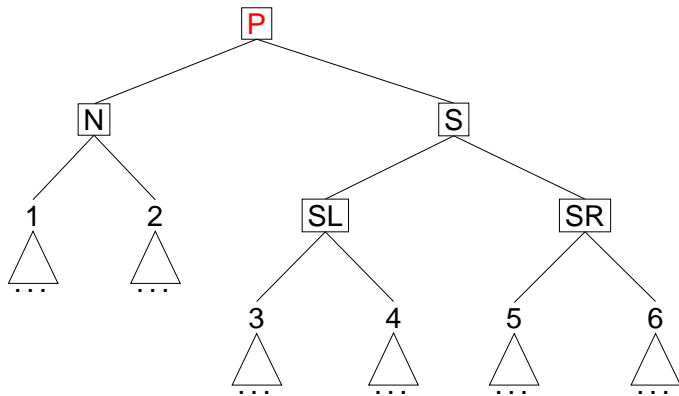


Abbildung: Fall 4: S, SL und SR seien schwarz, P rot

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

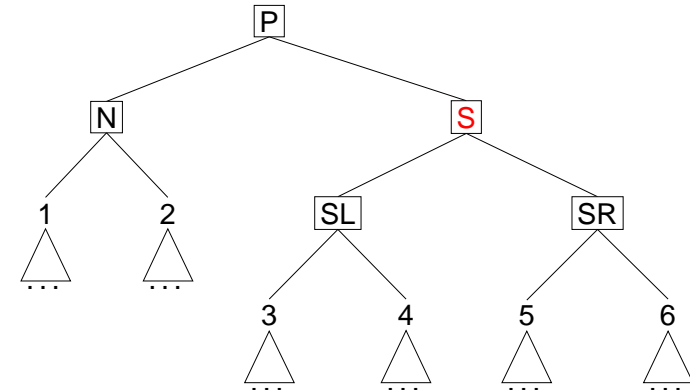


Abbildung: Transformation in Fall 4: nach Umfärbungen (P schwarz, S rot) haben Pfade durch S Schwarztiefe wie zuvor und die durch N eine wieder um 1 erhöhte

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

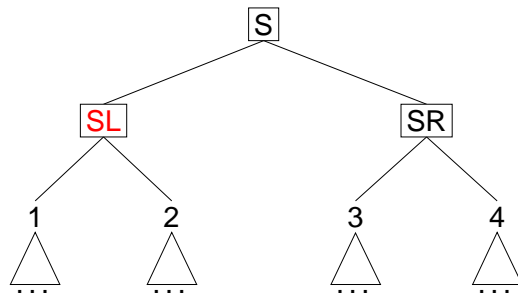


Abbildung: Fall 5: S schwarz, SL rot, SR schwarz und N linkes Kind seines Elternknoten

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

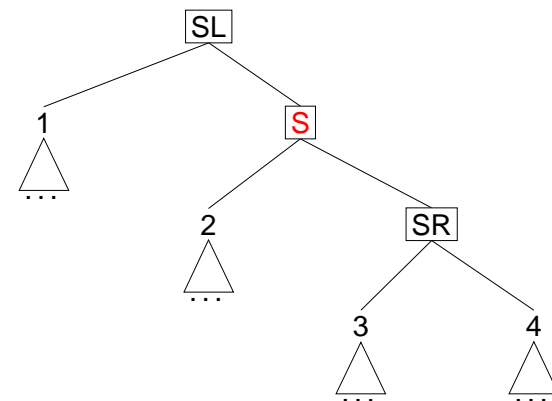


Abbildung: Transformation in Fall 5: Linksrotation, S rot färben und SL schwärzen

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- Effekt der Transformation in Fall 5:
 - Schwarztiefen bleiben unverändert
 - Begründung:
 -
 -
 -
- aber: N hat nun schwarzen Geschwisterknoten mit rotem rechten Kind, d.h. Voraussetzung für Fall 6 trifft zu

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

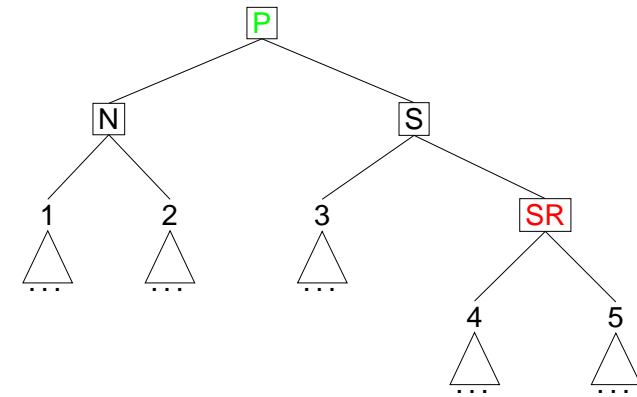


Abbildung: Fall 6: S sei schwarz, P beliebig (d.h. rot oder schwarz), SR rot

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

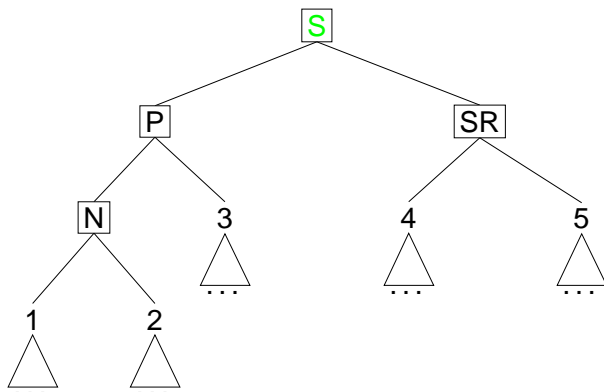


Abbildung: Transformation in Fall 6: Rechtsrotation, Farbentausch zwischen P und S, SR schwärzen

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- Effekt der Transformation in Fall 6:
 - Pfade *durch* N haben einen schwarzen Knoten mehr
 - Begründung:
 -
 -
 - Pfade *nicht durch* N haben gleiche Anzahl schwarzer Knoten wie zuvor
 - Begründung:
 -
 -
 -

Löschen in Rot-Schwarz-Bäumen

- Zusammenfassung: Arten von Transformationen
 - Schwarztiefen unverändert, aber neue Form als Einstieg in andere Transformation:
 - Fall 2
 - Fall 5
 - lokaler Ausgleich der Schwarztiefen, aber alle unterhalb der aktuellen Wurzel um 1 vermindert:
 - Fall 3
 - Ausgleich rekursiv auf nächsthöherer Ebene erforderlich
 - lokaler Ausgleich der Schwarztiefen so, dass der Streichungsverlust behoben:
 - Fall 4
 - Fall 6

Literatur: I



Chris Okasaki.

Purely Functional Data Structures.

Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.

ISBN 0 521 63124 6.



Fethi Rabhi and Guy Lapalme.

Algorithms – A Functional Programming Approach.

Pearson Education Ltd., Essex, 1999.

2nd edition, ISBN 0-201-59604-0.