Politechnika Poznańska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Wstęp do Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów - Laboratorium

Dyskretna Transformata Fouriera
(DFT ang. Discrete Fourier Transform)

1. Wstęp

W analizie układów ciągłych wykorzystywane jest przekształcenie Fouriera. Taką samą rolę w analizie układów dyskretnych odgrywa **Dyskretna Transformata Fouriera**. Definicja przekształcenia wygląda następująco:

$$\mathrm{X(k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

a odwrotnego:

$$\mathrm{x(n)} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

przy czym:

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Ponieważ w naszym przypadku będziemy zajmować się zajmować podstawowymi właściwościami transformaty, omówimy je pokrótce.

Dyskretna Transformata Fouriera jest **addytywna**, to znaczy, że transformata sumy sygnałów jest równa sumie transformat tych sygnałów.

$$\boldsymbol{DFT\{x_1(n) + x_2(n)\} = DFT\{x_1(n)\} + DFT\{x_2(n)\}}$$

Dyskretna Transformata Fouriera jest **jednorodna**, to znaczy, że a-krotna zmiana amplitudy sygnału spowoduje a-krotną zmianę amplitudy transformaty.

$$\boldsymbol{DFT\{a \cdot x_1(n)\} = a \cdot DFT\{x_1(n)\}}$$

Addytywność i jednorodność łącznie świadczą o **liniowości** Dyskretnej Transformaty Fouriera.

$$\boldsymbol{DFT\{ a \cdot x_1(n) + a \cdot x_2(n)\} = a \cdot DFT\{x_1(n)\} + a \cdot DFT\{x_2(n)\}}$$

Dyskretna Transformata Fouriera ma ograniczoną rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości, dlatego DFT daje rzeczywiste wyniki, gdy sygnał zawiera tylko częstotliwości, które są całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej określonej wzorem:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Jeżeli w sygnale występują częstotliwości nie będące całkowitymi wielokrotnościami Δf, to te częstotliwości „przeciekną” do sąsiednich prążków widma („kwantów częstotliwości”). To zjawisko nazywamy przeciekiem widma. W celu ograniczenia tego niekorzystnego efektu stosuje się okna.

2. Ćwiczenie

1. Zapoznaj się z plikiem CPS_liniowosc.m, wygeneruj wykres i wyjaśnij co przedstawia (2pkt).
2. Zmodyfikuj plik tak, aby pokazać jednorodność DFT na wykresie. Opisz procedurę. (3 pkt)

3. Znajdź wartość N przy której dochodzi do maksymalnego przecieku (CPS_przeciek.m – warto przeanalizować plik). Przedstaw proces szukania i argumentację (4pkt)
4. Określ częstotliwość prążka w widmie Y0, czyli dla N0=100 (1pkt)
5. Określ częstotliwość dwóch największych prążków w widmie Y dla przypadku widma z maksymalnym przeciekiem (2 pkt)

6. Zrealizuj symulację dla 3 różnych okien (CPS_okna.m) (6pkt)
   a. Określ częstotliwość dwóch największych prążków w widmie YW
   b. Porównaj widma Y i YW
7. Zbadaj widmo sygnału dla użytych wcześniej okien w sytuacji gdy nie ma przecieku. (2pkt)

Wnioski (6pkt)

3. Wzór sprawozdania

<table>
<tr><td colspan="3">Wstęp do cyfrowego przetwarzania sygnałów – laboratorium
Temat:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Imię i nazwisko:</td></tr>
<tr><td>Data ćwiczenia:</td><td>Data oddania sprawozdania:</td><td>Ocena:</td></tr>
</table>

Sprawozdanie powinno zawierać:

- Wykresy otrzymanych przebiegów,
- Wnioski.

CPS_liniowosc.m

```
clear; clc;

N=100;
fs=100;
t=0:1/fs:(N-1)/fs;
f1=10; d1=3*sin(2*pi*f1*t);
f2=20; d2=2*sin(2*pi*f2*t);

                                        % Sprawdzanie liniowości DFT
f=fs*(0:length(d1)-1)/length(d1);

                                        % addytywność
D1=fft(d1);
D2=fft(d2);
WiSu=  fft(d1+d2);                      % uzupełnić (widmo sumy sygnałów)
SuWi= D1+D2;                            % uzupełnić (suma widm sygnałów)

subplot(4,1,1); stem(f,(2/N)*abs(D1));xlabel('f [Hz]');grid;
subplot(4,1,2); stem(f,(2/N)*abs(D2));grid;
subplot(4,1,3); stem(f,(2/N)*abs(WiSu));title('Widmo sumy sygnałów');grid;
subplot(4,1,4); stem(f,(2/N)*abs(SuWi));title('Suma widm 
sygnałów');xlabel('f [Hz]');grid;

% jednorodność - zrealizować  samodzielnie
```

CPS_przeciek.m

```
% A. Wpływ obcięcia na rozmiar przecieku

 clear; clc;
 fs=30; fx=3;

 N0=100;                          % bez przecieku
 t0=0:1/fs:(N0-1)/fs;
 y0=sin(2*pi*t0*fx);
 f0=fs*(0:length(y0)-1)/length(y0);
 Y0=fft(y0);

 N=95;                            % z przeciekiem
 t=0:1/fs:(N-1)/fs;
 y=sin(2*pi*t*fx);
 f=fs*(0:length(y)-1)/length(y);
 Y=fft(y);

 subplot(2,1,1); stem(f0,(2/N0)*abs(fft(y0)),'.');grid;
legend('N_0=100','Location','north');
 xlabel('f[Hz]');ylabel('Y0');
 subplot(2,1,2);
stem(f,(2/N)*abs(fft(y)),'.');grid;legend('N=?','Location','north');
 xlabel('f[Hz]');ylabel('Y')


% A1. Znaleźć wartość N przy której dochodzi do maksymalnego przecieku;
%     N z przedziału [91,99]
% A2. Określić częstotliwość prążka w widmie Y0, czyli dla N0=100
% A3. Określić częstotliwość dwóch największych prążków w widmie Y
%     dla przypadku widma z maksymalnym przeciekiem
%______________________________________________________________________
```

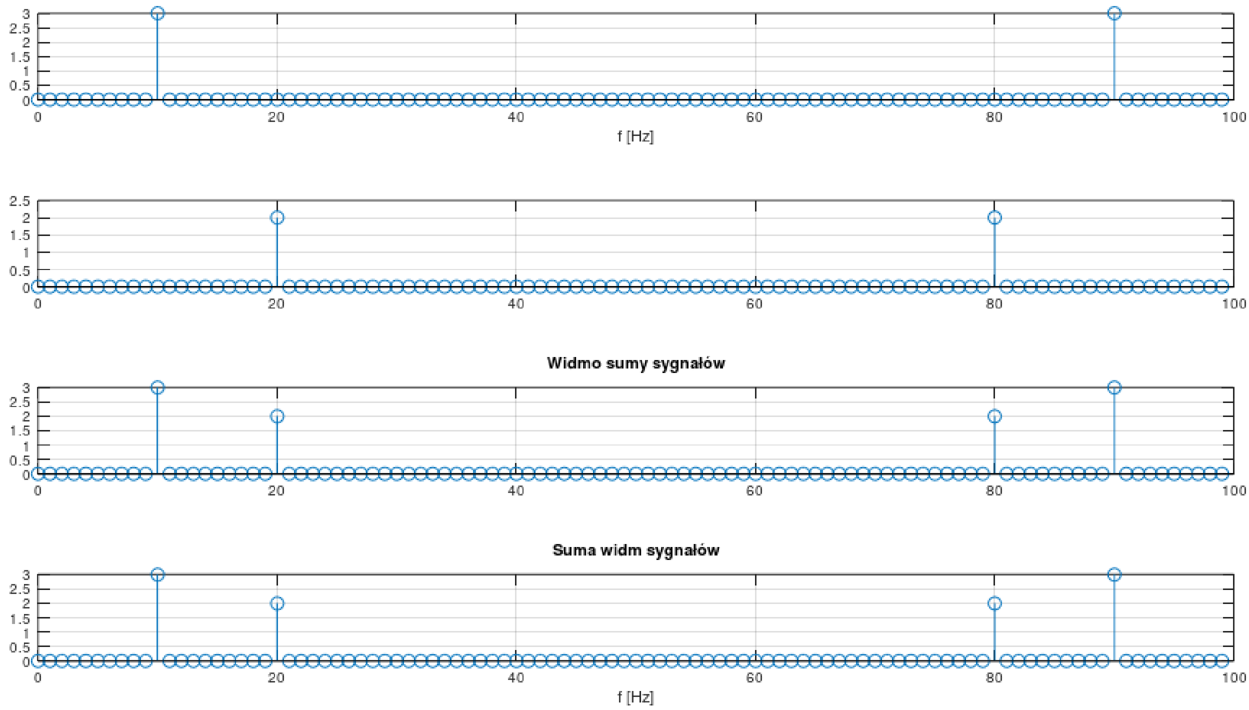
CPS_okna.m

```
% B. Zastosowanie okien (dla N z max przecieku)

clear; clc;
fs=30; fx=3;
N=95;                              % wycięcie z max przeciekiem
t=0:1/fs:(N-1)/fs;
y=sin(2*pi*t*fx);
f=fs*(0:length(y)-1)/length(y);
Y=fft(y);

w=(window(@triang,N))';
yw=y.*w;
YW=fft(yw);

subplot(4,1,1); stem(y,'.');xlabel('n');ylabel('y(n)');grid;
subplot(4,1,2); stem(w,'.');xlabel('n');ylabel('w(n)');grid;
subplot(4,1,3); stem(f,(2/N)*abs(Y),'.');xlabel('f [Hz]');ylabel('Y');grid;
subplot(4,1,4); stem(f,(2/N)*abs(YW),'.');xlabel('f
[Hz]');ylabel('YW');grid;

% B1. Zrealizować symulację dla 3 okien
% B2. Określić częstotliwość dwóch największych prążków w widmie YW
% B3. Porównać widma Y i YW

%_______________________________________________________________________
%subplot(4,1,3); stem(f,(2/N)*abs(Y),'.');hold on;
stem(f0,(2/N0)*abs(Y0),'r','.');hold off;
%subplot(4,1,4); stem(f,(2/N)*abs(YW),'.');hold on;
stem(f0,(2/N0)*abs(Y0),'r','.');hold off;
```

1) Dwa pierwsze wykresy przedstawiają widma częstotliwościowe dwóch różnych sygnałów. Pierwszy składa się ze składowych o częstotliwości 10 Hz oraz 90 Hz, drugi ze składowych o częstotliwościach odpowiednio 20 Hz oraz 80Hz. !!! Źle Pan interpretuje widmo!

Kolejne dwa wykresy przedstawiają odpowiednio, widmo sumy sygnałów oraz sumę widm sygnałów. Oba wykresy są takie same ze względu na cechę DFT jaką jest addytywność.

Wykresy:

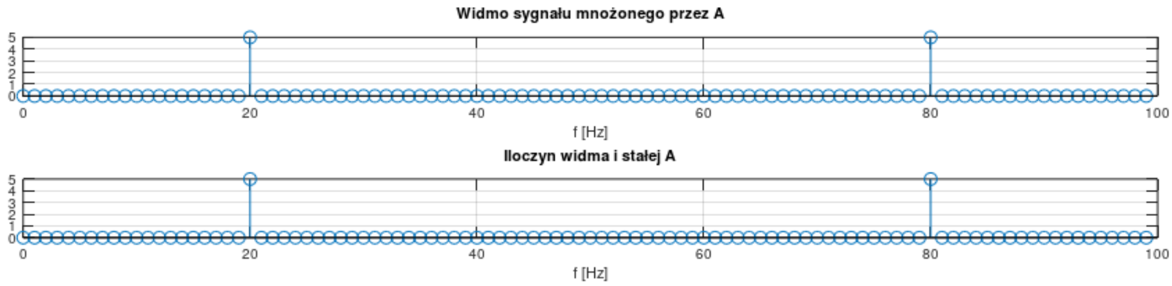


2) Możemy zaobserwować tę cechę transformaty za pomocą poniższego fragmentu kodu, zauważamy, że uruchomienie zmienionego skryptu, rysuje kolejne dwa wykresy pierwszy przedstawia widmo sygnału mnożonego przez stałą A, a drugi iloczyn widma sygnału i stałej A. Ponownie oba wykresy są identyczne co pozwala potwierdzić, że DFT jest przekształceniem jednorodnym.

```
clear; clc;

N=100;
fs=100;
t=0:1/fs:(N-1)/fs;
f1=10; d1=3*sin(2*pi*f1*t);
f2=20; d2=2*sin(2*pi*f2*t);

                    % Sprawdzanie liniowości DFT
f=fs*(0:length(d1)-1)/length(d1);

                    % addytywność
D1=fft(d1);
D2=fft(d2);
WiSu=  fft(d1+d2);
SuWi= D1+D2;

subplot(6,1,1); stem(f,(2/N)*abs(D1));xlabel('f [Hz]');grid;
subplot(6,1,2); stem(f,(2/N)*abs(D2));grid;
subplot(6,1,3); stem(f,(2/N)*abs(WiSu));title('Widmo sumy sygnałów');grid;
subplot(6,1,4); stem(f,(2/N)*abs(SuWi));title('Suma widm sygnałów');xlabel('f
[Hz]');grid;


% jednorodność - zrealizować  samodzielnie
A=5
f3=30;
d3 = sin(2*pi*f2*t);
WiIl = fft(A * d3);           %transformata iloczynu
IlWi =  A * fft(d3);          %iloczyn transformaty przez stałą  A
%rysunki jednorodnosc
subplot(6,1,5); stem(f,(2/N)*abs(WiIl));title('Widmo sygnału mnożonego przez
A');axis([0,100,0,5]);
xlabel('f [Hz]');grid;
subplot(6,1,6); stem(f,(2/N)*abs(IlWi));title('Iloczyn widma i stałej A');axis([0,100,0,5]);
xlabel('f [Hz]');grid;
```

Wykresy:

3pkt



3) Na pierwszym wykresie, widzimy sytuację idealną, gdy nie ma przecieku. Na drugim zauważamy sytuację w której występuje przeciek, czyli część energii ‘przenosi się’ z dwóch prążków występujących w widmie w sytuacji idealnej, na sąsiednie prążki, im szersze staje się widmo (im więcej pojawia się prążków) tym większy jest przeciek, więc zmieniamy N, tak by uzyskać opisany wyżej efekt. Szukamy w przedziale od N=91 do N=99.

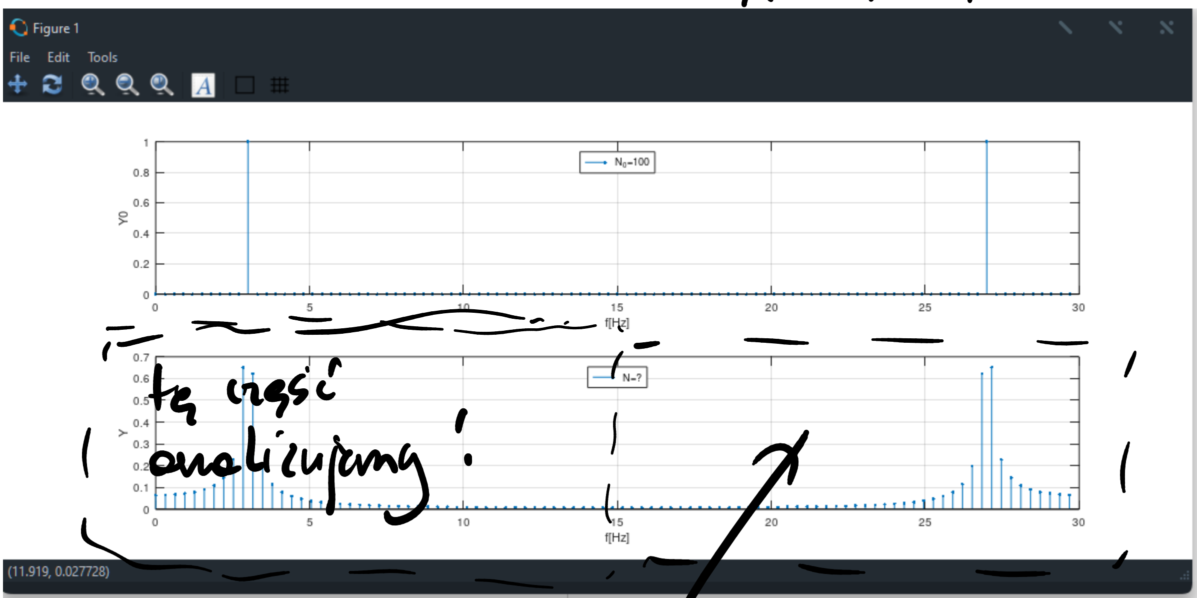
Największy przeciek wystąpi dla N=95

A co dla 94 i 95.?

3pkt

Wykres:

Muszę 95 wziąć na wiarę?



tę część analizujemy!

kopie widma dla ujemnych częstotliwości!

Dla sygnałów rzeczywistych (R) widmo jest symetryczne względem OY

1pkt

4) **W paśmie Y0, prążek pierwszy ma częstotliwość 3 Hz, a drugi 27 Hz.** !

5) **W paśmie Y, pierwszy najwyższy prążek ma częstotliwość ok. 2 .85 Hz, a drugi ok. 27.15 Hz**

1p. pełn

uwaga do okolicy widmowej

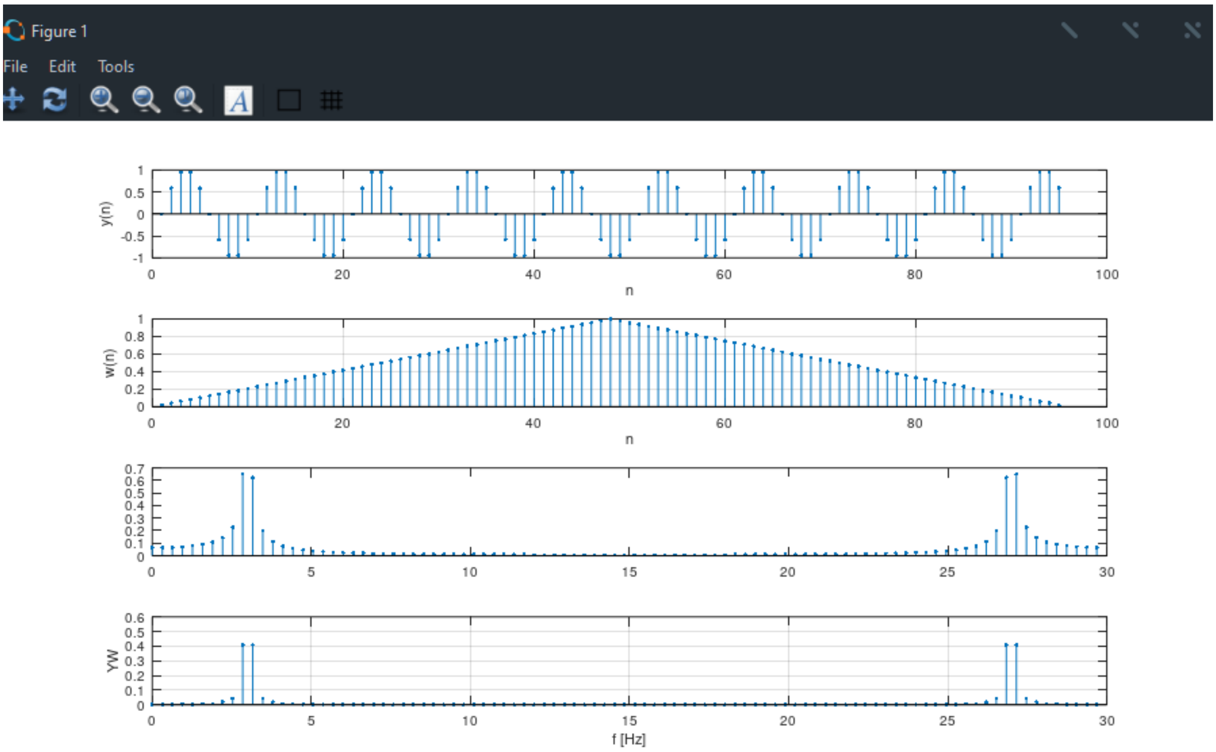
6) **Okna:**

a) **Pierwsze – triangle**
- **Pierwszy prążek: 2.84 Hz**
- **Drugi prążek: 27.16 Hz**

Zauważamy, że w przypadku okna trójkątnego przeciek został ograniczony, a energia skupiona w zasadzie, w 4 prążkach, po dwa w bliskiej okolicy częstotliwości prążków z widma dla N=100, bez przecieku (3Hz i 27Hz). Zauważamy, że okienkowanie zmniejszyło amplitudy prążków.

✓

Wykresy:

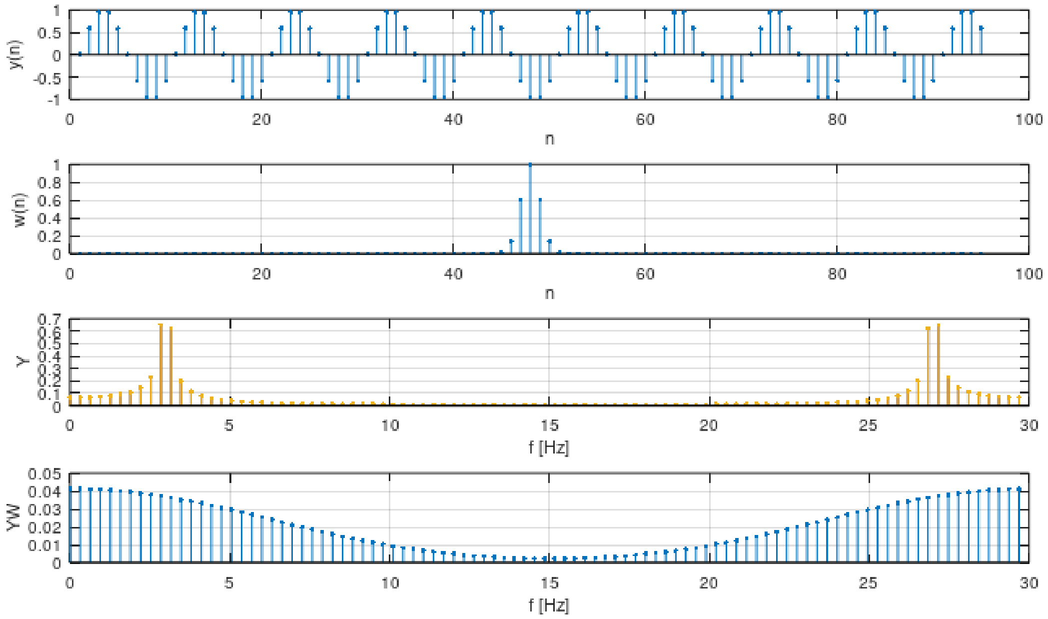


b) Drugie – gaussian

- **Pierwszy prążek: 0 Hz**
- **Drugi prążek: ~~29,7 Hz~~**

Zauważamy, że w tym przypadku energia została rozłożona po całej szerokości widma, zaczynając od 0 Hz prążki stopniowo zmniejszają swoje amplitudy, aż dotrzemy do połowy szerokości widma to jest 15 Hz, od tego momenty, amplitudy prążków zaczynają rosnąć symetrycznie względem tego jak poprzednio opadały, aż od 30 Hz. Zauważamy, że amplitudy prążków znacznie się zmniejszyły.

Wykresy:

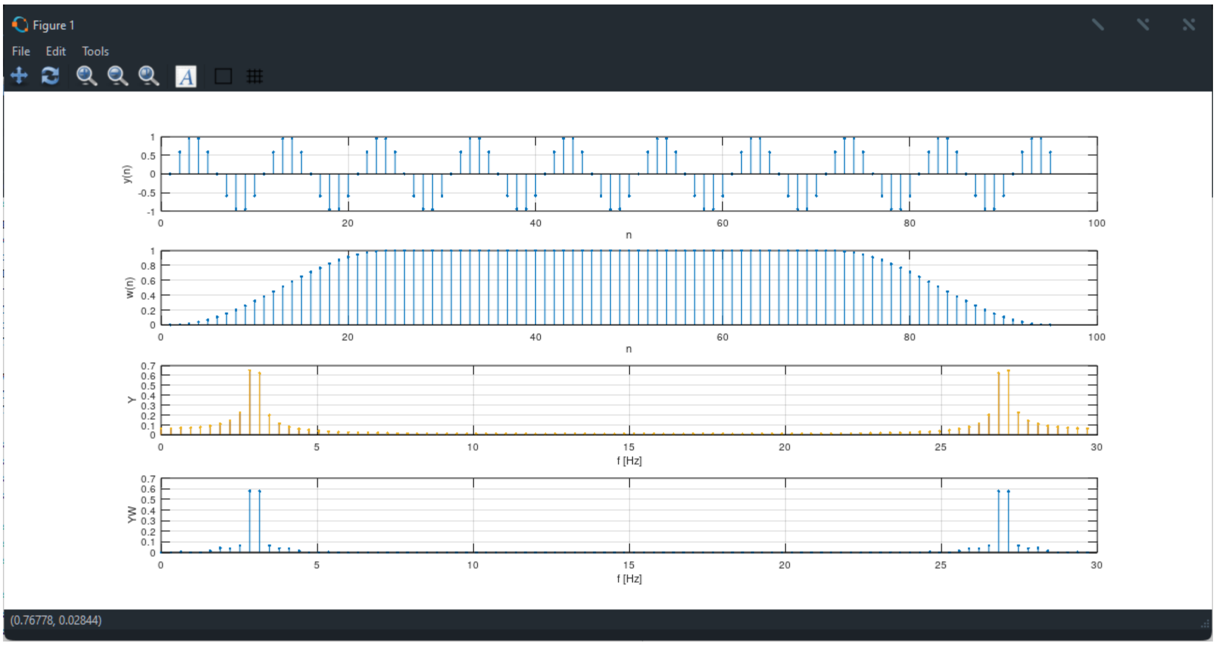


5pkt

c) **Trzecie – tukeywin**
   - **Pierwszy prążek: 2.84 Hz**
   - **Drugi prążek: ~~27.16 Hz~~**
   -

Ponownie, podobnie jak w przypadku trójkąta, energia skupia się w dwóch prążkach wokół częstotliwości idealnych, zmniejsza się przeciek, ale także amplituda prążków.

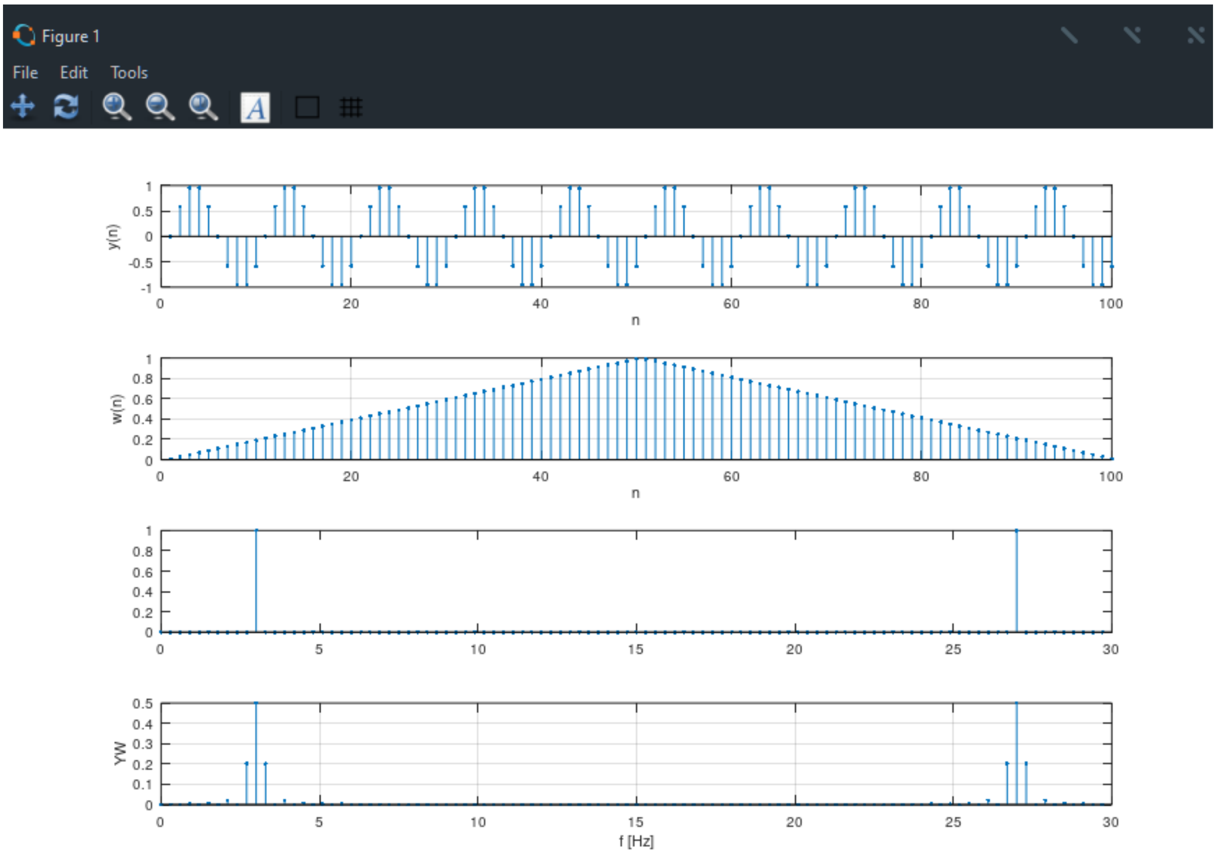
Wykresy:



7) **Zauważamy, że gdy nie ma przecieku, a skorzystamy z okienkowania to można powiedzieć, że sami spowodujemy przeciek, energia zamiast być skupiona w jednym prążku, rozleje się na kilka prążków wokół wzorcowej częstotliwości.**

Powyższa, sytuacja przedstawiona na wykresie, użyto okienkowania trójkątem.

2pkt



Wnioski:

-> +1pkt

1. DFT jest przekształceniem liniowym, czyli addytywnym i jednorodnym, co potwierdzają teoria oraz wyniki zadań 1 i 2.

2. Kolejne trzy zadania pozwalają zaobserwować występowanie przecieków widma, sytuacji do której dochodzi, gdy w sygnale wystąpią częstotliwości, które nie są wielokrotnościami częstotliwości podstawowej $\Delta \boldsymbol{f} = \frac{f_s}{N}$, jest to zjawisko, niepożądane które chcemy ograniczyć. ✓ +1pkt. -> a dlaczego akurat w 9/5 max? jaka zależność kwanty - częstotl. prążków!

3. W celu ograniczenia przecieków stosujemy proces zwany okienkowaniem, ogranicza one efekty przecieku, kosztem np. obniżenia amplitudy kolejnych prążków w widmie. Jest wiele różnych okien, które dobieramy w zależności od potrzeb np. okno trójkątne, gaussa czy kwadratowe. +2pkt ✓

4. Zauważamy też, że jeżeli przeciek nie występuje, to stosowanie okienkowania nie ma sensu, gdyż w takiej sytuacji może powodować wystąpienie przecieku. ✓ -> 1pkt

22/25

$\boxed{88/100}$