

## OBJETIVO PRINCIPAL

- ✓ Determinar si existe diferencia en la TRT entre las muestras del cuerpo y de los pliegues de CPF.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Disminuir el número de ensayos necesarios para obtener de la información requerida.

## RESUMEN

Se encontró que la diferencia entre la TRT del cuerpo y los pliegues es mayor a 0 (sin determinar cuantitativamente esta diferencia) con un 95% de confianza. Es decir, que esta propiedad es, en promedio, mayor en el cuerpo del producto que en los pliegues. Con estos resultados se determinó un intervalo de tolerancia para la diferencia entre la TRT del cuerpo y los pliegues, que contiene, con un 99% de confianza, al 90% de la población.

Además, se observó que no habría diferencia estadísticamente significativa entre los promedios de la TRT de los pliegues derechos con los del izquierdo del mismo material.

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ

## REFERENCIAS

- TRT: Propiedad a evaluar.
- CPF: Material evaluado.
- C: Cuerpo.
- PD: Pliegue derecho.
- PI: Pliegue izquierdo.
- $\Delta C$ -PD: Diferencia de la propiedad estudiada entre el cuerpo y el pliegue derecho.
- $\Delta C$ -PI: Diferencia de la propiedad estudiada entre el cuerpo y el pliegue izquierdo.
- $\Delta PD$ -PI: Diferencia de la propiedad estudiada entre el pliegue derecho y el izquierdo.
- $\mu$ : Promedio de la población.
- $\bar{X}$ : Promedio del conjunto de datos.
- s: Desviación estándar del conjunto de datos.
- n: Cantidad de muestras del conjunto de datos.
- $\mu_0$ : Media supuesta de la población.

## INTRODUCCIÓN

Para el ensayo de tracción de las probetas del pliegue de CPF, se llevan a cabo 5 repeticiones de cada pliegue (derecho e izquierdo). Estos ensayos se realizan una vez por turno, por cambio de orden de producción y/o por máquina. Para realizar el ensayo completo una vez obtenida la probeta, se demora (entre tiempo de ensayo del analista, y el tiempo de máquina) un promedio de 2 minutos y 15 segundos por repetición, lo que lleva a 22 minutos y 30 segundos por ensayo. Actualmente se están realizando 2 ensayos por turno, es decir 4 diarios, lo que insume un total de 46 minutos.

Se recolecta información de ensayos de TRT de CPF, las cuales presentan además los ensayos de al menos uno de los pliegues (derecho e/o izquierdo). Se obtuvieron 93 muestras del conjunto cuerpo-pliegue derecho ( $\Delta C$ -PD) y 93 muestras del conjunto cuerpo-pliegue izquierdo ( $\Delta C$ -PI). También se recolectaron 90 muestras del conjunto  $\Delta PD$ -PI.

Se llevará a cabo un análisis estadístico para verificar si existe diferencia significativa entre los resultados de TRT de las distintas muestras. Y en caso de haberla, se determinará un intervalo de tolerancia en el cual se encuentre un alto porcentaje de la población de la diferencia de TRT cuerpo-pliegue, donde ambas muestras superen la TRT mínima.

## RESULTADOS

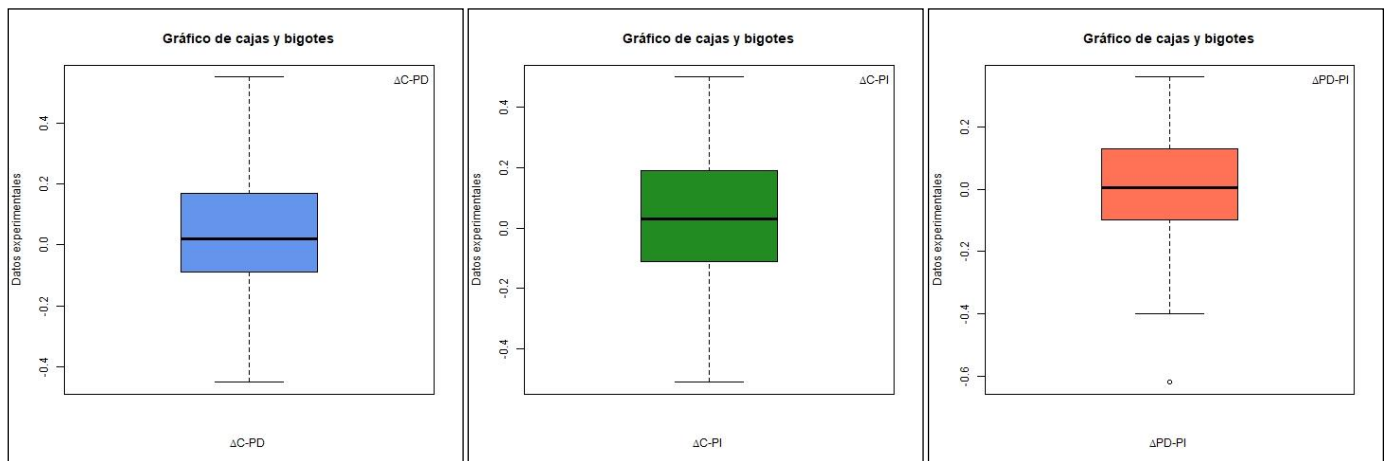
Se presenta a continuación las variables descriptivas de los tres conjuntos de datos estudiados, obtenidos del conjunto de datos original;

Resumen de los conjuntos de datos			
Variable	$\Delta C$ -PD	$\Delta C$ -PI	$\Delta PD$ -PI
Muestras (n)	93	93	90
Media aritmética ( $\bar{X}$ )	0,04	0,044	0,005
Media recortada (10%)	0,036	0,045	0,011
Mediana	0,02	0,03	0,005
Desvío Estándar (s)	0,21	0,211	0,183
Moda	0	0,009	-0,02
Mínimo	-0,45	-0,51	-0,62
Máximo	0,55	0,5	0,36
Primer Cuartil	-0,09	-0,11	-0,098
Tercer Cuartil	0,17	0,19	0,13

Tabla 1. Parámetros representativos de los conjuntos de datos.

Se observa en la Tabla 1 que en los 3 casos la media es cercana a cero, es decir, que en promedio, la diferencia entre cuerpo y pliegue o entre ambos pliegues para la TRT, es prácticamente nula. A continuación en la Gráfica 1, se pueden apreciar gráficamente las medidas principales de los conjuntos:

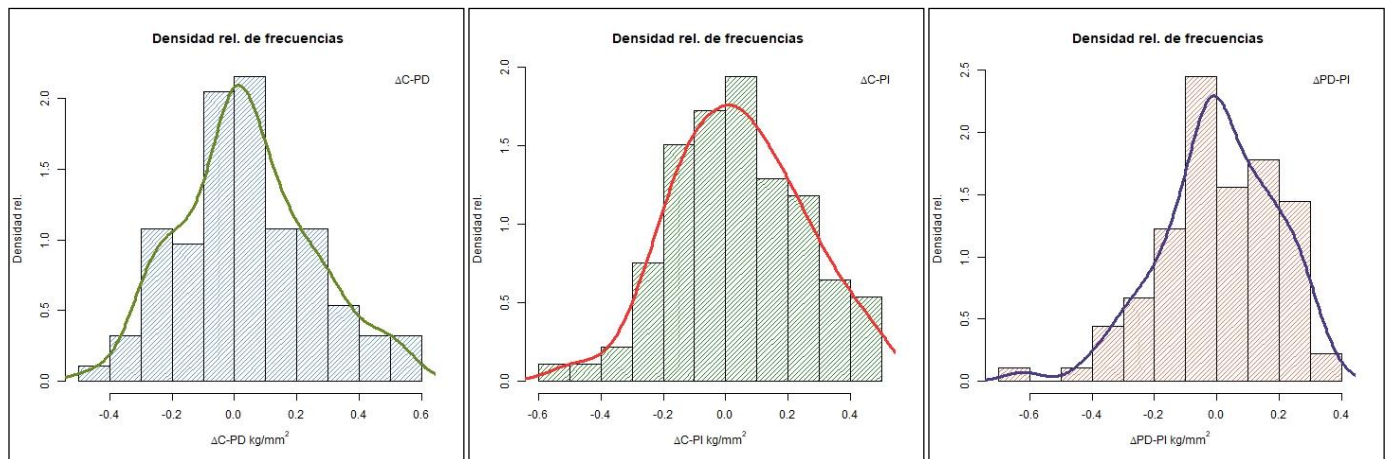
PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ



Gráfica 1. Gráficas de cajas y bigotes para los conjuntos de datos.

Dado que en todo muestreo de datos existe dispersión, a continuación, se intenta verificar si el conjunto de datos proviene de una distribución normal, con el fin de poder comparar los conjuntos estadísticamente.

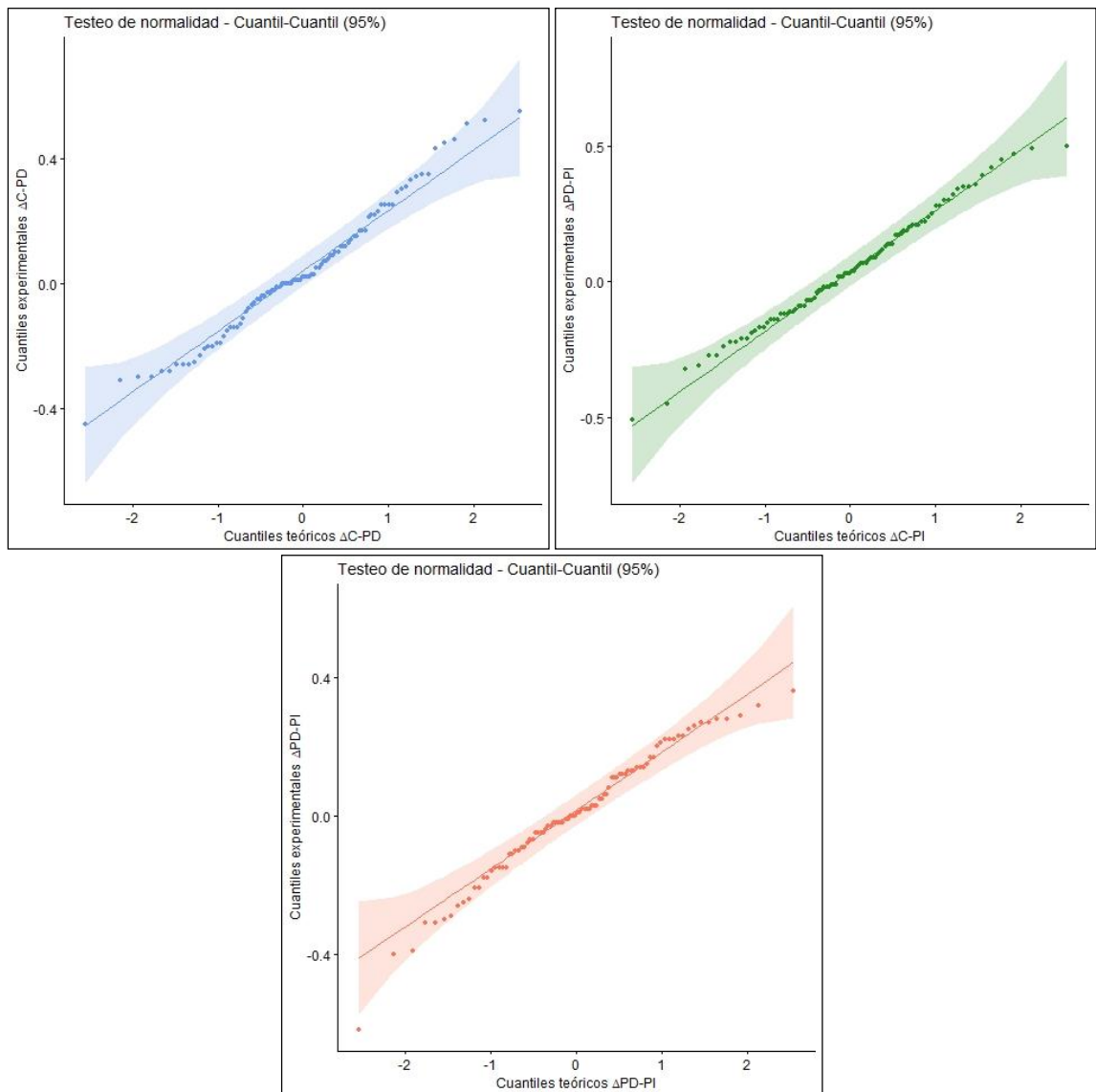
En la Gráfica 2 se puede observar el histograma de frecuencias junto con la gráfica de densidad relativa de las muestras.



Gráfica 2. Histograma y densidad relativa de los conjuntos de datos.

Si bien se puede apreciar cierto grado de “normalidad”, en la Gráfica 3 se presentan los valores cuantil – cuantil (puntos) frente a los valores que corresponden a la curva normal (línea) con media y varianza de cada conjunto, con una confianza del 95% (zona sombreada). Si los puntos se sitúan dentro de la zona sombreada, se puede decir que los datos provienen de una distribución normal con un 95% de confianza. Se puede apreciar que en este caso se cumple esta situación por lo que se podría asumir “normalidad”. En la Tabla 2 se muestran los resultados de test paramétricos para confirmar esta suposición.

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ



**Gráfica 3. Gráficas cuantil - cuantil para los distintos conjuntos de datos.**

Resultados paramétricos de tests de normalidad			
Variable	$\Delta C-PD$	$\Delta C-PI$	$\Delta PD-PI$
P-value (Shapiro-Wilks)	0,286	0,855	0,105
P-value (Lilliefors)	0,181	0,948	0,318
Asimetría	0,277	0,034	-0,519
Curtosis	2,783	2,743	3,471

**Tabla 2. Testeo de normalidad**

Los test, tanto de Shapiro-Wilks como el de Lilliefors (modificación del test de Kolmogorov-Smirnov, en el cual no se asume la media y varianza del conjunto como los de la población), suponen como hipótesis nula que el conjunto de datos pertenece a una muestra normalmente distribuida, por lo que un P-valor mayor a 0,05 indica que no puede rechazarse dicha hipótesis.

Por otro lado, se indica el valor del sesgo o asimetría. Valores positivos indican que la curva está desplazada hacia la izquierda (casos  $\Delta C-PD$  y  $\Delta C-PI$ ), mientras que valores negativos, indicarán un desplazamiento a la derecha ( $\Delta PD-PI$ ). Con respecto a la curtosis, es una medida de apuntamiento de la curva, cuanto mayor la curtosis, la curva tenderá a parecerse más a un pico.

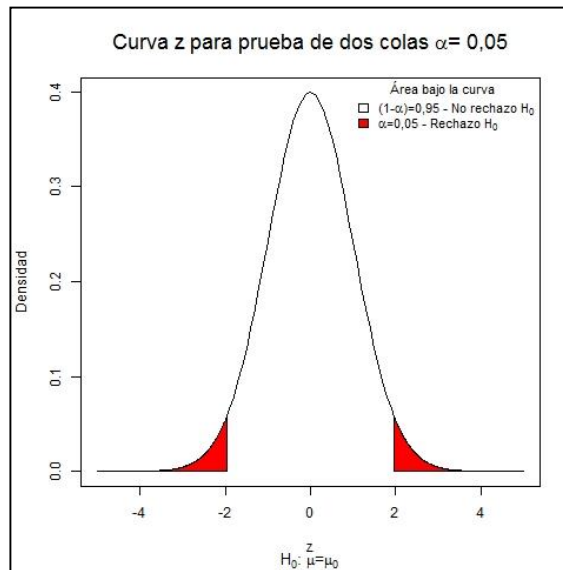
Finalmente, en función de los resultados, la distribución de los datos puede asumirse normal en los tres casos.

Se procede a detallar tres test de hipótesis (nula y alternativa) diferentes para cada conjunto. Se realizará el análisis con un 95% de confiabilidad.

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ

En primer lugar, se asume como hipótesis nula que la media de la población de la diferencia entre los datos es 0, es decir:

- Caso 1
  - $H_0 : \mu_{\Delta i} = 0$
  - $H_A : \mu_{\Delta i} \neq 0$



Gráfica 4. Gráfica normal y zona de rechazo para distintas hipótesis ( $\alpha/2 = 0,025$ ).

Si el módulo del estadístico ( $|z|$ ) obtenido en cada caso, es mayor que el módulo del estadístico límite ( $|z_{lím}|$ ), entonces se puede rechazar la hipótesis nula con un 95% de confianza, es decir 5% de probabilidad de error de tipo I (rechazar la hipótesis nula, cuando esta es verdadera).

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Ecuación 1. Estadístico de prueba del conjunto de datos.

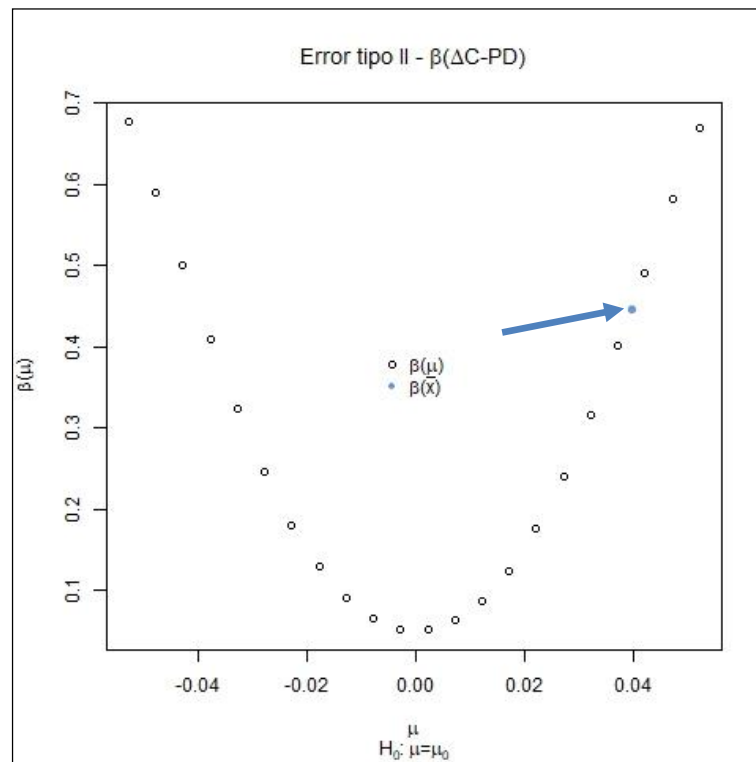
Los valores de z límite se encuentran en una tabla de áreas de la curva normal estándar para, en este caso, probabilidades de 0,025 y 0,975.

Se calculó además el valor de  $\beta$ , el cual representa el error de tipo II es decir, la probabilidad de error de que al no rechazar  $H_0$ , esta sea falsa, o su complementario ( $1-\beta$ ) el cual indica la potencia de la prueba si se rechaza  $H_0$ .

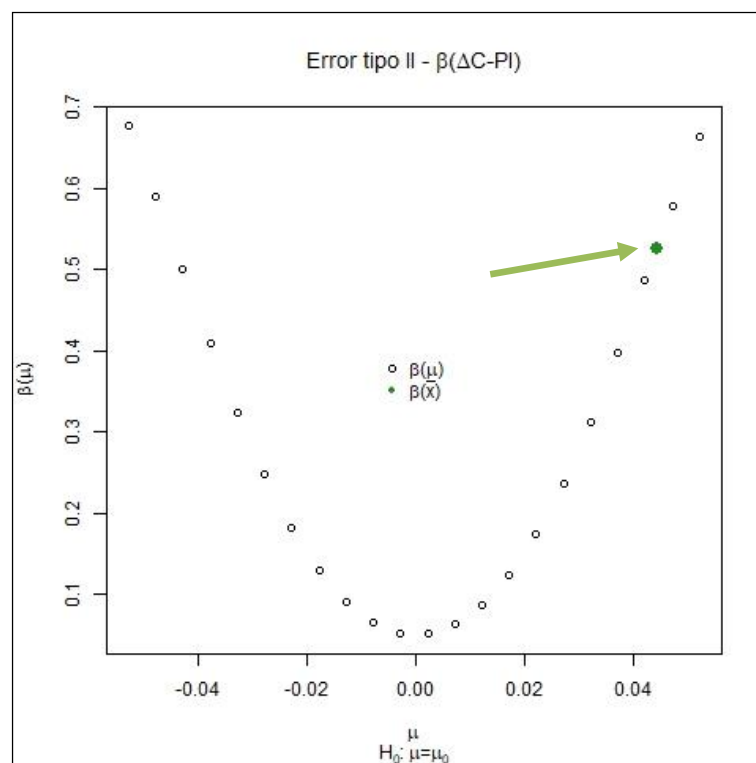
$H_0 : \mu=0$			
Variable	$\Delta C-PD$	$\Delta C-PI$	$\Delta PD-PI$
z	1,825	2,025	0,253
-Z $\alpha/2=0,025$	-1,96	-1,96	-1,96
Z $\alpha/2=0,025$	1,96	1,96	1,96
Error Tipo II - $\beta (\bar{x})$	0,446	0,526	0,057
Potencia de la prueba - $1- \beta (\bar{x})$	0,554	0,474	0,943
Resultado	No rechaza $H_0$	Rechaza $H_0$	No rechaza $H_0$

Tabla 3. Resultados para los distintos conjuntos del test de hipótesis nula de la media poblacional igual a 0 con 95% de confiabilidad.

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ

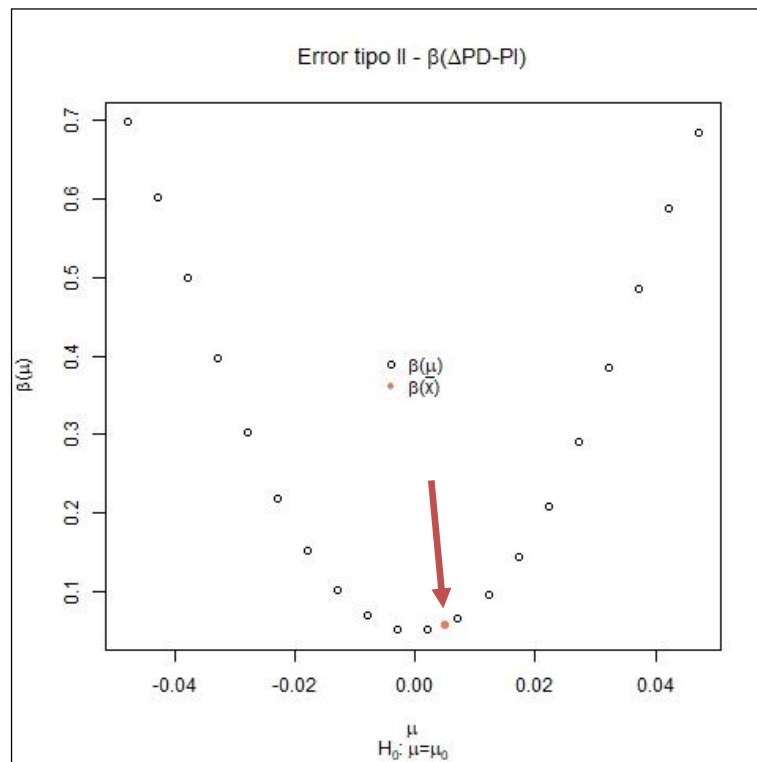


Gráfica 5. Error tipo II para el conjunto de datos C-PD, con hipótesis nula de la media igual a 0.



Gráfica 6. Error tipo II para el conjunto de datos C-PI, con hipótesis nula de la media igual a 0.

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ

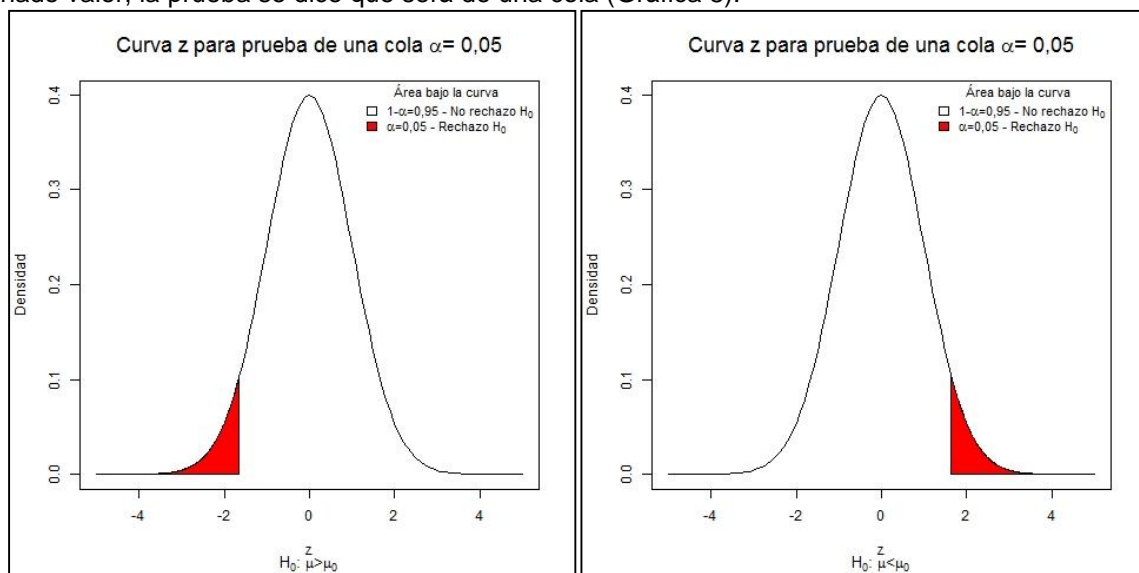


Gráfica 7. Error tipo II para el conjunto de datos PD-PI, con hipótesis nula de la media igual a 0.

Como se puede observar en la Tabla 3 y en la Gráfica 5, al no rechazar la hipótesis nula, hay un 44,6% de probabilidad de que la diferencia  $\Delta C$ -PD sea distinta de 0. Por otro lado, al observar la Gráfica 6 al rechazar  $H_0$ , la potencia de la prueba indica que de 100 muestreos de la población con similares características, aproximadamente 47 veces la media de la diferencia  $\Delta C$ -PI será distinta de 0.

En cuanto al conjunto  $\Delta PD$ -PI (Diferencia entre la TRT de ambos pliegues), al no rechazar la hipótesis nula, el error ( $\beta$ ) de esta decisión es de 6%.

Cuando la hipótesis nula indica que la media de la población puede ser mayor o igual (o menor o igual) a determinado valor, la prueba se dice que será de una cola (Gráfica 8):



Gráfica 8. Gráfica normal y zona de rechazo para prueba de una cola ( $\alpha = 0,05$ ).

- Caso 2
  - $H_0 : \mu_{\Delta i} \leq 0$
  - $H_A : \mu_{\Delta i} > 0$

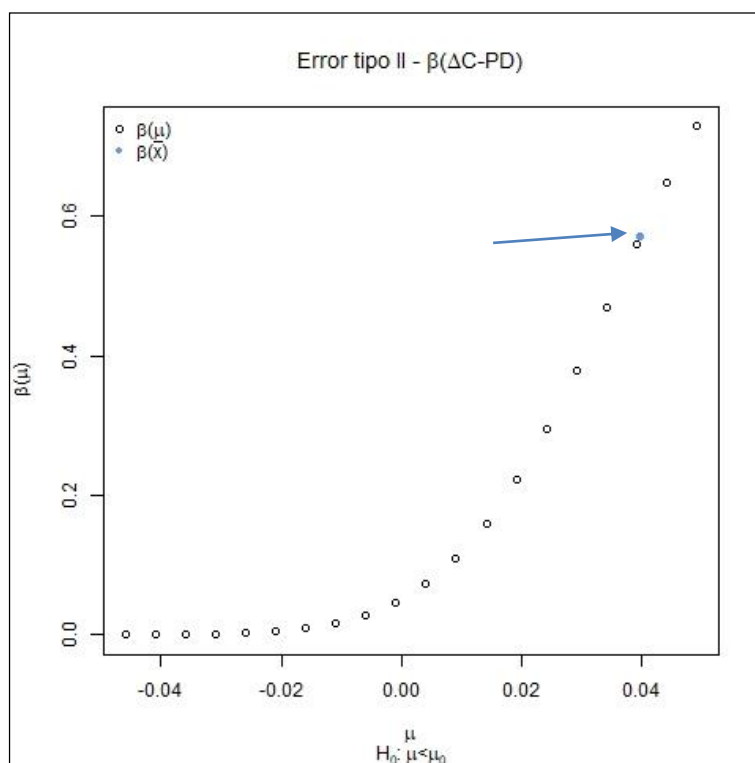
PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ

En este caso, para determinar el rechazo de la hipótesis nula, el valor del z estadístico deberá ser mayor al  $z_{lim}$ .

$H_0: \mu \leq 0$			
Variable	$\Delta C-PD$	$\Delta C-PI$	$\Delta PD-PI$
z	1,825	2,025	0,253
z $\alpha=0,05$	1,645	1,645	1,645
Error Tipo II - $\beta(\bar{x})$	0,571	0,648	0,082
Potencia de la prueba - $1-\beta(\bar{x})$	0,429	0,352	0,918
Resultado	Rechaza $H_0$	Rechaza $H_0$	No rechaza $H_0$

**Tabla 4. Resultados para los distintos conjuntos del test de hipótesis nula de la media menor o igual a 0.**

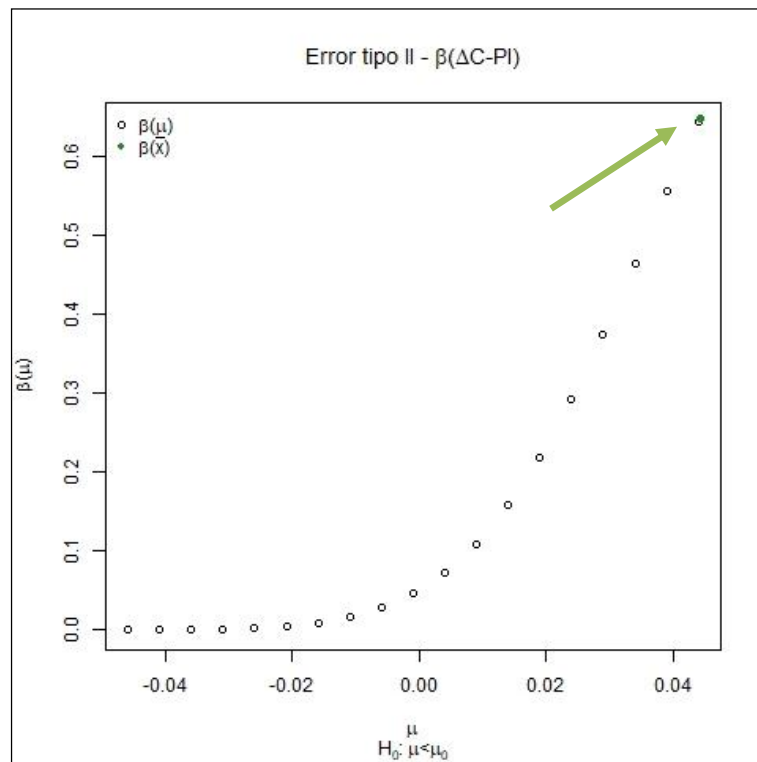
Se puede apreciar en la Tabla 4, que tanto el conjunto  $\Delta C-PD$  como el  $\Delta C-PI$  presenta evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula con un 95 % de confianza (la media de la TRT del cuerpo sería mayor que la de los pliegues). Sin embargo, ambos conjuntos presentan valores relativamente bajos de potencia de prueba ( $1-\beta$ ), es decir, las probabilidades de haber tomado la decisión correcta son bajas. Con respecto al conjunto  $\Delta PD-PI$  no hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula. Además, el error de tomar esta decisión es pequeño, de alrededor del 8 %. A continuación, se pueden apreciar gráficamente los valores de  $\beta$  para la media de los distintos conjuntos.



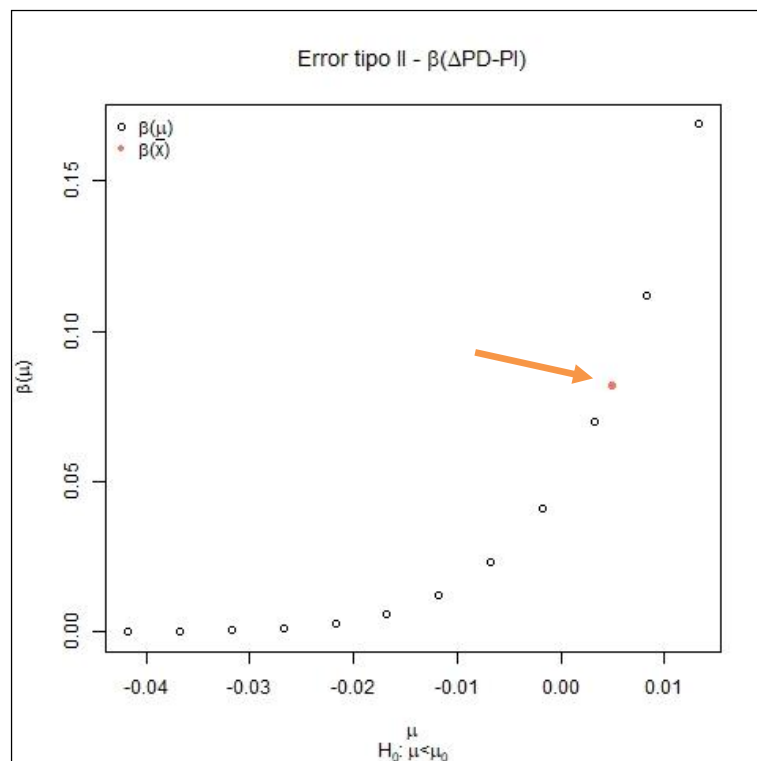
**Gráfica 9. Error tipo II para el conjunto de datos C-PD, con hipótesis nula de la media menor o igual a 0.**

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ





Gráfica 10. Error tipo II para el conjunto de datos C-PI, con hipótesis nula de la media menor o igual a 0.



Gráfica 11. Error tipo II para el conjunto de datos PD-PI, con hipótesis nula de la media menor o igual a 0.

- Caso 3
  - $H_0 : \mu_{\Delta i} \geq 0$
  - $H_A : \mu_{\Delta i} < 0$

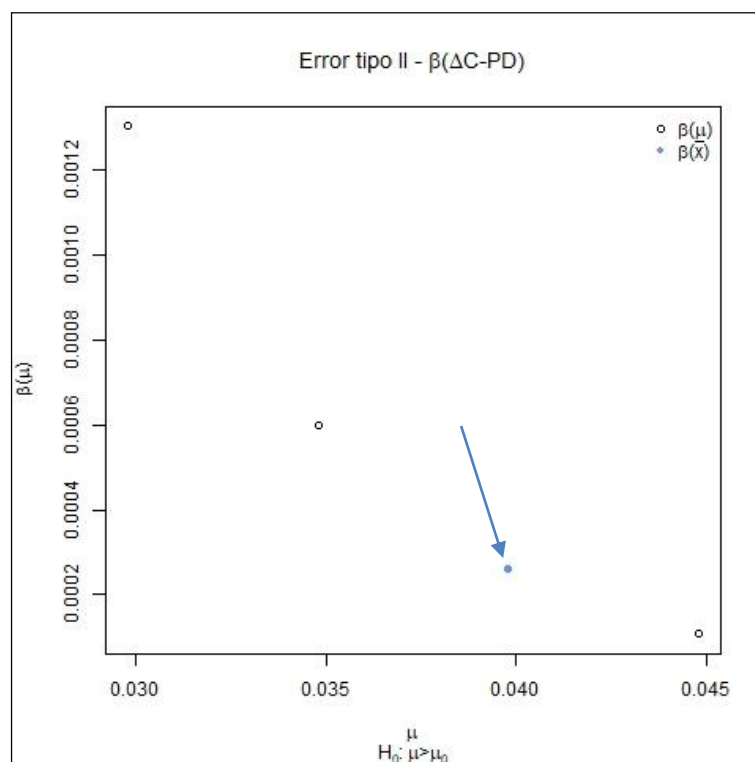
Para este caso, la hipótesis nula se rechazará si el z estadístico es menor que  $-z_{lim}$ .

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ

$H_0 : \mu \geq 0$			
Variable	$\Delta C-PD$	$\Delta C-PI$	$\Delta PD-PI$
z	1,825	2,025	0,253
-Z $\alpha=0,05$	-1,645	-1,645	-1,645
Error Tipo II - $\beta(\bar{x})$	0	0	0,029
Potencia de la prueba - $1-\beta(\bar{x})$	1	1	0,971
Resultado	No rechaza $H_0$	No rechaza $H_0$	No rechaza $H_0$

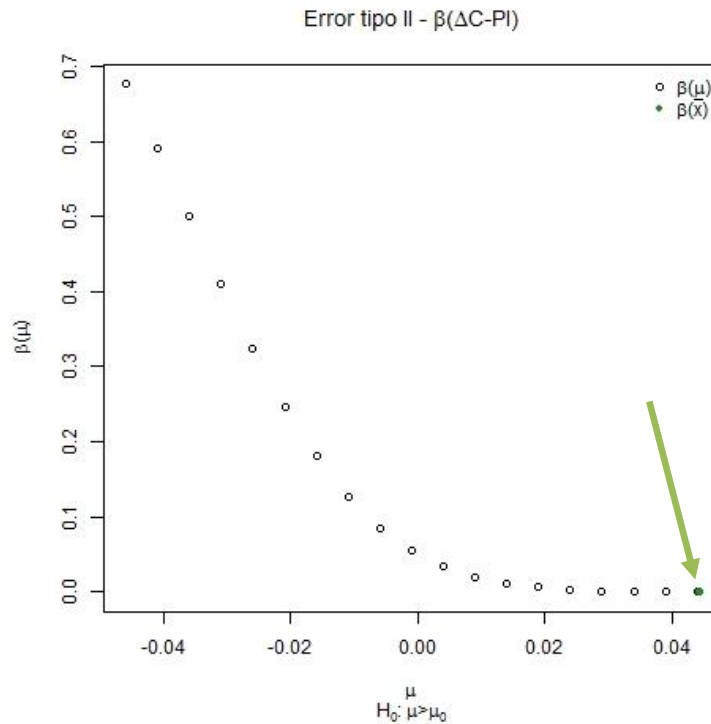
**Tabla 5. Resultados para los distintos conjuntos del test de hipótesis nula de la media mayor o igual a 0.**

Se observa en la Tabla 5 que en ningún caso hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula. Además, la potencia de la prueba es de 100% para los conjuntos  $\Delta C-PD$  y  $\Delta C-PI$ , y de 97% para  $\Delta PD-PI$ , por lo que se concluye que en caso de existir alguna diferencia será mayor la TRT en el cuerpo que en los pliegues. Se puede observar gráficamente a continuación.

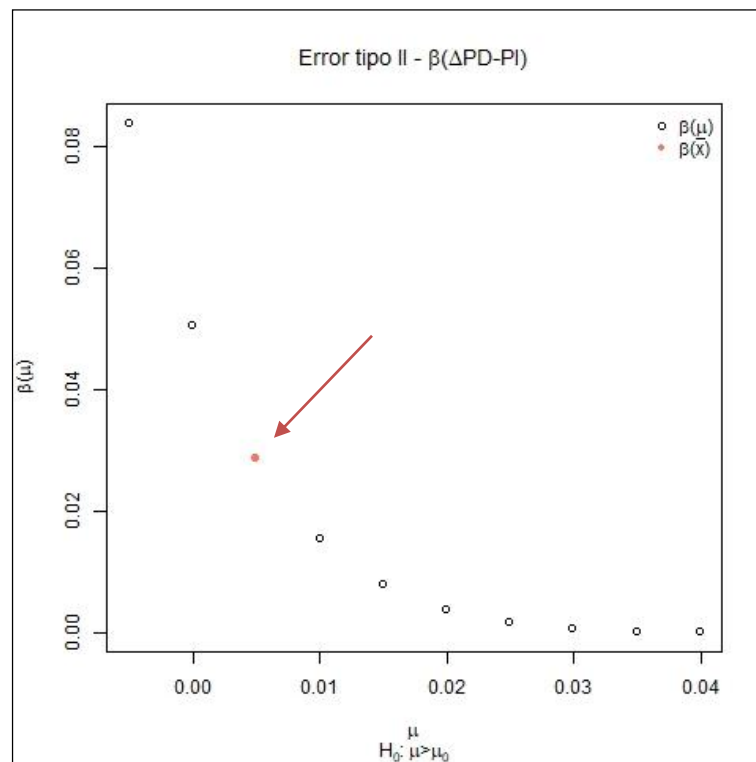


**Gráfica 12. Error tipo II para el conjunto de datos C-PD, con hipótesis nula de la media mayor o igual a 0.**

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ



Gráfica 13. Error tipo II para el conjunto de datos C-PI, con hipótesis nula de la media mayor o igual a 0.



Gráfica 14. Error tipo II para el conjunto de datos PD-PI, con hipótesis nula de la media mayor o igual a 0.

Resumiendo los resultados de la Tabla 3 a la Tabla 5, se concluye con un 95% de confianza que:

- Para el conjunto  $\Delta C$ -PD existe diferencia entre la TRT del cuerpo y el pliegue derecho, la misma es positiva, es decir, la TRT del cuerpo es mayor a la del pliegue.
- Para el conjunto  $\Delta C$ -PI existe diferencia entre la TRT del cuerpo y el pliegue izquierdo, la misma es positiva, es decir, la TRT del cuerpo es mayor a la del pliegue.
- Para el conjunto  $\Delta PD$ -PI, no existe diferencia estadísticamente significativa entre la TRT del pliegue derecho con la del pliegue izquierdo. Esta afirmación se basa en que, a pesar de que no existe

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ

evidencia suficiente para rechazar las hipótesis nulas de los test ensayados, la probabilidad de error de tipo II (mantener la  $H_0$  cuando esta es falsa) es siempre menor al 10%.

Finalmente se procede a calcular un intervalo unilateral de tolerancia que contenga, con un 99% de confianza, el 90% de la población, tal que tanto el cuerpo como el pliegue presenten una TRT mayor al mínimo establecido.

$$IT_{Unilateral} = \bar{X} + (\text{Valor crítico de tolerancia}) * s$$

**Ecuación 2. Intervalo de tolerancia con 99% de confiabilidad.**

95% de confianza			99% de confianza		
s*(Val. Crítico)	$\Delta C-PD$	$\Delta C-PI$	s*(Val. Crítico)	$\Delta C-PD$	$\Delta C-PI$
90% de la población	$\bar{x} + 0,324$	$\bar{x} + 0,325$	90% de la población	$\bar{x} + 0,349$	$\bar{x} + 0,35$
95% de la población	$\bar{x} + 0,409$	$\bar{x} + 0,41$	95% de la población	$\bar{x} + 0,438$	$\bar{x} + 0,439$
99% de la población	$\bar{x} + 0,569$	$\bar{x} + 0,571$	99% de la población	$\bar{x} + 0,606$	$\bar{x} + 0,608$

**Tabla 6. Intervalos de tolerancia para 95% (izquierda) y 99% (derecha) de confianza**

Se aplica la Ecuación 2, obteniendo el valor crítico de tolerancia de la tabla de valores críticos para una muestra de 90 datos e intervalo unilateral y siendo,  $\bar{x}_{\Delta C-PI} = 0,044$  (media menos favorable entre  $\Delta C-PD$  y  $\Delta C-PI$ ). Se obtuvo que hay un 99% de probabilidades de que el 90% de la población tenga una diferencia de la TRT entre el cuerpo y cualquiera de los pliegues de máximo 0,394. Teniendo en cuenta el mínimo establecido para la TRT, si la tracción en el cuerpo es mayor o igual al mínimo más 0,394, existe una muy baja probabilidad de que el valor promedio de TRT para los pliegues se encuentre fuera de estándar.

De acuerdo con los resultados obtenidos:

- Siendo que el promedio de la diferencia entre las TRT entre ambos pliegues resultó prácticamente nula, se propone realizar un solo ensayo para los pliegues, utilizando tres muestras del derecho y tres muestras del izquierdo (preferentemente en ese orden) con el fin de detectar anomalías.
- Con respecto a la diferencia entre la TRT entre el cuerpo y los pliegues, se encontró que existe una probabilidad muy baja de que el ensayo de pliegues se encuentre fuera de estándar si la TRT del cuerpo es mayor o igual al mínimo más 0,394. Si se diera el caso que la TRT del cuerpo sea menor a dicho valor, se propone dejar a criterio del analista la realización de mayor número de ensayos.

PREPARÓ:
MATÍAS GASPERINI DIEZ