Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Wstęp do Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów - Laboratorium

Transmitancja Z

0. Wiedza i umiejętności wymagane do przeprowadzenia ćwiczenia:

- Znajomość teorii związanych z układami LTI (eng. Linear Time-Invariant).
- Znajomość transformaty Laplace'a i Fouriera.
- Umiejętność analizy odpowiedzi impulsowej i transmitancji oraz znajomość powiązanych pojęć i zależności.
- Umiejętność analizy widmowej i czasowej sygnałów.
- Znajomość definicji sygnałów dyskretnych oraz podstawowych operacji na tych sygnałach (splot, sumowanie)
- Znajomość warunków stabilności układów ciągłych i dyskretnych.
- Wiedza zdobyta wstępu teoretycznego umieszczonego w instrukcji.

1. Wstęp

W analizie układów ciągłych wykorzystywane jest przekształcenie Laplace'a. Taką samą rolę w analizie układów dyskretnych odgrywa transformacja Z. Definicja przekształcenia wygląda następująco:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Ponieważ w naszym przypadku będziemy zajmować się jedynie systemami przyczynowymi powyższy wzór można podać jako:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Zmienna z jest zmienną zespoloną wyrażoną w biegunowym układzie współrzędnych:

$$z = re^{j\varphi},$$

gdzie *r* jest modułem liczby a *φ* fazą. Dla transformowanego sygnału określa się obszar zmienności zmiennej *z* tak by szereg definiujący transformatę był zbieżny:

$$0 \le r_- < |z| < r_+ \le \infty$$

Można zauważyć, że dla sygnałów o skończonej długości suma szeregu zawsze istnieje.
Na podstawie transformaty Z sygnału i znanego obszaru jej zbieżności można uzyskać postać czasową sygnału (oryginał). Definicja odwrotnej transformaty Z wygląda następująco:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz,$$

gdzie Γ jest prawoskrętnym konturem całkowania obejmującym początek układu współrzędnych i zawartym w obszarze zbieżności transformaty. Istnieje wiele metod obliczania odwrotnej transformaty. W przypadku zwykłego wielomianu zmiennej z odwrotną transformatą jest po prostu ciąg współczynników tego wielomianu. W przypadkach bardziej skomplikowanych, gdy transformata jest ilorazem wielomianów zmiennej z, odwrotną transformatę oblicza się za pomocą dzielenia wielomianów, rozkładu na sumę ułamków prostych lub metody residuów.
Transformata Z, podobnie jak transformata Laplace'a jest liniowa. Transformata sumy sygnałów jest równa sumie transformat. Transformata sygnału opóźnionego o n próbek wyraża się wzorem:

$$Z\{x(n - n_0)\} = z^{-n_0} X(z)$$

Układ dyskretny można opisać równaniem splotu dyskretnego:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{n} h(n-m)x(m)$$

Ponieważ transformata splotu sygnałów jest równa ~~splotowi~~ iloczynowi transformat można zapisać:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Transformata H(z) odpowiedzi impulsowej h(n) układu jest transmitancją tego układu.
Kiedy układ dyskretny opisany jest równaniem:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

transformując obie jego strony i przekształcając otrzymany postać transmitancji układu dyskretnego:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

Analizując właściwości takiego układu można stwierdzić, że układ jest stabilny wtedy, gdy wszystkie bieguny jego transmitancji leżą wewnątrz okręgu o promieniu 1. Charakterystykę częstotliwościową otrzymuje się poprzez podstawienie $z = e^{j\Omega}$, gdzie Ω jest pulsacją unormowaną względem ~~pulsacji~~ częstotliwości próbkowania.
Przez podstawienie $z = e^{j\Omega}$ poruszamy się po okręgu jednostkowym badając transmitancję układu. Lokując zera sprzężone na okręgu można uzyskać tłumienie odpowiednich częstotliwości. Przez położenie biegunów w pobliżu okręgu uzyskuje się wzmocnienie częstotliwości leżących w pobliżu bieguna.

2. Ćwiczenie

1. Zaprojektuj filtr dolnoprzepustowy tłumiący częstotliwość 100 Hz i przepuszczający częstotliwość 30 Hz przy częstotliwości próbkowania 1 kHz, dodatkowo zafalowania odpowiedzi impulsowej kończą się przed 100 próbką. (**2pkt**)
2. Zbadaj charakterystykę częstotliwościową układu (funkcja freqz). W jaki sposób parametry projektowe filtru wpływają na charakterystykę amplitudową filtru ? (3 **pkt**)
3. Zbadaj odpowiedź impulsową układu. (delta Kroneckera podana na filtr) W jaki sposób parametry projektowe filtru wpływają na odp. impulsową filtru ? (3 **pkt**)
4. Zmodyfikuj transmitancję układu tak by układ był niestabilny. (**1 pkt**)
5. Zbadaj odpowiedź impulsową układu. Co wpływa na stabilność filtru ? (**2 pkt**)
6. Zapisz wzór transmitancji H(z), na podstawie wartości macierzy A i B (**2 pkt**)
7. Podłącz źródło sygnału (suma dwóch sinusoid) do wejścia filtra. (**1pkt**)
8. Porównaj sygnał wejściowy i sygnał wyjściowy. (**3 pkt**)
9. Zmodyfikuj transmitancję przez modyfikację zer i biegunów. Zbadaj wpływ modyfikacji na filtrację. Rozważ różne przypadki. (**4pkt**)

Wnioski (**7pkt**)

3. Wzór sprawozdania

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Wstęp do cyfrowego przetwarzania sygnałów – laboratorium
Temat:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Imię i nazwisko: Marcel Garczyk</td></tr>
<tr><td>Data ćwiczenia: 31.03.22r.</td><td>Data oddania sprawozdania: 31.03.22r</td><td>Ocena:</td></tr>
</table>

Sprawozdanie powinno zawierać:

- Wykresy otrzymanych przebiegów,
- Wzór uzyskanej transmitancji H(z),
- Wnioski.

CPS_Z_filter_proj.m

```
clear;

fz=50; Rz=1;                         %częstotliwość w Hz i promień zera
fp=10; Rp=0.98;                      %częstotliwość w Hz i promień bieguna

fs=1000;                             %częstotliwość próbkowania w Hz

Omega_z=2*pi*(fz/fs);                %kąt zera
Omega_p=2*pi*(fp/fs);                %kąt bieguna

z=Rz*exp(1i*Omega_z);                %zero
p=Rp*exp(1i*Omega_p);                %biegun
z=[z conj(z)];                       %dwa zera
p=[p conj(p)];                       %dwa bieguny

[B,A]=zp2tf(z',p',1);            %oblicza współczynniki transmitancji {B,A}
                                 %na podstawie {z,p}

[H,w]=freqz(B,A,1024,fs);            %charakterystyka częstotliwościowa

x=[1 zeros(1,512)];          %dyskretny impuls jednostkowy (delta Kroneckera)
y=filter(B,A,x);             %odpowiedź impulsowa

subplot(2,1,1); plot(w,abs(H)); title('Charakterystyka amplitudowa');
xlabel('f [Hz]'); ylabel('/ H /','FontSize',12); grid;
subplot(2,1,2); plot(y); title('Odpowiedz impulsowa');
xlabel('numer probki'); ylabel('h(n)','FontSize',12); grid;

% A. Projektowanie filtru transmitancja z
%
% A1. Zaprojektuj filtr dolnoprzepustowy tłumiący częstotliwość 100 Hz i
%     przepuszczający częstotliwość 30 Hz przy częstotliwości próbkowania 1
kHz,
%     a zafalowania odpowiedzi impulsowej kończą się przed 100 próbką
% A2. Zbadaj charakterystyką częstotliwościową układu i odpowiedzi
impulsowej
% A3. Zmodyfikuj transmitancję układu tak by układ był niestabilny
% A4. Zbadaj odpowiedź impulsową i charakterystykę częstotliwościową układu
%     Porównaj je z tymi, które uzyskano w układzie stabilnym
%
```

CPS_Z_filter_test.m

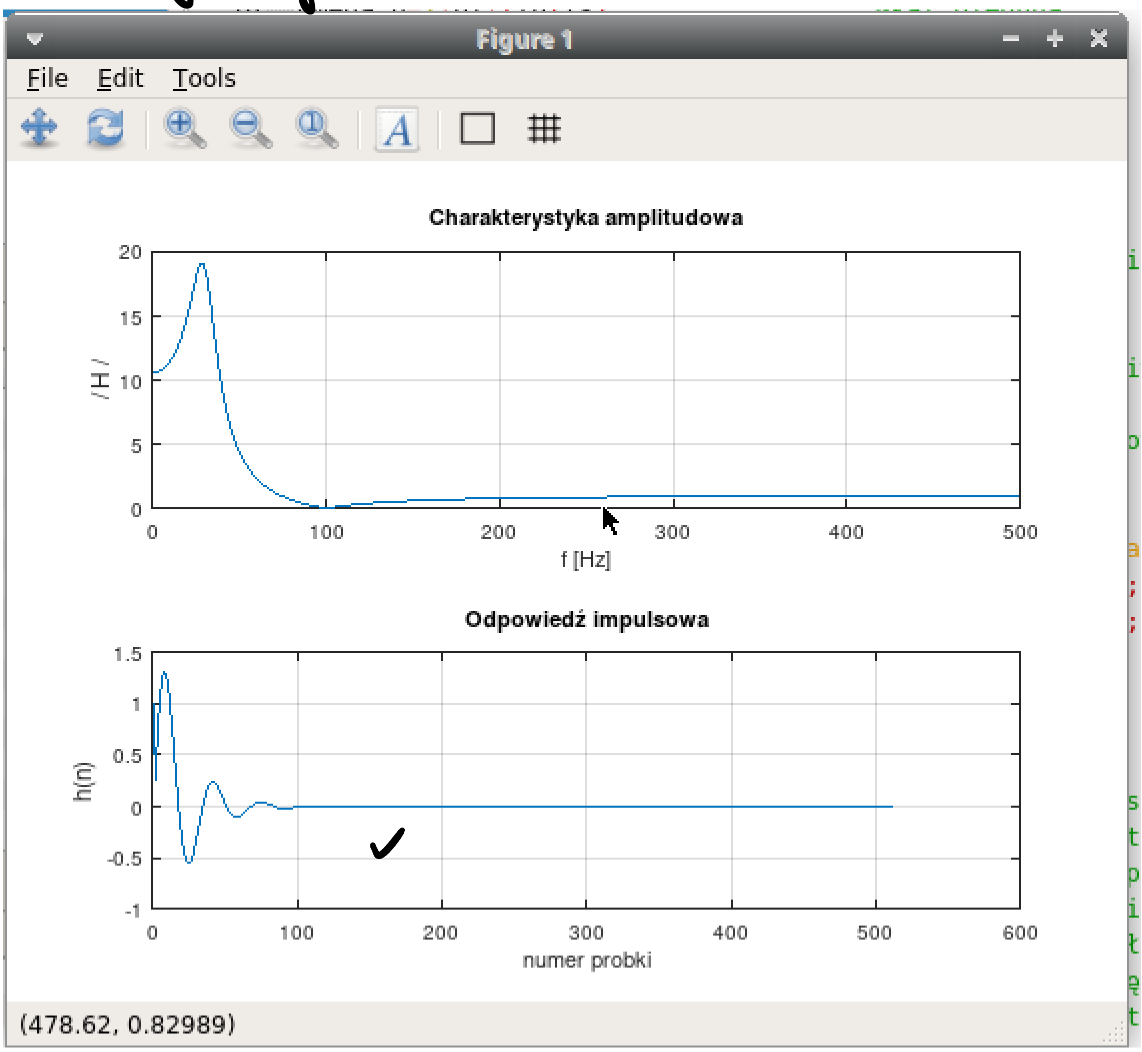
```
clear;

fz=50; Rz=1;                          %częstotliwość w Hz i promień zera
fp=10; Rp=0.99;                       %częstotliwość w Hz i promień bieguna

fs=1000;                              %częstotliwość próbkowania w Hz

Omega_z=2*pi*(fz/fs);                 %kąt zera
Omega_p=2*pi*(fp/fs);                 %kąt bieguna

z=Rz*exp(1i*Omega_z);                 %zero
p=Rp*exp(1i*Omega_p);                 %biegun
z=[z conj(z)];                        %dwa zera
p=[p conj(p)];                        %dwa bieguny

[B,A]=zp2tf(z',p',1);             %oblicza współczynniki transmitancji {B,A}
                                  %na podstawie {z,p}


x=0:1/fs:0.5;
yp = cos(2*pi*fp*x);
yz = cos(2*pi*fz*x);
ys= %suma sygnalow
y= %filtracja

subplot(4,1,1); plot(yp); title('Sygnal o czestotliwosci w pasmie
przepustowym');
ylabel('yp(n)','FontSize',12); grid;
subplot(4,1,2); plot(yz); title('Sygnal o czestotliwosci w pasmie
zaporowym');
ylabel('yz(n)','FontSize',12); grid;
subplot(4,1,3); plot(ys); title('Suma sygnalow');
ylabel('ys(n)','FontSize',12); grid;
subplot(4,1,4); plot(y); title('Suma sygnalow po filtracji');
xlabel('numer probki'); ylabel('y(n)','FontSize',12); grid;

% A. Projektowanie filtru transmitancja z
% A1. Zaprojektuj filtr dolnoprzepustowy tłumiący częstotliwość 100 Hz i
%     przepuszczający częstotliwość 30 Hz przy częstotliwości próbkowania 1
kHz,
%     a zafalowania odpowiedzi impulsowej kończą się przed 100 próbką

% Należy użyć parametrów z części A
% B. Testowanie filtru transmitancja z
% B1. W sprawozdaniu zapisz wzór transmitancji H(z), na podstawie wartości
macierzy A i B
% B2. Podłącz sygnał (suma dwóch sinusoid) do wejścia filtra (funkcja
filter(,,))
% B3. Porównaj sygnał wejściowy i wyjściowy, jak wpływają na filtrację
parametry projektowe (proszę zwrócić uwagę na promienie)
```

1. Ustawiamy parametry:
   f_z = 100 [Hz] (częstotliwość zaporowa)
   f_p = 30 [Hz] (częstotliwość przepustowa)
   Rp = 0.95 (zmniejszamy, by ograniczyć oscylacje przed 100 próbką)
   R_z = 1

no i do jakiej wartości ?

Wynik

1,5 pkt



częstotliwość zera

1,5 pkt

2. Zmieniamy parametr zakładając, że reszta jest stała.

f_z – częstotliwości zaporowa (na wykresie H(f_z) wynosi ok. 0, ta częstotliwość jest najmocniej tłumiona

f_p – częstotliwość przepustowa, wystąpi tu minimalne tłumienie, maksymalne wzmocnienie

częstotliwość bieguna !!

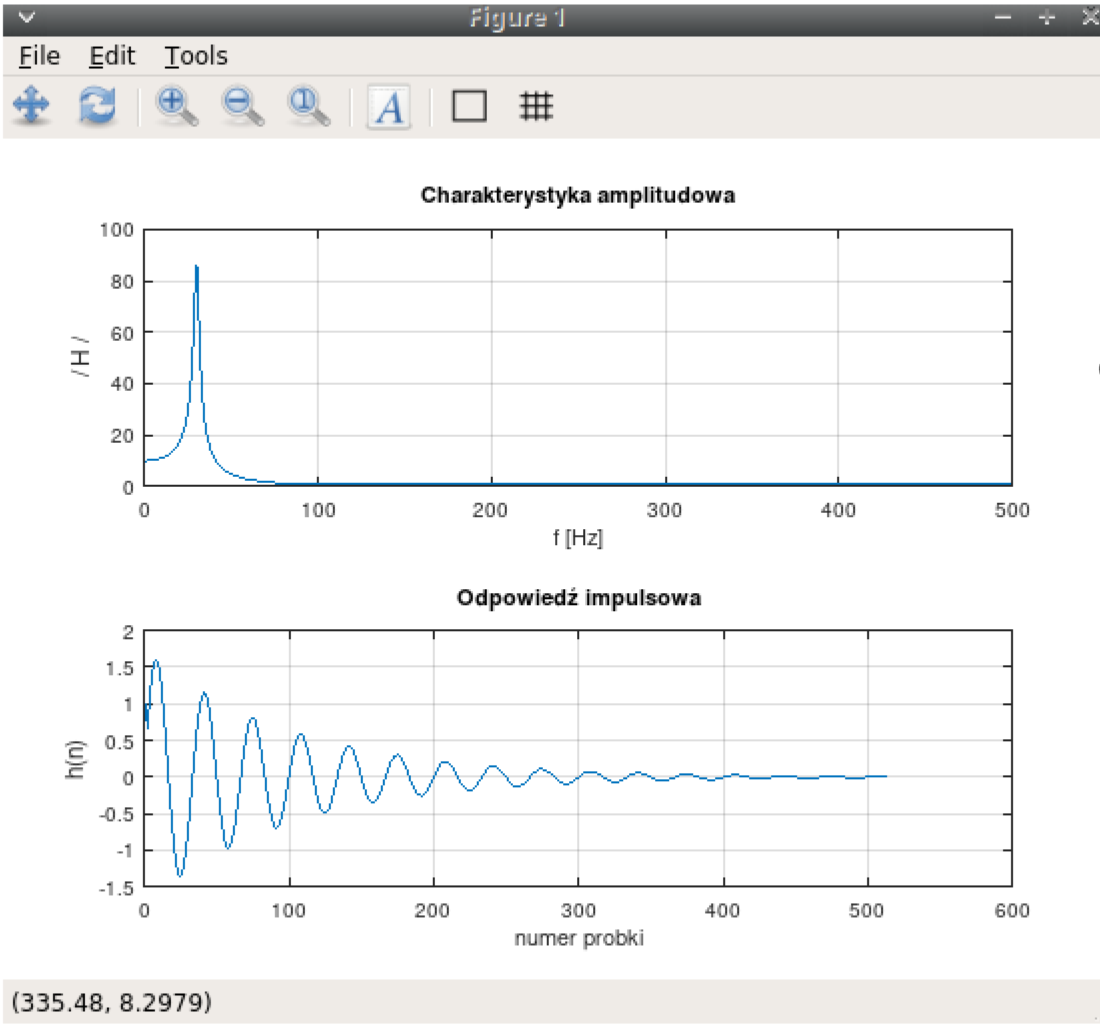
R_z – zmiana wydaje się nie mieć wpływu na charakterystykę amplitudową ← a wartości

R_p – zwiększenie zawęża pasmo przepustowe (wypada bliżej f_p) a wartości.

WYKRES pokazujący wpływ zwiększenia R_p

R_p = 0.95 – na wykresie powyżej

R_p = 0.99 – poniżej



3pkt

3. Zmieniamy parametr zakładając, że reszta jest stała.

f_p – zwiększa ilość oscylacji występujących w odpowiedzi impulsowej.

f_z – zwiększenie powoduje zwiększenie amplitudy oscylacji występujących w odpowiedzi impulsowej (większe przeregulowanie).

R_p - zmniejszenie skraca ilość próbek w których występują oscylacje, zwiększenie. powyżej 1 powoduje, że układ przestaje być stabilny.

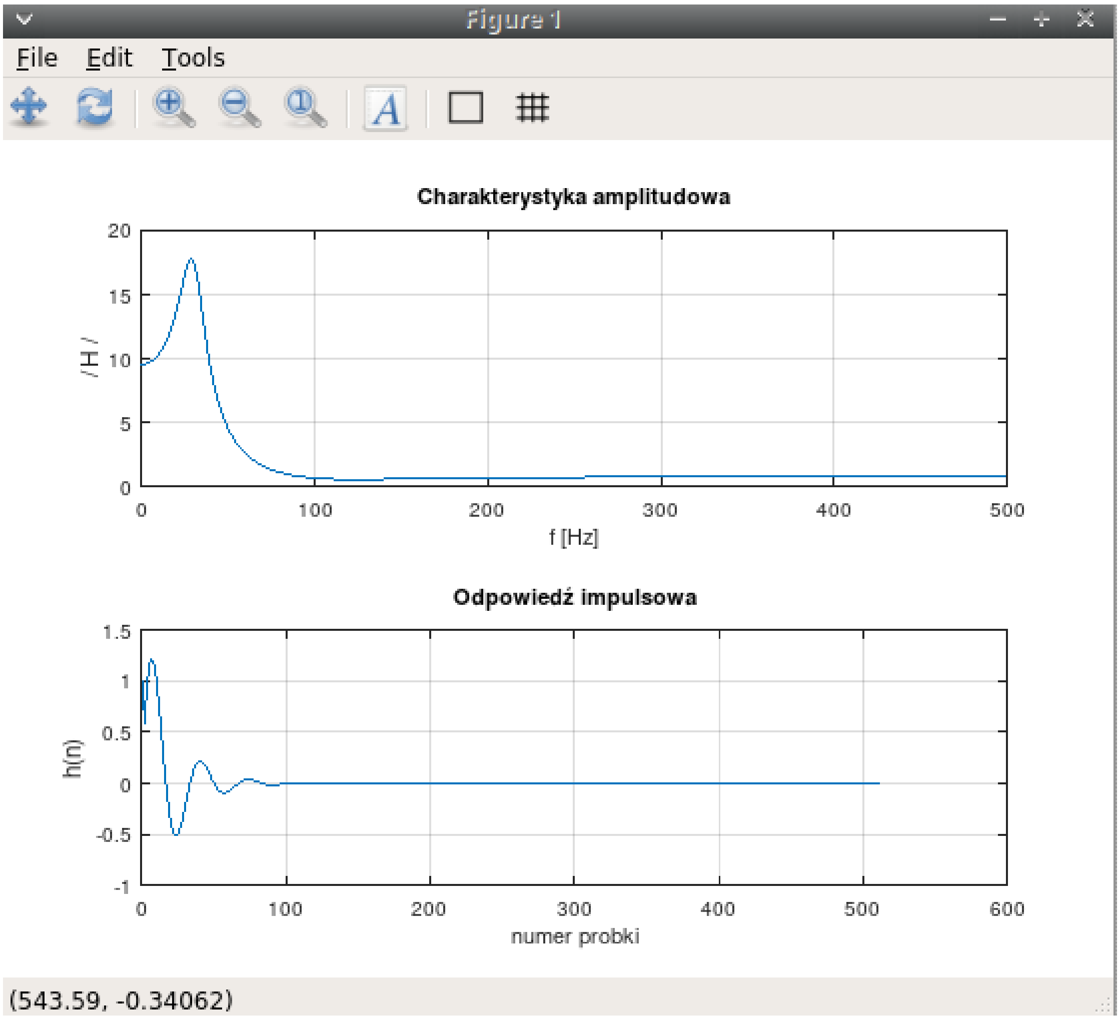
R_z – ponownie zdaje się nie mieć wpływu na wykres odpowiedzi impulsowej.

Zmianę R_p pokazują wykresy powyżej dla pierwszego R_p = 0.95,

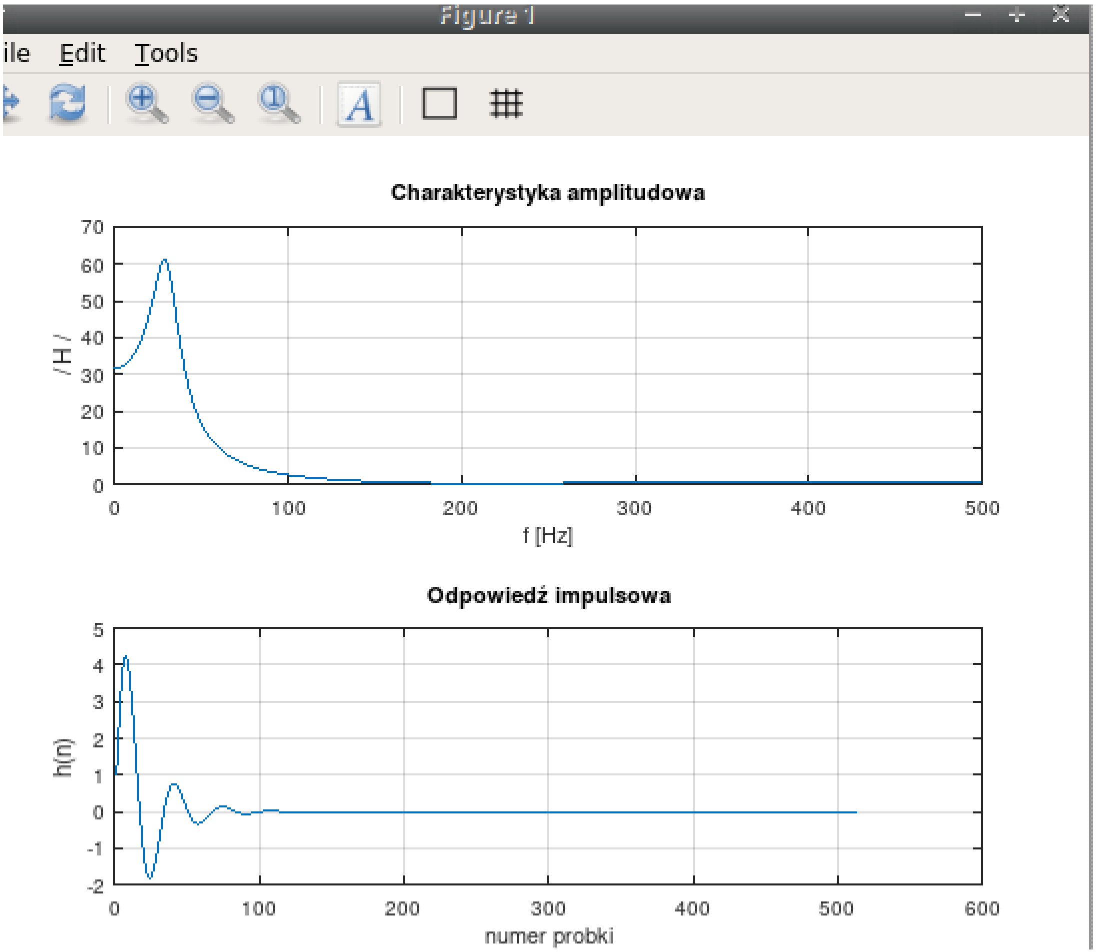
dla drugiego R_P = 0.98

Zmiana f_z, przy f_p = 30

Wykres dla f_z = 100



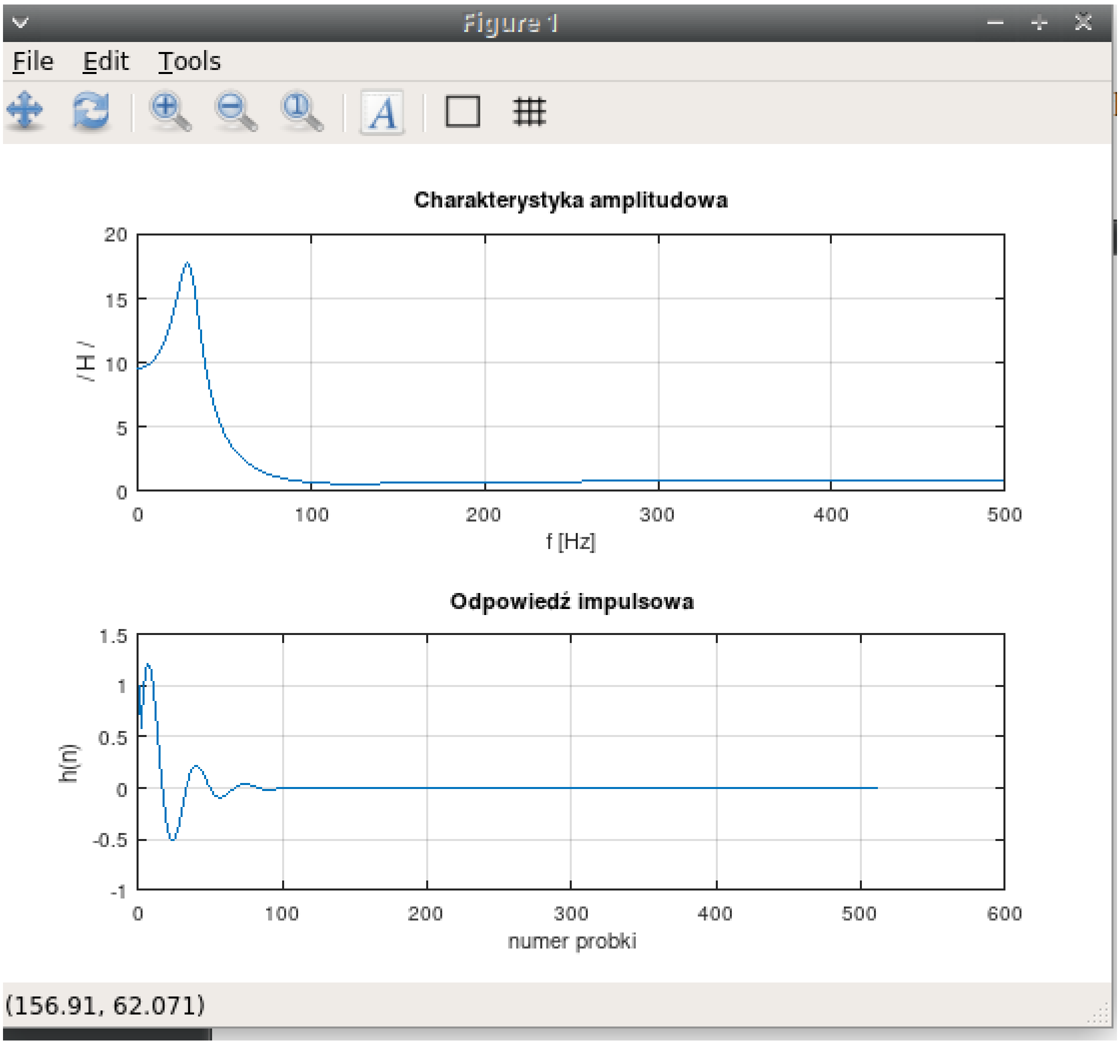
f_z = 200, wystąpi większe przeregulowanie



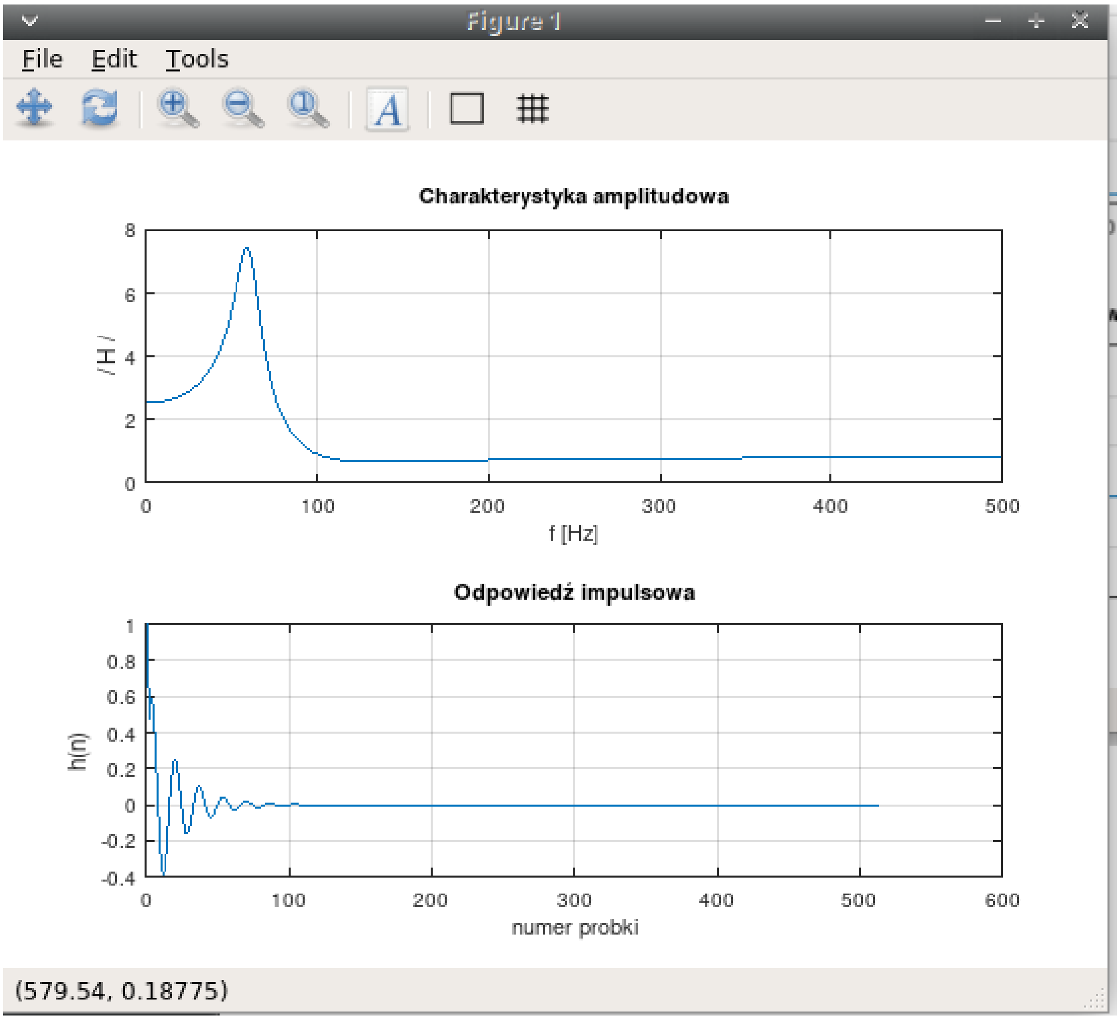
✓

Zmiana f_p, przy f_z = 100

Dla f_p = 30

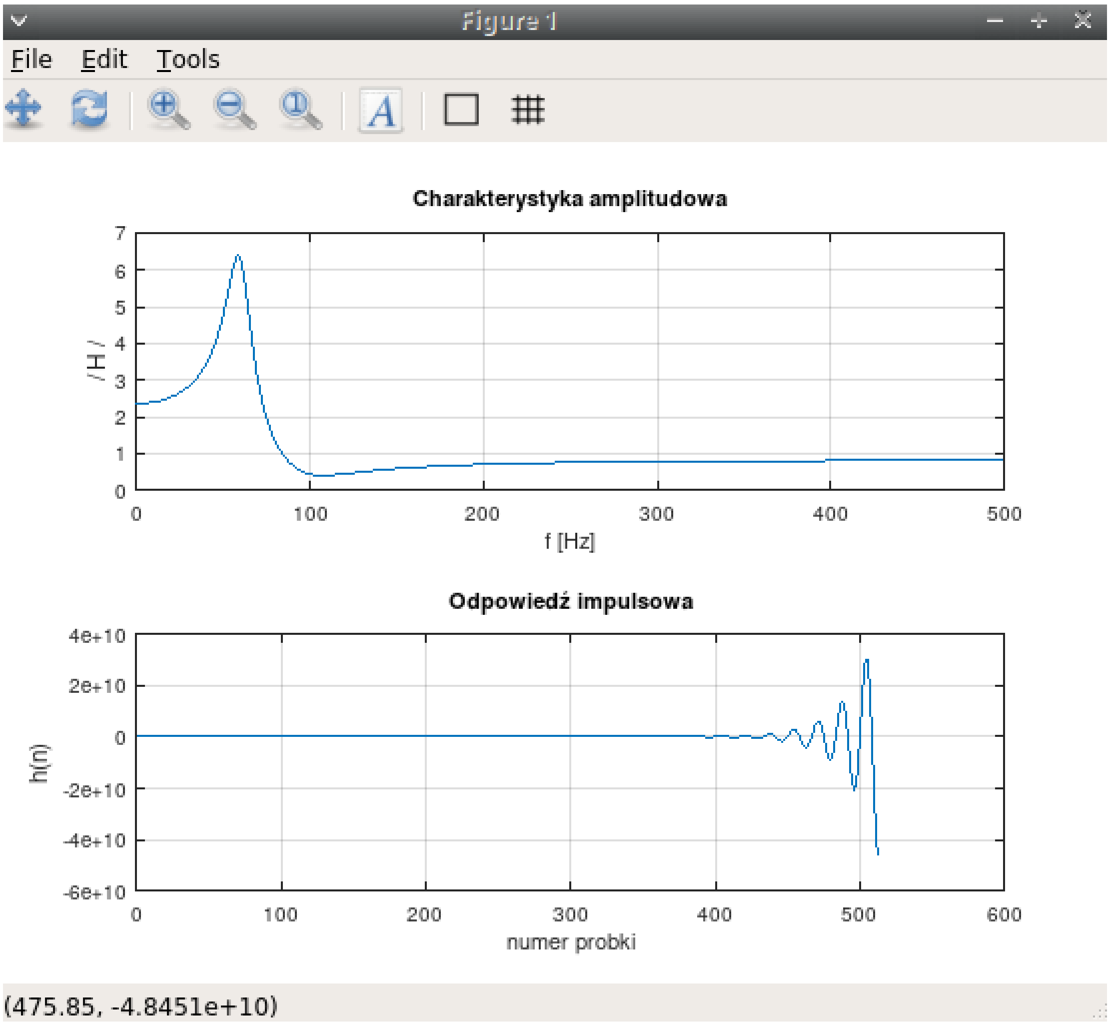


f_p = 60, wystąpi więcej oscylacji



1pkt

4. Ustawiamy R_p>1 i układ staje się niestabilny, co zauważamy na wykresie odpowiedzi impulsowej, zamiast się schodzić do 0, rozchodzi się.



5. Na stabilność wpływa ustawienie R_p, jeżeli wartość tę ustawimy powyżej 1, to układ stanie się niestabilny, a jego odpowiedź na pobudzenie deltą Kroneckera będzie się rozbiegać do nieskończoności.

2pkt

2pkt

6. Korzystamy ze wzoru ze wstępu teorytecznego, i podstawiamy wartości z macierzy A i B.

LAB 3 - TRANSMITANCJA Z

~~H(z) =~~

B

A =

$R_p = 0,95$

$R_z = 1$

$f\_p = 30$

$f\_z = 100$

~~A = [1, -1,9646, 0,9025]~~

B = [1

~~H(z)~~ =

$A = [1, -1{,}5371, 0.9025]$

$B = [1, -1.9646, 1]$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}} =$$

$$= \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1 + (-1{,}9646) z^{-1} + 1 z^{-2}}{1 + (-1{,}5371) z^{-1} + 0{,}9025 z^{-2}}$$

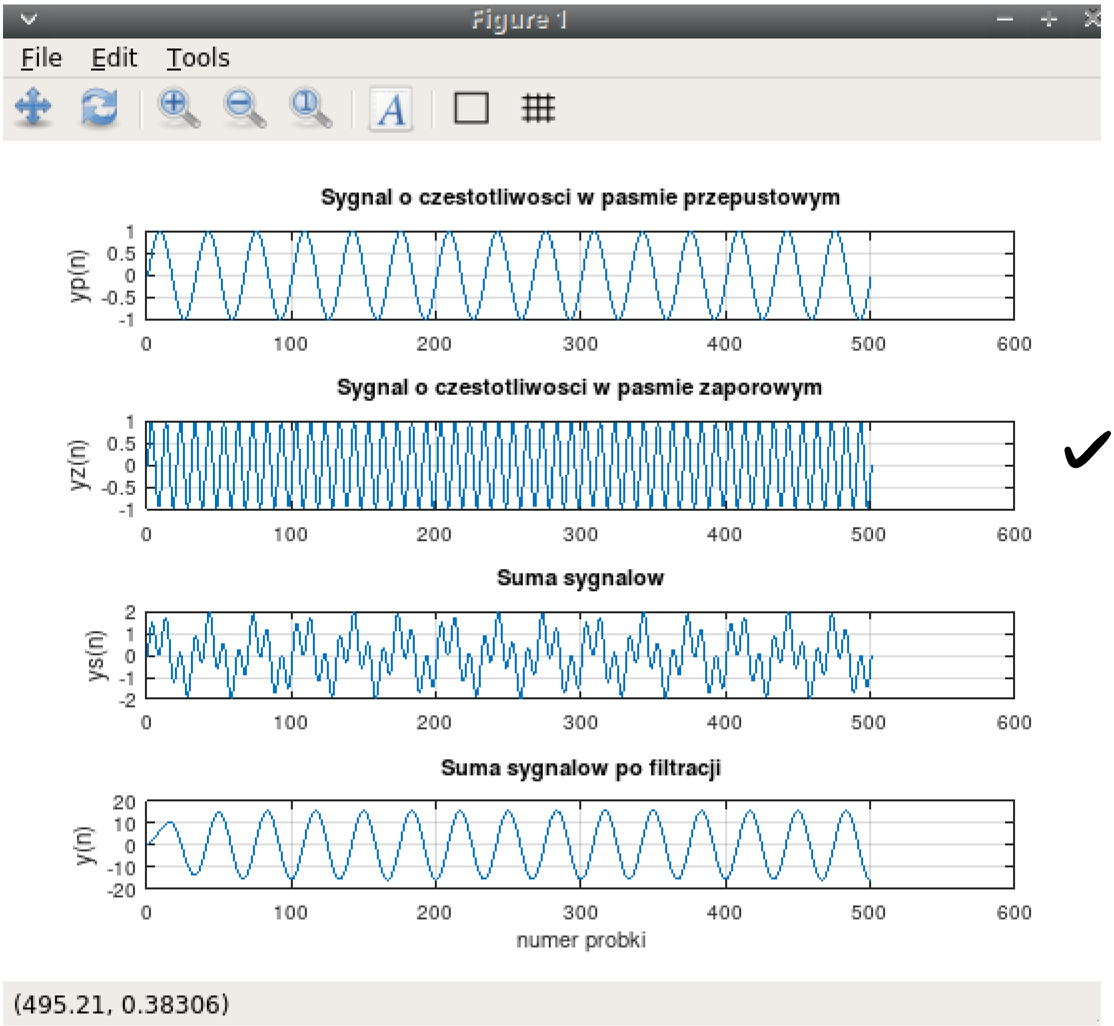
7. Wykres po podłączeniu sinusów:

   fp = 30

   fz = 100

```
yp = sin(2*pi*fp*x);
yz = sin(2*pi*fz*x);
```

1pkt



1pkt A co się dzieje z amplitudą i na początku?

8. Wykresy jak to wygląda są powyżej, sygnał po filtracji nie wygląda tak samo jak ten na wejściu filtru. Na filtr podaliśmy sinusa o częstotliwości fp=30, która jest częstotliwością przepuszczaną przez filtr, oraz sinusa o częstotliwości fz=100, która jest blokowana (maksymalnie tłumiona), zatem sinus o f = 100, zostaje wycięty z sygnału wyjściowego.
9. Ustawiamy R_p > 1 – układ jest niestabilny, co pokazały powyższe przykłady

   Rp = 1 – układ zaczyna być generatorem

   1 pkt Rp<1 – układ jest stabilny

   Możemy zmieniać, wartości fp oraz fz co spowoduje, że częstotliwości maksymalnie wzmacniane i tłumione wypadają w innych miejscach.

   Zmniejszenie wartości R_p powoduje, że układ szybciej uzyskuje oczekiwaną zadaną wartość, ale powoduje to też, że na początku występuje przeregulowanie o dużej amplitudzie.

   i co z wyjściem?

10.
11. Wnioski (**7pkt**)

    - Zwiększenie wartości R_p (promienia bieguna), powyżej 1 powoduje że układ staje się niestabilny, i wartość jego odwiedzi impulsowej na pobudzenie deltą Kroneckera zaczyna dażyć do nieskończoności.

    - f_z to ~~częstotliwość zaporowa~~, tłumienie będzie dał niej największa, częstotliwości wokół niej też będą tłumione

    -f_p to ~~częstotliwość przepustowa~~, tłumienie będzie dla niej minimalne (maks wzmocnienienie)

    - Ustawienie R_p na 1 powoduje, że układ staje się generatorem.

    -Dla R_p < 1 układ jest stabilny

    -Transmitację układu, możemy wyznaczyć za pomocą macierzy A i B

    H(z) = B(z)/A(z)

18,5/15

↓

123,3/100

+ 4 pkt z wniosków i w spr.