Álgebra II(61.08, 81.02) Segundo cuatrimestre 2019
Práctica 6. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales

1. Encuentre todas la soluciones reales de la siguientes ecuaciones diferenciales. En el caso de tener que hallar una solución particular, emplee el método de coeficientes indeterminados:

(**a**) $f'(t) - 2f(t) = 0$

(**b**) $y' - y = (1 + x)e^x$

(**c**) $\frac{dx}{dt} + x = 2e^t$

(**d**) $2y' + 6y = e^x cos(x)$

(**e**) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + (w^2 + 1)x = 0, w \geq 0$

(**f**) $f''(t) + f'(t) = 3x^2$

(**g**) $y'' - 4y = e^{2x}$

(**h**) $y'' + y = cos(wx), \quad w > 0$

(**i**) $y'' - w^2 y = asen(w_0 t), \quad w, w_0 > 0, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

2. Resuelva los siguientes problemas a valores iniciales:

(**a**) $y'' - y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$

(**b**) $y'' + 4y' + 4y = 9cosh(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$

3. Resuelva los siguientes problemas con valores de frontera:

(**a**) $y'' - 9y = 0, \quad y(-4) = y(4) = cosh(12)$

(**b**) $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(\frac{1}{2}) = e - 2$

(**c**) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 1$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, los problemas con valores de frontera, siempre tienen solución? De tener por lo menos una solución, ésta es única?

4. La velocidad $v(t)$ de un objeto que cae puede ser modelada por la ecuación $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ donde m es la masa del cuerpo, g es la aceleración de la gravedad y k es una constante relacionada con la resistencia del aire. Resuelva la ecuación diferencial en el caso que $v(0) = 0$. Grafique. Halle $lim_{t \longrightarrow \infty} v(t)$.

5. Un modelo matemático para la rapidez con que se disemina un fármaco en el torrente sanguíneo es $\frac{dx}{dt} = r - kx, r, k > 0$, siendo $x(t)$ la concentración en el torrente sanguíneo en el tiempo t.

(**a**) Resuelva la ecuación sujeta a $x(0) = 0$.

(**b**) Calcule $lim_{t \longrightarrow \infty} x(t)$. En qué momento la concentración está a la mitad del valor límite?

6. Resuelva los problemas a valores iniciales:

(**a**) $X' = AX$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(**b**) $X' = AX$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Halle bases de soluciones reales de los sistemas:

(**a**) $X' = AX$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(**b**) $X' = AX$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

8. Halle la solución general de los sistemas lineales no homogéneos:

(**a**) $X' = AX + B(t)$ con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$

(**b**) $Y' + AY = F(x)$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $F(x) = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$

9. Halle A tal que la solución general del sistema $X' = AX$ sea $X = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + 5c_2 e^{3t} \\ 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$

10. Considere la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

y el sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} Y, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Pruebe que:

(**a**) Si Y es solución de (2) entonces $y = y_1$ es solución de (1)

(**b**) Si y es solución de (1) entonces $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ con $y_1 = y, y_2 = y'$ es solución de (2) (**c**) El polinomio característico de A coincide con el polinomio característico de (1)

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con autovalores reales y tal que $det(A) > 0$ y $tr(A) < 0$. Muestre que toda solución del sistema $Y' = AY$ donde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ verifica que $lim_{t \longrightarrow +\infty} y_i(t) = 0$, $i = 1, 2$.

12. Considere $\mathbb{C}^n$ con cierto producto interno $(,)$ y S un subespacio de $\mathbb{C}^n$ tal que $dim(S) = r < n$. Sea $B = B_1 \cup B_2$ base de $\mathbb{C}^n$ tal que B_1 es base de S y B_2, base de $S^{\perp}$. Sea P la matriz que representa a la proyección sobre S respecto de B. Resuelva el problema a valor inicial $X' = PX$, $X(0) = X_0$.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la reflexión sobre cierta recta S tal que $f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si A representa a f respecto de base canónica, resuelva el sistema $X' = A^{-31}X$.